AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université de Lorraine
UFR M.I.M.

École doctorale EMMA

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 février 2016

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

(**Spécialité : Mécanique des matériaux**)

par

Fessal KPEKY

Formulation et modélisation des vibrations par éléments finis de type solide–coque : application aux structures sandwichs viscoélastiques et piézoélectriques

Composition du jury

Olivier POLIT	Professeur à l'Université Paris Ouest, (LEME)	Rapporteur
Thomas ELGUEDJ	Maître de Conférences-HDR à l'INSA de Lyon, (LAMCOS)	Rapporteur
Tarak BEN ZINEB	Professeur à l'Université de Lorraine, Nancy, (LEMTA)	Examinateur
Jean-François DEÜ	Professeur au CNAM, Paris, (LMSSC)	Examinateur
Hakim BOUDAOUD	Maître de Conférences à l'Université de Lorraine, Nancy, (ERPI)	Examinateur
Alain RASSINEUX	Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, (ROBERVAL)	Examinateur
Farid ABED-MERAIM	Professeur à l'ENSAM, Arts et Métiers ParisTech Metz, (LEM3)	Directeur
El-Mostafa DAYA	Professeur à l'Université de Lorraine, Metz, (LEM3)	Co-directeur

Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux — UMR CNRS 7239
Pôle M4 : Matière, Matériaux, Métallurgie, Mécanique

LABORATOIRE D'ÉTUDE DES MICROSTRUCTURES ET DE MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration impliquant des membres de l'équipe MeNu (Mécanique Numérique) rattachés, respectivement, aux tutelles ENSAM et Université de Lorraine du Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3). Au terme de ce travail, je tiens à témoigner ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué à la réussite de cette thèse.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, les Professeurs Farid ABED-MERAIM et El-Mostafa DAYA, pour m'avoir confié ce travail de recherches, pour leurs aides multiples, leurs disponibilités, leurs conseils avisés ainsi que leur rigueur scientifique. Je ne les remercierai jamais assez.

Mes remerciements vont également aux Maîtres de conférences Hakim BOUDAOUD et Hocine CHALAL pour leurs multiples aides et conseils qui m'ont permis de traverser bien d'épreuves.

J'adresse ma profonde gratitude au Professeur Olivier POLIT et au Maître de conférences-HDR Thomas ELGUEDJ pour avoir accepté la lourde tâche d'évaluer ce travail de thèse. Je n'oublie pas les Professeurs Jean-François DEÜ, Alain RASSINEUX et Tarak BEN ZINEB pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury et d'examiner ainsi mon travail de thèse.

Je tiens à remercier les Professeurs Michel POTIER-FERRY et Sonnou TIEM pour leurs initiatives qui m'ont permis de poursuivre mes études et d'arriver aujourd'hui à ce niveau.

J'adresse mes remerciements à toute ma famille et à toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réussite de cette thèse. En particulier, un grand merci à mon oncle Tchagra OURO-AKPO sans qui je ne pourrais continuer mes études de troisième cycle.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tout le personnel du LEM3, notamment les secrétaires, informaticiens, collègues doctorants pour les services rendus et pour le cadre de travail. Je voudrais citer ici plus particulièrement Komla Gaboutou LOUGOU pour ses astuces qui m'ont sauvé plus d'une fois, Komlan AKOUSSAN, mon partenaire de galère.

Une fois encore, merci à tous !!!

Je dédie ce travail :

À ma Maman et mon Papa,

À ma femme et à mon fils,

Et à tous mes frères et sœurs.

Table des matières

Remerciements **1**

Dédicaces **3**

Table des matières **5**

Liste des tableaux **9**

Table des figures **11**

Introduction générale **15**

Chapitre 1 : Revue bibliographique et positionnement du sujet **19**

1.1. Introduction **21**

1.2. Généralités sur les matériaux amortissants **22**

1.2.1. Matériaux viscoélastiques 22

1.2.2. Matériaux piézoélectriques 25

1.3. Modélisation des vibrations de structures multicouches **27**

1.3.1. Amortissement passif des vibrations 27

1.3.2. Contrôle actif des vibrations 30

1.3.3. Contrôle hybride des vibrations 32

1.4. Modèles éléments finis de type coque volumique et solide–coque **34**

1.4.1. Modèles coques tridimensionnelles dégénérées 34

1.4.2. Modèles éléments finis de type solide–coque 35

1.4.3. Éléments finis solide–coques SHB 37

1.5. Méthodes de résolution des problèmes de vibrations **40**

1.5.1. Réponse fréquentielle 41

1.5.2. Analyse modale 43

1.6. Bilan et positionnement du sujet **48**

Chapitre 2 : Modélisation des vibrations de structures sandwichs à âme viscoélastique par éléments finis solide–coques **51**

2.1. Introduction 53

2.2. Formulation du problème et limitations des modélisations éléments finis existantes 53

2.3. Nouvelle discrétisation éléments finis du problème de vibrations 56

2.3.1. Cinématique et interpolation 56

2.3.2. Opérateurs gradients discrétisés 61

2.3.3. Contrôle des modes à énergie nulle et traitement des verrouillages 61

2.3.4. Matrices de stabilisation et repères co-rotationnels 64

2.4. Méthode de résolution du problème discrétisé 66

2.5. Résultats numériques et discussions 68

2.5.1. Tests de validation sur les poutres 69

2.5.2. Application du modèle poutre : modélisation d'un rail 75

2.5.3. Cas des plaques sandwichs 77

2.6. Conclusions 81

Chapitre 3 : Formulation d'éléments finis de type solide–coque piézoélectriques 83

3.1. Introduction 85

3.2. Équations constitutives et discrétisation des problèmes 86

3.2.1. Équations constitutives 86

3.2.2. Problèmes discrétisés 87

3.3. Formulation des éléments finis SHB8PSE et SHB20E 88

3.3.1. Cinématique et interpolation 88

3.3.2. Opérateurs gradients discrétisés 89

3.3.3. Contrôle des modes à énergie nulle et traitement des verrouillages 89

3.4. Validation et applications 91

3.4.1. Cas tests statiques 91

3.4.2. Problèmes aux valeurs propres 99

3.5. Conclusions 107

Chapitre 4 : Modélisation de l'amortissement actif–passif des structures multicouches 109

4.1. Introduction 111

4.2. Formulation et discrétisation du problème des vibrations active–passives . 112

4.3. Méthodes et lois de contrôle actif des vibrations 112

4.3.1. Contrôle de type « *Proportional Feedback* » et problème résultant 113

4.3.2. Quelques fonctions de transfert de filtres 114

4.4. Méthode de résolution numérique du problème résultant : approche DIAMANT 115

4.4.1. Analyse modale 115

4.4.2. Réponse fréquentielle 117

4.5. Tests numériques et application au contrôle de vibrations 119

4.5.1. Validation de l'outil numérique 119

4.5.2. Application à la réduction des amplitudes de vibrations d'une plaque ... 130

4.6. Conclusions 138

Conclusion générale et perspectives 139

Annexe A : Méthode asymptotique numérique et approche DIAMANT .. 143

A.1. Méthode asymptotique numérique 143

A.1.1. Technique de perturbation 144

A.1.2. Définition du paramètre de chemin 145

A.2. Boîte à outils DIAMANT 146

Annexe B : Contrôle des modes de *hourglass* et calcul de la matrice de stabilisation du SHB8PSE 149

B.1. Identification des modes de *hourglass* 149

B.2. Matrice de stabilisation du SHB8PSE 153

Annexe C : Transformation de tenseurs due à un changement de repère 157

Références bibliographiques 159

Résumé 173

Abstract 175

Liste des tableaux

Tableau 1.1 Modules opérationnels en domaine fréquentiel 23

Tableau 2.1 Paramètres géométriques et mécaniques de la poutre sandwich 55

Tableau 2.2 Influence du ratio E_c/E_f ($h_c/h_f = 1$, $L/h = 20$) 55

Tableau 2.3 Influence du ratio L/h ($h_c/h_f = 1$, $E_c/E_f = 10^{-5}$) 55

Tableau 2.4 Influence du ratio h_c/h_f ($L/h = 20$, $E_c/E_f = 10^{-5}$) 55

Tableau 2.5 Paramètres géométriques et matériaux de la poutre sandwich 69

Tableau 2.6 Paramètres d'amortissement associés aux cinq premiers modes de flexion 70

Tableau 2.7 Propriétés des poutres sandwichs pour l'étude paramétrique 71

Tableau 2.8 Paramètres viscoélastiques du modèle de Maxwell pour l'étude paramétrique .. 71

Tableau 2.9 Influence du ratio h_c/h_f ($L/h = 20$, $E_c/E_f = 2\times10^{-5}$) 72

Tableau 2.10 Influence du ratio L/h ($h_c/h_f = 1$, $E_c/E_f = 2\times10^{-5}$) 72

Tableau 2.11 Influence du ratio E_c/E_f ($h_c/h_f = 1$, $L/h = 20$) 73

Tableau 2.12 Fréquences propres et paramètres amortissants associés aux trois premiers modes de flexion par flambage du rail sur transverses sandwichs 76

Tableau 3.1 Formes explicites des vecteurs et matrices résultants du couplage électromécanique 87

Tableau 3.2 Flèche U_z pour les différents paramètres et éléments U_z^{ref} =0,345µm 93

Tableau 3.3 Propriétés des matériaux utilisés dans les modèles d'actionnement par extension et par cisaillement 94

Tableau 3.4 Cinq premières fréquences propres de la poutre sandwich en configuration d'actionnement par extension 101

Tableau 3.5 Cinq premières fréquences propres de la poutre sandwich en configuration d'actionnement par cisaillement 101

Tableau 3.6 Cinq premières fréquences propres de la plaque sandwich sur appuis simples (Court-circuit) 102

Tableau 3.7 Cinq premières fréquences propres de la plaque sandwich sur appuis simples (Circuit ouvert) 103

Tableau 3.8 Cinq premières fréquences propres de la lame sandwich incurvée en console (Court-circuit) 104

Tableau 3.9 Cinq premières fréquences propres de la lame sandwich incurvée en console (Circuit ouvert) 105

Tableau 3.10 Cinq premières fréquences propres de la coupole sandwich trouée (Court-circuit et Circuit ouvert) 107

Tableau 4.1 Propriétés mécaniques et piézoélectriques des matériaux 120

Tableau 4.2 Cinq premières fréquences propres du sandwich à 5 couches 122

Tableau 4.3 Propriétés mécaniques et piézoélectriques des matériaux 125

Tableau 4.4 Paramètres viscoélastiques de l'ISD112 à 27°C 125

Tableau 4.5 Paramètres viscoélastiques du DYAD606 à 30°C 125

Table des figures

Figure 1 Quelques systèmes d'amortissement par introduction de matériaux viscoélastiques 15

Figure 2 Systèmes d'amortissement passif (a) et actif (b) des vibrations au moyen des matériaux piézoélectriques 16

Figure 3 Structures montrant la jonction de zones épaisses (3D) et fines (2D) 17

Figure 1.1 Modèles rhéologiques de base 23

Figure 1.2 Mécanismes de déformation fondamentaux 26

Figure 1.3 Représentation schématique des classes de contrôle 27

Figure 1.4 Cinématiques de structures sandwichs 29

Figure 1.5 Modèles coques 3D d'Ahmad 35

Figure 1.6 Éléments solide–coques de type SHB 39

Figure 1.7 Calcul de l'amortissement par la méthode de la bande passante à -3dB 42

Figure 2.1 Poutre sandwich à faces élastiques et cœur élastique ou viscoélastique 54

Figure 2.2 Géométrie des éléments de référence SHB8PS et SHB20 avec n_{int}=5 57

Figure 2.3 Modes d'*hourglass* suivant la direction *Ox* pour au moins 2 points d'intégration 63

Figure 2.4 Paramètres d'amortissement des trois premiers modes de flexion pour la variation du rapport d'épaisseurs h_c/h_f 73

Figure 2.5 Paramètres d'amortissement des trois premiers modes de flexion pour la variation du rapport d'élancement L/h 74

Figure 2.6 Paramètres d'amortissement des trois premiers modes de flexion pour la variation du rapport de rigidité E_c/E_f 74

Figure 2.7 Rail sur traverses constituées de poutres courtes à cœur viscoélastique 76

Figure 2.8 Trois premiers modes de flexion par flambage du rail sur traverses sandwichs ... 76

Figure 2.9 Plaque sandwich rectangulaire à cœur viscoélastique et faces élastiques encastrée sur tous ses bords 78

Figure 2.10 Paramètres amortissants : épaisseur totale h fixe, épaisseur du cœur $h_c \in [0, h]$ 78

Figure 2.11 Paramètres amortissants : rapport d'épaisseurs $r=h_c/h$ fixe, épaisseur totale $h \in [0, a/10]$ 79

Figure 2.12 Paramètres amortissants : position du cœur variant du centre à la face. 80

Figure 3.1 Géométrie de référence des éléments finis SHB8PSE et SHB20E et positionnement des points d'intégration (n_{int}=5) 88

Figure 3.2 Poutre bilame en console 92

Figure 3.3 Poutres actionnées par extension (a) et par cisaillement (b) 93

Figure 3.4 Déformée de la ligne moyenne de la poutre pour les mécanismes de déformation par extension (a) et par cisaillement (b) 95

Figure 3.5 Flèche à l'extrémité libre pour les différentes positions de l'actionneur pour les mécanismes de déformation par extension (a) et par cisaillement (b) 95

Figure 3.6 Plaque carrée avec patchs piézoélectriques 96

Figure 3.7 Flèche de la ligne médiane de la plaque avec différentes tensions 97

Figure 3.8 Coque sandwich en console 98

Figure 3.9 Flèches suivant les lignes (A), (B) et (C) des coques sandwichs de courbure R/b 99

Figure 3.10 Poutres sandwichs en console avec les mécanismes de déformation par extension (a) et cisaillement (b) 100

Figure 3.11 Plaque sandwich rectangulaire sur appuis simples 102

Figure 3.12 Lame sandwich incurvée en console 104

Figure 3.13 Coupole sandwich trouée 106

Figure 3.14 Cinq premiers modes de vibration de la coupole sandwich trouée 106

Figure 4.1 Structure avec un système d'amortissement actif–passif par matériau viscoélastique et filtre 113

Figure 4.2 Plaque sandwich à 5 couches à cœur viscoélastique et faces piézoélectriques en console 120

Figure 4.3 Cinq premiers modes de vibration de la poutre en console 121

Figure 4.4 Paramètres amortissants en fonction du gain de contrôle en déplacement g_d (g_v=0) 123

Figure 4.5 Paramètres amortissants en fonction du gain de contrôle en vitesse g_v (g_d =0)... 123

Figure 4.6 Plaque sandwich à 5 couches sur appuis simples 126

Figure 4.7 Chargement de la plaque pour différents modes excités..... 126

Figure 4.8 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (ISD112 27°C) – Mode 1..... 127

Figure 4.9 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (ISD112 27°C) – Mode 2..... 127

Figure 4.10 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (ISD112 27°C) – Mode 3..... 128

Figure 4.11 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (DYAD606 30°C) – Mode 1..... 128

Figure 4.12 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (DYAD606 30°C) – Mode 2..... 129

Figure 4.13 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (DYAD606 30°C) – Mode 3..... 129

Figure 4.14 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Gauss – Mode 1..... 131

Figure 4.15 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Gauss – Mode 2..... 132

Figure 4.16 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Gauss – Mode 3..... 132

Figure 4.17 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Gauss – Mode 1..... 133

Figure 4.18 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Gauss – Mode 2..... 133

Figure 4.19 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Gauss – Mode 3..... 134

Figure 4.20 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Tchebychev – Mode 1 135

Figure 4.21 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Tchebychev – Mode 2 135

Figure 4.22 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Tchebychev – Mode 3 136

Figure 4.23 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Tchebychev – Mode 1 136

Figure 4.24 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Tchebychev – Mode 2 137

Figure 4.25 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Tchebychev – Mode 3..... 137

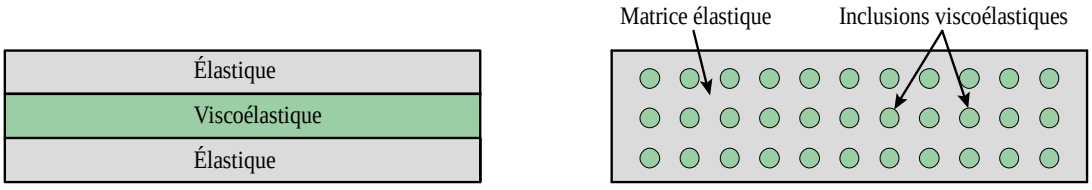
Figure A.1 Schéma descriptif de la MAN..... 143

Figure B.1 Modes d'*hourglass* dans la direction *x* du SHB8PS pour 1 point d'intégration . 152

Figure C.1 Passage du repère local au global..... 157

Introduction générale

Les problèmes de vibrations sont rencontrés dans de nombreux domaines d'ingénierie, qui vont de l'électroménager à l'aérospatiale en passant par les secteurs de la mécanique et du génie civil. Dans de nombreux cas, ces vibrations sont nuisibles car elles produisent des effets indésirables qui se présentent sous forme d'inconfort des usagers, de bruit, etc. Les vibrations peuvent également entraîner un dysfonctionnement d'ouvrages et même aboutir à leur ruine. Pour éviter ces effets néfastes, une solution passive, bien établie depuis plus de 50 ans, consiste en l'utilisation de structures incorporant des matériaux viscoélastiques dont les propriétés dissipatives ne sont plus à démontrer. Ces matériaux viscoélastiques sont introduits sous diverses formes dans le but d'augmenter leurs effets amortissants. On y rencontre ainsi des structures sandwichs ou hétérogènes dans lesquelles le matériau viscoélastique est introduit, respectivement, sous forme de couche complète entre deux ou plusieurs couches élastiques ou d'inclusions noyées dans une matrice élastique (voir figure 1).

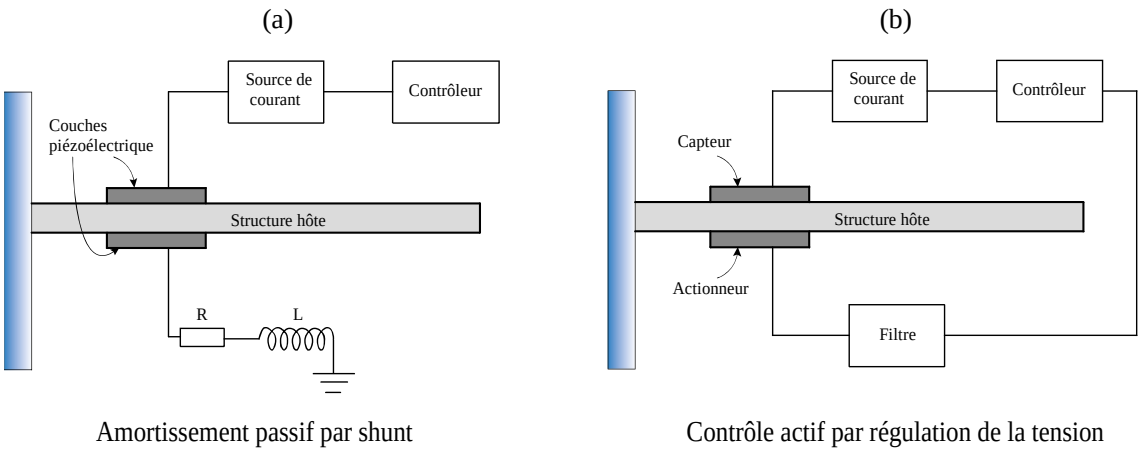


Structure sandwich viscoélastique — Structure hétérogène viscoélastique

Figure 1 Quelques systèmes d'amortissement par introduction de matériaux viscoélastiques

Cette méthode d'amortissement présente des limites du point de vue du taux de matériaux viscoélastiques pouvant être introduits dans le matériau hôte. En effet, avec l'allègement des structures qui sont de plus en plus sollicitées, la résistance mécanique devient un enjeu majeur à prendre en compte. Il devient nécessaire d'envisager d'autres méthodes d'amortissement pour la mise en œuvre des matériaux dans ces conditions extrêmes. Les matériaux piézoélectriques, de par leurs propriétés à se déformer sous impulsions électriques et inversement, offrent une alternative dans ce sens. Ces matériaux offrent des possibilités d'amortissement passif et/ou

actif. Le premier consiste à appliquer des patchs piézoélectriques sur la structure et à les relier à une masse (voir figure 2-a). Il s'agit d'amortissement passif par shunt. La seconde technique d'amortissement consiste à appliquer sur la structure à amortir des patchs ; les uns servant de capteurs pour récupérer l'énergie lors de la déformation, qui est transformée et réintroduite au moyen d'actionneurs, en vue de maîtriser l'amplitude des vibrations (voir figure 2-b).



Amortissement passif par shunt — Contrôle actif par régulation de la tension

Figure 2 Systèmes d'amortissement passif (a) et actif (b) des vibrations au moyen des matériaux piézoélectriques

Pour maîtriser les caractéristiques de ces types de matériaux et structures, des études expérimentales, le plus souvent destructives, sont menées. Afin de réduire ce coût et, par conséquent, le coût global de production, ces essais sont de nos jours remplacés en majorité par des simulations numériques. Ainsi, plusieurs chercheurs se sont attelés à proposer des modèles décrivant les différents comportements de ces matériaux lors de leurs mise en œuvre. D'autres, s'inspirant des travaux de ceux-ci, ont pu modéliser en échelle réduite des structures réalistes. De nos jours, le développement des outils numériques a rendu plus ou moins aisée cette procédure. En effet, ces matériaux sont utilisés sur des structures qui peuvent aller de simples formes géométriques (poutres, plaques, coques) à des formes géométriques complexes (véhicules, bâtiments, etc.). Parfois même, on rencontre une coexistence de zones épaisses, nécessitant une cinématique tridimensionnelle, et de zones minces, dont de simples hypothèses bidimensionnelles suffisent à bien les modéliser (voir figure 3). Dans ces configurations, on se confronte parfois à des difficultés dues à l'utilisation d'hypothèses complexes de connexion d'éléments 2D-3D. Pour se soustraire de ces techniques, on procède souvent à un maillage plus

fin des zones de transition ; ce qui se révèle coûteux en temps de calcul. Ainsi, des éléments qui soient effectifs aussi bien pour des structures minces que pour des applications générales tridimensionnelles simplifieraient considérablement la modélisation de telles structures. En effet, ils éviteraient à la fois la définition arbitraire de zones de séparation entre parties épaisses et composantes structurales minces, ainsi que les difficultés relatives à la connexion de différents types d'éléments.

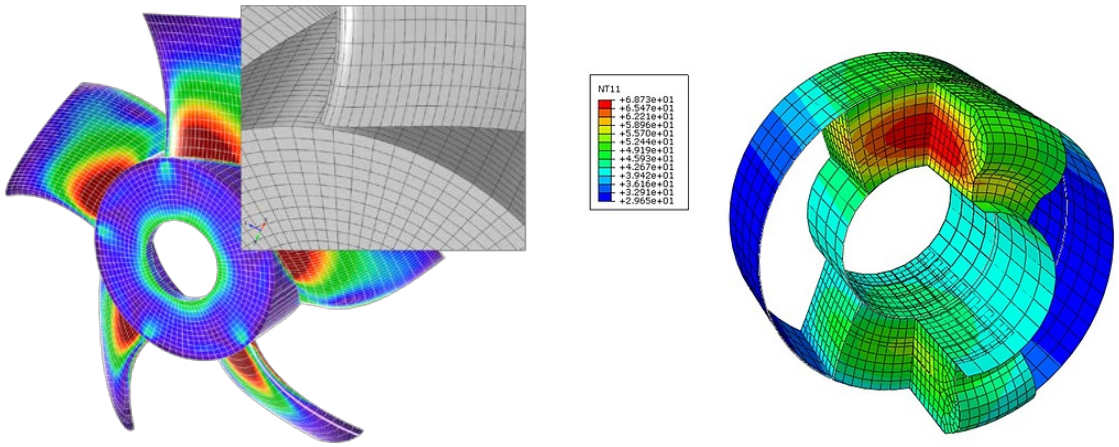


Figure 3 Structures montrant la jonction de zones épaisses (3D) et fines (2D)

Dans le but d'apporter une contribution dans ce sens, des éléments coques volumiques sont développés. Il s'agit d'éléments ayant le plus souvent une géométrie tridimensionnelle mais autorisant néanmoins des élancements importants. Ce type d'éléments présente beaucoup d'avantages. Ils permettent de modéliser aussi bien des structures minces qu'épaisses. Ils permettent de modéliser aussi bien des structures minces qu'épaisses. Le gain de temps devient non négligeable par rapport au coût que nécessite l'utilisation d'éléments volumiques classiques. Cela a conduit plusieurs chercheurs à s'intéresser à cette nouvelle formulation.

Motivations et objectifs de cette thèse

Cette thèse s'inscrit dans la suite du développement des éléments solide–coques de type SHB. Cependant, les applications seront orientées vers la modélisation et maîtrise des vibrations des structures multicouches. Ces structures font le plus souvent intervenir des

matériaux viscoélastiques et piézoélectriques. Pour atteindre cet objectif, cette thèse sera organisée comme suit.

Dans le premier chapitre, nous explorons la littérature afin de cibler les apports nécessaires dans ce sens. Nous débuterons par l'état de l'art sur la modélisation des vibrations de structures multicouches ainsi que quelques différents modèles proposés pour la formulation d'éléments finis solide–coques.

Le second chapitre est dédié à la modélisation des vibrations de poutres sandwichs à âme viscoélastique en adoptant des éléments finis de type solide–coque. Mais, au préalable, un rappel est fait sur les éléments finis utilisés ainsi que sur la méthode de résolution poursuivie pour la résolution des problèmes abordés.

Au troisième chapitre, l'étude précédente est étendue au travers de la formulation d'éléments finis de type solide–coque dédiés à la modélisation de structures multicouches comportant des matériaux piézoélectriques. Des validations sont faites aussi bien en statique qu'en vibration.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la modélisation de l'amortissement actif–passif ou hybride. En effet, un outil numérique est également proposé pour résoudre le problème découlant de la combinaison des matériaux viscoélastiques et piézoélectriques. Des applications sont présentées pour montrer l'intérêt de l'approche ainsi proposée.

Chapitre 1 : Revue bibliographique et positionnement du sujet

Sommaire - Chapitre 1

1.1. Introduction 21

1.2. Généralités sur les matériaux amortissants 22

1.2.1. Matériaux viscoélastiques 22

1.2.2. Matériaux piézoélectriques 25

1.3. Modélisation des vibrations de structures multicouches 27

1.3.1. Amortissement passif des vibrations 27

1.3.2. Contrôle actif des vibrations 30

1.3.3. Contrôle hybride des vibrations 32

1.4. Modèles éléments finis de type coque volumique et solide–coque 34

1.4.1. Modèles coques tridimensionnelles dégénérées 34

1.4.2. Modèles éléments finis de type solide–coque 35

1.4.3. Éléments finis solide–coques SHB 37

1.5. Méthodes de résolution des problèmes de vibrations 40

1.5.1. Réponse fréquentielle 41

1.5.2. Analyse modale 43

1.6. Bilan et positionnement du sujet 48

1.1. Introduction

La maîtrise des vibrations est un facteur important pour la mise en œuvre des matériaux dans certaines conditions de sollicitations. En effet, certaines vibrations peuvent être nuisibles à la tenue en service et au bon fonctionnement ou même causer la ruine de structures. Il est donc impératif d'approfondir la compréhension de ces phénomènes ainsi que du comportement des matériaux afin de faire les choix les plus adéquats. L'un des moyens d'amortir ou de contrôler passivement les vibrations, est l'incorporation sous diverses formes de matériaux viscoélastiques dans les structures. En effet, cette technique permet de contrôler surtout les hautes fréquences. Il faut cependant noter que, malgré le comportement intéressant des matériaux viscoélastiques, leurs pouvoirs amortissants restent limités surtout pour le contrôle des basses fréquences. Un autre moyen serait l'utilisation des matériaux piézoélectriques. En effet, ces derniers, du fait de leurs capacités à générer du potentiel électrique sous chargement mécanique et vice versa, permettent d'augmenter l'amortissement. On procède ainsi par contrôle actif en appliquant aux patchs ou couches piézoélectriques des impulsions électriques maîtrisées. Pour comprendre tous ces phénomènes, la modélisation numérique se révèle être le moyen le plus efficace et le moins onéreux. On rencontre ainsi dans la littérature des modèles éléments finis de toutes sortes, basés sur des hypothèses très diverses. Certains modèles sont limités par le nombre de degrés de liberté générés, d'autres soit par la forme géométrique ou la configuration matérielle. C'est notamment l'exemple de structures épaisses comportant des parties très minces, telles que les couches viscoélastiques ou les patchs piézoélectriques.

Dans ce chapitre, nous ferons au prime abord un état de l'art des modèles multicouches proposés. Ensuite, suivront les modèles éléments finis de type coque. Ceci nous permettra enfin de faire ressortir les points sur lesquels cette thèse sera axée. Mais bien avant tout, un petit rappel du comportement des matériaux viscoélastiques et piézoélectriques utilisés dans les structures modélisées sera présenté. Cette section permettra ainsi de faire le bilan, mettre l'étude dans son contexte et de faire émerger la pertinence de ce travail.

1.2. Généralités sur les matériaux amortissants

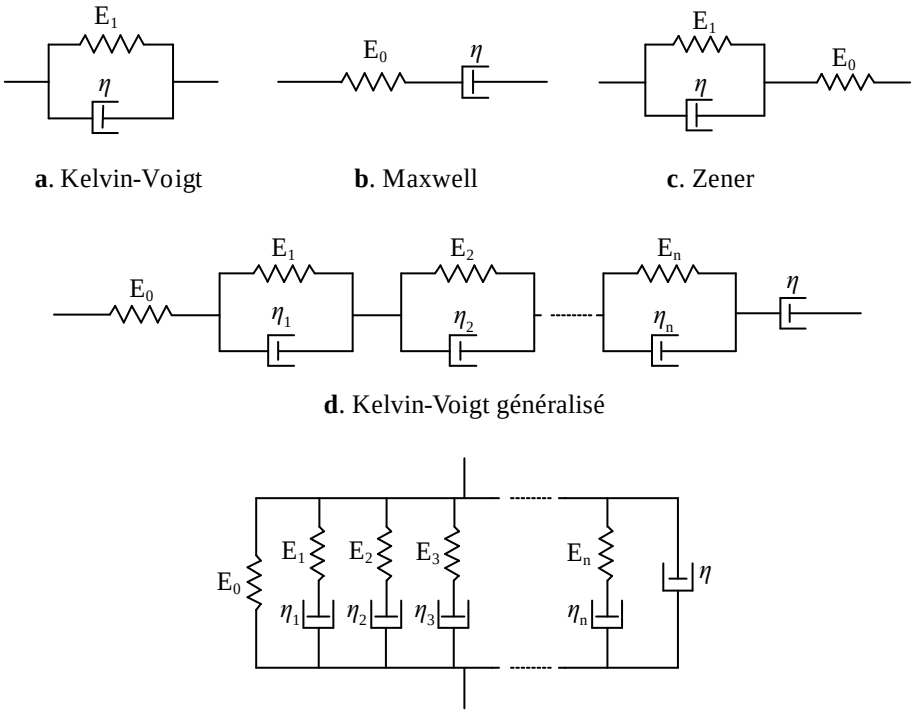
Les matériaux amortissants dont on fait état dans cette thèse sont les matériaux viscoélastiques et les matériaux piézoélectriques.

1.2.1. Matériaux viscoélastiques

La viscoélasticité est définie comme un comportement intermédiaire entre un solide idéal dit « *hookéen* » et un fluide parfait dit « *newtonien* ». Ce comportement peut être défini par des modèles allant des plus simples aux plus complexes.

1.2.1.1. Modèles rhéologiques classiques

Comme traditionnellement définie, la viscoélasticité peut être représentée par une combinaison discrète de ressorts et d'amortisseurs. Le ressort constitue la partie élastique dont la contrainte est proportionnelle à la déformation et définie par la loi de Hooke : $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$, où E désigne le module d'Young. L'amortisseur représentant la partie visqueuse est décrit par une contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation : $\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t)$ (loi de Newton), où η représente le paramètre de viscosité. Deux grandes familles de modèles rhéologiques sont généralement définies : les modèles standards linéaires et les modèles fractionnaires. Nous nous intéresserons dans cette partie à la première famille. Quelques-uns de ces modèles sont schématisés sur la figure 1.1 et les modules complexes équivalents sont reportés dans le tableau 1.1.



a. Kelvin-Voigt **b**. Maxwell **c**. Zener

d. Kelvin-Voigt généralisé

e. Maxwell généralisé

Figure 1.1 Modèles rhéologiques de base

Tableau 1.1 Modules opérationnels en domaine fréquentiel

Modèles rhéologiques	**Module complexe**
Kelvin–Voigt	$E+i\omega\eta$
Maxwell	$\frac{i\eta\omega E_0}{E_0+i\omega\eta}$
Zener	$\frac{E_0(E_1+i\omega\eta)}{E_0+E_1+i\omega\eta}$
Kelvin–Voigt généralisé	$\left[\frac{E_0+i\omega\eta}{i\omega\eta E_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{E_j+i\eta_j\omega}\right]^{-1}$
Maxwell généralisé	$E_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{i\eta_j\omega E_j}{E_j+i\eta_j\omega}$

Rappelons également que le coefficient de Poisson est en réalité aussi fonction de la fréquence, mais il est supposé généralement constant [1] du fait que sa mesure pose des difficultés expérimentales.

Aussi, les modèles présentés ci-haut sont assez sommaires et ne permettent pas de caractériser la viscoélasticité d'un matériau. Des modèles complexes ont donc été développés en ce sens.

1.2.1.2. Modèles rhéologiques complexes

Ces modèles décrivent de façon plus réaliste le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques. En effet, plusieurs paramètres sont généralement nécessaires pour représenter au mieux ces matériaux. Parmi ces modèles, on distingue :

- le modèle ADF (*Anelastic Displacement Field*) qui est une extension en 3D du modèle ATF (*Augmented Thermodynamic Field*) basé sur les principes de la thermodynamique [2, 3].

$$E(\omega) = E_0\left(1+\sum_{j=1}^{N}\Delta_j\frac{\omega^2+i\omega\Omega_j}{\omega^2+{\Omega_j}^2}\right) \tag{1.1}$$

- le modèle GHM, du nom de ses auteurs Golla, Hughes et McTavish, qui propose de modéliser le matériau viscoélastique sous forme de mini-oscillateurs [4, 5].

$$E(\omega) = E_0\left(1+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\frac{\omega^2+2\beta_j\gamma_j\omega}{\omega^2+2\beta_j\gamma_j\omega+{\gamma_j}^2}\right) \tag{1.2}$$

Dans l'un ou l'autre modèle, E_0 désigne le module de Young de l'état statique ou retardé et ω la fréquence. Tous les autres paramètres sont afférents au modèle utilisé. Ces deux modèles sont parmi les plus utilisés en modélisation viscoélastique.

1.2.1.3. Amortissement viscoélastique

L'amortissement obtenu par les matériaux viscoélastiques provient du cisaillement induit dans la couche qui en contient. En effet, une partie de l'énergie produite lors de la déformation est stockée et l'autre dissipée. Ainsi, en décomposant le module complexe sous la forme :

$$E(\omega) = E^R(\omega) + iE^I(\omega) \tag{1.3}$$

où $E^R(\omega)$ et $E^I(\omega)$ représentent, respectivement, la partie réelle (module de stockage) et imaginaire (module de dissipation), on peut définir le facteur de perte par :

$$\eta(\omega) = \frac{E^I(\omega)}{E^R(\omega)} \tag{1.4}$$

Rappelons également que le comportement d'un matériau viscoélastique dépend aussi de la température [6].

1.2.2. Matériaux piézoélectriques

Les matériaux piézoélectriques sont des matériaux capables de générer de l'électricité lorsqu'on leur applique une charge mécanique (capteurs). Inversement, ils ont la capacité de se déformer quand ils sont soumis à une charge électrique (actionneurs). Ces propriétés leurs offrent le privilège d'être utilisés pour le contrôle des vibrations. Les plus connus et répandus sont les piézocéramiques (PZT), le PVDF (Polyfluorure de Vinylidène) et le quartz.

1.2.2.1. Couplage piézoélectrique

Comme décrit ci-haut, le couplage mécano-électrique peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{E} \end{cases} \tag{1.5}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ désignent, respectivement, le tenseur de contrainte et de déformation. $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ représentent le déplacement et le champ électrique. $\mathbf{C}$, $\mathbf{e}$ et $\boldsymbol{\kappa}$ sont, respectivement, la matrice d'élasticité, la matrice piézoélectrique et la permittivité diélectrique. Les composantes de la matrice d'élasticité sont mesurées à champ électrique constant, tandis que les coefficients de la matrice de permittivité sont mesurés à déformations constantes.

1.2.2.2. Mécanismes d'actionnement

Les matériaux piézoélectriques, selon le sens de polarisation, peuvent être actionnés soit en cisaillement ou en extension, comme montré sur la figure 1.2. En effet, lorsque le champ électrique appliqué est perpendiculaire au sens de polarisation, il se produit un cisaillement dans les couches piézoélectriques. De même, lorsque la sollicitation électrique et le sens de polarisation sont dans la même direction, il se produit une déformation par extension des couches piézoélectriques. Généralement, le mécanisme d'extension produit une déformation plus importante que celle induite par le cisaillement [7].

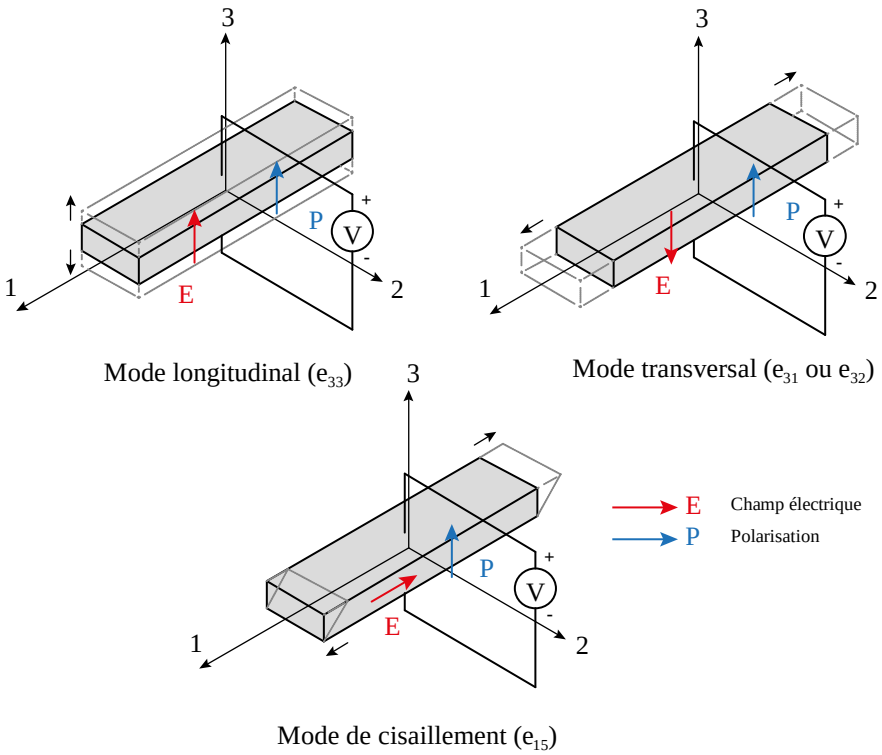
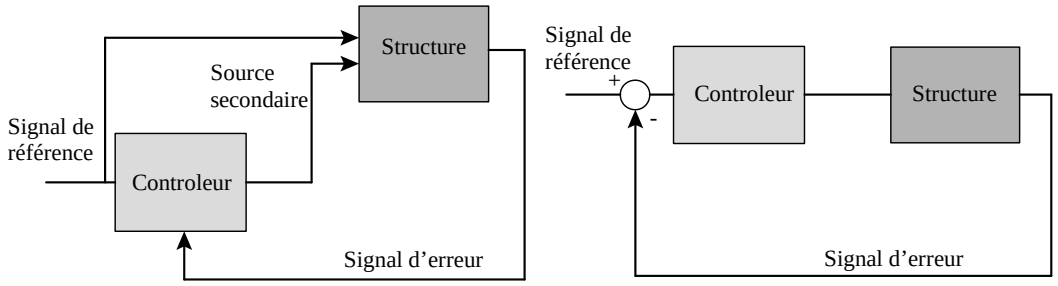


Figure 1.2 Mécanismes de déformation fondamentaux

1.2.2.3. Notion de contrôle

Selon le type de contrôle désiré, des patchs ou couches piézoélectriques sont apposés aux structures. Une partie des patchs est utilisée comme des capteurs afin de récupérer et d'évaluer la charge adéquate pour le contrôle escompté. La charge nécessaire est donc retournée à la structure par l'intermédiaire des autres patchs qui servent d'actionneurs. Cela permet soit le contrôle par anticipation, dit « *feedforward control* », ou par rétroaction, dit « *feedback control* », comme schématisé sur la figure 1.3.



a. Contrôle par anticipation b. Contrôle par rétroaction

Figure 1.3 Représentation schématique des classes de contrôle

Plusieurs algorithmes ont été proposés dans la littérature pour optimiser le contrôle des vibrations. Quelques-uns seront présentés dans les paragraphes à venir.

1.3. Modélisation des vibrations de structures multicouches

Deux moyens principaux sont utilisés pour l'amortissement des vibrations :

- l'amortissement passif, par combinaison de couches élastiques et viscoélastiques, qui est d'origine visqueuse.
- l'amortissement actif, par combinaison de couches élastiques et piézoélectriques et application d'une loi de contrôle électrique.

On peut ajouter l'amortissement hybride, qui est la combinaison des deux types de contrôle mentionnés ci-dessus.

1.3.1. Amortissement passif des vibrations

L'amortissement passif des vibrations provient des propriétés dissipatives des matériaux viscoélastiques. Ces propriétés dépendent généralement de la fréquence, de l'amplitude, du type d'excitation et également de la température. Il s'avère donc nécessaire de maîtriser tous ces paramètres pour mieux modéliser le comportement des structures comportant des couches viscoélastiques. Ce besoin a motivé plusieurs auteurs dans leurs recherches à proposer des approches pouvant décrire plus ou moins correctement la réalité physique.

La première étude sur les propriétés vibratoires des poutres sandwichs à cœur viscoélastique a été présentée vers les années 50 par Kerwin [8]. Il a considéré des poutres sandwichs simplement appuyées dont les peaux élastiques étaient plus rigides que le cœur. DiTaranto [9], en étendant les travaux de Kerwin, s'est intéressé à la description du mouvement des poutres sandwichs en vibration libre soumises à des conditions aux limites arbitraires. En se basant sur les travaux ci-haut, Mead et Markus [10] ont proposé un modèle pour étudier les vibrations forcées avec plusieurs conditions aux limites. Récemment, Hu et al. [11], ainsi que d'autres auteurs [12], ont effectué une revue bibliographique des outils existants dans la littérature pour la modélisation des structures multicouches. Il en ressort que la difficulté principale dans ce type de modélisation porte sur la description adéquate de la cinématique. En effet, les contributions récentes sont basées sur les théories classiques des stratifiés développés par Kirchhoff–Love. Avec cette approche, la déformation due au cisaillement est négligée par rapport aux autres contributions. Quelques années plus tard, la prise en compte des effets de cisaillement transversal (Reissner [13] ; Mindlin [14] ; etc.) a permis d'établir une théorie dite de premier ordre. Ces théories ont vite montré leurs limites, puisque la déformation due au cisaillement doit varier au moins de façon quadratique de manière à satisfaire une contrainte nulle aux surfaces externes des peaux. C'est ce qui a amené Gay [15] à introduire la notion de coefficient de correction, qui se révèle difficile à estimer pour les stratifiés. C'est pour éviter cette difficulté que les théories dites d'ordres élevés ont été introduites par plusieurs auteurs, dont Reddy [16] et Touratier [17, 18], qui représentent des contributions majeures. Reddy [16] a proposé un modèle basé sur une description cubique du champ de déplacement dans l'épaisseur, tandis que Touratier [17] a proposé, quant à lui, une description sinusoïdale de ce même champ. Ceux-ci ont l'avantage de permettre une description parabolique de la contrainte de cisaillement, tout en remplissant la condition de contrainte nulle sur les surfaces externes du sandwich.

Les modèles d'ordres élevés ont suscité un grand intérêt et sont largement utilisés dans la modélisation des structures multicouches. En effet, ils permettent dans moult situations des estimations assez satisfaisantes de grandeurs telles que la flèche, les fréquences propres, etc. Notons que pour les modèles ci-hauts, la structure est traitée comme une seule couche permettant une simplification majeure de l'analyse. En revanche, cette approche conduit dans certaines configurations géométriques et matérielles à des résultats plus ou moins erronés. Cela a conduit à l'adoption de modèles de type zig-zag, qui consistent à décrire couche par couche les champs de déplacement (voir figure 1.4). On distingue deux types de modèles zigzag :

- Les modèles IC-ZZT (*Zig-Zag Theories with Interlaminar Continuity*) qui assurent la continuité des contraintes aux interfaces des différentes couches.
- Les modèles ID-ZZT (*Zig-Zag Theories with Interlaminar Discontinuity*) qui l'ignorent tout simplement.

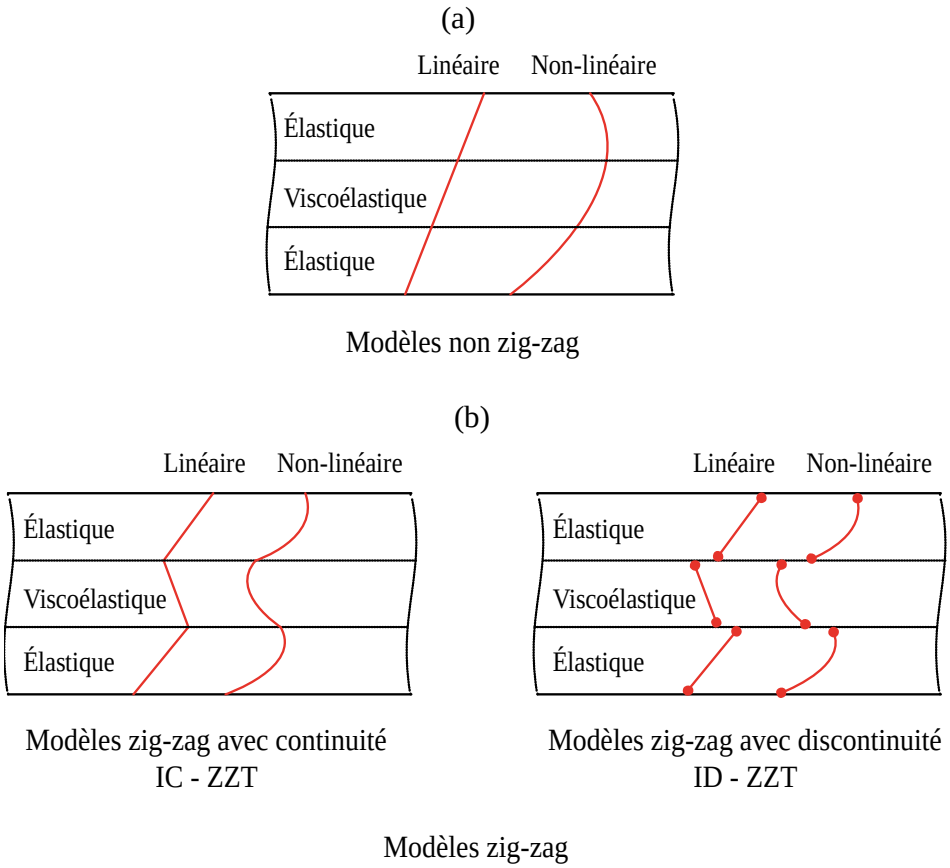


Figure 1.4 Cinématiques de structures sandwichs

Carrera [12], en 2003, a effectué une synthèse des modèles IC-ZZT dans laquelle il a montré que la plupart des théories de stratifiés nécessitent la prise en compte des conditions de continuité de la contrainte de cisaillement aux interfaces. Cependant, nombreux sont les auteurs [10, 19-21] qui l'ont ignorée dans leurs travaux sur l'analyse des vibrations des structures sandwichs. Il s'est donc avéré indispensable d'avoir un aperçu suffisamment clair sur le domaine de validité de chaque modèle.

Une autre alternative consisterait à utiliser des éléments finis hexaédriques linéaires ou quadratiques. Les premiers s'avèrent pauvres en termes d'interpolation, nécessitant un maillage très fin pour avoir un résultat satisfaisant, ce qui n'est pas le cas dans pas mal de configurations.

Les éléments finis quadratiques, de par leurs cinématiques, sont bien plus coûteux en temps de calcul.

Rappelons que l'amortissement passif peut aussi être obtenu avec des matériaux dits « *intelligents* », tels que les matériaux piézoélectriques, à condition de le shunter. Les premiers à avoir mis en œuvre cette solution furent Liu et Forward [22] en 1981. En effet, ils ont montré que l'ajout d'un circuit shunt (potentiel nul), sur des patchs piézoélectriques apposés à une structure, permet d'obtenir un amortissement passif par la dissipation d'une partie de l'énergie vibratoire transformée en énergie électrique. Hagood et al. [23], poursuivant ces travaux, ont proposé en 1990 des modèles analytiques quantitatifs couplant le patch piézoélectrique, soit à une résistance en série, soit à un circuit RL (résistance et inductance en série). Ils ont déterminé les valeurs du circuit optimal pour la dissipation maximale. Depuis une vingtaine d'années, de nombreux travaux sont menés sur ce type d'amortissement passif. Edberg et al. [24] ont montré qu'il était possible d'atténuer simultanément deux modes de vibrations à l'aide de circuits accordés multiples. Wu et Bicos [25] ont implanté des contrôles multimodes sur des plaques composites. Récemment, Deü et al. [26-28] ont présenté des modèles basés sur l'optimisation des paramètres d'amortissement par shunt. Une revue plus exhaustive sur le contrôle passif par « *shunt* » peut être consultée dans les travaux de Moheimani [29].

L'apport du contrôle passif de type shunt est indéniable et présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre tout en préservant la stabilité du système. Néanmoins, les performances obtenues par ce type de contrôle restent faibles et ne concernent que quelques modes visés. L'amortissement peut également être amélioré par un contrôle dit actif.

1.3.2. Contrôle actif des vibrations

Le contrôle actif est obtenu par application d'efforts externes sur une structure en vibration. Le plus souvent, cet effort est une différence de potentiel. L'un des premiers à avoir mis au point ce concept fut Olsen [30] dans les années 50. Depuis, plusieurs travaux allant de l'expérimentation à la modélisation et simulation du comportement des matériaux piézoélectriques, offrant cette possibilité, ont été menés. Une revue bibliographique non exhaustive sera présentée dans les paragraphes suivants. Elle actualise celle présentée dans les thèses de Piefort [31] ; Trinidade [32] et Boudaoud [33]. Récemment, Belouettar et al. [34] ainsi

qu'Azrar et al. [35] ont proposé une étude des vibrations non-linéaires de poutres sandwichs piézoélectriques.

- **Lois de contrôle**

En effet, les premiers travaux de contrôle de vibrations par actionneurs sont ceux de Liu et Forward [22] et Bailey et Hubbard [36] qui ont respectivement utilisé des actionneurs pour contrôler les vibrations de structures flexibles et poutres. Alors s'en est suivi des travaux s'intéressant à la modélisation tels Crawley et de Luis [37] ; Hagood et al. [23] qui ont montré la possibilité d'utiliser des actionneurs piézoélectriques pour le contrôle de vibrations. Mais le problème de poids des patchs piézoélectriques, qui sont généralement des piézocéramiques, a conduit à l'utilisation des capteurs et actionneurs piézoélectriques en couches très fines ou discrets localisés. Il convient donc de trouver les positions adéquates pour un contrôle optimal. Des algorithmes dans la littérature permettent de déterminer ces positions. Nous avons par exemple les algorithmes basés sur la loi de contrôle dérivative (D) (Kapadia et Kawiecki [38] ; …), proportionnelle (P) (Azvine et al. [39] ; Rongong et al. [40] ; …) ou proportionnelle-dérivative (PD) (Shen [41]; Veley et Rao [42] ; Lesieutre et Lee [43] et bien d'autres) qui occupent la majeure partie de la littérature du fait de leurs simples conception et mise en œuvre. Par ailleurs, plusieurs auteurs, tels que Lam et al. [44] ; Liao et Wang [45-47], ont montré dans leurs travaux que des algorithmes optimaux du type LQR (*Linear Quadratic Regulator*) permettent d'augmenter la dissipation d'énergie. Un modèle éléments finis de type FSDT utilisant l'algorithme LQR a été proposé par Bruant et al. [48] pour déterminer la géométrie et les positions des patchs piézoélectriques. Cette approche est peu réaliste (pas de perturbations, état du système parfaitement connu). Cet algorithme a été amélioré en LQG (*Linear Quadratic Gaussian*), présenté dans la thèse de Trinidade [32], par l'utilisation d'un filtre de Kalman. Récemment, Chhabra et al. [49], se basant sur les travaux de Wang et Wang [50] et bien d'autres, ont utilisé le MCMSVD (*Modified Control Matrix and Singular Value Decomposition*) pour déterminer les positions optimales des actionneurs sur une plaque pour un contrôle efficient.

Un autre facteur dont dépend le pouvoir électromécanique des matériaux piézoélectriques est le mode de déformation utilisé.

- **Mécanismes de déformations**

Un autre facteur permettant de maîtriser l'effet piézoélectrique des patchs est le mécanisme de déformation utilisé pour les patchs. Ainsi, les patchs peuvent être actionnés en extension (généralement apposés en surface) ou en cisaillement (le plus souvent incorporés à la structure), comme indiqué sur la figure 1.2.

Le mécanisme d'actionnement par extension est obtenu par application d'un champ électrique et la polarisation du matériau piézoélectrique dans la même direction (transversale). Il en résulte des déformations de membrane. Ce mécanisme est le plus utilisé et constitue la majeure partie des contributions, puisqu'il permet une déformation plus importante que l'actionnement par cisaillement. On peut citer quelques travaux en vibration tels que ceux de Saravanos et Heyliger [51] ; Benjeddou et Deü [52] ; Yang et Lee [53] et bien d'autres. Cependant, vu l'intérêt grandissant de la mise en œuvre des composites avec actionneurs intégrés, tels que les sandwichs, le mécanisme d'actionnement par extension se révèle parfois moins efficace. Il est montré par Bent et al. [54] ainsi que Crawley et de Luis [37] que ce mécanisme n'est performant que lorsque les patchs sont placés loin du plan moyen de la structure. C'est là que le mécanisme de cisaillement trouve son intérêt. Il consiste à polariser longitudinalement les patchs, de manière à induire des déformations de cisaillement lorsqu'ils sont actionnés par un champ électrique transversal. Les travaux de Benjeddou [55] ont permis d'avoir un aperçu sur les deux mécanismes et une valorisation du mécanisme d'actionnement en cisaillement des patchs piézoélectriques [56-58].

1.3.3. Contrôle hybride des vibrations

Les résultats intéressants de l'amortissement passif et du contrôle actif ont motivé le développement des modèles actif–passifs dits hybrides. L'avantage majeur d'une telle approche est indéniable, puisqu'elle permet d'augmenter activement le cisaillement d'un matériau viscoélastique au moyen d'un actionneur piézoélectrique. Il en résulte une dissipation d'énergie plus importante et donc la réduction des amplitudes de vibrations. Le plus connu de ces traitements est le RCA (Revêtement Contraint Actif) suggéré par Plump et Hubbard [59]. Ainsi, plusieurs configurations ont été proposées dans la littérature. Des auteurs comme Huang et al. [60] ; Yellin et Shen [61], pour ne citer que ceux-ci, ont utilisé des actionneurs auto-capteurs dans un RCA. D'autres, tels que Lesieutre et Lee [43], ont proposé de segmenter le traitement

hybride afin d'augmenter sa robustesse ; travaux étendus par Baz [62] sur une poutre afin d'étudier le cisaillement dans la couche viscoélastique.

Afin de modéliser les vibrations des structures ayant subi un traitement hybride, plusieurs auteurs dans la littérature ont présenté des modèles éléments finis. Ainsi, Van Nostrand et al. [63] ont développé un modèle éléments finis sandwich de type poutre pour lequel le RCA couvre toute la structure. Huang et al. [60] et Baz [64] ont proposé un modèle similaire mais en tenant compte aussi des extensions et flexion de la couche viscoélastique. Ensuite, Lesieutre et Lee [43] ont développé un modèle éléments finis à 9 degrés de liberté par élément, avec des interpolations quadratiques pour le déplacement longitudinal et l'angle de cisaillement. Les effets des inerties de rotation ont été pris en compte pour les trois couches. Par ailleurs, des éléments finis iso-paramétriques ont été utilisés par Varadan et al. [65] pour étudier des traitements hybrides. Dans les deux cas, des degrés de liberté électriques ont été utilisés pour modéliser l'action piézoélectrique. D'autre part, la méthode de Rayleigh–Ritz a aussi été utilisée par Baz et Ro [66] et Liao et Wang [46] pour discrétiser les équations de mouvement, où l'inertie de rotation a été négligée mais les déformations axiales de la couche viscoélastique ont été considérées. Une revue plus fournie peut être consultée dans les thèses de Piefort [31], Trinidade [32] et Boudaoud [33], qui ont également proposé des modèles éléments finis pour modéliser les structures multicouches contenant à la fois des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques.

Malgré tous ces modèles présentés, force est de constater l'absence d'un modèle coque prenant en compte le comportement piézoélectrique de certains matériaux dans les codes commerciaux tels qu'ABAQUS et ANSYS. Même si des éléments hexaédriques à 8 et 20 nœuds sont disponibles dans le code commercial ABAQUS, aucun solveur permettant de prendre en compte le contrôle hybride n'est disponible. Par ailleurs, les matériaux piézoélectriques peuvent être utilisés sous forme de patchs localisés sur des géométries complexes. Dans de telles situations, les éléments hexaédriques classiques deviennent rapidement très limités, puisqu'un maillage fin est très souvent nécessaire pour capter les effets aux limites des patchs piézoélectriques.

Pour pallier à cela, Nestorović et al. [67-69] ont récemment implémenté un élément coque à 9 nœuds basé sur la théorie de Mindlin. Vu l'intérêt porté aujourd'hui aux éléments finis de type solide–coque, Tan et Vu-Quoc [70] ont étendu leurs travaux [71, 72] pour prendre en compte le couplage piézoélectrique. Klinkel et Wagner [73, 74] en ont fait de même en

proposant des éléments finis de type solide–coque hexaédrique à 8 nœuds. On peut également citer les travaux de Zouari et al. [75-77], qui ont proposé un élément fini curviligne hexaédrique piézoélectrique à 8 nœuds basé sur le concept de la rotation de la fibre de l'espace. Il s'agit pour la plupart d'éléments finis solides dégénérés, c'est-à-dire présentant une géométrie coque avec un comportement purement 3D. Dans cette thèse, l'approche proposée est purement tridimensionnelle. Quelques modèles de coques volumiques sont présentés dans la section 1.4.

1.4. Modèles éléments finis de type coque volumique et solide–coque

Plusieurs modèles éléments finis sont proposés pour la modélisation des structures. Ainsi, pour des structures minces, on dispose d'éléments de type coque, plaque, etc. D'autres éléments finis, dits solides ou volumiques, sont dédiés à l'étude des structures plus épaisses. Cependant, lorsque l'on se retrouve face à des structures comportant des géométries très contrastées, à l'instar d'une tour de centrale nucléaire (assimilable à une structure coque) reposant sur une fondation épaisse (structure 3D), l'une des difficultés principales est de connecter les éléments finis coques aux éléments finis solides. Cette difficulté réside dans l'incompatibilité géométrique des deux types d'éléments finis représentant les deux structures (mince et épaisse). Une alternative consiste en l'utilisation d'un maillage complètement 3D, ce qui se révèle très coûteux en temps de calcul. Pour pallier à cela, des modèles combinant les avantages de ces deux types d'éléments ont été développés récemment, montrant ainsi leur intérêt. L'avantage majeur de cette approche réside dans la formulation complètement 3D pouvant modéliser à la fois une structure très mince et/ou épaisse.

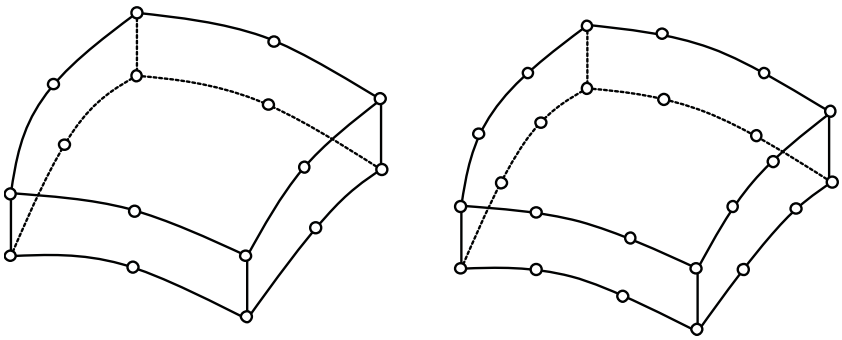
Rappelons que nous distinguons dans la littérature deux types de formulations développées pour remédier aux limitations ci-dessus mentionnées : (i) les coques tridimensionnelles dégénérées et (ii) les modèles solide–coques.

1.4.1. Modèles coques tridimensionnelles dégénérées

Nous présentons ici un aperçu global de ces éléments présentés dans la thèse de Trinh [78].

Parmi les premiers à avoir tenté de fournir une réponse au problème de coque, on peut citer Ahmad et al. [79] dans les années 70. Ces modèles, nommés éléments finis tridimensionnels

dégénérés, se basent sur des éléments iso-paramétriques volumiques n'ayant que deux nœuds suivant la direction de l'épaisseur (voir figure 1.5). Ainsi, ces éléments respectent l'hypothèse de sections droites classiquement admise pour les coques. À cela est ajoutée une modification du principe des puissances virtuelles afin de négliger l'énergie engendrée par la déformation normale transverse. Cette modification impose, en particulier, l'utilisation d'une relation de comportement pour le matériau prenant en compte l'hypothèse des contraintes planes.



a. Modèle à 16 nœuds b. Modèle à 24 nœuds

Figure 1.5 Modèles coques 3D d'Ahmad

L'avantage de cette modélisation réside dans l'utilisation exclusive de degrés de liberté en déplacement. Cependant, elle souffre de la modification du principe des puissances virtuelles, ce qui nécessite la modification de la loi de comportement du matériau. Plusieurs auteurs, tels que Parisch [80], Brendel et Ramm [81], et autres, ont néanmoins valorisé cette approche. Pour éviter la modification du comportement du matériau, Kim et al. [82] ont proposé un élément coque volumique à 20 nœuds avec une intégration numérique réduite, 2x2x3 points de Gauss. Cependant, cette dernière solution reste coûteuse en temps de calcul puisqu'elle fait intervenir 9 degrés de liberté le long de la surface moyenne alors que les coques classiques n'en nécessitent que 6. On rencontre également dans la littérature des modèles de type solide–coque.

1.4.2. Modèles éléments finis de type solide–coque

Les modèles solide–coques sont basés sur une formulation purement tridimensionnelle, c'est-à-dire aussi bien au niveau de la géométrie que pour la loi de comportement. Ils ne

nécessitent que des degrés de liberté en déplacement. Ils permettent de modéliser de façon satisfaisante des structures en grandes transformations, avec une actualisation de la configuration plus aisée que dans le cas de présence de ddls en rotation, et peuvent être facilement connectés à des éléments finis 3D ayant les mêmes nombres de degrés de liberté. Cependant, tout comme pour les éléments coques, ils peuvent être sujets à certains verrouillages qui peuvent être de type cisaillement, membrane ou volumique. Il convient alors, pour leur assurer une formulation robuste et efficace, de trouver un moyen d'éviter ou d'éliminer d'éventuels problèmes de verrouillage que l'on peut être amené à rencontrer.

Vu le nombre d'avantages que présentent ces éléments, beaucoup de chercheurs se sont lancés dans leurs développements. Parmi les pionniers, on peut citer Wilson et al. [83]. Il s'agissait d'un élément iso-paramétrique hexaédrique à 8 nœuds et 3 degrés de liberté en déplacement par nœud, basé sur la méthode dite des « *modes incompatibles* ». Mais la limite de cet élément est qu'il ne passait pas le patch test. Cela a poussé Taylor et al. [84] à proposer une version plus performante. Outre l'utilisation de la méthode des *modes incompatibles*, un moyen alternatif pour résoudre le problème de verrouillage (membrane et cisaillement) est la méthode d'intégration réduite et sélective présentée par Zienkiewicz et al. [85] ; Hughes et al. [86, 87]. Cette méthode a fait ses preuves mais conduit généralement à des éléments instables caractérisés par l'apparition de modes de déformation à énergies nulles, aussi connus sous le nom de modes de « *hourglass* ». Pour relever ce nouveau défi, Simo et Rifai [88] ont suggéré la projection de l'opérateur gradient discrétisé sur un sous-espace approprié. Cette technique est appelée « *Assumed Strain* » et fut appliquée avec succès dans [89, 90].

D'autres auteurs ont proposé des méthodes aussi efficaces pour éliminer les modes de *hourglass* causés par l'utilisation de l'intégration réduite. Parmi ceux-ci, on rencontre la technique introduite par Flanagan et Belytschko [91] utilisant une intégration sélective réduite et la méthode nommée « *projection gamma* ». Rappelons que le concept d'intégration réduite a connu une forte popularité grâce principalement à son faible coût en termes de temps de calcul. Aussi, la stabilisation appliquée à de tels éléments sous-intégrés doit respecter cette exigence. Or, l'intégration sélective réduite est au moins aussi coûteuse que l'intégration exacte puisqu'elle intègre exactement la partie déviatorique de la déformation. Ainsi, les éléments stabilisés par la méthode de l'intégration sélective réduite perdent une grande partie de leur intérêt et de leur efficacité. En revanche, la méthode de projection de Flanagan et Belytschko [91] permet, à la fois, de stabiliser les éléments sous-intégrés et de préserver leur faible coût.

Elle consiste à rajouter à la matrice de rigidité une raideur artificielle dont le multiplicateur reste indéterminé. Cette matrice de stabilisation est obtenue par une projection orthogonale. En d'autres termes, elle doit être orthogonale aux modes rigides, et doit fournir une énergie non nulle lorsque l'un des modes de *hourglass* est activé. Le multiplicateur indéterminé doit être introduit par l'utilisateur du code et peut être soit de type viscosité artificielle, soit de type rigidité artificielle.

Une approche alternative pour contrôler les modes de *hourglass*, basée sur le principe variationnel de Hu–Washizu, a été utilisée par Belytschko et al. [92] pour formuler deux éléments finis quadrilatéraux et hexaédriques à intégration réduite. Leur élément quadrangle à quatre nœuds présente des verrouillages pour les matériaux incompressibles, mais possède un bon comportement dans les problèmes de flexion dans le plan. Ce concept a été utilisé dans [89, 90, 93] afin de résoudre les problèmes impliquant des matériaux incompressibles.

Au cours des années 1990, Simo et al. [88, 94, 95] ont introduit une nouvelle méthode nommée EAS (*Enhanced Assumed Strain*). Cette méthode consiste à enrichir le champ de déformations en rajoutant un champ de variables qui produit des modes de déformations supplémentaires. Ces champs de variables sont ensuite projetés sur un sous-espace approprié afin d'éviter les différents types de verrouillages. Cette technique a été largement utilisée dans plusieurs travaux de la littérature, parmi lesquels on peut citer [96-99].

Depuis 2002, une classe d'éléments nommés SHB (voir figure 1.5) a été proposée par Abed-Meraim, Combescure et leurs collaborateurs [100-107]. Il s'agit d'éléments finis tridimensionnels de type solide–coque à intégration réduite. Cette intégration se fait suivant une direction privilégiée qui correspond à l'épaisseur. Une revue succincte de ces éléments est présentée ci-dessous. Les éléments ayant fait l'objet de cette thèse sont développés plus amplement dans le chapitre 2.

1.4.3. Éléments finis solide–coques SHB

Dans un premier temps, l'élément solide–coque hexaédrique à 8 nœuds nommé SHB8PS a été proposé par Abed-Meraim et Combescure [100]. Il a été développé dans le cadre d'une formulation explicite et implanté dans le code de dynamique rapide EUROPLEXUS, co-développé par le CEA, pour simuler des problèmes d'impact. Cette version explicite a été également utilisée pour simuler l'ingestion de volatiles par des turbines d'avions ainsi que

d'autres situations accidentelles rencontrées par la SNECMA. Puis, la version implicite de cet élément a été implantée dans le code quasi statique implicite STANLAX–INCA du CEA, pour des applications de stabilité élasto-plastique par Legay et Combescure [101]. Ensuite, la formulation du SHB8PS a été revisitée et enrichie par de nouvelles projections afin de mieux éliminer certains verrouillages résiduels constatés dans certaines applications [103]. Outre sa géométrie tridimensionnelle (hexaèdre à 8 nœuds avec seulement des degrés de liberté de déplacement), plusieurs modifications sont introduites afin de le munir de certaines propriétés propres aux éléments de coques. Parmi elles, un comportement proche de celui d'une coque est recherché par une modification de sa loi de comportement élastique tridimensionnelle et ses points d'intégration sont alignés le long d'une direction préférentielle, désignée comme l'épaisseur. La nouvelle version obtenue du SHB8PS a été implantée dans les codes quasi statiques implicites ASTER, développé par EDF, et CASTOR, développé par le CETIM. Le schéma d'intégration réduite initié dans [85-87] est utilisé afin d'améliorer l'efficacité des calculs, d'une part, et pour atténuer certains phénomènes de verrouillage en membrane et cisaillement transverse, d'autre part. Les modes parasites à énergie nulle dus à cette sous-intégration dans le plan sont efficacement contrôlés par une technique de stabilisation inspirée de l'approche proposée par Belytschko et Bindeman [108]. Il est d'abord montré que les modes de *hourglass* associés sont les vecteurs du noyau de la matrice de rigidité autres que les modes de corps rigides. Pour pallier cette déficience de rang de la matrice de raideur, les modes de *hourglass* sont déterminés explicitement, en utilisant une base de l'espace vectoriel des déplacements discrétisés, pour être ensuite efficacement stabilisés. Il est important de noter que la formulation proposée est valable pour n'importe quel ensemble de points d'intégration distribués le long de la direction de l'épaisseur et comprenant au moins deux points d'intégration.

Pour l'élimination des différents effets de verrouillage (cisaillement transverse, membrane, volumique, ...), l'opérateur gradient discrétisé est projeté sur un sous-espace approprié. Cette technique de projection peut se déduire du formalisme de la méthode de l'*Assumed Strain* basée sur les premiers travaux de [88, 95]. Cette nouvelle version a été implémentée sous ABAQUS au moyen d'une subroutine UEL (*User-defined Element*) et a permis de simuler la mise en forme de tôles minces anisotropes par Salahouelhadj et al. [106].

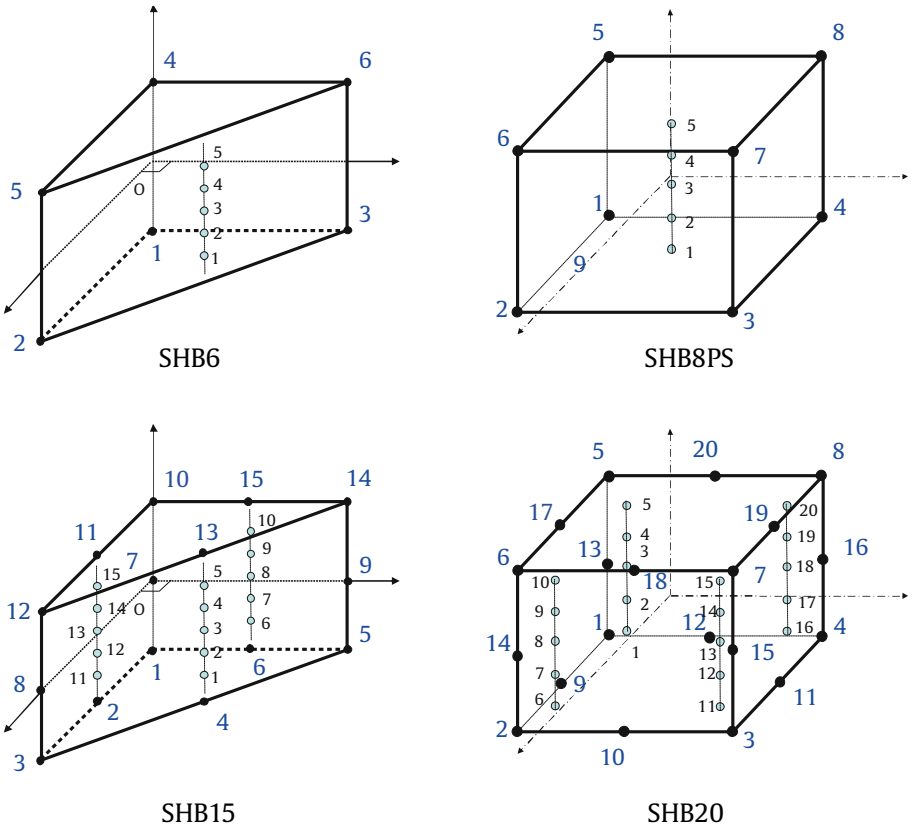


Figure 1.6 Éléments solide–coques de type SHB

Ce développement réussi d'éléments de coques volumiques hexaédriques a rendu nécessaire l'existence d'éléments de coques volumiques prismatiques afin de pouvoir mailler facilement et automatiquement des géométries de forme quelconque. En effet, avec l'avènement d'outils libres de génération de maillage ne générant pas que des hexaèdres, et pour être capable de mailler des structures arbitrairement complexes, le développement d'éléments de coques volumiques à base triangulaire est requis. À cet égard, Trinh et al. [105] ont développé un élément de coque volumique prismatique appelé le SHB6 (voir figure 1.6). Cet élément est formulé en suivant une démarche purement tridimensionnelle, similaire à celle utilisée pour développer le SHB8PS. De la même façon, pour améliorer ses performances, l'intégration réduite a été utilisée ainsi que la méthode de l'*Assumed Strain* basée sur le principe variationnel mixte de Hu–Washizu. La formulation obtenue pour le SHB6 est valable pour un nombre arbitraire de points d'intégration (avec un minimum de deux points) situés dans la direction de l'épaisseur. À travers des exemples numériques sélectifs et représentatifs, il a été mis en évidence le rôle très utile que joue le SHB6 en tant que complément à l'élément SHB8PS. Ceci

montre clairement l'intérêt d'utiliser des maillages mixtes composés d'éléments de coques volumiques complémentaires tels que le SHB8PS et le SHB6.

Enfin, pour compléter ces développements, cette première famille d'éléments de coques volumiques linéaires a été enrichie par deux nouveaux éléments finis similaires mais à interpolation quadratique. Il s'agit d'un élément hexaédrique à 20 nœuds, appelé le SHB20, et un élément prismatique à 15 nœuds, nommé le SHB15 [107]. Ce développement d'éléments finis solide–coques quadratiques est motivé par une réponse un peu trop raide que fournit le SHB6 dans certains problèmes à flexion dominante. Ceci est courant dans les éléments linéaires à base triangulaire, dans lesquels la déformation est constante. L'augmentation du degré d'interpolation fournit un équivalent quadratique, SHB15, ayant des performances bien meilleures en termes de comportement et qui se montre beaucoup moins sensible au verrouillage.

Récemment, une nouvelle approche de discrétisation de problème dite « *isogéométrique*» a été développée dans la littérature. Depuis les jalons posés par Hughes et al. [109] et développés par Cottrell et al. [110], l'Analyse IsoGéométrique (ISA) a bousculé certains fondamentaux des éléments finis. En effet, contrairement à la méthode des éléments finis, les fonctions de forme dites NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) sont construites directement à partir de la géométrie ayant servie à la Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Cette technologie a inspiré les travaux d'Elguedj et al. [111, 112] qui l'ont utilisée pour simuler efficacement le comportement non linéaire des matériaux quasi-incompressibles. Pour augmenter les performances des éléments émanant de l'approche IGA classique, des versions solide–coques ont été développées récemment par Bouclier et al. [113, 114]. Là aussi, des traitements spécifiques des différents verrouillages ont été menés.

Une fois le problème de vibration discrétisé, la résolution reste la dernière étape pour extraire les solutions. La complexité de la résolution de ces problèmes a motivé plusieurs travaux présents dans la littérature. Un aperçu global est présenté dans la section 1.5.

1.5. Méthodes de résolution des problèmes de vibrations

Du point de vue de l'ingénieur, la résolution d'un problème de vibrations revient à l'évaluation des propriétés amortissantes que sont la pulsation de résonance Ω (ou la fréquence

amortie f) et l'amortissement modal η. Les premières approches sont analytiques et reposent dans leur globalité sur des hypothèses diverses pour établir des équations différentielles simplifiées. Ces dernières peuvent alors facilement se résoudre au moyen des méthodes basiques et permettent d'extraire les propriétés amortissantes. On rencontre dans la littérature des travaux intéressants, parmi lesquels les contributions suivantes peuvent être citées : Kerwin [8], Ungar [115], Yu [116], Yan et Dowell [117], Rao et Nakra [118]. Cependant, dans les applications réelles, on fait face à des structures de configurations géométriques et matérielles diverses avec des conditions aux limites variées. La formulation de tels problèmes débouche sur des équations complexes difficilement résolvables avec des méthodes analytiques. La seule approche possible reste numérique. Le développement de la méthode des éléments finis a permis de discrétiser ces problèmes qui se mettent généralement sous la forme :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(\omega)-\omega^2\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\}=\{\boldsymbol{F}\} \tag{1.6}$$

où $\mathbf{K}^{uu}(\omega)$ représente la matrice de rigidité, $\mathbf{M}^{uu}$ la matrice masse, $\{\boldsymbol{U}\}$ le vecteur déplacements nodaux, également appelé vecteur des modes propres nodaux, et $\{\boldsymbol{F}\}$ le vecteur des forces nodales.

Selon la sollicitation de la structure, on dispose de deux approches qui permettent d'estimer les propriétés amortissantes dans le cas $\{\boldsymbol{F}\}\neq\mathbf{0}$ (vibrations forcées) et dans le cas $\{\boldsymbol{F}\}=\mathbf{0}$ (vibrations libres). Ces problèmes deviennent alors aisément résolvables à condition d'avoir un outil numérique robuste. Deux méthodes sont utilisées : la réponse fréquentielle pour une sollicitation $\{\boldsymbol{F}\}\neq\mathbf{0}$ et l'analyse modale pour $\{\boldsymbol{F}\}=\mathbf{0}$.

1.5.1. Réponse fréquentielle

Elle consiste à analyser la réponse de la structure soumise à une force harmonique d'amplitude $\{\boldsymbol{F}\}$ de manière à exciter les modes auxquels on s'intéresse. Les courbes de réponse en déplacement $\{\boldsymbol{U}(\omega)\}$ sont obtenues par assemblage et inversion de la matrice dynamique complexe $\mathbf{A}(\omega)=\left[\mathbf{K}^{uu}(\omega)-\omega^2\mathbf{M}^{uu}\right]$ pour chaque valeur de ω.

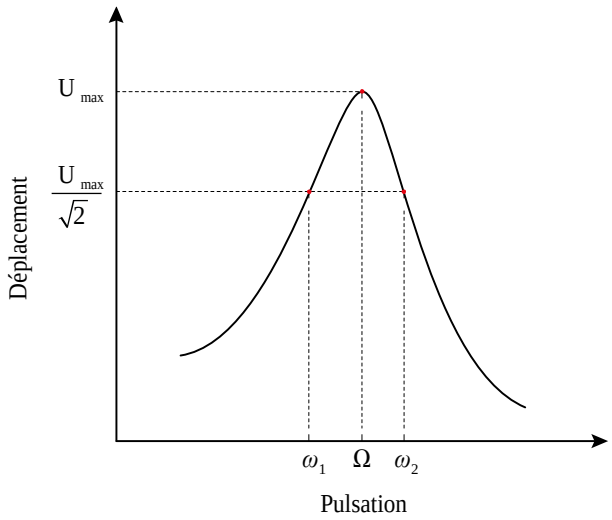


Figure 1.7 Calcul de l'amortissement par la méthode de la bande passante à -3dB

A partir de la courbe de réponses en fréquence (voir figure 1.7), on détermine la pulsation amortie Ω correspondant au pic de résonance. Le calcul du facteur de perte η de la structure peut alors se faire à l'aide de la méthode des bandes passantes à -3dB donnée par la formule :

$$\eta = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Omega} \tag{1.7}$$

Cette méthode a été initialement développée pour estimer l'amortissement à partir de résultats expérimentaux. Celle-ci, bien qu'effective, présente un certain nombre de limitations lorsqu'elle est appliquée à un problème mobilisant un grand nombre de degré de liberté. D'une part, la recherche d'une solution précise requiert parfois un pas de pulsation très faible pour suivre au mieux la réponse fréquentielle. Dans de telles configurations, les opérations engendrent un temps de calcul important dû au nombre d'inversions de la matrice dynamique $\mathbf{A}(\omega)$. De l'autre, elle n'est valide que pour de petites valeurs d'amortissement et pour des fréquences suffisamment séparées. Abdoun et al. [119] ont amélioré cette méthode en utilisant la méthode asymptotique numérique. La méthode permet non seulement d'extraire plus efficacement les paramètres amortissants mais réduit aussi considérablement le temps de calcul. On commence par décomposer le module d'Young traduisant la dépendance en fréquence sous la forme $E^*(\omega) = E(0) + E(\omega)$. Le problème (1.6) se réécrit alors sous la forme :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}{}_{0} + E(\omega)\mathbf{K}^{uu}{}_{v} - \omega^2\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{F}\} \tag{1.8}$$

où $\mathbf{K}^{uu}{}_{0}$ et $\mathbf{K}^{uu}{}_{v}$ sont des matrices purement réelles issues de la décomposition de la matrice de rigidité $\mathbf{K}^{uu}(\omega)$. Les inconnues $(\omega, \boldsymbol{U})$ ainsi que $E^*(\omega)$ sont ensuite développées en série de Taylor et injectées dans le problème (1.8). On obtient ainsi une suite récurrente de problèmes linéaires, dont la résolution permet de calculer directement la réponse $\{\boldsymbol{U}\}$. La technique des bandes passantes permet finalement d'extraire les paramètres amortissants que sont Ω et η.

1.5.2. Analyse modale

L'analyse modale consiste à déterminer les paramètres d'amortissement d'une structure en vibrations libres ($\{\boldsymbol{F}\} = \mathbf{0}$) par calcul direct des modes propres. Le problème (1.6) s'écrit :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(\omega) - \omega^2\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{1.9}$$

Selon le module d'Young considéré, deux méthodes sont utilisées :

- le module complexe constant $E^*(\omega) = E(1+\mathrm{i}\,\eta_c)$
- le module complexe dépendant de la fréquence $E^*(\omega) = E(0) + E(\omega)$.

1.5.2.1. Module complexe constant

Dans le cadre de cette hypothèse, l'équation (1.9) se réduit à :

$$\left[\mathbf{K}^{uu} - \omega^2\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{1.10}$$

où $\mathbf{K}^{uu}$ est la matrice de rigidité complexe constante. Le problème (1.10) est alors linéaire et se résout par des algorithmes classiques de valeurs propres. Cette forme est largement utilisée dans la littérature pour la modélisation des structures sandwichs [120, 121]. L'équation (1.10) est résolue par les algorithmes classiques à l'instar de la méthode de Lanczos [122], la méthode d'Arnoldi [123], la méthode QR de Bathe [124] ou la méthode itérative des sous espaces présentée dans [125]. Ils sont implémentés pour la plupart dans l'environnement de certains codes de calcul comme les fonctions de MATLAB « *eig* » implémentant la méthode QR et « *eigs* » implémentant la méthode d'Arnoldi.

En réalité, le module d'Young d'un matériau viscoélastique dépend de la fréquence ce qui rend ces méthodes inopérationnelles.

1.5.2.2. Module complexe dépendant de la fréquence

Dans le cadre de cette hypothèse, le problème (1.9) est résolu soit par des méthodes approchées ou celles dites « *quasi-exactes* ».

- **Méthodes approchées**

La plus répandue est la méthode d'énergie de déformation modale connue sous le nom de MSE (*Modal Strain Energy*). Cette méthode, proposée par Johnson et al. [126], est basée sur la répartition de l'énergie de déformation dans la structure. L'amortissement structurel dans la MSE est défini comme le quotient entre la somme des énergies de déformation modales des sous-systèmes, dans la base du système non-amorti, pondérées par leur amortissement respectif, et la somme des énergies de déformation :

$$\eta = \sum_k \eta_k \frac{S_k}{\sum_k S_k} \tag{1.11}$$

où η_k et S_k sont respectivement le facteur de perte et l'énergie de déformation de la sous-structure *k*. Deux déclinaisons de cette méthode sont couramment utilisées : la méthode d'énergie modale mode réel (MSER) et la méthode d'énergie modale mode complexe (MSEC).

***Méthode d'énergie de déformation – mode réel* (MSER)**

Cette version repose sur l'hypothèse que le mode propre de la structure étudiée est proportionnel au mode propre non amorti $\{\boldsymbol{U}^R\}$, qui vérifie le problème aux valeurs propres réelles :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(\omega) - \omega_0^2 \mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}^R\} = \{\mathbf{0}\} \tag{1.12}$$

où $\mathbf{K}^{uu}(\omega)$ est la matrice de rigidité construite en ne considérant que l'élasticité retardée pour le matériau viscoélastique. En résolvant (1.12), le couple $(\omega_0, \boldsymbol{U}^R)$ est obtenu. Ensuite, on approxime $\mathbf{K}^{uu}(\omega)$ par $\mathbf{K}^{uu}(\omega_0)$, ce qui permet d'extraire les solutions sous la forme :

$$\omega^2 = \frac{\{\boldsymbol{U}^R\}^T \left[\mathbf{K}^{uu}(\omega_0)\right]\{\boldsymbol{U}^R\}}{\{\boldsymbol{U}^R\}^T \left[\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}^R\}} = \Omega^2(1+i\eta) \tag{1.13}$$

La MSER permet d'estimer l'amortissement en ne calculant que des modes réels, elle a donc un coût numérique faible mais elle ne demeure précise que pour des structures faiblement amorties [21].

***Méthode d'énergie de déformation – mode complexe* (MSEC)**

On peut améliorer l'estimation de Ω et η en utilisant la même technique et en résolvant le système linéaire forcé décrit par :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(\omega_0) - \omega_0{}^2\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}^C\} = \{\boldsymbol{F}\} \tag{1.14}$$

La pulsation amortie Ω ainsi que le facteur de perte η sont calculés alors par :

$$\omega^2 = \frac{\{\bar{\boldsymbol{U}}^C\}^T \left[\mathbf{K}^{uu}(\omega_0)\right]\{\boldsymbol{U}^C\}}{\{\bar{\boldsymbol{U}}^C\}^T \left[\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}^C\}} = \Omega^2(1+i\eta) \tag{1.15}$$

Même si la méthode d'énergie modale mode complexe donne de meilleurs résultats que la méthode d'énergie modale mode réel, la précision des estimations reste encore à améliorer. Pour cela, des méthodes numériques plus performantes qualifiées de "quasi-exactes" sont développées.

- **Méthodes quasi-exactes**

Ce sont des méthodes qui de façon générale transforment le problème initialement non linéaire en sous-problèmes linéaires résolus avec des méthodes récurrentes.

***Approche asymptotique de* Ma et He [20]**

Cette approche consiste à substituer ω^2 par $\Omega^2(1+i\eta)$ dans l'équation (1.10) pour obtenir le problème :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(\Omega^2,\eta) - \Omega^2(1+i\eta)\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{1.16}$$

Les inconnues $(\Omega^2, \eta, \boldsymbol{U})$ sont ensuite développées en séries de Taylor d'un paramètre minutieusement choisi de façon à transformer le problème à l'origine non linéaire en une suite récurrente de problèmes linéaires. On résout ces derniers en utilisant la condition d'orthogonalité des modes. Dans le cas d'un module dépendant de la fréquence, les séries ne convergent généralement pas, ce qui rend nécessaire une méthode de continuation.

***Méthode d'itération-réduction de* Chen et al. [127]**

Dans cette approche, on pose $\omega^2 = \lambda$ et on décompose le module de cisaillement du matériau viscoélastique sous la forme $G^*(\lambda) = G(\lambda)\left(1 + i\beta(\lambda)\right)$. En injectant ces relations dans le problème (1.10), on obtient le problème montrant la décomposition de la matrice de rigidité en partie élastique et partie viscoélastique :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(G(\lambda)) + i\beta(\lambda)\mathbf{K}^{uu}{}_2 - \lambda\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{1.17}$$

La méthode d'itération-réduction consistant à résoudre le problème (1.17) en deux pas est ensuite utilisée. Cette méthode se présente comme suit :

- Au premier pas, on approxime tout d'abord la solution à l'ordre 0. On obtient pour un mode de rang *n* la solution $(\lambda_r, \boldsymbol{U}_r)$ du problème aux valeurs propres réelles $\left[\mathbf{K}^{uu}(G_0) - \lambda\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\mathbf{0}\}$. Dans cette équation, G_0 est une valeur fixée de $G(\lambda)$ et correspond généralement au module de cisaillement retardé de la phase viscoélastique. On recherche ensuite la solution asymptotique $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{\boldsymbol{U}}_r)$ à l'ordre 1 pour $\beta = 0$. En développant les inconnues $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{\boldsymbol{U}}_r)$ en séries de Taylor, le problème s'écrit :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(G(\lambda)) - \lambda\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\mathbf{0}\}$$
$$\text{où } \begin{cases} \mathbf{K}^{uu}(G(\lambda)) = \mathbf{K}^{uu}(G_0) + \left.\dfrac{\partial \mathbf{K}^{uu}}{\partial G}\right|_{G=G_0}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) \\ \tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \left.\dfrac{\partial \lambda_r}{\partial G}\right|_{G=G_0}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_r = \boldsymbol{U}_r + \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{U}_r}{\partial G}\right|_{G=G_0}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) \end{cases} \tag{1.18}$$

La propriété d'orthogonalité des modes permet alors d'obtenir la solution asymptotique à l'ordre 1 sous la forme :

$$\tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \left.\frac{\partial \lambda_r}{\partial G}\right|_{G=G_0} \left(G(\lambda_r) - G_0\right) = \lambda_r + \{\boldsymbol{U}_r\}^T \left[\left.\frac{\partial \mathbf{K}^{uu}}{\partial G}\right|_{G=G_0}\right] \{\boldsymbol{U}_r\} \left(G(\lambda_r) - G_0\right) \qquad (1.19)$$

- Le deuxième pas est une technique itérative pour trouver les valeurs propres complexes. Ici on commence par poser $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$ dans β et les matrices de rigidité $\mathbf{K}^{uu}$, $\mathbf{K}^{uu}{}_2$. Le problème est ainsi linéarisé et peut se résoudre par la méthode de Lanczos couplée à une base réduite.

La méthode d'itération-réduction nécessite beaucoup d'itérations, ce qui augmente significativement le temps de calcul pour des structures de grande taille. Une alternative basée sur la technique de perturbation et d'homotopie est donc développée par Daya et Potier-Ferry [128].

***Méthode Asymptotique Numérique couplée à l'homotopie de* Daya et Potier-Ferry [128]**

La Méthode Asymptotique Numérique (MAN) est présentée de façon plus générale dans l'annexe A. Sa version dédiée à la résolution des problèmes de vibration est proposée par Daya et Potier-Ferry [128]. Elle couple la technique de perturbation à celle d'homotopie et utilise une procédure de continuation. Dans sa première version, le module d'Young du cœur dépendant de la fréquence est réécrit sous la forme $E^*(\lambda) = E(0) + E(\lambda)$, soit en posant $\lambda = \omega^2$. On introduit ensuite la technique d'homotopie, qui consiste à injecter un paramètre p, et le problème est alors transformé en :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}{}_0 + pE(\lambda)\mathbf{K}^{uu}{}_v - \lambda \mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\mathbf{0}\} \qquad (1.20)$$

Les inconnues $(\lambda, \boldsymbol{U})$ ainsi que la fonction $E(\lambda)$ sont alors développées en séries de Taylor du paramètre *p*. Les valeurs initiales des séries de $(\lambda, \boldsymbol{U})$ sont choisies de telle manière à ce que $(\lambda_0, \boldsymbol{U}_0)$ soient solutions du problème aux valeurs propres pour lequel $p = 0$. L'introduction des séries obtenues dans (1.20) permet de distinguer à chaque ordre un problème linéaire permettant de calculer sous forme récurrente les solutions $(\lambda, \boldsymbol{U})$ pour le paramètre

d'homotopie $p=1$. Cette technique a été améliorée par Duigou et al. [129] qui ont proposé de remplacer les séries de Taylor par les approximants de Padé. Cette nouvelle variante permet d'améliorer la convergence des séries tout en réduisant le nombre d'inversions de la matrice dynamique $\mathbf{A}(\lambda)=\left[\mathbf{K}^{uu}{}_0+pE(\lambda)\mathbf{K}^{uu}{}_v-\lambda\mathbf{M}^{uu}\right]$.

Toutefois, la mise en œuvre de ces méthodes est laborieuse à cause des séries développées manuellement.

***Approche DIAMANT* : *(DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée)* [130-132]**

Dans les deux versions précédentes, les séries sont développées manuellement ce qui rend plus fastidieux l'utilisation de la méthode. Les travaux de Koutsawa et al. [130], Bilasse et al. [131], puis Lampoh et al. [132] ont permis d'automatiser le calcul de ces séries. En effet, partant des travaux de Charpentier et Potier-Ferry [133], Koutsawa et al. [130] ont développé sous MATLAB une boîte à outils contenant les séries de Taylor de fonctions usuelles et composées (voir annexe A). Cette boîte à outils a été utilisée ensuite par Bilasse et al. [131] pour proposer une méthode de résolution générique des problèmes de vibrations et ceci pour n'importe quel module complexe dépendant de la fréquence. Il suffit avec la méthode de fournir les matrices $\mathbf{K}^{uu}{}_0$, $\mathbf{K}^{uu}{}_v$, $\mathbf{M}^{uu}$ et la précision souhaitée ϵ. La généricité de DIAMANT a été utilisée pour proposer une méthode d'analyse de sensibilité des solutions des problèmes non-linéaires par Lampoh et al. [132].

1.6. Bilan et positionnement du sujet

Une revue bibliographique a été menée aussi bien sur les modèles destinés à l'étude des vibrations des structures multicouches que sur les modèles éléments finis de type coque volumique. Il en ressort que les modèles existants destinés à l'étude des structures sandwichs ou multicouches sont efficaces dans des configurations limitées. Au-delà de celles-ci, ils deviennent beaucoup moins justes et s'éloignent significativement des solutions réelles escomptées. La solution complètement tridimensionnelle, plus précise, est pour sa part bien plus coûteuse en temps de calcul. Un outil pouvant à la fois modéliser des structures aussi fines qu'épaisses pourrait être d'une grande utilité, surtout dans la modélisation des structures

présentant des contrastes géométriques. Au vu des résultats encourageant obtenus par les éléments finis de type coque volumique SHB, tant en statique qu'en dynamique, nous proposons une modélisation par ceux-ci des vibrations des structures multicouches. Il sera question dans un premier temps d'évaluer les performances du SHB8PS et SHB20 dans la modélisation de l'amortissement passif, c'est-à-dire pour des structures contenant exclusivement des couches élastiques et viscoélastiques. Étant donné les propriétés amortissantes intéressantes des matériaux piézoélectriques, les éléments SHB8PS et SHB20 sont alors étendus pour pouvoir les appliquer à la modélisation de structures à comportement piézoélectrique. Des degrés de liberté électriques supplémentaires ont ainsi été rajoutés à chaque nœud de ces éléments solide–coques.

Dans la suite, nous nous sommes proposés de modéliser le contrôle actif–passif des vibrations. Il s'agit de structures contenant des matériaux élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques. Cette combinaison permet d'exploiter les propriétés amortissantes des deux derniers matériaux. Une loi de contrôle est appliquée aux couples capteurs–actionneurs afin de contrôler activement les amplitudes de vibrations. Il en résulte un problème non-linéaire dépendant fortement de la fréquence. L'approche DIAMANT est adoptée et un outil numérique est proposé pour résoudre les problèmes afférents. L'outil ainsi mis en place permet de considérer des lois de contrôle rétroactif complexes, qui ne peuvent être résolues aisément par la méthode MAN traditionnelle. Pour illustrer l'étendue des possibilités de la méthode développée, nous terminerons par des applications à des cas industriels d'amortissement hybride.

Chapitre 2 : Modélisation des vibrations de structures sandwichs à âme viscoélastique par éléments finis solide–coques

Sommaire - Chapitre 2

2.1. Introduction 53

2.2. Formulation du problème et limitations des modélisations éléments finis existantes 53

2.3. Nouvelle discrétisation éléments finis du problème de vibrations 56

2.3.1. Cinématique et interpolation 56

2.3.2. Opérateurs gradients discrétisés 61

2.3.3. Contrôle des modes à énergie nulle et traitement des verrouillages 61

2.3.4. Matrices de stabilisation et repères co-rotationnels 64

2.4. Méthode de résolution du problème discrétisé 66

2.5. Résultats numériques et discussions 68

2.5.1. Tests de validation sur les poutres 69

2.5.2. Application du modèle poutre : modélisation d'un rail 75

2.5.3. Cas des plaques sandwichs 77

2.6. Conclusions 81

2.1. Introduction

Comme discuté dans le chapitre précédent, plusieurs modèles éléments finis existent dans la littérature pour modéliser efficacement les structures sandwichs. Cependant, les uns comme les autres présentent des restrictions et des limitations quant à leurs domaines de validité et par conséquent leurs champs d'application. Ces limitations peuvent provenir par exemple des contrastes géométriques et/ou matériaux. Aussi, le temps de calcul peut devenir très important lorsque la géométrie devient complexe, laissant comme seule alternative l'utilisation d'éléments finis tridimensionnels. Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps mettre en évidence quelques limitations des approches traditionnelles existantes, avant de présenter les modèles éléments finis de type solide–coque SHB8PS et SHB20. Ces derniers contribueront à modéliser non seulement les structures ci-dessus, au-delà des limites d'application des modèles existants, mais également des structures de géométries plus complexes. L'avantage de cette approche sera montré au travers de cas tests et de quelques applications illustratives.

2.2. Formulation du problème et limitations des modélisations éléments finis existantes

Nous considérons le problème des vibrations libres d'une poutre sandwich schématisée sur la figure 2.1. Différentes discrétisations éléments finis seront adoptées en vue de comparer leurs performances et ainsi mettre en évidence d'éventuelles limitations. L'équation d'équilibre basique des vibrations s'obtient par le principe des puissances virtuelles (PPV) comme suit :

$$\int_{\mathrm{V}} \left(\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\boldsymbol{u} \right) \mathrm{dv} = 0 \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{u}$ désignent, respectivement, les tenseurs de contrainte et de déformation, et le vecteur de déplacement en un point de la structure de volume V. ρ représente la densité du matériau.

Le comportement viscoélastique peut être pris en compte dans la loi constitutive sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\omega) : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{C}(\omega) = \mathbf{C}^R(\omega) + i\mathbf{C}^I(\omega) \tag{2.2}$$

où $\mathbf{C}^R(\omega)$ et $\mathbf{C}^I(\omega)$ sont les tenseurs qui caractérisent, respectivement, le stockage et la dissipation d'énergie du matériau viscoélastique.

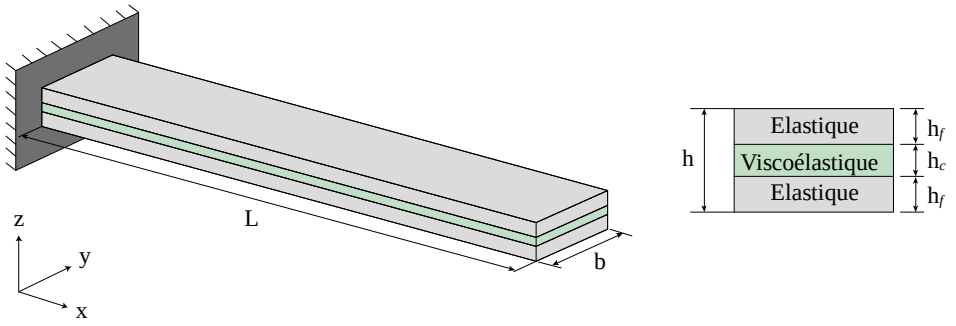


Figure 2.1 Poutre sandwich à faces élastiques et cœur élastique ou viscoélastique

En combinant les équations (2.1) et (2.2), puis en utilisant une discrétisation par éléments finis, le problème de vibrations libres d'une structure viscoélastique peut s'écrire :

$$\left[\mathbf{K}^{uu}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

$\mathbf{K}^{uu}$ et $\mathbf{M}^{uu}$ sont respectivement la matrice de rigidité et la matrice de masse de la structure, et le vecteur $\boldsymbol{U}$ désigne les modes complexes nodaux de vibration.

Dans les travaux de Hu et al. [11], les limites des modèles CLT (*Classical Laminated Theories*), FSDT (*First-order Shear Deformation Theories*) et HSDT (*Hight-order Shear Deformation Theories*) ont été présentées en détails tout en montrant l'avantage du ZZT (*Zig-Zag Theories*). Cependant, ce dernier présente aussi des limitations qui sont liées à des ratios élevés de caractéristiques géométriques et/ou à un contraste des modules de rigidité entre les couches. Pour montrer cela, des cas tests se limitant seulement aux fréquences propres ont été simulés à des fins de comparaison entre les IC-ZZT et les éléments quadratiques 2D et 3D du code commercial ABAQUS. Pour ces derniers, il s'agit des éléments finis suivants :

- CPE8R : élément quadratique 2D formulé en déformations planes avec intégration réduite.

- CPS8R : élément quadratique 2D formulé en contraintes planes avec intégration réduite.
- C3D20R : élément hexaédrique quadratique 3D avec intégration réduite.

Les calculs sont réalisés pour une poutre sandwich encastrée–libre. Les caractéristiques géométriques ainsi que les propriétés des matériaux sont présentés dans le tableau 2.1 et permettent de déduire tous les autres paramètres avec les ratios (E_c/E_f), (L/h) et (h_c/h_f).

Tableau 2.1 Paramètres géométriques et mécaniques de la poutre sandwich

E_f	ρ_f	ρ_c	h	ν_f	ν_c
$6{,}9\times10^{10}$ Pa	2766 kg.m^{-3}	1600 kg.m^{-3}	0,05 m	0,3	0,49

Tableau 2.2 Influence du ratio E_c/E_f ($h_c/h_f = 1$, $L/h = 20$)

Éléments	C3D20R	CPE8R	CPS8R	FSDT IC-ZZT
$\frac{E_c}{E_f}=100$	95,860 597,92 1664,5	**106,71** **665,74** **1851,6**	94,031 586,53 1630,7	93,988 588,51 1645,6

Tableau 2.3 Influence du ratio L/h ($h_c/h_f = 1$, $E_c/E_f = 10^{-5}$)

Éléments	C3D20R	CPE8R	CPS8R	FSDT IC-ZZT
$\frac{L}{h}=4$	300,77 1750,3 5559,1	309,06 1792,0 5701,1	**290,56** **1995,4** **5394,2**	296,72 **1856,4** **5197,3**

Tableau 2.4 Influence du ratio h_c/h_f ($L/h = 20$, $E_c/E_f = 10^{-5}$)

Éléments	C3D20R	CPE8R	CPS8R	FSDT IC-ZZT
$\frac{h_c}{h_f}=10^{-2}$	31,212 148,05 377,50	32,173 **153,10** **391,52**	31,088 147,38 375,50	**27,103** **136,66** **365,87**

Les trois premières fréquences propres présentées dans les tableaux 2.2, 2.3 et 2.4 correspondent aux valeurs convergées. Il en ressort que le IC-ZZT ne convient pas dans toutes ces différentes configurations ; ce qui empêche son utilisation au-delà de certaines limites.

Aussi, les éléments 2D, qu'ils soient formulés en contraintes planes ou en déformations planes, deviennent moins précis parce qu'ils ne prennent pas en compte les effets de la largeur dans le cas du CPE8R (déformations planes) ou les effets d'épaisseur pour le CPS8R (contraintes planes).

Les résultats ci-dessus montrent clairement les limites de ces modèles dédiés à la modélisation des sandwichs viscoélastiques. Pour surmonter ces limitations, une nouvelle discrétisation éléments finis est proposée. Cette dernière stratégie couple le concept solide–coque à l'approche DIAMANT (*Différentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée*). Cette modélisation est présentée dans les paragraphes suivants.

2.3. Nouvelle discrétisation éléments finis du problème de vibrations

L'objectif de cette méthode est de permettre de considérer toutes les configurations géométriques et matérielles, tout en assurant un gain de temps significatif. La modélisation proposée pour discrétiser le problème sous la forme (2.3), et de le résoudre pour n'importe quelle configuration géométrique et matérielle de structures sandwichs, est basée sur les éléments finis proposés par Abed-Meraim et al. [103, 107]. Il s'agit des éléments finis solide–coques linéaire SHB8PS et quadratique SHB20. Une brève description de ceux-ci sera présentée dans cette section.

2.3.1. Cinématique et interpolation

Les éléments SHB8PS et SHB20 sont, respectivement, des éléments hexaédriques à 8 et 20 nœuds formulés en déplacements. Ils possèdent ainsi uniquement trois degrés de liberté de déplacements par nœud. Ils ont des interpolations similaires à celles des éléments finis 3D traditionnels, respectivement, à 8 et 20 nœuds. Contrairement à ces derniers, un certain nombre de modifications ont été introduites lors de leur formulation pour en améliorer les performances. En particulier, une intégration réduite a été adoptée en vue d'augmenter leur efficacité et d'améliorer leurs comportements vis-à-vis de certains verrouillages. Aussi, une direction

privilégiée (suivant le sens de l'épaisseur ζ) est choisie le long de laquelle sont placés les points d'intégration, comme illustré sur la figure 2.2.

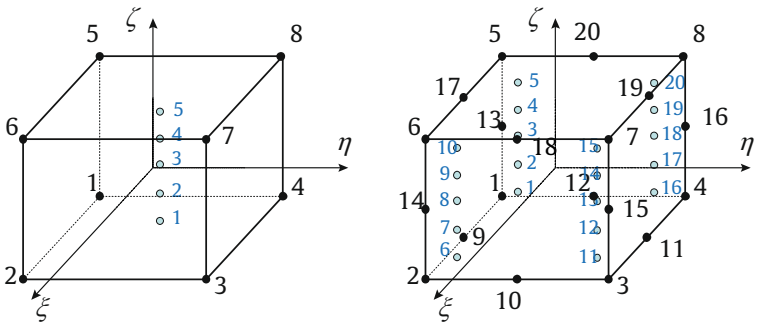


Figure 2.2 Géométrie des éléments de référence SHB8PS et SHB20 avec n_{int}=5

Coordonnées des nœuds du SHB8PS

1 (-1,-1,-1)	**2** (1,-1,-1)	**3** (1, 1,-1)	**4** (-1, 1,-1)
5 (-1,-1, 1)	**6** (1,-1, 1)	**7** (1, 1, 1)	**8** (-1, 1, 1)

Coordonnées des nœuds du SHB20

1 (-1,-1,-1)	**2** (1,-1,-1)	**3** (1, 1,-1)	**4** (-1, 1,-1)
5 (-1,-1, 1)	**6** (1,-1, 1)	**7** (1, 1, 1)	**8** (-1, 1, 1)
9 (0,-1,-1)	**10** (1, 0,-1)	**11** (0, 1,-1)	**12** (-1, 0,-1)
13 (-1,-1, 0)	**14** (1,-1, 0)	**15** (1, 1, 0)	**16** (-1, 1, 0)
17 (0,-1, 1)	**18** (1, 0, 1)	**19** (0, 1, 1)	**20** (-1, 0, 1)

Les coordonnées d'un point x_i, $i=1,2,3$ sont reliées aux coordonnées nodales x_{iI} au moyen des fonctions de forme N_I ($I=1,...,8$, pour le SHB8PS, et $I=1,...,20$, pour le SHB20) comme suit :

$$x_i = x_{iI}\mathrm{N}_I\left(\xi,\eta,\zeta\right) \tag{2.4}$$

De même, les déplacements u_i d'un point sont reliés aux déplacements nodaux u_{iI} par la relation :

$$u_i = u_{iI}\mathrm{N}_I\left(\xi,\eta,\zeta\right) \tag{2.5}$$

Les champs de déplacement peuvent être développés sous la forme d'une somme de termes constants a_{0i}, des termes linéaires en x_i et des termes additionnels qui impliquent des fonctions h_α ($\alpha = 1,...,4$, pour le SHB8PS, et $\alpha = 1,...,16$, pour le SHB20).

Ainsi, pour le SHB8PS, on écrit :

$$\begin{cases} u_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + c_{4i}h_4 \\ h_1 = \eta\zeta,\ h_2 = \xi\zeta,\ h_3 = \xi\eta,\ h_4 = \xi\eta\zeta \end{cases} \tag{2.6}$$

En évaluant l'équation (2.6) aux nœuds de l'élément, on obtient trois systèmes de 8 équations définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i = {} & a_{0i}\mathbf{s} + a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + a_{3i}\mathbf{x}_3 + c_{1i}\mathbf{h}_1 + c_{2i}\mathbf{h}_2 + c_{3i}\mathbf{h}_3 + c_{4i}\mathbf{h}_4 \\ & i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $\mathbf{d}_i$ et $\mathbf{x}_i$ représentent les déplacements et coordonnées nodaux et les vecteurs $\mathbf{S}$ et $\mathbf{h}_\alpha$ sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^T = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \\ \mathbf{h}_1^T = (\ 1,\ 1,-1,-1,-1,-1,\ 1,\ 1) \\ \mathbf{h}_2^T = (\ 1,-1,-1,\ 1,-1,\ 1,\ 1,-1) \\ \mathbf{h}_3^T = (\ 1,-1,\ 1,-1,\ 1,-1,\ 1,-1) \\ \mathbf{h}_4^T = (-1,\ 1,-1,\ 1,\ 1,-1,\ 1,-1) \end{cases} \tag{2.8}$$

Pour obtenir les constantes a_{ji} et $c_{\alpha i}$, on introduit les dérivées des fonctions de forme $\mathbf{N}$ calculées à l'origine du repère de référence :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{N}_{,i}(0) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}_{|\xi=\eta=\zeta=0} \qquad i = 1,2,3 \tag{2.9}$$

Finalement, en utilisant un certain nombre de relations d'orthogonalité, que l'on démontre au préalable pour les vecteurs $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{h}_\alpha$ et $\mathbf{x}_i$, on en déduit :

$$a_{ji} = \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i \ , \qquad c_{\alpha i} = \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{d}_i \tag{2.10}$$

avec

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \frac{1}{8}\left[\mathbf{h}_\alpha - \sum_{j=1}^{3}\left(\mathbf{h}_\alpha^T \cdot x_j\right)\mathbf{b}_j\right] \quad , \quad \alpha=1,...,4 \tag{2.11}$$

Dans le cas du SHB20, on obtient :

$$\begin{cases} u_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + c_{4i}h_4 + c_{5i}h_5 \\ \qquad +c_{6i}h_6 + c_{7i}h_7 + c_{8i}h_8 + c_{9i}h_9 + c_{10i}h_{10} + c_{11i}h_{11} + c_{12i}h_{12} + c_{13i}h_{13} \\ \qquad +c_{14i}h_{14} + c_{15i}h_{15} + c_{16i}h_{16} \\ h_1 = \xi\zeta,\ h_2 = \eta\zeta,\ h_3 = \xi\eta,\ h_4 = \xi^2,\ h_5 = \eta^2,\ h_6 = \zeta^2,\ h_7 = \xi\eta\zeta, \\ h_8 = \xi^2\eta, h_9 = \xi^2\zeta,\ h_{10} = \eta^2\xi,\ h_{11} = \eta^2\zeta,\ h_{12} = \zeta^2\xi,\ h_{13} = \zeta^2\eta, \\ h_{14} = \xi^2\eta\zeta,\ h_{15} = \xi\eta^2\zeta, h_{16} = \xi\eta\zeta^2 \end{cases} \tag{2.12}$$

De même, l'évaluation de (2.12) aux nœuds de l'élément conduit à trois systèmes de 20 équations définis par :

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}_i = a_{0i}\mathbf{s} + a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + a_{3i}\mathbf{x}_3 + c_{1i}\mathbf{h}_1 + c_{2i}\mathbf{h}_2 + c_{3i}\mathbf{h}_3 + \cdots + c_{16i}\mathbf{h}_{16} \\ &\qquad i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $\mathbf{d}_i$ et $\mathbf{x}_i$ représentent les déplacements et coordonnées nodaux et les vecteurs $\mathbf{S}$ et $\mathbf{h}_\alpha$ sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^T = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \\ \mathbf{h}_1^T = (\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1) \\ \mathbf{h}_2^T = (\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0) \\ \mathbf{h}_3^T = (\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \mathbf{h}_4^T = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1) \\ \mathbf{h}_5^T = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \\ \mathbf{h}_6^T = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \\ \mathbf{h}_7^T = (\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \mathbf{h}_8^T = (\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \mathbf{h}_9^T = (\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1) \\ \mathbf{h}_{10}^T = (\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \mathbf{h}_{11}^T = (\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \\ \mathbf{h}_{12}^T = (\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1) \\ \mathbf{h}_{13}^T = (\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0) \\ \mathbf{h}_{14}^T = (\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \mathbf{h}_{15}^T = (\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \mathbf{h}_{16}^T = (\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \end{cases} \tag{2.14}$$

On obtient de façon similaire les constantes a_{ji} et $c_{\alpha i}$ (voir l'équation (2.10)). Néanmoins, les vecteurs $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$ sont remplacés par :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_\alpha = {} & n_{\alpha 1}\left(\mathbf{h}_1^T - \left(\mathbf{h}_1^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 2}\left(\mathbf{h}_2^T - \left(\mathbf{h}_2^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 3}\left(\mathbf{h}_3^T - \left(\mathbf{h}_3^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\mathbf{b}_j^T\right) \\
& + n_{\alpha 4}\left[\left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5}\mathbf{s}^T\right) - \left(\left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5}\mathbf{s}^T\right)\cdot\mathbf{x}_j\right)\mathbf{b}_j^T\right] + n_{\alpha 5}\left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5}\mathbf{s}^T\right) - \left(\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5}\mathbf{s}^T\right)\cdot\mathbf{x}_j\right)\mathbf{b}_j^T\right] \\
& + n_{\alpha 6}\left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5}\mathbf{s}^T\right) - \left(\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5}\mathbf{s}^T\right)\cdot\mathbf{x}_j\right)\mathbf{b}_j^T\right] + n_{\alpha 7}\left(\mathbf{h}_7^T - \left(\mathbf{h}_7^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) \\
& + n_{\alpha 8}\left(\mathbf{h}_8^T - \left(\mathbf{h}_8^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 9}\left(\mathbf{h}_9^T - \left(\mathbf{h}_9^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 10}\left(\mathbf{h}_{10}^T - \left(\mathbf{h}_{10}^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) \\
& + n_{\alpha 11}\left(\mathbf{h}_{11}^T - \left(\mathbf{h}_{11}^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 12}\left(\mathbf{h}_{12}^T - \left(\mathbf{h}_{12}^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 13}\left(\mathbf{h}_{13}^T - \left(\mathbf{h}_{13}^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) \\
& + n_{\alpha 14}\left(\mathbf{h}_{14}^T - \left(\mathbf{h}_{14}^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 15}\left(\mathbf{h}_{15}^T - \left(\mathbf{h}_{15}^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right) + n_{\alpha 16}\left(\mathbf{h}_{16}^T - \left(\mathbf{h}_{16}^T\cdot\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{b}_j^T\right)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

avec les coefficients constants $n_{\alpha\beta}$ explicités par :

$$\left[n_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}
\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Une fois toutes ces interpolations faites pour les champs de déplacement, on peut en déduire les opérateurs gradients discrétisés $\mathbf{B}^u$ relatifs aux éléments SHB8PS et SHB20.

2.3.2. Opérateurs gradients discrétisés

Après ces longues manipulations, les expressions suivantes pour le gradient de déplacement $u_{i,j}$ et pour l'opérateur gradient discrétisé $\mathbf{B}^u$, qui relie le champ de déformation aux déplacements nodaux par la relation $\nabla_{sym}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{B}^u \cdot \mathbf{d}$, peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} u_{i,j} = \left(\mathbf{b}_j^T + h_{\alpha,j}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T\right)\cdot \mathbf{d}_i \\ \mathbf{B}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,1}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,2}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,3}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,2}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,1}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,3}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,1}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,3}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,2}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.17}$$

L'expression (2.17) de l'opérateur gradient discrétisé $\mathbf{B}^u$ permet de traiter séparément chaque mode de déformation afin de construire une forme simple et d'utiliser la projection de type *Assumed Strain*. Cette forme permet également de vérifier toute déficience quant au rang de la matrice de rigidité et de proposer, le cas échéant, une stabilisation adéquate. Il est à noter qu'aucune projection pour l'opérateur gradient discrétisé de l'élément solide–coque SHB20 n'a été nécessaire, car aucun verrouillage significatif n'a été rencontré jusqu'à présent dans les cas tests de référence étudiés. En revanche, l'élément solide–coque linéaire SHB8PS a nécessité un traitement spécifique afin de stabiliser, d'une part, les modes à énergie nulle (*hourglass*) et d'éliminer, d'autre part, les divers verrouillages rencontrés.

2.3.3. Contrôle des modes à énergie nulle et traitement des verrouillages

Comme discuté auparavant, un certain nombre de modifications sont introduites dans la formulation de l'élément SHB8PS afin d'améliorer sa cinématique et d'éliminer certains types de verrouillages. Il s'agit principalement de verrouillages en membrane, en cisaillement transverse et ceux associés à une épaisseur devenant très faible (i.e., grands élancements des éléments). Pour ce faire, on utilise le principe variationnel mixte de Hu–Washizu combiné à la

méthode des déformations postulées, connue sous le nom d'*Assumed Strain Method* (ASM) et proposée par Belytschko et Bindeman [108]. L'originalité dans ce travail est la prise en compte de la dépendance en fréquence du comportement du matériau. Cela permet de considérer et de modéliser des matériaux aussi bien élastiques que viscoélastiques. La matrice de rigidité élémentaire s'exprime alors sous la forme :

$$\mathbf{K}^{uu}{}_{e}(\omega) = \int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{uT} \cdot \mathbf{C}(\omega) \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{u} \; dv \tag{2.18}$$

où $\bar{\hat{\mathbf{B}}}^{u}$ représente la forme projetée de $\mathbf{B}^{u}$ par la méthode ASM (voir l'exemple dans [108]) et définie par :

$$\bar{\hat{\mathbf{B}}}^{u} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^T + \hat{\boldsymbol{X}}_{14}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_2^T + \hat{\boldsymbol{Y}}_{14}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_3^T + \hat{\boldsymbol{Z}}_{13}^T \\ \hat{\mathbf{b}}_2^T + \hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T & \hat{\mathbf{b}}_1^T + \hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{b}}_3^T + \hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_1^T + \hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_3^T + \hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T & \hat{\mathbf{b}}_2^T + \hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T \end{bmatrix};$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha=\beta}^{\gamma} h_{\alpha,x} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}; \quad \hat{\boldsymbol{Y}}_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha=\beta}^{\gamma} h_{\alpha,y} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}; \quad \hat{\boldsymbol{Z}}_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha=\beta}^{\gamma} h_{\alpha,z} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha} \tag{2.19}$$

Dans l'équation (2.19), les vecteurs $\hat{\mathbf{b}}_i$ sont ceux proposés par Flanagan et Belytschko [91] pour remplacer ceux de Hallquist (voir l'équation (2.9)). Ils sont définis par :

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \frac{1}{\mathrm{V}_e} \int_{\mathrm{V}_e} \mathbf{N}_{,i}\left(\xi, \eta, \zeta\right) dv \; ; \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.20}$$

Outre les modifications introduites par l'approche *Assumed Strain* et la projection associée, le choix de placer les points d'intégration du SHB8PS le long de la fibre définie par $\xi = \eta = 0$ contribue aussi à lui donner des caractéristiques proches de celles des coques. Cependant, l'utilisation d'une intégration réduite dans le plan introduit des modes de déformations à énergie nulle qui nécessitent une stabilisation de l'élément. Une étude détaillée a été présentée par Abed-Meraim et Combescure [103] et permet d'avoir un aperçu complet de ces modes de sablier (dits aussi modes parasites). En effet, il est montré qu'en utilisant au moins 2 points

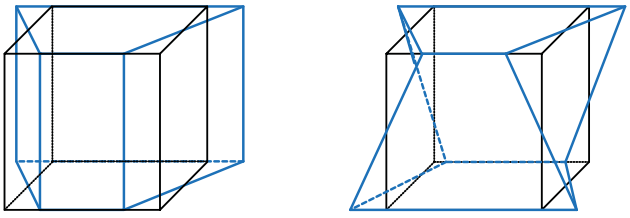
d'intégration, on réduit les modes d'*hourglass* à six. Ceux-ci sont composés des vecteurs $\mathbf{h}_3$ et $\mathbf{h}_4$ illustrés sur la figure 2.3 et donnés par :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{h}_3\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\mathbf{h}_3\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\\mathbf{h}_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mathbf{h}_4\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\mathbf{h}_4\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\\mathbf{h}_4\end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Ces modes sont finalement contrôlés par l'ajout d'une rigidité de stabilisation à la matrice de raideur élémentaire. Cette matrice de stabilisation est définie dans un repère co-rotationnel et quelques étapes clés de son calcul seront présentées dans la section 2.3.4. En plus de l'ASM pour le traitement des verrouillages, la matrice d'élasticité est également modifiée pour améliorer l'immunité de l'élément vis-à-vis du verrouillage lié à une épaisseur très faible. Cela lui confère aussi un comportement proche de celui des coques et permet de considérer des élancements bien supérieurs à ceux des éléments hexaédriques standards. La loi adoptée est donnée par :

$$\mathbf{C}(\omega)=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}+2\mu & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda}+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\end{bmatrix} \text{ avec } \mu=\frac{E^*(\omega)}{2(1+\nu)} \text{ et } \bar{\lambda}=\frac{E^*(\omega)\nu}{1-\nu^2} \tag{2.22}$$

où E^* et ν représentent, respectivement, le module d'Young et le coefficient de Poisson.



h_3 : flexion $\qquad$ h_4 : non physique

Figure 2.3 Modes d'*hourglass* suivant la direction *Ox* pour au moins 2 points d'intégration

Ce choix permet d'éviter certains phénomènes de verrouillage rencontrés avec la matrice constitutive standard et, contrairement à une loi de comportement en contraintes planes, permet de prendre en compte l'énergie de déformation associée aux déformations normales à la surface moyenne de la coque.

2.3.4. Matrices de stabilisation et repères co-rotationnels

Comme décrit ci-haut, six modes à énergie nulle apparaissent et doivent être stabilisés. Pour ce faire, la procédure proposée par Belytschko et Bindeman [108] est utilisée (voir les détails complets dans [103]). Cette approche combine efficacement la technique de stabilisation à la méthode de projection de type *Assumed-strain*. Pour commencer, l'opérateur $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}$ est décomposé comme suit :

$$\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u} = \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12} + \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34}$$

$$\begin{cases} \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^T + \hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_2^T + \hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_3^T + \hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T \\ \hat{\mathbf{b}}_2^T + \hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T & \hat{\mathbf{b}}_1^T + \hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{b}}_3^T + \hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_1^T + \hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_3^T + \hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T & \hat{\mathbf{b}}_2^T + \hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T \end{bmatrix} \\ \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{X}}_{34}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{Y}}_{34}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{Z}}_{3}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.23}$$

Il est connu que $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34}$ s'annule à tous les points d'intégrations de l'élément SHB8PS. Ainsi, si l'opérateur $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}$ est évalué en ces points, il est réduit à $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12}$. La matrice de rigidité élémentaire peut être écrite alors sous la forme :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K}^{uu}{}_{e}(\omega) = \mathbf{K}^{uu}{}_{12}(\omega) + \mathbf{K}^{uu}{}_{Stab}(\omega) \\
&\text{où } \mathbf{K}^{uu}{}_{12}(\omega) = \int_{V_e} \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{12} \cdot \mathbf{C}(\omega) \cdot \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12}\, dv \\
&\text{et } \quad \mathbf{K}^{uu}{}_{Stab}(\omega) = \int_{V_e} \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{12} \cdot \mathbf{C}(\omega) \cdot \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34}\, dv \\
&\qquad\qquad + \int_{V_e} \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{34} \cdot \mathbf{C}(\omega) \cdot \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12}\, dv + \int_{V_e} \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{34} \cdot \mathbf{C}(\omega) \cdot \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34}\, dv
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Puisque la matrice de stabilisation s'annulerait si elle était évaluée aux points d'intégration du SHB8PS, alors on choisit de la calculer dans un repère co-rotationnel. Ce dernier est défini par une matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ qui permet de transformer un vecteur du repère global au repère co-rotationnel. Les composantes des deux premières colonnes de cette matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ désignées par a_{1i} et a_{2i}, sont explicitées par :

$$
\begin{aligned}
&a_{1i} = \Lambda_1^T \cdot \boldsymbol{x}_i \quad , \quad a_{2i} = \Lambda_2^T \cdot \boldsymbol{x}_i , \qquad i = 1,2,3 \\
&\begin{cases} \Lambda_1^T = (-1,1,1,-1,-1,1,1,-1) \\ \Lambda_2^T = (-1,-1,1,1,-1,-1,1,1) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Ensuite, le second vecteur colonne $\boldsymbol{a}_2$ est modifié pour le rendre orthogonal à $\boldsymbol{a}_1$ en y ajoutant le vecteur correctif $\boldsymbol{a}_c$ tel que :

$$
\boldsymbol{a}_1^T \cdot (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{a}_c = -\frac{\boldsymbol{a}_1^T \cdot \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1^T \cdot \boldsymbol{a}_1} \boldsymbol{a}_1 \tag{2.26}
$$

Le troisième vecteur de base $\boldsymbol{a}_3$ est simplement obtenu par le produit vectoriel $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \wedge (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_c)$.

Finalement, la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$, qui transforme un vecteur du système de coordonnées globales vers le système de coordonnées co-rotationnelles, est finalement donnée, après normalisation, par :

$$
R_{1i} = \frac{a_{1i}}{\|\boldsymbol{a}_1\|} \quad , \quad R_{2i} = \frac{a_{2i} + a_{ci}}{\|\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_c\|} \quad , \quad R_{3i} = \frac{a_{3i}}{\|\boldsymbol{a}_3\|} \quad , \qquad i = 1,2,3 \tag{2.27}
$$

Dans ce repère, la matrice de stabilisation $\mathbf{K}^{uu}{}_{Stab}$ devient plus simple à calculer, puisque le repère co-rotationnel est choisi aligné avec le repère de référence de l'élément SHB8PS. On obtient enfin les termes explicités dans [103]. Quelques grandes lignes sont rappelées dans l'annexe B.

À ce stade, le problème de vibrations de n'importe quelle structure peut être discrétisé par les éléments SHB8PS et SHB20. Pour résoudre le problème discrétisé, le solveur dit DIAMANT (*DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée*) développé au sein du LEM3 dont l'avantage par rapport aux autres méthodes est mis en lumière dans [130-132]. Elle est brièvement présentée dans la section 2.4.

2.4. Méthode de résolution du problème discrétisé

Pour résoudre le problème non linéaire aux valeurs propres complexes, résultant de la discrétisation par les éléments finis solide–coques présentés ci-haut, le solveur DIAMANT est adopté. Cette technique présentée dans [130-132] couple l'homotopie à la MAN [128] (*Méthode Asymptotique Numérique*) automatisée par la technique de la DA [133] (*Différentiation Automatique*). Elle permet ainsi de calculer automatiquement des dérivées d'ordres élevés et de considérer des lois viscoélastiques complexes que la MAN ne permettait pas. Plus de détails peuvent être consultés dans [130-132]. Néanmoins, quelques grandes lignes de cette technique sont rappelées dans les paragraphes suivants.

Premièrement, on décompose la matrice de rigidité globale $\mathbf{K}^{uu}(\omega)$:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{uu}(\omega) = \mathbf{K}^{uu}{}_0 + E(\omega)\mathbf{K}^{uu}{}_v \\ \mathbf{K}^{uu}{}_0 = E(0)\mathbf{K}^{uu} \\ E(\omega) = E^*(\omega) - E(\omega) \end{cases} \tag{2.28}$$

Dans l'équation (2.28), $E(0)$ est constante et représente l'élasticité retardée de la structure, c'est-à-dire en faisant abstraction de la viscoélasticité. Les matrices $\mathbf{K}^{uu}{}_0$ et $\mathbf{K}^{uu}{}_v$ sont constantes. Le problème de vibrations est réécrit sous la forme résiduelle :

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{U},\lambda) = \left[\mathbf{K}^{uu}{}_0 + E(\omega)\mathbf{K}^{uu}{}_v - \lambda\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda) + \mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda) = \mathbf{0} \tag{2.29}$$

On commence la résolution du problème non-linéaire dépendant de la fréquence par l'introduction du paramètre d'homotopie $p \in [0,1]$, ce qui transforme l'équation (2.29) en

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\boldsymbol{U},\lambda,p)=\mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)+p\mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)=\left[\mathbf{K}^{uu}{}_{0}-\lambda\mathbf{M}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} \\ \mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda)=E(\omega)\left[\mathbf{K}^{uu}{}_{v}\right]\{\boldsymbol{U}\} \end{cases} \tag{2.30}$$

Ensuite, on pose $\lambda=\omega^2$ et les solutions du problème (2.29) sont recherchées sous forme de séries entières à l'ordre N du paramètre d'homotopie p :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}=\sum_{j=0}^{N}p^j\boldsymbol{U}_j \\ \lambda=\sum_{j=0}^{N}p^j\lambda_j \end{cases} \quad ; \quad 0\le p\le 1 \tag{2.31}$$

On introduit par la suite la technique d'homotopie pour piloter la solution à partir du problème aux valeurs propres réelles $\mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0}$, émanant de $\mathbf{R}(\boldsymbol{U},\lambda,p)=\mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)+p\mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0}$ lorsque $p=0$ (dont les solutions connues correspondent à $(\boldsymbol{U},\lambda)=(\boldsymbol{U}_0,\lambda_0)$), aux solutions du problème aux valeurs propres complexes associé à $p=1$.

Finalement, la branche de solution $\left(\boldsymbol{U}(p),\lambda(p)\right)$ est calculée en utilisant le développement en séries de Taylor $(\mathbf{S}_j,\mathbf{T}_j)$ des fonctions $(\mathbf{S},\mathbf{T})$. On obtient alors le problème à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \boldsymbol{U}_0 \\ {}^{T}\boldsymbol{U}_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_j \\ \kappa \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\{\mathbf{S}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0}}\}-p\{\mathbf{T}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0}}\}-\{\mathbf{T}_{j-1}\} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

où
$$\begin{cases} \mathbf{A}_0=\mathbf{K}^{uu}{}_{0}-\lambda_0\mathbf{M}^{uu}+pE(\lambda_0)\mathbf{K}^{uu}{}_{v} \\ \lambda_j=-\dfrac{{}^{T}\boldsymbol{U}_0\cdot\left[\{\mathbf{S}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0},\lambda_j=0}\}+p\{\mathbf{T}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0},\lambda_j=0}\}+\{\mathbf{T}_{j-1}\}\right]}{{}^{T}\boldsymbol{U}_0\cdot\left[\{\mathbf{S}_{1|\boldsymbol{U}_1=\mathbf{0},\lambda_1=1}\}+p\{\mathbf{T}_{1|\boldsymbol{U}_1=\mathbf{0},\lambda_1=1}\}\right]} \end{cases} \tag{2.32}$$

κ désigne le multiplicateur de Lagrange

La solution complète $(\boldsymbol{U},\lambda)$ est obtenue en utilisant la procédure de continuation qui permet d'aller d'une branche solution à une nouvelle. Plus de détails sur cette méthode peuvent être consultés dans [131].

Cette procédure permet d'extraire exactement les modes propres complexes $\boldsymbol{U}$ et les pulsations propres associées ω, qui ne sont rien d'autres que les racines carrées des valeurs

propres λ. On en déduit enfin les pulsations amorties Ω_n et les facteurs de perte η_n, à chaque rang *n*, par la formule :

$$\omega_n^2 = \Omega_n^2 \left(1+\eta_n\right) \tag{2.33}$$

La méthode est implémentée sous MATLAB. Pour déterminer les solutions, l'utilisateur n'a besoin d'entrer que :

- les matrices $\mathbf{K}^{uu}{}_0$, $\mathbf{K}^{uu}{}_v$ et $\mathbf{M}^{uu}$ obtenues par discrétisation éléments finis,
- la solution de départ $(\boldsymbol{U}_0, \lambda_0)$ (obtenue par résolution du problème aux valeurs propres réelles),
- l'ordre de troncature N,
- et la précision désirée ϵ.

Pour montrer les avantages du modèle proposé, plusieurs cas tests numériques sont proposés. Ces tests d'évaluation concernent des poutres et plaques multicouches.

2.5. Résultats numériques et discussions

Afin d'évaluer les performances des éléments de type solide–coque SHB8PS et SHB20 dans la modélisation des vibrations de structures multicouches, différents tests sur des poutres en configurations géométriques et matérielles variées ont été menés. Les résultats sont confrontés à ceux obtenus avec les éléments finis du code ABAQUS. Les éléments sélectionnés d'ABAQUS sont, respectivement, le C3D8 (hexaèdre à 8 nœuds, intégration exacte) et le C3D20R (hexaèdre à 20 nœuds, intégration réduite). Ce dernier va servir de solution de référence, compte tenu de sa cinématique et ses performances notables. Mais avant d'aller plus loin, les éléments de type solide–coque SHB8PS et SHB20 seront validés sur une poutre sandwich étudiée dans [119, 134].

2.5.1. Tests de validation sur les poutres

2.5.1.1. Poutre sandwich en console

Nous analysons ici les vibrations d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique et faces élastiques (voir figure 2.1). Les résultats obtenus par discrétisation du problème avec les éléments SHB8PS et SHB20 sont comparés à ceux d'ABAQUS, cités ci-haut, et à ceux du FSDT IC-ZZT, donnés dans [134]. Les propriétés géométriques et matérielles de la structure sont présentées dans le tableau 2.5. La propriété viscoélastique du cœur est décrite par une loi d'amortissement constant donnée par :

$$E_c = E_0\left(1+i\eta_c\right) \tag{2.34}$$

où E_0 représente le module de Young de l'élasticité retardée et η_c le facteur de perte du cœur.

Tableau 2.5 Paramètres géométriques et matériaux de la poutre sandwich

Faces élastiques	Module de Young E_f =6,9×10^{10} Pa Coefficient de Poisson $\nu_f = 0,3$ Densité ρ_f =2766 Kg·m^{-3} Épaisseur h_f = 1,524 mm
Cœur viscoélastique	Module de Young E_c =1,794×10^{6} Pa Coefficient de Poisson $\nu_c = 0,3$ Densité ρ_c =968,1 Kg·m^{-3} Épaisseur h_c = 0,127 mm
Géométrie de la poutre	Longueur L = 177,8 mm Largeur b = 12,7 mm

Une analyse modale des cinq premiers modes a permis d'évaluer les propriétés amortissantes (fréquence amortie f et facteur d'amortissement η). Ces résultats sont rapportés dans le tableau 2.6. Seuls les résultats correspondant aux maillages convergés de chaque élément sont présentés. Ces premiers résultats valident non seulement les éléments solide–coques proposés, mais mettent aussi en évidence les avantages de ceux-ci. En effet, peu de degrés de liberté sont généralement nécessaires pour avoir de bons résultats, comparativement aux éléments standards

ayant la même géométrie, tels que rapportés dans le tableau 2.6. Outre le nombre plus faible de degrés de liberté nécessités par les éléments de type solide–coque, la discrétisation avec le SHB8PS requiert aussi quatre fois moins de points d'intégration par élément que les autres discrétisations tridimensionnelles testées (voir le tableau 2.6).

Tableau 2.6 Paramètres d'amortissement associés aux cinq premiers modes de flexion

	SHB8PS		SHB20		C3D8		C3D20R		FSDT IC-ZZT [134]	
Nddl/couche	744		1179		9999		3925		3000	
Npi/élément	2		8		8		8		-	
	f (Hz)	η/η_c	f (Hz)	η/η_c	f (Hz)	η/η_c	f (Hz)	η/η_c	f (Hz)	η/η_c
$\eta_c = 0{,}1$	64,3	0,281	64,7	0,279	63,5	0,281	64,3	0,275	64,1	0,281
	297,6	0,241	298,9	0,241	291,3	0,249	297,9	0,237	296,7	0,242
	748,3	0,152	750,3	0,153	727,8	0,160	747,4	0,149	744,5	0,154
	1405,3	0,087	1407,0	0,088	1360,9	0,092	1400,7	0,086	1395,7	0,089
	2278,1	0,056	2283,6	0,056	2205,8	0,058	2272,5	0,055	2264,5	0,057

2.5.1.2. Contribution à la modélisation de poutres sandwichs viscoélastiques

Les analyses proposées dans cette section ont pour but de montrer l'efficacité des éléments finis de type solide–coque dans la modélisation des poutres sandwichs. En effet, les travaux de Hu et al. [11] ont permis de montrer les limites des modèles FSDT. Au-delà de ces limites, les éléments proposés dans cette étude peuvent constituer un atout important. On considère trois configurations paramétriques dans cette section. Il s'agit des rapports de module de Young du cœur et des faces (E_c/E_f), des rapports de la longueur sur l'épaisseur totale (L/h) et des rapports des épaisseurs du cœur et des faces (h_c/h_f). Rappelons que toutes ces configurations peuvent être décrites avec les données du tableau 2.7. Ainsi, une analyse modale est proposée sur des poutres présentant les configurations suivantes :

- Cœur mince/épais : $0{,}1 \leq h_c/h_f \leq 100$ avec (L/h=20 et E_c/E_f=2×10^{-5})
- Poutre courte/longue : $4 \leq L/h \leq 100$ avec (h_c/h_f =1 et E_c/E_f=2×10^{-5})
- Cœur mou/rigide : $0{,}0001 \leq E_c/E_f \leq 100$ avec (h_c/h_f =1 et L/h=20)

Les résultats obtenus avec les éléments de type solide–coque seront confrontés à ceux des éléments C3D8 et C3D20R du code ABAQUS. Les propriétés géométriques et mécaniques données dans le tableau 2.7 permettent d'obtenir toutes les propriétés des structures analysées.

Tableau 2.7 Propriétés des poutres sandwichs pour l'étude paramétrique

E_f (Pa)	$\rho_f\left(\text{kg.m}^{-3}\right)$	$\rho_c\left(\text{kg.m}^{-3}\right)$	h(m)	ν_f	ν_c
$6{,}9\text{x}10^{10}$	2766	1600	0,05 m	0,3	0,49

La loi viscoélastique du cœur est décrite par le modèle de Maxwell généralisé :

$$G(\omega) = G_0\left(1+\sum_{j=1}^{3}\frac{\Delta_j\omega}{\omega - i\Omega_j}\right) \tag{2.35}$$

où G_0 représente le module de cisaillement de l'élasticité retardée et (Δ_j,Ω_j) les paramètres du modèle donnés dans le tableau 2.8.

Tableau 2.8 Paramètres viscoélastiques du modèle de Maxwell pour l'étude paramétrique

j	Δ_j	$\Omega_j(\text{rad.s}^{-1})$
1	0,746	468,7
2	3,265	4742,4
3	43,284	71532,5

Dans un premier temps, une étude de convergence des trois configurations est faite et seuls les maillages donnant les résultats convergés sont utilisés pour l'analyse modale. Les trois premières fréquences propres des différentes configurations sont présentées dans les tableaux 2.9–2.11. Les résultats en gras dans les tableaux indiquent les limites de certains modèles vis-à-vis des configurations associées. Dans cette plage de paramètres, ces modèles sont moins précis ou requièrent un maillage plus fins, ce qui accroît considérablement le nombre de degrés de liberté et par là le temps de calcul. Il ressort des tableaux 2.9–2.11 que le SHB8PS et SHB20 donnent des résultats très proches de ceux du C3D20R qui est pris comme référence.

Tableau 2.9 Influence du ratio h_c/h_f (L/h = 20, E_c/E_f = 2×10^{-5})

	SHB8PS	SHB20	C3D8	C3D20R
Nddl/couche	378	384	9999	1179
Npi/élément	2	8	8	8
$\frac{h_c}{h_f}=0,1$	21,591 122,45 337,43	21,741 122,79 336,49	21,638 122,43 335,46	21,605 122,19 334,83
$\frac{h_c}{h_f}=1$	13,097 75,838 209,82	13,183 76,327 210,45	13,266 77,080 **212,77**	13,102 75,970 209,63
$\frac{h_c}{h_f}=40$	4,2207 12,285 22,082	4,2822 13,002 22,330	4,4651 **14,142** **25,968**	4,2203 12,281 22,002
$\frac{h_c}{h_f}=100$	4,0513 12,255 21,146	4,1035 12,413 21,409	4,2184 **13,086** **23,361**	4,0507 12,255 21,144

Tableau 2.10 Influence du ratio L/h (h_c/h_f = 1, E_c/E_f = 2×10^{-5})

	SHB8PS	SHB20	C3D8	C3D20R
Nddl/couche	378	384	9999	1179
Npi/élément	2	8	8	8
$\frac{L}{h}=4$	301,43 1822,5 5827,4	301,97 1822,1 5833,9	302,94 **1847,2** **5629,1**	301,93 1822,6 5834,8
$\frac{L}{h}=10$	49,087 300,42 814,33	49,354 300,33 815,20	49,433 301,42 **810,75**	49,132 300,46 815,68
$\frac{L}{h}=40$	3,9490 19,987 53,314	3,9825 20,050 53,536	**4,5161** **24,125** **65,450**	3,9491 19,940 53,299
$\frac{L}{h}=100$	2,8551 3,9592 9,4097	2,8481 3,9818 9,4712	2,8626 6,4666 17,104	2,8472 3,9597 9,4105

Néanmoins, ce dernier requiert beaucoup plus de degrés de liberté pour converger, ce qui nécessite un temps de calcul très important. Il faut noter également que malgré le nombre important de degrés de liberté nécessaires à la convergence du C3D8, les résultats fournis par ce dernier restent relativement moins précis et commencent à s'écarter de la référence notamment lorsque le rapport h_c/h_f devient supérieur à 1 (voir le tableau 2.9). Ces résultats

peuvent s'expliquer par une plus grande sensibilité du C3D8 au phénomène de verrouillage, ce qui tend à surestimer la rigidité de la structure et par là les fréquences propres associées.

Tableau 2.11 Influence du ratio E_c/E_f ($h_c/h_f = 1$, $L/h = 20$)

	SHB8PS	SHB20	C3D8	C3D20R
Nddl/couche	378	384	9999	1179
Npi/élément	2	8	8	8
$\frac{E_c}{E_f} = 10^{-4}$	16,511 80,943 214,56	16,582 81,142 214,92	16,767 **82,799** **219,49**	16,550 81,068 214,44
$\frac{E_c}{E_f} = 10^{-1}$	42,520 252,56 657,94	42,546 252,12 656,99	42,640 253,18 658,87	42,536 252,57 657,30
$\frac{E_c}{E_f} = 100$	95,304 595,94 1666,78	96,016 596,53 1663,2	**97,430** **607,62** **1690,5**	95,860 597,92 1664,5

Une vue globale de l'ensemble de ces analyses de sensibilité (voir tableaux 2.9–2.11) permet de conclure que les éléments solide–coques proposées sont capables de fournir des résultats précis pour les différentes configurations étudiées, tout en conservant des temps de calculs raisonnables.

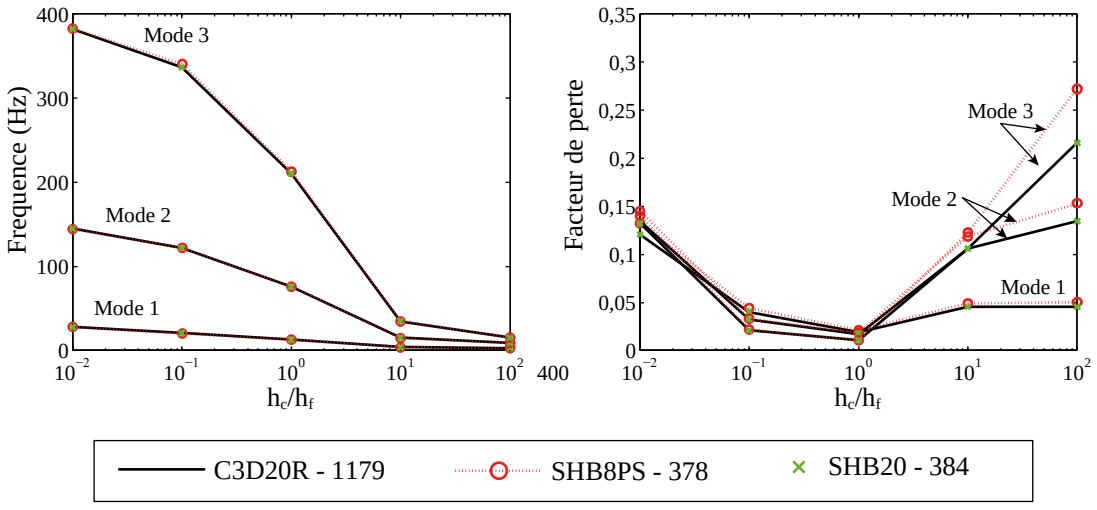


Figure 2.4 Paramètres d'amortissement des trois premiers modes de flexion pour la variation du rapport d'épaisseurs h_c/h_f

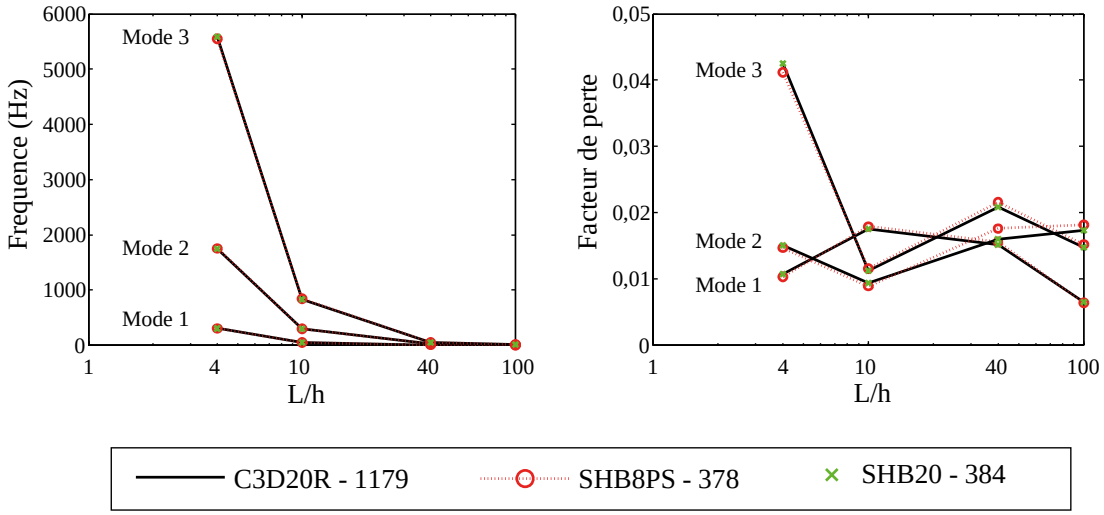


Figure 2.5 Paramètres d'amortissement des trois premiers modes de flexion pour la variation du rapport d'élancement L/h

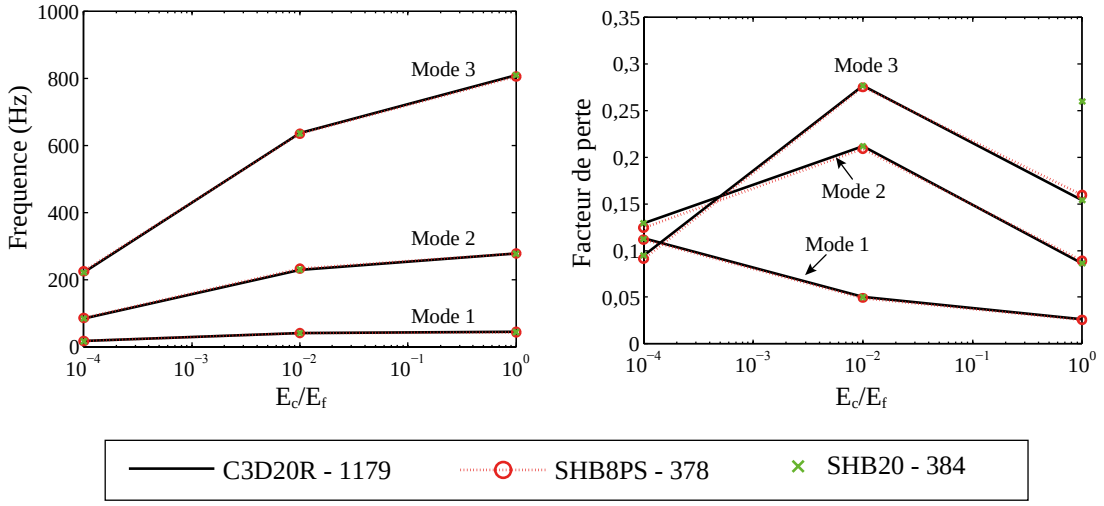


Figure 2.6 Paramètres d'amortissement des trois premiers modes de flexion pour la variation du rapport de rigidité E_c/E_f

Pour compléter l'étude paramétrique des poutres sandwichs, les propriétés amortissantes sont évaluées dans les différentes configurations ci-dessus. Les fréquences amorties et les facteurs de perte obtenus avec les éléments de type solide–coque SHB8PS et SHB20 sont confrontés à ceux du C3D20R et sont représentés sur les figures 2.4, 2.5 et 2.6. Nous montrons une fois encore que les éléments solide–coques présentent de bonnes aptitudes dans ce type de

modélisation. Cette analyse montre l'avantage de ces éléments dans la modélisation des vibrations de structures sandwichs sur une large gamme de variations des paramètres géométriques et matériaux.

L'intérêt de l'étude paramétrique a été ensuite montré au travers d'une application des modèles poutres.

2.5.2. Application du modèle poutre : modélisation d'un rail

Nous considérons ici un modèle simplifié d'un rail sur traverses sandwichs à cœur viscoélastique. Cette analyse illustrative est proposée pour montrer l'intérêt du modèle proposé dans la modélisation de structures réelles. Les traverses peuvent être assimilées à des poutres courtes et sont fixées sur un fond supposé rigide. On s'intéresse aux modes de flexion par flambage ; modes qui sont susceptibles de causer le déraillement d'un train. Ce système peut contribuer à l'amortissement des vibrations causées par les trains. Le rail et les faces élastiques des transverses sont en acier dont les propriétés du matériau sont données ci-après : E_{acier}=210 GPa, ν_{acier}=0,3 et ρ_{acier}=7800 Kg.m^{-3}. Le cœur viscoélastique des traverses est en ISD112 dont les paramètres sont présentés plus haut (voir les tableaux 2.7 et 2.8). Les paramètres géométriques sont indiqués sur la figure 2.7.

L'analyse de la structure a consisté en l'évaluation des propriétés amortissantes qui sont les fréquences amorties et les facteurs de perte. Les trois premiers modes de déformation sont représentés sur la figure 2.8. Les résultats obtenus avec les formulations solide–coques proposées sont comparés à ceux du C3D20R, tels que présentés dans le tableau 2.12. On remarque que peu de degrés de liberté sont nécessaires pour obtenir un résultat proche de la référence, ce qui constitue un gain important en temps de calcul.

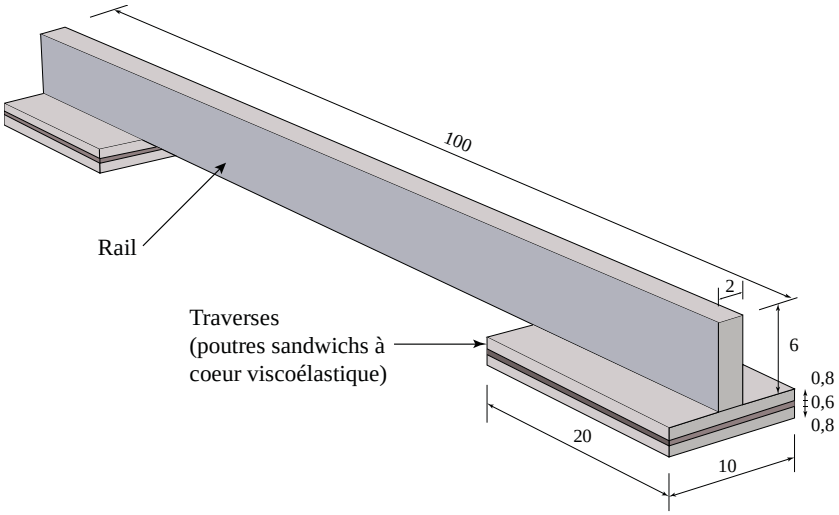


Figure 2.7 Rail sur traverses constituées de poutres courtes à cœur viscoélastique

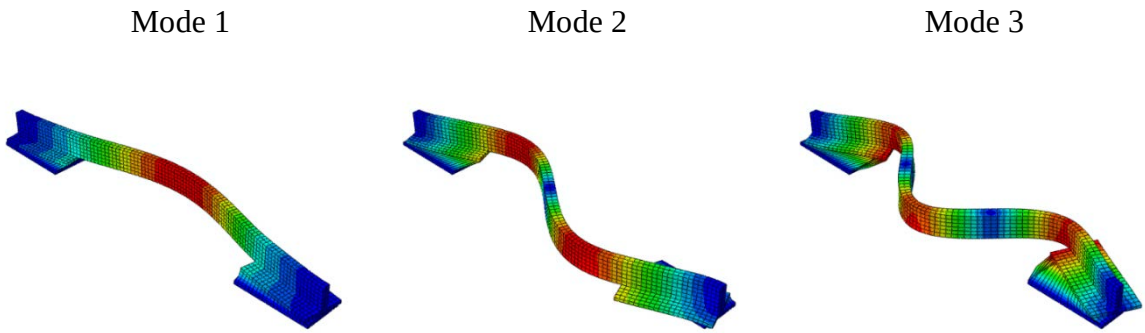


Figure 2.8 Trois premiers modes de flexion par flambage du rail sur traverses sandwichs

Tableau 2.12 Fréquences propres et paramètres amortissants associés aux trois premiers modes de flexion par flambage du rail sur transverses sandwichs

	SHB8PS			SHB20			C3D20R		
Nddl total	1926			4341			9168		
Npi/élément	2			8			8		
	f_0(Hz)	f(Hz)	η	f_0(Hz)	f(Hz)	η	f_0(Hz)	f(Hz)	η
1	163,17	165,23	$6{,}22\times10^{-2}$	163,90	166,34	$5{,}50\times10^{-2}$	163,07	165,31	$5{,}51\times10^{-2}$
2	361,62	370,80	$1{,}08\times10^{-1}$	359,60	368,81	$9{,}95\times10^{-2}$	357,28	366,83	$1{,}03\times10^{-1}$
3	620,16	637,13	$9{,}62\times10^{-2}$	609,20	624,04	$9{,}80\times10^{-2}$	604,54	617,78	$9{,}83\times10^{-2}$

Les résultats intéressants obtenus nous ont motivé à étendre l'étude aux plaques et coques sandwichs.

2.5.3. Cas des plaques sandwichs

Dans cette partie, nous analysons des modèles de plaques sandwichs encastrées sur tous leurs bords, tel que montré sur la figure 2.9. L'influence des hypothèses géométriques sur les paramètres amortissants sera mise en lumière à travers les tests ci-dessous :

- Cas 1 : Épaisseur totale h fixe, épaisseur du cœur h_c variant entre 0 et $h = \dfrac{a}{20}$
- Cas 2 : Rapport d'épaisseurs $r = \dfrac{h_c}{h_f}$ fixe, épaisseur totale variant entre 0 et $h = \dfrac{a}{10}$
- Cas 3 : Épaisseurs totale h et du cœur h_c fixes, position de cœur variant entre 0 et $\dfrac{h - h_c}{2}$

Dans toutes ces configurations, les couches élastiques sont en aluminium et les couches viscoélastiques en ISD112 à 27°C obéissant à la loi viscoélastique décrite par le modèle de Maxwell généralisé :

$$G(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\Delta_j \omega}{\omega - i\Omega_j} \right) \tag{2.36}$$

où G_0 représente le module de cisaillement de l'élasticité retardée et (Δ_j, Ω_j) les paramètres du modèle donnés dans le tableau 2.8.

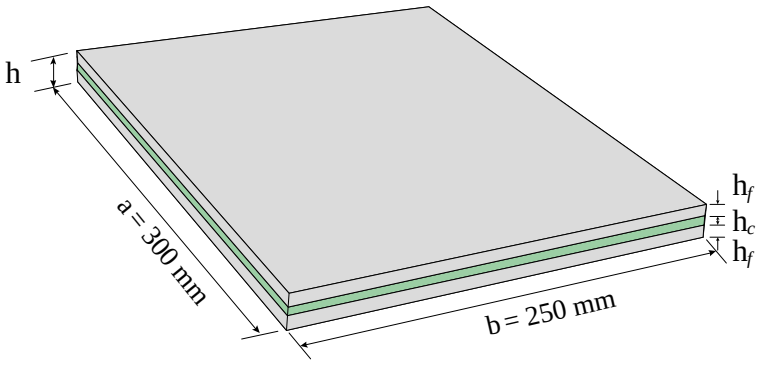


Figure 2.9 Plaque sandwich rectangulaire à cœur viscoélastique et faces élastiques encastrée sur tous ses bords

2.5.3.1. Cas 1 : épaisseur totale h fixe, épaisseur du cœur h_c variant entre 0 et $h = \frac{a}{20}$

Dans ce modèle, nous considérons la plaque schématisée par la figure 2.9 avec une épaisseur totale fixe et un cœur d'épaisseur variant de 0 à h. Les propriétés amortissantes sont portées sur la figure 2.10. On remarque dans un premier temps que les éléments solide–coques nécessitent peut de degrés de liberté pour donner des résultats aussi précis que ceux du C3D20R, l'élément standard d'ABAQUS. En effet, nous avons utilisé 5 fois plus de degrés de liberté pour discrétiser la plaque sandwich avec l'élément C3D20R que l'élément SHB8PS.

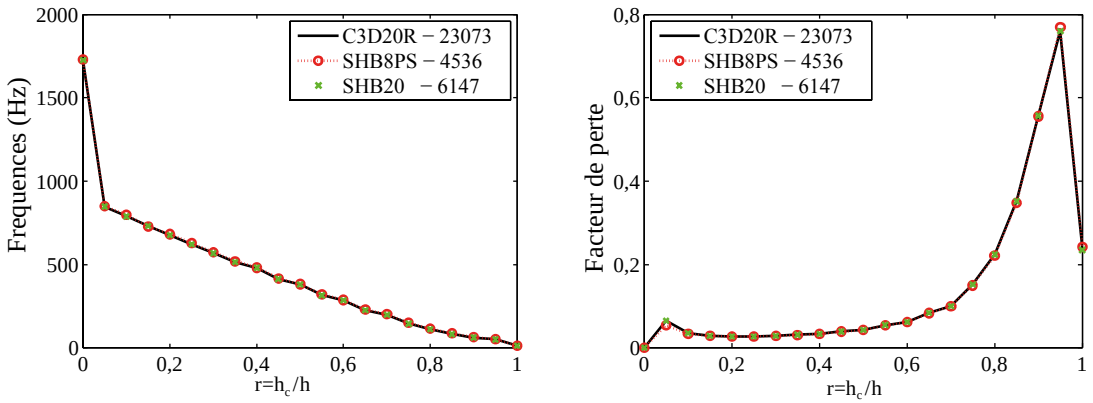


Figure 2.10 Paramètres amortissants : épaisseur totale h fixe, épaisseur du cœur $h_c \in [0, h]$

Comparé à l'élément quadratique solide–coque SHB20, 4 fois plus de degrés de liberté ont été nécessaires à l'élément C3D20R du code ABAQUS. Il en découle un gain en termes de coût de calcul. Cette analyse reste valable pour les trois configurations de plaque présentées un peu plus bas. Par ailleurs, une analyse en termes d'amortissement montre une décroissance de la fréquence et une augmentation du facteur de perte. Le premier est dû à la diminution de la réduction de la rigidité de la structure et le second à l'augmentation du cisaillement dans le cœur viscoélastique. Cependant, pour une structure purement viscoélastique, l'amortissement chute. Cela est dû à la faiblesse du cisaillement puisqu'en l'absence d'un matériau plus rigide sur les faces, le matériau viscoélastique présente une déformation en flexion plus importante.

2.5.3.2. Cas 2 : rapport d'épaisseurs $r = \frac{h_c}{h_f}$ fixe, épaisseur totale h variant entre $\frac{a}{100}$ et $\frac{a}{10}$

Ici, nous proposons une étude orientée vers l'influence de l'élancement de la plaque. Pour ce faire, le rapport d'épaisseurs $r = \frac{h_c}{h_f}$ est supposé constant et l'épaisseur totale varie entre $\frac{a}{100}$ et $\frac{a}{10}$. Les propriétés amortissantes présentées sur la figure 2.11 montrent une chute de la fréquence et une croissance du facteur de perte lorsque l'élancement $r = \frac{a}{h}$ augmente. En effet, le cisaillement est plus important dans les structures élancées puisque la flexion est plus tolérée.

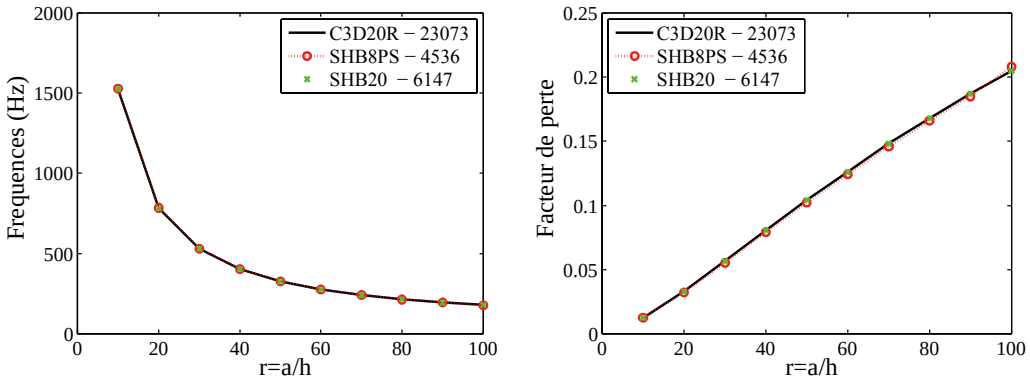


Figure 2.11 Paramètres amortissants : rapport d'épaisseurs $r=h_c/h$ fixe, épaisseur totale $h \in [0, a/10]$

2.5.3.3. Cas 3 : Épaisseurs totale h et du cœur h_c fixes, position de cœur variant entre 0 et $\frac{h-h_c}{2}$

Dans cet exemple, nous recherchons l'influence de la position de la couche viscoélastique sur les paramètres amortissants d'une structure sandwich. Nous considérons une plaque sandwich d'épaisseur totale $h=\frac{a}{20}$ constante ainsi que celle de la couche viscoélastique. On fait varier ensuite la position de la ligne moyenne de cette dernière du centre de la structure (correspondant à la position 0) à $\frac{h-h_c}{2}$ (qui représente un matériau viscoélastique proche de la face de la structure). L'analyse des paramètres amortissants portés sur la figure 2.12 montre une augmentation de la fréquence et une chute du facteur de perte au fur et à mesure que la couche viscoélastique s'éloigne de la ligne médiane du matériau sandwich. Ces résultats montrent que la position optimale de la couche viscoélastique reste le centre de la structure sandwich.

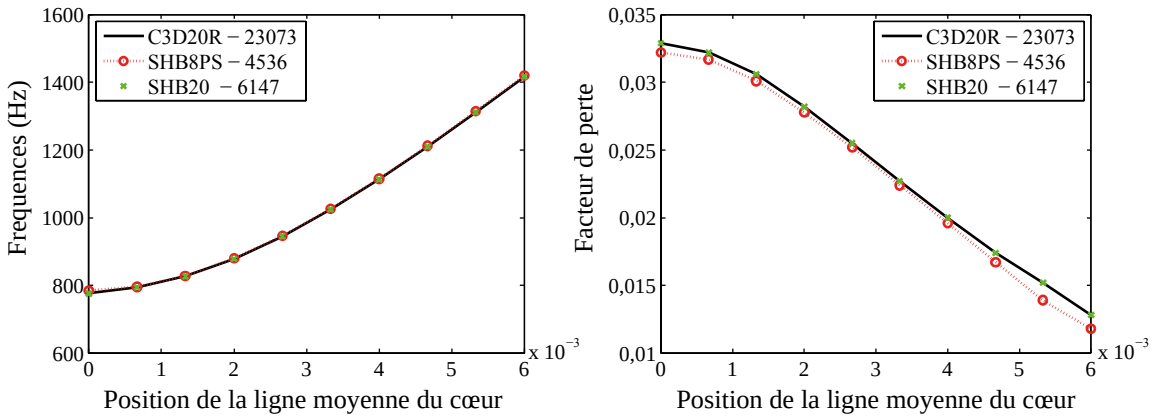


Figure 2.12 Paramètres amortissants : position du cœur variant du centre à la face.

2.6. Conclusions

Une modélisation basée sur les éléments finis de type solide–coque dédiée à l'analyse des vibrations de structures sandwichs a été présentée. Dans un premier temps, les limites des modèles 2D ont été ressorties afin de mieux appréhender la modélisation à venir. Les éléments SHB8PS et SHB20 proposés par Abed-Meraim et al. [103, 107] ont été adoptés. Une extension de ces formulations d'éléments finis prenant en compte la dépendance en fréquence provenant des matériaux viscoélastiques a été introduite. Pour résoudre le problème non-linéaire en fréquence obtenu après discrétisation, l'approche DIAMANT [130-132] a été adoptée compte tenu de sa robustesse et de sa précision. La validation a ensuite été faite en comparant nos résultats à ceux de l'élément quadratique C3D20R du code ABAQUS, pris comme référence. Il en ressort que les résultats présentés ci-haut montrent clairement les avantages de l'approche proposée. En effet, avec relativement peu d'éléments, comparativement aux éléments finis 3D traditionnels ayant les mêmes cinématiques, on arrive à des résultats proches de ceux donnés par un élément fini 3D à 20 nœuds. Ainsi, l'analyse du nombre de degrés de liberté montre que les éléments solide–coques SHB8PS et SHB20 sont moins coûteux que les éléments quadratiques classiques, tel que le C3D20R. Afin de compléter la modélisation des vibrations de structures multicouches par l'introduction d'un contrôle actif, une extension de ces formulations éléments finis à des structures piézoélectriques sera proposée dans le chapitre 3 par l'ajout de degrés de liberté piézoélectriques additionnels.

Chapitre 3 : Formulation d'éléments finis de type solide–coque piézoélectriques

Sommaire - Chapitre 3

3.1. Introduction 85

3.2. Équations constitutives et discrétisation des problèmes 86

3.2.1. Équations constitutives 86

3.2.2. Problèmes discrétisés 87

3.3. Formulation des éléments finis SHB8PSE et SHB20E 88

3.3.1. Cinématique et interpolation 88

3.3.2. Opérateurs gradients discrétisés 89

3.3.3. Contrôle des modes à énergie nulle et traitement des verrouillages 89

3.4. Validation et applications 91

3.4.1. Cas tests statiques 91

3.4.2. Problèmes aux valeurs propres 99

3.5. Conclusions 107

3.1. Introduction

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de générer un potentiel électrique lorsqu'ils sont soumis à un chargement mécanique. Ils ont également l'aptitude de se déformer lorsqu'un potentiel électrique leur est appliqué. Ces propriétés leurs confèrent des intérêts dans plusieurs domaines d'ingénierie, où ils sont utilisés comme transducteurs servant, selon l'utilisation, de capteurs ou d'actionneurs. Ainsi, ils peuvent être utilisés pour contrôler les vibrations [34, 135, 136], pour contrôler les formes des structures [137-139], réduire ou amplifier les bruits [140-142]. On les retrouve également dans les applications médicales, tels que les pacemakers [143], dans le génie civil [144-146], où ils servent à ausculter l'état de santé des ouvrages, et dans bien d'autres domaines. Plusieurs travaux dans la littérature se sont attelés à la modélisation de tels matériaux. Certains auteurs, tels que [51, 147-150], ont proposé un couplage électromécanique complet en y greffant aux éléments finis classiques des degrés de liberté électriques. Pour réduire les degrés de liberté, ces auteurs ont adopté la condensation de *Guyan*. Cette condensation est appliquée sur le problème discrétisé. Ces modèles ont l'avantage de décrire de manière plus ou moins fidèle le phénomène de couplage électromécanique, mais aboutissent le plus souvent à des modèles très coûteux en termes de temps de calcul. Dans un souci d'améliorer le gain de temps de calcul, d'autres auteurs ont proposé des modèles basés sur la condensation sur la loi constitutive [7, 52]. Ces modèles ont l'effet escompté mais ne décrivent généralement pas de manière fidèle le couplage électromécanique. Par ailleurs, certains travaux de la littérature, dont [7, 34, 148, 151, 152], ont proposé des modèles multicouches utilisant ou non la condensation des degrés de liberté. Ces modèles réduisent de manière très significative le temps de calcul, mais sont généralement limités à des configurations géométriques bien déterminées. Par ailleurs, rappelons que les matériaux piézoélectriques sont le plus souvent utilisés sous forme de patchs localisés [144]. Ils côtoient ainsi des couches aussi bien fines qu'épaisses. Il est donc nécessaire de disposer de modèles éléments finis décrivant fidèlement le couplage électromécanique, pour n'importe quelle configuration géométrique, tout en assurant un temps de calcul raisonnable. Partant des avantages des éléments SHB8PS et SHB20 proposés par Abed-Meraim et al. [103, 107], nous proposons ici de les étendre pour formuler de nouveaux éléments piézoélectriques baptisés "SHB8PSE" et "SHB20E". Un degré de liberté supplémentaire, de type piézoélectrique, a donc été greffé à chaque nœud des éléments de base et les mêmes procédures de traitement de verrouillages ont été adoptées. Plusieurs cas tests,

allant de simples poutres sandwichs à des coques multicouches, sont menés et validés par rapport aux résultats de référence de la littérature et ceux donnés par les éléments hexaédriques quadratiques C3D20E du code ABAQUS.

3.2. Équations constitutives et discrétisation des problèmes

3.2.1. Équations constitutives

Lorsqu'un matériau piézoélectrique génère de l'électricité sous chargement mécanique, on parle de piézoélectricité directe et la couche piézoélectrique sert de capteur. Inversement, lorsqu'une structure se déforme sous l'effet d'une charge électrique, on parle de piézoélectricité inverse et la couche piézoélectrique est utilisée comme actionneur. Ces deux propriétés permettent de coupler les champs mécaniques et électriques par les relations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{E} \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ désignent, respectivement, le tenseur de contrainte et de déformation. $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ représentent le déplacement et le champ électrique. $\mathbf{C}$, $\mathbf{e}$ et $\boldsymbol{\kappa}$ sont, respectivement, la matrice d'élasticité, la matrice piézoélectrique et la permittivité diélectrique. Les formes discrétisées $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ et $\{\boldsymbol{E}\}$, respectivement, des tenseurs de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du vecteur champ électrique $\boldsymbol{E}$ sont reliées aux déplacements $\{\boldsymbol{u}\}$ et au potentiel électrique $\{\boldsymbol{\phi}\}$ par les opérateurs gradients discrétisés $\left[\mathbf{B}^u\right]$ et $\left[\mathbf{B}^\phi\right]$ par les formules :

$$\begin{cases} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left[\mathbf{B}^u\right]\{\boldsymbol{u}\} \\ \{\boldsymbol{E}\} = \left[\mathbf{B}^\phi\right]\{\boldsymbol{\phi}\} \end{cases} \tag{3.2}$$

Dans ce travail, $\left[\mathbf{B}^u\right]$ et $\left[\mathbf{B}^\phi\right]$ sont obtenus par discrétisation éléments finis SHB8PSE et SHB20E. Ils sont détaillés dans la section 3.3.2.

3.2.2. Problèmes discrétisés

Le principe variationnel gouvernant les matériaux piézoélectriques est décrit par le principe d'Hamilton [147], dans lequel le couplage électromécanique est pris en compte :

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathrm{V}} \rho \ddot{\boldsymbol{u}}^2 \cdot \delta \boldsymbol{u} dv - \int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{f}_v \cdot \delta \boldsymbol{u} dv + \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{f}_s \cdot \delta \boldsymbol{u} ds + \delta \boldsymbol{u} \boldsymbol{f}_p \\ &= -\int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{D} : \delta \boldsymbol{E}\, dv + \int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{q}_v \cdot \delta \phi dv + \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{q}_s \cdot \delta \phi ds + \delta \phi \boldsymbol{q}_p \end{aligned} \tag{3.3}$$

où ρ est la densité ; $\boldsymbol{q}_v$, $\boldsymbol{q}_s$ et $\boldsymbol{q}_p$ représentent respectivement les charges électriques volumiques, surfaciques et ponctuelles ; $\boldsymbol{f}_v$, $\boldsymbol{f}_s$ et $\boldsymbol{f}_p$ désignent respectivement les forces volumiques, surfaciques et ponctuelles. La discrétisation éléments finis du problème (3.3) conduit généralement au système d'équations :

$$\begin{cases} \left[\mathbf{M}^{uu}\right]\left\{\ddot{\boldsymbol{U}}\right\} + \left[\mathbf{K}^{uu}\right]\{\boldsymbol{U}\} + \left[\mathbf{K}^{u\phi}\right]\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{F}\} \\ \left[\mathbf{K}^{\phi u}\right]\{\boldsymbol{U}\} + \left[\mathbf{K}^{\phi\phi}\right]\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{Q}\} \end{cases} \tag{3.4}$$

Les différents matrices et vecteurs de (3.4) sont explicités dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Formes explicites des vecteurs et matrices résultants du couplage électromécanique

$\left[\mathbf{M}^{uu}\right] = \int_V \left[\boldsymbol{N}^u\right]^T \rho \left[\boldsymbol{N}^u\right] dV$	Matrice de masse
$\left[\mathbf{K}^{uu}\right] = \int_V \left[\mathbf{B}^u\right]^T [\mathbf{C}] \left[\mathbf{B}^u\right] dV$	Matrice de rigidité
$\left[\mathbf{K}^{\phi\phi}\right] = -\int_V \left[\mathbf{B}^\phi\right]^T [\boldsymbol{\kappa}] \left[\mathbf{B}^\phi\right] dV$	Matrice de "*rigidité*" diélectrique
$\left[\mathbf{K}^{u\phi}\right] = \int_V \left[\mathbf{B}^u\right]^T [\mathbf{e}]^T \left[\mathbf{B}^\phi\right] dV$; $\left[\mathbf{K}^{\phi u}\right] = \left[\mathbf{K}^{u\phi}\right]^T$	Matrice de "*rigidité*" piézoélectrique
$\{\boldsymbol{F}\} = \int_V \left[\boldsymbol{N}^u\right]^T \{\boldsymbol{f}_v\} dV + \int_S \left[\boldsymbol{N}^u\right]^T \{\boldsymbol{f}_s\} dS + \boldsymbol{f}_p$	Vecteur force
$\{\boldsymbol{Q}\} = -\int_V \left[\boldsymbol{N}^\phi\right]^T \{\boldsymbol{q}_v\} dV - \int_S \left[\boldsymbol{N}^\phi\right]^T \{\boldsymbol{q}_s\} dS - \boldsymbol{q}_p$	Vecteur charge électrique

3.3. Formulation des éléments finis SHB8PSE et SHB20E

3.3.1. Cinématique et interpolation

Les éléments finis de type solide–coque SHB8PSE et SHB20E sont des extensions des éléments de type solide–coque présentés dans [103, 107]. À ceux-ci, on ajoute des degrés de liberté piézoélectriques à chaque nœud. Les grandes lignes de la formulation sont présentées ci-dessous, en rappelant de façon brève celle des éléments SHB8PS et SHB20.

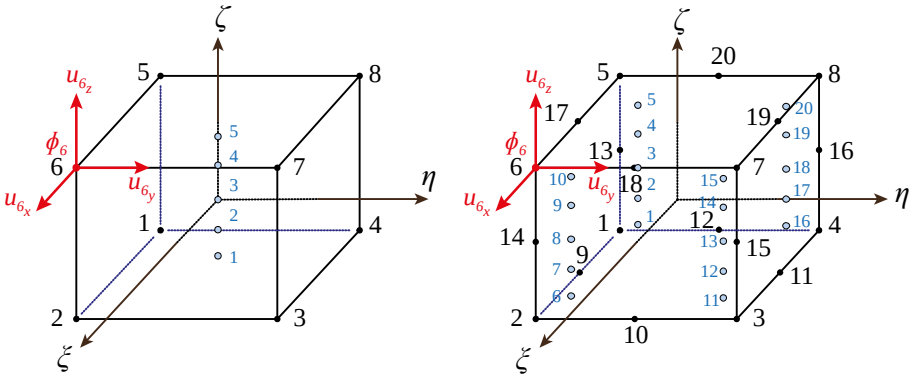


Figure 3.1 Géométrie de référence des éléments finis SHB8PSE et SHB20E et positionnement des points d'intégration (n_{int}=5)

Les éléments SHB8PSE et SHB20E sont respectivement des éléments hexaédriques à 8 et 20 nœuds. Ils disposent par nœud de trois degrés de liberté de déplacements et un degré de liberté électrique. Une direction privilégiée est choisie suivant l'épaisseur, normale au plan moyen des éléments, comme indiqué sur la figure 3.1. Une intégration réduite dans le plan est utilisée (c.à.d. $1\times n_{\text{int}}$ pour le SHB8PSE et $4\times n_{\text{int}}$ pour le SHB20E) pour augmenter l'efficacité des éléments et améliorer leur comportement vis-à-vis de certains verrouillages. Dans l'un et l'autre cas, les coordonnées spatiales x_i sont reliées aux coordonnées nodales x_{iI} par les fonctions de formes $N^u{}_I$:

$$x_i = x_{iI} N^u{}_I \left(\xi, \eta, \zeta\right) \tag{3.5}$$

où $i = 1,2,3$ et I représente le nombre de nœuds de l'élément fini correspondant. De même, les champs de déplacement u_i et de potentiel électrique ϕ s'écrivent :

$$\begin{cases} u_i = u_{iI} N^u{}_I(\xi,\eta,\zeta) \\ \phi = \phi_I N^\phi{}_I(\xi,\eta,\zeta) \end{cases} \tag{3.6}$$

3.3.2. Opérateurs gradients discrétisés

Les opérateurs gradients discrétisés des éléments finis SHB8PSE et SHB20E s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{B}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,1}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,2}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,3}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,2}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,1}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,3}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,1}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,3}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,2}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,1}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,2}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,3}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

où $\mathbf{b}_j^T$, $h_{\alpha,j}$ et $\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T$ ont été explicités dans la section 2.3.2. Néanmoins, plus de détails peuvent être consultés dans [100, 103, 107].

Tout comme le SHB20, le SHB20E ne souffre pas de phénomènes de verrouillage. En revanche, le SHB8PSE a nécessité un traitement spécifique, en suivant la procédure utilisée pour l'élément SHB8PS, afin d'éliminer les verrouillages associés. Une attention particulière a été portée à l'opérateur gradient discrétisé électrique $\mathbf{B}^\phi$.

3.3.3. Contrôle des modes à énergie nulle et traitement des verrouillages

Rappelons dans un premier temps que les vecteurs $\mathbf{b}_i$, originalement de la forme de *Hallquist* dans (3.7), sont remplacés par les vecteurs $\hat{\mathbf{b}}_i$ de Flanagan et Belytschko [91] :

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \frac{1}{V_e}\int_{V_e} \mathbf{N}^u{}_{,i}(\xi,\eta,\zeta)\, dV \tag{3.8}$$

Les opérateurs gradients discrétisés $\mathbf{B}^u$ et $\mathbf{B}^\phi$ sont ensuite remplacés par $\hat{\mathbf{B}}^u$ et $\hat{\mathbf{B}}^\phi$, respectivement. Ainsi, en utilisant le principe variationnel mixte de Hu–Washizu combiné à la méthode *Assumed Strain* présentée dans [108], l'opérateur gradient discrétisé $\hat{\mathbf{B}}^u$ est transformé en $\bar{\hat{\mathbf{B}}}^u$. Ce dernier est ensuite décomposé en deux opérateurs $\bar{\hat{\mathbf{B}}}^u_{12}$ et $\bar{\hat{\mathbf{B}}}^u_{34}$ définis par :

$$\left[\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12}\right]=\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^T+\hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_2^T+\hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_3^T+\hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T \\ \hat{\mathbf{b}}_2^T+\hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T & \hat{\mathbf{b}}_1^T+\hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{b}}_3^T+\hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_1^T+\hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{b}}_3^T+\hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T & \hat{\mathbf{b}}_2^T+\hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left[\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34}\right]=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{X}}_{34}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{Y}}_{34}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{Z}}_{3}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{\beta\gamma}=\sum_{\alpha=\beta}^{\gamma} h_{\alpha,x}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha};\ \hat{\boldsymbol{Y}}_{\beta\gamma}=\sum_{\alpha=\beta}^{\gamma} h_{\alpha,y}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha};\ \hat{\boldsymbol{Z}}_{\beta\gamma}=\sum_{\alpha=\beta}^{\gamma} h_{\alpha,z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}$$

La matrice de rigidité élémentaire s'obtient alors :

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}^{uu}{}_{e}=\mathbf{K}^{uu}{}_{12}+\mathbf{K}^{uu}{}_{Stab} \\ &\text{où}\ \ \mathbf{K}^{uu}{}_{12}=\int_{V_e}\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{12}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12}\,dV \\ &\quad\mathbf{K}^{uu}{}_{Stab}=\int_{V_e}\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{12}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34}\,dV \\ &\qquad\qquad+\int_{V_e}\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{34}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{12}\,dV+\int_{V_e}\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u\,T}_{34}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{u}_{34}\,dV \end{aligned} \tag{3.10}$$

La matrice de stabilisation de la rigidité en déplacement $\mathbf{K}^{uu}{}_{Stab}$ est évaluée dans le repère co-rotationnel explicité par les équations (2.25–2.27).

Cette procédure a également été adoptée pour le traitement des verrouillages qui peuvent résulter du couplage électromécanique. Ainsi, pour évaluer les matrices de "*rigidité*" piézoélectrique $\mathbf{K}^{u\phi}$ et diélectrique $\mathbf{K}^{\phi\phi}$, l'opérateur gradient discrétisé électrique $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}$ est d'abord modifié par substitution des vecteurs $\mathbf{b}_i$ par $\hat{\mathbf{b}}_i$. Il est ensuite projeté par la méthode *Assumed Strain* pour en construire un opérateur $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}$, lequel est décomposé additivement en deux parties $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{12}$ et $\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{34}$ définies par :

$$\overline{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{12}=\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^T+\hat{\boldsymbol{X}}_{12}^T \\ \hat{\mathbf{b}}_2^T+\hat{\boldsymbol{Y}}_{12}^T \\ \hat{\mathbf{b}}_3^T+\hat{\boldsymbol{Z}}_{12}^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{34}=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{X}}_{34}^T \\ \hat{\boldsymbol{Y}}_{34}^T \\ \hat{\boldsymbol{Z}}_{3}^T \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

On obtient finalement les matrices élémentaires $\mathbf{K}^{u\phi}_{e}$ et $\mathbf{K}^{\phi\phi}_{e}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K}^{u\phi}{}_{e} = \mathbf{K}^{u\phi}{}_{12} + \mathbf{K}^{u\phi}{}_{Stab} \\
&\text{où}\quad \mathbf{K}^{u\phi}{}_{12} = \int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{u\ T}_{12} \cdot \mathbf{e}^{T} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{12}\, dV \\
&\qquad \mathbf{K}^{u\phi}{}_{Stab} = \int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{u\ T}_{12} \cdot \mathbf{e}^{T} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{34}\, dV \\
&\qquad\qquad + \int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{u\ T}_{34} \cdot \mathbf{e}^{T} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{12}\, dV + \int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{u\ T}_{34} \cdot \mathbf{e}^{T} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{34}\, dV \\
&\text{et} \\
&\mathbf{K}^{\phi\phi}{}_{e} = \mathbf{K}^{\phi\phi}{}_{12} + \mathbf{K}^{\phi\phi}{}_{Stab} \\
&\text{où}\quad \mathbf{K}^{\phi\phi}{}_{12} = -\int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi\ T}_{12} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{12}\, dV \\
&\qquad \mathbf{K}^{\phi\phi}{}_{Stab} = -\int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi\ T}_{12} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{34}\, dV \\
&\qquad\qquad - \int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi\ T}_{34} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{12}\, dV - \int_{V_e} \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi\ T}_{34} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \bar{\hat{\mathbf{B}}}^{\phi}_{34}\, dV
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

où la matrice de stabilisation pour la rigidité piézoélectrique $\mathbf{K}^{u\phi}{}_{Stab}$ et la matrice de stabilisation pour la rigidité diélectrique $\mathbf{K}^{\phi\phi}{}_{Stab}$ sont également évaluées dans le repère co-rotationnel $\boldsymbol{R}$ défini par les équations (2.25–2.27).

Par ailleurs, rappelons que les caractéristiques du matériau piézoélectrique, désignées par $\mathbf{C}$, $\mathbf{e}$ et $\boldsymbol{\kappa}$ sont initialement données dans le repère du matériau (repère local). Il convient ainsi de les transformer dans le repère global pour décrire au mieux le couplage, surtout dans les problèmes présentant de fortes non-linéarités géométriques. Les détails de cette transformation de repère sont présentés dans l'annexe C.

3.4. Validation et applications

Dans cette section, des cas tests de validation, aussi bien en statique qu'en vibration sont effectués, puis quelques applications en contrôle de forme sont présentées.

3.4.1. Cas tests statiques

Dans le cas de sollicitations statiques, le problème (3.4) se réduit à :

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\phi} \\ \mathbf{K}^{\phi u} & \mathbf{K}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix}
\tag{3.13}
$$

Trois cas tests de la littérature sont menés dans ce qui suit. Les deux premiers concernent les poutres (bilame et mécanismes de déformations), tandis que le troisième est dédié aux plaques et coques.

3.4.1.1. Modèles poutres

Poutre bilame en PVDF

Il s'agit d'une poutre en console composée de deux couches polarisées dans des directions opposées (-z et z dans notre cas). Ce cas test a été adopté par plusieurs auteurs, dont Tzou et Ye [153], Sze et al. [154] et Klinkel et Wagner [73]. Un potentiel électrique $\Delta\phi = 1\text{V}$ est appliqué sur les faces extérieures du bilame. Les propriétés géométriques sont indiquées sur la figure 3.2.

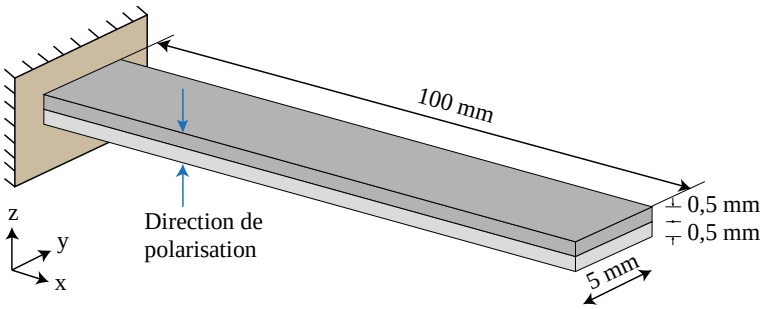


Figure 3.2 Poutre bilame en console

Vu les différents résultats proposés dans la littérature et les faiblesses pointées de l'élément 3D quadratique C3D20E du code ABAQUS (voir, par exemple, [154]), nous avons jugé intéressant de considérer pour coefficient de poisson $\nu = 0,29$ (dans la plupart des cas) et $\nu = 0$ (voir [73]). Les autres paramètres ainsi que les résultats obtenus avec les éléments 3D linéaire et quadratique, C3D8E et C3D20E du code ABAQUS, et les éléments solide–coques proposés, SHB8PSE et SHB20E, sont reportés dans le tableau 3.2. Ils sont également comparés à la solution analytique donnée par :

$$U_z(x) = -\frac{3}{2}\frac{e_{31}\Delta\phi}{Eh^2}x^2 \tag{3.14}$$

Tableau 3.2 Flèche U_z pour les différents paramètres et éléments U_z^{ref} =0,345µm

Cas	E (GPa)	ν	e_{31} (C/m^2)	e_{32} (C/m^2)	κ_{31} (µF/m)	U_z (µm)			
						C3D8E (100x4x2)	C3D20E (20x1x2)	SHB8PSE (10x1x2)	SHB20E (5x1x2)
1	2	0,29	-0,046	-0,046	0,1062	0,229	0,246	0,229	0,248
2	2	0	-0,046	-0,046	0,1062	0,258	0,344	0,345	0,345
3	2	0,29	-0,046	0	0,1062	0,263	0,343	0,335	0,342
4	2	0	-0,046	0	0,1062	0,263	0,343	0,335	0,342

Les résultats du tableau 3.2 laissent clairement apparaitre une dépendance au coefficient de Poisson. En effet, lorsque ce dernier est nul, tous les résultats à l'exception du C3D8E convergent vers la solution analytique. Cela peut s'expliquer par la déformation dans la direction transversale qui n'est pas prise en compte dans la solution analytique. Ce mécanisme de déformation par extension sera présenté dans l'exemple suivant.

Mécanisme de déformation des patchs piézoélectriques : extension et cisaillement

Pour le second cas test, nous considérons deux configurations de poutres sandwichs encastrée–libres, représentées dans la figure 3.3, pouvant être actionnées en extension (a) et en cisaillement (b). Ces modèles ont également été étudiés dans plusieurs travaux, dont Zhang et Sun [155, 156], Benjeddou et al. [7], et constituent ainsi d'excellents tests de validation.

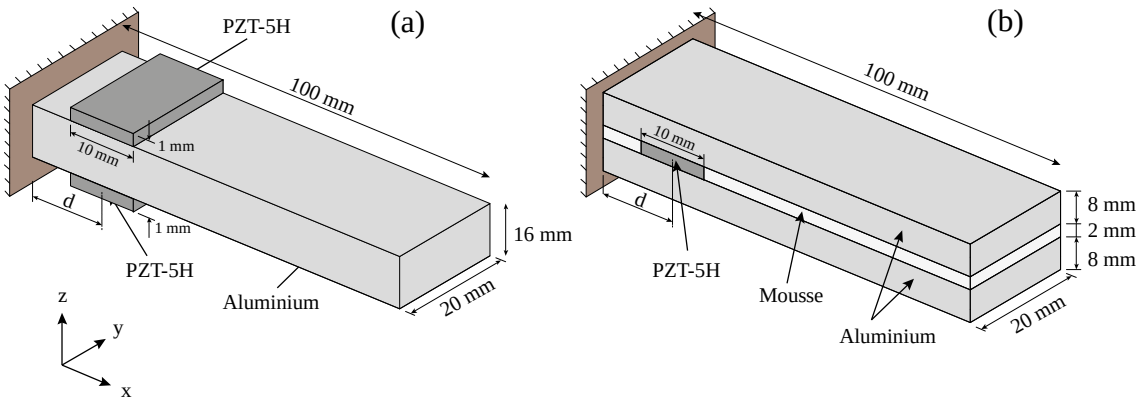


Figure 3.3 Poutres actionnées par extension (a) et par cisaillement (b)

Les matériaux sont polarisés suivant la direction *z*, pour le mécanisme d'extension, et suivant *x* pour l'actionnement par cisaillement. Les propriétés géométriques des deux mécanismes ainsi que la définition des matériaux de chaque couche sont reportées sur la figure 3.3. Les propriétés des matériaux associés sont données dans le tableau 3.3. Les poutres sont encastrées en $x = 0$ et libres en $x=L$. Afin de faire fléchir la poutre, des tensions sont appliquées sur les surfaces supérieures et inférieures des couches piézoélectriques, induisant des efforts électriques de flexion. Pour le mécanisme d'action par cisaillement, un potentiel électrique de $\Delta\phi = 20\,\mathrm{V}$ est appliqué à la couche piézoélectrique. Cette tension est de $\Delta\phi = \pm 10\,\mathrm{V}$ sur chaque couche, pour le mécanisme d'action par extension.

Tableau 3.3 Propriétés des matériaux utilisés dans les modèles d'actionnement par extension et par cisaillement

(PZT-5H)	ρ=7730 Kg.m^{-3} $C_{11}=C_{22}=C_{33}$=126 GPa C_{12}=79,5 GPa ; $C_{13}=C_{23}$=84,1 GPa ; $C_{44}=C_{55}=C_{66}$=23,0 GPa $e_{15}=e_{24}$=17 C/m^2 ; $e_{31}=e_{32}=-6{,}5$ C/m^2 ; e_{33}=23,3 C/m^2 $\kappa_{11}=\kappa_{22}$=1,503e^{-8} F/m ; κ_{33}=1,30e^{-8} F/m
Mousse	ρ=32 Kg.m^{-3} E=35,3 MPa ; ν=0,38
Aluminium	ρ=2690 Kg.m^{-3} E=70,3 GPa ; ν=0,345

Les résultats numériques obtenus avec le SHB8PSE et SHB20E seront confrontés à ceux de la littérature et à ceux obtenus avec l'élément quadratique C3D20E du code ABAQUS. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la déformée des deux mécanismes pour le cas où les couches piézoélectriques couvrent toute la longueur de la poutre. Les graphes correspondants, tracés sur la figure 3.4, montrent que nos résultats (SHB8PSE et SHB20E) concordent bien avec ceux obtenus avec le code ABAQUS. Cependant, ceux de la littérature (2D) semblent surestimer la flèche pour le cas où la poutre est actionnée par extension piézoélectrique.

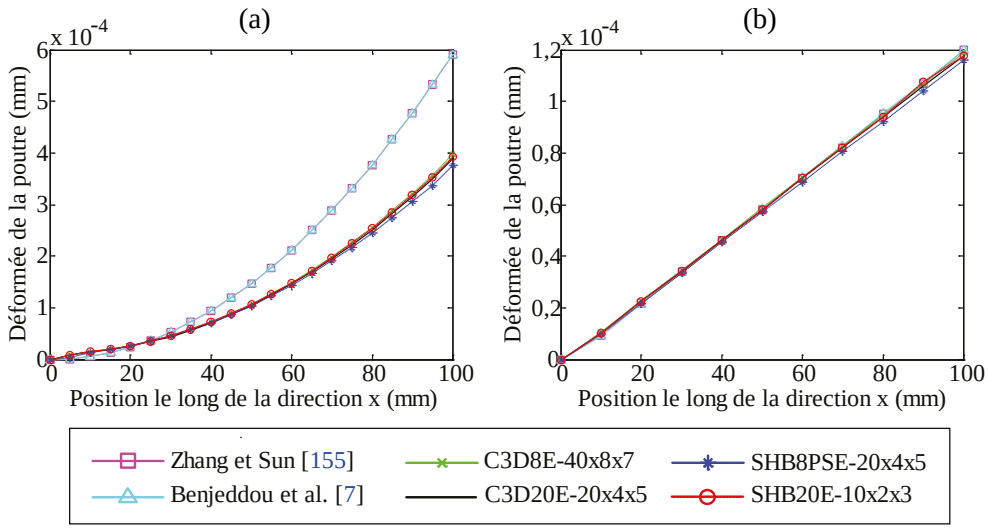


Figure 3.4 Déformée de la ligne moyenne de la poutre pour les mécanismes de déformation par extension (a) et par cisaillement (b)

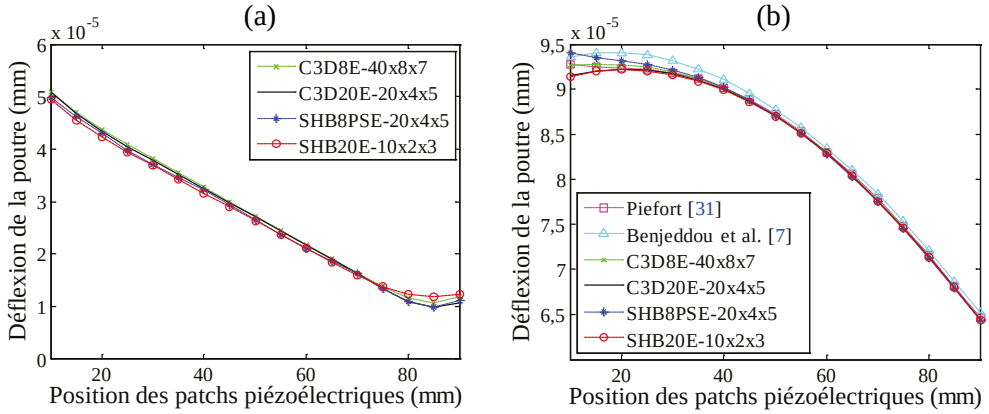


Figure 3.5 Flèche à l'extrémité libre pour les différentes positions de l'actionneur pour les mécanismes de déformation par extension (a) et par cisaillement (b)

Dans la suite, on fait varier la position du centre de l'actionneur dans l'intervalle [10–90] mm. On évalue la flèche maximale de la poutre (à l'extrémité libre $x = L$) pour chaque position du ou des patchs piézoélectriques. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par les éléments C3D8E et C3D20E du code ABAQUS, à ceux donnés par Benjeddou et al. [7] et à ceux de Piefort [31]. Les graphes de la figure 3.5 indiquent que les résultats donnés par les

éléments finis SHB8PSE et SHB20E concordent bien avec ceux de la littérature et avec ceux obtenus avec l'élément C3D20E d'ABAQUS, quel que soit le mécanisme d'actionnement. Il en ressort également que peu de degrés de liberté sont nécessaires avec les éléments solide–coques proposés pour aboutir à de bons résultats.

3.4.1.2. Modèles plaques et coques

Dans cette partie, nous nous intéressons à la modélisation de structures présentant des formes géométriques plus complexes et plus réalistes. Ainsi, des actionneurs et capteurs piézoélectriques monocouches et multicouches sont modélisés avec des applications en contrôle de forme.

Contrôle de forme d'une plaque sur appuis simples

Un des avantages du comportement piézoélectrique est le contrôle de forme des structures. Pour cela, nous considérons une plaque carrée de 200x200 mm² d'épaisseur 8 mm recouverte sur ses deux faces par des patchs piézoélectriques de 1 mm d'épaisseur. Ces patchs en PZT-5H, de dimensions 40x40 mm², sont placés à des endroits bien spécifiés comme l'indique la figure 3.6.

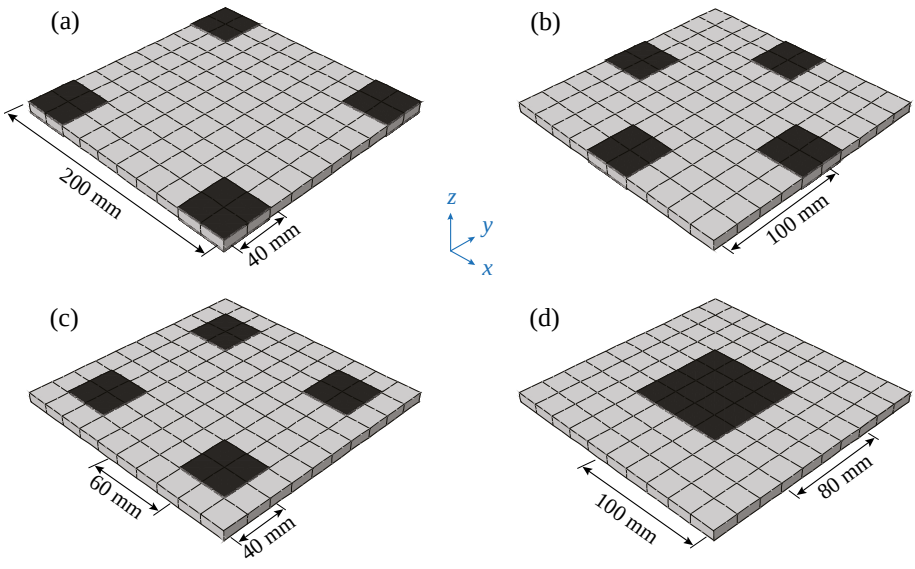


Figure 3.6 Plaque carrée avec patchs piézoélectriques

L'intérêt de ce test est de déterminer la position la plus judicieuse pour contrôler la forme de la plaque soumise à une charge uniformément répartie de 200 N/m² sur toute sa surface. Les plaques sont sur appuis simples sur leurs 4 bords inférieurs. Ainsi, en appliquant une tension à chaque paire de patchs, on introduit une déformation permettant de ramener plus ou moins la plaque à sa position avant tout chargement. Plusieurs tensions appliquées aux configurations de la figure 3.6 ont permis d'avoir les résultats représentés sur la figure 3.7. Ces résultats, confrontés à ceux des éléments quadratiques C3D20E du code ABAQUS, permettent de valider une fois de plus les éléments SHB8PSE et SHB20E. Il en ressort également que peu de degrés de libertés sont nécessaires aux éléments solide–coques pour aboutir à un résultat satisfaisant. Par ailleurs, une analyse des graphes de la figure 3.7 permet de déduire que les configurations (a) et (d) permettent de réduire la flèche au centre de la plaque. Néanmoins, il faut jusqu'à -20 V par paire de patchs pour contrôler la forme de la plaque pour la configuration (a), alors que seuls 2 V sont nécessaires pour la configuration (d).

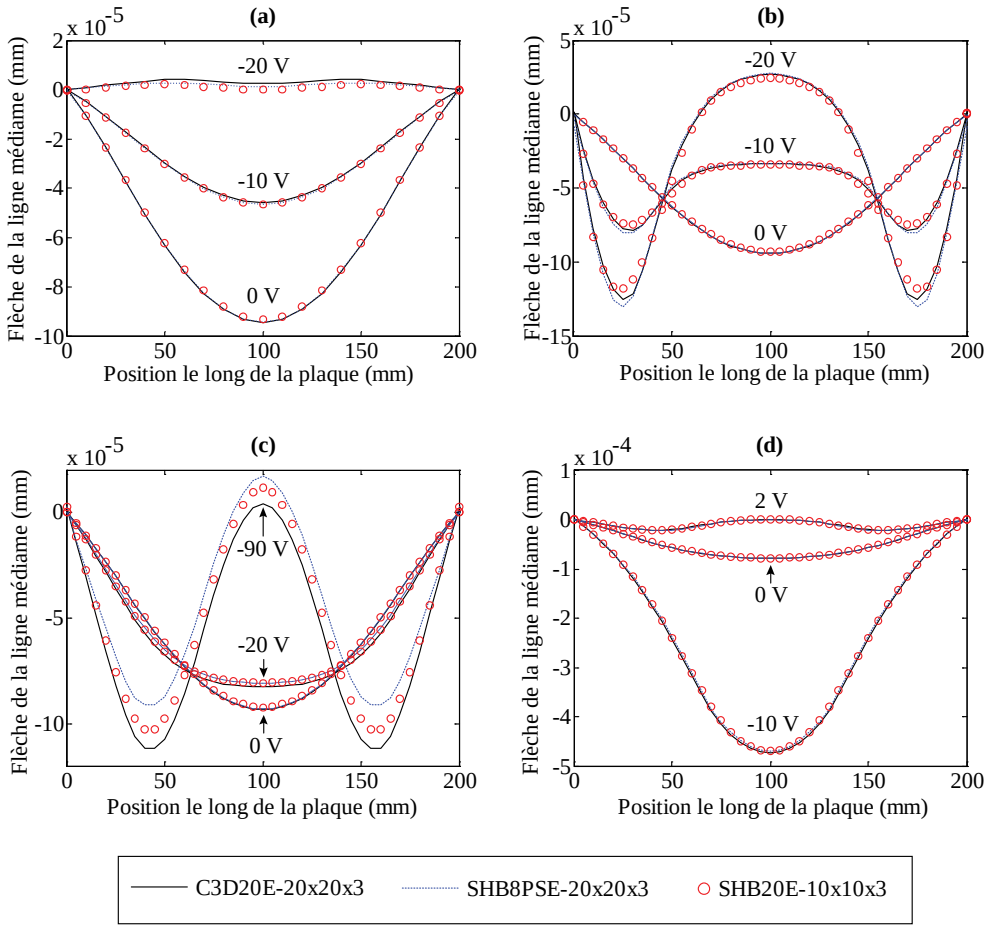


Figure 3.7 Flèche de la ligne médiane de la plaque avec différentes tensions

Coque sandwich incurvée

L'objectif de ce cas test est de montrer la capacité des éléments finis SHB8PSE et SHB20E dans la modélisation des structures présentant des non-linéarités géométriques. Pour cela, nous considérons une coque sandwich cylindrique de 300×300 mm^2, en porte à faux comme schématisée sur la figure 3.8. Un modèle similaire a été proposé par Kioua et Mirza [157], mais l'analyse était destinée aux vibrations forcées. Ici encore, la coque hôte élastique est en aluminium d'épaisseur 2,50 mm. Elle est entièrement recouverte sur chacune de ses faces par une fine couche piézoélectrique en PZT-5H d'épaisseur 0,25 mm. Les couches piézoélectriques sont polarisées dans des directions opposées à travers l'épaisseur. Une tension est appliquée sur chaque couche piézoélectrique (les faces internes sont reliées à la masse, tandis que les faces externes sont soumises à 50V). Cette configuration de chargement provoque un couplage de rigidité élevée. Il en résulte une flexion de la coque ainsi qu'une déformation de torsion sur les deux bords libres, due à une flexion plus importante sur les bords libres. Trois valeurs du rapport de courbure $R/b = \{1, 10, \infty\}$ sont étudiées.

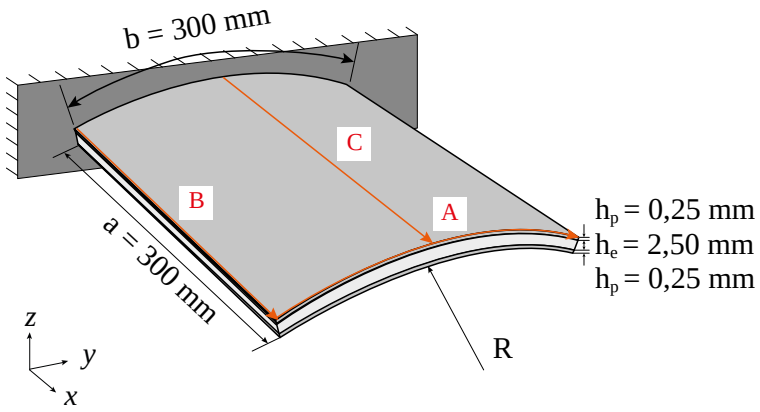


Figure 3.8 Coque sandwich en console

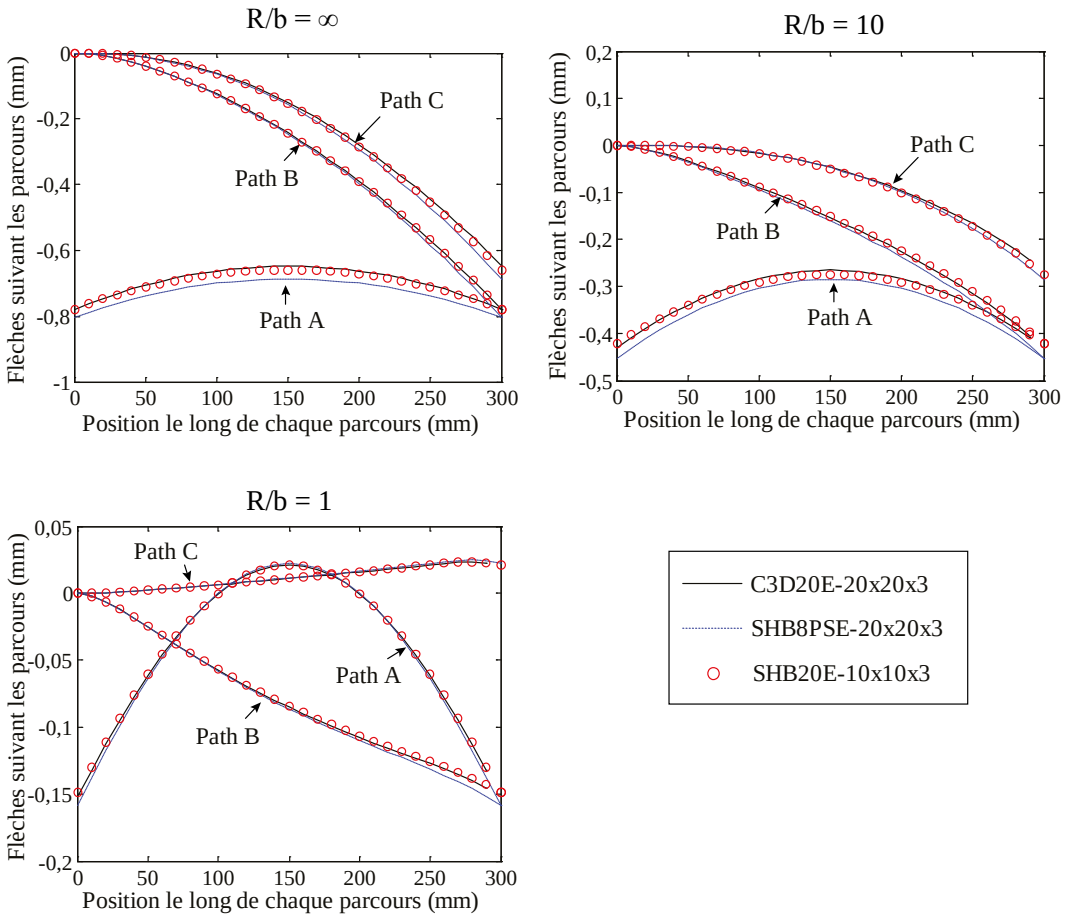


Figure 3.9 Flèches suivant les lignes (A), (B) et (C) des coques sandwichs de courbure *R/b*

Les déformées des lignes (A), (B) et (C), indiquées sur la figure 3.8, sont relevées pour chaque modèle et représentées sur la figure 3.9. Les résultats fournis par les éléments solide–coques SHB8PSE et SHB20E sont comparés à ceux des éléments quadratiques C3D20E d'ABAQUS. De nouveau, les résultats de simulation donnés par l'approche solide–coque proposée se montrent à la fois précis et efficaces. En effet, ces simulations avec l'approche solide–coque nécessitent généralement moins d'éléments dans la discrétisation, d'une part, et ces mêmes éléments, étant sous-intégrés, requièrent beaucoup moins de points d'intégration, d'autre part.

3.4.2. Problèmes aux valeurs propres

Cette partie est consacrée à l'évaluation des fréquences propres de structures multicouches combinant des couches élastiques à des couches piézoélectriques. Les structures sont étudiées

dans des configurations de circuit ouvert et court-circuit. Ces cas tests sont menés sur des poutres, plaques et coques.

Dans le cas de vibrations libres, le problème (3.4) se transforme en :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\phi} \\ \mathbf{K}^{\phi u} & \mathbf{K}^{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

3.4.2.1. Cas des poutres

Nous considérons deux modèles de poutres sandwichs. Ces poutres sont semblables à celles précédemment étudiées en statique, telles que montrées sur la figure 3.10. Les couches élastiques et piézoélectriques sont respectivement en aluminium et en PZT-5H. Les analyses modales sont effectuées en configurations de court-circuit (figures 3.10 (a) et (b)) et circuit ouvert (figure 3.10 (a)). Les fréquences propres reportées dans les tableaux 3.4 et 3.5 montrent que les résultats de nos formulations (SHB8PSE et SHB20E) sont en accord avec ceux des éléments finis de référence C3D20E et HEX20E. Il est cependant important de souligner que peu de degrés de liberté ont été nécessaires pour le SHB8PSE et SHB20E pour aboutir à ces résultats. De plus, ces derniers étant sous-intégrés, ils requièrent beaucoup moins de points d'intégration que leurs homologues linéaire et quadratique, respectivement, du code ABAQUS.

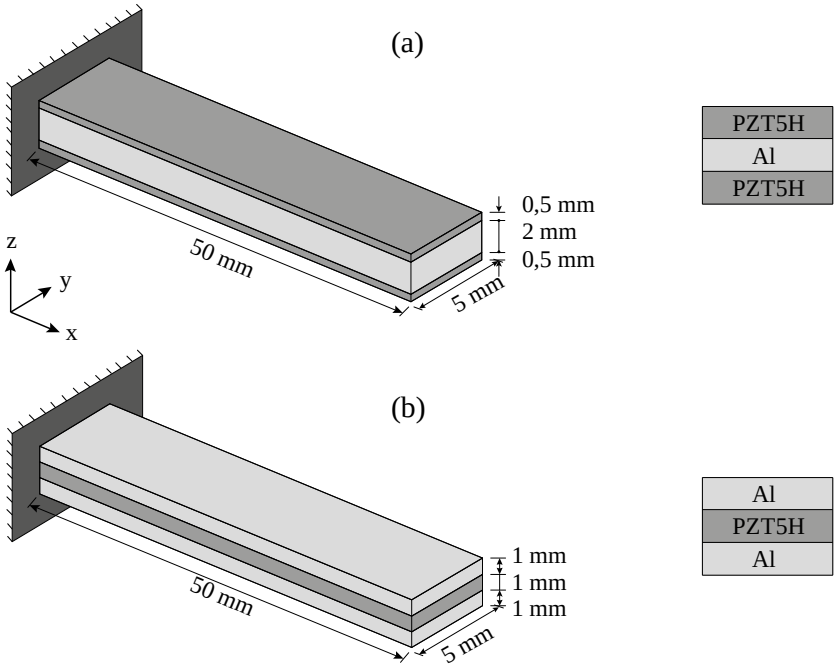


Figure 3.10 Poutres sandwichs en console avec les mécanismes de déformation par extension (a) et cisaillement (b)

Tableau 3.4 Cinq premières fréquences propres de la poutre sandwich en configuration d'actionnement par extension

	C3D20E (3396)	HEX20E (3396)	SHB8PSE (3280)	SHB20E (1112)
Court-circuit				
1	751,58	749,33	754,72	749,35
2	1271,2	1268,4	1275,8	1268,46
3	4630,3	4615,9	4655,5	4616,0
4	7615,7	7600,7	7658,6	7600,8
5	9293,6	9253,4	9223,6	9253,3
Circuit ouvert				
1	787,17	785,74	789,10	785,76
2	1297,4	1294,4	1301,6	1294,8
3	4842,5	4833,2	4861,4	4833,3
4	7763,3	7748,4	7805,3	7750,6
5	9297,4	9295,5	9261,9	9296,0

Tableau 3.5 Cinq premières fréquences propres de la poutre sandwich en configuration d'actionnement par cisaillement

	C3D20E (3396)	HEX20E (3396)	SHB8PSE (3280)	SHB20E (1112)
Court-circuit				
1	780,87	781,60	789,10	781,61
2	1271,8	1269,2	1276,77	1269,2
3	4813,2	4817,4	4873,4	4817,5
4	7623,8	7610,8	7668,6	7610,8
5	10475	10433	10501	10434

3.4.2.2. Cas des plaques

Cette partie est consacrée à l'étude des vibrations libres de plaques sandwichs à cœur élastique et faces piézoélectriques. La plaque est sur appuis simples sur ses 4 bords. Les faces piézoélectriques en PZT-5H sont polarisées suivant l'épaisseur. Le cœur est en aluminium et plusieurs épaisseurs ont été considérées. Les propriétés géométriques sont présentées sur la figure 3.11. Les résultats sont reportés dans les tableaux 3.6 et 3.7.

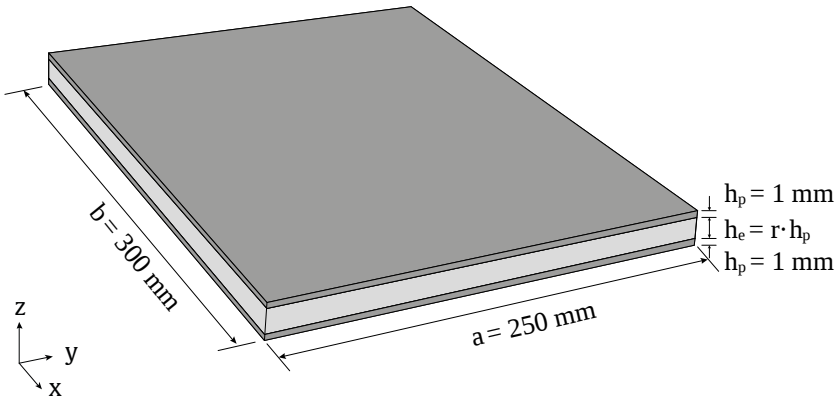


Figure 3.11 Plaque sandwich rectangulaire sur appuis simples

Tableau 3.6 Cinq premières fréquences propres de la plaque sandwich sur appuis simples (Court-circuit)

Rapport d'épaisseurs	C3D20E (8196)	HEX20E (8196)	SHB8PSE (3584)	SHB20E (3524)
r = 1	183,23	181,11	185,98	181,09
	333,22	330,38	341,49	330,27
	392,41	390,97	405,12	390,66
	584,85	587,31	605,46	586,70
	606,99	606,38	640,87	605,60
r = 5	514,54	507,01	512,84	506,96
	930,65	919,72	939,91	919,43
	1095,1	1089,0	1115,0	1088,2
	1628,7	1621,8	1660,3	1620,1
	1697,8	1697,1	1766,7	1695,0
r = 20	1712,3	1705,8	1704,7	1707,4
	3004,0	2875,8	3003,2	2875,3
	3441,1	3386,6	3406,6	3385,4
	5125,0	5150,8	5159,3	5146,7
	5426,7	5560,1	5603,9	5522,3

Tableau 3.7 Cinq premières fréquences propres de la plaque sandwich sur appuis simples (Circuit ouvert)

Rapport d'épaisseurs	C3D20E (8196)	HEX20E (8196)	SHB8PSE (3584)	SHB20E (3524)
r = 1	207,35	205,22	210,04	205,20
	374,25	372,33	382,95	372,21
	441,48	440,27	455,22	439,92
	658,43	660,70	680,54	660,02
	686,53	686,70	723,84	685,81
r = 5	558,40	551,50	557,74	551,45
	1010,5	1003,8	1021,7	1003,5
	1191,5	1186,0	1214,5	1185,1
	1771,0	1765,9	1806,6	1764,1
	1851,0	1850,8	1927,8	1848,5
r = 20	1771,2	1757,4	1764,6	1758,9
	3099,4	3000,68	3126,3	3000,0
	3551,9	3496,9	3618,3	3495,7
	5282,7	5311,6	5335,9	5307,2
	5596,6	5700,5	5786,0	5661,0

Il ressort de ces tableaux de comparaison que les résultats donnés par nos formulations solide–coques convergent vers les résultats de référence avec un nombre de degrés de liberté réduit comparé à celui nécessité par les éléments finis de référence.

3.4.2.3. Cas des coques

Lame sandwich incurvée

Ces cas tests sont menés pour évaluer la modélisation proposée des vibrations de structures sandwichs en présence de non-linéarités géométriques. Pour cela, on considère une lame sandwich incurvée à cœur élastique et faces piézoélectriques. Les faces sont en PZT-5H, tandis que le cœur est en aluminium, tels que montrés sur la figure 3.12. Tout comme dans le cas précédent, plusieurs épaisseurs du cœur élastique ont été considérées. Les résultats présentés dans les tableaux 3.8 et 3.9 montrent une fois de plus une concordance avec les résultats de référence, avec néanmoins une formulation solide–coque nécessitant à la fois moins de degrés de liberté et moins de points d'intégration par élément.

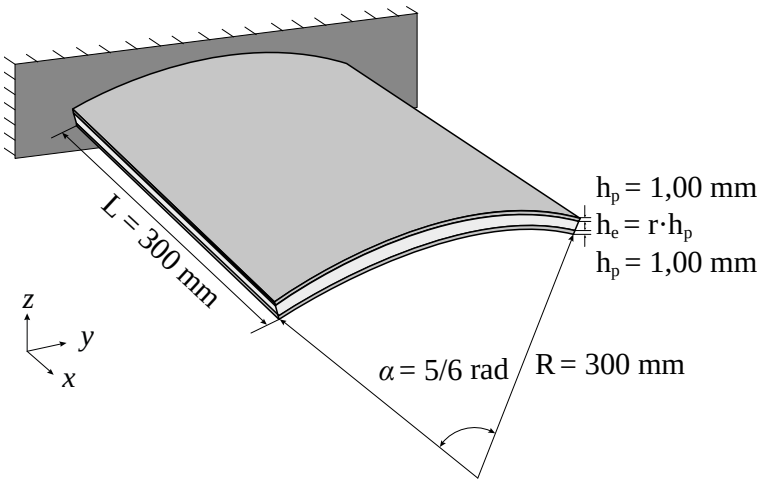


Figure 3.12 Lame sandwich incurvée en console

Tableau 3.8 Cinq premières fréquences propres de la lame sandwich incurvée en console (Court-circuit)

Rapport d'épaisseurs	C3D20E (8196)	HEX20E (8196)	SHB8PSE (2288)	SHB20E (3524)
r = 1	68,824	68,705	72,162	68,736
	124,93	124,69	128,27	124,75
	218,86	218,47	225,35	218,56
	281,80	281,07	296,81	281,19
	310,50	309,56	323,07	309,68
r = 5	153,62	153,81	154,86	153,99
	183,57	183,45	186,08	183,67
	528,10	528,06	530,31	528,67
	572,11	572,50	585,25	573,17
	705,46	705,63	716,42	706,46
r = 20	285,08	284,36	284,26	286,33
	502,38	501,43	499,81	504,90
	1401,4	1398,1	1415,8	1407,7
	1526,1	1523,7	1527,4	1534,4
	1757,5	1752,5	1765,7	1764,6

Tableau 3.9 Cinq premières fréquences propres de la lame sandwich incurvée en console (Circuit ouvert)

Rapport d'épaisseurs	C3D20E (8196)	HEX20E (8196)	SHB8PSE (2288)	SHB20E (3524)
r = 1	76,910	76,047	79,093	76,081
	138,20	138,30	140,42	138,36
	236,48	236,41	242,90	236,51
	317,98	313,03	327,73	313,16
	338,24	331,73	345,72	331,87
r = 5	161,91	160,07	161,03	160,26
	197,90	197,92	199,98	198,16
	538,66	538,67	539,90	539,29
	622,81	614,64	627,02	615,36
	754,54	744,93	754,82	745,80
r = 20	298,60	297,91	297,74	299,96
	513,38	509,70	508,13	513,22
	1473,6	1469,5	1487,2	1479,6
	1545,6	1548,8	1552,3	1559,7
	1825,2	1807,2	1820,5	1819,7

Coupole sandwich trouée

Le dernier exemple de validation concerne une structure de coque à double courbure. La coque hémisphérique avec un trou 18° et un rayon moyen de 200 mm est représentée sur la figure 3.13. La structure hôte est en aluminium d'une épaisseur de 1,50 mm. Elle est entièrement recouverte sur les deux faces d'une couche mince de PZT-5H de 0,25 mm d'épaisseur et polarisé à travers l'épaisseur. La structure est encastrée sur toute la face trouée. L'analyse a consisté à évaluer les cinq premières fréquences propres dans des configurations en circuit ouvert et court-circuit. Les modes associés sont représentés sur la figure 3.14. Les résultats sont reportés dans le tableau 3.10.

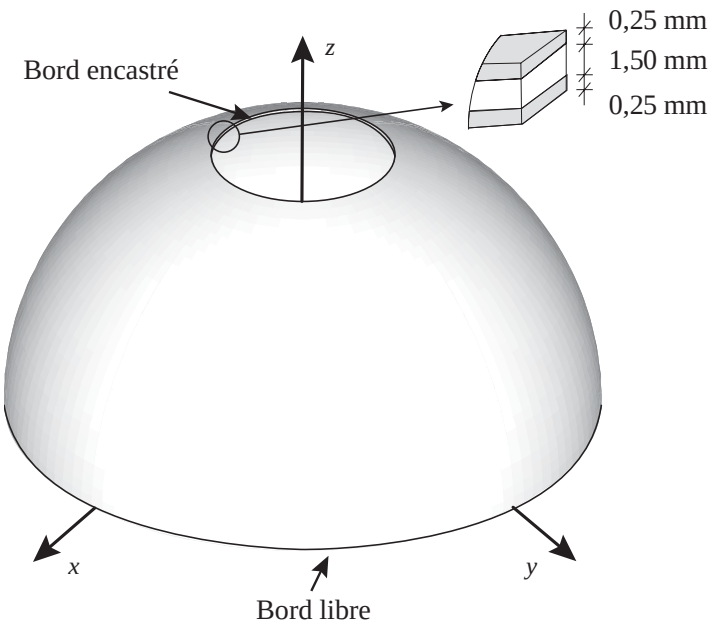


Figure 3.13 Coupole sandwich trouée

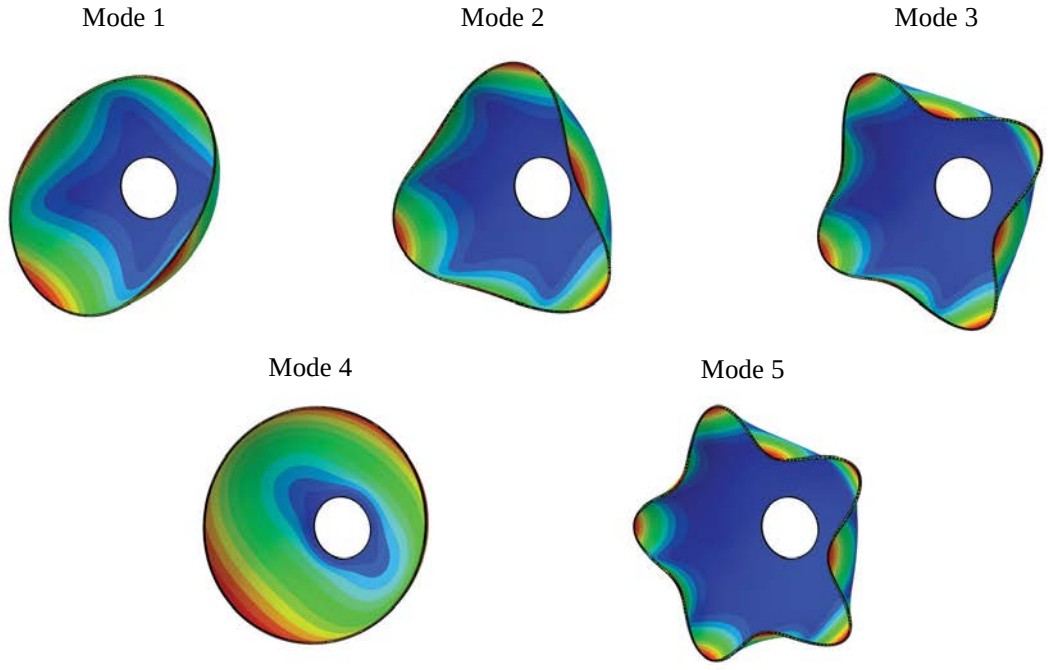


Figure 3.14 Cinq premiers modes de vibration de la coupole sandwich trouée

Tableau 3.10 Cinq premières fréquences propres de la coupole sandwich trouée (Court-circuit et Circuit ouvert)

	C3D20E (60x20x3)	HEX20E (60x20x3)	SHB8PSE (56x14x3)	SHB20E (28x7x3)
Court-circuit				
	76,109	76,024	79,149	76,110
	114,60	113,65	118,04	113,80
	215,44	215,53	220,94	215,81
	289,37	289,75	301,63	289,86
	342,83	348,51	363,47	348,82
Circuit ouvert				
	77,366	77,360	80,407	77,447
	115,33	113,73	119,04	113,87
	217,30	215,59	221,51	215,88
	292,63	293,39	304,01	293,50
	346,70	348,65	364,21	348,95

Il en ressort une fois de plus que les éléments solide–coques SHB8PSE et SHB20E présentent des résultats qui sont en accord avec ceux de référence donnés par les éléments 3D quadratiques C3D20E d'ABAQUS et HEX20E. Toutefois, l'élément SHB8PSE semble légèrement surestimer les fréquences propres sur ce cas test, ce qui s'explique par sa cinématique linéaire et la sévérité bien connue, en termes de phénomènes de verrouillage, de ce cas test d'hémisphère doublement courbé.

3.5. Conclusions

Une extension des éléments finis solide–coques SHB8PS et SHB20 a été proposée en vue de prendre en compte les propriétés piézoélectriques et modéliser de manière efficace le couplage électromécanique. Pour ce faire, un degré de liberté a été ajouté à chaque nœud de ces éléments. Au cours de la formulation solide–coque linéaire SHB8PSE, la méthode *Assumed Strain* a été utilisée pour traiter les phénomènes de verrouillage associés. Des tests de validation sélectifs et représentatifs ont été menés aussi bien en statique qu'en analyse vibratoire. Les résultats de ces tests d'évaluation ont été comparés aux résultats de référence de la littérature et à ceux donnés par les éléments d'ABAQUS. Les résultats obtenus sont satisfaisants et permettent de montrer l'avantage des nouveaux modèles solide–coques proposés. En effet, ces

modélisations ont été menées avec succès sur des structures allant de simples poutres à des plaques et coques multicouches. Cette étude a été entreprise dans le but de modéliser la prise en compte du contrôle que permettent ces matériaux dans les problématiques d'amortissement des vibrations. Dans le chapitre 4, nous nous intéresserons à des structures comportant à la fois des matériaux viscoélastiques et piézoélectriques, ce qui permet de modéliser l'amortissement actif–passif.

Chapitre 4 : Modélisation de l'amortissement actif–passif des structures multicouches

Sommaire - Chapitre 4

4.1. Introduction 111

4.2. Formulation et discrétisation du problème des vibrations active–passives . 112

4.3. Méthodes et lois de contrôle actif des vibrations 112

4.3.1. Contrôle de type « *Proportional Feedback* » et problème résultant 113

4.3.2. Quelques fonctions de transfert de filtres 114

4.4. Méthode de résolution numérique du problème résultant : approche DIAMANT 115

4.4.1. Analyse modale 115

4.4.2. Réponse fréquentielle 117

4.5. Tests numériques et application au contrôle de vibrations 119

4.5.1. Validation de l'outil numérique 119

4.5.2. Application à la réduction des amplitudes de vibrations d'une plaque ... 130

4.6. Conclusions 138

4.1. Introduction

La conception de système d'amortissement efficace est un défi que les ingénieurs s'attèlent à relever avec l'exigence de structures de plus en plus sollicitées et allégées. Pour ce faire, le moyen le plus connu et surtout le plus utilisé est l'utilisation de matériaux viscoélastiques sous diverses formes. Ainsi, ceux-ci peuvent se présenter sous forme de couches uniformes insérées entre deux couches élastiques (sandwichs à cœur viscoélastique) [128, 134, 158, 159] ou sous forme de nid d'abeille rempli de matériau viscoélastique [160-162]. On y rencontre également des systèmes à matériau d'âme en fibres enchevêtrées [163, 164] ou sous forme d'inclusions viscoélastiques noyées dans les couches élastiques [165]. Cependant, cette technique ne permet que d'avoir un amortissement de type passif. Pour améliorer les propriétés amortissantes, on est parfois amené à augmenter l'épaisseur de la couche viscoélastique. On rencontre alors vite des limites liées aux dimensions et aux propriétés mécaniques des composites qui deviennent moins résistants lorsque l'épaisseur des couches viscoélastiques devient plus importante. Aussi, on est parfois limité en épaisseur totale de la structure, ce qui est lié à sa mise en œuvre. Pour pallier à ces limitations tout en augmentant les propriétés amortissantes des structures multicouches, l'utilisation des matériaux piézoélectriques devient indispensable et parfois incontournable. La capacité de ceux-ci à se déformer sous chargement électrique et vice versa les rend indispensables. En effet, le courant généré par la déformation est recueilli et amplifié ou atténué afin de contrôler les amplitudes de vibrations. Certaines études combinent efficacement l'amortissement passif au contrôle actif en utilisant un sandwich à cœur viscoélastique contrainte par une couche en matériau piézoélectrique [44, 60]. La maîtrise de ce phénomène s'avère donc important pour mieux mettre en œuvre ces systèmes. Dans la littérature, beaucoup d'études y sont consacrés, parmi lesquels on distingue les contributions de [33, 166]. Il ressort de ces derniers que la discrétisation éléments finis conduit à un problème non linéaire dépendant de la fréquence. La complexité de ce problème a amené Duigou–Kersulec [166] et Boudaoud [33] entre autres à se limiter à des lois de contrôle de type PD (*Proportional Derivative*).

Les résultats encourageants obtenus avec les éléments finis de type solide–coque SHB8PSE et SHB20E, dans les problèmes résolus dans les chapitres 2 et 3, nous permettent de les utiliser dans ce nouveau modèle. Avec les outils de la DA (*Différentiation Automatique*) couplés à la

MAN [130-132], on arrive à obtenir les coefficients de Taylor émanant du développement en séries entières des différents paramètres. Le problème non-linéaire est transformé en sous-problèmes récurrents pour n'importe quelle loi de contrôle. La résolution de problèmes résultant du couplage piézoélectrique et viscoélastique devient alors plus aisée. Le solveur DIAMANT a ainsi été étendu pour prendre en compte n'importe quelle loi de contrôle dépendant de la fréquence.

4.2. Formulation et discrétisation du problème des vibrations active–passives

Nous considérons le problème de vibrations de structures multicouches combinant à la fois des couches élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques. La discrétisation d'un tel problème conduit à un système de problème non linéaire dépendant de la fréquence et explicité par les relations :

$$\begin{cases} \left[\mathbf{M}^{uu}\right]\left\{\ddot{\boldsymbol{U}}\right\}+\left[\mathbf{K}^{uu}(\omega)\right]\left\{\boldsymbol{U}\right\}+\left[\mathbf{K}^{u\phi}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}\right\}=\left\{\mathbf{F}\right\} \\ \left[\mathbf{K}^{\phi u}\right]\left\{\boldsymbol{U}\right\}+\left[\mathbf{K}^{\phi\phi}\right]\left\{\boldsymbol{\phi}\right\}=\left\{\mathbf{Q}\right\} \end{cases} \tag{4.1}$$

Le choix des éléments finis à utiliser dans une telle discrétisation a porté sur les éléments finis solide–coques SHB8PSE et SHB20E qui ont été formulés dans le chapitre précédent. L'originalité ici repose sur la dépendance en fréquence de la matrice de rigidité. Celle-ci découle de la combinaison des formulations présentées dans les chapitres 2 et 3. Un autre apport dans la présente approche est que, outre la matrice de rigidité dépendant de la fréquence, n'importe quelle loi de contrôle rétroactive reliant les actionneurs aux capteurs peut être introduite.

4.3. Méthodes et lois de contrôle actif des vibrations

Il existe plusieurs méthodes pour contrôler les vibrations avec les matériaux piézoélectriques. Certaines sont basées sur la position optimale des patchs piézoélectriques [49, 136, 167]. D'autres tels que le LQR (*Linear Quadratic Regulator*) [168-170] et le LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) [171, 172], par exemple, déterminent le gain de contrôle pour contrôler les vibrations. Nous nous limiterons dans ce travail à l'utilisation des lois de contrôle

rétroactives reliant le potentiel électrique aux bords des actionneurs à celui aux bords des capteurs. Ainsi, nous montrons la performance de l'approche DIAMANT. Cela permet ensuite d'utiliser des lois de contrôle plus complexes, tel qu'un filtre de transfert monté entre les actionneurs et les capteurs.

4.3.1. Contrôle de type « *Proportional Feedback* » et problème résultant

Lorsqu'une structure vibre, la couche capteur génère une tension de sortie qui est amplifiée et réintroduite, via une loi directe proportionnelle ou une loi de contrôle en vitesse, dans la couche actionneur. Le contrôle peut alors s'exprimer de manière généralisée sous la forme suivante :

$$\{\boldsymbol{\phi}_a\} = H(\omega)\{\boldsymbol{\phi}_s\} \tag{4.2}$$

où $H(\omega)$ représente la fonction de transfert d'un filtre placé dans le circuit reliant les capteurs aux actionneurs, tel que montré sur la figure 4.1. En distinguant les différentes couches de la structure et en appliquant uniquement une force harmonique $F = F_0 \, \mathrm{e}^{i\omega t}$ au système, on peut réécrire l'équation (4.1) des vibrations d'une structure sous la forme :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu}(\omega) & \mathbf{K}^{u\phi_s} & \mathbf{K}^{u\phi_a} \\ \mathbf{K}^{\phi u_s} & \mathbf{K}^{\phi\phi_s} & 0 \\ \mathbf{K}^{\phi u_a} & 0 & \mathbf{K}^{\phi\phi_a} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\phi}_s \\ \boldsymbol{\phi}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

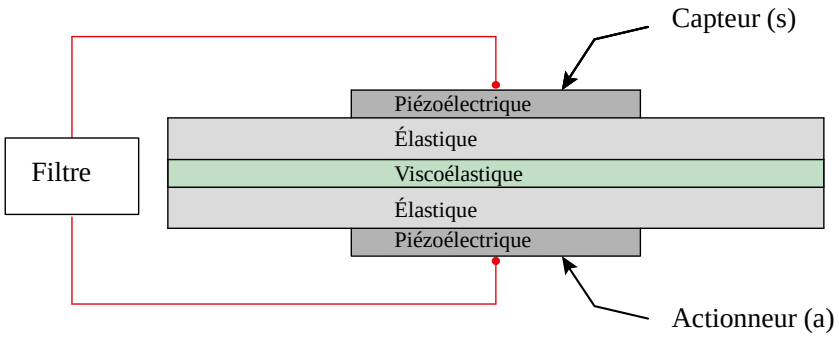


Figure 4.1 Structure avec un système d'amortissement actif–passif par matériau viscoélastique et filtre

La tension générée au niveau du capteur peut donc s'écrire sous la forme :

$$\{\boldsymbol{\phi}_s\} = -\left[\mathbf{K}^{\phi\phi_s}\right]^{-1}\left[\mathbf{K}^{\phi u_s}\right]\{\boldsymbol{U}\} \tag{4.4}$$

En mettant l'équation (4.4) dans (4.2) on obtient :

$$\{\boldsymbol{\phi}_a\} = -H(\omega)\left[\mathbf{K}^{\phi\phi_s}\right]^{-1}\left[\mathbf{K}^{\phi u_s}\right]\{\boldsymbol{U}\} \tag{4.5}$$

En substituant l'équation (4.4) et (4.5) dans la première ligne de l'équation (4.3), et en écrivant $\mathbf{K}^{uu}(\omega) = \mathbf{K}^{uu}{}_0 + E(\omega)\mathbf{K}^{uu}{}_v$, on arrive à :

$$\left[\mathbf{K}_0 + E(\omega)\mathbf{K}_v - H(\omega)\mathbf{K}_p - \omega^2\mathbf{M}\right]\{\boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{F}\} \tag{4.6}$$

où les différentes matrices sont explicitées par :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}^{uu}{}_0 - \mathbf{K}_{sensor} \\ \mathbf{K}_v = \mathbf{K}^{uu}{}_v \\ \mathbf{K}_p = \mathbf{K}_{actuator} \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}^{uu} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{actuator} = \left[\mathbf{K}^{u\phi_a}\right]\left[\mathbf{K}^{\phi\phi_s}\right]^{-1}\left[\mathbf{K}^{\phi u_s}\right] \\ \mathbf{K}_{sensor} = \left[\mathbf{K}^{u\phi_s}\right]\left[\mathbf{K}^{\phi\phi_s}\right]^{-1}\left[\mathbf{K}^{\phi u_s}\right] \end{cases} \tag{4.7}$$

Tout comme la fonction $E(\omega)$, la fonction $H(\omega)$ peut facilement être différentiée au moyen de la boîte à outils développée sous MATLAB par Koutsawa et al. [130]. Ainsi, des lois plus complexes, telles que celles découlant des fonctions de filtres d'ordres élevés, peuvent aisément être considérées. Quelques filtres utilisés pour la validation et les applications dans cette thèse sont présentés ci-après. Plus de détails peuvent être consultés dans [173].

4.3.2. Quelques fonctions de transfert de filtres

4.3.2.1. Filtre gaussien en amplitude

Certaines applications, telles que les radars par exemple, nécessitent des filtres ayant une réponse impulsionnelle symétrique et dépourvue d'oscillations. La forme idéale est la gaussienne d'équation :

$$H(\omega) = \exp\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)^2 \tag{4.8}$$

où ω désigne la pulsation propre du mode que l'on souhaite contrôler.

L'intérêt de ce filtre pour nous réside dans sa forme symétrique et semblable aux amplitudes de vibrations. Elle permettra alors de réduire et même d'optimiser l'énergie à fournir au système à travers le filtre pour contrôler la vibration.

4.3.2.2. Filtres de type Tchebychev

L'intérêt de cette famille de filtres est qu'ils permettent de couvrir une large bande passante et rendent ainsi possible de contrôler plusieurs modes simultanés. Parmi ces filtres, on distingue les filtres de Lerner ayant un temps de groupe et un affaiblissement simultanément optimaux au sens de Tchebychev :

$$H(\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n \mathrm{b}}{\mathrm{b}+i(\omega-2n\mathrm{a})} \quad ; \quad \mathrm{a,b} \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

En développant en série entière et sommant cette série, on obtient :

$$H(\omega)=\pi\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\varphi\left(1+\varphi^2\cos\left(\pi\frac{\omega}{\mathrm{a}}\right)\right) \quad ; \qquad \varphi=\exp\left(-\pi\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right) \tag{4.10}$$

Ces deux fonctions seront utilisées pour montrer l'intérêt de l'outil numérique de résolution des problèmes de contrôle actif–passif de vibrations basé sur l'approche DIAMANT développé ci-dessous.

4.4. Méthode de résolution numérique du problème résultant : approche DIAMANT

Deux approches ont été utilisées dans ce chapitre pour montrer l'intérêt du contrôle actif. Il s'agit de l'analyse modale permettant d'extraire les propriétés amortissantes (Ω,η) et la réponse fréquentielle permettant d'extraire les amplitudes de vibrations $U(\omega)$ pour chaque fréquence donnée et à un point de la structure.

4.4.1. Analyse modale

Cet outil se base sur l'approche DIAMANT couplant la DIfférentiation Automatique à la Méthode Asymptotique Numérique. Il s'agit d'une extension du solveur présenté dans la

section 2.4. On écrit tout d'abord le problème non-linéaire des vibrations libres (4.6) sous la forme résiduelle :

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{U},\lambda)=\left[\mathbf{K}_0+E(\omega)\mathbf{K}_v-H(\omega)\mathbf{K}_p-\lambda\mathbf{M}\right]\{\boldsymbol{U}\}=\mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)+\mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0} \tag{4.11}$$

On introduit de la même façon le paramètre d'homotopie p sous la forme :

$$\begin{cases}\mathbf{R}(\boldsymbol{U},\lambda,p)=\mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)+p\mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0}\\ \mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)=\left[\mathbf{K}_0-\lambda\mathbf{M}\right]\{\boldsymbol{U}\}\\ \mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda)=\left[E(\omega)\mathbf{K}_v-H(\omega)\mathbf{K}_p\right]\{\boldsymbol{U}\}\end{cases} \tag{4.12}$$

On continue par développer les inconnues $\boldsymbol{U}$ et λ en séries entières du paramètre d'homotopie p :

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0+\sum_{j=1}^{N}p^j\boldsymbol{U}_j\\ \lambda=\lambda_0+\sum_{j=1}^{N}p^j\lambda_j\end{cases}\quad;\quad 0\le p\le 1 \tag{4.13}$$

La technique d'homotopie permet ensuite de piloter et d'extraire branche par branche la solution $(\boldsymbol{U},\lambda)$. Ainsi, à partir du problème aux valeurs propres réelles $\mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0}$, résultant de $\mathbf{R}(\boldsymbol{U},\lambda,p)=\mathbf{S}(\boldsymbol{U},\lambda)+p\mathbf{T}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0}$ où $p=0$ (avec pour solution initiale $(\boldsymbol{U},\lambda)=(\boldsymbol{U}_0,\lambda_0)$), on évalue la solution complexe du problème aux valeurs propres résiduel $\mathbf{R}(\boldsymbol{U},\lambda)=\mathbf{0}$ correspondant à $p=1$. On obtient la branche solution $\left(\boldsymbol{U}(p),\lambda(p)\right)$ par les séries de Taylor $(\mathbf{S}_j,\mathbf{T}_j)$ des fonctions $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ et en résolvant :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_0 & \boldsymbol{U}_0\\ {}^T\boldsymbol{U}_0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_j\\ \kappa\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\{\mathbf{S}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0}}\}-p\{\mathbf{T}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0}}\}-\{\mathbf{T}_{j-1}\}\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\text{où}\quad\begin{cases}\mathbf{A}_0=\mathbf{K}_0-\lambda_0\mathbf{M}+p\left(E\left(\lambda_0\right)\mathbf{K}_v-H\left(\lambda_0\right)\mathbf{K}_p\right)\\ \lambda_j=-\dfrac{{}^T\boldsymbol{U}_0\cdot\left[\{\mathbf{S}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0},\lambda_j=0}\}+p\{\mathbf{T}_{j|\boldsymbol{U}_j=\mathbf{0},\lambda_j=0}\}+\{\mathbf{T}_{j-1}\}\right]}{{}^T\boldsymbol{U}_0\cdot\left[\{\mathbf{S}_{1|\boldsymbol{U}_1=\mathbf{0},\lambda_1=1}\}+p\{\mathbf{T}_{1|\boldsymbol{U}_1=\mathbf{0},\lambda_1=1}\}\right]}\end{cases} \tag{4.14}$$

κ désigne le multiplicateur de Lagrange

La solution complète $(\boldsymbol{U},\lambda)$ est obtenue au moyen de la procédure de continuation proposée dans [131]. Cette procédure permet de calculer la solution complexe exacte à savoir les modes propres $\boldsymbol{U}$ et les fréquences propres ω qui sont les racines carrées des λ. On peut ensuite déduire la fréquence amortie Ω_n et le facteur de perte η_n à tous les rangs *n* par :

$$\omega_n^{\,2} = \Omega_n^{\,2}\left(1+\eta_n\right) \tag{4.15}$$

Finalement, la méthode a été implémentée pour étendre le solveur DIAMANT sous MATLAB. Cet outil est utilisé pour déterminer les solutions de l'équation (4.6). L'utilisateur doit uniquement fournir les matrices $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_v$, $\mathbf{K}_p$ et $\mathbf{M}$, la solution initiale $(\boldsymbol{U}_0,\lambda_0)$, l'ordre de troncature *N* et la précision désirée ϵ.

Quelques exemples numériques sont présentés ci-après pour valider le modèle développé et montrer l'intérêt de l'outil proposé pour le contrôle des vibrations.

4.4.2. Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle est déterminée par la MAN. La procédure est présentée par Azrar et al. [174, 175] avec un développement en séries de Taylor de λ, $\boldsymbol{U}$ et de la fonction E. Cette méthode a été rendue plus robuste par Abdoun et al. [119] qui ont remplacé dans la procédure de continuation les séries de Taylor par les approximants de Padé [176]. La méthode dans sa configuration initiale, présentée par Abdoun et al. [119], est réservée à l'extraction des amplitudes de vibrations de structures sandwichs viscoélastiques. Nous proposons ici une extension de cette méthode dans l'optique de résoudre les problèmes de vibrations forcées de structures incluant aussi des matériaux piézoélectriques pour le contrôle actif-passif.

4.4.2.1. Méthode asymptotique numérique

Cet algorithme combinant les techniques de perturbation à la méthode des éléments finis a été proposé pour résoudre d'autres classes de problèmes non linéaires. Les différentes étapes de l'algorithme proposé peuvent être présentées de la manière suivante :

Etape 1 : On commence par développer en séries de Taylor du paramètre *p* au moyen de la boîte à outils DIAMANT les inconnues $\boldsymbol{U}$, λ et les fonctions caractéristiques E et H sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}(p) = \boldsymbol{U}_0 + \sum_{j=1}^{N} p^j \boldsymbol{U}_j \\ \lambda(p) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{N} p^j \lambda_j \\ E(p) = E_0 + \sum_{j=1}^{N} p^j E_j \\ H(p) = H_0 + \sum_{j=1}^{N} p^j H_j \end{cases} ; \quad p = \frac{1}{s^2}\left\{\left\langle \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1 \right\rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1\right\} \tag{4.16}$$

Etape 2 : L'introduction des équations (4.16) dans (4.6) permet de distinguer aux différents ordres de p les équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{Ordre 0 :} && \begin{cases} [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{U}_0\} = \{\boldsymbol{F}\} \\ [\mathbf{A}] = \left[\mathbf{K}(0) + E_0\mathbf{K}_v - H_0\mathbf{K}_p\right] \end{cases} ; \quad \lambda_0 = \omega_0^{\,2} && \text{(a)} \\ &\text{Ordre 1 :} && [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{U}_1\} = \left[\lambda_1[\mathbf{M}] - E_1[\mathbf{K}_v] + H_1[\mathbf{K}_p]\right]\{\boldsymbol{U}_0\} && \text{(b)} \\ &\text{Ordre } j \geq 2 : && [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{U}_j\} = \left[\sum_{i=1}^{j}\lambda_i[\mathbf{M}] - \sum_{l=1}^{j}\left(E_l[\mathbf{K}_v] - H_l[\mathbf{K}_p]\right)\right]\{\boldsymbol{U}_0\} && \text{(c)} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Pour une fréquence initiale $\omega_0 = \sqrt{\lambda_0}$ donnée, loin de la résonance, la solution du système linéaire (4.17-a) permet d'obtenir le déplacement initial $\boldsymbol{U}_0$ à partir d'une force d'excitation fixe $\boldsymbol{F}$. Il faut également rappeler que la matrice tangente $[\mathbf{A}]$ dans les équations (4.17) est la même à tous les ordres j. Cela signifie qu'une seule inversion de la matrice est nécessaire pour tous les vecteurs $\boldsymbol{U}_j$ de la branche j. Aussi, il est à noter que la matrice $[\mathbf{A}]$, puis les vecteurs $\boldsymbol{U}_j$ sont complexes. Une décomposition en parties entière et imaginaire est utilisée dans les travaux d'Abdoun et al. [119]. Cependant, avec la boîte à outils DIAMANT développée sous MATLAB par Koutsawa et al. [130], cette décomposition n'est pas nécessaire. Aussi, la procédure de continuation classique utilisant les séries de Taylor est utilisée.

4.4.2.2. Procédure de continuation

La méthode présentée ci-haut a un domaine de validité correspondant au rayon de convergence de la série, caractérisée par $[0, a_{\text{limit}}]$ défini par :

$$a_{\text{limit}} = \left(\epsilon \frac{\|U_1\|}{\|U_n\|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{4.18}$$

où ϵ est un paramètre de précision suffisamment faible pour assurer la convergence. Le lecteur est prié de se référer à [177] pour plus de détails.

Toute la procédure développée a été validée et mise en valeur à travers des cas tests présentés ci-dessous.

4.5. Tests numériques et application au contrôle de vibrations

Dans un premier temps, une analyse modale sur une plaque sandwich à cinq couches en console est présentée en vue de valider la méthode de résolution proposée. Ensuite, des cas tests faisant intervenir des lois de contrôle plus complexes seront introduits pour montrer, d'une part, l'utilité de la méthode de résolution et, d'autre part, l'avantage de ces lois.

4.5.1. Validation de l'outil numérique

4.5.1.1. Analyse modale

Nous considérons dans cette partie une plaque sandwich de 5 couches à cœur viscoélastique et faces piézoélectriques, telle que montrée sur la figure 4.2. La plaque est en console et les dimensions sont indiquées sur la figure 4.2. Les propriétés des couches sont définies dans le tableau 4.1.

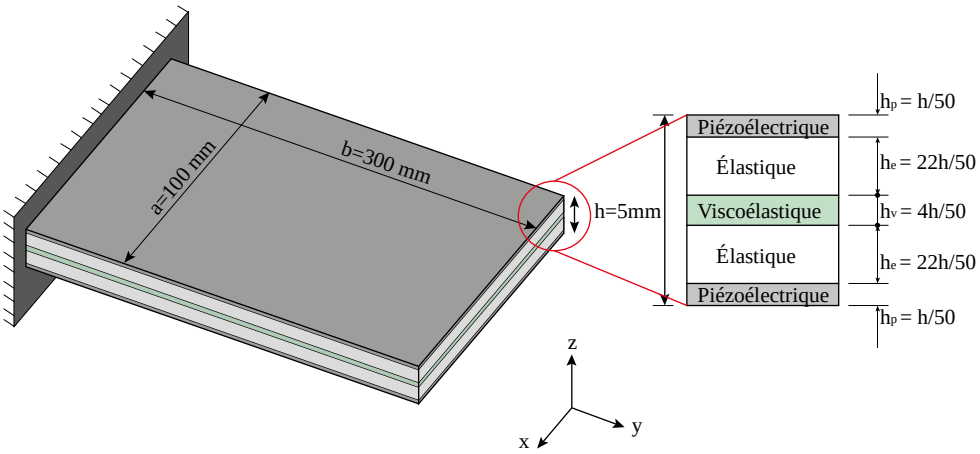


Figure 4.2 Plaque sandwich à 5 couches à cœur viscoélastique et faces piézoélectriques en console

Tableau 4.1 Propriétés mécaniques et piézoélectriques des matériaux

Couches élastiques	ρ_e=2040 Kg · m^{-3} E_e=45,54 GPa ν_e = 0,33
Couches piézoélectriques (PZT4)	ρ_p=7500 Kg · m^{-3} C_{11}=C_{22}=139 GPa ; C_{33}=115,3 GPa C_{13}=C_{23}=74,3 GPa ; C_{12}=77,8 GPa C_{44}=C_{55}=25,6 GPa; C_{66}=30, 6 GPa e_{15}=e_{24}=12,7 C/m^2 ; e_{31}=e_{32}=-5,21 C/m^2 ; e_{33}=15,1 C/m^2 κ_{11}=κ_{22}=1,31e^{-8} F/m ; κ_{33}=1,15e^{-8} F/m
Couche viscoélastique	ρ_v=1200 Kg · m^{-3} E_0=7,25 MPa ν_v = 0,45

Le comportement viscoélastique du cœur est décrit par le module d'Young complexe constant :

$$E_v(\omega) = E_0\left(1 + i\eta_c\right) \tag{4.19}$$

où E_0 et η_c représentent le module d'Young d'élasticité retardée et le facteur de perte du cœur. Le contrôle et l'amortissement actif n'étant pas possible à modéliser dans ABAQUS, nous comparerons nos résultats à ceux de l'élément quadratique hexaédrique standard HEX20E. Ce dernier est validé dans un premier temps à l'aide des éléments tridimensionnels quadratiques C3D20E, par une comparaison des modes propres de la plaque non-amortie. Ce test a permis entre autres de déterminer les maillages adéquats pour les éléments SHB8PSE et SHB20E. Nous considérons les 3 configurations suivantes pour également mettre en lumière l'effet du couplage électromécanique :

- structure sans couplage électromécanique
- structure avec couplage électromécanique et court-circuit
- structure avec couplage électromécanique et circuit ouvert

Les figures 4.3 montrent les 5 premières fréquences propres. Les premiers résultats sont présentés dans le tableau 4.2 où l'on peut observer un bon accord entre les résultats des éléments SHB8PSE et SHB20E et ceux des éléments de référence C3D20E et HEX20E. Aussi, on note déjà l'effet du couplage électromécanique sur les fréquences propres. En effet, il ressort qu'en court-circuitant le système, cela revient à traiter le cas où le couplage électromécanique n'est pas pris en compte. En revanche, lorsque le circuit est ouvert, les fréquences propres augmentent légèrement. Cette augmentation est due à l'augmentation de la matrice de rigidité résultant du couplage électromécanique. Ce phénomène sera mis à contribution pour la réduction et le contrôle des amplitudes de vibrations étudiés un peu plus loin.

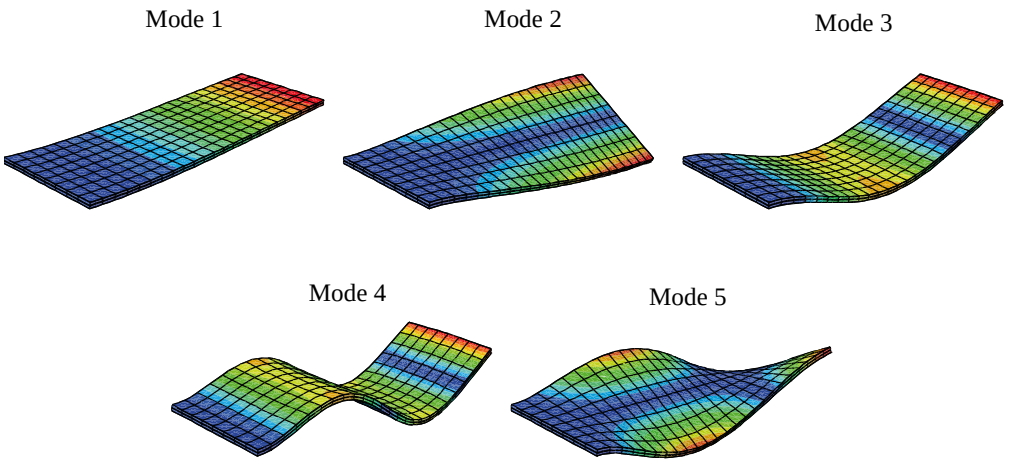


Figure 4.3 Cinq premiers modes de vibration de la poutre en console

Tableau 4.2 Cinq premières fréquences propres du sandwich à 5 couches

Configurations	Modes	C3D8E (96x32x5c)	C3D20E (24x8x5c)	HEX20E (24x8x5c)	SHB8PSE (24x8x5c)	SHB20E (12x4x5c)
Sans couplage électromécanique	1	39,406	38,481	38,519	38,344	38,46
	2	153,59	153,80	153,93	153,08	153,93
	3	188,45	180,83	181,23	180,83	181,23
	4	457,47	434,64	435,05	438,91	435,00
	5	459,05	460,34	460,53	460,07	460,52
Avec couplage électromécanique (court-circuit)	1	39,406	38,481	38,519	38,344	38,519
	2	153,59	153,81	153,93	153,08	153,93
	3	188,45	180,83	181,23	180,83	181,23
	4	457,47	434,65	435,05	438,91	435,00
	5	459,05	460,34	460,53	460,07	460,52
Avec couplage électromécanique (circuit ouvert)	1	39,889	38,859	38,910	38,353	38,907
	2	153,72	153,89	154,01	158,64	154,01
	3	190,79	182,44	182,87	182,19	182,87
	4	460,22	438,77	439,22	439,05	439,17
	5	463,52	461,05	461,26	475,58	461,25

Dans la suite, nous allons évaluer les propriétés amortissantes de la plaque en utilisant tour à tour la loi de contrôle proportionnelle dérivative décrite par :

$$\{\boldsymbol{\phi}_a\} = g_d \{\boldsymbol{\phi}_s\} + g_v \{\dot{\boldsymbol{\phi}}_s\} \tag{4.20}$$

où g_d et g_v désignent, respectivement, les gains en déplacement et en vitesse. On déduit ainsi la fonction $H(\omega)$ donnée par :

$$H(\omega) = g_d + i\omega g_v \tag{4.21}$$

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 4.4 et 4.5 pour différentes valeurs du gain de contrôle et du facteur de perte. Il ressort dans un premier temps une adéquation entre nos résultats et ceux des éléments de référence. Aussi, il faut noter que peu de degrés de liberté sont nécessaires pour les éléments SHB8PSE et SHB20E (respectivement, 5400 et 5548 ddls) pour avoir des résultats équivalents à ceux de l'élément HEX20E qui a eu besoin de 19884 ddls. Le nombre de points d'intégration dans les formulations solide–coques proposées est également bien plus faible, grâce à l'intégration réduite adoptée.

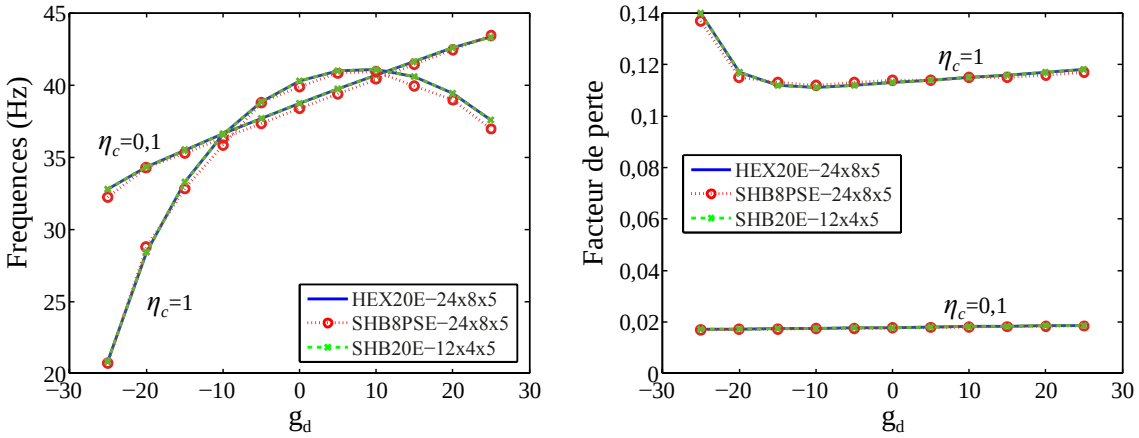


Figure 4.4 Paramètres amortissants en fonction du gain de contrôle en déplacement g_d (g_v=0)

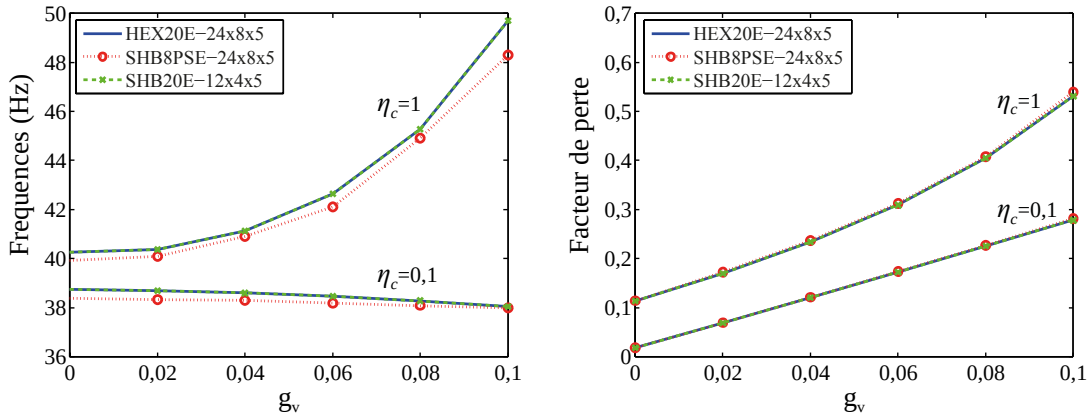


Figure 4.5 Paramètres amortissants en fonction du gain de contrôle en vitesse g_v (g_d =0)

Par ailleurs, ces graphes montrent l'influence du contrôle actif sur les propriétés amortissantes de la structure. En effet, il apparaît dans un premier temps qu'en augmentant le gain en déplacement, la fréquence amortie augmente de manière globale jusqu'à une certaine valeur du coefficient d'amortissement. Cette augmentation est due à l'augmentation de la matrice de rigidité. Mais au-delà d'une certaine valeur du coefficient d'amortissement et du gain en déplacement, la fréquence commence à chuter puisque la rigidité diminue. En même temps, le facteur de perte reste quasiment constant puisque le gain en déplacement n'introduit aucun effet de perte d'énergie.

Concernant le gain en vitesse, on observe une faible variation de la fréquence pour un coefficient d'amortissement faible, et une augmentation plus ou moins importante pour des coefficients élevés. En revanche, les facteurs de perte augmentent avec le gain en vitesse et le coefficient d'amortissement. En effet, la loi de contrôle en vitesse ressemble beaucoup à celle de la dissipation viscoélastique, ce qui explique l'apport en amortissement du gain en vitesse.

Ce test a permis de voir l'intérêt et quelques limites de ce type de contrôle actif des vibrations. Pour augmenter le contrôle actif, des lois plus complexes, telles que celles résultant d'un filtre par exemple peuvent être d'une utilité non négligeable. En outre, il est parfois préférable pour l'ingénieur d'avoir une idée des amplitudes de vibrations. Pour cela, des réponses fréquentielles sont nécessaires. Nous allons donc évaluer les réponses fréquentielles dans les analyses à suivre.

4.5.1.2. Réponse fréquentielle d'une plaque sandwich en contrôle actif-passif

Nous considérons une plaque rectangulaire sur appuis simples comme indiquée sur la figure 4.6. Les faces piézoélectriques sont en PZT-5H dont les propriétés sont présentées dans le tableau 4.3. Deux matériaux viscoélastiques sont utilisés dans le cœur pour montrer l'influence de ceux-ci sur le contrôle actif. Pour cela, nous considérons l'ISD112 à 27°C et le DYAD606 à 30°C dont les comportements sont décrits par le modèle de Maxwell généralisé :

$$G(\omega) = G_0\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_j\omega}{\omega - i\Omega_j}\right) \qquad (4.22)$$

avec n=3 pour l'ISD112
et n=5 pour le DYAD606

où G_0 représente le module de cisaillement de l'élasticité retardée et (Δ_j, Ω_j) les paramètres du modèle donnés dans les tableaux 4.4 et 4.5. Les autres paramètres mécaniques sont indiqués dans le tableau 4.3.

Les couches élastiques sont en aluminium. On s'intéressera aux 3 premiers modes de vibrations dans le but de voir l'intérêt et les limites des différentes méthodes de contrôle en ce qui concerne les modes de vibrations.

Tableau 4.3 Propriétés mécaniques et piézoélectriques des matériaux

Couches élastiques (Aluminium)	ρ_e=2690 $Kg \cdot m^{-3}$ E_e=70,3 GPa ν_e = 0,345
Couches piézoélectriques (PZT-5H)	ρ_p=7730 $Kg \cdot m^{-3}$ $C_{11}=C_{22}=C_{33}$=126 GPa ; C_{12}=79,5 GPa ; $C_{13}=C_{23}$=84,1 GPa ; $C_{44}=C_{55}$=23,0 GPa; C_{66}=23,3 GPa ; $e_{15}=e_{24}$=17 C/m^2 ; $e_{31}=e_{32}=-6,5$ C/m^2 ; e_{33}=23,3 C/m^2 $\kappa_{11}=\kappa_{22}$=1,303e^{-8} F/m ; κ_{33}=1,503e^{-8} F/m
Couche viscoélastique (ISD112 à 27°C)	ρ_v=1600 $Kg \cdot m^{-3}$ E_0=1,49 MPa ν_v = 0,49
Couche viscoélastique (DYAD606 à 30°C)	ρ_v=1104 $Kg \cdot m^{-3}$ E_0=5,3922 MPa ν_v = 0,29

Tableau 4.4 Paramètres viscoélastiques de l'ISD112 à 27°C

j	Δ_j	Ω_j (rad.s^{-1})
1	0,746	468,7
2	3,265	4742,4
3	43,284	71532,5

Tableau 4.5 Paramètres viscoélastiques du DYAD606 à 30°C

j	Δ_j	Ω_j (rad.s^{-1})
1	5,40	73,06
2	14,15	453,34
3	1,43	8,83
4	28,33	3406,80
5	128,85	52781,28

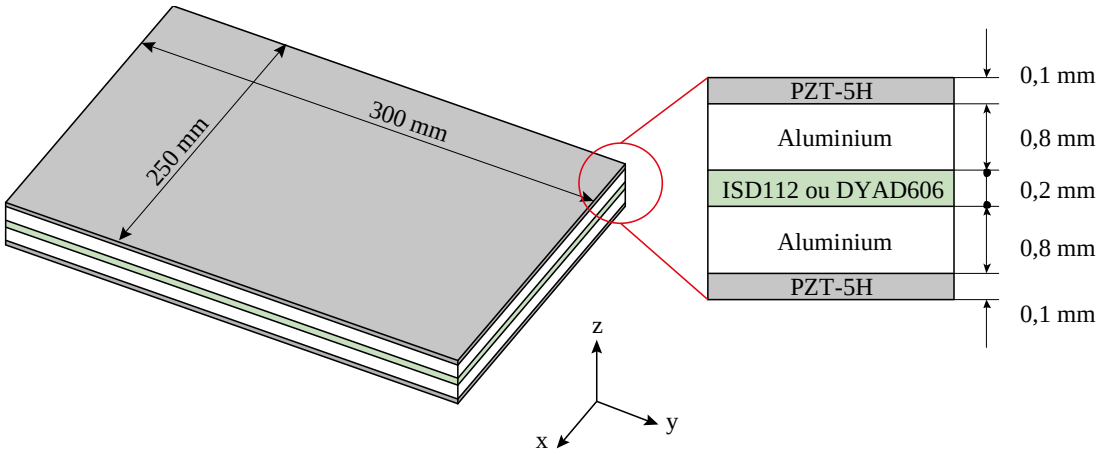


Figure 4.6 Plaque sandwich à 5 couches sur appuis simples

Une impulsion sinusoïdale d'amplitude F=1000N est appliquée tour à tour pour exciter les trois premiers modes de vibrations de la plaque tel qu'indiqué sur les figures 4.7. Une combinaison des paramètres de contrôle actif en déplacement g_d et en vitesse g_v est effectuée pour montrer la contribution de chacun dans la réduction des amplitudes de vibrations des différents modes.

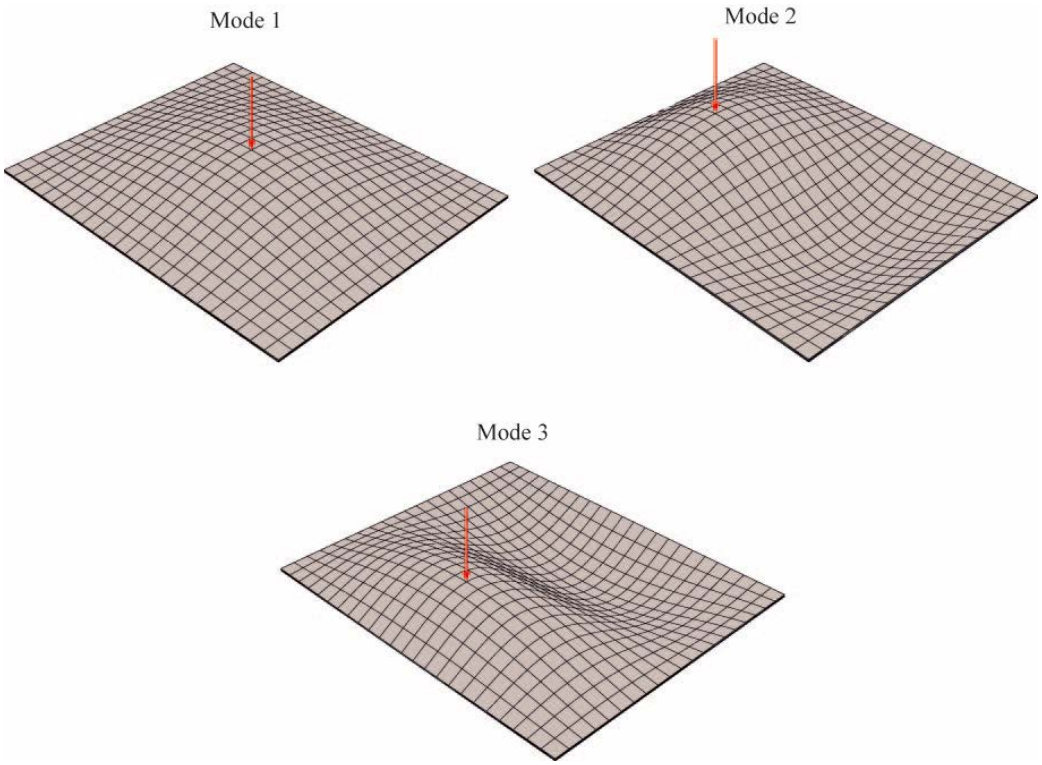


Figure 4.7 Chargement de la plaque pour différents modes excités

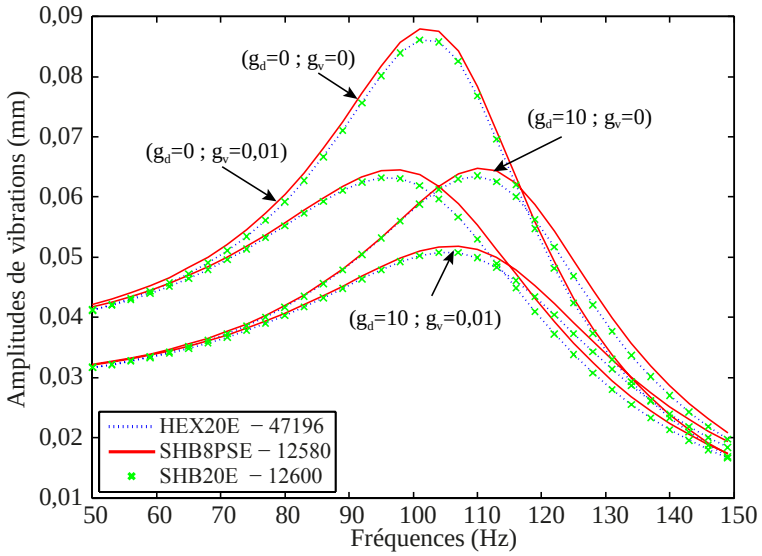


Figure 4.8 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (ISD112 27°C) – Mode 1

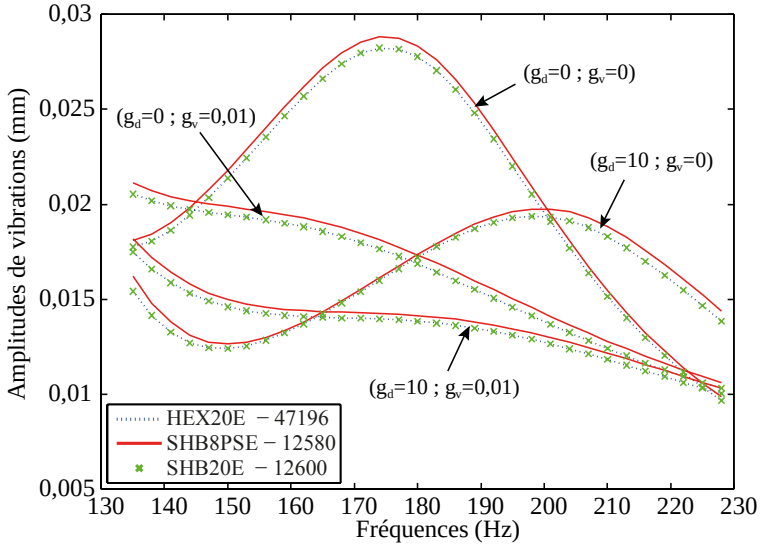


Figure 4.9 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (ISD112 27°C) – Mode 2

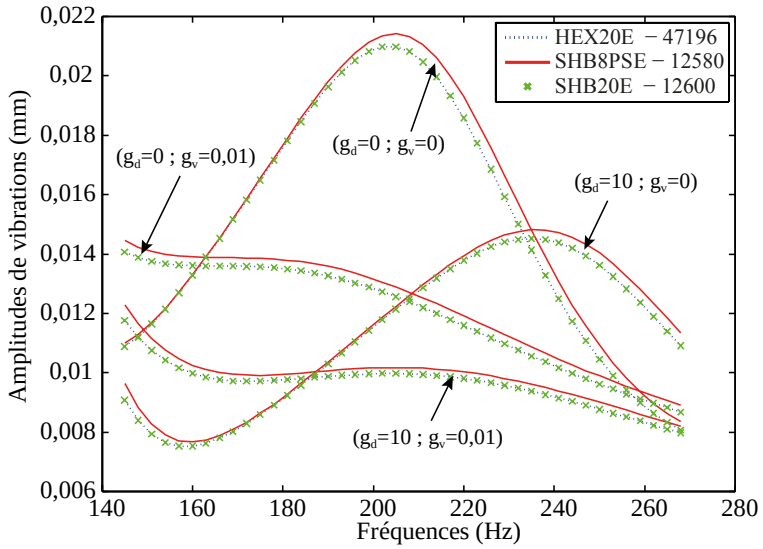


Figure 4.10 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (ISD112 27°C) – Mode 3

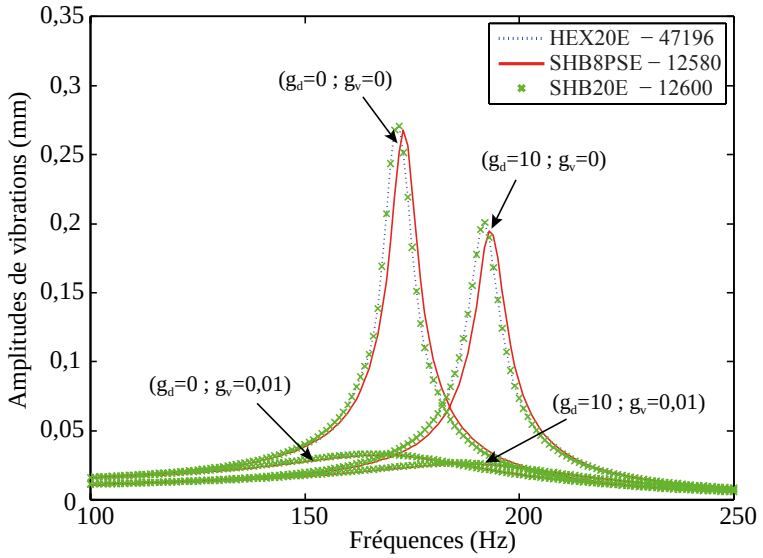


Figure 4.11 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (DYAD606 30°C) – Mode 1

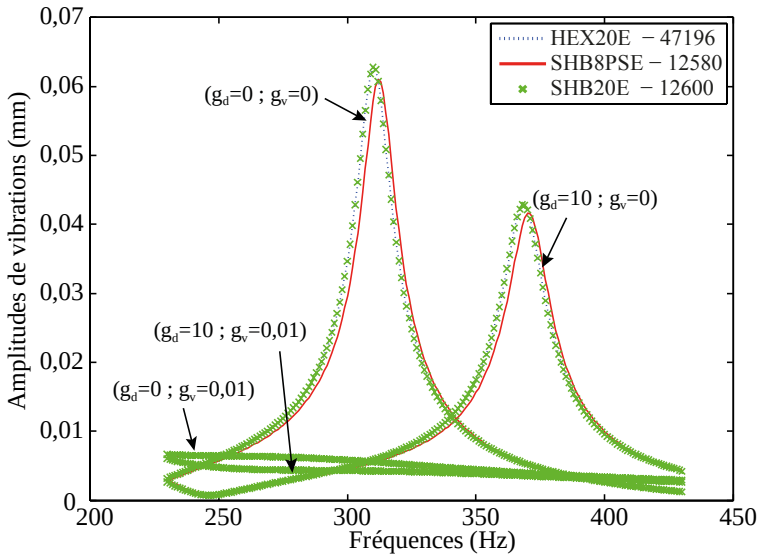


Figure 4.12 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (DYAD606 30°C) – Mode 2

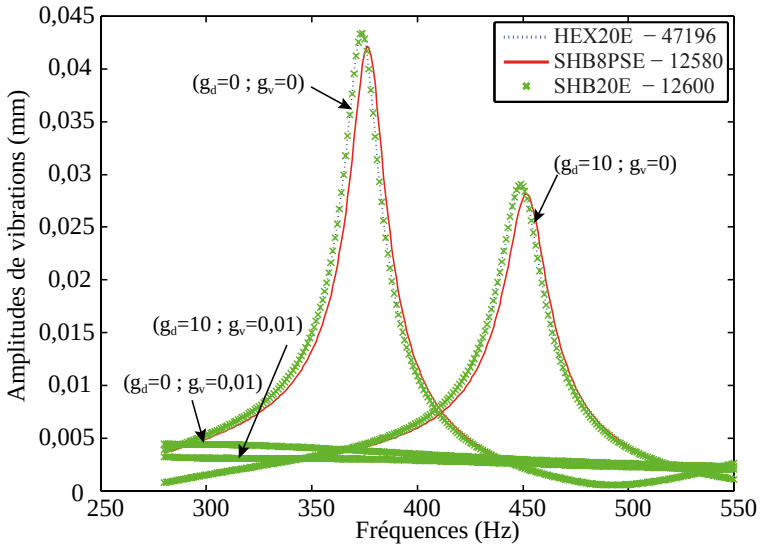


Figure 4.13 Réponse fréquentielle avec combinaison des coefficients de la loi proportionnelle dérivative (DYAD606 30°C) – Mode 3

Les résultats sont présentés sur les figures 4.8–4.13. D'un point de vue performance numérique, il ressort que les éléments finis solide–coques SHB8PSE et SHB20E nécessitent une fois de plus 4 fois moins de degrés de liberté pour donner des résultats équivalents à ceux de l'élément

de référence HEX20E. À noter cependant que le SHB8PSE prédit des amplitudes un peu plus élevées qui peuvent aller jusqu'à 4 % de plus sur les modes supérieurs étudiés, à savoir le second et troisième. Par ailleurs, l'analyse des courbes de réponses fréquentielles permet de mieux appréhender l'influence des différents paramètres de contrôle des amplitudes de vibrations. On remarque que le contrôle de type proportionnel dérivatif permet de réduire plus ou moins les amplitudes de vibrations pour ces deux matériaux viscoélastiques sur tous les modes excités. Rappelons que nous avons choisi ces deux valeurs de g_d et g_v pour avoir des réductions d'amplitudes équivalentes. Ainsi, pour la plaque dont le cœur viscoélastique est fait d'ISD112, l'amplitude de vibration est réduite de 30 à 40% environ par rapport au contrôle passif seul. En ce qui concerne la plaque de couche viscoélastique en DYAD606, les amplitudes de vibration sont quasiment atténuées.

Ces analyses permettent de faire ressortir toute la difficulté à choisir une loi de contrôle capable d'atténuer tous les modes de vibrations quel que soit le matériau viscoélastique choisi. Certes des modèles de contrôle actif optimal tels que les LQR, LQG, etc. existent dans la littérature et donnent des résultats intéressants. Néanmoins, d'autres moyens tels que l'installation de filtres dans le circuit de contrôle peuvent apporter une alternative différente. Pour ce faire, nous proposons dans la suite des lois de contrôle actif présentant une forte dépendance en fréquence. La résolution des équations permettra, d'une part, de valider l'outil de résolution, et d'autre part, de montrer la réduction plus importante des amplitudes de vibrations par de telles lois.

4.5.2. Application à la réduction des amplitudes de vibrations d'une plaque

Dans cette partie, deux lois de contrôle rétroactif sont appliquées à des structures sandwichs pour contrôler les amplitudes de vibrations. L'objectif est de montrer dans un premier temps tout l'intérêt à utiliser des filtres de transfert et leurs apports au contrôle des amplitudes de structures. Il s'agit également de mettre en lumière l'utilité de l'outil numérique développé dans la prise en compte de lois de contrôle non-linéaires.

4.5.2.1. Filtre de Gauss

Nous considérons de nouveau la structure schématisée sur la figure 4.6. Un filtre de type gaussien est installé dans le circuit reliant les capteurs aux actionneurs. La loi de contrôle décrite par la fonction de ce filtre est donnée par la relation :

$$H(\omega) = k \exp\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad ; \quad k = 100 \tag{4.23}$$

où ω représente la dépendance en fréquence et ω_0 la fréquence propre du mode autour duquel se fait l'analyse. Les trois premiers modes sont également excités tour à tour par une force F=1000N. Les amplitudes obtenues avec cette loi sont superposées à celles obtenues par amortissement passif et représentées sur les figures 4.14–4.19. Pour vérifier la validité de ces résultats, nous superposons également les résultats des éléments solide–coques SHB8PSE et SHB20E à ceux du HEX20E (élément hexaédrique quadratique à 20 nœuds). Une fois de plus, les résultats des éléments finis solide–coques sont en bon accord avec ceux de l'élément de référence HEX20E. L'analyse des figures 4.14–4.19 montre une réduction des amplitudes maximales entre 40% (mode 1) et 60% (mode 3) par rapport au contrôle passif obtenu par l'ISD112 à 27°C. Cette réduction varie entre 20% (mode 1) à 60% (mode 3) pour un sandwich dont le cœur est fait de DYAD606 à 30°C. La variation du coefficient k présent dans la fonction de filtre donnée par l'équation (4.23) peut permettre de moduler le contrôle d'amplitudes.

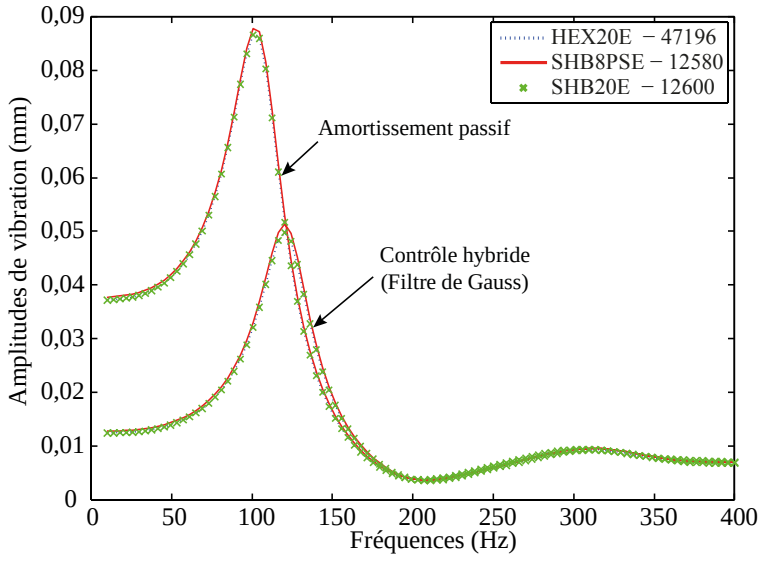


Figure 4.14 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Gauss – Mode 1

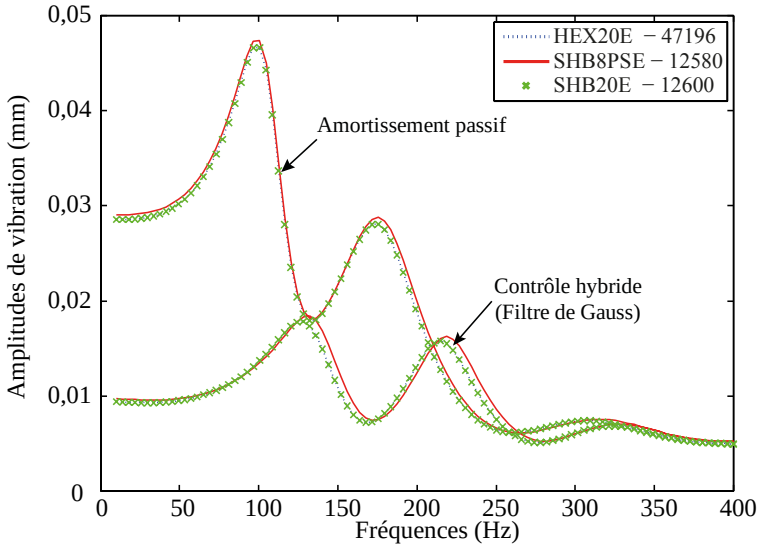


Figure 4.15 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Gauss – Mode 2

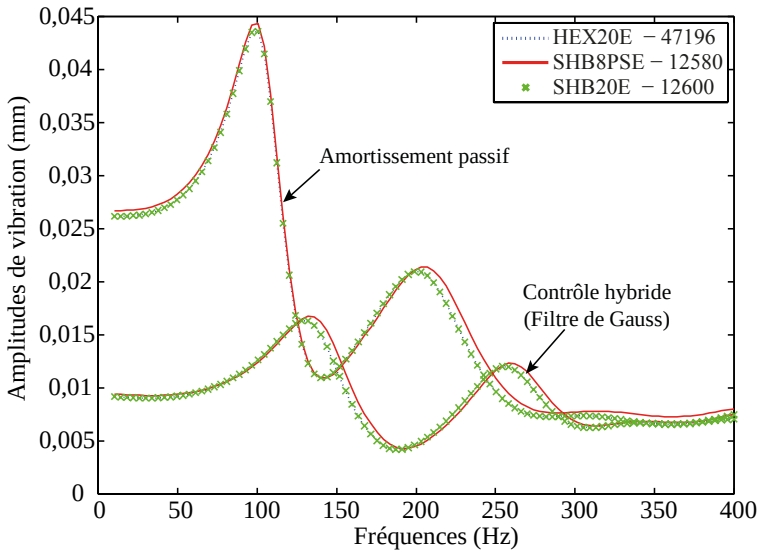


Figure 4.16 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Gauss – Mode 3

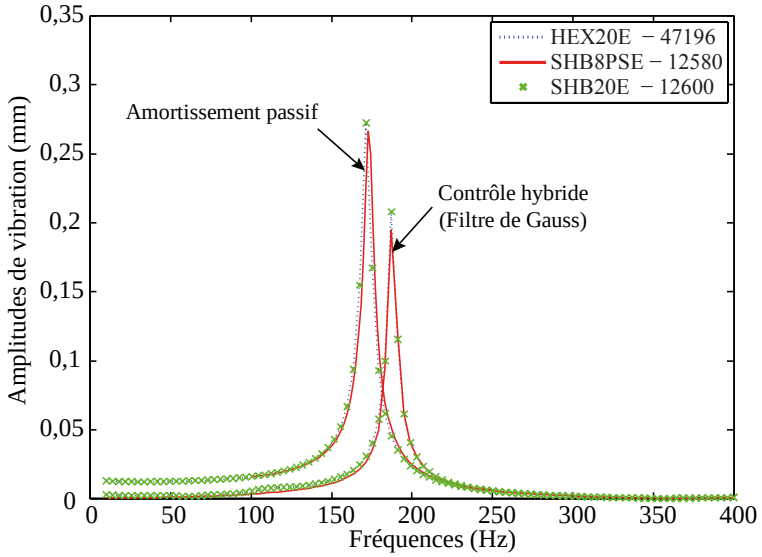


Figure 4.17 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Gauss – Mode 1

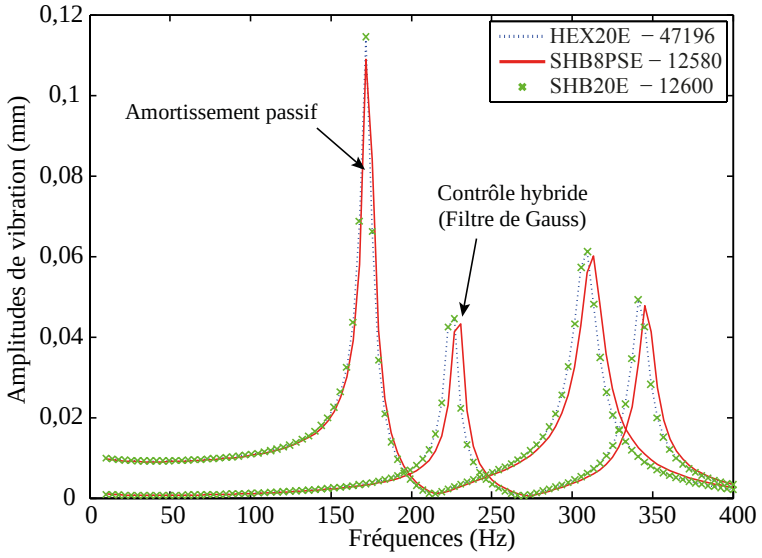


Figure 4.18 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Gauss – Mode 2

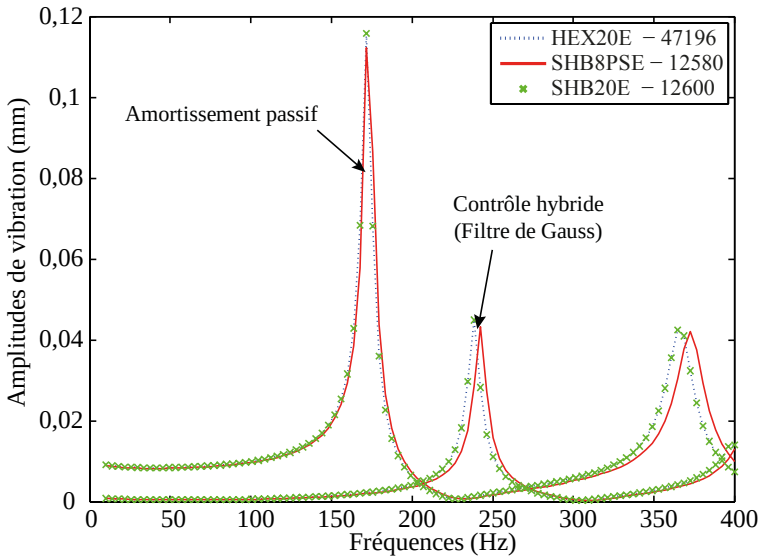


Figure 4.19 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Gauss – Mode 3

Pour améliorer le contrôle actif, un autre filtre est installé dans le circuit de contrôle actif reliant les capteurs aux actionneurs piézoélectriques.

4.5.2.2. Filtre de type Tchebychev

Nous nous plaçons dans la même configuration que précédemment, à l'exception de la loi de contrôle qui est décrite ici par la relation :

$$H(\omega) = k\left(\mathrm{a} + \mathrm{b}\cos\left(\frac{i\omega}{\mathrm{a}}\right)\right) \quad ; \quad \mathrm{a} = \omega_0 \ , \ \mathrm{b} = \frac{1}{\omega_0} \ \text{et} \ \ k = -0{,}65 \tag{4.24}$$

Les réponses fréquentielles indiquées sur les figures 4.20–4.25 montrent une concordance entre les résultats de référence fournis par le HEX20E et ceux des éléments solide–coques SHB8PSE et SHB20E. Par ailleurs, on observe une atténuation assez importante des amplitudes de vibrations quel que soit le matériau viscoélastique utilisé pour le contrôle passif. Ce type de filtre peut être utilisé dans les structures où aucune déflexion n'est autorisée, à l'instar des circuits imprimés où même une faible déformation peut entraîner un dysfonctionnement de l'appareil dans lequel ils sont installés.

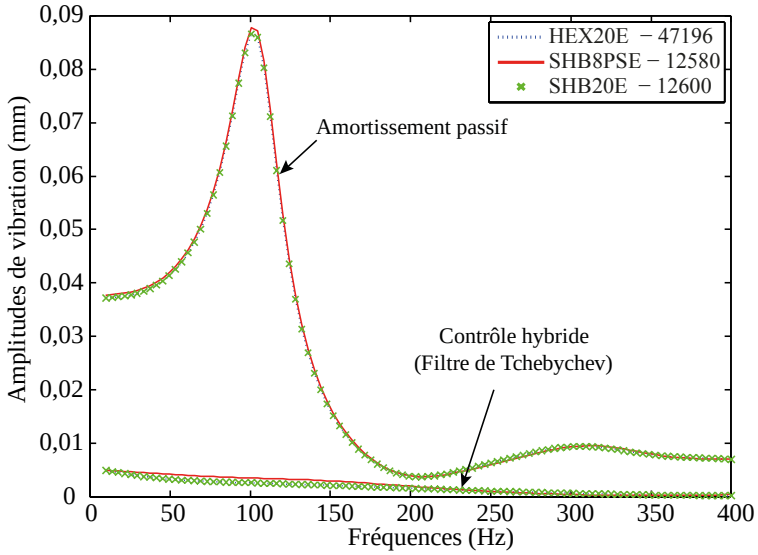


Figure 4.20 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Tchebychev – Mode 1

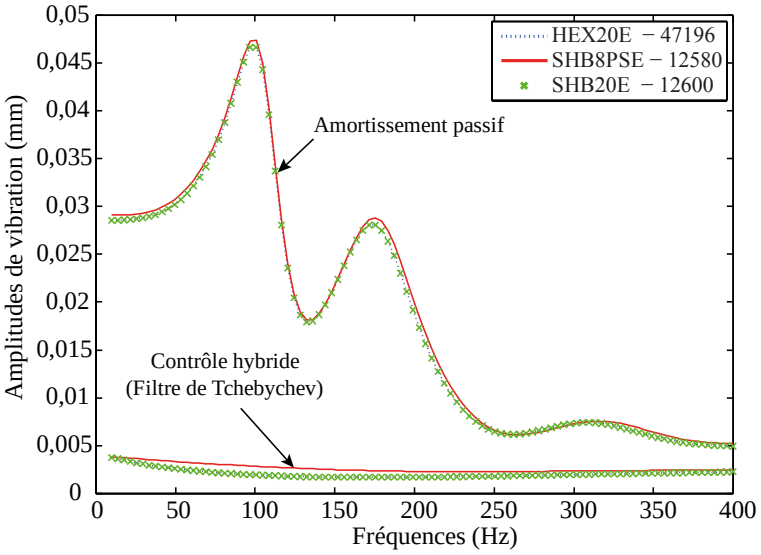


Figure 4.21 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Tchebychev – Mode 2

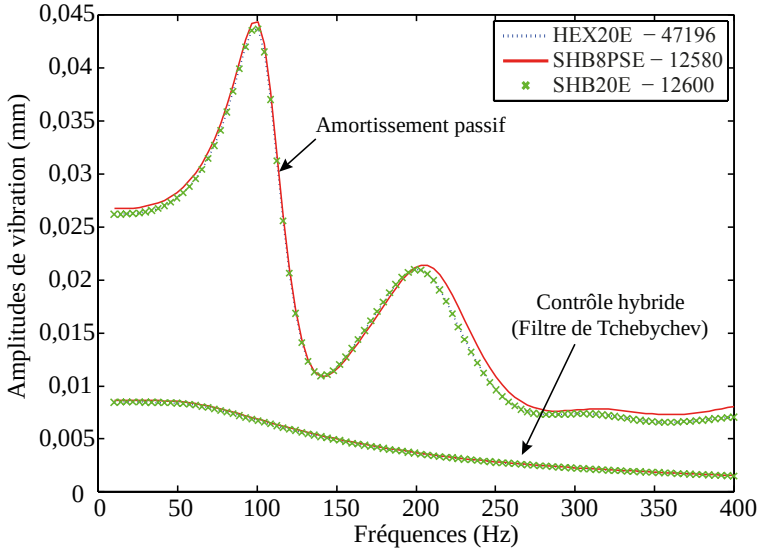


Figure 4.22 Réponse fréquentielle ISD112 - filtre de Tchebychev – Mode 3

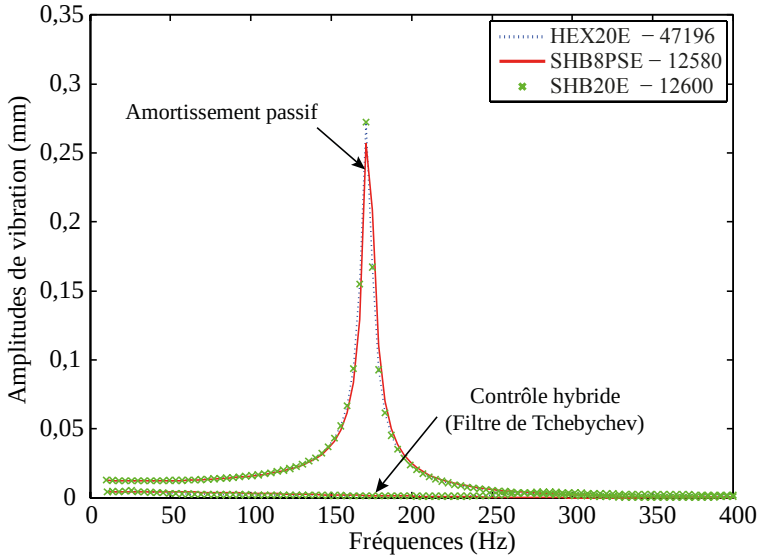


Figure 4.23 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Tchebychev – Mode 1

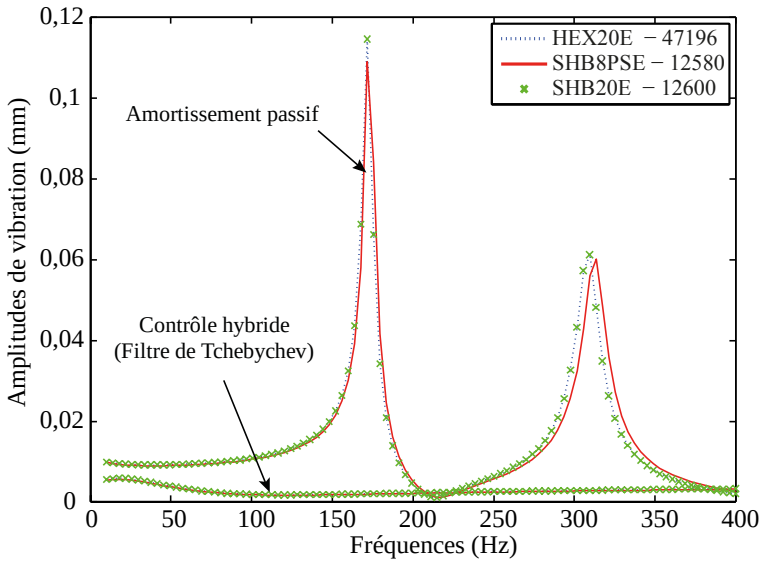


Figure 4.24 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Tchebychev – Mode 2

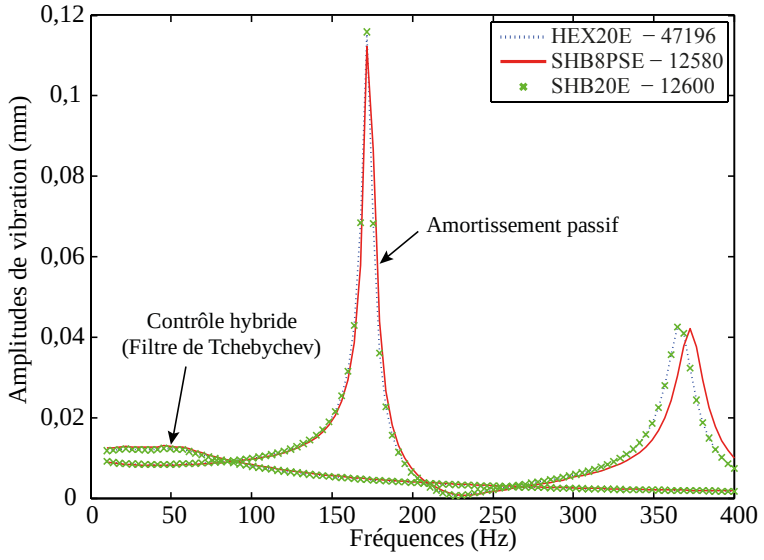


Figure 4.25 Réponse fréquentielle DYAD606 - filtre de Tchebychev – Mode 3

4.6. Conclusions

Dans ce chapitre, des modèles éléments finis sont proposés en vue de modéliser le contrôle actif-passif des vibrations au moyen de filtres actifs. Ces modèles basés sur une discrétisation éléments finis solide–coque permettent de considérer des structures présentant des formes géométriques et matériaux complexes même si la validation a concerné des plaques. L'extraction des propriétés amortissantes a été faite par une extension de l'outil générique couplant l'homotopie à la MAN automatisée par la DA présenté par Bilasse et al. [131]. Les amplitudes de vibrations ont été évaluées par l'extension de la MAN automatisée par la DA présentée par Abdoun et al. [119]. Des cas tests de contrôle hybride des vibrations ont été menés avec succès essentiellement sur des plaques. Dans un premier temps, l'intérêt du contrôle actif a été montré par l'utilisation de la loi Proportionnelle Dérivative pour différentes valeurs d'amortissement η_c constant. Pour aller plus loin, deux matériaux viscoélastiques, dont le comportement dépend de la fréquence, ont été introduits et l'influence de deux paramètres g_d et g_v a été mise en lumière. Pour finir, des lois de contrôle actif non-linéaires présentant une forte dépendance en fréquence ont été introduite et l'avantage démontré à travers la réduction des amplitudes de vibrations. Ces tests, bien qu'appliqués ici uniquement sur des plaques, peuvent également être étendus à des structures à géométries complexes.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse s'inscrit dans une démarche de développement d'éléments finis de type solide–coques destinés à la modélisation de structures multicouches en vibrations. En effet, la combinaison des avantages d'un matériau à celles de l'autre a montré beaucoup d'intérêt dans les applications industrielles. C'est le cas des sandwichs utilisés pour l'amortissement des vibrations qui combinent la résistance des matériaux élastiques au pouvoir amortissant des matériaux viscoélastiques. Ainsi, pour une meilleur conception et mise en œuvre de cette classe de matériaux, il est nécessaire d'avoir une bonne maîtrise de ceux-ci. De nos jours, dans un souci de réduire les coûts de production, la plupart des essais expérimentaux effectués jadis sont remplacés par des simulations numériques. Cette nouvelle problématique a motivé les travaux de plusieurs chercheurs. A cet effet, différents modèles dans la littérature ont permis de modéliser le comportement des structures multicouches en vibrations. Cependant, dans certaines configurations, on se confronte parfois à des limites qui conduisent à l'utilisation de certains éléments finis enrichies et, le cas échant, à un maillage plus fin, ce qui se révèle coûteux en temps de calcul.

Dans le but d'apporter une contribution dans ce sens, des éléments coques volumiques sont développés. Ce type d'éléments présente beaucoup d'avantages par rapport aux éléments standards ayant la même cinématique. Ils permettent de modéliser aussi bien des structures minces qu'épaisses. Le gain de temps devient non négligeable par rapport au coût que nécessite l'utilisation d'éléments volumiques classiques. Ces qualités nous ont poussés dans un premier temps à proposer une modélisation de structures viscoélastiques pour l'amortissement des vibrations. À cet effet, la loi constitutive viscoélastique a été introduite et des tests numériques menés sur des poutres et plaques dans diverses configurations ont permis de montrer l'intérêt des modèles proposés. Il apparaît que les éléments de type solide–coque SHB8PS et SHB20 permettent de modéliser les structures multicouches poutres au-delà des limites mises en évidence par Hu et al. [11] et cela avec un gain de temps non négligeable.

Ensuite, nous nous sommes rendu compte que l'amortissement passif ne permettait pas de maximiser le contrôle des amplitudes de vibrations des structures. Pour ce faire, les matériaux piézoélectriques ont été introduits pour leur comportement inverse ; en d'autres termes leurs

capacités à se déformer lorsqu'un potentiel électrique leur est appliqué. Cette propriété intéressante permet d'apporter ou de dissiper le courant généré au cours de la déformation de la structure pour maîtriser les amplitudes de vibrations. Pour modéliser ce phénomène, nous avons jugé important dans un premier temps de formuler les versions piézoélectriques des éléments de type solide–coque proposés par Abed-Meraim et al. [103, 107]. Pour ce faire, des degrés de liberté électriques ont été adjoints à chaque nœud de ceux-ci. La méthode *Assumed-Strain* a également été utilisée pour résoudre les problèmes de verrouillage émanant du couplage électromécanique des éléments linéaires SHB8PSE. Pour valider les éléments formulés, des tests aussi bien en statique qu'en vibrations libres ont été entrepris sur des structures multicouches allant de simples poutres aux plaques et coques. Ces études ont permis de montrer une fois de plus le gain par rapport aux éléments classiques.

Pour finir, nous avons introduit des lois de contrôle actif en vue d'exploiter les propriétés piézoélectriques. Grace à la boite à outils DIAMANT développée par [130-132] un solveur a été développé pour prendre en compte des lois de contrôle rétroactives non-linéaires. Ces lois peuvent s'obtenir par application d'un filtre entre les capteurs et les actionneurs piézoélectriques apposés sur la structure à contrôler. L'idée est de réduire le plus possible les déflexions, c'est-à-dire les amplitudes de vibrations. Avec la limite d'ABAQUS à permettre la prise en compte de lois de contrôle, les résultats ont été confrontés à ceux du HEX20E. Il s'agit de l'élément classique hexaédrique à 20 nœuds avec un degré de liberté électrique à chaque nœud. Nous avons pu dans un premier temps valider l'outil numérique ainsi que les modèles proposés. Une fois ceci fait, nous nous sommes attelés à réduire le plus possible les amplitudes en introduisant des lois de contrôle non-linéaires. Il en ressort une réduction d'amplitudes plus importante que celle du traitement passif seul.

Cette thèse a permis de poser les premiers jalons dans la formulation et la modélisation des vibrations par des éléments finis de type solide–coque. Elle permet d'ouvrir des axes de recherches consacrés à la formulation d'éléments finis multicouches 3D dédiés à la modélisation de structures de formes géométriques quelconques. Certes, plusieurs modèles dans la littérature ont déjà abordé ce problème et apporté des contributions non négligeables. Néanmoins, cette étude a montré l'intérêt des éléments finis solide–coques par rapport aux éléments présentant la même cinématique. Pour augmenter encore les performances en termes de temps de calcul, il serait intéressant dans un premier temps de formuler une version multicouche d'éléments SHB8PS et SHB20 de manière à ne considérer qu'un seul élément dans

l'épaisseur en utilisant par exemple la méthode présentée par Gaudenzi et al. [178]. Cela permettra de réduire encore plus et de manière considérable le temps de calcul tout en modélisant de manière plus ou moins précise des structures multicouches de géométries complexes. Cette approche pourra permettre d'entreprendre la modélisation des structures de type FGM (Functionally Graded Materials) [179, 180] de manière efficiente avec un gain de temps non négligeable.

Par ailleurs, d'autres travaux peuvent également être entrepris sur le couplage électromécanique et le contrôle actif des vibrations. Il serait intéressant d'introduire la prise en compte de l'hystérésis piézoélectrique que l'on rencontre dans les matériaux ferroélectriques [75, 181]. Aussi, des lois de contrôle de type LQR, LQG, SSD (*Synchronized Switch Damping*) [48, 172] peuvent être introduites pour améliorer la réduction des vibrations. Enfin, le modèle multicouche pourra également être étendu aux structures FGPM (Functionally Graded Piezoelectric Materials) [182-184].

Annexe A : Méthode asymptotique numérique et approche DIAMANT

La résolution de certains problèmes non-linéaires exige des outils robustes en raison de la taille ou de la complexité du problème à traiter. Pour ce faire, la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) a été développée par Cochelin et al. [177]. Son application demande une différentiation des paramètres, ce qui rendait assez difficile son application pour des problèmes complexes. Avec le développement des outils de la Différentiation Automatique (DA), l'application de la MAN est devenue plus aisée.

A.1. Méthode asymptotique numérique

La résolution de nombreux problèmes physiques dépendant d'un paramètre θ peut aboutir à une équation du type :

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\theta)=\boldsymbol{0} \tag{A.1}$$

où $\boldsymbol{U}\in\mathbb{R}^n$ représente le vecteur des inconnues et $\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^n$ le résidu à minimiser.

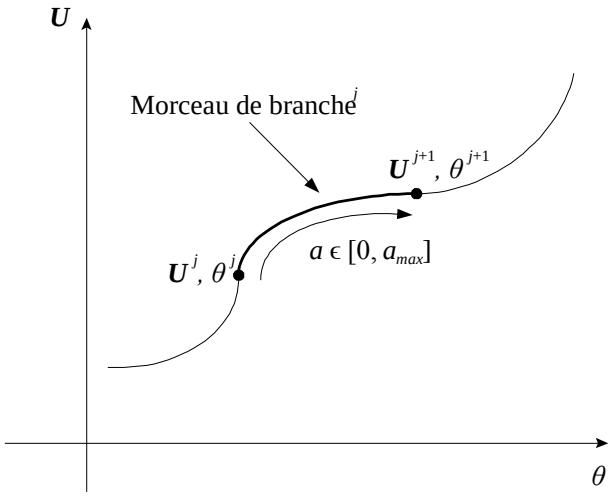


Figure A.1 Schéma descriptif de la MAN

L'idée principale de la MAN repose sur un tracé numérique de la branche de solutions de l'équation (A.1) en générant non pas une séquence de points, mais une séquence de "morceaux" de branches successives : branche ^{1}, branche ^{2}, ..., branche ^{j}, branche $^{j+1}$, (voir figure A.1). Le principe de la MAN consiste à générer une succession de morceaux de branches, chaque nouveau morceau de branche est déterminé par une représentation en séries à partir d'un point de départ.

A.1.1. Technique de perturbation

À partir d'un point solution connu $(\boldsymbol{U}^{j}{}_{0}, \theta^{j}{}_{0})$ de la branche ^{j}, on génère un nouveau morceau de branche en cherchant sa représentation en séries entières par rapport à un paramètre de chemin a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}(a) = \boldsymbol{U}^{j}{}_{0} + \sum_{p=1}^{\infty} a^{p} \boldsymbol{U}^{j}{}_{p} = \boldsymbol{U}^{j}{}_{0} + a\boldsymbol{U}^{j}{}_{1} + a^{2}\boldsymbol{U}^{j}{}_{2} + \cdots \\ \theta(a) = \theta^{j}{}_{0} + \sum_{p=1}^{\infty} a^{p} \theta^{j}{}_{p} = \theta^{j}{}_{0} + a\theta^{j}{}_{1} + a^{2}\theta^{j}{}_{2} + \cdots \end{cases} \qquad \text{(A.2)}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}(a) = \boldsymbol{U}^{j}{}_{0} + \sum_{p=1}^{\infty} a^{p} \boldsymbol{U}^{j}{}_{p} = \boldsymbol{U}^{j}{}_{0} + a\boldsymbol{U}^{j}{}_{1} + a^{2}\boldsymbol{U}^{j}{}_{2} + \cdots \\ \theta(a) = \theta^{j}{}_{0} + \sum_{p=1}^{\infty} a^{p} \theta^{j}{}_{p} = \theta^{j}{}_{0} + a\theta^{j}{}_{1} + a^{2}\theta^{j}{}_{2} + \cdots \end{cases}$$

La branche solution définie par l'équation (A.2) doit être solution de l'équation (A.1), ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{U}^{j}{}_{0} + a\boldsymbol{U}^{j}{}_{1} + a^{2}\boldsymbol{U}^{j}{}_{2} + \cdots, \theta^{j}{}_{0} + a\theta^{j}{}_{1} + a^{2}\theta^{j}{}_{2} + \cdots\right) \\ &= \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{U}^{j}{}_{0}, \theta^{j}{}_{0}\right) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_{j} \left(a\boldsymbol{U}^{j}{}_{1} + a^{2}\boldsymbol{U}^{j}{}_{2} + \cdots\right) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta}\right|_{j} \left(a\theta^{j}{}_{1} + a^{2}\theta^{j}{}_{2} + \cdots\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2} \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}^{2}}\right|_{j} \left(a\boldsymbol{U}^{j}{}_{1} + a^{2}\boldsymbol{U}^{j}{}_{2} + \cdots\right)\left(a\boldsymbol{U}^{j}{}_{1} + a^{2}\boldsymbol{U}^{j}{}_{2} + \cdots\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2} \boldsymbol{R}}{\partial \theta^{2}}\right|_{j} \left(a\theta^{j}{}_{1} + a^{2}\theta^{j}{}_{2} + \cdots\right)\left(a\theta^{j}{}_{1} + a^{2}\theta^{j}{}_{2} + \cdots\right) + \cdots \end{aligned} \qquad \text{(A.3)}$$

En utilisant le fait que $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}^{j}{}_{0}, \theta^{j}{}_{0})$ soit nul et en ordonnant les termes suivant les puissances croissantes du paramètre de chemin a, l'équation (A.3) se réécrit :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} = & a\left\{\left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_j \boldsymbol{U}^j{}_1 + \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta}\right|_j \theta^j{}_1\right\} \\
& + a^2\left\{\left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_j \boldsymbol{U}^j{}_2 + \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta}\right|_j \theta^j{}_2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}^2}\right|_j \boldsymbol{U}^j{}_1{}^T \boldsymbol{U}^j{}_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \theta^2}\right|_j (\theta^j{}_1)^2\right\} \\
& + a^3\left\{\left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_j \boldsymbol{U}^j{}_3 + \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta}\right|_j \theta^j{}_3 + \text{termes dépendants de } \boldsymbol{U}^j{}_1, \boldsymbol{U}^j{}_2, \theta^j{}_1, \theta^j{}_2\right\} \\
& + \cdots \\
& + a^p\left\{\left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_j \boldsymbol{U}^j{}_p + \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta}\right|_j \theta^j{}_p + \text{termes dépendants de } \boldsymbol{U}^j{}_1, \cdots, \boldsymbol{U}^j{}_{p-1}, \theta^j{}_1, \cdots, \theta^j{}_{p-1}\right\} \\
& + \cdots
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Cette dernière équation peut se réécrire sous forme condensée :

$$
\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{U}(a), \theta(a)\right) = a\boldsymbol{R}_1 + a^2\boldsymbol{R}_2 + \cdots + a^p\boldsymbol{R}_p + \cdots = \mathbf{0} \tag{A.5}
$$

La relation (A.5) devant être vérifiée pour toute valeur de *a*, on en déduit une infinité d'équations permettant de définir successivement les termes de la série (A.2) :

$$
\boldsymbol{R}_p = \mathbf{0} \quad \text{pour} \quad p \geq 1 \quad \boldsymbol{R}_p = \mathbf{0} \quad \text{pour} \quad p \geq 1 \tag{A.6}
$$

A chaque ordre p, l'équation (A.6) est un système linéaire en $\boldsymbol{U}^j{}_p, \theta^j{}_p$ qui s'écrit sous la forme :

$$
\left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_j \boldsymbol{U}^j{}_p + \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta}\right|_j \theta^j{}_p = \boldsymbol{F}^j{}_p \tag{A.7}
$$

où le second membre $\boldsymbol{F}^j{}_p$ ne dépend que des termes aux ordres précédents.

A.1.2. Définition du paramètre de chemin

Le problème (A.7) n'est pas en réalité bien posé puisqu'il s'agit d'un système de N équations à $N+1$ inconnues. Comme dans les méthodes de prédiction-correction, il faut une condition supplémentaire à chaque ordre. Cette condition est la définition du paramètre de chemin a intervenant dans les séries (A.2). On définit le paramètre de chemin *a* comme étant la pseudo–longueur d'arc :

$$
a = (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}^j)\boldsymbol{U}^j{}_1 + (\theta - \theta^j)\theta^j{}_1 \tag{A.8}
$$

qui correspond à la projection de l'incrément sur la direction tangente $(\boldsymbol{U}^j{}_1, \theta^j{}_1)$. En reportant les séries (A.2) dans l'équation (A.8), on obtient la condition supplémentaire cherchée à chaque ordre p :

$$\begin{cases} \left\| \boldsymbol{U}^j{}_1 \right\| + (\theta^j{}_1)^2 = 1 \\ \boldsymbol{U}^j{}_p \boldsymbol{U}^j{}_1 + \theta^j{}_p \theta^j{}_1 = 0 \end{cases} \tag{A.9}$$

Si N représente l'ordre de troncature des séries, alors le calcul de la branche ^{j} demande le calcul de N seconds membres $\boldsymbol{F}^j{}_p$ et la résolution de N problèmes linéaires (A.7) et (A.9). L'avantage fondamental de la MAN est qu'à la différence des méthodes de prédiction-correction, une seule matrice tangente $\left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_j$ doit être calculée et inversée pour résoudre tous les problèmes linéaires (A.7). Il en résulte un temps de calcul énormément réduit vu que le temps de traitement du second membre est relativement faible par rapport à celui d'une matrice jacobienne. La principale difficulté dans le traitement des séries de la MAN est le calcul des seconds membres $\boldsymbol{F}^j{}_p$ et la différentiation des inconnues et paramètres nécessaires pour la branche ^{j}. Cette dernière a été rendue plus aisée avec les outils proposés et implémentés sous Fortran par Charpentier et Potier-Ferry [133], puis par la suite par Koutsawa et al. [130] sous MATLAB. Ces outils ont permis de développer un solveur basé sur l'approche dite DIAMANT (DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée). Seule la boîte à outils est présentée ci-dessous, l'approche ayant été adaptée à chaque problème dans cette thèse (voir les sections 2.4 et 4.4).

A.2. Boîte à outils DIAMANT

L'élaboration de la boîte à outils DIAMANT repose sur deux principes fondamentaux : les formules de récurrence pour la différentiation de haut degré et les techniques de surcharge d'opérateurs. Dans le cadre de la différentiation de haut degré, des formules de récurrence sont fournies permettant le calcul des séries de Taylor. Ainsi pour une composée de fonction $Z = \varphi(u, v)$, les séries de Taylor de la fonction Z à l'ordre *n* peuvent être calculées en utilisant les séries de Taylor des fonctions *u* et *v* [185]. Quelques exemples sont présentés ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
Z &= u + v, & Z_n &= u_n + v_n \\
Z &= u \times v, & Z_n &= \sum_{j=0}^{n} u_j v_{n-j} \\
Z &= \frac{u}{v}, & Z_n &= \frac{1}{v_0}\left[u_n - \sum_{j=0}^{n-1} Z_j v_{n-j}\right] \\
Z &= \sqrt{u}, & Z_n &= \frac{1}{2u_0}\left[u_n - \sum_{j=1}^{n-1} Z_j Z_{n-j}\right]
\end{aligned}
\qquad \text{(A.10)}
$$

où Z_n, u_n et v_n sont les coefficients de Taylor respectifs de Z, u et v à l'ordre n.

Cette technique a été utilisée par Koutsawa et al. [130] pour ajouter dans MATLAB une classe d'objets nommée " *TaylorCoef* " qui permet de calculer les séries de Taylor pour un certain nombre de fonctions.

Ainsi, pour un objet donné Z de cette classe, il lui a été associé trois propriétés. La propriété "*value*" pour *Z.value* est le coefficient de Taylor à l'ordre $n = 0$ de l'objet. La propriété "*coef* " pour *Z.coef* contient les coefficients de Taylor aux ordres supérieurs $n = 1...N$. Enfin, la propriété "*order*" pour *Z.order* est l'ordre maximal de troncature des séries, c'est-à-dire N.

Dans le cadre du problème résiduel (A.1), tous les coefficients de Taylor peuvent être calculés automatiquement en utilisant la boîte à outils DIAMANT étant donné que le résidu $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}, \theta)$ est une composée de $\boldsymbol{U}$ et de θ. Pour ce faire, il suffit à l'opérateur de coder le résidu $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}, \theta)$ en déclarant ses variables $\boldsymbol{U}$ et θ comme étant des objets de classe "*TaylorCoef* " et avec les initialisations requises. D'autres détails plus fournis sur la conception et l'utilisation de la boîte à outils DIAMANT en version MATLAB peuvent être trouvés dans la référence [130]. Pour l'approche générique destinée à la résolution de problèmes de vibrations, se référer à [131, 186]

Annexe B : Contrôle des modes de *hourglass* et calcul de la matrice de stabilisation du SHB8PSE

Dans cette annexe, nous présentons l'identification et le contrôle des modes à énergie nulle ainsi que le détail du calcul de la matrice de stabilisation. Il s'agit d'un extrait des travaux de Belytschko et Bindeman [108] et Abed-Meraim et Combescure [103]. La même procédure a été utilisée pour les matrices de couplage électromécanique.

B.1. Identification des modes de *hourglass*

Les modes d'*hourglass* de l'élément fini linéaire de type solide–coque SHB8PS correspondent aux modes de déformations à énergie nulle. En d'autres termes, il s'agit des vecteurs propres de la matrice de rigidité associés aux valeurs propres nulles, excepté les modes de corps rigide.

On commence par écrire les vecteurs $\mathbf{b}_i$, i=1…3 sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\mathbf{J}_{|0} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

Cette écriture du vecteur **b** permet de montrer plus facilement les conditions d'orthogonalité :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{h}_\alpha = 0, & \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{s} = 0, & \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \\ \mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{s} = 0, & & \mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = 8\delta_{\alpha\beta} \end{cases} \tag{B.2}$$
$$i,\ j = 1,...,3\ ; \quad \alpha, \beta = 1,...,4$$

Afin de bien identifier le noyau de la matrice de rigidité, les conditions d'orthogonalité indiquées dans l'équation (B.2) seront utilisées conjointement avec des développements algébriques. On commence par écrire la matrice de rigidité sous forme discrète :

$$\mathbf{K}_e = \sum_{I=1}^{n_{\text{int}}} \omega(\zeta_I)\,\mathrm{J}(\zeta_I)\mathbf{B}^T(\zeta_I)\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}(\zeta_I) \tag{B.3}$$

où $\mathrm{J}(\zeta_I)$ représente le jacobien de la transformation entre la configuration de référence et la configuration réelle.

A partir de la matrice de rigidité donnée sous forme discrète par l'équation (B.3), on recherche un mode à énergie nulle défini par le vecteur $\mathbf{h}^g$ qui satisfait :

$$\mathbf{B}(\zeta_I)\cdot\mathbf{h}^g = 0 \quad , \qquad I = 1,...,n_{\text{int}} \tag{B.4}$$

On démontre aisément qu'une base de l'espace vectoriel des déplacements discrétisés est donnée par les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{s}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{s}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{s}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{x}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_6 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{x}\end{pmatrix}\\
&\mathbf{e}_7 = \begin{pmatrix}\mathbf{y}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_8 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{y}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_9 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{y}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{10} = \begin{pmatrix}\mathbf{z}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{11} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{z}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{12} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{z}\end{pmatrix}\\
&\mathbf{e}_{13} = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_1\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{14} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{h}_1\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{15} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{h}_1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{16} = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_2\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{17} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{h}_2\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{18} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{h}_2\end{pmatrix}\\
&\mathbf{e}_{19} = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_3\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{20} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{h}_3\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{21} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{h}_3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{22} = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_4\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{23} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{h}_4\\\mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{24} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{h}_4\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Pour démontrer cela, nous considérons une combinaison de coefficients a_i vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{24} a_i\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \tag{B.6}$$

En multipliant l'équation (B.6) par les vecteurs $(\mathbf{b}_i^T\ \mathbf{0}\ \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}\ \mathbf{b}_i^T\ \mathbf{0})$ et $(\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{b}_i^T)$, i=1,2,3 et en utilisant les relations d'orthogonalité (B.2), on obtient :

$$\begin{cases} (\mathbf{b}_i^T \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{24} a_i \mathbf{e}_i \right) = a_{3i+1} = 0 \\ (\mathbf{0} \;\; \mathbf{b}_i^T \;\; \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{24} a_i \mathbf{e}_i \right) = a_{3i+2} = 0 \\ (\mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{b}_i^T) \cdot \left(\sum_{i=1}^{24} a_i \mathbf{e}_i \right) = a_{3i+3} = 0 \end{cases} \quad , \quad i = 1,2,3 \tag{B.7}$$

On répète l'opération avec les vecteurs $(\mathbf{h}_\alpha^T \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0})$, $(\mathbf{0} \;\; \mathbf{h}_\alpha^T \;\; \mathbf{0})$ et $(\mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{h}_\alpha^T)$, i=1,..,4, on arrive à :

$$\begin{cases} (\mathbf{h}_\alpha^T \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{24} a_i \mathbf{e}_i \right) = 8 a_{3\alpha+10} = 0 \\ (\mathbf{0} \;\; \mathbf{h}_\alpha^T \;\; \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{24} a_i \mathbf{e}_i \right) = 8 a_{3\alpha+11} = 0 \\ (\mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{h}_\alpha^T) \cdot \left(\sum_{i=1}^{24} a_i \mathbf{e}_i \right) = 8 a_{3\alpha+12} = 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha = 1,\ldots,4 \tag{B.8}$$

La combinaison des équations (B.5) – (B.8) permet de déduire :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \tag{B.9}$$

Cette dernière relation montre que les vecteurs $\mathbf{e}_i$, $i = 1,\ldots,24$ sont linéairement indépendants et donc forment un espace vectoriel des déplacements discrétisés. Supposons maintenant que le vecteur $\mathbf{h}^g$ appartient au noyau de la matrice de rigidité. Ce vecteur peut être exprimé en fonction des vecteurs de base $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{h}^g = \sum_{i=1}^{24} c_i \mathbf{e}_i \tag{B.10}$$

En combinant les équations (B.4) et (2.23) aux conditions d'orthogonalité (B.2), on obtient :

$$\begin{pmatrix} c_4 + h_{1,x}(\xi_I) c_{13} + h_{2,x}(\xi_I) c_{16} \\ c_8 + h_{1,y}(\xi_I) c_{14} + h_{2,y}(\xi_I) c_{17} \\ c_{12} + h_{1,z}(\xi_I) c_{15} + h_{2,z}(\xi_I) c_{18} \\ c_5 + c_7 + h_{1,y}(\xi_I) c_{13} + h_{1,x}(\xi_I) c_{14} + h_{2,y}(\xi_I) c_{16} + h_{2,x}(\xi_I) c_{17} \\ c_6 + c_{10} + h_{1,z}(\xi_I) c_{13} + h_{1,x}(\xi_I) c_{15} + h_{2,z}(\xi_I) c_{16} + h_{2,x}(\xi_I) c_{18} \\ c_9 + c_{11} + h_{1,z}(\xi_I) c_{14} + h_{1,y}(\xi_I) c_{15} + h_{2,z}(\xi_I) c_{17} + h_{2,y}(\xi_I) c_{18} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad I = 1,\ldots,n_{\text{int}} \tag{B.11}$$

L'évaluation de l'équation (B.11) aux points d'intégration n_{int} conduit aux relations :

$$\begin{cases} c_4 = c_{13} = c_{16} = 0 \\ c_8 = c_{14} = c_{17} = 0 \\ c_{12} = c_{15} = c_{18} = 0 \\ c_5 = c_7 = 0 \\ c_6 = c_{10} = 0 \\ c_9 = c_{11} = 0 \end{cases} \tag{B.12}$$

Finalement, le vecteur $\mathbf{h}^g$ définit en (B.10) s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^g = & c_1 \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} -\mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_6 \begin{pmatrix} -\mathbf{z} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + c_9 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ & + c_{19} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_{20} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_{21} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix} + c_{22} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_4 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_{23} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_4 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_{24} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.13}$$

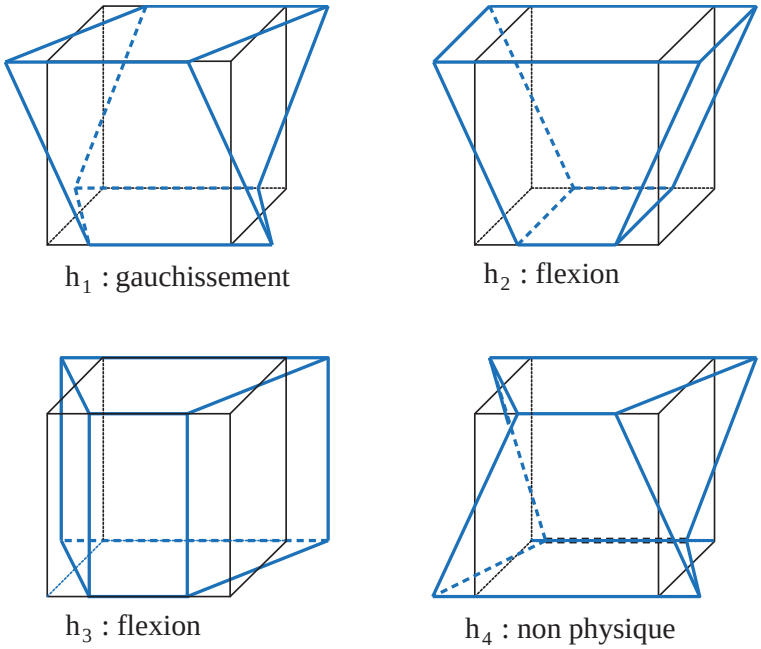


Figure B.1 Modes d'*hourglass* dans la direction *x* du SHB8PS pour 1 point d'intégration

Il en ressort que le noyau de la matrice de rigidité de l'élément SHB8PS comprend 6 modes de corps rigides habituels, voir les six premiers vecteurs dans l'équation (B.13)), et 6 modes

d'*hourglass* comme indiqué par les six derniers vecteurs dans l'équation (B.13) et illustré à la figure 2.3. Il est important de noter que cette formulation de l'élément SHB8PS est valable pour un ensemble de n_{int} points d'intégration situés le long de la ligne $\xi_I = \eta_I = 0, \quad I = 1,...,n_{\text{int}}$, contenant au moins 2 points d'intégration. Rappelons également qu'on aurait 12 modes d'*hourglass* si un seul point d'intégration était utilisé (voir figure B.1).

Une fois les modes d'*hourglass* identifiés, l'opérateur gradient discrétisé $\mathbf{B}$ est projeté sur un champ dit "*postulé*" afin de réduire ses verrouillages. La démarche a été présentée par Belytschko et Bindeman [108]. Quelques grandes lignes ont été rappelées dans la section 2.3.4. Les lignes ci-dessous sont consacrées au calcul de la matrice de stabilisation.

B.2. Matrice de stabilisation du SHB8PSE

La matrice de stabilisation est calculée dans le repère co-rotationnel défini dans la section 2.3.4. Dans ce repère, plusieurs termes peuvent être simplifiés. Étant donné que ce système de coordonnées co-rotationnelles est choisi pour être aligné au repère de référence, les relations entre les deux systèmes de coordonnées peuvent être approximées par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \xi_i} = \dfrac{1}{\partial \xi_i / \partial \tilde{x}_i} = \dfrac{1}{8} \Lambda_i^{\,T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_i \\ \dfrac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \xi_j} = \dfrac{\partial \tilde{x}_j}{\partial \xi_i} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \end{cases} \tag{B.14}$$

où le vecteur $\tilde{\mathbf{x}}_i$ désigne les coordonnées nodales exprimées dans le repère co-rotationnel, et les indices répétés n'indiquent pas une sommation. L'équation (B.14) permet d'avoir les simplifications suivantes :

$$h_{i,i} = \frac{\partial h_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0, \quad h_{j,i} = \frac{8\xi_k}{\Lambda_i^{\,T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_i}, \quad h_{4,i} = \frac{8\xi_j \xi_k}{\Lambda_i^{\,T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_i}, \quad \tilde{J} = \frac{\Lambda_1^{\,T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1}{8} \frac{\Lambda_2^{\,T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_2}{8} \frac{\Lambda_3^{\,T} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_3}{8} \tag{B.15}$$

où $\tilde{J}$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne. Rappelons encore une fois que les indices répétés n'indiquent pas une sommation. De plus, les indices *i*, *j*, et *k* sont deux à deux distincts et prennent les valeurs 1, 2 et 3 avec toutes les permutations possibles. L'équation (B.15) conduit par la suite aux expressions suivantes :

$$\int_{V^e} h_{i,i} dV = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{ii} = \int_{V^e} (h_{j,i})^2 dV = \int_{V^e} (h_{k,i})^2 dV = 3\int_{V^e} (h_{4,i})^2 dV = \dfrac{1}{3}\dfrac{(\Lambda_j{}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}_j)(\Lambda_k{}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}_k)}{(\Lambda_i{}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}_i)} \\ H_{ij} = \int_{V^e} h_{i,j} h_{j,i} dV = \dfrac{1}{3}(\Lambda_k{}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}_k) \end{cases} \tag{B.16}$$

En insérant les expressions (B.16) dans l'équation (2.24) décrivant la matrice de stabilisation, il vient :

$$\mathbf{K}_{Stab} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \boldsymbol{k}_{13} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \boldsymbol{k}_{23} \\ \boldsymbol{k}_{31} & \boldsymbol{k}_{32} & \boldsymbol{k}_{33} \end{bmatrix} \tag{B.17}$$

où les matrices $\boldsymbol{k}_{ij}$ de taille 8×8 sont explicitées par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_{11} = (\bar{\lambda} + 2\mu) H_{11} \left[\hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_3{}^T + \dfrac{1}{3} \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_4{}^T \right] \\ \boldsymbol{k}_{22} = (\bar{\lambda} + 2\mu) H_{22} \left[\hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_3{}^T + \dfrac{1}{3} \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_4{}^T \right] \\ \boldsymbol{k}_{33} = (\bar{\lambda} + 2\mu) H_{11} \dfrac{1}{3} \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_4{}^T \\ \boldsymbol{k}_{ij} = 0 \quad , \qquad i \neq j \end{cases} \tag{B.18}$$

De la même manière, les matrices de stabilisation issues du couplage électromécanique peuvent être déduites :

$$\mathbf{K}^{u\phi}{}_{Stab} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{u\phi}{}_{11} \\ \boldsymbol{k}^{u\phi}{}_{21} \\ \boldsymbol{k}^{u\phi}{}_{31} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{cases} \boldsymbol{k}^{u\phi}{}_{11} = e_{31} H_{11} \left[\hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_3{}^T + \dfrac{1}{3} \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_4{}^T \right] \\ \boldsymbol{k}^{u\phi}{}_{21} = e_{32} H_{22} \left[\hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_3{}^T + \dfrac{1}{3} \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_4{}^T \right] \\ \boldsymbol{k}^{u\phi}{}_{31} = 0 \end{cases} \tag{B.19}$$

$$\mathbf{K}^{\phi\phi}{}_{Stab} = -\left[\boldsymbol{k}^{\phi\phi}{}_{11} \right] \quad ; \qquad \boldsymbol{k}^{\phi\phi}{}_{11} = \kappa_{31} H_{11} \left[\hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_3{}^T + \frac{1}{3} \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_4{}^T \right]$$

Annexe C : Transformation de tenseurs due à un changement de repère

Les propriétés piézoélectriques des matériaux sont données dans le repère d'orthotropie inhérent au matériau. Ce repère n'étant pas forcément celui du repère local, il est nécessaire de déterminer ces propriétés dans le repère global lié à la structure à modéliser. Pour ce faire, on utilise la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ permettant la transformation inverse du repère global au repère local. Ainsi, les composantes $\mathbf{C}_{ijkl}$, $\mathbf{e}_{ijk}$ et $\boldsymbol{\kappa}_{ij}$ des tenseurs $\mathbf{C}$, $\mathbf{e}$ et $\boldsymbol{\kappa}$, exprimés dans le repère global, sont reliées à leurs composantes $\hat{\mathbf{C}}_{mnop}$, $\hat{\mathbf{e}}_{mno}$ et $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{mn}$ dans le repère local par les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{ko}R_{lp}\hat{\mathbf{C}}_{mnop} \\ \mathbf{e}_{ijk} = R_{im}R_{jn}R_{ko}\hat{\mathbf{e}}_{mno} \\ \boldsymbol{\kappa}_{ij} = R_{im}R_{jn}\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{mn} \end{cases} \tag{C.1}$$

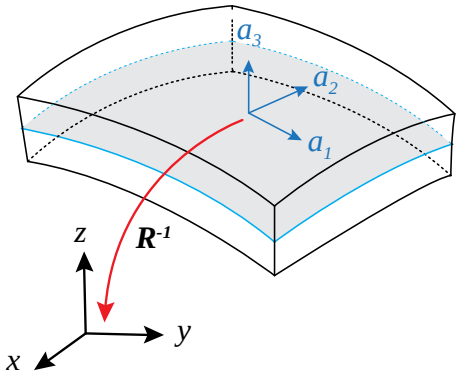


Figure C.1 Passage du repère local au global

Références bibliographiques

[1] G. Kergourlay, "Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoelastiques," Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, 2004.

[2] G. A. Lesieutre and D. L. Mingori, "Finite element modeling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 13, pp. 1040-1050, 1990.

[3] G. A. Lesieutre and E. Bianchini, "Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity Using Anelastic Displacement Fields," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 117, pp. 424-430, 1995.

[4] D. F. Golla and P. C. Hughes, "Dynamics of Viscoelastic Structures—A Time-Domain, Finite Element Formulation," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, pp. 897-906, 1985.

[5] D. J. McTavish and P. C. Hughes, "Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 115, pp. 103-110, 1993.

[6] M. L. Williams, R. F. Landel, and J. D. Ferry, "The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids," *Journal of the American Chemical Society*, vol. 77, pp. 3701-3707, 1955.

[7] A. Benjeddou, M. A. Trindade, and R. Ohayon, "A Unified Beam Finite Element Model for Extension and Shear Piezoelectric Actuation Mechanisms," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 8, pp. 1012-1025, 1997.

[8] E. M. Kerwin, "Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer," *Journal of the Acoustic Society of America*, vol. 31, pp. 952-962, 1959.

[9] R. A. DiTaranto, "Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, pp. 881-886, 1965.

[10] D. J. Mead and S. Markus, "The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 10, pp. 163-175, 1969.

[11] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, and E. M. Daya, "Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites," *Composite Structures*, vol. 84, pp. 282-292, 2008.

[12] E. Carrera, "Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, pp. 287-308, 2003.

[13] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, pp. 69-75, 1945.

[14] R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates," *Journal of Applied Mechanics,* vol. 18, pp. 1031-1036, 1951.

[15] D. Gay, *Matériaux composites,* 2ème ed. Paris, 1989.

[16] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *Journal of Applied Mechanics,* vol. 51, pp. 745-752, 1984.

[17] M. Touratier, "An efficient standard plate theory," *International Journal of Engineering Science,* vol. 29, pp. 901-916, 1991.

[18] O. Polit and M. Touratier, "High-order triangular sandwich plate finite element for linear and non-linear analyses," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 185, pp. 305-324, 2000.

[19] D. K. Rao, "Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary Conditions," *Journal of Mechanical Engineering Science,* vol. 20, pp. 271-282, 1978.

[20] B. A. Ma and J. F. He, "A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 152, pp. 107-123, 1/8/ 1992.

[21] E. M. Daya and M. Potier-Ferry, "A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures," *Revue Européenne des Éléments Finis,* vol. 11, pp. 39-56, 2002.

[22] C. Liu and R. Forward, "Electronic damping of resonance in gimbal structures," in *22nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference,* ed: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1981.

[23] N. W. Hagood, W. H. Chung, and A. Von Flotow, "Modelling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* vol. 1, pp. 327-354, 1990.

[24] D. L. Edberg, A. S. Bicos, and J. S. Flechter, "On piezoelectric energy conversion for electronic passive damping enhancement," in *Proceedings of Damping' 91,* San Diego, 1991.

[25] S. Y. Wu and A. S. Bicos, "Structural vibration damping experiments using improved piezoelctric shunts," in *Proceedings of the SPIE,* 1997, pp. 40-50.

[26] O. Thomas, J. F. Deü, and J. Ducarne, "Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 80, pp. 235-268, 2009.

[27] W. Larbi, J.-F. Deü, M. Ciminello, and R. Ohayon, "Structural-acoustic vibration reduction using switched shunt piezoelectric patches: A finite element Analysis," *Journal of Vibration and Acoustics,* vol. 132, p. 051006, 2010.

[28] J. Ducarne, O. Thomas, and J.-F. Deü, "Structural vibration reduction by switch shunting of piezoelectric elements: Modeling and optimization," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* vol. 21, pp. 797-816, 2010.

[29] S. O. R. Moheimani, "A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 11, pp. 482-494, 2003.

[30] H. F. Olsen, "Electronic control of noise, vibration and reverberation," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 28, pp. 972-976, 1956.

[31] V. Piefort, "Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures," PhD Thesis, Université de Bruxelles, 2001.

[32] M. A. Trinidade, "Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques: poutres sandwich/multicouches intelligentes," Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2001.

[33] H. Boudaoud, "Modélisation de l'amortissement actif-passif des structures sandwichs," Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine, Metz, 2007.

[34] S. Belouettar, L. Azrar, E. M. Daya, V. Laptev, and M. Potier-Ferry, "Active control of nonlinear vibration of sandwich piezoelectric beams: A simplified approach," *Computers and Structures*, vol. 86, pp. 386-397, 2008.

[35] L. Azrar, S. Belouettar, and J. Wauer, "Nonlinear vibration analysis of actively loaded sandwich piezoelectric beams with geometric imperfections," *Computers and Structures*, vol. 86, pp. 2182-2191, 2008.

[36] T. Bailey and J. E. Hubbard Jr, "Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 8, pp. 605-611, 1985.

[37] E. F. Crawley and J. de Luis, "Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures," *AIAA Journal*, vol. 25, pp. 1373-1385, 1987.

[38] R. K. Kapadia and G. Kawiecki, "Experimental Evaluation of Segmented Active Constrained Layer Damping Treatments," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 8, pp. 103-111, 1997.

[39] B. Azvine, G. R. Tomlinson, and R. J. Wynne, "Use of active constrained-layer damping for controlling resonant vibration," *Smart Materials and Structures*, vol. 4, pp. 1-6, 1995.

[40] J. A. Rongong, J. R. Wright, R. J. Wynne, and G. R. Tomlinson, "Modelling of a Hybrid Constrained Layer/Piezoceramic Approach to Active Damping," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 119, pp. 120-120, 1997.

[41] I. Y. Shen, "Hybrid Damping Through Intelligent Constrained Layer Treatments," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 116, pp. 341-349, 1994.

[42] D. E. Veley and S. S. Rao, "A comparison of active, passive and hybrid damping in structural design," *Smart Materials and Structures*, vol. 5, pp. 660-671, 1996.

[43] G. A. Lesieutre and U. Lee, "A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastics," *Smart Materials and Structures*, vol. 5, pp. 615-627, 1996.

[44] M. J. Lam, D. J. Inman, and W. R. Saunders, "Vibration Control through Passive Constrained Layer Damping and Active Control," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 8, pp. 663-677, 1997.

[45] W. H. Liao and K. W. Wang, "A new active constrained layer configuration with enhanced boundary actions," *Smart Materials and Structures*, vol. 5, pp. 638-648, 1996.

[46] W. H. Liao and K. W. Wang, "On the Active-Passive Hybrid Control Actions of Structures With Active Constrained Layer Treatments," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 119, pp. 563-563, 1997.

[47] W. H. Liao and K. W. Wang, "On the analysis of viscoelastic materials for active constrained layer damping treatements," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 207, pp. 319-334, 1997.

[48] I. Bruant, F. Pablo, and O. Polit, "Active control of laminated plates using a piezoelectric Finite Element," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 15, pp. 276-290, 2008.

[49] D. Chhabra, G. Bhushan, and P. Chandna, "Optimal Placement of Piezoelectric Actuators on Plate Structures for Active Vibration Control Using Modified Control Matrix and Singular Value Decomposition Approach," *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*, vol. 7, pp. 169-174, 2013.

[50] Q. Wang and C. M. Wang, "A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 242, pp. 507-518, 2001.

[51] D. A. Saravanos and P. R. Heyliger, "Coupled Layerwise Analysis of Composite Beams with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 6, pp. 350-363, 1995.

[52] A. Benjeddou and J.-F. Deü, "A two-dimensional closed-form solution for the free-vibrations analysis of piezoelectric sandwich plates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 1463-1486, 2002.

[53] S. M. Yang and Y. J. Lee, "Interaction of structure vibration and piezoelectric actuation," *Smart Materials and Structures*, vol. 3, pp. 494-500, 1994.

[54] A. A. Bent, N. W. Hagood, and J. P. Rodgers, "Anisotropic Actuation with Piezoelectric Fiber Composites," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 6, pp. 338-349, 1995.

[55] A. Benjeddou, "Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey," *Computers and Structures*, vol. 76, pp. 347-363, 2000.

[56] J.-F. Deü and A. Benjeddou, "Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic layers," *International Journal of Solids and Structures,* vol. 42, pp. 2059-2088, 2005.

[57] A. Benjeddou and J.-F. Deü, "Piezoelectric transverse shear actuation and sensing of plates, Part 1: A three-dimensional mixed state space formulation," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* vol. 12, pp. 435-449, 2001.

[58] A. Benjeddou and J.-F. Deü, "Piezoelectric transverse shear actuation and sensing of plates, Part 2: Application and analysis," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* vol. 12, pp. 451-467, 2001.

[59] J. M. Plump and J. E. Hubbard, "Modeling of an active constrained layer damper," in *12th International Congress on Acoustics,* Toronto, 1986, pp. 24-31.

[60] S. C. Huang, D. J. Inman, and E. M. Austin, "Some design considerations for active and passive constrained layer damping treatments," *Smart Materials and Structures,* vol. 5, pp. 301-313, 1996.

[61] J. M. Yellin and I. Y. Shen, "A self-sensing active constrained layer damping treatment for a Euler - Bernoulli beam," *Smart Materials and Structures,* vol. 5, pp. 628-637, 1996.

[62] A. Baz, "Optimization of energy dissipation characteristics of active constrained layer damping," *Smart Materials and Structures,* vol. 6, pp. 360-368, 1997.

[63] W. C. Van Nostrand, G. J. Knowles, and D. J. Inman, "Finite element model for active constrained layer damping," in *SPIE Conference on Active Materials and Smart Structures,* 1995, pp. 124-139.

[64] A. Baz, "Robust control of active constrained layer damping," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 211, pp. 467-480, 1998.

[65] V. V. Varadan, Y.-H. Lim, and V. K. Varadan, "Closed loop finite-element modeling of active/passive damping in structural vibration control," *Smart Materials and Structures,* vol. 5, pp. 685-694, 1996.

[66] A. Baz and J. Ro, "Optimum design and control of active constrained layer damping," *Journal of Vibration and Acoustics,* vol. 117, pp. 135-144, 1995.

[67] T. Nestorović, D. Marinković, G. Chandrashekar, Z. Marinković, and M. Trajkov, "Implementation of a user defined piezoelectric shell element for analysis of active structures," *Finite Elements in Analysis and Design,* vol. 52, pp. 11-12, 2012.

[68] T. Nestorović, S. Shabadi, D. Marinković, and M. Trajković, "Modeling of piezoelectric smart structures by implementation of a User Defined shell finite element," *Mechanical Engineering,* vol. 11, pp. 1-12, 2013.

[69] T. Nestorović, D. Marinković, S. Shabadi, and M. Trajkov, "User defined finite element for modeling and analysis of active piezoelectric shell structures," *Meccanica,* vol. 49, pp. 1763-1774, 2014.

[70] X. G. Tan and L. Vu-Quoc, "Efficient and accurate multilayer solid-shell element: Non-linear materials at finite strain," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 63, pp. 2124-2170, 2005.

[71] L. Vu-Quoc and X. G. Tan, "Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 192, pp. 975-1016, 2003.

[72] L. Vu-Quoc and X. G. Tan, "Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. II. Dynamics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 192, pp. 1017-1059, 2003.

[73] S. Klinkel and W. Wagner, "A geometrically non-linear piezoelectric solid shell element based on a mixed multi-field variational formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 65, pp. 349-382, 2006.

[74] S. Klinkel and W. Wagner, "A piezoelectric solid shell element based on a mixed variational formulation for geometrically linear and nonlinear applications," *Computers and Structures,* vol. 86, pp. 38-46, 2008.

[75] W. Zouari, T. Ben Zineb, and A. Benjeddou, "A ferroelectric and ferroelastic 3D hexahedral curvilinear finite element," *International Journal of Solids and Structures,* vol. 48, pp. 87-109, 2011.

[76] W. Zouari, R. Ayad, T. B. Zineb, and A. Benjeddou, "A piezoelectric 3D hexahedral curvilinear finite element based on the space fiber rotation concept," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 90, pp. 87-115, 2012.

[77] W. Zouari, M. Assarar, K. Meftah, and R. Ayad, "Free vibration analysis of homogeneous piezoelectric structures using specific hexahedral elements with rotational DOFs," *Acta Mechanica,* vol. 226, pp. 1737-1756, 2014.

[78] V.-D. Trinh, "Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés utilisables pour des problèmes à cinématique et comportement non linéaires," Arts et Métiers ParisTech, Metz, 2009.

[79] S. Ahmad, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 2, pp. 419-451, 1970.

[80] H. Parisch, "A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 20, pp. 323-350, 1979.

[81] B. Brendel and E. Ramm, "Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells," *Computers & Structures,* vol. 12, pp. 549-558, 1980.

[82] K. D. Kim, G. Z. Liu, and S. C. Han, "A resultant 8-node solid-shell element for geometrically nonlinear analysis," *Computational Mechanics,* vol. 35, pp. 315-331, 2005.

[83] E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty, and J. Ghaboussi, "Incompatible Displacement Models," ed: Elsevier, 1973, pp. 43-57.

[84] R. L. Taylor, P. J. Beresford, and E. L. Wilson, "A non-conforming element for stress analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 10, pp. 1211-1219, 1976.

[85] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. M. Too, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 3, pp. 275-290, 1971.

[86] T. J. R. Hughes, M. Cohen, and M. Haroun, "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates," *Nuclear Engineering and Design,* vol. 46, pp. 203-222, 1978.

[87] T. J. R. Hughes, "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 15, pp. 1413-1418, 1980.

[88] J. C. Simo and M. S. Rifai, "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 29, pp. 1595-1638, 1990.

[89] X.-J. Wang and T. Belytschko, "An efficient flexurally superconvergent hexahedral element," *Engineering Computations,* vol. 4, pp. 281-288, 1987.

[90] W. K. Liu, Y. Guo, S. Tang, and T. Belytschko, "A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 154, pp. 69-132, 1998.

[91] D. P. Flanagan and T. Belytschko, "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 17, pp. 679-706, 1981.

[92] T. Belytschko, J. S.-J. Ong, W. K. Liu, and J. M. Kennedy, "Hourglass control in linear and nonlinear problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 43, pp. 251-276, 1984.

[93] W. E. Bachrach, "An efficient formulation of hexahedral elements with high accuracy for bending and incompressibility," *Computers & Structures,* vol. 26, pp. 453-467, 1987.

[94] J. C. Simo and F. Armero, "Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 33, pp. 1413-1449, 1992.

[95] J. C. Simo, F. Armero, and R. L. Taylor, "Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 110, pp. 359-386, 1993.

[96] N. Büchter, E. Ramm, and D. Roehl, "Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 2551-2568, 1994.

[97] P. Wriggers and J. Korelc, "On enhanced strain methods for small and finite deformations of solids," *Computational Mechanics*, vol. 18, pp. 413-428, 1996/12/01 1996.

[98] D. Braess, "Enhanced assumed strain elements and locking in membrane problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 165, pp. 155-174, 1998.

[99] J. M. A. César de Sá, R. M. Natal Jorge, R. A. Fontes Valente, and P. M. Almeida Areias, "Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, pp. 1721-1750, 2002.

[100] F. Abed-Meraim and A. Combescure, "SHB8PS–a new adaptative, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis," *Computers & Structures*, vol. 80, pp. 791-803, 2002.

[101] A. Legay and A. Combescure, "Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, pp. 1299-1322, 2003.

[102] F. Abed-Meraim, "Contributions à la prédiction d'instabilités de type structure et matériau : modélisation de critères et formulation d'éléments finis adaptés à la simulation des structures minces," 2009.

[103] F. Abed-Meraim and A. Combescure, "An improved assumed strain solid–shell element formulation with physical stabilization for geometric non-linear applications and elastic-plastic stability analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 80, pp. 1640-1686, 2009.

[104] M. Killpack and F. Abed-Meraim, "Limit-point buckling analyses using solid, shell and solid-shell elements," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 25, pp. 1105-1117, 2011.

[105] V.-D. Trinh, F. Abed-Meraim, and A. Combescure, "A new assumed strain solid-shell formulation "SHB6" for the six-node prismatic finite element," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 25, pp. 2345-2364, 2011.

[106] A. Salahouelhadj, F. Abed-Meraim, H. Chalal, and T. Balan, "Application of the continuum shell finite element SHB8PS to sheet forming simulation using an extended large strain anisotropic elastic–plastic formulation," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 82, pp. 1269-1290, 2012.

[107] F. Abed-Meraim, V. D. Trinh, and A. Combescure, "New quadratic solid–shell elements and their evaluation on linear benchmark problems," *Computing*, vol. 95, pp. 373-394, 2013.

[108] T. Belytschko and L. P. Bindeman, "Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 105, pp. 225-260, 1993.

[109] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.

[110] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis : Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley ed., 2009.

[111] T. Elguedj and T. J. R. Hughes, "Isogeometric analysis of nearly incompressible large strain plasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 268, pp. 388-416, 2014.

[112] T. Elguedj, Y. Bazilevs, V. M. Calo, and T. J. R. Hughes, "and projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 197, pp. 2732-2762, 2008.

[113] R. Bouclier, T. Elguedj, and A. Combescure, "Development of a mixed displacement-stress formulation for the analysis of elastoplastic structures under small strains: Application to a locking-free, NURBS-based solid-shell element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 295, pp. 543-561, 2015.

[114] R. Bouclier, T. Elguedj, and A. Combescure, "Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements: Mixed formulation and -method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 267, pp. 86-110, 2013.

[115] E. E. Ungar, "Loss Factors of Viscoelastically Damped Beam Structures," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 34, pp. 1082-1089, 1962.

[116] Y.-Y. Yi, "Damping of Flexural Vibrations of Sandwich Plates," *Journal of the Aerospace Sciences,* vol. 29, pp. 790-803, 1962/07/01 1962.

[117] M. J. Yan and E. H. Dowell, "Governing Equations for Vibrating Constrained-Layer Damping Sandwich Plates and Beams," *Journal of Applied Mechanics,* vol. 39, pp. 1041-1046, 1972.

[118] Y. V. K. Sadasiva Rao and B. C. Nakra, "Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 34, pp. 309-326, 1974.

[119] F. Abdoun, L. Azrar, E. M. Daya, and M. Potier-Ferry, "Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method," *Computers & Structures,* vol. 87, pp. 91-100, 2009.

[120] P. Cupiał and J. Nizioł, "Vibration and damping analysis of a three-layered composite plate with a viscoelastic mid-layer," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 183, pp. 99-114, 1995.

[121] M. G. Sainsbury and Q. J. Zhang, "The Galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams," *Computers & Structures,* vol. 71, pp. 239-256, 1999.

[122] C. Lanczos, "An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators," *Journal on Research of the National Bureau of Standards,* vol. 45, pp. 255-282, 1950.

[123] W. E. Arnoldi, "The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem," *Quarterly of Applied Mathematics,* vol. 45, pp. 17-29, 1951.

[124] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*: Prentice-Hall, 1982.

[125] A. Y. T. Leung, "Subspace iteration for complex symmetric eigenproblems," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 184, pp. 627-637, 1995.

[126] C. D. Johnson and D. A. Kienholz, "Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers," *American Institute of Aeronautics and Astronautics,* vol. 20, pp. 1284-1290, 1982.

[127] X. Chen, H. L. Chen, and X. L. Hu, "Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 222, pp. 803-812, 5/20/ 1999.

[128] E. M. Daya and M. Potier-Ferry, "A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures," *Computers & Structures,* vol. 79, pp. 533-541, 2001.

[129] L. Duigou, E. Mostafa Daya, and M. Potier-Ferry, "Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 192, pp. 1323-1335, 2003.

[130] Y. Koutsawa, I. Charpentier, E. M. Daya, and M. Cherkaoui, "A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part I: The Diamant toolbox," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 198, pp. 572-577, 2008.

[131] M. Bilasse, I. Charpentier, E. M. Daya, and Y. Koutsawa, "A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part II: Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 198, pp. 3999-4004, 2009.

[132] K. Lampoh, I. Charpentier, and E. M. Daya, "A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part III: Sensitivity computations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 200, pp. 2983-2990, 2011.

[133] I. Charpentier and M. Potier-Ferry, "Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l'approche Diamant," *Comptes Rendus - Mecanique,* vol. 336, pp. 336-340, 2008.

[134] M. Bilasse, E. M. Daya, and L. Azrar, "Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 329, pp. 4950-4969, 2010.

[135] K. Takayoshi, F. Takafumi, H. Takayoshi, A. Takeo, M. Nobuyoshi, A. Satoru, and T. Kohtaro, "Active vibration control of frame structures with smart structures using piezoelectric actuators (Vibration control by control of bending moments of columns)," *Smart Materials and Structures,* vol. 6, pp. 448-456, 1997.

[136] Z. C. Qiu, X. M. Zhang, H. X. Wu, and H. H. Zhang, "Optimal placement and active vibration control for piezoelectric smart flexible cantilever plate," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 301, pp. 521-543, 2007.

[137] C. Chee, L. Tong, and G. P. Steven, "Piezoelectric actuator orientation optimization for static shape control of composite plates," *Composite Structures,* vol. 55, pp. 169-184, 2002.

[138] Q. Nguyen and L. Tong, "Shape control of smart composite plate with non-rectangular piezoelectric actuators," *Composite Structures,* vol. 66, pp. 207-214, 2004.

[139] Q. Nguyen and L. Tong, "Voltage and evolutionary piezoelectric actuator design optimisation for static shape control of smart plate structures," *Materials and Design,* vol. 28, pp. 387-399, 2007.

[140] X. Zhang, J. Lu, and Y. Shen, "Active noise control of flexible linkage mechanism with piezoelectric actuators," *Computers and Structures,* vol. 81, pp. 2045-2051, 2003.

[141] S. M. Hasheminejad and M. Rajabi, "Scattering and active acoustic control from a submerged piezoelectric-coupled orthotropic hollow cylinder," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 318, pp. 50-73, 2008.

[142] A. S. Wixom, M. J. Anderson, D. F. Bahr, and D. J. Morris, "A new acoustic transducer with a pressure-deformed piezoelectric diaphragm," *Sensors and Actuators, A: Physical,* vol. 179, pp. 204-210, 2012.

[143] G.-T. Hwang, H. Park, J.-H. Lee, S. Oh, K.-I. Park, M. Byun, H. Park, G. Ahn, C. K. Jeong, K. No, H. Kwon, S.-G. Lee, B. Joung, and K. J. Lee, "Self-Powered Cardiac Pacemaker Enabled by Flexible Single Crystalline PMN-PT Piezoelectric Energy Harvester," *Advanced Materials,* vol. 26, pp. 4880-4887, 2014.

[144] G. Park, H. Cudney, and D. Inman, "Impedance-based health monitoring of civil structural components," *Journal of Infrastructure Systems,* vol. 6, pp. 153-160, 2000.

[145] W. H. Duan, Q. Wang, and S. T. Quek, "Applications of piezoelectric materials in structural health monitoring and repair: Selected research examples," *Materials,* vol. 3, pp. 5169-5194, 2010.

[146] Y. K. An, M. K. Kim, and H. Sohn, "4 - Piezoelectric transducers for assessing and monitoring civil infrastructures." vol. 55, M. L. Wang, J. P. Lynch, and H. B. T. S. T. f. C. I. Sohn, Eds., ed: Woodhead Publishing, 2014, pp. 86-120.

[147] H. Allik and T. J. R. Hughes, "Finite element method for piezoelectric vibration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 2, pp. 151-157, 1970.

[148] E. Carrera, "An Improved Reissner-Mindlin-Type Model for the Electromechanical Analysis of Multilayered Plates Including Piezo-Layers," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* vol. 8, pp. 232-248, 1997.

[149] C.-Q. C. Shen and P. Ya, "Optimal control of active structures with piezoelectric modal sensors and actuators," *Smart Materials and Structures,* vol. 6, pp. 403-403, 1997.

[150] H. S. Tzou, C. I. Tseng, and H. Bahrami, "A thin piezoelectric hexahedron finite element applied to design of smart continua," *Finite Elements in Analysis and Design,* vol. 16, pp. 27-42, 1994.

[151] H. Boudaoud, S. Belouettar, E. M. Daya, and M. Potier-Ferry, "A numerical method for nonlinear complex modes with application to active-passive damped sandwich structures," *Engineering Structures,* vol. 31, pp. 284-291, 2009.

[152] F. Moleiro, C. M. Mota Soares, C. a. Mota Soares, and J. N. Reddy, "Assessment of a layerwise mixed least-squares model for analysis of multilayered piezoelectric composite plates," *Computers and Structures,* vol. 108-109, pp. 14-30, 2012.

[153] H. S. Tzou and R. Ye, "Analysis of piezoelastic structures with laminated piezoelectric triangle shell elements," *American Institute of Aeronautics and Astronautics,* vol. 34, pp. 110-115, 1996.

[154] K. Y. Sze, L. Q. Yao, and S. Yi, "A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part II* - Smart structure modelling," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 48, pp. 565-582, 2000.

[155] C. T. Zhang and X. D. Sun, "Use of thickness-shear mode in adaptive sandwich structures," *Smart Materials and Structures,* vol. 4, pp. 202-202, 1995.

[156] X. D. Sun and C. T. Zhang, "Formulation of an adaptive sandwich beam," *Smart Materials and Structures,* vol. 5, pp. 814-814, 1996.

[157] S. Kioua and H. Mirza, "Piezoelectric induced bending and twisting of laminated composite shallow shells," *Smart Materials and Structures,* vol. 9, pp. 476-484, 2000.

[158] N. Jacques, E. M. Daya, and M. Potier-Ferry, "Nonlinear vibration of viscoelastic sandwich beams by the harmonic balance and finite element methods," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 329, pp. 4251-4265, 2010.

[159] A. J. M. Ferreira, A. L. Araújo, A. M. A. Neves, J. D. Rodrigues, E. Carrera, M. Cinefra, and C. M. Mota Soares, "A finite element model using a unified formulation for the analysis of viscoelastic sandwich laminates," *Composites Part B: Engineering,* vol. 45, pp. 1258-1264, 2013.

[160] W.-Y. Jung and A. J. Aref, "A combined honeycomb and solid viscoelastic material for structural damping applications," *Mechanics of Materials,* vol. 35, pp. 831-844, 2003.

[161] Z. Li, "Vibration and acoustical properties and sandwich composite materials," PhD Thesis, Auburn University, 2006.

[162] R. Zhou and J. M. Crocker, "Effects of Thickness on Damping in Foam-filled Honeycomb-core Sandwich Beams," presented at the IMAC-XXV: Conference & Exposition on Structural Dynamics, 2007.

[163] A. Shahdin, L. Mezeix, C. Bouvet, J. Morlier, and Y. Gourinat, "Fabrication and mechanical testing of glass fiber entangled sandwich beams: A comparison with honeycomb and foam sandwich beams," *Composite Structures*, vol. 90, pp. 404-412, 2009.

[164] E. Piollet, "Amortissement non-linéaire des structures sandwichs à matériau d'âme en fibres enchevêtrées," Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2014.

[165] K. G. Lougou, "Méthodes multi-échelles pour la modélisation des vibrations de structures à matériaux composites viscoélastiques," Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2015.

[166] L. Duigou-Kersulec, "Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques," Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine, Metz, 2002.

[167] F. Bachmann, A. E. Bergamini, and P. Ermanni, "Optimum piezoelectric patch positioning: A strain energy-based finite element approach," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 23, pp. 1575-1591, 2012.

[168] S. Wang, S.-T. Quek, and K. K. Ang, "LQR vibration control of piezoelectric composite plates," 2001, pp. 375-386.

[169] Z. Jingjun, H. Lili, W. Ercheng, and G. Ruizhen, "A LQR Controller Design for Active Vibration Control of Flexible Structures," in *Computational Intelligence and Industrial Application, 2008. PACIIA '08. Pacific-Asia Workshop on*, 2008, pp. 127-132.

[170] S. Q. Zhang and R. Schmidt, "LQR Control for Vibration Suppression of Piezoelectric Integrated Smart Structures," *Pamm*, vol. 12, pp. 695-696, 2012.

[171] B. Jemai, M. N. Ichchou, L. Jezequel, and M. Noe, "Comparison between a large bandwidth LQG and modal controlmethods applied to complex flexible structure," presented at the 2nd International Conference on Active Control in Mechanical Engineering, Lyon, France, 1997.

[172] M. A. Trinidade, A. Benjeddou, and R. Ohayon, "Piezoelectric Active Vibration Control of Damped Sandwich Beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 246, pp. 653-677, 2001.

[173] P. Bildestein. (1990) Fonctions de transfert des filtres électriques. *Techniques de l'Ingénieur*.

[174] L. Azrar, R. Benamar, and M. Potier-Ferry, "An asymptotic-numérical method for large-amplitude free vibrations of thin elastic plates," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 220, pp. 695-727, 1999.

[175] L. Azrar, E. H. Boutyour, and M. Potier-Ferry, "Non-linear forced vibrations of plates by an Asymptotic-Numerical Method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 252, pp. 657-674, 2002.

[176] A. Elhage-Hussein, M. Potier-Ferry, and N. Damil, "A numerical continuation method based on Padé approximants," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 6981-7001, 2000.

[177] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry, *Méthode asymptotique numérique*, Hermes, Science Publications ed., 2007.

[178] P. Gaudenzi, R. Barboni, and A. Mannini, "A finite element evaluation of single-layer and multi-layer theories for the analysis of laminated plates," *Composite Structures*, vol. 30, pp. 427-440, 1995.

[179] A. Alibeigloo and K. M. Liew, "Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity," *Composite Structures*, vol. 113, pp. 23-30, 2014.

[180] A. Hajlaoui, A. Jarraya, K. El Bikri, and F. Dammak, "Buckling analysis of functionally graded materials structures with enhanced solid-shell elements and transverse shear correction," *Composite Structures*, vol. 132, pp. 87-97, 2015.

[181] M. Elhadrouz, T. Ben Zineb, and E. Patoor, "Finite element analysis of a multilayer piezoelectric actuator taking into account the ferroelectric and ferroelastic behaviors," *International Journal of Engineering Science*, vol. 44, pp. 996-1006, 2006.

[182] M. Lezgy-Nazargah, P. Vidal, and O. Polit, "An efficient finite element model for static and dynamic analyses of functionally graded piezoelectric beams," *Composite Structures*, vol. 104, pp. 71-84, 2013.

[183] K. M. Liew, X. Q. He, and S. Kitipornchai, "Finite element method for the feedback control of FGM shells in the frequency domain via piezoelectric sensors and actuators," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 257-273, 2004.

[184] X. Q. He, T. Y. Ng, S. Sivashanker, and K. M. Liew, "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 1641-1655, 2001.

[185] A. Griewank and A. Walther, *Evaluating Derivatives*: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation, 2008.

[186] M. Bilasse, "Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique," Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine, Metz, 2010.

Résumé

Cette thèse s'intéresse au développement d'éléments finis solide–coques dédiés à la modélisation de structures multicouches sollicitées en vibrations. En effet, la plupart des modèles multicouches dans la littérature présentent des limitations dans certaines configurations géométriques et matérielles. Face à ce constat et dans un souci de proposer un outil moins coûteux en temps de calcul, nous avons proposé une approche basée sur le concept solide–coques. Il s'agit d'éléments finis tridimensionnels dont le comportement a été amélioré par l'*Assumed Strain Method*. Dans un premier temps, nous avons formulé le problème de vibrations de structures sandwichs à cœur viscoélastique. La dépendance en fréquence a ainsi été prise en compte en utilisant une loi constitutive complexe. Pour résoudre le problème discrétisé, la Méthode Asymptotique Numérique, couplée à l'homotopie, et utilisant l'approche DIAMANT, a été adoptée pour les excellents résultats qu'elle offre par rapport aux autres méthodes. Des tests ont permis de valider les modèles proposés et de montrer l'avantage par rapport aux éléments ayant la même cinématique. Poursuivant nos travaux, et dans un souci d'augmenter l'amortissement, nous nous sommes orientés vers un contrôle actif des vibrations. Pour ce faire, deux éléments finis piézoélectriques ont été formulés. Il s'agit des éléments SHB8PSE et SHB20E qui sont des extensions des éléments finis SHB8PS et SHB20, respectivement. Le couplage électromécanique a consisté en l'ajout d'un degré de liberté à chacun des nœuds des dits éléments. Quelques exemples en statique et en vibrations menés sur des structures multicouches allant de simples poutres aux structures présentant des non-linéarités géométriques ont permis de valider les éléments solide–coques proposés. Pour finir, une synthèse des acquis des chapitres 2 et 3 a permis de proposer une modélisation de structures multicouches comprenant des couches élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques. À l'amortissement passif provenant du pouvoir amortissant des matériaux viscoélastiques, on ajoute un contrôle actif qui découle du courant électrique généré au cours de la déformation des couches piézoélectriques. Ainsi, un filtre a été installé entre les capteurs et actionneurs. Ce filtre permet d'amplifier ou d'atténuer le potentiel électrique généré dans le but de réduire les amplitudes de vibrations. Pour résoudre le problème résultant nous avons étendu le solveur utilisé au chapitre 2. Pour valider les modèles proposés, des tests de contrôle actif–passif ont été menés sur des structures plaques multicouches. Enfin, quelques lois de contrôle découlant de filtres ont permis de montrer comment cette procédure permet de réduire ou même d'éviter l'amplification des vibrations.

Mots clés : Éléments finis solide–coques, Méthode « *Assumed Strain* », Structures multicouches, Vibrations, Viscoélasticité, Piézoélectricité, Amortissement passif, Contrôle actif, Différentiation Automatique, Méthode Asymptotique Numérique.

Abstract

This thesis deals with the development of solid–shell finite elements for vibration modeling of multilayer structures. Indeed, most of multilayer models in the literature show some limitations in certain geometric and material configurations. Considering these restrictions and in order to develop a more efficient calculation tool, we proposed an approach based on the solid–shell concept. This consists of three-dimensional finite elements enhanced through the Assumed Strain Method. First of all, we have formulated the problem of vibrations of sandwich structures with viscoelastic core. The frequency dependence has been taken into account by using a complex constitutive law. To solve the discretized problem, the Asymptotic Numerical Method, coupled with the homotopy technique and the DIAMANT toolbox approach, was adopted due to the excellent results it provides compared to other methods. Benchmark tests have validated the models and highlighted their advantages over existing elements having the same kinematics. In order to increase damping properties, we directed our attention towards an active vibration control. For this purpose, two piezoelectric finite elements have been developed. These finite elements SHB8PSE and SHB20E are extensions, of the elements SHB8PS and SHB20, respectively. The electromechanical coupling consisted in adding an electrical degree of freedom to each node of these elements. A variety of test problems both in static and vibration analysis conducted on multilayer structures ranging from simple beams to structures involving geometric nonlinearities allowed validating the proposed solid–shell elements. Finally, combining the achievements made in chapters 2 and 3, we proposed a modeling approach for multilayer structures composed of elastic, viscoelastic and piezoelectric layers. Active control is introduced using the piezoelectric properties in order to improve the reduction in vibration amplitudes. Thus, a filter has been mounted between the sensors and actuators. This filter allows amplifying or attenuating the generated electric potential in order to reduce the vibration amplitudes. To solve the resulting problem, we extended the resolution method used in chapter 2. To validate the proposed models, active–passive control tests have been conducted on multilayer plate structures. Finally, some control laws, associated with filters, have shown how this procedure can allow reducing or even avoiding amplification of vibrations.

Keywords: Solid–shell finite elements, Assumed Strain Method, Multilayer structures, Vibrations, Viscoelasticity, Piezoelectricity, Passive damping, Active control, Automatic Differentiation, Asymptotic Numerical Method.