

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

préparée dans le cadre d'une cotutelle entre
*la Communauté Université Grenoble Alpes et
l'Université Libanaise*

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par
Bilal Al Taki

Thèse dirigée par **Didier Bresch et Raafat Talhouk**

préparée au sein de **LAMA** et de laboratoire de mathématiques
(Université libanaise) dans les Écoles doctorales MSTII et EDST (Ecole
doctorale des sciences et technologies - Université libanaise)

Sur quelques modèles hétérogènes en mécanique des fluides

Thèse soutenue publiquement le 19 décembre 2016,
devant le jury composé de :

Mazen Saad

Professeur, École centrale de Nantes, Président

Francisco Guillen-Gonzalez

Professeur, Université de Sevilla, Rapporteur

Alain Miranville

Professeur, Université de Poitiers, Rapporteur

Mathieu Colin

HDR Maître de Conférences, Université de Bordeaux, Examineur

Emmanuel Maitre

Professeur, Université de Grenoble, Examineur

Didier Bresch

Directeur de recherche, CNRS, Directeur de thèse

Raafat Talhouk

Professeur, Université Libanaise, Directeur de thèse

Christophe Lacave

Maître de Conférences, Institut de Fourier, Invité



Résumé

Cette thèse est consacrée à l'analyse mathématique de quelques modèles hétérogènes intervenant en mécanique des fluides. En particulier, elle est consacrée à l'étude théorique des systèmes d'équations aux dérivées partielles décrivant les modèles principaux que nous présentons dans ce qui suit. En premier temps, nous avons étudié l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien et incompressible dans un bassin avec bathymétrie qui dégénère proche du bord. Le modèle mathématique étudié provient alors des équations de Navier-Stokes incompressible. On cherche à montrer que le problème de Cauchy correspondant est bien posé. La deuxième partie est dédiée à l'étude d'un modèle issu du modèle de Navier-Stokes dispersif (qui contient des corrections dans son terme dispersif qui proviennent de la théorie cinétique des gaz). Le modèle considéré est nommé *effet fantôme* (ou *ghost effect* en anglais), puisqu'il ne peut pas être obtenu à partir du modèle de Navier-Stokes compressible classique. L'objectif dans ce cadre sera d'étendre un résultat concernant l'existence locale d'une solution forte vers l'existence globale d'une solution faible. On s'intéresse enfin à la démonstration de quelques inégalités fonctionnelles qui ont de grands intérêts dans la résolution de certains systèmes mathématiques liés à la mécanique des fluides.

Abstract

This thesis is devoted to the mathematical analysis of some heterogeneous models raised by fluid mechanics. In particular, it is devoted to the theoretical study of partial differential equations used to describe the main models that we present in the following. Firstly, we are interested to study the motion of a incompressible newtonien fluids in a basin with degenerate topography. The mathematical model studied derives from 3d-incompressible Navier-Stokes equations. We are interested to prove that the Cauchy problem associated is well posed. The second part in my thesis is devoted to study a model that arises from dispersive Navier-Stokes equations (that includes dispersive corrections to the classical compressible Navier-Stokes equations). Our model is derived from the last model assuming that the Mach number is very low. The obtained system is called *ghost effect* system, which is so named because it cannot be derived from the Navier-Stokes system of gas dynamics, while it can be derived from kinetic theory. The main goal of this part is to extend a result concerning the local existence of strong solution to a global in time existence of weak solutions. Finally, we are interested to prove certain functional inequalities who have noticeable interest in solving mathematical systems linked to fluid mechanics.

Keywords : Lake equations, Muckenhoupt weights, ghost effect, degenerate elliptic equations, dispersive Navier-Stokes equations, low Mach number, Log-Sobolev inequalities, .

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse, Raafat Talhouk et Didier Bresch pour les divers problèmes qu'ils m'ont proposé et qui ont toujours été d'un grand intérêt et d'une grande richesse. Merci à Raafat qui m'a donné l'opportunité de venir en France pour compléter mes études supérieures et un deuxième merci pour son choix du deuxième directeur de thèse. Merci à Didier pour ses conseils précieux, sa patience et pour le courage qu'il m'a apporté durant ces trois années de thèse. Je n'oublierai jamais leurs soutiens et encouragements continus qui ont été d'une grande aide pour moi.

J'adresse mes remerciements à mes rapporteurs, Alain Miranville et Francisco Guillen-Gonzalez qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail. J'exprime également mes remerciements à Mathieu Colin, Emmanuel Maitre et Mazen Saad d'avoir bien voulu faire partie de mon jury. Je suis également très honorée de compter Christophe Lacave parmi les membres de ce jury.

Pour le laboratoire de mathématiques à Beyrouth, je voudrais remercier tous les membres du laboratoire qui ont contribué à rendre cette période riche en expériences scientifiques et humaines. Un grand merci à la secrétaire du laboratoire Abir Moukaddem pour son aide, son efficacité et sa disponibilité. Ainsi merci à tous les collègues qui sont devenus des amis avec lesquels j'ai passé de très bon moments, Ralph, Houssein, Mohamad Ali, Mohamad, Marwa, Kamel, Houssam, Sara, Lamis.

Pour le laboratoire de mathématiques LAMA à Chambéry, mes sincères remerciements s'adressent à tous les membres. Merci au directeur du laboratoire Philippe Briand qui m'a aidé plusieurs fois à prolonger mon séjour en France. Également, un grand merci au secrétariat du laboratoire Nadine pour sa gentillesse. Mes remerciements vont en particulier aux actuels et anciens thésards, Lama, Charlotte, Joseph, Paul, Pierre, Rodolph, Clovis, Marion, Rodrigo.

Je profite également de cette page pour remercier Stéphane Gerbi, Marguerite Gisclon et Christian Bourdarias professeurs au LAMA pour leur aide et soutien pendant mon séjour au LAMA.

Je n'oublie évidemment mes amis qui m'ont supportée au cours de ces trois années. Ainsi, une pensée particulière s'adresse au groupe de Libanais à Chambéry.

Pour terminer, je veux dire que sans le soutien de ma famille, tout ceci n'aurait jamais pu aboutir et je vous serai éternellement reconnaissant d'avoir su me donner les moyens d'arriver jusqu'ici. Aucun mot ne saurait décrire ma pensée !.

Présentation

Nous nous intéressons dans cette thèse à l'analyse de quelques problèmes mathématiques issus de la mécanique des fluides. En particulier, la modélisation d'écoulement particuliers et l'analyse théorique des systèmes d'équations aux dérivées partielles associés.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du modèle utilisé en océanographie, le modèle des équations des lacs visqueux. En général, beaucoup de modèles d'océanographie physique dérivent des équations primitives de Navier-Stokes (dimension 3). Un certain nombre d'hypothèses sont généralement émises pour simplifier ces équations et obtenir des modèles tel que celui de *shallow water* (dimension 2) en supposant la hauteur d'eau est peu profonde. A partir du modèle de shallow water, on peut obtenir le modèle des lacs visqueux en prenant en considération l'hypothèse du *toit rigide*. Notre objectif est d'analyser mathématiquement ce dernier modèle, c.à.d, de démontrer que le problème de Cauchy associé admet une solution faible globale en temps et aussi d'analyser la régularité de la solution faible lorsque c'est possible. Compte tenu de la dégénérescence du fond (qui s'agit d'une hypothèse exclue par les études précédentes en général), nous sommes confrontés à introduire des espaces de Sobolev appropriés. Nous montrerons que l'utilisation des espaces à poids de type *Muckenhoupt* permet de généraliser des résultats connus sur les équations de Navier-Stokes incompressibles. Notons que nos résultats dans ce cadre étendent le travail de LEVERMORE, SAMMARTINO [79] (qui traite le cas non dégénéré) et ont fait l'objet d'une publication à paraître dans "Nonlinear analysis" intitulée "viscosity effect on the degenerate lake equations".

La deuxième partie est dédiée à l'étude d'un modèle obtenu récemment par C. D. LEVERMORE, W. SUN et K. TRIVISA [80] surnommé modèle de *ghost effect*. Il s'agit d'un sujet dont la littérature aussi bien physique que mathématique est encore peu développée (voir toutefois le livre de SONE [106]). En général, le phénomène de ghost effect apparaît lorsque l'on considère la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann vers Navier-Stokes incompressible pour un scaling diffusif. Des termes inattendus apparaissent alors dans les équations, d'où le nom "ghost-effect". Notre résultat autour de ce modèle concerne l'existence globale de solutions faibles qui étend aussi un résultat d'existence locale de solution forte démontré par LEVERMORE *et al.* dans [81] et il a fait l'objet d'une publication à paraître dans "Communications on pure and applied analysis" intitulée "Global well posedness for the ghost effect system."

La dernière partie est consacrée à l'étude de quelques inégalités fonctionnelles qui ont de grands intérêts dans la résolution de certains problèmes mathématiques liés à la mécanique des fluides. Plus précisément, on montre une inégalité fonctionnelle d'ordre 2, de type Log-Sobolev qui généralise certains inégalités fonctionnelles prouvées par A. JÜNGEL, D. MATTHES dans [62] et celle prouvée par BRESCH, VASSEUR, YU dans [27]. Ensuite, nous donnerons des applications de ces inégalités au modèle de Navier-Stokes-Korteweg.

Table des matières

Remerciements	5
Présentation	7
1 Introduction	11
1.1 Contexte général	11
1.2 Mécanique des fluides et théorie cinétique	18
1.2.1 Description macroscopique	18
1.2.2 Approche des milieux continus	19
1.2.3 Description cinétique	28
1.2.4 Limite hydrodynamique	31
1.3 Un modèle asymptotique pour les lacs	33
1.3.1 Le modèle de Saint-Venant	39
1.3.2 Le modèle des lacs	42
1.3.3 Nos résultats	45
1.3.4 Difficulté relatives aux équations à coefficients dégénérées	47
1.4 Dérivation du modèle de ghost effect	52
1.4.1 Modèle de Navier-Stokes dispersif	53
1.4.2 Nos résultats sur le modèle de ghost effect	54
1.5 Nouvelle inégalité fonctionnelle	60
2 Degenerate lake equations	63
2.1 Introduction	63
2.2 Preliminary section	67
2.2.1 Formal derivation of the model	68
2.2.2 Functional spaces	70
2.3 On the coercivity of a bilinear form	72
2.4 Analysis of system (2.3) with diffusion (i)	74
2.4.1 Global solution of the viscous lake equation	77
2.4.2 Weighted Gagliardo-Nirenberg inequality	86
2.4.3 Uniqueness of weak solution	86
2.5 Analysis of the model (2.3) with diffusion (ii)	87
2.5.1 Weak solution	87
2.6 Vanishing viscosity limits	95
2.7 Appendix	98

2.7.1	Appendix A	98
2.7.2	Appendix B	102
3	Ghost effect system	105
3.1	Introduction	105
3.2	Reformulation of the system and definitions of weak solution	110
3.2.1	Useful equalities	110
3.2.2	Reformulation of the System.	112
3.2.3	Weak solution	113
3.3	Main Theorem	115
3.4	Proof of Theorem 3.1	116
3.4.1	A priori estimates	117
3.4.2	Construction of solution	122
3.5	Appendix	140
4	Logarithmic Sobolev inequalities	143
4.1	Introduction	143
4.2	Main results	145
4.3	Application to fluid dynamics systems	152
5	Conclusion et perspectives	157
5.1	Conclusion	157
5.2	Perspectives	158
	Bibliographie	163

Chapitre 1

Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons présenter au lecteur un aperçu du cadre physique et mathématique de la mécanique des fluides ainsi que de la théorie cinétique des gaz dans laquelle cette thèse s’inscrit. Après une introduction générale qui fait intervenir les phénomènes physiques associés aux modèles mathématiques considérés dans cette thèse, nous présenterons certains éléments simples de la mécanique des milieux continus et de la théorie cinétique des gaz afin d’aider le lecteur à suivre les explications conduisant aux modèles étudiés dans ce travail. Ensuite, nous nous intéressons séparément (Section 3, 4 et 5) à présenter le cadre mathématique de l’étude des trois modèles que nous avons étudié. Dans chaque section, nous présenterons d’une manière plus ou moins formelle l’obtention de chaque modèle ainsi que les travaux mathématiques déjà existants et enfin nous faisons le lien entre ces travaux et nos résultats.

1.1 Contexte général

La nécessité de mieux comprendre les mécanismes qui régissent les écoulements des fluides complexes est d’autant plus grande qu’on les rencontre dans de nombreuses applications industrielles et géophysiques. La mécanique des fluides est une discipline vaste et diversifiée qui nous permet de comprendre le comportement de fluide (gaz ou liquide) en mouvement. Cependant les équations de la mécanique des fluides ont une structure mathématique complexe, et doivent être vues comme un ultime recours pour décrire ou quantifier un phénomène, là où l’intuition s’arrête.

Concernant les gaz, on sait qu’ils sont constitués d’atomes ou de molécules en mouvement (dit d’agitation thermique) qui s’entrechoquent en permanence. La modélisation mathématique de mouvement de gaz est assez compliquée. Le premier point de vue concernant l’étude de ce problème consiste en l’étude de la trajectoire de chaque particule. Les modèles utilisés pour décrire le fluide dans ce cas sont les équations de Newton pour les particules classiques ou l’équation de Schrödinger pour les particules quantiques. Cependant, cette description qu’on appelle la *description microscopique* présente néanmoins des inconvénients : d’une part elle nous donne beaucoup ”trop” d’informa-

tions (dans un régime fluide, on ne s'intéresse pas à connaître la position et la vitesse de chaque particule) et d'autres part elle ne nous permet pas de déterminer les grandeurs physiques intéressantes comme, la densité de masse, la vitesse et la température. Pour cette raison, on préfère souvent adopter une vision statistique du fluide en remplaçant ce modèle qui contient beaucoup d'informations par un modèle cinétique, et dans laquelle une particule donnée n'aura plus une position et une vitesse données, mais différentes probabilités d'avoir différentes positions et vitesses. L'autre point de vue serait de décrire directement les grandeurs macroscopiques de ce système (masse, vitesse, température), c'est la *description macroscopique* ou *fluide*. Ces modèles macroscopiques sont souvent suffisants pour comprendre la dynamique du gaz lorsque son état est proche de l'équilibre. Cependant, ils ne permettent pas d'avoir les coefficients de transport tels que la viscosité et la conductivité de la chaleur en fonction de la nature des interactions moléculaires. Il y a donc un besoin d'établir un passage entre la description microscopique et la description macroscopique du gaz. La *théorie cinétique de gaz* se situe précisément à un niveau intermédiaire entre ces deux descriptions, microscopique et macroscopique que l'on appelle la *description mésoscopique* (nous renvoyons le lecteur par exemple à l'introduction de l'article de revue [8]). Dans cette description, on ne s'intéresse pas à la position et la vitesse de chaque particule, mais plutôt à la répartition statistique des particules dans l'espace de phases (c.à.d. l'espace des positions et des vitesses). Plus précisément, l'état du gaz peut être décrit par une densité de probabilité $f(t, x, v)$ représentant au temps $t \geq 0$ la densité de présence de l'ensemble des particules dans l'espace des phases $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. A chaque instant $t \geq 0$, $f(t, ., .)$ est une mesure de probabilité dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$ représente la position, $v \in \mathbb{R}^N$ représente la vitesse et $f(t, x, v) dx dv$ représente la quantité de particules dans l'élément de volume $dx dv$ centré en (x, v) dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Notons que dans le cas d'un gaz monoatomique, la position et la vitesse d'une molécule définissent complètement son état dynamique, de telle sorte que la fonction de distribution $f(t, x, v)$ caractérise la répartition des molécules parmi les différents états dynamiques possibles. Dans ce cas, on utilise les équations de Boltzmann, Fokker-Planck ou Vlasov, etc. pour décrire le mouvement des fluides. Dans ce contexte, les modèles fluides peuvent être obtenus comme approximations hydrodynamiques des modèles cinétiques (ceux utilisés spécifiquement à l'échelle mésoscopique). D'abord, on écrit les équations cinétiques en une forme adimensionnée en faisant apparaître un paramètre Kn, appelé le nombre de Knudsen proportionnel au libre parcours moyen. Après, en variant ce paramètre entre des grandes ($\text{Kn} = O(1)$) et petites valeurs ($\text{Kn} \ll 1$), nous pourrions prendre en considération les différents régimes dans lesquels l'état du gaz évolue. L'obtention formelle des modèles macroscopiques (Euler, Navier-Stokes, ou diffusion) à partir des équations cinétiques est basée sur les développements classiques de Hilbert ou de Chapman-Enskog ou méthode des moments. Toutefois, ce passage du niveau cinétique vers niveau macroscopique connue sous le nom de *limite hydrodynamique* est justifié mathématiquement dans certains régimes particuliers (voir par exemple [56], [112]).

D'autres part, les liquides sont beaucoup plus familiers que les gaz ; leur structure

est pourtant plus complexe. Ils sont l'intermédiaire entre le solide et le gaz. Le solide maintient ses atomes fixes, enfermés dans une "cage" constituée par les atomes voisins, à l'exception de vibrations de faible amplitude d'origine thermique. A l'inverse, le gaz contient des atomes ou molécules libres les uns par rapport aux autres, n'interagissant que par des chocs. On retrouve les deux aspects dans un liquide : les molécules sont très peu mobiles, enfermées dans des cages formées par leur voisines, mais ces cages sont temporaires, et, en présence d'une force suffisante, le mouvement relatif des molécules moyen peut devenir non nul. C'est ainsi qu'un liquide s'écoule. En ce qui concerne la modélisation mathématique d'un liquide en mouvement, on ne considère pas la vitesse de chaque particule, mais plutôt la répartition statistique des particules dans l'espace de phases (c.à.d. l'espace des positions et des vitesses). Cependant, la compréhension de mécanismes de l'écoulement de fluide complexe a besoin de comprendre la réponse des fluides à une contrainte imposée. C'est l'objet de la *Rhéologie* : mot inventé par BINGHAM en 1929 et considéré, avec REINER comme le fondateur de cette science ([58]).

Cette science a vu le jour pour étudier des matériaux et prédire des déformations suite à l'application d'une sollicitation, on se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus et on cherche leur loi de comportement. Cette relation entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur de déformations D caractérise le fluide. Le tenseur des contraintes peut être décomposé en deux parties, la partie déviatorique σ' et la partie sphérique $p = \frac{\text{Tr} \sigma}{d}$ (d dimension de l'espace) telles que :

$$\sigma = \sigma' - p \mathbb{I},$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice d'identité et le terme négatif devant p traduit le fait que le fluide au repos est généralement en compression.

Le tenseur de taux de déformation, D est la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse :

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u),$$

où u est la vitesse. Sachant que les fluides classiques (newtonien) comme par exemple l'eau, huile ou l'air possèdent une loi de comportement linéaire connue, certains fluides complexes comme les suspensions (la lave, les sols et roches grande échelle, ou encore le sang et les tissus biologiques) ont une loi de comportement non linéaire et en plus peuvent dépendre de l'histoire de l'écoulement : ils sont qualifiés de non-newtoniens. La difficulté réside dans le passage du comportement collectif d'une multitude de grains à un modèle macroscopique exploitable dans des codes de calculs industriels par exemple. De plus, la plupart des produits de la consommation courante (peintures, cosmétiques, béton, etc) sont formés de constituants interagissant au niveau moléculaire. Ces interactions peuvent être à l'origine de la formation de structures particulières présentant des propriétés fonctionnelles différentes de celles des constituants pris séparément. Ce qui en fait un milieu complexe et difficile à caractériser (voir [46]).

Les comportements de base des matériaux sont l'élasticité, viscoélasticité, la plasticité et la viscoplasticité. Ces types de comportement peuvent être combinés pour former

différents modèles rhéologiques [98]. On trouve le solide élastique (régit par la loi de Hooke) et le fluide visqueux aux deux extrêmes parmi tous les types de comportement. Pour un solide élastique, la déformation du matériaux est proportionnelle à la contrainte appliquée. Le fluide visqueux, dont le comportement suit la loi de Newton (1678), le champ de vitesse dépend linéairement de la contrainte appliquée. Très souvent, pour les solutions de polymère, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement (gradient de vitesse) auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhéofluidant (*shear thinning* en anglais). Ce comportement est également observé dans les suspensions diluées de particules solides, suspensions de vésicules déformables (comme le sang), encres, pâte à papier. Leur viscosité effective diminue lorsqu'on augmente la contrainte. Cet effet est dû en général à une brisure de la structure interne par l'écoulement. Parmi les fluides visco-plastiques, les fluides à seuil sont les plus connues aujourd'hui. Un fluide à seuil est un matériau qui a deux comportements suivant que la valeur de la contrainte qui lui est appliquée est supérieure ou inférieure à la contrainte seuil. En dessous de cette limite, il se comporte comme un solide élastique. Au delà de cette contrainte, il se comporte comme un fluide rhéo-fluidiant dans la majorité des cas. Les modèles rhéologiques les plus courants pour décrire la loi de comportement de ces fluides sont le modèle de Bingham et de Herschel-Bulkley.

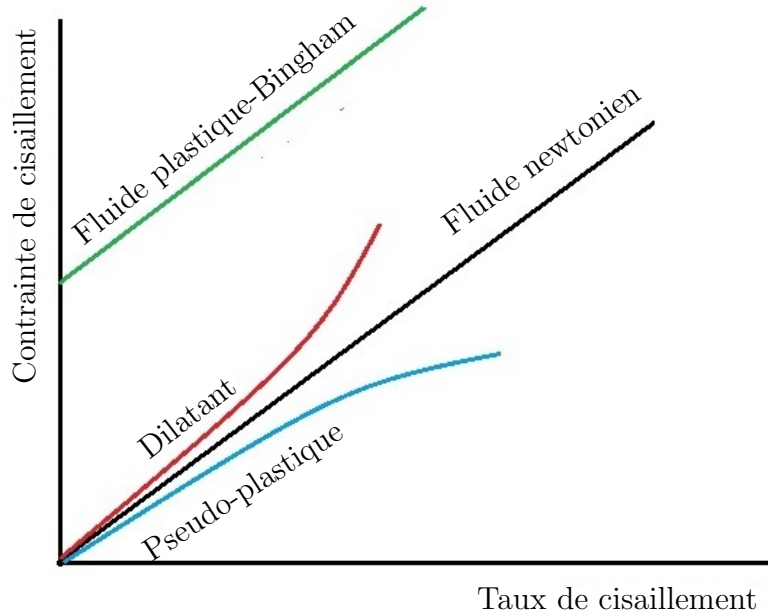


FIGURE 1.1 –

Après cette courte introduction sur l'exercice de modélisation mécanique d'un fluide (gaz ou liquide) en écoulement, nous voudrions préciser maintenant le cadre de nos travaux en passant aux modèles asymptotiques décrivant certains régimes particuliers. En général, cette analyse repose sur la modélisation des phénomènes physiques concernés.

Comme la description des systèmes naturels est très difficile, ceci à cause de la multiplicité de paramètres et de la complexité des phénomènes intervenants, on s'intéresse souvent à passer aux modèles plus simples et étudier leur comportement à l'aide d'un modèle mathématique dérivant ces principes physiques. Cette étape de modélisation est importante car elle est directement liée aux ambitions que nous nous fixons pour élaborer un outil d'aide à la décision opérationnel.

Concernant les modèles d'océanographie (cas d'un liquide newtonien) qui font l'objet de la première partie de ce document, les équations régissant ce genre d'écoulement dérivent des équations primitives de Navier-Stokes. Un certain nombre d'hypothèses sont généralement émises pour simplifier les équations de Navier-Stokes et obtenir des modèles de courantologie tel que celui de *Shallow water*. A partir de ces modèles, d'autres hypothèses simplificatrices peuvent être introduites qui nous conduisent en particulier au système d'équations des lacs visqueux avec dégénérescence du fond, on l'appelle parfois le modèle à *toit rigide*.

De façon systématique, l'analyse des modèles étudiés respecte deux principes de base qui sont l'obtention d'estimations *a priori* et leurs utilisations. Ces estimations nous fournissent le cadre fonctionnel qui guide la méthode de résolution. Compte tenu de la dégénérescence du fond et de l'estimation d'énergie associée à notre système, nous présenterons une adaptation de la méthode de Galerkin ainsi que quelques résultats de convergence associés à cette méthode dans le cas des espaces de Sobolev à poids. Ce qui nécessite une généralisation de quelques type d'inégalités (inégalité de Poincaré, de Sobolev) et de quelques notions de compacité. Notre but à ce stade est de démontrer le caractère bien posé du modèle. En plus, d'étudier le comportement de la solution quand on fait tendre la viscosité vers zéro et voir si elle converge vers la solution du modèle non-visqueuse.

Dans la deuxième partie, nous nous concentrerons sur un modèle issu de la théorie cinétique des gaz, plus précisément sur un modèle récent obtenu par LEVERMORE, TRIVISA et SUN en [80] nommé par *ghost effect* et qui permet de décrire certain mouvement des gaz à faible nombre de Mach. Le modèle est nommé ghost effect puisqu'on ne peut pas l'obtenir à partir de modèle de Navier-Stokes compressible. En fait, le phénomène de ghost effect mis en évidence par SONE apparaît lorsqu'on considère la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann vers Navier-Stokes incompressible pour un scaling diffusif. Des termes inattendus apparaissent alors dans l'équation. Le responsable de ce phénomène est le champ de vitesse qui est du même ordre que le nombre de Knudsen. Celui-ci disparaît à la limite hydrodynamique mais influence d'autres quantités comme par exemple la température, d'où le nom de "ghost effect". Plus généralement, le terme de "ghost-effect" utilisé par Y. SONE fait référence à des équations macroscopique possédant des nouveaux termes par rapport aux équations de Navier-Stokes due au rôle de la variation de la température dans l'étude de faible nombre de Knudsen de l'équation de Boltzmann. Ce fait motive les mathématiciens à travailler pour savoir quel correction on peut tirer sur les équations macroscopiques à partir de la théorie cinétique

des gaz. LEVERMORE dans [77] a proposé une façon systématique pour construire des systèmes mathématiques décrivant la dynamique des gaz à l'échelle macroscopique. Ce système peut être vu comme une correction de modèle de Navier-Stokes compressible. D'autre part, dans une série des travaux [80], [81], LEVERMORE et *al.* ont montré que le modèle est bien posé, au sens qu'on peut assurer l'existence d'une solution forte locale pour des données initiales suffisamment régulières. En plus, les auteurs dans [81] ont étudié la limite faible nombre de Mach de ce nouveau modèle et le modèle obtenu est aussi nommé par "ghost effect system" puisqu'on ne peut pas le dériver à partir du modèle de Navier-Stokes compressible. Notre objectif dans ce cadre sera d'étendre le résultat d'existence locale du modèle de ghost effect démontré par C. LEVERMORE et *al.* dans [81] en une existence globale de solutions faibles et également étendre le travail récent de D. BRESCH *et al.* sur le modèle faible nombre de Mach [21] qui a été obtenu à partir de modèle de Navier-Stokes compressible (voir [21], [83]). En comparant notre modèle à celui étudié par BRESCH *et al.*, nous constatons un terme supplémentaire dans l'équation de conservation de moment et ça vient du fait que le modèle de départ, i.e., le modèle de Navier-Stokes dispersif contient une correction. Néanmoins, ce terme pose une difficulté dans l'établissement des estimations *a priori*. Ce qui nécessite comme on va voir l'introduction d'une nouvelle inégalité fonctionnelle de type Log-Sobolev d'indice élevé.

Finalement, motivé par l'importance des inégalités fonctionnelles dans la résolution des problèmes mathématiques liées à la mécanique de fluide (comme le cas du modèle de ghost effect par exemple), nous démontrerons dans le chapitre 4 de ce document une inégalité fonctionnelle qui généralisent certains inégalités prouvées par A. JÜNGEL, D. MATTHES dans [62] et celle prouvée par BRESCH, VASSEUR, YU dans [27]. Nous donnerons après une application de cette inégalité au modèle de Navier-Stokes-Korteweg.

Plan de la thèse. Ce document est ainsi organisé :

Le reste de ce **chapitre** d'introduction est organisé comme suit :

- Dans la section 2, nous rappelons au lecteur quelques notions sur la mécanique des milieux continus qui mènent aux équations de Navier-Stokes. Ces équations sont en fait des équations de bilan (ou dites de conservation) qui sont complétées par des lois de comportement permettant de caractériser les propriétés intrinsèques du matériau au repos et sa réponse aux contraintes qui lui sont exercées. Ensuite, nous expliquerons d'une manière assez formelle comment on peut aussi obtenir les équations de Navier-Stokes (échelle macroscopique) à partir de la théorie cinétique des gaz.
- Dans la section 3, nous parlerons de l'obtention des équations de Saint Venant à partir des équations de Navier-Stokes incompressible puis de l'obtention du modèle des lacs visqueux à partir des équations de Saint-Venant en faisant tendre le nombre de Froude vers zéro. La dernière partie de la section 3 a pour objectif donc de présenter nos résultats pour le modèle des lacs visqueux.

- Dans la section 4, nous présentons le modèle de ghost effect (ou effet fantôme). Nous discuterons la l'obtention de ce modèle à partir de la théorie cinétique des gaz. Plus précisément, nous insisterons sur le travail de LEVERMORE, TRIVISA et SUN où ils ont établi le modèle de ghost effect à partir du modèle de Navier-Stokes compressible dispersif (modèle de Navier-Stokes compressible avec correction dans le terme dispersif) en étudiant la limite faible nombre de Mach dans ce dernier modèle. Ensuite, nous montrerons comment on peut démontrer l'existence globale de solution faible suite à une démonstration d'une nouvelle inégalité fonctionnelle de type Log-Sobolev.
- Dans la section 5, nous présentons une nouvelle inégalité fonctionnelle de type Log-Sobolev d'ordre 2. En plus, nous donnons une application de cette inégalité sur le modèle de Navier-Stokes-Korteweg.

Après avoir présenté les modèles principaux de cette thèse et leurs motivations physiques, nous décrivons ci-dessous le contenu de chaque chapitre de la thèse qui la composent.

Chapitre 2 : Le but de ce chapitre sera d'étudier le modèle des lacs visqueux avec bathymétrie qui dégénère proche du bord. Nous montrerons que ce modèle admet une solution faible globale en temps. L'ingrédient principale dans ce travail est l'utilisation des espaces à poids. En plus, nous discuterons l'effet du choix de terme de dissipation sur la régularité de la solution faible. Ensuite, nous faisons un lien entre ce modèle et son version non-visqueuse. Plus précisément, nous montrerons que la solution du modèle des lacs visqueux converge vers la solution du modèle des lacs non visqueux quand on fait tendre la viscosité vers zéro dans le cas où les solutions des modèles visqueux et non-visqueux sont régulières.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous étudierons le système de ghost effect. Ce modèle admet au moins une solution forte locale en temps (voir [81]). Dans notre travail, nous étendons ce résultat en démontrant l'existence de solution faible globale en temps. Le point clé dans la démonstration est une nouvelle inégalité fonctionnelle de type Log-Sobolev d'ordre 2 (voir Théorème 1.5, Section 6). Une généralisation de cette inégalité est présentée au Chapitre 4.

Chapitre 4 : Ce chapitre est consacré à la démonstration de certaines inégalités fonctionnelles qui ont de grands intérêts dans l'analyse du modèle de Navier-Stokes-Korteweg compressible (voir Théorème 4.1, Chapitre 4). Nous montrerons comment cette inégalité peut nous permettre de traiter le modèle de Navier-Stokes-Korteweg (NSK) avec une forme plus ou moins générale de tension de surface. L'existence globale de solutions du modèle de Navier-Stokes compressible sera comme une limite de la solution de (NSK) quand on fait tendre un paramètre ε devant le terme de tension de surface vers zéro (voir [111]).

Chapitre 5 : Dans ce chapitre, nous faisons une petite conclusion sur les thématiques de recherches étudiées dans ce document. Après nous présenterons quelques prolongements des résultats démontrés dans ce travail.

1.2 Mécanique des fluides et théorie cinétique

Dans ce paragraphe nous présenterons les équations de base qui permettent de décrire le mouvement de fluide (gaz ou liquide). Pour les gaz, nous adopterons une description cinétique afin de décrire son mouvement. Cependant, pour les fluides, nous utiliserons une description macroscopique. Dans ce contexte, un lien entre ces deux points de vue est établi dans l'optique de connaître l'origine de notre modèle ghost effect étudié au cours de ce document. La lecture de ce paragraphe, bien que conseillée, n'est pas indispensable pour comprendre les sections suivantes. Le lecteur intéressé peut aller directement aux sections qui suivent où nous commencerons à présenter les modèles mathématiques ainsi que les résultats obtenus dans ce travail.

1.2.1 Description macroscopique

Il s'agit d'une description dont le but est de décrire les grandeurs physiques intéressantes dites observables. Le fluide est cette fois décrit par des variables ne dépendant que du temps et de l'espace, comme la densité, la vitesse, la pression, la température ou encore l'entropie. Les équations qui décrivent ce genre d'écoulements sont les équations d'Euler pour un fluide non visqueux et les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux.

La dérivation des équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement de fluide à l'échelle macroscopique peut s'envisager en suivant deux voies distinctes :

- indirectement, i.e., en partant de l'équation de Boltzmann (échelle cinétique) de la mécanique statistique de gaz (ou théorie cinétique des gaz). Ce passage à l'échelle macroscopique se fait alors en usant d'outils statistiques pour reconstituer, à partir des évolutions d'un ensemble de molécules, une vision moyenne du mouvement. C'est la voie de la théorie cinétique des gaz qui, pour des espèces de faible poids moléculaire, fournit des interprétations et évaluations satisfaisantes des propriétés macroscopiques.
- directement, en décrivant directement les lois de conservation de la mécanique des milieux continus une fois formulées les lois de comportement des fluides classiques. C'est l'approche nommée par mécanique des *milieux continus*.

Par la suite, nous détaillerons d'une façon abrégée les deux voies, i.e., l'approche des milieux continus et l'approche de la théorie cinétique. Pour le premier approche présenté dans la suite, nous renvoyons le lecteur aux [13], [58] pour plus d'explication.

1.2.2 Approche des milieux continus

Dans cette section, nous adopterons le point de vue des milieux continus. Parmi les fluides, on distingue ici les liquides et les gaz, nous verrons plus loin que la notion d'*incompressibilité* clarifie les choses. Mentalement, il faut se représenter un fluide comme la réunion de particules fluides de taille suffisamment petites pour être assimilés à des points matérielles de l'espace $\mathbb{R}^3$, mais suffisamment grosse par rapport à l'échelle atomique. Les physiciens parlent de "volume élémentaire représentatif".

Nous décrivons l'état de fluide par :

- le domaine occupé par le fluide ouvert connexe noté Ω . On considère un ensemble de particules, qui, à l'instant $t = 0$ occupe un espace $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$.
- le vecteur vitesse du courant au point $x = (x_1, \dots, x_n)$ et à l'instant t noté $u(t, x)$.
- la pression (scalaire) du fluide au point $x = (x_1, \dots, x_n)$ et à l'instant t noté $p(t, x)$.
- la densité (scalaire) du fluide au point $x = (x_1, \dots, x_n)$ et à l'instant t noté $\rho(t, x)$.

Les scientifiques ont alors deux points de vue possibles : chaque particule est repérée par sa position $\mathbf{X} \in \Omega_0$. Les particules sont en mouvement. A l'instant t , le domaine Ω_0 se déplacé en $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. Au cours du temps, chaque particule peut être repérée par :

- la position $\mathbf{X} \in \Omega_0$ qu'elle avait initialement.
- la position $x \in \Omega_t$ qu'elle occupe à l'instant t .

Approche eulérienne : A chaque instant t , les vitesses donnent un champ de vecteurs. Les lignes du champ ou caractéristiques associés sont appelées *lignes de courants*. Ce sont les solutions de l'ODE :

$$\frac{dx}{ds} = u(t, \xi(s)).$$

C'est l'approche usuelle, selon le point de vue d'Euler.

On se place en un point $M \in \mathbb{R}^3$ fixé et on se réfère aux particules qui passent en ce point (à deux instants différents, la particule qui passe est a priori différente). Les variables utilisées sont appelées variables d'Euler. Il s'agit de $x = (x_1, x_2, x_3)$ et t . La fonction qui permet de retrouver les particules observées est notée g :

$$\mathbf{x} = g_{\text{Eul}}(t, \mathbf{X}).$$

Approche lagrangienne. On se réfère à chacune des particules que l'on suit dans son mouvement. Pour cela, on utilise les variables lagrangiennes $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ et t . Une autre façon de voir, selon Lagrange, est de s'intéresser aux trajectoires individuelles des "particules fluides" étiquetées en fonctions de leur position d'origine $\mathbf{X}$ à instant initial. La trajectoire d'une particule est alors une courbe paramétrée $t \rightarrow x = \varphi_{\text{Lag}}(t, \mathbf{X})$ telle

que $\varphi_{\text{Lag}}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}$.

La position des particules au temps t est donnée par la fonction f

$$\mathbf{x} = \varphi_{\text{Lag}}(t, \mathbf{X}).$$

Lois de conservations.

Les lois générales de physique, et en particulier de la mécanique des milieux déformables, s'appuie sur le principe de lois de conservation. Ce principe exprime le bilan des influences subies par des grandeurs physiques comme la masse, l'énergie ou la quantité de mouvement afin d'établir les équations à résoudre.

Soient Ω le volume de contrôle matériel se déplaçant avec le fluide, et $\partial\Omega$ son enveloppe ; chaque point de cette enveloppe est donc une particule fluide. Si on note dw un élément de volume de Ω et ds un élément de surface de $\partial\Omega$, le bilan exprimant la variation d'une quantité ξ définie dans Ω s'écrit sous forme générique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \xi dw = \int_{\Omega_t} \rho \xi dw + \int_{\partial\Omega_t} \sigma \cdot n ds \quad (1.1)$$

où f est la force par unité de masse appliquée à l'unité de masse du fluide est, par exemple, la pesanteur ou la force électrostatique sur un fluide chargé. Le tenseur σ prend en compte l'ensemble des forces de surface (pression et viscosité) s'exerçant sur l'élément ds . En appliquant le théorème de la divergence au dernier terme de l'équation (1.1) et le théorème de transport au premier terme, il vient :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial(\rho \xi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \xi \mathbf{u}) \right) dw = \int_{\Omega_t} (\rho f + \text{div} \sigma) dw \quad (1.2)$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide. Cette équation de bilan est ensuite appliquée aux trois grandeurs que sont la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du domaine.

Condition au bord. Dans le cas d'un domaine borné, on imposera une condition de non-pénétration : le fluide ne peut que glisser le long du bord, soit, si $x \in \Omega$ et $\vec{n}(x)$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x , on a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Cette condition au bord vaut pour les équations d'Euler et pour Navier-Stokes, mais, ces dernières étant d'ordre deux, une condition supplémentaire est requise sur la vitesse tangentielle. Le plus souvent, on choisit une condition de Dirichlet

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0,$$

qui signifie que le fluide adhère sur le bord. Une condition plus générale mis à jour par H. NAVIER et qui permet de mesurer l'effet de friction près du bord. Nous revenons plus

tard à la discussion de cette condition (Chapitre 2).

Bilan de masse. Soit $M(\Omega) = \iint_{\Omega} \rho \, dw$ la masse du domaine Ω : la masse d'un système matériel étant conservative, les termes sources ρ et le tenseur σ sont identiquement nuls. L'équation de conservation de la masse est obtenue en écrivant la forme générique précédente pour $\xi = 1$:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) dw = 0,$$

donnant au niveau local l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.3)$$

Bilan de quantité de mouvement. Le bilan de quantité de mouvement s'obtient pour $\xi = \mathbf{u}$ et correspond à l'écriture du Principe Fondamental de la dynamique (PFD) pour un milieu continu : dans un référentiel galiléen, le torseur d'accélération est égal au torseur des efforts extérieurs. Traditionnellement, le tenseur de contraintes σ est décomposé sous la forme générale $\sigma = -p\mathbb{I} + \sigma'$ avec p la pression thermodynamique (la partie correspondant aux forces de pression) et σ' (partie correspondant aux forces de viscosité) le tenseur des contraintes visqueuses¹. L'application du PFD au volume Ω conduit à l'équation de bilan pour la quantité de mouvement :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) dw = \int_{\Omega_t} (\rho f + \operatorname{div} \sigma) dw,$$

soit sous forme différentielle

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \operatorname{div}(p\mathbb{I}) = \rho f + \operatorname{div}(\sigma'). \quad (1.4)$$

Bilan d'énergie. Le bilan d'énergie s'applique à l'énergie totale spécifique $\mathcal{E}$. Elle est définie comme la somme de l'énergie interne e et de l'énergie cinétique spécifique :

$$\mathcal{E} = e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2.$$

L'équation de bilan d'énergie est établie pour $\xi = \mathcal{E}$ et est équivalente au premier principe de la thermodynamique. Selon ce principe, l'évolution temporelle de l'énergie contenue dans Ω est égale à la somme de la puissance des forces extérieures et de la quantité de chaleur fournie au système. Nous envisagerons par la suite des applications où l'écoulement est considéré isentropique : les flux de chaleur sont donc nuls et l'équation de bilan pour l'énergie devient :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial(\rho \mathcal{E})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathcal{E} \mathbf{u}) \right) dw = \int_{\Omega_t} (\rho f \cdot \mathbf{u} + \operatorname{div}(\sigma \cdot \mathbf{u})) dw,$$

1. Nous supposons ici que le fluide est newtonien

ou encore sous sa forme locale :

$$\frac{\partial(\rho \mathcal{E})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathcal{E} \mathbf{u}) + \operatorname{div}(p \mathbf{u}) = \rho f \cdot \mathbf{u} + \operatorname{div}(\sigma' \cdot \mathbf{u}). \quad (1.5)$$

Les deux équations de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement contiennent trois inconnues ρ , $\mathbf{u}$ et σ . Plus précisément, au niveau scalaire, il y a en réalité 4 équations et 10 inconnues. Il manque des équations plus spécifiques aux propriétés physiques du fluide, on cherche plutôt à savoir autant d'équations que d'inconnues. Cependant, on peut montrer que le tenseur σ est symétrique (voir [13], [58]). Ce résultat permet de réduire le nombre d'inconnues du système, mais il reste quand même des lois à prescrire afin de fermer le système. Pour cela, on complète généralement ce système à l'aide d'une équation liant $\mathbf{u}$ et σ' que l'on appelle loi de comportement du milieu.

Loi de comportement.

Les équations de bilan établies précédemment traduisent les principes généraux de la Mécanique et de la Thermodynamique pour tout matériau représenté à l'échelle du continu, en ignorant les phénomènes intervenant à l'échelle moléculaire. Il reste à réintroduire cette perte d'information sous la forme de relations empiriques dites lois de comportement.

Afin de caractériser les déformations subies par le fluide au voisinage d'un élément, on considère une particule de fluide située en x à la vitesse $\mathbf{u}(t, x)$. L'accroissement de la vitesse s'écrit, au premier ordre par rapport aux composantes ∂x_j ($j = 1$ à d) (d dimension) du déplacement :

$$d \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \right) \partial x_j.$$

Les quantités $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \right)$ sont les éléments du *tenseur des taux de déformation* du fluide. Il peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique, sous la forme [58], [75]

$$\nabla \mathbf{u} = D(\mathbf{u}) + A(\mathbf{u}),$$

où en posant

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}),$$

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla^t \mathbf{u}).$$

Le tenseur D de composantes D_{ij} est symétrique. Il comporte à la fois des termes diagonaux ($i = j$) et des termes non-diagonaux ($i \neq j$). Les termes diagonaux du tenseur D et donc du tenseur ∇ représentent la vitesse d'élongation, ou taux d'élongation. La trace de la matrice D , qui est la somme des éléments diagonaux $\left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \right)$, s'identifie à la

divergence du champ de vitesses et représente le taux d'expansion de l'élément de fluide considéré. Pour un fluide incompressible, le champ de vitesses est de divergence nulle, et nous retrouvons alors le fait que le volume d'un élément matériel de fluide reste constant. Les termes croisés du tenseur D représentent les vitesses de déformation angulaire locale. On décompose alors le tenseur des taux de déformation en une somme d'un terme diagonal et d'un terme de trace nulle (somme des termes diagonaux de la matrice) :

$$D = \frac{1}{d} \text{Tr}(D) \mathbb{I} + \left(D - \frac{1}{d} \text{Tr}(D) \mathbb{I} \right),$$

où le tenseur diagonal est associé à la dilatation volumique des éléments de fluide. Le tenseur symétrique, appelé déviateur, est associé aux déformations sans changement de volume des éléments de fluide.

Fluide newtonien. Pour un fluide newtonien, la loi de comportement classique et réaliste consiste à relier linéairement les forces aux flux (loi de Newton). Le tenseur des contraintes visqueuses σ' est alors donné sur l'hypothèse du fluide *newtonien* par :

$$\sigma' = 2\mu D(u) + \lambda \text{div } u \mathbb{I}, \quad (1.6)$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé et $D(u)$ est la partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse. Le coefficient μ est appelé aussi *viscosité dynamique* (ou *cisaillement*) de l'écoulement et le coefficient $k = \frac{2}{d}\mu + \lambda$, d dimension d'espace (qui est donc positif) est appelé *viscosité en volume* (ou *de groupe*) de l'écoulement. Le tenseur $D(u)$ est aussi appelé *tenseur des taux de déformation*.

Remarque. Les coefficients de viscosité λ et μ peuvent néanmoins présenter des propriétés d'hétérogénéité en dépendant par exemple de la densité, de la température ou de la direction d'espace (effet d'anisotropie pour des écoulements géophysiques). La théorie cinétique dans le cas des gaz monoatomiques fournit un cas particulier où on peut justifier physiquement un lien entre ces deux coefficients

$$\lambda = -\frac{\mu}{d}, \quad \mu > 0.$$

Remarque. Dans beaucoup de cas, la viscosité en volume est très faible et peut être négligée, ce qui fournit l'expression suivante du tenseur des contraintes visqueuses

$$\sigma' = 2\mu \left(D(u) - \frac{1}{d} \text{div } u \mathbb{I} \right),$$

qui dans ce cas est de trace nulle. Ceci implique que toute la partie isotrope des contraintes est contenue dans la pression p .

Fluide non-newtonien. Nous verrons par la suite qu'il existe un certain nombre de fluides qui ne vérifient pas cette loi de comportement, appelés alors fluides *non-newtoniens*.

La loi de comportement entre σ' et $\nabla \mathbf{u}$ est alors non-linéaire. Un certain nombre de modèle empiriques permettent de décrire certains cas particuliers de cette loi, citons par exemple les modèles introduits par LADYZHENSKAYA ([73]). Dans ces modèles, le tenseur σ' s'écrit

$$\sigma' = 2\mu(|D(\mathbf{u})|^2)D(\mathbf{u}).$$

Un modèle très fréquent est le modèle en loi de puissance d'*Ostwald*. Dans une certaine gamme de taux de cisaillement, on peut représenter la viscosité comme une loi de puissance de $D(\mathbf{u})$, en particulier pour les polymères

$$\mu(|D(\mathbf{u})|^2) = \mu + \tau_0|D(\mathbf{u})|^{p-2}, \quad (1.7)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de viscosité, $\tau_0 \geq 0$ représente le seuil de plasticité et p une constante qui appartient à l'intervalle $[1, +\infty[$. Selon p , nous distinguons les cas suivants :

- $1 \leq p < 2$, cas d'un fluide viscoplastique,
- $p = 2$, cas d'un fluide newtonien classique,
- $p > 2$, cas d'un fluide dilatant.

Remarquons que la loi de comportement (1.7) peut avoir un problème de dégénérescence ($p > 2$ et $|D(\mathbf{u})| = 0$) ou de singularité ($p < 2$ et $|D(\mathbf{u})| = 0$). Dans le cas où $1 \leq p < 2$, cas d'un fluide viscoplastique, le fluide sera un matériau qui a deux comportements suivant la valeur de la contrainte qui lui est appliqué est supérieure ou inférieure à la contrainte seuil τ_0 . En dessous de cette limite, il se comporte comme un solide élastique. Au delà de cette contrainte, il se comporte comme un fluide visqueux ou comme un fluide rhéo-fluidifiant dans la majorité des cas. Le modèle rhéologique le plus courant et le plus efficace pour décrire la loi de comportement de ces fluides est le modèle de Herschel-Bulkley. En sa forme général, il s'écrit

$$\begin{cases} \sigma' = \mu|D(\mathbf{u})|^{p-1}D(\mathbf{u}) + \tau_0 \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} & \text{si } |D(\mathbf{u})| \neq 0, \\ |\sigma'| \leq \tau_0 & \text{si } |D(\mathbf{u})| = 0, \end{cases}$$

où $|D(\mathbf{u})|$ est la norme de Frobenius (appelée parfois norme de Schur) divisée par le coefficient $\sqrt{2}$, i.e.,

$$|A| = \sqrt{\frac{A:A}{2}} \quad \text{pour n'importe quel tenseur } A,$$

et τ_0 représente le seuil de plasticité. Lorsque $p = 1$, le fluide est appelé fluide de Bingham.

Remarque. En mathématiques, la norme ci-dessus n'est pas très courante. Nous préférons parfois d'utiliser la norme de Frobenius définie par

$$|A|_F = \sqrt{A:A} = \sqrt{2}|A| \quad \text{pour n'importe quel tenseur } A.$$

Très souvent aussi, nous faisons intervenir la constante $\sqrt{2}$ dans la constante τ_0 , et nous noterons cette constante parfois par τ_0^F ou même τ_0 puisqu'elle s'agit d'une constante qui n'as pas d'effet mathématique.

Remarque. La loi de comportement (1.7) utilise un critère de *Von Mises*. Ce critère impose un seuil de plasticité τ_0 constant dans $\mathbb{R}^+$. Cependant, il existe d'autres critères de plasticité (voir par exemple [98], [43]) comme le critère de *Drucker-Prager* qui généralise le critère de Von Mises et qui fait intervenir la pression hydrostatique, qui a été introduite initialement pour étudier la déformation plastique des sols, des roches, mais aussi d'autres matériaux pour lesquels la pression hydrostatique a un effet sur le comportement plastique. Ce critère a été largement utilisé en ingénierie géotechnique et en mécanique de l'endommagement continu, pour prédire des forces de résistance, ou un potentiel plastique.

Equation d'état

A ce stade, il est pertinent de se demander si le jeu d'équations (1.3)-(1.4)-(1.5) est suffisant pour résoudre un problème pratique. Pour cela comptons les équations et les inconnues :

- nous avons 5 équations : 1 pour la masse, 3 pour la quantité de mouvement car c'est une équation vectorielle, 1 pour l'énergie.
- nous avons 6 inconnues : la masse volumique ρ , les 3 composantes de la vitesse u , la pression p et l'énergie interne $\mathcal{E}$.

Il manque donc une équation. Cette équation manquante est l'équation d'état reliant par exemple la densité et la pression.

Dans le paragraphe suivant, on travaille à entropie constante : le fluide est dit isentropique, ce qui élimine l'équation (1.5) sur l'énergie.

Écoulement incompressible. Pour de nombreux liquides tels que l'eau ou les laves volcaniques que nous étudierons dans les sections 3 et 5, la variation de la densité ρ est extrêmement faible, si bien que l'on peut supposer ρ constante. Avec cette hypothèse, les équations vont se simplifier, la conservation de la masse (1.3) conduit alors à la relation d'*incompressibilité* :

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T).$$

En injectant cette relation dans l'équation (1.4) dont la loi de comportement est celle pour un fluide newtonien et en utilisant l'équation de conservation de la masse, nous obtiendrons les équations de Navier-Stokes incompressible pour un fluide newtonien :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \mu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Les inconnues de ce système sont la vitesse et la pression. Afin de résoudre ce système, nous le compléterons par une condition initiale

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (1.9)$$

et une condition au bord de type Dirichlet ou Navier.

Le premier résultat concernant l'existence globale d'une solution faible est due au J. LERAY en 1939 [76] qui a démontré que pour tout champs de vitesse initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ à divergence nulle, le système de Navier-Stokes incompressible (1.8)-(1.9) possède de solutions faibles globales d'énergie finie dont l'unicité est bien établie en dimension deux d'espace mais reste un problème ouvert en dimension 3. Le lecteur pourra consulter les ouvrages [108], [82], [13] pour une étude supplémentaire du ce modèle.

A ce propos, dans notre premier travail sur les équations des lacs visqueux, le modèle mathématique que nous étudierons s'obtient à partir des équations de Navier-Stokes incompressibles (1.8) en dimension 3. Tout d'abord, une hypothèse "d'eaux peu profondes" permet d'obtenir un modèle en 2d appelé "shallow water" ou "Saint Venant". Après, les équations des lacs visqueux s'obtiennent à partir du modèle de shallow water visqueux en faisant tendre le nombre de Froude vers zéro. Nous explicitons ce passage en détails dans la section 3.

Pour un fluide non-newtonien, en particulier le fluide de Bingham, nous obtiendrons les équations suivantes dans $\Omega \times (0, T)$

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \operatorname{div} \sigma' + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

avec

$$\sigma' = \begin{cases} 2\mu D(u) + \tau_0 \frac{D(u)}{|D(u)|} & \text{si } |D(u)| \neq 0, \\ \sigma' \leq \tau_0 & \text{si } |D(u)| = 0, \end{cases}$$

avec τ_0 est le seuil de plasticité appartient à $\mathbb{R}^+$.

Le premier résultat d'existence globale de "solutions faibles"² est due à G. DUVAUT et J. LIONS [44]. La régularité de la solution est améliorée par M. FUCHS et G. SEREGIN dans [53] et J. U. KIM dans [66], [67]).

Remarque. Comme pour les équations des lacs visqueux, nous pouvons considérer un système d'équations où la loi de comportement newtonien est remplacée par celle de Bingham. On peut alors se poser la question de l'existence globale de solution faible du système suivant qui représente l'écoulement du fluide de type Bingham dans un bassin de profondeur b

$$\begin{cases} \partial_t(bu) + \operatorname{div}(bu \otimes u) - \operatorname{div} \sigma' + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div}(bu) = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

avec

$$\sigma' = \begin{cases} 2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I} + b \frac{D(u)}{|D(u)|} & \text{si } |D(u)| \neq 0, \\ |\sigma'| \leq \tau_0, & \text{si } |D(u)| = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

2. La définition de solutions faibles dans [44] repose sur une réécriture du système sous forme d'une inéquation variationnelle. Cependant, il n'as pas d'équivalence entre la solution de l'inequation variationnelle et le problème original (voir Chapitre 5).

avec τ_0 une constante positive qui représente le seuil de plasticité. Évidemment, lorsque $b = 1$, nous obtenons le système (1.10). Notons que l'existence globale d'une solution faible de ce système peut être établit en suivant la même démarche introduite pour le modèle des lacs visqueux. Notons que l'établissement d'une solution régulière du problème nécessite l'étude de la comportement de la solution dans les deux zones ; zones liquide ($|D(u)| \neq 0$) et zones plastiques ($|D(u)| = 0$). Ce qui s'agit normalement d'un problème difficile surtout que ce analyse ici besoin des résultats sur la régularité elliptique dégénérée (penser par exemple au problème de Stokes associé).

Écoulement compressible. Contrairement au cas incompressible, la pression est ici une variable thermodynamique qu'il convient de relier aux autres variables thermodynamiques que sont la température T et la masse volumique ρ . On complète donc le système d'équations par une lois d'état

$$p = f(\rho, T),$$

qui expriment la pression en fonction de la masse volumique et de la température. Les deux principales lois considérées sont les suivantes.

Gaz parfait à chaleur spécifique constant en évolution isotherme :

$$p = a\rho \quad (a \text{ constante}).$$

Évolution adiabatique : alors

$$p = a\rho^\gamma \quad (a, \gamma \text{ constantes}).$$

Nous obtiendrons alors les équations suivantes pour un fluide newtonien en évolution adiabatique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\mu D(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathbb{I}) + a \nabla \rho^\gamma = f. \end{cases} \quad (1.13)$$

Les inconnues de ce système sont la densité et la vitesse.

La première approche rigoureuse de ce problème dans toute sa généralité est due à P.-L. LIONS en l'année 1993. Dans ses travaux, LIONS a présenté une théorie complète permettant d'obtenir de résultat d'existence de solutions faibles globales en temps en dimension d'espace supérieure où égal à 2, et ce pour des données initiales générales. Une amélioration des résultats de LIONS est faite par E. FEIREISL concernant les puissances γ . Pour le cas où les coefficients de viscosité dépendent de la densité, D. BRESCH et B. DESJARDINS démontrent que sous certain condition algébrique liant les coefficients de viscosités λ et μ ,

$$\lambda(\rho) = 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)),$$

on peut démontrer que le système (1.13) admet une solution faible globale en temps. Pour plus de details nous renvoyons le lecteur à l'article [111].

En revanche, la question de l'existence globale de la solution faible pour le modèle de Bingham compressible reste ouvert à part en dimension 1 où I. V. BASOV et V. V. SCHELUKHIN ([9]) ont démontré l'existence globale d'une solution faible dans le cas des coefficients de viscosité constante.

Remarque. Un travail qui est maintenant en cours avec A. MARLY à l'ENS Lyon consiste à démontrer l'existence locale d'une solution forte pour le modèle de Bingham compressible. Nous appuierons dans notre étude sur le travail de CHOE and KIM dans [35] où les auteurs montrent que le modèle (1.13) pour des coefficients de viscosité constantes admet une solution forte locale en temps. Une des majeurs difficultés est d'obtenir un résultat de régularité prenant en compte les zones plastiques et liquides qui pourrait être du type Φu régulier où Φ encode les zones plastiques si $\Phi = 0$, et les zones liquides ailleurs.

Écoulement à faible nombre de Mach. De même que la prise en compte des effets visqueux dépend du nombre de Reynolds, la prise en compte de la compressibilité dépend de la valeur d'un nombre adimensionnel : on définit le nombre de Mach par :

$$\text{Ma} = \frac{v}{c},$$

où v est un ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement et c la vitesse du son dans le fluide. En général, on pourra raisonnablement considérer qu'un écoulement est incompressible pour

$$\text{Ma} < 0.3.$$

La notion de faible nombre de Mach apparaît lorsqu'on s'intéresse aux écoulements compressibles à faible vitesse. Les écoulements à faible nombre de Mach interviennent dans des phénomènes physiques divers, tels que la circulation océanique, les fonctions corporelles de respiration et de parole, la convection naturelle, l'aéroacoustique et dans les processus industriels tels que la combustion, où de grandes variations de masse volumique, dues à la chaleur produite par les réactions chimiques, sont présentes. Même en écoulement hypersonique, il y a des régions au voisinage des points de stagnation et des surfaces d'adhérence dans lesquelles la vitesse est nulle. Par conséquent, l'écoulement séparé est souvent caractérisé par de faibles nombres de Mach.

A ce stade, dans notre étude concernant le modèle de ghost effect, on s'intéresse à l'étude de l'écoulement de gaz à faible nombre de Mach. Le modèle mathématique vient des équations de Navier-Stokes compressible qui contient des corrections dans le terme dispersif. Ces corrections s'obtiennent à partir de la théorie cinétique des gaz qui nous permet de mieux décrire le mouvement de gaz en dehors de l'état l'équilibre.

1.2.3 Description cinétique

Notons que nos travaux dans ce document ne traitent pas des équations cinétiques. Le lecteur non intéressé par cette partie peut tout à fait reprendre la lecture de section 1.3.

Le but de cette partie dans cette thèse est de présenter au lecteur les idées principales conduisant à l'obtention des modèles macroscopiques à partir des modèles cinétiques pour bien comprendre l'origine du modèle "ghost effect". Nous signalons que ce passage du niveau cinétique vers niveau macroscopique nommé *limite hydrodynamique* est justifié seulement dans des cas particuliers. Cependant dans certains régimes où l'état de gaz est loin de l'équilibre, la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann n'aboutit pas aux équations de Navier-Stokes. Des termes inattendus apparaissent donc dans les équations, d'où le nom "ghost effect" introduit par SONE [106]. Alors dans ce paragraphe (puisque'il s'agit d'une petite revue sur la théorie cinétique des gaz qui peut ne pas intéresser le lecteur), nous considérons seulement des régimes où l'étude de limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann aboutit aux équations de Navier-Stokes. Nous parlons des différentes méthodes qui permettent de construire les équations macroscopiques à partir des équations cinétiques. En revanche dans la section 4, nous insisterons sur le phénomène de ghost effect.

En physique statistique, un gaz est décrit par un nuage de particules obéissant à l'équation de Boltzmann. Une forme adimensionnée de cette équation est donnée par (voir [34], [33])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f = \frac{1}{\text{Kn}} Q(f, f), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v \in \mathbb{R}^N, \quad (1.14)$$

où $f(t, x, v)$ est la fonction de distribution qui dépend du temps $t \geq 0$, de la position des particules $x \in \mathbb{R}^d$, et de leur vitesse $v \in \mathbb{R}^d$. Le paramètre Kn est le nombre de Knudsen qui mesure le degré de raréfaction du gaz et qui est proportionnel au libre parcours moyen. On peut le voir aussi comme l'inverse du nombre moyen de collisions qu'une même particule subit en une unité de temps macroscopique. Finalement, l'opérateur de collision Q est un opérateur non-linéaire décrit l'effet des collisions entre particules. En général, Q agit seulement sur la dépendance de la fonction f en la variable de vitesse v . L'opérateur de transport $v \cdot \nabla f$ traduit la tendance des particules à se déplacer en ligne droite.

Lorsque le nombre de collisions devient très grand, le libre parcours moyen (la distance parcourue par une particule entre deux collisions successives) devient petit par rapport à une longueur caractéristique du domaine physique considéré. Par conséquence, le gaz sera dans un régime appelé fluide et alors une description macroscopique de son état sera donc plus adaptée. Les modèles typiques sont les équations d'Euler compressible et Navier-Stokes compressible qui décrivent l'évolution des quantités moyennes caractérisant le système de particules, à savoir la densité de masse locale, la quantité de mouvement et l'énergie du gaz. Lorsque l'état de gaz est proche de l'équilibre, ces modèles macroscopiques sont souvent suffisants pour comprendre son dynamique. L'obtention formelle des modèles macroscopiques (Euler, Navier-Stokes) à partir des équations cinétiques est basée sur les développements d'Hilbert ou de Chapman-Enskog (voir [34]).

A partir de cette distribution f , on peut reconstruire les variables macroscopiques du système de particules (c.à.d. les grandeurs thermodynamiques que l'on peut effectivement

mesurer) en intégrant cette densité sur l'espace des vitesses contre des fonctions tests. On définit ainsi la *densité locale* $\rho(t, x)$, la *vitesse macroscopique locale* $u(t, x)$, et la *température locale* $T(t, x)$ par les formules

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) dv, \quad u(t, x) = \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^N} v f(t, x, v) dv, \quad (1.15)$$

$$T(t, x) = \frac{1}{N\rho} \int_{\mathbb{R}^N} |u - v|^2 f(t, x, v) dv. \quad (1.16)$$

Nous utilisons également l'*énergie cinétique locale* $\mathcal{E}(t, x)$

$$\mathcal{E}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 f(t, x, v) dv. \quad (1.17)$$

Remarque. Il existe des résultats rigoureux qui permettent d'établir l'équation de Boltzmann à partir de la description microscopique. Ce passage est connu sous le nom de limite *Boltzmann-Grad* a été établit par LANFORD [74].

Lois de conservations. Quelle que soit la forme de l'opérateur de collision, le processus d'interaction entre particules doit satisfaire au niveau microscopique une propriété physique importante, à savoir la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. Plus précisément, tenant compte que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(f, f) dv = 0 \quad \int_{\mathbb{R}^N} Q(f, f) v dx = 0 \quad \int_{\mathbb{R}^N} Q(f, f) |v|^2 dv = 0,$$

nous pouvons formellement établir à partir de l'équation (1.14) la conservation de la masse, la continuité de mouvement et l'énergie cinétique. En effet, multipliant l'équation de Boltzmann (1.14) par le vecteur des invariants de collision $m(v)$ définit par

$$m(v) = \left(1, v, \frac{|v|^2}{2}\right)^t,$$

nous déduisons l'équation suivante

$$\partial_t \langle m f \rangle + \operatorname{div} \langle v m f \rangle = 0,$$

où le symbole $\langle \xi \rangle$ pour une fonction intégrable ξ désigne

$$\langle \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \xi dv.$$

Par suite, on retrouve les lois de conservations locales données par les équations suivantes

$$\partial_t \langle f \rangle + \operatorname{div} \langle v f \rangle = 0, \quad (1.18)$$

$$\partial_t \langle v f \rangle + \operatorname{div} \langle v \otimes v f \rangle = 0, \quad (1.19)$$

$$\partial_t \langle \frac{1}{2} |v|^2 f \rangle + \operatorname{div} \langle \frac{1}{2} |v|^2 v f \rangle = 0. \quad (1.20)$$

Pour obtenir les lois de conservations locales en fonctions des grandeurs macroscopiques $\rho, u, \mathcal{E}$, on utilise les formules (1.15)-(1.16) et (1.17) avec les équations (1.18)-(1.19)-(1.20). Nous concluons (pour les calculs voir [11])

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + p \mathbb{I}) = 0,$$

$$\partial_t e + \operatorname{div}(eu + pu + q) = 0,$$

avec e est l'énergie totale du système définie par

$$e = \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + \mathcal{E} \right),$$

et p_{ij} représente le tenseur des efforts :

$$p_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - u_i)(v_j - u_j) f \, dv,$$

et q_i représente le flux de chaleur :

$$q_i = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - u_i) |v - u|^2 f \, dv.$$

Comme les équations de bilans de quantité de mouvement et d'énergie interne font intervenir le tenseur p et le flux de chaleur par conduction q qui sont des quantités dépendant de la fonction de distribution f , dont le calcul nécessite d'en connaître l'expression. Il nous faut donc déterminer une forme pertinente de f pour en déduire p et q et ainsi donner aux équations de bilan précédentes un sens physique, celui des équations hydrodynamiques. Ce problème fait l'objet des travaux d'HILBERT, CHAPMAN et ENSKOJ que nous voulons rappeler d'une manière abrégée dans la section suivante puisqu'il s'agit d'un sujet assez difficile et large.

Remarque. Notons que le problème de justification du passage des équations de Newton à l'équation de Boltzmann, puis de l'équation de Boltzmann aux diverses équations de l'hydrodynamique est un des problèmes proposées par Hilbert.

1.2.4 Limite hydrodynamique

Nous savons qu'une description cinétique est beaucoup plus complexe qu'une description macroscopique, et donc nous avons intérêt à passer à des modèles dits macroscopiques. Ce passage appelé *limite hydrodynamique* est basé sur l'hypothèse d'*équilibre thermodynamique local*.

Reprenons l'équation de Boltzmann en sa forme non-dimensionnel

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f = \frac{1}{\operatorname{Kn}} Q(f, f), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v \in \mathbb{R}^N. \quad (1.21)$$

Les modèles fluides de type Euler compressible ou Navier-Stokes compressible peuvent être obtenus à partir de l'équation de Boltzmann (1.21) en utilisant la méthode des moments, en combinaison avec des méthodes de perturbations telles que les développements de Hilbert ou de Chapman-Enskog. La méthode de Hilbert consiste à chercher une solution formelle de la famille d'équations de Boltzmann (1.21), à Kn variable, sous la forme

$$f(t, x, v; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(t, x, v) \quad (\varepsilon = Kn).$$

En identifiant les coefficients des différentes puissances de ε , on obtient alors des systèmes d'équations pour $f_0, f_0 + \varepsilon f_1, f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2$, etc. La méthode de Chapman-Enskog est une variante où les f_n sont des fonctions des champs hydrodynamiques $\rho(t, x, \varepsilon), u(t, x, \varepsilon), T(t, x, \varepsilon)$ associés à f_ε et u . On s'attend donc à ce que les moments d'une solution de l'équation de Boltzmann soient proches d'une solution des équations d'Euler compressibles à l'ordre $O(\varepsilon)$, et d'une solution des équations de Navier-Stokes compressibles faiblement visqueuses à l'ordre $O(\varepsilon^2)$. Cependant, il faut remarquer que si l'on pousse le développement au-delà de l'ordre 2, on obtient des équations (Burnett, "super-Burnett", ...) dont la validité physique est très douteuse. Pour plus de détails, voir [33], [113].

Les régimes incompressibles s'obtiennent en faisant tendre le nombre de Mach vers 0 simultanément au nombre de Knudsen. Ainsi, le scaling

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^q} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon),$$

mène formellement, lorsque f_ε est une fluctuation autour d'un équilibre global et $\varepsilon \rightarrow 0$, aux équations d'Euler incompressibles si $q > 1$ et aux équations de Navier-Stokes incompressibles si $q = 1$. Pour plus de détails, voir [5].

Cependant, ces équations d'Euler et de Navier-Stokes ne sont valables que pour de petites déviations autour d'un équilibre et ne le sont plus dans un régime de transition où les grandeurs macroscopiques deviennent comparables au libre parcours moyen, c'est-à-dire lorsque ε est de l'ordre de 1.

Pour décrire des gaz dont l'état est alors plus éloigné d'un équilibre, LEVERMORE dans [77] a proposé une nouvelle description en utilisant une méthode qui consiste à décrire la distribution f en l'approchant à l'aide de minima d'entropie sous contraintes de moments, mais en faisant intervenir un plus grand nombre de moments afin d'obtenir une structure plus détaillée de la distribution, c'est-à-dire en introduisant de nouvelles grandeurs macroscopiques en plus de ρ, u, T .

En prenant les moments successifs de l'équation de Boltzmann par rapport à la suite $(1, v, v^2, \dots)$, on obtient un système infini d'équations hydrodynamiques couplées de proche en proche, ce système étant formellement équivalent à l'équation de Boltzmann. Pratiquement, on ne garde qu'un nombre fini M d'équations en prenant les moments par

rapport au vecteur $m(v) = (1, v, \dots, v^{M-1})$, mais le système obtenu

$$\partial_t \int_{\Omega} m f dv + \partial_x \int_{\Omega} v m f dv = \int_{\Omega} m Q(f, f) dv, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R},$$

est indéterminé et on cherche à fermer ce système en exprimant les vecteurs

$$\int_{\Omega} m f dv, \quad \int_{\Omega} v m f dv, \quad \int_{\Omega} m Q(f, f) dv,$$

à l'aide d'une fonction de M variables, traditionnellement le vecteur moment $\rho = \rho(t, x)$ lui-même défini par

$$\rho = \int_{\Omega} m f dv.$$

Mais cette fermeture doit être faite de telle façon que le système correspondant en ρ , qu'on écrira sous la forme d'un terme $G(\rho)$ et le terme de collision sous la forme $r(\rho)$:

$$\partial_t \rho + \nabla_x G(\rho) = r(\rho), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R},$$

soit d'une part bien posé mathématiquement et d'autre part fournisse des moments ρ qui soient réalisables par une densité non négative admissible physiquement. Pour plus de détails, voir [77].

Remarque. Bien sûr, le passage de niveau cinétique vers niveau macroscopique permet de perdre une grande quantité d'information. Pour cette raison, il est donc important de savoir comment on peut réduire ce perte. A titre d'exemple, l'équation de Boltzmann ne peut pas atteindre qu'une partie des équations hydrodynamiques, i.e. avec loi d'état des gaz parfaits. Cependant, ce passage demeure extrêmement intéressant et difficile.

1.3 Un modèle asymptotique pour les lacs

La circulation des masses d'air en météorologie ou la circulation des eaux en océanographie et en limnologie sont décrites de manière générale par les équations de Navier-Stokes. Pour prédire de manière satisfaisante le mouvement de ces fluides, les météorologues et les océanographes utilisent depuis longtemps des modèles asymptotiques pour les équations de Navier-Stokes (voir par exemple [94]). Ces modèles sont tous basés sur l'observation fondamentale suivante : **Les dimensions horizontales du bassin à étudier sont beaucoup plus importantes que ses dimensions verticales.**

Dans tous les cas on remarque que le quotient

$$\delta = \text{Hauteur caractéristique} / \text{Longueur caractéristique}$$

est très petit. Tous les modèles asymptotiques actuels pour étudier le mouvement d'un fluide dans un tel contexte tiennent compte du fait que δ est très petit. Le plus simple est l'approximation hydrostatique des équations de Navier-Stokes qui sert à calculer le

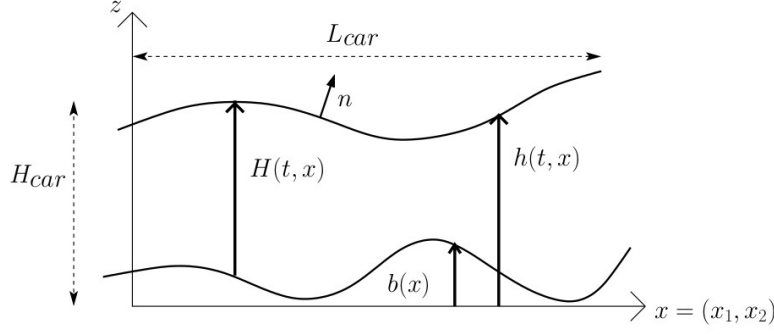


FIGURE 1.2 –

transport des sédiments marrins (voir par exemple [12]). Cette méthode utilise de manière essentielle un modèle de viscosité turbulente pour le liquide, basé sur l'observation que la différence entre les échelles horizontale et verticale induit une turbulence différente dans les deux directions (voir [94]).

Dans cette partie de ce document concernant les modèles d'écoulement à surface libre dans lesquels les variations de la hauteur du domaine étaient résolues explicitement par une équation aux dérivées partielles. On va regarder une autre classe de modèles dits à toit rigide (ou surface rigide ou encore rigid lid en anglais). Il s'agit en fait de modèles dans lesquels on ne prend pas en compte les variations de la hauteur d'eau en fonction du temps mais par contre on permet à la hauteur d'eau de s'annuler sur le bord ce qui rend nos équations dégénérées. Le cadre de travail nécessite alors l'introduction d'espaces à poids. Nous montrerons que l'utilisation des espaces de type Muckenhoupt permet de démontrer un résultat qui généralise au cas dégénéré les résultats connus sur Navier-Stokes incompressible. Nos résultats autour ce modèle généralisent des résultats existant en supposant que la hauteur d'eau ne s'annule jamais (voir par exemple [41], [79]) et étendent également les travaux connus sur le modèle des lacs non visqueux (voir [70], [24]).

Pourquoi les espaces à poids ? Pour répondre à cette question et montrer l'importance de ce genre d'espaces dans la résolution des équations à dérivées partielles à coefficients dégénérés, nous donnerons dans la suite des exemples simples illustrant quelques difficultés qui peuvent apparaître lors de l'étude de ces équations.

Exemple 1. Considérons le problème non-homogène couplé avec une condition du type Dirichlet dans un domaine régulier Ω :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

Si nous voulons résoudre ce problème en utilisant la théorie des solutions faibles dans les espaces de Sobolev classiques, soit $W^{1,2}(\Omega)$ par exemple ici, nous devons satisfaire les deux conditions importantes suivantes :

(i) g est la trace d'une fonction $\tilde{g} \in W^{1,2}(\Omega)$ sur le bord, c.à.d.,

$$g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega) \quad (1.23)$$

(ii) f est une fonction linéaire continue sur l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$, c.à.d.,

$$f \in W^{-1,2}(\Omega). \quad (1.24)$$

En pratique, nous sommes confrontés naturellement à de tels problèmes où une des conditions (1.23), (1.24) n'est pas satisfaite (parfois les deux aussi!). Par exemple, il peut arriver que la fonction g a une singularité en un point x_0 , c.à.d.,

$$g \notin L^2(\partial\Omega),$$

et donc la condition (1.23) n'est plus satisfaite. (Cette situation peut avoir lieu dans des problèmes de mécanique qui ont une grande charge isolé sur $\partial\Omega$, voir [69]). Plus généralement, dans certains situations, la solution n'appartient pas aux espaces de Sobolev classiques mais à des espaces tronqué par un poids convenables (voir Exemple 2). Dans ce cas, on ne peut appliquer la théorie classique des solution faibles avec les espaces de Sobolev. Néanmoins, nous pouvons par exemple tenter de chercher un poids³ convenable w tel que g est la trace d'une fonction $\tilde{g} \in W_w^{1,2}(\Omega)$ et puis savoir si la théorie de la solution faible peut être étendu aux espaces de Sobolev à poids $W_w^{1,2}(\Omega)$ nous permettent de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (1.22).

Le lecteur est renvoyé également au chapitre 2 (Section Appendix) pour une courte introduction sur les espaces de Sobolev à poids et plus d'exemples.

Exemple 2. Soit Ω un secteur de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$, engendré par un cône dont le sommet est à l'origine 0 (voir Figure 1.3). On dénote par M l'origine 0. Alors pour tout $x \in \Omega$, on note :

$$d_M := \text{dist}(x, M) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}.$$

On définit la fonction u comme suit

$$u(x) = |x|^{-N/p} \quad \text{pour } x \in \Omega.$$

Comme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_{\Omega} |x|^{-N} dx = \text{const} \int_0^1 r^{-1} dr = \infty,$$

alors nous concluons que $u \notin L^p(\Omega)$. En revanche, $u \in L^p(\Omega, d_M^\varepsilon)$ car

$$\|u\|_{L^p(\Omega, d_M^\varepsilon)}^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p |x|^\varepsilon dx = \int_{\Omega} |x|^{-N+\varepsilon} dx = \text{const} \int_0^1 r^{-1+\varepsilon} dr < \infty.$$

3. Voir le chapitre 2 (section Appendix) pour une définition précise de l'espace de Sobolev à poids.

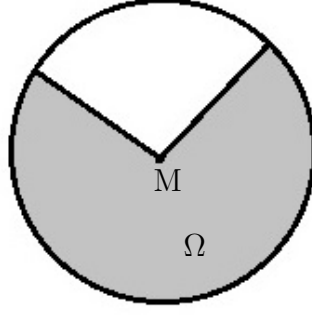


FIGURE 1.3 –

En conclusion, on peut trouver souvent des fonctions qui peuvent avoir des singularités (à vrai dire une régularité faible, c.à.d. pas dans les espaces de Sobolev classiques mais dans des espaces à poids par exemple) en des points déterminés ou même sur tout le domaine mais il existe un poids convenable qui peut tuer cette singularité et qui nous permet dans beaucoup des cas de résoudre des problèmes dans des espaces de Sobolev appropriés là où la solution prévue de ce système à la même problématique.

Exemple 3. Considérons le problème elliptique suivant (qui peut être vue comme le problème de Stokes associé aux équations des lacs où w est la hauteur d'eau)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(wD(u)) = wf & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.25)$$

Afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram pour résoudre ce problème, on pourrait passer à la formulation faible du système : on définit la forme bilinéaire $a(u, v) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} D(u) : D(v) w \, dx, \quad (1.26)$$

et la forme linéaire $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v w \, dx \quad (1.27)$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors pour appliquer le théorème de Lax-Milgram, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites :

- $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, i.e.

$$\exists c > 0, \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \quad |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|.$$

- a est coercive, $\exists \alpha > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega), a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$.
- $L(\cdot)$ est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$.

Vérifier ces hypothèses nécessitent de supposer que

$$0 < c_1 \leq w(x) \leq c_2 < \infty,$$

avec c_1, c_2 sont constantes, ce qui est en général les hypothèses que l'on trouve dans beaucoup d'articles. Si on désire une généralisation avec un poids pourrait s'annuler, il faut alors définir des espaces plus généraux. Par exemple, définissant "formellement" l'espace⁴

$$W_{w,0}^{1,2}(\Omega) = \left\{ u, \int_{\Omega} |u|^2 w \, dx, \int_{\Omega} |\nabla u|^2 w \, dx < \infty \text{ avec } u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

et prenons comme une "norme" (supposons pour l'instant qu'elle définit une norme) la fonction suivante :

$$\|u\|_{W_{w,0}^{1,2}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 w \, dx, \quad (1.28)$$

alors on peut facilement démontrer dans ce cas que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, i.e.

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 w \, dx \geq (=) \|u\|_{W_{w,0}^{1,2}(\Omega)}^2$$

et aussi continue, i.e.,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 w \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 w \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{W_{w,0}^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_{w,0}^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aisément, on peut démontrer aussi que l'opérateur linéaire L est continue. Finalement, pour appliquer le théorème classique de Lax-Milgram, il reste à démontrer que l'espace $W_{w,0}^{1,2}(\Omega)$ muni de la norme définit en (1.28) est bien un espace de Hilbert et que la trace de u sur le bord est bien définie (on ne veut pas entrer dans les détails ici). Bien sûr, les choses ne sont pas aussi évidentes qu'on peut le penser (ou à vrai dire comme j'avais pensé la première fois!), en plus il faudrait connaître aussi les conditions convenables qu'il faut imposer sur le poids w pour garder les propriétés d'inégalités fonctionnelles classiques, les injections de Sobolev, les théorèmes de compacité... Parmi les types de poids qui sont les plus utilisés actuellement, on trouve la classe des poids de *Muckenhoupt* notée $\mathcal{A}_q$. Dans son travail, B. MUCKENHOUT [89] introduit une classe des poids qui portent son nom aujourd'hui de telle manière que l'opérateur de Hardy-Littlewood est borné de $L_w^q(\mathbb{R}^2)$ dans $L_w^q(\mathbb{R}^2)$ ($1 < q < \infty$), c.à.d.

$$M : L_w^q(\Omega) \rightarrow L_w^q(\Omega),$$

$$(Mf)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, dy,$$

4. On suppose ici que pour toute fonction $u \in W_{w,0}^{1,2}(\Omega)$, la trace de u notée est définie.

est bornée si et seulement si w à la classe $\mathcal{A}_q$, i.e.,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-1/q-1} \, dx \right)^{q-1} < \infty,$$

pour $0 \leq w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Ici, on note par $B_r(x)$ la boule dans $\mathbb{R}^2$ de centre x et de rayon $r > 0$ et par $Q := \Pi_{j=1}^2 I_j$ avec I_i est l'intervalle $I_j = (x_j - r, x_j + r) \subset \mathbb{R}, j = 1, 2$ pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et pour certain $r > 0$. Nous verrons plus loin comment cette condition apparaît naturellement dès qu'on veut démontrer des propriétés élémentaires, par exemple l'inégalité de Poincaré. Notamment, les travaux de Muckenhoupt sont le point de départ de la théorie des espaces de Sobolev à poids de type Muckenhoupt. Sous cette famille de poids, une large littérature concernant l'analyse des espaces de Sobolev à poids montrent que ce genre d'espaces admettent des propriétés semblables aux espaces de Sobolev classiques. Nous reviendrons dans le chapitre 2 sur les détails concernant ce genre d'espaces. Donc pour finir, une fois que nous avons montré que l'espace $W_{b,0}^{1,2}(\Omega)$ muni de sa norme (1.28) est bien un espace de Hilbert, nous pouvons conclure en utilisant le théorème de Lax-Milgram l'existence d'une solution $u \in W_{b,0}^{1,2}(\Omega)$ du problème (1.25).

Importance des poids de Muckenhoupt. La condition de Muckenhoupt apparaît fortement si nous voulons établir une inégalité de Poincaré à poids. En effet, prenons l'espace $\Omega =]0, 1[$ pour simplifier les choses et une fonction u (on la prend régulière pour l'instant) définie sur Ω tel que la trace de u sur le bord $\partial\Omega$ est zéro et essayons de démontrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 |u|^q w \, dx \leq \int_0^1 |u'|^q w \, dx.$$

Comme $u|_{\partial\Omega} = 0$, alors nous pouvons écrire

$$u(x) = \int_0^x u'(y) \, dy \quad \text{et donc} \quad |u|^q w = w \left| \int_0^x u'(y) \, dy \right|^q.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u|^q w \, dx &= \int_0^1 \left(w \left| \int_0^x u'(y) \, dy \right|^q \right) dx \\ &\leq C \int_0^1 \left(w \left| \int_0^1 |u'(y)| \, dy \right|^q \right) dx \\ &\leq C \left(\int_0^1 w \, dx \right) \left| \int_0^1 |u'(y)| w^{1/q} w^{-1/q} \, dy \right|^q \\ &\leq C \left(\int_0^1 w \, dx \right) \left(\int_0^1 w^{-1/q-1} \, dx \right)^{q-1} \left(\int_0^1 |u'(y)|^q w \, dx \right). \end{aligned}$$

Nous constatons donc que pour finir la démonstration de l'inégalité, il suffit que

$$\left(\int_0^1 w \, dx \right) \left(\int_0^1 w^{-1/q-1} \, dx \right)^{q-1} \leq c$$

qui est équivalent à prendre $w \in \mathcal{A}_q$.

1.3.1 Le modèle de Saint-Venant

Cette partie est basée sur la dynamique des écoulements peu profonds de fluides incompressibles newtoniens et donc autour d'étude mathématique des modèles de type Saint-Venant visqueux qui s'apparentent aux équations de Navier-Stokes de type compressibles barotropes avec viscosités non constantes. Une fois adimensionalisé, plusieurs nombres sans dimension apparaissent comme le nombre de Reynolds, le nombre de Rossby et le nombre de Froude⁵. Les différents ordres possibles de ces paramètres permettent alors différentes asymptotiques. On retrouve par exemple les équations quasi-géostrophiques, les équations des lacs.

Les équations de Saint-Venant, publiées en 1871 (CRAS) sont d'une grande importance en hydraulique maritime et fluviale. Elles régissent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes (équations d'ondes longues) d'où leur appellation anglaise : shallow water equations. On suppose que les longueurs d'ondes sont grandes par rapport à la profondeur : $\delta = H/L$ est très inférieur à 1 où H est la hauteur caractéristique et L la longueur caractéristique donc on ne s'intéresse pas aux phénomènes avec de la houle. Si δ tend vers 0, alors les équations de Navier Stokes 3D donnent les équations de Prandtl, équations géostrophiques.

Le modèle mathématique de Saint-Venant à deux dimensions d'espace (2D) dans le plan horizontal découle de l'intégration verticale de Navier-Stokes incompressible homogène à trois dimensions d'espace (3D) ([95]). Les équations de Saint-Venant visqueuses peuvent s'écrire dans $\Omega \times [0, T]$

$$\begin{cases} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) = 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + A_H(u) + \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} H \nabla H = Hf, \end{cases} \quad (1.29)$$

La première équation est la conservation de la hauteur où u est la vitesse de l'eau, $H \in \mathbb{R}^+$ est la hauteur d'eau à la surface libre et Fr est le nombre de Froude. Pour le tenseur des contraintes A_H , on aura selon le livre de Lions [83] (page 251) plusieurs possibilités :

- $A_H(u) = -\mu H \Delta u$
- $A_H(u) = -\mu \Delta(Hu)$
- $A_H(u) = -\mu \operatorname{div}(H \nabla u)$

Du point de vue numérique, le système (1.29) a été étudié avec ces trois choix de terme visqueux par BERNARDI et PIRONNEAU [36] où les auteurs s'intéressent à l'existence de solutions et à la convergence d'algorithmes. Ils donnent aussi une dérivation du modèle dans le cas où $A_H(u) = -\mu H \Delta u$. Du point de vue théorique, dans le cas où $A_H(u) = -\mu H \Delta u$ et H (la hauteur d'eau) ne s'annule pas, l'existence globale d'une solution faible de système (1.29) est établit par P. ORENGA dans [93]. Pour les deux autres cas, i.e.

5. Le nombre de Froude est un nombre sans dimension qui caractérise l'importance relative des forces d'inertie et de gravité

les cas où $A_h(u) = -\Delta(Hu)$ et $A_H(u) = -\operatorname{div}(H\nabla u)$ (H peut s'annuler), l'histoire est différente et n'entre donc pas dans la théorie de P.-L. LIONS introduit pour les fluides compressibles avec terme de dissipation de la forme

$$-\mu\Delta(\cdot) - (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}(\cdot),$$

où λ et μ sont des constantes de viscosité.

Le premier résultat d'existence globale de solutions faibles pour le modèle de Saint-Venant visqueux avec $A_H(u) = -2\operatorname{div}(HD(u))$ (qui est consistant d'un point de vue énergétique) dans le tore $\Omega = T^2$ est due à D. BRESCH et B. DESJARDINS dans [15], [16]. Notons que le résultat de BRESCH et DESJARDINS est basé sur une nouvelle entropie mathématique, nommée BD entropie qui fait apparaître un gain de régularité sur la fonction h ce qui est totalement nouveau et permet par la même occasion de passer facilement à la limite dans le terme de pression (alors que cela constituait la difficulté essentielle pour le système de Navier-Stokes à coefficients constants).

Cependant selon le choix des coefficients de viscosité, une nouvelle difficulté entre en jeu, lorsque du vide apparaît effectivement la vitesse u ne peut être définie lorsque H s'annule. On perd alors des renseignements sur ∇u . Cette difficulté rend alors délicat le passage à la compacité sur le terme $\operatorname{div}(Hu \otimes u)$ l'on ne peut utiliser les résultats classiques de type Lions. Pour cela, BRESCH et DESJARDINS ajoutent à l'équation de conservation de moment (1.29)₂ des termes de traînée de la forme

$$r_0 u + r_1 H|u|u,$$

avec r_0 et r_1 sont deux constantes positives afin de gagner une intégrabilité sur la vitesse u qui permet de passer à la limite dans le terme convectif.

Il est également à noter les travaux de MELLET et VASSEUR ([88]) qui montrent comment se dispenser des termes de traînée en employant le multiplicateur $(1 + \ln(1 + |u|^2))u$ pour contrôler les termes résiduels et la nouvelle entropie mathématique découverte par BRESCH et DESJARDINS. Le résultat de MELLET, VASSEUR est un résultat de stabilité. Pour garantir un résultat final de solutions faibles, comme dans le cas de Bresch et Desjardins il est nécessaire de réussir à construire une solutions approches $(H_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les différentes inégalités d'énergie (celle de Bresch-Desjardins et Mellet-Vasseur) et ceci est compliqué étant donné la complexité de deux inégalités d'entropie et notamment celle induite sur la vitesse u . VASSEUR et YU ont réussi récemment (2016) [111] à contourner cette difficulté par construire une solution approché qui satisfait à la fois l'estimation d'énergie de BD et l'inégalité MV et donc un résultat d'existence globale d'une solution sans terme de traînée.

Notons qu'une dérivation rigoureuse du modèle de Saint Venant visqueux à partir de modèle de 3D-Navier-Stokes incompressible a été établi récemment par F. MARCHE dans [86] conduit à un terme dissipatif de la forme

$$-2\mu\operatorname{div}(HD(u) + H\operatorname{div} u \mathbb{I}).$$

Cependant, une existence globale d'une solution pour ce système reste jusqu'à maintenant un problème ouvert puisque l'approche introduit par BRESCH, DESJARDINS est amélioré par MELLET, VASSEUR, YU ne s'applique pas avec ce choix de terme de dissipation. Le lecteur à ce stade peut voir l'article intéressant de VASSEUR, YU pour une revue sur le modèle de shallow-water visqueux.

De l'autre coté, soulignons que l'existence globale de solutions fortes a été traité dans [68], [109], [107], [114]. WANG et XU récemment (2005) travaillent dans des espaces de Sobolev d'indice $s > 2$ pour obtenir des solutions locales quel que soient les conditions initiales et globales pour des données petites. Ils utilisent la méthode d'énergie de MATSUMURA et NISHIDA.

Faible nombre de Froude. Dans cette section, nous présentons l'obtention du modèle des lacs visqueux à partir du système de Saint-Venant visqueux (1.29) avec $A_H = -2\mu \operatorname{div}(HD(u))$. Ce passage fait l'objet du travail de BRESCH, GISCLON et LIN [22]. Ils ont établi alors, mathématiquement, le lien entre des équations de Saint-Venant visqueuses et des équations des lacs visqueuses utilisées pour simuler l'écoulement de fluides dans les grands lacs. Ici nous voulons présenté ce passage d'une manière formelle et nous référons le lecteur intéressé à [22] pour plus des détails.

Reprenons maintenant le modèle de Saint-Venant visqueux en une forme non-dimensionnelle (en gardant les grandeurs caractéristiques et les nombres sans dimensions). Précisément, nous obtenons dans $\Omega \times [0, T]$, le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) = 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + H \frac{\nabla H}{Fr^2} = \frac{2}{Re} \operatorname{div}(HD(u)), \end{cases} \quad (1.30)$$

Nous considérons alors que Re est fixé et nous posons $Fr = \varepsilon$. Nous développons les variables en puissances de ε en utilisant le développement de Taylor

$$\begin{aligned} H &= H^0 + \varepsilon H^1 + \dots, \\ u &= u^0 + \varepsilon u^1 + \dots \end{aligned}$$

Nous mettons ces expressions dans les équations (1.30). Au premier ordre, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$H^0 \nabla (H^0 + b) = 0.$$

Donc $H^0 + b$ est une constante par rapport aux variables d'espaces, $H^0 + b = f(t)$.

Nous reportons cette égalité dans l'équation (1.30)₂ au premier ordre

$$f'(t) + \operatorname{div}((f - b)u^0) = 0,$$

et nous l'intégrons en espace en considérant que nous avons des conditions aux bords périodiques. Nous obtenons $f'(t) = 0$ et donc $f(t)$ est constante, donnée par la valeur initiale de $h^0 - b$. Nous pouvons supposer que cette valeur est égale à 1, et donc

$$H^0 + b = 1.$$

Nous pouvons alors remarquer que l'équation (1.30)₂ au premier ordre se simplifie en :

$$\operatorname{div}(H^0 u^0) = 0.$$

Nous écrivons ensuite l'équation (1.30)₁ au second ordre, nous obtenons

$$\partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}(H^0 u^0 \otimes u^0) = -H^0 \nabla H^1 + \frac{2}{Re} \operatorname{div}(H^0 D(u^0)). \quad (1.31)$$

En résumé, le modèle des lacs visqueux s'écrit dans $\Omega \times [0, T]$ (nous remplaçons H^0 par b juste pour simplifier la notation)

$$\begin{cases} \operatorname{div}(bu^0) = 0, \\ \partial_t(bu^0) + \operatorname{div}(bu^0 \otimes u^0) + b \nabla h^1 = \frac{2}{Re} \operatorname{div}(bD(u^0)), \end{cases} \quad (1.32)$$

Remarque : Notons que la convergence entre le modèle de Saint-Venant (1.30) et les équations des grands lacs (1.32) est établi seulement dans le cas d'un domaine périodique pour lequel la fonction h et la vitesse u sont supposées périodiques en espace. En plus, la fonction h est supposée converger vers une fonction b indépendant du temps de sorte que $b(x) > 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et ceci due au choix d'une fonction test astucieuse du type $\nabla \ln(h/b)$. L'extension d'un tel résultat au cas dégénéré est un problème mathématiques important. Des travaux restants à faire à ce stade par exemple sont multiples : considérer le cas de données mal préparées permettre au fond b de s'annuler, traiter le cas borné dans la convergence de shallow-water vers les équations des lacs.

1.3.2 Le modèle des lacs

Cette section est dédiée à l'analyse du système d'équations des lacs. En premier temps, nous donnons les résultats connues dans le cas du modèle des lacs visqueux non dégénéré. Après, nous passons au modèle non visqueux où l'existence globale d'une solution forte dans le cas dégénéré est démontré par BRESCH et MÉTIVIER dans l'année (2005) et par LACAVE, NGUYEN et PAUSADER (2012) (voir [24], [70]). Ensuite, nous signalons la difficulté due au terme visqueux et nous donnerons à la fin nos résultats.

Le modèle visqueux. Le but donc de cette section est de présenter les résultats connues sur le modèle des lacs visqueux qui s'écrivent dans $\Omega \times [0, T]$ comme suit

$$\begin{cases} \partial_t(bu^\mu) + \operatorname{div}(bu^\mu \otimes u^\mu) + \mu A_b(u^\mu) + \nabla p^\mu = 0, \\ \operatorname{div}(bu^\mu) = 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

avec $A_b(\cdot)$ est un opérateur du second degré donné par l'une des expressions suivantes :

$$A_b(u^\mu) = -2 \operatorname{div}(bD(u^\mu) + b \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I}) \quad \text{ou} \quad A_b(u^\mu) = -b \Delta u^\mu.$$

Remarquons que si b est une constante alors le système (1.33) se réduit au modèle de

Navier-Stokes incompressible où l'existence d'une solution forte globale est connue. Le lecteur à ce stade peut consulter les livres de R. TEMAM et J.-L. LIONS [108], [82] pour plus d'informations.

Quand la hauteur d'eau b varie mais loin de zéro, c.à.d.

$$0 < c_1 < b < c_2, \quad 0 < c_1, c_2 < \infty, \quad (1.34)$$

LEVERMORE *et al.* ont démontré que le système (1.33) est bien posé; i.e., pour une fonction b et une condition initiale u_0^μ suffisamment régulières, le système (1.33) possède une unique solution forte

$$u^\mu \in L^\infty(0, T; H^2) \cap C(0, T; V) \quad \partial_t u^\mu \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V),$$

où V et H sont définis par

$$V = \{v \in H_b^1(\Omega), \operatorname{div}(bv) = 0, v \cdot n = 0, x \in \Omega\},$$

$$H = \{v \in L_b^2(\Omega), v \cdot n = 0, x \in \Omega\}.$$

Notons ici l'espace $L_b^2(\Omega)$ est défini comme dans le chapitre 2, c.à.d.

$$v \in L_b^2(\Omega) \Leftrightarrow \left\{ v \text{ mesurable telle que } \int_{\Omega} |v|^2 b \, dx < \infty \right\},$$

mais comme b vérifie (1.34) alors on peut écrire

$$c_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \leq c_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et donc les deux normes $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{L_b^2(\Omega)}$ sont équivalentes. La démonstration de résultat de LEVERMORE *et al.* est basée sur les résultats connus sur le modèle de Navier-Stokes incompressible. Plus précisément, comme b ne s'annule jamais, alors en suivant la même démarche que dans les équations de Navier-Stokes incompressible, les auteurs montrent que la solution est assez régulières dès que la condition initiale est régulière. Évidemment quand b proche de zéro, on n'a pas cette équivalence et dans ce cas, nous sommes confrontés à introduire des espaces de Sobolev à poids.

Le modèle non visqueux. En négligeant le terme visqueux (c.à.d. prendre $\mu = 0$) dans le modèle des lacs visqueux, nous obtenons le modèle des lacs non visqueux qui s'écrivent sous la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div}(bu) = 0, \quad bu \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Ce système a été obtenu par C. D. LEVERMORE, M. OLIVIER et E.S. TITI ([78]) à partir du modèle 3D-Euler incompressible dans un bassin avec bathymétrie et surface libre. Il est facilement de voir que pour un fond plat, le modèle des lacs non visqueux se ramène au modèle d'Euler incompressible en dimension 2 (voir par exemple [85], [115] pour plus

des questions sur le modèle d'Euler incompressible). La procédure de la construction de la solution du système (1.35) suit l'approche de Yudovich pour Euler. En fait, en notant par $\omega_r = b^{-1} \operatorname{curl} u$ la vorticité relative, nous pouvons démontrer facilement que le système liant la vitesse-vorticité s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \omega_r + u \cdot \nabla \omega_r = 0, \\ u = K \omega_r, \\ \omega_r(0) = \omega^{in}. \end{cases} \quad (1.36)$$

avec K l'opérateur défini comme suit : pour ω_r donnée, on définit $u = K \omega_r = b^{-1} \nabla \psi$ où ψ est la solution du système :

$$\begin{cases} \omega_r = b^{-1} \operatorname{div}(b^{-1} \nabla \psi) & \text{dans } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.37)$$

suggéré par :

$$\operatorname{div}(bu) = 0 \quad bu \cdot n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Cas non dégénérée. En supposant $0 < c \leq b < \infty$, suffisamment régulier, la théorie L^p (voir par exemple [1], [2]) pour les équations elliptiques nous donne l'estimation suivante

$$\|\psi\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C p \|\operatorname{curl} u\|_{L^p(\Omega)} = C p \|b \omega_r\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.38)$$

Cette estimation permet les auteurs dans [78] de conclure l'existence et l'unicité d'une solution forte globale tout en suivant la même démarche introduite dans [115]. Tout d'abord, un terme régularisant est ajouté à l'équation comme dans le cas des équations d'Euler incompressible. On cherche alors une solution à valeurs dans des espaces de dimension infinie et on utilise un schéma de Galerkin pour l'approcher par des fonctions à valeurs dans des espaces de dimensions finie puis on utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires. Ensuite, on passe à la limite dans la solution approchée pour trouver une solution du problème initial. On utilise alors les estimations d'énergie du modèle pour parfaire la démonstration. On limite les détails dans cette partie parce qu'elle est plus simple que le cas dégénéré présenté ci-dessous.

Cas dégénérée. C'est le cas où b s'annule sur le bord $\partial\Omega$. Il est important de signaler que le problème (1.37) est maintenant de type elliptique dégénérée et la théorie introduite par S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG ne nous servira pas à chercher la régularité sur ψ pour un ω_r donné. Néanmoins, il est donc naturel de demander si sous certaines conditions à savoir sur le comportement du poids b proche du bord, est ce qu'on peut garder la régularité (1.38) pour le système (1.37) et donc prouver un théorème d'existence dans le cas dégénéré.

En 2005, D. BRESCH et G. MÉTIVIER ont considéré un domaine Ω et une fonction b définis de la manière suivante

$$\Omega = \{\varphi > 0\}, \quad \partial\Omega = \{\varphi = 0\}, \quad b = \varphi^a,$$

où φ est une fonction $C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $\nabla\varphi \neq 0$ et a est une constante positive. Dans ce cas, nous pouvons réécrire l'équation (1.37)₁ sous la forme

$$-\Delta\psi + a\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = \varphi^{a+1}\omega \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.39)$$

Notons que le cas où $a = 1$, c.à.d $b = \varphi$, est le cas le plus naturel au sens physique. L'équation (1.39) est une équation elliptique dégénérée. Les auteurs dans [24] démontrent la régularité L^p en se basant sur les estimations de Shauder de la solution de (1.39) et une analyse complexe de la fonction de Green associée qui dépend de la fonction dégénérée b . En utilisant cette estimation, les auteurs démontrent aussi l'existence et l'unicité d'une solution forte globale tout en suivant la même démarche comme que [78]. Ce résultat découle de la procédure de YUDOVICH utilisée dans la construction de la solution de modèle d'Euler. Plus précisément, après écriture d'une équation qui décrit la vorticité, on peut ajouter au dernier modèle une viscosité artificielle. Dans ce cas, l'existence d'une solution du dernier modèle est établit en utilisant les mêmes techniques que dans les équations de Navier-Stokes. Une fois la construction d'une solution est faite, on peut passer à la limite en viscosité pour récupérer une solution du problème de départ. Bien sûr, il faut après démontrer que la vitesse u existe une fois on a calculé ω . Nous soulignons que le point clé de la preuve est l'estimation (1.38).

Remarque. Notons que l'hypothèse :

$$b = \varphi^a, \quad \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \nabla\varphi \neq 0,$$

n'est pas compatible avec le cas où $b = \text{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha$, $\alpha > 1$. En fait, nous pouvons remarquer géométriquement que ce cas correspond à un cusp (la dérivée de la fonction b est zéro au bord). Nous reviendrons plus tard dans le chapitre 2 sur ce point. Ici, nous voudrions juste mettre un lien entre le comportement de la fonction b pris par BRESCH, MÉTIVIER et celle que nous avons considéré dans notre travail (voir Théorème 1.1).

Remarque. Un résultat intéressant est établi récemment par LACAVE, NGUYEN, PAUSADER [70] où les auteurs étendent le résultat de BRESCH, MÉTIVIER vers le cas d'un domaine singulier. Cependant, dans ce cas les auteurs perdent l'unicité de la solution du modèle des lacs non visqueux parce que l'estimation (1.38) n'est plus valable.

Remarque. Nos résultats dans la section suivante autour des équations des lacs visqueux ne traitent que le cas où le domaine est régulier. Un travail que nous espérons faire dans le future proche est de reprendre les techniques introduites dans le papier [70] afin d'améliorer nos résultats vers un domaine singulier.

1.3.3 Nos résultats

Dans cette sous section, nous allons présenté nos résultats autour du modèle des lacs visqueux avec bathymétrie dégénérée. La démonstration de ces trois théorèmes en détails

se trouvent dans le Chapitre 2. Avant d'annoncer les théorèmes principaux, rappelons-nous que le modèle des lacs visqueux s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t(bu^\mu) + \operatorname{div}(bu^\mu \otimes u^\mu) + A_b(u^\mu) + b\nabla p^\mu = 0, \\ \operatorname{div}(bu^\mu) = 0, \end{cases} \quad (1.40)$$

où nous avons considéré deux choix possibles du terme visqueux

$$(C_1) \ A_b(u^\mu) = -\mu \operatorname{div}(2bD(u^\mu) + 2b \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I}), \quad (C_2) \ A_b(u^\mu) = -\mu b \Delta u^\mu.$$

Premier cas : Complétons le système (1.40)-(C₁) avec les conditions aux bords et initiales suivantes

$$u^\mu|_{t=0} = u_{in}^\mu, \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{défini dans un sens faible}), \quad (1.41)$$

$$bu^\mu \cdot n = 0, \quad 2b(D(u^\mu) \cdot n + \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I} \cdot n) \cdot \tau + \eta bu^\mu \cdot \tau = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.42)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.1. (Chapitre 2, Al Taki [4]). *On suppose que la hauteur d'eau b satisfait les conditions suivantes*

$$b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\Omega) \quad \text{avec} \quad b > 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.43)$$

$$b = \rho(x)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1/2, \quad \text{où} \quad \rho(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \text{ pour } x \in V(\partial\Omega), \quad (1.44)$$

avec $V(\partial\Omega)$ est un voisinage ouvert du bord. De plus, supposons que le coefficient de trainé $\eta(x) \in L^\infty(\partial\Omega)$ tel que $\eta(x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$. Alors, pour $u_{in}^\mu \in H_b$, il existe au moins une solution faible globale du système (1.40)-(C₁). En plus, il existe une fonction p^μ avec $\nabla p^\mu \in W^{-1,\infty}(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$ tel que le couple (u^μ, p^μ) est une solution au sens de distribution du problème (1.40)-(C₁). De plus, si on exclut le cas où le domaine Ω est un disque, b est une fonction radiale et non identiquement égal à zéro sur $\partial\Omega$, alors la solution est unique. Précisément, il existe un unique couple (u^μ, p^μ) solution du problème (1.40) à condition que $\int_\Omega p^\mu dx = 0$.

Deuxième cas : Complétons le système (1.40)-(C₂) avec les conditions aux bords suivantes

$$bu^\mu \cdot n = 0 \quad (b\nabla u^\mu \cdot n) \cdot \tau = -b\kappa(u \cdot \tau) \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1.45)$$

où κ est la courbure de $\partial\Omega$. De plus supposons que le domaine Ω et la hauteur d'eau b satisfont :

$$b = \rho^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \Omega = \{\rho > 0\} \quad \text{avec} \quad \rho \in C^3(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \nabla \rho \neq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1.46)$$

alors nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2. (Chapitre 2, Al Taki [4]). *On suppose que Ω et b satisfont (1.46). Supposons de plus que $\omega_{in}^r := b^{-1} \operatorname{curl} u|_{t=0} \in L_b^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution faible du système (1.40)-(1.45). De plus, on a*

$$\omega \in W^{1,1}(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \cap L^1(0, T; W^{2,2}(\Omega))$$

et en particulier on déduit que

$$u^\mu \in L^2(0, T; C^{1-2/p}(\overline{\Omega})) \quad \text{et} \quad \nabla u^\mu \in L^2(0, T; L^p(\Omega)) \quad \text{pour tout } p < \infty.$$

Finalement, le dernier théorème concerne la limite visqueuse de la solution du modèle des lacs visqueux (1.40)-(C2). Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.3. (Chapitre 2, Al Taki [4]) *Supposons que le coefficient α dans la condition (1.46) est plus grand ou égal à une constante ε avec $\varepsilon > 0$ proche de zéro. En plus, supposons que*

$$\omega_{in}^r \in L_b^q(\Omega) \quad \text{pour un certain nombre pair } 4 < q < \infty.$$

Soit (u^μ, p^μ) la solution de système (1.40)-(1.45). Alors, si u_{in}^μ converge vers u_0 dans $L_b^2(\Omega)$ quand μ tend vers zéro, alors nous obtenons

$$\|u^\mu - u\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \longrightarrow 0,$$

avec u est la solution unique du modèle des lacs non visqueux (1.35) satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\sqrt{b}u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \operatorname{curl} u \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega)),$$

$$u|_{t=0} = u_0.$$

1.3.4 Difficulté relatives aux équations à coefficients dégénérées

Dans ce paragraphe, nous voudrions faire apparaître d'une manière abrégée la difficulté de l'établissement d'une solution régulière du système d'équations des lacs visqueux dans le cas où le terme dissipatif est donné par (C₁). Tout d'abord, nous commençons par l'étude du problème de Stokes associé et après nous passons au modèle complet tout en mettant le lien avec le modèle de Navier-Stokes incompressible. En effet, considérons le problème elliptique suivant écrit en dimension 1 d'espace :

$$\begin{cases} -\partial_x(b(x)\partial_x u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.47)$$

où Ω est supposé d'être régulier et f une fonction dépend de x . Nous savons que si la fonction $b(x)$ ne dégénère pas ($b(x) \geq c > 0$ pour tout $x \in \Omega$) ou ne devient pas singulier ($b(x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow \partial\Omega$), alors par un calcul au sens de distribution direct on peut

établir une régularité $W^{2,q}(\Omega)$ de la solution u du problème (1.47) lorsque $f \in L^q(\Omega)$ avec q un entier strictement positif. En revanche, dans le cas où b peut avoir un problème de dégénérescence ou de singularité, cette régularité ne semble pas être valide sans mettre des restrictions sur la fonction $b(x)$ (voir par exemple les hypothèses introduites par BRESCH, MÉTIVIER pour assurer la régularité (1.38) de la solution du système (1.37)). En effet, nous écrivons la première équation dans le système (1.47) sous la forme :

$$-\partial_x^2 u = f + \frac{\partial_x b}{b} \cdot \partial_x u. \quad (1.48)$$

Alors si nous voudrions obtenir une régularité H^2 de u pour $f \in L^2(\Omega)$, il devrait que :

$$\frac{\partial_x b}{b} \cdot \partial_x u \in L^2(\Omega),$$

et donc $u \in H^2(\Omega)$ nécessite

$$\frac{\partial_x b}{b} \in L^\infty(\Omega),$$

ce qui n'est pas compatible en général avec une fonction b qui s'annule au bord (prendre par exemple le cas où $b = \text{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha$).

Comme l'établissement d'une régularité H^2 sur u ne semble pas possible, alors la question normale qu'on peut se poser est la suivante : est ce qu'on peut obtenir par exemple une régularité de type $b^\gamma \partial_x^2 u \in H^2(\Omega)$ avec γ constante positive à déterminer ?. Pour simplifier les choses, on va supposer d'abord que $\Omega =]0, 1[$ et le poids b est de la forme

$$b = \rho^\alpha \quad \rho(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega) \quad \alpha > 0. \quad (1.49)$$

Nous désirons dans la suite établir une expression explicite de la solution u du problème (1.47). Après une intégration en espace de l'équation (1.47)₁, nous obtenons

$$\partial_x u = \frac{1}{b(x)} \int_0^x f(z) dz + \frac{c}{b(x)}, \quad (1.50)$$

avec c est une constante. Encore, une intégration en espace nous donne

$$u(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{b(\tau)} \int_0^\tau f(z) dz \right) d\tau + \int_0^x \frac{c}{b(\tau)} d\tau + d, \quad (1.51)$$

avec d est une constante. En utilisant les conditions aux bords, nous concluons que

$$c = - \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{b(\tau)} \int_0^\tau f(z) dz \right) d\tau}{\int_0^1 \frac{1}{b(\tau)} d\tau} \quad d = 0.$$

Pour obtenir $b^{1/2}u \in L^2(\Omega)$, il suffit suivant l'expression de (1.51) de supposer que

$$\int_0^1 b^{-1}(x) |f(x)|^2 dx < \infty \quad \int_0^1 \frac{1}{b(x)} dx < \infty,$$

qui est vraie si $b^{-1/2}f \in L^2(\Omega)$ et $\alpha < 1$. Dans la suite, on va apparaître l'importance de puissance α (voir (1.49)) sur la régularité de $\partial_x u$. Plus précisément, si on suppose que $b^{-1/2}f \in L^2(\Omega)$, alors pour obtenir $\partial_x u$ dans $L^2(\Omega)$ par exemple, il faut que

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{b(x)} \int_0^x f(z) dz \right|^2 dx < \infty \quad \int_0^1 \left| \frac{1}{b(x)} \right|^2 dx < \infty. \quad (1.52)$$

Pour la première intégrale, on utilise l'inégalité de Hölder afin de déduire que :

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{b(x)} \int_0^x f(z) dz \right|^2 dx \leq C \left(\int_0^1 \frac{1}{b(x)} dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{b(x)} |f(x)|^2 dx \right) \quad (1.53)$$

qui s'agit d'une expression finie si

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha(x)} dx < \infty \Rightarrow \alpha < 1 \quad \text{et} \quad b^{-1/2}f \in L^2(\Omega).$$

Pour la deuxième intégrale, il faut que

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha}(x)} dx < \infty \Rightarrow \alpha < \frac{1}{2}.$$

En revanche, si on désire établir une régularité $b^{1/2}\partial_x u \in L^2(\Omega)$ (la régularité de la solution faible), nous pouvons remarquer en suivant le même calcul que nous avons présenté ci-dessus que ça nécessite

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{b^{1/2}(x)} \int_0^x f(z) dz \right|^2 dx < \infty \quad \int_0^1 \frac{1}{b(x)} dx < \infty,$$

qui est vraie si $\alpha < 1$. Notons que cette condition est équivalent à prendre $b \in \mathcal{A}_2$ (hypothèse nécessaire pour assurer l'inégalité de Poincaré à poids, voir Proposition 2.1 dans le chapitre 2). Passons maintenant au dérivée seconde de u ; en dérivant l'équation (1.50) suivant x , on obtient :

$$\partial_x^2 u = -\frac{b'(x)}{(b(x))^2} \int_0^x f(z) dz + \frac{1}{b(x)} f(x) - \frac{b'(x)}{(b(x))^2} c.$$

Ici, on remarque que l'établissement d'une régularité H^2 sur u ne semble pas possible (b'/b^2 ne sera jamais dans $L^2(\Omega)$). Par contre, si on calcule l'expression de $\rho \partial_x^2 u \in L^2(\Omega)$ en tenant compte que $b'(x)/b(x) \sim 1/\rho(x)$

$$\rho \partial_x^2 u \simeq \frac{-1}{\rho^{\alpha/2}} \int_0^x \frac{1}{\rho^{\alpha/2}} f(z) dz + \frac{1}{\rho^{\frac{\alpha}{2}-1}} \frac{1}{\rho^{\frac{\alpha}{2}}} f(x) - \frac{c}{\rho^\alpha}.$$

Si on désire avoir $\rho \partial_x^2 u \in L^2(\Omega)$, il faut que

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\rho^\alpha(x)} \right)^2 dx < \infty \Rightarrow \alpha < \frac{1}{2}.$$

Remarque. Nous parlerons dans le chapitre 5, sur un petit travail que nous pouvons faire sur la régularité de problème (1.47) (dimension 2!). En fait, en utilisant la même méthode introduite par L. NIRENBERG (méthode de translation) (voir aussi le papier de D. BRESCH, J. LEMOINE et F. GUÍLLEN-GONZALEZ [23]) et en supposant que la fonction b se comporte comme une distance au bord, nous pouvons démontrer la régularité tangentielle sur u . Pour conclure avec la régularité normale de la solution, il suffit alors d'étudier une équation en dimension 1 d'espace après mettre les termes correspondants aux dérivées tangentielles plus le second membre à la côté droite de l'équation. Pour ce dernier équation en dimension 1, il faut suivre la même démarche que nous avons présenté ci-dessus plus quelques astuces sur les inégalités de Sobolev à poids afin de déduire la régularité suivant la normale de la solution u . Nous limiterons les détails ici puisque nous nous intéresserons plutôt à ce stade à une différente méthode mise en évidence par J. SIMON sur les équations non linéaires (voir [102]).

Passons maintenant au modèle des lacs visqueux complet (1.40). Ce que nous voudrions faire dans la suite est d'établir une comparaison entre les techniques utilisées dans l'établissement d'une solution régulière du modèle de Navier-Stokes incompressible (cas où $b = 1$ dans (1.40)) et celles du modèle (1.40). Tout d'abord, rappelons que le modèle de Navier-Stokes incompressible s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) - \mu \Delta u + \nabla p = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.54)$$

Nous complétons ce système par des conditions au bord de type Navier :

$$u \cdot n = 0, \quad (\nabla u \cdot n) \cdot \tau = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T).$$

Première approche. Si on veut une estimation d'ordre élevée sur la vitesse u , on peut formellement multiplier l'équation de la quantité de mouvement (1.54)₁ par $-\Delta u$ et intégrer en espaces, pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot \Delta u \, dx. \quad (1.55)$$

Rémarquons ici le terme $\int_{\Omega} \nabla p \cdot \Delta u \, dx = 0$ grâce à $\operatorname{div} u = 0$. Le terme de second membre de l'équation (1.55) peut être estimé en utilisant les injections de Sobolev et l'inégalité de Young comme suit

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot \Delta u \, dx \leq \frac{\mu}{2} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\mu) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^4 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.56)$$

D'un autre coté, en utilisant l'estimation d'énergie du système (l'équation (1.54) multipliée par u et intégrant en espace), on peut déduire que

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c. \quad (1.57)$$

En combinant l'équation (1.55) avec l'estimation (1.56), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c(\mu) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Appliquons maintenant le lemme de Gronwall à la fonction $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ en tenant compte que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \in L^1(0, T),$$

nous pouvons conclure à la propriété suivante sur la vitesse :

$$\nabla u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad \Delta u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

En faisant la même démarche pour les équations des lacs, c.à.d, en multipliant l'équation (1.40) $-(C_1)$ par le terme dissipative $-\mu \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) dx$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\operatorname{div} u|^2) b dx + \mu^2 \int_{\Omega} |\operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I})|^2 b^{-1} dx \\ &= \mu \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) dx + \mu \int_{\Omega} \nabla p \cdot \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) dx. \end{aligned}$$

Les points de différence ici comparer aux équations de Navier-Stokes incompressibles sont :

- le terme $\int_{\Omega} \nabla p \cdot \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) dx$ n'est plus zéro et donc il faut l'estimer..
- il faut connaître la régularité de u qui vient du fait que

$$\operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) \in L_{b^{-1}}^2(\Omega),$$

pour savoir comment on peut contrôler le terme non linéaire et le terme de pression.

Motivé par ce fait, nous avons étudié le problème (1.47) en dimension 2 qui nous permettra à établir un théorème de régularité concernant les équations des lacs visqueux dans le cas où le terme dissipative donné par (C_1) .

Deuxième approche. L'autre manière de dériver une solution régulière du modèle de Navier-Stokes incompressible est d'étudier l'équation de vorticité. L'avantage de l'étude l'équation en curl dans les équations de Navier-Stokes incompressible est motivé par la condition d'incompressibilité. En fait puisque $\operatorname{div} u = 0$ (donc suffisamment régulière), il suffit de connaître la régularité sur $\operatorname{curl} u$ afin de déduire la régularité de ∇u . Appliquons l'opérateur rotationnel à l'équation de mouvement (1.54), nous obtenons

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \mu \Delta \omega = 0. \tag{1.58}$$

Maintenant multipliant l'équation (1.58) par ω et intégrant en espace, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\omega|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dx \leq c. \tag{1.59}$$

Avec les régularités sur u et ω obtenues au niveau des estimations d'énergie, on peut également procéder à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \omega - \mu \Delta \omega = -u \cdot \nabla \omega & \text{dans } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce système décrit une équation de la chaleur avec un second membre $-u \cdot \nabla \omega$. Comme u et ω satisfont (1.57)-(1.59), nous pouvons déduire que (en dimension 2)

$$u \cdot \nabla \omega \in L_t^2 L_x^1 \cap L_t^1 L_x^{2^-}.$$

En utilisant la théorie standard sur les equations paraboliques, nous concluons que

$$\omega \in W^{1,2}(0, T; W^{2,1}(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; W^{2,2^-}(\Omega)).$$

En appliquant l'argument de bootstrap, nous déduisons "une régularité maximale" sur ω et donc sur u .

En revanche, si nous faisons la même procédure pour le modèle des lacs toujours avec le terme visqueux $A_b(u) = -\mu \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I})$, nous obtenons l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \operatorname{curl} \left(b^{-1} \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) \right) \\ &= \mu \operatorname{div} \left(\frac{1}{b} \nabla(b\omega) \right) - 2\mu \operatorname{Hess}(\ln b) : \nabla^\perp u^\mu + 2\mu \nabla(u^\mu \cdot \nabla \ln b) \cdot \nabla^\perp \ln b. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Il est facile de remarquer que cette équation est singulière à cause de la dégénérescence de b et donc elle ne nous permet pas a priori d'améliorer la régularité de la solution faible u .

1.4 Dérivation du modèle de ghost effect

Nous avons mentionné dans la sous section 1.2.3 que la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann n'aboutit pas toujours aux équations macroscopiques, en particulier aux équations de Navier-Stokes incompressible. Les premiers travaux dans ce cadre sont dus à SONE (voir [106],[105]). Notons que les résultats de SONE sont des résultats "formels". Une justification théorique du phénomène de ghost effect mise en évidence par SONE a été établit récemment par S. BRULL dans [28], [29].

Dans cette section, nous ne voudrions pas parler des travaux de SONE et BRULL. En fait, le modèle mathématique considéré dans cette partie est la synthèse d'une série des travaux de LEVERMORE *et al.* durant les années 2006 et 2012. Plus précisément, comme justifié par SONE et BRULL que les équations de Navier-Stokes et Euler compressible sont incapables de décrire "certain" mouvement des gaz dans le régime fluide, alors il y a donc besoin de connaître les corrections que l'on peut tirer sur les équations de Navier-Stokes et Euler à partir de la théorie cinétique des gaz. Pour cette raison, plusieurs personnes introduisent diverses façons pour modifier les troncatures du développement

de Chapman-Enskog utilisées pour construire les modèles macroscopiques. Dans [77], en respectant la structure de l'entropie de l'équation de Boltzmann, C. D. LEVERMORE a proposé un moyen systématique pour construire les systèmes dynamiques de fluides comme des corrections du modèle de Navier-Stokes compressible. Parmi les systèmes bien posés, le système le plus important au-delà de Navier-Stokes correspond à la première correction du modèle de Navier-Stokes. Parce que la correction est de type dispersive, LEVERMORE a donné le nom Navier-Stokes dispersif à ce système (DNS).

Alors le plan de cette section s'organise comme suit : dans la sous section suivante, nous présentons le modèle de Navier-Stokes dispersif introduit par LEVERMORE *et al.* dans [80]. Ensuite nous donnerons le modèle de ghost effect étudié au chapitre 3. Notre résultat sur ce dernier modèle sera présenté dans la sous section 1.4.2.

1.4.1 Modèle de Navier-Stokes dispersif

Le modèle de Navier-Stokes dispersif introduit par LEVERMORE s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \operatorname{div}(\rho U \otimes U) + \nabla(p)(\rho, \mathcal{T}) = \operatorname{div}(\Sigma) + \operatorname{div}(\tilde{\Sigma}), \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e U + \rho \Theta U) = \operatorname{div}(\Sigma U - q) + \operatorname{div}(\tilde{\Sigma} U + \tilde{q}), \\ (\rho, U, \Theta)(x, 0) = (\rho^{in}, U^{in}, \Theta^{in})(x), \end{cases} \quad (1.61)$$

où $(\rho(x, t), U(x, t), \Theta(x, t))$ représente la densité, la vitesse, et la température de fluide à l'instant t et position $x \in \mathbb{R}^3$ respectivement, alors que $p = p(\rho, \Theta)$, $q = q(\Theta)$, $\Sigma = \Sigma(\mathbb{I}, \Theta)$ représente la pression, le flux de chaleur et le tenseur des contraintes avec

$$p(\rho, \Theta) = \rho \Theta, \quad q(\Theta) = -\hat{\kappa}(\Theta) \nabla \Theta,$$

et Σ pour un fluide Newtonien s'écrit sous la forme

$$\Sigma = \hat{\mu}(\Theta)(\nabla U + \nabla^t U - \frac{2}{3} \operatorname{div}(U) \mathbb{I}).$$

L'énergie totale associée à la densité ρ est donnée par

$$\rho e = \frac{1}{2} \rho |U|^2 + \frac{3}{2} \rho \Theta.$$

Les quantités $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{q}$ représentent les corrections dispersives du tenseur des contraintes et du flux de chaleur respectivement et sont données par

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \hat{\tau}_1(\rho, \Theta)(\nabla^2 \Theta - \frac{1}{3}(\Delta \Theta) \mathbb{I}) + \hat{\tau}_2(\rho, \Theta)(\nabla \theta \otimes \Theta - \frac{1}{3}|\nabla \Theta|^2 \mathbb{I}) \\ &\quad + \hat{\tau}_3(\rho, \Theta)(\nabla U (\nabla U)^t - (\nabla U)^t \nabla U), \\ \tilde{q} &= \hat{\tau}_4(\rho, \Theta)(\Delta U + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div}(U)) + \hat{\tau}_5(\rho, \Theta)(\nabla U + \nabla^t U - \frac{2}{3}(\operatorname{div} U) \mathbb{I}) \\ &\quad + \hat{\tau}_6(\rho, \Theta)(\nabla U - \nabla^t U) \cdot \nabla \Theta. \end{aligned}$$

Les coefficients de transport $\widehat{\tau}_1, \dots, \widehat{\tau}_6$ sont supposés être C^∞ tel que $\widehat{\tau}_1, \widehat{\tau}_4 > 0$. Ce système admet une solution forte locale en temps comme c'est montré dans [80].

Le mot ghost effect utilisé par LEVERMORE *et al.* correspond à un modèle faible nombre de Mach [81]. Plus précisément, dans [81], les auteurs ont étudié la limite faible nombre de Mach du modèle de Navier-Stokes dispersif (1.61). Le modèle obtenu est nommé ghost effect puisqu'il ne peut pas être obtenu à partir du modèle de Navier-Stokes compressible. En revanche, on peut l'obtenir à partir de la théorie cinétique des gaz. En conclusion, le système s'écrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\vartheta = 1, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p^* = \operatorname{div}(\Sigma) + \operatorname{div}(\widetilde{\Sigma}), \\ \operatorname{div}(\frac{5}{2}u - \kappa(\theta)\nabla\theta) = 0, \end{array} \right. \quad (1.62)$$

où p^* désigne la pression. Le tenseur Σ et le tenseur de conductivité thermique $\widetilde{\Sigma}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mu(\theta)(\nabla u + \nabla^t u - \frac{2}{3}\operatorname{div} u \mathbb{I}), \quad q = -\kappa(\theta)\nabla\theta, \\ \widetilde{\Sigma} &= \tau_1(\rho, \theta)(\nabla^2\theta - \frac{1}{3}\Delta\theta \mathbb{I}) + \tau_2(\rho, \theta)(\nabla\theta \otimes \nabla\theta - \frac{1}{3}|\nabla\theta|^2 \mathbb{I}), \end{aligned} \quad (1.63)$$

où $\mu(\theta)$ est la viscosité, $\kappa(\theta)$ est le flux de la chaleur, et $\tau_1(\rho, \theta), \tau_2(\rho, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ sont des coefficients de transport avec $\tau_1 > 0$ comme défini dans (1.61).

Dans [80], LEVERMORE *et al.* ont justifié mathématiquement l'obtention du modèle (1.62) à partir du modèle (1.61). En plus, ils ont montré que le modèle ghost effect obtenu admet une solution forte locale en temps. Notons que d'une manière générale, le régime faible nombre de Mach est décrit par une vitesse caractéristique v de l'écoulement très faible devant la célérité du son c (vitesse de propagation de l'onde de pression infinitésimale dans le fluide). Dans ce cas, le nombre de Mach définit comme le rapport $Ma = v/c$ sera très faible à 1. Par conséquent, il est possible donc de considérer que la pression thermodynamique comme étant une constante. Dans ce régime, il n'y aura pas de variations de masse volumique ρ suite à la compression. La théorie faible nombre de Mach permet d'établir le lien entre les écoulements compressibles et incompressibles. Nous limitons les détails ici et on renvoie le lecteur intéressé à l'article [80] pour plus de détails.

1.4.2 Nos résultats sur le modèle de ghost effect

Notre objectif dans ce paragraphe est d'étudier le problème d'existence globale de solution faible du modèle de ghost effect suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\vartheta = 1, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div}(\Sigma) + \operatorname{div}(\widetilde{\Sigma}), \\ \operatorname{div}(\frac{5}{2}u - \kappa(\theta)\nabla\theta) = 0, \end{array} \right. \quad (1.64)$$

où Σ et $\tilde{\Sigma}$ sont définis en (1.63).

En comparant ce système au modèle de faible nombre Mach dérivé par P.-L. LIONS dans [83] à partir de Navier-Stokes compressible, nous avons un terme supplémentaire $\text{div}(\tilde{\Sigma})$ dans l'équation de conservation de moment (1.64)₃. Celui-ci vient du fait que le modèle de Navier-Stokes dispersif contient une correction dispersif. La difficulté principale dans notre analyse est de savoir comment traiter ce terme surtout qu'il contient une dérivée d'ordre 3. La première étape repose sur une réécriture simplifiée de système (1.64) puisque ce système, a priori, n'admet pas une estimation d'énergie classique. Tout d'abord, en tenant compte de l'égalité

$$\text{div}(\tau_1(\rho, \mathcal{T})\nabla^2\mathcal{T}) = \nabla(\text{div}(\tau_1(\rho, \mathcal{T})\nabla\mathcal{T})) - \text{div}(\tau_1'(\rho, \mathcal{T})\nabla\mathcal{T} \otimes \nabla\mathcal{T}),$$

on peut réécrire le terme $\text{div}(\tilde{\Sigma})$ sous la forme

$$\begin{aligned} \text{div} \tilde{\Sigma} &= \nabla(\text{div}(\hat{\tau}_1(\mathcal{T})\nabla\mathcal{T})) - \nabla(\hat{\tau}_1(\mathcal{T})\frac{1}{d}\Delta\mathcal{T}) \\ &\quad - \text{div}((\hat{\tau}_1'(\mathcal{T}) - \hat{\tau}_2(\mathcal{T}))\nabla\mathcal{T} \otimes \nabla\mathcal{T}) + \nabla(\hat{\tau}_2(\mathcal{T})\frac{1}{d}|\nabla\mathcal{T}|^2), \end{aligned} \quad (1.65)$$

avec

$$\hat{\tau}_1(\mathcal{T}) = \tau_1\left(\frac{1}{\mathcal{T}}, \mathcal{T}\right), \quad \hat{\tau}_2(\mathcal{T}) = \tau_2\left(\frac{1}{\mathcal{T}}, \mathcal{T}\right).$$

Le point clé ici est que le terme de gradient dans l'équation (1.65) peut être absorbé avec la pression afin de produire une nouvelle pression π où

$$\pi = p - \text{div}(\hat{\tau}_1\nabla\mathcal{T}) + \frac{1}{d}\hat{\tau}_1\Delta\mathcal{T} + \frac{1}{d}\hat{\tau}_2|\nabla\mathcal{T}|^2.$$

En introduisant cette nouvelle pression, et en remplaçant $\mathcal{T}$ par sa valeur ($\mathcal{T} = 1/\rho$), le système (1.64) devient :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \text{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi - \text{div} \Sigma = -c \text{div}(K(\rho)\nabla\rho \otimes \nabla\rho), \\ \text{div} u = \frac{2}{5} \text{div}(k(\rho^{-1}(x))\nabla(\rho^{-1}(x))), \end{cases} \quad (1.66)$$

où $K(\rho)$ est défini par

$$K(\rho) := \frac{1}{\rho^4}(\hat{\tau}_1'(\frac{1}{\rho}) - \hat{\tau}_2(\frac{1}{\rho})).$$

Inspiré du travail récent de BRESCH *et al.* ([14]) sur le modèle Euler-Korteweg basé sur une nouvelle inégalité fonctionnelle nommée inégalité de Bohm généralisé, on écrit :

$$\begin{aligned} -\text{div}(K(\rho)\nabla\rho \otimes \nabla\rho) &= \rho\nabla\left(\sqrt{K(\rho)}\Delta\left(\int_0^\rho \sqrt{K(s)}ds\right)\right) \\ &\quad - \nabla\left(\rho\text{div}(K(\rho)\nabla\rho) + \frac{1}{2}(K(\rho) - \rho K'(\rho))|\nabla\rho|^2\right) \end{aligned}$$

où le premier terme du côté droit peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \rho\nabla\left(\sqrt{K(\rho)}\Delta\left(\int_0^\rho \sqrt{K(s)}ds\right)\right) \\ = \text{div}(F(\rho)\nabla\nabla\psi(\rho)) + \nabla\left((F'(\rho)\rho - F(\rho))\Delta\psi(\rho)\right) \end{aligned} \quad (1.67)$$

avec

$$\sqrt{\rho}\psi'(\rho) = \sqrt{K(\rho)}, \quad F'(\rho) = \sqrt{K(\rho)}\rho. \quad (1.68)$$

Nous concluons avec le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi_1 - \operatorname{div} \Sigma &= c \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds)), \\ \operatorname{div} u &= \frac{2}{5} \operatorname{div}(k(\rho^{-1}(x)) \nabla(\rho^{-1}(x))), \end{cases} \quad (1.69)$$

Maintenant, nous voulons considérer un cas particulier de la conductivité thermique, de telle manière à écrire

$$\frac{2}{5} k(\rho^{-1}(x)) \nabla(\rho^{-1}(x)) = -2\kappa \Delta \varphi(\rho), \quad 0 < \kappa < 1,$$

où φ est une fonction dépendant de la densité ρ qui devrait être déterminée dans la suite. Finalement, le système de ghost effect considéré ici devient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi_1 - \operatorname{div} \Sigma &= c \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds)), \\ \operatorname{div} u &= -2\kappa \Delta \varphi(\rho), \end{cases} \quad (1.70)$$

où Σ est défini par :

$$\Sigma = \mu(\rho) (\nabla u + \nabla^t u - \frac{2}{3} \operatorname{div} u \mathbb{I}).$$

En prenant la constante c égal à zéro dans (1.70), nous retrouvons le modèle de Kazhikhov-Smagulov. Rappelons que P.-L. LIONS dans son livre [83], a montré une dérivation de ce dernier modèle en étudiant la limite faible nombre de Mach du modèle de Navier-Stokes compressible. En plus, il a démontré que ce système admet une solution faible globale mais sous des hypothèses restrictives sur les données initiales. Le premier résultat d'existence globale sans hypothèses de petitesse sur les données initiales est due à D. BRESCH, EL. H. ESSOUFI et M. SY. Dans [20], les auteurs montrent que le système (1.70) (avec $c = 0$) possèdent une solution faible globale $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ sous certain condition algébrique reliant φ et μ à savoir

$$\varphi'(\rho) = \frac{\mu'(\rho)}{\rho} \quad \text{avec} \quad \kappa = 1. \quad (1.71)$$

Le point clé dans [20] est l'introduction d'une nouvelle vitesse, appelée vitesse effective $\mathbf{w}$ qui est égal à

$$\mathbf{w} = u + 2\nabla \varphi(\rho) \quad \text{avec} \quad s\varphi'(s) = \mu'(s).$$

L'équation de conservation de la masse se réécrit au moyen de cette vitesse comme une équation de transport/diffusion

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) - 2\Delta \mu(\rho) = 0,$$

et semble faire apparaître à travers la viscosité $\mu(\rho)$ un effet de régularisation en densité ou tout au moins d'une fonction de la densité.

Afin de réécrire l'équation de conservation de mouvement en terme de $\mathbf{w}$, nous écrivons avant l'équation d'évolution de $\mu(\rho)$

$$\partial_t \mu(\rho) + \operatorname{div}(\mu(\rho)u) + (\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)) \operatorname{div} u = 0,$$

qui par différentiation donne

$$\partial_t \nabla \mu(\rho) + \operatorname{div}(\nabla \mu(\rho) \otimes u) + \operatorname{div}(\mu(\rho) \nabla^t u) + \nabla((\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)) \operatorname{div} u) = 0.$$

En additionnant cette équation à l'équation de conservation de la quantité de mouvement associée à u , on obtient l'équation de la quantité de mouvement en vitesse effective $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\rho)A(u)) \\ + \nabla \left[2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)) - \frac{2}{3} \right] \operatorname{div} u + \nabla p = 0, \end{aligned} \quad (1.72)$$

avec

$$A(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla^t u).$$

Nous voulons maintenant établir une estimation sur la vitesse $\mathbf{w}$ en multipliant l'équation (1.72) par $\mathbf{w}$. Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w})) \cdot \mathbf{w} \, dx \\ = \int_{\Omega} \partial_t \rho |\mathbf{w}|^2 \, dx + \int_{\Omega} \rho \partial_t \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho u) |\mathbf{w}|^2 \, dx + \int_{\Omega} (\rho u \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse associé à u et faisons une intégration par partie sur la dernière intégrale, nous concluons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w})) \cdot \mathbf{w} \, dx \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{d}{dt} |\mathbf{w}|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt}(\rho) |\mathbf{w}|^2 \, dx \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Du fait de sa structure anti-symétrique, le terme $-2 \operatorname{div}(\mu(\rho)A(u))$ est lui aussi compatible avec le multiplicateur $\mathbf{w}$ et est à l'origine d'un unique terme de dissipation

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu(\rho)A(u)) \cdot \mathbf{w} \, dx &= -2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu(\rho)A(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{w} \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \mu(\rho)A(\mathbf{w}) : \nabla \mathbf{w} \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \mu(\rho)|A(\mathbf{w})|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Les deux termes de gradient disparaissent quand on les multiplie par $\mathbf{w}$. Finalement, nous concluons à l'égalité suivante sur $\mathbf{w}$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 \, dx + 2 \int_{\Omega} \mu(\rho)|A(\mathbf{w})|^2 \, dx = 0. \quad (1.73)$$

En supposant que la densité est loin du vide et en tenant compte que $\mathbf{w}$ est à divergence nulle, nous déduisons

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V) \\ \rho &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (1.74)$$

avec V est défini par :

$$V = \{f \in H^1(\Omega) / \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}.$$

Les résultats (1.74) permettent à BRESCH, ESSOUFI et SY dans [?] de construire une solution faible globale en temps du système (1.70) (avec $c = 0$) sous la condition algébrique (1.71).

Ce résultat a été étendu récemment par BRESCH, GIOVANGIGLI et ZATORSKA dans [21] pour être valable avec $0 < \kappa < 1$. Dans [21], les auteurs généralisent l'estimation (1.73) à travers la vitesse effective suivante

$$\mathbf{w} = u + 2\kappa \nabla \varphi(\rho).$$

Plus précisément, en adaptant le calcul précédent, nous obtiendrons à la place de l'équation (1.72), l'équation suivante

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w}) - 2(1 - \kappa) \operatorname{div}(\mu(\rho) D(u)) - 2\kappa \operatorname{div}(\mu(\rho) A(u)) \\ + \nabla \left[2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)) - \frac{2}{3} \right] \operatorname{div} u + \nabla p = 0. \end{aligned}$$

On voit bien ici que l'hypothèse $0 < \kappa < 1$ garantit la positivité du coefficient devant le terme de dissipation et donc permet aux auteurs dans [21] de démontrer un résultat d'existence globale de solution faible. En plus, ils ont établi un lien avec le modèle de Navier-Stokes incompressible non homogène en faisant tendre le coefficient κ vers zéro.

Dans notre système (1.70), nous avons le terme supplémentaire

$$c \rho \nabla(\sqrt{K_1(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K_1(s)} ds))$$

à estimer par comparaison au modèle étudié par BRESCH *et al.*. En effet, multipliant ce terme par $\mathbf{w}$, en intégrant en espace et en utilisant (1.67), nous obtenons

$$\begin{aligned} &c \int_\Omega \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds)) \cdot \mathbf{w} \, dx \\ &= c \int_\Omega \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds)) \cdot u \, dx \\ &\quad + 2c \int_\Omega \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds)) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx \\ &= c \int_\Omega \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds)) \cdot u \, dx \\ &\quad + 2\kappa c \int_\Omega F(\rho) \nabla \nabla \psi(\rho) : \nabla \nabla \varphi(\rho) \, dx + 2\kappa c \int_\Omega (F'(\rho)\rho - F(\rho)) \Delta \psi(\rho) \Delta \varphi(\rho) \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation de la conservation de la masse associé à u , on peut déduire :

$$I_1 := c \int_{\Omega} \rho \nabla (\sqrt{K(\rho)} \Delta (\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds)) \cdot u \, dx = \frac{c}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \sqrt{K(\rho)}|^2 \, dx.$$

Malheureusement, le terme

$$I_2 := \int_{\Omega} F(\rho) \nabla \nabla \phi(\rho) : \nabla \nabla \varphi(\rho) \, dx + \int_{\Omega} (F'(\rho) \rho - F(\rho)) \Delta \phi(\rho) \Delta \varphi(\rho) \, dx \quad (1.75)$$

n'as pas de signe et ne semble pas pouvoir être "absorbé" par les autres termes du système sans imposer des conditions de petitesse sur la densité ρ . Pour cela, nous nous limitons sur des choix de $\varphi(\rho)$ et $\phi(\rho)$ dans lequel nous pouvons obtenir un signe de l'intégral I_2 . Plus précisément, nous considérons dans la suite

$$\varphi(\rho) = \log \rho, \quad \phi(\rho) = \rho^m.$$

Nous rappelons que dans ce cas, le système (1.70) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi - 2 \operatorname{div}(\rho D(u)) = c \rho \nabla (\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta (\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds)), \\ \operatorname{div} u = -2\kappa \Delta \log \rho, \end{cases} \quad (1.76)$$

En utilisant (1.68), nous remarquons que

$$I_1 = c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{2m-1} |\nabla \rho|^2 \, dx = c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} |\nabla \log \rho|^2 \, dx.$$

Également, pour l'intégral I_2 , nous obtenons

$$c \left[\int_{\Omega} \rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m : \nabla \nabla \log \rho \, dx + m \int_{\Omega} \rho^{m+1} \Delta \rho^m \Delta \log \rho \, dx \right].$$

Le point important dans la démonstration de l'existence globale d'une solution faible du système (1.76) est de montrer que l'intégral I_2 garde un signe positif. Plus précisément, nous montrons le lemme suivant :

Lemme 1.1. *On suppose que ρ est une fonction régulière positive dans Ω et $0 \leq m \leq 1/2$, alors il existe une constante c_0 avec*

$$0 < c_0 \leq 1 - \frac{(d-1)^2}{d(d+2)} \frac{(1-2m)}{1+2m},$$

telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\Omega} \rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m : \nabla \nabla \log \rho \, dx + m \int_{\Omega} \rho^{m+1} \Delta \rho^m \Delta \log \rho \, dx \\ &\geq 4c_0 \frac{m(m+1)}{(2m+1)^2} \int_{\Omega} (\Delta \rho^{\frac{2m+1}{2}})^2 \, dx. \end{aligned} \quad (1.77)$$

La démonstration de cette inégalité est inspirée de la méthode introduite par A. JÜNGEL, D. MATTHES dans [62]. Une généralisation de cette inégalité est démontrée dans le chapitre 4 de ce document. A ce stade, laissons nous présenter notre résultat concernant le système (1.76).

Théorème 1.4. (Chapitre 3, Al Taki [3]). 1- Supposons que $c \geq 0$. Soit $0 < \kappa < 1$ et $0 \leq m \leq 1/2$. Nous supposons aussi que la condition initiale $(\rho^0, \mathbf{w}^0)$ satisfait

$$\rho^0 \in H^1(\Omega), \quad 0 < r \leq \rho^0 \leq R < \infty, \quad \mathbf{w}^0 \in H, \quad (1.78)$$

avec

$$H = \{z \in L^2(\Omega); \operatorname{div} z = 0\} \quad \text{et} \quad V = \{z \in W^{1,2}(\Omega); \operatorname{div} z = 0\},$$

alors il existe au moins une solution faible globale $(\rho, \mathbf{w})$ de système (1.76) vérifiant les estimations suivantes :

$$\|\rho\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\mathbf{w}\|_{L^2(0,T;V)} \leq c,$$

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|D(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c.$$

2- Supposons que $c < 0$ et $0 < \kappa < 1$. Nous supposons de plus que la condition initiale $(\rho^0, \mathbf{w}^0)$ satisfait (1.78) avec la condition suivante :

$$r < R \leq \left(\frac{8\kappa\sqrt{\kappa(1-\kappa)}(2m+1)}{|c|} r \right)^{1/(2m+1)} \quad (1.79)$$

alors il existe au moins une solution faible globale $(\rho, \mathbf{w})$ du système (1.76).

Remarque. Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur une discussion sur la condition (1.79).

1.5 Nouvelle inégalité fonctionnelle

Comme nous avons remarqué, les inégalités fonctionnelles jouent un rôle important dans l'obtention d'estimations à priori pour les solutions d'EDPs, dans l'analyse de comportement en temps long des solutions de problèmes d'évolution, comme dans le modèle de ghost effect. Également, notons que la généralisation de l'inégalité (1.77) dans le Lemme 3.3 permet de considérer des cas plus généraux du terme de tension de surface. Motivé par ce fait, et aussi de travail récent de BRESCH, VASSEUR et YU autour le modèle de Navier-Stokes compressible avec viscosité dégénéré qui nécessite aussi une inégalité fonctionnelle de même type que l'inégalité (1.77), nous montrons une généralisation de l'inégalité (1.77) et aussi celle prouvée par BRESCH, VASSEUR, YU dans [27]. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.5. *Pour toute fonction positive régulière ρ et pour tout n et m satisfait :*

$$n + m > 0 \quad \gamma_1 \gamma_2 (1 + n) + 2(\gamma_1 + \gamma_2)(c_n - 1 - n) > 0, \quad (1.80)$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{4(m+1)}{2n+m+1} \quad \gamma_2 = \frac{4(2n-m+1)}{2n+m+1},$$

et

$$c_n = \frac{(1+n)(d+2)(d(1-n)+2n) - (d-1)^2(2n-1)^2}{(d+2)^2(1+n)},$$

alors il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ positives telles que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^{n+1} \nabla \nabla \rho^n : \nabla \nabla \rho^m dx + n \int_{\Omega} \rho^{n+1} \Delta \rho^n \Delta \rho^m dx \\ & \geq C_1 \int_{\Omega} (\nabla \nabla \rho^{\frac{2n+m+1}{2}})^2 + C_2 \int_{\Omega} |\nabla \rho^{\frac{2n+m+1}{4}}|^4 dx. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Une interprétation géométrique de la condition (1.80) sera présentée dans le chapitre 4. Nous donnerons aussi des applications de l'inégalité (1.81) sur le modèle de Navier-Stokes-Korteweg suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)D(u) + \lambda(\rho) \operatorname{div} u \mathbb{I}) + \nabla p = \operatorname{div}(S), \end{cases} \quad (1.82)$$

avec $\operatorname{div}(S)$ désigne le terme de tension de surface

$$\operatorname{div}(S) = (\rho \operatorname{div}(K(\rho) \nabla \rho) + \frac{1}{2}(K(\rho) - \rho K'(\rho) |\nabla \rho|^2) \mathbb{I} - K(\rho) \nabla \rho \otimes \nabla \rho.$$

Motivé par cette inégalité fonctionnelle, nous espérons établir un résultat d'existence globale de solution faible du système (1.82).

Chapitre 2

Degenerate lake equations

L'objectif de ce chapitre est l'étude du modèle des lacs visqueux avec dégénérescence du fond. Nous montrons l'existence globale d'une solution faible avec différents choix du terme dissipatif dans le cas où la hauteur d'eau est supposé d'être comme une fonction de distance au bord. La construction de la solution est faite en adaptant les travaux connues sur les équations de Navier-Stokes incompressible. Finalement, nous établissons la convergence de la solution du modèle des lacs visqueux vers son version non visqueux quand le coefficient de viscosité tends vers zéro. Nos résultats généralisent les travaux de [B. DI MARTINO, C. GIACOMONI and P. ORENGA, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2001] au cas dégénéré.

Ce chapitre issu d'une publication à paraître dans "Nonlinear Analysis TMA" intitulée "Viscosity effect on the degenerate lake equations".

This chapter concerns the effect of viscosity on the degenerate lake equations (anelastic limit) when the bottom topography vanishes on the shore. We establish the existence and uniqueness of a global weak solutions for various choices of viscosity term in weighted Sobolev spaces where the weight is assumed to be a *power type weight*. Our solution is constructed by adapting carefully the known works on the incompressible Navier-Stokes equations in unweighted context. Finally we study, in one case, the vanishing viscosity limit when the solution of the inviscid lake equations is regular enough generalizing the results by [B. DI MARTINO, C. GIACOMONI and P. ORENGA, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2001] to the degenerate case.

This chapter has been the subject of a publication to be appear in "Nonlinear Analysis TMA" entitled "Viscosity effect on the degenerate lake equations"

2.1 Introduction

The viscous lake equations (anelastic limit) have been derived in order to model the evolution of the vertically averaged horizontal components of the 3D velocity to the incompressible viscous fluid confined to a shallow basin with varying bottom topography.

These equations can be obtained from the following viscous shallow water equations by letting the Froude number (noted by Fr in the sequel) go to zero when the initial height converges to a non-constant function depending on the space variable :

$$\begin{cases} \partial_t(hv) + \text{div}(hv \otimes v) + A_h(v) + \frac{1}{2\text{Fr}^2} \nabla h^2 = 0, & \text{in } \Omega, \\ \partial_t h + \text{div}(hv) = 0, & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

where $h(t, x)$ is the water height, $v(t, x)$ is the velocity of a viscous fluid and A_h is a viscous second order operator depending on h . $v \otimes v$ is the matrix with components $v_i v_j$. h is classically assumed positive but can eventually vanishes, v is a vector valued function and both are defined on a bounded subset Ω of $\mathbb{R}^2$.

Following Lions's book [83] (see also [36], [25], [26], [86]), there exist various models (or approximations) for A_h like for instance

$$A_h(\cdot) = -2\mu \text{div}(hD(\cdot) + h \text{div}(\cdot) \mathbb{I}), \quad A_h(\cdot) = -\mu h \Delta(\cdot), \quad (2.2)$$

where $\mu > 0$ represents the eddy viscosity coefficient, $\mathbb{I}$ is the 2×2 identity matrix and $D(\cdot) = (\nabla \cdot + (\nabla \cdot)^t)/2$ is the deformation tensor.

Before moving to viscous lake model, let us fix some ideas concerning the analysis of well posedness of System (2.1). One of the major difficulty on this analysis is to deal with vacuum. Since the works of P.-L. LIONS on the compressible Navier-Stokes equations (the same equations where $\frac{1}{2\text{Fr}^2} \nabla h^2$ is replaced by ∇h^γ , $\gamma > 0$ and $A_h = -\mu h \Delta(\cdot)$), we are able to prove the existence of global weak solutions of System (2.1) with $A_h = -\mu h \Delta(\cdot)$ for large initial data that may vanish. Nonetheless, important progress has been made by D. BRESCH and B. DESJARDINS in [15] to handle the existence of global weak solutions of viscous shallow water equations with $A_h(\cdot) = -2\mu \text{div}(hD(\cdot))$ as diffusion term. The key point in their paper [15] is to show that the structure of the diffusion term provides some regularity for h thanks to a new mathematical entropy inequality. In [15], the authors proved the existence of global weak solutions of System (2.1) whereas damping terms are added to the momentum equation $(2.1)_1$. This result was improved very recently by A. VASSEUR, C. YU in [111] where the authors proved that the result holds true without adding the damping terms. As a limitation of these elegant results ([15], [111]), the global well posedness of viscous shallow water equations with $A_h(\cdot) = -2\mu \text{div}(hD(\cdot) + h \text{div}(\cdot) \mathbb{I})$ as diffusion term still a very interesting open problem.

The viscous lake equations considered in this paper have the following equations

$$\begin{cases} \partial_t(bu^\mu) + \text{div}(bu^\mu \otimes u^\mu) + A_b(u^\mu) + b \nabla p^\mu = 0, & \text{in } \Omega, \\ \text{div}(bu^\mu) = 0, & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

for $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ with $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a bounded Lipschitz domain. Here, $u^\mu = u^\mu(x, t) = (u_1^\mu(x, t), u_2^\mu(x, t))$ stands for the two-dimensional horizontal component of the fluid velocity, $p = p(t, x)$ is the pressure and A_b is a viscous second order operator depending on

b which can satisfy the two expressions

$$(i) \quad A_b(\cdot) = -2\mu \operatorname{div}(bD(\cdot) + 2b \operatorname{div}(\cdot) \mathbb{I}), \quad (ii) \quad A_b(\cdot) = -\mu b \Delta(\cdot).$$

Moreover, the bottom function $b(x)$ is a given function which assumed to be a *power type weight* in the sequel. The second equation in System (2.3) shows that the system does not describe incompressible flow, it is a constraint that plays a role similar to that played by the incompressibility condition for the incompressible Navier-Stokes system. However, since we do not have an existence result concerning the solution of viscous shallow water equations with viscosity term given by $A_h(\cdot) = -2\mu \operatorname{div}(hD(\cdot) + h \operatorname{div}(\cdot) \mathbb{I})$, then there is no mathematical result until now allowing us to justify the derivation of viscous lake model (2.3)-(i) from viscous shallow water model (2.1). The unique rigorous derivation (also in the non-degenerate case, i.e. when the bottom topography is strictly positive) is limited to the case when $A_h = -2\mu \operatorname{div}(2hD(\cdot))$ and can be found in the paper of D. BRESCH, M. GISCLON and C. K. Lin [22]. Noticing that the difference between these expressions of viscosity term, namely $A_b = -\mu \operatorname{div}(2bD(\cdot))$ and $A_b = -2\mu \operatorname{div}(bD(\cdot) + b \operatorname{div}(\cdot) \mathbb{I})$, is not very important on the analysis of weak solutions of viscous lake model (2.3).

Constant bathymetry. In case when b is a constant, System (2.3) becomes similar to the classical 2D incompressible Navier-Stokes equations which is very well understood. In such case, the reader is referred to [82], [103], [108] and [13] for various existing surveys on the question.

Variable bathymetry. When the depth b varies but bounded away from zero, the well-posedness can be proved by adapting the same procedure as in C. D. LEVERMORE and M. SAMMARTINO [79] without additional difficulty.

Neglecting the viscous term A_b in (2.3), i.e. taking $\mu = 0$, System (2.3) reduces to the so-called inviscid lake equations which can be read as

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla q = 0, & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(bu) = 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Inviscid limit has been well treated in the literature, we summarize briefly some recent works. In case that b is constant, System (2.4) becomes the well-known two dimensional Euler equations and the well posedness is widely known due the work of A. MAJDA [85] and V. I. YUDOVICH [115]. When the depth b varies but is bounded away from zero, the well posedness is established by C. D. LEVERMORE, M. OLIVIER and E.-S. TITI in [78]. In [24], D. BRESCH and G. MÉTIVIER allow the varying depth to vanish on the boundary of the spatial domain. The essential tool in establishing the well-posedness in [24] is an elliptic regularity for a degenerate equation on the associated stream function (see Theorem 2.6 in Section 5). This estimate is highly non trivial to obtain if the depth vanishes, and the proof is strongly related to a careful study of the associated Green function.

More recently, C. LACAVE, T. NGUYEN and B. PAUSADER [70] extended the work in [24] treating the case of singular domains and rough bottoms. They proved that the inviscid lake equations are structurally stable under Hausdorff approximations of the fluid domain and L^p perturbations of the depth. Notice that in the later situation, i.e. in the case of nonsmooth lake, the problem of uniqueness of weak solutions remains open due to the lack of the regularity of weak solution. On the other hand, in all previous works, the authors proved the existence of solution only in dimension 2 due to the difficulty caused by the vorticity formulation for higher dimensions. Moreover, a behavior of the bottom b is considered, as for example in [24], the authors assumed that the bottom b to be of the form ϕ^a where $a > 0$ and $\Omega = \{\phi > 0\}$ with $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ and $\nabla \phi \neq 0$ on $\partial\Omega$.

The approach which is used to construct the solution of the inviscid lake equations follows the procedure introduced by YUDOVICH in [115]. First, an artificial viscosity term is added to the vorticity equation. Once a solution to the obtained model is constructed following Leray's theory, we can show that this solution converges to the solution of the inviscid lake equations (2.4) in the limit of vanishing viscosity.

Concerning the viscous lake equations (2.3), we can proceed to construct the solution of the model following two different ways : the first one can be done by adapting the Galerkin procedure to System (2.3) directly. The second one is to pass to the vorticity formulation associated and try to construct a solution to the obtained equations following Yudovich procedure. The reason for preferring the second way lies in the fact that the vorticity equation allows us also to improve the regularity of weak solution of System (2.3). Accordingly, the vorticity equation associated to system (2.3)-(i) is singular when b is close to the boundary. More precisely, we can check that

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \left(b^{-1} \operatorname{div}(2bDu^\mu + 2b \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I}) \right) &= \mu \operatorname{div} \left(\frac{1}{b} \nabla(b\omega) \right) - 2\mu \operatorname{Hess}(\ln b) : \nabla^\perp u^\mu \\ &\quad + 2\mu \nabla(u^\mu \cdot \nabla \ln b) \cdot \nabla^\perp \ln b \end{aligned} \quad (2.5)$$

where $\omega = \operatorname{curl} u^\mu$ and Hess denotes the Hessian matrix. As a consequence, we cannot try to construct the solution of System (2.3)-(i) using the vorticity equation (2.5) and whence, no regular solution can be inspired by this way (the vorticity formulation is one among of key tools used to study the regularity of solution of the incompressible Navier-Stokes equations). For this reason, in Theorem 2.2 (Section 4), we adapt the work of J. SIMON on the incompressible Navier-Stokes equations (first approach) where we prove the existence and uniqueness of global weak solutions of System (2.3)-(i) when the depth b is assumed to be a *power type weight* and satisfies some technical conditions : so we will assume that b is strictly positive in Ω and identically zero on the shore $\partial\Omega$. This assumption leads to equations with degenerate coefficients. We shall see that most of the properties of the classical Sobolev spaces remain true in the case of the *Muckenhoupt weighted Sobolev spaces*, see for instance the pioneering work by B. MUCKENHOUT [89] for an introduction to *Muckenhoupt weights*. Besides, simple examples of $\mathcal{A}_q$ -weights are radially symmetric weights of the form $b(x) = |x - x_0|^\alpha$ for $-n < \alpha < n(q-1)$ (see for instance [47]) or more generally the distance functions of

the form $b(x) = \rho(x)^\alpha := \text{dist}(x, M)^\alpha$ for a k -dimensional compact Lipschitzian manifold M and $-(n - k) < \alpha < (n - k)(q - 1)$, where n denotes the dimension of the domain. For further examples we refer to the Appendix section and the references therein. However, no regular solution is showed for System (2.3)-(i). In fact, the major difficulty in obtaining the regularity of the weak solutions of System (2.3)-(i) lies in the fact that the projection operator associated with Helmholtz decomposition does not commute with the viscosity term, and the standard techniques used to derive higher estimates on the velocity u^μ cannot be applied. As we will see, this fact prevents us also to study the convergence from the viscous lake equations (2.3)-(i) to the inviscid one (2.4) when μ tends to zero. Nevertheless, when we consider System (2.3)-(ii), we get a good vorticity equation (see Equation (2.43) in Section 5). Therefore, in this case; we prove in Theorem 2.3 the existence and uniqueness of global weak solutions following the second approach (vorticity formulation). Furthermore, we show that this solution is more regular in space. Accordingly, thanks to the regularity result proved in Theorem 2.3, we prove in Theorem 2.6 that the solution constructed in Theorem 2.3 converges towards the solution of the inviscid lake equations (2.4) when the viscosity coefficient μ goes to zero.

This paper is organized as follows : we introduce in the next section the functional spaces in the degenerate setting. In Section 3, we present some difficulties related to the weighted Sobolev spaces by starting to resolve the degenerate Stokes problem associated to System (2.3)-(i). The well posedness of the model (2.3)-(i) (announced in Theorem 2.2) is given in Section 4. In Section 5, we focus on the analysis of System (2.3)-(ii) (Theorem 2.3) where we show the existence of global weak solutions and we prove moreover that this solution is regular in space under some conditions on the domain (Ω, b) . Section 6 is devoted to study the vanishing viscosity limit of solution of System (2.3)-(ii) in the case when the solution of inviscid lake equations (2.4) is regular enough (Theorem 2.5). The last section is an appendix section in order to recall the *Muckenhoupt* class of weights, to define the weighted functional spaces and to give some properties of them which will be used in our work and finally, we end with some technical lemmas.

2.2 Preliminary section

This section is composed of two paragraphs. The first one is devoted to give a quick review on the derivation of the model of viscous lake equations. In the second one, we introduce the functional spaces that will be used in order to prove the well posedness of the model. However, if we see the Appendix section, we observe that considering Muckenhoupt weights, most of the results in the unweighted case still hold true for the weighted one. However, the weighted context also causes difficulties. A big difficulty concerns Sobolev-like embedding theorems. Compared to the unweighted case, the known embedding theorems cause a greater loss of regularity. This problem becomes important when dealing with the Navier-Stokes equations since embedding theorems are crucial for estimating the nonlinear term.

2.2.1 Formal derivation of the model

The geometry under consideration is depicted in Figure 1. The horizontal position coordinates are denoted $x = (x_1; x_2)$ and range over the horizontal domain Ω , so that the fixed lateral boundaries are located at $x \in \partial\Omega$. The vertical position coordinate z ranges from the fixed bottom at $z = -b(x)$ to $z = h(x)$, the height of the fluid over the mean free surface at $z = 0$. All quantities are assumed to vary horizontally on typical scales X and vertically on scales on the order of the mean depth $z = -B$. Hence, the domain occupied by the fluid, which will be denoted by Σ , is denoted by

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Omega, -b(x) < z < h(x)\}.$$

The domain Ω is assumed to be bounded with smooth boundary $\partial\Omega$. Because no fluid enters or leaves the basin, the average level of the top surface will be independent of time. The bottom b is assumed to be positive smooth function over the closure of Ω .

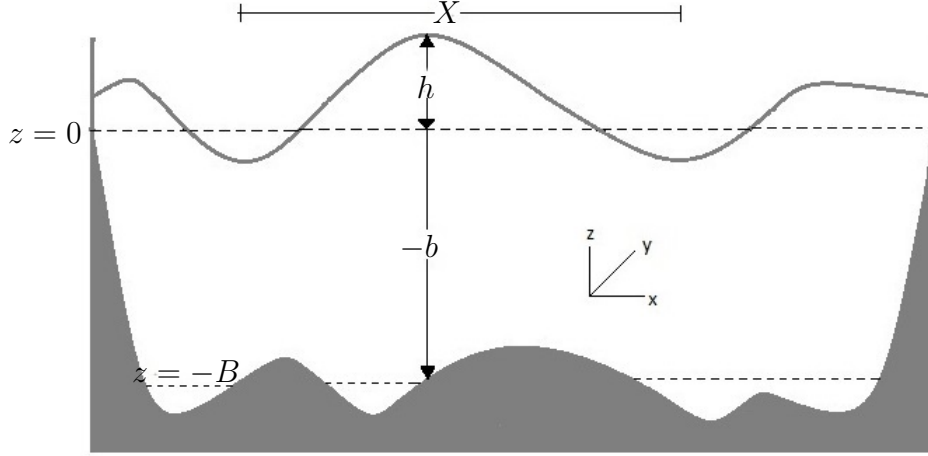


FIGURE 2.1 – Geometry of the basin

We start from the 3D incompressible Navier-Stokes equations for homogeneous fluids. The derivation of viscous shallow water equations follows from depth-integrating the Navier-Stokes equations in the case where the horizontal length scale is much greater than the vertical length scale, i.e.,

$$\delta = \frac{B}{X} \ll 1.$$

Under this condition, conservation of mass implies that the vertical velocity of the fluid is small. It can be shown from the momentum equation that vertical pressure gradients are nearly hydrostatic, and that horizontal pressure gradients are due to the displacement of the pressure surface implying that the horizontal velocity field is constant throughout the depth of the fluid. Vertical integration allows us to remove the vertical velocity from

the equations. The shallow water equations are thus derived. For more details, see [79], [25], [26].

After that, we consider the regime when the Froude number (the ratio of typical horizontal speeds to gravity wave speeds) is small and the wave amplitude is very small. In this limit, the evolution of the vertically averaged velocity is governed by the so-called viscous lake equations (2.3) (see [22]). Noticing that under the same scaling assumptions but starting from three-dimensional incompressible Euler flow, the so-called lake equations, see [31], and great lake equations, see [32], have been derived. Just as incompressible fluid dynamics describes the large scale vertical motion of a fluid while suppressing its acoustic waves, the lake equations describe the large scale currents in a body of shallow water while suppressing its gravity waves. Indeed, the well established validity of incompressible fluid dynamics gives us confidence in the validity of not only the lake equations, but also the *rigid lid* equations.

Noting that the main point of discussion usually made in the physics literature when discussing the existence, rather the regularity of the velocity solution of a system describing the motion of fluid confined to a shallow basin with varying bottom topography is the influence of the bottom along the domain $\bar{\Omega}$ and the regularity of the domain $\bar{\Omega}$. Owing to the great depth of oceanic basins, bottom stresses are often considered unimportant in marine studies. In contrast, the shallowness of lake basins calls for careful treatment of bottom stresses. Nonetheless, we assume here that the domain Ω is smooth enough. However, it remains to analyze the effect of the bottom on the behavior of the velocity of the flow. To do so, at least formally, we give later two simple examples where we make a short comparison which explains what we are talking about. Simultaneously, it must not be forgotten that the situation here is more complicated because the depth vanishes at the boundary $\partial\Omega$ and hence it is very interesting to know how b varies close to the boundary before doing this analysis. In order to keep ideas clear and avoid unpleasant technicalities, we wish here sheds a little light in two following situations. Indeed, we wish here to spotlight on the following two situations : let us start by trying to design two pictures illustrating the following situations : the first one corresponds to the case when $b = \rho(x)^\alpha$ with $\alpha < 1$. In this case, the vector ∇b grows to infinity close to the boundary. The second case is when $\alpha > 1$. In such case, the vector ∇b vanishes close to the boundary.

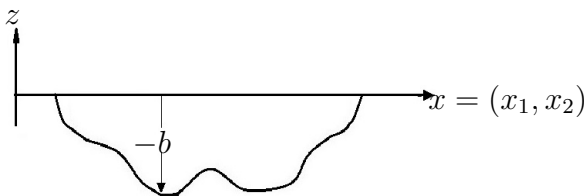


Figure 2-a. $b = \rho^\alpha$, $\alpha < 1$

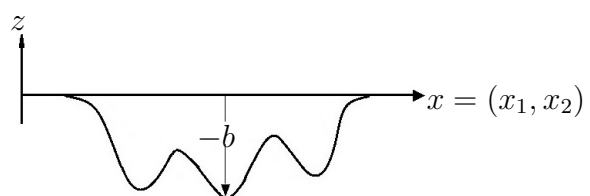


Figure 2-b. $b = \rho^\alpha$, $\alpha > 1$

FIGURE 2.2 – Examples

Nevertheless, in the first case the curvature of b close to the boundary becomes as a smooth curve and the flow in this case slip and return smoothly. Together, in the mathematical literature, the previous analysis is also more logic because the velocity will be more singular when the parameter α grows. In the second case, the domain presents a cusp and the mathematical analysis is out of reach actually.

Denoting by u the velocity of the flow confined in the basin, we want to show at least formally, how the parameter α affects the behavior of u . In Figure 2-a which is the case considered in this paper, the domain is Lipschitz due to the slop of b close to the shore. Let us now explain in few words the effect of the bathymetry behavior close to the shore on the possible regularity of the velocity field. Indeed, for $u = 1/\rho(x)^\beta$ and $b = \rho(x)^\alpha$. It is easy to show that the velocity u belong to $L_b^2(\Omega)$ if $\beta < (1 + \alpha)/2$ and then when α becomes small, the velocity u becomes regular in the sense that the rate of explosion of u close to the boundary is less severity, while when α grows, the rate becomes more severity.

2.2.2 Functional spaces

We prove that the viscous lake model (2.3) is well posed with these choices of viscosity term cited in the introduction. We use Sobolev spaces with weight b . For this reason, let us introduce the following space : the space of infinitely differentiable and compactly supported functions, which satisfies the weighted incompressibility condition :

$$\mathcal{V}_b(\Omega) = \{u \in (C^\infty(\Omega))^2; \operatorname{div}(bu) = 0 \text{ in } \Omega, \quad bu \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Also, we define the spaces

$$H_b = \{u; u \in L_b^2(\Omega), \operatorname{div}(bu) = 0, \quad bu \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

$$V_b = \{u; u \in H_b^1(\Omega), \operatorname{div}(bu) = 0, \quad bu \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

The definition of weighted Lebesgue and Sobolev spaces can be found in the Appendix section. Nevertheless, we will shed here a little light on the the definition of the trace operator since it will be necessary to understand the difficulties caused by the presence of boundary conditions. Similar difficulties can be also appears when we proceed to study the existence of weak solution for compressible Navier-Stokes equations in suitably bounded domains when the viscosity coefficients vanish on vacuum, see for instance [17]. However, for a weight of *Muckenhoupt* type, the definition of trace operator is well defined. The reader at this stage can consult the works of A. FRÖHLICH in [50], [52] for more explanation about the definition of the trace of weighted Sobolev spaces with Muckenhoupt weights. In this work, we restrict ourselves mostly to such weight whose expression is given by

$$b = \rho^\alpha(x), \quad 0 < \alpha < 1 \text{ (or } 1/2), \quad \rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \text{ for } x \in V(\partial\Omega),$$

where $V(\partial\Omega)$ is a neighborhood of the boundary $\partial\Omega$. Before giving a definition of the trace operator in this situation, let us just make our assumptions on the domain Ω more precise.

(I) For an integer m , $1 \leq m \leq 2$, we set $Q_m = (0, 1)^m$. We suppose that there exists a bilipschitz mapping

$$B : Q_2 \rightarrow \Omega, \quad \text{such that} \quad B(\overline{Q_1}) = \partial\Omega.$$

We are able now to state the result proved by A. NEKVINDA in [92].

Theorem 2.1. ([92], Theorem 2.8). *Suppose the Hypothesis (I) holds. Then for $b = \rho^\alpha(x)$, $-1 < \alpha < q - 1$, there exists a unique bounded linear operator*

$$T_b^{1,q}(\partial\Omega) : W_b^{1,q}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1+\alpha}{q},q}(\partial\Omega),$$

such that

$$T_b^{1,q}(\partial\Omega)(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

Remark 2.1. Notice that, one can find a lot of domains Ω whose satisfy the condition (I). In fact, because of Riemann Theorem's, we know that if Ω is a non-empty simply connected open subset of the complex number plane $\mathbb{C}$ which is not all of $\mathbb{C}$, then there exists a biholomorphic mapping f (i.e. a bijective holomorphic mapping whose inverse is also holomorphic) from Ω onto the open unit disk. More information about this theorem and its application can be founded in the the book of C. POMMERENKE [97].

As a consequence of Theorem 2.1, we remark that if $f \in H_{\rho^\alpha}^1(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$ the trace of f is well defined and belong to $L^2(\partial\Omega) \hookrightarrow L_b^2(\partial\Omega)$. This consequence helps us to define the boundary integrals coming from the Navier boundary conditions (see the boundary integrals in (2.7) for example).

Throughout the paper (except the cases when we mention the regularity of Ω), we assume that the domain Ω satisfies Hypothesis (I).

Remark about the notation : Let us fix some notations which will be used throughout in the sequel :

- $Du : Dv = \sum_{i,j=1}^2 Du_{i,j} Dv_{i,j}$.
- $\nabla b \otimes u := (\partial_j b u_i)_{1 \leq i,j \leq 2}$.
- We shall say that u is a b-divergence free or u satisfies the b-incompressibility condition if $\text{div}(bu) = 0$.
- If E is a Banach space and $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is an open domain, we denote by $\mathcal{C}_u(\Omega, E)$ the set of all uniformly continuous functions from Ω into E .
- A function $f \in C([0, T]; H_b - \text{weak})$ if and only if $\lim_{t \rightarrow t_0} |\langle f(t) - f(t_0), g \rangle_b| = 0$, $\forall g \in H_b$, $\forall t_0 \in [0, T]$.

2.3 On the coercivity of a bilinear form

We consider in this section the degenerate Stokes problem below where we prove a weighted version of second Korn inequality for all functions in $H_b^1(\Omega)$ satisfying the "b-incompressibility condition", namely $\operatorname{div}(bu) = 0$. In the proof, we exclude the case when the domain Ω is a disk, b is radial and b is not identically zero at the boundary $\partial\Omega$. The reason will be explained in details in the proof and it is reformulated in Remark 2.2. However, these conditions will be eliminated when we study the nonstationary case because the time-derivative term gives us further estimate on the velocity u (as in Lions-Tartar Theorem, [[103], Theorem 7.7]) which can help us to prove such an inequality without assuming the above conditions.

The importance of showing this inequality is illustrated by the fact that it allows us to establish (2.27) which is necessary in the proof of Theorem 2.2. Nevertheless, for A_b given in (i), we consider the following System,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(2bD(u) + 2b\operatorname{div} u \mathbb{I}) + b\nabla p &= bf, & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(bu) &= 0, & \text{in } \Omega, \\ bu \cdot n &= 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ 2b(D(u) \cdot n + \operatorname{div} u \mathbb{I} \cdot n) \cdot \tau + \eta bu \cdot \tau &= 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

where n and τ means the unit normal and tangential vector at the boundary respectively, $\eta = \eta(x, \mu) \geq 0$ is a bounded turbulent boundary drag coefficient defined on $\partial\Omega$.

The Navier boundary condition, which has been firstly used by Navier in 1872, means that there is a stagnant layer of fluid close to the wall allowing the fluid to slip, and the slip velocity is proportional to the shear stress.

Therefore, we define the bilinear form $a(u, v) : V_b \times V_b \longrightarrow \mathbb{R}$ by

$$a(u, v) = (Tu, v) = 2 \int_{\Omega} D(u) : D(v) b \, dx + 2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div} v b \, dx + \int_{\partial\Omega} \eta u \cdot v b \, ds \quad (2.7)$$

and the linear form $L : V_b \longrightarrow \mathbb{R}$ by

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v b \, dx.$$

We introduce the weak elliptic Stokes problem : find $u \in V_b$ such that

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V_b. \quad (2.8)$$

Proposition 2.1. *Suppose that $b \in \mathcal{A}_2$ and $\eta(x)$ is defined as above. We exclude here the case when the domain Ω is a disk, b is radial and not identically zero on the boundary $\partial\Omega$. Then for $f \in L_b^2(\Omega)$, there exists a unique solution $u \in V_b$ solving the weak elliptic Stokes problem (2.8).*

Proof. The proof is based on the Lax-Milgram theorem. The difficulty is located in the

proof of the coercivity of the bilinear form a . Remarkably, since b vanishes at the boundary, then the boundary integral $\int_{\partial\Omega} \eta |u|^2 b \, ds$ does not have any effect on the proof of this coercivity. A key tool employs here is the "b-incompressibility" condition, $\operatorname{div}(bu) = 0$. So, let us just sketch the proof.

We shall prove that

$$\|D(u)\|_{L_b^2(\Omega)} \geq \|u\|_{H_b^1(\Omega)} \quad \forall u \in V_b. \quad (2.9)$$

Indeed, assume that the inequality (2.9) is not true. Then there is a sequence (u_n) such that

$$\|u_n\|_{H_b^1(\Omega)} = 1, \quad \|D(u_n)\|_{L_b^2(\Omega)} < \frac{1}{n} \quad \forall n > 1.$$

Hence, there is a subsequence, again denoted by (u_n) and $u \in H_b^1(\Omega)$ such that

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ weakly in } H_b^1(\Omega), \text{ strongly in } L_b^2(\Omega), \\ &\text{and } \|D(u_n)\|_{L_b^2(\Omega)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

By the first weighted Korn's inequality (see Theorem 6 in [63]), it can be seen that the sequence (u_n) is a Cauchy sequence in $H_b^1(\Omega)$, and then

$$u_n \rightarrow u \text{ strongly in } H_b^1(\Omega).$$

Thus we get that $D(u) = 0$, which means that u is infinitesimal rigid motion :

$$\vec{u} = \vec{a} + c(x_2, -x_1)^t,$$

where $\vec{a}$ and c are constants. But as $u \in V_b$, then $\operatorname{div}(bu) = 0$, and thus we have to solve the following system

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla)b = 0, & \text{in } \Omega, \\ b > 0, & \text{in } \Omega, \\ b = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

For $\vec{u} = \vec{a} + c(x_2, -x_1)^t$, we get

$$(a_1 + cx_2) \frac{\partial b}{\partial x_1} + (a_2 - cx_1) \frac{\partial b}{\partial x_2} = 0. \quad (2.11)$$

We define the characteristic curve associated to equation (2.11) by

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ b = b(t) \end{pmatrix}$$

solution of

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1 + cx_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2 - cx_1, \\ \frac{db}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

After a simple calculation, one has that the characteristics curves are circles of center $(\frac{a_2}{c}, \frac{a_1}{c})$ and radius $\frac{a_1^2}{c^2} + \frac{a_2^2}{c^2} + c_0$ where c_0 is a constant. A solution $b = b(x_1, x_2)$ of (2.11) is a integral surface which will be constant along the characteristic curve. Now, let (x_1, x_2) be a point on $\partial\Omega$. If $\partial\Omega$ is not a circle, then there exists a characteristic curve passing through this point which will have an intersection with Ω . Since $b(x_1, x_2) = 0$ and b is constant along the curve, then b is zero at the intersection between the curve and Ω which is a contradiction because b is strictly positive in Ω . Thus $\vec{u} = 0$, which is also a contradiction with $1 = \|u_n\|_{H_b^1(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{H_b^1(\Omega)}$. This completes the proof.

Moreover, the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ is continuous from $V_b \times V_b$ to H_b . Indeed, let u and v in V_b , then by Hölder inequality we have

$$|a(u, v)| \leq 2\|D(u)\|_{L_b^2(\Omega)}\|D(v)\|_{L_b^2(\Omega)} + 2\|\operatorname{div} u\|_{L_b^2(\Omega)}\|\operatorname{div} v\|_{L_b^2(\Omega)} \\ + \|\eta(x)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|u\|_{L_b^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L_b^2(\partial\Omega)}.$$

Using Trace theorem, we get

$$|a(u, v)| \leq 4\|u\|_{H_b^1(\Omega)}\|v\|_{H_b^1(\Omega)} + C\|u\|_{H_b^1(\Omega)}\|v\|_{H_b^1(\Omega)}.$$

Moreover the linear form L is continuous

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \right| \leq \|f\|_{L_b^2(\Omega)}\|v\|_{L_b^2(\Omega)}.$$

Now, applying Lax-Milgram theorem, we obtain that there exists a unique $u \in V_b$ which is a weak solution of system (2.6).

Remark 2.2. *The case where the domain Ω is a disk, b is radial and not identically zero on $\partial\Omega$, $u = c(x_2, -x_1)^t$ is a weak solution of system (2.6) with $f = 0$, then in this case one cannot prove the above coercivity inequality. Nevertheless, in the next section when we construct a global weak solution of system (2.3)-(i) we do not need these assumptions in the proof. Precisely, before showing Estimate (2.27), it suffices according to Lions-Tartar Theorem to prove*

$$a(u, u) + \|u\|_{H_b} \geq \|u\|_{V_b}, \quad \forall u \in V_b. \quad (2.13)$$

Indeed, if we repeat the proof of the above proposition by trying to prove (2.13) instead of (2.9), we can easily show the contradiction.

2.4 Analysis of system (2.3) with diffusion (i)

Our goal in this section is to establish the existence and uniqueness of global weak solutions of the viscous lake equations in the case when $A_b = -\mu \operatorname{div}(2bD(u^\mu) + 2b \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I})$. Unfortunately, we leave aside here the question concerning the regularity of weak solution since it needs an adequate analysis of the weights and the study of the regularity of solutions of some degenerate elliptic and parabolic equations. This subject will be discussed in a forthcoming paper. In the first subsection, we prove the global existence

of weak solutions and the second subsection is devoted to prove the uniqueness of the weak solutions.

In this section, our system under study reads as follows

$$\begin{cases} \partial_t(bu^\mu) + \operatorname{div}(bu^\mu \otimes u^\mu) - 2\mu \operatorname{div}(bD(u^\mu) + b \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I}) + b \nabla p^\mu = 0, & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(bu^\mu) = 0, & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2.14)$$

which will be coupled with the following initial and boundary conditions

$$u^\mu|_{t=0} = u_{in}^\mu, \quad \text{in } \Omega, \quad (\text{defined in a weak sense described below}), \quad (2.15)$$

$$bu^\mu \cdot n = 0, \quad 2b(D(u^\mu) \cdot n + \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I} \cdot n) \cdot \tau + \eta b u^\mu \cdot \tau = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2.16)$$

Weak formulations. We wish to introduce a notion of weak solution of Problem (2.14)-(2.16). Before that, let us introduce the following space

$$\mathcal{W}_b = \{v \in V_b \cap H_b^2; v \text{ satisfies (2.16)}\}.$$

For all $u^\mu \in \mathcal{W}_b$ and $v \in V_b$, we have

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \operatorname{div}(2bD(u^\mu) + 2b \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I}) \cdot v \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega} D(u^\mu) : D(v) b \, dx + 2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u^\mu \operatorname{div} v b \, dx - \int_{\partial\Omega} 2b(D(u^\mu) \cdot n + \operatorname{div} u^\mu \mathbb{I} \cdot n) \cdot v \, ds \\ &= 2 \int_{\Omega} D(u^\mu) : D(v) b \, dx + 2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u^\mu \operatorname{div} v b \, dx + \int_{\partial\Omega} \eta u^\mu \cdot v b \, dx, \end{aligned}$$

where we used (2.16) in the above computation. This motivates our notion of weak solution.

Definition 2.1. For a given viscosity $\mu > 0$ and $u_{in}^\mu \in H_b$, we say that u^μ is a weak solution of Problem (2.14)-(2.16) if

$$u^\mu \in L^\infty(0, T; H_b) \cap L^2(0, T; V_b) \cap C([0, T]; H_b - \text{weak})$$

$$u^\mu|_{t=0} = u_{in}^\mu \quad (\text{in a weak sense})$$

and

$$\frac{d}{dt} \langle u^\mu, v \rangle_b + (u^\mu, u^\mu, v) + a(u^\mu, v) = 0 \quad \forall v \in V_b, \quad (2.17)$$

where we have defined the following trilinear form :

$$(u, v, w) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) v \cdot w b \, dx,$$

and

$$a(u^\mu, v) = 2 \int_{\Omega} D(u^\mu) : D(v) b \, dx + 2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u^\mu \operatorname{div} v b \, dx + \int_{\partial\Omega} \eta u^\mu \cdot v b \, ds.$$

As u^μ belongs to V_b , then $\operatorname{div}(bu^\mu) = 0$ in Ω and $bu^\mu \cdot n = 0$ on $\partial\Omega$, hence

$$\begin{aligned} (u^\mu, u^\mu, u^\mu) &= \int_{\Omega} (u^\mu \cdot \nabla) u^\mu \cdot u^\mu b \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} bu^\mu \cdot \nabla |u^\mu|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(bu^\mu) |u^\mu|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} bu^\mu \cdot n |u^\mu|^2 \, ds = 0. \end{aligned}$$

The condition $u^\mu|_{t=0}$ should be understood in a weak sense :

$$\left(\int_{\Omega} u^\mu \cdot v \, b \, dx \right) (0, x) = \int_{\Omega} u_{in}^\mu \cdot v \, b \, dx, \quad (2.18)$$

for all $v \in V_b$.

Remark 2.3. Remark that unlike the case of classical 2D Navier-Stokes equations, the function u here is not continuous in time. As we will show later, the function bu is continuous in time and this fact make since to take the solution u as a test function.

Our main result in this Section is the following Theorem.

Theorem 2.2. Assume that the weight b satisfies the following conditions

$$b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\Omega) \quad \text{with} \quad b > 0 \text{ in } \Omega, \quad (2.19)$$

$$b = \rho(x)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1/2, \quad \text{where} \quad \rho(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \text{ for } x \in V(\partial\Omega), \quad (2.20)$$

where $V(\partial\Omega)$ is a neighborhood of the boundary. Moreover, suppose that the drag coefficient $\eta(x) \geq 0$. Then, for $u_{in}^\mu \in H_b$, there exists a unique weak solution of system (2.14)-(2.16) in the sense of Definition 2.1. Furthermore, there exists a function p^μ with $\nabla p^\mu \in W^{-1,\infty}(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$ such that the couple (u^μ, p^μ) is a solution in the sense of distribution of problem (2.14)-(2.16). More precisely, there exists a unique couple (u^μ, p^μ) solution of Problem (2.14)-(2.16) provided that $\int_{\Omega} p^\mu \, dx = 0$.

Remark 2.4. Notice that the integral $\int_{\Omega} p^\mu \, dx$ has a sense if $\nabla p \in H_b^{-1}(\Omega)$ because since $b \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \int_{\Omega} b^{-1} \, dx < \infty$) then we can write

$$\int_{\Omega} |p| \, dx = \int_{\Omega} |p| b^{1/2} b^{-1/2} \, dx \leq \int_{\Omega} |p|^2 b \, dx \int_{\Omega} b^{-1} \, dx \leq c \int_{\Omega} |p|^2 b \, dx < \infty. \quad (2.21)$$

On the other hand, we can follow the method proposed by Tartar in the classical Sobolev spaces in order to prove that for all $p \in X$

$$\|p\|_{L_b^2(\Omega)} \leq c \|\nabla p\|_{H_b^{-1}(\Omega)}, \quad (2.22)$$

where

$$X := \{p \in H_b^{-1}(\Omega), \nabla p \in H_b^{-1}(\Omega) \mid p \neq \text{cte}\}.$$

This method can be found in the book of Fabrie-Boyer [13].

Remark 2.5. We remark that since $b = \rho(x)^\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$, then $b \in \mathcal{A}_{3/2}$ (see the Introduction). Hence we can apply the properties satisfied by a weight in $\mathcal{A}_{3/2}$.

2.4.1 Global solution of the viscous lake equation

This subsection is devoted to prove the existence and uniqueness of global weak solutions. Our proof differs from the classical proof of the well posedness of the 2D Navier-Stokes equations by using the weighted Sobolev spaces. In fact, due to the presence of b in the diffusion operator and the "b-incompressibility condition" in (2.3), weighted Sobolev spaces are the natural ambient spaces. In this subsection, we will omit the indices μ in u^μ for the sake of simplicity.

As we have mentioned in the beginning of Section 2, the embedding theorems in weighted spaces cause a greater loss of regularity. In the next Lemma when we wish to establish the a priori estimates concerning the nonlinear term, we will see that we need $b \in \mathcal{A}_{3/2}$. This fact is strongly related to the regularity of the pressure proved in the end of Proposition 2.2. The details are contained in the following Lemma.

Lemma 2.1. *Let Ω be an open bounded Lipschitz domain of $\mathbb{R}^2$, and $b \in \mathcal{A}_q$ with $1 < q \leq 3/2$ and*

$$u \in L^2(0, T; V_b), \quad v \in V_b.$$

Then

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; (L_b^6(\Omega))^2), \\ (u \cdot \nabla)u &\in L^1(0, T; (L_b^{3/2}(\Omega))^2), \\ (u \cdot \nabla)u \cdot v &\in L^1(0, T; L_b^1(\Omega)), \end{aligned}$$

and there exists a positive real number $C(\Omega)$ independent of u and v such that

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0, T; (L_b^6(\Omega))^2)} &\leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{(L^2(0, T; L_b^2(\Omega)))^4}, \\ \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot b \, dx \right| &\leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{(L^2(0, T; L_b^2(\Omega)))^4}^2, \\ \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot v \cdot b \, dx \right| &\leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{(L^2(0, T; L_b^2(\Omega)))^4}^2 \|\nabla v\|_{(L_b^2(\Omega))^4}. \end{aligned}$$

Proof. Let $u \in L^2(0, T; V_b)$. By Lemma 2.11, we have

$$H_b^1(\Omega) \hookrightarrow L_b^6(\Omega).$$

Then $u \in L^2(0, T; (L_b^6(\Omega))^2)$ and the first inequality is proved.

The mapping $(a, b) \mapsto (a \cdot \nabla)b$ is continuous from $V_b \times V_b$ in $(L_b^{3/2}(\Omega))^2$, so it follows that

$$(u \cdot \nabla)u \in L^1(0, T; (L_b^{3/2}(\Omega))^2).$$

Now, using Lemma 2.11, we deduce that

$$L_b^{3/2}(\Omega) \hookrightarrow W_b^{-1, q}(\Omega) \quad \forall q \leq 3.$$

In fact, the choice of $b \in \mathcal{A}_{3/2}$ is not arbitrary. Later, when we proceed to prove the existence and the regularity of the pressure, we need to show that $u \cdot \nabla u \in H_b^{-1}(\Omega)$ and before that, if we start by taking $b \in \mathcal{A}_s$, we get using again Lemma 2.11 that $u \in L_b^{2s/s-1}(\Omega)$ which implies that $u \cdot \nabla u \in L_b^{2s/2s-1}(\Omega)$. Now, if we want to use the second embedding in Lemma 2.11, we should suppose that

$$s \leq \frac{2s}{2s-1} \Leftrightarrow s \leq \frac{3}{2}.$$

This justifies the reason of choosing $b \in \mathcal{A}_{3/2}$. Hence, one can deduce that

$$(u \cdot \nabla)u \in L^1(0, T; (W_b^{-1,3}(\Omega))^2).$$

As the mapping $d \mapsto d \cdot v$ is continuous from $L_b^{3/2}(\Omega)$ in $L_b^{6/5}(\Omega) \hookrightarrow L_b^1(\Omega)$, then by using Hölder inequality and the fact that $u \in V_b \hookrightarrow L_b^6(\Omega)$, one can deduce

$$(u \cdot \nabla)u \cdot v \in L^1(0, T; L_b^1(\Omega)),$$

and thus the last inequality is proved.

The main result will be the following proposition constructed through a Galerkin procedure.

Proposition 2.2. *Suppose $u_{in} \in H_b$. Then there exists $u \in L^2(0, T; V_b) \cap L^\infty(0, T; H_b)$ satisfying (2.17) and (2.18). Furthermore, there exists a unique p with $\nabla p \in W^{-1,\infty}(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$ such that the couple (u, p) is a solution in the sense of distribution of problem (2.14)-(2.16) provided that $\int_\Omega p \, dx = 0$.*

Proof. We follow the strategy of proof introduced in chapter 9 in [103] with a small technical modification due to the presence of the weight b in our equations.

The Galerkin procedure. We apply Galerkin's procedure. Since V_b is separable, then there exists a sequence $w_1, \dots, w_m$ of elements which is free and total in V_b . For each m , we define approximate solution u_m as follows

$$u_m(t, x) = \sum_{i=1}^m u_{mi}(t) w_i(x),$$

and

$$\langle \partial_t u_m, w_j \rangle_b + (u_m, u_m, w_j) + a(u_m, w_j) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.23)$$

$$\int_\Omega (u_m(0, x) - u_{0m}(x)) \cdot w_j(x) b \, dx = 0, \quad (2.24)$$

where u_{0m} is the orthogonal projection in H_b of u_{in} onto the space spanned by $w_1, \dots, w_m$. As usual the coefficients $u_{mi}(t)$ are the solutions of the set of the m nonlinear ordinary differential equations (ODEs) one obtains by inserting u_m and w_i for $i = 1, \dots, m$, in

(2.17). The initial conditions for these ODEs are given by projecting the initial condition u_{in} onto the space generated by the w_i , for $i = 1, \dots, m$. Each of the approximate u_{mi} exists for a time t_m . With the a priori estimates that we shall obtain in the next step, we find that the existence of the u_m is global in time.

The a priori estimates. Firstly we have

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L_b^2}^2 + a(u_m, u_m) = 0. \quad (2.25)$$

From the above equation one has that

$$u_m \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; H_b). \quad (2.26)$$

Furthermore, by integrating the energy estimate (2.25) over $[0, T]$ and using Inequality (2.9) (see also Remark 2.2) we obtain immediately that

$$u_m \text{ is bounded in } L^2(0, T; V_b). \quad (2.27)$$

Fractional estimate with respect to time. In fact, we need further a priori bounds in order to be able to pass to the limit in m . To do so, we wish to establish an estimate fractional in time. For this reason, we take $h > 0$, and we denote by $\tau_h u_m(t) = u_m(t + h)$. We shall prove that there exists $C > 0$ independent of m and h such that : for all m , for $h > 0$,

$$\|\tau_h u_m - u_m\|_{L^2(0, T-h; L_b^2(\Omega))} \leq Ch^{\frac{1}{4}}. \quad (2.28)$$

By integrating Equation (2.23) from t to $t + h$, where $0 < t < t + h$, we get that

$$\int_{\Omega} (u_m(t + h) - u_m(t)) \cdot w_j b \, dx = - \int_t^{t+h} \int_{\Omega} (a(u_m, w_j) + (u_m, u_m, w_j)) \, dx \, ds.$$

We multiply this equation by $u_{mj}(t + h) - u_{mj}(t)$, then we add the resulting equations over j , as j goes from 1 to m . We obtain that

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(t + h) - u_m(t)|^2 b \, dx &= - \int_t^{t+h} \int_{\Omega} (u_m(s) \cdot \nabla u_m(s)) \cdot (u_m(t + h) - u_m(t)) b \, dx \, ds \\ &\quad - 2\mu \int_t^{t+h} \int_{\Omega} (D(u_m(s)) : D(u_m(t + h) - u_m(t))) b \, dx \, ds \\ &\quad - 2\mu \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_m(s)) \operatorname{div}(u_m(t + h) - u_m(t)) b \, dx \, ds \\ &\quad - \int_t^{t+h} \int_{\partial\Omega} \eta(x) u_m(s) (u_m(t + h) - u_m(t)) b \, dz \, ds. \end{aligned}$$

Estimating each term in the left hand side of the above equation using Lemma 2.1, we obtain that

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 b \, dx \\ & \leq c_0 \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L_b^2(\Omega)} \int_t^{t+h} (\|\nabla u_m(s)\|_{L_b^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_m(s)\|_{L_b^2(\Omega)}) \, ds \\ & \quad + \int_t^{t+h} \|u_m(s)\|_{L_b^2(\partial\Omega)} \|u_m(t+h) - u_m(t)\|_{L_b^2(\partial\Omega)} \, ds. \end{aligned}$$

Now, using the Trace theorem, we get

$$\int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 b \, dx \leq \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L_b^2(\Omega)} \int_t^{t+h} g_m(s) \, ds$$

where

$$g_m(s) = c_0 \{ \mu \|\nabla u_m(s)\|_{L_b^2(\Omega)} + \|\nabla u_m(s)\|_{L_b^2(\Omega)}^2 + c \|\nabla u_m(s)\|_{L_b^2(\Omega)} \}.$$

Now, we integrate from 0 to $T-h$, we obtain

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-h} dt \int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 b \, dx \\ & \leq \int_0^{T-h} dt \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L_b^2(\Omega)} \int_t^{t+h} g_m(s) \, ds. \end{aligned} \tag{2.29}$$

By Fubini theorem, the second member becomes

$$\int_0^T g_m(s) \, ds \int_{s-h}^{\bar{s}} \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L_b^2(\Omega)} \, dt,$$

where

$$\bar{s} = \begin{cases} 0 & \text{if } s \leq 0, \\ s & \text{if } 0 \leq s \leq T-h, \\ T-h & \text{if } s \geq T-h. \end{cases}$$

Since $|\bar{s} - s - h| \leq |s - h - s| = h$, then Hölder inequality and Estimate (2.27) give us

$$\begin{aligned} & \int_{s-h}^{\bar{s}} \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L_b^2(\Omega)} \, dt \\ & \leq \left(\int_{s-h}^{\bar{s}} 1^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{s-h}^{\bar{s}} (\|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L_b^2(\Omega)})^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T-h} \int_{\Omega} |\nabla u_m(t+h, x) - \nabla u_m(t, x)|^2 b \, dt \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2h^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 b \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c_1 h^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Using again Estimate (2.27), we obtain that

$$\int_0^T g_m(s) ds \leq c_2.$$

Combining the above estimates with the one in (2.29) yields to

$$\int_0^{T-h} dt \int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 b dx \leq c_1 c_2 h^{\frac{1}{2}},$$

and hence the proof is finished.

Convergence of the sequence u_m and properties of u . We are now in position to show that the solution sequence u_m given by the previous step converges to a weak solution to the problem (2.14)-(2.16). The previous estimates are useful to use the compactness methods and the strategy is hence quite standard. So let us just give a sketch of the proof. By Estimate (2.26), the sequence u_m is bounded in $L^2(0, T; L_b^2(\Omega))$. Then there exists a subsequence and u_m such that

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{in } L^2(0, T; L_b^2(\Omega)) - \text{weakly}.$$

Furthermore, Estimate (2.27) implies that

$$\nabla u_m \longrightarrow \nabla u \quad \text{in } L^2(0, T; L_b^2(\Omega)) - \text{weakly}.$$

Since the sequence $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^2(0, T; H_b^1(\Omega))$ and the injection of $H_b^1(\Omega)$ in $L_b^2(\Omega)$ is compact by Rellich theorem (Lemma 2.12), then thanks to Estimate (2.28) we can deduce from Corollary 10.34 in [103] that the sequence u_m is relatively compact in $L^2(0, T; L_b^2(\Omega))$. Thus

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{in } L^2(0, T; L_b^2(\Omega)). \quad (2.30)$$

The convergence results enable us to pass to the limit. Let ψ be a continuously differentiable function on $[0, T]$ with $\psi(T) = 0$. We multiply (2.23) by $\psi(t)$, and then integrate by parts. This leads to the equation

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u_m \cdot w_j \psi'(t) b dx dt + \int_0^T a(u_m, \psi(t) w_j) dt \\ & + \int_0^T (u_m(t), u_m(t) \cdot \psi(t) w_j) dt = \int_{\Omega} u_{0m} \cdot w_j \psi(0) b dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Passing to the limit with the sequence u_m is easy for the linear term. For the nonlinear term, we apply the next lemma, Lemma 2.2. In the limit, we find that

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u \cdot w \psi'(t) b dx dt + \int_0^T a(u, \psi(t) w) dt \\ & + \int_0^T (u(t), u(t), \psi(t) w) dt = \int_{\Omega} u_0 \cdot w \psi(0) b dx, \end{aligned} \quad (2.32)$$

holds for $w = w_1, \dots, w_m$; by linearity this equation holds for any finite linear combination of the w_j , and by continuity argument (2.32) is still true for any $w \in V_b$.

Now writing in particular (2.32) with $\psi = \phi \in \mathcal{D}((0, T))$, we see that u satisfies (2.17) in the distribution sense.

Lemma 2.2. *If u_m converges weakly in $L^2(0, T; V_b)$ and strongly in $L^2(0, T; H_b)$ then*

$$\int_0^T (u_m, u_m, w_j) dt \longrightarrow \int_0^T (u, u, w_j) dt.$$

Proof. Since $\operatorname{div}(bu_m) = 0$, then we can write

$$\int_0^T (u_m, u_m, w_j) dt = - \int_0^T (u_m, w_j, u_m) dt = - \sum_{i,j=1}^2 \int_0^T (u_m)_i (\nabla w_j)_i (u_m)_i b dx dt.$$

These integrals converge to

$$- \sum_{i,j=1}^2 \int_0^T (u)_i (\nabla w_j)_i (u)_i b dx dt = - \int_0^T (u, w_j, u) dt = \int_0^T (u, u, w_j) dt,$$

and the lemma is proved.

Initial conditions. According to the definition of the spaces $\mathcal{V}_b$ and V_b in Section 2, the space V_b can be viewed as

$$V_b = \overline{\mathcal{V}_b}^{\|\cdot\|_{H_b^1(\Omega)}}$$

Now, we choose an orthonormal basis of V_b such that $w_j \in \mathcal{V}_b$ for all j .

In this case, $\int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot w_j b dx$ is bounded in $L^2(0, T)$ since $(bu_m \cdot \nabla) u_m$ is bounded in $L^2(0, T; (L^1(\Omega))^2)$. Moreover, we have

$$a(u_m, w_j) + (u_m, u_m, w_j) \in L^2(0, T).$$

Thus, Equation (2.23) shows that

$$\partial_t \langle u_m, w_j \rangle_b \quad \text{is bounded in } L^2(0, T), \quad (2.33)$$

and hence, $\int_{\Omega} u_m \cdot w_j b dx$ is bounded in $H^1(0, T)$. On the other hand, we know that $H^1(0, T)$ is compact in $\mathcal{C}_u(0, T)$ (see Theorem 11.8 in [103]) and hence

$$\int_{\Omega} u_m w_j b dx \rightarrow \int_{\Omega} u \cdot w_j b dx \quad \text{in } \mathcal{C}_u(0, T).$$

The above convergence holds also in $L^2(0, T)$ (see (2.30)). In particular,

$$\left(\int_{\Omega} u_m w_j b dx \right)(0) \rightarrow \left(\int_{\Omega} u \cdot w_j b dx \right)(0).$$

Passing to the limit in Equation (2.24) yields to

$$\left(\int_{\Omega} u \cdot w_j b \, dx \right)(0) = \int_{\Omega} u_{in} \cdot w_j b \, dx. \quad (2.34)$$

On other hand, by virtue of Equation (2.17), we have

$$\partial_t \int_{\Omega} u \cdot v b \, dx = \partial_t \langle u, v \rangle_b \in L^1(0, T) \quad \text{for all } v \in V_b,$$

which yields (using Theorem 7.1 in [103]) to

$$\langle u, v \rangle_b \in C([0, T]).$$

Since $u \in L^\infty(0, T; H_b)$ and V_b is dense in H_b , we infer that (see Lemma 7.4 in [103])

$$u \in C([0, T]; H_b - \text{weak}).$$

Regularity in time of the weak solution. Unlike the case of Navier-Stokes equations, here the function bu is continuous in time. Precisely, we have

$$bu \in C(0, T; H_b).$$

Indeed, notice that we have

$$\partial_t(bu) = -bu \cdot \nabla u + 2\mu \operatorname{div}(bD(u) + b \operatorname{div} u \mathbb{I}) - b \nabla p.$$

Now, let us interpret the right-hand side of the above equation as a functional on V_b . We remark that for all $\varphi \in V_b$, we can write

$$\langle b \nabla p, \varphi \rangle_{V_b' \times V_b} = - \int p \operatorname{div}(b\varphi) = 0.$$

For the viscous term, we write

$$\begin{aligned} \langle -2\mu \operatorname{div}(bD(u) + b \operatorname{div} u \mathbb{I}), \varphi \rangle_{V_b' \times V_b} &= 2\mu \int_{\Omega} D(u) : D(\varphi) b \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\varphi) b \, dx \\ &\leq c \|u\|_{V_b} \|\varphi\|_{V_b}. \end{aligned}$$

Using now $u \in L^2(0, T; V_b)$, we deduce that

$$2\mu \operatorname{div}(bD(u) + b \operatorname{div} u \mathbb{I}) \in L^2(0, T; V_b').$$

For the nonlinear term, firstly let us prove that for all $u, v \in L^\infty(0, T; L_b^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V_b)$, we have

$$\int_{\Omega} (bu \cdot \nabla) u \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} (bu \cdot \nabla) v \cdot u \, dx. \quad (2.35)$$

Indeed, for w also in $L^\infty(0, T; L_b^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V_b)$ we have

$$\partial_i((bu_i)v_jw_j) = \partial_i(bu_i)v_jw_j + bu_i(\partial_i v_j)w_j + bu_i v_j(\partial_i w_j).$$

Integrate now over Ω , we get

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(bu)v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} bu \cdot \nabla v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} bu \cdot \nabla w \cdot v \, dx,$$

which implies thanks to the condition $\operatorname{div}(bu) = 0$, that

$$\int_{\Omega} bu \cdot \nabla v \cdot w \, dx = - \int_{\Omega} bu \cdot \nabla w \cdot v \, dx,$$

yields to (2.35) by taking $v = u$. Now, let us prove that

$$(bu \cdot \nabla)u \in L^2(0, T; V_b').$$

Before that, we take a test function $\varphi \in L^2(0, T; V_b)$ and we write

$$\begin{aligned} \left| \langle (bu \cdot \nabla)u, \varphi \rangle_{V_b' \times V_b} \right| &= \left| \int_{\Omega} (bu \cdot \nabla)u \cdot \varphi \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} (bu \cdot \nabla)\varphi \cdot u \, dx \right| \\ &\leq \|u\|_{L_b^4(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L_b^2(\Omega)} \|u\|_{L_b^4(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L_b^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L_b^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L_b^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

In the above estimates, we have used Hölder inequality and weighted Gagliardo-Nirenberg inequalities. Using that $u \in L^\infty(0, T; L_b^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V_b)$, we deduce

$$\|u\|_{L_b^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L_b^2(\Omega)} \in L^2(0, T).$$

Therefore

$$bu \cdot \nabla u \in L^2(0, T; V_b').$$

Now, since $u \in L^2(0, T; V_b)$, this imply that $bu \in L^2(0, T; V_b)$ and hence

$$bu \in C(0, T; H_b).$$

Obtainment of the pressure. Now, we are at the point to show the existence of the pressure in order to finish the proof of Proposition 2.2. The strategy is standard for proving the existence while the regularity part needs a small effort and requires the help of a weighted version of Hardy inequality. Firstly, we observe that by Lemma 2.1 we have $\partial_t u + u \cdot \nabla u \in \mathcal{D}'(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$. Moreover, denoting by

$$f := 2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I},$$

we get $f \in \mathcal{D}'(0, T; L_{b^{-1}}^2(\Omega))$ since $u \in \mathcal{D}'(0, T; V_b)$. By classical argument, we obtain $\operatorname{div} f \in \mathcal{D}'(0, T; H_{b^{-1}}^{-1}(\Omega))$. Now, we wish to prove that $b^{-1} \operatorname{div} f \in H_b^{-1}(\Omega)$. To this purpose, we need here some restriction on the weight b and the following weighted Hardy inequality.

Lemma 2.3. *Let Ω be a two-dimensional domain and the weight b satisfies the conditions (2.19)-(2.20) given in Theorem 2.2. Then for $\psi \in X_b = \{\psi \in L^2(\Omega), b^{-1/2}\nabla\psi \in L^2(\Omega), \psi = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, we have*

$$\left\| \frac{1}{\rho} \frac{\psi}{b^{1/2}} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \frac{\nabla\psi}{b^{1/2}} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proof. See [[23], Lemma 2.3].

Taking $g \in H_{0,b-1}^1(\Omega)$ (included in X_b), then for $f := 2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}$ we have

$$\begin{aligned} \langle b^{-1} \operatorname{div} f, g \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1} &= -\langle f, \nabla(b^{-1}g) \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1} \\ &= -\langle f, b^{-1}\nabla g \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1} + \langle f, \frac{\nabla b}{b} b^{-1}g \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1}, \end{aligned}$$

which can be estimated as

$$\begin{aligned} |\langle b^{-1} \operatorname{div} f, g \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1}| &\leq |-\langle f, b^{-1}\nabla g \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1}| + |\langle f, \frac{\nabla b}{b} b^{-1}g \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1}| \\ &\leq \|f\|_{L_{b-1}^2(\Omega)} \|\nabla g\|_{L_{b-1}^2(\Omega)} + \|f\|_{L_{b-1}^2(\Omega)} \left\| \frac{1}{\rho} \frac{g}{b^{1/2}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|f\|_{L_{b-1}^2(\Omega)} \|\nabla g\|_{L_{b-1}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

The first estimate follows directly from Hölder inequality while we used the previous Lemma in order to estimate the second term. Hence $b^{-1} \operatorname{div} f \in H_b^{-1}(\Omega)$. Thus, we can rewrite Equation (2.17) as

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u - \mu b^{-1} \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) + u \cdot \nabla u, \phi \rangle_{H_b^{-1}, H_{0,b-1}^1} &= 0, \\ \forall \phi = bv \in \{H_{0,b-1}^1(\Omega); \operatorname{div} \phi = 0\}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Now, since $H_b^{-1}(\Omega)$ is also a Banach space and (2.36) holds, then by De Rham's Theorem there exists $p \in \mathcal{D}'(0, T; \mathcal{D}'(\Omega))$ such that

$$\nabla p = -\partial_t u + \mu b^{-1} \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) - u \cdot \nabla u.$$

On the other hand, we have $u \in L^\infty(0, T; H_b) \hookrightarrow L^\infty(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$. Combining this fact with the definition of the space $W^{1,\infty}$, we $\partial_t u \in W^{-1,\infty}(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$ and the other terms belong (see Lemma 2.1 for the nonlinear term) to $L^1(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$ which is included in $W^{-1,\infty}(0, T; H_b^{-1}(\Omega))$. Then, we can deduce that

$$\partial_t u - \mu b^{-1} \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u \mathbb{I}) + u \cdot \nabla u \in W^{-1,\infty}(0, T; H_b^{-1}(\Omega)) \tag{2.37}$$

and hence

$$\nabla p \in W^{-1,\infty}(0, T; H_b^{-1}(\Omega)).$$

2.4.2 Weighted Gagliardo-Nirenberg inequality

We give in this subsection a weighted version of Gagliardo-Nirenberg inequality. We refer the reader to [38] for a large literature on weighted interpolation Sobolev inequality where the weighted Gagliardo-Nirenberg inequality is a consequence of them.

Lemma 2.4. *Let Ω be bounded Lipschitz domain in $\mathbb{R}^2$ and $b \in \mathcal{A}_q, 1 < q \leq 2$. Then, if $u \in H_b^1(\Omega)$ one has*

$$\|u\|_{L_b^4(\Omega)} \leq c \|u\|_{L_b^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L_b^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. This inequality is a direct application of Theorem 1.3 in [38] by taking $q = 4, r = 2, p = 2, \alpha = \beta = \frac{1}{2}$ and for the same weights $w = v_1 = v_2$ which is denoted by b in our work. Noticing that, the weight w was assumed to have a doubling properties which is the case of our weight (see the definition of doubling weights in Definition 2.4). Moreover, the condition **(P)** in this theorem remains true in our case due to theorem 2.6 in the same paper.

2.4.3 Uniqueness of weak solution

We are now able to prove the uniqueness of weak solution. Let u_1 and u_2 be two solutions of (2.14)-(2.16). Then $u = u_1 - u_2$ satisfies

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_b^2(\Omega)}^2 = -2a(u, u) - 2(u, u_1, u).$$

Therefore, by using the weighted Gagliardo-Nirenberg inequality, the coercivity of the bilinear form a (remember that according to the supplement conditions on the couple (Ω, b) , (2.9) holds) and Young inequality, we obtain

$$\begin{aligned} -(u, u_1, u) &\leq c \|u\|_{L_b^4}^2 \|\nabla u_1\|_{L_b^2} \\ &\leq c \|u\|_{L_b^2} \|\nabla u\|_{L_b^2} \|\nabla u_1\|_{L_b^2} \\ &\leq c \|u\|_{L_b^2} (\|u\|_{L_b^2} + \|D(u)\|_{L_b^2}) \|\nabla u_1\|_{L_b^2(\Omega)} \\ &\leq c \|u\|_{L_b^2}^2 \|\nabla u_1\|_{L_b^2} + \|u\|_{L_b^2} (a(u, u))^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_1\|_{L_b^2} \\ &\leq c \|u\|_{L_b^2}^2 \|\nabla u_1\|_{L_b^2} + a(u, u) + c \|u\|_{L_b^2}^2 \|\nabla u_1\|_{L_b^2}^2. \end{aligned}$$

Therefore, one has

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \leq c \|u\|_{L_b^2}^2 (\|\nabla u_1\|_{L_b^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L_b^2}),$$

which readily gives uniqueness by Gronwall's lemma.

Remark 2.6. *In order to study the vanishing viscosity limit in this case, we need as we will show after an L^∞ bound of the function $b^{1/2}u$ for estimating the nonlinear term. Before studying the regularity of the weak solution, we need a careful study of the regularity of solution of some degenerate elliptic and parabolic equation and an adequate analysis of the weight.*

2.5 Analysis of the model (2.3) with diffusion (ii)

We investigate in this Section the well posedness of System (2.3)-(ii) which is given as follows

$$\begin{cases} \partial_t u^\mu + (u^\mu \cdot \nabla) u^\mu - \mu \Delta u^\mu + \nabla p^\mu = 0, & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(bu^\mu) = 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.38)$$

System (2.38) is completed by the following initial and boundary conditions

$$bu^\mu|_{t=0} = bu_{in}^\mu \quad \text{in } \Omega,$$

$$bu^\mu \cdot n = 0 \quad (b \nabla u^\mu \cdot n) \cdot \tau = -b \kappa (u \cdot \tau) \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.39)$$

where κ denotes the curvature of $\partial\Omega$. Next, we introduce several notions of global weak solution of System (2.38)-(2.39). The first one is in terms of the velocity and can be stated as follow.

2.5.1 Weak solution

We now precise our notion of weak solution in the smooth bounded domain Ω . We ask for the following regularities (that echoes those of the initial data) : for all $T > 0$,

$$u^\mu \in L^\infty(0, T; L_b^2(\Omega)), \quad \nabla u^\mu \in L^2(0, T; L_b^2(\Omega)). \quad (2.40)$$

Let us show that these regularities imply

$$bu^\mu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \nabla(bu^\mu) \in L^2(0, T; L^{2/3}(\Omega)). \quad (2.41)$$

The first regularity is easily to proved. For the second one, we write

$$\nabla(bu^\mu) = b \nabla u^\mu + \nabla b \otimes u^\mu \sim b \nabla u^\mu + \rho(x)^{\alpha-1} u^\mu.$$

On the other hand, by virtue of Lemma 2.11, we know that for $u^\mu \in H_b^1(\Omega)$ and $b \in \mathcal{A}_2$, we get $u^\mu \in L_b^4(\Omega)$ which ensures using Lemma 2.10 that $u^\mu \in L^2(\Omega)$. Moreover, since $b \in \mathcal{A}_2$, we get $\nabla b \sim \rho(x)^{\alpha-1} \in L^1(\Omega)$ and hence the regularity desired in (2.41).

We are ready now to introduce the following definition :

Definition 2.2. *Let u_{in}^μ be a vector field such that*

$$\operatorname{div}(bu_{in}^\mu) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad bu_{in}^\mu \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

We say that u^μ is a global weak solution of the velocity formulation of the System (2.38) with initial velocity u_{in}^μ and boundary condition (2.39) if u^μ belongs to V_b , $(bu^\mu \cdot n)$ is well defined and belong to $L^2(0, T; L^{2/3}(\partial\Omega))$, the momentum equation in System (2.38)

is verified in the distribution sense. That is for all b -divergence free vector test functions $\varphi \in C^\infty([0, T]; \bar{\Omega})^2$ such that $b\varphi \cdot n = 0$, there holds that

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} (bu^\mu \cdot \partial_t \varphi + bu^\mu \otimes u^\mu : \nabla \varphi) dx dt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^\mu : \nabla \varphi b dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^\mu : \nabla b \otimes \nabla \varphi dx dt + \kappa \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u^\mu \cdot \tau)(v \cdot \tau) b ds dt \\ & + \int_{\Omega} bu_{in}^\mu \cdot \varphi(0, x) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

We point out that in virtue of (2.40), the boundary integral in Equation (2.42) is well defined. Moreover, as we have seen in the previous section, the function $u^\mu|_{t=0}$ should be understood in a weak sense as (2.18).

The second formulation of weak solution is in terms of vorticity. In fact, when we investigate the regularity of solution of the 2D-incompressible Navier-Stokes equations, it is crucial to work with the associated vorticity formulation, see for instance [39], [49]. In the case of inviscid lake equation ([70], [24]), we use the notion of relative vorticity (some times is called generalized vorticity) which is defined by $\omega^r = b^{-1} \text{curl } u^\mu$. Most importantly, the proof of the existence and uniqueness theorems makes substantial use of the fact that the relative vorticity is bounded for all times which can be established directly from the vorticity equation. Concerning the viscous lake equation, the vorticity equation associated to System (2.38) is regular unlike the case when $A_b = -\mu \text{div}(2bD(u^\mu) + 2b \text{div } u^\mu \mathbb{I})$ (see Equation (2.5)) which allows us to improve the regularity of weak solution and to pass at the limit with the viscosity. Now, letting formally curl operate on the equation of conservation of momentum (2.38)₁, we obtain

$$\partial_t \text{curl } u^\mu + u^\mu \cdot \nabla \text{curl } u^\mu + \text{div } u^\mu \text{curl } u^\mu - \mu \Delta(\text{curl } u^\mu) = 0, \quad (2.43)$$

where we define the operator $\text{curl } u$ for $u = (u_1, u_2)$ as

$$\omega := \text{curl } u^\mu = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Now, defining $\omega^r = b^{-1} \text{curl } u^\mu$, we can rewrite Equation (2.43) as

$$\partial_t \omega^r + u^\mu \cdot \nabla \omega^r - \mu b^{-1} \Delta(b\omega^r) = 0. \quad (2.44)$$

The relationship between the velocity and the vorticity is given by the equations

$$\text{div}(bu^\mu) = 0, \quad \text{curl } u^\mu = b\omega^r, \quad bu^\mu \cdot n|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.45)$$

This leads, see for instance [78], [24] to introduce a stream function ψ such that

$$u^\mu = \frac{1}{b} \nabla^\perp \psi = \frac{1}{b} (\partial_2 \psi, -\partial_1 \psi), \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.46)$$

Then, ψ verifies the system

$$\text{div}\left(\frac{1}{b} \nabla \psi\right) = f, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.47)$$

Note that, by Hardy's inequality, the space $C_0^\infty(\Omega)$ is dense in the space (see [24])

$$\{\psi \in H_0^1(\Omega); b^{-1/2} \nabla \psi \in L^2(\Omega)\}.$$

Therefore, for $f \in L^2(\Omega)$ the problem

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{b} \nabla \psi\right) = f, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.48)$$

has a unique weak solution ψ in this space, denoted by $\psi = Kf$. Altogether, the full set of velocity-vorticity equations becomes

$$\begin{cases} \partial_t \omega^r + u^\mu \cdot \nabla \omega^r - \mu b^{-1} \Delta(b\omega^r) = 0 & \text{in } \Omega, \\ b\omega^r|_{t=0} = b\omega_{in}^r, & \text{in } \Omega, \quad \omega^r|_{\partial\Omega} = 0, \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{b} \nabla \psi\right) = b\omega^r & \text{in } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \\ u^\mu = \frac{1}{b} \nabla^\perp \psi. \end{cases} \quad (2.49)$$

In the above system, we impose that the relative vorticity ω^r has zero trace at the boundary in order to simplify our computations and to breakdown the difficulties caused by the fact that b vanishes at the boundary.

Now, we are able to give the second formulation of weak solution in terms of vorticity.

Definition 2.3. Let $(u_{in}^\mu, \omega_{in}^r)$ be a pair such that

$$\operatorname{div}(bu_{in}^\mu) = 0, \quad \text{in } \Omega \quad bu_{in}^\mu \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

and

$$\omega_{in}^r \in L_b^2(\Omega), \quad \operatorname{curl}(u_{in}^\mu) = b\omega_{in}^r.$$

We shall say that (u^μ, ω^r) is a global weak solution of the vorticity formulation of System (2.49) with initial data $(u_{in}^\mu, \omega_{in}^r)$ if it satisfies the following properties

$$\omega^r \in L^\infty(0, T; L_b^2(\Omega)) \quad \nabla \omega^r \in L^2(0, T; L_b^2(\Omega)), \quad (2.50)$$

$$\operatorname{div}(bu^\mu) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad bu^\mu \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$\operatorname{curl} u^\mu = b\omega^r \quad (\text{in the distribution sense}),$$

and the momentum equation in System (2.49) is verified in the sense of distribution. That is, for all test functions $\phi \in C_c^\infty([0, T]; \Omega)$, there holds that

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega (b\omega^r \cdot \partial_t \phi + bu^\mu \omega^r \cdot \nabla \phi) dx dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \omega^r : \nabla \phi b dx dt \\ & + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla b \otimes \omega^r : \nabla \phi dx dt + \int_\Omega b\omega_{in}^r \phi(0, x) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

We shall come back to describe the relation between Definition 2.2 and Definition 2.3. Before presenting the main theorems in this section, especially the results concerning the regularity of weak solution and the vanishing viscosity limit, we need to add another hypothesis on the regularity of the domain Ω . Precisely, we impose the following conditions

$$b = \rho^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \Omega = \{\rho > 0\} \quad \text{with} \quad \rho \in C^3(\overline{\Omega}) \quad \text{and} \quad \nabla \rho \neq 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \quad (2.52)$$

These conditions are necessary to improve the regularity of weak solution and to study the vanishing viscosity limit. In fact, when we proceed to show that the weak solution is more regular in space, we will see that an elliptic estimate is required for a degenerate equation on the associated stream-function. This estimate is highly non trivial to obtain when the depth vanishes. It allows us to obtain $W^{1,p}$ estimate of the velocity u^μ once we have $\text{curl } u^\mu \in L^p(\Omega)$, $p > 2$ and u^μ satisfies the two conditions : $\text{div}(bu^\mu) = 0$ and $bu^\mu \cdot n = 0$ (see Theorem 2.6). Moreover, a regularity is required also on the boundary of the domain. Precisely, we should suppose that $\partial\Omega \in C^3$. Noticing that, such an existence of global weak solution of System (2.38)-(2.39) in the case of nonsmooth lakes can be treated following the ideas developed recently on inviscid lake equations in [70]. However, in [70], the authors leave aside the problem of regularity and uniqueness of weak solutions. Consequently, the problem of vanishing viscosity limit of the model of viscous lake remains in the case of nonsmooth lakes is still an interesting and difficult open problem.

Besides, let us make our assumptions on the lake more precise. We assume that

(H) Ω is simply connected domain such that (2.52) holds.

Therefore, we can now state the main theorem in this section. Precisely, our main result is concerned with the existence and the regularity of global weak solution and can be stated as follows

Theorem 2.3. *We assume that Ω and b satisfy the properties cited in (2.52) and Hypothesis (I) and (H) hold. Assume moreover that $\omega_{in}^r \in L_b^2(\Omega)$. Then there exists a unique weak solution of System (2.38)-(2.39) in the sense of Definition 2.2. In addition, we obtain that $\omega \in W^{1,1}(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \cap L^1(0, T; W^{2,2}(\Omega))$ and in particular, we obtain that $u^\mu \in L^2(0, T; C^{1-2/p}(\overline{\Omega}))$, $\nabla u^\mu \in L^2(0, T; L^p(\Omega))$ for all $p < \infty$.*

Proof. At first, let us make a sketch on the construction of global weak solution of System (2.49). Actually, to use directly the result in [41], we consider $b_\epsilon := b + \epsilon > 0$, and we approximate ω_{in}^r by $\omega_{\epsilon, in}^r$. Hence, the first step is to show that there exists a unique

solution ω_ϵ^r of the following system

$$\begin{cases} \partial_t \omega_\epsilon^r + u^\mu \cdot \nabla \omega_\epsilon^r - \mu b_\epsilon^{-1} \Delta(b_\epsilon \omega_\epsilon^r) = 0, & \text{in } \Omega \\ b_\epsilon \omega_\epsilon^r|_{t=0} = b_\epsilon \omega_{\epsilon, \text{in}}^r, & \text{in } \Omega, \quad \omega_\epsilon^r|_{\partial\Omega} = 0, \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{b_\epsilon} \nabla \psi^\epsilon\right) = b_\epsilon \omega_\epsilon^r & \text{in } \Omega, \quad \psi^\epsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_\epsilon^\mu = \frac{1}{b_\epsilon} \nabla^\perp \psi. \end{cases} \quad (2.53)$$

Taking the inner product of the momentum equation in System (2.53) with $b_\epsilon \omega_\epsilon^r$ and integrating by part with respect to space, we obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\omega_\epsilon^r|^2 b_\epsilon dx + \mu \int_\Omega |\nabla \omega_\epsilon^r|^2 b_\epsilon dx - \frac{1}{2} \mu \int_\Omega \Delta b_\epsilon |\omega_\epsilon^r|^2 dx = 0. \quad (2.54)$$

Now, in order to keep our estimates valued with b degenerate and uniform on ϵ , we separate the two situations; the first situation is when we are inside the domain and the second is when we are close to it. More precisely, since b_ϵ is concave close to the boundary, then there exists $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ such that $|(b_\epsilon)^{-1/2} \Delta b_\epsilon| \leq c$ for all $x \in \tilde{\Omega}$ with c independent on ϵ . Moreover, the function $-\Delta b_\epsilon(x)$ is positive for all $x \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$. To this purpose, we rewrite Equation (2.54) as

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\omega_\epsilon^r|^2 b_\epsilon dx + \mu \int_\Omega |\nabla \omega_\epsilon^r|^2 b_\epsilon dx - \frac{1}{2} \mu \int_{\tilde{\Omega}} \Delta b_\epsilon |\omega_\epsilon^r|^2 dx - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} \Delta b_\epsilon |\omega_\epsilon^r|^2 dx = 0. \quad (2.55)$$

Hence, thanks to the concavity of b_ϵ close to the boundary, the last integral in Equation (2.55) remains positive and hence one has

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega_\epsilon^r\|_{L_{b_\epsilon}^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla \omega_\epsilon^r\|_{L_{b_\epsilon}^2(\Omega)}^2 \leq C \|(b_\epsilon)^{-1/2} \Delta b_\epsilon\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \|\omega_\epsilon^r\|_{L_{b_\epsilon}^2(\Omega)}^2,$$

which ensures using Gronwall's lemma that

$$\sqrt{b_\epsilon} \omega_\epsilon^r \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \sqrt{b_\epsilon} \nabla \omega_\epsilon^r \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.56)$$

Now, since b_ϵ is strictly positive, standard arguments for Navier-Stokes equation (see for instance [41]) give the existence and uniqueness of global weak solution of the problem (2.53) (in the distribution sense) with the properties given in (2.56). Moreover, we have $\sqrt{b_\epsilon} u_\epsilon^\mu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

Now, we are at the point to pass to the limit in ϵ . Towards this end, we need also to show a strong convergence of $\sqrt{b_\epsilon} u_\epsilon^\mu$. However, by virtue of Theorem 2.6 (see Appendix B), we also have

$$\|u_\epsilon^\mu\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\|\omega_\epsilon\|_{L^4(\Omega)} + \|b_\epsilon u_\epsilon^\mu\|_{L^2(\Omega)}).$$

Therefore, Banach-Alaoglu theorem implies that ω_ϵ^r converges weak-* to ω^r in $L^\infty(0, T; L_b^2(\Omega))$ and weakly in $L^2(0, T; H_b^1(\Omega))$. This means also that $\omega_\epsilon = b_\epsilon \omega_\epsilon^r$ converges weakly to ω in $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Following [78], [24], we deduce that ω_ϵ is relatively compact in $C^0(0, T; L^p(\Omega) - \text{weakly})$, for all $p < \infty$. Thus ω_ϵ is relatively compact in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$

and hence $\{\sqrt{b_\epsilon}u_\epsilon^\mu\}$ is relatively compact in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. This allows us to deduce a global existence of weak solution for System (2.49) (see [24], [78]).

Now, we may return to prove that the global weak solution of the vorticity formulation constructed above is a global weak solution of velocity formulation. Precisely, we prove the following proposition

Proposition 2.3. *Let (u^μ, ω^r) be a weak solution of the vorticity formulation in the sense of Definition 2.51. Then u^μ is a global weak solution of the velocity formulation in the sense of Definition 2.2.*

Démonstration. Let us fix a test function $\phi \in C^\infty([0, T], \overline{\Omega})^2$ such that $\text{div}(b\phi) = 0$ and $b\phi \cdot n = 0$, then there exists a stream function φ such that $b\phi := \nabla^\perp \varphi$. As b vanishes at the boundary we infer that $\varphi \in C^\infty([0, T], \overline{\Omega})$ with φ vanishing at the boundary. Since (u^μ, ω^r) is a global weak solution of the vorticity formulation, there holds

$$-\int_0^T \int_\Omega b\omega^r \partial_t \varphi + b\omega^r u^\mu \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla(b\omega^r) : \nabla \varphi \, dx \, dt = -\int_\Omega b\omega_{in}^r \varphi(0, x) \, dx,$$

which yields by integration by parts with respect to space to the following equation

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega u^\mu \partial_t \nabla^\perp \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \text{div}(bu^\mu \omega^r) \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi b\omega^r u^\mu \cdot n \, ds \, dt \\ & - \mu \int_0^T \int_\Omega \Delta \omega \varphi \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\nabla \omega \cdot n) \varphi \, ds \, dt = -\int_\Omega b\omega_{in}^r \varphi(0, x) \, dx. \end{aligned}$$

As $b\phi \cdot n = 0$, we infer that φ is constant at the boundary. Since Ω is simply connected, φ can be chosen to be zero at the boundary and hence the boundary term vanishes. Next, we use the following two identities

$$\begin{aligned} & \text{curl} \left(\frac{1}{b} \text{div}(bu^\mu \otimes u^\mu) \right) = \text{div}(bu^\mu \omega^r), \\ & -\int_0^\infty \int_\Omega \Delta \omega \varphi \, dx \, dt = \int_0^\infty \int_\Omega \Delta u^\mu \nabla^\perp \varphi \, dx \, dt \\ & = -\int_0^\infty \int_\Omega \nabla u : \nabla(b\phi) \, dx \, dt + \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} (b\nabla u^\mu \cdot n) \cdot \phi \, ds \, dt \end{aligned}$$

to get

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega bu^\mu \cdot \partial_t \phi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \text{div}(bu^\mu \otimes u^\mu) \cdot \phi \, dt \, dx - \mu \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u^\mu : \nabla(b\phi) \, dx \, dt \\ & + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (b\nabla u^\mu \cdot n) \cdot \phi \, ds \, dt = \int_\Omega bu_{in}^\mu \cdot \phi(0, x) \, dx, \end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega bu^\mu \cdot \partial_t \phi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega bu^\mu \otimes u^\mu : \nabla \phi \, dx \, dt - \mu \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u^\mu : \nabla(b\phi) \, dx \, dt \\ & - \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u^\mu \cdot \tau)(\phi \cdot \tau) b \, ds \, dt = \int_\Omega bu_{in}^\mu \phi(0, x) \, dx, \end{aligned}$$

which is (2.42). This finishes the proof. $\square$

Even if we obtain a solution of the vorticity formulation, then we deduce from the above Proposition that there exists a global weak solution u^μ of (2.38)-(2.39) in the sense of Definition 2.2.

We may return to improve the regularity obtained on u^μ and on ω^r . Firstly, to recognize the regularity of u^μ using the result proved in [24] (see Theorem 2.6 in Appendix B), it should be shown that the regularity of $\omega = b\omega^r$ for a given ω^r satisfy the following properties

$$\sqrt{b_\epsilon}\omega_\epsilon^r \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \sqrt{b_\epsilon}\nabla\omega_\epsilon^r \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.57)$$

Towards this end, we need here the help of weighted version of Hardy inequality which is firstly obtained by Nĕcas [91] (for bounded domains with Lipschitz boundary) and extended by KUFNER [69] to Hölder domains.

Lemma 2.5. (*Hardy inequality in weighted spaces.*) *let Ω be a bounded Lipschitz domain and $b = \rho^\beta$, $0 < \beta < 1$. Then for $u \in H_b^1(\Omega)$ with $\gamma_{0,b}(u) = 0$, we have*

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho(x)} |u(x)| \right)^2 \rho(x)^\beta dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \rho(x)^\beta dx.$$

Turn back to Equation (2.57), we can easily deduce that $\omega \in L^\infty(0, T; L_{b^{-1}}^2(\Omega))$. Now, let us prove that

$$b^{-1/2}\nabla\omega \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Indeed, writing

$$\nabla\omega = \nabla(b\omega^r) = b\nabla\omega^r + \frac{\nabla b}{b} b\omega^r,$$

where for b given in (2.52). Employing now the above Lemma and Equation (2.57), we can infer that (keeping in mind that $\nabla b/b \sim 1/\rho$)

$$b^{-1/2}\omega \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad b^{-1/2}\nabla\omega \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.58)$$

Thus by virtue of Theorem 2.6 (see Appendix B) we deduce that

$$u^\mu \in L^2(0, T; C^{1-2/p}(\overline{\Omega})), \quad \nabla u^\mu \in L^2(0, T; L^p(\Omega)). \quad (2.59)$$

Now, we come back to System (2.49) to improve the regularity of ω . By multiplying the first equation in System (2.49) by b , we obtain the following system

$$\begin{cases} \partial_t \omega - \mu \Delta \omega &= -bu^\mu \cdot \nabla \omega^r & \text{in } \Omega, \\ \omega|_{t=0} &= \omega_{in} & \text{in } \Omega, \\ \omega &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.60)$$

Formally, this system can be viewed as a heat system in weighted spaces. We are interested here on the regularity of ω for a known regularity of the right hand side. Using the well known regularity of u^μ and ω^r , we can show that

$$bu^\mu \nabla \omega^r = b^{1/2} u^\mu b^{1/2} \nabla \omega^r \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

and hence using standard result concerning the regularity of heat equation in bounded domain we obtain the following properties

$$\omega \in W^{1,1}(0, T, W^{1,2}(\Omega)) \cap L^1(0, T, W^{2,2}(\Omega)), \quad (2.61)$$

which finishes the proof of our Theorem.

Remark 2.7. *It is worthwhile to notice that here that the regularity obtained in u^μ (see (2.59)) is not optimal. Before showing the regularity of u^μ for a given regularity on ω (see (2.61)), it remains to study the regularity of the following problem*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{b} \nabla \psi \right) = b \omega^r & \text{in } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \\ u^\mu = \frac{1}{b} \nabla^\perp \psi & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

This problem is a degenerate elliptic system which was partially studied in [24] for $f := b\omega^r \in L^p(\Omega)$. The generalization of such results to be held when $f \in W^{q,k}(\Omega)$, $q, k \in \mathbb{N}$ will be the goal of our next work which can help us to deal with equations with degenerate coefficients.

Additional estimate on ω^r . This estimate will be needed in the next section when we investigate the vanishing viscosity limit. As a matter of fact, this estimate allows us to obtain a $W^{1,p}$ boundness of u^μ "uniformly on μ " (needed in Equation (2.68)) which is crucial when we proceed to pass to the limit in μ . Precisely, we have the following lemma.

Lemma 2.6. *We assume that the Hypothesis **(H)** holds. Then if $\omega_{in}^r \in L_b^q(\Omega)$, we have the following estimate*

$$\begin{aligned} & \|\omega^r\|_{L^\infty(0,T;L_b^q(\Omega))}^q + \frac{4}{q}(q-1)\mu \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\omega^r)^{\frac{q}{2}}|^2 b \, dx \\ & - (q-1)\mu \int_0^T \int_\Omega \Delta b |\omega^r|^q \, dx \leq q \|\omega_{in}^r\|_{L_b^q(\Omega)}^q. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Proof. The strategy of the proof is standard. Multiplying the first equation in System (2.49) by $b|\omega^r|^{q-2}\omega^r$, integrating by part and taking in mind the boundary conditions of u^μ and ω^r , we obtain

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dt} \|\omega^r\|_{L_b^q(\Omega)}^q + \mu \int_\Omega \nabla(b\omega^r) \nabla(|\omega^r|^{q-2}\omega^r) \, dx = 0.$$

This leads after a simple calculation to

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dt} \|\omega^r\|_{L_b^q(\Omega)}^q + \frac{4(q-1)}{q^2} \mu \int_\Omega |\nabla(\omega^r)^{q/2}|^2 \, dx - \frac{(q-1)}{q} \mu \int_\Omega \Delta b |\omega^r|^q \, dx = 0$$

which readily ensure that the estimate (2.62) holds for any $T > 0$. The proof is finished.

2.6 Vanishing viscosity limits

A central theme in incompressible hydrodynamics is the vanishing viscosity limit, something naturally associated with the physical phenomena of turbulence and of boundary layers. In particular, a natural question to ask is whether the limiting flow associated with the limit of vanishing viscosity satisfies the incompressible Euler equations. However, in the presence of physical boundaries, the problems become much more complicated and challenging due to the possible appearance of boundary layers. In this context, a partial result concerning the incompressible Navier-Stokes equations with a spatial case of Navier boundary condition given by $u \cdot n = 0$ and $\operatorname{curl} u = 0$ on $\partial\Omega$ can be found in J.-L. Lions book's [82]. Moreover, some progress has been achieved for the Navier-Stokes equations with Navier boundary conditions recently. In [39], T. CLOPEAU, A. MIKELIĆ and R. ROBERT proved the convergence of the 2D Navier Stokes equations to the Euler equations as the viscosity tends to zero under the assumption that the initial vorticity belongs to $L^\infty(\Omega)$. M. C. LOPES FILHO, H. J. NUSSENZVEIG LOPES and G. PLANAS([49]) improved the results of [39] under the assumption that the initial vorticity belongs to $L^p(\Omega)$, $p > 2$. The reader is referred to the recent works of J.-P. KELLIHER [64] where the author extend the works in [39], [49] to the case when the domain is a non-simply connected domain.

Since the model of viscous lake equations is similar to the 2D incompressible Navier-Stokes equations when b is nondegenerate, our purpose is then to generalize the study in unweighted case to the weighted one. Nevertheless, the proof of Theorem 2.5 has the following ideas; At the first, we proceed classically by a weak strong estimation procedure. After that, thanks to the regularity part obtained in Theorem 2.3 and the existence of strong solution of the inviscid lake equations (2.4), we can apply the Yudovitch approach to estimate the nonlinear term.

Before we implement the above strategy of proof, we wish to recall here the results proved in [24] concerning the well posedness of the inviscid lake equations (2.4).

Theorem 2.4. (*[Theorem 2.3, [24]]*). *We assume that the weight b and the domain Ω satisfy the hypothesis **(H)**. Then for initial conditions defined as follows*

$$\sqrt{b}u|_{t=0} = \sqrt{b}u_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{and} \quad b^{-1} \operatorname{curl} u|_{t=0} := b^{-1} \operatorname{curl} u_0 \in L^\infty(\Omega),$$

and boundary condition

$$bu \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{2.63}$$

there exists a unique global strong solution $u \in C(0, T; W^{1,r}(\Omega))$ for all $r < \infty$ to the inviscid lake equations (2.4).

Then the main theorem in this Section can be stated as follows.

Theorem 2.5. *We assume that the Hypothesis **(H)** and **(I)** holds such that the parameter α in (2.52) should be greater than ϵ with ϵ a positive constant close to zero. Moreover, suppose that*

$$\omega_{in}^r \in L_b^q(\Omega) \quad \text{for some even} \quad q < \infty.$$

Let (u^μ, p^μ) be the solution of System (2.38)-(2.39) constructed in the previous section. Then, if u_{in}^μ converges to u_0 in $L_b^2(\Omega)$ as μ goes to zero, then we have

$$\|u^\mu - u\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \longrightarrow 0,$$

where u is the unique solution of the inviscid lake equations (2.4)-(2.63) satisfying the following properties

$$\sqrt{b}u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \text{curl } u \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega)).$$

Proof. Let $w^\mu = u^\mu - u$ where u^μ and u denote the solution of the viscous lake equations (2.38) and inviscid one (2.4) respectively. The function w^μ solves the following equation

$$\partial_t w^\mu + u^\mu \cdot \nabla w^\mu + w^\mu \cdot \nabla u - \mu \Delta u^\mu + \nabla(p^\mu - q) = 0. \quad (2.64)$$

For $t > 0$, w^μ satisfies the following equality

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^\mu\|_{L_b^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (w^\mu \cdot \nabla) u \cdot w^\mu b \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla u^\mu : \nabla w^\mu b \, dx \\ + \mu \int_{\Omega} \nabla u^\mu : \nabla b \otimes w^\mu \, dx + \mu \int_{\partial\Omega} (u^\mu \cdot \tau)(w^\mu \cdot \tau) b \, ds = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

This can be seen by multiplying (2.64) by w^μ and integrating by parts in space taking into account the fact that $\text{div}(bu^\mu) = 0$ in Ω and the boundary conditions satisfied by u^μ . For every $x, y \in \mathbb{R}^2$ let $z = x - y$. We have

$$2(x \cdot z) = 2 \left| z + \frac{y}{2} \right|^2 - \frac{1}{2} |y|^2, \quad (2.66)$$

and the same goes for the scalar matrix product. So from Equation (2.65), we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w^\mu\|_{L_b^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla(w^\mu + \frac{u}{2})|^2 \, dx + 2\mu \int_{\partial\Omega} (u^\mu \cdot \tau)^2 b \, ds \leq \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 b \, dx \\ - 2 \int_{\Omega} (w^\mu \cdot \nabla) u \cdot w^\mu b \, dx - 2\mu \int_{\Omega} \nabla u^\mu : \nabla b \otimes w^\mu \, dx + 2\mu \int_{\partial\Omega} (u^\mu \cdot \tau)(u \cdot \tau) b \, ds. \end{aligned} \quad (2.67)$$

The left side is greater than $\|w^\mu(t)\|_{L_b^2(\Omega)}^2$, and we estimate each term on the right-hand side as follows :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 b \, dx &\leq \|u\|_{H_b^1(\Omega)}^2, \\ \int_{\partial\Omega} (u^\mu \cdot \tau)(u \cdot \tau) b \, ds &\leq c \|u\|_{H_b^1(\Omega)} \|u\|_{H_b^1(\Omega)}, \\ \int_{\Omega} |\nabla u^\mu : \nabla b \otimes w^\mu| \, dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u^\mu : \nabla b \otimes u^\mu| \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u^\mu : \nabla b \otimes u| \, dx \\ &\leq \|\nabla u^\mu\|_{L^p(\Omega)} \|u^\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla b\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &\quad + \|\nabla u^\mu\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla b\|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Since $\nabla u^\mu \in L^p(\Omega)$ for all $p < \infty$, then it remains to show that there exists $p' > 1$ such that $\|\nabla b\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq c$. Indeed, for $b = \rho(x)^\alpha$, we know that $\nabla b \sim \rho(x)^{\alpha-1}$. Now,

$$\int_{\Omega} |\nabla b|^{p'} dx \sim \int_{\Omega} |\rho(x)^{\alpha-1}|^{p'} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{(\rho(x))^{p'(1-\alpha)}} dx$$

and the last integral converges if $p'(1-\alpha) < 1$, i.e. $\alpha > (p'-1)/p'$. It suffices then to take $b = \rho(x)^\alpha$ with $\alpha > \epsilon > 0$. This justify our additional condition on α .

Thus Inequality (2.67) can be rewritten as (keeping in mind that $\|u^\mu\|_{H_b^1(\Omega)} \leq \|u^\mu\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c$ with c independent of μ)

$$\frac{d}{dt} \|w^\mu\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left| \int_{\Omega} (w^\mu \cdot \nabla) u \cdot w^\mu b dx \right| + \mu C. \quad (2.68)$$

Since ∇u is not known to be bounded in L^∞ , we follow the Yudovich approach to deal with the nonlinear term (see [115]) (see also [70]). For this purpose, we set

$$L := \sup_{p \geq 4} \frac{1}{p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$M := \|u^\mu\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}.$$

By Theorem 2.3 and Theorem 2.4, we have $L < \infty$ and $M < \infty$. Applying Hölder inequality to the nonlinear term in (2.68), we can write

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w \cdot \nabla u \cdot w b dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u b^{1/p'} w^{2/p'} b^{1-1/p'} w^{2-2/p'} dx \right| \\ &\leq \|b^{1-1/p'} w^{2-2/p'}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} \left(b^{1/p'} w^{2/p'} \right)^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq \|(b^{1/2} w)^{2/p}\|_{L^\infty} p L \|w\|_{L_b^2(\Omega)}^{2-2/p}. \end{aligned}$$

Thus, we have for any $p \geq 4$,

$$\|w^\mu(T, \cdot)\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \leq 2 C p \int_0^T \|w^\mu\|_{L_b^2(\Omega)}^{2-2/p} dt + \mu C.$$

Together with a Gronwall-like argument, this implies

$$\|w^\mu(T, \cdot)\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \leq (2CT)^p + \mu C, \quad \forall p \geq 4.$$

Letting p tend to infinity and μ tends to zero, we conclude that

$$\|w^\mu(T, \cdot)\|_{L_b^2(\Omega)}^2 \longrightarrow 0 \quad \text{for all } T < \frac{1}{2C}.$$

Finally, we consider the maximal interval of $[0, \infty)$ on which $\|w^\mu(T, \cdot)\|_{L_b^2(\Omega)}$, which is closed by the continuity of $\|w^\mu(T, \cdot)\|_{L_b^2(\Omega)}$. If it is not equal to the whole $[0, \infty)$, we may repeat the above proof, which leads to a contradiction by maximality. Therefore uniqueness holds on $[0, \infty)$, which completes the proof of Theorem 2.5.

2.7 Appendix

This section is composed into two paragraphs. The aim of the first one is to recall some results on the *Muckenhoupt weights* and the associated weighted Sobolev spaces. In the second one, we list some of tools which can be used in the proofs of our results. We mention here that most definitions and results cited in the first paragraph are taken from several papers and books but we prefer mentioned here for the sake of completeness. The reader is referred for example to [90], [59] and [110] for large literature concerning the theory of weighted Sobolev spaces.

2.7.1 Appendix A

We mean by a weight b a locally integrable function on $\mathbb{R}^2$ such that $b > 0$ on Ω and $b = 0$ on $\partial\Omega$. In the literature, there are many particular classes of weights that are considered. But here we only refer at the *Muckenhoupt class* which is presented below. We recall briefly some fundamentals analysis on *Muckenhoupt* classes $\mathcal{A}_p$.

Definition 2.4. 1. Let $1 < p < \infty$, then b belongs to the *Muckenhoupt class* $\mathcal{A}_q$ if there exists a constant $A < \infty$ such that for all cubes Q ,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q b \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q b^{-\frac{1}{q-1}} \, dx \right)^{q-1} < A.$$

Here, $|Q|$ means the Lebesgue measure of the set Q . To avoid trivial cases, we exclude the cases where b vanishes almost everywhere.

2. By $\mathcal{A}_1$, we denote the set of all $0 \leq b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ such that there exists a constant $c > 1$ such that

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q b \, dx \leq c \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} b(x),$$

for all cubes $Q \subset \mathbb{R}^2$.

We say that a nonnegative and locally integrable function b is a *doubling weight* if there exists a constant $c > 0$ such that $b(2Q) \leq cb(Q)$ for every cube Q in $\mathbb{R}^2$ where $b(Q) = \int_Q b \, dx$.

Every weight in $\mathcal{A}_q$ possesses the doubling property, and $b \in \mathcal{A}_p$ implies $b^{-p'/p} \in \mathcal{A}_{p'}$. In addition we have that $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{A}_p$ for $q < p$ (see for example [59], there exists also other properties of the $\mathcal{A}_q$ sets, which can be found in the indicated references).

Next we introduce the weighted Lebesgue spaces.

Definition 2.5. *let $b \in \mathcal{A}_q$ and let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be open set. For $0 < q < \infty$, we define $L_b^q(\Omega)$ as the set of measurable functions u on Ω such that*

$$\|u\|_{L_b^q(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^q b \, dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

It can be shown that the dual space of $L_b^q(\Omega)$ is given by

$$(L_b^q(\Omega))' = L_{b'}^{q'}(\Omega) \text{ with } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \text{ and } b' = b^{-\frac{1}{q-1}}.$$

The scalar product between $u, v \in L_b^2$ is denoted by $\langle u, v \rangle_b$ and is defined by

$$\langle u, v \rangle_b = \int_{\Omega} u \cdot v b \, dx$$

In the same manner, we introduce the weighted Sobolev spaces.

Definition 2.6. *Let $1 \leq q < \infty$, $b \in \mathcal{A}_q$, $k \in \mathbb{N}$ and let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a Lipschitz domain. We denote by $W_b^{k,q}(\Omega)$ the set of all functions $u \in L_b^q(\Omega)$ for which the weak derivatives $\nabla^\alpha u$, with $|\alpha| \leq k$, belong to $L_b^q(\Omega)$. The weighted Sobolev space $W_b^{k,q}(\Omega)$ is a normed space equipped with norm*

$$\|u\|_{W_b^{k,q}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha u\|_{L_b^q(\Omega)}.$$

Remark 2.8. *If $b \in \mathcal{A}_q$, then since $b^{-\frac{1}{q-1}}$ is locally integrable, we have*

$$L_b^q(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

It thus makes sense to talk about weak derivatives of functions in $L_b^q(\Omega)$.

Hence, it makes sense to define weighted Sobolev spaces as in the Definition 2.6.

Let $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ be the Schwarz space and $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ the space of tempered distributions

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}).$$

For $f \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, we write

$$\mathcal{F}f(t) := \widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-its} f(s) \, ds,$$

for the Fourier transform and $\check{f} := \mathcal{F}^{-1}f$ for the inverse Fourier transform of f . For $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, we set

$$\mathcal{F}f(\phi) := \widehat{f}(t)(\phi) := f(\hat{\phi}), \text{ for every } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

For $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, the two definitions coincide.

Next we shall introduce the weighted Bessel potential spaces. For $\xi \in \mathbb{R}^2$, we set $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. On the space $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ of tempered distributions, we define for all $\beta \in \mathbb{R}$ the operator

$$\Lambda^\beta f := \mathcal{F}^{-1} \langle \xi \rangle^\beta \mathcal{F}(f), f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2).$$

Definition 2.7. For $1 < q < \infty, b \in \mathcal{A}_q$ and $\beta \in \mathbb{R}$, we define the weighted Bessel potential spaces by

$$H_b^{\beta,q}(\mathbb{R}^2) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{H_b^{\beta,q}(\mathbb{R}^2)} := \|\Lambda^\beta f\|_{L_b^q(\mathbb{R}^2)} < \infty\}.$$

A domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is called an *extension domain*, if for every $q > 1, b \in \mathcal{A}_q$ and $k \in \mathbb{N}$, there exists a continuous extension operator

$$E : W_b^{j,q}(\Omega) \rightarrow W_b^{j,q}(\mathbb{R}^2), \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

By [[51], Theorem 3.3.2], Lipschitz domains are extension domains.

Definition 2.8. Let $1 < q < \infty, b \in \mathcal{A}_q, \beta \in \mathbb{R}$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be an extension domain. The weighted Bessel potential space on Ω is defined by

$$H_b^{\beta,q}(\Omega) := \{g|_\Omega; g \in H_b^{\beta,q}(\mathbb{R}^2)\}$$

equipped with norm

$$\|g\|_{\beta,q,b} := \inf\{\|G\|_{H_b^{\beta,q}(\mathbb{R}^2)}, G|_\Omega = g\}.$$

Definition 2.9. Let $\beta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ and $b \in \mathcal{A}_q$ for $q > 1$. We introduce the space

$$W_{b,0}^{k,q}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,q,b}}.$$

Its dual is denoted by

$$W_{b'}^{-k,q'}(\Omega) := (W_{b,0}^{k,q}(\Omega))'.$$

where $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ and $b' = b^{-\frac{1}{q-1}}$.

Also, we define

$$H_{b,0}^{\beta,q}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H_b^{\beta,q}(\mathbb{R}^2)}.$$

The next lemma describes the relation between the weighted Sobolev spaces $W_b^{k,q}(\Omega)$ and the weighted Bessel spaces $H_b^{\beta,q}(\Omega)$ defined above.

Lemma 2.7. For $b \in \mathcal{A}_q, q > 1$, we have

$$H_b^{\beta,q}(\Omega) = W_b^{k,q}(\Omega), \quad \text{for all } k \in \mathbb{N},$$

and

$$H_{b,0}^{\beta,q}(\Omega) = W_{b,0}^{k,q}(\Omega), \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}.$$

Proof. See [[51], Theorem 7.1.2].

Remark 2.9. When $\beta \in \mathbb{N}$, by the above definitions, $\|\cdot\|_{\beta,q,b}$ stands for the norm in both spaces $W_b^{\beta,q}(\Omega)$ and $H_b^{\beta,q}(\Omega)$.

Lemma 2.8. For $\beta \in \mathbb{R}$, one has

$$H_b^{-\beta,q}(\Omega) = (H_{b',0}^{\beta,q'}(\Omega))'$$

with equivalent norms. Moreover, for $k \in \mathbb{N}$, one has $H_b^{-k,q}(\Omega) = W_b^{-k,q}(\Omega)$.

Proof. See [[51], Lemma 7.3.2].

Due to [[45], Theorem 1.5], we have a Poincaré-type inequality for the weighted case. More precisely, if $b \in \mathcal{A}_q$, then there exists a constant $C > 0$ such that for all $f \in W_b^{1,q}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f - f_{\Omega}|^q b \, dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla f|^q b \, dx,$$

where $f_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f b \, dx$. Hence, by standard argument as in the unweighted case, we have that $\|\nabla \cdot\|_{q,b}$ is an equivalent norm in $W_{b,0}^{1,q}(\Omega)$.

Definition 2.10. For $k \in \mathbb{N}^*$, $q > 1$ and $b \in \mathcal{A}_q$, we set

$$T_b^{k,b}(\partial\Omega) := W_b^{k,q}(\Omega)|_{\partial\Omega}$$

equipped with norm $\|\cdot\|_{T_b^{k,b}} = \|\cdot\|_{T_b^{k,b}(\partial\Omega)}$ of the factor space, i.e.,

$$\|g\|_{T_b^{k,b}(\partial\Omega)} := \inf\{\|u\|_{W_b^{k,q}(\Omega)}, u \in W_b^{k,q}(\Omega) \text{ and } \gamma_{0,b}(u) = g\}.$$

where $\gamma_{0,b}(u)$ denotes the restriction of u to $\partial\Omega$.

By [55], [50] and [37], the spaces $L_b^q(\Omega)$, $W_b^{k,q}(\Omega)$, and $T_b^{k,q}(\partial\Omega)$ are reflexive Banach spaces in which $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, $(C_0^\infty(\Omega), C^\infty(\bar{\Omega})|_{\partial\Omega})$, respectively are dense.

Lemma 2.9. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a Lipschitz domain and $b \in \mathcal{A}_q$, $q > 1$. Then, for $k \in \mathbb{N}^*$, the restriction

$$u \mapsto \gamma_{0,b}(u) : W_b^{k,q}(\Omega) \rightarrow T_b^{k,b}(\partial\Omega)$$

is continuous with continuity constant 1. And, for $y \in W_b^{1,q}(\Omega)$ and $z \in W_{b'}^{1,q'}(\Omega)$, one has the integration by parts formula

$$\int_{\Omega} y \frac{\partial z}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} y N_i z \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_i} z \, dx,$$

where S is the surface measure on $\partial\Omega$ and N_i is the i th component of the exterior normal vector N .

Proof. See [[90], Lemma 2.3].

Lemma 2.10. *Let Ω be a bounded domain. If $b \in \mathcal{A}_s$, $s \geq 1$ and $1 \leq p < \infty$, then for $q \geq sp$ one has*

$$L_b^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Proof. See [[99], Lemma 3.2.2]

Lemma 2.11. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded Lipschitz domain. Moreover, let $1 \leq s \leq r \leq q < \infty$, $r > 1$ and assume that $0 \leq \beta < 2$ such that*

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{r} - \frac{\beta}{2s}.$$

Then, for every $b \in \mathcal{A}_s$, the following embeddings are true

$$1\text{-}H_b^{\beta,r}(\Omega) \hookrightarrow L_b^q(\Omega).$$

$$2\text{-} L_b^r(\Omega) \hookrightarrow H_b^{-\beta,q}(\Omega).$$

Proof. See [[100], Lemma 5.3]

Next, we give the Rellich-Kondrachov theorem in weighted Sobolev spaces.

Lemma 2.12. *Let Ω a bounded Lipschitz domain and $b \in \mathcal{A}_2$. Then we have*

$$H_b^1(\Omega) \hookrightarrow L_b^2(\Omega) \text{ compactly.}$$

Proof. The proof can be found in [[65], Theorem 8].

Corollary 2.1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded lipschitz domain and $1 < s_0 \leq 3/2$. If $b \in \mathcal{A}_{s_0}$, then we have,*

$$H_b^1(\Omega) \hookrightarrow L_b^6(\Omega).$$

Proof : The proof follows from Lemma 2.11 by taking $\beta = 1, r = 2$ and $s = \frac{3}{2}$.

2.7.2 Appendix B

We present in this subsection some tools which are used in the proofs of our results. The first one is a technical result proved in [24] concerning an elliptic regularity result for degenerate elliptic equation which is required in the proof of Theorem 2.3. This estimate is highly non trivial to obtain when the depth vanishes, and the proof requires to work with equations with degenerate coefficients. It was proved by D. BRESCH and G. Métivier for a domain with C^∞ boundary and it was relaxed recently in [70] to be valued with $\partial\Omega \in C^3$.

Theorem 2.6. *We fix a smooth lake, namely, we suppose that the hypothesis **(H)** holds. Consider the System*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(bv) = 0, & \text{in } \Omega, \quad bv \cdot n = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ \operatorname{curl} v = f, & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (2.69)$$

for

$$\begin{cases} bv \in L^2(\Omega), \\ f \in L^p(\Omega) \end{cases} \quad (2.70)$$

with $p \in]2, +\infty[$. Then we have the following properties

$$v \in C^{1-n/p}(\overline{\Omega}), \quad \nabla v \in L^p(\Omega).$$

Moreover, for all $p_0 > 2$, there exists a constant C which depends only on Ω and b so that for any $p \in [p_0, \infty[$ such that

$$\frac{1}{p} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|bv\|_{L^2(\Omega)}).$$

In addition,

$$v \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

The following lemma is used to reformulate the Navier boundary condition (2.39) in terms of vorticity. For a proof, see [64], [39].

Lemma 2.13. *Suppose $u, v \in (H^2(\Omega))^2$ with $u \cdot n = 0, v \cdot n = 0$ on $\partial\Omega$. Then we have*

$$(v \cdot \nabla u) \cdot n = -\kappa u \cdot v,$$

$$(n \cdot \nabla v) \cdot \tau = \text{curl } v + (\tau \cdot \nabla v) \cdot n = \text{curl } v - \kappa v \cdot \tau,$$

$$(n \cdot Dv) \cdot \tau = \frac{1}{2} \text{curl } v - \kappa v \cdot \tau.$$

Chapitre 3

Ghost effect system

Ce chapitre concerne l'existence globale de solution faible du modèle de ghost effect. Ce modèle a été dérivé récemment dans [C. D. LEVERMORE, W. SUN, K. TRIVISA, *SIAM J. Math. Anal.* 2012]. Nous étendons l'existence locale de solution forte montré dans [C.D. LEVERMORE, W. SUN, K. TRIVISA, *Indiana Univ. J.*, 2011] vers l'existence globale de solution faible. Le point clé dans ce chapitre est une inégalité fonctionnelle inspirée de celle proposée dans [A. JÜNGEL, D. MATTHES, *SIAM J. Math. Anal.*, 2008].

Ce chapitre fait l'objet d'une publication à paraître dans "Communications on pure and applied analysis" intitulée "Global well posedness for the ghost effect system".

The aim of this paper is to discuss the issue of global existence of weak solutions of the so called *ghost effect* system which has been derived recently in [C. D. LEVERMORE, W. SUN, K. TRIVISA, *SIAM J. Math. Anal.* 2012]. We extend the local existence of strong solutions proved in [C.D. LEVERMORE, W. SUN, K. TRIVISA, *Indiana Univ. J.*, 2011] to a global weak solution existence result. The key tool in this paper is a new functional inequality inspired of what proposed in [A. JÜNGEL, D. MATTHES, *SIAM J. Math. Anal.*, 2008].

This chapter has been the subject of a publication to be appear in "Communications on pure and applied analysis" entitled "Global well posedness for the ghost effect system".

3.1 Introduction

The Boltzmann equation is a fundamental equation in statistical physics for rarefied gas which describes the time evolution of particle distribution. However, the study of the hydrodynamic limit of Boltzmann equation is important and challenging. This is one among the problems introduced by HILBERT. He asked for a full mathematical justification uncover the connection of the Boltzmann equation with the traditional frameworks of fluid dynamics through asymptotic extensions regarding the Knudsen number tends to zero. The Knudsen number being the inverse of the average number of collisions for

each particle per unit of time. Until now, there is no complete answer of this problem. Many authors, such as C. BARDOS, F. GOLSE, C. D. LEVERMORE, P.-L. LIONS, etc, respond for particular cases of this big question. The reader at this stage can consult the paper of C. VILLANI [113] for a more details about this problem. Nevertheless, when was expected that the analysis of zero Knudsen number of Boltzmann equation yields to the classical fluid dynamics systems, recent studies in this way by Y. SONE [106], [105] shows that there is an important class of problems where both the Euler equations and the Navier-Stokes equations fail to describe the behavior of a gas in the continuum limit and infinitesimal quantities (or quantities of the order of the Knudsen number) affect the behavior of the gas. In reality, this observation was pointed out firstly by MAXWELL in [87]. He claimed a correction to Navier-Stokes stress tensor that relies on derivatives of the temperature. Nonetheless, he simply considered regimes in which the effect of this correction entered only through boundary conditions. We refer the reader to [87], [105] and references therein for more details.

According to this observation, the quantity that completes the classical gas dynamic system is given by the flow velocity of the first order of the Knudsen number. In other words, if one lives in the world in the continuum limit, one does not know this velocity. Something that cannot be perceived in the world produces a finite effect on the behavior of a gas. It may be called a ghost effect as SONE was coined.

This inscrutable view advances many authors to go through to realize rigorously what correction can be inspired for Navier-Stokes or Euler equations from Kinetic theory. In [80], C. D. LEVERMORE, W. SUN and K. TRIVISA have established a low Mach number of a compressible fluid dynamics system that includes dispersive corrections to Navier-Stokes equations (derived from Kinetic theory). The limiting system is a ghost effect system (3.1), which is so named also because it cannot be derived from the Navier-Stokes system of gas dynamics, while it can be derived from Kinetic theory.

The ghost effect system derived in [80] describes the evolution of the density $\rho(t, x)$, velocity $u(t, x)$, and pressure $p(t, x)$ as function of time $t \in \mathbb{R}^+$ and position x over a torus domain $\mathbb{T}^d$ ($1 < d \leq 3$),

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\mathcal{T} = 1, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} \Sigma + \operatorname{div} \tilde{\Sigma}, \\ \frac{5}{2} \operatorname{div} u = \operatorname{div}(k(\mathcal{T}) \nabla \mathcal{T}), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

where $\kappa(\mathcal{T})$ is the coefficient of thermal conductivity, Σ is the viscous stress and $\tilde{\Sigma}$ is the thermal stress related to the fluids variables ρ, u and $\mathcal{T}$ through the constitutive relations

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mu(\mathcal{T})(\nabla u + \nabla^t u - \frac{2}{d} \operatorname{div} u \mathbb{I}), \\ \tilde{\Sigma} &= \tau_1(\frac{1}{\mathcal{T}}, \mathcal{T})(\nabla^2 \mathcal{T} - \frac{1}{d} \Delta \mathcal{T} \mathbb{I}) + \tau_2(\frac{1}{\mathcal{T}}, \mathcal{T})(\nabla \mathcal{T} \otimes \nabla \mathcal{T} - \frac{1}{d} |\nabla \mathcal{T}|^2 \mathbb{I}), \end{aligned}$$

where $\mu(\mathcal{T})$ represents the coefficients of shear viscosity $\tau_1(\rho, \mathcal{T}), \tau_2(\rho, \mathcal{T})$ are transport coefficients that arise from Kinetic theory such that $\tau_1 > 0$.

While an existence of local strong solutions is known since the work of C. D. LEVERMORE *et al.* in [81], there is no result until now, to the author's knowledge, concerns the global existence of weak solutions to the above system even in special cases, namely, particular case of heat conductivity equation for example, or when the density is assumed to be close to the equilibrium state. At the first point of view, it is not act for an easy problem. Roughly speaking, since apparently we do not have a classical energy estimate associated to System (3.1), we do not know even in what space we can expect our solution and consequently, how we can proceed to analyze the question of global existence. Furthermore, in the treatment of this system, we need to be careful on the strongly nonlinear third order differential operator and the dispersive structure of the momentum equation. To this purpose, we try firstly to rewrite the term $\operatorname{div} \tilde{\Sigma}$ in a simplified form. Indeed, taking in account the following equality

$$\operatorname{div}(\tau_1(\rho, \mathcal{T}) \nabla^2 \mathcal{T}) = \nabla(\operatorname{div}(\tau_1(\rho, \mathcal{T}) \nabla \mathcal{T})) - \operatorname{div}(\tau_1'(\rho, \mathcal{T}) \nabla \mathcal{T} \otimes \nabla \mathcal{T}),$$

we observe that $\operatorname{div}(\tilde{\Sigma})$ can be written as

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\Sigma} = & \nabla(\operatorname{div}(\hat{\tau}_1(\mathcal{T}) \nabla \mathcal{T})) - \nabla(\hat{\tau}_1(\mathcal{T}) \frac{1}{d} \Delta \mathcal{T}) \\ & - \operatorname{div}((\hat{\tau}_1'(\mathcal{T}) - \hat{\tau}_2(\mathcal{T})) \nabla \mathcal{T} \otimes \nabla \mathcal{T}) + \nabla(\hat{\tau}_2(\mathcal{T}) \frac{1}{d} |\nabla \mathcal{T}|^2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

with

$$\hat{\tau}_1(\mathcal{T}) = \tau_1\left(\frac{1}{\mathcal{T}}, \mathcal{T}\right), \quad \hat{\tau}_2(\mathcal{T}) = \tau_2\left(\frac{1}{\mathcal{T}}, \mathcal{T}\right).$$

The key observation here is that the gradient terms in Equation (3.2) can be incorporated into the pressure term to produce a new pressure term $\nabla \pi$ where

$$\pi = p - \operatorname{div}(\hat{\tau}_1 \nabla \mathcal{T}) + \frac{1}{d} \hat{\tau}_1 \Delta \mathcal{T} + \frac{1}{d} \hat{\tau}_2 |\nabla \mathcal{T}|^2.$$

By introducing this new pressure, and replace $\mathcal{T}$ by its value ($\mathcal{T} = 1/\rho$), System (3.1) recasts in the following one

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \pi - \operatorname{div} \Sigma = -\operatorname{div}(K(\rho) \nabla \rho \otimes \nabla \rho), \\ \operatorname{div} u = \frac{2}{5} \operatorname{div}(k(\rho^{-1}(x)) \nabla(\rho^{-1}(x))), \end{cases} \quad (3.3)$$

where we denoted by

$$K(\rho) := \frac{1}{\rho^4} \left(\hat{\tau}_1' \left(\frac{1}{\rho} \right) - \hat{\tau}_2 \left(\frac{1}{\rho} \right) \right). \quad (3.4)$$

Inspired by the framework developed recently for Euler-Korteweg system by D. BRESCH, F. COUDERC, P. NOBLE and J.-P VILA in [14] based on a new functional equality

called by generalized Bohm identity, we can rewrite the term in the right hand side of the momentum equation (3.3)₂ as follows

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(K(\rho)\nabla\rho\otimes\nabla\rho) &= \rho\nabla(\sqrt{K(\rho)}\Delta(\int_0^\rho\sqrt{K(s)}ds)) \\ &\quad -\nabla\left(\rho\operatorname{div}(K(\rho)\nabla\rho)+\frac{1}{2}(K(\rho)-\rho K'(\rho))|\nabla\rho|^2\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

where the first term in the right hand side can be read as following

$$\rho\nabla(\sqrt{K(\rho)}\Delta(\int_0^\rho\sqrt{K(s)}ds)) = \operatorname{div}(F(\rho)\nabla\nabla\psi(\rho)) - \nabla\left((F(\rho)-\rho F'(\rho))\Delta\psi(\rho)\right) \quad (3.6)$$

with

$$\sqrt{\rho}\psi'(\rho) = \sqrt{K(\rho)}, \quad F'(\rho) = \sqrt{K(\rho)}\rho. \quad (3.7)$$

This functional inequality is one among the key points of this work. Apparently, the study of system (3.3) is much more simplified than system (3.1) but the last system remains also difficult. Before that, we focused here in a particular form of heat conductivity coefficient and capillarity tensor. Precisely, we propose to study the following system

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u\otimes u) + \nabla\pi - 2\operatorname{div}(\mu(\rho)D(u)) = c\rho\nabla(\sqrt{\rho^{2m-1}}\Delta(\int_0^\rho\sqrt{s^{2m-1}}ds)), \\ \operatorname{div}u = -2\kappa\Delta\varphi(\rho), \end{cases} \quad (3.8)$$

where c is a constant which can take both negative or nonnegative value and φ is a function depending on ρ to be determined later. The constant c is strongly related to the choice of the transport coefficients given in $\tilde{\Sigma}$ (see for instance Remark 3.1).

Now we move to make a little discussion regarding some particular cases of System (3.8). Firstly, when $c = 0$ in (3.8)₂, System (3.8) recasts to low Mach number system namely Kazhikhov-Smagulov type system. However, there is a large literature concerning the existence of solution of this system. At the level of local strong solution, the reader is referred to [40] where the existence of global solutions in homogeneous Besov spaces with critical regularity is proved assuming the initial density to be close to constant and the initial velocity small enough. In the meantime, P.-L. LIONS in [84] showed, in two-dimensional case, that for a positive conductivity coefficient and $\varphi = 1/\rho$ a small perturbation of a constant density provides a global existence of weak solutions without restriction on the initial velocity. Nevertheless, the first global existence result of such system without smallness assumption was obtained by D. BRESCH, E.H. ESSOUFI and M. SY in [?] when a certain algebraic relation between μ and $\kappa\varphi$ is assumed, namely

$$\varphi' = \mu'(s)/s \quad \text{and} \quad \kappa = 1. \quad (3.9)$$

This result was also extended recently in [21] to be held with $0 < \kappa < 1$. Later, X. LIAO in [?] employed this algebraic condition to show uniqueness of solution in dimension 2 in the critical non-homogeneous Besov spaces.

One of the main tool employed in [21] is the concept of κ -entropy estimate based on the generalization of the BD entropy. Through this new entropy, the authors introduce a two-velocity hydrodynamical formulation for a low Mach number system. The interested reader is referred to [19] for a generalization of this concept to compressible Navier-Stokes with degenerate viscosities.

On the other hand, when $c > 0$ and $m = 0$ some progress has been made for compressible situation, i.e., without the equation on $\operatorname{div} u$ and when $\pi = \rho^\gamma$. Firstly, A. JÜNGEL in [61] proved a global existence result with finite energy initial data for $\mu(\rho) = \mu \rho$, $\sqrt{c} > \mu$ and $\gamma > 3$. He was introduced a special definition of global weak solutions. This result was also extended to be held when $\mu \leq \sqrt{c}$ (see for instance [42], [60]). In [54], M. GISCLON, I. VIOLET proved existence of global weak solutions without the assumption $\gamma > 3$ if $d = 3$ and with uniform estimates allowing to perform the limit when c tends to zero. For more detail see the recent work by P. ANTONELLI and S. SPIRITO for an existence proof of standard global weak solutions [6].

The main goal we are going to prove in this paper is the existence of global weak solutions of system (3.8) when $\varphi = \log \rho$ and $0 \leq m \leq 1/2$ in (3.8). Remarkably, when $m = 0$, we obtain $-2\rho\Delta(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho})$ as a capillarity tensor studied in [61]. Of course not for the compressible model but we stress here that this result can be also achieved for the compressible model. A first important feature in this paper is that, we can establish the existence of global weak solutions of System (3.8) when c is negative but close to 0^- without assuming any smallness assumption on the initial data. This case is somewhat surprising and not expected in general. Here, it should be emphasize that the procedure developed when $c < 0$ cannot be used for compressible model, especially when the density is close to vacuum. As a matter of fact, the equation on $\operatorname{div} u$ plays an important role in absorbing the terms with bad signs. Moreover, since the density is assumed here to be far from the vacuum, we can establish a maximum principle after introducing a new velocity $\mathbf{w} = u + 2\kappa\nabla \log \rho$ (see the next subsection). This fact is also crucial in this procedure. The second important feature here is the proof of a new functional inequality inspired of what proposed proposed by A. JÜNGEL and D. MATTHES for Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn equation [62]. This new equality will be the key tool of global existence analysis.

In what follows, we suppose that

$$\varphi(\rho) = \log \rho \tag{3.10}$$

in System (3.8) and consequently to take advantage of the interesting work in [21], we suppose that the relation (3.9) holds, whence $\mu(\rho) = \rho$.

The rest of this chapter is organized as follows. The next section presents the reformulation of System (3.8) by means of a new velocity $\mathbf{w}$ and provides some tools to be used in the subsequent sections. Section 3 states the main result. Finally, in the last section we prove Lemma 3.3 which is the key tool of the proof of global existence of solutions, namely Theorem 3.1.

3.2 Reformulation of the system and definitions of weak solution

In this section we want to reformulate System (3.8) by means of the so-called effect velocity

$$\mathbf{w} = u + 2\kappa \nabla \log \rho, \quad 0 < \kappa < 1.$$

Before that, we present in the next subsection some useful equalities to be used in this reformulation and also in the proof of existence result.

3.2.1 Useful equalities

We shall now rewrite the capillarity term in (3.8) using the generalized Bohm identity (3.6). For reader's convenience, we give here the proof of this identity in the particular case, namely when $K(\rho) = \sqrt{\rho^{2m-1}}$. More precisely, we have the following Lemma

Lemma 3.1. *Assuming that the density $\rho \in H^2(\Omega)$, the following identity holds*

$$\rho \nabla (\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta (\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds)) = \frac{1}{m(m+1)} [\operatorname{div}(\rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m) + m \nabla (\rho^{m+1} \Delta \rho^m)]. \quad (3.11)$$

Proof. By straightforward computation, we can write

$$\begin{aligned} & \rho \partial_j (\rho^{m-1/2} \partial_i^2 (\int_0^\rho s^{m-1/2} ds)) \\ &= \frac{1}{m} \rho \partial_j (\rho^{m-1/2} \partial_i (\rho^{1/2} \partial_i \rho^m)) \\ &= \frac{1}{m} \rho \partial_j (\rho^m \partial_i^2 \rho^m + \frac{1}{2} \rho^{m-1} \partial_i \rho \partial_i \rho^m) \\ &= \frac{1}{m} \partial_j (\rho^{m+1} \partial_i^2 \rho^m) - \frac{1}{m} \rho^m \partial_j \rho \partial_i^2 \rho^m + \frac{1}{2m^2} \rho \partial_j ((\partial_i \rho^m)^2) \\ &= \frac{1}{m} \partial_j (\rho^{m+1} \partial_i^2 \rho^m) - \frac{1}{m(m+1)} \partial_j \rho^{m+1} \partial_i^2 \rho^m + \frac{1}{m(m+1)} \partial_i \rho^{m+1} \partial_j \partial_i \rho^m \\ &= \frac{1}{m(m+1)} [(m+1) \partial_j (\rho^{m+1} \partial_i^2 \rho^m) - \partial_j \rho^{m+1} \partial_i^2 \rho^m + \partial_i (\rho^{m+1} \partial_i \partial_j \rho^m) - \rho^{m+1} \partial_j \partial_i^2 \rho^m] \\ &= \frac{1}{m(m+1)} [\partial_i (\rho^{m+1} \partial_i \partial_j \rho^m) + m \partial_j (\rho^{m+1} \partial_i^2 \rho^m)]. \end{aligned}$$

This finishes the proof.

For a reason that will be signaled later, we want to rewrite the Equation (3.11) in another form.

Lemma 3.2. *Assuming that the density $\rho \in H^2(\Omega)$, then we can write*

$$\begin{aligned} \rho \nabla \left(\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta \left(\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds \right) \right) &= \frac{1}{(2m+1)} \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho) \\ &+ \frac{m}{(m+1)(2m+1)^2} \nabla \Delta \rho^{2m+1} + \frac{1}{(m+1)} \nabla(\rho^{m+1} \Delta \rho^m). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Proof. Firstly, we can verify that we have (taking in mind that $\nabla \log \rho^\alpha = \alpha \nabla \log \rho$)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m) &= m \operatorname{div}(\rho^{m+1} \nabla(\rho^m \nabla \log \rho)) \\ &= m[\operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho) + m \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \log \rho \otimes \nabla \log \rho)]. \end{aligned}$$

On the other hand we know that the following identity hold

$$\operatorname{div}(z \nabla \nabla \log z) = \nabla \Delta z - \operatorname{div}(z \nabla \log z \otimes \nabla \log z),$$

for all $z \in H^2(\Omega)$, which yields after taking $z = \rho^\alpha$ to the following equation

$$\operatorname{div}(\rho^\alpha \nabla \log \rho \otimes \nabla \log \rho) = \frac{1}{\alpha^2} \nabla \Delta \rho^\alpha - \frac{1}{\alpha} \operatorname{div}(\rho^\alpha \nabla \nabla \log \rho).$$

Finally, we conclude with

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m) \\ &= m \left[\operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho) + m \left[\frac{1}{(2m+1)^2} \nabla \Delta \rho^{2m+1} - \frac{1}{(2m+1)} \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho) \right] \right] \\ &= \frac{m}{(2m+1)} \left[(m+1) \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho) + \frac{m}{(2m+1)} \nabla \Delta \rho^{2m+1} \right]. \quad \square \end{aligned} \quad (3.13)$$

Remark 3.1. *It seems perhaps not very clear how the system (3.1) was simplified into System (3.8), even with a particular case of heat conductivity equation. In order to keep ideas clear and avoid unpleasant technicalities, we shall take here a particular choices of τ_1 and τ_2 leading to System (3.8). Firstly, consider a particular form of heat-conductivity coefficient, such that*

$$\kappa(\rho^{-1}) = 5 \kappa \rho \quad \kappa > 0,$$

we infer the third equation in System (3.1) with $\varphi(\rho) = \log \rho$. Secondly, if we take

$$\tau_1(\rho) = \beta \rho^2 \quad \tau_2(\rho) = -\beta \rho^3,$$

then we can compute the first and the third term in $\operatorname{div}(\tilde{\Sigma})$ (since the other terms can be incorporated into the pressure) to get (see for instance [21], Section 7)

$$-\beta \operatorname{div}(\rho \nabla \nabla \log \rho) \quad (3.14)$$

which can be viewed as particular case of System (3.3), namely $m = 0$. Noticing that the following equality

$$\operatorname{div}(\rho \nabla \nabla \log \rho) = 2\rho \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} \right),$$

is a known equality called by Bohm potential arises from the fluid dynamical formulation of the single-state Schrödinger equation. $\square$

3.2.2 Reformulation of the System.

To take advantage of the almost divergence-free of the expression $u + 2\kappa \nabla \log \rho$, we introduce a new solenoidal velocity field $\mathbf{w}$ as follows

$$\mathbf{w} = u + 2\kappa \nabla \log \rho.$$

We next try to rewrite the terms concerning the original velocity u in System (3.8) in light of the newly introduced velocity $\mathbf{w}$. Firstly it is easy to see that the continuity equation becomes

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) - 2\kappa \Delta \rho = 0. \quad (3.15)$$

Therefore, we can take advantage here on the parabolic type of Equation (3.15) and apply the maximum principle to deduce strict positivity of the density ρ if $\rho|_{t=0}$ is strictly positive and the velocity $\mathbf{w}$ is smooth.

Besides, before rewritten the momentum equation in terms of $\mathbf{w}$, let us firstly differentiate the continuity equation with respect to space, we obtain

$$\partial_t \rho \nabla \log \rho + \operatorname{div}(\rho \nabla^t u) + \operatorname{div}(\nabla \log \rho \otimes \rho u) = 0. \quad (3.16)$$

Now, we can multiply the above equation by 2κ and add it to the equation of conservation of the momentum (3.8)₂ to get

$$\begin{aligned} & \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w}) - 2(1 - \kappa) \operatorname{div}(\rho D(u)) \\ & - 2\kappa \operatorname{div}(\rho A(u)) + \nabla \pi = c \rho \nabla \left(\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta \left(\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds \right) \right). \end{aligned}$$

By virtue of (3.12), we can define a new pressure π_1 such that

$$\pi_1 = \pi - \frac{cm}{(m+1)(2m+1)^2} \nabla \Delta \rho^{2m+1} - \frac{c}{(m+1)} \nabla(\rho^{m+1} \Delta \rho^m),$$

and therefore System (3.8) recasts in the following system for the new unknown triplet $(\rho, \mathbf{w}, \pi)$

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ & \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w}) + \nabla \pi_1 - 2(1 - \kappa) \operatorname{div}(\rho D(u)) \\ & - 2\kappa \operatorname{div}(\rho A(u)) = \frac{c}{(2m+1)} \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho), \\ & \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

where we have denoted by

$$A(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla^t u).$$

Our purpose in the forthcoming subsection is to introduce the notion of weak solution associated of this system and then make a link between this definition and the definition of weak solution (ρ, u) to System (3.8) (take attention of (3.10)).

3.2.3 Weak solution

In this subsection, we introduce several notions of weak solutions to the ghost effect system. We complete Systems (3.17)-(3.8) by the periodic boundary conditions

$$\Omega = \mathbb{T}^3,$$

and initial conditions

$$\rho|_{t=0} = \rho^0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}^0 = u^0 + 2\kappa \nabla \log \rho^0 \text{ in } \Omega. \quad (3.18)$$

We introduce the following spaces

$$H = \{z \in L^2(\Omega); \operatorname{div} z = 0\}, \quad \text{and} \quad V = \{z \in W^{1,2}(\Omega); \operatorname{div} z = 0\}.$$

We assume that the initial conditions satisfies

$$\rho^0 \in H^1(\Omega), \quad 0 < r \leq \rho^0 \leq R < \infty, \quad \mathbf{w}^0 \in H. \quad (3.19)$$

Now, we can able to introduce our notion in the weak solutions.

Definition of weak solution in term of $(\rho, \mathbf{w})$.

Definition 3.1. *We say that the couple $(\rho, \mathbf{w})$ is a global weak solution to System (3.17) and (3.18) if the following regularity properties are satisfied*

$$\begin{aligned} 0 < r \leq \rho \leq R < \infty, \quad \text{a.e in } (0, T) \times \Omega, \\ \rho &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \\ \mathbf{w} &\in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \end{aligned}$$

the k -entropy estimate holds

$$\begin{aligned} &\sup_{\tau \in [0, T]} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + [(1 - \kappa)\kappa + c \frac{m^2}{4} \rho^{2m}] \frac{|2\nabla \log \rho|^2}{2} \right) (\tau) dx \\ &+ 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho |A(\mathbf{w})|^2 dx dt + 2(1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \rho |D(\mathbf{w} - 2\kappa \nabla \log \rho) + \frac{2\kappa}{d} \Delta \log \rho \mathbb{I}|^2 dx dt \\ &+ 2(1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\rho}{d} |2\kappa \Delta \log \rho|^2 dx dt + \frac{8c\kappa c_0}{(2m+1)^2} \int_{\Omega} \left(\Delta \rho^{\frac{2m+1}{2}} \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + [(1 - \kappa)\kappa + c \frac{m^2}{4} \rho^{2m}] \frac{|2\nabla \log \rho|^2}{2} \right) (0) dx, \end{aligned} \quad (3.20)$$

where $A(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} - \nabla^t \mathbf{w})$, c_0 a positive constant (see Proposition 3.1) and the equations of system (3.17) holds in the sense of distributions. Precisely, the continuity equations

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} \rho \partial_t \phi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \nabla \phi dx dt \\ &- 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla \log \rho \cdot \nabla \phi dx dt = - \int_{\Omega} \rho^0 \phi(0) dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

holds for all $\phi \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$, s.t. $\phi(T) = 0$.

The momentum equation is satisfied in the following sense

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{w} \cdot \partial_t \phi_1 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \rho (\mathbf{w} - 2\kappa \nabla \log \rho) \otimes \mathbf{w} : \nabla \phi_1 \, dx \, dt \\
 & - 2(1 - \kappa) \int_0^T \int_\Omega \rho D(\mathbf{w}) : \nabla \phi_1 \, dx \, dt + 4\kappa(1 - \kappa) \int_0^T \int_\Omega \rho \nabla \nabla \log \rho : \nabla \phi_1 \, dx \, dt \\
 & - 2\kappa \int_0^T \int_\Omega A(\mathbf{w}) : A(\phi_1) \, dx \, dt - \frac{c}{(2m+1)} \int_0^T \int_\Omega \rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho : \nabla \phi_1 \, dx \, dt \\
 & = - \int_\Omega \rho^0 \mathbf{w}^0 \cdot \phi_1(0) \, dx
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

for $\phi_1 \in (C^\infty([0, T] \times \Omega))^3$, s.t. $\text{div } \phi_1 = 0$ and $\phi_1(T) = 0$.

The equation for $\nabla \log \rho$ (see (3.16))

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_\Omega \rho \nabla \log \rho \cdot \partial_t \phi_2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \rho (\mathbf{w} - 2\kappa \nabla \log \rho) \otimes \nabla \log \rho : \nabla \phi_2 \, dx \, dt \\
 & - 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \rho \nabla^2 \log \rho : \nabla \phi_2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \rho \nabla^t \mathbf{w} : \nabla \phi_2 \, dx \, dt = - \int_\Omega \rho^0 \nabla \log \rho^0 \cdot \phi_2(0) \, dx
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

holds for all $\phi_2 \in (C^\infty([0, T] \times \Omega))^3$, s.t. $\phi_2(T) = 0$.

Likewise, the notion of a weak solution to the original system (3.8) in terms of (ρ, u) can be stated as follow.

Definition of weak solution in term of (ρ, u) .

Definition 3.2. We called that the couple (ρ, u) is a weak solution to System (3.8)-(3.18) if the following regularity holds

$$0 < r \leq \rho \leq R < \infty, \quad \text{a.e in } (0, T) \times \Omega,$$

$$\rho \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)),$$

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

and the equations of System (3.8) holds in the sense of distributions.

More precisely, the mass equation is satisfied in the following sense

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \partial_t \phi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \rho u \cdot \nabla \phi \, dx \, dt = - \int_\Omega \rho^0 \phi(0) \, dx \tag{3.24}$$

for $\phi \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$ with $\phi(T) = 0$. The momentum equation is satisfied in the following sense

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \rho u \cdot \partial_t \phi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \rho u \otimes u : \nabla \phi \, dx - 2 \int_0^T \int_\Omega \rho D(u) : \nabla \phi \, dx \, dt \\ & - \frac{c}{m(m+1)} \int_0^T \int_\Omega \rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m : \nabla \phi \, dx - \frac{c}{(m+1)} \int_0^T \int_\Omega \rho^{m+1} \Delta \rho^m \operatorname{div} \phi \, dx \quad (3.25) \\ & = - \int_\Omega \rho^0 u^0 \cdot \phi(0) \, dx \end{aligned}$$

for $\phi \in (C^\infty([0, T] \times \Omega))^3$ such that $\operatorname{div} \phi = 0$ and $\phi(T) = 0$.

The constraint

$$\operatorname{div} u = -2\kappa \Delta \log \rho$$

is satisfied in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Remark 3.2. Before showing the link between the two definition, it sufficient to define $u = \mathbf{w} - 2\kappa \nabla \log \rho$ and hence the weak solution form Definition 3.1 gives a weak solution from Definition 3.2. Indeed, using the definition of u and the fact that $\mathbf{w}$ is a divergence free vector field, the weak formulation of the momentum equation from Definition 3.2 is obtained by choosing $\phi_1 = \phi_2 = \varphi$ in Equations (3.22) and (3.23), multiplying the second equation by 2κ and subtracting it from the first one.

Remark 3.3. Observe that the pressure function π_1 is not included in the weak formulation (3.22) by the same reason as in the Navier-Stokes equation theory. But if the couple $(\rho, \mathbf{w})$ satisfy (3.21)-(3.22), one can deduce using De Rham theorem the existence of a distribution $\pi_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ such that the functions $(\rho, \mathbf{w}, \pi)$, resp. (ρ, u, π_1) verifies equations (3.17) in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (see for instance [104], [83]).

3.3 Main Theorem

The main result of this paper concerns the global in time existence of weak solution to System (3.17).

Theorem 3.1. 1- Assume $c \geq 0$. Let $0 < \kappa < 1$ and $0 \leq m \leq 1/2$. Moreover suppose that the initial data $(\rho^0, \mathbf{w}^0)$ satisfies

$$\rho^0 \in H^1(\Omega), \quad 0 < r \leq \rho^0 \leq R < \infty, \quad \mathbf{w}^0 \in H, \quad (3.26)$$

where

$$H = \{z \in L^2(\Omega); \operatorname{div} z = 0\} \quad \text{and} \quad V = \{z \in W^{1,2}(\Omega); \operatorname{div} z = 0\},$$

Then there exists at least one global weak solution $(\rho, \mathbf{w})$ of System (3.17) with the following properties

$$\|\rho\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\mathbf{w}\|_{L^2(0,T,V)} \leq c,$$

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|D(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c.$$

2- Assume $c < 0$ and let $0 < \kappa < 1$. Moreover suppose that the initial data $(\rho^0, \mathbf{w}^0)$ satisfies (3.26) and the following condition hold

$$r < R \leq \left(\frac{8\kappa\sqrt{\kappa(1-\kappa)}(2m+1)}{|c|} r \right)^{1/(2m+1)} \quad (3.27)$$

there exists at least one global weak solution $(\rho, \mathbf{w})$ of System (3.17)

Remark on the constraint (3.27). We shall make a discussion about the constraint (3.27).

- The important feature of this condition is that we don't need to assume that the initial density to be close to the equilibrium state. Roughly speaking, given an initial data ρ^0 such that $r \leq \rho^0 \leq R$, we can easily found a constant c satisfies (3.27).

- The condition (3.27) ensure that, more than c is small, more than we have large data existence. Take for example $\kappa = \frac{1}{2}$, $m = 0$, $r = 5$, condition (3.27) recasts to

$$r = 5 < R < \frac{40}{|c|}.$$

Clearly, more than c is small, more than the interval $[r, R]$ is large.

- The condition (3.27) provides the constant $|c|$ to have an upper bound and this bound depend on the choice of κ, m, r and R . For example, take $m = 0$, condition (3.27) remains

$$r < R \leq \frac{8\kappa(1-\kappa)}{|c|} r,$$

and hence it should that $|c|$ satisfy

$$|c| < 8\kappa(1-\kappa).$$

Here, we observe also that more than c is small more than we have large data existence.

3.4 Proof of Theorem 3.1

To establish the existence of global weak solutions, we want just prove uniform estimates for approximate solutions. The procedure of construction of solution follow the lines given in [21].

3.4.1 A priori estimates

The main task in this paragraph is the proof of the following inequality which are needed in Proposition 3.1 to establish the a priori estimate associated to System (3.17). This inequality can be useful also for other systems related to fluid dynamics.

Lemma 3.3. *For $\rho \in H^2(\Omega)$ and $0 \leq m \leq 1/2$, there exists a constant $c_0 > 0$ such that*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\Omega} \rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m : \nabla \nabla \log \rho \, dx + m \int_{\Omega} \rho^{m+1} \Delta \rho^m \Delta \log \rho \, dx \\ &\geq 4c_0 \frac{m(m+1)}{(2m+1)^2} \int_{\Omega} (\Delta \rho^{\frac{2m+1}{2}})^2 \, dx. \end{aligned}$$

The constant c_0 should be satisfy an upper bound, namely

$$0 < c_0 \leq 1 - \frac{(d-1)^2}{d(d+2)} \frac{(1-2m)}{1+2m}.$$

Proof. Let us denote by $v = \rho^{(m+1)/2}$, then the integral $\mathcal{I}$ can be reads as $\mathcal{I} = J_1 + J_2$ with

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2}{m+1} \int_{\Omega} v^2 \nabla \nabla v^{\frac{2m}{m+1}} : \nabla \nabla \log v \, dx, \\ J_2 &= \frac{2m}{m+1} \int_{\Omega} v^2 \Delta v^{\frac{2m}{m+1}} \Delta \log v \, dx. \end{aligned}$$

Now, we may follow the strategy introduced by A. JÜNGEL and D. MATTHES in [62] in order to get a lower bound for the sum of J_1 and J_2 . Before that, we choose γ such that $2m/(m+1) = 2(\gamma-1)$, that's imply $\gamma = (2m+1)/(m+1)$. With this new variable, the above two integrals can be written as

$$\begin{aligned} J_1 &= 4(2-\gamma)(\gamma-1) \frac{1}{2(\gamma-1)} \int_{\Omega} v^2 \nabla \nabla v^{2(\gamma-1)} \nabla \nabla \log v \, dx, \\ J_2 &= 4(\gamma-1)^2 \frac{1}{2(\gamma-1)} \int_{\Omega} v^2 \Delta v^{2(\gamma-1)} \Delta \log v \, dx. \end{aligned}$$

Now, we sum J_1 and J_2 to get

$$J_1 + J_2 = 4(\gamma-1) \left((2-\gamma)A + (\gamma-1)B \right)$$

with

$$A := \frac{1}{2(\gamma-1)} \int_{\Omega} v^2 \nabla \nabla v^{2(\gamma-1)} \nabla \nabla \log v \, dx, \quad B := \frac{1}{2(\gamma-1)} \int_{\Omega} v^2 \Delta v^{2(\gamma-1)} \Delta \log v \, dx.$$

We compute A in the following manner

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2(\gamma-1)} \int_{\Omega} v^2 \partial_{ij}^2 v^{2(\gamma-1)} \partial_{ij}^2 \log v \, dx \\
 &= \frac{1}{2(\gamma-1)} \int_{\Omega} (v \partial_{ij}^2 v - \partial_i v \partial_j v) \partial_{ij}^2 (v^{2(\gamma-1)}) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} (v \partial_{ij}^2 v - \partial_i v \partial_j v) v^{2(\gamma-2)} (v \partial_{ij}^2 v + (2\gamma-3) \partial_i v \partial_j v) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} v^{2\gamma} \left(\frac{\|\nabla^2 v\|^2}{v^2} - 2(2-\gamma) \frac{\nabla^2 v}{v^2} : \frac{\nabla v}{v} \otimes \frac{\nabla v}{v} + (3-2\gamma) \frac{|\nabla v|^4}{v^4} \right) dx.
 \end{aligned}$$

In the same manner, we can compute B to obtain

$$B = \int_{\Omega} v^{2\gamma} \left(\left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 - 2(2-\gamma) \frac{\Delta v}{v} \left(\frac{\nabla v}{v} \right)^2 + (3-2\gamma) \frac{|\nabla v|^4}{v^4} \right) dx.$$

In order to simplify the computations, we introduce the functions θ , λ and ξ , respectively, by (recall that $\rho > 0$, hence $v > 0$)

$$\theta = \frac{|\nabla v|}{v}, \quad \lambda = \frac{1}{d} \frac{\Delta v}{v}, \quad (\lambda + \xi) \theta^2 = \frac{1}{v^3} \nabla^2 v : (\nabla v)^2,$$

and $\eta \geq 0$ by

$$\|\nabla^2 v\|^2 = (d\lambda^2 + \frac{d}{d-1} \mu^2 + \eta^2) v^2.$$

We express now A and B in terms of the functions θ , λ , ξ and η to get

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\Omega} v^{2\gamma} \left(d\lambda^2 + \frac{d}{d-1} \xi^2 + \eta^2 - 2(2-\gamma)(\lambda + \xi) \theta^2 + (3-2\gamma) \theta^4 \right) dx, \\
 B &= \int_{\Omega} v^{2\gamma} \left(d^2 \lambda^2 - 2(2-\gamma) d \lambda \theta^2 + (3-2\gamma) \theta^4 \right) dx.
 \end{aligned}$$

Now we need to compare $J = (2-\gamma)A + (\gamma-1)B$ to

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{\gamma^2} \int_{\Omega} (\Delta v^\gamma)^2 \, dx = \int_{\Omega} v^{2(\gamma-2)} (v \Delta v + (\gamma-1) |\nabla v|^2)^2 \, dx \\
 &= \int_{\Omega} v^{2\gamma} (d\lambda + (\gamma-1) \theta^2)^2 \, dx.
 \end{aligned}$$

More precisely, we shall determine a constant $c_0 > 0$ independent of v such that $J - c_0 K \geq 0$ for all positive functions v . The strategy present here is an adaptation of the method developed in [62]. We formally perform integration by parts in the expression $J - c_0 K$ by adding a linear combination of certain dummy integrals which are actually zero and hence do not change the value of the value of $J - c_0 K$. The coefficients in the linear combination are determined in a such a way that makes the resulting integrand pointwise non-negative.

We shall rely on the following two dummy integrals expressions :

$$F_1 = \int_{\Omega} \operatorname{div} (v^{2\gamma-2} (\nabla^2 v - \Delta v \mathbb{I}) \cdot \nabla v) \, dx,$$

$$F_2 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v^{2\gamma-3} |\nabla v|^2 \nabla v) dx,$$

where I is the unit matrix in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Obviously, in view of the boundary conditions, $F_1 = F_2 = 0$. Our purpose now is to find constants c_0, c_1 and c_2 such that $J - c_0 K = J - c_0 K + c_1 F_1 + c_2 F_2 \geq 0$. The computation in [62] yields to

$$F_1 = \int_{\Omega} v^{2\gamma} \left(-(d-1)\lambda^2 + \frac{d}{d-1}\xi^2 + \eta^2 + 2(\gamma-1)(-(d-1)\lambda\theta^2 + \xi\theta^2) \right) dx,$$

$$F_2 = \int_{\Omega} v^{2\gamma} \left((d+2)\lambda\theta^2 + 2\xi\theta^2 + (2\gamma-3)\theta^4 \right) dx.$$

After simple calculation, we obtain that

$$\begin{aligned} J - c_0 K &= J - c_0 K + c_1 F_1 + c_2 F_2 \\ &= \int_{\Omega} v^{2\gamma} \{ d\lambda[2 - \gamma + (\gamma-1)d - c_0 d - c_1(d-1)] \\ &\quad + \lambda\theta^2[-2(2-\gamma)(2-\gamma+(\gamma-1)d) \\ &\quad - 2d(\gamma-1)c_0 - 2c_1(\gamma-1)(d-1) + c_2(d+2)] + Q(\theta, \xi, \eta) \} dx, \end{aligned} \quad (3.28)$$

where Q is a polynomial in θ, ξ and η with coefficients depending on c_0, c_1 and c_2 but not in λ . As in [62], we choose to eliminate λ from the above integrand by defining c_1 and c_2 appropriately. One can check that the linear system

$$\begin{aligned} 2 - \gamma + (\gamma-1)d - c_0 d - c_1(d-1) &= 0, \\ -2(2-\gamma)(2-\gamma+(\gamma-1)d) - 2d(\gamma-1)c_0 - 2c_1(\gamma-1)(d-1) + c_2(d+2) &= 0, \end{aligned}$$

has the solution

$$c_1 = \frac{d(\gamma-1-c_0)+2-\gamma}{d-1}, \quad c_2 = 2 \frac{2-\gamma+d(\gamma-1)}{d+2}.$$

With this choice, the polynomial Q in (3.28) reads as

$$Q(\theta, \xi, \eta) = \frac{1}{(d-1)^2(d+2)} (b_1 \xi^2 + 2b_2 \xi \theta^2 + b_3 \theta^4 + b_4 \eta^2),$$

where

$$\begin{aligned} b_1 &= d^2(d+2)(1-c_0), \\ b_2 &= d(d-1)[d(4\gamma-5) - (\gamma-2) - (\gamma-1)(d+2)c_0], \\ b_3 &= (d-1)^2[d(3-2\gamma)^2 + 2(\gamma-1)(3-2\gamma) - c_0(\gamma-1)^2(d+2)], \\ b_4 &= d(d+2)(d-1)(1-c_0). \end{aligned}$$

Observe that if $c_0 < 1$, then $b_4 \geq 0$. We want to choose $c_0 < 1$ in such a way that the remaining sum $b_1 \xi^2 + 2b_2 \xi \theta^2 + b_3 \theta^4$ is nonnegative as well, for any ξ and θ . In fact, it remains to have the following two conditions

$$(i) \ b_1 > 0 \quad (ii) \ b_1 b_3 - b_2^2 \geq 0. \quad (3.29)$$

The first condition holds for $c_0 \leq 1$. For the second condition is equivalent to

$$-d(d+2)(1-c_0)(\gamma-1)(3\gamma-4) - (d-1)^2(3\gamma-4)^2 - d(d+2)(1-c_0)(3\gamma-4) \geq 0.$$

We advise the readers to make the change of variable $X = (\gamma - 1)$ and $Y = (1 - c_0)$ in the above computation in order to simplify the calculation. Therefore, if $\gamma > 4/3$ there is no solution to the preceding inequality with $c_0 < 1$. However, for $\gamma \leq 4/3$, condition (ii) is further equivalent to

$$c_0 \leq 1 - \frac{(d-1)^2 (4-3\gamma)}{d(d+2) \gamma}, \quad \gamma \leq \frac{4}{3}.$$

The best choice for c_0 is clearly to make γ small as possible. Remember that $\gamma = (2m+1)/(m+1)$, and then $\gamma \in [1, 2[$. Thus we have found constants c_0, c_1 and c_2 for which the expression $J - c_0 K + c_1 F + c_2 F_2$ is nonnegative such that $\gamma \in [1, 4/3]$. $\square$

Now, we shall assume that ρ and $\mathbf{w}$ are smooth enough and we will try to derive an original estimate on $(\rho, \mathbf{w}, \nabla \log \rho)$ by the help of Lemma (3.3) which is necessary to understand the idea of construction of solution.

Maximum principle and H^1 bound on the density. First, applying the standard maximum principle for the continuity equation

$$\partial_t \rho + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho - 2\kappa \Delta \rho = 0, \quad (3.30)$$

we deduce that

$$0 < r \leq \rho \leq R < \infty, \quad (3.31)$$

and the basic energy estimate gives

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\rho\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c. \quad (3.32)$$

Proposition 3.1. *Let $(\rho, \mathbf{w})$ be sufficiently smooth solution to (3.17), then if $0 \leq m \leq 1/2$ and $c > 0$ there exist a constant $c_0 > 0$ such that $(\rho, \mathbf{w})$ satisfies the following inequality*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + (1-\kappa)\kappa \frac{|2\nabla \log \rho|^2}{2} \right) dx + c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} |\nabla \log \rho|^2 dx \\ & + 2(1-\kappa) \int_{\Omega} \rho |D(u)|^2 dx + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(u)|^2 dx + \frac{8c\kappa c_0}{(2m+1)^2} \int_{\Omega} \left(\Delta \rho^{\frac{2m+1}{2}} \right)^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

The constant c_0 is a positive constant which satisfies the following inequality

$$c_0 \leq 1 - \frac{(d-1)^2 (1-2m)}{d(d+2) (1+2m)}.$$

The constraint on m follows from condition (ii) in (3.29) (remember that $\gamma = (2m+1)/(m+1)$).

Proof. Multiplying the second equation in (3.17) by $\mathbf{w}$ and integrating by parts with respect to Ω we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 dx + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(u)|^2 dx + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(u)|^2 dx \\ & - \frac{c}{(2m+1)} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla^2 \log \rho) \cdot \mathbf{w} dx + 4(1 - \kappa) \kappa \int_{\Omega} \rho \nabla u : \nabla^2 \log \rho dx = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Besides, testing (3.12) in Lemma 3.2 by $\mathbf{w} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, we get (remember $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$)

$$\begin{aligned} I &:= -\frac{c}{(2m+1)} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla^2 \log \rho) \cdot \mathbf{w} dx \\ &= -c \int_{\Omega} \rho \nabla \left(\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta \left(\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds \right) \right) \cdot \mathbf{w} dx = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

where I_1 and I_2 (remember $\mathbf{w} = u + 2\kappa \nabla \log \rho$)

$$\begin{aligned} I_1 &= -c \int_{\Omega} \rho \nabla \left(\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta \left(\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds \right) \right) \cdot u dx \\ I_2 &= -2\kappa c \int_{\Omega} \rho \nabla \left(\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta \left(\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds \right) \right) \cdot \nabla \log \rho dx \end{aligned}$$

Now after integrating by part the integral I_1 and using the continuity equation (3.17)₁ we obtain

$$I_1 = c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{2m-1} |\nabla \rho|^2 dx = c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} |\nabla \log \rho|^2 dx.$$

The integration by part of I_2 using Equation (3.11) yields to

$$I_2 = \frac{2\kappa c}{m(m+1)} \left[\int_{\Omega} \rho^{m+1} \nabla \nabla \rho^m : \nabla \nabla \log \rho dx + m \int_{\Omega} \rho^{m+1} \Delta \rho^m \Delta \log \rho dx \right] \quad (3.36)$$

Therefore, one can deduce from Lemma 3.3 that

$$I \geq c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} |\nabla \log \rho|^2 dx + \frac{8\kappa c c_0}{(2m+1)^2} \int_{\Omega} \left(\Delta \rho^{\frac{2m+1}{2}} \right)^2 dx. \quad (3.37)$$

To finish the proof, it remains to estimate the last term in (3.34) since it does not have a sign. To this purpose, we try to multiply the continuity equation associated to u (3.17)₁ by $-\Delta \sqrt{\rho} / \sqrt{\rho}$ and we integrate it with respect to Ω to get

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{|\nabla \log \rho|^2}{2} dx - \int_{\Omega} \rho \nabla u : \nabla^2 \log \rho dx = 0 \quad (3.38)$$

Next, we multiply (3.38) by $4(1 - \kappa)\kappa$ and add it to (3.34), we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + (1 - \kappa) \kappa \frac{|2\nabla \log \rho|^2}{2} \right) dx + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(u)|^2 dx \\ & + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(u)|^2 dx - I = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Gathering the above computation we can easily check that we have

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + (1 - \kappa) \kappa \frac{2|\nabla \log \rho|^2}{2} \right) dx + c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} |\nabla \log \rho|^2 dx \\ & + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(u)|^2 dx + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(u)|^2 dx + \frac{8c\kappa c_0}{(2m+1)^2} \int_{\Omega} \left(\Delta \rho^{\frac{2m+1}{2}} \right)^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

which end the proof of proposition 3.1.

Remark 3.4. We emphasize that from Estimate (3.33), we can deduce that

$$\Delta \rho^{\frac{2m+1}{2}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

but thank to Estimate (3.31), we can infer with

$$\Delta \rho \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

which yields by virtue of estimate $\rho \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ (see (3.32)) and the periodic boundary condition to

$$\rho \in L^2(0, T; H^2(\Omega)).$$

Obviously, when an initial vacuum may exist, this conclusion is not true but the framework developed here can be adapted to deals with the vacuum.

3.4.2 Construction of solution

The procedure of construction of solution follow the idea developped recently in [21] for low Mach number. Precisely, we construct the approximate solution using an augmented approximate system. We propose to study the following system

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) - 2\kappa \Delta \rho = 0, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}((\rho \mathbf{w} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes \mathbf{w}) - 2(1 - \kappa) \operatorname{div}(\rho D(\mathbf{w})) - 2\kappa \operatorname{div}(\rho A(\mathbf{w})) \\ + \nabla \pi_2 = -2\kappa(1 - \kappa) \operatorname{div}(\rho \nabla v) + \frac{c}{2(2m+1)} \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla v), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}((\rho \mathbf{w} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes v) - 2\kappa \operatorname{div}(\rho \nabla v) = -2 \operatorname{div}(\rho \nabla^t \mathbf{w}), \quad (3.42)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0.$$

Remark that if we prove that $v = 2\nabla \log \rho$, we can infer a weak solution $(\rho, \mathbf{w})$ of System (3.17) in the sense of Definition 3.1. Now, compared to [21], the last term depending on ρ and on v in the momentum equation (3.41) is new. Nonetheless, the treatment of this first term is similar to $-2\kappa(1 - \kappa) \operatorname{div}(\rho \nabla v)$ and this support our attempts in writing the capillarity term as (3.12) in Lemma 3.2. In order to build such a solution

for $\epsilon > 0$ given, we need to go through several levels of approximations. For example, to build a solution of the nonlinear parabolic equation for ρ , some assumptions are required on the coefficients. A smoothing parameter $\delta > 0$ (denoting standard mollification with respect to x) are therefore introduced in all the transport terms. More precisely, for a nonnegative function $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ such that

$$\text{Supp } \phi \in B(0, 1), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \int \varphi dx = 1,$$

we define a sequence of functions $\{\varphi_\delta\}_\delta$ such that $\varphi_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(\delta^{-1}x) \forall x \in \mathbb{R}^d$. Given any $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, we set the regularized functions $\{\langle f \rangle_\delta\}_\delta$ as

$$\langle f \rangle_\delta = \varphi_\delta * f.$$

So that the approximate system can be rewritten as

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho[\mathbf{w}]_\delta) - 2\kappa \Delta \rho = 0,$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \text{div}((\rho \mathbf{w} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes \mathbf{w}) - 2(1 - \kappa) \text{div}(\rho D(\mathbf{w})) \\ & + \epsilon[\Delta^2 \mathbf{w} - \text{div}((1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) \nabla \mathbf{w})] - 2\kappa \text{div}(\rho A(\mathbf{w})) + \nabla \pi_2 \\ & = -2\kappa(1 - \kappa) \text{div}(\rho \nabla v) + \frac{c}{2(2m+1)} \text{div}(\rho^{2m+1} \nabla v) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\partial_t(\rho v) + \text{div}((\rho \mathbf{w} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes v) - 2\kappa \text{div}(\rho \nabla v) = -2 \text{div}(\rho \nabla^t \mathbf{w}), \quad (3.44)$$

Compared to [21], we have two extra terms depending on ρ and in v . We will see that the presence of this two terms leads to minor modifications compared with this introduced in [21].

Existence of solutions for the full approximation

Below we present the basic level of approximation procedure.

- 1- The continuity equation is replaced by its regularized version

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho + \text{div}(\rho[\mathbf{w}]_\delta) - 2\kappa \Delta \rho = 0, \\ & \rho(0, x) = [\rho^0]_\delta, \end{aligned} \quad (3.45)$$

- 2- The momentum equation is replaced by its Faedo-Galerkin approximation with

additional regularizing term $\epsilon[\Delta^2 \mathbf{w} - \operatorname{div}((1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) \nabla \mathbf{w})]$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \rho \mathbf{w}(\tau) \cdot \phi \, dx - \int_0^T \int_{\Omega} ((\rho[\mathbf{w}]_{\delta} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes \mathbf{w}) : \nabla \phi \, dx \, dt \\
 & + 2(1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \rho D(\mathbf{w}) : \nabla \phi \, dx \, dt \\
 & + \epsilon \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{w} \cdot \Delta \phi + (1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) \nabla \mathbf{w} : \nabla \phi) \, dx \, dt \\
 & + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho A(\mathbf{w}) : \nabla \phi \, dx \, dt - 2\kappa(1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla v : \nabla \phi \, dx \, dt \\
 & + \frac{c}{2(2m+1)} \int_0^T \int_{\Omega} \rho^{2m+1} \nabla v : \nabla \phi \, dx \, dt = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{w})^0 \cdot \phi \, dx,
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

satisfied for any $\tau \in [0, T]$ and any test function $\phi \in X_n = \operatorname{span}\{\phi_i\}_{i=1}^n$ and $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ is an orthonormal basis of V such that $\phi_i \in (C^{\infty}(\Omega))^3$ with $\operatorname{div} \phi_i = 0$ for all $i \in \mathbb{N}$.

3- The Faedo-Galerkin approximation for the artificial equation

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \rho v(\tau) \cdot \xi \, dx - \int_0^T \int_{\Omega} ((\rho[\mathbf{w}]_{\delta} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes v) : \nabla \xi \, dx \, dt \\
 & + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla v : \nabla \xi \, dx \, dt - 2 \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla^t \mathbf{w} : \nabla \xi \, dx \, dt \\
 & = \int_{\Omega} (\rho v)^0 \cdot \xi \, dx,
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

satisfied for any $\tau \in [0, T]$ and any test function $\xi \in Y_n = \operatorname{span}\{\xi_i\}_{i=1}^n$ and $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ is an orthonormal basis in $W^{1,2}(\Omega)$ such that $\xi \in (C^{\infty}(\Omega))^3$ for all $i \in \mathbb{N}$.

Existence of solution to the continuity equation. For fixed $\mathbf{w} \in C([0, T], X_n)$ we solve the continuity equation, which is now quasi-linear parabolic equation with smooth coefficients. Thus, application of classical existence theory of LADYŽENSKAJA, SOLONNIKOV and URALCEVA [72] (see for example Theorem 10.24 from [48], which is a combination of Theorems 7.2, 7.3 and 7.4 from [72]) yields the following result.

Theorem 3.2. *Let $\nu \in (0, 1)$. Suppose that the initial condition $\rho_{\delta}^0 \in C^{2+\nu}(\overline{\Omega})$ is such that $0 < r \leq \rho_{\delta}^0 \leq R$ and satisfies the periodic boundary conditions. Then problem (3.45) possesses a unique classical solution ρ from the class*

$$V_{[0,T]} = \left\{ \begin{array}{l} \rho \in C([0, T]; C^{2+\nu}(\Omega) \cap C^1([0, T] \times \Omega)), \\ \partial_t \rho \in C^{\nu/2}([0, T], C(\Omega)) \end{array} \right\} \tag{3.48}$$

and satisfying classical maximum principle

$$0 < r \leq \rho(t, x) \leq R. \tag{3.49}$$

Moreover, the mapping $\mathbf{w} \rightarrow \rho(\mathbf{w})$ maps bounded sets in $C([0, T]; X_n)$ into bounded sets in $V_{[0,T]}$ and is continuous with values in $C([0, T]; C^{2+\nu'}(\Omega))$, $0 < \nu' < \nu < 1$.

Local existence of solutions to the Galerkin approximation. Here we proceed as in the analogous proof performed in [21]. In what follows, we will show that the integral equations (3.46) and (3.47) possess the unique solution on possibly short time interval via fixed point argument. More precisely, we will prove that there exists time $T = T(n)$ and $(\mathbf{w}, v) \in C([0, T], X_n) \times C([0, T], Y_n)$ satisfying (3.46)-(3.47). Towards this end, let us rewrite these equations as a fixed point problem.

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}(t), v(t)) &= \left(\mathcal{M}_{\rho(t)} \left[P_{X_n}(\rho \mathbf{w})^0 + \int_0^t \mathcal{K}(\mathbf{w})(s) ds \right], \mathcal{N}_{\rho(t)} \left[P_{Y_n}(\rho v)^0 + \int_0^t \mathcal{L}(v)(s) ds \right] \right) \\ &= \mathcal{F}[\mathbf{w}, v](t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

where $\rho = \rho(\mathbf{w})$ is a solution to the continuity equation as explained above,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\rho(t)} : X_n \times Y_n &\rightarrow X_n, \quad \int_{\Omega} \rho \mathcal{M}_{\rho(t)}[\phi] \cdot \psi = \langle \phi, \psi \rangle, \quad \phi, \psi \in X_n, \\ \mathcal{N}_{\rho(t)} : Y_n \times X_n &\rightarrow Y_n, \quad \int_{\Omega} \rho \mathcal{N}_{\rho(t)}[\xi] \cdot \zeta = \langle \xi, \zeta \rangle, \quad \xi, \zeta \in Y_n, \end{aligned}$$

where P_{X_n}, P_{Y_n} denote the projections of $L^2(\Omega)$ on X_n, Y_n , respectively, and $\mathcal{K}(\mathbf{w}), \mathcal{L}(v)$ are the operators defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : X_n \times Y_n &\rightarrow X_n, \\ \langle \mathcal{K}(\mathbf{w}), \phi \rangle &= \int_0^T \int_{\Omega} ((\rho[\mathbf{w}]_{\delta} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes \mathbf{w}) : \nabla \phi \, dx \, dt - 2(1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \rho D(\mathbf{w}) : \nabla \phi \, dx \, dt \\ &\quad - \epsilon \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{w} \Delta \phi + (1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) \nabla \mathbf{w} : \nabla \phi) \, dx \, dt - 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho A(\mathbf{w}) : \nabla \phi \, dx \, dt \\ &\quad + 2\kappa(1 - \kappa) \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla v : \nabla \phi \, dx \, dt - \frac{c}{2(2m+1)} \int_0^T \int_{\Omega} \rho^{2m+1} \nabla v : \nabla \phi \, dx \, dt \\ \mathcal{L} : Y_n \times X_n &\rightarrow Y_n, \\ \langle \mathcal{L}(v), \xi \rangle &= \int_0^T \int_{\Omega} ((\rho[\mathbf{w}]_{\delta} - 2\kappa \nabla \rho) \otimes v) : \nabla \xi \, dx \, dt - 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla v : \nabla \xi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

First let us observe that since $\rho(t, x)$ is strictly positive we have

$$\|\mathcal{M}_{\rho(t)}\|_{L(X_n, X_n)}, \|\mathcal{N}_{\rho(t)}\|_{L(Y_n, Y_n)} \leq \frac{1}{r}. \quad (3.51)$$

Moreover

$$\|\mathcal{M}_{\rho^1(t)} - \mathcal{M}_{\rho^2(t)}\|_{L(X_n, X_n)} + \|\mathcal{N}_{\rho^1(t)} - \mathcal{N}_{\rho^2(t)}\|_{L(Y_n, Y_n)} \leq c(n, r^1, r^2) \|\rho^1 - \rho^2\|_{L^1(\Omega)}, \quad (3.52)$$

and by the equivalence of norms on the finite dimensional space we prove that

$$\|\mathcal{K}(\mathbf{w})\|_{X_n} + \|\mathcal{L}(v)\|_{Y_n} \leq c(n, r, R, \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}, \|\mathbf{w}\|_{X_n}, \|v\|_{Y_n}). \quad (3.53)$$

Next, we consider a ball $\mathcal{B}$ in the space $C([0, \tau]; X_n) \times C([0, \tau]; Y_n)$:

$$\mathcal{B}_{M,\tau} = \{(\mathbf{w}, v) \in C([0, \tau]; X_n) \times C([0, \tau]; Y_n) : \|\mathbf{w}\|_{C([0,\tau];X_n)} + \|v\|_{C([0,\tau];Y_n)} \leq M\}.$$

Using estimates (3.52), (3.53), (3.48) and (3.49), one can check that $\mathcal{F}$ is a continuous mapping of the ball $\mathcal{B}_{M,\tau}$ into itself and for sufficiently small $\tau = T(n)$ it is a contraction. Therefore, it possesses a unique fixed point which is a solution to (3.46) and (3.47) for $T = T(n)$.

Global existence of solutions. In order to extend the local in-time solution obtained above to the global in time one, we need to find uniform (in time) estimates, so that the above procedure can be iterated. First let us note, that $\mathbf{w}, v$ obtained in the previous paragraph have better regularity with respect to time. It follows by taking the time derivative of (3.50) and using the estimates (3.48), (3.49), that

$$(\mathbf{w}, v) \in C^1([0, \tau]; X_n) \times C^1([0, \tau]; Y_n).$$

This is an important feature since now we can take time derivatives of (3.46) and (3.47) and use the test functions $\phi = \mathbf{w}$ and $\xi = v$, respectively. We then obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} dx + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(\mathbf{w})|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{w}|^2 + (1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) |\nabla \mathbf{w}|^2 dx \\ & + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(\mathbf{w})|^2 - 2\kappa(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho \nabla v : \nabla \mathbf{w} dx \\ & + \frac{c}{2(2m+1)} \int_0^T \int_{\Omega} \rho^{2m+1} \nabla v : \nabla \mathbf{w} dx dt = 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

and

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{|v|^2}{2} dx + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho |\nabla v|^2 dx - 2 \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla^t \mathbf{w} : \nabla v dx = 0. \quad (3.55)$$

Gathering the above Equations together to obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2} \right) dx + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(\mathbf{w})|^2 dx \\ & + \epsilon \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{w}|^2 + (1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) |\nabla \mathbf{w}|^2 dx + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(\mathbf{w})|^2 \\ & + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \rho |\nabla v|^2 dx = -G \end{aligned} \quad (3.56)$$

with G is equal to

$$\begin{aligned} G := & 2\kappa(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho \nabla v : \nabla \mathbf{w} dx - \frac{c}{2(2m+1)} \int_0^T \int_{\Omega} \rho^{2m+1} \nabla v : \nabla \mathbf{w} dx dt \\ & + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla^t \mathbf{w} : \nabla v dx \end{aligned}$$

Using now Hölder inequality and choosing ε large enough, we obtain uniform estimate for $\mathbf{w}$ and v necessary to repeat the procedure described in the previous paragraph. Thus, we obtain a global in time unique solution $(\rho, \mathbf{w}, v)$ satisfying equations (3.45, 3.46, 3.47).

Uniform estimates. Below we present uniform estimates that will allow us to pass to the limit with n .

First observe that multiplying the continuity equation (3.45) by ρ_δ and integrating by parts with respect to x gives

$$\|\rho_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla \rho_\delta\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c.$$

Moreover, the standard maximum principle gives boundness of ρ_δ from above and below, i.e

$$0 < r \leq \rho_\delta(t, x) \leq R. \quad (3.57)$$

To prove this, let us denote by

$$\rho_\delta^- = \max(0, m - \rho) \quad \text{and} \quad \rho_\delta^+ = \min(0, R - \rho). \quad (3.58)$$

Now, multiplying Equation (3.45) by $r - \rho_\delta$ and employ an integration over Ω to obtain

$$\int_{\Omega} (r - \rho_\delta) \partial_t \rho \, dx + \int_{\Omega} (r - \rho_\delta) (\mathbf{w} \cdot \nabla) \rho_\delta \, dx + 2\kappa \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \nabla (r - \rho_\delta) \, dx. \quad (3.59)$$

This equality is equivalent to the following equation

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (r - \rho) \, dx + 2\kappa \int_{\Omega} (\nabla (r - \rho_\delta))^2 \, dx = 0. \quad (3.60)$$

Now, we integrate from 0 to t the preceding equation and we take the maximum. It gives

$$\|\rho_\delta^-\|_{L^2(\Omega)} + 2\kappa \int_0^t \|\nabla \rho_\delta^-\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt = \|\rho_{\delta,0}^-\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.61)$$

where $\rho_{\delta,0}^- = \rho_\delta^-|_{t=0} = \max(0, -\rho_{\delta,0}) = 0$. Thus $\rho_\delta^-(t, x) = 0$. This gives the lower bound for ρ . For the upper bound one does the same calculation.

Taking in mind the following equality

$$\int_{\Omega} \rho |D(u)|^2 \, dx = \int_{\Omega} \rho |D(u) - \frac{1}{d} \operatorname{div} u \, I|^2 \, dx + \int_{\Omega} \frac{\rho}{d} |\operatorname{div} u|^2 \, dx, \quad (3.62)$$

and the fact that $\mathbf{w}$ is a divergence free we deduce from Estimate (3.56) that for $0 < \kappa < 1$ we have

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{w}_n\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\mathbf{w}_n\|_{L^2(0,T;V)} \\ & + \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{w}_n\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega))} + \varepsilon^{1/4} \|\nabla \mathbf{w}_n\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \\ & + \|v_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|v_n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \leq c. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Obviously, this estimate is uniformly with respect to n and δ but not on ϵ (since it is hold just for ϵ large enough). Later when we identify v by $2\nabla \log \rho$, one can show using Proposition 3.1 that it's also uniformly with respect to ϵ .

Now, we move to pass at the limit with respect to n, δ and ϵ .

Passage to the limit $n \rightarrow \infty$. Until now, we only know that the approximate continuity equation (3.45) is satisfied in the sense of distributions

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t \rho_n, \phi \rangle_{(W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega))} dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_n [\mathbf{w}_n]_{\delta} \cdot \nabla \phi \, dx \, dt + 2\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \rho_n \cdot \nabla \phi \, dx \, dt = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

for any test function ϕ from $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$. But on the other hand, we know that that in the distributional sense

$$\psi = \partial_t \rho_n - 2\kappa \Delta \rho \in L^2((0, T) \times \Omega),$$

if only $\mathbf{w}_n \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$. But this is the case at the level of Galerkin approximations. Taking the product of ψ and ψ we obtain

$$\int_{\Omega} (\partial_t \rho_n - 2\kappa \Delta \rho_n)^2 \, dx \leq c, \quad (3.65)$$

and the above integral gives rise to estimates

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_n (\partial_t \rho_n)^2 \, dx + 4\kappa^2 \int_{\Omega} \rho_n (\Delta \rho_n)^2 \, dx - 4\kappa \int_{\Omega} \rho_n \partial_t \rho_n \Delta \rho_n \, dx \\ & = \int_{\Omega} \rho_n (\partial_t \rho_n)^2 + 4\kappa^2 \int_{\Omega} \rho_n (\Delta \rho_n)^2 \, dx + 2\kappa \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \rho_n|^2 \, dx \leq c. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Note that this estimate asks for $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ bound for $\mathbf{w}_n$, which is possible only at the level of Galerkin approximation. Nevertheless, regularity (3.66) allows us to repeat (3.30-??) to get the uniform (with respect to n, ϵ and δ) estimate

$$\|\nabla \rho_n\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|\Delta \rho_n\|_{L^2((0, T) \times \Omega)} \leq c. \quad (3.67)$$

In passage to the limit in n , the biggest problem is thus to pass at the limit in the term

$$\nabla \rho_n \otimes \mathbf{w}_n, \quad (3.68)$$

which requires the strong convergence of the density and at least weak convergence of the gradient of density and in the convective term

$$\rho_n \mathbf{w}_n \otimes \mathbf{w}_n \quad (3.69)$$

which requires strong convergence of $\sqrt{\rho_n} \mathbf{w}_n$. Having obtained estimate (3.67) we can estimate the time-derivative of gradient of ρ_n . Indeed differentiating (3.45) with respect to x we obtain

$$\partial_t \nabla \rho_n = -\nabla([\mathbf{w}_n]_{\delta} \cdot \nabla \rho_n) + 2\kappa \nabla \Delta \rho_n \in L^2(0, T; W^{-1,3/2}(\Omega)).$$

Note that the above estimate is uniform also with respect to ϵ . Now, applying the Aubin-Lions lemma for $\nabla \rho_n$ we obtain

$$\nabla \rho_n \rightarrow \nabla \rho \quad \text{strongly in } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

therefore due to (3.57) we also have

$$\rho_n \rightarrow \rho \quad \text{and} \quad \frac{1}{\rho_n} \rightarrow \frac{1}{\rho} \quad \text{strongly in } L^p(0, T; L^p(\Omega)) \quad (3.70)$$

for $p < \infty$ and

$$\rho_n \mathbf{w}_n \rightarrow \rho \mathbf{w} \quad \text{weakly in } L^{p_1}(0, T; L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(0, T; L^{q_2}(\Omega)), \quad (3.71)$$

where $p_1 < 2, q_1 < 6, p_2 < \infty, q_2 < 2$. These convergences justify the limit passage in (3.68).

To justify passage to the limit in (3.69) we first estimate

$$\begin{aligned} \|\nabla(\rho_n \mathbf{w}_n)\|_{L^2(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} &\leq \|\nabla \rho_n\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \|\mathbf{w}_n\|_{L^2(0, T; L^6(\Omega))} \\ &\quad + \|\nabla \mathbf{w}_n\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|\rho_n\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

We can also estimate the time derivative of momentum as follow

$$\begin{aligned} &\sup_{\|\phi\| \leq 1} \left| \int_0^T \int_\Omega \partial_t(\rho_n \mathbf{w}_n) \cdot \phi \, dx \, dt \right| \\ &= \sup_{\|\phi\| \leq 1} \left\{ \left| \int_0^T \int_\Omega ((\rho_n[\mathbf{w}_n]_\delta - 2\kappa \nabla \rho_n) \otimes \mathbf{w}_n) : \nabla \phi \, dx \, dt \right| \right. \\ &\quad + 2(1 - \kappa) \left| \int_0^T \int_\Omega \rho_n D(\mathbf{w}_n) : \nabla \phi \, dx \, dt \right| + \epsilon \left| \int_0^T \int_\Omega \Delta \mathbf{w} \cdot \Delta \phi \, dx \, dt \right| \\ &\quad + \epsilon \left| \int_0^T \int_\Omega (1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) \nabla \mathbf{w} : \nabla \phi \, dx \, dt \right| + 2\kappa \left| \int_0^T \int_\Omega \rho_n A(\mathbf{w}_n) : \nabla \phi \, dx \, dt \right| \\ &\quad \left. + 2\kappa(1 - \kappa) \left| \int_0^T \int_\Omega \rho_n \nabla v_n : \nabla \phi \, dx \, dt \right| + \left| \frac{c}{2(2m+1)} \int_0^T \int_\Omega \rho^{2m+1} \nabla v : \nabla \phi \, dx \, dt \right| \right\}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

where $\|\phi\|$ denotes the norm in the space $W_T := L^2(0, T; V \cap W^{2,2}(\Omega)) \cap L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))$.

Let us estimate the convective term

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \int_\Omega ((\rho_n[\mathbf{w}_n]_\delta - 2\kappa \nabla \rho_n) \otimes \mathbf{w}_n) : \nabla \phi \, dx \, dt \right| \\ &\leq \int_0^T \|\nabla \phi\|_{L^6(\Omega)} \left(R \|\mathbf{w}_n\|_{L^{\frac{12}{5}}(\Omega)}^2 + c(\kappa, R) \|\nabla \rho_n\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{w}_n\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \right) dt \\ &\leq c(\kappa, R, \epsilon) \|\phi\|_{L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega))}, \end{aligned}$$

for the highest order terms we have

$$\epsilon \left| \int_0^T \int_\Omega \Delta \mathbf{w}_n \cdot \Delta \phi \, dx \, dt \right| \leq \epsilon \|\mathbf{w}_n\|_{L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega))} \|\phi\|_{L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega))}, \quad (3.74)$$

and

$$\begin{aligned}
 & \epsilon \left| \int_0^T \int_{\Omega} (1 + |\nabla \mathbf{w}|^2) \nabla \mathbf{w} : \nabla \phi \, dx \, dt \right| \\
 & \leq \epsilon \int_0^T \|\nabla \phi\|_{L^4(\Omega)} (\|\nabla \mathbf{w}_n\|_{L^4(\Omega)}^3 + \|\nabla \mathbf{w}_n\|_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)}) \, dt \\
 & \leq \epsilon \|\nabla \phi\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} (\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}^3 + \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^{\frac{4}{3}}(\Omega))}).
 \end{aligned}$$

The other terms in (3.73) are less restrictive, therefore

$$\|\partial_t(\rho_n \mathbf{w}_n)\|_{W_T^*} \leq c, \quad (3.75)$$

where W_T^* denotes the dual space of W_T defined above. Collecting (3.71), (3.72), (3.75) and applying the Aubin-Lions lemma to $\rho_n \mathbf{w}_n$, we prove that

$$\rho_n \mathbf{w}_n \rightarrow \rho \mathbf{w} \quad \text{strongly in } L^p(0, T; L^p(\Omega)) \quad (3.76)$$

for some $p > 1$ and therefore thanks to (3.70) and (3.63)

$$\nabla \mathbf{w}_n \rightarrow \nabla \mathbf{w} \quad \text{strongly in } L^p(0, T; L^p(\Omega)) \quad (3.77)$$

for $1 \leq p < 4$. In particular, convergence in (3.69) is proved. For future purposes we now estimate the time derivative of ρv in $L^{\frac{4}{3}}(0, T; W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega))$. We use (3.47) to obtain

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t(\rho_n v_n) \cdot \xi \, dx \, dt \right| \\
 & = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left\{ \left| \int_0^T \int_{\Omega} ((\rho_n [\mathbf{w}_n]_{\delta} - 2\kappa \nabla \rho_n) \otimes v_n) : \nabla \xi \, dx \, dt \right| \right. \\
 & \quad \left. + 2\kappa \left| \int_0^T \int_{\Omega} \rho_n \nabla v_n : \nabla \xi \, dx \, dt \right| + 2 \left| \int_0^T \int_{\Omega} \rho_n \nabla^t \mathbf{w}_n : \nabla \xi \, dx \, dt \right| \right\}
 \end{aligned}$$

where $\|\xi\|$ denotes the norm in the space $L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))$. We will only estimate the convective term since it is most restrictive.

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T \int_{\Omega} ((\rho_n [\mathbf{w}_n]_{\delta} - 2\kappa \nabla \rho_n) \otimes v_n) : \nabla \xi \, dx \, dt \right| \\
 & \leq \int_0^T \|\nabla \xi\|_{L^4(\Omega)} (R \|\mathbf{w}_n\|_{L^4(\Omega)} \|v_n\|_{L^2(\Omega)} + c(\kappa, R) \|\nabla \rho_n\|_{L^4(\Omega)} \|v_n\|_{L^2(\Omega)}) \, dt \\
 & \leq c(\kappa, R) \|\xi\|_{L^4(0,T;W^{1,4}(\Omega))} \|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \left(\|\mathbf{w}_n\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} + \|\Delta \rho_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^{\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

thus

$$\|\partial_t(\rho_n v_n)\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{-1,\frac{4}{3}}(\Omega))} \leq c. \quad (3.78)$$

Hence, the limit functions $(\rho, \mathbf{w}, v) = (\rho_{\delta}, \mathbf{w}_{\delta}, v_{\delta})$ fulfil

- the continuity equation

$$\partial_t \rho_\delta + \operatorname{div}(\rho_\delta [\mathbf{w}_\delta]_\delta) - 2\kappa \Delta \rho_\delta = 0 \quad (3.79)$$

a.e. in $(0, T) \times \Omega$,

- the momentum equation

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t(\rho_\delta \mathbf{w}_\delta), \phi \rangle_{(W_\tau^*, W_\tau)} - \int_0^T \int_\Omega ((\rho_\delta [\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \rho) \otimes \mathbf{w}_\delta) : \nabla \phi \, dx \, dt \\ & + 2(1 - \kappa) \int_\Omega \rho_\delta D(\mathbf{w}_\delta) : \nabla \phi \, dx \, dt + \epsilon \int_\Omega \Delta \mathbf{w}_\delta \Delta \phi \, dx \, dt \\ & + \epsilon \int_\Omega (1 + |\nabla \mathbf{w}_\delta|^2) \nabla \mathbf{w}_\delta : \nabla \phi \, dx \, dt - 2\kappa(1 - \kappa) \int_\Omega \rho_\delta \nabla v_\delta(t) : \nabla \phi \, dx \, dt \\ & + \frac{c}{2(2m+1)} \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta^{(2m+1)} \nabla v_\delta : \nabla \phi \, dx \, dt = 0, \end{aligned} \quad (3.80)$$

for all $\phi \in W_\tau$ with $\tau \in [0, T]$,

- the auxiliary equation for v

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t(\rho_\delta v_\delta), \xi \rangle_{(L^{\frac{4}{3}}(0, \tau; W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega)), L^4(0, \tau; W^{1, 4}(\Omega)))} \\ & - \int_0^T \int_\Omega ((\rho_\delta [\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \rho_\delta) \otimes v_\delta) : \nabla \xi \, dx \, dt \\ & + 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta \nabla v_\delta : \nabla \xi \, dx \, dt - 2 \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta \nabla^t \mathbf{w}_\delta : \nabla \xi \, dx \, dt = 0, \end{aligned} \quad (3.81)$$

for all $\xi \in L^4(0, \tau; W^{1, 4}(\Omega))$ with $\tau \in [0, T]$.

Passage to the limit δ tends to 0 and identification of v_δ with $2\nabla \log \rho_\delta$ at the limit. The aim of this paragraph is to let $\delta \rightarrow 0$ in the equations (3.79), (3.80) and (3.81). This limit passage can be performed exactly as $n \rightarrow \infty$ presented above. The only difference is that after this step we may drop the additional equation for v thanks to identification $v = 2\nabla \log \rho$. Below we present the details of this reasoning.

Note that the coefficients of the quasi-linear parabolic equation (3.79) (i.e. $[\mathbf{w}_\delta]_\delta$) are sufficiently regular and the maximum principle (3.57) holds uniformly with respect to all approximation parameters. Therefore, the classical theory of Ladyženskaja, Solonnikov and Uralceva [72] (Theorems 7.2, 7.3 and 7.4 from [72]) can be applied to show further regularity of ρ_δ , we have in particular

$$\partial_t \rho_\delta \in C([0, T]; C(\Omega)), \quad \rho_\delta \in C([0, T]; C^2(\Omega)). \quad (3.82)$$

Let us now rewrite (3.79) as

$$\partial_t \rho_\delta + \operatorname{div}(\rho_\delta ([\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \log \rho_\delta)) = 0$$

Differentiating it with respect to space one gets in the sense of distributions

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_\delta \tilde{v}_\delta) + \operatorname{div}(\rho_\delta([\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \log \rho_\delta) \otimes \tilde{v}_\delta) \\ + 2 \operatorname{div}(\rho_\delta \nabla^t[\mathbf{w}_\delta]_\delta) - 2\kappa \operatorname{div}(\rho_\delta \nabla \tilde{v}_\delta) = 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

where by $\tilde{v}_\delta$ we denoted $2\nabla \log \rho_\delta$. Note that due to particular case of the Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality given by

$$\|\nabla f\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq c \|\Delta f\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

for any function $f \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ and (3.57) we know that $\nabla \rho_\delta$ is bounded

$$\|\nabla \rho_\delta\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \leq c,$$

uniformly with respect to δ . One can thus estimate the convective term of (3.83) in $L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ uniformly with respect to δ . Indeed, we now $\mathbf{w}_\delta$ uniformly bounded in $L^4(0,T;L^4(\Omega))$ with respect to δ and therefore

$$\begin{aligned} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left| \int_0^T \int_\Omega (\rho_\delta([\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \log \rho_\delta) \otimes \tilde{v}_\delta) : \nabla \xi \, dx \, dt \right| \\ \leq c(R) \|\nabla \xi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla \rho_\delta\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} (\|\nabla[\mathbf{w}_\delta]_\delta\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} + \|\nabla \rho_\delta\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}) \end{aligned}$$

for $\xi \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ (uniformly with respect to δ), which justifies that

$$\begin{aligned} \langle \partial_t(\rho_\delta \tilde{v}_\delta), \xi \rangle_{(L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)), L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)))} \\ - \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta([\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \log \rho_\delta) \otimes \tilde{v}_\delta : \nabla \xi \, dx \, dt - 2 \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta \nabla^t[\mathbf{w}_\delta]_\delta : \nabla \xi \, dx \, dt \\ + 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta \nabla \tilde{v}_\delta : \nabla \xi \, dx \, dt = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

is satisfied for any $\xi \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$.

We now want show that $\tilde{v}_\delta - v_\delta$ tends to 0 when δ goes to zero in an appropriate norm. To this purpose let us expand

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_\delta \frac{|v_\delta - \tilde{v}_\delta|^2}{2} \, dx + 2\kappa \int_\Omega \rho_\delta |\nabla(v_\delta - \tilde{v}_\delta)|^2 \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_\delta \left(\frac{|v_\delta|^2}{2} - v_\delta \cdot \tilde{v}_\delta + \frac{|\tilde{v}_\delta|^2}{2} \right) \, dx \\ &\quad + 2\kappa \int_\Omega \rho_\delta \left(|\nabla v_\delta|^2 + |\nabla \tilde{v}_\delta|^2 - 2\nabla v_\delta \cdot \nabla \tilde{v}_\delta \right) \, dx. \end{aligned} \quad (3.85)$$

To handle the first term, let us notice that letting $n \rightarrow \infty$ in (3.55), using the lower semi-continuity of the convex functions and the strong convergence of $\nabla \mathbf{w}_n$ established in (3.77) we obtain

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_\delta \frac{|v_\delta|^2}{2} \, dx + 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta |\nabla v_\delta|^2 \, dx - 2 \int_0^T \int_\Omega \rho_\delta \nabla^t \mathbf{w}_\delta : \nabla v_\delta \, dx \leq 0. \quad (3.86)$$

Now, the last term in (3.85) can be computed using $\xi = \tilde{v}_\delta$ in (3.84), we have

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_\delta \frac{|\tilde{v}_\delta|^2}{2} dx - 2 \int_{\Omega} \rho_\delta \nabla^t [\mathbf{w}_\delta]_\delta : \nabla v_\delta dx + 2\kappa \int_{\Omega} \rho_\delta |\nabla v_\delta|^2 dx = 0.$$

The middle term in (3.85) equals

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_\delta v_\delta \cdot \tilde{v}_\delta dx = \int_{\Omega} (\partial_t(\rho_\delta v_\delta) \cdot \tilde{v}_\delta + v_\delta \cdot \partial_t(\rho_\delta \tilde{v}_\delta) - \partial_t \rho_\delta v_\delta \cdot \tilde{v}_\delta) dx \quad (3.87)$$

and the two first terms make sense and can be handled using $\xi = \tilde{v}_\delta$ in (3.81) and $\xi = v_\delta$ in (3.84). Note that $\tilde{v}_\delta$ and $\partial_t \rho_\delta$ are due to (3.82) regular enough to justify the integrability of the last term in (3.87) and we can write

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \rho_\delta v_\delta \cdot \tilde{v}_\delta dx &= \int_{\Omega} (\rho_\delta ([\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \log \rho_\delta) \otimes v_\delta : \nabla \tilde{v}_\delta) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\rho_\delta ([\mathbf{w}_\delta]_\delta - 2\kappa \nabla \log \rho_\delta)) \otimes \tilde{v}_\delta : \nabla v_\delta dx. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Therefore, after summing all expressions together and after some manipulation, we can show that

$$\begin{aligned} I - \int_{\Omega} \rho_\delta \nabla^t [\mathbf{w}_\delta]_\delta : \nabla \tilde{v}_\delta dx - \int_{\Omega} \rho_\delta \nabla^t \mathbf{w}_\delta : \nabla v_\delta dx \\ + \int_{\Omega} \rho_\delta \nabla^t \mathbf{w}_\delta : \nabla \tilde{v}_\delta dx + \int_{\Omega} \rho_\delta \nabla^t [\mathbf{w}_\delta]_\delta : \nabla v_\delta \leq 0 dx, \end{aligned}$$

in particular

$$I \leq \int_{\Omega} \rho \nabla^t ([\mathbf{w}_\delta]_\delta - \mathbf{w}_\delta) : \nabla (\tilde{v}_\delta - v_\delta) dx.$$

Note that the r.h.s. of this inequality tends to 0 when $\delta \rightarrow 0$. Indeed, we can bound $\nabla(\tilde{v}_\delta - v_\delta)$ in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ uniformly with respect to δ and $[\mathbf{w}_\delta]_\delta \rightarrow \mathbf{w}$ strongly in $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ for $p < 4$. Therefore, using (3.85), we conclude that $v_\delta - \tilde{v}_\delta$ converges to zero in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ when $\delta \rightarrow 0$. $\square$

The limit functions $(\rho, \mathbf{w}) = (\rho_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon)$ fulfil

- the continuity equation

$$\partial_t \rho_\epsilon + \operatorname{div}(\rho_\epsilon \mathbf{w}_\epsilon) - 2\kappa \Delta \log \rho_\epsilon = 0 \quad (3.89)$$

a.e. in $(0, T) \times \Omega$,

- the momentum equation

$$\begin{aligned}
 & \langle \partial_t(\rho_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon), \phi \rangle_{(W_\tau^*, W_\tau)} - \int_0^T \int_\Omega ((\rho_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon - 2\kappa \nabla \rho_\varepsilon) \otimes \mathbf{w}_\varepsilon) : \nabla \phi \, dx \, dt \\
 & + 2(1 - \kappa) \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon D(\mathbf{w}_\delta) : \nabla \phi \, dx \, dt + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega (\Delta \mathbf{w}_\varepsilon \Delta \phi) \, dx \, dt \\
 & + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega ((1 + |\nabla \mathbf{w}_\varepsilon|^2) \nabla \mathbf{w}_\varepsilon : \nabla \phi) \, dx \, dt + 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon A(\mathbf{w}_\varepsilon) : \nabla \phi \, dx \, dt \\
 & - 4\kappa(1 - \kappa) \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \nabla^2 \log \rho_\varepsilon : \nabla \phi \, dx \, dt \\
 & + \frac{c}{(2m+1)} \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon^{2m+1} \nabla \log \rho_\varepsilon : \nabla \phi \, dx \, dt = 0,
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

for $\phi \in W_\tau$, $\tau \in [0, T]$,

- the auxiliary equation for $\nabla \log \rho_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
 & \langle \partial_t \nabla \rho_\varepsilon, \xi \rangle_{(L^2(0, \tau; W^{-1,2}(\Omega)), L^2(0, \tau; W^{1,2}(\Omega)))} \\
 & - \int_0^T \int_\Omega ((\rho_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon - 2\kappa \nabla \rho_\varepsilon) \otimes \nabla \log \rho_\varepsilon) : \nabla \xi \, dx \, dt \\
 & + 2\kappa \int_0^T \int_\Omega \nabla \rho_\varepsilon : \nabla \xi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \nabla^t \mathbf{w}_\varepsilon : \nabla \xi \, dx \, dt = 0,
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

for $\xi \in L^2(0, \tau; W^{1,2}(\Omega))$, $\tau \in [0, T]$.

Passage to the limit with respect to ε . After identification $\mathbf{w}_\delta$ to $u_\delta + 2\kappa \nabla \log \rho_\delta$, the important feature can obtained is that our Estimate (3.63) is also independent of ε . Indeed, testing Equation (3.12) with $\mathbf{w}_\delta \in L^2(0, T; V)$, we get thanks to divergence free condition the following equation

$$\begin{aligned}
 & \int_\Omega \rho_\delta \nabla (\sqrt{\rho_\delta^{2m-1}} \Delta (\int_0^{\rho_\delta} \sqrt{s^{2m-1}}) \cdot \mathbf{w}_\delta \, dx \\
 & = -\frac{1}{(2m+1)} \int_\Omega \rho_\delta^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho_\delta : \nabla \mathbf{w}_\delta \, dx.
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Employing now the fact that $\mathbf{w}_\delta = u + 2\kappa \nabla \log \rho_\delta$, we can write

$$\begin{aligned}
 & \frac{c}{(2m+1)} \int_\Omega \rho_\delta^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho_\delta : \nabla \mathbf{w}_\delta \, dx \\
 & = -c \int_\Omega \rho_\delta \nabla (\sqrt{\rho_\delta^{2m-1}} \Delta (\int_0^{\rho_\delta} \sqrt{s^{2m-1}}) \cdot u_\delta \, dx \\
 & \quad - 2\kappa c \int_\Omega \rho_\delta \nabla (\sqrt{\rho_\delta^{2m-1}} \Delta (\int_0^{\rho_\delta} \sqrt{s^{2m-1}}) \cdot \nabla \log \rho_\delta \, dx.
 \end{aligned}$$

Now, by virtue of (3.35)-(3.37), we infer with

$$\begin{aligned}
 & \frac{c}{(2m+1)} \int_\Omega \rho_\delta^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho_\delta : \nabla \mathbf{w}_\delta \, dx \\
 & \geq c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_\delta^{2m+1} |\nabla \log \rho_\delta|^2 \, dx + \frac{8\kappa c c_0}{(2m+1)^2} \int_\Omega \left(\Delta \rho_\delta^{\frac{2m+1}{2}} \right)^2 \, dx
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Now, we come back to Equations (3.54)-(3.55). Multiplying (3.55) by $(1 - \kappa)\kappa$ and adding it to (3.54), we get

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\delta} \left(\frac{|\mathbf{w}_{\delta}|^2}{2} + (1 - \kappa)\kappa \frac{|2\nabla \log \rho_{\delta}|^2}{2} \right) dx + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(\mathbf{w}_{\delta} - 2\kappa \nabla \log \rho_{\delta})|^2 dx \\ & + \epsilon \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{w}_{\delta}|^2 + (1 + |\nabla \mathbf{w}_{\delta}|^2) |\nabla \mathbf{w}_{\delta}|^2 dx + 2\kappa \int_{\Omega} \rho_{\delta} |A(\mathbf{w}_{\delta})|^2 \\ & + c \frac{m^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\delta}^{2m+1} |\nabla \log \rho_{\delta}|^2 dx + \frac{8\kappa c c_0}{(2m+1)^2} \int_{\Omega} \left(\Delta \rho_{\delta}^{\frac{2m+1}{2}} \right)^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Consequently, we deduce the global existence of solution without assuming ε to be large enough unlike the above paragraph. Furthermore, the estimate (3.63) is now also uniform with ε .

We can move now to perform the limit $\varepsilon \rightarrow 0$. Remember that we have

$$\begin{aligned} \nabla \rho_{\epsilon} &\rightarrow \nabla \rho \quad \text{strongly in } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \rho_{\epsilon} &\rightarrow \rho \quad \text{and} \quad \frac{1}{\rho_{\epsilon}} \rightarrow \frac{1}{\rho} \quad \text{strongly in } L^p(0, T; L^p(\Omega)), \quad \forall p < \infty, \end{aligned}$$

Now, using the above convergences together with strong convergence of $\nabla \mathbf{w}_{\epsilon}$ and weak convergence of $\Delta \mathbf{w}_{\epsilon}$ and a standard argument based on the convexity of the norm we deduce that (3.94) hold for the couple $(\rho_{\epsilon}, \mathbf{w}_{\epsilon})$ instead of $(\rho_{\delta}, \mathbf{w}_{\delta})$. On the other hand, we also have (3.57) and thus one can deduce from the above inequality that

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{w}_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; H)} + \|\mathbf{w}_{\epsilon}\|_{L^2(0, T; V)} + \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{w}_{\epsilon}\|_{L^2(0, T; V \cap W^{2,2}(\Omega))} + \varepsilon^{1/4} \|\nabla \mathbf{w}_{\epsilon}\|_{L^4(0, T; L^4(\Omega))} \\ & + \|\nabla \rho_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} + \|\rho_{\epsilon}^{\frac{2n+1}{n}}\|_{L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega))} \leq c. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Before passing to the limit in Equations (3.90)-(3.91) it remains then to establish a strong convergence on $\mathbf{w}_{\epsilon}$ which is necessary to deal with the nonlinear term. To the purpose we proceed as in [?] for Kazhikhov-Smagulov type models. Similar analysis was used also for the model of degenerate lake equation [4]. Thanks to the identification $\mathbf{w}_{\delta} = u_{\delta} + 2\kappa \nabla \log \rho_{\delta}$, we can now consider the approximate solutions $(\rho_{\epsilon}, \mathbf{w}_{\epsilon})$ of Equations (3.40)-(3.43) as follow

- the continuity equation

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho_{\epsilon}(\tau, x) \xi(t, x) dx = \int_{\Omega} \rho_{\epsilon} \mathbf{w}_{\epsilon} \cdot \nabla \xi dx - 2\kappa \int_{\Omega} \nabla \rho_{\epsilon} \cdot \nabla \xi dx \quad \forall \xi \in Y_n \quad (3.96)$$

- the momentum equation

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho_{\epsilon} \mathbf{w}_{\epsilon} \cdot \phi dx = \int_{\Omega} \rho_{\epsilon} u_{\epsilon} \otimes \mathbf{w}_{\epsilon} : \nabla \phi dx - 2\kappa(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho_{\epsilon} D(\mathbf{w}_{\epsilon}) : D(\phi) dx \\ & - 2\kappa \int_{\Omega} \rho_{\epsilon} A(\mathbf{w}_{\epsilon}) : A(\phi) dx + 2\kappa(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho \nabla v : \nabla \phi dx \\ & + \frac{c}{(2m+1)} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} \nabla^2 \log \rho : \nabla \phi dx, \quad \forall \phi \in X_n. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Now, we want to prove the following lemma

Lemma 3.4. *Let us fix $h > 0$ and t such that $0 < h < T$ and $0 \leq t \leq T - h$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of ε and h such that : for all ε and $h > 0$, we have*

$$\|\tau_h \mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L^2(0, T-h, (L^2(\Omega))^2)} \leq Ch^{1/4}, \quad (3.98)$$

where we denote by $\tau_h \mathbf{w}_\varepsilon(t) = \mathbf{w}_\varepsilon(t + h)$.

Proof. Firstly observe that the following identity holds

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(t + h) \mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \rho_\varepsilon(t) \mathbf{w}_\varepsilon(t) \\ = \rho_\varepsilon(t + h) (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) + (\rho_\varepsilon(t + h) - \rho_\varepsilon(t)) \mathbf{w}_\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Integrating (3.97) with respect to h from t to $t+h$ and assuming that $\phi = \mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)$, we get

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho_\varepsilon(t + h)} (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \\ & + \int_{\Omega} [\rho_\varepsilon(t + h) - \rho_\varepsilon(t)] \mathbf{w}_\varepsilon(t) (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) dx \\ & = \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(\tau) u_\varepsilon(\tau) \otimes \mathbf{w}_\varepsilon(\tau) : \nabla (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) dx \\ & + 2\kappa(1 - \kappa) \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(\tau) D(\mathbf{w}_\varepsilon)(\tau) : D(\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) dx \\ & + 2\kappa \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(\tau) A(\mathbf{w}_\varepsilon(\tau)) : A(\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) dx \\ & - 2\kappa(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(\tau) \nabla^2 \log \rho_\varepsilon(\tau) : \nabla (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) dx \\ & - \frac{c}{(2m + 1)} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon^{2m+1}(\tau) \nabla^2 \log \rho_\varepsilon(\tau) : \nabla (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) dx \end{aligned} \quad (3.100)$$

In Equation (3.96), if we take $\xi = \mathbf{w}_\varepsilon(t) (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))$, we can obtain after integrate with respect to τ from t to $t + h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon(t + h) - \rho_\varepsilon(t)) \mathbf{w}_\varepsilon(t) (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) dx \\ & = \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(\tau) \otimes \mathbf{w}_\varepsilon \cdot \nabla (\mathbf{w}_\varepsilon(t) (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))) dx d\tau \\ & - 2\kappa \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \nabla \rho_\varepsilon(\tau) \cdot \nabla [\mathbf{w}_\varepsilon(t) (\mathbf{w}_\varepsilon(t + h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))] dx d\tau \end{aligned} \quad (3.101)$$

Substituting the relation (3.101) into Equation (3.100) we get

$$\begin{aligned}
 & \|\sqrt{\rho_\varepsilon(t+h)}(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \\
 &= \int_t^{t+h} \int_\Omega \rho_\varepsilon(\tau) u_\varepsilon(\tau) \otimes \mathbf{w}_\varepsilon(\tau) : \nabla(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) \, dx \, d\tau \\
 &\quad + 2\kappa(1-\kappa) \int_t^{t+h} \int_\Omega \rho_\varepsilon(\tau) D(\mathbf{w}_\varepsilon(\tau)) : D(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) \, dx \, d\tau \\
 &\quad + 2\kappa \int_t^{t+h} \int_\Omega \rho_\varepsilon(\tau) A(\mathbf{w}_\varepsilon(\tau)) : A(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) \, dx \, d\tau \\
 &\quad - 2\kappa(1-\kappa) \int_t^{t+h} \int_\Omega \rho_\varepsilon(\tau) \nabla^2 \log \rho_\varepsilon(\tau) : \nabla(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) \, dx \, d\tau \\
 &\quad - \frac{c}{(2m+1)} \int_t^{t+h} \int_\Omega \rho_\varepsilon^{2m+1}(\tau) \nabla^2 \log \rho_\varepsilon(\tau) : \nabla(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)) \, dx \, d\tau \\
 &\quad + 2\kappa \int_t^{t+h} \int_\Omega \nabla \rho_\varepsilon(\tau) \cdot \nabla[\mathbf{w}_\varepsilon(t)(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))] \, dx \, d\tau
 \end{aligned}$$

Using the bounds of ρ , we obtain

$$\begin{aligned}
 & \|(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \\
 & \leq C \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \int_t^{t+h} [\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{w}_\varepsilon(\tau)\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \quad + \|\nabla^2 \log \rho_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{w}_\varepsilon(\tau)\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)}] \, d\tau
 \end{aligned}$$

Therefore using Sobolev embedding theorem, we can write

$$\|(\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t))\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \leq C \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \int_t^{t+h} g_\varepsilon(\tau) \, d\tau$$

where

$$g_\varepsilon(\tau) = c \{ \|\nabla u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^2 \log \rho_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \}$$

Now, we integrate from 0 to $T-h$, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T-h} dt \int_\Omega |\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)|^2 \, dx \\
 & \leq \int_0^{T-h} dt \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \int_t^{t+h} g_\varepsilon(\tau) \, d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

By Fubini theorem, the second member becomes

$$\int_0^T g_m(\tau) \, d\tau \int_{\tau-h}^{\bar{\tau}} \|\nabla u_\varepsilon(t+h) - \nabla u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

where

$$\bar{\tau} = \begin{cases} 0 & \text{if } \tau \leq 0, \\ \tau & \text{if } 0 \leq \tau \leq T-h, \\ T-h & \text{if } \tau \geq T-h. \end{cases}$$

Since $|\bar{\tau} - \overline{\tau - h}| \leq |\tau - h - \tau| = h$, then Hölder inequality and Estimate (2.27) give us

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau-h}^{\bar{\tau}} \|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \\
 & \leq \left(\int_{\tau-h}^{\bar{\tau}} 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\tau-h}^{\bar{\tau}} (\|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T-h} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t+h, x) - \nabla \mathbf{w}_\varepsilon(t, x)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq 2h^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}_\varepsilon|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq c_1 h^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

On the other hand, by Estimate (3.95) (take in mind that $u_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon - 2k\nabla \log \rho_\varepsilon$) we also have

$$\int_0^T g_\varepsilon(\tau) d\tau \leq c_2.$$

Then Inequality (3.102) give

$$\int_0^{T-h} dt \int_{\Omega} |\mathbf{w}_\varepsilon(t+h) - \mathbf{w}_\varepsilon(t)|^2 dx \leq c_1 c_2 h^{\frac{1}{2}},$$

and hence the proof is finished.

Having obtained Estimate (3.95) and Estimate (3.99) we can now deduce the compactness of the sequence $(\mathbf{w}_\varepsilon)$ in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ (see [103], [4]). Hence we are ready to perform the last limit passage and to deduce existence of weak solutions to original system (3.17) in the sense of Definition 3.1. Before finish the proof, it remains just to examine in which sense are the initial conditions admitted. We know that the time-derivative of $\nabla \rho_\varepsilon$ is bounded in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ and $\nabla \rho \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, hence we can use now the Arzela-Ascoliè theorem to verify that $\nabla \rho_\varepsilon \rightarrow \nabla \rho$ in $C([0, T]; L^2_{\text{weak}}(\Omega))$, also $\rho_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon \rightarrow \rho \mathbf{w}$ in $C([0, T]; L^2_{\text{weak}}(\Omega))$. Furthermore, using a version of Aubin-Lions lemma we obtain ρ is strongly continuous, i.e. $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ in $C([0, T]; L^2(\Omega))$.

♣ Case when $c < 0$.

In this paragraph, we need just to establish the a priori estimate. The rest of the proof of existence of solutions would requires minor modifications solely. Recalling that our system under study reads as follows

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\
 & \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w}) + \nabla \pi_1 - 2(1 - \kappa) \operatorname{div}(\rho D(u)) \\
 & \quad - 2\kappa \operatorname{div}(\rho A(u)) = \frac{c}{(2m+1)} \operatorname{div}(\rho^{2m+1} \nabla \nabla \log \rho), \\
 & \operatorname{div} \mathbf{w} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Follow the computation in Proposition 3.1, we prove that the energy estimate associated to the above system may be written as

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + (1 - \kappa) \kappa \frac{|2\nabla \log \rho|^2}{2} \right) dx + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(u)|^2 dx \\ & + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(\mathbf{w})|^2 dx + \frac{c}{(2m+1)} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} \nabla^2 \log \rho : \nabla \mathbf{w} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Notably, the only difference in this paragraph lies in the fact that we cannot prove a sign of the last term like the case when $c > 0$ (see (3.93)). To this purpose, we proceed to take this term to the right hand side and estimate it. After that we need to control the resulting terms by the terms of the left hand side. Indeed, we estimate

$$\begin{aligned} & \left| \frac{c}{(2m+1)} \int_{\Omega} \rho^{2m+1} \nabla^2 \log \rho : \nabla \mathbf{w} dx \right| \\ & \leq \frac{|c|}{(2m+1)} R^{2m+1} \|\nabla^2 \log \rho\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{|c|}{(2m+1)} R^{2m+1} \left(\frac{1}{2\beta} \|\nabla^2 \log \rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

Observing now that because of periodic boundary condition and the free divergence condition on $\mathbf{w}$, we have

$$\int_{\Omega} |A(\mathbf{w})|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx. \quad (3.105)$$

In the meantime, we can check also

$$\int_{\Omega} \rho |D(u)|^2 dx = \int_{\Omega} \rho |D(u) - \frac{1}{d} \operatorname{div} u \mathbb{I}|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\rho}{d} |\operatorname{div} u|^2 dx, \quad (3.106)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla^2 \log \rho|^2 dx = \int_{\Omega} |\Delta \log \rho|^2 dx \quad (\text{periodic domain}).$$

Thus employing (3.105), (3.106), Estimate (3.107) remains

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + (1 - \kappa) \kappa \frac{|2\nabla \log \rho|^2}{2} \right) dx + 2(1 - \kappa) \int_{\Omega} \rho |D(u) - \frac{1}{d} \operatorname{div} u \mathbb{I}|^2 dx \\ & + 2\kappa \int_{\Omega} \rho |A(\mathbf{w})|^2 dx - \frac{|c|}{(2m+1)} \frac{\beta}{2} R^{2m+1} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx \\ & + \frac{8(1 - \kappa) \kappa^2}{d} \int_{\Omega} \rho |\Delta \log \rho|^2 dx - \frac{|c|}{2\beta (2m+1)} R^{2m+1} \int_{\Omega} |\Delta \log \rho|^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

To control the two terms with bad sign, it suffices to choose

$$\frac{|c|}{(2m+1)} \frac{\beta}{2} R^{2m+1} \leq 2\kappa r \quad \text{and} \quad \frac{|c|}{2\beta (2m+1)} R^{2m+1} \leq \frac{8(1 - \kappa) \kappa^2}{d} r. \quad (3.108)$$

The best constant of β is to make an equivalence between these two preceding conditions, that's give

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(1 - \kappa)}},$$

and hence (3.108) recasts on the following condition

$$R^{2m+1} \leq \frac{8\kappa\sqrt{\kappa(1-\kappa)}(2m+1)}{|c|} r. \quad (3.109)$$

3.5 Appendix

We collect some useful inequalities used in the previous subsection and which can be found in [62]. We start with a lower bound on the Euclidean norm of a matrix. Let $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ be a matrix and $a \in \mathbb{R}$ be a vector. We define the Euclidean norm of A and a , respectively, by

$$\|A\|^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2 \quad \text{and} \quad \|a\|^2 = \sum_j a_j^2.$$

Furthermore, $\text{Tr } A = \sum_j a_{jj}$ be the trace of A and

$$A : (a)^2 = \sum_{ij=1}^d a_{ij} a_i a_j.$$

Lemma 3.5. *Let $A \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ be a real symmetric matrix and let $a \in \mathbb{R}^d$ be a non-zero vector. Then*

$$\|A\|^2 \geq \frac{1}{d}(\text{tr } A)^2 + \frac{d}{d-1} \left(\frac{A : (a)^2}{\|a\|^2} - \frac{\text{tr } A}{d} \right)^2. \quad (3.110)$$

Proof. Since A is real and symmetric, one can assume (by the spectral theorem) without loss of generality that A is a diagonal matrix, $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$; recall that the norms and traces are invariant under orthogonal transformations. Furthermore, one can also assume, by homogeneity (3.110), that $a = (a_1, \dots, a_d)^T$ is a unit vector, $\sum_j a_j^2 = 1$.

Thus, Inequality (3.110) becomes

$$\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \lambda_j^2 - \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \lambda_j \right)^2 \geq \frac{1}{d-1} \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j a_j^2 - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \lambda_j \right)^2 \quad (3.111)$$

Set $\sigma = \sum_{j=1}^d \lambda_j / d$ and $\varsigma_j = \lambda_j - \sigma$. Then (3.111) is equivalent to

$$\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \varsigma_j^2 \geq \frac{1}{d-1} \left(\sum_{j=1}^d \varsigma_j a_j^2 \right)^2, \quad (3.112)$$

where $\sum_{j=1}^d \varsigma_j = 0$. Without loss of generality, we assume that ς_d is the norm with maximal

modulus. We employ the identity $\sum_{j=1}^{d-1} \varsigma_j = -\varsigma_d$ and the elementary inequalities

$$\sum_{j=1}^{d-1} \varsigma_j^2 \geq \frac{1}{d-1} \left(\sum_{j=1}^{d-1} \varsigma_j \right)^2 \quad \text{and} \quad \varsigma_d \geq \left(\sum_{j=1}^d \varsigma_j a_j^2 \right)^2$$

to obtain

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \varsigma_j^2 &= \frac{1}{d} \varsigma_d^2 + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d-1} \varsigma_j^2 \geq \frac{1}{d} \varsigma_d^2 + \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d-1} \varsigma_j \right)^2 \\
 &= \frac{1}{d} \varsigma_d^2 + \frac{1}{d(d-1)} \varsigma_d^2 \\
 &= \frac{1}{d-1} \varsigma_d^2 \geq \frac{1}{d-1} \left(\sum_{j=1}^d \varsigma_j a_j^2 \right)^2.
 \end{aligned}$$

This shows (3.112) and finishes the proof. $\square$

The following lemma help us to solve some easy quantifier elimination problems "by hand", or at least to help to simplify them noticeably. The basic idea is to consider special polynomials and derive relations between the unknown coefficient coefficients guaranteeing nonnegativity.

Lemma 3.6. *Let the real polynomial $P(\xi_1, \xi_2) = a_1 \xi_1^4 + a_2 \xi_1^2 \xi_2 + a_3 \xi_2^2$ be given. Then the full quantified expression*

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} : P(\xi_1, \xi_2) \geq 0 \quad (3.113)$$

is equivalent to the quantifier-free statement that

$$\text{either } a_3 > 0 \quad \text{and} \quad 4a_1 a_3 - a_2^2 \geq 0 \quad (3.114)$$

$$\text{or } a_3 = a_2 = 0 \quad \text{and} \quad a_1 \geq 0. \quad (3.115)$$

Proof. The sufficiency of (3.115) for (3.113) is obvious, while formula (3.114) implies

$$P(\xi_1, \xi_2) = \left(a_1 - \frac{a_2^2}{4a_3} \right) \xi_1^4 + a_3 \left(\xi_2 + \frac{a_2}{2a_3} \xi_1^2 \right)^2 \geq 0.$$

Conversely, (3.113) implies $0 \leq P(1, 0) = a_1$ and $0 \leq P(0, 1) = a_3$. If $a_3 > 0$,

$$0 \leq P(\sqrt{a_3}, -\frac{a_2}{2}) = \frac{a_3}{4} (4a_1 a_3 - a_2^2)$$

yields $4a_1 a_3 - a_2^2 \geq 0$, whereas $a_3 = 0$ implies $0 \leq P(a_2, -a_2, -a_1 a_2) = -a_2^4$ and hence $a_2 = 0$.

If $a_3 = 1$ the statement of Lemma 3.6 simplifies

$$\forall \xi_1, \forall \xi_2 \in \mathbb{R}; P(\xi_1, \xi_2) \geq 0 \quad \text{if and only if} \quad 4a_1 - a_2^2 \geq 0. \quad \square$$

Chapitre 4

Logarithmic Sobolev inequalities

L'objectif de ce petit chapitre est de démontrer une nouvelle inégalité fonctionnelle qui généralise certaines inégalités fonctionnelles prouvées par A. JÜNGEL, D. MATTHES dans [62] et celle prouvée par D. BRESCH, A. VASSEUR et C. YU dans [27]. En plus, nous donnons une application de cette inégalité au modèle de Navier-Stokes-Korteweg.

The aim of this small chapter is to prove a new functional inequality generalizing some known inequalities proved by A. JÜNGEL, D. MATTHES in [62] and by BRESCH, A. VASSEUR and C. YU in [27]. Moreover, we give the application of this inequality to Navier-Stokes-Korteweg model.

4.1 Introduction

Many of problems related to fluid mechanics systems requires certain functional inequalities in order to start the analysis of well posedness of such problems. For example, simple type of these inequalities is the classical Poincaré inequality

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq c \int_{\Omega} |u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (4.1)$$

for Ω a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^d$. This inequality is among the key tools needed before solving the Laplacian equation

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

It ensures that the space $H_0^1(\Omega)$ endowed with the norm $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ is a Hilbert space and hence a weak solution of System (4.2) can be deduced from direct application of Lax-Milgram Theorem. More general form of this inequality can be observed in the treatment of equations with degenerate coefficients. Precisely, let us consider the following degenerate elliptic problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w(x)\nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

when Ω a bounded domain sufficiently smooth. Classically, if we want to seek a solution of the above problem, one can proceed to establish the weak formulation associated to System (4.3). That's it, we multiply Equation (4.3)₁ by a test function $v \in H_0^1(\Omega)$ and integrate with respect to space, we obtain

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v w(x) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx := L(f). \quad (4.4)$$

Before applying the Lax-Milgram theorem's to show the existence and uniqueness of a weak solution of System (4.3) (solution of (4.4)), several conditions are required on the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ and the linear form $L(\cdot)$. Precisely, the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ and the linear form $L(\cdot)$ should satisfy three important conditions

- $a(\cdot, \cdot)$ is continuous from $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ into $\mathbb{R}$,
- $a(\cdot, \cdot)$ is coercive, that's it for all $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, u) \geq c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.
- $L(\cdot)$ is a linear form.

Obviously, when the function w is sufficient smooth and far from zero, these three conditions evidently hold and then a unique weak solution can be easily showed. However, when w degenerate, the situation is more complicated as we remarked in Chapter 1 (Example 3). We emphasize here that, like the Poincaré inequality is the key tool in the existence of solution of Problem (4.2), here, i.e., in System (4.3), the following weighted Poincaré inequality

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 w(x) dx \geq c \int_{\Omega} |u|^2 w(x) dx, \quad (4.5)$$

is also the key tool before solving System (4.3).

After Poincaré and weighted Poincaré inequalities, logarithmic Sobolev inequalities are amongst the most studied functional inequalities for semigroups (see [57], [7]). They contain much more information than Poincaré inequalities, and are at the same time sufficiently general to be available in numerous cases of interest, in particular in infinite dimension (as limits of Sobolev inequalities on finite-dimensional spaces). Among these important inequalities, one can find for example the following one

$$\int_{\Omega} |\nabla \rho|^2 dx \geq c \int_{\Omega} (\rho^2 \log \rho - \rho^2 + 1) dx \quad (4.6)$$

where ρ represents a sufficiently smooth function and Ω a bounded smooth domain. Inequality (4.6) asserts that $\rho^2 \log \rho \in L^1(\Omega)$ is finite if $\nabla \rho$ and ρ are $L^2(\Omega)$.

Our aim in this chapter is to present some type of inequalities in the same context of (4.6). As a by-product, we give the application of this inequality to the Navier-Stokes-Korteweg system. Our chapter then is organized as follows. The next section below is devoted to presents some known inequalities. After that, we state and prove our main result, namely Theorem 4.1. In section 3, we give an application of our main result to the Navier-Stokes-Korteweg system.

4.2 Main results

Before presenting the main result in this section, let us recall some known functional inequalities which have been recently proved by many authors. We start with the work of A. JÜNGEL and D. MATTEWS. In [62], the authors proved the following inequality

Lemma 4.1. *Let ρ sufficiently smooth with $\inf \rho > 0$. Then if (d represents the dimension of space)*

$$0 < \gamma < 2(d+1)/(d+2),$$

we have

$$\frac{1}{2(\gamma-1)} \int_{\Omega} \rho^2 \nabla \nabla \log \rho : \nabla \nabla \rho^{2(\gamma-1)} dx \geq k_{\gamma} \int_{\Omega} (\Delta \rho^{\gamma})^2 dx \quad (4.7)$$

if $\gamma \neq 1$, and

$$\int_{\Omega} \rho^2 (\nabla \nabla \log \rho)^2 dx \geq k_1 \int_{\Omega} (\Delta \rho)^2 dx \quad (4.8)$$

if $\gamma = 1$, where

$$k_{\gamma} = \frac{p(\gamma)}{\gamma^2(p(\gamma) - p(0))} \quad \text{and} \quad p(\gamma) = -\gamma^2 + \frac{2(d+1)}{(d+2)}\gamma - \left(\frac{d-1}{d+2}\right)^2. \quad (4.9)$$

Notice that if $(\sqrt{d}-1)^2/(d+2) < \gamma < \sqrt{d}+1/(d+2)$, then $k_{\gamma} > 0$.

$$\int_{\Omega} \rho^2 |\nabla^2 \log \rho|^2 dx \geq \frac{(4d-1)}{(d+2)^2} \int_{\Omega} |2\nabla \rho^{1/2}|^4 dx. \quad (4.10)$$

This inequality has been used to prove an entropy decay in [62] for the Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn equation

$$\partial_t u + \frac{1}{2} \partial_{ij}^2 (u \partial_{ij} \log u) = 0 \quad u|_{t=0} = u_0,$$

which can appears in various places in mathematical physics. In chapter 3, we improved this result by adding a second integral term to Equation (4.7) that relies on the Laplacian derivative of ρ . We recall that in Chapter 3, we proved

Lemma 4.2. *For ρ sufficiently smooth positive function, m such that $0 \leq n \leq 1/2$, there exists a constant $c = c(n, d) > 0$ with*

$$0 < c \leq 1 - \frac{(d-1)^2}{d(d+2)} \frac{(1-2n)}{1+2n},$$

such that

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\Omega} \rho^{n+1} \nabla \nabla \rho^n : \nabla \nabla \log \rho dx + n \int_{\Omega} \rho^{n+1} \Delta \rho^n \Delta \log \rho dx \\ &\geq 4c \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \int_{\Omega} (\Delta \rho^{\frac{2n+1}{2}})^2 dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Recently, D. BRESCH, A. VASSEUR and C. YU in [27] proved the following equality

Lemma 4.3. *Assume ρ sufficiently smooth positive function and $2/d < n < 2$, then there exists a constant $c = c(n, d) > 0$ such that*

$$\int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho^{n-1}|^2 dx \geq c \left(\int_{\Omega} |\nabla \rho^{\frac{3}{4}n-1/2}|^4 dx + \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho^{\frac{3}{2}n-1}|^2 dx \right) \quad (4.12)$$

Our goal in this work is to extend the previous results to more general case. Before that, let us show some simple inequalities which are necessary to proof the general case. We start with the following inequality

Lemma 4.4. *Suppose that ρ is sufficiently smooth and positive function, then we have*

$$\int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx \geq \frac{1}{3} \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho|^2 dx + \frac{7}{24} \int_{\Omega} |2 \nabla \rho^{1/2}|^4 dx. \quad (4.13)$$

Proof. This inequality is similar to Inequality (4.10) proved by A. JÜNGEL and D. MATTHES. The strategy of proof presented here is inspired of what proposed in [27]. We notice that

$$\rho \nabla \nabla \log \rho = \nabla \nabla \rho - 4 \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho}, \quad \rho \Delta \log \rho = \Delta \rho - 4 (\nabla \sqrt{\rho})^2. \quad (4.14)$$

Then we have

$$\int_{\Omega} \rho^2 |\nabla^2 \log \rho|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla^2 \rho|^2 dx + \int_{\Omega} |2 \nabla \sqrt{\rho}|^4 dx - 8 \int_{\Omega} \nabla^2 \rho : \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho} dx. \quad (4.15)$$

On the other hand, we can write

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 \rho : \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho} dx &= - \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \operatorname{div}(\nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho}) dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \operatorname{div}(\nabla \rho \otimes \nabla \log \sqrt{\rho}) dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \rho)^2 \Delta \log \sqrt{\rho} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^2 \rho : \nabla \rho \otimes \nabla \log \sqrt{\rho} dx \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla \sqrt{\rho})^2 \rho \Delta \log \rho dx - \int_{\Omega} \nabla^2 \rho : \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho} dx. \end{aligned}$$

Therefore using Cauchy-Shwarz and Young inequalities, we get

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \nabla^2 \rho : \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho} dx &= - \int_{\Omega} (\nabla \sqrt{\rho})^2 \rho \Delta \log \rho dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (\nabla \sqrt{\rho})^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \rho^2 |\nabla^2 \log \rho|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \sqrt{\rho})^4 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla^2 \log \rho|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Thus combining Equation (4.15) and Estimate (4.16), we infer with

$$\int_{\Omega} \rho^2 |\nabla^2 \log \rho|^2 dx \geq \frac{1}{3} \int_{\Omega} |\nabla^2 \rho|^2 dx + \frac{7}{24} \int_{\Omega} |2 \nabla \sqrt{\rho}|^4 dx. \quad \square \quad (4.17)$$

Corollary 4.1. *Assume that ρ is sufficiently smooth positive function, then*

- If $n \geq 0$, we have

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx + n \int_{\Omega} \rho^2 |\Delta \log \rho|^2 dx \\ & \geq \frac{1}{3} \int_{\Omega} |\nabla^2 \rho|^2 dx + \frac{7}{24} \int_{\Omega} |2 \nabla \rho^{1/2}|^4 dx \end{aligned} \quad (4.18)$$

- if $-1/d < n < 0$, we have

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx + n \int_{\Omega} \rho^2 |\Delta \log \rho|^2 dx \\ & \geq (1 + nd) \left(\frac{1}{3} \int_{\Omega} |\nabla^2 \rho|^2 dx + \frac{7}{24} \int_{\Omega} \rho^2 |2 \nabla \rho^{1/2}|^4 dx \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Proof. If $n \geq 0$, this is a straightforward application from Lemma 4.4. If $n < 0$ we just have to use that

$$|\operatorname{div} g|^2 \leq d |D(g)|^2 \quad \text{for all vector } g \text{ sufficiently smooth,}$$

to deduce that

$$n \int_{\Omega} \rho^2 |\Delta \log \rho|^2 dx \geq nd \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx$$

and thus

$$\int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx + n \int_{\Omega} \rho^2 |\Delta \log \rho|^2 dx \geq (1 + nd) \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx,$$

which yields using Lemma 4.1 to Inequality (4.19) if $n > -1/d$.

However, following the method introduced in [62], we have the following result

Lemma 4.5. *Suppose that ρ is sufficient smooth, $n > 0$ and the positive constant $c = c(n, d)$ such that*

$$0 < c \leq \frac{(1+n)(d+2)(d(1-n)+2n) - (d-1)^2(2n-1)^2}{(d+2)^2(1+n)},$$

then we have

$$J = \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla^2 \log \rho|^2 dx + n \int_{\Omega} \rho^2 |\Delta \log \rho|^2 dx \geq 16c \int_{\Omega} |\nabla \rho^{1/2}|^4 dx. \quad (4.20)$$

Proof. The proof is inspired by the extension of the entropy construction method introduced in [62] and developed in Lemma 3.3 (Chapter 3). To simplify the computations, we introduce as in Lemma 3.3

$$\theta = \frac{|\nabla \rho|}{\rho}, \quad \lambda = \frac{1}{d} \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (\lambda + \xi) \theta^2 = \frac{1}{\rho^3} \nabla^2 \rho : (\nabla \rho)^2,$$

and $\eta \geq 0$ by

$$||\nabla^2 \rho||^2 = (d\lambda^2 + \frac{d}{d-1}\mu^2 + \eta^2)\rho^2.$$

We compute J using the above notation to obtain

$$J = \int_{\Omega} \rho^2 \left((1+nd)d\lambda^2 + \frac{d}{d-1}\xi^2 + \eta^2 - 2\lambda\theta^2(1+nd) - 2\xi\theta^2 + (1+n)\theta^4 \right) dx \quad (4.21)$$

We need to compare J to

$$K = 16 \int_{\Omega} |\nabla \rho^{1/2}|^4 dx = \int_{\Omega} \rho^2 \theta^4 dx.$$

We shall rely on the following two dummy integrals expressions :

$$F_1 = \int_{\Omega} \operatorname{div}((\nabla^2 \rho - \Delta \rho \mathbb{I}) \cdot \nabla \rho) dx,$$

$$F_2 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho^{-1} |\nabla \rho|^2 \nabla \rho) dx,$$

where I is the unit matrix in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Obviously, in view of the boundary conditions, $F_1 = F_2 = 0$. Our purpose now is to find constants c_0, c_1 and c_2 such that $J - c_0 K = J - c_0 K + c_1 F_1 + c_2 F_2 \geq 0$. The computation in [62] yields to

$$F_1 = \int_{\Omega} \rho^2 \left(-d(d-1)\lambda^2 + \frac{d}{d-1}\xi^2 + \eta^2 \right) dx,$$

$$F_2 = \int_{\Omega} v^{2\gamma} \left((d+2)\lambda\theta^2 + 2\xi\theta^2 - \theta^4 \right) dx.$$

After simple calculation, we obtain that

$$\begin{aligned} J - c_0 K + c_1 F_1 + c_2 F_2 &= \int_{\Omega} \left[((1+nd) - c_1(d-1))d\lambda^2 + \frac{d}{d-1}(1+c_1)\xi^2 + \eta^2(1+c_1) \right. \\ &\quad \left. + \lambda\theta^2(-2(1+nd) + c_2(d+2)) + 2\xi\theta^2(c_2-1) + \theta^4(1+n-c_0-c_2) \right] dx \end{aligned} \quad (4.22)$$

We choose to eliminate λ from the above integrand by defining c_1 and c_2 appropriately. The linear system

$$\begin{aligned} (1+nd) - c_1(d-1) &= 0, \\ -2(1+nd) + c_2(d+2) &= 0, \end{aligned}$$

has the solution

$$c_1 = \frac{(1+nd)}{d-1}, \quad c_2 = 2 \frac{(1+nd)}{d+2}.$$

Therefore we deduce that

$$J = \int_{\Omega} \rho^2 (b_1 \xi^2 + 2b_2 \xi \theta^2 + b_3 \theta^4 + b_4 \eta^2) dx \quad (4.23)$$

where we defined b_1, b_2 and b_3 as follows

$$b_1 = \frac{d^2}{(d-1)^2}(1+n) \quad b_2 = \frac{d}{(d+2)}(2n-1) \quad b_3 = \frac{d-nd+2n}{d+2} - c_0 \quad b_4 = \frac{d}{d-1}(1+n)$$

This integral is nonnegative if the integrand is nonnegative pointwise. This is the case if and only if

$$b_1, b_4 > 0 \quad \text{and} \quad b_1 b_3 - b_2^2 \geq 0,$$

which is equivalent to

$$c_0 \leq \frac{(1+n)(d+2)(d(1-n)+2n) - (d-1)^2(2n-1)^2}{(d+2)^2(1+n)}. \quad \square$$

Remark 4.1. For $n = 0$, we obtain

$$c = \frac{4d-1}{(d+2)^2},$$

which is the bound proved in [61]. $\square$

Now, we are able to state our main result. The main result in this chapter is resumed in the following Theorem.

Theorem 4.1. Suppose that

$$n+m > 0 \quad \gamma_1 \gamma_2 (1+n) + 2(\gamma_1 + \gamma_2)(c_n - 1 - n) > 0, \quad (4.24)$$

with

$$\gamma_1 = \frac{4(m+1)}{2n+m+1} \quad \gamma_2 = \frac{4(2n-m+1)}{2n+m+1}$$

and

$$c_n = \frac{(1+n)(d+2)(d(1-n)+2n) - (d-1)^2(2n-1)^2}{(d+2)^2(1+n)},$$

then there exists two strictly positives constants C_1 and C_2 with

$$C_1 = (1+n) \left(1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{8} \right) \quad C_2 = \gamma_1 \gamma_2 (1+n) + 2(\gamma_1 + \gamma_2)(c_n - 1 - n) \quad (4.25)$$

such that

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\Omega} \rho^{n+1} \nabla \nabla \rho^n : \nabla \nabla \rho^m dx + n \int_{\Omega} \rho^{n+1} \Delta \rho^n \Delta \rho^m dx \\ &\geq C_1 \int_{\Omega} (\nabla \nabla \rho^{\frac{2n+m+1}{2}})^2 + C_2 \int_{\Omega} |\nabla \rho^{\frac{2n+m+1}{4}}|^4 dx. \end{aligned} \quad (4.26)$$

When $m = 0$ we recover the constraint founded in Ghost effect system which is $n \leq 1/2$ for $d = 2, 3$. In the following two pictures, we give an geometric interpretation of condition (4.24) in dimension 2 and 3.

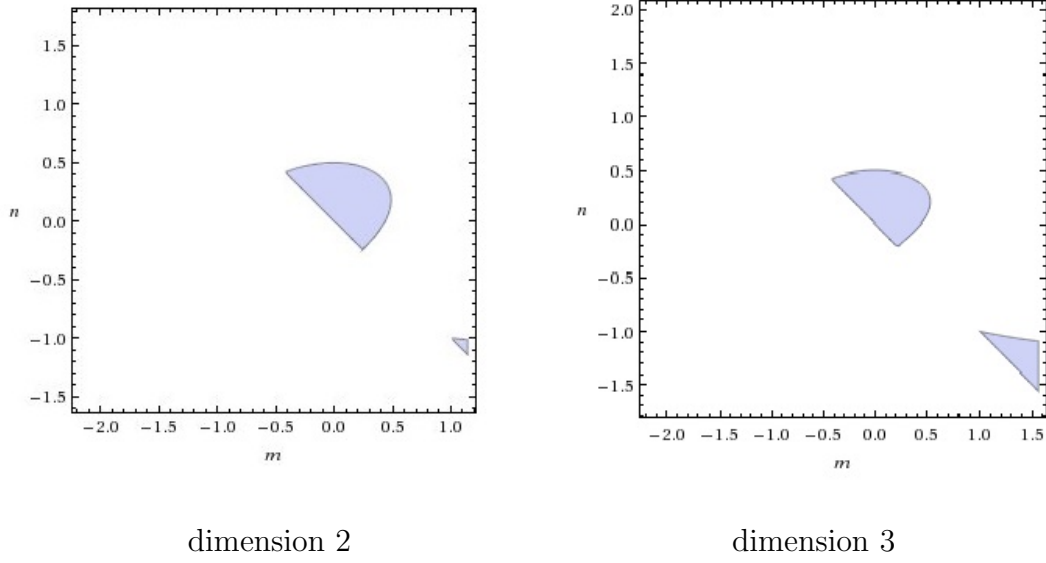


FIGURE 4.1 –

Proof. The procedure of proof introduced by A. JÜNGEL and D. MATTHES for proving Lemma 4.1 in [62] is quite difficult and long. Here, the strategy of proof is completely different and simple. Firstly, remark that by simple computations, we obtain

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{\Omega} \rho^{n+1} \nabla \nabla \rho^n : \nabla \nabla \rho^m dx \\
 &= \int_{\Omega} \rho^{n+1} \nabla \left(\frac{n}{\theta} \rho^{n-\theta} \nabla \rho^\theta \right) : \nabla \left(\frac{m}{\theta} \rho^{m-\theta} \nabla \rho^\theta \right) dx \\
 &= \frac{n m}{\theta} \left[\int_{\Omega} \rho^{2n+m-2\theta+1} |\nabla \nabla \rho^\theta|^2 dx + \int_{\Omega} \rho^{2n+1-\theta} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{m-\theta} \otimes \nabla \rho^\theta dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} \rho^{n+1+m-\theta} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{n-\theta} \otimes \nabla \rho^\theta dx + \int_{\Omega} \rho^{n+1} \nabla \rho^{n-\theta} \otimes \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{m-\theta} \otimes \nabla \rho^\theta dx \right] \\
 &= \frac{n m}{\theta^2} \left[\int_{\Omega} \rho^{2n+m-2\theta+1} |\nabla \nabla \rho^\theta|^2 dx - \gamma_1 \int_{\Omega} \rho^{2n+m+1-\theta} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{\theta/2} \otimes \nabla \rho^{\theta/2} dx \right. \\
 &\quad \left. - \gamma_2 \int_{\Omega} \rho^{2n+1+m-\theta} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{\theta/2} \otimes \nabla \rho^{\theta/2} dx + \gamma_1 \gamma_2 \int_{\Omega} \rho^{2n+m+1-\theta} (\nabla \rho^{\theta/2})^4 dx \right]
 \end{aligned}$$

with

$$\gamma_1 = \frac{4(\theta - m)}{\theta} \quad \gamma_2 = \frac{4(\theta - n)}{\theta}.$$

Now, let us choose θ such that

$$\theta = \frac{2n + m + 1}{2}.$$

Thus the integral J_1 becomes

$$J_1 = \frac{n m}{\theta^2} \left[\int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho^\theta|^2 dx - (\gamma_1 + \gamma_2) \int_{\Omega} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{\theta/2} \otimes \nabla \rho^{\theta/2} dx + \gamma_1 \gamma_2 \int_{\Omega} (\nabla \rho^{\theta/2})^4 dx \right]$$

Similar computation give us

$$J_2 = \frac{n m}{\theta^2} \left[\int_{\Omega} |\Delta \rho^\theta|^2 dx - (\gamma_1 + \gamma_2) \int_{\Omega} \Delta \rho^\theta (\nabla \rho^{\theta/2})^2 dx + \gamma_1 \gamma_2 \int_{\Omega} (\nabla \rho^{\theta/2})^4 dx \right].$$

Gathering J_1 and J_2 together and take in mind that

$$\int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho^\theta|^2 dx = \int_{\Omega} |\Delta \rho^\theta|^2 dx$$

we infer with

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \frac{n m}{\theta^2} \left[(1+n) \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho^\theta|^2 dx + \gamma_1 \gamma_2 (1+n) \int_{\Omega} (\nabla \rho^{\theta/2})^4 dx \right. \\ & \left. - (\gamma_1 + \gamma_2) \left(\int_{\Omega} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{\theta/2} \otimes \nabla \rho^{\theta/2} dx + n \int_{\Omega} \Delta \rho^\theta (\nabla \rho^{\theta/2})^2 dx \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

In the sequel, we want to establish an estimate on

$$-(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\int_{\Omega} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{\theta/2} \otimes \nabla \rho^{\theta/2} dx + n \int_{\Omega} \Delta \rho^\theta (\nabla \rho^{\theta/2})^2 dx \right).$$

To this purpose let us firstly observe that the two following equalities holds

$$\rho \nabla \nabla \log \rho = \nabla \nabla \rho - 4 \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho}, \quad \rho \Delta \log \rho = \Delta \rho - 4 (\nabla \sqrt{\rho})^2.$$

This implies that

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho|^2 dx + \int_{\Omega} |2 \nabla \sqrt{\rho}|^4 dx - 8 \int_{\Omega} \nabla \nabla \rho : \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho} dx \\ \int_{\Omega} \rho^2 |\Delta \log \rho|^2 dx &= \int_{\Omega} |\Delta \rho|^2 dx + \int_{\Omega} |2 \nabla \sqrt{\rho}|^4 dx - 8 \int_{\Omega} \Delta \rho (\nabla \sqrt{\rho})^2 dx \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} & -8 \left(\int_{\Omega} \nabla \nabla \rho : \nabla \sqrt{\rho} \otimes \nabla \sqrt{\rho} dx + n \int_{\Omega} \Delta \rho (\nabla \sqrt{\rho})^2 dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \rho^2 |\nabla \nabla \log \rho|^2 dx + n \int_{\Omega} \rho^2 |\Delta \log \rho|^2 dx \\ & \quad - (1+n) \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho|^2 dx - 16(1+n) \int_{\Omega} |\nabla \sqrt{\rho}|^4 dx \end{aligned} \quad (4.28)$$

Using now Lemma 4.5, we deduce with

$$\begin{aligned} & -8 \int_{\Omega} \left(\nabla \nabla \rho : \nabla \rho^{1/2} \otimes \nabla \rho^{1/2} dx + n \int_{\Omega} \Delta \rho (\nabla \rho^{1/2})^2 dx \right) \\ & \geq 16 c_n \int_{\Omega} |\nabla \rho^{1/2}|^4 dx - (1+n) \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho|^2 dx - (1+n) \int_{\Omega} |2 \nabla \sqrt{\rho}|^4 dx \end{aligned} \quad (4.29)$$

with

$$c_n = \frac{(1+n)(d+2)(d(1-n)+2n) - (d-1)^2(2n-1)^2}{(d+2)^2(1+n)}.$$

Hence making $\rho = \rho^\theta$ in the above inequality, we infer that

$$\begin{aligned} & - \left[\int_{\Omega} \nabla \nabla \rho^\theta : \nabla \rho^{\theta/2} \otimes \nabla \rho^{\theta/2} dx + n \int_{\Omega} \Delta \rho^\theta (\nabla \rho^{\theta/2})^2 dx \right] \\ & \geq 2(c_n - 1 - n) \int_{\Omega} |\nabla \rho^{\theta/2}|^4 dx - \frac{(1+n)}{8} \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho^\theta|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Therefore using the above inequality, we obtain ($\gamma_1 + \gamma_2 > 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{I} & \geq \frac{nm}{\theta^2} \left[(1+n) \left(1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{8} \right) \int_{\Omega} |\nabla \nabla \rho^\theta|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + (\gamma_1 \gamma_2 (1+n) + 2(\gamma_1 + \gamma_2)(c_n - 1 - n)) \int_{\Omega} |2\nabla \rho^{\theta/2}|^4 dx \right]. \end{aligned}$$

Conditions

$$\gamma_1 + \gamma_2 < 8 \Leftrightarrow n + m > 0$$

and

$$\gamma_1 \gamma_2 (1+n) + 2(\gamma_1 + \gamma_2)(c_n - 1 - n) > 0. \quad \square$$

4.3 Application to fluid dynamics systems

We consider the following system

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)D(u) + \lambda(\rho) \operatorname{div} u \mathbb{I}) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div}(S) \end{cases} \quad (4.31)$$

where $\operatorname{div}(S)$ is the capillary tensor which reads as follows

$$\operatorname{div}(S) = (\rho \operatorname{div}(K(\rho) \nabla \rho) + \frac{1}{2}(K(\rho) - \rho K'(\rho)) |\nabla \rho|^2) \mathbb{I} - K(\rho) \nabla \rho \otimes \nabla \rho, \quad (4.32)$$

with $K(\rho)$ is the capillary coefficient, u stands for the velocity of fluid and

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u),$$

is the strain tensor. The term p is a general pressure depending on ρ that we assume in the sequel under the form $p(\rho) = a\rho^\gamma$ and $a > 0$. The viscosity coefficients μ and λ are the Lamé coefficients which should be satisfy the Bresch-Desjardins relation introduced in [18], namely

$$\lambda(\rho) = 2(\rho \mu'(\rho) - \mu(\rho)). \quad (4.33)$$

We completed the above system with initial conditions

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \rho u|_{t=0} = m_0(x) \quad \text{in } \Omega \quad (4.34)$$

Inspired by the framework developed recently by BRESCH, COUDERC, NOBLE and VILA in [14], we can write the surface tension in conservative form given by

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(S) &= \rho \nabla \left(\sqrt{K(\rho)} \Delta \left(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} ds \right) \right) \\ &= \operatorname{div}(F(\rho) \nabla \nabla \psi(\rho)) + \nabla \left((F'(\rho) \rho - F(\rho)) \Delta \psi(\rho) \right)\end{aligned}\tag{4.35}$$

with

$$\sqrt{\rho} \psi'(\rho) = \sqrt{K(\rho)}, \quad F'(\rho) = \sqrt{K(\rho)} \rho.\tag{4.36}$$

When $\operatorname{div}(S) = 0$ in System (4.3), the system reduces to the compressible Navier-Stokes equations. The existence of global weak solutions of such system even in the case of constant viscosity has been a long an open problem. In the case when $\gamma = 2$ and the dimension of space is equal to 2, this corresponds to the shallow water equations, where $\rho(t, x)$ stands for the height of the water at position x , and time t , and $u(t, x)$ is the 2D velocity at the same position, and same time.

A first big breakthrough is due to P.-L. LIONS in the case of constant viscosity in the nineties of last century who proved the existence of global existence of solution in dimension 3 for $\gamma > 9/5$. This result is improved later by E. FEIREISL to be held when $\gamma > 3/2$. However, the problem becomes even more challenging when the viscosity coefficients depend on the density. In fact, the Navier-Stokes equations (4.31) is highly degenerated at the vacuum because the velocity cannot even be defined when the density vanishes. A remarked result in this way is due to D. BRESCH, B. DESJARDINS where the authors derived a new mathematical entropy called by BD-*entropy* to show the structure of the diffusion terms providing some regularity for the density. It involves an energy related to a new velocity $\mathbf{w} = u + 2\nabla s(\rho)$ where s is a function of the density ρ defined by $s'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho$. However, this new estimate is not sufficient to treat the compressible Navier-Stokes equations without additional control on the vacuum, as the introduction of capillarity friction, or cold pressure. In fact, the main difficulty confronted by the two authors is to pass to the limit in $\rho u \otimes u$ which requires the strong convergence of $\sqrt{\rho} u$. For this reason, BRESCH and DESJARDINS added new terms, such a drag terms or surface tension terms to their model. Meanwhile, A. MELLET and A. VASSEUR deduced an new estimate on

$$\rho(1 + |u|^2) \ln(1 + |u|^2),$$

to be known in $L_t^\infty L_x^1$ which allow us to pass to the limit in the convective term without any additional terms. However, the authors at this stage proved just stability of weak solutions due to the complexity in establishing this additional estimate.

Recently, A. VASSEUR, C. YU in [111] in their seminal work proved finally that we can prove the existence of global weak solutions (stability and construction of solutions) of the shallow water equation without added any additional terms in the momentum

equation. This result seems now improved to be held with the compressible Navier-Stokes equations under the Bresch-Desjardins condition and when

$$\mu(\rho) = \rho^\alpha, \quad \frac{2}{3} < \alpha < 2.$$

In this results, the authors added a capillarity term $\varepsilon \operatorname{div}(S)$, $\varepsilon > 0$ in the momentum equation as a regularizing term which should be compatible with the viscous terms. Then they showed an existence of solutions of the obtained obtained and after that, they perform the limit $\varepsilon \rightarrow 0$.

When establishing the existence of solution of System (4.31), the authors introduce the concept of effect velocity $\mathbf{w} = u + \kappa \nabla s(\rho)$, $\kappa > 0$ with $s'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho$ to rewrite System (4.31) into an augmented system with three unknowns $(\rho, \mathbf{w}, v)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) - 2\kappa \Delta \mu(\rho) &= 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\rho u \otimes \mathbf{w}) - 2(1 - \kappa) \operatorname{div}(\mu(\rho) D(\mathbf{w})) - 2\kappa \operatorname{div}(\mu(\rho) A(\mathbf{w})) \\ + 4\kappa(1 - \kappa) \operatorname{div}(\mu(\rho) \nabla^2 v) - \nabla((\lambda(\rho) - 2\kappa(\mu'(\rho) - \mu(\rho)) \operatorname{div} u)) + \nabla p(\rho) + \operatorname{div}(S) &= 0 \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho u \otimes v) - 2\kappa \operatorname{div}(\mu(\rho) \nabla v) + \operatorname{div}(\mu(\rho) \nabla^t \mathbf{w}) \\ + \nabla((\mu'(\rho) - \mu(\rho)) \operatorname{div} u) &= 0, \end{aligned} \tag{4.37}$$

Of course, if we prove $v = \nabla s(\rho)$, then we can conclude the existence of solution of System (4.31) (see [17]). The difficulty in establishing the energy estimate associated to System (4.37) resides on the following two terms

$$\nabla((\lambda(\rho) - 2\kappa(\mu'(\rho) - \mu(\rho)) \operatorname{div} u)) \quad \text{and} \quad \operatorname{div}(S). \tag{4.38}$$

In fact, the first term seems not have a good estimate when we try to multiply the second equation in System (4.37) by $\mathbf{w}$ and integrate with respect to space. For this reason BRESCH and DESJARDINS added the constraint (4.33) in their theorem to eliminate this term. However, using (4.35), the scalar product of $-\operatorname{div}(S)$ with $\mathbf{w} = u + \kappa \nabla s(\rho)$ can be written

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(S) \cdot \mathbf{w} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} \, ds)) \cdot \mathbf{w} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} \, ds)) \cdot u \, dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} \, ds)) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \rho \nabla(\sqrt{K(\rho)} \Delta(\int_0^\rho \sqrt{K(s)} \, ds)) \cdot u \, dx \\ &\quad + 2\kappa \int_{\Omega} F(\rho) \nabla \nabla \psi(\rho) : \nabla \nabla s(\rho) \, dx + 2\kappa \int_{\Omega} (F'(\rho) \rho - F(\rho)) \Delta \psi(\rho) \Delta s(\rho) \, dx. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Integrating by parts the first term in Equation (4.39) using the continuity equation, we obtain

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \sqrt{K(\rho)}|^2 dx. \quad (4.40)$$

For the last two terms, we write

$$I_2 = \int_{\Omega} F(\rho) \nabla \nabla \psi(\rho) : \nabla \nabla s(\rho) dx + \int_{\Omega} (F'(\rho)\rho - F(\rho)) \Delta \psi(\rho) \Delta s(\rho) dx \quad (4.41)$$

The integral I_2 seems to have a priori no sign. To this purpose, they considered a particular case of viscosity coefficients that allow to have sign of this integral. For example, in [27] the authors focused on the case when

$$\psi(\rho) = s(\rho) = \rho^{\alpha-1}, \quad \frac{2}{3} < \alpha < 2, \quad (4.42)$$

which allow the authors in [27] to infer a global weak solutions of the compressible Navier-Stokes equations with a particular case of viscosity coefficients given by

$$\mu(\rho) = \rho^{\alpha} \quad \lambda(\rho) = (2\alpha - 1)\rho^{\alpha}, \quad \frac{2}{3} < \alpha < 2. \quad (4.43)$$

With the inequality proved in Theorem 4.1, we hope to cover more general case for Navier-Stokes-Korteweg than the quantum Navier-Stokes equations considered recently by VASSEUR, LACROIX-VIOLET in [71].

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Après une conclusion courte sur les thématiques de recherche étudiées dans cette thèse, nous mentionnons quelques questions ouvertes qui ont été soulevées ou rencontrées durant ces trois années de thèse. Ensuite nous proposerons quelques problèmes de recherche que nous souhaiterons aborder dans le futur proche.

5.1 Conclusion

Nos travaux de recherche ont porté notamment sur trois thèmes principaux. La première partie concerne la dynamique des écoulements d'eaux peu profondes. Plus précisément, le modèle étudié est le modèle visqueux des équations des lacs avec bathymétrie qui dégénère proche du bord. Les équations des lacs visqueuses sont obtenues de l'équation de Saint-Venant avec bathymétrie en faisant tendre le nombre de Froude vers zéro quand la hauteur d'eau initiale converge vers la bathymétrie qui dépend de la variable x seulement. Nous avons démontré que le problème de Cauchy correspondant admet une solution faible globale en temps. Le cadre de travail nécessite l'introduction d'espaces à poids. Nous avons montré que l'utilisation des espaces de type Muckenhoupt permet de démontrer un résultat qui généralise au cas dégénéré des résultats connus sur les équations de Navier-Stokes incompressible. En plus, nous avons établi un lien entre le modèle visqueux et sa version non visqueuse en démontrant que la solution du premier modèle converge vers la solution du deuxième modèle quand la viscosité tend vers zéro. Ce lien est établi dans le cas où le terme de dissipation est de la forme

$$-\mu b \Delta u, \quad \mu > 0, \quad b \text{ hauteur d'eau}, \quad u \text{ vitesse.}$$

Cependant, la question de convergence de la solution du modèle des lacs visqueux vers la solution du modèle des lacs non visqueux lorsqu'on remplace le terme de dissipation ci-dessus par les termes suivants

$$-\mu b \operatorname{div}(2bD(u) + 2b \operatorname{div} u) \quad - \mu \Delta(bu^\mu), \quad \mu > 0$$

reste ouverte. Notons tout d'abord que cette étude nécessite une analyse de régularité. Pour cette raison, nous allons commencer dans un premier temps par l'étude du problème

de Stokes associé, i.e., connaître la régularité de u solution de (Ω est supposé régulier)

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\operatorname{div}(2b\nabla u) &= f & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour une fonction $f \in L_b^2(\Omega)$.

La deuxième partie est consacrée à l'analyse d'écoulement à faible nombre de Mach. Il s'agit d'un modèle dont l'étude aussi bien physique que mathématique est encore peu développée, mais qui a de nombreuses applications. Ce phénomène apparaît lorsque l'on considère la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann vers Navier-Stokes incompressible pour un scaling diffusif. Dans [3], nous avons réussi à démontrer l'existence globale de solution faible généralisant le travail de C. D. LEVERMORE *et al.* (2012) qui traite le problème de l'existence locale de solution forte ainsi que le travail de BRESCH *et al.* autour le modèle faible nombre de Mach dérivé à partir du modèle de Navier-Stokes compressible par P.-L. LIONS. Comme nous avons vu, la démonstration de notre résultat repose sur une inégalité fonctionnelle qui nous assure une bonne estimation du terme de tension de surface de type

$$\rho \nabla \left(\sqrt{\rho^{2m-1}} \Delta \left(\int_0^\rho \sqrt{s^{2m-1}} ds \right) \right), \quad (5.1)$$

avec m dans $[0, 1/2]$.

La dernière partie était consacrée à l'étude de quelques inégalités fonctionnelles qui ont de grands intérêts dans la résolution de problèmes liés à la mécanique de fluide. Cette inégalité fonctionnelle comme on a vu dans le chapitre 4 motive l'étude d'existence globale de solution faible du modèle de Navier-Stokes-Korteweg avec un terme de tension de surface plus général que celle considéré dans le modèle de ghost effect, i.e. (5.1).

5.2 Perspectives

Concernant les travaux que nous aimerons faire dans le futur proche, le plan s'organise comme suit : premièrement, en ce qui concerne les équations des lacs visqueux, nous souhaiterions au début d'avancer nos travaux de recherche dans l'étude de régularité de solutions des équations elliptiques dégénérées. Le point de départ sera les techniques développées par J. SIMON autour la régularité de la solution de problème aux limites non linéaires [102]. Soulignons que J. SIMON dans ses travaux a introduit une nouvelle méthode inspirée de la méthode des translations de Nirenberg. En fait, en utilisant la méthode de NIRENBERG pour les équations non linéaires, on perd les hypothèses de régularité du second membre dans la localisation préalable au changement de carte. J. SIMON a contourné cette difficulté en "localisant" les translations ou plus exactement en utilisant une méthode de transformation globale directement dans Ω . Étant donné un champ de vecteur θ régulier dans Ω et tangent à $\partial\Omega$ ou nul sur celui-ci, on définit un semi-groupe noté $e^{h\theta}$, $h \geq 0$, de difféomorphismes de Ω en "remontant" le

long des caractéristiques du champ θ . On établit des caractéristiques par les translations $e^{h\theta}$ d'espaces de Sobolev et de Besov construits sur Ω , analogues aux caractéristiques par translations des espaces construits sur $\mathbb{R}_+^N$. Selon qu'on considère des champs à support dans Ω , nuls sur $\partial\Omega$ ou tangents sur celui-ci, nous caractérisons ainsi des espaces locaux, des espaces avec poids ou des espaces asymétriques (i.e. où les dérivées tangentielles sont plus régulières que les dérivées normales). En utilisant cette approche, nous espérons développer des résultats de régularité L^q , au début sur le problème $(\mathcal{P})$ (avec $D(u)$ à la place de ∇u) dans le cas où le poids b est supposé être comme une distance aux bord (ce qui rend la dérivée tangentielle de b égal à zéro). On étendra ensuite les résultats à des problèmes plus généraux qui seront sans doute le point clé de l'étude de la régularité des solutions du modèle des lacs visqueux et du modèle de Bingham (incompressible et compressible).

L'existence globale de solution faible du modèle de ghost effect est établi dans le cas où la densité est supposée loin de vide. Il nous semble possible d'étendre notre résultat dans le chapitre 3 au cas où ρ peut s'annuler et aussi en considérant un terme de tension de surface plus général que (5.1) motivant par l'inégalité fonctionnelle démontrée au chapitre 4. Nous allons nous inspirer des travaux de BRESCH et DESJARDINS sur les équations de Navier-Stokes avec viscosité dégénérée (puisque la viscosité dépend de la densité) en adaptant les techniques proposées par ces auteurs au cas du modèle de ghost effect. Nous soulignons également que ce modèle prend en considération le modèle de faible nombre de Mach proposé par P.-L. LIONS [volume 2, page 281], le modèle de combustion (travaux de MAJDA, LIONS,...), le modèle de polluant (travaux de KAZIKHOV, MONAKHOV...) et le modèle faible nombre de Mach étudié par BRESCH, GIOVANGIGLI, ZATORSKA, (2015).

Pour finir avec les modèles mathématiques considérés dans cette thèse, nous aimerions avoir un résultat d'existence globale de solution faible pour le modèle de Navier-Stokes-Korteweg avec un terme de tension de surface compatible avec notre inégalité fonctionnelle et qui couvre un cas plus général que celle considéré dans le modèle de Navier-Stokes quantique (voir [61], [71]).

Dans la suite, nous présentons un nouveau modèle qui permet de modéliser un mélange formés par des particules solides immergées dans un fluide non newtonien. Le modèle mathématique que nous avons choisi est de type Bingham incompressible avec un critère de plasticité de type Drucker-Prager dont la viscosité dépend de la pression du solide. Ce modèle est couplé à une équation de convection-diffusion via la définition du seuil de plasticité du fluide-mélange qui lui même aussi dépend de la pression totale du mélange. Dans ce cadre, les questions mathématiques qui se posent sont des problèmes d'existence de solution, d'unicité, d'étude des états stationnaires, etc. On s'intéresse donc à la question suivante : étudier l'existence globale de solution faible (u, Π, Λ) du système

suivant

$$\begin{cases} \partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi - \kappa \Delta \Pi = \frac{\Lambda}{2}, \\ \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) - \operatorname{div} \sigma' + \nabla(\Pi + \Lambda) = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \Pi \geq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

où u représente la vitesse, Π la pression jouant le rôle du potentiel d'adhésion en lien avec l'énergie d'adhésion du système, la pression Λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div} u = 0$, σ' désigne le tenseur de contrainte donnée par

$$\begin{cases} \sigma' = 2(1 + \Pi)D(u) + \Pi \frac{D(u)}{|D(u)|} & \text{si } D(u) \neq 0, \\ \sigma' \leq \tau_0 & \text{si } D(u) = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

avec τ_0 est une constante positive. Notons que C. PERRIN [96] a obtenu (dans le cas d'un fluide newtonien et sans terme de diffusion sur la pression) ce modèle à partir du modèle de Navier-Stokes compressible à coefficients dégénérées. PERRIN dans son travail, s'appuie sur les travaux de BRESCH, DESJARDINS sur les équations de Navier-Stokes compressible avec viscosité dépendant de la densité. Cependant, les résultats de BRESCH, DESJARDINS et aussi le travail récent de BRESCH, VASSEUR, YU ne sont pas compatibles avec une loi de comportement de type Bingham. Ce fait ne nous permet pas de trouver une dérivation mathématique de notre modèle.

Dans ce qui suit, nous présentons notre stratégie dans la résolution du problème (5.2). D'abord, on va réécrire notre système (5.2) sous une forme peu différent. En fait, nous proposons de chercher une solution (u, Π, p) du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi - \kappa \Delta \Pi = \frac{p - \Pi}{2}, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - 2 \operatorname{div}((1 + \Pi)D(u)) - \operatorname{div}(\Sigma) + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \Pi \geq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

et alors évidemment nous garantissons une solution du problème (5.2) à partir de la solution du (5.4) en prenant $\Lambda = p - \Pi$.

Dans la suite nous présentons notre idée de la construction de solution pour le problème (5.4). Nous voudrions appliquer un théorème de point fixe. Tout d'abord pour Π donnée, nous espérons trouver une solution du problème (5.4)₂-(5.4)₃ puisqu'il s'agit du modèle de Bingham incompressible avec critère de plasticité et viscosité dépendant de la pression (discussion ci-dessous). Également, si (u, p) existe alors évidemment en utilisant la théorie des équations paraboliques, nous pouvons aisément trouver Π solution du (5.4)₁.

Cependant, dans l'analyse de l'existence de solution du modèle Bingham incompressible, il existe différentes méthodes introduites par les auteurs afin d'éviter la singularité causée par la présence des zones rigides. Les travaux de DUVAUT et LIONS [44] ont amené à voir

le problème de fluide de Bingham comme la résolution d'une inéquation variationnelle associée. Ceci peut être réalisé en multipliant l'équation de conservation du moment (5.2)₂ par $v - u$ et intégrant en espace où v une fonction teste appartient à $H^1(\Omega)$ à divergence nulle. Plus précisément, en multipliant l'équation de conservation du moment associé à u (5.4)₂ par $(v - u)$ et en intégrant en espace, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u \cdot (v - u) dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot (v - u) dx + \int_{\Omega} (1 + \Pi) D(u) : D(v - u) dx \\ + \int_{\Omega} \Pi D(v) dx - \int_{\Omega} \Pi D(u) dx \geq 0, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (5.5)$$

où l'espace V est défini comme suit :

$$V = \{v \in H^1(\Omega), \operatorname{div} v = 0\}.$$

Une difficulté est qu'il n'existe plus mathématiquement de zones rigides pour le problème régularisé. Ceci est gênant lorsque l'on souhaite justement prédire la localisation de ces zones : stabilité d'une fondation, départ ou arrêt d'un glissement de terrain, d'une avalanche, d'une coulée de lave... Ensuite cette méthode nous ne servira pas dans la démonstration de l'existence de la pression (il n'y a pas une équivalence entre le problème initiale et l'inéquation variationnelle). Ce qui nous empêche alors de suivre cette approche.

Parallèlement à cette méthode, dans ses travaux sur les équations de Herschel-Bulkley [101], [10], V. V. SHELUKHIN régularise le terme plastique en introduisant un paramètre ε comme suit :

$$\operatorname{div} \left(\frac{D(u)}{\sqrt{|D(u)|^2 + \varepsilon^2}} \right) \quad \varepsilon > 0,$$

ou même

$$\operatorname{div} \left(\frac{D(u)}{\max(\varepsilon, |D(u)|)} \right), \quad \varepsilon > 0.$$

Cependant, une difficulté mise en jeu dans ce cadre est la nécessité d'établissement des estimations d'énergies élevées sur la vitesse afin de passer à la limite dans une suite de solutions approchées (u_n) ce qui n'est pas possible dans notre cas.

La dernière méthode dans ce contexte est due à BULÍČEK, GWIAZDA, MÁLEK, ŚWIERCZ-IEWSKA-GWIAZDA [30] qui repose sur une technique de type régularisation, qui permet d'approcher la rhéologie discontinue de Bingham par une rhéologie continue. Plus précisément, on ajoute une inconnue supplémentaire au système (5.4), à savoir le tenseur de contrainte à seuil τ_0 qui vérifie la relation (5.3). Pour ce faire, nous allons ici utiliser la définition implicite (5.3)₁ de σ' . Cet artifice nous permet de traiter à part la difficulté liée à la détermination de ce tenseur en passant par la définition d'un graphe $\mathcal{G}(\tau_0)$ défini comme suit :

$$\mathcal{G}(\tau_0) = \left\{ (\sigma', D(v)) \in L^2 L^2 \times (L^\infty H^{-1} \cap L^2 L^2) \text{ tel que } (\sigma', D(v), \tau_0) \text{ satisfait (5.3)} \right\},$$

où τ_0 est la fonction seuil dépendant de la pression Π .

L'une des propriétés les plus intéressantes du graphe $\mathcal{G}(\tau_0)$ est sa monotonie, i.e., si (σ'_1, D_1) et (σ'_2, D_2) sont dans $\mathcal{G}(\tau_0)$ alors

$$(\sigma'_1 - \sigma'_2) : (D_1 - D_2) \geq 0 \quad p.p.$$

Cette propriété est essentielle pour passer à la limite dans le graphe $G(\tau_0)$. En utilisant cette méthode, nous espérons trouver une solution du problème (5.4)₂-(5.4)₃. Ensuite une application du théorème du point fixe suffit pour conclure un théorème d'existence du problème (5.4).

Bibliographie

- [1] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. i. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 12(4) :623–727, 1959.
- [2] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions ii. *Communications on pure and applied mathematics*, 17(1) :35–92, 1964.
- [3] B. Al Taki. Global well posedness for the ghost effect system. *à paraître dans CPAA*.
- [4] B. Al Taki. Viscosity effect on the degenerate lake equations. *à paraître dans Nonlinear analysis*.
- [5] T. Allemand. *Modèles mathématiques pour les gaz quantiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2010.
- [6] P. Antonelli and S. Spirito. A global existence result for a zero mach number system. *Arxiv*, 1605.03510.
- [7] D. Bakry, I. Gentil, and M. Ledoux. Logarithmic sobolev inequalities. In *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*, pages 235–275. Springer, 2014.
- [8] C. Bardos. What use for the mathematical theory of the navier-stokes equations. In *Mathematical Fluid Mechanics*, pages 1–25. Springer, 2001.
- [9] I. V. Basov and V. V. Shelukhin. Generalized solutions to the equations of compressible bingham flows. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 79(3) :185–192, 1999.
- [10] I.V Basov and V.V Shelukhin. Nonhomogeneous incompressible bingham viscoplastic as a limit of nonlinear fluids. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 142(1) :95–103, 2007.
- [11] M. Bennoune. *Approximation numérique de quelques équations cinétiques préservant leurs asymptotiques fluides*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2009.
- [12] O. Besson, M. R. Laydi, and R. Touzani. Un modèle asymptotique en océanographie. *CR Acad. Sci. Paris*, 310(1) :661–665, 1990.

-
- [13] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
 - [14] D. Bresch, F. Couderc, P. Noble, and J.-P. Vila. New extended formulations of euler-korteweg equations based on a generalization of the quantum bohm identity. *ArXiv :1503.08678*, 2015.
 - [15] D. Bresch and B. Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2d viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Communications in mathematical physics*, 238(1-2) :211–223, 2003.
 - [16] D. Bresch and B. Desjardins. On the construction of approximate solutions for the 2d viscous shallow water model and for compressible navier–stokes models. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 86(4) :362–368, 2006.
 - [17] D. Bresch, B. Desjardins, and D. Gérard-Varet. On compressible navier–stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 87(2) :227–235, 2007.
 - [18] D. Bresch, B. Desjardins, and C.-K. Lin. On some compressible fluid models : Korteweg, lubrication, and shallow water systems. 2003.
 - [19] D. Bresch, B. Desjardins, and E. Zatorska. Two-velocity hydrodynamics in fluid mechanics : Part 2 existence of global κ -entropy solutions to the compressible navier-stokes systems with degenerate viscosities. *Journal de Math. Pures. Appl.*, 104(4) :762–800, 2015.
 - [20] D. Bresch, El H. Essoufi, and M. Sy. Effect of density dependent viscosities on multiphasic incompressible fluid models. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 9(3) :377–397, 2007.
 - [21] D. Bresch, V. Giovangigli, and E. Zatorska. Two-velocity hydrodynamics in fluid mechanics : Part i well posedness for zero mach number systems. *Journal de Math. Pures. Appl.*, 104(4) :762–800, 2015.
 - [22] D. Bresch, M. Gisclon, and C.-K. Lin. An example of low mach (froude) number effects for compressible flows with nonconstant density (height) limit. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(03) :477–486, 2005.
 - [23] D. Bresch, J. Lemoine, and F. Guillen-Gonzalez. A note on a degenerate elliptic equation with applications for lakes and seas. *Electron. J. Differential Equations*, 13(42), 2004.
 - [24] D. Bresch and G. Métivier. Global existence and uniqueness for the lake equations with vanishing topography : elliptic estimates for degenerate equations. *Nonlinearity*, 19(3) :591, 2006.
 - [25] D. Bresch and P. Noble. Mathematical justification of a shallow water model. *Methods and applications of analysis*, 14(2) :87–118, 2007.
 - [26] D. Bresch and P. Noble. Mathematical derivation of viscous shallow-water equations with zero surface tension. 2010.

- [27] D. Bresch, A. Vasseur, and C. Yu. Global existence of compressible navier-stokes equation with degenerates viscosities. *In preparation*.
- [28] S. Brull. Problem of evaporation-condensation for a two component gas in the slab. *Kinet. Relat. Models*, 1(2) :185–221, 2008.
- [29] S. Brull. The stationary boltzmann equation for a two-component gas in the slab. *Math. Methods Appl. Sci.*, 31(2) :153–178, 2008.
- [30] M. Bulicek, P. Gwiazda, J. Malek, and A. Swierczewska-Gwiazda. On unsteady flows of implicitly constituted incompressible fluids. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(4) :2756–2801, 2012.
- [31] R. Camassa, D. D. Holm, and C. D. Levermore. Long-time effects of bottom topography in shallow water. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 98(2) :258–286, 1996.
- [32] R. Camassa, D. D. Holm, and C. D. Levermore. Long-time shallow-water equations with a varying bottom. *Journal of Fluid Mechanics*, 349 :173–189, 1997.
- [33] C. Cercignani. The boltzmann equation. In *The Boltzmann Equation and Its Applications*, pages 40–103. Springer, 1988.
- [34] C. Cercignani. *Rarefied gas dynamics : from basic concepts to actual calculations*, volume 21. Cambridge University Press, 2000.
- [35] H. J. Choe and H. Kim. Strong solutions of the navier–stokes equations for isentropic compressible fluids. *Journal of Differential Equations*, 190(2) :504–523, 2003.
- [36] B. Christine and P. Olivier. On the shallow water equations at low reynolds number. *Communications in partial differential equations*, 16(1) :59–104, 1991.
- [37] S.-K. Chua. Extension-theorems on weighted sobolev spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, 41(4) :1027–1076, 1992.
- [38] S.-K. Chua. Weighted sobolev interpolation inequalities on certain domains. *Journal of the London Mathematical Society*, 51(3) :532–544, 1995.
- [39] T. Clopeau, A. Mikelić, and R. Robert. On the vanishing viscosity limit for the 2d incompressible navier-stokes equations with the friction type boundary conditions. *Nonlinearity*, 11(6) :1625, 1998.
- [40] R. Danchin and X. Liao. On the well-posedness of the full low Mach number limit system in general critical Besov spaces. *Commun. Contemp. Math.*, 14(3) :1250022, 47, 2012.
- [41] B. Di Martino, C. Giacomoni, and P. Oreniga. Analysis of some shallow water problems with rigid-lid hypothesis. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 11(06) :979–999, 2001.
- [42] J. Dong. A note on barotropic compressible quantum Navier-Stokes equations. *Nonlinear Anal.*, 73(4) :854–856, 2010.
- [43] D. C. Drucker. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 16(4) :349–357, 1949.

-
- [44] G. Duvant and J.-L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*, volume 219. Springer Science & Business Media, 2012.
 - [45] E. B Fabes, C. E. Kenig, and R. P. Serapioni. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 7(1) :77–116, 1982.
 - [46] A. Fall. *Rhéophysique des fluides complexes : écoulement et blocage de suspensions*. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2008.
 - [47] R. Farwig and H. Sohr. Weighted l^q -theory for the stokes resolvent in exterior domains. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 49(2) :251–288, 1997.
 - [48] E. Feireisl and A. Novotný. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*. Springer Science & Business Media, 2009.
 - [49] M.C. L. Filho, H.-J. N. Lopes, and G. Planas. On the inviscid limit for two-dimensional incompressible flow with navier friction condition. *SIAM J. Math Anal.*, 36(4) :1130–1141, 2005.
 - [50] A. Fröhlich. The stokes operator in weighted l^q -spaces i : Weighted estimates for the stokes resolvent problem in a half space. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 5(2) :166–199, 2003.
 - [51] A. Fröhlich. *The Navier-Stokes equations with low-regularity data in weighted function spaces*. PhD thesis, Doktor der Naturwissenschaften dissertation, 2006.
 - [52] A. Fröhlich. The stokes operator in weighted l^q -spaces ii : Weighted resolvent estimates and maximal l^p -regularity. *Mathematische Annalen*, 339(2) :287–316, 2007.
 - [53] M. Fuchs and G. Seregin. *Variational methods for problems from plasticity theory and for generalized Newtonian fluids*. Springer Science & Business Media, 2000.
 - [54] M. Gisclon and I. Lacroix-Violet. About the barotropic compressible quantum Navier-Stokes equations. *Nonlinear Anal.*, 128 :106–121, 2015.
 - [55] V. Goldshtein and A. Ukhlov. Weighted sobolev spaces and embedding theorems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(7) :3829–3850, 2009.
 - [56] F. Golse. The boltzmann equation and its hydrodynamic limits. *Handbook of Differential Equations : Evolutionary Equations*, 2 :159–301, 2006.
 - [57] L. Gross. Logarithmic sobolev inequalities. *American Journal of Mathematics*, 97(4) :1061–1083, 1975.
 - [58] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*.
 - [59] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*. Courier Corporation, 2012.
 - [60] F. Jiang. A remark on weak solutions to the barotropic compressible quantum Navier-Stokes equations. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 12(3) :1733–1735, 2011.

- [61] A. Jüngel. Global weak solutions to compressible navier-stokes equations for quantum fluids. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(3) :1025–1045, 2010.
- [62] A. Jüngel and D. Matthes. The derrida-lebowitz-speer-spohn equation : existence, nonuniqueness, and decay rates of the solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(6) :1996–2015, 2008.
- [63] A. Kałamajska. Coercive inequalities on weighted sobolev spaces. In *Colloquium Mathematicae*, volume 66, pages 309–318. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1993.
- [64] J. P. Kelliher. Navier–stokes equations with navier boundary conditions for a bounded domain in the plane. *SIAM journal on mathematical analysis*, 38(1) :210–232, 2006.
- [65] T. Kilpeläinen. Smooth approximation in weighted sobolev spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 38(1) :29–36, 1997.
- [66] J. U. Kim. On the cauchy problem associated with the motion of a bingham fluid in the plane. *Transactions of the American Mathematical Society*, 298(1) :371–400, 1986.
- [67] J. U. Kim. On the initial-boundary value problem for a bingham fluid in a three-dimensional domain. *Transactions of the American Mathematical Society*, 304(2) :751–770, 1987.
- [68] P. E. Kloeden. Global existence of classical solutions in the dissipative shallow water equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 16(2) :301–315, 1985.
- [69] A. Kufner. Weighted sobolev spaces, teubner, leipzig, 1980. *MR 84e*, 46029.
- [70] C. Lacave, T. T. Nguyen, and B. Pausader. Topography influence on the lake equations in bounded domains. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 16(2) :375–406, 2014.
- [71] I. Lacroix-Violet and A. Vasseur. Global weak solutions to the compressible quantum navier-stokes equation and its semi-classical limit. *arXiv preprint arXiv :1607.06646*, 2016.
- [72] O-A Ladyzenskaja, V-A Solonnikov, N-N Uralceva, and S Smith. Linear and quasilinear equations of parabolic type. 1968.
- [73] O. A. Ladyzhenskaya and R. A. Silverman. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, volume 76. Gordon and Breach New York, 1969.
- [74] O. E. Lanford III. Time evolution of large classical systems. In *Dynamical systems, theory and applications*, pages 1–111. Springer, 1975.
- [75] R. G. Larson. *The structure and rheology of complex fluids*, volume 150. Oxford university press New York, 1999.
- [76] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, 63(1) :193–248, 1934.

-
- [77] C. D. Levermore. Gas dynamics beyond navier-stokes. 2007.
 - [78] C. D. Levermore, M. Oliver, and E. S. Titi. Global well-posedness for the lake equations. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 98(2) :492–509, 1996.
 - [79] C. D. Levermore and M. Sammartino. A shallow water model with eddy viscosity for basins with varying bottom topography. *Nonlinearity*, 14(6) :1493, 2001.
 - [80] C. D. Levermore, W. Sun, and K. Trivisa. A low mach number limit of a dispersive navier-stokes system. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(3) :1760–1807, 2012.
 - [81] C. D. Levermore, W. R. Sun, and K. Trivisa. Local well-posedness of a ghost effect system. *Indiana Univ. Math. J.*, 60(2) :517–576, 2009.
 - [82] J.-L. Lions. *Quelques mthodes de rsolution des problemes aux limites nonlinaires*, Paris : Dunod, 1969. 1972.
 - [83] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, volume 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models, Oxford Science Publications.
 - [84] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2*, volume 10 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Compressible models, Oxford Science Publications.
 - [85] A. Majda. *Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow*, volume 39. Wiley Online Library, 1986.
 - [86] F. Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 26(1) :49–63, 2007.
 - [87] J.-C. Maxwell. On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci*, 170 :231–256, 1879.
 - [88] A. Mellet and A. Vasseur. On the barotropic compressible navier–stokes equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 32(3) :431–452, 2007.
 - [89] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the hardy maximal function. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 207–226, 1972.
 - [90] I. Munteanu. Existence of solutions for models of shallow water in a basin with a degenerate varying bottom. *Journal of Evolution Equations*, 12(2) :393–412, 2012.
 - [91] J. Nečas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 16(4) :305–326, 1962.
 - [92] A. Nekvinda. Characterization of traces of the weighted sobolev space on $\mathbb{M}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 43(4) :695–711, 1993.
 - [93] P. Onga. Un théorème d’existence de solutions d’un problème de shallow water. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 130(2) :183–204, 1995.

- [94] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [95] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics*. Springer Science, Business Media, 2013.
- [96] C. Perrin. *Modèles hétérogènes en mécanique des fluides : phénomènes de congestion, écoulements granulaires et mouvement collectif*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2016.
- [97] C. Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*, volume 299. Springer Science & Business Media, 2013.
- [98] W. Prager. The theory of plasticity : a survey of recent achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 169(1) :41–57, 1955.
- [99] K. Schumacher. *The Navier-Stokes equations with low-regularity data in weighted function spaces*. PhD thesis, TU Darmstadt, 2007.
- [100] K. Schumacher. The stationary navier-stokes equations in weighted bessel-potential spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 61(1) :1–38, 2009.
- [101] V. V. Shelukhin. Bingham viscoplastic as a limit of non-newtonian fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 4(2) :109–127, 2002.
- [102] J. Simon. Régularité de la solution d’un problème aux limites non linéaires. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, volume 3, pages 247–274, 1981.
- [103] J. Simon. *Équations de Navier-Stokes*. 1991.
- [104] J. Simon. On the existence of the pressure for solutions of the variational Navier-Stokes equations. *J. Math. Fluid Mech.*, 1(3) :225–234, 1999.
- [105] Y. Sone. Flows induced by temperature fields in a rarefied gas and their ghost effect on the behavior of a gas in the continuum limit. volume 32 of *Annu. Rev. Fluid Mech.*, pages 779–811. Annual Reviews, Palo Alto, CA, 2000.
- [106] Y. Sone. *Kinetic theory and fluid dynamics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [107] L. Sundbye. Global existence for the dirichlet problem for the viscous shallow water equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 202(1) :236–258, 1996.
- [108] R. Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*, volume 343. American Mathematical Soc., 2001.
- [109] B. A. Ton. Existence and uniqueness of a classical solution of an initial-boundary value problem of the theory of shallow waters. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 12(2) :229–241, 1981.
- [110] B. O. Turesson. *Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces*, volume 1736. Springer Science & Business Media, 2000.
- [111] A. Vasseur and C. Yu. Existence of global weak solutions for 3d degenerate compressible navier-stokes equations. *arXiv preprint arXiv :1501.06803*, 2015.

- [112] C. Villani. Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann (d'après C. Bardos, F. Golse, C. D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond). *Astérisque*, (282) :Exp. No. 893, ix, 365–405, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.
- [113] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I*, pages 71–305. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [114] W. Wang and C. J. Xu. The cauchy problem for viscous shallow water equations. *Revista Matemática Iberoamericana*, 21(1) :1–24, 2005.
- [115] V. I. Yudovich. Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 3(6) :1407–1456, 1963.