



THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

Spécialité: Physique Théorique

par

Igor SWIECICKI

Étude de quelques modèles issus de la théorie des jeux en champ moyen

Soutenue le 29 Septembre 2016 devant la Commission d'examen:

M.	Jean-Philippe BOUCHAUD	(Président du jury)
M.	Pierre CARDALIAGUET	
M.	Damien CHALLET	(Rapporteur)
M.	Thierry GOBRON	(Directeur de thèse)
M.	Pablo JENSEN	(Rapporteur)
M.	Gabriel TURINICI	
M.	Denis ULLMO	(Co-directeur de thèse)

LPTM
Laboratoire de Physique
Théorique et Modélisation



Thèse préparée au

LPTM

(UMR 8089)

2 avenue. A. Chauvin , Bât. St Martin

Université de Cergy-Pontoise

95 302 Cergy-Pontoise CEDEX

LPTMS

(UMR 8626)

15 rue Georges Clémenceau , Bât. 100

Université Paris-Saclay

91 405 Orsay CEDEX

Résumé

La théorie des jeux en champ moyen constitue un formalisme puissant introduit récemment pour étudier des problèmes d'optimisation stochastiques avec un grand nombre d'agents. Après avoir rappelé les principes de base de cette théorie et présenté quelques cas d'application typiques, on étudie en détail un modèle stylisé de séminaire, de type champ moyen. Nous dérivons une équation exacte qui permet de prédire l'heure de commencement du séminaire et analysons différents régimes limites, dans lesquels on parvient à des expressions approchées de la solution. Ainsi on obtient un "diagramme de phase" du problème. On aborde ensuite un modèle plus complexe de population avec des effets de groupe attractifs. Grâce à une analogie formelle avec l'équation de Schrödinger non linéaire, on met en évidence des lois d'évolutions générales pour les valeurs moyennes du problème, que le système vérifie certaines lois de conservation et l'on développe des approximations de type variationnel. Cela nous permet de comprendre le comportement qualitatif du problème dans le régime de fortes interactions.

Mots-clefs : Théorie des jeux en champ moyen, optimisation, contrôle, stochastique, modèle, économie, finance, problèmes socio-économiques, équations aux dérivées partielles, équation de Schrödinger non linéaire, toymodel, séminaire, approximation, approche qualitative, résultats exacts, effets de groupes.

STUDY OF SOME MODELS FROM MEAN FIELD GAMES

Abstract

Mean Field Games Theory is a theoretical framework developed recently to deal with stochastic optimization problems when the number of agents is large. First the mathematical tools are introduced heuristically, step by step, and some examples are presented in finance, economy and social problems. I study then thoroughly a seminar toymodel and derive an equation for the starting time of the meeting. The analysis of the limit regimes allows to build a "phase diagram" of the problem. In a second time, a herding problem, where individuals have their own preferences and are also attracted by the group, is tackled. Thanks to a formal analogy with the Non Linear Schrödinger equation, some explicit solutions, conservation laws and so-called variational approximations are derived. Finally I use these tools to get a qualitative understanding of the solution's behaviour in the strong interaction regime.

Keywords : Mean Field Games, optimization, control, stochastic, model, economy, finance, social problems, partial differential equation, Non Linear Schrödinger equation, toymodel, seminar, approximation, qualitative behaviour, exact results, herding.

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes parents car c'est grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé. Ils m'ont donné le goût des études et du travail, ce qui est une richesse exceptionnelle, et m'ont toujours soutenu matériellement et moralement. Je remercie aussi mes directeurs de thèse Denis Ullmo et Thierry Gobron, qui m'ont donné l'opportunité de m'initier à la recherche sur un sujet fascinant et résolument novateur. Denis a été un véritable soutien au quotidien et a su maintenir le cap en dépit de tous les écueils qui se dressaient sur le chemin, grâce à son optimisme habituel. Thierry a également toujours répondu présent quand il le fallait, et été d'une aide précieuse pour certains points techniques. Je remercie également les rapporteurs Damien Challet et Pablo Jensen, pour leur professionnalisme et leur remarques pertinentes. En ce qui concerne les autres membres du jury, Pierre Cardaliaguet, Jean-Philippe Bouchaud et Gabriel Turinici, je ne peux que dire que j'ai été très honoré de leur présence à la soutenance de thèse, et je les en remercie. Je suis reconnaissant à tous les personnels du LPTM et du LPTMS, Claudine, Sylvie, Cédric et Vincent pour leur soutien technique et administratif irréprochable et leur sympathie. Je mentionne aussi la bonne ambiance et l'environnement de travail exceptionnels qui existent au LPTM et au LPTMS, et je remercie en particulier Nicolas, Raoul, Christophe, Jean, Geneviève, Guy, et Thierry pour les discussions intéressantes, scientifiques ou non, que nous avons eu durant ces trois années. En ce qui concerne le financement, je remercie le labex MMEDII et l'université de Cergy-Pontoise d'avoir fait confiance à ce projet.

Ces trois années auraient été bien moins amusantes sans le soutien des mes amis de longue date, Bruno, Mohamed, Nadine, Anthony mais aussi mes amis et collègues du laboratoire : Silvia, Paul, Yasar, Pierre-Elie, Vincent, Quentin, Andrew, Guglielmo, Giulia, Thibaut, Angelika, Ines, Haggai, Martin, Sam, Valentin, Aurélien et tous les autres... Merci en particulier à Bruno pour tous ces moments mythiques, et de m'avoir permis de me défouler au tennis, et à Mohamed, Anthony et Nadine pour ces fameuses soirées parisiennes. Une pensée aussi pour les apéros du labo, où les personnes concernées se reconnaîtront...Je n'oublierai pas non plus, en vrac, les soirées folk de Vincent, les commérages avec Silvia, les discussions philosophiques avec Yasar, les moments détentes Urban Terror avec Quentin, Sam, Valentin, Aurélien, Sabi, Cédric..., les moments "culture" avec Thibaut, le rire d'Inès,... Merci à Andrew de m'avoir expliqué les règles du rugby et d'être toujours partant pour discuter autour d'une bière de tout et de n'importe quoi! Et merci à Giulia d'avoir toujours mis de la bonne humeur dans les journées au labo. Enfin même s'il n'était pas en France pendant ma thèse, je remercie mon "binôme" Ousmane, grâce à qui j'ai pu partager ma passion pour la physique et les sciences pendant mes années à l'ESPCI.

Bien sûr je remercie Bruno U. pour m'avoir fait connaître Plou & Fils et permis de me relaxer au bord de la piscine pour reprendre des forces. Je remercie également le CESFO d'Orsay qui fournit dans un cadre agréable des repas d'excellente qualité et je remercie le service des sport de l'université d'Orsay pour fournir un service d'une qualité incroyable. Une pensée spéciale à Dan et Franck sur ce point. Je remercie ma famille pour son soutien sans faille : mes parents comme déjà dit, mais aussi mon grand-père, ma grand-mère qui serait fière de moi, ma sœur, mes tantes et mes cousins. Enfin je remercie Stéphanie, ma chérie, qui a été un soutien essentiel dans cette aventure, et il faudrait plus d'une page pour décrire tout ce que je lui dois.

Table des matières

Introduction	10
I La théorie des Jeux en Champ Moyen	12
1 Contrôle optimal	13
1.1 Un exemple	14
1.2 Le cadre mathématique	15
1.3 Outils de résolution	16
2 Introduction à la théorie des jeux	21
2.1 Un exemple	21
2.2 Généralités	22
2.3 Le concept d'équilibre de Nash	23
2.4 Les jeux différentiels	25
3 La théorie des jeux en champ moyen	27
3.1 L'idée de champ moyen	27
3.2 Les équations de la théorie des jeux en champ moyen	29
3.3 Formulation dans différents cas	30
4 Résultats mathématiques	33
4.1 Une solution exacte	33
4.2 Limite d'un horizon infini	34
4.3 Lien avec le contrôle optimal	36
5 Applications	37
5.1 Applications en économie	37
5.2 Applications en finance	39
5.3 Applications aux phénomènes sociaux et en ingénierie	40
II Un modèle de séminaire	42
6 Présentation	43

7	Autour de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman	46
7.1	La méthode des caractéristiques	46
7.2	La transformation de Cole-Hopf	49
7.3	Résolution du problème de premier passage	50
8	Autour de l'équation de Kolmogorov	52
8.1	Solution stationnaire	52
8.2	Hermitisation de l'opérateur de Fokker-Planck	53
8.3	Résolution de l'équation de Fokker-Planck	53
9	Résolution du problème auto-cohérent	54
9.1	Cas général	55
9.2	"Diagramme de phase"	55
9.3	Un régime limite	57
9.4	Conclusion	58
III	Un modèle de population avec effet de groupe ("herding")	78
10	Présentation du modèle	79
11	L'équation de Schrödinger non linéaire	81
11.1	L'équation NLS dans le cadre des condensats de Bose-Einstein	81
11.2	Action et lois de conservation	83
11.3	Solitons et méthode de diffusion inverse	83
11.4	Approximation variationnelle	84
11.5	Solutions implosives	84
12	Lien entre le modèle de population et l'équation NLS	85
13	Applications	86
13.1	Formalisme quantique et relations à la Ehrenfest	86
13.2	Solution stationnaire	88
13.3	Formulation variationnelle	89
14	Résolution du problème de dynamique de population	92

14.1	Mouvement du centre de masse	93
14.2	Evolution de la variance	94
14.3	Vue d'ensemble	97
14.4	Conclusion et perspectives	97
Conclusion		104
A Dérivation de l'équation de Kolmogorov		108
B Dérivation de $\rho(x_0, T)$ dans la limite $\sigma^2 \rightarrow 0$		110
C Approximation variationnelle		112
D Condition finale pour Σ^2		114
E Approximation de Thomas-Fermi		115
F Approximation numérique		117
Références		118

Introduction

Cette thèse porte sur la théorie des jeux en champ moyen, qui fut introduite en 2006, indépendamment, par Lasry et Lions d'une part [42, 43], et par Huang, Malhamé et Caines d'autre part [34]. L'idée de base de cette théorie, inspirée par la physique statistique, est que, lorsque le nombre de constituants d'un système devient vraiment grand, sa complexité effective finit par diminuer, du fait de la "moyennisation" des interactions, et si bien sûr l'on s'intéresse aux grandeurs macroscopiques, c'est-à-dire qui concernent la globalité du système. Les systèmes dont on parle, pourraient être les jeux tels qu'on les entend au sens ordinaire, dans la limite d'un très grand nombre de joueurs, mais la dénomination historique et plaisante "théorie des jeux" recouvre en fait tous les problèmes où des agents en interaction doivent choisir une stratégie pour minimiser un certain "coût" (ou maximiser un gain). La théorie des jeux en champ moyen a donc des applications naturelles dans des domaines aussi variés que la finance, l'économie et les phénomènes sociaux (cf. section 5).

L'idée de champ moyen, i.e. le fait que dans la limite d'un grand nombre d'agents tout se passe comme si un agent donné ressentait une interaction moyenne, déterminée a posteriori de manière auto-cohérente, est présentée dès les début de la physique statistique à la fin du XIXe siècle/début du XXe siècle par Pierre Curie et Pierre Weiss pour expliquer certains phénomènes d'aimantation [58]. En économie, elle est présente de manière implicite par le fait que les agents économiques interagissent uniquement par le prix, qui est déterminé dans un second temps par l'équilibre entre l'offre et la demande. Par ailleurs Aumann en 1964 introduit en précurseur un concept clé de la théorie des jeux en champ moyen, qui est l'idée que, "de loin", un marché avec un grand nombre d'agents peut se représenter par un continuum, de la même manière qu'un fluide est vu comme un seul objet spatialement étendu, et non comme la juxtaposition de chacun de ses atomes [3]. Cependant ce n'est qu'à partir des articles cités au paragraphe précédent, que l'on dispose d'un formalisme rigoureux et général qui permette de traiter les problèmes d'optimisation en question. Depuis lors de nombreuses possibilités se sont ouvertes, et l'on assiste à une croissance importante du nombre de publications sur le sujet.

Il faut aussi expliquer, dans cette introduction, pourquoi cette thèse s'est déroulée dans un laboratoire de physique théorique plutôt que dans un laboratoire d'économie/mathématiques (appliquées), au vu de ce qui précède. En effet, il est vrai que le concept de champ moyen est une technique bien connue en physique statistique, ce qui en soi légitime une approche faite par des physiciens. Cependant il existe une raison plus profonde : on observe depuis le milieu des années 90 une tendance, peu connue du grand public, à la création de nouveaux domaines à l'interface entre la physique statistique et plusieurs disciplines telles que la bio-physique, l'écono-physique et les sciences des systèmes complexes (réseaux, information, approche statistique). La motivation principale de ces physiciens est d'appliquer les méthodes employées en physique statistique, qui ont si bien marché au cours du XXe siècle, à des domaines différents de la physique traditionnelle. Ces méthodes ont pour but la compréhension des propriétés macroscopiques de la matière, à partir de ses fondements microscopiques et d'une approche probabiliste. Bien sûr il ne s'agit pas d'une simple transposition et de nombreux défis restent à relever pour adapter ces méthodes, ce qui, idéalement, devrait s'inscrire dans la continuité de la littérature existante. L'approche du physicien se distingue alors des façons de faire

traditionnelles dans ces différentes disciplines par sa façon d'aborder le problème, en terme d'équilibre dans l'utilisation des données expérimentales, de l'utilisation de modèles stylisés, de simulations, de résultats exacts et de méthodes d'approximation.

Pour la rédaction de cette thèse, le langage officiel, c'est-à-dire le français a été choisi, notamment parce que les articles publiés ont été écrits en anglais. On obtient ainsi un bon compromis. Le manuscrit sera divisé en trois parties. La première, centrée sur le formalisme mathématique, introduira pas à pas la théorie des jeux en champ moyen, de manière heuristique. Il ne faut donc pas s'attendre dans ce chapitre à de la rigueur mathématique mais plutôt à une présentation intuitive de résultats techniques. Ce chapitre se terminera par un tour d'horizon des principaux domaines d'application et la présentation d'un exemple détaillé qui met bien en lumière le formalisme de la théorie des jeux en champ moyen. Le second chapitre sera consacré à l'étude d'un problème simple dont le but est de déterminer l'heure de début d'un séminaire sachant que les participants doivent s'attendre les uns les autres et qu'ils n'aiment pas patienter dans la salle. La simplicité de ce modèle vient notamment du fait que le champ moyen est ici un simple nombre, le temps effectif de début du séminaire. L'intérêt de cette partie est d'obtenir une intuition sur le comportement des systèmes de type théorie des jeux en champ moyen, grâce à des résultats exacte et la dérivation de formules simplifiées dans des cas limites. Enfin le dernier chapitre traitera d'un problème plus complexe, mais toujours stylisé, modélisant des problèmes de population avec des effets de groupe ("herding" en anglais). Ici le champ moyen sera un véritable champ, c'est-à-dire une fonction de l'espace et du temps. Grâce à une analogie avec l'équation de Schrödinger non linéaire, on obtiendra une solution exacte dans l'état stationnaire et l'on développera une méthode d'approximation efficace dans le cas dynamique, ce qui nous permettra d'avoir une compréhension claire de l'évolution du problème. En conclusion, nous récapitulerons les résultats importants en évaluant leur portée et nous envisagerons les perspectives de travaux futurs. Quelques annexes techniques viendront terminer le manuscrit avec notamment une présentation des méthodes numériques employées et la présentation de quelques résultats correspondant au problème de population de la troisième partie mais avec des interactions répulsives.

Première partie

La théorie des Jeux en Champ Moyen

Sommaire

1	Contrôle optimal	13
1.1	Un exemple	14
1.2	Le cadre mathématique	15
1.3	Outils de résolution	16
1.3.1	Les équations d'Euler	16
1.3.2	Un problème quadratique	17
1.3.3	Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman	18
2	Introduction à la théorie des jeux	21
2.1	Un exemple	21
2.2	Généralités	22
2.3	Le concept d'équilibre de Nash	23
2.4	Les jeux différentiels	25
3	La théorie des jeux en champ moyen	27
3.1	L'idée de champ moyen	27
3.2	Les équations de la théorie des jeux en champ moyen	29
3.3	Formulation dans différents cas	30
3.3.1	Contrôle quadratique	31
3.3.2	Cas ergodique	31
3.3.3	Cas discret en temps et en espace	32
4	Résultats mathématiques	33
4.1	Une solution exacte	33
4.2	Limite d'un horizon infini	34
4.3	Lien avec le contrôle optimal	36
5	Applications	37
5.1	Applications en économie	37
5.2	Applications en finance	39
5.3	Applications aux phénomènes sociaux et en ingénierie	40

La théorie des jeux en champ moyen ("Mean Field Games" en anglais et MFG par la suite) traite des problèmes d'optimisation stratégique à très grand nombre d'agents. Par "optimisation stratégique", on entend les situations où un agent donné tente d'optimiser un certain critère dont la valeur dépend des stratégies qu'ont choisi les autres agents. Ainsi les MFG appartiennent au domaine plus général de la Théorie des Jeux, qui elle-même a de forts liens avec les questions d'optimisation.

Des problèmes de théorie des jeux avec un grand nombre d'agents apparaissent naturellement dans les questions socio-économiques [49]. En effet, une approche fréquemment utilisée en micro-économie consiste à utiliser une fonction d'utilité pour représenter les préférences des consommateurs. Le problème du consommateur consiste alors à choisir ses dépenses pour maximiser sa fonction d'utilité avec un budget donné. Du point de vue des entreprises, on peut considérer de manière analogue que celles-ci ont pour programme de maximiser leur fonction de profit en jouant sur les facteurs de production, c'est à dire les éléments qui sont nécessaires à la production des biens (capital, travail,...). Dans les deux exemples précédents, les prix sont considérés comme donnés et c'est justement l'équilibre entre l'offre et la demande qui permet de déterminer la valeur exacte du prix à l'équilibre sur la marché. Mais il existe des situations plus stratégiques où l'on doit prendre en compte les actions de chacun des participants dans la détermination du comportement optimal, comme dans le cas fameux du duopole de Cournot.¹

Typiquement, la complexité de ce type de problème augmente très rapidement avec le nombre d'agents, puisque l'on se retrouve avec un nombre d'équations non linéaires proportionnel au nombre d'agents (cf. sous-section 2.4). Cependant lorsque l'on considère un grand nombre d'agents identiques, uniquement sensibles à la densité des autres agents (et non au comportement individuel de chacun d'eux), on peut se servir de cette complexité pour "moyenner" les interactions, dans l'esprit de la « loi des grands nombres », et simplifier le problème. De plus, on renonce à décrire le comportement de chacun des agents et l'on s'intéresse simplement à leur distribution, déterministe quand le nombre d'agent est grand, et qui forme un continuum (en chaque point de l'espace il y a un nombre d'agents suffisant pour définir une densité).

Dans cette section, on introduira pas à pas les outils nécessaires à l'exposé de la théorie des jeux en champ moyen : contrôle optimal, théorie des jeux, idée de champ moyen. Puis, on dérivera de façon heuristique les équations fondamentales. Le chapitre se terminera par la présentation de quelques résultats mathématiques, qui permettront d'avoir une meilleure vision du problème. Enfin, de manière plus concrète, on essaiera de donner un aperçu des principales applications qui existent à ce jour.

1 Contrôle optimal

Le contrôle optimal (\simeq 1950) est la branche des mathématiques qui étudie les systèmes dynamiques dont l'état peut être modifié par un contrôle et grâce auquel on veut faire suivre au système une trajectoire optimale [6]. On peut dire que c'est le dernier avatar d'un domaine qui s'appelait le Calcul des Variations et qui remonte au XVIIe

1. Il s'agit d'un problème économique où deux entreprises se font une concurrence sur le niveau de production. Chaque entreprise cherche à maximiser son profit sachant que le niveau des prix dépend de la production totale des deux entreprises [49].

siècle avec le principe de Fermat.

1.1 Un exemple

Afin de poser le cadre, on commence par introduire certains concepts sur un exemple emprunté de [10]. On considère donc un bras articulé, représenté figure 1 et dont la position est repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. Ce bras est soumis d'une part à son poids et d'autre part à un couple² u que l'utilisateur peut choisir librement dans un certain intervalle de valeurs. On dit que u est le *contrôle* du système et l'ensemble des contrôles possibles s'appelle l'ensemble des contrôles admissibles.

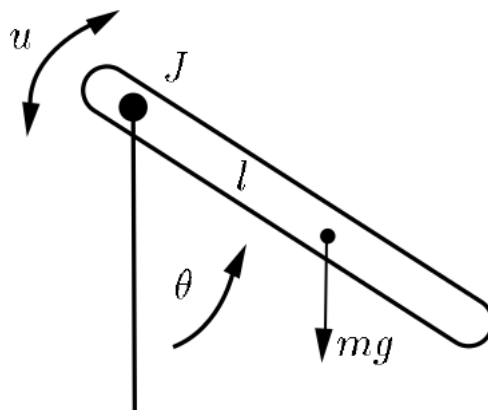


FIGURE 1 – Bras robotisé

D'après les principes de la mécanique, la dynamique du bras est régie par l'équation :

$$J\ddot{\theta} + mgl \sin \theta(t) = u(t), \quad (\text{I.1})$$

où J , m , g et l sont des constantes (J est le moment d'inertie, m la masse, g l'accélération de la gravité et l la longueur du bras).

Lorsque le contrôle $u(t)$ est fixé, l'angle $\theta(t)$ est donc complètement déterminé si l'on se donne deux conditions initiales θ_0 et $\dot{\theta}_0$. Ainsi on préfère réécrire l'équation (I.1) sous la forme d'une équation du premier ordre en introduisant une nouvelle variable ω :

$$\dot{\theta} = \omega \quad (\text{I.2})$$

$$\dot{\omega} = u/J - (mgl/J) \sin \theta. \quad (\text{I.3})$$

L'état du système est alors défini par la donnée de (θ, ω) , et on appelle *trajectoire* le triplet $(\theta(t), \omega(t), u(t))$. Il se pose alors plusieurs questions. Le problème de la *commandabilité* est de savoir s'il existe un contrôle $u(t)$ qui permette d'amener le système de l'état initial (θ_i, ω_i) à l'état final (θ_f, ω_f) , ou à un ensemble d'états finaux, appelé *cible*. Dans le cas où le système est commandable, il reste à déterminer, parmi les contrôles possibles, quel est celui qui minimise un certain *coût* (ou maximise un certain gain). Typiquement, ce peut être minimiser le temps mis pour passer de l'état initial à l'état final, ou minimiser l'énergie dépensée, . . . Enfin, étant donnée une trajectoire de

2. Un couple est à un objet en rotation ce qu'une force est à un objet en translation.

référence $(\theta_r(t), \omega_r(t), u_r(t))$, il arrive souvent que l'on veuille ramener le système vers cette trajectoire par des termes de la forme $\theta - \theta_r(t)$ et $\omega - \omega_r(t)$ (problème de "tracking"). Plus généralement lorsque le contrôle est une fonction de l'état du système, on parle de contrôle par *rétroaction* ("feedback").

1.2 Le cadre mathématique

Après avoir introduit un exemple pour fixer les idées, on s'intéresse à la formulation de problèmes de contrôle optimal dans un cadre plus général, d'abord dans un monde déterministe puis dans un environnement stochastique (i.e., soumis à des perturbations aléatoires).

Dans cette sous-section :

- n désigne un entier ≥ 1
- $L, \sigma : (x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions de deux variables à valeurs réelles
- $c_T : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles

Cas déterministe On considère donc un système spécifié par son état $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et évoluant selon la dynamique :

$$\dot{x} = f(x(t), \alpha(t)) \quad (\text{I.4})$$

où $\alpha(t)$ est le contrôle et où f est une fonction donnée. Un problème de contrôle optimal consiste alors à minimiser la fonction de coût suivante³ :

$$J[\alpha(\cdot)] = \int_0^T L(x_s, \alpha_s) ds + c_T(x_T), \quad (\text{I.5})$$

sachant que l'agent est supposé partir de la position x_0 à $t = 0$ et que son état x_t au cours du temps vérifie (I.4). L'horizon $T > 0$ est la durée sur laquelle l'agent optimise son *coût instantané* ("running cost") L , et la fonction c_T est le *coût terminal*. La fonction de coût J est une fonctionnelle du contrôle $\alpha(\cdot)$, qui lui-même est une fonction du temps. La minimisation se fait dans un certain espace des contrôles dits contrôles *admissibles*.

Il est courant aussi d'introduire une préférence pour le présent $\rho > 0$, notamment dans les problèmes économiques, auquel cas la fonction de coût devient :

$$J[\alpha(\cdot)] = \int_0^T e^{-\rho s} L(x_s, \alpha_s) ds + c_T(x_T),$$

ce qui signifie que l'on donne plus de poids aux temps courts $0 \leq t \leq \frac{1}{\rho} \ll T$.

Cas stochastique Dans le cas où l'on souhaite prendre en compte le caractère aléatoire du problème, on considère une dynamique stochastique :

$$dX_t = f(X_t, \alpha_t) dt + \sigma(X_t, \alpha_t) dW_t, \quad (\text{I.6})$$

3. Pour éviter l'accumulation de parenthèses $x(t)$ sera parfois noté x_t .

où W_t est un mouvement brownien, et où la volatilité σ peut dépendre de l'état et du contrôle à l'instant t . Le coût est alors défini comme une valeur moyenne sur le bruit, c'est-à-dire que l'on cherche à minimiser :

$$J[\alpha(\cdot)] = \mathbb{E} \left[\int_0^T L(X_s, \alpha_s) ds + c_T(X_T) \right], \quad (\text{I.7})$$

sachant que l'agent part de x_0 à l'instant $t = 0$.

1.3 Outils de résolution

Il existe principalement deux méthodes pour aborder ce type de problème : l'une aboutit aux équations d'Euler [2], et l'autre à une équation aux dérivées partielles, dite d'Hamilton-Jacobi-Bellman [57]. La première est basée sur les variations infinitésimales de la fonction de coût autour de la solution minimale, et donc, est une approche locale, tandis que la seconde passe par la résolution d'une famille de problèmes, au sein de laquelle le problème initial n'est qu'un élément particulier. Toutes deux ont leurs avantages et leurs inconvénients, et ont fait l'objet de nombreuses généralisations depuis leur invention au XVIIIe siècle.

1.3.1 Les équations d'Euler

Considérons le problème de contrôle optimal résumé par les équations (I.4) et (I.5). L'équation d'état (I.4) peut se voir comme une contrainte entre les deux variables dépendantes $x(\cdot)$ et $\alpha(\cdot)$. Pour rendre les variables indépendantes, on introduit alors le multiplicateur de Lagrange $p(t)$ et le coût modifié :

$$J[x(\cdot), \alpha(\cdot), p(\cdot)] = \int_0^T L(x_s, \alpha_s) ds + c_T(x_T) + \int_0^T p_s (-\dot{x} + f(x_s, \alpha_s)) ds.$$

Ecrivons l'expression de la variation de la fonction de coût $\delta J \equiv J[x(\cdot), \alpha^*(\cdot), p^*(\cdot)] - J[x^*(\cdot), \alpha^*(\cdot), p^*(\cdot)]$ lorsque la position $x(\cdot)$ s'éloigne légèrement de la position optimale $x^*(\cdot)$, tandis que $\alpha(\cdot)$ et $p(\cdot)$ sont fixés à leur valeur optimale $\alpha^*(\cdot)$ et $p^*(\cdot)$. Ainsi posant $\delta x_t = x_t - x_t^*$, avec $\delta x_{t=0} = 0$, on a :

$$\delta J = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x_s, \alpha_s^*) \delta x_s - p_s^* \delta \dot{x}_s + p_s^* \frac{\partial f}{\partial x}(x_s, \alpha_s^*) \delta x_s \right) ds + \left. \frac{dc_T}{dx} \right|_{x=x_T} \delta x_T,$$

et en intégrant par partie, on obtient,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x_s, \alpha_s^*) + \dot{p}_s^* + p_s^* \frac{\partial f}{\partial x}(x_s, \alpha_s^*) \right) \delta x_s ds + \left(p_T^* + \left. \frac{dc_T}{dx} \right|_{x=x_T} \right) \delta x_T.$$

Comme la fonction de coût J est extrême en $(x^*(\cdot), \alpha^*(\cdot), p^*(\cdot))$, on doit avoir $\delta J = 0$, si bien que les conditions d'optimalité s'écrivent (en omettant maintenant les symboles "*") :

$$\dot{p}_t = -\frac{\partial L}{\partial x}(x_t, \alpha_t) - p_t \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, \alpha_t), \quad \forall t \in [0; T] \quad (\text{I.8})$$

$$p_T = -\left. \frac{dc_T}{dx} \right|_{x_T}. \quad (\text{I.9})$$

De même, la variation de la fonction de coût J par rapport à $\alpha(\cdot)$ donne la relation :

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x_t, \alpha_t) + p_t \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_t, \alpha_t) = 0, \quad \forall t \in [0; T]. \quad (\text{I.10})$$

Enfin la variation de J avec $p(\cdot)$ redonne l'équation d'état (I.4).

Finalement, les équations (I.4), (I.8) et (I.10) forment un système qui permet de déterminer sans ambiguïté la trajectoire optimale.

1.3.2 Un problème quadratique

Afin de rendre les choses plus concrètes, considérons en particulier le problème à une dimension ($x \in \mathbb{R}$) donné par la dynamique :

$$\dot{x} = \alpha, \quad x(0) = x_0,$$

et une fonction de coût où le contrôle et la position interviennent de manière quadratique, tandis que le coût terminal est linéaire :

$$J[\alpha(\cdot)] = \int_0^T \frac{1}{2} \mu \alpha_t^2 + \frac{1}{2} k x_t^2 dt - \gamma x_T.$$

Dans ce cas les équations (I.4), (I.10) et (I.8) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p} = -kx \\ p(T) = \gamma \\ p = -\mu\alpha \end{cases}.$$

Au final, il s'agit donc de résoudre :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{k}{\mu} x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(T) = -\gamma/\mu \end{cases}. \quad (\text{I.11})$$

Les solutions de l'équation différentielle (I.11) sont de la forme :

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + Be^{-(T-t)/\tau},$$

où apparaît le temps caractéristique $\tau = \sqrt{\frac{\mu}{k}}$ et où les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites. On trouve :

$$\begin{cases} A = \frac{x_0 + e^{-T/\tau} \gamma \tau / \mu}{1 + e^{-2T/\tau}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} x_0 \\ B = \frac{x_0 e^{-T/\tau} - \gamma \tau / \mu}{1 + e^{-2T/\tau}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\gamma \tau}{\mu} \end{cases}.$$

Ainsi dans la limite des horizons longs, le système rejoint exponentiellement vite la position optimale $x = 0$ dans un temps τ , y reste la majeure partie du temps, puis s'adapte au coût final avec le même temps caractéristique.

1.3.3 Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman

On aborde maintenant la seconde approche, qui a l'avantage de pouvoir aisément se généraliser au cas stochastique. Pour faciliter la lecture, on commence d'abord par le cas déterministe.

Cas déterministe Revenons à un problème de contrôle optimal résumé par les équations (I.4) et (I.5). L'idée au départ du formalisme de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB dans la suite), est de considérer le problème à résoudre comme un cas particulier au sein d'une classe de problèmes. Plus précisément on définit pour $0 \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction valeur $u(x_0, t_0)$ comme le coût optimal pour un agent qui partirait de x_0 à l'instant t_0 :

$$u(x_0, t_0) = \inf_{\alpha(\cdot)} J[\alpha(\cdot)] \mid x_{t_0} = x_0,$$

où l'infimum est pris sur tous les contrôles admissibles. Lorsque $t = T$, le coût optimal en x_0 est simplement le coût final en x_0 si bien que :

$$u(x_0, T) = c_T(x_0) .$$

Dérivons maintenant l'expression de l'équation de HJB. L'ingrédient principal sur lequel repose cette équation est le principe dit de la "*programmation dynamique*" de Bellman. Il s'énonce de la manière suivante. Cherchons à calculer le coût optimal $u(x_0, t_0)$ et supposons qu'un agent partant de la position x_0 à l'instant t_0 commence à se déplacer avec une vitesse v pendant un petit temps dt ; cela va lui coûter $L(x_0, v) dt$, d'après la forme de la fonction de coût (I.5). Il va alors se retrouver à la position $x + v dt$ à l'instant $t_0 + dt$. A partir de ce moment, le coût dû à la trajectoire qu'il reste à parcourir est exactement $u(x_0 + v dt, t_0 + dt)$, puisqu'il doit nécessairement suivre une trajectoire optimale pour espérer que le coût en partant de (x_0, t_0) soit lui-même optimal. Pour obtenir la fonction valeur $u(x_0, t_0)$, il faut finalement minimiser la somme des coûts par rapport à la vitesse v et l'on a donc :

$$u(x_0, t_0) = \inf_v [L(x_0, v) + u(x_0 + v dt, t_0 + dt)] .$$

L'intérêt de cette relation est qu'elle permet de calculer $u(x, t)$ récursivement. Dans un langage géométrique, cette dernière relation signifie que si le chemin optimal du point A au point B passe par le point C, alors le sous-chemin de C à B doit être optimal. Grâce à un développement de Taylor, on obtient alors :

$$u(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + dt \left(\partial_t u(x_0, t_0) + \min_v [L(x_0, v) + v \cdot \nabla_x u(x_0, t_0)] \right) .$$

Soit, en appelant (x, t) le point d'espace-temps générique, au lieu de (x_0, t_0) :

$$\partial_t u(x, t) + \inf_v [L(x, v) + v \cdot \nabla_x u(x, t)] = 0 . \quad (\text{I.12})$$

Enfin, si l'on introduit le Hamiltonien (qui est la "*transformée de Legendre*"⁴ de L) :

$$H(x, p) = \inf_v [v \cdot p + L(x, v)] ,$$

4. En fait d'habitude la transformée de Legendre est définie par un sup.

on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\partial_t u + H(x, \nabla_x u) = 0 . \quad (\text{I.13})$$

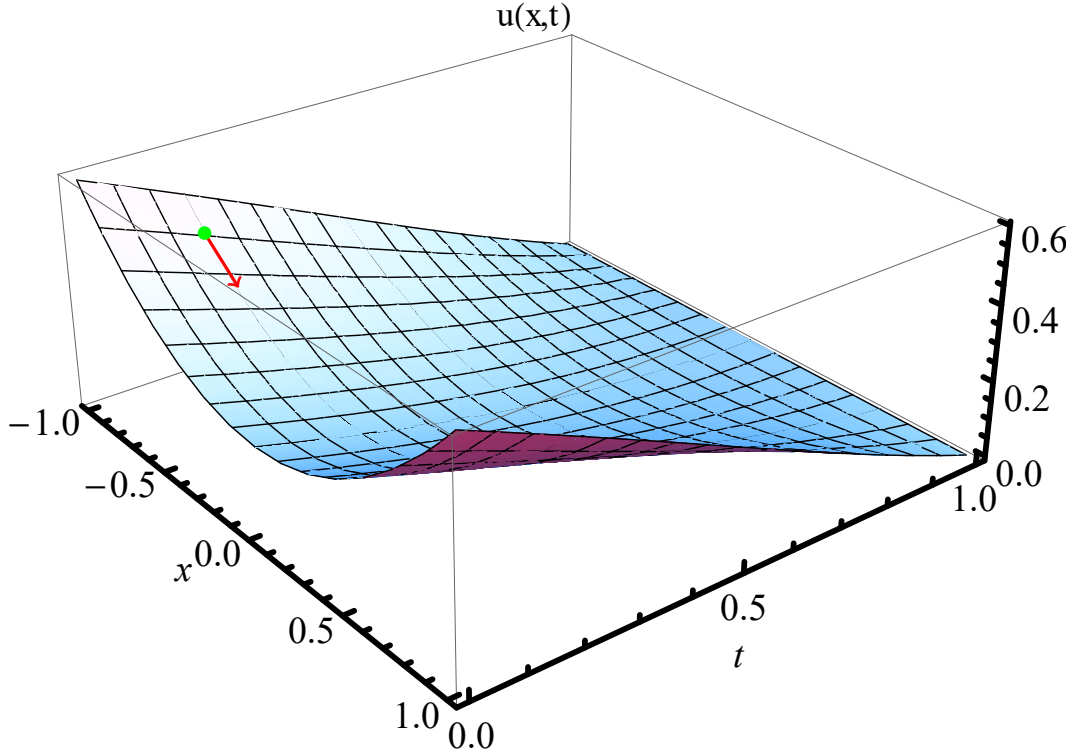


FIGURE 2 – Représentation graphique de la solution de l'équation de HJB : $\partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u = -\frac{1}{2} x^2$, avec $u(x, 1) = 0$. La vitesse optimale en un point quelconque, par exemple le point $(x=-0.9, t=0.1)$ représenté en vert sur la figure, est dans ce cas l'opposé du gradient de la fonction valeur $-\nabla u$.

Cette équation aux dérivées partielles doit être résolue à rebours ("backward") à partir de la condition finale $u(x, T) = c_T(x)$.

De plus, d'après les propriétés de la transformation de Legendre, la vitesse optimale dans (I.12) est donnée par :

$$v^*(x, t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla_x u(x, t)) ,$$

ou de façon plus pragmatique par la relation implicite :

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, v^*) + \nabla_x u(x, t) = 0 .$$

Finalement, si l'on suppose que l'on sait résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi (I.13), le contrôle optimal en un point de la trajectoire x_t à l'instant t est donc donné par :

$$\alpha_t = v^*(x_t, t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x_t, \nabla_x u(x_t, t)) . \quad (\text{I.14})$$

Ainsi par exemple dans le cas d'un coût de la forme :

$$J[v(\cdot)] = \int_0^{T=1} \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2 \right),$$

l'équation de HJB s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u = -\frac{1}{2}x^2 \\ u(x, T=1) = 0, \end{array} \right\},$$

dont la solution est donnée par :

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}(T-t) - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{2(T-t)}}{1 + e^{2(T-t)}} \right) x^2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{2(T-t)}} \right),$$

représentée figure (2). D'après l'équation (I.14), le contrôle optimal en un point x quelconque, à l'instant t , est donné par :

$$v^* = -\partial_x u(x, t).$$

Remarque Le lien entre l'approche Hamilton-Jacobi-Bellman et l'approche d'Euler peut être mise en évidence par le fait que le système (I.4)-(I.10)-(I.8) se laisse réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \end{array} \right\},$$

où apparaît le hamiltonien $H(x, p)$ défini par :

$$H(x, p) = \inf_v (f(x, v) \cdot p + L(x, v)).$$

Cas stochastique Dans le cas d'une dynamique stochastique de la forme (I.6) par exemple, on définit similairement la fonction valeur :

$$u(x_0, t_0) = \inf_{\alpha(\cdot)} J[\alpha(\cdot)] \mid X_{t_0} = x_0,$$

où J est maintenant donnée par (I.7). Le principe de la programmation dynamique se généralise selon l'équation :

$$u(x_0, t_0) = \inf_v \mathbb{E} [L(x_0, v) + u(x_0 + dX_{t_0}, t_0 + dt)]. \quad (\text{I.15})$$

Maintenant, d'après le lemme d'Itô :

$$\mathbb{E} [u(x_0 + dX_{t_0}, t_0 + dt)] = u(x_0, t_0) + \partial_t u(x_0, t_0) dt + v \cdot \nabla_x u(x_0, t_0) dt + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u(x_0, t_0) dt,$$

si bien qu'en remplaçant dans (I.15) on obtient l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\partial_t u + H(x, \nabla_x u) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = 0.$$

Remarque Les équations d'Euler, sous leur forme moderne, constituent le théorème de Pontriaguine. Elles peuvent se généraliser à un contexte stochastique, de la même manière que l'équation de Hamilton-Jacobi est transformée en l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, mais il faut faire appel au concept d'équation différentielle stochastique rétrograde.

2 Introduction à la théorie des jeux

La théorie des jeux constitue une extension de l'approche mathématique des problèmes d'optimisation, aux cas où le coût qu'un agent cherche à minimiser (ou le gain qu'il cherche à maximiser) dépend des stratégies des autres joueurs [59]. La situation devient donc nettement plus compliquée conceptuellement, et il faut en fait redéfinir le concept même de solution.

2.1 Un exemple

Considérons pour commencer un exemple simple qui est censé modéliser une situation de compétition pour une ressource rare entre deux adversaires A_1 et A_2 . Chaque adversaire peut choisir entre deux stratégies que, de façon imagée, nous appellerons stratégie "colombe" et stratégie "faucon". La stratégie "colombe" correspond à une attitude conciliante et craintive tandis que la stratégie "faucon" correspond à une attitude hargneuse et agressive. Les gains pour les joueurs sont alors les suivants :

- Si les deux joueurs choisissent la stratégie "colombe", alors les deux adversaires se partagent la ressource à l'amiable, et chacun reçoit un gain égal à la moitié de la valeur de la ressource soit $V/2$.
- Si les deux joueurs choisissent la stratégie "faucon" alors, après un combat qui dilapide une valeur C de la valeur initiale V de la ressource, chacun repart avec la moitié de ce qu'il reste, soit un gain de $(V - C)/2$. On suppose $V > C$.
- Si un joueur choisit la stratégie "faucon" et l'autre la stratégie "colombe", alors le joueur qui a choisi la stratégie "faucon" effraie le joueur qui a choisi la stratégie "colombe", et remporte toute la ressource, soit un gain de V tandis que le gain de l'autre joueur est nul.

Ces gains peuvent se visualiser sous la forme d'un tableau :

$A_2 \backslash A_1$	Colombe	Faucon
Colombe	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$	$(V, 0)$
Faucon	$(0, V)$	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$

La question est alors de savoir quelle stratégie vont adopter les adversaires, sachant qu'ils veulent obtenir le gain maximal. Ici la réponse est simple puisque, quelle que soit la stratégie choisie par A_2 , la stratégie qui rapporte le plus à A_1 est la stratégie "faucon", et de même pour l'adversaire A_2 face aux différentes stratégies de A_1 . Ainsi les deux

joueurs choisissent la stratégie "faucon" même s'il en résulte, pour chacun d'eux, un gain moins élevé que s'ils avaient tous deux choisi la stratégie "colombe".

Bien sûr, l'exemple introductif ci-dessus était particulièrement simple car chaque joueur avait une stratégie *dominante*, c'est-à-dire telle que, quelle que soit la stratégie choisie par l'autre joueur, son coût est minimisé par *cette* stratégie. Pour un problème quelconque le concept de stratégie dominante permet dans certains cas de simplifier la situation mais ne permet pas, en général, de résoudre le problème entièrement, si certains joueurs n'en possèdent pas.

2.2 Généralités

L'exemple précédent était un cas particulier de jeu non coopératif sous forme normale. Il existe autant de types de jeux que l'imagination peut en inventer et que de problèmes d'optimisation stratégique, mais on peut les classer sous quelques critères principaux. En effet, étant donné un certain nombre N d'agents on peut distinguer entre :

- **Jeux coopératifs et non coopératifs** Dans les jeux non coopératifs, chaque agent a le choix d'une stratégie qui lui permet de maximiser son gain en fonction des stratégies des autres joueurs. Chacun raisonne de manière égoïste et un agent ne peut jamais supposer que les autres agents seraient prêts à coopérer pour le bien commun. En revanche dans les jeux coopératifs, des groupes d'agents peuvent former des coalitions, et choisir ensemble un panel de stratégies dans le but d'optimiser un gain commun. Ce type de jeu est applicable uniquement quand certains mécanismes, sociaux par exemple, permettent de faire respecter les règles de la coalition, par la menace de sanctions. Dans la suite, nous nous concentrerons donc sur les jeux non coopératifs. Typiquement un jeu non coopératif se formalise de la manière suivante :
 - Chaque agent $i, i = 1 \dots N$, dispose d'un ensemble \mathcal{S}_i de stratégies, au sein duquel chaque joueur fait son choix.
 - Une fonction de gain u_i qui représente les préférences d'un agent i , étant donné les stratégies (s_1, \dots, s_N) choisies par joueurs :

$$u_i : \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(s_1, \dots, s_N) \rightarrow u_i(s_1, \dots, s_N) .$$

- **Jeux simultanés et jeux séquentiels** Dans un jeu simultané chacun des joueurs détermine au début de la partie sa stratégie, une fois pour toute, sans avoir d'information sur ce que vont jouer les autres joueurs. Au contraire dans un jeu séquentiel, on spécifie le déroulement exact du jeu. Chaque joueur considère l'ensemble des actions disponibles quand c'est à lui de jouer. Typiquement un jeu simultané se représente sous forme d'un tableau (dit forme *normale*), tel que dans l'exemple précédent, tandis qu'un jeu séquentiel se représente naturellement sous forme d'un arbre, où l'on indique à chaque nœud quel joueur doit jouer, et où les différentes branches représentent les différentes stratégies possibles.
- **Nature de l'information** Un élément important est aussi l'information dont dispose un joueur quand il doit prendre sa décision. En effet dans de nombreux cas (poker, compétition économique,...) un joueur donné ne dispose que d'une

information limitée. On distingue les jeux à information parfaite, où les joueurs sont au courant de toutes les actions passées des autres joueurs, et les jeux à information imparfaite, quand un joueur ignore certains choix qui ont été effectués avant le sien. Enfin un jeu est à information incomplète si un des joueurs au moins ne connaît pas parfaitement la structure du jeu.

- **Prise en compte de l'incertitude** Il se peut, de plus, que les actions prises par les joueurs le soient dans un environnement incertain, ou que les stratégies des autres joueurs ne soient pas déterministes, ou qu'ils soient incertains quand au comportement des autres joueurs.

2.3 Le concept d'équilibre de Nash

La question de la rationalité L'approche que nous avons défini précédemment suppose implicitement que les agents sont considérés comme rationnels : c'est-à-dire qu'ils suivent un certain programme de maximisation de leur gain sans considérations psychologiques. Elle implique aussi, que les individus sont capables de classer leur choix par ordre de préférence, et qu'ils sont capables de résoudre ces problèmes d'optimisation. Evidemment, la pertinence d'une telle hypothèse a été par le passé remise en question. En effet qu'en est-il des comportement altruistes ? Tous les agents économiques ont-ils la capacité de résoudre des problèmes d'optimisation complexes ? Certaines de ces questions peuvent être résolues en considérant une fonction d'utilité adéquate. Par exemple en ce qui concerne l'altruisme, on peut considérer qu'être altruiste apporte une certaine satisfaction à un agent, et l'incorporer dans sa fonction d'utilité. Enfin d'autres approches comme le concept de rationalité limitée ou les jeux évolutionnaires ont été développés à partir des années 70.

L'équilibre de Nash Quoi qu'il en soit, l'hypothèse de rationalité est pertinente dans un certain nombre de cas, ou bien constitue une bonne idéalisation de la réalité. Considérons le cas des jeux non coopératifs à information parfaite avec des agents rationnels :

- il y a N agents
- chaque agent $i, i = 1 \dots N$, peut choisir une stratégie $s_i \in \mathcal{S}_i$
- chaque agent a une fonction d'utilité $u_i : \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$

Dans l'hypothèse de rationalité il est alors naturel de considérer la fonction de meilleure réponse pour le joueur i , $R_i(s_{-i})$, qui à chaque combinaison donnée de stratégies des autres joueurs (notée⁵ s_{-i}), associe la stratégie qui maximise son gain :

$$R_i : \mathcal{S}_{-i} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est telle que :}$$

$$u_i(R_i(s_{-i}), s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in \mathcal{S}_i,$$

où $(R_i(s_{-i}), s_{-i})$ désigne la combinaison de stratégies où le joueur i joue $R_i(s_{-i})$ et les autres joueurs s_{-i} . Chaque joueur sait donc quelle stratégie jouer pour toute combinaison de stratégie des autres joueurs, mais sur quelles stratégies vont se décider les joueurs ? En fait cette question n'est pas encore définie clairement par les règles du jeu visiblement. Il faut donc donner un sens au problème et définir concrètement ce qu'on entend par solution pour des joueurs rationnels. Nash propose comme concept de solution que les

5. Explicitement, étant donné la liste de stratégie (s_1, \dots, s_N) , s_{-i} désigne la liste $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N)$

stratégies jouées par les joueurs soient les points fixes s_i^* des fonctions de meilleure réponse définies précédemment :

$$s_i^* = R_i(s_{-i}^*) \quad \text{pour tout } i = 1 \dots N,$$

c'est-à-dire que la solution postulée comme rationnelle est la combinaison de stratégies telle que la stratégie de chaque joueur est la meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs, et ce pour l'ensemble des joueurs. Evidemment cette solution correspond à une idéalisation mathématique car dans la vie réelle, il n'est pas évident de se convaincre que des joueurs, même très intelligents, vont effectuer un raisonnement si abstrait. Cependant, dans le cas de certains modèles de marchés financiers par exemple, il est possible de montrer que des agents non rationnels sont éliminés du marché [53].

Une autre façon de présenter ce concept est de dire qu'une combinaison (s_1^*, \dots, s_N^*) est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a d'intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie s_i^* , quand les autres joueurs restent sur le profil de stratégies s_{-i}^* , c'est à dire mathématiquement :

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p_i, p_{-i}^*), \quad \forall p_i.$$

Considérons, à titre d'exemple, le jeu donné par la matrice de gains suivante :

	<i>Clyde</i>		
<i>Bonnie</i>	Stratégie N	Stratégie D	
Stratégie N	(-1, +1)	(-10, 0)	
Stratégie D	(0, -10)	(-8, -8)	

On peut lire que :

- La meilleure réponse de Bonnie à la stratégie *N* de Clyde est *D*,
- La meilleure réponse de Bonnie à la stratégie *D* de Clyde est *D*,
- La meilleure réponse de Clyde à la stratégie *N* de Bonnie est *N*,
- La meilleure réponse de Clyde à la stratégie *D* de Clyde est *D*.

Remarque La stratégie *D* est donc une stratégie dominante pour Bonnie, tandis Clyde n'en possède pas.

Si l'on représente sur le tableau des gains la meilleure réponse de Bonnie par des rectangles, et la meilleure réponse de Clyde par des étoiles, on voit que la solution d'équilibre qui correspond aux combinaisons de stratégies qui sont « meilleure réponse » pour chacun des joueurs, est visualisée par les cases où les rectangles et les étoiles se recouvrent.

	Clyde		
Bonnie	Stratégie N	Stratégie D	
Stratégie N	×		
Stratégie D	□	⊠	

Les stratégies mixtes Cependant, tel quel, le concept d'équilibre de Nash souffre d'une sévère limitation : on peut facilement se convaincre que de nombreux jeux (voir par exemple le jeu au tableau 1) ne possèdent pas d'équilibre de Nash, si l'on considère que les joueurs choisissent une fois pour toute leur stratégie, comme au paragraphe précédent. On appelle une telle façon de procéder un jeu en *stratégies pures*. Au contraire on peut se dire que les joueurs ne vont pas se décider pour une stratégie donnée, mais pour un ensemble de stratégies qu'ils vont jouer avec une certaine probabilité. On a alors un jeu en *stratégies mixtes*.

	<i>Clyde</i>		
<i>Bonnie</i>		Stratégie 1	Stratégie 2
Stratégie 1		(-1, +1)	(-10, 0)
Stratégie 2		(0, -10)	(-11, -8)

TABLE 1 – Un jeu sans équilibre de Nash en stratégies pures

En 1951, Nash a montré que :

Tout jeu fini⁶ possède au moins un équilibre de Nash si les stratégies mixtes sont autorisées.

Ainsi, pour les jeux finis, la recherche de(s) équilibre(s) de Nash est un problème bien posé, c'est à dire possédant au moins une solution, ce qui est satisfaisant intellectuellement. Par contre la question de l'unicité de la solution dépend du problème considéré.

2.4 Les jeux différentiels

Les jeux différentiels sont des jeux où les stratégies des joueurs sont des fonctions du temps. Considérons par exemple le cas où l'état d'un joueur $i = 1 \dots N$, à l'instant t , est spécifié par un vecteur $X_t^i \in \mathbb{R}^n$, et où sa stratégie $v^i(\cdot)$ consiste à choisir à chaque instant à quelle vitesse se déplacer. On suppose de plus que le mouvement du joueur est bruité, et l'on introduit à cette fin un terme de mouvement brownien au déplacement :

$$dX_t^i = v_t^i dt + \sigma^i dW_t^i, \quad (\text{I.16})$$

où σ^i est la force du bruit et les W_t^i des bruits blancs Gaussiens indépendants.

Chaque joueur i , partant de sa position initiale $X_0^i = x_0^i$, cherche à minimiser, grâce à son action sur sa stratégie $v^i(\cdot)$, sa fonctionnelle de coût :

$$J^i[v^1(\cdot), \dots, v^N(\cdot)] = \mathbb{E} \left[\int_0^T L^i(X_\tau^i, v_\tau^i) + F^i(X_\tau^1, \dots, X_\tau^N) d\tau + c_T^i(X_T^1, \dots, X_T^N) \right], \quad (\text{I.17})$$

où la valeur moyenne porte sur l'ensemble des réalisations des mouvements browniens, et où l'on a choisi une forme particulière de la fonction de coût instantané afin de simplifier la suite de l'exposé.

6. i.e., avec un nombre fini N de joueurs qui possèdent un nombre fini de stratégies possibles.

Dans l'hypothèse de joueurs rationnels, on considère que la solution du problème est donné par l'équilibre de Nash (v^{1*}, \dots, v^{N*}) défini par :

$$J^i[v^{1*}, \dots, v^{N*}] \leq J^i[v^{1*}, \dots, v^i, \dots, v^{N*}], \quad \forall i = 1 \dots N \text{ et } \forall v^i .$$

C'est donc comme précédemment la combinaison de stratégies de laquelle aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement.

On définit alors pour chaque joueur i la fonction valeur de la manière suivante :

$$u^i(x^1, \dots, x^N, t) = \inf_{v^i(\cdot)} \mathbb{E} \left[\int_t^T L^i(X_\tau^i, v_\tau^i) + F^i(X_\tau^{1*}, \dots, X_\tau^i, \dots, X_\tau^{N*}) d\tau \right. \\ \left. + c_T^i(X_T^{1*}, \dots, X_T^i, \dots, X_T^{N*}) \right],$$

sachant que $X_t^i = x^i, \forall i$; c'est à dire que $u_i(x^1, \dots, x^N)$ est le coût optimal subi par le joueur i , si les autres joueurs jouent leur stratégie optimale également, vue comme une fonction des positions initiales. Pour chaque i , la fonction valeur vérifie l'équation aux dérivées partielles [43] :

$$\partial_t u^i + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_{x^j} u^i + \sum_{j \neq i} \partial_p H^j(x^j, \nabla_{x^j} u^j) \cdot \nabla_{x^j} u^i + H^i(x, \nabla_{x^i} u^i) = -F^i(x^1, \dots, x^N), \quad (\text{I.18})$$

avec la condition finale :

$$u^i(x^1, \dots, x^N, T) = c_T^i(x^1, \dots, x^N),$$

et où l'on a introduit le Hamiltonien :

$$H^i(x, p) = \inf_v [v \cdot p + L^i(x, v)] .$$

On obtient donc un système de N équations aux dérivées partielles non linéaires à résoudre. Dans l'hypothèse où l'on arrive à résoudre ce système, ce qui dans le cas général est un problème extrêmement ardu, même numériquement, les stratégies optimales sont données par :

$$v_t^i = \frac{\partial H^i}{\partial p}(X_t^i, \nabla_{x^i} u^i(X_t^1, \dots, X_t^N, t)).$$

La philosophie de la théorie des jeux en champ moyen est alors de tirer parti de certaines hypothèses, qui sont naturellement vérifiées dans certains problèmes, pour simplifier le système (I.18). Ces dernières sont :

- Un grand nombre d'agents identiques,
- Chaque agent individuellement a une influence négligeable sur la masse des agents,
- Des interactions moyennantes, qui font intervenir un grand nombre d'agents qu'on peut considérer comme décorrélés.

On explique dans la section suivante comment on se sert de ces hypothèses.

où l'on a introduit la valeur moyenne $\langle S_i \rangle \equiv m_i = m$, car pour un échantillon assez grand les effets de bords sont négligeables et le système est invariant par translation. Exprimons alors S_i comme une valeur moyenne et une fluctuation :

$$S_i = m_i + (S_i - m_i)$$

L'énergie du système se réécrit donc :

$$E(s_1, \dots, s_N) = J \sum_{\langle i,j \rangle} m_i m_j - J \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i m_j + s_j m_i) - J \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i - m_i)(s_j - m_j) . \quad (\text{I.21})$$

Par ailleurs si l'on suppose que les corrélations entre les spins sont assez faibles, le dernier terme est négligeable et l'expression de l'énergie (I.21) s'écrit approximativement :

$$E(s_1, \dots, s_N) = J \sum_{\langle i,j \rangle} m_i m_j - J \sum_i h_i^{moy} s_i,$$

où le champ moyen h_i^{moy} est défini par

$$h_i^{moy} = \sum_{j(i)} J m_j = \nu J m, \quad (\text{I.22})$$

la somme portant sur les ν plus proches voisins du site i .

Tout se passe donc comme si les spins étaient indépendants et soumis au champ magnétique effectif h_i^{moy} . La distribution d'un spin S_i est donc connue si l'on suppose m donnée :

$$P(s_i) = \mathcal{Z}' e^{-\beta E_i}, \quad (\text{I.23})$$

avec l'énergie donnée par $E_i = -h_i^{moy} s_i$ et \mathcal{Z}' une constante de normalisation. Soit en remplaçant par (I.22),

$$P(s_i) = \mathcal{Z}' e^{+\beta J s_i \nu m} .$$

Par ailleurs on peut calculer m de manière self-consistante, car par définition on a également :

$$m = \langle S_i \rangle = \frac{1}{2} P(1/2) - \frac{1}{2} P(-1/2) .$$

Finalement on obtient l'équation de champ moyen :

$$m = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\beta}{2} J \nu m \right) \quad \text{et} \quad M = \mu m . \quad (\text{I.24})$$

Graphiquement la solution de cette équation se trouve comme l'intersection dans le plan (y, m) de la courbe d'équation $y = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\beta}{2} J \nu m \right)$ et de la droite qui passe par l'origine $y = m$, ce qui est représenté figure 4. On voit immédiatement que pour certaines valeurs des paramètres, il y aura un unique point d'intersection en $m = 0$, tandis que pour d'autres on aura 3 points d'intersection : $-m_0, 0, m_0$, avec m_0 non nul. Ce modèle de champ moyen prédit donc, de manière intéressante, un phénomène de transition de phase.

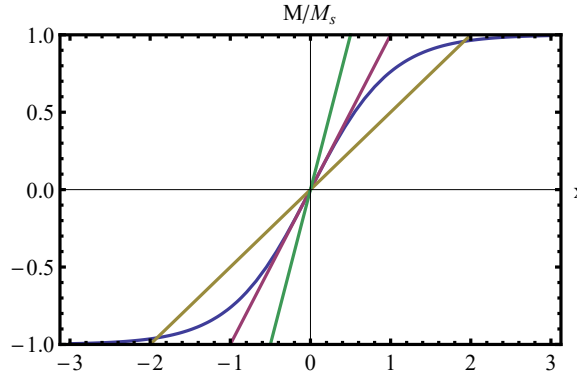


FIGURE 4 – Résolution graphique de l'équation de champ moyen (I.24). Il est plus judicieux de tracer M/M_s , en fonction de $x = \beta J \nu M / (2\mu)$, où $M_s = \mu/2$ est l'aimantation à saturation. Dans ce cas (I.24) s'écrit $th(x) = kx$ avec $k = 4/\beta J \nu$. En vert $k = 2$, en violet $k = 1$, et en marron $k = 0.5$.

3.2 Les équations de la théorie des jeux en champ moyen

Revenons maintenant dans le cadre de la théorie des jeux différentiels exposée à la sous-section 2.4. On suppose, de plus, que les agents sont tous identiques, c'est à dire que, dans la dynamique (I.16) et dans la fonction de coût (I.17) : pour tout $i = 1 \dots N$, $\sigma^i = \sigma$, $\mathcal{L}^i = \mathcal{L}$, $V^i = V$ et $c_T^i = c_T$. Enfin on suppose aussi que le potentiel V et le coût terminal c_T dépendent de la position des autres joueurs uniquement à travers la densité de joueurs $\tilde{m} = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - X_t^i)$, ce que l'on note : $V(X_\tau^1, \dots, X_\tau^N) = V[\tilde{m}](X_\tau^i)$ et $c_T(X_\tau^1, \dots, X_\tau^N) = c_T[\tilde{m}](X_\tau^i)$. La fonction de coût pour un joueur i quelconque s'écrit donc :

$$J^i[v^1(\cdot), \dots, v^N(\cdot)] = J[v^i(\cdot), \tilde{m}] = \mathbb{E} \left[\int_0^T L(X_\tau^i, v_\tau^i) - V[\tilde{m}](X_\tau^i) d\tau + c_T[\tilde{m}](X_\tau^i) \right], \quad (\text{I.25})$$

où comme précédemment la valeur moyenne porte sur toutes les réalisations des mouvements browniens et sachant que les agents partent à $t = 0$ de leur position initiale. Dans le cadre de l'approximation de champ moyen, on suppose que si le nombre d'agent est assez grand, on peut négliger les fluctuations de $\tilde{m}(x, t)$ dans la fonction de coût (I.25). Ainsi si l'on introduit la moyenne $m(x, t) = \langle \tilde{m}(x, t) \rangle$ de la densité sur toutes les réalisations du bruit, la fonction de coût J de l'agent i est bien approximée par :

$$J[v^i(\cdot), m] = \mathbb{E} \left[\int_0^T L(X_\tau^i, v_\tau^i) - V[m](X_\tau^i) d\tau + c_T[m](X_\tau^i) \right],$$

où maintenant l'espérance ne porte plus que sur le bruit auquel est soumis l'agent considéré.

Considérant alors la densité $m(x, t)$ comme fixée [12], on est ramené à un problème de contrôle optimal tel qu'exposé à la section 1. En conséquence on peut définir une fonction valeur :

$$u(x, t) = \inf_{v(\cdot)} J[v(\cdot), m],$$

qui vérifie une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\partial_t u + H(x, \nabla_x u) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = V[m](x, t),$$

accompagnée de la condition finale $u(x, T) = c_T[m](x)$, et où le potentiel V dépend, contrairement au cas du contrôle optimal, de la densité m . Le Hamiltonien H est toujours défini par :

$$H(x, p) = \inf_v [v \cdot p + L(x, v)] . \quad (\text{I.26})$$

Dans le même esprit que pour le ferromagnétisme, on détermine alors le champ moyen $m(x, t)$ par self-consistance. En effet on sait que chaque agent suit la dynamique stochastique :

$$dX_t^i = v_t^i dt + \sigma dW_t^i,$$

où v_t^i est maintenant défini par $v_t^i = v_t^{i*} = \frac{\partial H}{\partial p}(X_t^i, \nabla_x u(X_t^i, t))$. La théorie des processus stochastiques nous apprend ensuite que, la distribution initiale m_0 des agents étant donnée, leur densité va évoluer selon l'équation de Kolmogorov :

$$\partial_t m + \nabla(v m) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = 0 .$$

Ainsi si l'on rassemble les résultats obtenus jusqu'à présent on s'aperçoit que le problème est ramené à un système de deux équations aux dérivées partielles couplées dont l'une est forward et l'autre backward ; les inconnues ne sont plus les stratégies des joueurs pris individuellement mais le continuum formé par la densité $m(x, t)$ et la fonction valeur du système $u(x, t)$ [42, 43, 34] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + H(x, \nabla u) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = V[m](x, t) \\ u(x, T) = c_T[m](x) \\ \partial_t m + \nabla(v m) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = 0 \\ m(x, 0) = m_0(x) \end{array} \right. , \quad (\text{I.27})$$

où $H(x, p) = \inf_\alpha (L(x, \alpha) + p \cdot \alpha)$ et $v = v(x, t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla u)$.

La structure de ce système est clairement d'un type nouveau et difficile à appréhender. En effet les termes de couplage $V[m]$ et $v(x, t)$ empêchent de penser le problème localement, puisque ces derniers ne sont connus que lorsque le problème a été résolu dans sa globalité.

3.3 Formulation dans différents cas

Examinons maintenant quelques cas particuliers dans le but de se familiariser avec le système MFG (I.27).

3.3.1 Contrôle quadratique

On considère d'abord le cas où le coût individuel est de la forme :

$$J[v^i(\cdot), m] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\frac{1}{2} \mu (v_\tau^i)^2 - V[m](X_\tau^i) \right) d\tau + c_T[m](X_\tau^i) \right]. \quad (\text{I.28})$$

Dans ce cas le Hamiltonien (I.26) s'écrit :

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \mu \alpha^{*2} + p \alpha^*,$$

avec α^* déterminé par la condition d'optimalité :

$$\mu \alpha^* + p = 0,$$

si bien que :

$$H(x, p) = -\frac{1}{2} \frac{p^2}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{p}{\mu}.$$

Au final, dans le cas d'un contrôle quadratique, le système MFG (I.27) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2\mu} |\nabla u|^2 + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = V[m](x, t) \\ u(x, T) = c_T[m](x) \\ \partial_t m + \nabla(v m) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = 0 \\ m(x, 0) = m_0(x) \end{cases}, \quad (\text{I.29})$$

où

$$v = v(x, t) = -\frac{\nabla u}{\mu}. \quad (\text{I.30})$$

3.3.2 Cas ergodique

On se place ici dans le cas où la fonction de coût d'un agent prend la forme d'une moyenne temporelle sur les temps longs ⁷

$$J[v^i(\cdot), m] = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T L(X_\tau^i, v_\tau^i) - V[m](X_\tau^i) d\tau \right], \quad (\text{I.31})$$

où le potentiel $V[m]$ ne dépend pas explicitement du temps. C'est un problème d'optimisation légèrement différent de ceux que l'on a étudié jusqu'ici, mais historiquement c'est un des premiers exemples qui a été développé. Dans ce cas on peut montrer [42] que le coût ci-dessus ne dépend pas des positions initiales des agents. On cherche le contrôle optimal sous la forme d'une fonction de feedback indépendante du temps. On peut montrer que la solution est alors donnée par :

$$v^{*i}(t) = -\nabla u_e(X_t^i).$$

7. \liminf désigne la limite inférieure, qui coïncide avec la limite usuelle si la fonction considérée admet une limite.

où $u_e(x)$ est une fonction indépendante du temps, que nous appellerons fonction valeur ergodique, ainsi que par la densité indépendante du temps $m_e(x)$ et une constante λ , faisant partie des inconnues, qui vérifient le système, dit système ergodique :

$$\begin{cases} -\lambda + H(x, \nabla u_e) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_e = V[m_e](x) \\ \nabla(v_e m_e) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_e = 0 \\ v_e = -\nabla u_e \quad \text{et} \quad \int m_e(x) dx = 1 \end{cases}, \quad (\text{I.32})$$

et où λ doit être choisie la plus petite possible parmi les solutions du système.

Intuitivement [42], λ est la valeur du coût (I.31) pour le contrôle optimal $v^{*i}(\cdot)$:

$$\lambda = J[v^{*i}(\cdot), m_e].$$

3.3.3 Cas discret en temps et en espace

On s'intéresse ici, suivant une approche introduite par D.A. Gomes [27], à une formulation discrète en temps et en espace. Le cadre est donc constitué par un grand nombre d'agents rationnels identiques qui peuvent occuper un nombre fini $d \geq 1$ d'états et qui cherchent à optimiser un certain critère. Dans l'approximation de champ moyen, seule la fraction ρ_i^n des agents dans l'état $i, i = 1 \dots d$, à l'instant n est nécessaire pour décrire la dynamique du système. On considère que les agents, partant d'un état initial, cherchent à optimiser un certain coût instantané de transition de l'état i à l'état j au temps n , c_{ij}^n , qui peut dépendre des actions des agents et de leur répartition sur les états. Ils prennent également en compte un coût terminal c_i^N , où N représente la durée du processus d'optimisation. On appelle ρ_i^{ini} la répartition initiale ($n = 0$) des agents dans les différents états i . A chaque pas de temps, les agents dans l'état i choisissent une probabilité de transition vers les états j , P_{ij} , avec $\sum_j P_{ij} = 1$. Dans ce cas la distribution des agents va évoluer selon l'équation de "conservation du nombre d'agents" qui est l'analogie de l'équation de Kolmogorov :

$$\rho_j^{n+1} = \sum_i P_{ij} \rho_i^n.$$

De plus, on suppose qu'un agent dans l'état i_0 à l'instant initial cherche à minimiser, à travers le choix des probabilités de transition P_{ij}^n , un coût de la forme

$$J[P, \rho] = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} c_{i_n i_{n+1}}^n (P^n, \rho^n) \right],$$

où i_n représente une trajectoire au cours du temps, de probabilité $\prod_n P_{i_n i_{n+1}}$, et où la valeur moyenne porte sur toutes les trajectoires.

On montre alors que la solution MFG de ce problème est donné par le système :

$$\begin{cases} V_i^n = \sum_j c_{ij}(P^n, \rho^n) P_{ij}^n + V_j^{n+1} P_{ij}^n \\ V_i^N = c_i^N \\ \rho_i^{n+1} = \sum_i P_{ij} \rho_i^n \\ \rho_i^0 = \rho_i^{ini} \end{cases} \quad . \quad (\text{I.33})$$

4 Résultats mathématiques

La théorie des jeux en champ moyen ayant été développée initialement par des mathématiciens, il existe déjà une littérature assez riche sur les questions purement mathématiques. Ainsi l'énoncé des théorèmes de convergence du problème à N joueurs vers les équations MFG peut être trouvée dans les articles [44], [42], [43] dans le cas périodique. Les questions d'existence et d'unicité quant à elles sont traitées dans le cours de P.-L. Lions au collège de France [46], et sont résumées dans le cours de P. Cardaliaguet [12]. Une formulation probabiliste en terme d'équation différentielles stochastique rétrograde a été développée par R.Carmona [15]. Enfin, l'hypothèse assez contraignante que les mouvements browniens de chaque joueur sont indépendants peut être levée grâce à une approche en terme d'équation maîtresse [7, 13]. Concernant ces aspects mathématiques, il existe une revue assez complète de D.Gomes [28]. Je ne rentrerai pas dans le détail de ces questions qui dépassent le cadre de cette thèse, mais je me concentrerai dans le reste de cette section sur quelques points qui permettent d'acquérir de l'intuition sur le comportement du système MFG.

4.1 Une solution exacte

Il existe peu de solutions explicites des équations MFG, surtout dans le cas dynamique⁸. Dans le cas stationnaire, on peut citer Gomes [26] qui fait la revue de quelques cas exactement solubles. En particulier le cas résolu par M. Bardi [5] est intéressant car il fournit également la solution du problème à N joueurs et retrouve la solution du système MFG en faisant tendre N vers $+\infty$. Il considère des agents décrits par leur état $X_t^i \in \mathbb{R}$ et évoluant selon la dynamique stochastique :

$$dX_t^i = (AX_t^i - v_t^i)dt + \sigma dW_t^i,$$

ainsi qu'une fonction de coût de la forme :

$$J[v^i(\cdot), m] = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T \frac{1}{2} R(v_\tau^i)^2 + F[m](X_\tau^i) d\tau \right]$$

où le potentiel $F[m](x)$ s'écrit :

$$F[m](x) = q(x-h)^2 + \beta(x-h) \int (y-r)m(y) dy + \gamma \left(\int (y-r)m(y) dy \right)^2 + \eta \int (y-r)^2 m(y) dy .$$

8. Dans le cas linéaire-quadratique, il existe une reformulation en terme d'équation de Ricatti [8].

Il s'agit de la forme générale d'un potentiel $F(X^1, \dots, X^N)$, symétrique en les positions des agents, quadratique, dans la limite champ moyen. Dans le cas où $q = 1, \beta = -2b, \gamma = b^2$ et $r = h = \eta = 0$, le potentiel se réécrit :

$$F[m](x) = \left(x - b \int y m(y) dy \right)^2,$$

où apparaît la position moyenne $\int y m(y) dy$. On voit donc que dans cet exemple, ce type de potentiel traduit l'inclinaison des agents à imiter la "masse" des agents.

Le système ergodique à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} -\lambda + \frac{1}{2R} (\partial_x u)^2 + Ax \partial_x u - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = -F[m](x) \\ -\partial_x \left(\left(\frac{\partial_x u}{R} - Ax \right) m \right) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = 0 \\ \int m(x) dx = 1 \end{cases}.$$

Grâce à des ansatz gaussiens et quadratiques pour m et u , respectivement, on peut montrer que la solution est donnée par :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2s} + \frac{RAx^2}{2} \\ m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\nu R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s\nu R}\right) \end{cases}$$

où $s = (2R + R^2 A^2)^{-1/2}$, avec $R > 0$ et $\nu = \sigma^2/2$. λ est une certaine fonction de l'ensemble des paramètres du problème.

Le formalisme MFG permet donc de décrire, dans le cadre de ce problème d'optimisation sur des temps longs (ergodique), la formation d'une solution qui reflète l'équilibre entre les effets d'imitation et la dispersion due au bruit.

4.2 Limite d'un horizon infini

On se pose la question du comportement du système (I.27) lorsque l'horizon est grand ($T \rightarrow +\infty$), et que l'on est loin des conditions initiale et finale ($0 \ll t \ll T$). Intuitivement, dans le cas où le potentiel ne dépend pas explicitement du temps ($V[m](x, t) = V[m](x)$), on s'attend à ce que la solution tende vers un état stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps. C'est ce qui a été démontré par P. Cardaliaguet et coauteurs à travers le théorème suivant [14] :

Soit $(u(x, t), m(x, t))$ une solution du système MFG (I.27) alors, pour $0 \ll t \ll T$ on a :

$$(u(x, t), m(x, t)) \simeq (u_e(x) + \lambda(T - t) + \text{Cte}, m_e(x))$$

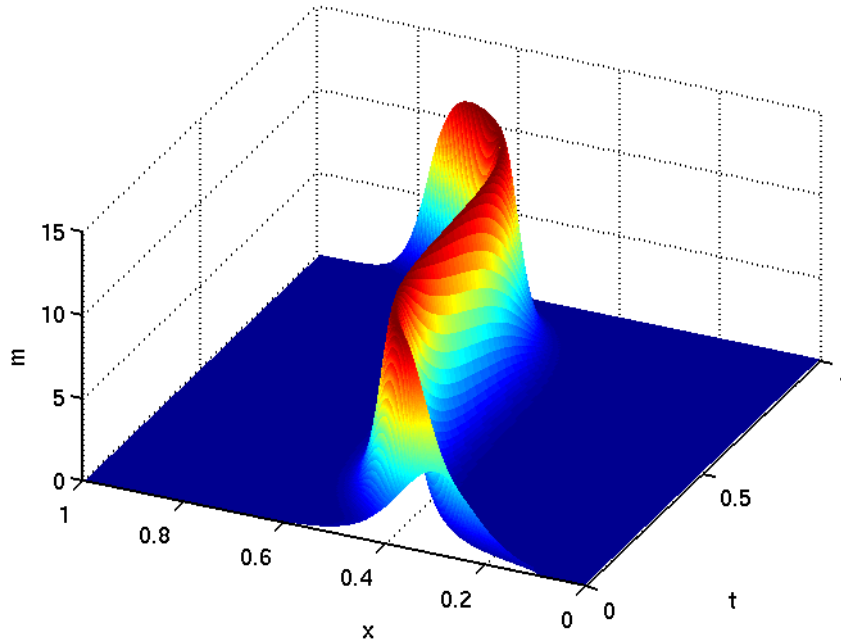


FIGURE 5 – Approche de l'état stationnaire pour la densité. Initialement la densité est centrée autour de $x = 0.3$ et le coût final possède un minimum en $x = 0.8$. Le potentiel est de la forme $V[m](x) = U_0 + 2m$, avec $U_0(x)$ quadratique, centré en $x = 0.5$. Cette simulation numérique a été effectuée selon un algorithme décrit Annexe F. On voit clairement que loin de $t = 0$ et de $T = 1$, la densité prend une forme stationnaire.

où $(u_e(x), m_e(x))$ est solution du système indépendant du temps :

$$\begin{cases} -\lambda + H(x, \nabla u_e) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_e = V[m_e](x) \\ \nabla(v_e m_e) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_e = 0 \\ \int m_e(x) dx = 1 \end{cases}, \quad (\text{I.34})$$

et où λ doit être choisie la plus petite possible parmi les solutions du système ci-dessus.

En d'autres termes la solution stationnaire $(u_e(x), m_e(x))$ est donnée par la solution du problème ergodique (I.32). On remarque, à titre indicatif, que le système (I.34) peut être obtenu à partir du système MFG (I.27) en cherchant des solutions sous la forme $u(x, t) = \lambda(T - t) + u_e(x)$. Enfin notons que qualitativement ce résultat est très intéressant, car il permet de prédire vers quel état va évoluer le système, même si l'on ne sait pas résoudre le système MFG dynamique forward/backward (I.27). La figure 5, où l'on voit nettement la densité tendre vers une forme stationnaire, illustre ce théorème.

4.3 Lien avec le contrôle optimal

Il a été remarqué par Lachapelle et co-auteurs [40] que dans certains cas, le système MFG(I.27) pouvait s'interpréter comme un problème de contrôle optimal de système distribué, c'est à dire dont l'état est donné par une fonction du temps et de l'espace $m(x, t)$, et dont l'évolution est décrite par une équation aux dérivées partielles. Dans ce cadre, l'évolution du système est contrôlée par un champ $\alpha(x, t)$, et le but du problème considéré est de déterminer le contrôle $\alpha^*(x, t)$ qui minimise un certain critère.

Considérons pour simplifier les cas des MFG quadratiques (I.29), et avec un potentiel local, i.e. de la forme $V[m](x, t) = U_0(x, t) + f(m(x, t))$, où f est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On introduit alors le problème de contrôle optimal de l'équation de Kolmogorov :

$$\begin{cases} \partial_t m + \nabla(\alpha m) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = 0, \\ m(x, 0) = m_0(x) \end{cases},$$

avec la fonction de coût à minimiser :

$$J[\alpha(\cdot, \cdot)] = \int_0^T dt \int dx m(x, t) \left(\frac{1}{2\mu} \alpha^2(x, t) - U_0(x, t) \right) - \mathcal{F}(m(x, t)) + \int dx u_T(x) m(x, T),$$

où \mathcal{F} est une primitive de f .

L'introduction d'un multiplicateur de Lagrange $u(x, t)$ permet de reformuler le problème comme :

$$\min_{\alpha, m} \max_u K[\alpha, m, u],$$

avec

$$\begin{aligned} K[\alpha, m, u] = & \int_0^T dt \int dx m(x, t) \left(\frac{1}{2\mu} \alpha^2(x, t) - U_0(x, t) \right) \\ & - u(x, t) \left(\partial_t m + \nabla(\alpha m) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m \right) - \mathcal{F}(m(x, t)) + \int dx u_T(x) m(x, T). \end{aligned}$$

La variation δK de cette fonctionnelle pour une petite variation $\delta\alpha$ du contrôle donne :

$$\delta K = \int_0^T \int dx m(x, t) \alpha(x, t) \delta\alpha - u(x, t) \nabla(\delta\alpha m).$$

En intégrant par partie et grâce au fait que $m(x, t)$ s'annule rapidement quand $|x| \rightarrow \infty$:

$$\delta K = \int_0^T \int dx m(x, t) \alpha(x, t) \delta\alpha + \nabla u(x, t) (\delta\alpha m).$$

Comme δK doit être nul par optimalité, on obtient :

$$m(x, t)(\alpha(x, t) + \nabla u) = 0,$$

soit $\alpha = -\nabla u$. On retrouve donc bien l'expression de la vitesse optimale dans le cas quadratique (III.4). De même les variations de K par rapport à m et u redonnent l'équation de Hamilton -Jacobi-Bellman et l'équation de Kolmogorov du système MFG quadratique (I.29).

Remarque Dans le cas des MFG stationnaires ou ergodiques (I.32), la fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$J[\alpha(x)] = \int dx m(x) \left(\frac{1}{2\mu} \alpha^2 - U_0(x) \right) - \mathcal{F}(m(x)),$$

avec la contrainte que l'état du système $m(x)$ satisfait l'équation de Kolmogorov stationnaires :

$$\nabla(\alpha m) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = 0,$$

et la condition de normalisation :

$$\int m(x) dx = 1.$$

Il faut donc introduire en plus de $u(x)$ un second multiplicateur de Lagrange λ pour gérer la contrainte de normalisation et, en écrivant les conditions d'optimalité du premier ordre, on retrouve ainsi le système (I.32).

5 Applications

Pour conclure ce chapitre d'introduction à la théorie des jeux en champ moyen, on présente brièvement différents problèmes auxquels cette approche a été appliquée, tant en économie et en finance que dans le domaine des phénomènes socio-économiques.

5.1 Applications en économie

La théorie des jeux en champ moyen a été développée dans l'optique de proposer un formalisme maniable pour répondre à certaines questions économiques, c'est donc tout naturellement que des applications en économie ont été proposées. Ainsi O. Guéant propose des modèles de croissance économique [45], modélise la production d'une ressource épuisable [31], telle que le pétrole, ou encore décrit de façon simplifiée un marché du travail [30]. Gomes [25] se penche sur la formalisation, dans le cadre MFG, d'un modèle d'accumulation de capital du type modèle de Solow. Enfin Achdou et coauteurs, dans un article de revue [1], montrent comment de nombreuses questions économiques comme le problème de la répartition des richesses et la loi de Pareto peuvent se formuler en terme de MFG.

Pour fournir un exemple détaillé, on présente ici un modèle de croissance économique introduit par Gomes [25]. Dans cet exposé, les biens de consommation sont utilisés comme unité de prix. Ce modèle est constitué de plusieurs briques élémentaires que nous décrivons maintenant :

- **Agents microéconomiques** A chaque instant t , un agent microéconomique est caractérisé par sa quantité de biens de consommation a_t et son niveau de capital k_t . Hormis cela, les agents sont identiques.
- **Actions microéconomiques (Contrôle)** On suppose qu'à chaque instant t un agent peut contrôler ses niveaux de consommation c_t et d'investissement i_t .

- **Relations constitutives** On suppose donnée une fonction de production $F(k, p)$ qui indique la quantité totale de biens de consommation $\Theta(k, p)$ et biens de capital $\Omega(k, p)$ produits par un agent possédant le capital k , à l'instant t , et lorsque le niveau des prix est p :

$$F(k, p) = \Theta(k, p) + p\Omega(k, p) .$$

On fait aussi l'hypothèse de l'existence d'une fonction de dépréciation du capital $g(k_t, p_t)$ et l'on considère qu'à chaque instant le prix p_t vérifie l'équation d'équilibre suivante, entre l'investissement agrégé et la production de capital agrégée :

$$\iint i_t(a_t, k_t)m_t(a_t, k_t) da dk = \iint \Omega_t(k_t, p_t)m_t(a_t, k_t) da dk . \quad (\text{I.35})$$

- **Dynamique microéconomique** Les variables d'état évoluent selon deux équations différentielles avec bruit, modélisé par des termes browniens. Cela permet de rendre compte des événements aléatoires qui interviennent au cours de la vie des agents économiques.

$$\begin{cases} da_t = (-c_t - p_t i_t + F(k_t, p_t)) dt + \sigma_a dB_t^a \\ dk_t = (g(k_t, p_t) + i_t) dt + \sigma_k dB_t^k \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

- **Variables macroéconomiques** La seule variable macroéconomique de ce modèle est le prix p_t , qui est une quantité déterministe. En fait $p(\cdot)$ (qui sera dérivé de la densité d'agent $m(a, k, t)$ grâce à la condition d'équilibre) représente l'interaction de champ moyen dans ce modèle.
- **Préférences microéconomiques** Les agents font face à des choix en ce qui concerne leur niveau de consommation et d'investissement, et ont des préférences en matière de quantité de biens de consommation et de capital accumulés. Le prix a également une influence sur les préférences des agents. Ces considérations sont résumées dans une fonction d'utilité instantanée $u(c_t, i_t, a_t, k_t, p_t)$ et chaque agent cherche à maximiser son utilité espérée :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha(s)} w(c_s, i_s, a_s, k_s, p_s) ds \right],$$

sachant que a_0 et k_0 sont donnés. Le paramètre $\alpha > 0$ est la préférence pour le présent.

Suivant la méthodologie MFG, on introduit la fonction valeur :

$$u(a, k, t) = \sup_{c(\cdot), i(\cdot)} \mathbb{E} \left[\int_t^{+\infty} e^{-\alpha(s-t)} w(c_s, i_s, a_s, k_s, p_s) ds \right]$$

sachant que $a_t = a$ et $k_t = k$. On trouve alors que $u(a, k, t)$ vérifie l'équation de HJB :

$$\partial_t u - \alpha u + H(a, k, p, \partial_a u, \partial_k u) + \frac{\sigma_a^2}{2} \Delta_a u + \frac{\sigma_k^2}{2} \Delta_k u = 0, \quad (\text{I.37})$$

où le Hamiltonien est donné par :

$$H(a, k, p, q_a, q_k) = \sup_{c, i} (q_a(-c - pi + F) + q_k(g + i) + u) .$$

Le contrôle optimal est donné par $c_t^* = c^*(a_t, k_t, t)$ et $i_t^* = i^*(a_t, k_t, t)$ où c^* et i^* sont définis par les équations :

$$\begin{cases} \partial_{q_a} H(a, k, p, \partial_a u, \partial_k u) = -c^*(a, k, t) - p_t i^*(a, k, t) + F(k_t, p_t) \\ \partial_{q_k} H(a, k, p, \partial_a u, \partial_k u) = g(k, p_t) + i^*(a, k, t) \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

Finalement la densité des agents $m(a, k, t)$ évolue selon l'équation de Kolmogorov :

$$\partial_t m + \partial_a (\partial_{q_a} H m) + \partial_k (\partial_{q_k} H m) - \frac{\sigma_a^2}{2} \Delta_a m - \frac{\sigma_k^2}{2} \Delta_k m = 0. \quad (\text{I.39})$$

Selon la méthodologie MFG, le prix $p(t)$ a été considéré comme donné. Il est alors fixé par la condition d'équilibre (I.35). Ainsi le problème économique se résume aux deux équations aux dérivées partielles (I.37, I.39), couplées par la relation (I.35).

5.2 Applications en finance

De même certaines questions dans le domaine de la finance se prêtent bien à une formulation en terme de MFG. En fait dès la publication des premiers articles Lasry et Lions ont proposé des applications au mécanisme de formation des prix sur un marché financier [44], ou encore à la modélisation de la dynamique de la volatilité d'un actif prenant en compte l'influence des stratégies de couverture de manière auto-cohérente [44, 47]. Dans ce dernier article, les auteurs proposent d'étendre le modèle standard de Black-Scholes⁹, au cas où la dynamique de l'actif sous-jacent est modifiée linéairement par le taux de trading/hedging. De plus la volatilité est supposée dépendre du pay-off d'une option fictive, dont le pay-off serait égal à la somme des pay-off des options présentes sur le marché. La stratégie de hedging optimale est ensuite déterminée selon une procédure d'optimisation stochastique classique, conduisant à une équation auto-cohérente pour la volatilité. Guéant, Fatone et Jaimungal, quant à eux, se sont préoccupés de problèmes de liquidation de portefeuilles (porte-feuille d'actifs financiers) [35, 29] et d'exécution optimale d'ordres de trading [23]. Plus précisément, l'objectif de [23] est de déterminer la façon optimale pour un gros investisseur (banque, assurances, fonds de pension, ...) d'exécuter une transaction sachant que celle-ci, par son volume, va avoir un impact sur les prix. De plus, le modèle prend en compte l'influence collective des petits porteurs, alors que par définition leur poids individuel est négligeable. Enfin Lachapelle, Lehalle et coauteurs ont abordé la question de la modélisation d'un carnet d'ordre prenant en compte la diversité des profils des traders [39]. Un carnet d'ordre sur un certain marché financier est l'ensemble de tous les ordres d'achat ou de vente pour un certain prix avec les quantités associées. Il peut être donc représenté par un axe des prix avec, à gauche, la liste des acheteurs, et à droite, la liste de vendeurs, le prix du marché étant situé entre les deux. Dans cet article, selon la longueur de la liste des acheteurs, un agent va décider d'acheter immédiatement et donc de faire diminuer la liste des vendeurs, ou bien de

9. Dans ce modèle un actif risqué, dit sous-jacent, suit la dynamique : $dS_t/S_t = b(t)dt + \sigma dW_t$, où $b(t)$ est le rendement et σ la volatilité. Une option rapporte un pay-off $g(S_T)$ au temps T où g est une certaine fonction qui dépend de l'option considérée. Le problème résolu par Black et Scholes est d'évaluer le prix d'une telle option sur un marché où existe un actif sans risque et en l'absence d'arbitrage (impossibilité de faire un gain certain avec un investissement nul).

patienter et donc de rentrer dans la liste des acheteurs. Un processus similaire a lieu du côté des vendeurs et ainsi la taille des deux listes va évoluer de manière couplée. Dans une perspective plus orientée vers le risque, Carmona et co-auteurs [16], étudient le risque systémique¹⁰ dans un modèle où la réserve monétaire d'une banque suit un processus de diffusion dont la dérive dépend de l'emprunt/prêt par unité de temps auprès des autres banques et d'une banque centrale. Le taux d'emprunt/prêt d'une banque vis à vis de la banque centrale est contrôlé et est optimisé selon des critères qui rendent compte de sa volonté de ne pas faire défaut, de prêter quand les réserves atteignent un certain seuil, et du coût de transaction avec la banque centrale.

5.3 Applications aux phénomènes sociaux et en ingénierie

Une idée naturelle également, lorsque l'on considère des problèmes d'optimisation avec un grand nombre d'agents en interaction, est l'application à certains phénomènes sociaux, notamment les questions de mouvements de foule, en cas de panique par exemple, ou à plus grande échelle, des problèmes de répartition de populations. On peut citer à ce titre les travaux de Guéant pour la modélisation de phénomènes collectifs dans les stades (onde mexicaine ou "hola"), ou l'étude de populations avec interactions attractives [31]. Cet auteur montre notamment que si l'on donne aux spectateurs d'un stade une utilité à être assis et à imiter les autres, il est possible d'exhiber du système MFG ergodique des solutions périodiques qui ressemblent au mouvement de "hola" qui se déclenche parfois dans les rencontres sportives. Lachapelle, quant à lui, a étudié des questions de ségrégation et de formation de patterns entre deux populations d'individus ayant des interactions répulsives l'une par rapport à l'autre [37, 38]. Il s'intéresse donc à des problèmes qui sont formulés dans une généralisation naturelle de la théorie MFG que l'on a présentée, au cas de plusieurs types de populations, et réalise des simulations numériques (méthode de descente de gradient, directions alternées, de Newton). Dans un autre registre, la question de la productivité académique a été abordée sous l'angle MFG par Besancenot et coauteurs [9]. Leur idée est de considérer que les chercheurs doivent trouver le meilleur compromis entre le coût à produire des travaux, et la satisfaction qu'ils procurent. Souvent cette satisfaction n'est pas absolue, mais dépend du classement par rapport aux autres chercheurs, ce qui fait donc intervenir leur distribution, et le lien avec le formalisme MFG se fait alors naturellement. Enfin notons aussi que des modèles de propagation d'épidémie et des questions de choix de politiques de vaccination ont fait l'objet de recherches de la part de Turicini et Laguzet, notamment voir [41]. Dans ces travaux, l'évolution d'une épidémie est représentée par un modèle de type "SIR" où, au niveau macroscopique, une population d'individus susceptibles peut être infectée avec un certain taux, et où à leur tour les individus infectés peuvent guérir à une vitesse donnée. Mais on suppose, de plus, que chaque individu a la possibilité de se faire vacciner à une certaine date, choix qu'il va effectuer en optimisant rationnellement compte tenu des "coûts" à se faire vacciner ou infecter, et vu l'évolution macroscopique des différentes populations ("susceptibles"/"infectés"/"guéris") qu'il peut observer. De manière auto-cohérente, le choix de vaccination va modifier alors la dynamique de la population des "susceptibles". Il est aussi intéressant de remarquer que ces auteurs utilisent l'approche MFG avec des stratégies mixtes. En ingénierie finalement, des applications

10. Le risque systémique est le risque de disfonctionnement de l'ensemble du système contrairement au risque concernant un de ses constituants.

ont été trouvées par exemple dans l'optimisation énergétique de réseaux sans fil [50], et dans la gestion dynamique de la demande sur les réseaux électriques [4, 36]. Le but, dans ce dernier cas, est de réguler de manière semi-passive la demande en incitant les agents à consommer d'une manière prévue par un planificateur, et avec une fonction de coût de type champ moyen. En effet la grandeur importante du réseau est la "fréquence centrale", qui traduit l'équilibre entre l'offre et la demande. Il suffit donc de l'inclure de manière judicieuse dans la fonction de coût d'un agent.

Deuxième partie

Un modèle de séminaire

Sommaire

6	Présentation	43
7	Autour de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman	46
7.1	La méthode des caractéristiques	46
7.2	La transformation de Cole-Hopf	49
7.3	Résolution du problème de premier passage	50
8	Autour de l'équation de Kolmogorov	52
8.1	Solution stationnaire	52
8.2	Hermitisation de l'opérateur de Fokker-Planck	53
8.3	Résolution de l'équation de Fokker-Planck	53
9	Résolution du problème auto-cohérent	54
9.1	Cas général	55
9.2	"Diagramme de phase"	55
9.3	Un régime limite	57
9.4	Conclusion	58

Nous avons développé dans le premier chapitre le formalisme de la théorie des jeux en champ moyen. On aborde dans cette section un exemple concret que nous allons traiter en détail. Après avoir introduit le modèle, on considérera tour à tour chacune des deux équations qui décrivent le modèle (l'équation de HJB et l'équation de Kolmogorov) en considérant le champ moyen comme donné, puis on expliquera comment on obtient la solution complète du problème par auto-cohérence selon la méthodologie MFG. La forme de la solution étant peu transparente, on étudiera enfin la solution dans certains régimes limites, ce qui permettra d'obtenir des formules plus parlantes. Cela nous permettra d'obtenir le "diagramme de phase" du problème, qui fait apparaître plusieurs régions au comportement différent dans l'espace des paramètres considérés. Ce chapitre reprend les résultats de l'article [56], reproduit à la fin du chapitre, mais avec une présentation centrée sur la dérivation de l'équation d'auto-cohérence exacte, ce qui permettra d'un autre côté, de développer un peu plus sur ce point. On trouvera [56] une analyse plus poussée des équations de HJB et de Kolmogorov dans les régimes de fort et de faible bruit, ainsi que la dérivation des résultats du diagramme de phase dans le cas de distributions initiales étroites comme larges.

6 Présentation

Bien que la formulation en terme de MFG permette de réduire considérablement la complexité du type de problèmes d'optimisation que nous considérons, la résolution du système d'équations aux dérivées partielles (I.27) reste une tâche ardue. Il est donc essentiel de gagner de l'intuition sur ce type d'équations en considérant d'abord des problèmes assez simples, afin de pouvoir obtenir une solution analytique ou des approximations bien contrôlées.

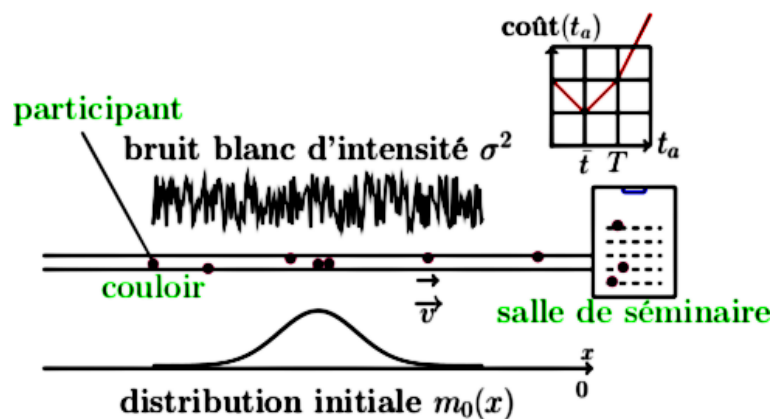


FIGURE 6 – Illustration du problème du séminaire

C'est dans cet esprit que O. Guéant a proposé dans le cours [31], un "toymodel" de séminaire intitulé : "What time does the meeting start ?" et schématisé figure 6. L'idée de départ est qu'un séminaire prévu pour commencer à l'heure \bar{t} commence rarement à l'heure officielle, mais plutôt une fois qu'un nombre suffisant de participants est arrivé. Sachant cela, des individus rationnels vont optimiser leur heure d'arrivée afin de n'arriver ni trop tôt ni trop tard. Les agents interagissent donc implicitement à travers l'heure effective de début du séminaire T , qui est déterminée de manière auto-cohérente.

Plus précisément on note $\tilde{\tau}$ l'heure d'arrivée d'un agent, et l'on considère que ce dernier prend en compte :

- Un effet de réputation s'il arrive en retard par rapport à l'heure officielle \bar{t} , ce que l'on traduit par un coût ¹¹

$$c_1(\tilde{\tau}, \bar{t}) = \alpha[\tilde{t} - \bar{t}]_+ .$$

- Un dérangement personnel à arriver après le début du séminaire T , ce qui donne le coût :

$$c_2(\tilde{\tau}, T) = \beta[\tilde{t} - T]_+ .$$

- L'ennui qu'il va endurer en attendant le début effectif du séminaire T , ce qui coûte :

$$c_3(\tilde{\tau}, T) = \gamma[T - \tilde{t}]_+ .$$

Finalement la fonction de coût d'un agent, lorsqu'il arrive à l'heure $\tilde{\tau}$ s'écrit :

$$c_T(\tilde{\tau}) = \alpha[\tilde{t} - \bar{t}]_+ + \beta[\tilde{t} - T]_+ + \gamma[T - \tilde{t}]_+, \quad (\text{II.1})$$

et est représentée figure 7. A priori T est une variable aléatoire qui dépend des stratégies des agents et des perturbations aléatoires sur leur trajet. Cependant dans la limite d'un grand nombre d'agents identiques, cette quantité devient fixe, bien que pour l'instant indéterminée. Sa valeur sera obtenue par auto-cohérence selon la méthodologie MFG. Dans la suite, afin de limiter le nombre de cas, on supposera que $\alpha > \gamma$.

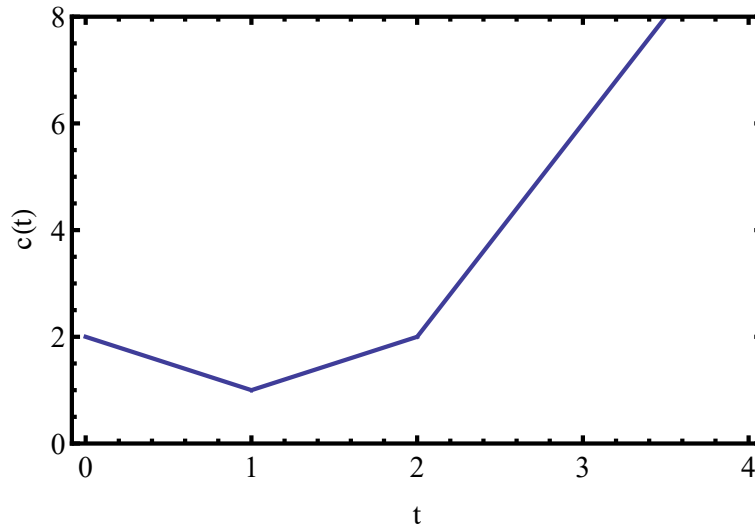


FIGURE 7 – Représentation graphique de la fonction de coût (II.1). Cette fonction est affine par morceau et continue. Son expression explicite est : $c(t) = \{\{\gamma(T - t), t \leq \bar{t}\}, \{(\alpha - \gamma)t + \gamma T - \alpha\bar{t}, \bar{t} < t \leq T\}, \{(\alpha + \beta)t - \beta T - \alpha\bar{t}, T < t\}\}$. [Pour cette figure, $\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 1, \bar{t} = 1, T = 2$]

On suppose de plus qu'initialement les agents sont dans les bureaux d'un couloir qui débouche sur la salle de séminaire, ce que l'on modélise par la demi-droite des réels négatifs $]-\infty; 0]$, le point $x = 0$ représentant la position de la salle de séminaire. On note $m_0(x)$ la densité initiale des agents le long du couloir. Après avoir quitté son bureau situé en x_0 , à $t = 0$, un agent, indexé par $i = 1 \dots N$, se déplace selon une dynamique stochastique du type (I.6) :

11. $[x]_+$ désigne la partie positive de x , i.e. $[x]_+ = x$ si $x \geq 0$, 0 sinon.

$$dX^i = a^i(t) dt + \sigma dW^i(t) \quad (\text{II.2})$$

où,

$X^i(t)$ représente la position de l'agent i au temps t ,
 $a^i(t)$ est sa vitesse, qu'il peut contrôler librement ,
les $W^i(t)$ sont des mouvements Browniens indépendants .

Le terme de bruit est censé représenter n'importe quelle perturbation pouvant se manifester sur le trajet d'un participant.

Outre le coût à l'arrivée dans la salle, un agent est soumis à un coût instantané d'autant plus grand que sa vitesse a est grande. Pour des raisons de simplicité on choisit un coût quadratique en a , si bien que finalement, chaque agent cherche à minimiser un coût total de la forme (I.28) :

$$J_T[a] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\tau}} a_i^2(\tau) d\tau + c_T(\tilde{\tau}) \right] , \quad (\text{II.3})$$

sachant que la dynamique est donnée par (II.2) et que $\tilde{\tau}$ est le temps d'arrivée de l'agent dans la salle de séminaire. \mathbb{E} indique la valeur moyenne sur le bruit.

En fin de compte, ce problème de séminaire est du type de ceux développés au chapitre précédent, excepté le fait que l'horizon est remplacé par le temps d'arrivée $\tilde{\tau}$ et que l'espace est limité à la demi-droite des réels négatifs. Dans ce cas, on peut se convaincre que la formulation MFG est de la forme (I.29) mais avec des conditions aux limites différentes. La condition finale pour l'équation de HJB est remplacée par une condition aux limite en $x = 0$ et l'équation de Kolmogorov est accompagnée d'une condition absorbante en $x = 0$. Ainsi les équations MFG de ce problème s'écrivent :

– Pour la partie contrôle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \\ u(x = 0, t) = c_T(t) \end{cases} , \quad (\text{II.4})$$

– Pour la partie transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial am}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = 0 \\ m(x = 0, t) = 0 \\ m(x, t=0) = m_0(x) \end{cases} , \quad (\text{II.5})$$

où la vitesse optimale est donnée par :

$$a(x, t) = -\partial_x u(x, t) . \quad (\text{II.6})$$

Ces équation sont complétées par la condition qui fixe l'heure de début effectif du séminaire T , une fois qu'un certain quorum θ de participants a été atteint. En introduisant $N(T)$, le nombre d'agents arrivés dans la salle à $t = T$, celle-ci s'écrit :

$$N(T) \equiv \left[1 - \int_{-\infty}^0 m(x, T) \right] = \theta, \quad \text{si } T > \bar{t}, \quad (\text{II.7})$$

ou $T = \bar{t}$ sinon.

7 Autour de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

On commence par aborder le problème en étudiant l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Une première étape consiste à étudier cette équation dans le cas plus simple où le terme de diffusion est négligeable. Dans un second temps, on introduit un changement de variable qui permet de résoudre exactement l'équation.

7.1 La méthode des caractéristiques

Lorsque le terme dû au bruit est négligeable, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (II.4) se réduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 = 0, \quad (\text{II.8})$$

avec la condition aux limites $u(x = 0, t) = c_T(x)$. On emploie couramment pour sa résolution la méthode des caractéristiques, initialement développée par Hamilton au XIXe siècle. L'idée est de faire correspondre à l'équation aux dérivées partielles (EDP) à résoudre une infinité d'équations différentielles ordinaires (EDO) dont les conditions initiales sont données par les conditions aux limites de l'EDP, et de déduire la solution de l'EDP de départ en suivant les courbes caractéristiques constituées par les trajectoires de ces EDO.

Plus précisément, étant donnée une fonction $L(E, p, w, x, t)$, considérons une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$L(\partial_t u, \nabla u, u, x, t) = 0, \quad (\text{II.9})$$

d'inconnue $u(x, t)$, avec une condition initiale de la forme $u(x_0, t_0) = f(x_0)$. On introduit une courbe $(t(\xi), x(\xi))$, paramétrisée par ξ , dont l'équation est choisie de manière à ce que la fonction $u(x, t)$ évolue de manière simple le long de cette courbe. On s'intéresse donc à la quantité

$$w(\xi) = u(x(\xi), t(\xi)).$$

Il est pratique d'introduire aussi les fonctions :

$$E(\xi) = \partial_t u(x(\xi), t(\xi)) \text{ et } p(\xi) = \nabla u(x(\xi), t(\xi)),$$

et il est possible de montrer que si l'on choisi la courbe paramétrique¹² telle que :

$$\begin{cases} \dot{t} = \frac{\partial L}{\partial E} & \dot{E} = -\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial w} E \\ \dot{x} = \frac{\partial L}{\partial p} & \dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial w} p \end{cases}, \quad (\text{II.10})$$

$w(\xi)$ vérifie l'équation :

$$\dot{w} = E\dot{t} + p\dot{x},$$

qui s'intègre directement :

$$w(\xi) = w(0) + \int_0^\xi E\dot{t} + p\dot{x} \, ds.$$

Le système (II.10) est accompagné des conditions initiales :

$$\begin{cases} t(\xi = 0) = t_0 \\ x(\xi = 0) = x_0 \\ w(\xi = 0) = u(x_0, t_0) \\ p(\xi = 0) = \nabla u(x_0, t_0), \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

et $E(\xi = 0)$ est déterminé par la condition $L(E(\xi), p(\xi), w(\xi), x(\xi), t(\xi))|_{\xi=0} = 0$.

S'il est possible, pour le point x à l'instant t , de déterminer la position initiale x_0 à l'instant t_0 , telle que

$$x = x(\xi) \text{ et } t = t(\xi),$$

alors la solution de l'équation aux dérivées partielles (II.9) est donnée grâce à la formule :

$$u(x, t) = u(x(\xi), t(\xi)) = w(\xi).$$

Dans le cas de l'équation de Hamilton-Jacobi (II.8), on définit la fonction :

$$L(E, P, w, x, t) = L(E, p) = E - \frac{p^2}{2},$$

ce qui permet de réécrire l'équation comme :

$$L(\partial_t u, \partial_x u) = 0.$$

Dans ce cas, les équations des caractéristiques (II.10) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 & \dot{E} = 0 \\ \dot{x} = -p & \dot{p} = 0 \end{cases}. \quad (\text{II.12})$$

12. Les dérivées partielles sont évaluées au point $(E(\xi), p(\xi), w(\xi), x(\xi), t(\xi))$

Cependant notre problème est posé en terme de conditions aux limites en $x = 0$ et non de conditions initiales en $t = t_0$, ce qui fait que les équations des caractéristiques doivent être résolues avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} t(\xi = 0) = \tau, & E(\xi = 0) = c'(\tau), \\ x(\xi = 0) = 0, & L(E(0), p(0)) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

i.e. pour la valeur $\xi = 0$ du paramètre de la courbe caractéristique, on se trouve à la position $x = 0$, à un certain temps τ fixé, faisant partie des paramètres. Les caractéristiques sont donc données¹³ par :

$$\begin{cases} t(\xi) = \tau + \xi & E(\xi) = c'(\tau) \\ x(\xi) = -p_0\xi & p(\xi) = p(0) = -\sqrt{2c'(\tau)}, \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

et l'on remarque que l'impulsion $dx/dt = p_0$ est constante le long de chaque caractéristique. Finalement la solution est donnée par :

$$u(x, t) = u(x(\xi), t(\xi)) = w(\xi) = c(\tau) + \int_0^\xi Et + px \, ds \quad (\text{II.15})$$

$$= c(\tau) + c'(\tau)(t - \tau) + (-x)\sqrt{2c'(\tau)}, \quad (\text{II.16})$$

où τ doit être déterminé de manière à ce que en partant de x à l'instant t , on arrive à $x = 0$ à l'instant τ .

En pratique, du fait des discontinuités de la dérivée du coût final $c'(\tau)$, on est obligé de découper l'espace (x, t) en quatre régions distinctes. Ces régions sont représentées sur la figure 8 ci-contre. Dans les régions 0 et 2, l'impulsion p_0 est la même pour toutes les caractéristiques, et imposée par la dérivée $c'(\tau)$ au temps d'arrivée en $x = 0$:

$$\begin{cases} p_0 = -\sqrt{2(\alpha + \beta)} \equiv -a_0 & (\text{Région 0}) \\ p_0 = -\sqrt{2(\alpha - \gamma)} \equiv -a_2 & (\text{Région 2}) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Dans les régions 1 et 3, on ne peut appliquer la formule (II.16), mais on voit d'après la forme de ces régions, que l'on doit imposer aux caractéristiques de partir du point $(0, T)$ avec une impulsion arbitraire donnée entre $-a_0$ et $-a_2$, et du point $(0, \bar{t})$ avec une impulsion arbitraire donnée entre $-a_2$ et 0, respectivement. Intuitivement, cela se comprend, en envisageant la fonction de coût $c_T(t)$ seulement continue et dérivable par morceaux, comme la limite de fonctions régularisées aux endroits de discontinuité de la dérivée¹⁴. De ce fait l'impulsion le long de ces caractéristiques est donnée par :

$$\begin{cases} p_0 = x/(T - t) & (\text{Région 1}) \\ p_0 = x/(\bar{t} - t) & (\text{Région 3}) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

13. $\xi \leq 0$ car $t \leq \tau$.

14. c'est-à-dire que l'on considère des fonctions lisses mais qui varient très rapidement aux points de discontinuité

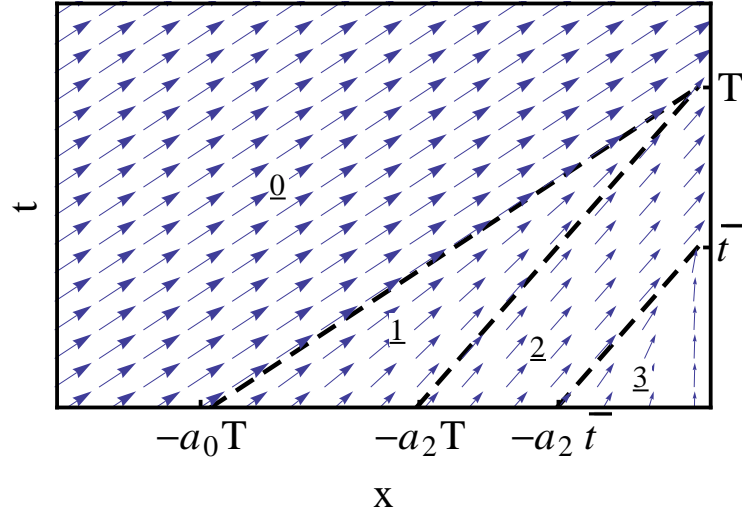


FIGURE 8 – Regions de l'espace (x, t) ($x < 0, t > 0$) et les champs de vitesse correspondants, pour $\sigma \rightarrow 0$ [$a_0 = \sqrt{2(\alpha + \beta)}, a_2 = \sqrt{2(\alpha - \gamma)}$].

D'après (II.15) on obtient donc :

$$\begin{cases} u(x, t) = c(T) + \frac{x^2}{T - t} & \text{(Région 1)} \\ u(x, t) = c(\bar{t}) + \frac{x^2}{T - \bar{t}} & \text{(Région 3)} \end{cases}, \quad (\text{II.19})$$

tandis que dans les régions 0 et 2, la formule (II.16) s'applique. Finalement, d'après (II.6), $a(x, t) = -\partial_x u(x, t)$ et on s'aperçoit que $a(x, t) = -p_0$, la valeur de p_0 dépendant de la région considérée.

Sur la figure 8, on peut lire que, si le bruit est négligeable, les agents situés plus loin que $a_0 T$ décident de ne pas dépasser la vitesse de a_0 , quel que soit leur éloignement (et donc d'arriver après T), alors qu'entre $a_0 T$ et $a_2 T$, ils choisissent leur vitesse de manière à arriver à l'heure effective T . De même entre $a_2 T$ et $a_2 \bar{t}$, les participants se déplacent à la vitesse a_2 , alors que pour des distances inférieures à $a_2 \bar{t}$, ils partent avec la vitesse adéquate pour arriver à \bar{t} . Les vitesses a_0 et a_2 sont imposées par la pente de la fonction de coût au temps d'arrivée selon les équations (II.17).

7.2 La transformation de Cole-Hopf

L'analyse précédente a permis de résoudre le problème de HJB dans la limite $\sigma^2 \rightarrow 0$, et de faire émerger des vitesses caractéristiques a_0 et a_2 , mais il est possible d'aller plus loin, et de résoudre exactement le problème complet grâce à la transformation de Cole-Hopf [33, 18]. Il s'agit d'un changement de variable présenté indépendamment par Hopf en 1950, et Cole en 1951, pour la résolution de l'équation de Burger avec viscosité qui s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

L'équation de Burgers a été présentée en 1939 par Burgers [11] en tant que modèle simple de turbulence à une dimension. C'est une équation sur la vitesse d'un fluide $u(x, t)$, qui s'obtient à partir des équations de Navier-Stokes de la mécanique des fluides en négligeant le terme de pression. Le terme en dérivée seconde est liée à la viscosité et fait intervenir la viscosité réduite ν .

Dans son article [33], Hopf montre qu'en introduisant la transformation :

$$u(x, t) = -\frac{\nu}{2} \frac{\partial_x \phi}{\phi},$$

l'équation de Burgers est ramenée à une simple équation de diffusion.

Dans notre cas, on remarque que l'on obtient une équation similaire à l'équation de Burgers en dérivant l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (II.4). Ainsi si l'on introduit le changement de variable :

$$u(x, t) = -\sigma^2 \ln \phi, \quad (\text{II.20})$$

dans (II.4), on obtient après calcul l'équation de diffusion suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ \phi(x = 0, t) = e^{-\frac{c(t)}{\sigma^2}} \end{cases}. \quad (\text{II.21})$$

Cette équation peut s'interpréter comme un problème de premier passage grâce au lien entre équations de type paraboliques et probabilités [24] :

$$\phi(x, t) = \mathbb{E} \left[e^{-c(\tilde{\tau})/\sigma^2} \right],$$

où $\tilde{\tau}$ est le temps de premier passage en $x = 0$ pour une particule diffusant librement depuis de $x < 0$ à partir de l'instant t .

7.3 Résolution du problème de premier passage

Dans cette sous-section on résout, selon une approche adaptée de [51], le problème de premier passage, qui intervient dans la sous-section précédente. Par commodité, on effectue une translation dans l'espace et dans le temps. On considère donc une particule initialement ($t = 0$) située en $x = 0$ qui suit mouvement brownien à une dimension. On note $\tilde{\tau}_b$ le temps de premier passage en $x = b$. On appelle $P(\tilde{\tau}_b > t)$ la probabilité que le temps de premier passage soit supérieur à t , et on introduit $P(x, t \text{ et } \tilde{\tau}_b > t) \equiv f_b(x, t)$ la probabilité d'être en x à t sans être encore passé par b . On obtiendra $P(\tilde{\tau}_b > t)$ par sommation sur $x < b$ et la densité de probabilité $\rho_b(\tau)$ de $\tilde{\tau}_b$ par différentiation.

Par bilan de probabilité :

$$f_b(x, t) = \int_{y < b} dy S(x, dt; y) f_b(y, t - dt) \quad \text{pour tout } x < b,$$

où l'on a introduit $S(x, dt; y)$ la probabilité de saut de y à x pendant dt . Pour un mouvement brownien

$$S(x, dt; y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 dt}\right),$$

si bien que par un développement de Taylor, f_b vérifie donc l'équation :

$$\partial_t f_b = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 f_b,$$

avec par définition la condition aux limites $f_b(b, t) \equiv 0$ et la condition initiale $f_b(x, t = 0) = \delta(x)$.

La solution de cette équation de diffusion peut être trouvée par la méthode des images, et s'écrit pour $x \leq b$:

$$f_b(x, t) = G_0(x, t) - G_0(x - 2b, t),$$

et où

$$G_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

est la fonction de Green de la diffusion libre.

Finalement,

$$\begin{aligned} P(\tilde{\tau}_b > t) &= \int_{-\infty}^b dx f_b(x, t) \\ &= - \int_0^{2b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right) dx, \end{aligned}$$

et la densité de probabilité $\rho_b(t)$ est donnée par la dérivée de la probabilité cumulée $F(t) \equiv P(\tilde{\tau}_b < t) = 1 - P(\tilde{\tau}_b > t)$ donc :

$$\rho_b(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{2b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right) dx.$$

En ce qui concerne le problème initial, le temps de premier passage en $x = 0$ d'une particule partie de $x < 0$, à l'instant t , a donc pour expression :

$$\rho(t) = -\frac{d}{dt} \int_{+x_0}^{-x_0} dx G_0(x, t - t_0).$$

La solution de l'équation (II.21) est donc donnée par :

$$\phi(x, t) = \int_t^\infty e^{-c(t')/\sigma^2} \rho(t') dt' \quad (\text{II.22})$$

$$= -x \int_0^\infty \frac{e^{-c(t'+t)/\sigma^2}}{t'} G_0(x, t') dt'. \quad (\text{II.23})$$

Pour $t \geq T$, $c(t+t')$ est linéaire et cette intégrale prend une forme simple (cf. Annexe A de l'article) :

$$\phi(x, t) = e^{-\frac{\alpha(T-t)}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{a_0^2(T-t) - a_0|x|}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{II.24})$$

8 Autour de l'équation de Kolmogorov

Le but de cette section est d'expliquer comment des considérations générales sur l'équation de Kolmogorov conduisent naturellement à un changement de variable qui va s'avérer crucial pour la résolution de notre problème. Dans cette section et la suivante on considère donc, avec [52], une équation de Fokker-Planck générique écrite sous la forme¹⁵ :

$$\partial_t W = -\partial_x v(x)W(x, t) + \partial_{xx}^2 D(x)W(x, t), \quad (\text{II.25})$$

où le drift $v(x)$ et le coefficient de diffusion $D(x)$ sont des fonctions qui peuvent dépendre de la position. On se place à une dimension, pour simplifier, avec les conditions aux limite $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x, t) = 0$.

Pour la suite on définit aussi l'opérateur de Fokker-Planck par :

$$L_{FP} = -\partial_x v(x) + \partial_{xx}^2 D(x).$$

8.1 Solution stationnaire

Dans certains cas l'équation de Kolmogorov admet des solutions stationnaires, c'est-à-dire des solutions indépendantes du temps. Une solution stationnaire $W^*(x)$ doit vérifier l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(v(x) - \partial_x D(x) \right) W^*(x) \right) = 0,$$

et donc :

$$\left(v(x) - \partial_x D(x) \right) W^*(x) = \text{Cte}.$$

Dans l'hypothèse où cette quantité s'annule à l'infini ($|x| \rightarrow \infty$), on obtient l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\partial}{\partial x} D(x)W^*(x) = \frac{v(x)}{D(x)} D(x)W^*(x).$$

La solution s'écrit :

$$\begin{aligned} W^*(x) &= \frac{N}{D(x)} \exp \left(\int^x \frac{v(x')}{D(x')} dx' \right) \\ &= N e^{-\Phi(x)}, \end{aligned}$$

où l'on a introduit :

$$\Phi(x) = \ln D(x) - \int^x \frac{v(x')}{D(x')} dx', \quad (\text{II.26})$$

et où N est une constante de normalisation.

15. Les opérateur de dérivation s'appliquent à toute l'expression qui se trouve à leur droite

8.2 Hermitisation de l'opérateur de Fokker-Planck

Il est intéressant de réécrire l'opérateur de Fokker-Planck (II.25) sous la forme :

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x} D(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)},$$

avec $\Phi(x)$ donné par (II.26). En effet, on voit alors immédiatement, par un calcul simple, que l'opérateur de Fokker-Planck L_{FP} n'est pas hermitique alors que l'opérateur défini par :

$$L = e^{\Phi/2} L_{FP} e^{\Phi/2}$$

est un opérateur hermitique. Explicitement cet opérateur prend la forme :

$$\begin{aligned} L W &= e^{\Phi/2} \frac{\partial}{\partial x} D(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi/2} W \\ &= e^{\Phi/2} \frac{\partial}{\partial x} D(x) e^{-\Phi(x)/2} \left(\frac{\Phi'(x)}{2} W + \frac{\partial}{\partial x} W \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} D(x) W - V(x) W, \end{aligned}$$

avec

$$V(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{dD}{dx} - v(x) \right)^2 \frac{1}{D(x)} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d^2 D}{dx^2}.$$

Dans le cas où $D(x) = D = \text{Cte}$,

$$L = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_s(x),$$

où

$$V_s(x) = \frac{D}{4} [\Phi'(x)]^2 - \frac{D}{2} \Phi''(x).$$

8.3 Résolution de l'équation de Fokker-Planck

L'Hermitisation de l'opérateur de Fokker-Planck correspond au changement de variable :

$$W(x, t) = e^{-\Phi(x)/2} \Gamma(x, t).$$

De plus, la relation (II.26), lorsque le coefficient de diffusion est constant, indique que $\Phi(x)$ est une primitive du drift $v(x)$. Dans le même esprit, sachant que, dans le cas des MFG stationnaires, la solution ergodique $u_e(x)$ joue le rôle de $\Phi(x)$, on pose dans l'équation de transport du système MFG (II.5)

$$m(x, t) = e^{-u(x,t)/\sigma^2} \Gamma(x, t). \quad (\text{II.27})$$

Ainsi après quelques calculs sans difficulté, on trouve que $\Gamma(x, t)$ vérifie :

$$\sigma^2 \partial_t \Gamma - \frac{\sigma^4}{2} \partial_{xx}^2 \Gamma = \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (\text{II.28})$$

Comme $u(x, t)$ vérifie l'équation de HJB (II.4), l'expression entre parenthèse dans l'équation ci-dessus est identiquement nulle (!), et $\Gamma(x, t)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} = 0 \\ \Gamma(x=0, t) = 0 \text{ and } \Gamma(x, t=0) = e^{u(x, t=0)/\sigma^2} m_0(x) \end{cases} .$$

Cette équation, qui est simplement l'équation de la chaleur, hormis les conditions aux limites, peut être résolue par le formalisme des fonctions de Green. En effet la fonction de Green peut être calculée par la méthode des images :

$$G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0) = (G_0(x, t|x_0) - G_0(x, t|-x_0)) . \quad (\text{II.29})$$

Et finalement $\Gamma(x, t)$ s'exprime comme :

$$\Gamma(x, t) = \int_{-\infty}^0 G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0) e^{u(x_0, t=0)/\sigma^2} m_0(x_0) dx_0 .$$

Par ailleurs, se souvenant que $u = -\sigma^2 \ln \phi$, on obtient en terme de l'inconnue de départ $m(x, t)$:

$$m(x, t) = \phi(x, t) \int_{-\infty}^0 \frac{G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0)}{\phi(x_0, t=0)} m_0(x_0) dx_0 , \quad (\text{II.30})$$

En particulier, si on note $G(x, t|x_0)$ la solution élémentaire pour $m(x, t)$, ce qui correspond à distribution initiale localisée en x_0 :

$$m_0(x) = \delta(x - x_0),$$

on obtient l'expression :

$$G(x, t|x_0) = \frac{\phi(x, t)}{\phi(x_0, t=0)} \times G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0) . \quad (\text{II.31})$$

Et l'équation (II.30) se lit alors :

$$m(x, t) = \int G(x, t|x_0) m_0(x_0) dx_0 . \quad (\text{II.32})$$

9 Résolution du problème auto-cohérent

Après avoir étudié les équations de Kolmogorov et de HJB, il reste pour clore le problème à analyser la relation d'autocohérence (II.7). On l'exprime d'abord en toute généralité, en utilisant les résultats obtenus jusqu'à présent, puis on découpe l'espace des paramètres en différentes régions où la solution prend des formes asymptotiques. On détaille finalement, à titre d'exemple, un régime particulier.

9.1 Cas général

On rappelle que l'équation d'auto-cohérence (II.7) qui fixe le début du séminaire s'écrit :

$$N(T) \equiv \left[1 - \int_{-\infty}^0 m(x, T) \right] = \theta, \quad \text{si } T > \bar{t}$$

ou bien $T = \bar{t}$ sinon.

En insérant l'expression (II.32) de $m(x, t)$, on peut la réécrire :

$$\int_{-\infty}^0 dx_0 \rho(x_0, T) m_0(x_0) = \bar{\theta}, \quad \text{si } T > \bar{t}, \quad (\text{II.33})$$

avec $\bar{\theta} = (1 - \theta)$ et où $\rho(x_0, T)$ est défini, à l'aide de $G(x, t)$ (cf. (II.31)), par :

$$\rho(x_0, T) = \int_0^{+\infty} G(x, T|x_0) dx.$$

C'est donc la proportion des agents partis en $x = x_0$ qui ne sont pas encore arrivés en $x = 0$, à l'instant T .

Finalement $G(x, T|x_0)$ peut être simplifiée car l'expression de $\phi(x, T)$ est connue d'après (II.24) et l'on obtient :

$$\rho(x_0, T) = \frac{e^{-c_0(T)/\sigma^2}}{\phi(x_0, t=0)} \int_{-\infty}^0 dx e^{xa_0/\sigma^2} G_0^{\text{abs}}(x, T|x_0). \quad (\text{II.34})$$

Cette formule ainsi que l'expression (II.22) de $\phi(x, t)$ permettent de calculer $\rho(x, T)$ et donc de déterminer, pour tout T , la valeur du membre de gauche de la relation d'auto-cohérence (II.33). Cette dernière constitue donc une solution implicite mais exacte de l'heure du début effectif du séminaire T .

9.2 "Diagramme de phase"

L'expression (II.34) permet d'obtenir une équation exacte pour le début effectif du séminaire, mais prend une forme encore assez complexe. Il est alors intéressant d'étudier ce qu'elle devient dans certains cas limites. Ainsi il est possible d'obtenir un "diagramme de phase" du problème, c'est-à-dire de diviser l'espace des paramètres du problème en plusieurs régions où la solution prend une forme particulière du fait de la prédominance de certains termes. Pour mener au bout l'analyse, il n'est pas possible de prendre une forme arbitraire de la densité initiale $m_0(x)$ et l'on prend le parti de la caractériser par sa position moyenne $\langle x_0 \rangle$ et par son écart-type Σ . Les paramètres α, β, γ et \bar{t} de la fonction de coût étant fixés, et permettant de former des vitesses (à travers a_0 et a_2), ainsi que des temps de référence, il est alors possible d'explorer plusieurs régimes :

- Régime convectif vs. régime diffusif selon que : i) le temps de drift $t_{\text{drift}} \sim x_0/a_{0,2}$ est plus ou moins grand que le temps de diffusion $t_{\text{diff}} \sim x_0^2/\sigma^2$, où x_0 désigne un point du support de $m_0(x)$, et que ¹⁶ ii) $\sigma^2 \gg \gamma T + \alpha \bar{t} + \beta T$ ou non.

16. L'origine de cette condition est expliquée dans l'article lors de l'étude de l'équation de HJB

- Distribution étalée ou étroite i.e Σ grand ou petit comparé à $\sigma\sqrt{T}$ ou $(a_0 - a_2)T$.

Ainsi dans le cas d'une distribution étroite on obtient le diagramme de phase présenté figure 9 :

- La région I correspond au régime dominé par la convection. Dans la sous région I_a , le temps effectif de début du séminaire est donné par l'expression :

$$T = \frac{|\langle x_0 \rangle|}{\bar{a}},$$

où $\bar{a} = \sqrt{a_2^2 + (a_0^2 - a_2^2)\bar{\theta}}$. Dans la sous-région I_b , on ne peut plus négliger complètement la diffusion, et l'on obtient

$$T = \frac{|\langle x_0 \rangle|}{a_2} + \delta T,$$

où δT est une constante dépendant de $\sigma/|\langle x_0 \rangle|$, a_0 et a_2 .

- La région II correspond au régime diffusif. Dans la région II_a on a :

$$T = \frac{2}{\pi} \frac{\langle x_0 \rangle^2}{\sigma^2 \bar{\theta}^2},$$

tandis que dans la région II_b , il faut prendre en compte le fait que σ n'est pas infiniment grand et l'on a :

$$T = \frac{2\sigma^2}{a_0^2} \log \left(\frac{a_0 |\langle x_0 \rangle|}{\sqrt{\pi} \sigma^2 \bar{\theta}} \right).$$

- Dans la région III, le système est dominé ou par la convection ou par la diffusion, mais $T = \bar{t}$ car le quorum est atteint avant \bar{t} .
- Dans la région IV, le temps effectif est donné par une expression complexe à travers (II.34) mais

$$T \simeq \bar{t}.$$

Dans le cas de distributions larges, il est utile d'introduire le $\bar{\theta}$ -ième centile (θ étant exprimé en %), autrement dit la position x_θ telle que :

$$\int_{-\infty}^{x_\theta} m_0(x) dx = \bar{\theta}.$$

On obtient alors les résultats suivants :

- Dans le cas diffusif,

$$T = \frac{|x_\theta|}{a_0}.$$

- Dans le cas convectif,

$$T = \frac{3}{2} |x_\theta| \frac{a_0^2 - a_2^2}{a_0^3 - a_2^3}.$$

Les résultats énoncés dans cette sous-section sont expliqués de manière plus approfondie dans l'article qui suit ce chapitre et nous renvoyons le lecteur à ce dernier pour plus de détails. Néanmoins, il est instructif de fournir la preuve dans un régime non trivial et où les calculs sont assez simples pour être présentés de façon concise.

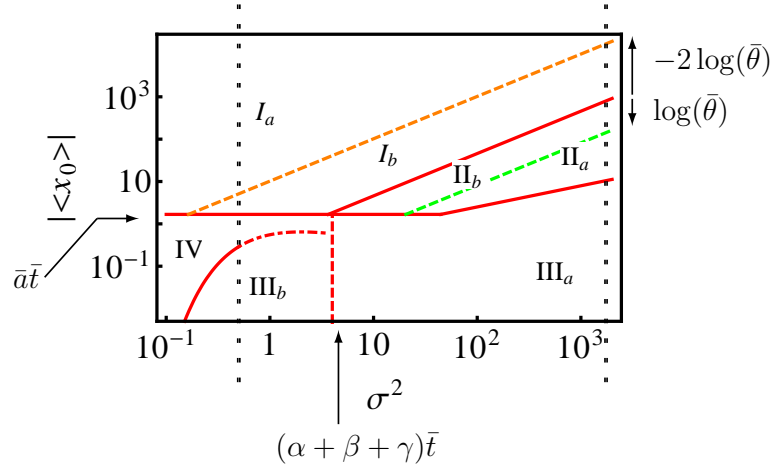


FIGURE 9 – Diagramme de phase dans le cas d'une distribution étroite. Région I : régime convectif; Région II : régime diffusif; Région III : $t = \bar{t}$; Région IV : $t \simeq \bar{t}$. Cf. texte ci-contre pour plus de détails.

9.3 Un régime limite

Le but de cette sous-section est d'obtenir dans un certain régime une expression simplifiée de l'heure de début du séminaire T . On se place pour cela dans le cas d'une distribution initiale très localisée autour de $\langle x_0 \rangle$, et dans le régime convectif, c'est à dire le régime où les temps de diffusion $\propto |\langle x_0 \rangle|^2 / \sigma^2$, dus au bruit, sont très grand devant les temps de convection $\propto |\langle x_0 \rangle| / a_{0,2}$, dus au terme de drift. On supposera aussi que les participants sont assez loin de la salle de séminaire pour que $T \gg \bar{t}$. En pratique on considérera que $|\langle x_0 \rangle| \gg a_2 \bar{t}$.

Du fait de la première hypothèse la relation d'auto-cohérence (II.33) s'écrit :

$$\rho(\langle x_0 \rangle, T) = \bar{\theta} \quad (\text{II.35})$$

Dans le régime convectif, le calcul de $\rho(\langle x_0 \rangle, T)$ implique l'évaluation d'intégrales du type :

$$I = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\Phi(\tau)/\sigma^2} d\tau,$$

avec

$$\sigma^2 \ll \Phi(\tau).$$

L'intégrand devient donc rapidement négligeable dès que l'on s'éloigne de la position du minimum de f , ce qui permet, par la méthode de Laplace, d'obtenir des approximations. On distingue trois cas :

- Si la position τ_m du minimum est dans l'intervalle $]-\infty; 0[$ et que $f(\tau)$ y est dérivable,

$$I \approx f(\tau_m) e^{-\Phi(\tau_m)/\sigma^2} \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{\Phi''(\tau_m)}}$$

- Si la position τ_m du minimum est en dehors de $]-\infty; 0[$,

$$I \approx e^{-\Phi(0)/\sigma^2} f(0) \frac{-\sigma^2}{\Phi'(0)}$$

- Si la position τ_m du minimum est dans l'intervalle $]-\infty; 0[$ et que $f(\tau)$ n'y est dérivable, on découpe l'intégrale en deux parties :

$$I \approx \int_{-\infty}^{\tau_m} + \int_{\tau_m}^0,$$

et après translation on est ramené au deuxième cas.

En utilisant, pas à pas, ces formules on obtient finalement :

$$\rho(x_0, T) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \leq -Ta_0 \\ \frac{x_0^2}{T^2} - a_2^2 & \text{si } -Ta_0 \leq x_0 \leq -Ta_2 \\ \frac{a_0^2 - a_2^2}{a_0^2 - a_2^2} & \text{si } -Ta_2 \leq x_0 \leq -\bar{t}a_2 \\ 0 & \text{si } -Ta_2 \leq x_0 \leq -\bar{t}a_2 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

La relation d'auto-cohérence (II.35) se résout finalement explicitement :

$$T = \frac{|\langle x_0 \rangle|}{\bar{a}}, \quad \text{avec } \bar{a} = \sqrt{a_2^2 + (a_0^2 - a_2^2)\bar{\theta}}, \quad (\text{II.37})$$

où a_0 et a_2 sont les vitesses définies précédemment (cf. II.17).

Ainsi le résultat final fait intervenir la position centrale $|\langle x_0 \rangle|$ des agents bien évidemment, et ce que l'on pourrait appeler une moyenne des vitesses caractéristiques du problème a_0 et a_2 , pondérées par le pourcentage $\theta = 1 - \bar{\theta}$ de participants requis.

9.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons donc réussi à résoudre de façon exacte un modèle simple de type MFG, grâce à deux heureux changements de variable. Plus précisément, considérant le début effectif du séminaire T comme fixé, nous avons pu résoudre d'une part l'équation de HJB par des techniques de premier passage et d'autre part l'équation de KMG, qui s'est transformée en une simple équation de diffusion. Par ailleurs, imposer la règle du quorum permet d'obtenir la relation d'auto-cohérence et donc une équation exacte mais implicite pour T . Enfin en distinguant différents régimes limites, selon que la distribution est large/étroite ou que le régime soit convectif/diffusif, nous avons présenté des formes simplifiées de la solution. Les paramètres importants qui apparaissent sont alors les vitesses caractéristiques a_0 et a_2 , le bruit σ ainsi que les longueurs caractéristiques de la distribution i.e. soit la position moyenne $\langle x_0 \rangle$, soit le $\bar{\theta}$ -ième centile x_θ . T s'exprime alors comme les temps de drift ou de diffusion adaptés au cas considéré.

Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa

“Phase diagram” of a mean field game

Igor Swiecicki ^{a,b}, Thierry Gobron ^b, Denis Ullmo ^{a,*}^a LPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France^b LPTM, CNRS, Université Cergy-Pontoise, 95302 Cergy-Pontoise, France

H I G H L I G H T S

- We study a simple model of “mean field game”.
- We provide an exact solution of the associated system of coupled differential equations.
- We analyze the resulting self-consistent equation in various limiting regimes, resulting in the construction of a “phase diagram” of the considered mean field game.

A R T I C L E I N F O

Article history:

Received 23 January 2015

Available online 21 September 2015

Keywords:

Mean field games

A B S T R A C T

Mean field games were introduced by J.-M. Lasry and P.-L. Lions in the mathematical community, and independently by M. Huang and co-workers in the engineering community, to deal with optimization problems when the number of agents becomes very large. In this article we study in detail a particular example called the “seminar problem” introduced by O. Guéant, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions in 2010. This model contains the main ingredients of any mean field game but has the particular feature that all agents are coupled only through a simple random event (the seminar starting time) that they all contribute to form. In the mean field limit, this event becomes deterministic and its value can be fixed through a self consistent procedure. This allows for a rather thorough understanding of the solutions of the problem, through both exact results and a detailed analysis of various limiting regimes. For a sensible class of initial configurations, distinct behaviors can be associated to different domains in the parameter space. For this reason, the “seminar problem” appears to be an interesting toy model on which both intuition and technical approaches can be tested as a preliminary study toward more complex mean field game models.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Many problems in different fields deal with a situation where many identical and interacting agents try to minimize a cost through the choice of a strategy. One can think of economic agents trying to maximize their profits, of people in a crowd trying to minimize their discomfort or to particles in a fluid “trying” to minimize their energy.

A general framework making possible to model a large class of such problems has been introduced in 2006 by Lasry and Lions [1,2] and Huang et al. [3] under the general terminology of “mean field game theory”. Largely inspired by statistical physics, this approach addresses the limit where the agents face a continuum of choices (states) in which they can evolve only locally, and the number of agents is large enough that self averaging processes are at work. This approach leads to a system of partial differential equations coupling the density of players and the optimization part of the problem.

* Corresponding author.

E-mail address: denis.ullmo@u-psud.fr (D. Ullmo).

Mean field game theory has been intensively studied in the past few years, and in spite of its relative youth, a very large number of results have been obtained in the mathematical [4–8] and socio-economic communities [9–13]. A recent overview is given by Gomes and Saúde in Ref. [14]. Most of the focus however has been put either on the conditions required to prove rigorously the existence and unicity of the solutions of the equations of mean field game theory [8], or on the study of particular models based primarily on numerical treatments [7]. A more “qualitative” understanding of the behavior of the solutions, based on the identification of the relevant time and length scales, and on the analytical study of the solution in various limiting regime, has received significantly less attention.

Our goal in this paper is to perform this program for a simple model, introduced by Guéant et al. in 2010 [15], called the seminar problem to be described in more details below. The essential point here is that this “mean field game model” is in some sense very close to the everyday “physicists’ mean field” since all agents are interacting only through a very simple “field” which is actually a simple number, the time T at which the seminar actually starts. This particular feature allows for an analytical approach, similar in spirit to the physicists’ one: For fixed T , the behavior of each agent becomes independent on the other, making the associated problem to be solvable to a large extent; then, for a given distribution of agents, the actual value of T can be evaluated by a self-consistency procedure. The main interest in this model is to provide a fully understandable toy model on which one can develop its own intuition and tools before tackling the full complexity of mean field game models.

The paper is organized as follows: In Section 2 we introduce the seminar problem in detail and show that its resolution involves two essentially independent parts: a system of coupled (Hamilton–Jacobi–Bellman and Kolmogorov) differential equations on one hand, and a self-consistency problem on the other. Sections 3 and 4 address the Hamilton–Jacobi–Bellman and Kolmogorov equations, respectively. Various limiting regimes are studied in detail for both. Moreover, we show that an exact solution to these coupled differential equations can actually be given in a closed form. The self-consistency condition determining the effective beginning of the seminar T is discussed in Section 5, eventually leading to the construction of a “phase diagram” for this toy model. Concluding remarks are gathered in Section 6. The paper is completed by three Appendices where technical computations are shown.

2. The seminar problem

The model

Consider a corridor at the end of which is a seminar room. A seminar is planned at time \bar{t} but people know that in practice, it will only begin when a large enough proportion of the lab members θ (known), will be seated.

The members of the laboratory thus move according to the following considerations: They do not want to arrive too early in the seminar room because they do not particularly enjoy waiting idly as the room fills. On the other hand they are aware that the lab director and the seminar organizers will already be in the room at time \bar{t} , and will frown upon late comers. Furthermore they really want to understand the content of the seminar and are concerned that missing the actual beginning might not help in this respect.

For every agent, this is summarized by the following cost function associated with the arrival time t :

$$c(t) = \alpha[t - \bar{t}]_+ + \beta[t - T]_+ + \gamma[T - t]_+, \quad (1)$$

where T is the effective beginning time of the seminar. In Eq. (1), α , β and γ are positive real numbers and respectively quantify the sensitivity to social pressure, the desire not to miss the beginning of the seminar, and the reluctance to useless waiting. We assume these parameters to be the same for all members of the laboratory. We also assume ($\gamma < \alpha$) so that the cost $c(t)$ is actually minimal for the official starting time \bar{t} .

The corridor is represented by the negative half-line $]-\infty, 0]$, and the seminar room is located at $x = 0$. At time $t = 0$, people leave their office to go to the seminar. Each member of the laboratory $i = 1 \dots N$, controls her drift $a_i(t)$ toward the seminar room but is subject to random perturbations (stopping to discuss with somebody, going back to take a pen and then giving up the idea, or speeding up to catch up a friend for example), modeled by a Gaussian white noise of variance σ^2 . A given participant thus moves according to a noisy dynamics:

$$dX_i = a_i(t) dt + \sigma dW_i(t) \quad (2)$$

where,

$X_i(t)$ is the agent position at time t ,

$a_i(t)$ is her drift at the same time,

$dW_i(t)$ is a normal white noise.

Again, except for their initial positions, all agents have the same characteristics.

In addition to the cost $c(t)$ associated to the arrival time (Eq. (1)), agents dislike having to rush on their way to the seminar room and the total cost function therefore includes a term quadratic in the (controlled) drift $a_i(t)$. An agent leaving her workplace x_0 at $t = 0$ has thus to adapt her drift in order to minimize the expected cost

$$J_T[a] = \mathbb{E} \left[c(\bar{t}) + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} a_i^2(\tau) d\tau \right] \quad (3)$$

associated with Eq. (2) and the initial condition $X(t = 0) = x_0 < 0$. In Eq. (3) $\tilde{\tau}$ is the first passage time at $x = 0$

$$\tilde{\tau} = \inf\{t : X(t) = 0\}, \tag{4}$$

and \mathbb{E} is the expectation with respect to the noise.

We define $N(t)$ as the cumulative distribution of arrival time (the percentage of people arrived before t). If the quorum is met before the official time \bar{t} of the seminar, this latter starts exactly at \bar{t} . If on the other hand the quorum is met at a later time, T is determined by the self-consistency relation $N(T) = \theta$ (more formally $T = \inf\{t \geq \bar{t} : N(t) \geq \theta\}$).¹

Within the mean field approximation, the total number of researchers in the lab is assumed to be large enough that the individual choices of a given agent, and thus her arrival time, cannot have any significant impact on T . Each agent should thus solve the optimization problem Eqs. (2)–(3) for herself, assuming T fixed. Introducing the value function

$$u(x, t) = \min_{a_i(t)} \left\{ \mathbb{E} \left[c(\tilde{\tau}) + \frac{1}{2} \int_t^{\tilde{\tau}} a_i^2(\tau) d\tau \right] \right\} \tag{5}$$

subject to the initial condition $X(t) = x$, this optimization problem is equivalent to the Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equation (see e.g. Ref. [16]):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x = 0, t) = c(t), \end{cases} \tag{6}$$

and the optimal drift is given by

$$a(x, t) = -\partial_x u(x, t). \tag{7}$$

The second hypothesis underlying the mean field approximation is that, beyond the total size of the agent population, the agent density itself is large enough that the distribution of agents is self-averaging: therefore everything happens as if at any given location and time, each realization of the noise was experienced by somebody. Assuming a (normalized) initial density of participants $m_0(\cdot)$ at time $t = 0$, Eq. (2) thus implies that this density will evolve under the Kolmogorov equation (see e.g. Ref. [17]):

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial am}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = 0 \\ m(x = 0, t) = 0 \\ m(x, t = 0) = m_0(x). \end{cases} \tag{8}$$

Once this equation is solved, the quorum condition

$$N(T) = \left[1 - \int_{-\infty}^0 m(x, T) \right] = \theta \quad (\text{if } T > \bar{t}) \tag{9}$$

(or $N(T) \geq \theta$ if $T = \bar{t}$) provides a self-consistent condition which has to be fulfilled if T is indeed the actual starting time of the seminar.

General strategy

The toy model that we just described depends on a few parameters which play different roles. Some of these parameters are just “numbers”. For instance the official time of the seminar \bar{t} , which mainly fixes a time scale. Or the parameters α , β and γ of the cost function $c(t)$ Eq. (1) which, as we shall see, govern the typical amplitude of the drift velocity. In the same way the noise strength σ will govern the diffusion velocity.

Another parameter of the problem is the initial distribution of agents $m_0(x)$. Being a function rather than just a number it is a little bit more difficult to characterize simply. It defines a mean initial position $\langle x \rangle_0$, but also moments of arbitrary order, which may introduce various length scales into the problem.

We are helped here by the linear character of the Kolmogorov equation. Indeed introducing the elementary solutions $G(x, t|x_0)$ which are the solutions of Eq. (8) with a Dirac mass $\delta(x - x_0)$ as initial condition, the solution for an arbitrary $m_0(x)$ is obtained through the convolution

$$m(x, t) = \int_{-\infty}^0 dx_0 G(x, t|x_0) m_0(x_0).$$

¹ Strictly speaking, the effective starting time T is a random event (a random stopping time). Here we assume that in the mean field limit of the present model, this event becomes deterministic so that we can confuse it with its expectation for almost all realizations.

Therefore, introducing

$$\rho(x_0, t) \equiv \int_{-\infty}^0 dx G(x, t|x_0), \quad (10)$$

which thus measure the proportion of agents starting from x_0 who have not yet reached the seminar room at time t , the self-consistent condition Eq. (9) reads

$$\int_{-\infty}^0 dx_0 \rho(x_0, T) m_0(x_0) = \bar{\theta} \quad (\text{if } T > \bar{t}), \quad (11)$$

with $\bar{\theta} = (1 - \theta)$ the proportion of agents still in the corridor when the quorum is met.

The solution of the self consistent problem can therefore be split quite neatly in two distinct parts. The first part will be to analyze, and solve, the Hamilton–Jacobi–Bellman and Kolmogorov equations (6) and (8) assuming T known. More specifically, the goal in this first part will be to compute the function $\rho(x_0, T)$ for arbitrary x_0 and T . This is what we shall do in the two following sections. For this part we obviously do not need to specify what is $m_0(x_0)$.

Once $\rho(x_0, T)$ is known, the self consistent problem reduces to Eq. (11). It then of course involves the initial density $m_0(x_0)$, as well as $\rho(x_0, T)$, but this latter quantity summarizes all the required information, beyond $m_0(x_0)$, about the system. This second aspect of the problem will be addressed in Section 5.

3. Resolution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation

Except for its rather non-standard boundary conditions, the HJB equation (6) is closely related to a Burger’s equation, and it can in the same way be solved exactly through a rather standard Cole–Hopf transformation. Before we do so however, we find it useful to consider first the limiting behaviors of very small and very large σ ’s.

3.1. Small σ

To understand the regime of very weak noise, let us consider the noiseless limit of Eq. (6), which takes the form of the Hamilton–Jacobi equation

$$L(\partial_t u, \partial_x u) = 0, \quad (12)$$

associated with the free propagation Hamiltonian

$$L(E, p) \equiv E - \frac{p^2}{2} \quad (13)$$

complemented with the boundary conditions

$$u(x = 0, t) = c(t). \quad (14)$$

Introducing a fictitious time ξ and noting $\dot{(\)} = d(\)/d\xi$ the corresponding time derivative, the Hamilton dynamics associated with L is given by [18,19]

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{\partial L}{\partial E} = 1 & \dot{E} &= -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \dot{x} &= \frac{\partial L}{\partial p} = -p & \dot{p} &= -\frac{\partial L}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Solution of the Hamilton–Jacobi equation are typically obtained through the method of characteristics. Here, this amounts to build a one parameter family of rays $\mathbf{r}_{\tilde{\tau}}(\xi)$ ($\mathbf{r} \equiv (E, t, p, x)$) indexed by $\tilde{\tau}$, such that $\mathbf{r}_{\tilde{\tau}}(\xi)$ is solution of the Hamilton’s equations (15), and with initial conditions $\mathbf{r}(\xi = 0) = (E_0, t_0, p_0, x_0)$ imposed by Eq. (14) as

$$\begin{aligned} t_0 &= \tilde{\tau} \\ x_0 &= 0 \\ E_0 &= \frac{dc}{dt}(\tilde{\tau}) \equiv c'(\tilde{\tau}) \\ L(E_0, p_0) &= 0. \end{aligned}$$

This last equation imposes

$$p_0 = -\sqrt{2c'(\tilde{\tau})}. \quad (16)$$

Once this one parameter family of rays is build, the solution of the Hamilton–Jacobi equation just reads (for $t < \tilde{\tau}$, and thus negative ξ)

$$\begin{aligned}
 u(x = x_{\tilde{\tau}}(\xi), t = t_{\tilde{\tau}}(\xi)) &= c(\tilde{\tau}) + \int_0^{\xi} (E\dot{t} + p\dot{x})d\xi \\
 &= c(\tilde{\tau}) - (\tilde{\tau} - t)c'(\tilde{\tau}) - x\sqrt{2c'(\tilde{\tau})}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

As illustrated on Fig. 1 the quarter plan ($x < 0, t > 0$) has to be divided in four different regions,

$$\begin{cases}
 \text{Region (0) : } & x \leq -\sqrt{2(\alpha + \beta)}(T - t) \\
 \text{Region (1) : } & -\sqrt{2(\alpha + \beta)}(T - t) \leq x \leq -\sqrt{2(\alpha - \gamma)}(T - t) \\
 \text{Region (2) : } & \sqrt{2(\alpha - \gamma)}(T - t) \leq x \leq -\sqrt{2(\alpha - \gamma)}(\bar{t} - t) \\
 \text{Region (3) : } & -\sqrt{2(\alpha - \gamma)}(\bar{t} - t) \leq x < 0,
 \end{cases}
 \tag{18}$$

for which the application of Eq. (17) is somewhat different. In region (0) for instance the relevant rays reach $x = 0$ at $\tilde{\tau} > T$ which corresponds to $c'(\tilde{\tau}) = (\alpha + \beta) \equiv c'_0$. In the same way for region (2) $\bar{t} < \tilde{\tau} < T$ and $c'(\tilde{\tau}) = (\alpha - \gamma) \equiv c'_2$.

Region (1) then corresponds to $\tilde{\tau} = T$, where $c'(\tilde{\tau})$ is discontinuous. It can be easily justified (e.g. by viewing $c(t)$ as the limit of a family of differentiable functions) that the correct procedure here is to use all the rays emerging from ($x = 0, t = T$) with all possible values of $c'(\tilde{\tau})$ within the interval $(\alpha - \gamma), (\alpha + \beta)$ (and thus all velocities p_0 within $[\sqrt{2(\alpha - \gamma)}, \sqrt{2(\alpha + \beta)}]$).

In the same way region (2) corresponds to $\tilde{\tau} = \bar{t}$, and one should use all the rays emerging from ($x = 0, t = \bar{t}$) with all possible values of $c'(\tilde{\tau})$ within $]0, (\alpha - \gamma)[$ (and thus all velocities p_0 within $]0, \sqrt{2(\alpha - \gamma)}[$).

Note that because $c'(\tilde{\tau})$ is negative for $\tilde{\tau} < \bar{t}$, Eq. (16) has no real solution for p_0 and it is not possible to fulfill the boundary conditions Eq. (14) in this time interval for the Hamilton–Jacobi equation. In a small layer near the line, ($x = 0, 0 < t < \bar{t}$), the fact the Hamilton–Jacobi equation is first order when the HJB equation is second order implies a qualitative difference between the limit of small σ 's and $\sigma = 0$.

Acknowledging this, and keeping in mind the procedure explained above to handle the discontinuities of $c'(\tilde{\tau})$, Eq. (17) gives an explicit solution for the Hamilton–Jacobi equation (12)–(14). What will be needed though as an input for the Kolmogorov equation (8) is not so much $u(x, t)$ itself than its spatial derivative $-\partial_x u$ which through Eq. (7) specifies the drift $a(x, t)$ in Eq. (8). From Eq. (17) we see that $-\partial_x u$ is just the velocity $-p_0$ of the free motion on the corresponding ray. We obtain therefore the following results,

$$a(x, t) = -\partial_x u(x, t) = \begin{cases} \sqrt{2(\alpha + \beta)} \equiv a_0 & \text{in Region (0)} \\ \frac{-x}{(T - t)} & \text{in Region (1)} \\ \sqrt{2(\alpha - \gamma)} \equiv a_2 & \text{in Region (2)} \\ \frac{-x}{(\bar{t} - t)} & \text{in Region (3)} \end{cases}
 \tag{19}$$

valid as $\sigma \rightarrow 0$. On Fig. 1, this velocity is shown as the inverse slope of the arrows.

In the deterministic limit considered in this subsection a finite fraction of the agents (namely all those starting in region (1)) arrive exactly at time T . The quorum condition Eq. (9) is therefore ill-defined in this limit.

3.2. Large σ

Let us consider now the HJB equation (6) in the limit of very large σ 's. This amounts here to neglect the nonlinear term $\frac{1}{2}(\partial_x u)^2$, yielding the backward diffusion equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x = 0, t) = c(t). \end{cases}
 \tag{20}$$

In this subsection it will be convenient to use for the boundary conditions a slightly modified version $c_A(t)$ of the cost function Eq. (1),

$$\begin{cases} c_A(t) = c(t) & \text{for } t \leq \Lambda \\ c_A(t) = c(\Lambda) & \text{for } t \geq \Lambda \end{cases}
 \tag{21}$$

with ($\Lambda \gg \bar{t}, T$) a very large time (one may imagine for instance that once the seminar is over, there is less marginal incentive to reach the seminar room).

There are many ways to derive a solution of Eq. (6), but a relatively transparent one consists in going back to the original optimization problem, i.e. to define $u(x, t)$ as Eq. (5). Indeed, in the limit of very large σ 's, this optimization is

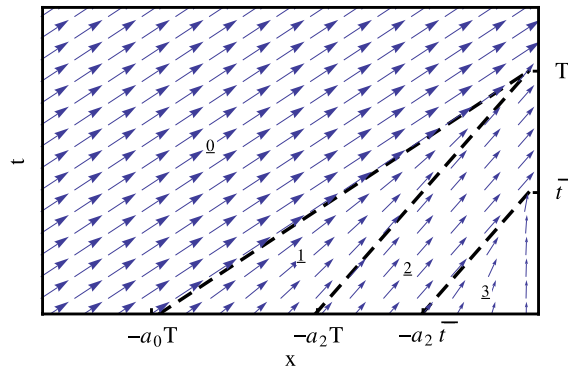


Fig. 1. Regions of the space (x, t) ($x < 0, t > 0$) and the corresponding drift fields for $\sigma \rightarrow 0$ (cf. Eq. (19)) [$a_0 = \sqrt{2(\alpha + \beta)}, a_2 = \sqrt{2(\alpha - \gamma)}$].

straightforward: if the motion is overwhelmingly dominated by the noise, the best strategy for an agent is just to renounce paying the cost of the drift, and hope that the diffusive motion will bring her in time for the seminar.

Let us note

$$G_0(x, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right) \tag{22}$$

the elementary solution of the free diffusion problem. The distribution of time of first passage at $x = 0$ for free diffusion started at t_0 in $x_0 < 0$ is given by [16]

$$P(t) = -\frac{d}{dt} \int_{+x_0}^{-x_0} dx G_0(x, t - t_0).$$

The value function $u(x, t)$ is just the average of the cost function $\tilde{c}(t) = c_A(t)$ with this first passage time distribution. It therefore reads

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} u(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} dt \tilde{c}(t) P(t) \tag{23}$$

$$= -x_0 \int_0^{\infty} dt \frac{\tilde{c}(t + t_0)}{t} G_0(x_0, t). \tag{24}$$

(The fact that $G_0(x, t)$ is the elementary solution of the diffusion equation has been used to transform (23) into (24).)

Note that Eq. (24) would be valid for any choice of the final cost function $\tilde{c}(t)$ as long as the integral converges in $+\infty$, i.e. as long as $\tilde{c}(t)$ grows less than linearly at infinity. Thus the need to modify the large t behavior of $c(t)$ in this subsection.

3.3. Arbitrary σ

As was mentioned at the beginning of this section, the HJB equation can actually be solved for arbitrary values of σ . Indeed, using the Cole–Hopf transformation i.e. setting $u(x, t) = -\sigma^2 \ln \phi(x, t)$ yields a linear equation for $\phi(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ \phi(x = 0, t) = e^{-\frac{c(t)}{\sigma^2}}. \end{cases} \tag{25}$$

Its solution is thus the same as Eq. (24) with $\tilde{c}(t) \equiv \exp[-c(t)/\sigma^2]$ as cost function. We obtain in this way

$$\phi(x, t) = -x \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{c(t+\tau)}{\sigma^2}}}{\tau} G_0(x, \tau) d\tau \tag{26}$$

$$u(x, t) = -\sigma^2 \ln \phi(x, t). \tag{27}$$

An explicit expression of $\phi(x, t)$ in terms of elementary functions is given in Appendix A (see Eq. (A.4)). We just stress here that, because for t larger than T the cost function Eq. (1) becomes linear ($c(t) = (\alpha + \beta)t - (\alpha\bar{t} + \beta T)$), $\phi(x, t)$ takes a particularly simple form (see Eq. (A.5)) from which the value function is deduced as

$$u(x, t > T) = -\sqrt{2(\alpha + \beta)}x - c(t). \tag{28}$$

As a consequence, for times beyond T the drift $a(x, t)$ is just the constant

$$a(x, t > T) = \sqrt{2(\alpha + \beta)} = a_0. \tag{29}$$

From Eqs. (26)–(27), the limiting behaviors Eqs. (19)–(24) can be recovered. This is particularly simple, for instance, in the large σ regime if one uses the regularized version $c_A(t)$ of the cost function. Indeed in that case we see that as soon as $\sigma^2 \gg c(\Lambda)$, we can expand the exponential in Eqs. (26) and the logarithm in Eqs. (27), and $u(x, t)$ reduces to (24) in lowest order in $1/\sigma^2$. Things are slightly trickier for the true (non regularized) cost function $c(t)$ since however large σ maybe, the $+\infty$ limit of the integral in Eqs. (26) is such that $c(t + t_0) \gg \sigma^2$ (which actually simply provides an effective cutoff for the integral). We find in this case (see Appendix B) that

$$\phi(x, t) = \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} |x| \sqrt{2(\alpha + \beta)} - c(t) \right] + O(\sigma^{-2}), \tag{30}$$

implying $a(x, t) = \sqrt{2(\alpha + \beta)}$. (If one considers furthermore the diffusive regime $a_0|x| \gg \sigma^2$, where the above approximation is most useful, one can further show that Eq. (30) is valid up to $O(\sigma^{-3})$ corrections.)

When $\sigma^2 \rightarrow 0$, the integral in Eq. (26) can be approximated using the steepest descent approximation in regions (0) and (2); or noting that it is dominated by the boundary contributions at $t + t_0 = T$ in regions (2) or $t + t_0 = \bar{t}$ in region (3) (see Eq. (18) or Fig. 1). Details of the calculations and the precise condition under which the approximation applies are given in Appendix C. The drift velocity which can be expressed as $a(x, t) = \sigma^2 \partial_x \phi / \phi$ is computed along the same lines, and one recovers in this way exactly Eq. (19), except for a small region near $\{x = 0; 0 \leq t \leq \bar{t}\}$ scaling as σ^2 in regions (0) and (2) and as σ in region (1) and (3).

To conclude this section, we note that the drift $a(x, t)$ obtained from the agents' optimization is exactly $\sqrt{2(\alpha + \beta)}$ for $t > T$, but is actually close to this value in the entire region (0) already for small σ 's. As σ increases, the part of the domain for which $a(x, t) \simeq \sqrt{2(\alpha + \beta)}$ increases beyond region (0), and extends to essentially all positions and times for large σ 's. This evolution of the drift with σ is illustrated in Fig. 2.

4. Resolution of the Kolmogorov equation

We turn now to the resolution of the Kolmogorov equation. As we shall see below, this equation can, in the particular case we consider here, also be solved exactly. Before proceeding to the description of this exact solution, we find it useful nevertheless once again to discuss briefly the two limiting cases.

4.1. Limiting cases

4.1.1. Case $\sigma^2 \rightarrow 0$

If we just set σ to 0, the Kolmogorov equation reduces to:

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(a(x, t)m)}{\partial x} = 0 \\ m(x, t = 0) = m_0(x), \end{cases} \tag{31}$$

with the velocity $a(x, t)$ given by Eq. (19).

Noting $\frac{D}{Dt}$ the total derivative attached to the flow $a(x, t)$, Eq. (31) reads $Dm/Dt = 0$ in regions (0) and (2) of Fig. 1, $Dm/Dt = -x/(T - t)$ in region (1), and $Dm/Dt = -x/(\bar{t} - t)$ in region (3). This yields (see e.g. Ref. [18])

$$m(x, t) = \begin{cases} m_0 \left(x - \sqrt{2(\alpha + \beta)}t \right) & \text{in Region (0)} \\ \frac{T}{T-t} m_0 \left(x \frac{T}{T-t} \right) & \text{in Region (1)} \\ m_0 \left(x - \sqrt{2(\alpha - \gamma)}t \right) & \text{in Region (2)} \\ \frac{\bar{t}}{\bar{t}-t} m_0 \left(x \frac{\bar{t}}{\bar{t}-t} \right) & \text{in Region (3)}. \end{cases} \tag{32}$$

In other words, all agents starting at $t = 0$ from a position $x_0 < -\sqrt{2(\alpha + \beta)}T$ will arrive after T , all agents starting at $t = 0$ from a position $x_0 > -\sqrt{2(\alpha - \gamma)}T$ will arrive before T , and all agents between $-\sqrt{2(\alpha + \beta)}T$ and $-\sqrt{2(\alpha - \gamma)}T$ will arrive exactly at time T . Therefore, at $\sigma = 0$, the function $\rho(x_0, t)$ needed to define the self consistent condition Eq. (11) become singular at $t = T$. We shall see below how this behavior is regularized for a small but finite σ .

4.1.2. Case $\sigma^2 \rightarrow +\infty$

When $\sigma^2 \rightarrow +\infty$, we have seen that the drift velocity $a(x, t)$ tends toward the constant value $a_0 = \sqrt{2(\alpha + \beta)}$. Intuitively, this is due to the fact that when optimizing her drift, the agent does so not so much having in minds the median arrival time but rather try to ensure herself against possible late arrival due to the noise. In this limit the motion of the agents

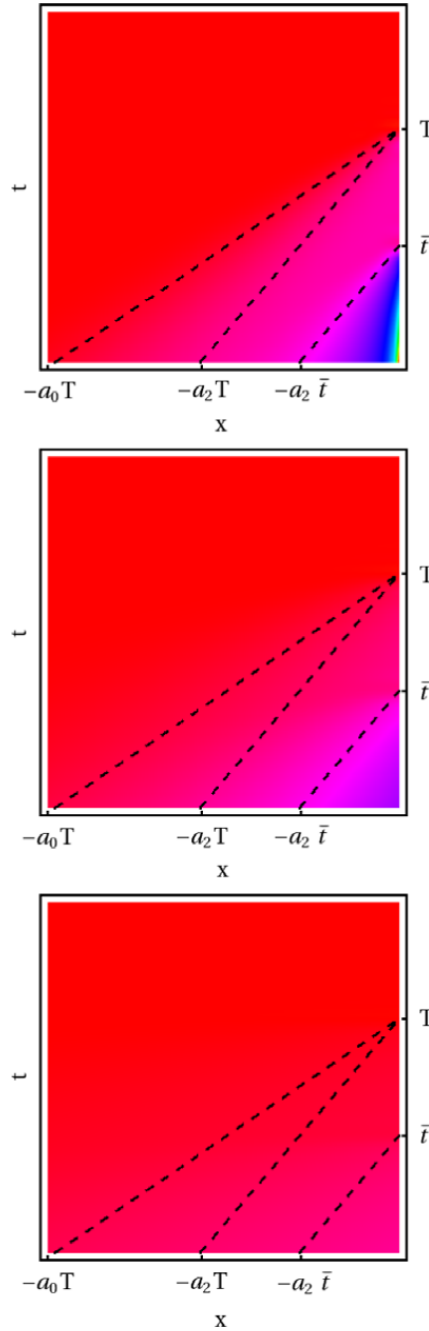


Fig. 2. Evolution of the drift with σ in heat representation. Top : $\sigma = 0.5$, middle: $\sigma = 2$, bottom: $\sigma = 7[\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1, \bar{t} = 1, T = 2]$.

becomes extremely simple, as the mass of participants is transported by an advection–diffusion equation with constant drift a_0 and diffusion coefficient $\frac{\sigma^2}{2}$. Forgetting for now the small technicalities existing for small $|x|$, this would imply that we should simply consider the Kolmogorov equation with constant drift

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = 0 \\ m(x = 0, t) = 0 \\ m(x, t = 0) = m_0(x). \end{cases} \quad (33)$$

Explicit solutions of Eq. (33) are well known [20], and in particular the elementary solution for an initial distribution $m_0(x) = \delta(x - x_0)$ is given by

$$G^{\text{CD}}(x, t|x_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x - x_0 - a_0 t)^2}{2\sigma^2 t}\right) - \exp\left(\frac{2a_0 x}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{(x + x_0 + a_0 t)^2}{2\sigma^2 t}\right) \right\}. \quad (34)$$

We shall see below that this expression indeed provides the leading large σ asymptotic approximation of the true solution.

4.2. Full resolution of the coupled problem

We turn now to the solution of the Kolmogorov equation for an arbitrary σ . For this purpose, let us write the agent density as [21]

$$m(x, t) = e^{-u(x,t)/\sigma^2} \Gamma(x, t), \quad (35)$$

with $u(x, t)$ the solution of the (HJB) equation (6), which is thus such that $-\partial_x u = a(x, t)$. Inserting Eq. (35) into Eq. (8), we find that:

$$\sigma^2 \partial_t \Gamma - \frac{\sigma^4}{2} \partial_{xx}^2 \Gamma = \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (36)$$

But $u(x, t)$ is a solution of the (HJB) equation (6). The right hand side of Eq. (36) is therefore uniformly zero, and this equation can be written as a simple diffusion equation without drift

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} = 0 \\ \Gamma(x=0, t) = 0 \quad \text{and} \quad \Gamma(x, t=0) = e^{\frac{u(x,t=0)}{\sigma^2}} m_0(x). \end{cases}$$

Noting

$$G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0) = (G_0(x, t|x_0) - G_0(x, t|-x_0)) \quad (37)$$

the elementary solution (Green's function) for the diffusion without drift but with absorbing boundary in zero, obtained straightforwardly using the method of image from the elementary solution of the free diffusion problem Eq. (22), we find

$$\Gamma(x, t) = \int_{-\infty}^0 G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0) e^{u(x_0, t=0)/\sigma^2} m_0(x_0) dx_0.$$

Inserting the expression Eq. (27) of $u(x, t)$ yields

$$m(x, t) = \phi(x, t) \int_{-\infty}^0 \frac{G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0)}{\phi(x_0, t=0)} m_0(x_0) dx_0, \quad (38)$$

and in particular, setting the initial distribution as a Dirac mass located in x_0 , we get for the elementary solution

$$G(x, t|x_0) = \frac{\phi(x, t)}{\phi(x_0, t=0)} \times G_0^{\text{abs}}(x, t|x_0). \quad (39)$$

The self consistency Eq. (11) only involves $\rho(x_0, t=T)$, and thus we need to compute $G(x, t|x_0)$ at $t=T$, which is in the range for which ϕ can be expressed through Eq. (A.5). After integration over the final position x we obtain

$$\rho(x_0, T) = \frac{e^{-c_0(T)/\sigma^2}}{\phi(x_0, t=0)} \int_{-\infty}^0 dx e^{xa_0/\sigma^2} G_0^{\text{abs}}(x, T|x_0). \quad (40)$$

With Eq. (40) we actually obtain an *exact solution* of the first part of the program defined in Section 2. Indeed, both $\phi(x_0, t=0)$ (cf. Appendix A) and the integral on the r.h.s. of Eq. (40) can be written explicitly in terms of the complementary error function erfc and elementary functions. We thus have an *exact* and *explicit* expression for the quantity $\rho(x_0, T)$ required to address self consistency (cf. Eq. (11) and the discussion below). Before we do so however, we will consider the large and small σ asymptotics of this exact result; and relate them to the expressions obtained in Section 4.1.

4.3. Asymptotic regimes

For large σ 's, and more specifically when the condition (B.4) is met, the approximation (30) can be used in Eq. (39) and we get

$$\begin{aligned} G(x, T|x_0) &= e^{-\frac{1}{\sigma^2}(c(T)-c(0))} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x_0-x)a_0} G_0^{\text{abs}}(x, T|x_0) \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(c(0)-c_0(0))} G^{\text{CD}}(x, T|x_0). \end{aligned} \quad (41)$$

Up to the factor $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(c(0)-c_0(0))} = 1 + O(\sigma^{-2})$, one thus recovers the elementary solution of the convection–diffusion equation (34) so that

$$\begin{aligned} \rho(x_0, T) &\simeq \int_{-\infty}^0 G^{\text{CD}}(x, T|x_0) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{erfc} \left(\frac{x_0 + a_0 T}{\sqrt{2\sigma^2 T}} \right) - e^{-2a_0 x_0/\sigma^2} \text{erfc} \left(-\frac{x_0 - a_0 T}{\sqrt{2\sigma^2 T}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

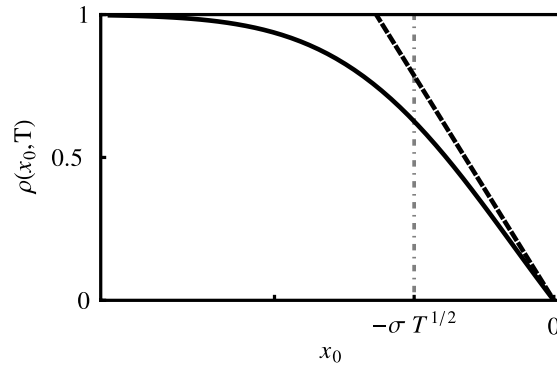


Fig. 3. Solid line: asymptotic form Eq. (42) of $\rho(x_0, T)$ valid for large σ 's (i.e. under the condition (B.4)) and for T such that $(a_0T \ll \sqrt{\sigma^2 T})$; Dashed: linear behavior Eq. (43) corresponding to the diffusion regime. [$\alpha = 2, \beta = 1, T = 1.1$ and $\sigma^2 = 49$.]

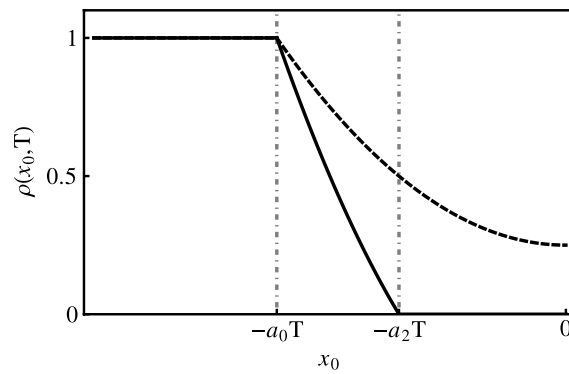


Fig. 4. Asymptotic form of $\rho(x_0, T)$ for σ small. Full line: $T > \bar{t}$; dashed: $T = \bar{t}$. [$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1, T = 2$.]

As we shall see in Section 5, this equation will be mainly useful in the diffusion regime where, beyond the condition (B.4) one may assume $x_0^2 \ll \sigma^2 T$. In this case Eq. (42) simplifies to (see Fig. 3)

$$\rho(x_0, T) = -\frac{2x_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{a_0^2 T}{2\sigma^2}\right). \tag{43}$$

Another asymptotic regime is obtained when the diffusion time $t_\sigma = x_0^2/\sigma^2$ is much larger than the drift time $t_d(x_0)$ (defined as the arrival time for the participant located at x_0 when $\sigma = 0$; thus here $t_d = |x_0|/a_0$ in region (0), $t_d = |x_0|/a_2$ in region (2), $t_d = T$ in region (1), and $t_d = \bar{t}$ in region (3)). For small σ 's this condition applies for most of the x_0 axis, except a boundary layer in the region $x_l \leq x \leq 0$, where x_l is defined by $\sigma^2 \gg \frac{x_l^2}{\bar{t}}$.

In this asymptotic regime the Laplace method [22] can be used to evaluate the integrals occurring in Eq. (40) (we detail the calculation of $\phi(x_0, 0)$, in Appendix C, and the evaluation of the numerator is done along the same lines). We get

$$\rho(x_0, T) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \leq -Ta_0 \\ \frac{x_0^2}{T^2} - a_2^2 & \text{if } -Ta_0 \leq x_0 \leq -Ta_2 \\ \frac{a_0^2 - a_2^2}{a_0^2 - a_2^2} & \text{if } -Ta_0 \leq x_0 \leq -Ta_2 \\ 0, & \text{if } x_0 \geq -Ta_2. \end{cases} \tag{44}$$

We see in this way how the singular behavior of the strict $\sigma = 0$ limit is regularized for small but non-zero sigma (cf. Eq. (32) and the discussion below). An illustration of this function is given in Fig. 4.

As discussed in Appendix C, Eq. (44) requires to be valid that T is sufficiently distant from \bar{t} (cf. Eq. (C.6) for the precise condition). If for instance $T = \bar{t}$ one would have instead

$$\rho(x_0, T = \bar{t}) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \leq -\bar{t}a_0 \\ \frac{x_0^2}{2\bar{t}^2} - c'_3 & \text{if } -\bar{t}a_0 \leq x_0 \leq 0 \\ c'_0 - c'_3 & \text{if } -\bar{t}a_0 \leq x_0 \leq 0 \end{cases} \tag{45}$$

with $c'_0 = (\alpha + \beta)$ and $c'_3 = -\gamma$ the slopes of $c(\tau)$ for $\tau > T$ and for $\tau < \bar{t}$ respectively. The shape of this function is illustrated as a dashed line in Fig. 4. Note that Eq. (45) is valid only for $|x_0|$ large enough that the motion is dominated by convection, and in particular does not apply at $x_0 = 0$, where in any case one should have $\rho(x = 0, t) \equiv 0$. The condition of validity of Eq. (45) can be shown for small σ 's to read $|x_0| \gg (a_0^2 \bar{t}^{3/2}/\sigma) \exp(-\gamma \bar{t}/\sigma^2)$.

5. Self-consistent condition

It is time now to answer the question: “when does the meeting start?”. Answering this question implies taking into account the coupling between agents mediated by the mean-field condition, and means in practice solving the self-consistent Eq. (11) with the form of the function $\rho(x_0, T)$ given by Eq. (40).

One thing worth noticing already is that having an explicit expression for $\rho(x_0, T)$ could provide an alternative route – to the one given by Guéant et al. [15] – for the proof of the existence of the solution for T , which is associated with the continuity of $\rho(x_0, T)$. This route is of course restricted to particular models such as the present one. In this section however, we are not so much interested in this “proof of existence” than into a qualitative description, and whenever possible a more quantitative one, of the behavior of T as a function of the various parameters of the problem.

As stressed in Section 2, among these parameters the initial density of agents $m_0(x_0)$ plays a specific role. Indeed, the other parameters, namely (α, β, γ) characterizing the cost function $c(t)$, the official time of seminar \bar{t} , and the intensity of the noise σ , enter through the function $\rho(x_0, T)$, and their specific role has been discussed at length when analyzing the property of this function. The initial density $m_0(x_0)$ on the other hand enters only now in the discussion since the behavior of the agents is coupled only through T . Furthermore, $m_0(x_0)$ being a function, it may have a infinite variety of shape, and it is clearly not realistic to discuss the more esoteric among them. In the following, we shall therefore restrict our study to initial distributions $m_0(x_0)$ that can be characterized by their mean value $\langle x_0 \rangle$ and their variance Σ^2 , and thus implicitly assume that Σ sets a scale below which the variations of $m_0(x_0)$ are small.

The mean value $\langle x_0 \rangle$ will mainly determine how much T is influenced, or not, by the official time of the seminar. Clearly, if $\langle x_0 \rangle$ is close enough to zero, almost all the mass will be close to the origin of the negative semiaxis and there is a point where the noise σ will be sufficient to fill the seminar room, and the quorum will be met before the official beginning time, giving $T = \bar{t}$. For larger, but not too large $|\langle x_0 \rangle|$, agents have a real possibility to arrive in the seminar room near, or even a bit before, \bar{t} , which will influence their optimization choices, and eventually lead to a self consistent T which depend on \bar{t} , although $T > \bar{t}$. For very negative $\langle x_0 \rangle$ on the other hand, there is very little chance for an agent to arrive before \bar{t} . Indeed, as we have seen in Section 3, it is never optimal for an agent to choose a drift velocity higher than $a_0 = \sqrt{2c'_0}$, where c'_0 is the slope of the cost function $c(t)$ for time $t \geq T$. As a consequence, if $|\langle x_0 \rangle| \gg a_0 \bar{t}$, the agents determining the quorum condition (i.e. the last ones to arrive before the quorum is met) will never consider the possibility to arrive before \bar{t} , and thus the official starting time of the seminar will play no role in setting T .

The parameter Σ on the other hand will balance the effect of the Kolmogorov diffusion term in the determination of T . Indeed, a set of agents starting from an identical initial location will have spread on a distance $\sigma\sqrt{T}$ at time T . So for

$$\Sigma \ll \sigma\sqrt{T} \quad (46)$$

the diffusion will essentially erase any of the initial features of $m_0(x_0)$, while for

$$\Sigma \gg \sigma\sqrt{T} \quad (47)$$

diffusion plays little role for the transport of $m(x, t)$. Keeping in mind this general picture, we turn now to a more detailed description of the various limiting cases.

5.1. Self consistent condition in the diffusion regime (large σ 's)

We characterize the diffusion regime by the fact that σ is large enough (condition (B.4)) and that, for the relevant positions x_0 , the time of drift is much larger than the diffusion time, i.e. here

$$|x_0|a_0 \ll \sigma^2. \quad (48)$$

We consider successively narrow initial distributions and wider ones.

5.1.1. Narrow initial distributions

A narrow initial distribution corresponds to a configuration where the initial width Σ is significantly smaller than the spreading $\sigma\sqrt{T}$ acquired because of the noise during the transport—the notion of narrow initial distribution is thus σ -dependent, and this configuration will typically be met when the noise is rather large. In that case the details of the initial distribution become irrelevant and $m_0(x_0)$ can be approximated by a Dirac function $\delta(x_0 - \langle x_0 \rangle)$. The integral Eq. (11) therefore just becomes the simple standard equation

$$\rho(\langle x_0 \rangle, T) = \bar{\theta}, \quad (49)$$

in which $m_0(x_0)$ is entirely characterized by its mean value $\langle x_0 \rangle$. In the large noise regime the conditions (B.4) and (48) hold. Furthermore, we will see that for the self consistent value of T obtained at the end of the process one gets

$$\langle x_0 \rangle^2 \ll \sigma^2 T. \quad (50)$$

Under these conditions, we can use the approximation Eq. (43) for $\rho(x_0, T)$, and Eq. (49) reads $e^{-u}/\sqrt{\pi u} = \bar{\theta}\sigma^2/(a_0\langle x_0 \rangle)^2$, with $u \equiv a_0^2 T/2\sigma^2$.

If $\bar{\theta} \gg a_0|\langle x_0 \rangle|/\sigma^2$, which deep in the diffusive regime will usually hold except for very small $\bar{\theta}$, we get in leading $1/\sigma$ order, $T = \sup(T^*, \bar{t})$, with

$$T^* \simeq \frac{2}{\pi} \frac{\langle x_0 \rangle^2}{\sigma^2 \bar{\theta}^2}. \tag{51}$$

(If $T = T^*$, the condition (50) then just amounts to have $\bar{\theta} \ll 1$, which we assume. If $T = \bar{t}$, the condition (50) is even more easily fulfilled.) T^* is proportional to $\langle x_0 \rangle^2$, and we recover the intuitive result that if the initial distribution is located too close from the seminar room, the noise fills this latter before the official starting time, giving $T = \bar{t}$.

For very small $\bar{\theta}$, there is a range of σ^2 for which even in the diffusive regime (48) one has $\bar{\theta} \ll a_0|\langle x_0 \rangle|/\sigma^2$. In that case

$$T \simeq \frac{2\sigma^2}{a_0^2} \log\left(\frac{a_0|\langle x_0 \rangle|}{\sqrt{\pi}\sigma^2\bar{\theta}}\right), \tag{52}$$

and one can check that (50) holds.

5.1.2. Wide initial distributions

When $\Sigma \gg \sigma\sqrt{T}$ – which since we assume here $\sigma^2 \gg (c(0) - c_0(0))$ implies fairly large Σ 's – the convolution with a Gaussian of width $\sigma\sqrt{T}$ barely changes the distribution. Everything appears then as if the Kolmogorov approximation was dominated by convection.

Let us introduce x_θ such that

$$\int_{-\infty}^{x_\theta} m_0(x_0) dx_0 = \bar{\theta}, \tag{53}$$

which is thus the position of the participant such that a fraction $\bar{\theta}$ of the agents is more distant from the origin. The beginning of the seminar is entirely determined by the time at which the agent starting from this location and evolving in a deterministic way under the influence of the drift $a(x, t)$ (i.e. ignoring the effect of the noise) will arrive.

In the large noise limit that we consider here, the drift is constant and equal to a_0 , and this just gives

$$T = -\frac{x_\theta}{a_0}.$$

(The fact that x_θ is necessarily of the order of or larger than Σ , together with (B.4), implies $T > \bar{t}$.)

5.2. Self consistent condition in the convection regime

In the convection regime, and more precisely under the conditions (C.4)–(C.6), the function $\rho(x, T)$ is well approximated by Eq. (44). We consider below how Eq. (11) can be solved for this form of $\rho(x, T)$ for different ranges of the initial distribution's width Σ .

5.2.1. Narrow initial distributions

For very narrow initial conditions, Eq. (11) can be as before replaced by Eq. (49) which, with Eq. (44), is solved as

$$T = \frac{|\langle x_0 \rangle|}{\bar{a}(\bar{\theta})} \tag{54}$$

$$\bar{a}(\bar{\theta}) \equiv \sqrt{a_2^2 + (a_0^2 - a_2^2)\bar{\theta}}.$$

For small $\bar{\theta}$, Eq. (54) corresponds to $\bar{a}(\bar{\theta}) \simeq a_2$, i.e. to a $\langle x_0 \rangle$ near the lower border of region(1), for which the condition (C.5) might not be fulfilled. Re-inserting Eq. (54) into (C.5) we indeed see that Eq. (54) applies only if

$$\sigma^2 \ll a_0|\langle x_0 \rangle|\bar{\theta}^2. \tag{55}$$

For larger σ 's – or smaller $\bar{\theta}$ – we need to use for $\phi(x, 0)$ in Eq. (40) the uniform approximation Eq. (C.7) valid for x near $-a_2T$. Writing $T = T_0 + \delta T$ with $T_0 = |\langle x_0 \rangle|/a_2$, we find then in linear order

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{a_0^2 - a_2^2}{a_2^2} (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}), \tag{56}$$

with $\bar{\theta}_0 \equiv \sqrt{8\sigma^2/\pi|\langle x_0 \rangle|} a_2/(a_0^2 - a_2^2)$.

The expressions (54)–(56) are clearly independent of the official beginning time of the seminar \bar{t} . The condition (C.6), which is actually required for Eq. (44) to apply, indeed implies that T is sufficiently above \bar{t} to become independent of this latter.

Once $|\langle x_0 \rangle|$ diminishes, and more specifically when it reaches a value close to $a_2 \bar{t}$ or smaller, T will on the other hand approach \bar{t} . It may be interesting then to determine under which condition one has exactly $T = \bar{t}$, i.e. when the quorum is met before the official beginning time \bar{t} .

In the convection regime, $\rho(x, T = \bar{t})$ is described by the expression Eq. (45), and the self consistent condition to obtain $T = \bar{t}$ is that

$$\rho(\langle x_0 \rangle, T = \bar{t}) < \bar{\theta}. \tag{57}$$

The approximation Eq. (45) is however bounded from below by its value at zero, $\gamma/(\alpha + \beta + \gamma)$, which is typically of order one. If, as we assume, $\bar{\theta}$ is small, Eq. (57) will thus not have any solution for $\langle x_0 \rangle$ in the convection regime. As long as the motion of the agents is convective, they will manage to fill the seminar room after, though possibly barely, the official start of the seminar.

If $|\langle x_0 \rangle|$ becomes so small that the motion at such distance is dominated by diffusion, then again one can eventually reach a point where the quorum is met before \bar{t} , implying $T = \bar{t}$. For small σ 's it can be shown that this happens when $|\langle x_0 \rangle| \simeq \sqrt{\pi/2} (a_0^2 \bar{t}^{3/2} / \sigma) (\bar{\theta} / (1 - \bar{\theta})) \exp(-\gamma \bar{t} / \sigma^2)$.

5.2.2. Wider initial distributions

If the width of the initial distribution is non negligible, we need to distinguish two cases. For intermediate values of Σ , namely for Σ 's such that once self-consistency is obtained most of the initial distribution is in the range $] -a_0 T, -a_2 T[$, we can use that in this range the function $\rho(x, T) \simeq (x^2/T^2 - a_2^2)(a_0^2 - a_2^2)$ is a simple polynomial. The convolution with $m_0(x)$ thus simply leads to

$$\int_{-\infty}^0 dx_0 \rho(x, T) m_0(x) = \frac{(\langle x_0 \rangle^2 + \Sigma^2)/T^2 - a_2^2}{a_0^2 - a_2^2},$$

and Eq. (54) has just to be replaced by

$$T = \sqrt{\frac{\langle x_0 \rangle^2 + \Sigma^2}{a_2^2 + (a_0^2 - a_2^2) \bar{\theta}}}. \tag{58}$$

The constraint that the initial distribution fits within $] -a_0 T, -a_2 T[$ implies that Eq. (58) applies only if $\Sigma \ll \bar{\theta} |\langle x_0 \rangle|$, i.e. for not too small $\bar{\theta}$. For smaller $\bar{\theta}$, explicit (but less transparent) expressions can be written down under the less restrictive condition $\Sigma < (a_0 - a_2) T \simeq ((a_0 - a_2)/a_2) |\langle x_0 \rangle|$ for specific forms of the initial distribution (e.g. Gaussian).

If now Σ is large not only on the scale $\sigma \sqrt{T}$ but also on the scale $(a_0 - a_2) T$, another approach can be used. Subtracting Eq. (53) to Eq. (11) and neglecting the variation of $m_0(x_0)$ near x_θ in the whole region (1), we can write that $\int_{-a_0 T}^{-a_2 T} \frac{x_0^2/T^2 - a_2^2}{a_0^2 - a_2^2} dx_0 = \int_{-a_0 T}^{x_\theta} dx_0$, which implies

$$T = -\frac{3}{2} |x_\theta| \left(\frac{a_0^2 - a_2^2}{a_0^3 - a_2^3} \right).$$

As before, this results apply only if $T - \bar{t}$ is large enough for Eq. (C.6) to be fulfilled.

5.3. “Phase diagram” of the seminar problem

The results of the previous subsections can be summarized into “phase diagrams” such as the one shown in Fig. 5 for narrow initial distributions (equivalent phase diagrams can be constructed in the same way for wider initial distributions). Keeping in mind that, except for the transition between $T = \bar{t}$ and $T \neq \bar{t}$, there is of course no true phase transition here, and that the lines representing the limits between various regimes should be thought as crossover regions (thus with a finite extension), we can distinguish the following “phases”:

Region I corresponds to a motion dominated by convection, and such that the initial distribution is far enough from the seminar room that the initial time of the seminar becomes irrelevant. This region is split into two subregions. In the first one, **I_a**, $T = |\langle x_0 \rangle| / \bar{a}(\bar{\theta})$ with $\bar{a}(\bar{\theta})$ defined by Eq. (54). In the second one, **I_b**, the fact that $\bar{\theta} \ll 1$ and thus that $\bar{a}(\bar{\theta}) \simeq a_2$ makes it necessary to use the uniform approximation Eq. (C.7) for $\phi(\langle x_0 \rangle, T)$. In that case $T = |\langle x_0 \rangle| / a_2 + \delta T$ where δT is given by Eq. (56).

Region II corresponds to a motion dominated by diffusion, and such again that the initial distribution is far enough from the seminar room that the initial time of the seminar is irrelevant. Region **II**, too, has to be divided in two subregions. In **II_a**, $T = T^*$ with T^* given by Eq. (51). In **II_b**, the smallness of $\bar{\theta}$ should be taken into account, leading to Eq. (52).

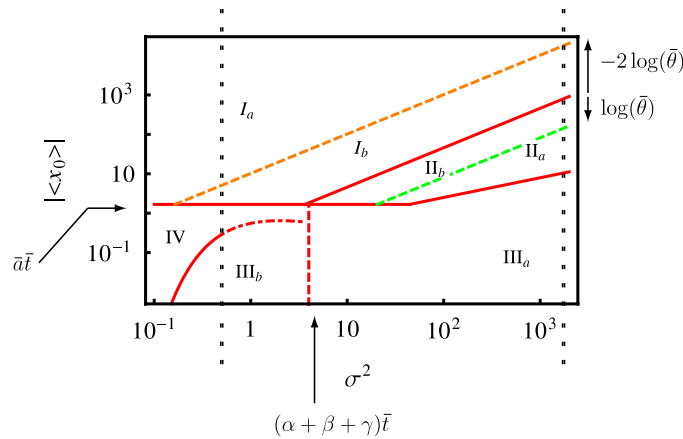


Fig. 5. Phase diagram of the seminar problem, in the $(\sigma^2, |\langle x_0 \rangle|)$ plane, for narrow initial distributions (see text for the detailed description of the various regimes). The vertical dashed–dotted line correspond to the vertical cuts used in Figs. 6 and 7. For this illustration, the parameters of the problems have been taken as $[\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1, \bar{t} = 1, \bar{\theta} = 0.2]$.

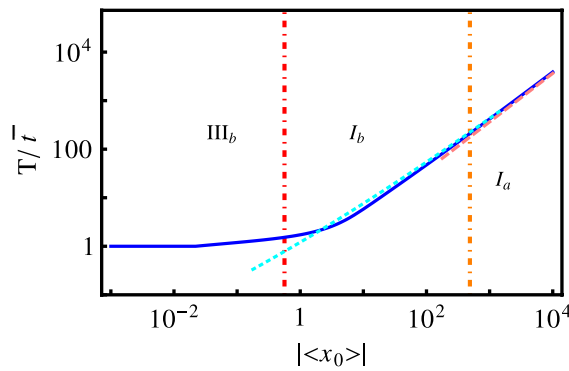


Fig. 6. $|\langle x_0 \rangle|$ dependence of the time T for narrow initial distributions and a small value of the noise parameter ($\sigma = 0.6$); which corresponds to the left vertical dashed–dotted line in the phase diagram Fig. 5. The numerical labels correspond to those of the different regimes in Fig. 5. Full line: numerical value obtained from the exact expression Eq. (40). Dashed: asymptotic expressions in the corresponding regime (see text). The parameters of the model are the same as in Fig. 5, except for $\bar{\theta} = 0.1$ which, to enhance readability, has been slightly decreased.

Region III corresponds to a motion which can be dominated either by diffusion (region III_a) or by convection (region III_b), but such that in any case the quorum is met before the official beginning time of the seminar. This region thus correspond to the phase $T = \bar{t}$.
Region IV corresponds finally to a configuration such that the quorum is met slightly after the official beginning time of the seminar, so that T is different from, but close to, \bar{t} .

As an illustration, we show in Figs. 6 and 7 two vertical cuts in this phase diagram, in which are displayed the variations of the self-consistent time T as a function of $\langle x_0 \rangle$ for two (fixed) values of the noise σ , one “small” and one “large”. For the small diffusion coefficient case Fig. 6 we observe, as expected from the phase diagram, a transition between a domain where $T = \bar{t}$ and a domain where $T = |\langle x_0 \rangle|/\bar{a}(\bar{\theta})$. For the large σ case Fig. 7, we observe, again as predicted from the phase diagram, a richer behavior, with the same limiting behaviors for very large and very small $|\langle x_0 \rangle|$, but a larger number of intermediate regimes.

6. Conclusion

In this article, we have considered a simple toy-model, sharing many of the characteristic features of generic mean field games, but with the essential simplification that the “mean field” actually reduces to a simple number (the actual starting time of the seminar T). The study of this problem can then be divided in two essentially independent parts: on one hand the resolution, for arbitrary T , of the system of partial differential equations (6)–(8) describing the coupling between the agents optimization decisions and their motion; and on the other hand the self-consistent condition Eq. (11) determining the value of T .

The first part of this program can be performed essentially completely. Indeed an explicit expression Eq. (40) can be obtained on a very general basis for the function $\rho(x_0, T)$ required to discuss self-consistency. From this general result transparent asymptotic expressions are derived in the relevant limiting regimes (cf. e.g. Eqs. (42), (44) and (45)). From these and the self-consistent condition Eq. (11) the qualitative behavior of T , and explicit expressions in many limiting regimes of interest, can be obtained.

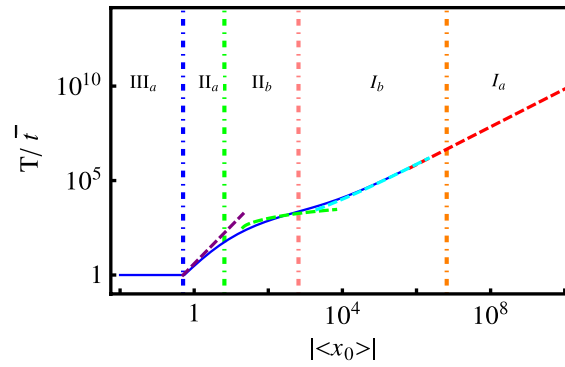


Fig. 7. $|\langle x_0 \rangle|$ dependence of the time T for narrow initial distributions and a large value of the noise parameter ($\sigma = 40$); which corresponds to the right vertical dashed–dotted line in the phase diagram Fig. 5. The numerical labels correspond to those of the different regimes in Fig. 5. Full line: numerical value obtained from the exact expression Eq. (40). Dashed: asymptotic expressions in the corresponding regime (see text). The parameters of the model are the same as in Fig. 5, except for $\theta = 0.01$.

We will not re-list here the various results derived for T in Section 5, but the main features may be summarized as follows. An important point is that the slopes $c'_0 = (\alpha + \beta)$ and $c'_2 = (\alpha - \gamma)$ of the cost function $c(t)$ (cf. Eq. (1)) can be associated with drift velocities $a_0 = \sqrt{2c'_0}$ and $a_2 = \sqrt{2c'_2}$ which fix the scale of the drift velocities of the problem. Together with the characteristic length l_0 associated with the initial distribution of agent $m_0(x_0)$ (namely the center of mass, i.e. $l_0 = |\langle x_0 \rangle|$ for narrow distributions, or $l_0 = |x_\theta|$ (cf. Eq. (53)) for wide distributions) and the value of the noise parameter σ , they organize the system “phase diagram” of the problem, and define the relevant limiting regimes. For instance if $|l_0| \gg a_0 \bar{t}$ and $|l_0| \gg \sigma \sqrt{\bar{t}}$ the system is completely dominated by convection, and $T \simeq l_0/a$, with a equal to a_0 for large noise and to some weighted average between a_0 or a_2 for smaller noise. Or if $l_0 \ll a_2 \bar{t}$ one is essentially guaranteed that the quorum will be met before the official starting time \bar{t} of the seminar, and $T = \bar{t}$, etc.

One point worth being stressed however is that in most circumstances, either the agents start from a location close from the seminar room ($l_0 \ll a_{0,1} \bar{t}$) and $T = \bar{t}$, or they are initially far from the seminar room ($l_0 \gg a_{0,1} \bar{t}$) and T becomes relatively quickly independent of \bar{t} . The transition region for which $T > \bar{t}$ but keep some \bar{t} dependence is actually rather restricted. This notion of an effective starting time of the seminar which is independent of its official starting time is clearly a bit disturbing, especially from the viewpoint of the seminar organizer.

This feature can be tracked back to the fact that there exists an initial time $t = 0$ at which all agents start their optimization process and motion, and what we see is that this initial time plays a role which is at least as important as \bar{t} in the determination of T . One can of course imagine that this initial time has some physical meaning (e.g. time at which the organizers ring a bell, etc.). One could also modify slightly the model to remove the reference to a uniform initial time and have the time τ_0 at which a given agent leaves her office taken as a parameter entering in the optimization decision. Assuming the marginal cost of not being in ones office is described by some parameter η , this would amount to replacing the cost function Eq. (3) by

$$J_T[a] = \mathbb{E} \left[c(\tilde{\tau}) - \eta \tau_0 + \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} a_i^2(\tau) d\tau \right].$$

The problem could be analyzed along the lines of what we have done in this paper, and would lead to a stronger dependence of T in \bar{t} .

More generally, various variations of the problem can be easily studied with the approach followed in this paper. In particular, Eqs. (39)–(26) are valid for essentially arbitrary cost functions $c(t)$, and could be studied for instance in circumstances for which the self consistent condition Eq. (11) has more than one solution. The seminar problem is therefore a very versatile model, and the very thorough understanding of its behavior obtained in this work should help develop the intuition on the properties of more generic mean field game models.

Acknowledgments

We thank Jean-Michel Courtault for introducing us to the problematic of mean field game. Igor Swiecicki acknowledges support from the labex MME-DII (Modèles Mathématiques et Économiques de la Dynamique, de l’ Incertitude et des Interactions), ANR11-LBX-0023-01.

Appendix A. Exact solution of HJB equation

In this appendix we derive exact expressions for $\phi(x, t)$ (see Eq. (26)).

$$\phi(x, t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \left(c(t+\tau) + \frac{x^2}{2\tau} \right)} \tag{A.1}$$

where $c(t)$ is piece-wise linear.

$$c(t) = \alpha[t - \bar{t}]_+ + \beta[t - T]_+ + \gamma[T - t]_+. \tag{A.2}$$

Using the explicit expression for $c(t)$ and the fact that $\bar{t} \leq T$, one may write

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi\sigma^2}\phi(x, t) &= |x|e^{-\frac{\gamma(T-t)}{\sigma^2}} \int_0^{[\bar{t}-t]^+} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left(-\gamma\tau + \frac{x^2}{2\tau}\right)} + |x|e^{-\frac{\alpha(t-\bar{t})+\gamma(T-t)}{\sigma^2}} \int_{[\bar{t}-t]^+}^{[T-t]^+} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left((\alpha-\gamma)\tau + \frac{x^2}{2\tau}\right)} \\ &+ |x|e^{-\frac{\alpha(t-\bar{t})+\beta(t-T)}{\sigma^2}} \int_{[T-t]^+}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left((\alpha+\beta)\tau + \frac{x^2}{2\tau}\right)}. \end{aligned}$$

We define the following integral [23]

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(a, b, t) &= 2\sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-a\tau - \frac{b}{\tau}} \\ &= e^{-2\sqrt{ab}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{t}} - \sqrt{at}\right) + e^{2\sqrt{ab}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{t}} + \sqrt{at}\right) \end{aligned} \tag{A.3}$$

where the function $\operatorname{erfc}(z)$ is defined on the complex plane, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{erfc}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{erfc}(x) = 2$. Accordingly, $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{J}(a, b, t) = 0$ and $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(a, b, t) = 2e^{-2\sqrt{ab}}$ for $a > 0$ and $b > 0$.

Thus the function $\phi(x, t)$ reads

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma(T-t)}{\sigma^2}} \mathcal{J}\left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, [\bar{t} - t]^+\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha(t-\bar{t})+\gamma(T-t)}{\sigma^2}} \left(\mathcal{J}\left(\frac{a_2^2}{2\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, [T - t]^+\right) \right. \\ &\left. - \mathcal{J}\left(\frac{a_2^2}{2\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, [\bar{t} - t]^+\right)\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha(t-\bar{t})+\beta(t-T)}{\sigma^2}} \left(2e^{-\frac{a_0|x|}{\sigma^2}} - \mathcal{J}\left(\frac{a_0^2}{2\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, [T - t]^+\right)\right), \end{aligned} \tag{A.4}$$

(where $a_0 = \sqrt{2(\alpha + \beta)}$, $a_2 = \sqrt{2(\alpha - \gamma)}$).

Eq. (A.4) applies for arbitrary values of time and position. It takes however a simpler form in some time intervals:

- For $t \geq T$ the expression reduces to

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= e^{-\frac{c(t)}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{2(\alpha + \beta)}|x|\right) \\ &= e^{-\frac{\alpha(T-\bar{t})}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{a_0^2(T - t) - a_0|x|}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \tag{A.5}$$

- For $\bar{t} \leq t \leq T$ Eq. (A.4) can be written as

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{e^{-\alpha(T-\bar{t})/\sigma^2}}{2} \left[\exp\left(\frac{a_2^2(T - t) + 2a_2x}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{-x - a_2(T - t)}{\sqrt{2\sigma^2(T - t)}}\right) \right. \\ &+ \exp\left(\frac{a_2^2(T - t) - 2a_2x}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{-x + a_2(T - t)}{\sqrt{2\sigma^2(T - t)}}\right) \\ &+ \exp\left(\frac{a_0^2(T - t) + 2a_0x}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + a_0(T - t)}{\sqrt{2\sigma^2(T - t)}}\right) \\ &\left. - \exp\left(\frac{a_0^2(T - t) - 2a_0x}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{-x + a_0(T - t)}{\sqrt{2\sigma^2(T - t)}}\right) \right]. \end{aligned} \tag{A.6}$$

- At $t = 0$ Eq. (A.4) reads

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma T}{\sigma^2}} \mathcal{J}\left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, \bar{t}\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha\bar{t}-\gamma T}{\sigma^2}} \left(\mathcal{J}\left(\frac{\alpha - \gamma}{\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, T\right) - \mathcal{J}\left(\frac{\alpha - \gamma}{\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, \bar{t}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha\bar{t}+\beta T}{\sigma^2}} \left(2e^{-\frac{\sqrt{2(\alpha+\beta)}|x|}{\sigma^2}} - \mathcal{J}\left(\frac{\alpha + \beta}{\sigma^2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}, T\right)\right). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Finally, we stress that for large σ 's, and more precisely under the condition $(\alpha, \beta, \gamma)\bar{t} \ll \sigma^2$ (but irrespective of the value of T and x) Eq. (A.6) provides a good approximation of the exact $\phi(x, 0)$ for $(t \leq \bar{t})$ (t and \bar{t} can then be set to zero in this equation).

Appendix B. Evaluation of $\phi(x, t)$ for large σ 's (diffusion regime)

In this appendix, we evaluate the large σ asymptotic of the function $\phi(x, t)$ defined by Eq. (26). For this purpose, let us introduce $c_0(t) = \alpha(t - \bar{t}) + \beta(t - T)$, the linear function such that $c(t) = c_0(t)$ for $t \geq T$, and

$$\phi_0(x, t) \equiv -x \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \exp\left(-\frac{c_0(t + \tau)}{\sigma^2}\right) G_0(x, \tau) \quad (\text{B.1})$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}[c_0(t) + a_0|x|]\right) \quad (\text{B.2})$$

(this last expression exactly corresponds to Eq. (A.5), and is obtained in the same way).

The difference between $\phi(x, t)$ and its approximation $\phi_0(x, t)$ can be expressed as

$$|\phi(x, t) - \phi_0(x, t)| = -x \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \exp\left(-\frac{c_0(t + \tau)}{\sigma^2}\right) G_0(x, \tau) K(t + \tau) \quad (\text{B.3})$$

where

$$K(\tau) \equiv 1 - e^{-\frac{1}{\sigma^2}(c(\tau) - c_0(\tau))}$$

is a positive (since $c(\tau) \geq c_0(\tau)$) decreasing continuous function which is uniformly zero for τ larger than T . We thus have $|\phi(x, t) - \phi_0(x, t)| \leq \phi_0(x, t)K(t)$.

As soon as

$$\sigma^2 \gg (c(t) - c_0(t)), \quad (\text{B.4})$$

$K(t)$ is $O(\sigma^{-2})$, and therefore

$$\phi(x, t) = \phi_0(x, t)(1 + O(\sigma^{-2})). \quad (\text{B.5})$$

Eq. (B.5) applies whenever the condition (B.4) is fulfilled. In practice however, it is mainly useful if the diffusive regime, i.e. when

$$a_0|x| \ll \sigma^2 \quad (\text{B.6})$$

($a_0 = \sqrt{2(\alpha + \beta)}$). In that case, since Eq. (B.4) morally implies $\sigma^2 \gg |c_0(\tau)|$ (this is clear as soon as $t \leq (\alpha\bar{t} + \beta T)/(\alpha + \beta)$ since then $c_0(t) < 0$, but remains generally true unless $\tau \simeq T$), one has $\phi_0(x, t) = (1 + O(\sigma^{-2}))$, and Eq. (B.5) provides little information on the variations of $\phi(x, t)$.

It may be therefore interesting in this case to compute the $O(\sigma^{-2})$ corrections. Noting that $K(\tau) = 0$ for $\tau > T$, we have

$$\phi(x, t) - \phi_0(x, t) = -x \int_0^{T-t} \frac{d\tau}{\tau} \exp\left(-\frac{c_0(t + \tau)}{\sigma^2}\right) G_0(x, \tau)(K(t) + \delta K(\tau)), \quad (\text{B.7})$$

where $\delta K(\tau) \equiv (K(t + \tau) - K(t))$. The term involving δK , which is linear in τ near 0 (and thus do not benefit from the $\tau^{-1/2}$ divergence) can be shown to be $O(\sigma^{-3})$ relative to $\phi_0(x, t)$, and we get

$$\phi(x, t) = (\phi_0(x, t) + K(t))(1 + O(\sigma^{-3})) \quad (\text{B.8})$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}[c(t) + a_0|x|]\right) (1 + O(\sigma^{-3})), \quad (\text{B.9})$$

valid therefore when both conditions (B.4) and (B.6) apply.

Appendix C. Evaluation of $\phi(x, t)$ for small σ 's (convection regime)

In this appendix we evaluate the small σ asymptotics of $\phi(x, t)$ using the saddle point approximation (in regions (0) and (2)), and more generally the Laplace method.

Introducing

$$\Phi(\tau) = c(t + \tau) + \frac{x^2}{2\tau},$$

the integral we want to compute is of the form

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty d\tau f(\tau) \exp\left(-\frac{\Phi(\tau)}{\sigma^2}\right),$$

with $f(\tau) = -x/\tau^{3/2}$, and will therefore be dominated for small σ 's by the minima of $\Phi(\tau)$.

The condition $\Phi'(\tau^*) = 0$ leads to the equation

$$\tau^* = -x/\sqrt{2c'(t + \tau^*)} \quad (\text{C.1})$$

which admits a solution in regions (0) and (2) but not in regions (1) and (3). One therefore has to use the saddle point approximation in regions (0) and (2), and boundary contributions in regions (1) and (3).

C.1. Regions (0) and (2)

In regions (0) and (2), the stationary point is

$$\begin{aligned}\tau^* &= -x/a_0 \quad [\text{in region (0)}] \\ \tau^* &= -x/a_2 \quad [\text{in region (2)}],\end{aligned}$$

which, with $\Phi''(\tau) = x^2/\tau^3$, gives within the saddle point approximation

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &\simeq \exp\left(-\frac{\Phi(\tau^*)}{\sigma^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha(T-\bar{t})}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{a_{0,2}^2(T-t) + 2a_{0,2}x}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

This approximation is valid as long as $\sigma^2 \ll |x|a_{0,2}$, or in other words as long as the ratio between the drift time $t_d \equiv |x|/a_{0,2}$ and the diffusion time $t_\sigma \equiv x^2/\sigma^2$ is small.

C.2. Region (1)

In region (1), there are no solution to Eq. (C.1) as the minima of $\Phi(\tau)$ correspond to a discontinuity of the cost functions $c(t + \tau)$ (at $t + \tau = T$). Linearizing $\Phi(\tau)$ on both side of this discontinuity and neglecting the variation of $f(\tau)$ we get

$$\phi(x, t) \simeq -x\sigma \sqrt{\frac{2(T-t)}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \left[c(T) + \frac{x^2}{2(T-t)} \right]\right) \left[\frac{1}{a_0^2(T-t)^2 - x^2} - \frac{1}{a_2^2(T-t)^2 - x^2} \right]. \quad (\text{C.3})$$

Noting $\hat{a}(x, t) \equiv x/(T-t)$ the drift velocity of an agent within region (1) in the $\sigma \rightarrow 0$ limit ($\hat{a}(x, t) \in [a_2, a_0]$), $t_d = (T-t)$ the drift time and $t_\sigma = x^2/\sigma^2$ the diffusion times, Eq. (C.3) applies under the condition that:

$$\frac{t_d}{t_\sigma} = \frac{\sigma^2(T-t)}{x^2} \ll \left(1 - \frac{a_0^2}{\hat{a}^2(x, t)}\right)^2 \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{t_d}{t_\sigma} = \frac{\sigma^2(T-t)}{x^2} \ll \left(1 - \frac{a_2^2}{\hat{a}^2(x, t)}\right)^2 \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma^2 \ll \frac{(T-\bar{t})}{2} (\hat{a}^2(x, t) - a_2^2). \quad (\text{C.6})$$

The two first conditions express that in generally speaking Eq. (C.3) requires that the time of drift is much shorter than the diffusion time, the requirement becomes more and more stringent as (x, t) get closer from the boundaries of region (1) where $\hat{a}(x, t) \rightarrow a_0$ or $\hat{a}(x, t) \rightarrow a_2$. The last condition signals that Eq. (C.3) is valid only if T differs significantly from \bar{t} .

The calculation of $\phi(x, t)$ in region (3) in the small σ limit proceeds essentially along the same lines.

C.3. Uniform approximations

The conditions (C.4)–(C.5) express that the transition between regions (0) and (1) (i.e. $x \simeq -a_0(T-t)$) as well as the transition between regions (1) and (2) (i.e. $x \simeq -a_2(T-t)$) need to be treated a bit more carefully and require the use of uniform approximations.

For $(\alpha, \beta, \gamma)\bar{t} \ll \sigma^2$, one way to derive these uniform approximations is just to select the dominating contribution of Eq. (A.6). Indeed, deep in region (0) (respectively deep in region(2)), one can check that the third term (respectively the first term) of Eq. (A.6) in which erfc is replaced by its asymptotic value 2 recovers exactly Eq. (C.2). Near $x = -a_0(T-t)$ or $x = -a_2(T-t)$ the uniform approximation amounts to keep the full dependence of the erfc.

For instance near $x = -a_2T$

$$\phi(x, t) \simeq \frac{e^{-\alpha(T-\bar{t})/\sigma^2}}{2} \exp\left(\frac{a_2^2(T-t) + 2a_2x}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{-x - a_2(T-t)}{\sqrt{2\sigma^2(T-t)}}\right). \quad (\text{C.7})$$

This expression will interpolate smoothly between Eqs. (C.2) and (C.3). (This latter can be seen as being obtained using the large x asymptotic $\operatorname{erfc}(x) \simeq \exp(-x^2)/\sqrt{\pi x^2}$ for the four terms of Eq. (A.6)).

C.4. Drift velocity

With the knowledge of $\phi(x, t)$, the drift velocities in the small σ regime can be obtained from the spatial derivative of $u(x, t) = -\sigma^2 \log \phi(x, t)$ (cf. Eqs. (7) and (27)). In leading σ order Eqs. (C.2) and (C.3) yield

$$u(x, t) \simeq \begin{cases} \alpha(T - \bar{t}) - \frac{a_0^2}{2}(T - t) - a_0x & \text{in Region (0)} \\ c(T) + \frac{x^2}{2(T - t)} & \text{in Region (1)} \\ \alpha(T - \bar{t}) - \frac{a_2^2}{2}(T - t) - a_2x & \text{in Region (2),} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

(the expression of $u(x, t)$ for region (3) can be obtained in the same way). Taking the spatial derivative of these expressions yields the velocities Eq. (19).

Alternatively, one can compute the drift velocity $a(x, t) = \sigma^2 \partial_x \phi(x, t) / \phi(x, t)$ from the spatial derivative $\partial_x \phi(x, t)$, which can be evaluated following exactly the same steps as for $\phi(x, t)$. This of course gives the same result.

References

- [1] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, *C. R. Math.* 343 (2006) 619.
- [2] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, *C. R. Math.* 343 (2006) 679.
- [3] M. Huang, R.P. Malham, P.E. Caines, et al., *Commun. Inf. Syst.* 6 (2006) 221.
- [4] R. Carmona, F. Delarue, A. Lachapelle, *Math. Financ. Econ.* 7 (2013) 131.
- [5] P. Degond, J.-G. Liu, C. Ringhofer, *J. Nonlinear Sci.* 24 (2014) 93.
- [6] P. Cardaliaguet, J. Lasry, P. Lions, A. Porretta, *SIAM J. Control Optim.* 51 (2013) 3558. <http://dx.doi.org/10.1137/120904184>.
- [7] Y. Achdou, I. Capuzzo-Dolcetta, *SIAM J. Numer. Anal.* 48 (2010) 1136.
- [8] P. Cardaliaguet, Notes on mean field games (Notes from Lion's lecture at the college de France), unpublished. <https://www.ceremade.dauphine.fr/~cardalia/MFG20130420.pdf>.
- [9] A. Lachapelle, M.-T. Wolfram, *Transp. Res. B* 45 (2011) 1572.
- [10] D. Besancenot, J.-M. Courtaut, K. El Dika, *Rev. Econ. Polit.* 122 (2012) 547.
- [11] R. Carmona, J.-P. Fouque, L.-H. Sun, arXiv preprint, 2013. arXiv:1308.2172.
- [12] M. Burger, M. Di Francesco, P. Markowich, M.-T. Wolfram, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 19 (2014) 1311. <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.1311>.
- [13] M. Balandat, C.J. Tomlin, *American Control Conference (ACC)*, 2013, IEEE, 2013, pp. 2527–2532.
- [14] D. Gomes, J. Sade, *Dyn. Games Appl.* 4 (2014) 110.
- [15] O. Guant, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*, Springer, 2011.
- [16] N.V. Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, third ed., Elsevier, North Holland, ISBN: 978-0-444-52965-7, 2007.
- [17] W.H. Fleming, H.M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer, 2006, ISBN-10: 0-387-26045-5.
- [18] E. Zauderer, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, Wiley-Interscience, ISBN: 0-471-31516-8, 1998.
- [19] V.P. Maslov, M.V. Fedoriuk, *Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics*, in: *Mathematical Physics and Applied Mathematics*, vol. 7, Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, Mass., 1981, translated from the Russian by J. Niederle and J. Tolar.
- [20] S. Redner, *A Guide to First Passage Problems*, Cambridge University Press, 2001.
- [21] O. Guéant, 2011. arXiv:1106.3269.
- [22] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, SIAM, ISBN: 0-89871-497-4, 2001.
- [23] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, ISBN: 0-486-61272-4, 1964.

Troisième partie

Un modèle de population avec effet de groupe ("herding")

Sommaire

10	Présentation du modèle	79
11	L'équation de Schrödinger non linéaire	81
11.1	L'équation NLS dans le cadre des condensats de Bose-Einstein	81
11.2	Action et lois de conservation	83
11.3	Solitons et méthode de diffusion inverse	83
11.4	Approximation variationnelle	84
11.5	Solutions implosives	84
12	Lien entre le modèle de population et l'équation NLS	85
13	Applications	86
13.1	Formalisme quantique et relations à la Ehrenfest	86
13.1.1	Rappels sur le formalisme quantique	86
13.1.2	Transposition aux MFG	87
13.2	Solution stationnaire	88
13.3	Formulation variationnelle	89
13.3.1	Théorème de Noether et quantités conservées	90
13.3.2	Approximation variationnelle	91
14	Résolution du problème de dynamique de population	92
14.1	Mouvement du centre de masse	93
14.2	Evolution de la variance	94
14.3	Vue d'ensemble	97
14.4	Conclusion et perspectives	97

Dans cette partie on étudie un modèle de population avec effet de groupe introduit par O. Guéant et co-auteurs dans le cours [31]. Ce problème est intéressant car il contient de façon stylisée l'essence même des MFG, c'est-à-dire un couplage entre les stratégies des agents et la densité de la population, et ce de façon anticipative. Une étude fine de ce modèle devrait donc aider significativement à une compréhension qualitative des systèmes MFG. On trouve dans [31] une solution dans le cas stationnaire et pour un potentiel assez particulier. On propose ici une approche qui permet d'avoir accès au régime dynamique et pour une forme de potentiel plus naturelle. Après avoir présenté le modèle, on introduit brièvement l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) et ses principales propriétés, car on montrera que le modèle étudié est formellement identique à cette équation. Cette analogie nous permettra d'obtenir des résultats quantitatifs sur la solution du problème MFG et de comprendre qualitativement le comportement du système. Cette partie reprend de façon plus détaillée des résultats présentés à l'origine dans l'article court [55] situé à la fin du chapitre.

10 Présentation du modèle

Le but de ce modèle est de décrire de façon stylisée une foule d'individus rationnels ayant à la fois des préférences spatiales, et tendance à s'imiter les uns les autres. Ces agents peuvent contrôler leur vitesse de déplacement selon leurs préférences, mais sont également soumis à certaines perturbations aléatoires qui représentent l'incertitude inhérente à tout environnement. Plus précisément l'état d'un individu, à l'instant t , est représenté par un point X_t dans un espace à $d = 1$ (ex. rue, couloir) ou $d = 2$ (ex : zone géographique) dimensions, et évolue selon une dynamique stochastique de la forme (I.6) :

$$dX_t = v_t dt + \sigma dW_t,$$

où la vitesse v_t est le contrôle et où le terme Brownien dW_t permet de prendre en compte les aléas du déplacement.

Remarque Il faut bien comprendre que le modèle ne se veut pas réaliste, c'est à dire fondé sur des faits empiriques, mais qualitatif, c'est à dire inspiré par des idées intuitives qui capturent les effets principaux à modéliser.

Remarque On prend $d = 1$ ou 2 pour fixer les idées mais tout se généralise aisément à $d \geq 1$.

On considère que les agents cherchent à optimiser une fonction de coût avec contrôle quadratique, par souci de simplicité, du type (I.28) :

$$J[v(\cdot)] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\frac{1}{2} \mu v_s^2 - V[m](X_s, s) \right) ds + c_T(X_T) \right],$$

sachant que les agents partent, à $t = 0$, de leur position initiale, et que T est la fin du processus d'optimisation.

Le terme de contrôle quadratique permet de modéliser, de manière pratique, le fait qu'utiliser des vitesses élevées est pénalisant. Quant au coût terminal c_T , il indique une préférence pour certaines positions quand le processus d'optimisation se termine. Par ailleurs, il s'agit de décrire un ensemble d'individus plus ou moins attirés par certaines régions de l'espace, et possédant plus ou moins d'affinité pour leurs voisins immédiats, ce dont on peut rendre compte par un potentiel de la forme :

$$V[m](x, t) = U_0(x) + V_{int}[m](x, t) .$$

$U_0(x)$, qui ne dépend que de la position, représente les préférences spatiales, tandis que $V_{int}[m](x, t)$, qui ne dépend de x et de t qu'à travers la densité m , est le terme d'interaction. Typiquement ce terme prend la forme d'une somme :

$$V_{int}[m](x, t) = \int dy \kappa(x - y) m(y, t) .$$

En fait, on prendra dans la suite le cas limite où les interactions sont de très courte portée, i.e. bien plus petites que toutes les autres longueurs du problème, si bien que le noyau κ peut être remplacé par un dirac :

$$V_{int}[m](x, t) = \int dy g \delta(x - y) m(y, t) \tag{III.1}$$

$$= g m(x, t), \tag{III.2}$$

où g est une constante qui encode la force de l'interaction.

Si initialement les individus sont distribués selon une densité initiale $m_0(x)$, le système MFG de ce problème s'écrit donc (cf. (I.29)) :

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2\mu} |\nabla u|^2 + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = V[m](x, t) \\ u(x, T) = c_T(x) \\ \partial_t m + \nabla(v m) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m = 0 \\ m(x, 0) = m_0(x) \end{cases} , \tag{III.3}$$

où

$$v = v(x, t) = -\frac{\nabla u}{\mu}, \tag{III.4}$$

et

$$V[m](x, t) = U_0(x) + g m(x, t). \tag{III.5}$$

Remarque La plupart des résultats s'étendent au cas où V_{int} est une fonction quelconque de m :

$$V_{int}[m](x, t) = f(m(x, t)), \text{ avec } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mais pour avoir des résultats les plus explicites possible on travaillera avec la forme (III.2) dans ce chapitre.

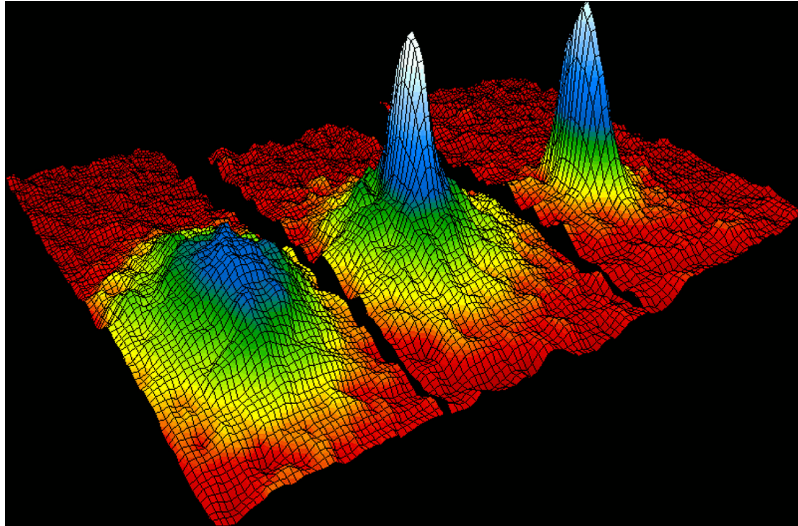


FIGURE 10 – Condensat de Bose-Einstein. L'image montre la distribution des vitesses pour un gaz d'atomes de Rubidium. De l'avant vers l'arrière : avant la température critique, juste après et bien en-dessous. La présence d'un condensat est indiquée par l'émergence d'un pic à faible vitesse, bien plus étroit que ce qu'on attendrait par simple agitation thermique [21]. D'après *JILA, NILST/Université du Colorado*

11 L'équation de Schrödinger non linéaire

L'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) est une équation qui apparaît dans de nombreux domaines en physique [20, 54, 48]. En physique contemporaine, elle est l'équation fondamentale qui décrit la propagation de la lumière dans un milieu non linéaire (comme les fibres optiques), et les condensats de Bose-Einstein en physique des atomes froids. Ces deux cas sont les applications les plus connues mais elle survient également dans l'étude des vagues à la surface des fluides non visqueux (étude qui a commencé au XIXe siècle), dans les oscillations de Langmuir dans les plasmas, etc. . . . Sous forme adimensionnée, elle a pour expression :

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\Delta\psi + \kappa|\psi|^2\psi,$$

où ψ est une fonction complexe et Δ est le Laplacien à d dimensions : $\Delta = \partial_{x_1x_1}^2 + \dots + \partial_{x_dx_d}^2$.

Pour donner au lecteur non familier avec cette équation quelques intuitions, on décrit brièvement comment on aboutit à cette équation dans le cadre des condensats de Bose-Einstein, et on présente ses propriétés les plus remarquables.

11.1 L'équation NLS dans le cadre des condensats de Bose-Einstein

Dans ce contexte l'équation NLS est plus connue sous le terme d'équation de Gross-Pitaevski (dépendante du temps). Un condensat de Bose-Einstein est un état de la matière prédit par Einstein en 1925 sur la base d'un article du physicien indien Bose et

qui nécessite une description quantique de la matière. Ce nouvel état de la matière peut se manifester pour les systèmes de bosons, i.e. pour les particules qui ont "le droit" d'être simultanément dans le même état, contrairement aux fermions. Dans son article Einstein considère un gaz¹⁷ de bosons et prédit qu'en dessous d'une certaine température critique, une fraction macroscopique du gaz va se retrouver dans un seul et même état quantique. Cette fraction "condensée" dans un même état quantique est un nouvel état de la matière car il s'agit d'un système de grande taille (macroscopique) qui est caractérisé par une propriété purement quantique, ce qui était inconnu auparavant. En effet, ce qui distingue un fluide, d'un gaz, par exemple, est leur densité, qui est une propriété classique. Quelque temps après (1938, 1941), F.London and L. Landau comprirent que cet état de la matière pouvait expliquer la superfluidité qui avait été observée dès 1938. Mais c'est seulement en 1995 que, grâce aux progrès dans le refroidissement des atomes par laser, les premiers condensats de Bose-Einstein gazeux, tels que ceux de la figure 10, furent observés. Dans ce contexte les interactions entre les atomes doivent être prises en compte, et l'état quantique $\psi(\mathbf{x}, t)$ qui décrit le condensat est une fonction complexe de la position \mathbf{x} et du temps t , et vérifie l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{x}) + g|\psi|^2 \right) \psi(\mathbf{x}, t) \quad (\text{III.6})$$

On peut y reconnaître l'équation de Schrödinger pour une seule particule de masse m dans le potentiel extérieur $V_{ext}(\mathbf{x})$:

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}, t),$$

tandis que le terme non linéaire $g|\psi|^2$ est introduit par les interactions.

Formellement l'équation (III.6) est obtenue à partir de l'équation de l'opérateur quantique qui décrit le système :

$$i\hbar \partial_t \hat{\Psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{x}, t) + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t) V(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \hat{\Psi},$$

en remplaçant l'opérateur $\hat{\Psi}$ par une fonction classique ψ_0 , ce qui est licite, à basse température et pour un système comportant un grand nombre de constituants. Il faut cependant remplacer le potentiel d'interaction V par un potentiel effectif V_{eff} [48], et, en supposant que ψ_0 varie beaucoup plus lentement spatialement, on obtient (III.6), avec g donné par :

$$g = \int V_{eff}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

On s'intéresse maintenant aux principales propriétés de l'équation NLS, et on verra par la suite qu'elles seront utiles pour la compréhension du problème de dynamique de population initial.

17. c-à-d, que les interactions entre les constituants du système sont faibles, voire négligeables.

11.2 Action et lois de conservation

Une première observation importante est que l'équation de Gross-Pitaevskii (III.6) peut être obtenue à partir de l'action [20] :

$$S[\psi, \psi^*] = -i\hbar \iint dt dx \psi^* \partial_t \psi + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V_{ext}(\mathbf{x}) |\psi|^2 + \frac{g}{2} |\psi|^4. \quad (\text{III.7})$$

En effet, en imposant la stationarité de l'action, c'est à dire que $\delta S = 0$ pour toute variation infinitésimale de ψ et ψ^* , on obtient bien l'équation NLS (III.6).

Cette formulation permet par l'application du théorème de Noether de déduire que certaines quantités sont conservées. Par exemple l'action (III.7) est invariante par changement de phase $\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi$, ce qui entraîne la conservation de la norme \mathcal{N} :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} = 0, \text{ avec } \mathcal{N} \equiv \int d\mathbf{x} |\psi|^2.$$

De même l'invariance par translation dans le temps $t \rightarrow t + dt$ impose la conservation de l'énergie totale \mathcal{E} :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = 0, \text{ avec } \mathcal{E} \equiv \int d\mathbf{x} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V_{ext}(\mathbf{x}) |\psi|^2 + \frac{g}{2} |\psi|^4 \right].$$

11.3 Solitons et méthode de diffusion inverse

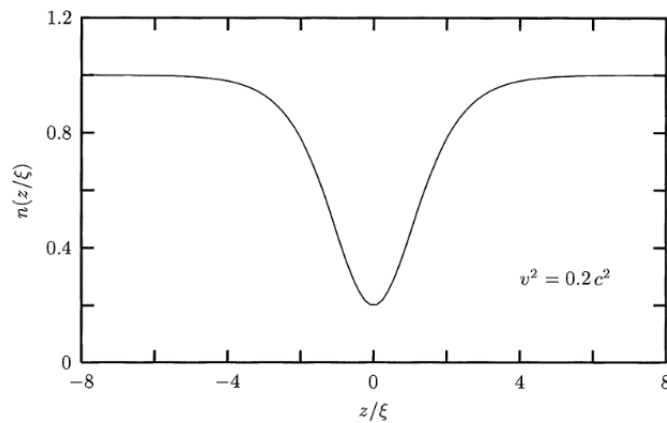


FIGURE 11 – Profil de densité d'un soliton gris. D'après *Pitaevskii & Stringari, Bose-Einstein condensation, Oxford 2003*

Une propriété fascinante de l'équation NLS est qu'elle admet des solutions de type soliton [20, 48], c'est-à-dire des solutions qui se propagent sans se déformer. Dans le cas d'interactions attractives, on peut obtenir des solutions localisées dans l'espace sur une échelle ξ , qui se déplacent à une vitesse v , et qui s'annulent à l'infini, ce qu'on appelle des solitons brillants :

$$\psi(x - vt) = \psi(0) \frac{1}{\cosh((x - vt)/\sqrt{2}\xi)}.$$

Dans le cas d'interactions répulsives il existe des solutions qui correspondent à un défaut de densité par rapport à la région non perturbée, ce qu'on appelle un soliton gris, représenté figure 11 :

$$\psi(x - vt) = \sqrt{n} \left(i \frac{v}{c} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tanh \left[\frac{x - vt}{\sqrt{2}\xi} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \right),$$

où n est la valeur de la densité $|\psi|^2$ à grande distance, non perturbée.

De façon plus générale Zakharov a montré [60] à l'aide de la méthode de diffusion inverse que l'équation NLS sans potentiel extérieur était exactement soluble et que la solution générale s'exprimait comme une combinaison de N solitons.

11.4 Approximation variationnelle

Dans le cas de l'équation NLS les méthodes perturbatives échouent lorsque la perturbation provoque un déplacement d'ensemble du soliton [20]. Il est alors préférable, puisque le système a tendance à former des solutions localisées, d'introduire une coordonnée de position, et possiblement, d'étendue pour ce type de solution. Le champ avec une infinité de degrés de liberté est donc réduit à un objet possédant un petit nombre de coordonnées, que l'on appelle coordonnées collectives puisqu'elles représentent tout un ensemble de degrés de liberté. L'évolution des coordonnées collectives est alors déterminée en remplaçant le champ dans l'action (III.7) par son expression en fonction des coordonnées collectives et en considérant les variations de l'action vis-à-vis de petites variations des coordonnées collectives. Bien évidemment, le succès de la méthode repose de manière essentielle sur l'adéquation de la forme de la solution introduite par les coordonnées collectives avec la réalité du problème de départ. En effet, le choix des coordonnées collectives va imposer à la solution de se trouver dans une certaine classe de fonctions, et peut se retrouver être totalement incapable de décrire le phénomène étudié en cas de mauvaise intuition.

11.5 Solutions implosives

En dimension $d > 1$, un phénomène particulier se produit : dans certaines conditions on observe un "collapse" ou effondrement des solutions sur elles-mêmes [20, 54]. Ainsi dans les fibres optiques, lorsque les non-linéarités sont très importantes, on assiste à l'auto-focalisation du faisceau : au cours de sa propagation dans la fibre, il devient de plus en plus concentré dans la direction transverse ($d = 2$).

Dans une fibre optique, en géométrie cylindrique et après changement d'échelle, l'équation de NLS pour l'amplitude du champ électrique dans un milieu non-linéaire peut se réécrire :

$$2i\partial_z\psi + \frac{1}{r}\partial_r \left(\frac{1}{r}\partial_r\psi \right) + |\psi|^2\psi = 0. \quad (\text{III.8})$$

D'après le théorème de Noether, vu précédemment (11.2), la norme \mathcal{N} et l'énergie \mathcal{E} sont conservées. De plus l'équation (III.8) admet un ensemble de

solutions exactes de la forme :

$$\psi_n(r, z, \lambda) = \lambda R_n(\lambda r) e^{i\frac{\lambda^2 z}{2}} .$$

où $R_n(\zeta = \lambda r)$ vérifie l'équation obtenue par substitution dans (III.8). R_0 correspond à la distribution de l'intensité du faisceau à l'entrée du milieu non-linéaire. On montre alors que si les conditions initiales sont telles que $\mathcal{E} < 0$, la solution est instable et que le champ électrique au centre du faisceau diverge à une distance finie z_0 comme :

$$\psi(r=0, z) \propto \frac{A}{(z - z_0)^{2/3}} .$$

Comme la norme \mathcal{N} est conservée cela implique un rétrécissement du diamètre du faisceau.

12 Lien entre le modèle de population et l'équation NLS

Utilisons les deux changements de variables déjà utilisés au chapitre précédent (II.20, II.27), qui se sont révélés très utiles pour simplifier le problème :

$$\phi(x, t) \equiv \exp\left(-\frac{1}{\mu\sigma^2}u(x, t)\right) \text{ et } \Gamma(x, t) \equiv m(x, t) \exp\left(\frac{1}{\mu\sigma^2}u(x, t)\right),$$

le système MFG (III.3) du problème considéré se réécrit :

$$\begin{cases} \mu\sigma^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = +\frac{\mu^2\sigma^4}{2\mu} \Delta \phi + V[m](x, t) \phi \\ \mu\sigma^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\frac{\mu^2\sigma^4}{2\mu} \Delta \Gamma - V[m](x, t) \Gamma \end{cases} . \quad (\text{III.9})$$

On obtient donc un système de deux équations de diffusion couplées l'une forward, l'autre backward, ce qui semble plus simple que le problème initial mais toujours difficile à appréhender. On remarque alors que si l'on écrit l'équation NLS pour la fonction d'onde $\psi(x, t)$ et son complexe conjugué $\psi^*(x, t)$ on obtient :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi + (U_0(x) + g|\psi|^2) \psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = +\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi^* - (U_0(x) + g|\psi|^2) \psi^* \end{cases} .$$

On arrive donc à la conclusion qu'avec les changements $\mu\sigma^2 \rightarrow i\hbar$, $\phi \rightarrow \psi$ et $\Gamma \rightarrow \psi^*$, le système MFG de notre problème est formellement équivalent à l'équation NLS pour le potentiel

$$V[m](x, t) = U_0(x) + gm(x, t).$$

13 Applications

L'analogie que nous avons mise en évidence au paragraphe précédent va nous permettre de transposer aux MFG plusieurs outils qui vont se révéler très utiles pour la compréhension du problème de population.

13.1 Formalisme quantique et relations à la Ehrenfest

13.1.1 Rappels sur le formalisme quantique

On rappelle [17] qu'en mécanique quantique l'état du système étudié est défini par une fonction d'onde complexe $\psi(\mathbf{x}, t)$ dont l'évolution dans le temps est décrite par l'équation de Schrödinger. Par exemple pour une particule sans spin de masse m , dans un potentiel extérieur V_{ext} :

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}, t),$$

où \hbar est la constante de Planck sur 2π . Les quantités physiques sont représentées par des opérateurs qui agissent l'état du système $\psi(\mathbf{x}, t)$. Par exemple l'opérateur correspondant à la coordonnée x_ν , \hat{X}_ν , pour $\nu = 1, 2, \dots, d$, est simplement la multiplication par x_ν , tandis que l'opérateur impulsion selon la coordonnée x_ν , \hat{P}_ν , est égal à $-i\hbar \nabla_{x_\nu}$. Cela permet de définir les opérateurs position $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_d)$ et impulsion $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_d)$. De façon générale on peut considérer des opérateurs \hat{O} qui sont des fonctions arbitraires de ces deux opérateurs de base : $\hat{O} = f(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}})$. Ainsi l'équation de Schrödinger se formule en terme d'opérateurs :

$$i\hbar \partial_t \psi = \hat{H} \psi,$$

où l'on a introduit le Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V_{ext}(\hat{\mathbf{X}}).$$

Cependant les objets observables sont plutôt les valeurs moyennes des quantités physiques qui s'écrivent, à l'instant t :

$$\langle \hat{O} \rangle_t = \int d\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}, t) \hat{O} \psi(\mathbf{x}, t).$$

L'évolution de ces valeurs moyennes est donnée par une équation relativement simple qui fait intervenir le commutateur du Hamiltonien et de l'opérateur considéré :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = \left\langle \left[\hat{H}, \hat{O} \right] \right\rangle. \quad (\text{III.10})$$

Dans les cas des opérateurs position, $\hat{\mathbf{X}}$, et impulsion, $\hat{\mathbf{P}}$, on obtient les relations d'Ehrenfest :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{X}} \rangle &= \frac{\langle \hat{\mathbf{P}} \rangle}{m} \\ \frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{P}} \rangle &= \langle \hat{\mathbf{F}}[m] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

où l'on a posé $\hat{\mathbf{F}}[m] \equiv -\nabla V[m](\hat{\mathbf{X}}, t)$.

13.1.2 Transposition aux MFG

Dans le cas des MFG, on peut définir de manière similaire les opérateurs position, \hat{X} , et impulsion, \hat{P} , à travers leurs coordonnées :

$$\hat{X}_\nu = x_\nu \times \quad \text{and} \quad \hat{P}_\nu = \mu\sigma^2 \nabla_{x_\nu} .$$

En introduisant le Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2\mu} + V[m](\hat{X}, t),$$

les équations MFG s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu\sigma^2 \partial_t \Phi = \hat{H} \Phi \\ \mu\sigma^2 \partial_t \Gamma = -\hat{H} \Gamma \end{cases} .$$

Enfin si l'on définit les valeurs moyennes par :

$$\langle \hat{O} \rangle_t = \int \Gamma(x, t) \hat{O} \Phi(x, t) dx, \quad (\text{III.12})$$

on obtient une loi d'évolution comparable à (III.10) :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = \langle [\hat{H}, \hat{O}] \rangle .$$

De plus, dans le cas où l'opérateur \hat{O} ne dépend que de \hat{X} , la valeur moyenne (III.12) s'écrit :

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \int \Gamma(x, t) \phi(x, t) O(x) dx = \int m(x, t) O(x) dx,$$

ce qui fait que la valeur moyenne définie ci-dessus correspond alors avec la valeur moyenne au sens probabiliste avec une fonction de distribution $m(x, t)$.

Ainsi on obtient par exemple pour la position moyenne et l'impulsion moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle &= \frac{\langle \hat{P} \rangle}{\mu} \\ \frac{d}{dt} \langle \hat{P} \rangle &= \langle \hat{F}[m] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

où l'on a posé, comme précédemment, $\hat{F}[m] \equiv -\nabla V[m](\hat{X}, t)$.

Pour la suite du chapitre, il sera aussi utile d'étudier la variance dans la direction x_ν , $\Sigma_\nu^2 \equiv \langle \hat{X}_\nu^2 \rangle - \langle \hat{X}_\nu \rangle^2$, et la valeur moyenne de l'opérateur

$$\hat{\Lambda}_\nu = \hat{X}_\nu \hat{P}_\nu + \hat{P}_\nu \hat{X}_\nu,$$

notée Λ_ν , qui évoluent selon les équations :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma_\nu^2 &= \frac{1}{\mu} (\Lambda_\nu - 2\langle \hat{P}_\nu \rangle \langle \hat{X}_\nu \rangle) \\ \frac{d}{dt} \Lambda_\nu &= -2\langle \hat{X}_\nu \hat{F}_\nu[m] \rangle + 2\langle \hat{P}_\nu^2 \rangle . \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

13.2 Solution stationnaire

D'après le théorème de Cardaliaguet (cf. section 4.2), on sait que si l'horizon T est suffisamment grand devant les autres constantes de temps du problème, la solution du système MFG (III.3) approche un état stationnaire $u_e(x), m_e(x)$ pour $0 \ll t \ll T$. Cet état stationnaire $u_e(x), m_e(x)$ vérifie :

$$\begin{cases} -\lambda - \frac{1}{2\mu} |\nabla u_e|^2 + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_e = U_0(x) + g m_e(x) \\ \nabla(v_e m_e) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_e = 0 \end{cases}$$

où,

$$v_e = v_e(x, t) = -\frac{\nabla u_e}{\mu}.$$

En utilisant, comme précédemment, des changements de variable de la forme : $\phi_e = \exp(-u_e/\mu\sigma^2)$ et $\Gamma_e = m_e \exp(u_e/\mu\sigma^2)$, on s'aperçoit que ϕ_e et Γ_e vérifient la même équation :

$$\frac{\mu\sigma^4}{2} \Delta \psi_e + U_0(x) \psi_e + g \psi_e^3 = \lambda \psi_e, \quad (\text{III.15})$$

qui est analogue à l'équation NLS indépendante du temps. Par ailleurs, on remarque que, de la même manière que les solutions stationnaires de l'équation NLS sont obtenues grâce à l'ansatz :

$$\psi(x, t) = \psi_e(x) e^{-\frac{i\lambda t}{\hbar}},$$

on obtient l'équation (III.15) en cherchant les solutions du système (MFG') sous la forme :

$$\Gamma(x, t) = \psi_e(x) e^{\frac{\lambda(t-T)}{\mu\sigma^2}} \quad \text{et} \quad \phi(x, t) = \psi_e(x) e^{-\frac{\lambda(T-t)}{\mu\sigma^2}}.$$

En 1D, les solutions de (III.15) peuvent s'obtenir par quadrature dans le cas où le potentiel $U_0(x)$ est négligeable devant la force des interactions. La solution s'écrit :

$$\psi_e(x) = \frac{1}{\sqrt{2\eta}} \frac{1}{\cosh\left(\frac{x}{\eta}\right)}, \quad (\text{III.16})$$

avec $\eta = 2\mu\sigma^4/g$ et $\lambda = g/4\eta$. La densité stationnaire m_e s'obtient alors simplement en remarquant que $m_e = \Gamma_e \Phi_e = \psi_e^2$.

En effet en 1D, (III.15) s'écrit quand $U_0 \equiv 0$:

$$\frac{\mu\sigma^4}{2} \partial_{xx}^2 \psi_e + g \psi_e^3 = \lambda \psi_e.$$

En multipliant par le facteur intégrant $\partial_x \psi$ on a :

$$\frac{\mu\sigma^4}{2} \frac{(\partial_x \psi_e^2)^2}{2} + \frac{g}{4} \psi_e^4 - \frac{\lambda}{2} \psi_e^2 = \text{Cte},$$

où la constante d'intégration est nulle puisque l'on cherche des solutions régulières, nulles à l'infini :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi_e = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \partial_x \psi_e = 0.$$

Intuitivement, on prévoit que la solution stationnaire possède un unique maximum ψ_M puisque les interactions attractives ont tendance à rassembler les agents. A la position du maximum x_M , la dérivée $\partial_x \psi_e$ s'annule ce qui donne :

$$\frac{g}{4}\psi_M^4 - \frac{\lambda}{2}\psi_M^2 = 0,$$

soit

$$\psi_M = \left(\frac{2\lambda}{g}\right)^{1/2}.$$

Par séparation des variables, dans la région où $\partial_x \psi_e < 0$:

$$dx = -\frac{\sqrt{\mu}\sigma^2}{\sqrt{2\lambda}\psi_M} \frac{d\psi_e}{\left(\left(\frac{\psi_e}{\psi_M}\right)^2 - \left(\frac{\psi_e}{\psi_M}\right)^4\right)^{1/2}}.$$

On intègre alors à partir de la position du maximum x_M :

$$\int_{x_M}^x dx = -\int_{\psi_M}^{\psi_e} \frac{\sqrt{\mu}\sigma^2}{\sqrt{2\lambda}\psi_M} \frac{d\psi}{\left(\left(\frac{\psi}{\psi_M}\right)^2 - \left(\frac{\psi}{\psi_M}\right)^4\right)^{1/2}},$$

et grâce au changement de variable $\psi = \frac{\psi_M}{\cosh \theta}$ on obtient :

$$x - x_M = \frac{\sqrt{\mu}\sigma^2}{\sqrt{2\lambda}} \left(\frac{1}{\cosh}\right)^{-1} \left(\frac{\psi_e}{\psi_M}\right). \quad (\text{III.17})$$

Au signe près, on obtient la même expression dans la région où $\partial_x \psi_e > 0$. Enfin la valeur de λ est fixée par la condition de normalisation

$$\int \psi_e^2 dx = 1.$$

En conclusion, on retrouve bien (III.16) après avoir réarrangé (III.17).

13.3 Formulation variationnelle

En transposant l'action de l'équation NLS, on peut vérifier que le système MFG' (III.9) dérive de l'extrémalité de l'action suivante :

$$S[\Gamma(x, t), \Phi(x, t)] \equiv \int_0^T dt \int dx \left[\frac{\mu\sigma^2}{2} (\partial_t \Phi \Gamma - \Phi \partial_t \Gamma) - \frac{\mu\sigma^4}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Gamma + U_0(x) \Phi \Gamma + \frac{g}{2} \Phi^2 \Gamma^2 \right]. \quad (\text{III.18})$$

En effet une petite variation $\delta\phi$ autour de la valeur extrême, nulle en $t = 0$ et $t = T$, entraîne une variation de l'action :

$$\delta S = \int_0^T dt \int dx \left[\frac{\mu\sigma^2}{2} (\partial_t \delta\Phi \Gamma - \delta\Phi \partial_t \Gamma) - \frac{\mu\sigma^4}{2} \nabla \delta\Phi \cdot \nabla \Gamma + U_0(x) \delta\Phi \Gamma + g \delta\Phi \Phi \Gamma^2 \right].$$

En intégrant par partie on obtient :

$$\delta S = \int_0^T dt \int dx \left[\mu\sigma^2 \partial_t \Gamma + \frac{\mu\sigma^4}{2} \Delta \Gamma + U_0(\mathbf{x})\Gamma + g\Phi\Gamma^2 \right] \delta\phi, \quad (\text{III.19})$$

puisque les conditions aux limites imposées sont de la forme :
 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x, t) = 0$.

Ainsi l'extrémalité de l'action $\delta S = 0$ implique la seconde des équations (III.3). En considérant les variations de l'action par rapport à $\Gamma(x, t)$, on obtient de même la première équation.

Remarque Si on introduit le Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, \Gamma, \partial_t \Phi, \partial_t \Gamma, \nabla \Phi, \nabla \Gamma) = & \frac{\mu\sigma^2}{2} (\partial_t \Phi \Gamma - \Phi \partial_t \Gamma) - \frac{\mu\sigma^4}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Gamma \\ & + U_0(x)\Phi\Gamma + \frac{g}{2} \Phi^2 \Gamma^2, \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

les équations du mouvement prennent une forme plus compacte¹⁸

$$-\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t \Phi} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0, \quad (\text{III.21})$$

et de même pour Γ .

13.3.1 Théorème de Noether et quantités conservées

Puisque l'action (III.18) ne dépend pas explicitement du temps, le théorème de Noether peut être appliqué pour la symétrie par translation dans le temps $t \rightarrow t + dt$, ce qui fournit la relation de conservation de l'énergie totale $d\mathcal{E}_{tot}/dt = 0$, avec \mathcal{E}_{tot} définie par :

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2\mu} \langle \hat{\Pi}^2 \rangle + \langle U_0(\hat{X}) \rangle + \langle \hat{H}_{int} \rangle, \quad (\text{III.22})$$

c'es-à-dire explicitement :

$$\mathcal{E}_{tot} = \int dx \left(-\frac{\mu\sigma^4}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Gamma + U_0(x)\Phi\Gamma + \frac{g}{2} \Phi^2 \Gamma^2 \right).$$

En effet soit \mathcal{S} l'action entre t_1 et t_2 , avec $0 < t_1 < t_2 < T$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\Gamma(x, t), \Phi(x, t)] \equiv & \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left[\frac{\mu\sigma^2}{2} (\partial_t \Phi \Gamma - \Phi \partial_t \Gamma) \right. \\ & \left. - \frac{\mu\sigma^4}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Gamma + U_0(x)\Phi\Gamma + \frac{g}{2} \Phi^2 \Gamma^2 \right], \end{aligned}$$

où Γ et Φ vérifient les équations (MFG'). Et soit \mathcal{S}' la valeur de l'action par translation dans le temps :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'[\Gamma'(x, t), \Phi'(x, t)] \equiv & \int_{t_1+dt}^{t_2+dt} dt \int dx \left[\frac{\mu\sigma^2}{2} (\partial_t \Phi' \Gamma' - \Phi' \partial_t \Gamma') \right. \\ & \left. - \frac{\mu\sigma^4}{2} \nabla \Phi' \cdot \nabla \Gamma' + U_0(x)\Phi'\Gamma' + \frac{g}{2} \Phi'^2 \Gamma'^2 \right], \end{aligned}$$

18. La notation $\partial \mathcal{L} / \partial (\nabla \Phi)$ désigne le vecteur des dérivées partielles $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\nu \Phi)$, $\nu = 1 \dots d$.

où $\Gamma'(x, t) = \Gamma(x, t - dt) \approx \Gamma - dt \partial_t \Gamma$ et $\Phi'(x, t) = \Phi(x, t - dt) \approx \Phi - dt \partial_t \Phi$.

Calculons la variation de l'action sous cette transformation :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \mathcal{L}(\Phi', \Gamma', \partial_t \Phi', \partial_t \Gamma', \nabla \Phi', \nabla \Gamma') - \mathcal{L}(\Phi, \Gamma, \partial_t \Phi, \partial_t \Gamma, \nabla \Phi, \nabla \Gamma) - dt \int dx \mathcal{L}(\Phi, \Gamma, \partial_t \Phi, \partial_t \Gamma, \nabla \Phi, \nabla \Gamma) \Big|_{t=t_1} + dt \int dx \mathcal{L}(\Phi, \Gamma, \partial_t \Phi, \partial_t \Gamma, \nabla \Phi, \nabla \Gamma) \Big|_{t=t_2},$$

en utilisant la définition (III.20) du Lagrangien. Le premier terme vaut approximativement :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma} \delta \Gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Phi} \delta \nabla \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Gamma} \delta \nabla \Gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} \delta \partial_t \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Gamma} \delta \partial_t \Gamma,$$

avec la notation $\delta \Gamma = -dt \partial_t \Gamma$ et $\delta \Phi = -dt \partial_t \Phi$. En intégrant par partie et en utilisant les équations (MFG'), ou leur forme (III.21), ce terme vaut simplement

$$\left[\int dx \frac{\mu \sigma^2}{2} (\Gamma \delta \Phi - \Phi \delta \Gamma) \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Finalement, par compensation des termes en $\partial_t \Phi \Gamma - \Phi \partial_t \Gamma$, on a

$$\delta S = \left[\int dx -\frac{\mu \sigma^4}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Gamma + U_0(x) \Phi \Gamma + \frac{g}{2} \Phi^2 \Gamma^2 \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Mais d'autre part $\delta S = 0$ par simple changement de variables (invariance de l'action par translation dans le temps), ce qui signifie que l'énergie totale \mathcal{E}_{tot} (III.22) est conservée.

13.3.2 Approximation variationnelle

Par souci de simplicité on se place dans cette sous-section à une dimension. Dans le cadre de notre problème de population, il est naturel d'utiliser une approche de type variationnel. En effet, d'une part on réduit grandement la complexité du problème en passant d'un système d'EDP couplées forward/backward à un système d'EDO (équations différentielles ordinaires) forward/backward. D'autre part dans certains cas, par exemple pour une compréhension qualitative du problème, ou si l'on cherche simplement à comprendre le comportement général du problème, il n'est pas nécessaire d'avoir accès à tous les détails de la solution. On peut ainsi considérer, que dans le cas qui nous intéresse, où l'on part d'une densité d'agents localisée dans une certaine région de l'espace, et qui va avoir tendance à se compacter sous l'effet des interactions attractives, connaître la position moyenne \bar{x} et la variance Σ^2 de la distribution est amplement suffisant. Dans cet esprit on postule pour la densité un ansatz de la forme :

$$m(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2(t)}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\Sigma^2(t)}\right).$$

Mais il faut surtout trouver pour les fonctions Γ et Φ qui interviennent dans l'action, deux formes fonctionnelles adéquates. On est aidé pour cela par la connaissance de

solutions exactes pour l'équation de NLS. En effet on sait [48] que l'on peut trouver des solutions de la forme :

$$\psi(x, t) = e^{i\Phi(t)/\hbar} e^{ix\beta(t)/\hbar} \Psi_0(x - \alpha(t)),$$

où les paramètres $\Phi(t)$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ vérifient certaines équations et $\Psi_0(x)$ vérifie NLS stationnaire. De plus intuitivement $\beta(t)$ représente l'impulsion moyenne car :

$$\langle \hat{P} \rangle = \beta(t).$$

Par ailleurs il faut introduire un paramètre, disons Λ , qui traduise la dissymétrie entre Γ et Φ en ce qui concerne leur extension spatiale, mais sachant que leur produit doit être égal à la densité m de variance Σ^2 . Ainsi on postule les ansatz suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= e^{-\gamma(t)/\mu\sigma^2} e^{-xP(t)/\mu\sigma^2} \frac{1}{(2\pi\Sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\Sigma^2} \left(1 + \frac{D(t)}{\mu\sigma^2}\right)} \\ \phi(x, t) &= e^{+\gamma(t)/\mu\sigma^2} e^{xP(t)/\mu\sigma^2} \frac{1}{(2\pi\Sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\Sigma^2} \left(1 - \frac{D(t)}{\mu\sigma^2}\right)}. \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\langle \hat{\Pi} \rangle = P(t) \quad \text{et} \quad \langle \hat{\Lambda} \rangle - 2\langle \hat{\Pi} \rangle \langle \hat{X} \rangle = D(t),$$

ce qui permet d'interpréter $P(t)$ et $D(t)$ comme l'impulsion moyenne et la "dispersion" moyenne¹⁹. En injectant ces formules dans l'action (III.18) et en imposant que la variation de l'action doit être nulle autour de la solution extrême on obtient les équations variationnelles suivantes (cf. Annexe C) :

$$\dot{\bar{x}} = \frac{P}{\mu} \tag{III.23}$$

$$\dot{P} = - \int dx \frac{\partial U_0}{\partial x}(x) m(x, t), \tag{III.24}$$

$$\dot{\Sigma}^2 = \frac{D}{\mu} \tag{III.25}$$

$$\dot{D} = -\frac{\mu\sigma^4}{2\mu} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\mu^2\sigma^4}\right) \frac{1}{\Sigma^2} + \frac{g}{2\sqrt{\pi}\Sigma}. \tag{III.26}$$

14 Résolution du problème de dynamique de population

Par souci de simplicité on se place aussi dans cette section à une dimension. Le système variationnel (III.23-III.26), qui prend la forme d'équations différentielles couplées est toujours difficile à résoudre. Une approche pertinente consiste à simplifier le problème en l'étudiant dans certains régimes limites. Dans cette section nous nous intéresserons au cas des interactions fortement attractives dans la limite des horizons longs. On supposera aussi que $m_0(x)$ possède une forme simple avec un unique maximum. Dans ce

19. on l'appelle ainsi car $D(t)$ contrôle la variation de la variance, i.e. de l'extension spatiale

cas, on s'aperçoit que puisque la densité d'agent va se contracter rapidement autour de sa position centrale, on peut supposer pour la densité un ansatz simple qui dépend de deux paramètres, la position moyenne \bar{x} et la variance Σ^2 :

$$m(x, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\Sigma^2(t)} \right]. \quad (\text{III.27})$$

Il est alors possible de dériver des équations découplées décrivant l'évolution de \bar{x} et de Σ^2 , soit à partir du système variationnel (III.23-III.26) soit à partir des relations d'Ehrenfest (III.13) et (III.14). C'est cette dernière option que l'on va développer dans la suite.

14.1 Mouvement du centre de masse

Dans l'étude du mouvement du centre de masse, on supposera que la taille caractéristique de la densité est bien plus petite que celle du potentiel extérieur U_0 , soit parce que c'était déjà la cas initialement, soit parce que la densité se contracte si rapidement du fait de la force des interactions attractives, qu'en pratique, on peut considérer que c'est la cas. En ces circonstances, on peut écrire :

$$- \int dx \frac{\partial U_0}{\partial x}(x) m(x, t) \approx -\partial_x U_0(\bar{x}).$$

Ainsi en combinant cette approximation avec les deux équations (III.13), on obtient une équation fermée pour l'évolution du centre de masse :

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \bar{x} = -\partial_x U_0(\bar{x}). \quad (\text{III.28})$$

On remarque que cette équation est identique à celle décrivant le mouvement d'une particule dans un potentiel extérieur $U_0(x)$ en mécanique classique. Cependant dans notre problème, ce ne sont pas les conditions initiales qui sont données, mais une combinaison de conditions initiales et terminales. Puisque la densité initiale $m_0(x)$ est fixée,

$$\bar{x}(t = 0) = \int x m_0(x) dx \equiv x_{ini}. \quad (\text{III.29})$$

En ce qui concerne l'impulsion finale, on remarque que :

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t = T) = \frac{\langle \hat{\Pi} \rangle_{t=T}}{\mu} \equiv \frac{1}{\mu} \int dx \Gamma(x, T) (\mu \sigma^2 \partial_x) \Phi(x, T).$$

L'intégrale précédente peut être réécrite en faisant apparaître la densité $m = \Gamma \Phi$:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t = T) = \sigma^2 \int dx \frac{\partial_x \Phi(x, T)}{\Phi(x, T)} m(x, T). \quad (\text{III.30})$$

Or par définition $u = -\mu \sigma^2 \ln \Phi$ si bien que :

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t = T) = -\frac{1}{\mu} \int dx \partial_x u(x, T) m(x, T).$$

Et puisque la densité est supposée être localisée, on a approximativement :

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t = T) \approx -\frac{1}{\mu}\partial_x c_T(\bar{x}). \quad (\text{III.31})$$

L'équation (III.28), munie des conditions (III.29)-(III.31) a un sens clair mais, à cause de la présence de \bar{x} dans la condition terminale, on n'obtient des solutions facilement que dans la limite T grand, où les deux conditions se découplent. En effet, en ces circonstances, pour $0 \ll t \ll T$, $\bar{x}(t) \approx x^*$ où x^* est la position optimale vis à vis du potentiel $U_0(x)$. Dans le cas où U_0 est quadratique, on obtient des expressions similaires à celles de la sous-section 1.3.2 .

14.2 Evolution de la variance

Dans cette sous-section, on fera l'hypothèse que l'horizon T est très grand, ce qui sera nécessaire pour obtenir une expression explicite des coefficients de l'équation que nous allons dériver pour la variance. Cela permet de plus de découpler les intervalles $0 \leq t \ll T$ et $0 \ll t \leq T$. On supposera, par ailleurs, soit que la taille caractéristique de la densité est faible devant celle du potentiel extérieur, soit que du fait de la force des interactions, le potentiel extérieur est négligeable. Dans ce cas, en utilisant les équations (III.14), on obtient pour la dérivée seconde de la variance :

$$\frac{d^2\Sigma^2}{dt^2} = \frac{2}{\mu} \left(\frac{\langle \hat{\Pi}^2 \rangle}{\mu} - \frac{\langle \hat{\Pi} \rangle^2}{\mu} + \langle \hat{H}_{int} \rangle \right).$$

Or la relation (III.28) implique que $P \equiv \langle \hat{\Pi} \rangle = d\bar{x}/dt$ vérifie :

$$\frac{\langle \hat{\Pi} \rangle^2}{2\mu} + U_0(\bar{x}) = \text{Cte},$$

où la constante est nulle car en $x = x^*$, $P^* \equiv 0$ ²⁰ et $U(x^*)$ peut être choisi nul par changement d'origine des potentiels. On en déduit que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma^2 = \frac{2}{\mu} \left(\frac{\langle \hat{\Pi}^2 \rangle}{\mu} + 2U_0(\bar{x}) + \langle \hat{H}_{int} \rangle \right).$$

Grâce à la conservation de l'énergie (III.22) , on peut éliminer le terme $\frac{\langle \hat{\Pi}^2 \rangle}{\mu}$, donc finalement :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma^2 = \frac{4}{\mu} \left(\mathcal{E}_{tot} - \frac{1}{2}\langle H_{int} \rangle \right).$$

Et puisque l'on suppose que l'horizon T est assez loin pour que le système passe très proche de l'état ergodique, on a en fait $\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{tot}^*$, la valeur de l'énergie totale dans l'état stationnaire, et donc :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma^2 = \frac{4}{\mu} \left(\mathcal{E}_{tot}^* - \frac{1}{2}\langle H_{int} \rangle \right).$$

20. En effet $P^* = \langle \hat{\Pi} \rangle^* = \int \psi_e(\mu\sigma^2\partial_x)\psi_e dx = 0$, puisque Ψ_e s'annule à l'infini.

Dans l'état stationnaire on a de plus, $\frac{d^2}{dt^2}\Sigma^2 = 0$, d'où :

$$\mathcal{E}_{tot}^* = \frac{1}{2}\langle H_{int}^* \rangle, \quad (\text{III.32})$$

et ainsi on peut écrire :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma^2 = \frac{2}{\mu} (\langle H_{int} \rangle^* - \langle H_{int} \rangle), \quad (\text{III.33})$$

En injectant l'ansatz (III.27), on obtient finalement :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma^2 = \frac{g}{2\mu\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\Sigma^*} - \frac{1}{\Sigma} \right), \quad (\text{III.34})$$

avec

$$\Sigma^* = \sqrt{\pi}\eta \equiv 2\sqrt{\pi}\mu\sigma^4/g, \quad (\text{III.35})$$

en utilisant l'expression de la solution ergodique (III.16) déterminée précédemment avec $U_0 \equiv 0$, puisque dans le régime étudié l'énergie potentielle est négligeable devant l'énergie d'interaction.

On peut montrer (cf. Annexe D) que les conditions aux limites à imposer sont :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma^2(t=0) = \int (x - \bar{x})^2 m_0(x) dx = \Sigma_{ini}^2,$$

initialement et :

$$\mu d\Sigma^2/dt(T) + 2\partial_{xx}^2 c_T(\bar{x}(T))\Sigma^2(T) = \sigma^2 - 2\bar{x}(T)\partial_x c_T(\bar{x}(T)), \quad (\text{III.36})$$

à la fin du processus d'optimisation.

Finalement, toujours dans l'optique des horizons longs, il est possible de résoudre l'équation (III.34) en considérant deux intervalles de temps distincts : l'un où $0 \leq t \ll T$ et l'autre où $0 \ll t \leq T$. Dans le premier cas on impose :

$$\Sigma^2(t=0) = \Sigma_i^2 \quad \text{et} \quad \Sigma^2(T/2 \simeq +\infty) = \Sigma^{2*}.$$

A l'aide d'un facteur intégrant, et définissant $z_i = \Sigma_i/\Sigma^*$, ainsi que $z_t = \Sigma(t)/\Sigma^*$, la solution de l'équation (III.34) s'exprime alors de manière implicite par :

$$-(z_t - z_i) - \log \left(\frac{1 - z_t}{1 - z_i} \right) = \frac{t}{\tau^*},$$

avec

$$\tau^* = 2\pi\sqrt{\mu\eta^3/g}. \quad (\text{III.37})$$

Pour l'intervalle $0 \ll t \leq T$, définissant pareillement $z_t = \Sigma(t)/\Sigma^*$ et $z_T = \Sigma_T/\Sigma^*$, on trouve que la solution est implicitement déterminée par :

$$-(z_t - z_T) - \log \left(\frac{1 - z_t}{1 - z_T} \right) = \frac{T - t}{\tau^*}, \quad (\text{III.38})$$

où le temps caractéristique τ^* est le même que précédemment. Grâce à l'équation (III.36), on peut obtenir que (cf. Annexe D) : $\Sigma_T^2 \approx (1 + \xi)\Sigma^{2*}$ où le nombre $\xi \approx 0.43$.

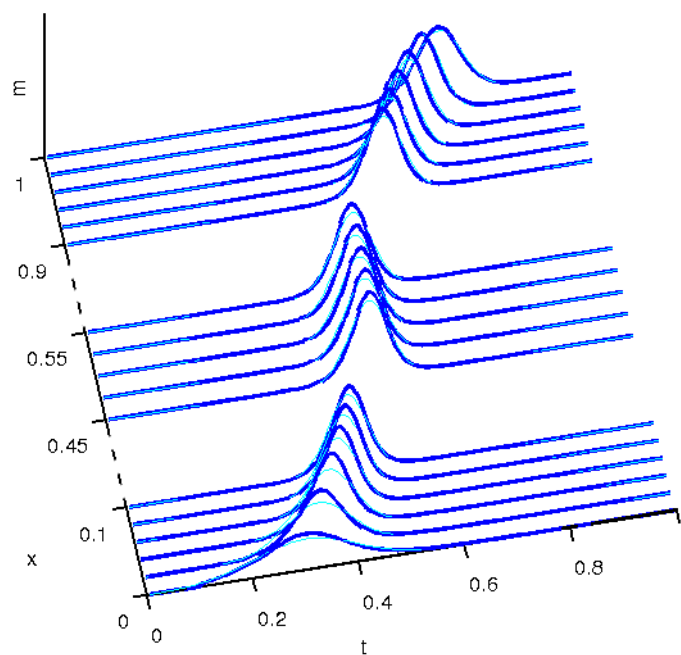


FIGURE 12 – Evolution de la densité au cours du temps pour le problème MFG de population (III.3). En bleu foncé épais la solution numérique, en bleu clair fin l'approximation analytique. Initialement les agents sont distribués selon $m_0 = (1/2\eta_i) 1/\cosh^2[(x - x_i)/\eta_i]$, avec $x_i = 0.3$ et $\eta_i = 0.2$. Le potentiel est de la forme (III.5) avec $U_0 = 2 - 4\pi^2(x - 0.5)^2$ et $g = 2$. Quant au coût terminal, il est de la forme $c_T(x) = 2\pi^2(x - 0.8)^2 - 1$. Les autres paramètres du modèles sont : $T = 1$ et $\sigma = 0.45$.

Voir Annexe F pour les méthodes numériques.

14.3 Vue d'ensemble

En résumé, dans le régime de fortes interactions attractives, la dynamique de la densité des agents peut se scinder en deux parties :

- Le mouvement du centre de masse \bar{x} dans le potentiel $U_0(x)$ avec la position initiale fixée x_{ini} , et une condition finale de la forme (III.31) qui impose une contrainte sur l'impulsion.
- L'évolution de l'extension spatiale de la densité. Celle-ci varie rapidement, avec un temps caractéristique τ^* , au début et à la fin du processus d'optimisation. A partir de l'extension initiale Σ_i , la densité des agents se contracte autour de la position moyenne \bar{x} , sous l'effet des interactions attractives pour atteindre la valeur d'équilibre Σ^* . Durant la plus grande partie du mouvement, l'extension spatiale va peu s'éloigner de cette valeur, jusqu'à proximité de l'horizon T , où le groupe commence à se disperser du fait que le coût final $c_T(x)$ devient non négligeable par rapport à la force des interactions.

A titre d'exemple, la figure (12) montre l'évolution de la solution du problème (III.3) dans le cas où un potentiel quadratique tend à confiner les agents au centre de l'espace $[0, 1]$, et où initialement la densité est localisée autour de $x = 0.3$, tandis que le coût terminal possède un minimum en $x = 0.8$. On voit que l'approximation variationnelle (bleu foncé épais) est bien confirmée par les calculs numériques (bleu clair fin). Les méthodes numériques utilisées sont détaillées Annexe F.

14.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre nous avons établi un lien formel entre un problème de population avec effets de groupes de type Mean Field Games et l'équation de Schrödinger non linéaire, grâce aux mêmes changements de variables que dans le modèle du séminaire. Cela nous a permis de dériver des "relations d'Ehrenfest", c'est-à-dire qui concernent l'évolution de valeurs moyennes, telles que la position moyenne et l'impulsion moyenne. De plus la formulation variationnelle, où les équations MFG apparaissent comme dérivant d'une action, permet de mettre en évidence des quantité conservées, et développer des méthodes d'approximation, dans le cas où la densité est localisée (ce qui est typiquement le cas pour des interactions attractives fortes). Nous avons aussi vu que dans cette situation, la dynamique de la population pouvait se comprendre comme la combinaison du mouvement du centre de masse dans le potentiel extérieur U_0 et d'une contraction rapide ($\approx \tau^*$, cf. (III.37)) de l'écart-type de la densité autour de sa valeur stationnaire Σ^* (cf.(III.35)), lorsque l'on est loin des instants $t = 0$ et $t = T$.

Comme mentionné précédemment les résultats de ce chapitre se généralisent dans plusieurs directions. Notamment on peut, par une analyse de stabilité des points fixes, étudier le comportement qualitatif du système en dimension quelconque et pour un potentiel plus général du type :

$$V[m](x) = U_0(x) + gm^\alpha,$$

avec $\alpha > 0$ quelconque, toujours dans le régime de fortes interactions attractives. Par ailleurs on peut trouver dans certains cas des solutions exactes (problème sans interaction : $g = 0$, donc sans couplage ; soliton dans un potentiel quadratique), ce qui laisse

envisager le développement de méthodes perturbatives autour de ces solutions. Ces résultats seront présentés dans un article en préparation.

Il est également possible d'obtenir quelques résultats intéressants pour des interactions répulsives, dans le cas stationnaire et pour un bruit faible (cf. Annexe E). On remarque en particulier que même lorsque le bruit est nul, et qu'il y a un unique point spatial privilégié, la distribution des agents (identiques), ne se réduit pas à une distribution de Dirac, elle reste étalée spatialement. Cela signifie que dans ce cas le formalisme MFG reste essentiel pour décrire ce type de problèmes.

Schrödinger Approach to Mean Field Games

Igor Swiecicki,^{1,2} Thierry Gobron,² and Denis Ullmo^{1,*}

¹*LPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*

²*LPTM, CNRS, Université Cergy-Pontoise, 95302 Cergy-Pontoise, France*

(Received 1 December 2015; published 23 March 2016)

Mean field games (MFG) provide a theoretical frame to model socioeconomic systems. In this Letter, we study a particular class of MFG that shows strong analogies with the nonlinear Schrödinger and Gross-Pitaevskii equations introduced in physics to describe a variety of physical phenomena. Using this bridge, many results and techniques developed along the years in the latter context can be transferred to the former, which provides both a new domain of application for the nonlinear Schrödinger equation and a new and fruitful approach in the study of mean field games. Utilizing this approach, we analyze in detail a population dynamics model in which the “players” are under a strong incentive to coordinate themselves.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.128701

Mean field games were introduced a decade ago by Lasry and Lions [1,2] and by Huang and co-workers [3] as a tractable version of game theory for a large number of players. This approach provides a very versatile framework to model a vast range of socioeconomic problems ranging from social behavior [4–7] to finance and economy [8–10]. Phrased in the language of macroeconomy, it makes it possible to go beyond the “representative agent” description [10] and introduce, through its game-theory component, some of the complexity associated with the variability of economic agents’ situations. It does so while keeping some reasonable degree of simplicity thanks to the “mean-field” point of view taken. In engineering science, it also proposes a manageable framework to approach complex optimization problems involving a large number of coupled subsystems [3,11].

This relatively new field has witnessed a very rapid development in the last few years, and has followed two major avenues. The first one is a mathematical approach in which one aims at proving the internal consistency of the theory [12–14] as well as deriving other rigorous results such as existence and uniqueness of solutions for some classes of models [15,16]. The other direction taken was to develop efficient numerical schemes [5,17,18]. One thing which has, however, prevented the diffusion of this tool at a significantly larger scale is the lack of effective approximation schemes. In fact, in spite of the mean-field-type assumptions, the constitutive equations of these models remain rather difficult to analyze, in particular, because of their atypical forward-backward structure, and only a few simple models admit an analytical solution [6,19–21]. On the other hand, full fledged numerical analyses of the mean field games equations leave much to be understood.

We show here that there is a strong and deep relationship between mean field games (or at least a large class of them), and the nonlinear Schrödinger

(or Gross-Pitaevskii) equation, which has been studied for almost a century by physicists to describe various physical systems ranging from interacting bosons in the mean field approximation to gravity waves in inviscid fluids. The goal of this Letter is to show that this identification allows us to transfer to mean field games (or at least to a class of them) a vast array of knowledge and techniques that have been developed through the years in this field (see, e.g., Ref. [22–26]). In particular, this opens the way to very effective approximation schemes leading both to a qualitative understanding and a good quantitative description of the solutions of the mean field games equations. This applies to many circumstances where a direct analysis of the mean field games equations seems highly nontrivial, and in any case has not been fully undertaken. In particular, we show how this approach provides an essentially complete description of the regime of strong, short range, attractive interactions, which is presumably the most interesting case.

From a formal point a view, a mean field game is defined by two components: the motion of the agents and the quantity they try to optimize. Each agent $i = 1, \dots, N$ is assumed to be characterized by a “state variable” $X_i(t) \in \mathbb{R}^n$, which, depending on the problem under consideration, may represent physical space [5], the amounts of some natural resources [9], or the position of a portfolio [8]. The dynamics of X_i contains a deterministic part which is controlled by the agent, and a random one associated with external noise. The simplest form of such a motion is a Langevin dynamics

$$dX_i = a_i(t)dt + \sigma dW_i, \quad (1)$$

where W_i is a white noise of variance one. On the other hand, each agent chooses the drift $a_i(t)$ at time t in order to minimize a cost function whose typical form is

$$\begin{aligned}
& c[a_i](X_i(t), t) \\
&= \left\langle \left\langle \int_t^T \left(\frac{\mu}{2} a_i^2(\tau) - V[m_\tau](X_i(\tau)) \right) d\tau \right\rangle \right\rangle_{\text{noise}} \\
&+ \langle c_T(X_i(T)) \rangle_{\text{noise}}. \tag{2}
\end{aligned}$$

In this equation, $\langle \cdot \rangle_{\text{noise}}$ means an average over the noise, $\mu > 0$ tunes the cost of a high drift velocity, $c_T(x)$ is the final cost paid at the end of the optimization period T , and $V[m_t](x)$ is both a function of x and a functional of the density of agents $m_t(x) \equiv (1/N) \sum_i \delta(x - X_i(t))$.

The class of models defined by Eqs. (1), (2), which includes the ‘‘population dynamics models’’ introduced by Guéant and co-workers [9], can be thought of as an equivalent of the ‘‘Ising model’’ in the context of mean field games: it is representative of most mean field games while keeping clear of rather serious ‘‘technicalities’’ attached to specific, application oriented, models. These more realistic mean field games may require to consider other forms of cost function or dynamics [15,27], as well as the introduction of inhomogeneities in the agents characteristics [8]. At the present stage, very little is known about the solutions of the mean field games equations even in their Ising-model-like form Eqs. (1), (2), to which we therefore limit our discussion.

Defining the value function $u(x, t) \equiv \min_{a_i(\cdot)} c[a_i](x, t)$, the minimization of the cost function Eq. (2), under the dynamics Eq. (1), leads to a system of coupled partial differential equations [2]:

$$\partial_t u - \frac{1}{2\mu} (\partial_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u = V[m_t](x), \tag{3}$$

$$\partial_t m + \partial_x(a(x, t)m) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 m = 0, \tag{4}$$

with $a(x, t) \equiv -(1/\mu) \partial_x u(x, t)$. Equation (3) is a Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation propagating the value function $u(x, t)$ backward in time from the final condition $u(x, T) \equiv c_T(x)$; Eq. (4) is a Fokker-Planck (FP) equation propagating the density of agent $m_t(x) = m(x, t)$ forward in time from the initial condition $m_0(x)$. The two Eqs. (3) and (4) are coupled due to the density dependence of the ‘‘potential’’ $V[m_t](x)$ and by the fact that the optimized drift $a(x, t)$ is the gradient of the value function.

With a relatively simple change of variables [28], the system, Eqs. (3), (4), can be cast in a form which we identify here as an imaginary time version of the nonlinear Schrödinger equation. As a consequence of this identification, we show hereafter that the associated formalism can be naturally introduced, leading to an effective approximation scheme. In particular, this approach relates to a very deep theorem derived by Cardialaguet and co-workers [29] which states that (under additional technical conditions) there exists an *ergodic state* $m^*(x)$ in the long time limit

that the density $m(x, t)$ approaches for T large when the time t is sufficiently far from both 0 and T .

To proceed, we introduce two new functions: $\Phi(x, t) = \exp[-u(x, t)/\mu\sigma^2]$ (which corresponds to a Cole-Hopf transformation for the HJB equation), and $\Gamma(x, t) = m(x, t)/\Phi(x, t)$. Eqs. (3), (4) then read for these new variables,

$$-\mu\sigma^2 \partial_t \Phi = \frac{\mu\sigma^4}{2} \partial_{xx}^2 \Phi + V[m_t](x)\Phi, \tag{5}$$

$$\mu\sigma^2 \partial_t \Gamma = \frac{\mu\sigma^4}{2} \partial_{xx}^2 \Gamma + V[m_t](x)\Gamma, \tag{6}$$

with the final condition $\Phi_T(x) \equiv \Phi(x, T) = \exp[-u_T(x)/\mu\sigma^2]$ and the initial condition $\Gamma(x, 0)\Phi(x, 0) = m_0(x)$.

Under the formal replacement $\mu\sigma^2 \rightarrow -i\hbar$, these equations are exactly those governing the evolution of a wave function and its complex conjugate under the quantum Hamiltonian $\hat{H} = \hat{\Pi}^2/(2\mu) + V[m_t](\hat{X})$, where $\hat{\Pi} \equiv \mu\sigma^2 \partial_x$ and \hat{X} are respectively momentum and position operators.

For an arbitrary operator $\hat{O} = f(\hat{X}, \hat{\Pi})$, let us introduce the average

$$\langle \hat{O} \rangle(t) \equiv \langle \Gamma(t) | \hat{O} | \Phi(t) \rangle = \int dx \Gamma(x, t) \hat{O} \Phi(x, t),$$

which, whenever $\hat{O} = O(\hat{X})$, reduces to the classical mean value $\int dx m(x, t) O(x)$. One has, as for the Schrödinger equation, $\mu\sigma^2 (d/dt) \langle \hat{O} \rangle = \langle [\hat{H}, \hat{O}] \rangle$. In particular, straightforward algebra gives

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle = \frac{\langle \hat{\Pi} \rangle}{\mu}, \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{\Pi} \rangle = \langle \hat{F} \rangle, \tag{7}$$

where we have introduced the ‘‘force’’ operator $\hat{F}[m_t] \equiv -\partial_x V[m_t](\hat{X})$. The variance $\Sigma^2(t) \equiv \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2$ evolves according to

$$\frac{d}{dt} \Sigma^2 = \frac{1}{\mu} (\langle \hat{X} \hat{\Pi} + \hat{\Pi} \hat{X} \rangle - 2\langle \hat{\Pi} \rangle \langle \hat{X} \rangle), \tag{8}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \Sigma^2 = \frac{2}{\mu^2} (\langle \hat{\Pi}^2 \rangle - \langle \hat{\Pi} \rangle^2) - \frac{2}{\mu} (\langle \hat{X} \hat{F} \rangle - \langle \hat{X} \rangle \langle \hat{F} \rangle). \tag{9}$$

If furthermore one considers local interactions between the agents, so that the potential takes the form [27]

$$V[m_t](x) = U_0(x) + f[m_t(x)], \tag{10}$$

one gets explicitly

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \hat{F}_0 \rangle \equiv \langle -\nabla_x U_0(\hat{X}) \rangle, \tag{11}$$

$$\langle \hat{X} \hat{F} \rangle = \langle \hat{X} F_0 \rangle - \mathcal{V}_{\text{int}}, \tag{12}$$

with $\mathcal{V}_{\text{int}} \equiv \int dx [\int_0^m du u f'(u)]$. Introducing, moreover, the interaction energy $\langle H_{\text{int}} \rangle \equiv \int dx [\int_0^m du f(u)]$ the ‘‘total energy’’

$$\mathcal{E}(t) \equiv \frac{1}{2\mu} \langle \hat{\Pi}^2 \rangle + \langle U_0(\hat{X}) \rangle + \langle H_{\text{int}} \rangle \quad (13)$$

is a conserved quantity, i.e., $d\mathcal{E}/dt \equiv 0$.

Our claim is that Eqs. (7)–(13), together with many results known in the context of the nonlinear Schrödinger equation, can form the basis of the analysis of a very large class of mean field games for various associated potentials, including some long range interactions. In the following, we will illustrate our point of view, restricting ourselves to the one-dimensional case and to potentials of the form Eq. (10) (though most of our findings can be extended straightforwardly to other cases). We will furthermore focus mainly on the regime that we think is the most interesting, namely, the one of strong positive interactions, in a sense clarified below.

To begin our analysis, it is presumably useful to start with persistent solutions of Eqs. (5), (6), which will eventually correspond to the “ergodic state” of Cardialaguet *et al.* [29]. These are obtained as $\Gamma(x, t) = \psi^*(x)e^{\epsilon t/\mu\sigma^2}$ and $\Phi(x, t) = \psi^*(x)e^{-\epsilon t/\mu\sigma^2}$, giving $m(x, t) = m^*(x) = [\psi^*(x)]^2$, where $\psi^*(x)$ is the solution of the time independent nonlinear equation $\hat{H}\psi^*(x) = \epsilon\psi^*(x)$, that is,

$$\frac{\mu\sigma^4}{2} \partial_{xx}^2 \psi^* + U_0(x)\psi^* + f[(\psi^*)^2]\psi^* = \epsilon\psi^*. \quad (14)$$

We specialize from now on to $f[m(x)] \equiv gm(x)$ (the general case can be addressed following closely the approach described below [30]) with $g > 0$. In this case Eq. (14) is exactly the (time-independent) Gross-Pitaevskii equation. In the limit $U_0(x) = 0$ the lowest energy state is a soliton [26]:

$$\psi_s^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\eta}} \cosh^{-1} \left(\frac{x}{\eta} \right), \quad (15)$$

with $\eta \equiv 2\mu\sigma^4/g$, and $\epsilon_s = g/(4\eta)$.

Note that Eq. (15) provides a length scale, η , the spatial extension of the soliton. We now consider a nonzero external confining potential $U_0(x)$; by definition of a strong interaction regime, the variations of $U_0(x)$ on a scale η are small, that is $|\eta\nabla_x U_0| \ll |\epsilon_s|$ and $|\eta\nabla_x^2 U_0| \ll |\nabla_x U_0|$. Under these conditions, it is clear that, away from $t = 0$ and $t = T$, where the boundary conditions may force the density of agents out of the soliton form, $m(x, t)$ will keep a form close to $[\psi^*(x - \bar{x}(t))]^2$, centered around its mean value $\bar{x}(t) \equiv \langle \hat{X} \rangle(t)$. For this narrow density profile one has $\langle \hat{F}_0 \rangle \simeq -\nabla_x U_0(\bar{x})$, and applying Eq. (7) readily gives

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \bar{x}(t) = -\nabla_x U_0(\bar{x}(t)). \quad (16)$$

In the strong interaction regime, the motion of the soliton is simply that of a classical particle of mass μ in the potential $U_0(x)$.

The next point we need to address is the formation or destruction of the soliton. Indeed, considering for instance the neighborhood of $t = 0$, the initial condition $m_0(x)$ can be taken far from the soliton form, and one may ask how $m(x, t)$ evolves to it from $m_0(x)$. The short answer to this question is “quickly”—indeed this process is dominated by interactions which are assumed to be large. To obtain further insight, let us assume that the density has initially a Gaussian shape of variance Σ_i^2 and centered around \bar{x} . We use a Gaussian ansatz to describe its initial evolution

$$m(x, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\Sigma^2(t)} \right].$$

Neglecting the influence of the external potential during the formation of the soliton in Eqs. (9)–(12), and using that the total energy Eq. (13) is a conserved quantity, we can express $\langle \hat{\Pi}^2 \rangle / 2\mu$ in terms of $\langle H_{\text{int}} \rangle$ and its large t stationary limit $\langle H_{\text{int}} \rangle_*$. Using that here $\mathcal{V}_{\text{int}} = \langle H_{\text{int}} \rangle$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Sigma^2 &= \frac{2}{\mu} (\langle H_{\text{int}} \rangle_* - \langle H_{\text{int}} \rangle) \\ &= \frac{g}{2\mu\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\Sigma_*} - \frac{1}{\Sigma(t)} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

where $\Sigma_* = \sqrt{\pi}\eta$. Imposing $\Sigma(t=0) = \Sigma_i$, and introducing $z_t = \Sigma(t)/\Sigma_*$, $z_i = \Sigma_i/\Sigma_*$, and $\tau^* \equiv 2\pi\sqrt{\mu\eta^3/g}$, Eq. (17) can be integrated as

$$-(z_t - z_i) - \log \left(\frac{1 - z_t}{1 - z_i} \right) = \frac{t}{\tau^*}. \quad (18)$$

The destruction of the soliton can be tackled similarly, except that the terminal condition imposed on Σ^2 is of the mixed form $\mu d\Sigma^2/dt(T) + 2[\partial_{xx}^2 c_T(\bar{x}(T))]\Sigma^2(T) = \sigma^2$, and thus gives a different expression (not shown) for the solution of Eq. (17). One finds that $\Sigma(T) \simeq \Sigma^*(1 + \xi)$ where $\xi \simeq 0.43$ is a number. So the final density $m(x, T)$ has a dispersion which remains of order Σ_* .

Setting aside the precise way the soliton is formed or destroyed near the boundaries $t = 0$ and $t = T$, the important point here is that the characteristic time $\tau^* = \pi\eta\sqrt{\mu/|\epsilon_s|}$ which emerges is short, in the sense that η is assumed the smallest length scale of the problem and ϵ_s the largest energy scale of the problem. This is consistent with the fact that during its formation, the soliton can be considered immobile and centered around \bar{x} . The terminal condition, on the other hand, does not involve directly $m(x)$ as what is fixed is the final cost function $c_T(x)$. Using again that near T the density remains localized on a scale $\sim \Sigma_* \sim \eta$ which is short, one can show, however, that one has for the center of the soliton $\bar{x}(t)$ the terminal condition

$$\mu \frac{d\bar{x}}{dt}(T) = -(\partial_x c_T)[\bar{x}(T)]. \quad (19)$$

As an illustration, let us consider a simple population dynamics model in a one dimensional space (say some aquatic species living along a river). Here the state X is the physical position of each individual, the potential $U_0(x)$ represents the intrinsic quality of the location x (for instance for finding food) and the mutual interaction $V[m](x)$ the incentive to stay within the group (as a defense against predators). If the optimization process is running over a day, $m_0(x)$ would be the initial distribution of the group in the morning, and $c_T(x)$ would represent the intrinsic quality of shelter found at the end of the day. Figure 1 shows a comparison between a numerical solution of Eqs. (3), (4) for a potential as in Eq. (10) with $f(m) = gm$ and the predictions derived from the above analysis (see caption for the precise parameters). The quantitative agreement is seen to be very good.

More generally, we can now give a fairly complete description of the solution of this population dynamics model in the regime of strong short-ranged positive interactions that we consider here. One can distinguish three distinct periods of time.

In the first one (the formation of the herd, which takes place on the shortest time scale τ^*), the individuals coordinate themselves through their strong mutual

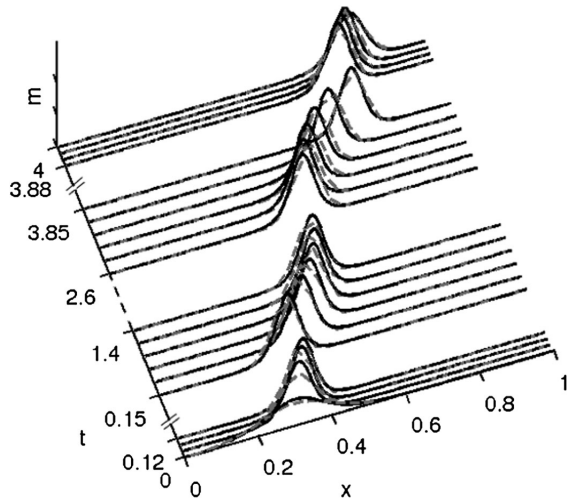


FIG. 1. Solution of the mean field game equations for the density of agents in a typical configuration. Solid black: numerical solution of Eqs. (3), (4); Dashed gray: Solution for the Gaussian ansatz solution of Eqs. (16)–(18). The initial density is $m(x, t=0) = (1/2\eta_i)\cosh^{-2}(x - x_i/\eta_i)$ with $x_i = 0.3$, $\eta_i = 0.2$, and the final cost $c_T(x) = 2\pi^2(x - 0.8)^2$. The parameters of the model are $\sigma = 0.45$, $\mu = 1$, $T = 4$; the potential is as in Eq. (10) with $f(m) = gm$ ($g = 2$), and $U_0(x) = -(\pi^2/8)(x - 0.5)^2$. To make more visible the creation and relaxation of the soliton, the time scale of the initial and final time periods have been magnified.

interaction and evolve from their initial distribution $m_0(x)$ to a localized one whose extension Σ_* results from a balance between the agents' interaction (which tends to reduce Σ_*), and noise (which tends to increase it). Whenever the Gaussian ansatz is accurate during this phase, Eqs. (17), (18) provide a quantitative description of the time evolution of the density of agent. If $m_0(x)$ is not well approximated by a Gaussian this description is presumably a bit more qualitative. Note, however, that the only place where the Gaussian form has been explicitly used here is when expressing $\langle H_{\text{int}} \rangle$ in terms of the variance $\Sigma^2(t)$ of $m(x, t)$. As long as this relation is approximately maintained, and given that $m(x, t)$ has to converge to a soliton form which is well approximated by a Gaussian, the description Eqs. (17), (18) should be reasonably accurate.

The third (and last) time period extends also over the short time scale τ^* just before T , when the population density slightly relaxes from the soliton form to adjust to the final cost function $c_T(x)$. Since the boundary condition does not involve the final density $m(x, T)$ one can assume there a compact form for $m(x, t)$ with a finite spread on a scale $\sim \Sigma_*$.

In between, assuming of course $T \gg \tau^*$, most of the time period $[0, T]$ is characterized by the relatively slow motion of the population following Eq. (16). Because τ^* is so short, and because the dynamics of $\langle \hat{X} \rangle$ and $\langle \hat{\Pi} \rangle$ are controlled by the external potential $U_0(x)$, their values barely move during the formation or the dispersion of the herd, and thus Eq. (16) can be assumed to be valid all along $[0, T]$. Therefore, the precise way in which the herd is initially formed and eventually dispersed will not change drastically what will happen during the propagation phase.

In the intermediate phase, the dynamics is therefore determined by $m_0(x)$, which fixes the initial position of the herd, by $c_T(x)$, which sets the final velocity of the herd, and by the confining potential $U_0(x)$ which drives the motion between the two. We arrive thus at this relatively non-intuitive result that the details of the strong coordination between the agents, which is assumed to be the largest force at work here, plays little role in the global picture.

Considering now the long time limit studied by Cardalaguet and co-workers [29], the picture we obtain is the following: the simplest way to form a trajectory fulfilling the boundary condition $\bar{x} = \bar{x}_0$ at $t=0$ and Eq. (19) at $t=T$ for very large T , is to use an initial velocity $\dot{\bar{x}}_0$ such that the energy $E \equiv \mu \dot{\bar{x}}_0^2/2 + U(\bar{x}_0)$ is almost equal to $U_0(x_{\text{max}})$, with x_{max} the maxima of $U_0(x)$ (which is thus an unstable fixed point). In this way, the trajectory reaches x_{max} with an almost zero velocity, thus staying there for an arbitrarily long time, before picking speed again to fulfill Eq. (19) at $t=T$. The ergodic state appears in this way as $m_*(x) \equiv [\psi^*(x - x_{\text{max}})]^2$, and is approached exponentially quickly if $U_0(x)$ is at least quadratic around x_{max} .

We stress, however, that dealing with a boundary condition problem (implying initial and final times) rather than an initial value problem (initial position and velocity fixed) considerably changes things compared to classical mechanics, especially with respect to the uniqueness of the solution. Indeed, if there is more than one local maxima of $U_0(x)$, one can in most circumstances build more than one solution to the problem [depending on the energy $U_0(\bar{x}(t=0))$ and $U_0(\bar{x}(t=T))$], and on the location of the local maxima relative to $\bar{x}(t=0)$ and $\bar{x}(t=T)$]. Taking the solution associated with the lowest value of the cost function Eq. (2) will make it possible to select the correct one, but this process should imply some phase transition: a very small variation of some parameter, for instance, the optimization time T , may provoke a discontinuous change and lead the group to explore a completely different area.

In this Letter, we have stressed a natural connection between nonlinear Schrödinger equations and mean field games expressed by Eqs. (5), (6), which makes possible the transfer to this latter field of a large variety of tools to analyze, both qualitatively and quantitatively, a wide class of systems which appear significantly more difficult to address directly in the original form. We have focused on the regime of strong short-ranged interactions but other cases (long range interactions, strong confining potential), and higher dimensional problems, could be addressed very similarly. Exploiting fully this connection provides both a new playground for physicists familiar with the nonlinear Schrödinger equation and a path to powerful approximation schemes for mean field games equations. We have illustrated our finding with a stylized population dynamics model, but the analysis of real socioeconomic problems should eventually benefit from these progresses.

This research has been conducted as part of the project Labex MME-DII (Funded by the Agence Nationale pour la Recherche, Grant No. ANR11-LBX-0023-01). We thank Nicolas Pavloff for introducing us to the subtleties of the nonlinear Schrödinger equation and Steven Tomsovic for helpful discussions.

*denis.ullmo@u-psud.fr

- [1] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *C. R. Math.* **343**, 619 (2006).
- [2] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *C. R. Math.* **343**, 679 (2006).
- [3] M. Huang, R. P. Malhamé, P. E. Caines *et al.*, *Commun. Inf. Syst.* **6**, 221 (2006).
- [4] C. Dogbé, *Math. Comput. Modelling* **52**, 1506 (2010).
- [5] A. Lachapelle and M.-T. Wolfram, *Transport. Res. Part B: Methodological* **45**, 1572 (2011).
- [6] L. Laguzet and G. Turinici, *Bull. Math. Biol.* **77**, 1955 (2015).
- [7] D. Besancenot and H. Dogguy, *Bull Econ Res* **67**, 289 (2015).
- [8] A. Lachapelle, J.-M. Lasry, C.-A. Lehalle, and P.-L. Lions, *Math. Finan. Econ.*, 1 (2016).
- [9] O. Guéant, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions, in *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010* (Springer, New York, 2011).
- [10] Y. Achdou, F. J. Buera, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, and B. Moll, *Phil. Trans. R. Soc. A* **372**, 20130397 (2014).
- [11] A. C. Kizilkale and R. P. Malhamé, *Control of Complex Systems: Theory and Applications*, (Elsevier, New York, to be published).
- [12] R. Carmona and F. Delarue, *SIAM J. Control Optim.* **51**, 2705 (2013).
- [13] A. Bensoussan, J. Frehse, and P. Yam, *Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory*, SpringerBriefs in Mathematics (Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 2013).
- [14] P. Cardaliaguet, F. Delarue, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions, [arXiv:1509.02505](https://arxiv.org/abs/1509.02505); M. Burger, M. Di Francesco, P. Markowich, and M.-T. Wolfram, *Discr. Cont. Dyn. Syst. B* **19**, 1311 (2014).
- [15] D. Gomes and J. Saúde, *Dyn. Games Appl.* **4**, 110 (2014).
- [16] P. Cardaliaguet, Notes on mean field games, 2010, unpublished, <https://www.ceremade.dauphine.fr/~cardalia/MFG20130420.pdf>.
- [17] Y. Achdou, F. Camilli, and I. Capuzzo-Dolcetta, *SIAM J. Control Optim.* **50**, 77 (2012).
- [18] O. Guéant, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **22**, 1250022 (2012).
- [19] O. Guéant, *J. Math. Pures Appl.* **92**, 276 (2009).
- [20] M. Bardi, *Netw. Heterog. Media.* **7**, 243 (2012).
- [21] I. Swiecicki, T. Gobron, and D. Ullmo, *Physica (Amsterdam)* **442A**, 467 (2016).
- [22] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989).
- [23] A. M. Kosevich, *Physica (Amsterdam)* **41D**, 253 (1990).
- [24] D. J. Kaup, *Phys. Rev. A* **42**, 5689 (1990).
- [25] V. M. Pérez-García, H. Michinel, J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **56**, 1424 (1997).
- [26] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publications, 2003).
- [27] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Jpn. J. Math.* **2**, 229 (2007).
- [28] This variable change was actually already introduced in Ref. [18].
- [29] P. Cardaliaguet, J. Lasry, P. Lions, and A. Porretta, *SIAM J. Control Optim.* **51**, 3558 (2013).
- [30] I. Swiecicki, T. Gobron, and D. Ullmo (to be published).

Conclusion

Au cours de cette thèse on a exposé de façon heuristique le formalisme de la théorie des jeux en champ moyen, récemment introduit par des scientifiques français et canadiens, et entrevu son utilité pour modéliser les phénomènes socio-économiques. Plus généralement cette théorie est utile pour l'étude de problèmes d'optimisation stratégiques, lorsque l'on a affaire à un grand nombre d'agents identiques. Ce cadre théorique permet, dans un certain nombre de cas, de résumer des problèmes a priori d'une grande complexité en un système de deux équations aux dérivées partielles couplées. Malheureusement, même formalisé ainsi, il n'existe pas de méthode générale de résolution de ces équations. Pire, le caractère forward/backward du système, qui possède une condition initiale pour la densité et une condition finale pour l'équation d'optimisation, rend le problème difficile à comprendre intuitivement.

Avant cette thèse, hormis le cas linéaire-quadratique, il n'existait pas à notre connaissance de solution exacte à des problèmes de type Mean Field Games dynamiques, ni de méthode permettant d'approximer efficacement le problème. On trouvait seulement dans la littérature quelques solutions dans le cas stationnaire. La seconde partie de cette thèse apporte une contribution dans ce sens en proposant une équation exacte pour le champ moyen du modèle du séminaire et en résolvant complètement les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et de Kolmogorov, une fois ce dernier connu. Par ailleurs, on effectue une analyse en terme de régimes limites, aboutissant à travers le "diagramme de phase", à une vision intuitive du problème. Il faut cependant admettre que cette avancée possède certaines limitations :

- Le problème est assez particulier puisque le champ moyen est un nombre, le temps effectif T de commencement du séminaire, et que celui-ci n'intervient que dans la fonction de coût à l'entrée dans la salle de séminaire.
- L'équation exacte ne permet d'obtenir le champ moyen que sous forme implicite, et en terme d'intégrales assez compliquées.

Ceci étant, au vu de ce qui existe dans la littérature, l'analyse menée est intéressante parce que des résultats exacts aident à gagner en intuition sur le comportement général des systèmes de type Mean Field Games. Ils peuvent servir aussi de test pour des simulations numériques. Enfin l'idée de comprendre qualitativement un problème en analysant ses régimes limites est transposable à d'autres problèmes.

La dernière partie aborde un problème plus général où l'on considère la dynamique d'une population d'individus ayant plus ou moins d'affinité pour leurs pairs et des anticipations rationnelles. Ce modèle est stylisé, dans le sens où les interactions entre les individus sont modélisées par de simples interactions locales, mais présente toute la richesse d'un système de type Mean Field Games. Grâce à un changement de variable opportun, on parvient à faire le lien entre ce système et un type d'équation de Schrödinger non linéaire. Cela nous permet d'obtenir des équations d'évolution pour certaines grandeurs moyennes et d'appliquer des méthodes d'approximation de type variationnelles. On aboutit finalement à une vision claire de l'évolution du système selon laquelle on arrive à découpler la dynamique du centre de masse d'une part, et celle de l'écart-type de la densité d'agents d'autre part. Bien sûr il faut là encore regretter quelques aspects restrictifs :

- Les solutions ne sont obtenues que dans le régime des fortes interactions (ou quand la densité est initialement relativement localisée par rapport à l'échelle caractéris-

tique du potentiel extérieur).

- Il est supposé que l'horizon T est très grand pour obtenir des expressions explicites.
- Les méthodes variationnelles ne marchent bien que si l'on a *a priori* une bonne idée qualitative de la solution du problème.
- La complexité des méthodes variationnelles augmente rapidement avec le nombre de paramètres.

Il n'en demeure pas moins que l'analogie avec l'équation de Schrödinger non linéaire apporte un nouvel éclairage sur ce type de problème Mean Field Games et il est possible que dans un futur proche des chercheurs réussissent à transposer la méthode de diffusion inverse, qui permet de résoudre exactement l'équation de Schrödinger non linéaire (sans potentiel extérieur certes). De plus il est probable que l'approche variationnelle soit applicable à d'autres modèles que le problème de population dont on vient de parler.

Une autre direction de recherche intéressante serait de comprendre le comportement de ce problème de population avec effets de groupes, mais avec des conditions initiales plus compliquées pour la densité, par exemple des situations avec initialement deux groupes distincts. Un premier pas a été fait dans cette direction dans un article en préparation. Dans ce dernier, on envisage également la possibilité de "transitions de phase" lorsque l'horizon T augmente dans le cas d'un potentiel extérieur V_0 avec plusieurs maxima.

Plus généralement les perspectives de recherche dans la continuité de cette thèse sont nombreuses :

- D'autres modèles stylisés de type champ moyen, assez simples pour être résolus de façon exacte ou approchée, mais gardant les ingrédients essentiels, pourraient être analysés avec des méthodes similaires ou de nouvelles.
- Souvent dans les applications socio-économiques, le nombre d'agents est grand mais pas infini, donc il serait pertinent d'étudier les propriétés des fluctuations dans ce type de modèles. D'autant que dans nombre de cas, comme les problèmes de risque, ou des problèmes avec une richesse limitée, les fluctuations jouent un rôle non négligeable, car elles peuvent entraîner la ruine du système. Un outil efficace pour cette question pourrait être une formulation du problème en terme d'intégrale fonctionnelle, c'est-à-dire exprimer la fonction de coût comme une intégrale sur les différentes réalisations de la densité $\tilde{m}(x, t)$.
- Pour certaines applications, on aurait envie de généraliser le formalisme de la théorie des jeux en champ moyen à des cas où les agents sont similaires mais pas exactement identiques. Dans ce cas le terme de bruit pourrait justement être dû à l'écart par rapport à "l'agent moyen".
- Certaines situations de "frustration " devraient pouvoir être étudiées selon un formalisme inspiré de la théorie des systèmes désordonnés. En effet celle-ci a déjà été appliquée à des problèmes d'optimisation donc il serait tentant de voir ce qu'il advient dans le cas des jeux différentiels.
- Le régime limite de forte préférence pour le présent peut être intéressant à étudier, car d'une part c'est peut-être le régime qui correspond le plus souvent à la réalité, et d'autre part il pourrait amener à des équations plus simples. A l'ordre le plus bas de l'approximation la fonction valeur s'identifie probablement au terme de potentiel multiplié par la préférence pour le présent. Il reste ensuite à trouver une méthode pertinente pour obtenir une approximation d'ordre supérieur qui donne des résultats intéressants.

Enfin, d'un point de vue plus conceptuel, l'on est en droit de se poser la question de la pertinence des Mean Field Games pour décrire les problèmes socio-économiques. Le formalisme en lui-même est très efficace mais c'est plutôt l'hypothèse de rationalité qui parfois semble étrange. En effet si l'on pense, par exemple, à des planificateurs institutionnels ou des banques, une approche rationnelle semble pertinente, mais celle-ci semble moins adéquate pour décrire les foules, ou les mouvements collectifs. Cependant, cette hypothèse n'est pas forcément à rejeter immédiatement, car il se pourrait que des mécanismes évolutionnaires (par sélection par exemple), conduisent naturellement vers la solution rationnelle. Ainsi le formalisme MFG pourrait s'appliquer à des individus non parfaitement rationnels ou même complètement non rationnels²¹ et aussi être utiles pour décrire des effets de groupe chez les animaux (bancs de poissons, volée d'oiseaux, etc...).

Nous terminons cette thèse en remarquant que ce qui a fait la richesse et l'intérêt de cette thèse a été la transdisciplinarité du sujet, entre physique statistique, mathématiques et problèmes socio-économiques. Ce fut aussi la difficulté car il a fallu comprendre les langages et les problématiques de différentes communautés, et il reste encore beaucoup à faire dans ce sens. Outre le transfert de techniques, comme les approches "champ moyen", l'un des apports les plus importants des « éconophysiciens » est d'apporter un nouvel éclairage, une nouvelle façon d'envisager les problèmes, qui passe par une combinaison de modèles stylisés, d'étude des régimes limites, de méthodes théoriques, numériques ou expérimentales, ce qui permet une compréhension quantitative et qualitative des problèmes.

21. c-à-d incapables d'effectuer un raisonnement complexe



FIGURE 13 – Les poissons d'Escher

A Dérivation de l'équation de Kolmogorov

Dans cette première annexe, afin d'être complet, on présente pour rappel, la dérivation de l'équation de Kolmogorov. On suit une approche proposée par H. Hilhorst [32].

Considérons une particule qui suit une dynamique stochastique au sens d'Itô²²

$$dX_t = v(X_t)dt + \sigma dW_t, \quad (\text{III.39})$$

sachant que $x_0 = x^0$ donné et où W_t est un mouvement brownien.

L'équation maîtresse pour ce processus s'écrit :

$$P(x, t+dt) - P(x, t) = \int T(x, t+dt | x', t) P(x', t) - T(x', t+dt | x, t) P(x, t) dx', \quad (\text{III.40})$$

où $T(x, t+dt | x', t)$ est la probabilité de transition de x' à l'instant t vers x à l'instant $t+dt$. On fait ensuite le changement de variable $x' = x - r$ et l'on suppose que :

$$T(x, t+dt | x', t) = W_r^{\text{dt}}(x - r)$$

et donc :

$$T(x', t+dt | x, t) = W_{-r}^{\text{dt}}(x).$$

Par un développement en série de Taylor,

$$W_r^{\text{dt}}(x - r) P(x - r, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} W_r^{\text{dt}}(x) P(x, t) \right) r^n,$$

si bien qu'en insérant cette relation dans l'équation (III.40), on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a^n(x) P(x, t)],$$

avec

$$a^n(x) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int r^n W_r^{\text{dt}}(x) dr.$$

Soit en posant maintenant $r = s' - s$:

$$\begin{aligned} a^n(x) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int (x' - x)^n T(x, t+dt | x', t) dx' \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \langle dX_t \rangle, \end{aligned}$$

où X_t est la variable aléatoire définie par (III.39). On en déduit que ;

$$a^n(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } n = 1 \\ \sigma^2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

22. c-à-d que la version discrétisée de cette équation est : $X_{n+1} - X_n = v(X_n) + \xi_n$, où ξ_n est une variable aléatoire suivant une loi normale. Il existe d'autres façon de définir une dynamique stochastique dont celle de Stratonovitch, mais qui est reliée à celle d'Itô.

Finalement $P(x, t)$ vérifie donc l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (v(x)P(x, t)) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta P(x, t) = 0,$$

avec la condition initiale $P(x, t = 0) = \delta(x)$. Dans le cas de $N \gg 1$ particules indépendantes, de distribution initiale $m_0(x)$, on peut identifier $P(x, t)$ avec la densité de normalisée de particules $m(x, t)$ et on obtient ainsi l'équation de Kolmogorov.

B Dérivation de $\rho(x_0, T)$ dans la limite $\sigma^2 \rightarrow 0$

On cherche ici à déterminer l'expression $\rho(x_0, T)$, voir Eq.(II.34), dans la limite $\sigma^2 \rightarrow 0$, et pour $T \gg \bar{t}$. Rappelons que, pour $\sigma = 0$, on a obtenu le diagramme des caractéristiques figure 8, si bien que pour x_0 dans les régions²³ 0 et 2 le problème est simple. En effet, on s'aperçoit directement en suivant les caractéristiques que :

- Un agent qui part de la région 0 n'est pas encore arrivé dans la salle de séminaire quand $t = T$ si bien que $\rho(x_0, T) = 1$.
- Un agent qui part de la région 2 est déjà arrivé dans la salle de séminaire à un temps ultérieur, quand $t = T$, si bien que $\rho(x_0, T) = 0$.

Pour x_0 dans la région 1, le problème est plus compliqué et il faut passer à la limite dans l'expression de $\rho(x_0, T)$, en utilisant la méthode de Laplace. Au vu de l'expression (II.22) de $\phi(x, t)$, il est nécessaire de déterminer la position τ_m du minimum de la fonction :

$$f(\tau) = c(t + \tau) + \frac{x^2}{2\tau}.$$

Du fait de la dépendance en x et t , son expression dépend de la région où l'on se trouve :

- Région 0 : $\tau_m = \frac{|x|}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}}$,
- Région 1 : $\tau_m = T - t$,
- Région 2 : $\tau_m = \frac{|x|}{\sqrt{2(\alpha - \gamma)}}$,
- Région 3 : $\tau_m = \bar{t} - t$.

Dans la région 1, le minimum se trouve à une position où la fonction de coût n'est pas dérivable. En utilisant l'approximation correspondant à ce cas, rappelée en 9.3, on trouve :

$$\phi(x, t) = e^{-\frac{1}{\sigma^2} \left(c(T) + \frac{x^2}{2(T-t)} \right)} \left(\frac{1}{\frac{-a_2^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2}{2\sigma^2(T-t)^2}} - \frac{1}{\frac{-a_0^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2}{2\sigma^2(T-t)^2}} \right).$$

Pour le calcul du numérateur de $\rho(x_0, T)$, il faut également déterminer la position x_m du minimum de la fonction :

$$g(x) = -xa_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2T}.$$

On trouve

$$x_m = x_0 + Ta_0,$$

et $x_m > 0$ si x_0 est dans la région 1. Ainsi d'après les formules sous-section 9.3, le numérateur est bien approximé par :

$$e^{-c(T)/\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \left(e^{-x_0^2/2\sigma^2 T} \frac{-\sigma^2}{-a_0 - \frac{x_0}{T}} - e^{-x_0^2/2\sigma^2 T} \frac{-\sigma^2}{-a_0 + \frac{x_0}{T}} \right).$$

23. Les différentes régions sont définies sur la figure 8.

Finalement, en combinant les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\rho(x_0, T) &= \frac{\frac{1}{a_0 + \frac{x_0}{T}} - \frac{1}{a_0 - \frac{x_0}{T}}}{\frac{-x_0}{T} \left(\frac{2}{-a_2^2 + \frac{x_0^2}{T^2}} - \frac{2}{-a_0^2 + \frac{x_0^2}{T^2}} \right)} \\ &= \frac{\frac{x_0^2}{T^2} - a_2^2}{a_0^2 - a_2^2},\end{aligned}$$

pour x_0 dans la région 1.

C Approximation variationnelle

Dans cette annexe on détaille la dérivation des équations (III.23-III.26). Rappelons que le système MFG' (III.9) résulte des conditions d'extrémalité pour l'action :

$$S[\Gamma(x, t), \Phi(x, t)] \equiv \iint dt dx \left[\frac{\mu\sigma^2}{2} (\partial_t \Phi \Gamma - \Phi \partial_t \Gamma) - \frac{\mu\sigma^4}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Gamma + U_0(x) \Phi \Gamma + \frac{g}{2} \Phi^2 \Gamma^2 \right],$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$S[\Gamma(x, t), \Phi(x, t)] = \int L(t) dt,$$

après avoir introduit :

$$\begin{aligned} L_\tau(t) &= \frac{\mu\sigma^2}{2} \int dx (\partial_t \Phi \Gamma - \Phi \partial_t \Gamma), \\ E_{\text{cin}}(t) &= -\frac{\mu\sigma^4}{2} \int dx \nabla \Phi \cdot \nabla \Gamma, \\ E_{\text{pot}}(t) &= \int dx U_0(x) \Phi \Gamma, \\ E_{\text{int}}(t) &= \int dx g \Phi \Gamma, \\ L(t) &= L_\tau(t) + E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{int}}(t). \end{aligned}$$

On insère ensuite dans l'action les Ansatz suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= e^{-\gamma(t)/\mu\sigma^2} e^{-xP(t)/\mu\sigma^2} \frac{1}{(2\pi\Sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\Sigma^2} (1 + \frac{\Lambda(t)}{\mu\sigma^2})} \\ \phi(x, t) &= e^{+\gamma(t)/\mu\sigma^2} e^{xP(t)/\mu\sigma^2} \frac{1}{(2\pi\Sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\Sigma^2} (1 - \frac{\Lambda(t)}{\mu\sigma^2})} \end{aligned}$$

Et grâce aux intégrales connues :

$$\begin{aligned} \int \Gamma \Phi dx &= 1, \\ \int (\Gamma \Phi)^2 dx &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Sigma}}, \\ \int x \Gamma \Phi dx &= \bar{x}, \\ \int (x - \bar{x})^2 \Gamma \Phi dx &= \Sigma^2. \end{aligned}$$

on obtient les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned}
L_\tau(t) &= -\frac{\Lambda}{4} \frac{d}{dt} \ln(\Sigma^2) + \dot{P}\bar{x} + \dot{\gamma} + \frac{1}{4}\dot{\Lambda}, \\
E_{\text{cin}}(t) &= \frac{P^2}{2\mu} - \frac{\mu\sigma^4}{8} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\mu^2\sigma^4}\right) \frac{1}{\Sigma^2}, \\
E_{\text{pot}}(t) &= \int U_0(x)m(x) dx \simeq U_0(\bar{x}) + \frac{1}{2}U_0''(\bar{x})\Sigma^2 + \dots, \\
E_{\text{int}}(t) &= \frac{g}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Sigma}}.
\end{aligned}$$

Finalement on exprime que l'action doit être extrémale vis à vis des variations des paramètres $\bar{x}(t)$, $P(t)$, $\Sigma(t)$ et $\Lambda(t)$. Ainsi pour une variation δP de P , l'action change de :

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \bar{x}\delta\dot{P} + \frac{P}{\mu}\delta P = 0 \\
&= - \int \dot{\bar{x}} + \frac{P}{\mu}\delta P = 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\dot{\bar{x}} = \frac{P}{\mu}.$$

De la même manière on obtient les autres équations (III.23-III.26) en considérant les variations $\delta\bar{x}$, $\delta\Sigma$ et $\delta\Lambda$.

D Condition finale pour Σ^2

Dans cette annexe, on cherche à établir la condition finale que doit vérifier $\Sigma^2(t = T)$. On en déduira, dans un second temps, une équation vérifiée par l'écart-type $\Sigma(t = T)$, puis sa valeur dans le régime où le coût terminal $c_T(x)$ est lentement variable.

- En utilisant la définition de l'opérateur $\hat{\Lambda}$, on établit d'abord une expression qui fait intervenir le coût final $c_T(x)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\Lambda(T) &= 2\sigma^2 \int dx x \Gamma(x, T) \partial_x \Phi(x, T) + \sigma^2 \int dx \Gamma(x, T) \Phi(x, T) \\ &= 2\sigma^2 \int x \Gamma(x, T) \Phi(x, T) \frac{\partial_x \Phi(x, T)}{\Phi(x, T)} dx + \sigma^2,\end{aligned}$$

or $\Gamma(x, T) \Phi(x, T) = m(x, T)$ et $-\sigma^2 \ln \Phi(x, T) = u(x, T) = c_T(x)$, donc si $m(x, T)$ est localisée par rapport à l'échelle caractéristique de $c_T(x)$, on peut développer et :

$$\Lambda(T) \approx -2\bar{x}(T) \partial_x c_T(\bar{x}(T)) - 2\partial_{xx}^2 c_T(\bar{x}(T)) \Sigma^2(T) + \sigma^2, \quad (\text{III.41})$$

et puisque $d\Sigma^2/dt = \Lambda/\mu$, on obtient bien la relation (III.36).

- On exprime ensuite $\Lambda(T)$ en fonction de $\Sigma(T)$ grâce à la relation (III.38). En effet celle-ci s'écrit :

$$z_t = z_T + \left(\frac{1 - z_T}{z_T} \right) \frac{T - t}{\tau^*},$$

avec

$$z_t = \frac{\Sigma(t)}{\Sigma^*} \quad \text{et} \quad z_T = \frac{\Sigma(T)}{\Sigma^*}.$$

En élevant au carré puis en dérivant en $t = T$, on a :

$$\begin{aligned}\Lambda(T) &= \frac{d}{dt} \Sigma^2(T) = 2z_T \frac{\Sigma^{*2}}{\tau^*} \left(1 - \frac{1}{z_T} \right) \\ &= 2 \frac{\Sigma^{*2}}{\tau^*} (z_T - 1).\end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

- En combinant les relations (III.41) et (III.42), on obtient l'équation :

$$-2\bar{x}(T) \partial_x c_T(\bar{x}(T)) - 2\partial_{xx}^2 c_T(\bar{x}(T)) \Sigma^2(T) + \sigma^2 = 2 \frac{\Sigma^{*2}}{\tau^*} \left(\frac{\Sigma(T)}{\Sigma^*} - 1 \right),$$

qui est une équation du second degré en $\Sigma(T)$. Dans l'hypothèse où l'on peut négliger les deux premiers termes par rapport à σ^2 , ce qui est le cas lorsque le coût terminal est lentement variable, on arrive finalement à l'expression :

$$\Sigma(T) = \Sigma^* + \frac{\tau^* \sigma^2}{2\Sigma^*} = \Sigma^*(1 + \xi),$$

où le nombre $\xi \approx 0.43$.

E Approximation de Thomas-Fermi

On considère le problème de population du chapitre (III) mais on se place ici dans le cas stationnaire avec des interactions répulsives ($g < 0$). Après changement de variable on rappelle que le problème est alors décrit par l'équation (III.15) qui s'écrit :

$$\frac{\mu\sigma^4}{2}\Delta\psi_e + U_0(x)\psi_e + g\psi_e^3 = \lambda\psi_e,$$

et la densité stationnaire s'obtient comme :

$$m(x) = \Psi(x)^2 .$$

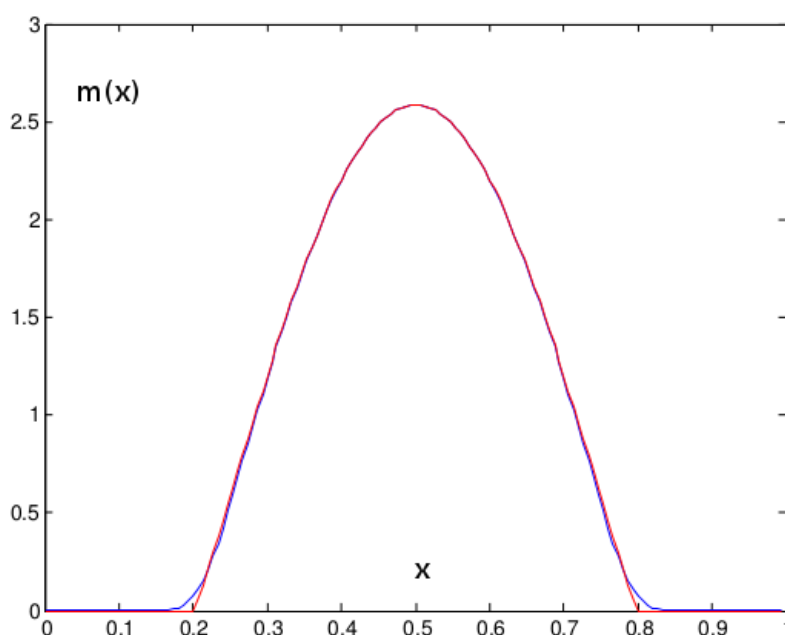


FIGURE 14 – Densité dans l'approximation de Thomas-Fermi dans le cas d'un potentiel quadratique. En rouge l'approximation de Thomas-Fermi, en bleu les résultats numériques.

Dans la limite d'un faible bruit, l'approximation de Thomas-Fermi consiste à négliger le terme de diffusion dans l'équation précédente et l'on obtient :

$$U_0(x)\psi_e + g\psi_e^3 = \lambda\psi_e .$$

Finalement, la densité stationnaire a donc pour expression dans l'approximation de Thomas-Fermi :²⁴

$$m(x) = \frac{1}{|g|} [\lambda + U_0(x)]^+,$$

où λ est déterminée par la condition de normalisation :

$$\int m(x) dx = 1.$$

24. la notation $[f(x)]^+$ désigne la partie positive de $f(x)$

Par exemple dans le cas d'un potentiel quadratique :

$$U_0(x) = -\frac{1}{2}kx^2,$$

on trouve :

$$\lambda = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^{2/3} k^{1/2} g^{2/3}.$$

On peut montrer [19], que les corrections, à cette première approximation, prennent la forme d'un "lissage" de la solution de Thomas-Fermi aux bords de la distribution, déterminés par $\lambda + U_0(x) = 0$, sur une échelle :

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu\sigma^4}{2n_0g}},$$

où n_0 est là densité au centre de la distribution (cf. figure 14).

F Approximation numérique

On présente ici une méthode pour résoudre numériquement le système MFG (III.3) qui utilise la reformulation MFG' (III.9). Le point de départ de cet algorithme est une discrétisation de type Euler backward du système MFG'. Ainsi, pour un espace de longueur L , un horizon T , on considère $N_x + 2$ points d'espace et $N_t - 1$ pas de temps et l'on introduit la version discrète de MFG' à travers les équations :

$$\begin{aligned} dx &= L/(N_x + 1), \\ dt &= T/(N_t - 1), \\ x_i &= (i - 1) * dx, \quad \text{pour } i = 1 \dots N_x + 2, \\ t_n &= (n - 1) * dt, \quad \text{pour } n = 1 \dots N_t, \\ \Gamma_i^n &= \Gamma(x_i, t_n), \end{aligned}$$

et,

$$\frac{\Gamma_i^{n+1} - \Gamma_i^n}{dt} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Gamma_{i+1}^{n+1} + \Gamma_{i-1}^{n+1} - 2\Gamma_i^{n+1}}{dx^2} = \frac{1}{\mu\sigma^2} V[m(x_i, t_n)] \Gamma_i^{n+1}, \quad \text{pour } i = 2 \dots N_x + 1, \quad (\text{III.43})$$

avec des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$\Gamma_1^n = \Gamma_{N_x+2}^n \equiv 0, \quad \forall n.$$

L'équation vérifiée par Φ est discrétisée d'une manière similaire en prenant en compte que cette dernière est backward :

$$\begin{aligned} \Phi_i^n &= \phi(x_i, t_n) \\ \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{dt} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Phi_{i+1}^n + \Phi_{i-1}^n - 2\Phi_i^n}{dx^2} &= \frac{1}{\mu\sigma^2} V[m(x_i, t_n)] \Phi_i^n, \quad \text{pour } i = 2 \dots N_x + 1, \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

avec des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$\Phi_1^n = \Phi_{N_x+2}^n \equiv 0, \quad \forall n.$$

On remarque, que si la densité m est donnée, les N_x equations pour les Γ_i^n forment un système linéaire qui peut être résolu numériquement par les solvers standards des bibliothèques numériques ; de même pour les Φ_i^n .

Finalement la résolution numérique complète passe par une procédure itérative : partant d'une densité $m = m^0$ plausible, on en déduit une première estimation Φ^1 de Φ , grâce à la discrétisation (III.44) de l'équation vérifiée par Φ . Utilisant cette première estimation pour calculer la condition initiale $\Gamma(x, t = 0) = m_0(x)/\Phi(x, t = 0)$, on peut obtenir une première estimation Γ^1 de Γ grâce à son équation discrétisée (III.43). Ainsi on aboutit à une meilleure approximation de la densité : $m^1 = \Gamma^1 \Phi^1$. On calcule alors une seconde estimation Φ^2 for Φ et ainsi de suite jusqu'à ce que la différence entre deux approximations successives soit assez petite :

$$m^0 \text{ (intuition initiale)} \rightarrow (\phi^1, \Gamma^1) \rightarrow m^1 \rightarrow (\phi^2, \Gamma^2) \rightarrow m^2 \dots$$

Références

- [1] Yves Achdou, Francisco J Buera, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Benjamin Moll. Partial differential equation models in macroeconomics. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 372(2028) :20130397, 2014.
- [2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Ecole Polytechnique, 2005.
- [3] Robert J Aumann. Markets with a continuum of traders. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 39–50, 1964.
- [4] Fabio Bagagiolo and Dario Bauso. Mean-field games and dynamic demand management in power grids. *Dynamic Games and Applications*, 4(2) :155–176, 2014.
- [5] Martino Bardi. Explicit solutions of some linear-quadratic mean field games. *Netw. Heterog. Media.*, 7 :243–261, 2012.
- [6] R.E. Bellman. *Dynamic Programming*. Dover Books on Computer Science Series. Dover Publications, 2003.
- [7] A. Bensoussan, J. Frehse, and P. Yam. The Master Equation in Mean Field Theory. *ArXiv e-prints*, April 2014.
- [8] A. Bensoussan, K. C. Sung, S. C. Yam, and S. P. Yung. Linear-quadratic mean field games. *J. Optim. Theory Appl.*, 169(2) :496–529, May 2016.
- [9] Damien Besancenot, Jean-Michel Courtault, and Khaled El Dika. Piecework versus merit pay : a mean field games approach to academic behavior. *Revue d'économie politique*, 122(4) :547–563, October 2012.
- [10] F. Bonnans and P. Rouchon. *Analyse et commande de systèmes dynamiques*. Ecole Polytechnique, 2003.
- [11] J.M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. volume 1 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 171 – 199. Elsevier, 1948.
- [12] P. Cardaliaguet. Notes on mean field games. (Notes from Lion's lecture at the college de France), unpublished, <https://www.ceremade.dauphine.fr/~cardalia/MFG20130420.pdf>.
- [13] P. Cardaliaguet, F. Delarue, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions. The master equation and the convergence problem in mean field games. *ArXiv e-prints*, September 2015.
- [14] P. Cardaliaguet, J. Lasry, P. Lions, and A. Porretta. Long time average of mean field games with a nonlocal coupling. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(5) :3558–3591, 2013.
- [15] René Carmona and François Delarue. Probabilistic analysis of mean-field games. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(4) :2705–2734, 2013.
- [16] Rene Carmona, Jean-Pierre Fouque, and Li-Hsien Sun. Mean field games and systemic risk. *arXiv preprint arXiv :1308.2172*, 2013.
- [17] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics Volume 1*. Hermann.
- [18] Julian D. Cole. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(3) :225–236, 1951.
- [19] F Dalfovo, L Pitaevskii, and S Stringari. Order parameter at the boundary of a trapped bose gas. *Physical Review A*, 54(5) :4213, 1996.

- [20] T. Dauxois and M. Peyrard. *Physics of Solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] Y. N. Martinez de Escobar, P. G. Mickelson, M. Yan, B. J. DeSalvo, S. B. Nagel, and T. C. Killian. Bose-einstein condensation of ^{84}Sr . *Phys. Rev. Lett.*, 103 :200402, Nov 2009.
- [22] B. Diu. *Éléments de physique statistique*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, 1989.
- [23] Lorella Fatone, Francesca Mariani, Maria Cristina Recchioni, and Francesco Zirilli. A trading execution model based on mean field games and optimal control. *Applied Mathematics*, 5(19) :3091, 2014.
- [24] Jean-Pierre Fouque. Relations entre probabilités et équations aux dérivées partielles. *Techniques de l'ingénieur Probabilités et statistique*, (ref. article : a565), 2016.
- [25] Diego A. Gomes, Levon Nurbekyan, and Edgard A. Pimentel. *Economic Models and Mean Field Games Theory*. IMPA, 2015.
- [26] Diego A. Gomes, Edgard A. Pimentel, and Vardan Voskanyan. *Regularity Theory for Mean-Field Game Systems*. Springer, 1st edition edition, 2016.
- [27] Diogo A. Gomes, Joana Mohr, and Rafael Rigão Souza. Discrete time, finite state space mean field games. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 93(3) :308 – 328, 2010.
- [28] Diogo A. Gomes and João Saúde. Mean field games models—a brief survey. *Dynamic Games and Applications*, 4(2) :110–154, 2014.
- [29] Olivier Guéant, Charles-Albert Lehalle, and Joaquin Fernandez-Tapia. Optimal portfolio liquidation with limit orders. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 3(1) :740–764, 2012.
- [30] Olivier Guéant. *Théorie des jeux à champ moyen et applications économiques Juin 2009*. PhD thesis, 2009.
- [31] Olivier Guéant, Jean-Michel Lasry, and Pierre-Louis Lions. Mean field games and applications. In *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*. Springer, 2011.
- [32] Henk Hihorst. Physique statistique : une sélection de sujets.
- [33] Eberhard Hopf. The partial differential equation $ut + uux = \mu xx$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3(3) :201–230, 1950.
- [34] Minyi Huang, Roland P. Malhamé, and Peter E. Caines. Large population stochastic dynamic games : closed-loop McKean-vlasov systems and the nash certainty equivalence principle. *Communications in Information & Systems*, 6(3) :221–252, 2006.
- [35] Sebastian Jaimungal and Mojtaba Nourian. Mean-field game strategies for a major-minor agent optimal execution problem. *Available at SSRN 2578733*, 2015.
- [36] Arman C. Kizilkale and Roland P. Malhamé. Load shaping via grid wide coordination of heating-cooling electric loads : A mean field games based approach. *Cahiers du GERAD*, (68), 2015.
- [37] Aimé Lachapelle. Human crowds and groups interactions : a mean field games approach. 2010.

- [38] Aimé Lachapelle and Marie-Therese Wolfram. On a mean field game approach modeling congestion and aversion in pedestrian crowds. *Transportation research part B : methodological*, 45(10) :1572–1589, 2011.
- [39] Aimé Lachapelle, Jean-Michel Lasry, Charles-Albert Lehalle, and Pierre-Louis Lions. Efficiency of the price formation process in presence of high frequency participants : a mean field game analysis. *arXiv :1305.6323*, 2015.
- [40] Aimé Lachapelle, Juline Salomon, and Gabriel Turicini. Computation of mean field equilibria in economics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20(04) :567–588, 2010.
- [41] Laetitia Laguzet and Gabriel Turicini. Individual vaccination as nash equilibrium in a sir model with application to the 2009-2010 influenza a (h1n1) epidemic in france. *Bull Math Biol*, 77 :1955–1984, 2015.
- [42] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Jeux à champ moyen. I – le cas stationnaire. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(9) :619–625, November 2006.
- [43] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Jeux à champ moyen. II – horizon fini et contrôle optimal. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(10) :679–684, November 2006.
- [44] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1) :229–260, March 2007.
- [45] Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Olivier Guéant. Application of mean field games to growth theory. 2008.
- [46] Pierre-Louis Lions. College de france course on mean field games (2007-2011).
- [47] Pierre-Louis Lions and Jean-Michel Lasry. Towards a self-consistent theory of volatility. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 86(6) :541–551, 2006.
- [48] L.Pitaevskii and S.Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford Science Publications, 2003.
- [49] N. Gregory Mankiw. *Principles of Microeconomics*. Number vol. 1. Dryden Press, 1998.
- [50] François Mériaux, Vineeth Varma, and Samson Lasaulce. Mean field energy games in wireless networks. *Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, pages 1–5, 2012.
- [51] Sidney Redner. *A guide to first passage problems*. Cambridge University Press, 2001.
- [52] Hannes Risken. *Fokker-Planck Equation*, pages 63–95. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [53] Alvaro Sandroni. Do markets favor agents able to make accurate predictions? *Econometrica*, 68(6) :1303–1341, 2000.
- [54] C. Sulem and P.L. Sulem. *The Nonlinear Schrödinger Equation : Self-Focusing and Wave Collapse*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2007.
- [55] Igor Swiecicki, Thierry Gobron, and Denis Ullmo. Schrödinger approach to mean field games. *Phys. Rev. Lett.*, 116 :128701, Mar 2016.
- [56] Igor Swiecicki, Thierry Gobron, and Denis Ullmo. “phase diagram” of a mean field game. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 442 :467 – 485, 2016.

-
- [57] T. Tao. Mean field games. (Notes from Terence Tao blog), unpublished, <https://terrytao.wordpress.com/2010/01/07/mean-field-equations/>.
- [58] Pierre Weiss. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. phys. theor. appl.*, 6(1) :661–690, 1907.
- [59] M. Yildizoglu. *Introduction à la théorie ds jeux*. Dunod, 2003.
- [60] V. E. Zakharov and S. V. Manakov. On the complete integrability of a nonlinear schrödinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 19(3) :551–559, 1974.