SPIM

Thèse de Doctorat

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

UFC UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Manipulation et propagation de photons intriqués en fréquence et étude des marches aléatoires en fréquence

BATISTE GALMÈS

SPIM

Thèse de Doctorat

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

UFC UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

THÈSE présentée par

BATISTE GALMÈS

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Franche-Comté

Spécialité : **Sciences Pour l'Ingénieur**

Manipulation et propagation de photons intriqués en fréquence et étude des marches aléatoires en fréquence

Unité de Recherche :
Institut FEMTO-ST UMR 6174

Soutenue publiquement le 14/03/2016 devant le Jury composé de :

HERVÉ MAILLOTTE	Président du jury	Directeur de recherche CNRS, FEMTO-ST
PHILIPPE GALLION	Rapporteur	Professeur, École Nationale Supérieure des Télécommunications (Paris)
MATTHIEU BLOCH	Rapporteur	Assistant Professor, Georgia Institute of Technology (Atlanta GA - USA)
SERGE MASSAR	Examinateur	Professeur, Université Libre de Bruxelles (Belgique)
ALAIN MORAND	Examinateur	Maître de conférences, Université Joseph Fourier (Grenoble)
MOHAMED BOURENNANE	Examinateur	Professor, Stockholm University (Suède)
JEAN-MARC MEROLLA	Directeur	Chargé de recherche CNRS, FEMTO-ST
KIEN PHAN HUY	Co-encadrant	Maître de conférence, FEMTO-ST

REMERCIEMENTS

Un doctorat est aussi bien une aventure scientifique qu'humaine. Ainsi, j'aimerais profiter de ces quelques pages pour remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué au bon déroulement de ces travaux.

En premier lieu, ces remerciements s'adressent à mon directeur de thèse Jean-Marc Merolla, qui m'a offert l'opportunité d'étudier l'optique quantique à Besançon. Durant ces travaux, j'ai pu bénéficier de son énorme savoir faire technique et appris énormément à son contact. En effet, Jean-Marc est un fervent partisan du "*do it yourself*", ce qui, au détriment de résultats rapides, apporte une formation très solide et extrêmement précieuse pour ce domaine. Je tiens aussi tout particulièrement à remercier Jean-Marc pour l'efficacité et le pragmatisme dont il a pu faire preuve dans les moments importants. Enfin cette dernière année dans ton bureau a été une très belle expérience et j'ai vraiment apprécié tous nos échanges, scientifiques ou pas.

Une autre personne mérite des remerciements très spéciaux, Kien Phan-Huy mon co-encadrant, avec qui j'évolue depuis mon stage de Master. Il a fabriqué le sujet, de ce dernier, à ma mesure ce qui m'a permis de beaucoup m'amuser. Il m'a ensuite accompagné dans le sujet plus ambitieux de mes travaux de thèse. Kien a toujours été présent au quotidien et sa capacité de questionnement perpétuel a été incommensurablement riche et parfois légèrement déroutante. Kien est un encadrant qui pousse à vouloir tout comprendre, et à son contact, j'ai appris à ne plus reculer devant un problème physique ou technique quel qu'il soit. Je dois aussi infiniment remercier Kien pour l'humanité dont il a pu faire preuve au cours de ces années, et pour tout le soutient moral qu'il a pu m'apporter.

Enfin, j'aimerais remercier Remo Giust mon second co-encadrant que j'ai moins sollicité, mais qui a toujours répondu présent pour la moindre question.

À présent, j'aimerais remercier les membres du jury et plus particulièrement Matthieu Bloch et Philippe Gallion qui ont généreusement accepté de rapporter ces travaux.

J'aimerais aussi remercier l'ensemble du laboratoire d'optique ainsi que ceux qui furent mes enseignants et dont la passion m'a donné cette vocation (par équipe) : Max, Laurent, John, Yanne, François, Cyrille, Patrice, Fab, Matthieu, Gilles, Jérôme, Fadi, Thierry, Maria et Philippe. J'aimerais toutefois remercier, un peu à part, Nadège et Thib' pour tous les bons moments et pour leur soutient particulier. Je me dois aussi de remercier les personnes présentes de manière plus diffuse, mais dont la bienveillance s'est toujours faite ressentir et m'a aidée dans les moment moins faciles. Cette aura provient de l'ensemble du laboratoire, mais je tiens à en remercier spécialement Éric et Hervé. J'aimerais aussi remercier le personnel administratif du laboratoire d'optique, Valérie, Aline et Sarah, pour la grande simplification du quotidien que vous apportez. Enfin, j'aimerais remercier Luca pour l'aide technique apportée sur la manip', mais aussi Sam pour les circuits imprimés

et enfin, Manu pour toutes les belles pièces et pour m'avoir laissé regarder ses grosses machines.

J'ai aussi eu le plaisir de côtoyer d'autres personnes de l'institut Femto-st, je pense tout particulièrement à Sophie, Vincent, Fred, Cindy, Olivier et Sarah, ainsi qu'à Francis mais surtout Sandrine ! Enfin j'aimerais remercier les gens d'Auréa, Johann et Frédéric, avec qui j'ai partagé ma salle de manip' en début de thèse et qui ont été particulèrement réactif par la suite pour régler le moindre bug sur les compteurs.

Et puis, il y a les copains ; les copains de la fac, ceux qu'on rencontre dans ce cadre particulier et avec qui on partage une même passion. Il va être très compliqué de remercier tout le monde tellement ces rencontres ont été riches, mais je tiens tout de même à adresser un petit mot à chacun (cast in order of appearance). Merci Toinou, pour ton intelligence et ta simplicité, merci surtout d'avoir gardé le contact malgré la distance, j'espère que la vie fera se recroiser nos chemins plus régulièrement. Nano, merci pour ta si grande générosité et d'avoir été un si bon partenaire à la coinche ! J'espère que je pourrai te soutenir au moins d'une fraction de ce que tu as pu faire pour moi. Merci Lunourson, pour toute ta folie et tous ces vendredis soir magret/patates et pour tout le reste aussi... Merci Zak, pour être encore plus cinglé que Ludo et pour répondre présent à toute heure dès qu'on a besoin de toi. Merci N'Ewik, de m'avoir supporté comme binôme durant deux années et pour les fous rires qu'on a pu avoir. Merci à Thibault pour tous les bons dinners qu'on a pu partager ! À quand un p'tit dej' ;) ? Merci à Pierre Ambroise, de partager avec moi cette affinité cinématographique dans l'incompréhension de nos compagnes, et de mettre ensuite tout le monde d'accord devant une bonne choucroute. Merci à PAM, pour avoir été un si bon camarade de soirée dont la verve ne saurait se passer de tutoiement. Merci à Martine et Gui, pour m'avoir fait courir après la baballe noir tous les lundis soir et pour avoir partagé ton goût particulier pour la décoration intérieure. Merci Bibi, parce que ça rime, mais aussi d'être une amie chéniale qui m'a accueillie à bras ouverts lors de mon arrivée au labo, Danke Schplitt ! Merci à Michou, pour tous ces divertissements à l'aqua et de si bien nous montrer qu'on peut être totalement tout le temps à l'arrache et quand même performant :). Merci mon Clémounet, pour avoir si naturellement apprécié les mets Franc-Comtois que je t'ai fait découvrir et pour toutes les belles histoires qui ont suivi. Je suis certain qu'il y en aura encore plein d'autres... Merci à Aude 2, d'égayer la vie de ton Lala, d'être quelqu'un de super en plus d'une bonne cuisinière. Merci à Pierre et Fanny d'être des super doudous et aussi de super voisins. Merci Jay-Π d'avoir partagé mon bureau et fait preuve d'une grande patience à mon égard. Merci Caro, pour avoir apporté des chocolats par milliers sans oublier mes petits souliers (et aussi pour ta bonne humeur). Merci à Antonio, de m'avoir fait découvrir une partie du Mexique par l'assiette et de m'avoir appris les paroles de *la cucaracha* ! Merci à Justine et Pierre, pour ces belles soirées et pour avoir toléré les dérives de mon imagination dans votre maison. Merci à Tony et Blanca, pour le brin de folie et d'exotisme que vous apportez à nos vies. Merci à Thomas et Mélaine, pour avoir apporté un peu de normandie lors de votre séjour Bisontin, et pour toute la sympathie dont vous pouvez faire preuve. Merci Troën, même si en fait t'étais une Peugeot, pour m'avoir fidèlement amené tous les matins, jusqu'à ce que je décide que ta place serait dorénavant dans un fossé. Je suis peut-être allé un peu vite en besogne en pensant pouvoir remercier personnellement chacun, mais comme les remerciements ne doivent pas représenter l'essentiel du manuscrit, je me contenterai de simplement nommer les autres personnes rencontrées au labo et qui ont compté, et ce même si elles méritent plus d'attention : les anciens - Rémy et Clémence, Juju, Benatt', Jean-Charles, Jassem, Benj' et Matthieu, Mischa, Jérémy, Mika, Ismaël, Abdulaye, Luaï,

Nour, ... - les moins anciens - Rémy H., Joé, Aurélien, Souleymane, Guoping, Stéphane, Yannick, Bogdan, José, Abel, Vincent, Joël, Shanti, Guigui et Alexia - et les plus nouveaux - Rémy M., Saad, Séverine- et pardon pour ceux que j'aurais oublié...

Enfin les copains de toujours, qui sont arrivés en cours de route certes, mais dont on ne se souvient pas précisément de la vie avant eux, ils n'ont pas joué de rôle particulier au quotidien dans cette thèse, mais leur présence et leur amitié sont des biens qui me sont chers et je tiens à les en remercier : M1m1 et Guy, Flo, Brux et D'jo, Kameul, Quinou, Roumain, Dudu, et bien entendu leur moitié qui les ont rejoint en cours de route et que j'affectionne particulièrement.

Vient le tour de la famille, et encore une fois, elle est nombreuse la famille ;). Je ne vais pas citer tous les cousins, oncles et tantes, mais vous êtes tous géniaux et je suis tellement heureux d'avoir partagé autant de bons moments avec vous. Je vais sans faute remercier Naïs et Thomas, qui sont devenus un peu plus que des cousins, et avec lesquels j'ai pu partager de belles années. Je voudrais aussi remercier ma belle famille et plus particulièrement ma belle mère Christine et ma belle soeur Karine, qui ont toutes deux toujours été d'un grand soutient et fait preuve d'une grande clémence à mon égard en me laissant rédiger à l'heure de la ballade dominicale. Je tiens ensuite à avoir une belle pensée pour Papi et Mamie Dou, qui nous ont quitté au cours de cette thèse, deux grand-parents aimants dont je garde un souvenir des plus agréables. J'en profite pour remercier mes autres grand-parents, Papi Michel et Mamie Annie, qui m'ont toujours choyé et auxquels je dois beaucoup de la personne que je suis devenu. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille proche Maman, Papa, Yo et Nath, qui ont toujours été une source de bonheur inépuisable. Même si ces deux dernières années ont été moins rayonnantes, je tiens sincèrement à vous dire que je n'aurais pas pu finir cette thèse sans les sacrifices que vous avez pu concéder pour m'épargner. Je tiens pour ces mêmes raisons à remercier les amis de mes parents et plus particulièrement Frédérique, pour tout le soutient qu'ils nous ont apporté.

Ces remerciements seraient amputés d'une partie majeure si j'oubliais de les adresser à Aude, qui a partagé et subit cette expérience à mes côtés. Merci d'avoir été là à tous les instants et j'espère pouvoir te rendre la pareille au cours de notre vie.

LISTE DES FONCTIONS, VARIABLES ET NOTATIONS

$\otimes$	: produit de convolution
$\star$	: fonction de corrélation
$\tilde{g}$	: transformée de Fourier de g
$\hat{g}$	: le chapeau est utilisé pour noter un opérateur
g^*	: complexe conjugué de g
$J_k(a)$	: Bessel de première espèce d'ordre k et d'argument a
$U_k(a,\phi) = J_k(a)\exp(ik\phi)$	: associe une phase dépendant de l'ordre de la fonction de Bessel
c_0	: célérité de la lumière dans le vide
ϵ_0	: permittivité diélectrique du vide
v_p	: vitesse de phase
v_g	: vitesse de groupe
Ω	: pulsation de l'onde radio-fréquence
V_a	: amplitude de l'onde radio-fréquence du modulateur A
V_b	: amplitude de l'onde radio-fréquence du modulateur B
α	: phase de l'onde radio-fréquence du modulateur A
β	: phase de l'onde radio-fréquence du modulateur B
$V_{\pi a}$	: tension demi-onde du modulateur A
$V_{\pi b}$	: tension demi-onde radio-fréquence du modulateur B
a	: taux de modulation du modulateur A
b	: taux de modulation du modulateur B
a	: profondeur de modulation du modulateur A
b	: profondeur de modulation du modulateur B
$\Delta\omega$	: bande-passante des filtres en fréquence angulaire
$R(\omega)$	: amplitude d'un filtre en réflexion à la fréquence ω
$T(\omega)$	: amplitude d'un filtre en transmission à la fréquence ω
$R_A(\omega)$	: amplitude du filtre A en réflexion à la fréquence ω
$T_A(\omega)$	: amplitude du filtre A en transmission à la fréquence ω
$R_B(\omega)$	: amplitude du filtre B en réflexion à la fréquence ω
$T_B(\omega)$	: amplitude du filtre B en transmission à la fréquence ω
ω_f	: pulsation centrale d'un filtre
ω_a	: pulsation centrale du filtre A
ω_b	: pulsation centrale du filtre B
$\Delta\omega$	: bande passante d'un filtre
$\Delta\omega_a$	: bande passante du filtre A
$\Delta\omega_b$	: bande passante du filtre B

ω_0	: pulsation de l'accord de phase dégénéré
$f(\omega)$	: bande passante du spectre bi-photon
$\Delta\omega_s$	: bande passante du spectre bi-photon
ω_p	: pulsation $\omega_0 + p\Omega$
$\|p\rangle$	: état à un photon dans le mode fréquentiel $\omega_0 + p\Omega$
$\hat{a}_p$	: opérateur annihilant un photon dans le mode fréquentiel $\omega_0 + p\Omega$
$\hat{a}_p^\dagger$	: opérateur créant un photon dans le mode fréquentiel $\omega_0 + p\Omega$
$\|\omega\rangle$	: état à un photon dans le mode fréquentiel ω
$\|\omega\rangle_A$	: état à un photon dans le mode fréquentiel ω et dans un sous espace A
$\|\omega; t\rangle$	: état à un photon dans le mode fréquentiel ω à un instant t explicite
$\hat{a}(\omega)$	: opérateur annihilant un photon dans le mode fréquentiel ω
$\hat{a}^\dagger(\omega)$	: opérateur créant un photon dans le mode fréquentiel ω
$\phi_{\mathrm{L}} = \beta_1 \Omega L$	: la phase linéaire accumulée entre les bins dans la fibre de rétroaction sur le modulateur
$\hat{\mathcal{M}}$	: l'opérateur unitaire représentant la marche dans le modulateur
$\hat{\mathcal{P}}$	: l'opérateur unitaire représentant la propagation dans la rétroaction sur le modulateur
$\phi_k = k\beta_1 \Omega L$	: la phase linéaire accumulée lors de k tours de rétroaction
c_k	: l'amplitude de modulation totale après k tours dans le modulateur
γ_k	: la phase accumulée entre les bins après k tours dans le modulateur
δ_k	: vaut γ_k soustrait de la phase RF
$\phi_{\mathrm{NL}} = \beta_2 \Omega^2 L/2$	: la phase quadratique accumulée entre les bins dans la fibre de rétroaction

LISTE DES ACRONYMES

BPF	: *Band Pass Filter* ou filtre passe bande
CAN	: Convertisseur Analogique/Numérique
CHSH	: Clauser, Horne, Shimony et Holt
DC	: *Direct Current* ou courant continu
DNL	: *Differential NonLinearity* non linéarité différentielle
EPR	: Einstein, Podolsky et Rosen
HOM	: Hong-Ou-Mandel
HPF	: *High Pass Filter* ou filtre passe haut
InGaAs	: Arséniure de Gallium-Indium
ITU	: *International Telecommunication Union* ou union internationale des télécommunications
LPF	: *Low Pass Filter* ou filtre passe bas
LiNbO3	: Niobate de Lithium
MCDF	: Module de Compensation de Dispersion Fixe
MP	: Modulateur de Phase
MZ	: Mach-Zehnder
NL	: Non Linéaire
OSA	: *Optical Spectrum Analyser* ou analyseur de spectre optique
PPLN	: *Periodically Polled Lithium Niobate* ou niobate de lithium périodiquement inversé
QKD	: *Quantum Key Distribution* ou distribution quantique de clé
RF	: Radio-Fréquence
SHG	: *Second Harmonic Generation* ou génération de seconde harmonique
SMF	: *Single Mode Fiber* ou fibre mono-mode
SP	: Séparateur de Puissance
TDC	: *Time to Digit Converter* ou convertisseur numérique de temps d'arrivée
VCO	: *Voltage Controlled Oscillator* ou oscillateur piloté en tension
WS400s	: WaveShaper 4000s (nom commercial)

SOMMAIRE

Introduction 1

1 Les bases de l'optique quantique 3

1.1 Un peu d'histoire de l'optique quantique . . . 3

1.1.1 Dualité onde-corpuscule . . . 4

1.1.1.1 Interférences quantiques . . . 5

1.1.1.2 Relation d'indétermination de Heisenberg . . . 6

1.1.2 Interprétation de Copenhague . . . 8

1.2 Intrication quantique . . . 9

1.2.0.1 Paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) . . . 9

1.2.1 Vers la non-localité . . . 11

1.2.1.1 Inégalité de Bell . . . 11

1.2.1.2 Test de l'inégalité de Bell . . . 13

1.2.2 Autres utilisations de l'intrication . . . 16

1.2.2.1 Interférences temporelles . . . 16

1.2.2.2 Compensation non-locale de dispersion . . . 19

1.2.2.3 Modulation non-locale . . . 21

2 Plateforme de manipulation en fréquence d'états quantiques 25

2.1 Interférences quantiques en fréquence . . . 25

2.1.1 Interférence à un photon . . . 26

2.1.1.1 Mélange de fréquence et superposition de chemins . . . 27

2.1.1.2 Discrimination de fréquence et mesure . . . 36

2.1.1.3 Relation de chemins et figure d'interférence . . . 44

2.1.2 Interférence à deux photons . . . 48

2.1.2.1 Équivalence avec l'interférence à un photon . . . 49

2.1.2.2 Source de photons intriqués en fréquence . . . 51

2.1.2.3 Principe d'interférence à deux photons en fréquence . . . 56

2.1.2.4 Stabilité des composants . . . 64

2.2 Propagation d'états intriqués en fréquence . . . 64

2.2.1 Propagation avant modulation 65
2.2.1.1 Propagation après séparation 65
2.2.1.2 Co-propagation 72
2.2.2 Propagation après modulation 73
2.2.2.1 Caractère non-local de la dispersion 74
2.2.2.2 Interférences à un photon 74
2.2.3 Annulation de la dispersion 75
2.3 Conclusion 76

3 Réalisation expérimentale du phénomène de dispersion non-locale et de sa compensation 77
3.1 Caractérisation des éléments du système expérimental 77
3.1.1 Source de photons intriqués en fréquence 78
3.1.1.1 Caractérisation de la diode de pompe 79
3.1.1.2 Caractérisation de l'accord de phase dégénéré 81
3.1.2 Manipulation de fréquences 84
3.1.2.1 Les modulateurs de phase 84
3.1.2.2 Système de contrôle radio-fréquence 85
3.1.3 Filtres accordables en fréquence 91
3.1.4 Détection et performances du système optique 95
3.1.4.1 La détection des coïncidences 96
3.1.4.2 Performances du système optique 103
3.1.4.3 Variations thermique des fibres 105
3.1.4.4 Contrôle thermique des fibres 107
3.2 Système interférométrique longue distance 109
3.2.1 Caractérisation des franges d'interférence à deux photons 109
3.2.2 Caractérisation des modules à compensation de dispersion 112
3.2.2.1 Filtre accordable en phase et en amplitude 112
3.2.2.2 Le module à compensation de dispersion fixe 114
3.2.3 Effets de la propagation et compensation de dispersion non-locale . 116
3.2.3.1 Résultats pour 4 kilomètres de propagation 116
3.2.3.2 Résultats pour 60 kilomètres de propagation 118

4 Les marches aléatoires quantiques en fréquence 121
4.1 Marches aléatoires en fréquence 121
4.1.1 Les atouts de la fréquence 127

4.1.2 Étude d'un système reblouclé 129
4.1.3 Autres modifications de l'opération unitaire et limitations 139
4.1.4 Modification de l'état initial 140
4.1.5 Marche quantique ? 142
4.2 Etude d'une réalisation expérimentale 142
4.3 Conclusion 145

Conclusion générale **147**

I Annexes **163**

A Eléments d'optique quantique fibrée **165**
A.1 Notations 165
A.1.1 Etats de Fock continus 165
A.2 Opérateur champ dans un guide d'onde 167
A.3 Description quantique d'une lame séparatrice 174
A.3.1 Filtres de Bragg 176
A.3.2 Coupleur fibré équilibré 1 entrée vers 2 sorties 179
A.3.2.1 Etat 1-photon en entrée 180
A.3.2.2 Etat N-photons en entrée 180
A.4 Détection d'un état à N-photons 181
A.5 Mesure de coïncidences 184

B Les fonctions de Bessel de première espèce **189**

C Fluorescence paramétrique en quasi accord de phase **193**

INTRODUCTION

Au sein des nombreuses études consacrées aux états intriqués de la lumière, il existe un thème original encore peu exploré qui est l'ingénierie quantique dans l'espace des fréquences. Cette thématique est étudiée au sein de l'institut Femto-st, par le groupe de Jean-Marc Merolla dont l'objectif est de mettre en évidence des effets quantiques tout en développant des objets technologiques innovants. Cette activité débute dans les années 2000 avec le codage quantique en fréquence pour transmettre des clés de cryptage. Plus récemment, en collaboration avec l'Université Libre de Bruxelles, les travaux du groupe se sont recentrées sur l'étude des états intriqués en fréquence. L'intrication quantique est un des couteaux Suisse de la technologie quantique. Il a ouvert des domaines entiers de recherche, comme l'information quantique ou la téléportation quantique et prend une place particulière dans la distribution quantique de clés.

C'est à la suite des premières réalisations d'interférences à deux photons, exploitant des chemins en fréquence, qu'ont débuté ces travaux de thèse. L'objectif premier était l'étude et la réalisation d'une marche aléatoire quantique en fréquence. Les marches aléatoires classiques sont des outils incontournables de l'informatique classique, notamment pour la résolution de problèmes complexes. Depuis plusieurs années ce domaine est très activement étudié. Beaucoup d'algorithmes ont montré la supériorité de cet outil sur son pendant classique. Notre approche était d'utiliser notre maîtrise de la manipulation des photons en fréquence pour développer un générateur de marches aléatoires quantiques de manière simple et accessible. D'un autre coté, l'étude de l'intrication en fréquence s'est avérée très prometteuse. Les performances obtenues sur notre source de photons intriqués et la robustesse de la technologie utilisée, nous a permis d'étudier les effets de la propagation sur de longue distance sur les états intriqués et manipulés en fréquence.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes focalisés sur l'étude des effets de la dispersion et nous avons pu montrer une compensation non-locale sur des longueurs de propagation effectives des paires de photons allant jusqu'à 60 km. En parallèle, une étude théorique des marches aléatoires a grandement suscité notre intérêt. Nous avons pu établir qu'elles possédaient les mêmes propriétés que les marches aléatoires continues et qu'elles présentaient des performances supérieures aux marches aléatoires classiques équivalentes. Nous avons alors proposé une architecture simple, dont la réalisation est à portée immédiate.

Dans un premier chapitre, nous reviendrons sur les éléments théoriques utiles à la compréhension de ce manuscrit. Dans le second chapitre, nous étudierons la réalisation d'une interférence à deux photons exploitant des chemins en fréquence et étudierons les effets de la dispersion. Le troisième chapitre sera dédié à l'amélioration et la caractérisation de la plateforme réalisée lors des travaux précurseurs. Enfin le dernier chapitre sera consacré à l'étude d'une marche aléatoire quantique en fréquence et à la proposition d'une architecture expérimentale.

1

LES BASES DE L'OPTIQUE QUANTIQUE

Sommaire

1.1 Un peu d'histoire de l'optique quantique 3
1.1.1 Dualité onde-corpuscule 4
1.1.2 Interprétation de Copenhague 8
1.2 Intrication quantique 9
1.2.1 Vers la non-localité 11
1.2.2 Autres utilisations de l'intrication 16

Dans ce chapitre nous introduirons le contexte historique dans lequel s'inscrit ce travail de thèse. Nous évoquerons ainsi de quelle manière les états intriqués sont passés d'une étrangeté autorisée par la mécanique quantique à des objets de laboratoire avec des perspectives d'applications concrètes.

Nous commencerons par rappeler ce qu'est la dualité onde-corpuscule et son interprétation par l'école de Copenhague. Nous pointerons ensuite l'insatisfaction mathématique qui en résulte avec la description de l'expérience de pensée de Schrödinger. Nous aborderons alors un autre débat de l'époque, proche cette fois des travaux abordés dans ce mémoire, qui est le paradoxe émis par Einstein, Podolsky et Rosen, [Einstein et al., 1935]. Ce paradoxe montrait que l'interprétation de la mécanique quantique par l'école de Copenhague était incompatible avec le réalisme local ou la causalité. Une réponse fut par la suite apportée avec l'élaboration de l'inégalité de Bell [Bell, 1964] et les expériences d'Orsay [Aspect et al., 1981, Aspect et al., 1982b, Aspect et al., 1982a] qui montraient la complétude de la mécanique quantique et l'inconsistence du réalisme local. Les études centrées sur les particules intriquées, qui semblaient défier notre représentation de l'espace-temps, se multiplièrent pour donner naissance à de nouveaux domaines de recherche comme l'information quantique [Gisin et al., 2002] ou l'imagerie quantique [Horodecki et al., 2009].

1.1/ UN PEU D'HISTOIRE DE L'OPTIQUE QUANTIQUE

Durant tout le $17^{\text{ème}}$ et le $18^{\text{ème}}$ siècle, les caractères ondulatoires et corpusculaires de la lumière divisèrent les scientifiques . Les travaux de Huygens en particulier relataient le comportement de la lumière à l'aide d'une théorie ondulatoire. De ce point de vue, la lumière était une onde optique longitudinale se propageant dans un milieu parfaitement élastique : l'éther. Cette théorie ondulatoire permettait, entre autre, de décrire le phénomène de réfraction.

Elle fut réfutée plus tard par Newton, car elle n'expliquait pas la dispersion de la lumière blanche par un prisme. Newton développa une théorie corpusculaire où des grains de lumière de différentes couleurs se propageaient avec une vitesse différente suivant le milieu qu'ils traversent. Bien que Newton fut obligé d'associer une onde à ces corpuscules pour expliquer le phénomène de diffraction, sa théorie corpusculaire fut adoptée pendant près d'un siècle.

Ce n'est qu'au début du $19^{\text{ème}}$ siècle que Young mit réellement à mal la théorie de Newton. Ce dernier observa que l'éclairage d'un objet opaque percé de deux fentes faisait apparaître des franges sombres et claires agencées périodiquement là où on s'attendait à observer de simples tâches de lumière issues de ces même fentes. Ce phénomène ne pouvait s'expliquer que par une théorie ondulatoire de la lumière. Celle-ci prédit que lorsque des ondes lumineuses se superposent, leurs amplitude se somment lorsqu'elles sont en phase et se soustraient lorsqu'elles sont en opposition de phase. La description ondulatoire de la lumière reprit vigueur, et fut renforcée par les travaux de Fresnel et sa théorie de la diffraction. Cette description fut entérinée avec Maxwell qui constata que la lumière possédait les mêmes propriétés que les radiations électromagnétiques. La lumière vint alors s'inscrire dans une grande théorie où elle fut simplement reléguée à la partie visible du spectre électromagnétique.

1.1.1/ DUALITÉ ONDE-CORPUSCULE

Depuis la mise en équation du comportement de la lumière comme une vibration du champ l'électromagnétique par Maxwell à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle, il ne subsistait plus beaucoup de phénomènes optiques inexpliqués. Il ne restait qu'à mettre en évidence l'existence de l'éther comme support des ondes électromagnétiques et à expliquer quelques résultats incompatibles d'Ehrenfest, sur la mesure du rayonnement de corps chauffés. Ce dernier problème fut résolu mathématiquement avec l'introduction, par Plank, d'une quantification de l'énergie rayonnée. C'est toutefois Einstein qui trouva un sens physique à ces quanta d'énergie en ajoutant une dimension corpusculaire à la lumière : la lumière devait se propager en paquets indivisibles appelés, par la suite, photons. Cette théorie permit de surcroit d'expliquer l'existence d'une fréquence seuil, qui était observée pour l'effet photo-électrique. Enfin, la lumière ayant un aspect corpusculaire, l'ether n'était plus nécessaire à sa propagation. La résolution de deux petits problèmes initia un bouleversement de notre conception de la matière. En effet, l'étude de la lumière fut un sujet clé pour l'élaboration d'une nouvelle physique : la mécanique quantique. Comme certaines expériences montraient un comportement corpusculaire de la lumière et d'autres mettaient en évidence un comportement ondulatoire, il était intéressant de savoir si ces deux comportements pouvaient coexister et dans quelle limite. C'est dans ce cadre que s'inscrivit l'étude des interférences quantiques qui conclut au principe d'indétermination de Heisenberg. Ce dernier postula que les deux effets ne pouvaient pas être observés simultanément.

Afin d'illustrer ce propos, nous allons par la suite décrire une expérience d'interférence quantique. Puis nous verrons comment s'y manifeste le principe d'indétermination.

1.1.1.1/ INTERFÉRENCES QUANTIQUES

A la différence des interférences classiques, les interférences quantiques reflètent le comportement de la lumière lorsque les photons sont émis un à un. La figure d'interférence ne résulte pas de la somme des amplitudes de différentes ondes lumineuses qui se superposent sur le détecteur, mais de la somme des amplitudes de probabilité des chemins que le photon a pu suivre pour atteindre le détecteur.

Pour expliquer le phénomène d'interférence quantique nous allons nous appuyer sur l'étude d'un interféromètre commun, celui de Mach-Zehnder (MZ), représenté par la figure Fig.1.1. Cet interféromètre temporellement déséquilibré n'est pas le plus simple exemple, mais nous le réutiliserons par le suite pour la mise en évidence des interférences temporelles.

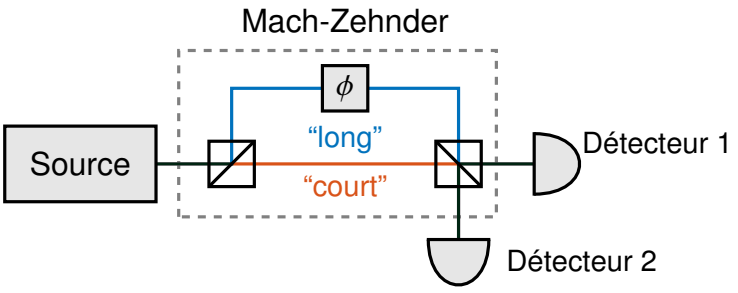


FIGURE 1.1 – Schéma d'interférences quantiques temporelles.

Dans le cas classique, la lumière issue d'un laser monochromatique et continu rencontre l'interféromètre. Ce dernier sépare et recombine le rayonnement selon deux chemins, appelés "court" et "long", équilibrés en amplitude. Le retard de l'onde lumineuse se propageant dans le chemin "long" peut être ajustée de manière active, et on note ϕ le déphasage total avec le second bras de l'interféromètre. La séparation et la recombinaison des faisceaux se font à l'aide de lames semi-transparentes laissant passer la moitié de l'intensité optique et réfléchissant l'autre moitié.

L'intensité lumineuse mesurée par les détecteurs 1 et 2 résulte alors de la superposition des amplitudes des deux ondes et on obtient :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_0 \sin[\phi]^2 , \\ I_2 &= I_0 \cos[\phi]^2 . \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Lorsque l'on modifie ϕ, l'intensité de chaque détecteur décrit une figure d'interférence sinusoïdale. On remarque également que les deux figures obtenues sont déphasées de π.

Cet interféromètre classique peut être étudié dans un régime quantique, c'est à dire dans un régime où la source n'émet qu'un seul photon à la fois. Le photon étant une entité indivisible, il sera détecté soit par le détecteur 1, soit par le détecteur 2, avec une certaine probabilité pour les deux événements. En émettant un grand nombre de photons, et en conservant les mêmes propriétés pour le système, on peut statistiquement obtenir la probabilité de ces deux événements. Étonnement, lorsque l'on fait varier le déphasage ϕ, la probabilité de détection varie de la même manière que la figure d'interférence classique. Les photons étant émis un par un dans le système, la seule explication est que le photon

ait interféré avec lui même. Ce constat induit le principe de superposition d'états de la mécanique quantique : tant que le photon n'est pas mesuré dans un état déterminé, il possède une amplitude de probabilité d'être dans chacun des états d'une base. Ces amplitudes de probabilité se somment de la même manière que les amplitudes classiques du champ électrique et peuvent donner lieu à des interférences. Ainsi, lorsqu'un photon est mesuré dans un état précis, on peut répertorier tous les chemins possibles le conduisant dans cet état. Chacun de ces chemins est associé à une amplitude de probabilité, et la probabilité de mesurer cet état correspond au module au carré de la somme des amplitudes de probabilité.

Dans le cas de l'expérience décrite sur la figure Fig.1.1, si un photon est détecté par le détecteur 1 et que nous ne savons pas à quel moment il a été émis, il a pu suivre le chemin "court" avec l'amplitude de probabilité $1/\sqrt{2}$ ou le chemin "long" avec l'amplitude de probabilité $-\exp(\mathrm{i}\phi)/\sqrt{2}$. Ainsi, juste avant la mesure, la probabilité que ce photon soit mesuré sur le détecteur 1 s'écrit :

$$p_1(\phi) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right) \right|^2 = \frac{1}{2} \sin(\phi)^2 . \tag{1.2}$$

La probabilité qu'il soit mesuré sur l'autre détecteur s'obtient de la même manière et donne :

$$p_2(\phi) = \cos(\phi)^2 /2. \tag{1.3}$$

La description d'un photon dans une superposition d'état n'est pas compatible avec une représentation corpusculaire pour laquelle ce photon est une entité indivisible précisément localisée. Cet aspect corpusculaire se manifeste alors dès que nous connaissons la localité du photon de manière précise.

Si nous avons mesuré le photon sur un détecteur, la probabilité que ce photon soit mesuré sur le second détecteur est nulle. La mesure projette l'état quantique sur un état propre. Dans le cas où cette mesure est non destructive, juste après la mesure, le photon se trouve dans l'état mesuré avec une probabilité de 1 et il n'est plus dans un état de superposition. On dit que la mesure provoque un effondrement de la fonction d'onde dans un état propre. Ainsi, si nous possédons un moyen de mesurer par quel bras est passé le photon, sans l'absorber, celui-ci est projeté dans l'état mesuré, c'est-à-dire que l'amplitude de probabilité qu'il soit passé dans ce bras vaut 1 et la figure d'interférence disparait.

De manière plus générale la disparition des interférences peut être comprise d'après la relation d'indétermination de Heisenberg. Voyons de quelle manière elle se manifeste ici.

1.1.1.2/ Relation d'indétermination de Heisenberg

Le principe d'indétermination de Heisenberg est directement lié à la dualité onde-corpuscule. Ce principe stipule que l'on ne peut pas mesurer, simultanément et avec une précision infinie, deux propriétés définies par des observables qui ne commutent pas.

Dans l'exemple du MZ, si nous supposons que nous n'avons aucune information sur le temps auquel est émis le photon, alors nous pouvons connaitre la fréquence du photon avec une précision infinie, le temps et l'énergie étant des variables qui ne commutent pas. La mesure d'un photon provenant de cette source sur un détecteur laisse une indétermination sur le chemin emprunté par le MZ. Ce cas de figure est représenté en figure Fig.1.2 a), où on voit l'impulsion temporelle du photon décalée en fonction du chemin suivi dans le MZ. L'aire grisée correspond au cas où l'on ne peut pas déterminer le chemin suivi par la mesure. Ce recouvrement des impulsions induit l'apparition d'une figure d'interférence, représentée sur le schéma c), lorsque les chemins sont déphasés.

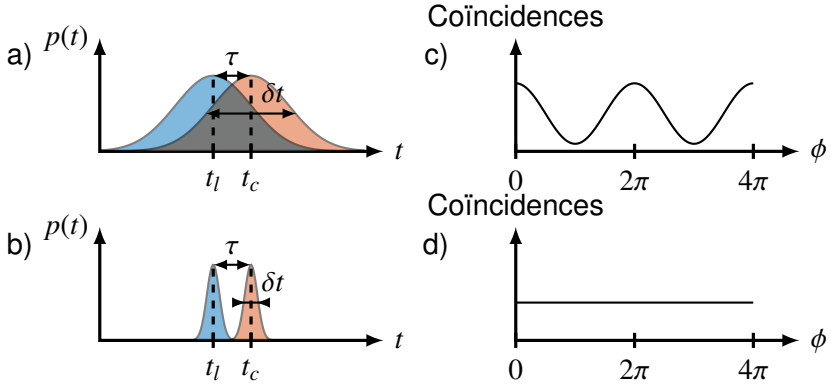


FIGURE 1.2 – Influence du recouvrement des chemins sur la figure d'interférence. Le moment d'émission d'un photon est connu avec une précision δt. Lorsque le photon entre dans un MZ dont le déséquilibre entre les bras vaut τ la détection de ce photon en sortie du MZ peut conduire à l'observation d'une interférence. Le schéma a) représente le cas où $\delta t > \tau$, il y a un recouvrement des impulsions temporelles ayant suivi les deux chemins dans le MZ et on observe la figure d'interférence c) lorsqu'on déphase les deux bras du MZ. Le schéma b) représente le cas où les impulsions ne se recouvrent pas, $\delta << t$, il n'y a plus d'interférence comme le montre le schéma d).

A contrario, si nous émettons le photon sur une impulsion temporelle très courte avec un spectre très large, il n'y a plus de recouvrement des impulsions temporelles qui ont suivi les deux chemins dans le MZ, comme représenté figure Fig.1.2 b). La figure d'interférence disparait, comme représenté sur le schéma d). La visibilité de la figure d'interférence est alors proportionnelle au recouvrement des impulsions ayant pris les chemins différents.

La condition d'interférence s'obtient aussi par raisonnement spectral. Le photon est créé dans un état de superposition de fréquences continu et très large, chacune des fréquences possède deux chemins dans l'interféromètre ce qui crée un motif d'interférence sinusoïdal. Comme la différence de phase accumulée sur chacun des bras varie suivant la fréquence, alors chaque figure d'interférence monochromatique est déphasée. Par conséquent la probabilité de mesurer le photon résulte d'une somme de sinusoïdes déphasées de manière continue, et la probabilité de mesurer le photon équivaut à $1/2$ quelle que soit la phase. On comprend plus facilement par ce raisonnement spectral, que la condition d'interférence est liée à la notion de cohérence. Un exemple commun de cet effet est la disparition des franges d'interférence dans un Michelson en lumière blanche dès qu'on s'éloigne du contact optique. Effectivement, si les bras du MZ sont équilibrés (équivalent du contact optique), on ne peut plus discerner la provenance du photon me-

suré quelle que soit sa fréquence et on obtient une condition d'interférence constructive parfaite. Si on augmente la taille d'un bras, on introduit un déphasage qui dépend de la fréquence ce qui conduit à une irisation.

En résumé la relation d'indétermination traduit l'impossibilité de la mesure simultanée, avec une précision infinie, de deux variables qui ne commutent pas. Poussée à l'extrême, cette relation autorise la localisation parfaite d'un photon, mais il perd alors tout caractère ondulatoire. Toute information sur la position du photon s'obtient au détriment de la visibilité de la figure d'interférence. Nous avons survolé, dans ces premiers paragraphes, différentes observations découlant des effets quantiques mais l'interprétation de ces résultats est toujours sujette à débat [d'Espagnat, 2002]. Dans ce manuscrit nous nous baserons sur l'interprétation fournie par l'école de Copenhague au début de ce siècle, qui n'a jusqu'à présent pas été mise en défaut, et que je vous présente ci-dessous.

1.1.2/ INTERPRÉTATION DE COPENHAGUE

Ce qu'on appelle "l'interprétation de Copenhague" est un courant de pensée développé par Bohr, Heisenberg, Jordan et Born afin de donner une consistance à la mécanique quantique. Il postule qu'un objet n'a pas de propriétés définies tant qu'il n'a pas été mesuré. Le caractère probabiliste de la mesure découle alors directement de l'interaction de l'objet avec le système de mesure. L'évolution d'un système peut donc être complètement décrite à l'aide de six postulats et tout ce que nous pouvons observer est une projection de l'état du système. Ces six postulats sont :

- Définition d'un état quantique.
  L'état d'un système à un instant t est contenu dans un vecteur $|\Psi(t)\rangle$ de l'espace des états.
- Principe de correspondance.
  Ce principe associe les mesures classiques à des opérateurs quantiques appelés observables. La mesure obtenue classiquement correspond à la moyenne de l'observable associée.
- Mesure et valeur d'une observable.
  La mesure d'une grandeur physique associée à une observable ne peut donner comme résultat qu'une valeur propre de cette observable $\hat{O}|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle$. Ainsi l'ensemble des vecteurs propres $|\alpha_n\rangle$ associés aux valeurs propres a_n forment une base orthonormée de l'espace $\mathcal{H}$. Il en résulte que tout état $|\Psi(t)\rangle$ est une combinaison linéaire unique des vecteurs $|\alpha_n\rangle$, $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n|\alpha_n\rangle$.
- Caractère probabiliste de la fonction d'onde.
  Le résultat de la mesure de l'état $|\Psi(t)\rangle$ associée à l'observable $\hat{O}$ donne comme résultat la valeur propre, non-dégénérée, a_n avec la probabilité $|c_n|^2$. Dans le cas où a_n est une valeur propre dégénérée, alors :

  $$P(a_n) = \sum_k |\langle \alpha_{k\in\mathcal{P}}|\Psi(t)\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathcal{P}} |c_k|^2 \,, \tag{1.4}$$

  où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des indices k tel que $a_k = a_n$. On appelle projecteur l'opérateur $\hat{P}_n = \sum_{k\in\mathcal{P}} |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k|$ et $P(a_n) = \langle\Psi(t)|\hat{P}_n|\Psi(t)\rangle$.
- Réduction du paquet d'onde.
  Si le résultat de la mesure de l'état $|\Psi(t)\rangle$ associée à l'observable $\hat{O}$ donne comme résultat a_n, alors l'état $|\Psi(t)\rangle$ est projeté dans le sous-espace propre associé aux

vecteurs propres ayant pour valeur propre a_n. Immédiatement après la mesure, l'état vaut :

$$|\Psi'(t)\rangle = \frac{\hat{P}_n|\Psi(t)\rangle}{\sqrt{P(a_n)}} \tag{1.5}$$

— Evolution temporelle.

L'évolution d'un état quantique $|\Psi(t)\rangle$ est décrit par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \tag{1.6}$$

où $\hat{H}$ est l'opérateur Hamiltonien et correspond à l'observable liée à l'énergie du système.

L'interprétation de Copenhague n'est pas unanimement acceptée, par exemple, le caractère probabiliste de la mécanique quantique ne plaisait particulièrement pas à Einstein. Afin de mettre en évidence l'incomplétude de cette description, une expérience de pensée a été développée par [Einstein et al., 1935]. Elle est conne sous le nom de paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen. Nous allons consacrer la section suivante à ce paradoxe et à ses conséquences sans lesquelles ce sujet de thèse n'aurait pas vu le jour.

1.2/ INTRICATION QUANTIQUE

Les états intriqués sont des états intrigant à deux particules, permis par la mécanique quantique. Imaginons que deux particules soient liées par une relation de conservation lors de leur émission. Si, par exemple, ces particules sont des photons émis dans des polarisations orthogonales, et qu'on ne connait pas l'état de polarisation de chacun des photons ; la relation de conservation impose que l'état d'un des photons ne peut pas être décrit séparément de celui de l'autre photon. En effet, la mesure de l'état de polarisation d'un des deux photons détermine de manière certaine l'état du second photon et ce même s'ils sont très fortement éloignés. Ces photons intriqués sont décrits par une même fonction d'onde, par exemple :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A|\rightarrow\rangle_B + |\rightarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right), \tag{1.7}$$

où le ket d'indice A représente un état de la première particule, le ket d'indice B représente un état de la seconde particule et les flèches représentent les différents états de polarisation.

L'utilisation de ces états, associée au principe d'indétermination de Heisenberg, a conduit Einstein, Podolsky et Rosen au paradoxe décrit dans la section suivante.

1.2.0.1/ PARADOXE EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN (EPR)

Le paradoxe EPR repose sur l'incompatibilité des photons intriqués, décrits par la mécanique quantique, avec un réalisme local. Ce dernier concept peut se comprendre avec ce

qui suit. Une réalité est attribuée à un paramètre si, sans perturber l'état du système, on peut prédire avec une probabilité certaine le résultat de la mesure de ce paramètre. La localité est une hypothèse de physique très commune qui signifie qu'un système interagit uniquement de manière causale, c'est-à-dire avec un espace spatio-temporel délimité par la vitesse de propagation de la lumière. Cette région est appelée cône de lumière.

Un paradoxe survient alors dans le procédé suivant :

On considère des photons intriqués dont l'état, avant la mesure, est complètement décrit par la fonction d'onde (1.7).

Ces photons sont ensuite envoyés à deux personnes, Alice et Bob, très éloignées l'une de l'autre. Alice et Bob se sont consultés au préalable pour définir deux états orthogonaux de mesure, $|\uparrow\rangle$ et $|\rightarrow\rangle$, qu'ils utiliseront pour observer leur photon.

Alice mesure son photon, sans perturber l'état, et obtient l'état de polarisation $|\uparrow\rangle_A$. Les photons étant intriqués, immédiatement après la mesure d'Alice, l'état bi-photon est $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle_A|\rightarrow\rangle_B$. Alice peut donc prédire que l'état de polarisation du photon de Bob est $|\rightarrow\rangle_B$ et ce même s'il n'a pas été mesuré. Il existe donc une réalité, $|\rightarrow\rangle_B$, associée à la polarisation du photon de Bob. Cependant, d'après la fonction d'onde (1.7), la probabilité que le résultat de la mesure d'Alice donne l'état $|\uparrow\rangle_A$ vaut $1/2$.

Imaginons cette fois, que le résultat de sa mesure donne $|\rightarrow\rangle_A$, dans ce cas la réalité associée à la polarisation du photon de Bob est $|\uparrow\rangle_B$. L'élément de réalité sur la polarisation du photon de Bob dépend de la mesure du photon d'Alice. C'est à ce niveau que le paradoxe intervient.

Si les deux photons sont mesurés dans un intervalle de temps plus court que le temps de parcours de la lumière entre Alice et Bob, alors il ne peut pas y avoir d'influence locale de la mesure d'Alice sur l'état de polarisation du photon de Bob. Toutefois la réalité associée au photon de Bob dépend toujours du résultat de la mesure faite par Alice. Il y a donc une contradiction entre un réalisme local et la description complète de l'état des deux photons par la mécanique quantique.

Ce paradoxe a été mis en place pour mettre en défaut le caractère probabiliste de la mesure quantique. Einstein propose comme solution que l'état de la mesure est probabiliste uniquement à cause d'une méconnaissance du système. C'est-à-dire qu'il existe une variable que l'on ne soupçonne pas, dite cachée, qui permet de prédire le résultat de la mesure avec une probabilité certaine. Les deux photons intriqués dépendraient donc, dès leur émission, de cette variable cachée et la mesure d'Alice ne fait que révéler l'état de cette variable. Le réalisme reste donc local car cette nouvelle information réside déjà dans l'état du photon de Bob.

Bohr, fidèle à l'interprétation de Copenhague, soutient que la description de la mécanique quantique est complète et que le résultat de la mesure est bien probabiliste. L'état des particules est complètement décrit par la fonction d'onde et il n'existe pas de variable cachée. Il suffit seulement d'admettre qu'il existe un réalisme non-local. Ce réalisme non-local n'est pas incompatible avec la causalité, il est donc toujours impossible de connaître l'état des photons avec une probabilité certaine en dehors du cône de lumière d'un photon mesuré.

En raison des conséquences insoupçonnées et vérifiées expérimentalement qui ont dé-

coulé de l'interprétation de Copenhague, ce paradoxe a d'abord peu intéressé la communauté scientifique. L'intrication demeura une étrangeté invérifiable que permettent les postulats de la mécanique quantique et le débat épistémologique fut laissé à Einstein et Bohr.

1.2.1/ VERS LA NON-LOCALITÉ

Ce n'est que plusieurs dizaines d'années plus tard que ce paradoxe est revenu sur le devant de la scène, avec un rebondissement majeur découlant des travaux de Bell [Bell, 1964]. Ce dernier a formalisé une équation permettant, via le résultat d'une expérience, de trancher sur l'existence des variables cachées. Il fallu cependant attendre encore près de 20 ans pour voir les expériences d'Orsay [Aspect et al., 1982b, Aspect et al., 1982a] rassembler des conditions expérimentales éliminant tout doute raisonnable.

1.2.1.1/ INÉGALITÉ DE BELL

De manière à trancher le débat EPR, Bell a mis au point une inégalité permettant de différencier toute théorie à variable cachée ([Bell, 1964]) du résultat prédit par la mécanique quantique. Le raisonnement est le suivant : Alice et Bob mesurent leur photon appartenant à une paire EPR, décrite par l'état (1.7). Le résultat de chaque mesure possède deux issues possibles, $\uparrow$ et $\rightarrow$ et Alice et Bob peuvent respectivement modifier un paramètre a et b modifiant leur base de mesure par une rotation. Le paradoxe EPR énonce que les résultats des mesures d'Alice et Bob ne sont pas indépendants des paramètres a et b. Si on prend le résultat commun $\uparrow$ pour exemple, ceci se traduit par :

$$P(\uparrow \cap \uparrow, ab) \neq P(\uparrow, a) \times P(\uparrow, b). \tag{1.8}$$

Si cette dépendance des résultats est due à l'existence d'une variable cachée, alors il existe un paramètre λ, tel que :

$$P(\uparrow \cap \uparrow, ab, \lambda) = P(\uparrow, a, \lambda) \times P(\uparrow, b, \lambda) \tag{1.9}$$

et les probabilités de mesurer $\uparrow$ pour Alice et Bob s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} P(\uparrow, a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) P(\uparrow, a, \lambda), \\ P(\uparrow, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) P(\uparrow, b, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) = 1$.

On peut alors dériver une inégalité dont la borne supérieure est infranchissable pour une théorie à variable cachée locale [Bell, 1964]. Nous allons présenter une inégalité légèrement différente de celle de [Bell, 1964], appelée CHSH, développée par [Clauser et al., 1969] et qui s'applique dans un cadre plus général.

On part du principe que quels que soient a et b, une fonction de corrélation s'écrit

$$\begin{aligned} C(ab) =& P(\uparrow \cap \uparrow, ab) + P(\rightarrow \cap \rightarrow, ab) - P(\rightarrow \cap \uparrow, ab) - P(\uparrow \cap \rightarrow, ab) \\ =& 1 - 2\left[P(\uparrow \cup \uparrow, ab) - P(\uparrow \cap \uparrow, ab)\right] \\ =& 1 - 2\left[P(\rightarrow \cup \rightarrow, ab) - P(\rightarrow \cap \rightarrow, ab)\right], \end{aligned} \tag{1.11}$$

d'où

$$-1 \leq C(ab) \leq 1. \tag{1.12}$$

En tenant compte de λ on obtient :

$$\begin{aligned} C(ab) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) C(ab, \lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left[P(\uparrow \cap \uparrow, ab, \lambda) + P(\rightarrow \cap \rightarrow, ab, \lambda) - P(\rightarrow \cap \uparrow, ab, \lambda) - P(\uparrow \cap \rightarrow, ab, \lambda)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left[P(\uparrow, a, \lambda) P(\uparrow, b, \lambda) + P(\rightarrow, a, \lambda) P(\rightarrow, b, \lambda) - P(\uparrow, a, \lambda) P(\rightarrow, b, \lambda) - P(\rightarrow, a, \lambda) P(\uparrow, b, \lambda)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left\{\left[P(\uparrow, a, \lambda) - P(\rightarrow, a, \lambda)\right] \left[P(\uparrow, b, \lambda) - P(\rightarrow, b, \lambda)\right]\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) C(a, \lambda) C(b, \lambda), \end{aligned} \tag{1.13}$$

avec $-1 \leq C(a, \lambda) \leq 1$ et $-1 \leq C(b, \lambda) \leq 1$.

Si Alice a le choix entre deux valeurs de a, par exemple a_0 ou a_1 et Bob a le choix entre b_0 et b_1, alors :

$$\begin{aligned} C(a_0 b_0) - C(a_1 b_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left[C(a_0, \lambda) C(b_0, \lambda) - C(a_1, \lambda) C(b_0, \lambda)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) C(a_0, \lambda) C(b_0, \lambda) \left[1 \pm C(a_1, \lambda) C(b_1, \lambda)\right] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) C(a_1, \lambda) C(b_0, \lambda) \left[1 \pm C(a_0, \lambda) C(b_1, \lambda)\right]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Par inégalité triangulaire et l'utilisation de (1.13), on dérive l'inégalité CHSH

$$\begin{aligned} |C(a_0 b_0) - C(a_1 b_0)| \leq& \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left|C(a_0, \lambda) C(b_0, \lambda)\right| \left[1 \pm C(a_1, \lambda) C(b_1, \lambda)\right] \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left|C(a_1, \lambda) C(b_0, \lambda)\right| \left[1 \pm C(a_0, \lambda) C(b_1, \lambda)\right] \\ \leq& 2 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda p(\lambda) \left[C(a_1, \lambda) C(b_1, \lambda) + C(a_0, \lambda) C(b_1, \lambda)\right] \\ \leq& 2 - \left[C(a_1 b_1) + C(a_0 b_1)\right], \end{aligned} \tag{1.15}$$

soit de nouveau par inégalité triangulaire

$$\boxed{|C(a_0b_0) + C(a_1b_1) + C(a_0b_1) - C(a_1b_0)| \leq 2}. \tag{1.16}$$

Cette inégalité est vérifiée pour n'importe quelle variable cachée locale, toutefois la description de la mécanique quantique en autorise une violation. Nous allons présenter cette possibilité sur le modèle de la seconde expérience d'Orsay [Aspect et al., 1982a].

1.2.1.2/ TEST DE L'INÉGALITÉ DE BELL

La seconde expérience d'Aspect [Aspect et al., 1982b] est considérée comme la première réalisation permettant de réfuter de manière convenable la théorie des variables cachées. Montrons en un exemple à l'aide de photons intriqués en polarisation dans un état de Bell (1.7).

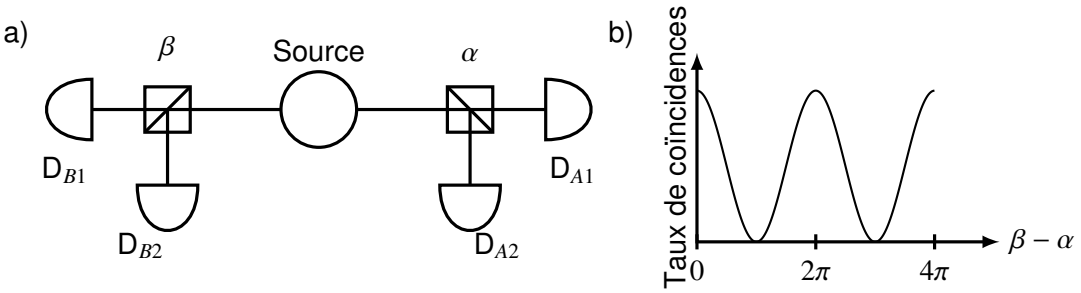


FIGURE 1.3 – Schéma de l'expérience de [Aspect et al., 1982b]. Des photons sont intriqués en polarisation et envoyés dans des systèmes de mesure dont on peut modifier indépendamment la base de mesure, via un paramètre α ou β, comme représenté sur le schéma a). La probabilité de mesurer les photons intriqués dépend alors uniquement de $\beta - \alpha$, dont l'évolution est représentée schéma b).

Un photon de chaque paire est envoyé à Alice et l'autre à Bob, comme représenté sur le schéma Fig.1.3 a). Alice et Bob procèdent chacun à une mesure sur une base $\{|\uparrow\rangle_{MA}, |\rightarrow\rangle_{MA}\}$ ou $\{|\uparrow\rangle_{MB}, |\rightarrow\rangle_{MB}\}$ dont les états sont séparés à l'aide d'un polariseur. Avant la mesure, ils peuvent indépendamment choisir l'orientation du polariseur, de telle sorte que ces polariseurs effectuent respectivement la projection :

$$\begin{pmatrix} |\uparrow\rangle_{MA} \\ |\rightarrow\rangle_{MA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle_{A} \\ |\rightarrow\rangle_{A} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

et

$$\begin{pmatrix} |\uparrow\rangle_{MB} \\ |\rightarrow\rangle_{MB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle_{B} \\ |\rightarrow\rangle_{B} \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Ainsi les probabilités de mesurer conjointement les photons dans les différentes polarisations s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} P(\uparrow \cap \uparrow, \alpha\beta) = P(\rightarrow \cap \rightarrow, \alpha\beta) = \frac{1}{2}\cos(\beta-\alpha)^2, \\ P(\uparrow \cap \rightarrow, \alpha\beta) = P(\rightarrow \cap \uparrow, \alpha\beta) = \frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)^2. \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Nous avons représenté sur le schéma Fig.1.3 b), la probabilité de mesurer conjointement les photons dans le même état de polarisation.

On obtient alors que le coefficient de corrélation, donné par (1.11), vaut :

$$C(\alpha\beta) = \cos(2[\beta-\alpha]). \tag{1.20}$$

La violation maximale de l'inégalité (1.16) vaut alors $2\sqrt{2}$ et elle est, par exemple, obtenue pour les points :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ \alpha_1 &= \frac{\pi}{4}, \\ \beta_0 &= \frac{5\pi}{8}, \\ \beta_1 &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

L'expérience d'Aspect est la première à confirmer avec une violation de l'inégalité de plus de 40 écart-types, dans le cadre d'une inégalité CHSH. Cette expérience ne fut pas la première à se positionner en faveur de la non-localité des états intriqués, mais les précédentes [Clauser et al., 1978, Aspect et al., 1981] étaient plus éloignées du schéma de Bell. Dans [Aspect et al., 1981], par exemple, le dispositif expérimental ne permettait de mesurer que les photons issus d'une polarisation (les autres étant absorbés par le polariseur). Il était donc impossible de violer une inégalité CHSH, qui nécessite de mesurer les deux polarisations. Elle violait cependant une version différente de l'inégalité, développée par [Clauser et al., 1974], qui nécessite la mesure d'une seule polarisation. Cette inégalité implique toutefois une normalisation par rapport au nombre total de photons émis qui est estimé via une expérience dans les mêmes conditions et sans les polariseurs. Il faut alors considérer que les deux échantillons sont représentatifs de la même expérience (hypothèse des échantillons non biaisés). Cette supposition ouvre une échappatoire (*loophole*) à la violation de l'inégalité qui n'a pas été considérée comme irréfutable.

La seconde expérience d'Aspect n'est pas non plus exempte d'échappatoires. Une échappatoire est une lacune expérimentale qui permet d'introduire une théorie à variable cachée locale. Ainsi, une expérience montrant une violation des inégalités de Bell est scrutée attentivement, de manière à mettre en exergue la moindre faille. Pour supprimer les influences causales, il faut :

— que la résolution du système de détection soit inférieure au temps de parcours de la lumière entre les détecteurs. De cette manière, le résultat de la première mesure ne peut pas influencer la seconde. Cette échappatoire fut close dès la première expérience d'Aspect [Aspect et al., 1981] qui ne montre aucune différence que les détecteurs sont rapprochés ou éloignés.

— mais aussi que le choix des bases de détection (a et b) soit différé après l'émission et la séparation des photons. On pourrait, au cas contraire, imaginer une théorie déterministe où les paramètres a et b induisent un état d'émission particulier. De manière sous-jacente, il faut que le choix de la base d'Alice et Bob soit aléatoire et indépendant l'un de l'autre. De cette manière il n'est pas possible d'inclure des influences causales sur les opérateurs, ce qui a été réalisé pour la première fois par [Aspect et al., 1982a].

Si ces conditions sont réunies, seule une théorie super-déterministe, pour laquelle le résultat de la mesure est défini depuis le big-bang, permet de valider une théorie à variable cachée. Cette théorie super-déterministe impose toutefois de renoncer à notre libre arbitre et invalide toute démarche expérimentale.

Enfin une dernière catégorie d'échappatoire existe. À partir du moment où suffisamment de photons émis ne sont pas détectés, une théorie à variable cachée locale peut expliquer la violation de l'inégalité de Bell. C'est pourquoi la plupart des expériences supposent que les échantillons mesurés sont représentatifs de l'expérience, et qu'il n'y a pas de tri déterministe des compteurs ou des composants introduisant des pertes. Une inégalité de Bell qui s'affranchit de l'hypothèse d'échantillon non biaisé a été développée par [Eberhard, 1993] et montre qu'il est nécessaire de détecter plus de 83% des photons pour s'en affranchir, ce qui a été réalisé pour la première fois par [Giustina et al., 2013] pour des photons.

De nombreuses expériences de test des inégalités de Bell ont été réalisées dans des configurations bien différentes. Elles tranchent toutes en faveur de la validité de la mécanique quantique, mais possèdent au moins une échappatoire. Il existe même des expériences pour lesquelles les deux photons sont mesurés en premier dans leur référentiel propre ([Stefanov et al., 2002, Stefanov et al., 2003]) et la violation d'une inégalité de Bell tient toujours dans ce cas. Il est donc raisonnable de penser que la variable cachée ne change pas d'une expérience à l'autre de manière à rester toujours inaccessible. On peut noter qu'une récente expérience, réalisée par [Hensen et al., 2015], se déclare sans échappatoire. Si aucune faille n'est trouvée, celle-ci représenterait la première preuve irréfutable de la violation des inégalités de Bell.

En dehors du test du paradoxe EPR, l'étude des photons intriqués a ouvert un grand nombre de possibilités. La plus aboutie est la distribution quantique de clés (en anglais QKD pour *Quantum Key Distribution*) qui a donné lieu à plusieurs produits commerciaux [IDQuantique, 2015, Toshiba, 2015]. L'utilisation de particules intriquées permet un échange d'information avec une sécurité inconditionnelle. Un lecteur intéressé pourra se référer à une revue récente écrite par [Lo et al., 2014]. Nous ne donnerons pas plus de détails sur ces réalisations physiques, si ce n'est que la QKD exploitant un codage en fréquence, a fait l'objet de plusieurs travaux au sein de notre laboratoire [Mérolla et al., 1999, Mérolla et al., 1999, Duraffourg et al., 2001, Merolla et al., 2002, Bloch et al., 2007].

Une autre voie de recherche est l'information quantique. En effet, l'exploitation de la superposition d'états ouvre une nouvelle façon de programmer, qui se rapproche des machines de turing non déterministes. L'utilisation de superpositions d'états à plusieurs particules permet la construction de portes logiques quantiques à plusieurs entrées et sorties. Depuis l'algorithme de [Deutsch et al., 1992] qui a démontré pour la première fois la supériorité d'un algorithme quantique par rapport à tout programme classique, des efforts considérables ont été réalisés pour développer cette nouvelle informatique. Si le gain de performances de l'algorithme de [Deutsch et al., 1992] est anecdotique, les al-

gorithmes de [Shor, 1994] et [Grover, 1996] permettent un réel gain de temps sur des problèmes concrets, comme le calcul de nombres premiers ou la recherche d'éléments dans des grandes bases de données. Depuis, il existe un réel engouement pour la réalisation physique de calculateurs quantiques.

Nous allons maintenant passer en revue quelques effets qui exploitent l'intrication quantique et qui interviendront dans ce manuscrit de thèse.

1.2.2/ AUTRES UTILISATIONS DE L'INTRICATION

Depuis la mise en évidence, par [Aspect et al., 1982a], d'une interférence non-locale entre deux photons intriqués en polarisation, le phénomène d'intrication a été largement testé. Ainsi des expériences d'interférence à deux photons ont été réalisées en exploitant d'autres types d'intrication. Nous allons présenter succinctement une interférence temporelle, exploitant un enchevêtrement temps-fréquence, qui nous permettra ensuite de faire un parallèle simple avec les interférences en fréquence.

Nous verrons ensuite deux autres phénomènes non-locaux, mis en évidence par des photons intriqués, la compensation non-locale de dispersion et la modulation non-locale. Nous verrons alors, dans le chapitre suivant, comment ces deux phénomènes s'inscrivent dans ces travaux de thèse.

1.2.2.1/ INTERFÉRENCES TEMPORELLES

Pour réaliser une interférence temporelle, [Franson, 1989] suggère d'utiliser des photons intriqués en temps-énergie.

Les photons sont issus de la désexcitation d'un atome en deux temps. L'écart d'énergie entre les niveaux est connu de manière précise et détermine la fréquence des deux photons émis. De plus, le temps de vie du niveau intermédiaire est très court, les photons sont donc émis dans un intervalle de temps limité. Toutefois, par respect du principe d'indétermination de Heisenberg, le temps de vie du niveau excité est long et nous ne connaissons pas précisément le temps d'émission de cette paire de photons, ce qui donne une cohérence temporelle T du bi-photon. Ces photons sont alors séparés et envoyés dans l'interféromètre temporel représenté figure Fig.1.4.

Chacun des photons rencontre un interféromètre MZ identique [1], que nous avions décrit dans le cadre d'une interférence à un photon, paragraphe 1.1.1.1. Le déséquilibre temporel entre les deux bras des MZ vaut τ et on peut ajuster indépendamment le retard du bras long d'une phase comprise entre 0 et 2π. On a noté ces phases φ_A et φ_B. Comme les photons d'une paire sont émis dans un laps de temps très court, la différence de temps Δt à laquelle ces photons sont mesurés est déterminée de manière précise et correspond à la différence de trajet optique entre leur émission et leur détection.

Comme chacun des photons se voit offrir deux chemins temporels dans son interféro-

1. Remarquons que nous n'avons représenté qu'une sortie de chaque MZ, ce qui permet d'expliquer de manière allégée le principe d'interférence temporelle à deux photons.

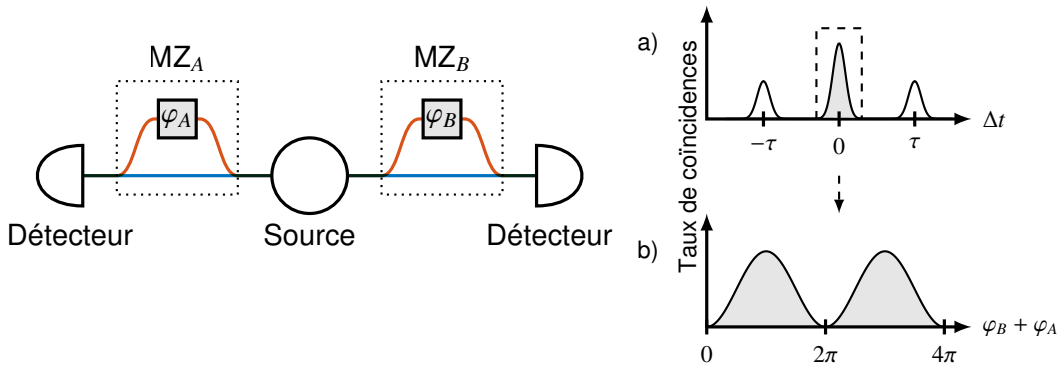


FIGURE 1.4 – Représentation schématique d'une interférence à deux photons en temps. Les photons intriqués en temps énergie sont séparés et envoyés dans un interféromètre MZ possédant un chemin temporel long et un chemin temporel court. Les photons sont mesurés en coïncidence. Le graphique a) représente le taux de coïncidences en fonction du délai Δt entre les mesures des détecteurs. Le pic à $\Delta t = -\tau$ représente le cas où le photon A a choisi le bras long dans MZ$_A$ et le photon B le bras court. Le pic à $\Delta t = \tau$ représente le cas où le photon A a choisi le bras court dans MZ$_B$ et le photon B le bras long. Le pic à $\Delta t = 0$ représente deux cas possibles, soit les deux photons ont choisi le bras court ou alors les deux photons ont choisi le bras long. Le graphique b) représente la variation du taux de coïncidences en fonction du déphasage $\varphi_A + \varphi_B$ dans le pic situé à $\Delta t = 0$, lorsque les chemins temporels sont indiscernables.

mètre, l'un long (représenté en rouge), l'autre court (représenté en bleu), alors la mesure conjointe des photons fait apparaître trois pics temporels en fonction du délai Δt entre les mesures de chacun des détecteurs. Cette mesure de coïncidence est représentée sur le schéma Fig.1.4 a). Le pic de coïncidence centré en $\Delta t = -\tau$ correspond au cas où le photon A a été mesuré en retard par rapport au photon B. Cette mesure est possible uniquement si le photon A a suivi le chemin long (rouge) dans MZ$_A$ et le photon B a suivi le chemin court (bleu) dans MZ$_B$.

De manière opposée, le pic centré en $\Delta t = \tau$ correspond au cas où le photon A a suivi le chemin court (bleu) dans MZ$_A$ et le photon B a suivi le chemin long (rouge) dans MZ$_B$.

Enfin le dernier pic, centré en $\Delta t = 0$, correspond au cas ou les photons ont atteint leur détecteur en même temps. Il y a donc deux cas possibles, soit les photons ont tous deux suivi le chemin court (bleu), soit ils ont tous deux suivi le chemin long (rouge) dans leur MZ. Si ces deux chemins "court-court" et "long-long" sont indiscernables, alors ils interfèrent. Cette condition est remplie si les chemins sont cohérents, c'est-à-dire si l'écart de temps 2τ, entre les deux chemins, est très inférieur au temps de cohérence du bi-photon, T.

Cet interféromètre a été pensé pour la transmission des états intriqués sur de longues distances. Après une première démonstration modeste de [Franson, 1991a], de la violation d'une inégalité vérifiée pour toute théorie classique ([Franson, 1991b]) après 102 m de propagation, ce schéma a inspiré des protocoles de distribution quantique de clés pouvant profiter de la transmission par fibre optique. La distribution de clés sur plusieurs dizaines de kilomètres a pu être réalisée par [Tittel et al., 2000, Ribordy et al., 2000].

Cet interféromètre nous permet de montrer le passage d'une interférence à deux photons à un schéma d'interférence à un photon. Dans le prochain chapitre, nous utiliserons le

procédé inverse dans le cadre des interférences en fréquence. Les différentes étapes de ce procédé, inspiré de [Gisin et al., 2007], sont représentées sur la figure Fig.1.5.

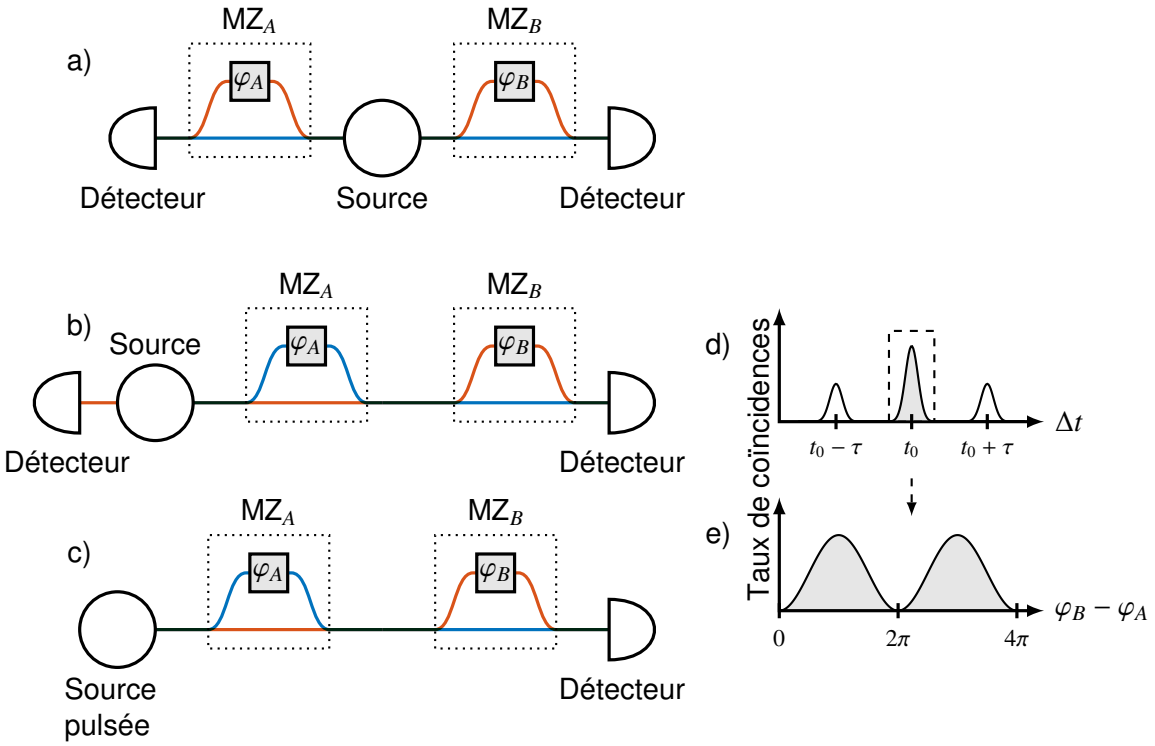


FIGURE 1.5 – Passage d'une interférence temporelle à 2 photons à une interférence à un photon. Le schéma a) représente l'interféromètre à deux photons de [Franson, 1991a]. On obtient le schéma b) en déportant MZ$_A$ sur le bras B. Le photon A n'a donc plus qu'un chemin pour parvenir au détecteur, mais le photon B en possède maintenant quatre, deux conduisent au même temps d'arrivée, soit le photon a choisi le chemin court dans MZ$_A$ puis le chemin long dans MZ$_B$ (chemin rouge) ou alors le photon a pris le chemin long dans MZ$_A$ puis le chemin court dans MZ$_B$ (chemin bleu). On observe toujours trois pics de coïncidence représentés figure d), cependant la figure d'interférence, correspondant aux variations des coïncidences dans le pic central, est balayée en fonction de $\varphi_B - \varphi_A$ qui est la différence de phase entre les deux chemins (bleu et rouge). Le photon A n'étant utilisé que pour conditionner la détection du photon B, on peut remplacer la source de photons intriqués en temps-énergie, par une source à un photon pulsée, ce qui est représenté figure c). Il suffit de synchroniser la détection avec la source pour obtenir les figures d) et e).

À partir du schéma Fig.1.5 a), de l'interférence à deux photons de [Franson, 2007], il est possible de déporter le MZ$_A$ sur le bras B. Par cette transformation, il existe toujours des chemins indiscernables lors de la mesure des photons en coïncidence. Le photon A n'a plus de choix de chemins, mais le photon B peut choisir le chemin court ou long dans chacun des MZ. Il en résulte quatre chemins temporels.

Deux chemins sont équivalents et indiscernables. Il s'agit du chemin pour lequel le photon a suivi le chemin court dans MZ$_A$ puis le chemin long dans MZ$_B$ (chemin rouge) et du chemin pour lequel le photon a pris le chemin long dans MZ$_A$ puis le chemin court dans MZ$_B$ (chemin bleu). La mesure de coïncidence, représentée figure Fig.1.5 d), affiche les trois mêmes pics de coïncidence que dans le cas où les MZ sont sur deux bras séparés, figure Fig.1.4 a). Seule la position de ces pics a changée, en accord avec la différence

de chemin optique entre les deux photons.

La figure d'interférence résultant de la superposition des deux chemins est maintenant parcourue en fonction de $\varphi_B - \varphi_A$, car ce ne sont plus les chemins "long-long" et "court-court" qui interfèrent, mais les chemins "long-court" et "court-long".

Il suffit alors de remarquer que le photon A n'est utilisé que pour conditionner la détection du photon B, pour justifier le remplacement de la source à photons intriqués, par une source à un photon impulsionnelle, comme le montre la figure Fig.1.5 c). La détection est alors conditionnée par l'émission d'une impulsion laser dans laquelle se trouve un seul photon. Nous obtenons ainsi une interférence à un photon dont la figure d'interférence est identique au schéma à deux photons et représentée figure Fig.1.5 e).

Nous verrons dans le prochain chapitre, comment tirer profit de ce processus dans le cadre des interférences en fréquence. Mais avant cela nous allons étudier deux effets non-locaux, que sont la dispersion non-locale et la modulation non-locale.

1.2.2.2/ COMPENSATION NON-LOCALE DE DISPERSION

La compensation non-locale de dispersion est un procédé imaginé par [Franson, 1992] et représenté figure Fig.1.6 a) pour tester le comportement non-local des photons intriqués. Pour montrer ce phénomène, Franson utilise des photons intriqués en temps-énergie.

Considérons, par exemple, l'état de superposition issu de la conversion paramétrique d'une source monochromatique [2] à la pulsation ω_0,

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)|\omega_0 + \omega\rangle_A|\omega_0 - \omega\rangle_B, \tag{1.22}$$

pour lequel les photons intriqués A et B vérifient la conservation de l'énergie.

La probabilité de mesurer ces photons en coïncidence donne un pic temporel dont la largeur est proportionnelle à celle de l'impulsion temporelle du bi-photon [3], notée $\sigma_T^2 = 1/\sigma_f^2$, où σ_f^2 est la largeur spectrale de f. Si, comme représenté sur la figure Fig.1.6 a), ces photons sont séparés et envoyés dans un milieu dispersif respectivement, β_A et β_B, de longueur z_A et z_B, alors [Franson, 1992] montre qu'il en résulte un élargissement de l'impulsion temporelle qui s'écrit [4] $\sigma_Q^2 = \left[1 + (\beta_A z_A + \beta_B z_B)^2\right]/\sigma_f^2$. On comprend immédiatement que si les dispersions sont opposées, $\beta_A z_A = -\beta_B z_B$, alors le pic de coïncidence retrouve sa largeur initiale. L'auteur montre que cet effet est purement quantique.

Dans un cas classique équivalent, la corrélation temporelle donne un pic de largeur $\sigma_C^2 = \left[1 + (\beta_A z_A)^2 + (\beta_B z_B)^2\right]/\sigma_f^2$. Si $\beta_A z_A = -\beta_B z_B$ la largeur reste identique.

Afin de questionner sa réelle non-localité, plusieurs expériences classiques ([Resch et al., 2007, Torres-Company et al., 2009, Shapiro, 2010, Prevedel et al., 2011])

2. Ce processus sera détaillé dans le prochain chapitre.
3. L'impulsion temporelle bi-photon équivaut à la transformée de Fourier de $f(\omega)$)
4. Dans l'approximation d'un spectre gaussien.

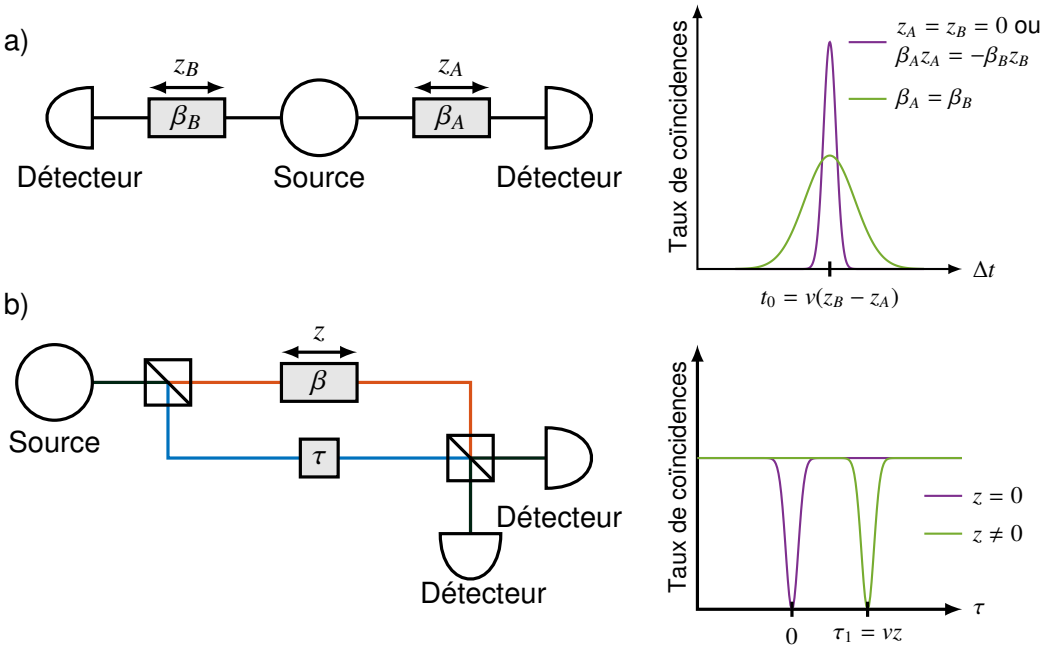


FIGURE 1.6 – Schémas de compensation de dispersion. Dans les deux cas, la source émet des photons intriqués en temps-fréquence et on mesure les coïncidences entre ces photons. Le schéma a) représente la compensation non-locale de dispersion introduite par [Franson, 1992]. On observe un pic de coïncidence lorsqu'on représente le nombre de photons mesuré en fonction de la différence de temps d'arrivée sur les détecteurs. On observe un étalement du pic de coïncidences lorsque les photons sont dispersés, cet exemple est légendé $\beta_A = \beta_B$. Lorsque les dispersions se compensent, $\beta_A z_A = \beta_B z_B$, on retrouve la largeur du pic de coïncidence sans dispersion. Le schéma b) représente l'auto-compensation de dispersion introduite par [Steinberg et al., 1992a]. On observe une chute des coïncidences, appelée *dip*, lorsque le retard τ entre les deux bras tend vers 0 (effet HOM). La largeur du *dip* est une signature du degré de cohérence entre les photons observés. Lorsque qu'on introduit un milieu dispersif β de longueur z sur un des bras, [Steinberg et al., 1992a] montre que la largeur du *dip* n'est pas affectée par l'étalement de l'enveloppe temporel du photon dispersé. Il attribue cet effet à la relation de fréquence existant entre les photons intriqués et mesurés en coïncidence.

ont tenté de reproduire l'effet de compensation de dispersion. S'ils montrent bien une compensation de la dispersion, l'effet n'a rien de non-local.

Dans [Resch et al., 2007, Prevedel et al., 2011], la compensation de dispersion n'est pas du même type que celle de [Franson, 1992], mais basée sur le modèle de [Steinberg et al., 1992a] qui utilise un interféromètre de type Hong-Ou-Mandel (HOM) [Hong et al., 1987], comme représenté figure Fig.1.6 b). Ils montrent que la figure d'interférence d'un HOM n'est pas modifiée lorsqu'un des photons subit une dispersion. Or l'interféromètre de HOM recombine les photons après dispersion et introduit une relation de localité. D'après [Franson, 2009], les expériences classiques montrent le même type d'interférence, mais avec une visibilité maximale réduite de moitié.

Dans [Torres-Company et al., 2009, Shapiro, 2010], le schéma est identique à celui de [Franson, 1992]. Toutefois, les effets de la dispersion disparaissent uniquement si les bras de l'interféromètre sont identiques. Cette expérience montre donc que des

impulsions identiques rencontrant des milieux dispersifs identiques s'étalent de manière identique.

Ainsi la première mesure de l'aspect non-local de la dispersion, inspirée du modèle de [Franson, 1992] a été réalisée par [Brendel et al., 1998]. Dans cette expérience, les photons sont dispersés dans une même fibre, puis séparés pour être mesurés en coïncidence. Les auteurs montrent des variations de la position du pic de coïncidence lorsque l'on filtre en fréquence les photons mesurés. Leur mesure s'apparente à une caractérisation de la courbe de dispersion de la fibre utilisée à la fréquence centrale de leur filtre. L'aspect non-local n'est pas franc car les photons subissent la dispersion conjointement et seule la mesure de coïncidence est non-locale. Enfin cette expérience ne vérifie pas la compensation non-locale de la dispersion.

Il faudra attendre l'expérience de [Baek et al., 2009] pour observer la compensation non-locale de la dispersion. Cette fois, les photons jumeaux sont séparés puis dispersés, comme dans le schéma de [Franson, 1992]. L'un subit une dispersion positive et on observe un élargissement du pic de coïncidence. L'expérience est alors répétée lorsque le second photon subit une dispersion de signe opposé au premier photon. Ils observent une réduction de la largeur du pic de coïncidence qui correspond à la compensation appliquée. Les auteurs montrent que ces résultats ne peuvent pas être obtenus de manière classique. La mesure du pic de coïncidence est toutefois limitée par la résolution temporelle des détecteurs et il n'est pas possible de montrer une compensation totale de la dispersion.

Une solution permettant de dépasser cette limite a été apportée par [Zhong et al., 2013]. Les auteurs utilisent pour cela un interféromètre non-local de [Franson, 1991a], présenté dans la section précédente. La figure d'interférence résultante est sensible à l'insertion de dispersion au sein de chacun des interféromètres de MZ, comme représenté sur la figure Fig.1.7. Ils montrent alors la diminution de visibilité de la figure d'interférence sinusoïdale lorsqu'un des photons subit une dispersion, puis montrent que l'on retrouve la figure d'interférence avec une visibilité maximale lorsque la dispersion opposée est appliquée au second photon. L'utilisation d'une interférence non-locale rejette toute possibilité d'obtenir ces résultats dans un régime classique.

Dans le chapitre suivant, nous présentons aussi une compensation non-locale de la dispersion sur une figure d'interférence non-locale. Nous montrons que dans notre cas, les effets de la dispersion ne se limitent pas à une baisse de visibilité de la figure d'interférence mais constituent une modification profonde de celle-ci.

Un phénomène analogue à la dispersion non-locale, appelé modulation non-locale, a été suggéré par [Harris, 2008]. Cet effet joue un rôle dans notre figure d'interférence et nous allons le présenter succinctement avant de l'appliquer à notre système dans le chapitre suivant.

1.2.2.3/ MODULATION NON-LOCALE

Comme suggéré par [Harris, 2008], la modulation non-locale peut être vue comme le pendant fréquentiel de la dispersion non-locale. Nous en avons représenté les schémas

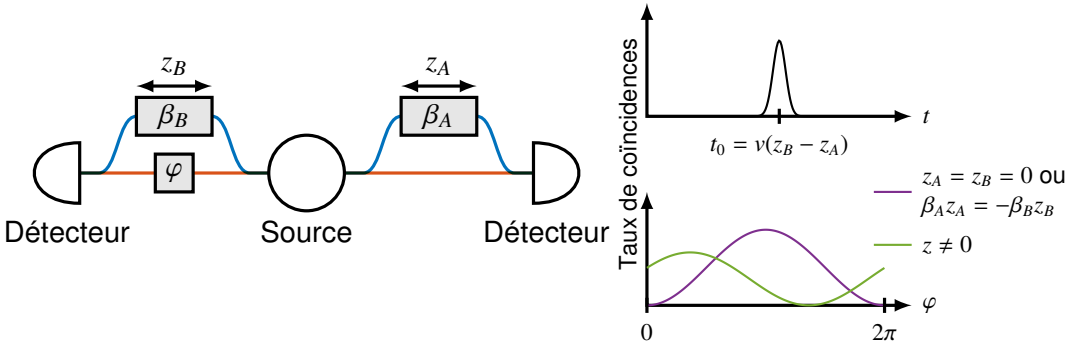


FIGURE 1.7 – Schéma d'une compensation non-locale de dispersion à l'aide d'un interféromètre de [Franson, 1991a] non-local. Les photons intriqués en temps énergie sont séparés et envoyés vers deux détecteurs. Chacun des photons rencontre un interféromètre de type MZ dont un des bras subit une dispersion. La figure issue de l'interférence des chemins représentés en rouge et en bleu perd en visibilité lorsque les dispersions subies par les deux photons ne se compensent pas $\beta_B z_B \neq -\beta_A z_A$.

de principe sur la figure Fig.1.8. Comme pour le modèle de dispersion non-locale de Franson, présenté figure Fig.1.6 a), des photons intriqués en temps-énergie sont séparés. Ils rencontrent chacun un modulateur de phase (MP) qui génère une variation locale de la phase de chacun des photons. Les photons sont ensuite détectés en coïncidence.

De la même manière que la dispersion introduit un élargissement temporel de la mesure de coïncidence, la modulation non-locale fait apparaître une modification spectrale de la mesure de coïncidences. Dans ce cas, c'est la relation de conservation d'énergie des photons intriqué qui est mise en avant. La somme des fréquences des photons est connue de manière certaine et équivaut à la fréquence de la pompe monochromatique, ω_p.

Lorsque les modulateurs sont éteints, la somme des fréquences des photons mesurés en coïncidence donne un unique pic, comme représenté sur la figure Fig.1.8 b), où $\Delta\omega$ représente l'écart de fréquence par rapport à ω_p.

Lorsqu'un des modulateurs est allumé, on observe l'apparition d'autres pics, comme représenté sur le figure Fig.1.8 c). L'écart entre les pics correspond à la fréquence de modulation.

Lorsque les deux modulateurs sont allumés, [Harris, 2008] distingue deux cas. Soit les modulateurs possèdent une modulation identique : dans ce cas les effets de la modulation s'additionnent et on observe la figure Fig.1.8 d). Soit les modulateurs possèdent une modulation opposée : dans ce cas les effets de la modulation se compensent et on retrouve la figure Fig.1.8 b) observée lorsque les deux modulateurs sont éteints. Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement dans [Sensarn et al., 2009].

On peut noter une condition avancée dans [Harris, 2008] pour l'observation de ce phénomène. Il est nécessaire que, quelle que soit sa fréquence, le photon expérimente la même modulation de phase. Il faut que l'impulsion du bi-photon soit très courte par rapport à la période de modulation afin que cette condition soit remplie. Dans le domaine spectral, la condition est que la fréquence de modulation doit être faible devant la largeur du spectre bi-photon.

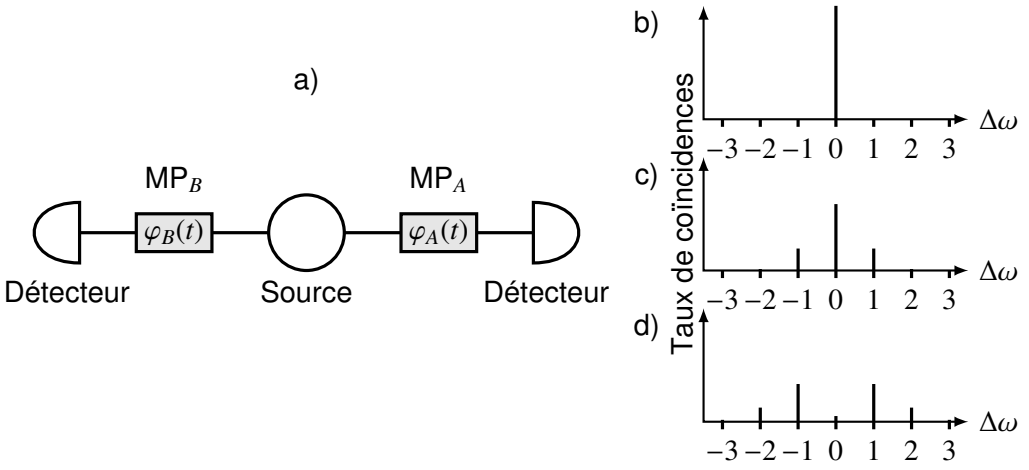


FIGURE 1.8 – Schéma de modulation non-locale de Harris. Des photons intriqués en temps énergie sont séparés et rencontrent chacun un modulateur de phase et sont détectés en coïncidence, comme le montre le schéma a). Ce schéma est le pendant temporel de la dispersion non-locale de [Franson, 1992] où, au lieu d'appliquer une variation de phase fréquentielle et d'observer les corrélation temporelles, on applique une variation de phase temporelle et on observe les corrélations fréquentielles. Ainsi $\Delta\omega$ représente l'écart de fréquence entre les photons mesurés en coïncidence et [Harris, 2008] montre que cette phase agit non-localement et peut-être compensée. La figure b) représente le cas où les modulations sont nulles $\varphi_A(t) = \varphi_B(t) = 0$ ou le cas où elles se compensent $\varphi_A(t) = -\varphi_B(t)$. La figure c) représente le cas où une des modulations est nulle $\varphi_B(t) = 0$. Enfin la figure d) représente le cas où les modulations sont identiques $\varphi_A(t) = \varphi_B(t)$. L'écart de fréquence entre les pics de coïncidence correspond à la fréquence de modulation.

Une autre approche de la modulation non-locale a été apportée par [Olislager et al., 2012, Mbodji et al., 2012] au sein de notre laboratoire. Elle sera détaillée dans le chapitre suivant. Elle permet d'exploiter un régime plus complexe que la compensation ou l'accumulation non-locale des modulations, présenté par [Harris, 2008], et nous montrerons que la modulation non-locale constitue un interféromètre non-local dont on peut observer une figure d'interférence. Nous verrons que la condition d'interférence constructive correspond au cas où les modulations non-locales s'accumulent, et l'interférence destructive au cas où les modulations se compensent.

Nous avons présenté les principes de base abordés dans cette thèse. Dans le deuxième chapitre de ce manuscrit, nous allons voir de quelle manière la modulation de phase permet de réaliser une figure d'interférence et nous étudierons les effets de la dispersion sur cette figure d'interférence. Dans le troisième chapitre, nous présenterons une réalisation expérimentale de la compensation non-locale de la dispersion. Puis, dans une dernière partie, nous montrerons une autre application de la modulation de phase pour la manipulation d'états quantiques, avec l'étude d'une marche aléatoire quantique en fréquence.

2

PLATEFORME DE MANIPULATION EN FRÉQUENCE D'ÉTATS QUANTIQUES

Sommaire

2.1 Interférences quantiques en fréquence 25
2.1.1 Interférence à un photon 26
2.1.2 Interférence à deux photons 48
2.2 Propagation d'états intriqués en fréquence 64
2.2.1 Propagation avant modulation 65
2.2.2 Propagation après modulation 73
2.2.3 Annulation de la dispersion 75
2.3 Conclusion 76

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les principales expériences d'interférences à un ou deux photons issues de la superposition de chemins temporels ou de polarisation. Ce second chapitre est dédié à la description théorique des expériences d'interférences quantiques issues de la superposition de chemins fréquentiels. Comme dans le cas temporel sur lequel nous nous appuyons pour étayer nos propos, la réalisation d'interférences quantiques en fréquence présente des spécificités. Nous les avons identifiées et nous en avons déduit les conditions nécessaires à la réalisation d'une plateforme d'interférences quantiques en fréquence.

Ainsi en introduction à la manipulation et à la mesure d'interférences quantiques dans le domaine fréquentiel, nous donnons la description détaillée d'une interférence à photon unique. Ce concept est alors étendu au cas de l'interférence à deux photons, pour laquelle nous estimons la sensibilité du système en fonction des paramètres extérieurs et la précision de contrôle requise. Ce contrôle ne s'obtient qu'à l'aide de composants soigneusement choisis dont nous présentons les caractérisations.

2.1/ INTERFÉRENCES QUANTIQUES EN FRÉQUENCE

Voyons dans un premier temps comment se décline cette problématique dans le cadre d'une interférence impliquant des chemins en fréquence.

2.1.1/ INTERFÉRENCE À UN PHOTON

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment réinterpréter le schéma d'interférence temporel au domaine fréquentiel. Pour réaliser une figure d'interférence quantique avec une visibilité maximale, trois conditions doivent être réunies.

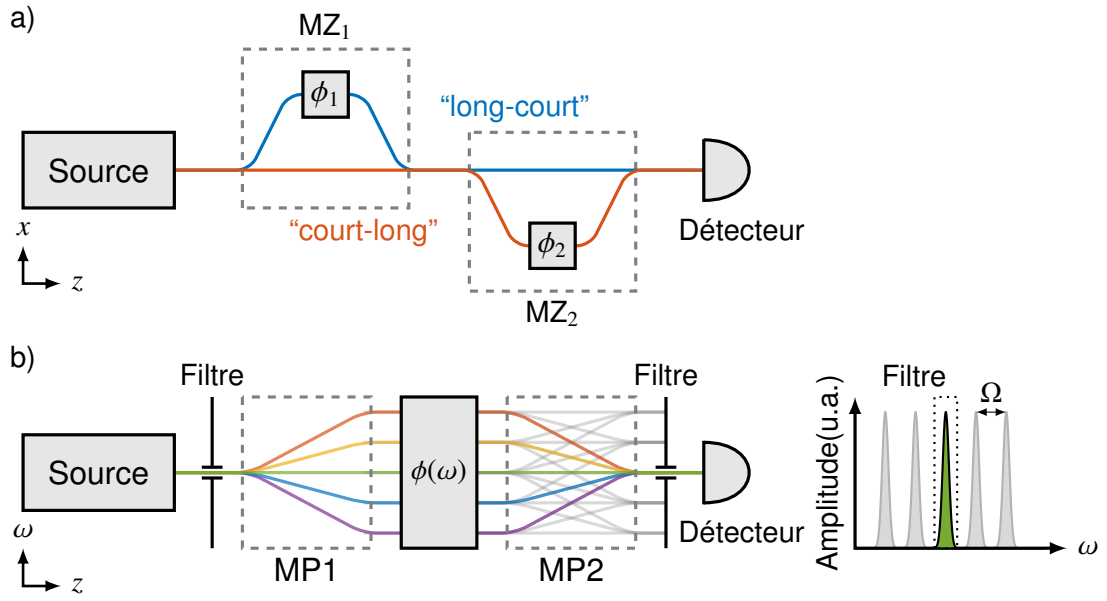


FIGURE 2.1 – Représentation simplifiée d'interférences à un photon, en temps a) et fréquentiel b). Dans chacun des cas, nous n'avons représenté qu'un état d'observation.

On représente sur la figure Fig.2.1 a), le schéma d'interférences temporelles. Les couleurs rouge et bleu représentent les deux chemins qui produisent l'interférence. A contrario, dans le domaine fréquentiel, les chemins sont multiples. Sur la figure Fig.2.1 b), nous avons limité leur représentation à cinq chemins de cinq couleurs différentes, chacun évoquant la fréquence du photon. Dans l'expérience fréquentielle, l'interféromètre de MZ est remplacé par un modulateur de phase (MP). De manière semblable à l'expérience précédente, le modulateur de phase projette le photon sur une superposition d'état avec des amplitudes de probabilité prédéfinies. Chaque état est dans ce cas associé à une fréquence et non à un retard.

Ainsi la figure Fig.2.1 b) montre schématiquement le parcours du photon dans le domaine fréquentiel. Un photon entre avec une fréquence bien déterminée dans le premier modulateur (MP1) et ressort dans une superposition d'états de fréquence avec des amplitudes de probabilités définies (représentées par les différentes couleurs).

Il rencontre ensuite un second modulateur de phase identique (MP2), qui lui permet de nouveau de changer de fréquence. En sortie du second modulateur, un photon qui se retrouve sur la fréquence "verte" a pu traverser MP1 et MP2 sans changer de fréquence ou, par exemple, être devenu "bleu" avant de redevenir "vert". La sortie "verte" correspond à la superposition de tous les parcours possibles pour lesquels le photon acquiert une quantité d'énergie dans le premier modulateur et cède la même quantité d'énergie dans le second pour redevenir "vert". Nous avons illustré 5 parcours colorés sur la figure Fig.2.1 satisfaisant à cette règle. Pour verifier le second critère annoncé au paragraphe

précédent et produire une figure d'interférence, nous avons besoin de changer la relation de phase, $\phi(\omega)$, qui existe entre les différents chemins en fréquence. Cette opération est réalisée sur la figure Fig.2.1 b) par l'élément central représenté en gris.

Enfin pour mesurer l'interférence avec un maximum de visibilité, il faut isoler un ensemble de chemins équivalents. Cette opération, qui consiste à isoler l'impulsion centrale dans l'expérience temporelle, est ici réalisée par un filtre isolant une fréquence en sortie. Dans l'exemple donné figure Fig.2.1, les photons sont émis à la fréquence "verte" et détectés à la fréquence "verte". Cet exemple montre que le filtre permet d'isoler une interférence en supprimant de la mesure les chemins représentés en gris clair.

Nous pouvons préciser quelques points qui ne sont pas explicites sur le schéma Fig.2.1. Tout d'abord, le modulateur ne sépare pas spatialement les fréquences comme on pourrait l'imaginer sur le schéma, mais tous les chemins coexistent dans une même fibre optique. De plus, comme le montre la figure Fig.2.1, les chemins en fréquence sont discrets. Dans notre expérience, ils sont séparés de Ω, qui correspond à la taille maximum des filtres utilisés pour bien discriminer la fréquence de sortie.

Dans les prochains paragraphes, nous allons détailler chaque partie du processus conduisant à l'observation d'une figure d'interférence impliquant des chemins en fréquence. Nous avons mis en évidence qu'il était nécessaire d'obtenir une superposition de chemins indiscernables par la mesure, pour que ces chemins puissent interférer. Nous avons vu que cette superposition de chemins est possible grâce à l'action conjointe de deux modulateurs de phase. Nous allons donc, en premier lieu, décrire l'interaction du modulateur de phase avec une onde optique. Puis, nous verrons de quelle manière leur action conjointe permet une superposition d'états. Nous décrirons ensuite le moyen utilisé pour mesurer l'état de superposition souhaité. Et enfin nous verrons quel paramètre nous pouvons utiliser pour parcourir une figure d'interférence.

2.1.1.1/ MÉLANGE DE FRÉQUENCE ET SUPERPOSITION DE CHEMINS

La superposition de chemins fréquentiels nécessite de permettre au photon de passer d'une fréquence à une autre. Pour ce faire, un moyen connu et maitrisé en optique classique est d'utiliser un modulateur de phase.

Un modulateur de phase exploite l'effet Pockels dans un cristal non-linéaire, comme le Niobate de Lithium. D'un point de vue classique, cet effet se manifeste lors de l'application d'un champ électrique sur le cristal. Celui-ci induit une biréfringence supplémentaire du milieu, proportionnelle à l'amplitude de ce champ. L'application d'une tension Radio-Fréquence (RF), considérée comme quasi-statique par rapport au temps de réaction du cristal, peut être vue comme une modulation temporelle de l'indice optique. Une onde optique traversant le cristal percevra cette modulation d'indice comme un réseau temporel qui la diffusera de manière inélastique.

Nous allons tout d'abord traiter la modulation de phase d'un point de vue classique afin de définir les paramètres sur lesquels nous agirons, comme l'amplitude de la tension RF ou la phase. Nous adopterons ensuite une formulation quantique pour extraire l'évolution du champ quantifié à l'intérieur du modulateur.

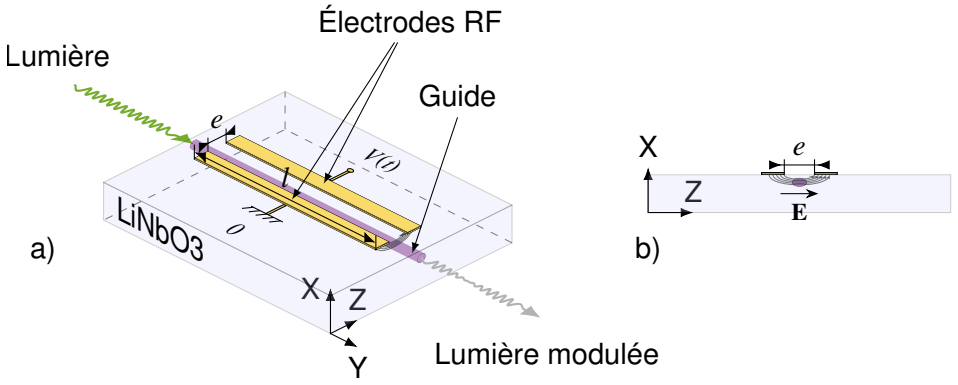


FIGURE 2.2 – Schéma d'un modulateur de phase en coupe X. La figure a) montre que la disposition des électrodes induit la génération d'un champ électrique orienté selon l'axe cristallin Z dans le guide. Comme le montre la figure b), cette orientation permet de bénéficier d'une modulation d'indice, proportionnelle au plus grand coefficient du tenseur de permittivité diélectrique du cristal (r_{33}), pour une onde optique polarisée suivant l'axe Z.

Description classique du modulateur de phase : Pour un cristal accordé en phase [Ohmachi et al., 1975] sur une longueur l, comme représenté figure Fig.2.2, on peut écrire la modulation de phase de l'onde optique introduite par la modification de l'indice optique :

$$\Delta\phi(t) = \frac{\pi\omega_0\Delta n_e l}{c_0} = \frac{2\pi l n_e^3 r_{33} R}{e\lambda_0} V(t) = \frac{V(t)\pi}{V_\pi}. \tag{2.1}$$

On appelle $V_\pi = \frac{e\lambda_0}{2ln_e^3 r_{33}R}$ la tension demi-onde à appliquer pour déphaser l'onde optique de π sur la longueur du cristal. Le coefficient e est la distance séparant les électrodes RF, n_e est l'indice "perçu" par le champ optique, r_{33} est un coefficient du tenseur de permittivité diélectrique, R est l'intégrale de recouvrement des champs dans le guide, λ_0 est la longueur d'onde optique dans le vide et $V(t)$ est la tension de l'onde RF. On néglige les variations de n_e aux longueurs d'ondes optiques mises en jeu et donc V_π est une constante. Enfin $V(t) = V\sin(\Omega t + \phi)$ est la tension de l'onde RF appliquée à l'électrode, V, Ω et ϕ désignent respectivement, son amplitude, sa pulsation et sa phase.

Si une onde optique monochromatique oscillant à la fréquence ω_0 pénètre dans le modulateur de phase, piloté par une tension RF $V(t)$, alors l'amplitude du champ optique en sortie s'écrit :

$$E(t) = E_0 e^{i\phi_0} e^{i(\omega_0 t + a\sin(\Omega t+\phi))}, \tag{2.2}$$

où par souci de simplification d'écriture, on a posé le taux de modulation $a = \pi V/V_\pi$.

Nous pouvons décomposer l'expression (2.2) en ondes planes grâce à la relation de Jacobi-Anger [1] :

1. La relation de Jacobi-Anger est une relation de passage entre la base des ondes planes et celle des ondes cylindriques, elle se formule $e^{ia\sin(\alpha)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(a)e^{in\alpha}$ où $J_n(a)$ est une fonction de Bessel de première espèce. Voir Annexe B pour plus d'information.

$$E(t) = E_0 e^{i\phi_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(a) e^{in\phi} e^{i\omega_n t}. \tag{2.3}$$

Alors, l'intensité spectrale en sortie de modulateur s'écrit :

$$I(\omega) = I_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - \omega_n) J_n(a)^2. \tag{2.4}$$

Nous pouvons remarquer que le taux de modulation a dépend linéairement de la longueur de propagation. Nous représentons cette dépendance sur la figure Fig.2.3. On peut voir sur le schéma b) représentant le cristal, un dégradé de gris associés à chaque fréquence et évoluant en fonction de la distance. Ce dégradé représente l'évolution de l'intensité. Le schéma c) représente le spectre en intensité correspondant à l'équation (2.4) pour $a = 1,84$.

FIGURE 2.3 – Représentation de l'évolution d'un spectre monochromatique sous l'action du modulateur de phase. Le taux de modulation vaut $a = 1,84$ et la fréquence normalisée est définie suivant $\Omega_N = (\omega - \omega_0)/\Omega$.

On voit qu'à l'intérieur du modulateur les différentes harmoniques de modulation sont créées au fur et à mesure de la propagation dans le cristal.

En effet, on obtient expérimentalement un nombre limité d'harmoniques, égal à l'arrondi de $2(a+1)$ [Capmany et al., 2011]. La figure Fig.2.4 représente un spectre expérimental pour un taux de modulation $a \approx 2,8$. On remarque que l'intensité des bandes de modulations supérieures à l'ordre 4 est négligeable.

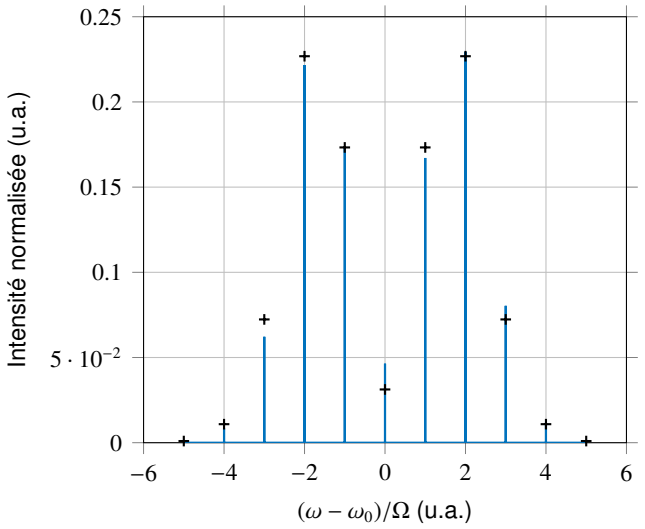


FIGURE 2.4 – Spectre en intensité mesuré en sortie de modulateur et normalisé par rapport à l'intensité totale. La courbe bleu représente les données expérimentales et les "+" noirs sont les valeurs théoriques correspondant à un taux de modulation de $2,78$.

Maintenant que nous avons rappelé l'action d'un modulateur de phase sur une onde monochromatique optique, nous allons voir comment s'écrit cette action dans un formalisme quantique.

Description quantique du modulateur de phase : Cette description s'appuie sur les travaux menés précédemment au laboratoire [Bloch, 2006, Mbodji, 2012]. D'un point de vue quantique, on peut considérer les interactions dans le modulateur comme des collisions inélastiques entre un photon optique, que l'on appelle signal, et un photon RF, que l'on appelle pompe. De cette collision résulte un photon optique ayant une fréquence diminuée ou augmentée de la fréquence du photon RF. On appelle le photon résultant réplique ou *idler*.

Suppositions :

- Le champ RF est supposé monochromatique et de très forte intensité par rapport aux champs optiques. Il peut être considéré comme classique.
- On peut négliger les collisions impliquant uniquement des photons optiques.
- On suppose que les conditions d'accord de phase ne sont pas remplies pour des interactions impliquant plus d'un photon RF (par exemple $n(2\Omega) \neq n(\Omega)$, si on considère la génération de seconde harmonique).
- L'interaction a lieu dans une structure guidée mono-mode et on suppose que les photons signaux entrant dans le modulateur ont une polarisation rectiligne orientée de manière à maximiser l'efficacité des collisions inélastiques. Dans le cas de notre cristal en Niobate de Lithium, cette efficacité est maximisée lorsque toutes les polarisations sont linéaires et orientées suivant l'axe c du cristal (exploitation du coefficient d_{33} du tenseur de la susceptibilité diélectrique $\chi^{(2)}$). On considère que la polarisation non linéaire du milieu est instantanée et que le coefficient d_{33} est homogène dans tout le matériau.
- Il ne se produit que des collisions qui respectent la conservation de l'énergie $\omega_s \pm \Omega = \omega_i$, où le photon *idler* peut être produit par une somme ou une différence de fréquence.
- La condition d'accord de phase de la somme ou de la différence de fréquences $\beta(\omega_s) \pm \beta(\Omega) - \beta(\omega_s \pm \Omega) = 0$ est remplie pour une large plage de fréquences optiques (situées autour de ω_0) comparée à la fréquence RF. On considère cependant que les photons optiques resteront dans une plage de fréquences très petite devant ω_0, ce qui permet de considérer que toutes les variables qui dépendent de ω sont constantes et évaluées en $\omega = \omega_0$ lorsqu'elles ne régissent pas un terme de phase.
- Le Hamiltonien régissant l'interaction s'obtient à partir de la quantification canonique de l'équation de l'énergie effective.

Tout d'abord, le Hamiltonien régissant l'interaction s'écrit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{NL}}(t) = -\,\mathrm{i}\epsilon_0 d_{33} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}r \left[\hat{E}^-_{i,+}(r,t)\hat{E}^+_p(r,t)\hat{E}^+_s(r,t) + \hat{E}^-_{i,-}(r,t)\hat{E}^-_p(r,t)\hat{E}^+_s(r,t) - h.c. \right]. \qquad (2.5)$$

Comme la propagation a lieu suivant une seule direction, chaque vecteur d'onde est lié à une pulsation par la relation de dispersion. Il est alors équivalent de regarder l'évolution temporel des opérateurs de création et d'annihilation associés à un vecteur d'onde ou de regarder l'évolution spatiale, selon la direction de propagation, des opérateurs de création et d'annihilation associés à une pulsation. On obtient alors l'opérateur de déplacement

spatial $\hat{\mathcal{U}}(z)$ en remplaçant l'intégrale sur z par une intégrale sur t, et en décomposant les différents champs en pulsation. L'évolution spatiale d'un opérateur annihilation associé à une pulsation s'obtient en résolvant l'équation du mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}(\omega,z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{a}(\omega,z), \hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{L}} + \hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}\right] - \frac{\partial\hat{a}(\omega,z)}{\partial z}. \tag{2.6}$$

En posant l'opérateur affranchi des oscillations rapides dues aux effets de la propagation linéaire $\hat{\mathcal{A}}(\omega,z) = \hat{a}(\omega,z)\exp(-\mathrm{i}\beta(\omega)z)$, on obtient une équation de l'évolution non linéaire de $\hat{\mathcal{A}}(\omega,z)$ qui s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}(\omega,z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{\mathcal{A}}(\omega,z), \hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}\right]. \tag{2.7}$$

Dans cette équation, l'opérateur de déplacement non-linéaire s'obtient en remplaçant l'intégrale sur z par une intégrale sur t dans (2.5), et en utilisant la décomposition des champs en pulsation (2.20). En utilisant les hypothèses précédentes, cet opérateur non-linéaire se réduit à :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) =& \frac{\mathrm{i}\hbar g}{2}\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega-\Omega,z)\hat{\mathcal{A}}(\omega,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} - \int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega+\Omega,z)\hat{\mathcal{A}}(\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right],\\ =& \frac{\mathrm{i}\hbar g}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\left[\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega-\Omega,z)\hat{\mathcal{A}}(\omega,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} - \hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega,z)\hat{\mathcal{A}}(\omega-\Omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right],\end{aligned} \tag{2.8}$$

où ω désigne une fréquence optique, ϕ est la phase du champ RF et

$$g = \frac{d_{33}\omega_0 R E_p}{n(\omega_0)c_0} \tag{2.9}$$

est un gain linéaire qui a la dimension de l'inverse d'une distance et dans lequel : R est l'intégrale de recouvrement transverse normalisée des champs dans le guide, et E_p est l'amplitude classique du champ RF.

L'opérateur de propagation non linéaire associe l'annihilation d'un photon à une fréquence donnée à la création d'un photon à une fréquence éloignée de $\pm\Omega$. Ainsi, pour qu'un photon soit créé à une fréquence donnée, il est nécessaire qu'un photon existe à une fréquence distante de $\pm\Omega$. Comme souligné dans le paragraphe précédent, l'interaction se fait de proche en proche et le nombre d'harmoniques de modulation en sortie de cristal est limité par l'efficacité de l'interaction. On note alors $\hat{\mathcal{A}}_p(z)$ l'opérateur associé à l'annihilation d'un photon dans le mode $\omega + p\Omega$, et on résout l'équation de propagation associée à $\hat{\mathcal{A}}_p(z)$. On obtient la relation :

$$2\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}_p(z)}{\mathrm{d}z} = g\left[\hat{\mathcal{A}}_{p+1}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} - \hat{\mathcal{A}}_{p-1}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right]. \tag{2.10}$$

Cette relation nous permet de chercher des solutions de la forme :

$$\hat{\mathcal{A}}_p(z) = \sum_n \alpha_n \hat{\mathcal{A}}_{p+n}(0), \tag{2.11}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. On injecte cette solution dans l'équation précédente pour trouver les coefficients α_n. On obtient :

$$\frac{2}{g}\frac{\mathrm{d}\alpha_n}{\mathrm{d}z} = \alpha_{n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} - \alpha_{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}. \tag{2.12}$$

Cette équation ressemble fortement à la relation de récurrence des fonctions de Bessel (B.2). On trouve une solution vérifiant cette relation de récurrence sous la forme $\alpha_n(z) = U_n(gz, -\phi) = J_n(gz)\exp(-\mathrm{i}n\phi)$.

En posant que l'interaction a lieu entre $z = 0$ et $z = l$ comme sur le schéma Fig.2.3, on déduit de (2.11) les relations liant les opérateurs d'annihilation et de création aux différentes fréquences optiques entre l'entrée et la sortie du cristal :

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_{p,\mathrm{out}}(l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_k(a,-\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(\omega+p\Omega)l}\hat{a}_{p+k,\mathrm{in}}(0), \\ \hat{a}^\dagger_{p,\mathrm{out}}(l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_k(a,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega+p\Omega)l}\hat{a}_{p+k,\mathrm{in}}(0), \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

où

$$a = gl = \pi\frac{V}{V_\pi} \tag{2.14}$$

désigne le même taux de modulation que celui défini dans le cas classique (2.1).

On peut alors écrire l'action du modulateur de phase sur un photon unique à la fréquence ω_0 qui arrive en entrée de cristal :

$$|\omega_0\rangle_{\mathrm{in}} = \hat{a}^\dagger_{0,\mathrm{in}}(0)|vac\rangle_{\mathrm{in}} \xrightarrow{\hat{M}(a,\phi)} \hat{a}^\dagger_{0,\mathrm{out}}(l)|vac\rangle_{\mathrm{out}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_k(a,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k\beta_1\Omega l}|\omega_k\rangle_{\mathrm{out}}. \tag{2.15}$$

Notons pour cette dernière équation que compte tenu de la longueur l, la dispersion dans le modulateur peut-être négligée sur toute la bande passante de ce dernier. Nous nous sommes donc limités au terme de vitesse de groupe.

En résumé, un photon qui possède une fréquence ω bien déterminée en entrée de modulateur, se retrouve dans un état de superposition de modes de fréquence $\omega + k\Omega$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'amplitude de probabilité d'appartenance à un de ces modes suit une fonction de Bessel $J_k(a)$, dont le paramètre a dépend de l'amplitude de l'onde RF. Le modulateur permet donc de coupler n'importe quel état monochromatique d'entrée $|\omega\rangle$ avec tous les états monochromatiques de sortie $|\omega'\rangle = |\omega + k\Omega\rangle$.

L'image des collisions inélastiques entre les photons optiques et les photons RF permet de comprendre intuitivement que plus la longueur d'interaction (ou la tension de l'onde

RF) est grande, plus le nombre de photon RF est grand, et donc plus la probabilité de collision sera grande. Il sera alors possible d'obtenir des photons optiques éloignés de leur fréquence initiale. Ceci explique pourquoi on peut négliger $J_n(a)^2$ par rapport aux autres ordres pour $|n| > N$. Une bonne approximation est $N = a+1$ [Capmany et al., 2011].

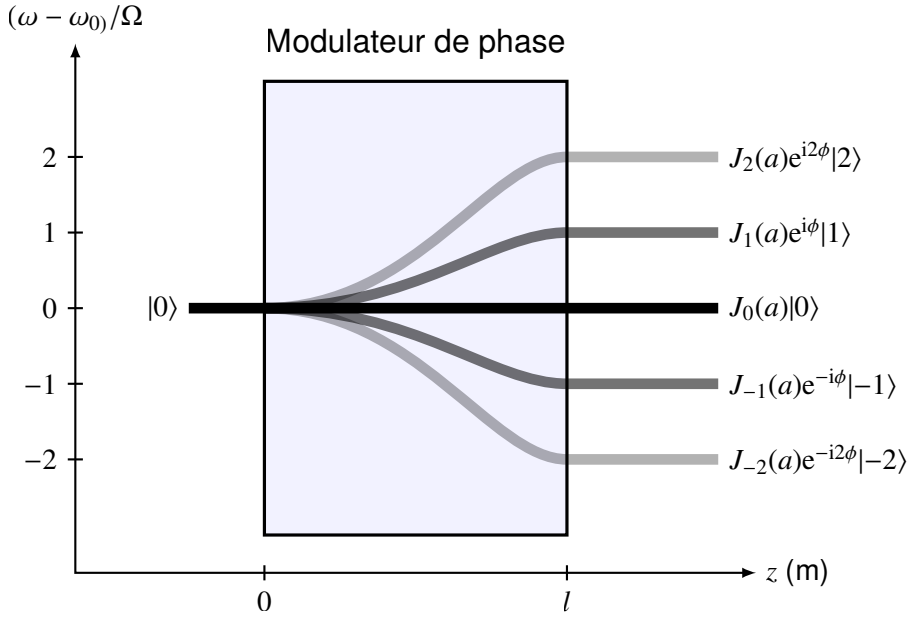


FIGURE 2.5 – Représentation des sauts de fréquence dans le modulateur. Pour un état de départ monochromatique, nous avons représenté les amplitudes associées à 5 états de fréquence obtenus après modulation.

Revenons maintenant à l'observation d'interférences dans le domaine fréquentiel. La figure Fig.2.5 représente le modulateur permettant de passer d'un état de fréquence propre en entrée à une superposition d'états de fréquences éloignées d'entiers de la fréquence de modulation.

Nous allons maintenant voir de quelle manière des modulateurs de phase nous permettent d'obtenir une superposition, non pas d'états, mais de chemins en fréquence.

Superposition de chemins : Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, un MP couple n'importe quel état monochromatique d'entrée avec un ensemble d'états de fréquence séparés d'entiers de la fréquence de modulation de ce dernier.

Si cette fois l'état d'entrée est composé de plusieurs fréquences, par exemple trois, alors on a :

$$|\Psi\rangle_{\text{in}} = a_1|\omega_1\rangle + a_2|\omega_2\rangle + a_3|\omega_3\rangle. \tag{2.16}$$

On obtient l'état de sortie du modulateur en faisant agir l'opérateur de modulation, décrit par l'équation (2.15), sur cet état :

$$|\Psi\rangle_{\text{out}} = \sum_k a_1 U_k(a, \phi - \beta_1\Omega l)|\omega_1 + k\Omega\rangle + a_2 U_k(a, \phi - \beta_1\Omega l)|\omega_2 + k\Omega\rangle + a_3 U_k(a, \phi - \beta_1\Omega l)|\omega_3 + k\Omega\rangle. \tag{2.17}$$

où nous avons inclus le déphasage optique dans la phase RF, soit $\alpha = \phi - \beta_1 \Omega l$.

On représente alors ce résultat sur la figure Fig.2.6. Nous avons associé une couleur à chaque état de fréquence initial, et on trace les transitions possibles vers les harmoniques de modulation, dues à l'action du modulateur de phase. Un dégradé de couleur est utilisé pour représenté l'amplitude de probabilité de passer d'une fréquence à une autre.

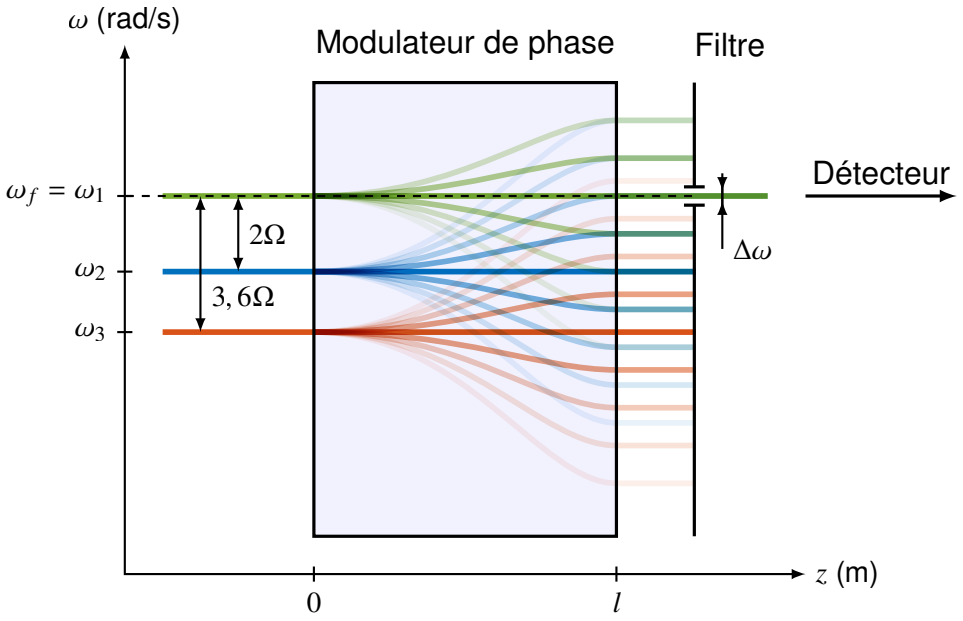


FIGURE 2.6 – Exemple de trois états monochromatiques dont seulement deux pourront être détectés. Les états de fréquence "bleu" et "vert" peuvent échanger la bonne quantité d'énergie dans le modulateur pour être détectés, alors que l'état "rouge" ne le peut pas.

Nous avons choisi les fréquences ω_1 et ω_2 telles que $\omega_1 = \omega_2 + 2\Omega$. Ainsi l'équation (2.17) devient :

$$|\Psi\rangle_{\text{out}} = \sum_k \left[a_1 U_k(a,\alpha) + a_2 U_{k-2}(a,\alpha)\right] |\omega_1 + k\Omega\rangle + a_3 U_k(a,\alpha) |\omega_3 + k\Omega\rangle. \tag{2.18}$$

Comme ces deux fréquences sont séparées d'un entier de la fréquence de modulation, elles peuvent transiter sur le même ensemble de fréquences. En particulier, l'état de départ $|\omega_1\rangle$ peut être mesuré dans l'état $|\omega_2\rangle$ en sortie de modulateur et vice versa. En sortie de modulateur, ces deux états sont devenus indiscernables et on peut dire que le modulateur a permis d'échanger de l'énergie entre les modes de fréquence ω_1 et ω_2. Le mode associé à la troisième fréquence ne se couple pas à un état dégénéré à ω_1, via l'action du modulateur, car $\omega_3 \neq \omega_1 + n\Omega$, $n \in \mathbb{Z}$. On peut alors sélectionner un état de mesure auquel il soit impossible de coupler le mode ω_3. Cet exemple est illustré à l'aide d'un filtre sur la figure Fig.2.6. En centrant le filtre sur la fréquence ω_1, il existe une bande passante du filtre $\Delta\omega > 0$ suffisamment fine pour que la probabilité de mesurer un photon provenant de l'état $|\omega_3\rangle$, avant modulation, soit nulle. Ce n'est pas le cas pour les photons dans les états $|\omega_1\rangle$ ou $|\omega_2\rangle$, qui grâce à la modulation peuvent rejoindre la bande de transmission du filtre. À la sortie du filtre, nous obtenons donc une superposition des chemins de fréquences correspondant aux photons qui "passeraient" dans le filtre, en

provenance des fréquences ω_1 et ω_2. Cette superposition de chemins est rendue possible par le modulateur, cependant elle nécessite une superposition d'états particulière avant modulation.

Superposition d'états : Nous venons de mettre en évidence qu'il est nécessaire d'avoir une superposition d'états impliquant au moins deux fréquences séparées d'un entier de la fréquence de modulation, pour obtenir une superposition de chemin via le modulateur. Nous pouvons alors remarquer qu'une superposition souhaitée peut s'obtenir à l'aide d'un modulateur de phase agissant sur un état monochromatique, comme le montre la figure Fig.2.5. Nous disposons alors deux modulateurs en ligne en aval d'une source quasi-monochromatique, comme représenté figure Fig.2.7.

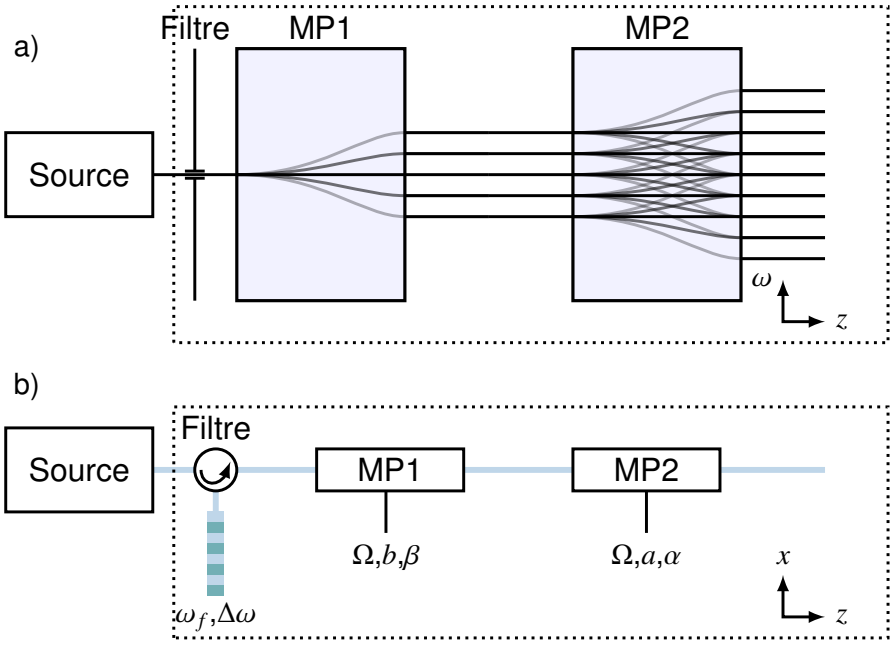


FIGURE 2.7 – Création de chemins superposés par deux modulateurs de phase, a) montre une représentation spatiale de l'espace des fréquences et b) est une représentation proche de notre expérience en optique intégrée.

Nous obtenons, en sortie du second modulateur, une superposition d'un grand nombre de chemins, dont nous n'avons représenté que la superposition des états de fréquence proches. Nous pouvons écrire formellement cette transformation en supposant que l'état de départ est monochromatique et vaut $|\Psi\rangle_{\text{in}} = |\omega_0\rangle = |0\rangle$. L'état de sortie s'écrit :

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{out}}\rangle &= \sum_{\{k,l\}\in\mathbb{Z}^2} U_k(a,\alpha)U_l(b,\beta)|l+k\rangle, \\ &= \sum_{\{k,d\}\in\mathbb{Z}^2} U_k(a,\alpha)U_{d-k}(b,\beta)|d\rangle. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Cette superposition d'état ne tient pas compte de la propagation entre les modulateurs,

le but ici étant seulement de comprendre qu'une superposition de chemins peut être réalisée. Nous nous intéresserons à la relation de phase entre les chemins à la fin de cette section. Nous pouvons tout de même observer que l'amplitude de probabilité d'observer un état de fréquence $|d\rangle$ résulte de la superposition des amplitudes de probabilités sommées sur k. Ainsi l'observation de chaque état de fréquence peut dévoiler une figure d'interférence.

Nous allons décrire, dans la partie suivante, la détection des états à l'aide d'un détecteur large bande et d'un filtre. Ceci nous permettra d'introduire un opérateur champ dont l'évolution, dans la représentation de Heisenberg, tiendra compte de tous les composants du système.

2.1.1.2/ DISCRIMINATION DE FRÉQUENCE ET MESURE

Comme mis en exergue dans le paragraphe précédent, il nous faut discriminer une bande de fréquence bien précise lors de la mesure.

Les photodétecteurs sont sensibles sur une large plage de fréquences[2] : par exemple, une photodiode à avalanche de type Arséniure de Gallium-Indium (InGaAs) est typiquement sensible de 800 nm à 1700 nm. Lorsqu'un photon est détecté, nous n'avons par conséquent aucune information sur sa fréquence. Pour mesurer des photons à une fréquence précise, nous devons placer un filtre devant le détecteur.

Voyons comment modéliser la détection d'un état quantique de fréquence, puis regardons ce que devient cet état lorsqu'un filtre est présent devant le détecteur.

Description d'un détecteur large bande : Un compteur de photon requiert de bonnes performances sur essentiellement 4 caractéristiques :

- son rendement, il correspond au rapport entre le nombre de détections obtenues sur le nombre de photons entrant.
- Le taux de coups d'obscurité, il détermine le nombre de détections observé en l'absence de photons.
- Le temps de réponse du détecteur qui limite la cadence de détection.
- La facilité de mise en oeuvre et l'encombrement.

Dans la fenêtre des télécommunications optiques, il existe plusieurs solutions technologiques, parmi lesquelles on compte les tubes photomultiplieurs [Rann, 1939, Thorlabs, 2015], les nano-fils supra-conducteurs [Dauler et al., 2014, SingleQuantum, 2015] ou les photodiodes à avalanche [Cova et al., 1996, AureaTechnology, 2015]. Les deux dernières sont les plus courantes. Les nano-fils présentent de meilleures performances, avec notamment des rendements quantiques supérieurs à 90% [Marsili et al., 2013] ; cependant ils nécessitent d'être refroidis à 4 K à l'aide d'une lourde infrastructure. Les photodiodes à avalanche sont très compactes et permettent une meilleure intégration tout en présentant des performances très intéressantes. C'est pour cette dernière raison que nous avons choisi de les utiliser dans cette thèse.

Dans la suite du paragraphe, nous allons modéliser le comportement de nos détecteurs. De manière générale, la réponse du détecteur est décrite par l'effet photoélectrique qui

2. Du même ordre de grandeur que la fréquence de leur maximum de sensibilité.

traduit l'absorption d'un photon par un atome excité du détecteur. L'atome, en retrouvant son état fondamental, émet un électron qui sera par la suite amplifié.

Ce paragraphe s'articule en deux parties. Dans la première partie, nous allons décrire la probabilité d'absorption du photon. Puis nous donnerons les caractéristiques du signal qui nous sera réellement fourni par le détecteur.

On peut trouver dans la référence [Mandel et al., 1995] un traitement rigoureux de l'interaction entre un atome du détecteur et le champ électromagnétique à l'aide d'une méthode perturbative. Nous adaptons ce modèle à notre cas spécifique.

Nous utilisons une modélisation simple pour laquelle la zone sensible du détecteur possède une surface S, sur laquelle la répartition des atomes est homogène et dont l'épaisseur est bien inférieure aux longueurs d'onde détectées. On considère que le champ électromagnétique interagit avec un dipôle unique, disposé au centre de masse du détecteur $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. On suppose pour cela que le champ arrive en incidence normale par rapport au détecteur, et que l'interaction globale s'obtient en intégrant sur la surface du détecteur.

On considère également que les photons sont acheminés sur le détecteur par une fibre optique mono-mode aux fréquences optiques considérées, et que celles-ci sont réparties sur une bande spectrale $\Delta\omega_s$ dont la fréquence moyenne ω_0 vérifie $\Delta\omega_s << \omega_0$.

Ces hypothèses nous permettent d'écrire l'évolution du champ électrique dans le détecteur de la même manière que dans une fibre optique mono-mode. Cette évolution est donnée en annexe A.2, équation (A.8). La phase accumulée lors de la propagation entre la surface du détecteur $z = 0$ et la position du centre de masse z_0, peut être négligée car l'épaisseur du détecteur est très inférieure à la longueur d'onde. Cependant, nous laissons délibérément ce terme dont l'utilité est soulignée à la fin de ce paragraphe.

On considère que l'opérateur champ électrique $\hat{E}^+(\mathbf{r}_0, t)$, correspondant à l'annihilation d'un photon, s'écrit :

$$\hat{E}^+(\mathbf{r}_0, t) = \mathrm{i}A(x_0, y_0)E_0(\omega_0) \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \hat{a}(\omega, 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - \beta(\omega)z_0]}, \tag{2.20}$$

où $A(x_0, y_0)$ est l'amplitude transverse du champ électrique et $E_0(\omega_0) = \sqrt{\hbar\omega_0/(4\pi\epsilon_0 n(\omega_0)c_0)}$ [3].

On peut alors montrer, d'après [Mandel et al., 1995], que la probabilité d'absorber un photon entre l'instant t_0 et l'instant $t_0 + t$ s'écrit :

$$p(\mathbf{r}_0, t_0, t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t'' \sigma(t' - t'')G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t', \mathbf{r}_0, t''), \tag{2.21}$$

où $\sigma(t' - t'')$ est la sensibilité du détecteur et $G^{(1)}(\mathbf{r}, t', \mathbf{r}, t'')$ est la fonction de corrélation du champ correspondant à l'absorption d'un photon. En supposant que nous ne traitons que des états purs $|\psi\rangle$ et que le détecteur est insensible à la polarisation, la fonction de corrélation peut s'écrire sous la forme simple suivante,

3. En toute rigueur l'expression (2.20) dépend de $E_0(\omega)$, mais comme la largeur spectrale est bien plus faible que la fréquence centrale $\Delta\omega_s << \omega_0$, nous pouvons considérer que ce terme est constant et évalué au centre du spectre.

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t', \mathbf{r}_0, t'') = \langle\psi|\hat{E}^-(\mathbf{r}_0, t')\hat{E}^+(\mathbf{r}_0, t'')|\psi\rangle. \tag{2.22}$$

La probabilité d'absorption de l'ensemble du détecteur est obtenue par intégration sur la surface : $p(t) = \int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y p(\mathbf{r}_0, t)$.

En général nous mesurerons des impulsions temporelles longues en comparaison au temps de réponse du milieu cristallin [4] nous pouvons alors considérer que $\sigma(t - t') \approx \sigma\delta(t - t')$. On retiendra dans ce cas que la probabilité de mesurer le photon entre deux instants t_0 et $t_0 + t$, s'écrit [Garrison et al., 2008]

$$\boxed{p(\mathbf{r}_0, t_0, t) = \sigma \int_{t_0}^{t_0+t} \mathrm{d}t' G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t', \mathbf{r}_0, t').} \tag{2.23}$$

On va maintenant s'intéresser à un état que l'on veut détecter, c'est-à-dire un photon unique dans l'état pur

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)|\omega; t_0\rangle, \tag{2.24}$$

où $f(\omega)$ est la densité spectrale de probabilité du photon. On considère qu'elle a une forme gaussienne, possède une valeur moyenne ω_0 ainsi qu'un écart-type $\Delta\omega_s$ tel que $\Delta\omega_s << \omega_0$. Dans nos expériences, l'ordre de grandeur de $\Delta\omega_s$ est de 5 THz alors que la bande passante du détecteur $\Delta\omega_d$ est de l'ordre de 100 THz. La fréquence centrale d'émission $\omega_0/(2\pi)$ est dans le proche infra-rouge et vaut environ 193,3 THz. Cet état rentre dans le cadre de l'approximation du détecteur large bande que nous avons défini. Le critère $\Delta\omega_s << \omega_0$ permet de supposer $E_0(\omega) = E_0(\omega_0)$ constant dans l'expression de la fonction d'auto-corrélation, mais aussi de négliger la dispersion. Enfin, on suppose que le photon atteint le détecteur autour d'un instant t_0 [5].

Nous pouvons alors écrire la fonction d'auto-corrélation du champ :

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t', \mathbf{r}_0, t') = 2\pi \left|A(x_0, y_0)E_0(\omega_0)\tilde{g}(t' - t_0 - \beta_1 z_0)\right|^2. \tag{2.25}$$

Enfin, $\tilde{g}(t)$ désigne la transformée de Fourier [6] de

$$g(\omega) = f(\omega) \exp\left(\mathrm{i}\sum_{k>1} \beta_k(\omega - \omega_0)^k z_0/k!\right).$$

4. La limitation de la bande passante temporelle d'une photodiode à avalanche est due au processus d'amplification électronique et nous en tenons compte par la suite.

5. En réalité notre source ne nous fournit des états à un photon qu'avec une certaine probabilité. Comme elle émet de manière continue, nous ne connaissons que le taux moyen de photons émis et ne sommes jamais capable de déterminer à quel moment un photon a été émis avant qu'il ne soit détecté. Cet exemple peut cependant être généralisé pour décrire la mesure obtenue.

6. Nous avons pris comme transformée de Fourier de $f(\omega)$, $\mathrm{TF}[f(\omega)] = \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega) \exp(-\mathrm{i}\omega t)/\sqrt{2\pi}$ et comme transformée inverse $f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \tilde{f}(t) \exp(\mathrm{i}\omega t)/\sqrt{2\pi}$.

Nous avons laissé les termes correspondant à la dispersion dans cette fonction, de manière à pouvoir la réutiliser lorsque nous en traiterons les effets.

Nous pouvons alors directement écrire la probabilité de détecter ce photon entre l'instant t_0 et t_0+t sur toute la surface du détecteur, à partir de (2.23) et en supposant que l'intégrale sur la section transverse est normée, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, |A(x,y)|^2 = 1$. On obtient ainsi

$$\boxed{p(t_0,t) = \eta \int_{t_0}^{t_0+t} \mathrm{d}t' \left|\tilde{g}(t'-t_0-\beta_1 z_0)\right|^2 .} \tag{2.26}$$

On a posé ici une constante $\eta = 2\pi |E_0(\omega_0)|^2 \sigma$ que l'on appelle rendement quantique du détecteur. La probabilité d'absorber le photon entre deux instants est le produit de ce rendement quantique par l'intégrale de la fonction de corrélation du champ entre ces deux instants. Si on étend les bornes d'intégration à l'infini alors la probabilité totale de mesurer le photon $p(-\infty,\infty) = \eta$ est naturellement uniquement limitée par le rendement quantique du détecteur.

Toutefois, le détecteur ne nous donne pas directement accès à cette probabilité et à la mesure très précise qu'elle fournit. Dans la pratique, l'absorption d'un photon s'accompagne de l'éjection d'un électron qui, après amplification, crée le courant mesurable signalant la détection d'un photon. Ce processus d'amplification n'est pas instantané et possède une réponse impulsionnelle qu'on appelle $\mathfrak{r}$. Son écart-type vaut Δt_d et l'intégrale temporelle $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\mathfrak{r}(t)$ équivaut au nombre total de charges délivrées lors de l'amplification. Le courant mesuré provient du produit de convolution de la réponse impulsionnelle du détecteur avec la densité de probabilité d'absorption d'un photon $\mathrm{d}p(t_0,t)/\mathrm{d}t$:

$$\boxed{j(t) = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\mathfrak{r}(t-t') \left|g(t'-t_0-\beta_1 z_0)\right|^2 .} \tag{2.27}$$

Cette dernière équation nous indique que le temps auquel le détecteur fournit une impulsion électrique correspond, en moyenne, au centre de la probabilité de présence du photon en entrée de détecteur t_0 (nous négligeons $\beta_1 z_0$, comme supposé au départ [7]). Elle montre également que l'incertitude sur ce temps provient à la fois du photon et de l'amplification électrique. La résolution de cette mesure est celle du processus d'amplification Δt_d.

En général la résolution des détecteurs due au processus d'amplification revient à Δt_d =50-100 ps [AureaTechnology, 2015, IDQuantique, 2015], ce qui correspond à la cohérence temporelle d'une impulsion optique d'une largeur spectrale de 10 GHz. Notre source possède un temps de cohérence bien plus court, quelques 100 fs (7 THz), l'impulsion électrique de détection est donc approximativement de même largeur que la limite de résolution Δt_d.

7. L'avantage d'avoir gardé la dépendance en z, alors que la propagation dans le détecteur est négligeable, est que l'on a décrit la propagation dans le détecteur de la même manière que celle dans une fibre mono-mode. Si le détecteur est précédé d'une fibre de longueur L et que l'état en entrée de cette fibre à $t = 0$ est centré sur $t = 0$, tous les résultats précédents restent valables en remplaçant z_0 par L. La fonction de corrélation apparaissant dans le courant moyen mesuré $G^{(1)}(z_0,t',z_0,t') = 2\pi |E_0(\omega_0)|^2 |g(t'-t_0-\beta_1 L)|^2$ correspond à l'impulsion temporelle optique en entrée de fibre s'étant propagée.

Comme supposé au début du paragraphe, le courant fournit par le détecteur (2.27) ne nous donne aucune information sur la fréquence du photon détecté.

Une solution très simple pour la déterminer consiste à placer un filtre spectral avec un fort taux de réjection devant le détecteur. Ce filtre transmet le photon au détecteur seulement si la fréquence du photon est incluse dans sa bande-passante. L'ensemble permet donc de réaliser une détection du photon dans le domaine fréquentiel.

Nous allons maintenant voir comment décrire la filtration optique dans un formalisme quantique.

Description d'un filtre : Le filtre doit nous permettre de connaître de manière plus précise la fréquence des photons détectés. Nous supposons que nous disposons d'un filtre sans perte dont les propriétés de transmission et de réjection sont données par les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, notés respectivement $R(\omega)$ et $T(\omega)$. Ces coefficients vérifient la relation $|T(\omega)|^2 + |R(\omega)|^2 = 1$, $\forall\omega$, de manière à respecter la conservation de l'énergie. D'un point de vue quantique, le filtre, figure Fig.2.8, peut-être vu comme une transformation qui induit des relations entre les opérateurs de création et d'annihilation de ses deux entrées et sorties.

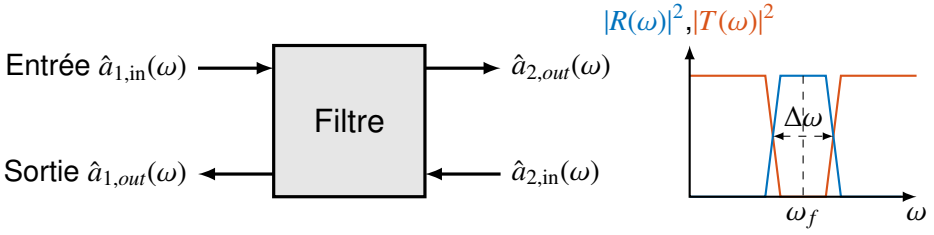


FIGURE 2.8 – Opérateur de filtration.

Le filtre que nous utilisons est un filtre de Bragg inscrit dans une fibre mono-mode, donc nous pouvons utiliser les mêmes opérateurs champs que ceux donnés par l'équation (2.20). Nous donnons aussi une description plus détaillée des filtres en Annexe A.3.1. Si on suppose que la transformation faite par le filtre est localisée en z, les opérateurs d'annihilations et de créations peuvent s'écrire respectivement

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega,z) &= R(\omega)\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega,z) + T(\omega)\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega,z)\\ \hat{a}_{2,\mathrm{out}}(\omega,z) &= T(\omega)\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega,z) + R(\omega)\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega,z),\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{out}}(\omega,z) &= R(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{in}}(\omega,z) - T(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}(\omega,z)\\ \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{out}}(\omega,z) &= -T(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{in}}(\omega,z) + R(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}(\omega,z).\end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

Par construction, c'est la partie réfléchie qui se comporte comme un filtre passe bande. Comme illustré par la figure Fig.2.8, cette partie est associée à la fonction de transfert $R(\omega)$ que l'on suppose centrée en ω_f et de bande-passante $\Delta\omega$. La voie {1, in} sera utilisée comme entrée et la voie {1, out} sera reliée au détecteur comme le montre la figure Fig.2.8. On en déduit que seule la première équation de (2.28) et la première équation de (2.29) nous seront utiles.

On peut alors écrire l'opérateur champ électrique associé à l'annihilation d'un photon dans le détecteur en tenant compte du filtre et de la propagation dans une fibre monomode de longueur L_{fil} entre le filtre et le détecteur

$$\hat{E}^{+}(\mathbf{r}_0, t) = \mathrm{i}A(x_0, y_0)E_0(\omega_0) \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - \beta(\omega)L_{\text{fil}}]} \left[R(\omega)\hat{a}_{1,\text{in}}(\omega, 0) + T(\omega)\hat{a}_{2,\text{in}}(\omega, 0)\right]. \quad (2.30)$$

On peut aisément vérifier l'action du filtre sur la détection. Supposons pour cela qu'un photon, issu d'une source purement monochromatique $|\psi\rangle = |\omega\rangle$, est présent en voie $\{1, \text{in}\}$ et que l'état vide $|vac\rangle$ est présent en voie $\{2, \text{in}\}$. On s'intéresse à la probabilité de détecter ce photon. En utilisant l'équation (2.22), la fonction de corrélation du champ $G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t, \mathbf{r}_0, t')$ associée devient

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t, \mathbf{r}_0, t') = 2\pi \left|A(x_0, y_0)E_0(\omega_0)R(\omega)\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'-t)}. \quad (2.31)$$

Le temps auquel arrivera ce photon sur le détecteur est totalement indéterminé [8], la probabilité de détecter ce photon s'obtient alors en étendant les bornes d'intégration de l'équation (2.21) à l'infini,

$$p(-\infty, \infty) = \eta \left|R(\omega)\right|^2. \quad (2.32)$$

Comme désiré, on détecte le photon uniquement si sa fréquence ω est dans la bande passante du filtre représentée en bleu sur la figure Fig.2.8

La largeur $\Delta\omega$ du filtre montre bien qu'on ne peut cependant garantir la détection d'un photon à la fréquence ω_f seule. En cas de détection, il reste une incertitude sur la fréquence du photon à l'intérieur de la bande passante du filtre $\omega \in [\omega_f - \Delta\omega/2, \omega_f + \Delta\omega/2]$. Ceci s'illustre par l'équation

$$\boxed{p(\omega|\text{Click}) = \frac{|R(\omega)|^2}{\int \mathrm{d}\omega' \, |R(\omega')|^2}} \quad (2.33)$$

qui donne la probabilité d'avoir détecté un photon à la fréquence ω.

Par la suite, on appellera *frequency bin* l'ensemble des fréquences pour laquelle cette probabilité est non nulle. [9] À l'intérieur d'un *frequency bin*, toutes les fréquences sont indiscernables pour notre système de mesure.

Intéressons nous de nouveau à l'état (2.24), pour lequel le photon est délocalisé sur une impulsion temporelle gaussienne suffisamment courte (inférieure à 10 ps). Ce photon est présent à l'instant $t = 0$ en voie $\{1, \text{in}\}$ du filtre. Nous pouvons alors considérer que la

8. D'après le principe d'incertitude de Heisenberg.

9. On considère la probabilité nulle si l'amplitude de la fonction de transfert est atténuée de 60dB par rapport au maximum.

gaussienne $f(\omega)$ possède des variations faibles sur une plage de fréquences correspondant à la taille du filtre [10]. Une fois filtré, l'état envoyé au détecteur est par conséquent quasi-monochromatique. Si l'état vide $|vac\rangle$ est présent sur l'autre entrée, alors la fonction de corrélation du champ $G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t, \mathbf{r}_0, t')$ peut s'écrire

$$\boxed{G^{(1)}(\mathbf{r}_0, t, \mathbf{r}_0, t') = 2\pi \left|A(x_0, y_0)E_0(\omega_0)f(\omega_f)\right|^2 \tilde{B}(t - \beta_1 L_{\text{fil}})^* \tilde{B}(t' - \beta_1 L_{\text{fil}}).} \tag{2.34}$$

Nous avons posé la fonction $B(\omega)$ de manière analogue à $g(\omega)$ dans l'équation (2.25), afin de tenir compte de la dispersion. Elle s'écrit

$$B(\omega) = R(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k>1}\frac{\beta_k}{k!}(\omega-\omega_0)L_{\text{fil}}}. \tag{2.35}$$

Sa transformée de Fourier apparaît dans l'équation (2.34), elle est décalée temporellement du temps $\beta_1 L_{\text{fil}}$ qui correspond à la propagation entre le filtre et le détecteur. À partir de (2.26), on obtient la probabilité totale de mesurer le photon lorsqu'on étend les bornes d'intégration à l'infini. Elle s'écrit

$$p(-\infty, \infty) = \eta \left|f(\omega_f)\right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \left|\tilde{B}(t)\right|^2. \tag{2.36}$$

Ce dernier résultat est à comparer à celui obtenu sans filtre, $p(-\infty, \infty) = \eta$. Le terme supplémentaire apparaissant dans (2.36) est proportionnel à $\Delta\omega/\Delta\omega_s \approx 10^{-3}$. On comprend donc que le taux de comptage va être réduit proportionnellement à la bande passante.

Nous retiendrons une forme de (2.36) plus adaptée à notre description en fréquence en utilisant le théorème de Plancherel [11]

$$\boxed{p(-\infty, \infty) = \eta \left|f(\omega_f)\right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \left|B(\omega)\right|^2.} \tag{2.37}$$

En résumé le filtre permet la détection de photons dans une plage de fréquences qu'on appellera *frequency bin*. Cette plage de fréquences correspond à la fonction de transfert du filtre. La notion de *frequency bin* est en tout point similaire à celle de *time bin* pour laquelle le photon se trouve dans une plage temporel ou "impulsion". A l'instar des expériences temporelles, la détection n'a pas vocation à discriminer les photons à l'intérieur d'un *frequency bin*. De plus, la création de chemins suppose la séparation des *bins* et la possibilité de détecter cette séparation.

Deux *bins* sont dits "distincts" à partir du moment où la mesure permet de les discriminer avec une incertitude très faible.

La figure Fig.2.9 représente le parallèle entre la détection dans un *bin* temporel et un *bin* fréquentiel. On a représenté deux *bins* en rouge et en bleu. Si, comme dans le cas

10. Cette approximation est justifiée lorsqu'on compare la bande passante du filtre à l'écart-type de l'amplitude spectrale de probabilité de l'état d'entrée. Typiquement on a $\Delta\omega_s/\Delta\omega \approx 1000$.

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \left|R(\omega)\right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \left|\tilde{B}(t)\right|^2$ [Weisstein, 2015].

a), la largeur des impulsions temporelles est inférieure à la longueur des chemins ΔT, il n'y a qu'un chemin possible conduisant à une mesure. Si, comme dans le cas b), cette largeur est plus grande, il y a une probabilité égale au recouvrement entre les *bins*, qu'on ne puisse pas déterminer le chemin emprunté. L'équivalent en fréquence est représenté en c) et d) et induit que le discernement des chemins spectraux nécessite une filtration spectrale résolue.

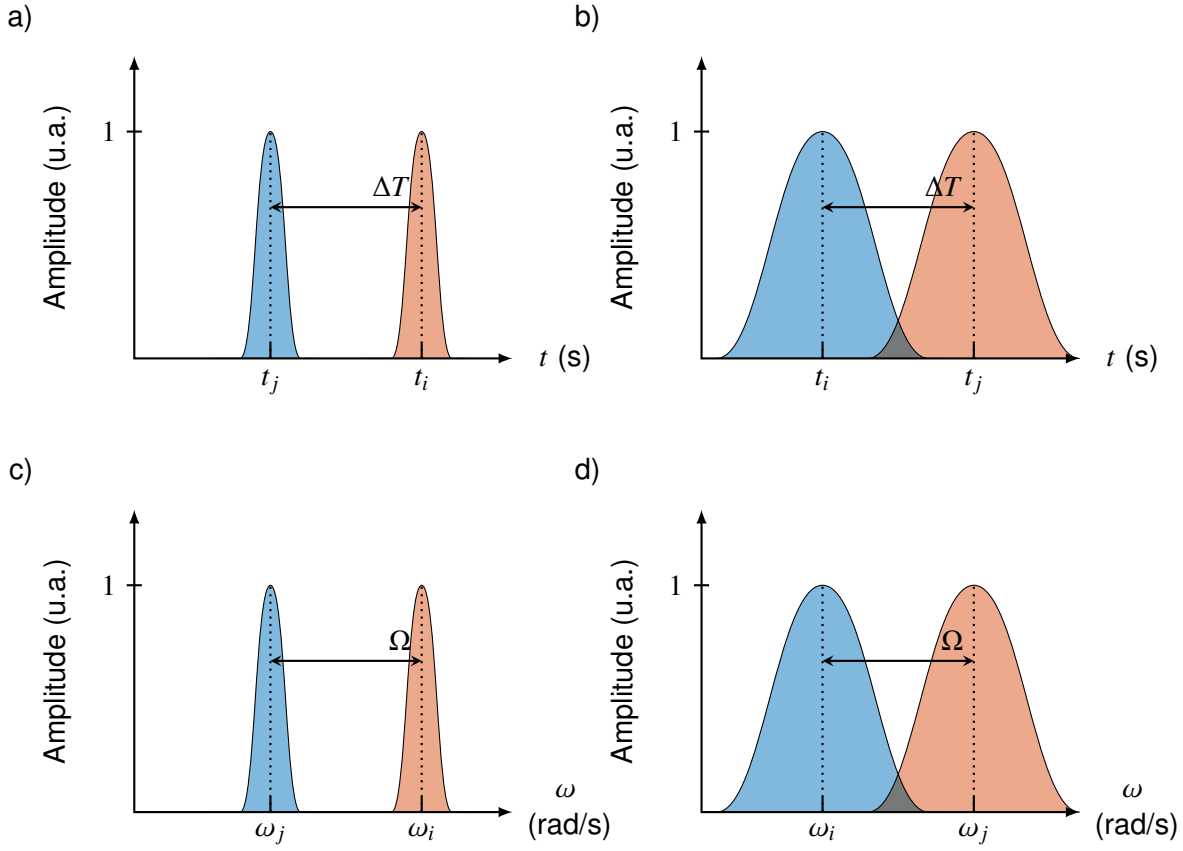


FIGURE 2.9 – Association de la mesure à un *bin*. On compare la mesure d'un *bin* temporel à celle d'un *bin* fréquentiel. Les figures a) et b) représentent des mesures temporelles respectivement résolue et non résolue et c) et d) des mesures fréquentielles résolue et non résolue.

Dans le cas des fréquences, un *bin* i centré en ω_i est décrit par $\mathfrak{C}(\omega - \omega_i) = R(\omega_f + \omega)$, deux *bins* i et j sont "distincts" si

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \mathfrak{C}(\omega - \omega_i)\mathfrak{C}(\omega - \omega_j) = 0.} \tag{2.38}$$

Dans le domaine temporel, la présence de "chemins" se traduit par des délais suffisamment longs pour distinguer les *bins*. De manière analogue, la création de "chemins fréquentiels" nécessite de pouvoir décaler les *bins* en fréquence de manière distincte.

Dans cette partie nous avons défini la mesure de nos états quantiques en fréquence, nous avons alors introduit la notion de *bin* de fréquence, qui correspond à la résolution de notre mesure. Il advient alors que les chemins de fréquence ont une taille minimale

correspondant à ce *bin*. Enfin, de manière a bien séparer nos états de mesure, nous devons nous assurer que les différents chemins ne se recouvrent pas, ceci induit que la fréquence de modulation soit suffisamment supérieure à la bande passante des filtres de fréquence.

Nous avons décrit, dans la section précédente, un moyen de superposer des chemins en fréquence. Maintenant que nous avons défini la mesure réalisée par les systèmes de détection, nous pouvons décrire le système d'interférence complet.

2.1.1.3/ RELATION DE CHEMINS ET FIGURE D'INTERFÉRENCE

Dans cette partie nous allons décrire de façon plus formelle la détection des photons uniques associée au schéma d'interférence un photon présenté en début de chapitre, figure Fig.2.1. Au cours de cette description nous pourrons mettre en évidence la nécessité des différents filtrations spectrales. Nous avons décrit la probabilité de détecter un photon par le biais de la fonction auto-corrélation du champ électrique. Afin de décrire le système global, nous allons répercuter l'action des différents composants sur les opérateurs champ intervenant dans cette d'auto corrélation. En effet, il est équivalent de faire agir l'opérateur, correspondant à la détection, sur une fonction d'onde qui a parcouru un système, que de décrire l'action de l'opérateur "système+détection" sur la fonction d'onde en entrée du système. Le premier cas correspond à la représentation de Schrödinger et le second cas à celle de Heisenberg. Ainsi, si nous examinons le schéma Fig.2.10 considéré en début de chapitre, pour lequel nous avons explicitement rajouté les longueurs de propagation, il est également équivalent de considérer la fonction d'onde au point B et de faire agir dessus un opérateur comprenant la seconde modulation (MP2), la propagation L_1 et la détection.

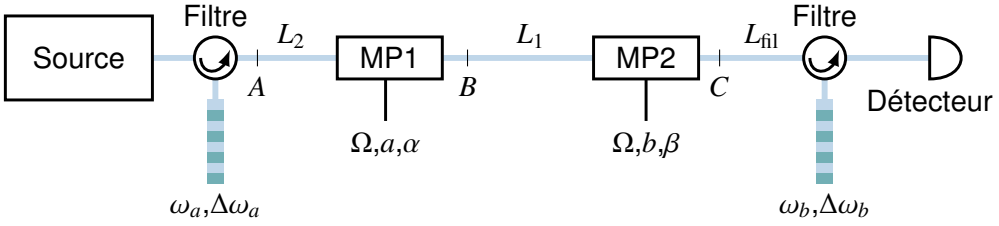


FIGURE 2.10 – Schéma de l'interférence à un photon en fréquence.

En utilisant les équations (2.13) et (2.30), on obtient l'opérateur champ

$$\begin{aligned}
\hat{E}^+(\mathbf{r}_0,t) =& \mathrm{i}A(x_0,y_0)E_0(\omega_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big[R(\omega)U_k(b,-\beta)\hat{a}_{1,\text{in}}(\omega+k\Omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)L_{\text{fil}}+\beta(\omega+k\Omega)L_1]}\\
&+T(\omega)\hat{a}_{2,\text{in}}(\omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)}\Big]\\
=&\mathrm{i}A(x_0,y_0)E_0(\omega_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t-\beta_1(L_{\text{fil}}+L_1)]}\\
&\times\Big[R(\omega)U_{-k}(b,\beta)D_k(\omega)\hat{a}_{1,\text{in}}(\omega+k\Omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_{\text{fil}}+L_1)+\beta_1 k\Omega L_1]}\\
&+T(\omega)\hat{a}_{2,\text{in}}(\omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi(\omega)-\beta_1(L_{\text{fil}}+L_1)]}\Big],
\end{aligned}\tag{2.39}$$

où D_k est la fonction qui tient compte des différents termes de dispersion [12].

On l'écrit

$$D_k(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\{\sum_{l\geq 2}\frac{\beta_l}{l!}\left[(\omega-\omega_0)^l L_{\mathrm{fil}}+(\omega+k\Omega-\omega_0)^l L_1\right]\right\}}. \tag{2.40}$$

Comme nous n'utiliserons qu'une entrée du filtre, il faut considérer l'état vide présent sur l'autre entrée $\{2,\mathrm{in}\}$. On note qu'il n'y a cependant aucune contribution de la partie transmise par le filtre, lors de la mesure. L'opérateur champ (2.39) peut ainsi se réduire à

$$\begin{aligned}\hat{E}^+(\mathbf{r}_0,t) =& \mathrm{i}A(x_0,y_0)E_0(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_{\mathrm{fil}}+L_1)}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega R(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t-\beta_1(L_{\mathrm{fil}}+L_1)]}\\ &\times\sum_{k\in\mathbb{Z}}U_{-k}(b,\beta)D_k(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_{\mathrm{fil}}+L_1)+\beta_1 k\Omega L_1\right]}\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega+k\Omega,0).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Considérons que la fonction d'onde en B s'écrit

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega h(\omega)|\omega;t\rangle, \tag{2.42}$$

où h est supposée continue et de moyenne ω_0. De manière à simplifier les expressions, on néglige pour le moment la dispersion, $D_k(\omega)=1$, et on pose une fonction $\mathcal{M}$ qui contient tous les termes qui dépendent de ω ou de k. Elle s'écrit

$$\mathcal{M}(\omega) = R(\omega)\sum_{k\in\mathbb{Z}}U_{-k}(b,\beta-\beta_1\Omega L_1)h(\omega+k\Omega). \tag{2.43}$$

La fonction de corrélation du champ $G^{(1)}(\mathbf{r}_0,t',\mathbf{r}_0,t'')$ (2.22) s'obtient alors en appliquant (2.41) sur (2.42) et se réduit à

$$\boxed{G^{(1)}(\mathbf{r}_0,t',\mathbf{r}_0,t'') = 2\pi\,|A(x_0,y_0)E_0(\omega_0)|^2\,\tilde{\mathcal{M}}(t'-\beta_1 L_T)^*\tilde{\mathcal{M}}(t''-\beta_1 L_T),} \tag{2.44}$$

où $\tilde{\mathcal{M}}(t)$ désigne la transformée de Fourier de $\mathcal{M}(\omega)$ [13] et $L_T = L_1 + L_{\mathrm{fil}}$ est la longueur totale de fibre du point B au détecteur.

Nous pouvons maintenant écrire la probabilité totale de détection. En utilisant l'équation (2.23) et le théorème de Plancherel, on obtient directement

$$\boxed{p(-\infty,\infty) = \eta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,|\mathcal{M}(\omega)|^2\,.} \tag{2.45}$$

12. Dans l'équation (2.39) on a noté $\varphi(\omega)$ la phase accumulée par un photon que le filtre aiguille vers la voie non détectée et $\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega,t)$ l'opérateur correspondant à l'entrée 1 du filtre, qu'il ne faut pas confondre avec la notation $\hat{a}_{p,\mathrm{in}}(t)$ utilisée précédemment pour désigner l'opérateur champ associé à la fréquence $\omega+p\Omega$.

13. Nous avons pu de nouveau étendre la borne inférieur d'intégration à $\omega=-\infty$, ceci est justifié par le fait que $R(\omega)$ n'est différent de zéro que pour des ω strictement positifs.

Nous pouvons comparer cette expression à celle obtenue sans modulateur, (2.37). Cette dernière est constante à ω donné. La probabilité de détection dépend cette fois de l'expression (2.43), qui contient une somme d'amplitudes de probabilité correspondant au couplage des états réalisé par le modulateur.

Afin que cette somme ne soit pas constante, pour une fréquence donnée, il faut qu'il existe au moins deux valeurs de k pour lesquelles $h(\omega + k\Omega)$ et $U_{-k}(a, \alpha)$ soient conjointement non nulles. Ceci se traduit par les mêmes conditions que celle pour obtenir la superposition de chemins via le modulateur :

— il doit exister une superposition de fréquences en entrée de modulateur.
— Ces fréquences doivent être suffisamment proches pour être couplées de manière non négligeable par le modulateur.

Enfin nous pouvons nous intéresser à la fonction de transfert du filtre. Ce dernier possède un rôle essentiel dans l'observation de la figure d'interférence, il doit assurer l'orthogonalité de notre base de mesure. En effet, comme le représente les figures Fig.2.9 c) et d), les *bins* centrés sur ω_i et ω_j représentent deux états de mesure. Si les *bins* se recouvrent comme dans le cas d), les deux états ne sont pas orthogonaux. Le filtre doit donc posséder une bande passante suffisamment inférieure à la fréquence de modulation pour assurer cette condition. En effet, l'isolation des *bins* assure l'orthogonalité de notre base de mesure dont chaque état est espacé de la fréquence de modulation. Nous pourrions toutefois utiliser d'autres bases de mesure orthogonales, comme dans [Olislager et al., 2014]. Dans le cadre de notre étude nous voulons obtenir une interférence bien spécifique et il est nécessaire que les *bins* soient correctement isolés.

Nous avons considéré que la fonction d'onde en B, donnée par l'expression (2.42), était quelconque. Nous pouvons alors supposer qu'elle représente l'état émis par la source et ayant rencontré un filtre et un modulateur pour se retrouver en B.

Nous considérons que ce premier filtre est quasi-monochromatique, de telle sorte que la propagation le long de la fibre de longueur L_2 n'induit pas de dispersion chromatique et qu'en sortie de (MP1), il n'existe qu'un seul chemin de fréquence associé à un état de fréquence. Ces conditions sont raisonnablement assurées en posant $\omega_a < \Omega/2$, où ω_a est la bande passante du filtre. Ainsi la fonction d'onde en B s'écrit

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_B &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega R_A(\omega) \sum_{l\in\mathbb{Z}} U_l(a,\alpha)|\omega + l\Omega; t\rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' \sum_{l\in\mathbb{Z}} U_l(a,\alpha) R_A(\omega' - l\Omega)|\omega'; t\rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega h(\omega)|\omega; t\rangle, \end{aligned} \tag{2.46}$$

ce qui donne pour la fonction $\mathcal{M}$ ((2.43))

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\omega) =& R(\omega) \sum_{\{k,l\}\in\mathbb{Z}^2} U_k(b, \beta - \beta_1\Omega L_1) U_{l-k}(a,\alpha) R_A(\omega - l\Omega) \\ =& R(\omega) \sum_{l\in\mathbb{Z}} R_A(\omega - l\Omega) U_l(c,\gamma), \end{aligned} \tag{2.47}$$

avec $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\Delta\phi)}$, $\Delta\phi = \beta - \alpha - \beta_1 \Omega L_1$ et où γ est une phase qui satisfait à (B.6) mais qui n'intervient pas dans (2.45). Comme la largeur spectrale du filtre A est petite devant la fréquence de modulation Ω, il n'y a qu'une valeur de l pour laquelle $R_A(\omega - l\Omega)$ est différente de 0. Cette valeur dépend de la position spectrale du filtre B, ω_b. On centre, sur le filtre B, l'intégrale par rapport à la fréquence à l'aide d'un changement de variable $\omega \to \omega' + \omega_b$, de telle sorte que cette intégrale soit nulle hors du domaine $\omega' =]-\Omega/2, \Omega/2[$. On obtient que l vérifie

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\Omega} - \frac{1}{2} < l < \frac{\omega_a - \omega_b}{\Omega} + \frac{1}{2}. \tag{2.48}$$

La probabilité de mesurer un photon émis par la source s'écrit alors

$$\boxed{p(-\infty, \infty) = \eta \, |J_d(c)|^2 \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \mathrm{d}\omega \, |R(\omega + \omega_b) R_A(\omega + \omega_b - d\Omega)|^2 \, .} \tag{2.49}$$

On peut remarquer que la probabilité de mesurer le photon fait maintenant intervenir un terme d'interférence, $|J_d(c)|^2$, dû à la superposition de chemins en fréquence sur le détecteur. On obtient une interférence périodique, décrivant une fonction de Bessel, en faisant varier le déphasage entre les ondes RF $\Delta\phi$, de 0 à 2π. L'ordre d, de la fonction de Bessel, varie avec l'écart de fréquence entre les filtres. Cet ordre correspond à l'entier de la fréquence de modulation le plus proche de l'écart entre les filtres. On a représenté cet écart de fréquence sur la figure Fig.2.11, on écrit $\omega_b - \omega_a = d\Omega + \delta$, avec $|\delta| < \Omega/2$.

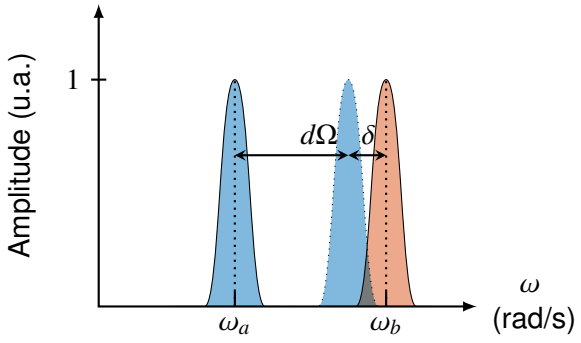


FIGURE 2.11 – Représentation de l'écart de fréquence entre les filtres. Le nombre d'entiers de fréquence de modulation, d, détermine l'ordre de l'interférence. Le reste, δ, définit le taux de recouvrement des filtres contribuant à l'interférence.

L'ordre de l'interférence dépend de l'entier d et l'écart résiduel δ correspond au taux de recouvrement des filtres, visible figure Fig.2.11. Sur le schéma Fig.2.12, nous avons représenté la figure d'interférence obtenue pour différentes valeurs de d, lorsque $a = b = 2$ et $\delta = 0$ rad/s. Nous pouvons remarquer que, contrairement à une interférence faisant intervenir deux chemins, la visibilité de la figure d'interférence est maximale uniquement pour l'ordre 0. Le choix de notre base de mesure demande aussi de mesurer plus d'états que pour une interférence à deux chemins. Le nombre d'états à mesurer est en théorie infini mais, comme nous l'avons vu lors de la description du modulateur de phase, la probabilité de transition d'une fréquence d'entrée ω_0 à une fréquence $\omega_0 + n\Omega$ est négligeable

pour $n > a+1$, où a est le taux de modulation. Le nombre d'ordres à mesurer pour obtenir une probabilité de détection du photon proche de 1 est donc assez faible. Nous pouvons aussi remarquer, sur la figure Fig.2.12, que les ordres élevés ont une contribution plus importante au fur et à mesure que le déphasage entre les modulateurs s'éloigne de π. Ceci est dû au fait que le facteur c, qui représente le taux de modulation équivalent au passage dans les deux modulateurs, est minimum lorsque $\Delta\phi = \pi$.

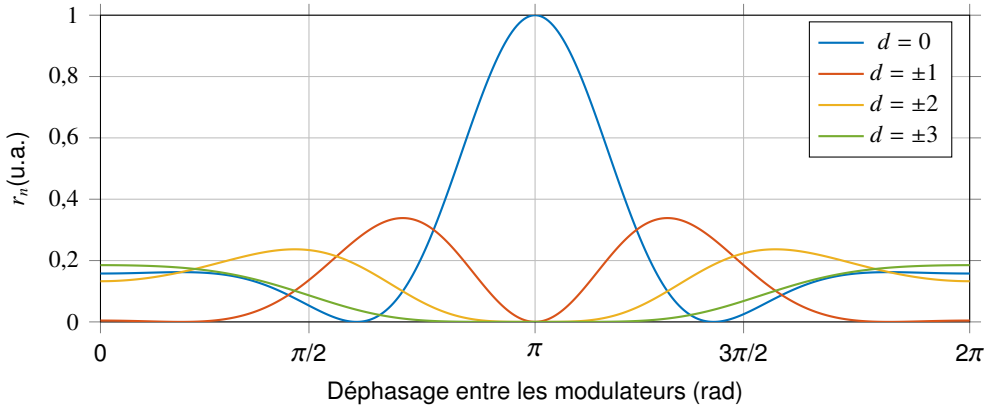


FIGURE 2.12 – Représentation des premiers ordres d'interférence à un photon, avec $a = b = 2$.

Dans cette partie, nous avons décrit le principe d'interférence à un photon en fréquence. Nous avons tout d'abord montré de quelle manière une superposition de chemins en fréquence peut être obtenue à l'aide de modulateurs de phase. Ensuite, nous avons décrit un système de mesure et choisi une base de mesure correspondant à des *bins* de fréquence centrés sur des harmoniques de la modulation RF. Enfin, nous avons montré, à l'aide d'un cas simple, qu'une figure d'interférence pouvait être obtenue dans cette base de mesure.

Nous allons pouvoir nous appuyer sur ce cas pour décrire un phénomène d'interférence à deux photons.

2.1.2/ INTERFÉRENCE À DEUX PHOTONS

Comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent, les interférences quantiques entre des états intriqués sont un des phénomènes les plus curieux prédits par la mécanique quantique. Les photons intriqués partagent des propriétés très fortes et ce même s'ils sont spatialement séparés. Par conséquent, on ne peut pas décrire l'état global des deux photons en les considérant comme des objets indépendants. L'enjeu d'une interférence à deux photons est de tirer parti de cette superposition d'états de manière à observer des corrélations entre les photons intriqués lorsqu'ils sont séparés.

Comme dans le cas temporel, nous voulons montrer qu'il existe un équivalent simple du schéma d'interférence à un photon, conduisant à la construction d'une interférence à deux photons entre des photons intriqués. Nous en déduirons des conditions que doit remplir la source de photons intriqués dans le cas fréquentiel. Nous présenterons alors la source de photons intriquées permettant d'obtenir l'état nécessaire, et décrirons l'interférence. Ce dernier point contribuera, avec les remarques soulevées dans le paragraphe précédent, à évaluer le degré de précision nécessaire sur chacun des paramètres.

2.1.2.1/ ÉQUIVALENCE AVEC L'INTERFÉRENCE À UN PHOTON

Dans la section 1.2.2.1, nous avons présenté le passage d'une interférence à deux photons à une interférence à un photon dans le domaine temporel. Sur la figure Fig.2.13, les schémas a), b) et c) représentent le procédé inverse.

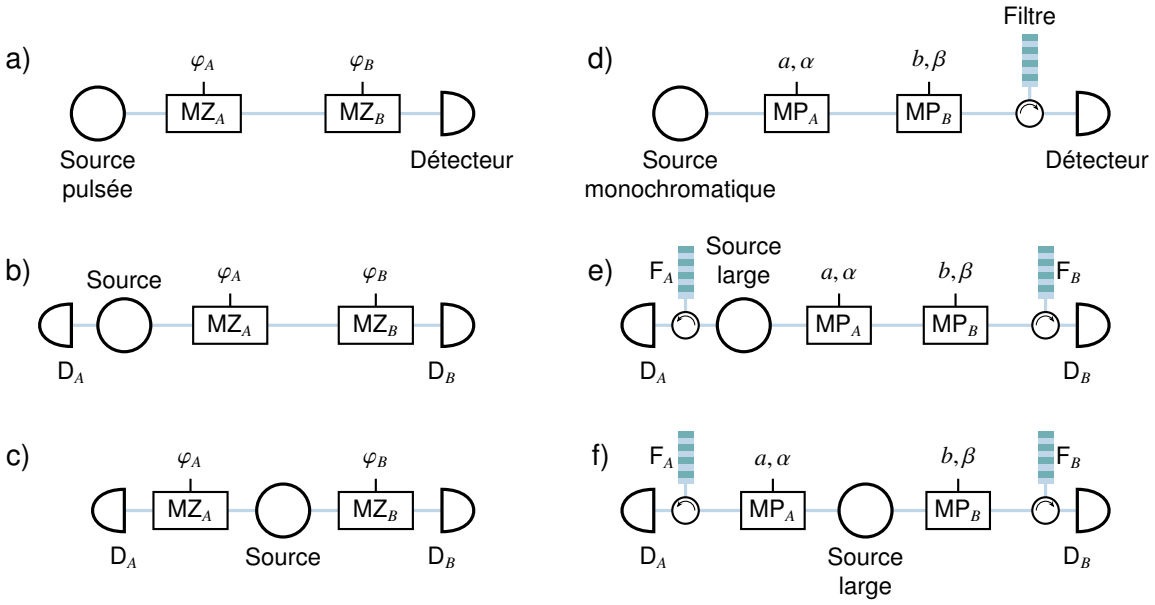


FIGURE 2.13 – Équivalence entre un schéma à deux photons mesurés en coïncidence et un schéma à un photon. Les schémas a), b) et c) représentent le passage d'une interférence à un photon à une interférence à deux photons présentées par la figure Fig.1.5 dans la section 1.2.2.1. En temporel, il est possible de passer d'une interférence à un photon à une interférence à deux photons en choisissant la source adéquate. Les schémas d), e) et f) représentent ce même passage transposé au domaine des fréquences. Le schéma d) représente l'interférence à un photon dans le domaine des fréquences, présentée dans la section précédente. Comme, pour le figure b) dans le cas temporel, le schéma e) utilise une source de photons intriqués et constitue une interférence à deux photons, mais un des photons sert uniquement de détection conditionnelle. Le schéma f) s'obtient simplement en déportant le modulateur de phase PM$_A$ sur le bras A.

On rappelle que le schéma a) permet d'obtenir une interférence à un photon à condition que le temps d'émission du photon soit connu afin de discriminer les deux chemins interférant ("long-court" et "court-long") des autres chemins possibles ("long-long" et "court-court"). Cette condition peut s'obtenir à l'aide :

— d'une source impulsionnelle et d'une détection synchronisée comme représenté sur le schéma a),
— ou, comme représenté sur le schéma b), à l'aide d'une source de photons intriqués, dont les photons jumeaux sont émis dans un intervalle de temps très court et dont l'un ne sert que de détection conditionnelle.

Le schéma c) d'interférence à deux photons, s'obtient à partir du schéma b), simplement en déportant un des interféromètres de MZ sur le bras de détection conditionnelle. Par cette opération, les chemins qui interfèrent changent et sont ceux qui permettent au deux photons d'arriver au même instant sur le détecteur, soit : "court-court" et "long-long".

Nous pouvons transposer cette démarche au domaine des fréquences. Nous avons reporté sur la figure Fig.2.13 d), le schéma d'interférence à un photon en fréquence pré-

senté dans la section précédente, figure Fig.2.10. En comparaison à la figure a), les deux MP jouent le même rôle que les MZ et servent à créer les chemins interférents sur le détecteur. Dans le cas temporel, la sélection des chemins est assurée par la synchronisation de la détection avec des impulsions émises par la source. Dans le cas des fréquences, c'est la source quasi-monochromatique et la filtration spectrale avant la mesure qui permettent d'effectuer ce tri.

Comme dans le cas des temporel, nous pouvons remplacer la source par une seconde générant des photons intriqués, ce qui est réalisé sur le schéma e). Un photon de chaque paire est ainsi mesuré par le détecteur D_A, alors que l'autre est envoyé dans un bras identique au schéma d). Chaque photon mesuré par D_A sert de déclenchement conditionnel au détecteur D_B. Dans le cas temporel, les photons intriqués doivent être créés dans un intervalle de temps très court pour discriminer les chemins temporels "long-court" et "court-long" qui interfèrent des chemins "court-court" et "long-long". Dans le cas des fréquences la condition est que les deux photons doivent avoir une relation de fréquence bien précise. Cette condition peut être remplie si les photons intriqués sont émis par la scission d'un photon pompe de fréquence bien déterminée. Ce procédé, appelé "fluorescence paramétrique", est détaillé dans le section suivante. Pour le moment nous nous contentons d'admettre que les photons intriqués peuvent être émis sur un large spectre, mais que la somme des fréquences des photons est connue de manière précise. Il suffit donc d'utiliser un filtre fin sur le bras servant de détection conditionnelle pour connaitre précisément la fréquence de l'autre photon avant qu'il rentre dans le système interférométrique.

Pour cette seconde étape il n'est pas nécéssaire que le spectre d'émission des photons intriqués soit large, c'est uniquement avec le schéma f), d'interférence à deux photons, que cette condition prend son sens. En effet, dans le cas temporel équivalent, représenté par la figure c), chacun des MZ fournit deux chemins temporels possibles. L'interférence a lieu entre les chemins temporels "court-court" et "long-long" qui sont indiscernable pour des paires de photons émis dans un intervalle de temps très court et mesurés en coïncidence. Les chemins "long-court" et "court-long" peuvent être exclus de la mesure si la résolution temporelle de la mesure est meilleure que le déséquilibre entre les bras de l'interféromètre. On peut transposer cette situation au cas des fréquences, comme l'illustre le schéma f). Deux conditions sont donc nécéssaire :

- il faut que chaque modulateur fournisse un ensemble de chemin indiscernables pour la mesure. Nous avons vu dans la section 2.1.1.3, qu'il faut que l'état d'entrée du modulateur de phase soit un état de superposition de plusieurs *bins* de fréquence pour obtenir cette multiplicité de chemins.
- Il faut pouvoir isoler un ensemble de chemins équivalent pour obtenir une interférence avec une visibilité maximale.

Ces conditions sont remplies par des photons intriqués, émis par fluorescence paramétrique et par une mesure spectralement résolue. Par ce processus d'émission, les photons intriqués sont dans un état de superposition sur un large spectre, mais la connaissance de la fréquence d'un photon détermine celle de l'autre de manière précise. Autrement dit, avant d'entrer dans leur modulateur, les photons peuvent être dans un grand nombre de *bins* de fréquence, cependant si on connait la fréquence d'un des photons, on connait celle de l'autre. Ainsi, une mesure spectralement définie, à l'aide des filtres F_A et F_B, n'autorise qu'un ensemble restreint de chemins qui sont susceptibles d'interférer.

Nous avons donné l'idée générale de l'interférence à deux photons en fréquence, nous allons maintenant décrire plus précisément ce phénomène. Pour cela, nous allons tout

d'abord décrire le processus d'émission par fluorescence paramétrique, puis nous verrons comment l'état généré par cette source se comporte dans notre système interférométrique.

2.1.2.2/ SOURCE DE PHOTONS INTRIQUÉS EN FRÉQUENCE

Les photons intriqués sur un très large spectre peuvent être générés dans le cristal non-linéaire par un processus de fluorescence paramétrique. Lors de ce processus, un photon pompe oscillant à la pulsation ω_p, qui se propage dans le cristal non linéaire, peut se scinder en deux photons de plus faible énergie que l'on appelle signal et *idler*, et oscillant respectivement à la pulsation ω_s et ω_i. La relation de conservation de l'énergie lors de ce processus impose que $\omega_p = \omega_s + \omega_i$. Cette scission spontanée est interprétée comme une interaction du photon pompe avec une fluctuation du vide quantique à la fréquence du photon signal. L'interaction peut être vu comme une oscillation de l'énergie entre le photon pompe et les photons signal et *idler* tout au long de la propagation dans le cristal. On ne peut générer efficacement des photons signal et *idler* en sortie de cristal que si la période d'oscillation est très supérieure à la longueur du cristal. Cette condition s'obtient par un accord de phase entre le photon pompe et les photons signal et idler, dont il résulte une relation de conservation du vecteur d'onde que l'on écrit $\beta(\omega_p) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i) = \Delta\beta = 0$. On utilise couramment deux moyens pour réaliser l'accord de phase, le premier est d'utiliser la biréfringence du matériau et de choisir le bon angle entre la polarisation des photons pompes et les axes cristallins. Cette solution rend l'accord de phase très restrictif en fréquence et ne permet pas de générer des photons de manière très efficace. En effet, un bon moyen pour augmenter la génération de photons est d'allonger la longueur d'interaction. Cependant plus cette longueur sera grande plus la bande de fréquence où l'accord de phase sera réalisé sera restreinte. Un autre moyen consiste à identifier le coefficient de couplage non-linéaire le plus fort du matériau et de l'inverser périodiquement suivant la direction de propagation. C'est vers cette dernière solution que nous allons nous tourner et nous allons voir comment cette condition apparaît lorsqu'on examine la propagation de photons pompes dans un milieu non-linéaire.

Pour modéliser cette interaction, nous considérons que la propagation a lieu dans un guide d'onde mono-mode pour toutes les fréquences mises en jeu. On considère alors un unique vecteur d'onde par fréquence, pour chacun des photons pompes signal et *idler*, obtenu grâce à la relation de dispersion du guide d'onde. La direction de propagation est définie suivant l'axe z. Ce guide d'onde est inscrit dans un cristal de Niobate de Lithium dont on veut exploiter le coefficient linéaire le plus fort. Cette dernière condition fixe la polarisation et la direction de propagation des photons pompes que l'on doit injecter dans le cristal. La condition de quasi-accord de phase nous permet de considérer que les photons signal et *idler* sont générés suivant une unique polarisation qui est identique à celle de la pompe et on note le coefficient non-linéaire associé d_{33}. Ces hypothèses nous permettent d'écrire l'évolution spatiale des opérateurs de création et d'annihilation pour une pulsation donnée. En effet, toute l'énergie se propage suivant une unique direction, on peut alors utiliser une équation du mouvement associée aux variations spatiales des champs que l'on décompose en pulsation . En posant l'opérateur affranchi des oscillations rapides du champ $\hat{\mathcal{A}}(\omega, z) = \hat{a}(\omega, z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(\omega)z}$, l'équation d'évolution associée ne dépend que de l'interaction non-linéaire et s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}(\omega,z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{\mathcal{A}}(\omega,z),\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z)\right], \tag{2.50}$$

où

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) = 4\epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t d_{33}(x,y,z)\left[\hat{E}_s^-(\mathbf{r},t)\hat{E}_i^-(\mathbf{r},t)\hat{E}_p^+(\mathbf{r},t) + h.c.\right]. \tag{2.51}$$

Les opérateurs champs $\hat{E}_s^+(\mathbf{r},t)$ et $\hat{E}_i^+(\mathbf{r},t)$ peuvent être décomposés en pulsation de la même manière que dans une fibre optique mono-mode (A.45) et on les écrit

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}_s^+(r,t) &= \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_s E_0(\omega_s)A_s(x,y)\hat{a}(\omega_s,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_s t},\\ \hat{E}_i^+(r,t) &= \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_i E_0(\omega_i)A_i(x,y)\hat{a}^\dagger(\omega_i,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t}.\end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

De plus, la considération d'une pompe monochromatique donne

$$\hat{E}_p^+(\mathbf{r},t) = E_0(\omega_p)A_p(x,y)\hat{a}(\omega_p,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}. \tag{2.53}$$

On considère que le coefficient non linéaire est modulé suivant z et que le milieu est homogène suivant les autres directions, on peut alors écrire $d_{33}(x,y,z) = d_{33}(z)$. L'intégrale spatiale sur la section transverse dans l'équation (2.51) donne le coefficient de recouvrement des champs $R = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}y A_s(x,y)A_i(x,y)A_p(x,y)$. L'intégrale temporelle donne $2\pi\delta(\omega_p-\omega_s-\omega_i)$. En utilisant la relation de conservation de l'énergie $\omega_p = \omega_s+\omega_i$, on peut écrire $\omega_p = 2\omega_0$, $\omega_s = \omega_0+\omega$ et $\omega_i = \omega_0-\omega$, et exprimer l'opérateur spatial régissant l'interaction non linéaire sous la forme

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) = \mathrm{i}8\pi\epsilon_0 d_{33}(z)E_0(2\omega_0)E_0(\omega_0)^2 R\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\left[\hat{a}^\dagger(\omega_0-\omega,z)\hat{a}^\dagger(\omega_0+\omega,z)\hat{a}(2\omega_0,z) - h.c.\right]. \tag{2.54}$$

On peut alors utiliser les opérateurs affranchis des oscillations rapides $\hat{\mathcal{A}}(\omega,z)$ et considérer que le champ pompe est classique donc

$$\hat{\mathcal{A}}(2\omega_0,z) = \sqrt{\frac{\pi P_p}{\hbar\omega_0}}u^*, \tag{2.55}$$

où P_p est la puissance optique du faisceau pompe. En rappelant que $E_0(\omega) = \sqrt{\hbar\omega/[4\pi\epsilon_0 n(\omega)c_0]}$, on obtient

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) = \mathrm{i}\frac{R\hbar\omega_0}{c_0 n(\omega_0)}\sqrt{\frac{2P_p}{\epsilon_0 c_0 n(2\omega_0)}}d_{33}(z)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\left[\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0-\omega,z)\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0+\omega,z)u^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta(\omega)z} - h.c.\right]. \tag{2.56}$$

Comme nous l'avons signalé au début de ce paragraphe, nous obtiendrons une croissance monotone des photons signal et *idler* uniquement si on s'affranchit de l'oscillation de l'énergie entre un photon pompe et les photons signal et idler. Lorsqu'il n'y a pas conservation du vecteur d'onde, $\Delta\beta(\omega) \neq 0$, l'accord de phase n'est pas réalisé et il existe une période d'oscillation de l'énergie entre les photons signal et *idler* $L(\omega) = 2\pi/\Delta\beta(\omega)$. Tant que le désaccord de phase $\Delta\beta(\omega)z$ est inférieur à π, c'est-à-dire $z < L/2$, l'interaction non linéaire est plus favorable à la création de photons signal et *idler* à partir d'un photon pompe qu'à la recombinaison d'un photon signal et *idler* en un photon pompe. Il est alors possible de ré-accorder périodiquement la phase entre les différents photons, de manière à rester toujours dans un régime où le désaccord de phase est inférieur à π. On peut alors réaliser une condition de quasi-accord de phase à une pulsation ω en inversant le signe du coefficient de couplage non-linéaire d_{33} tous les $L(\omega)/2$, c'est-à-dire lorsque $\Delta\beta(\omega) = \pi$. On appelle cette inversion de domaine, un quasi-accord de phase de type 0. Le quasi-accord de phase permet d'obtenir une certaine plage de fréquences pour laquelle le désaccord de phase maximum restera strictement inférieur à π et pour laquelle l'interaction favorisera la création de photons signaux et idlers plutôt que leur création puis recombinaison. On choisit ici une condition de quasi-accord de phase à la fréquence de dégénérescence de la pompe, ce qui se traduit par la relation $\Delta\beta(\omega_0)L/2 - \pi = 0$. On peut alors utiliser une décomposition en série de Fourier pour exprimer l'évolution de $d_{33}(z)$ selon la direction z, de manière à résoudre l'équation du mouvement :

$$d_{33}(z) = 2d_{33} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi} \cos\left[\Delta\beta(\omega_0)(2k+1)z\right]. \tag{2.57}$$

On peut alors injecter cette expression dans l'équation (2.56) et isoler le terme correspondant à une oscillation lente de la phase. Ce terme correspond à $k = 0$ et on obtient

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) = \mathrm{i}\hbar \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \left[\mathfrak{g}\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0 - \omega, z)\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0 + \omega, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\Delta\beta(\omega_0) - \Delta\beta(\omega)\right]z} - h.c.\right] + o(\omega z), \tag{2.58}$$

où $\mathfrak{g}$ est un gain linéaire qui s'écrit

$$\mathfrak{g} = \frac{d_{33}R\omega_0}{\pi n(\omega_0)c_0}\sqrt{\frac{2P_p}{\epsilon_0 c_0 n(2\omega_0)}}u^* \tag{2.59}$$

et $o(\omega z)$ régit une oscillation rapide dont la moyenne est nulle lors de la propagation suivant z.

On note alors $\Delta K = \Delta\beta(\omega) - \Delta\beta(\omega_0)$ et on résout les équations du mouvement associées aux opérateurs $\hat{\mathcal{A}}(\omega, z)$ et $\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega, z)$ qui oscillent à la pulsation $\omega_0 + \omega$ pour le photon signal et à la pulsation $\omega_0 - \omega$ pour le photon *idler*. On obtient le système d'équation

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}(\omega_0 + \omega, z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0 - \omega, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z}, \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0 - \omega, z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}^*\hat{\mathcal{A}}(\omega_0 + \omega, z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

La résolution de ces équations permet d'exprimer les opérateurs de sortie du cristal, de longueur l, en fonction des opérateurs d'entrée. On obtient

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}(\omega_0+\omega,l) &= \left[\cosh(\kappa l)-\frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa l)\right]\hat{\mathcal{A}}(\omega_0+\omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K l/2} \quad +\frac{\mathfrak{g}}{\kappa}\sinh(\kappa l)\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0-\omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K l/2},\\ \hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0-\omega,l) &= \left[\cosh(\kappa l)-\frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa l)\right]\hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0-\omega,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K l/2} \quad +\frac{\mathfrak{g}}{\kappa}\sinh(\kappa l)\hat{\mathcal{A}}(\omega_0+\omega,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K l/2},\end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

où $g = |\mathfrak{g}|$ et

$$\kappa = \sqrt{g^2-\left(\frac{\Delta K}{2}\right)^2}. \tag{2.62}$$

On obtient le nombre de photons signal ou *idler* créés par mode en appliquant l'opérateur densité spectrale de photons $\hat{n}(\omega_0\pm\omega,l) = \hat{\mathcal{A}}^\dagger(\omega_0\pm\omega,l)\hat{\mathcal{A}}(\omega_0\pm\omega,l)$ sur le vide en entrée de modulateur :

$$\langle vac|\hat{n}(\omega_0\pm\omega,l)|vac\rangle = \left(\frac{g}{\kappa}\right)^2\sinh^2(\kappa l). \tag{2.63}$$

Dans cette expression, κ dépend de ω car le désaccord de phase ΔK en dépend. Nous allons alors mettre en évidence de manière explicite cette dépendance. Comme nous avons choisi un quasi accord de phase à la dégénérescence de la pompe $\Delta\beta_0 = \beta(2\omega_0)-2\beta(\omega_0)$, on peut exprimer explicitement le désaccord de phase existant lorsque les photons créés ne sont pas dégénérés en fréquence. On effectue pour ceci un développement en série de Taylor de $\beta(\omega_s)$ et $\beta(\omega_i)$ autour de la dégénérescence ω_0, que l'on peut limiter à l'ordre 2. On obtient

$$\begin{aligned}\Delta K &= \Delta\beta-\Delta\beta_0,\\ &= \beta(2\omega_0)-\beta(\omega_0+\omega)-\beta(\omega_0-\omega)-\Delta\beta_0,\\ &= -\beta_2(\omega_0)\omega^2.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Avant de remplacer cette expression dans κ, nous pouvons concéder une seconde approximation. Nous considérons que le gain est suffisamment faible pour que $g^2 << \Delta K/2$. De cette manière, on peut négliger g dans l'expression de κ et ce dernier est alors imaginaire pur, $\kappa = \pm\mathrm{i}\Delta K/2 = \mp\mathrm{i}\beta_2(\omega_0)\omega^2/2$. En utilisant la relation $\sinh(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sin(x)$ on trouve que le nombre de photons créés par mode peut s'écrire

$$\langle vac|\hat{n}(\omega_0\pm\omega,l)|vac\rangle = (gl)^2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\beta_2(\omega_0)\omega^2 l}{2}\right)^2. \tag{2.65}$$

Le nombre total de photons signal ou *idler* générés se trouve en intégrant cette fonction sur tous les ω. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\ \mathrm{sinc}\left(x^2\right)^2 = 4\sqrt{\pi}/3$, on obtient

$$N_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \langle vac|\hat{n}(\omega_0 \pm \omega, l)|vac\rangle = \frac{2g^2 l}{3}\sqrt{\frac{2\pi l}{\beta_2(\omega_0)}}. \tag{2.66}$$

On peut noter que le nombre total de photons générés par photon pompe reste très faible devant 1. On peut alors exprimer la puissance totale générée et le rendement de conversion en utilisant $P_s = N_s \hbar\omega_s/(2\pi)$,

$$\begin{aligned} P_s =& \sqrt{\frac{2l}{\pi\beta_2(\omega_0)}}\frac{2\hbar\omega_s l}{3\epsilon_0 c_0 n(2\omega_0)}\left(\frac{d_{33}R\omega_0\,|u|}{\pi n(\omega_0)c_0}\right)^2 P_p, \\ P_s =& \eta_{\mathrm{SPDC}} P_p. \end{aligned} \tag{2.67}$$

D'après [Suhara et al., 2005], l'état de sortie du cristal peut être décomposé sur la base des états de Fock selon

$$|\Psi\rangle = \sum_{n\geq 0} f_n |n, n\rangle, \tag{2.68}$$

où $|n, n\rangle$ représente un état de n photons signal et n photons idler. Dans notre cas il est intéressant de décomposer l'état en fonction du nombre de photons émis et de leur répartition spectrale. Une démonstration s'inspirant de [Suhara et al., 2005] et adaptée aux états de Fock continus est donnée en Annexe C, elle est basée sur l'écriture de l'opérateur d'évolution spatiale dans la représentation de Schrödinger. Nous pouvons intuitivement retrouver le résultat en considérant que la scission d'un photon pompe est indépendante de celle d'un autre photon pompe et donc que les deux paires de photons intriqués possèdent la même répartition spectrale $r(\omega)$. On peut ainsi écrire $f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = f_0 \prod_{i=1}^{n} r(\omega_i)$ l'amplitude spectrale de probabilité d'un état à $2n$ photons $|\omega_0 + \omega_1, \ldots, \omega_0 + \omega_n, \omega_0 - \omega_1, \ldots, \omega_0 - \omega_n\rangle$, où f_0 est l'amplitude de probabilité de l'état vide. Naturellement la répartition spectrale, $r(\omega)$, est proportionnelle à la racine carré de la densité spectrale de photons créés donnée par l'équation (2.63), soit $r(\omega) \propto gl\mathrm{sinc}\left(\beta_2(\omega_0)\omega^2 l/2\right)$, où ω est l'écart de fréquence entre le photon signal émis et la dégénérescence de la pompe ω_0. On peut aussi considérer que $r(\omega)$ fait intervenir un terme de phase dépendant de ω et proportionnel au désaccord de phase. Dans la limite où la puissance de pompe est faible, $g << 1$, on peut considérer uniquement des états à 0 ou 2 photon(s) en sortie de cristal. Notre système ne nous donne aucune information lorsque l'état vide est présent en entrée, nous pouvons donc réduire l'état initial à un état deux photons normalisé.

L'état de sortie normalisé à deux photons peut finalement s'écrire

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)|\omega_0 + \omega, \omega_0 - \omega\rangle, \tag{2.69}$$

avec

$$\begin{aligned} f(\omega) =& \frac{r(\omega)}{\sqrt{\left(1-f_0^2\right)}} \\ =& \frac{gl\mathrm{sinc}\left(\beta_2(\omega_0)\omega^2 l/2\right)}{\sqrt{\left(1-f_0^2\right)}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2(\omega_0)\omega^2 l}, \end{aligned} \tag{2.70}$$

où $f_0^2 = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} |r(\omega)|^2$ est une constante de normalisation telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, |f(\omega)|^2 = 1$. Nous pouvons alors déterminer la bande passante de la source en cherchant les fréquences pour lesquelles l'amplitude de probabilité vérifie $|f(\omega)|^2 \geq |c_0|^2 /2$.

$$\begin{aligned} \beta_2(\omega_0)\omega^2 l = x_0 \approx 1,39, \\ \omega = \pm\sqrt{\frac{x_0}{\beta_2(\omega_0) l}}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

On en déduit que la bande passante en fréquence vaut

$$\Delta\nu = \sqrt{\frac{x_0}{\pi^2\beta_2(\omega_0) l}}. \tag{2.72}$$

En calculant le coefficient de dispersion à l'aide des données constructeur, on trouve $\Delta\nu \approx 7$ THz. Comme recherché, cette valeur est bien supérieure à la fréquence de modulation $\Omega/(2\pi) = 12,5$ GHz et les photons sont délocalisés sur une grande quantité de *bins* en entrée de modulateur. Comme la phase et l'amplitude de $f(\omega)$ varient très peu sur une plage de fréquence centrée sur la dégénérescence et d'une largeur correspondant à plusieurs fréquences de modulation, nous pouvons considérer que $f(\omega)$ est constant entre plusieurs *bins* successifs.

Nous allons maintenant voir comment cette source nous permet d'observer des interférences à deux photons en fréquence.

2.1.2.3/ PRINCIPE D'INTERFÉRENCE À DEUX PHOTONS EN FRÉQUENCE

Au début de la section nous avions retenu plusieurs conditions que doit remplir la source afin de permettre l'observation d'une interférence à deux photons intriqués en fréquence. Il faut que chacun des photons soit délocalisé sur plusieurs *bins* de fréquence lorsqu'il rencontre son modulateur. Autrement dit, qu'il y ait une grande incertitude sur la fréquence de chacun des deux photons. Il est cependant nécessaire de pouvoir sélectionner des chemins cohérents, ce qui est possible s'il existe une faible incertitude sur la somme de fréquences des photons intriqués. En effet, la mesure conjointe des photons intriqués après filtration impose une bijection entre les chemins possibles dans les deux modulateurs, associant un chemin dans le modulateur A à un chemin dans le modulateur B. La source de photons intriqués présente ces deux conditions, la première est obtenue grâce à l'accord de phase peu restrictif et la seconde grâce à la faible étendue spectrale de la pompe.

Nous pouvons alors formaliser l'expérience d'interférence à deux photons. Suite à leur émission, les photons intriqués sont séparés par un coupleur équilibré allant d'une voie vers deux voies. Chaque photon a une probabilité $1/2$ de sortir sur la voie A et $1/2$ de sortir sur la voie B et ces probabilités sont indépendantes. L'état en sortie de coupleur peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle =&\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega f(\omega)\left[|\omega_0+\omega,\omega_0-\omega\rangle_A|vac\rangle_B+|vac\rangle_A|\omega_0+\omega,\omega_0-\omega\rangle_B\right.\\&\left.+|\omega_0+\omega\rangle_A|\omega_0-\omega\rangle_B+|\omega_0-\omega\rangle_A|\omega_0+\omega\rangle_B\right],\end{aligned}\tag{2.73}$$

où $|\phi\rangle_A$ représente l'état correspondant à la voie A et $|\phi\rangle_B$ à la voie B. Comme les photons qui sortent sur la même voie ne pourront pas donner lieu à une mesure de coïncidence, on peut écrire que la mesure de coïncidence correspond uniquement à l'état

$$|\Psi\rangle =\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega f(\omega)|\omega_0+\omega\rangle_A|\omega_0-\omega\rangle_B\tag{2.74}$$

en entrée de système. Cet état correspond au cas où un seul photon pompe se scinde pour donner deux photons intriqués séparés en sortie de coupleur. Chacun des photons rencontre ensuite un modulateur, un filtre, puis le détecteur, comme dans le schéma d'interférence à un photon. Nous pouvons dès lors utiliser les résultats obtenus dans la section précédente pour décrire la mesure des photons par chacun des détecteurs. La détection d'un photon par un détecteur large bande s'écrit grâce à la fonction d'autocorrélation, qui est la moyenne de l'opérateur champ dans le détecteur appliqué à l'état d'entrée. Dans la représentation de Heinsenberg, nous avons vu que l'on pouvait reporter l'évolution de l'état initial à travers les différents composants précédant le détecteur sur l'opérateur champ. La mesure fait ainsi intervenir un opérateur champ tenant compte de tous les composants du système, que l'on applique sur l'état initial. Dans notre cas, l'état initial est celui en sortie de coupleur décrit par l'équation (2.74). La détection d'un photon par un des détecteurs fait alors intervenir un opérateur champ qui tient compte de tous les éléments entre le coupleur et le détecteur. Pour un atome de chacun des détecteurs, situé respectivement en $\mathbf{r}_a$ et $\mathbf{r}_b$, cet opérateur s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a) =&A(x_a,y_a)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t_a-\beta_1(L_a+L_A)]}\\&\times\left[R_A(\omega)\sum_{k\in\mathbb{Z}}U_{-k}(a,\alpha)D_{A,k}(\omega)\hat{a}_{1A,\mathrm{in}}(\omega+k\Omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_a+L_A)+\beta_1 k\Omega L_A]}\right.\\&\left.+T_A(\omega)\hat{a}_{2A,\mathrm{in}}(\omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi(\omega)-\beta_1(L_a+L_A)]}\right],\end{aligned}\tag{2.75}$$

respectivement

$$\begin{aligned}\hat{E}^{+}(\mathbf{r}_b,t_b) =& A(x_b,y_b)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t_b-\beta_1(L_b+L_B)]}\\ &\times\Bigg[R_B(\omega)\sum_{l\in\mathbb{Z}}U_{-l}(b,\beta)D_{B,l}(\omega)\hat{a}_{1B,\mathrm{in}}(\omega+l\Omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_b+L_B)+\beta_1 l\Omega L_B\right]}\\ &+T_B(\omega)\hat{a}_{2B,\mathrm{in}}(\omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\varphi(\omega)-\beta_1(L_b+L_B)\right]}\Bigg],\end{aligned}\tag{2.76}$$

où $L_{a/b}$ désigne la propagation depuis depuis l'entrée du modulateur A/B jusqu'au détecteur A/B, $L_{A/B}$ la propagation avant le modulateur A/B, et $D_{A/B,k/l}$ tient compte de la dispersion, son expression est donnée équation (2.40). Nous avons différencié dans ces expressions par un indice 1 ou 2 les opérateurs agissant sur l'entrée 1 ou 2 de chacun des filtres. Nous considérerons toujours que l'entrée 1 est reliée au système et que l'entrée 2 est couplée avec le vide. Le vide n'apportant aucune contribution à la détection, nous pouvons l'omettre dans l'écriture des différentes fonctions de corrélation. Les opérateurs champs peuvent alors plus simplement s'écrire

$$\begin{aligned}\hat{E}^{+}(\mathbf{r}_a,t_a) =& A(x_a,y_a)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t_a-\beta_1(L_a+L_A)]}\\ &\times R_A(\omega)\sum_{k\in\mathbb{Z}}U_{-k}(a,\alpha)D_{A,k}(\omega)\hat{a}_{1A,\mathrm{in}}(\omega+k\Omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_a+L_A)+\beta_1 k\Omega L_A\right]}\end{aligned}\tag{2.77}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{E}^{+}(\mathbf{r}_b,t_b) =& A(x_b,y_b)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t_b-\beta_1(L_b+L_B)]}\\ &\times R_B(\omega)\sum_{l\in\mathbb{Z}}U_{-l}(b,\beta)D_{B,l}(\omega)\hat{a}_{1B,\mathrm{in}}(\omega+l\Omega,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_b+L_B)+\beta_1 l\Omega L_B\right]}.\end{aligned}\tag{2.78}$$

La densité de probabilité de mesurer un photon provenant de l'état $|\Psi\rangle_1|vac\rangle_2$, à l'instant t_a et pour le détecteur A, donne

$$\begin{aligned}p(t_A) =& \sigma_a\int\mathrm{d}r_a G^{(1)}(\mathbf{r}_a,t_a,\mathbf{r}_a,t_a)\\ =& \sigma_a G^{(1)}(\mathbf{r}_a,t_a,\mathbf{r}_a,t_a),\end{aligned}\tag{2.79}$$

où

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_a,t_a,\mathbf{r}_a,t_a)=\left|\hat{E}^{+}(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle\right|^2.\tag{2.80}$$

En utilisant les mêmes approximations sur les composants que dans l'expérience à un photon et en négligeant la dispersion, la fonction d'autocorrélation peut se mettre sous la forme

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_a, t_a, \mathbf{r}_a, t_a) = |f(\omega_a)A(x_a, y_a)E_0(\omega_a)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \, |R_A(\omega + \omega_a)|^2 \,. \tag{2.81}$$

On remarque qu'elle est indépendante de t_a. La densité de probabilité de mesurer un photon à un instant t_a est donc constante ce qui est en accord avec le fait que l'état initial est issu d'une pompe monochromatique et donc l'émission d'une paire de photon est totalement délocalisée temporellement. La probabilité de mesurer un photon issu de cet état pendant un temps de mesure infini est proportionnelle au rendement du détecteur que multiplie le rapport entre la largeur spectrale du filtre et de la source. Nous trouvons le même résultat en mesurant indépendamment t_b.

Toutefois, les photons jumeaux sont émis au même instant et partagent une relation d'énergie, la mesure conjointe des deux photons n'est donc pas indépendante. Elle doit avoir lieu dans un temps correspondant à la différence de trajet optique entre les deux bras de l'interféromètre et doit dépendre de la position spectrale des filtres.

Cette mesure conjointe est appelée "mesure de coïncidences", dont on obtient la probabilité à l'aide de la fonction de corrélation d'ordre 2 qui permet de décrire la similarité de l'évolution des champs en deux points différents de l'espace temps. La probabilité de mesurer un photon sur le détecteur A entre l'instant t_0 et t_1 et de mesurer un photon sur le détecteur B entre l'instant t'_0 et t'_1 vaut

$$\begin{aligned} p(t_0, t, t'_0, t') =& \sigma_a \sigma_b \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}r_a \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}r_b \int_{t_0}^{t_0+t} \mathrm{d}t_a \int_{t'_0}^{t'_0+t'} \mathrm{d}t_b \\ & \times G^{(2)}(\mathbf{r}_a, t_a, \mathbf{r}_b, t_b, \mathbf{r}_b, t_b, \mathbf{r}_a, t_a), \end{aligned} \tag{2.82}$$

où la fonction de corrélation d'ordre 2 s'écrit

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_a, t_a, \mathbf{r}_b, t_b, \mathbf{r}_b, t_b, \mathbf{r}_a, t_a) = \langle\psi|\hat{E}^-(\mathbf{r}_a, t_a)\hat{E}^-(\mathbf{r}_b, t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_b, t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a, t_a)|\psi\rangle. \tag{2.83}$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} \hat{E}^+(\mathbf{r}_b, t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a, t_a)|\psi\rangle = & \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\omega E_{A,k}(\omega_1, \mathbf{r}_a, t_a) E_{B,l}(\omega_2, \mathbf{r}_b, t_b) f(\omega) \\ & \times \sum_{\{k,l\}\in\mathbb{Z}^2} U_{-k}(a, \alpha - \beta_1 \Omega L_A) U_{-l}(b, \beta - \beta_1 \Omega L_B) \\ & \times \hat{a}_{A,\mathrm{in}}(\omega_1 + k\Omega, 0)\hat{a}_{B,\mathrm{in}}(\omega_2 + l\Omega, 0)|\omega_0 + \omega\rangle_A |\omega_0 - \omega\rangle_B, \end{aligned} \tag{2.84}$$

où $E_{A,k}(\omega, \mathbf{r}_a, t_a) = A(x_a, y_a)E_0(\omega_0)R_A(\omega)D_{A,k}(\omega)\exp\left(-\mathrm{i}\left\{\omega t_a - [\beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0)](L_a + L_A)\right\}\right)$. Dans le cas où les longueurs de propagation sont suffisamment courtes, on peut considérer, pour tout ω, que $D_{A,j}(\omega) = 1$, $j \in \mathbb{Z}$, et on note $E_{A,k} = E_A$ dans le cas où la dispersion est négligée. La dernière ligne donne $\delta(\omega_1 + k\Omega - \omega_0 - \omega)\delta(\omega_2 + l\Omega - \omega_0 + \omega)|vac\rangle_A|vac\rangle_B$. On peut alors intégrer sur ω et ω_2 et on obtient, après un changement de variable $m = l + k$,

$$\hat{E}^+(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 \sum_{\{m,l\}\in\mathbb{Z}^2} E_A(\omega_1,\mathbf{r}_a,t_a)E_B\left(2\omega_0-\omega_1-m\Omega,\mathbf{r}_b,t_b\right) \times f(\omega_1-\omega_0+[m-l]\Omega)U_{l-m}(a,\alpha-\beta_1\Omega L_A)U_{-l}(b,\beta-\beta_1\Omega L_B) \times |vac\rangle_A|vac\rangle_B. \quad (2.85)$$

Une dernière étape consiste à simplifier l'expression en considérant les fonctions qui auront la prépondérance suivant la fréquence ω_1. Les fonctions agissant sur l'amplitude sont $R_A(\omega_1)$, $R_B(2\omega_0-\omega_1-m\Omega)$, $f(\omega_1-\omega_0+[m-l]\Omega)$, $U_{l-m}(a,\alpha-\beta_1\Omega L_A)$ et $U_{-l}(b,\beta-\beta_1\Omega L_B)$. Les deux premières sont centrées sur ω_a et ω_b et elles possèdent la même bande passante $\Delta\omega<\Omega$, bien plus restreinte que celle de $f(\omega)$. Nous pouvons donc nous contenter d'intégrer ω_1 sur une bande de fréquence de largeur Ω centrée sur ω_a. Un changement de variable $\omega=\omega_1-\omega_a$ permet d'écrire $R_B(\omega_b+2\omega_0-\omega-\omega_a-\omega_b-m\Omega)$, qui est non nulle seulement si $-\Omega/2<2\omega_0-\omega-\omega_a-\omega_b-m\Omega<\Omega/2$. Comme nous l'avions souligné dans le cas de l'interférence à un photon, plusieurs valeurs de m possibles signifie que l'interférence sera issue de plusieurs sets de chemins. On peut garantir l'unicité de m dans le cas où l'intégrale de recouvrement entre les filtres est nulle, lorsque $\omega_a=\omega_b\pm\Omega/2$. On supposera que cette condition est vérifiée et donc que $\Delta\omega<\Omega/2$. L'unique valeur de m pour laquelle l'intégrale (2.85) est non nulle vérifie $-1/2<m+\Delta_{cf}/\Omega<1/2$, avec $\Delta_{cf}=\omega_a+\omega_b-2\omega_0$, ce qui correspond à une condition sur la somme des fréquences centrales des filtres. Enfin, comme nous l'avons vu lors de la description quantique du modulateur de phase, on considère que $U_k(a,\alpha)=0$ pour $|k|>a+1$. On en déduit que l'on peut restreindre la somme sur l aux valeurs vérifiant $|l-m|<a+1$. Comme a reste inférieur à 3 et que $f(\omega)$ possède un très large spectre par rapport à la fréquence de modulation, on peut considérer que $f(\omega_1-\omega_0+[m-l]\Omega)=f_0$ est constante. A l'aide des ces conditions, nous pouvons réécrire (2.85) après avoir effectué la somme sur l en utilisant la formule d'addition de Graff (B.8). On obtient

$$\begin{aligned}\hat{E}^+(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle =& f_0\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_A(\omega,\mathbf{r}_a,t_a)E_B\left(2\omega_0-\omega+d\Omega,\mathbf{r}_b,t_b\right)\\ &\times U_d(c,\gamma)|vac\rangle_A|vac\rangle_B\\ =& f_0A(x_a,y_a)A(x_b,y_b)E_0(\omega_0)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_0L+\beta_1\omega_0\Delta L-2\omega_0t_b)}\\ &\times\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega R_A(\omega_a+\omega)R_B(\omega_b+\delta_{cf}-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_a)(t_a-t_b+\beta_1\Delta L)}\\ &\times U_d(c,\gamma-\Omega t_b+\beta_1\Omega[L_b+L_B])|vac\rangle_A|vac\rangle_B, \end{aligned} \quad (2.86)$$

avec $c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\Delta\phi)}$, $\Delta\phi=\beta-\alpha+\beta_1\Omega(L_A-L_B)$ et γ une phase qui n'intervient pas dans l'interférence et qui satisfait à (B.6). Enfin, en notant $\Delta_{cf}=d\Omega-\delta_{cf}$ avec $-\Omega/2<\delta_{cf}<\Omega/2$, on trouve que l'unique valeur de m est $m=-d$.

On déduit facilement de (2.86) l'expression de $\langle\psi|\hat{E}^-(\mathbf{r}_a,t_a)\hat{E}^-(\mathbf{r}_b,t_b)$ dans la fonction de corrélation d'ordre 2. On peut alors directement réécrire (2.83) :

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{r}_a,t_a,\mathbf{r}_b,t_b,\mathbf{r}_b,t_b,\mathbf{r}_a,t_a) &= f_0^2\,|J_d(c)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' \mathrm{d}\omega E_A(\omega',\mathbf{r}_a,t_a)^* E_A(\omega,\mathbf{r}_a,t_a) \\ &\quad \times E_B\left(2\omega_0-\omega'+d\Omega,\mathbf{r}_b,t_b\right)^* E_B\left(2\omega_0-\omega+d\Omega,\mathbf{r}_b,t_b\right) \\ &= \left|f_0 J_d(c) A(x_a,y_a)A(x_b,y_b)E_0(\omega_0)^2\right|^2 \\ &\quad \times \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega R_A(\omega_a+\omega)R_B(\omega_b+\delta_{cf}-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega(t_a-t_b+\Delta T)]}\right|^2, \end{aligned} \quad (2.87)$$

avec $\Delta T = \beta_1(L_b + L_B - L_a - L_A)$ qui correspond à la différence des trajets optiques entre la source et chacun des détecteurs.

On remarque alors que $G^{(2)}$ ne dépend que de l'écart entre les instants de mesure t_b et t_a, ce qui correspond au fait que le pompage est continu et donc que la probabilité d'émettre les deux photons simultanément à un instant t est constante. On pose alors $T = t_b - t_a$ et on trouve que $G^{(2)}$ est maximum pour $T = \Delta T$. On pose $F(\omega,\delta_{cf}) = R_A(\omega_a+\omega)R_B(\omega_b+\delta_{cf}-\omega)$. Nous avons supposé que $R_A(\omega_a+\omega)$ et $R_B(\omega_b+\omega)$ sont différents de 0 pour $\omega \in [-\Omega/4,\Omega/4]$ et sont symétriques par rapport à leur centre. On va supposer de plus que $R_A(\omega_a+\omega) = R_B(\omega_b+\omega)$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega F(\omega,\delta_{cf}) \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega F(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,|R_A(\omega_a+\omega)|^2 = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega F(\omega,\delta_{cf}) \geq \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega F(\omega,\pm\Omega/2) = 0$. L'intégrale de la fonction F est alors proportionnelle au recouvrement entre les *bins* mesurés, elle possède une bande passante incluse dans $[\Delta\omega;\Omega/2]$, minimale lorsque $\delta_{cf} = 0$ et décroissante en fonction de $\left|\delta_{cf}\right|$. On peut réécrire $G^{(2)}$ en fonction de F et de T :

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_a,\mathbf{r}_b,t_a,t_b) = \left|f_0 A(x_a,y_a)A(x_b,y_b)E_0(\omega_0)^2 J_d(c)\tilde{F}(t_b-t_a-\Delta T,\delta_{cf})\right|^2, \quad (2.88)$$

où la transformée de Fourier de $F(\omega,\delta_{cf})$, notée $\tilde{F}(t,\delta_{cf})$, possède une bande passante d'ordre de grandeur $2\pi/\Delta\omega \approx$300 ps, centrée en $t = 0$.

Nous n'avons aucune information sur le moment où arrivent les photons sur les détecteurs, en revanche nous savons que si le photon A est détecté au temps t_a alors la probabilité de détection du second photon est maximale pour $t_b = t_a + \Delta T$. Ainsi si nous déclenchons le détecteur A durant les temps t_0 et t, on peut restreindre le déclenchement du second détecteur à un intervalle de temps $[t_0 + \Delta T - \tau, t + \Delta T + \tau]$, où τ est choisi minimisé de manière à ce que l'intervalle ne contienne que les valeurs pour lesquelles $G^{(2)}$ n'est pas négligeable.

L'intérêt de minimiser ce temps est expérimental. En effet, nous ne pouvons corréler les traces des détecteurs que sur un temps fini, il est donc important de fixer les temps d'intégration. Nous avons aussi considéré que l'état produit par la source est constitué d'une seule paire de photon délocalisée sur un temps infini. Or la source que nous utilisons ne permet pas d'obtenir une seule paire délocalisée sur un temps infini. Nous utilisons une pompe continue quasi-monochromatique possédant une statistique de Poisson, nous pouvons cependant ajuster la puissance de cette pompe de manière à ce que la probabilité que plus d'une paire de photons intriqués soient émises dans un intervalle de temps $[t_0' - t_a - \Delta T, t_0' - t_a - \Delta T + t']$ soit très négligeable devant la probabilité que strictement une paire le soit. De cette manière, le risque de mesurer conjointement deux photons n'appartenant pas à la même paire est quasi nul. En minimisant l'intervalle de temps $[t_0' - t_a - \Delta T, t_0' - t_a - \Delta T + t']$, on peut maximiser la puissance de pompe et donc diminuer le temps nécessaire pour mesurer un grand nombre de coïncidences.

Nous avons jusqu'ici obtenu la probabilité de mesurer les photons durant deux intervalles de temps sur chacun des détecteurs. Cependant, comme nous l'avons vu lors de la description du détecteur, le courant signalant une détection ne correspond pas directement à cette probabilité mais dépend du temps de réponse des détecteurs. Pour obtenir la corrélation des réponses des détecteurs, et donc une mesure de coïncidence, il faut écrire la densité de probabilité de détection des photons intriqués

$$p_s(t_a, t_b) = \eta_a \eta_b \left| f_0 J_d(c) \tilde{F}(t_b - t_a - \Delta T, \delta_{cf}) \right|^2 , \tag{2.89}$$

que l'on notera $p_s(t_a, t_b) = p_s(t_b - t_a - \Delta T)$. La corrélation entre les courants fournis par les deux détecteurs lorsqu'ils sont respectivement déclenchés durant des intervalles de temps Δt_A et Δt_B, centrés sur τ_A et τ_B, avec $\Delta\tau = \tau_B - \tau_A$, s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}(\tau, \Delta\tau, \Delta t_A, \Delta t_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\tau_A - \Delta t_A/2}^{\tau_A + \Delta t_A/2} \mathrm{d}t_a \, r_A(t - t_a) \int_{\tau_B - \Delta t_B/2}^{\tau_B + \Delta t_B/2} \mathrm{d}t_b \, r_B(t + \tau - t_b) \, p(t_a, t_b) \\
&= \int_{-\Delta t_A/2}^{\Delta t_A/2} \mathrm{d}t'_a \int_{-\Delta t_B/2}^{\Delta t_B/2} \mathrm{d}t'_b \, p(t'_a + \tau_A, t'_b + \tau_B) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \, r_A(t - t'_a - \tau_A) \, r_B\left(t + \tau - t'_b - \tau_B\right) \\
&= \int_{-\Delta t_A/2}^{\Delta t_A/2} \mathrm{d}t'_a \int_{-\Delta t_B/2}^{\Delta t_B/2} \mathrm{d}t'_b \, p(t'_a + \tau_A, t'_b + \tau_B) \times r_A \star r_B\left(t'_a - t'_b + \tau - \Delta\tau\right),
\end{aligned} \tag{2.90}$$

où on a noté $r_A \star r_B(t)$ la corrélation entre les réponses des détecteurs, r_A et r_B, décalées temporellement de t. On peut remarquer que nous avons écrit $p(t_a, t_b)$ et non $p_s(t_a, t_b)$ dans le but d'intégrer les coïncidences accidentelles. En effet la probabilité de mesurer des photons en coïncidence proviendra de la probabilité de mesurer une paire de photons jumeaux mais aussi de mesurer un des photons jumeaux sur un des détecteurs et un photon de bruit sur le second détecteur, ou encore de mesurer deux photons de bruit. Nous avons vu que la probabilité de mesurer un photon sur un seul des deux détecteurs est constante, il en est de même pour celle de mesurer un photon de bruit car ce bruit peut provenir de sources multiples. On peut alors noter $p(t_a, t_b) = p_s(t_a, t_b) + p_{b,s} + p_{s,b} + p_{b,b} = p_s(t_b, t_a) + p_b$. La probabilité de mesurer une coïncidence ne dépend que du temps séparant les deux mesures et on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}(\tau, \Delta\tau, \Delta t_A, \Delta t_B) &= \int_{-\Delta t_A/2}^{\Delta t_A/2} \mathrm{d}t_a \int_{-\Delta t_B/2}^{\Delta t_B/2} \mathrm{d}t_b \left[p_s(t_b - t_a + \Delta\tau - \Delta T) + p_b\right] r_A \star r_B(t_a - t_b + \tau - \Delta\tau), \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_a \, \mathrm{rect}\left(\frac{t_a}{\Delta t_A}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \, \mathrm{rect}\left(\frac{t + t_a - \Delta\tau + \Delta T}{\Delta t_B}\right) \left[p_s(t) + p_b\right] r_A \star r_B(\tau - \Delta T - t), \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \left[p_s(t) + p_b\right] r_A \star r_B(\tau - \Delta T - t) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_a \, \mathrm{rect}\left(\frac{t_a}{\Delta t_A}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t + t_a - \Delta\tau + \Delta T}{\Delta t_B}\right).
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Dans le cas où les fenêtres de détection Δt_A et Δt_B sont bien plus grandes que la réponse impulsionnelle des détecteurs et que la fonction de corrélation d'ordre 2, la seconde intégrale peut être considérée comme indépendante de t et la corrélation des deux fonctions

rectangles donne une fonction Γ, centrée sur $\Delta\tau - \Delta T$, symétrique et nulle en dehors de l'intervalle $[\Delta\tau - \Delta T - (\Delta t_A + \Delta t_B)/2, \Delta\tau - \Delta T + (\Delta t_A + \Delta t_B)/2]$. La fonction Γ est une fonction trapèze dont la base possède une largeur $\Delta t_A + \Delta t_B$, dont le plateau vaut 1 et possède une largeur $|\Delta t_A - \Delta t_B|$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}(\tau, \Delta\tau, \Delta t_A, \Delta t_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, (p_s(t) + p_b)\, r_A \star r_B\,(\tau - \Delta T - t)\, \Gamma\,(\Delta\tau - \Delta T, \Delta t_A, \Delta t_B)\,, \\ &= \left[p_s \otimes r_A \star r_B\,(\tau - \Delta T) + \mathfrak{b}\right] \Gamma\,(\Delta\tau - \Delta T, \Delta t_A, \Delta t_B)\,, \end{aligned} \tag{2.92}$$

où $\otimes$ est l'opération de convolution.

On observe des coïncidences correspondant aux photons intriqués uniquement si le délai entre le déclenchement des détecteurs $\Delta\tau$ est tel que $\Gamma\,(\Delta\tau - \Delta T, \Delta t_A, \Delta t_B) \neq 0$ et on observe statistiquement un pic de coïncidences centré sur le délai $\tau = \Delta T$, correspondant à la différence de chemin optique entre les deux bras de l'interféromètre.

Un autre moyen de mesurer des coïncidences est de déclencher le second détecteur uniquement lorsqu'un coup est mesuré sur le premier détecteur et de mettre un délai optique ΔT positif. La mesure conditionnelle d'un photon sur le second détecteur s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_d(\tau, \Delta\tau, \Delta t_A, \Delta t_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\tau_A - \Delta t_A/2}^{\tau_A + \Delta t_A/2} \mathrm{d}t_a\, r_A\,(t - t_a) \int_{t_a + \Delta\tau - \Delta t_B/2}^{t_a + \Delta\tau + \Delta t_B/2} \mathrm{d}t_b\, r_B\,(t + \tau - t_b)\, p(t_1, t_b), \\ &= \int_{-\Delta t_A/2}^{\Delta t_A/2} \mathrm{d}t'_a \int_{-\Delta t_B/2}^{\Delta t_B/2} \mathrm{d}t'_b\, p(t'_a + \tau_A, t'_b + t'_a + \tau_A + \Delta\tau) r_A \star r_B\left(\tau - t'_b - \Delta\tau\right), \\ &= \Delta t_A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'_b \left[p_s(t'_b + \Delta\tau - \Delta T) + p_b\right] \mathrm{rect}\left(\frac{t'_b}{\Delta t_B}\right) r_A \star r_B\left(\tau - t'_b - \Delta\tau\right), \\ &= \Delta t_A \left[p_b \times \mathrm{rect}_{\Delta t_B} \otimes r_A \star r_B\,(\tau - \Delta\tau) + p_s \otimes r_A \star r_B\,(\tau - \Delta T)\right]. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Ces deux méthodes peuvent être utilisées mais la seconde sera en général préférée car la probabilité de mesurer un photon de bruit est constante sur la fenêtre de détection. Dans le cas où les réponses des détecteurs sont corrélées, la probabilité de mesurer un photon de bruit suit une fonction trapézoïdale en fonction du délai. Un autre avantage de la seconde méthode est que la probabilité de mesurer une coïncidence de deux photons intriqués ne dépend pas du décalage entre les centres des fenêtres de détection.

Dans tous les cas, nous obtenons que la densité de probabilité de mesurer une coïncidence correspondant à des photons intriqués est proportionnelle à

$$p_c(\tau) = p_s \otimes r_A \star r_B\,(\tau - \Delta T) = \eta_a \eta_b\, |f_0 J_d(c)|^2 \left|\tilde{F}_{\delta_{cf}}\right|^2 \otimes r_A \star r_B\,(\tau - \Delta T)\,. \tag{2.94}$$

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience, on obtient un pic de coïncidences centré sur $\tau = \Delta T$ dont la largeur correspond à la correlation des filtres en intensité $\left|\tilde{F}_{\delta_{cf}}\right|^2$ décalée de δ_{cf}, et convoluée avec la corrélation des réponses des détecteurs. L'intégrale de la densité de probabilité de mesurer une coïncidence sur l'intervalle de temps correspondant au pic de coïncidence correspond au taux de coïncidences et peut être écrite

$$r(d, c, \delta_{cf}) = |J_d(c)|^2 \, g(\delta_{cf}), \tag{2.95}$$

où $g(\delta_{cf})$ est proportionnelle à la puissance de la source, au rendement quantique des détecteurs et au décalage entre les filtres. On rappelle que la position des centres des filtres vérifie $\omega_a + \omega_b - 2\omega_0 = d\Omega + \delta_{cf}$ et que $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\Delta\phi)}$, avec $\Delta\phi = \beta - \alpha + \beta_1\Omega(L_A - L_B)$. Le taux de coïncidences suit donc une fonction de Bessel dont l'ordre dépend de la position relative des filtres avec la dégénérescence de la source et dont le paramètre dépend des taux de modulation des MP et du déphasage entre les champs RF pilotant les modulateurs. En faisant varier ce déphasage on peut reconstruire une figure d'interférence.

2.1.2.4/ STABILITÉ DES COMPOSANTS

Si l'on veut correctement reconstruire la figure d'interférence, il faut que tous les paramètres susceptibles de faire varier le taux de coïncidence restent fixes ou possèdent des variations connues tout au long de l'expérience. Les différents paramètres pouvant conduire à une modification indésirable du taux de coïncidence sont :

- les taux de modulation a et b,
- le flux de photons jumeaux générés,
- le décalage relatif entre les filtres et la dégénérescence de la source $\omega_a+\omega_b-2\omega_0 = d\Omega + \delta_{cf}$,
- la différence de longueur de fibre avant chaque modulateur $L_B - L_A$.

Nous évaluons plus précisément ces paramètres et présentons les solutions expérimentales retenues avec leur caractérisation dans le chapitre suivant. Pour le moment nous allons nous intéresser plus en détails, aux effets de la propagation sur la figure d'interférence à deux photons.

2.2/ PROPAGATION D'ÉTATS INTRIQUÉS EN FRÉQUENCE

Jusqu'ici, nous avons mis en évidence que la figure d'interférence provient de l'interaction de photons intriqués avec des modulateurs de phase. La condition d'interférence est modifiée lorsque l'amplitude ou la phase relative des différents chemins de fréquence sont changées. Compte tenu de l'étendue spectrale d'interaction (> 100 GHz), l'influence de la propagation, dans un milieu où l'indice dépend de la longueur d'onde, ne doit pas être négligée.

À cet effet, le système global est maintenant représenté par le schéma figure Fig.2.14.

La propagation affecte le signal dès son émission. Aussi, nous tiendrons compte de la propagation après la source (L_0), après séparation des photons (L_A, L_B), et après modulation (L_a, L_b). On considère, au sein du modulateur, que l'interaction non-linéaire et la propagation sont des phénomènes séparables et donc que l'influence de la propagation sera reportée à la fibre suivante.

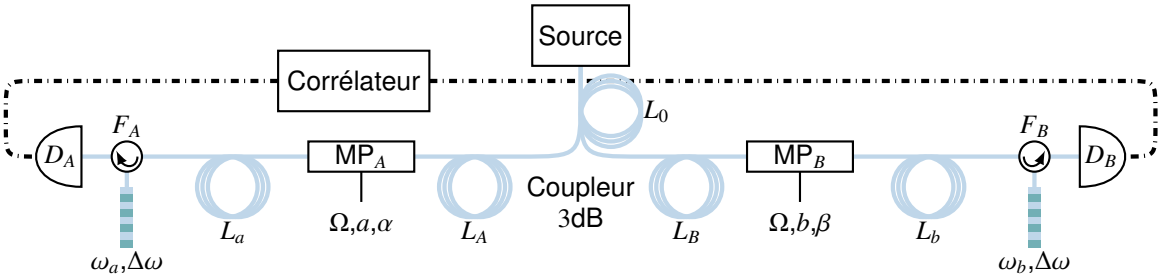


FIGURE 2.14 – Schéma d'interférence à deux photons avec propagation.

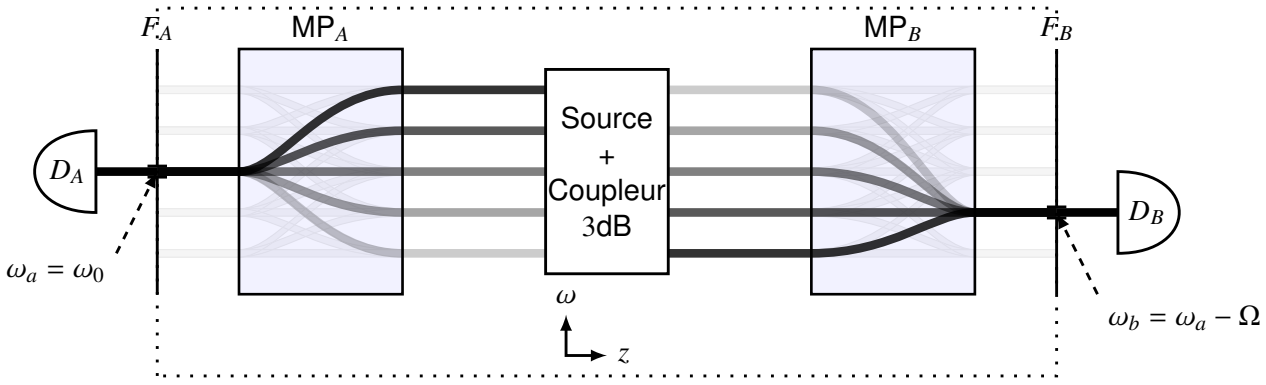


FIGURE 2.15 – Représentation des "chemins fréquentiels" de l'interférence à deux photons dans l'espace des fréquences.

2.2.1/ PROPAGATION AVANT MODULATION

Nous nous intéressons maintenant à l'étude de la propagation en un lieu où les chemins en fréquence sont distincts. Les photons intriqués sont séparés en sortie de source par un coupleur 3 dB. Nous allons donc distinguer deux cas, suivant que la propagation ait lieu avant ou après la séparation des photons. Dans tous les cas, nous considérerons que la propagation après modulation est nulle $L_a = L_b = 0$. Nous allons tout d'abord voir le cas le plus général, où chacun des photons possède sa propre longueur de propagation, et nous verrons ensuite quelles différences apporte la propagation conjointe des photons.

2.2.1.1/ PROPAGATION APRÈS SÉPARATION

Nous considérons que les photons se propagent dans des fibres de longueur L_A et L_B, pour lesquelles la dispersion n'est plus négligeable. La probabilité de détection des photons en coïncidence ne peut plus se simplifier sous la forme trouvée dans le cadre des courtes propagations (2.94). Nous reprenons donc les étapes de calcul qui diffèrent. Rappelons que la fonction de corrélation d'ordre 2 s'écrit

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_a,t_a,\mathbf{r}_b,t_b,\mathbf{r}_b,t_b,\mathbf{r}_a,t_a) = \langle\psi|\hat{E}^-(\mathbf{r}_a,t_a)\hat{E}^-(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle, \tag{2.96}$$

avec

$$\hat{E}^+(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\omega E_{A,k}(\omega_1,\mathbf{r}_a,t_a)E_{B,l}(\omega_2,\mathbf{r}_b,t_b)f(\omega) \times \sum_{\{k,l\}\in\mathbb{Z}^2} U_{-k}(a,\alpha-\beta_1\Omega L_A)U_{-l}(b,\beta-\beta_1\Omega L_B) \times \hat{a}_{A,\mathrm{in}}(\omega_1+k\Omega,0)\hat{a}_{B,\mathrm{in}}(\omega_2+l\Omega,0)|\omega_0+\omega\rangle_A|\omega_0-\omega\rangle_B. \quad (2.97)$$

Rappelons également que $U_k(a,\alpha) = J_k(a)\exp(\mathrm{i}k\alpha)$. La dispersion intervient dans les termes $E_{A,k}(\omega,\mathbf{r}_a,t_a)$ et $E_{B,l}(\omega,\mathbf{r}_b,t_b)$,

$$\left.\begin{aligned} E_{A,k}(\omega,\mathbf{r}_a,t_a) &= A(x_a,y_a)E_0(\omega_0)R_A(\omega)D_{A,k}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{\omega t_a-[\beta_0+\beta_1(\omega-\omega_0)]L_A\}},\\ E_{B,k}(\omega,\mathbf{r}_b,t_b) &= A(x_b,y_b)E_0(\omega_0)R_B(\omega)D_{B,l}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{\omega t_b-[\beta_0+\beta_1(\omega-\omega_0)]L_B\}}.\end{aligned}\right\} \quad (2.98)$$

De plus, $A(x,y)$ représente l'amplitude dans la section transverse de la fibre, $E_0(\omega_0)$ est l'amplitude spectrale du bi-photon à la dégénérescence, $R_A(\omega)$ et $R_B(\omega)$ sont les amplitudes spectrales des filtres et les fonctions $D_{A/B,k}$ contiennent le terme de dispersion limité à l'ordre 2 [14]. On a

$$D_{A/B,k}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_2}{2}(\omega+k\Omega-\omega_0)^2L_{A/B}}. \quad (2.99)$$

On peut alors calculer (2.97) en effectuant le changement de variable $m = l+k$. Après intégration selon ω et ω_2, on obtient

$$\hat{E}^+(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 \sum_{\{m,l\}\in\mathbb{Z}^2} E_{A,m-l}(\omega_1,\mathbf{r}_a,t_a)E_{B,l}(2\omega_0-\omega_1-m\Omega,\mathbf{r}_b,t_b) \times f(\omega_1+[m-l]\Omega-\omega_0)U_{l-m}(a,\alpha-\beta_1\Omega L_A)U_{-l}(b,\beta-\beta_1\Omega L_B) \times |vac\rangle_A|vac\rangle_B. \quad (2.100)$$

L'appréciation des différents termes nous permet de restreindre les valeurs de ω_1 et m pour lesquelles $R_A(\omega_1)$ et $R_B(2\omega_0-\omega_1-m\Omega)$ ne seront pas conjointement nuls. En effet l'étendue spectrale des filtres est inférieure à $\Omega/2$ [15], on peut donc limiter à l'intervalle $]\omega_a-\Omega/4,\omega_a+\Omega/4[$ le domaine d'intégration sur ω_1. Cette considération restreint la valeur de m à un unique entier vérifiant

$$\frac{2\omega_0-\omega_a-\omega_b}{\Omega}-\frac{1}{2} < m < \frac{2\omega_0-\omega_a-\omega_b}{\Omega}+\frac{1}{2}. \quad (2.101)$$

En posant $\omega_a+\omega_b-2\omega_0 = d\Omega-\delta_{cf}$, avec $\left|\delta_{cf}\right| < \Omega/2$, on obtient que $m = -d$. Enfin, comme précédemment, nous pouvons considérer que $U_{-l}(b,\beta-\beta_1\Omega L_B)$ est négligeable pour $|l| > 2b+1$, et comme la bande passante du spectre bi-photon est très grande devant la fréquence de modulation, on peut considérer que $f(\omega_1-[d+l]\Omega-\omega_0) = f(\omega_a)$.

Suite à ces simplifications, (2.100) devient

14. Cette approximation sera justifiée en fin de section.
15. La bande passante des filtres à -30dB vaut $5,6$ GHz

$$\hat{E}^+(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle = f(\omega_a)\int_{\omega_a-\Omega/4}^{\omega_a+\Omega/4} \mathrm{d}\omega \sum_{l\in\mathbb{Z}} E_{A,-d-l}(\omega,\mathbf{r}_a,t_a)E_{B,l}(2\omega_0-\omega+d\Omega,\mathbf{r}_b,t_b) \times U_{l+d}(a,\alpha-\beta_1\Omega L_A)U_{-l}(b,\beta-\beta_1\Omega L_B)|vac\rangle_A|vac\rangle_B. \quad (2.102)$$

Contrairement à l'équation (2.86), nous ne pouvons pas simplifier la forme de (2.102) en sommant sur l car $E_{A,-d-l}$ et $E_{B,l}$ dépendent de cet indice via le terme de dispersion. On peut cependant développer les différents termes afin d'isoler au maximum la somme sur l,

$$\begin{aligned}\hat{E}^+(\mathbf{r}_b,t_b)\hat{E}^+(\mathbf{r}_a,t_a)|\psi\rangle =& f(\omega_a)A(x_a,y_a)A(x_b,y_b)E_0(\omega_0)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0} \\ &\times \int_{-\Omega/4}^{\Omega/4}\mathrm{d}\omega R_A(\omega_a+\omega)R_B(\omega_b+\delta_{cf}-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[\omega(t_a-t_b+\Delta T)-\beta_2(\omega_0-\omega_a-\omega)^2L/2\right]} \\ &\times \sum_{l\in\mathbb{Z}} U_l(a,\beta_2[\omega_0-\omega_a-\omega]\Omega L-\Delta\phi)J_{d-l}(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2 l^2\Omega^2 L/2}|vac\rangle_A|vac\rangle_B,\end{aligned} \quad (2.103)$$

où $L = L_B + L_A$, $\Delta L = L_B - L_A$, $\Delta T = \beta_1\Delta L$, $\Delta\phi = \beta - \alpha - \beta_1\Omega\Delta L$ et ϕ_0 [16] est une phase qui disparaît avec son complexe conjugué dans l'expression de la fonction de corrélation d'ordre 2. Cette dernière peut justement s'écrire

$$\begin{aligned}G^{(2)}(\mathbf{r}_a,t_a,\mathbf{r}_b,t_b,\mathbf{r}_b,t_b,\mathbf{r}_a,t_a) =& \left|f(\omega_a)A(x_a,y_a)A(x_b,y_b)E_0(\omega_0)^2\right|^2 \\ &\times \left|\int_{-\Omega/4}^{\Omega/4}\mathrm{d}\omega R_A(\omega_a+\omega)R_B(\omega_b+\delta_{cf}-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[\omega(t_a-t_b+\Delta T)-\beta_2(\omega_0-\omega_a-\omega)^2L/2\right]}\right. \\ &\left.\times \sum_{l\in\mathbb{Z}} U_l(a,\beta_2[\omega_0-\omega_a-\omega]\Omega L-\Delta\phi)J_{d-l}(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2 l^2\Omega^2 L/2}\right|^2.\end{aligned} \quad (2.104)$$

Le laser de pompe étant continu, la probabilité de mesurer un photon intriqué à l'instant t_a sur un détecteur, et son jumeau à l'instant t_b sur le second détecteur, ne dépend que de l'écart de temps entre t_a et t_b. Elle s'obtient par l'intégration, sur la surface de chacun des détecteurs affectée de leur sensibilité, de la fonction de corrélation d'ordre 2. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}p_s(t_a,t_b) =& \eta_a\eta_b\,|f(\omega_a)|^2 \\ &\times \left|\int_{-\Omega/4}^{\Omega/4}\mathrm{d}\omega R_A(\omega_a+\omega)R_B(\omega_b+\delta_{cf}-\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\omega(t_b-t_a-\Delta T)+\beta_2(\omega_0-\omega_a-\omega)^2L/2\right]}\right. \\ &\left.\times \sum_{l\in\mathbb{Z}} U_l(a,\beta_2[\omega_0-\omega_a-\omega]\Omega L-\Delta\phi)J_{d-l}(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2 l^2\Omega^2 L/2}\right|^2.\end{aligned} \quad (2.105)$$

16. $\phi_0 = [-(2\omega_0-\omega_b+d\Omega)t_b-\omega_a t_a+\beta_0 L+\beta_1 d\Omega L_B+(\omega_0-\omega_a)\Delta T+d(\beta+\beta_1 L_B)]$

On peut comparer cette expression à celle obtenue lorsque la dispersion est négligée (2.89), que nous rappelons :

$$p_{\text{sans disp}}(t_a, t_b) = \eta_a \eta_b \left| f_0 J_d(c) \tilde{F}(t_b - t_a - \Delta T, \delta_{cf}) \right|^2 , \tag{2.106}$$

Dans cette expression,

$$\left| \tilde{F}(t_b - t_a - \Delta T, \delta_{cf}) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega R_A(\omega_a + \omega) R_B(\omega_b + \delta_{cf} - \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_b - t_a - \Delta T)} \right|^2$$

représente l'impulsion temporelle du bi-photon après filtration. Le terme,

$$|J_d(c)|^2 = \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} U_l(a, -\Delta\phi) J_{d-l}(b) \right|^2$$

est la fonction régissant l'évolution de la figure d'interférence lorsque l'on change le déphasage RF.

Bien entendu, les probabilités de coïncidence (2.105) et (2.106) sont équivalentes lorsque $\beta_2 = 0$. Ainsi, la dispersion induit un élargissement temporel de l'impulsion du photon et modifie le terme d'interférence. Donc, même en utilisant des filtres infiniment fins, c'est-à-dire $R_A(\omega) = \delta(\omega - \omega_a)$ ou $R_B(\omega) = \delta(\omega - \omega_b)$, il reste toujours un terme de phase, $\exp\left(\mathrm{i}\beta_2 l^2 \Omega^2 L/2\right)$, qui intervient dans le terme d'interférence et provenant de la dispersion des différents chemins de fréquence. Nous pouvons aussi noter que, dans le cas sans dispersion, toutes les fréquences possibles à l'intérieur d'un chemin contribuent à la même figure d'interférence. Dans l'équation (2.105), la dispersion induit une dépendance de la figure d'interférence intra-chemin, comme le montre la dépendance en ω de la dernière ligne.

Pour bien saisir les influences de la dispersion inter-chemins et la dispersion intra-chemins, nous allons séparer les deux phénomènes. Traitons en premier lieu la dispersion inter-chemins. Considérons pour cela, que la dimension intra-chemin tend vers 0, que les filtres sont infiniment fins et que $\omega_a + \omega_b = d\Omega$, $n \in \mathbb{Z}$, soit $\delta_{cf} = 0$. Ce cas est représenté schématiquement sur la figure Fig.2.16.

Dans ce cas, l'équation (2.105) devient

$$p_s(t_a, t_b) = \eta_a \eta_b \left| f(\omega_a) \sum_{l \in \mathbb{Z}} U_l(a, \beta_2[\omega_0 - \omega_a]\Omega L - \Delta\phi) J_{d-l}(b) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2 l^2 \Omega^2 L/2} \right|^2 . \tag{2.107}$$

On remarque que même dans le cas où les filtres sont infiniment fins, la figure d'interférence dépend toujours d'une phase accumulée entre les différents *bins* par dispersion. Nous ne connaissons pas de forme analytique du résultat, mais nous pouvons simuler l'évolution de la figure d'interférence en fonction de la propagation. Le résultat est représenté figure Fig.2.17.

La figure Fig.2.17 représente cette simulation pour une longueur de propagation maximale de 100 km, des taux de modulation identiques, $a = b = 2,75$, et pour une position de filtre $\omega_a = \omega_b = \omega_0$, soit une interférence d'ordre 0.

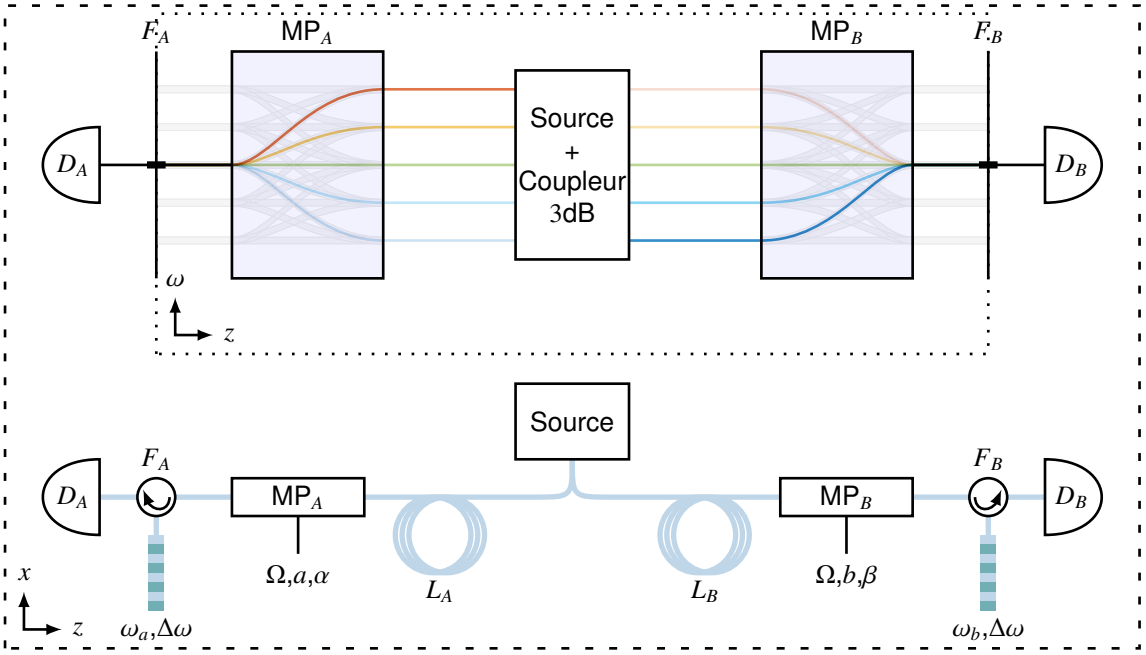


FIGURE 2.16 – Schéma d'interférence à deux photons dans l'espace des fréquences, avec des filtres monochromatiques parfaitement alignés sur la fréquence de doublage, $\delta_{cf} = 0$, $d = 0$ et $\omega_a = \omega_0$. Un même chemin est représenté avec la même transparence, les couleurs indiquent la fréquence du photon.

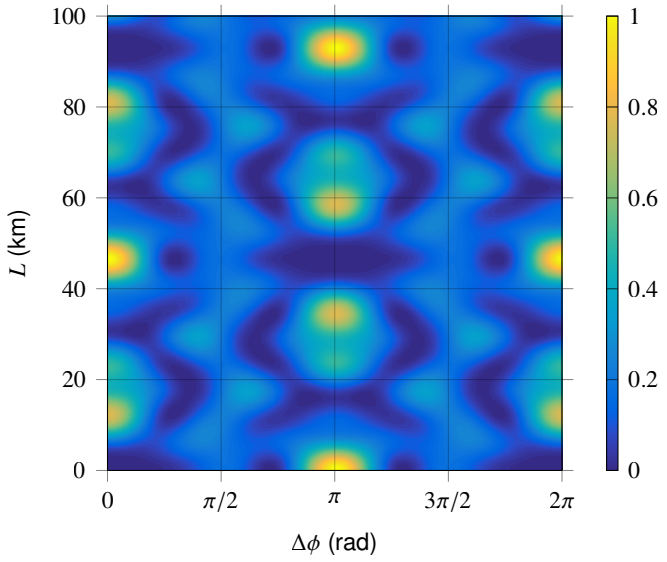


FIGURE 2.17 – Simulation de la figure d'interférence en fonction du déphasage RF et de la distance de propagation des photons, pour des filtres infiniment fins.

Nous pouvons observer une déformation de la figure d'interférence avec un effet visible dès quelques kilomètres de propagation. La déformation possède un motif périodique en fonction de la propagation de période $L_p \approx 92,6$ km. Cette période correspond à la longueur nécessaire pour que la phase accumulée par dispersion entre les *bins* soit égale à 2π, soit $\beta_2\Omega^2 L_p/2 = 2\pi$. Pour cette simulation, nous avons choisi une disper-

sion standard dans les fibres type SMF-28, soit $\beta_2(@1550\ nm) = 2,2 \times 10^{-23}$ ps^2/km. Ce motif périodique est analogue à l'effet Talbot observé lors de la diffraction d'une onde plane par un réseau. Cet effet décrit un regain de cohérence après une longueur de propagation donnée et l'analogie a été portée à la dispersion dans les fibres optiques par [Jannson et al., 1981]. Dans le cadre des photons jumeaux intriqués en fréquence, il a été mis en avant théoriquement et expérimentalement de manière limitée [Torres-Company et al., 2011, Lukens et al., 2014], que cette cohérence pouvait être retrouvée. Pour cela, ils utilisent des photons intriqués dont le spectre est un peigne de dirac. Par transformée de Fourier, la fonction de correlation d'ordre deux fait apparaître un peigne temporel. Ils montrent que le motif temporel obtenu sans propagation, peut être retrouvé périodiquement après des distances de propagation spécifiques dans un milieu dispersif. La démonstration expérimentale n'est toutefois pas franche, car elle se limite à trois pics fréquentiels. Il n'a, à notre connaissance, pas été mis en évidence sur une figure d'interférence quantique en fréquence, mais le principe est tout à fait le même. Cet effet est néanmoins très intéressant si l'on veut utiliser une telle interférence pour une communication quantique longue distance. Il serait en effet nécessaire de ne corriger la dispersion que sur un quart de période maximum pour retomber sur le motif initial, déphasé de π ou non.

Nous avons observé les effets simulés de la dispersion d'ordre 2 sur la figure d'interférence, mais nous n'avons pas expliqué pourquoi la phase accumulée entre les "bins", $\phi_{\beta_2,k} = \beta_2(k\Omega)^2 L/2$, avec $k \in \mathbb{Z}$, dépend de la somme des longueurs de propagation. Pour le comprendre, revenons un instant sur la figure Fig.2.16. Sur cette figure nous avons associé une couleur à une fréquence et une transparence à des énergies complémentaire entre les deux bras de l'interféromètre. Ces énergies complémentaires sont définies par la relation de conservation de l'énergie des photons intriqués. Si un photon parcourt son bras de l'interféromètre avec une certaine fréquence ω_1, son jumeaux parcourt l'autre bras avec l'énergie complémentaire $\omega_2 = 2\omega_0 - \omega_1$. Comme la phase évolue de manière quadratique en fonction de la fréquence, $\phi_{\beta_2}(\omega_{1/2}) = \beta_2(\omega)^2 L_{A/B}/2$, alors la phase accumulée par chacun de ces photons par rapport à la fréquence de doublage est identique pour une distance de propagation identique, $\phi_{\beta_2}(\omega_{1/2} - \omega_0) = \beta_2(\omega_1 - \omega_0)^2 L_{A/B}/2$. Ces phases sont de même signe et donc la phase de tous les états possibles, avant modulation, évolue en fonction de $L = L_A + L_B$. On retrouve une phase variant en $\phi_{\beta_2,k} = \beta_2(k\Omega)^2 L/2$, simplement en stipulant que les différentes fréquences possibles correspondent à des harmoniques de la fréquence de modulation Ω.

Nous avons vu les effets inter-*bin* de la propagation, nous allons maintenant nous attacher à comprendre l'impact de la fréquence intra-*bin*. Pour cela, ajoutons une largeur spectrale aux chemins de fréquence, comme illustré sur la figure Fig.2.18.

Pour obtenir l'équation (2.107), nous avons considéré que la taille des *bins* est infinitésimale et de fréquence ω_a. Nous pouvons aussi remarque que cette dernière comporte une variation de phase linéaire en ω_a, $-\beta_2\omega_a\Omega L$, équivalente à un déphasage RF. Quelle que soit ω_a, la figure d'interférence est la même, mais déphasée linéairement en fonction de ω_a. L'intégrale sur la largeur du bin peut alors se voir comme une somme continue de figures d'interférences déphasées. Ce déphasage diminue la visibilité de la figure d'interférence. On peut se risquer à une analogie avec un interféromètre de Michelson en lumière blanche. Chaque composante spectrale crée son propre motif d'interférence. Lorsque l'interféromètre est au contact optique, on voit apparaître des frange d'interférences. Cependant, la périodicité de ces franges étant différentes, rapidement les figures d'interférence ne se somment plus de manière cohérente et la figure d'interférence est

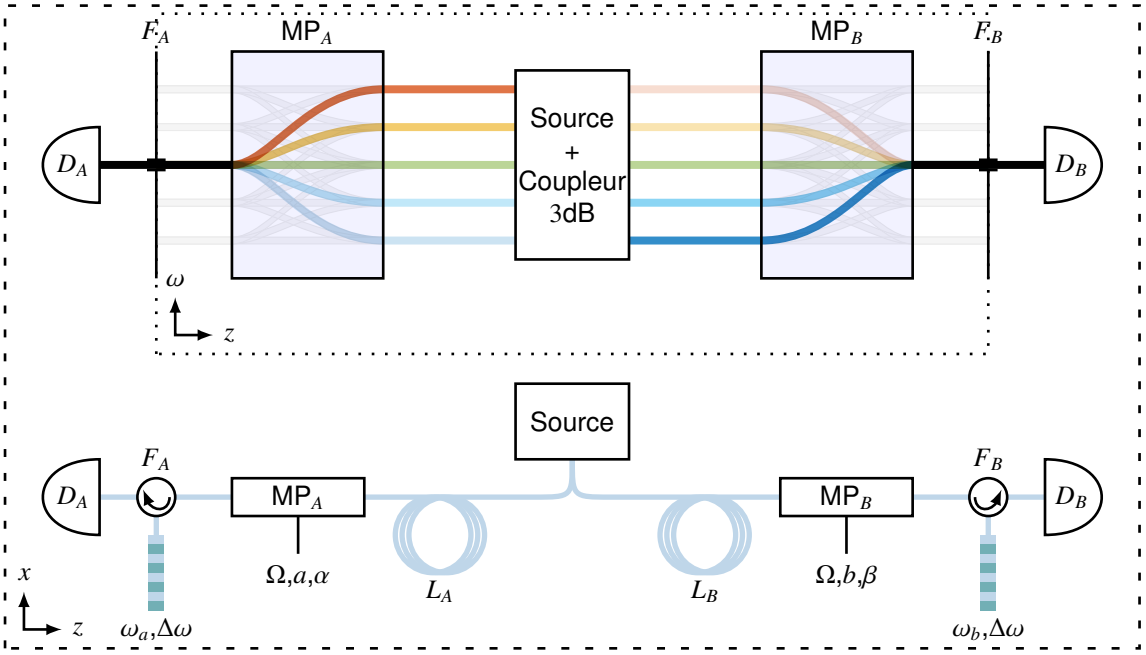


FIGURE 2.18 – Schéma d'interférence à deux photons dans l'espace des fréquences. Un même chemin est représenté avec la même transparence, les couleurs indiquent la fréquence du photon.

totalement brouillée. Ici se passe le même genre de phénomène, à la différence que la figure d'interférence n'est pas une sinusoïde et que ce n'est pas la périodicité des figures d'interférence qui varie en fonction de la fréquence, mais le déphasage de cette figure d'interférence. Le contact optique étant obtenu pour une longueur de propagation nulle, il en résulte une visibilité maximale de la figure d'interférence. Dès que la longueur de propagation n'est pas nulle, les figures d'interférence monochromatiques se déphaseront d'une quantité propre à leur fréquence, ce qui implique une baisse de visibilité de la figure d'interférence. Lorsque qu'un déphasage supérieur à 2π peut exister entre les différentes figures d'interférence monochromatiques, la visibilité de la figure d'interférence est complètement dégradée.

Nous avons représenté, figure Fig.2.19, une simulation de la figure d'interférence en fonction de la distance de propagation et du déphasage RF en considérant des filtres de bande passante 3 GHz et un décalage des filtres nul, $\omega_a = \omega_b$. Comme nous venons de le décrire, on peut remarquer que, pour de faibles propagations, la figure d'interférence est identique à celle obtenue dans le cadre monochromatique, figure Fig.2.17, et suit les variations d'une fonction de Bessel d'ordre 0.

Puis lorsque la longueur de propagation augmente, nous pouvons observer que la figure d'interférence est très rapidement brouillée et qu'après une longueur de propagation correspondant à la longueur de Talbot, L_p, nous ne retrouvons pas le motif original. Ainsi, il est tout aussi important de corriger la dispersion intra-chemin que la dispersion inter-chemin, si l'on veut obtenir le même motif d'interférence à une distance donnée qu'à distance de propagation nulle.

Nous allons maintenant considérer le cas où les photons se propagent dans la même fibre optique, puis nous verrons de quelle manière on peut corriger la dispersion.

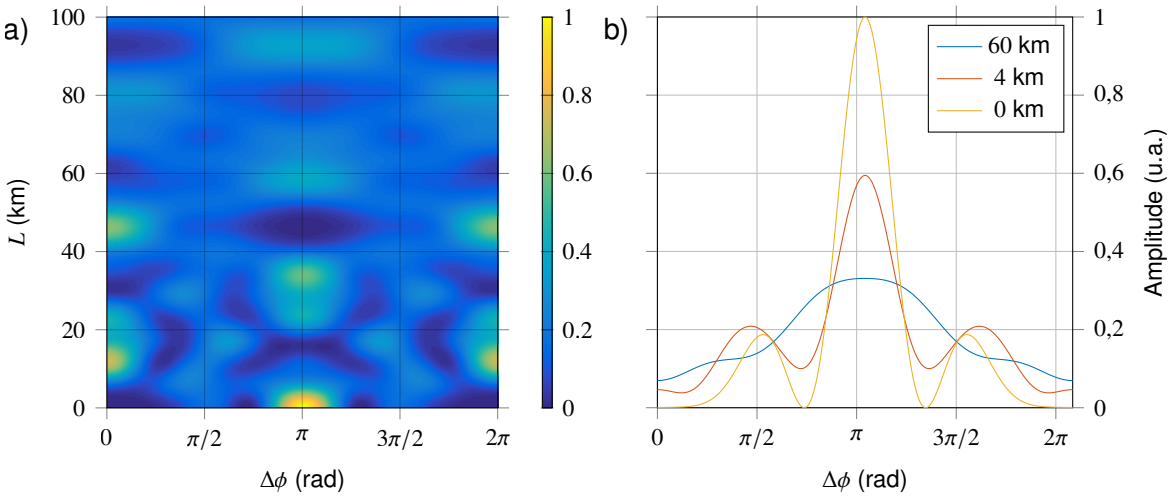


FIGURE 2.19 – Simulation de la figure d'interférence en fonction de la phase et de la propagation. La figure a) représente la déformation de la figure d'interférence en fonction de la propagation pour des taux de modulation $a = b = 2.75$. Sur la figure b) sont représentées des coupes à 0 m, 4 km et 60 km.

2.2.1.2/ CO-PROPAGATION

Dans la section précédente, nous avons vu que la propagation des photons avant modulation conduit à l'ajout d'une phase linéaire dont l'effet sur la figure d'interférence est équivalent au déphasage RF. Cette phase s'écrit $\beta_1 \Omega \delta L$ et croît très vite en fonction de la différence de longueur de propagation des deux photons. Ainsi, il suffit que ΔL vaille 2 cm pour acquérir une phase de 2π. A priori, à distance ΔL, cette phase est fixe et nous pouvons produire la figure d'interférence à l'aide du déphasage RF. Cependant, lorsque la différence de propagation est grande, les variations d'indice de la fibre dues aux fluctuations thermiques peuvent suffire à déphaser la figure d'interférence au cours d'une expérience longue. Pire encore, même si les fibres sont choisies pour être de même longueur, il suffit que les variations thermiques de chaque fibre diffèrent pour introduire des variations de phases rédhibitoires. Dans le but d'une implémentation expérimentale rapide, nous avons avancé deux solutions à ce problème. La première, que nous traitons maintenant, est de faire se propager les photons jumeaux dans la même fibre. Les longueurs de propagation vues par chaque photon sont donc parfaitement identiques quelles que soient les variations thermiques. Cette solution s'affranchit de toutes les contraintes expérimentales, de surcroît elle divise par deux la quantité de fibre nécessaire à créer une dispersion donnée. En effet la propagation des photons dans une fibre de longueur L_0 est équivalente à $L_A = L_0$ et $L_B = L_0$, soit $L = 2L_0$. De plus, il est strictement identique, du point de vu de l'interférence, que les photons se propagent dans une même fibre ou dans deux fibres séparées. Cependant cette technique ne possède que l'intérêt d'une démonstration du phénomène, car l'utilisation de photons jumeaux pour une communication longue distance n'est utile que s'ils sont séparés. Nous retiendrons toutefois ces deux solutions car la seconde est plus facile à mettre en place expérimentalement.

Avant la réalisation expérimentale, nous allons nous intéresser au dernier point, la propagation après modulation.

2.2.2/ PROPAGATION APRÈS MODULATION

Afin d'isoler cet effet, considérons que la propagation avant modulation est nulle $L_B = L_A = L_0 = 0$. Comme le montre le schéma figure 2.18, il n'existe qu'un seul chemin de fréquence, représenté en noir, allant du modulateur au détecteur. Ainsi, la propagation le long de cette fibre ne peut en aucun cas modifier la relation de phase entre les chemins de fréquence. Toutefois, des effets existent sur la mesure de coïncidence. En effet si les deux photons n'ont pas parcouru la même distance pour rejoindre le détecteur depuis la source, les détecteurs devront être déclenchés en tenant compte de ce délai pour que l'arrivée des photons coïncide avec les fenêtres de détection. Ainsi ces dernières devront être décalées d'un temps correspondant à la vitesse de groupe multiplié par la différence de longueur des fibres $\Delta T = \beta_1(L_b - L_a)$. Le second effet est la déformation de l'enveloppe temporelle du photon détecté, due aux effets de la dispersion. Nous allons maintenant décrire ces effets sur la fonction de probabilité de détection des photons en coïncidence, par rapport à celle obtenue dans le cadre des petites propagations (2.94). Lorsque la distance avant propagation est nulle, la probabilité de détection peut se mettre sous la même forme que (2.94), les hypothèses étant identiques, à l'exception de celle sur la dispersion après modulation. Celle-ci s'écrit

$$p_c(\tau) = p_s \otimes r_A \star r_B(\tau - \Delta T) = \eta_a \eta_b \left| f_0 J_d(c) \right|^2 \left| \tilde{F}_D \right|^2 \otimes r_A \star r_B(\tau - \Delta T). \tag{2.108}$$

Mais cette fois l'impulsion temporelle du bi-photon en intensité vaut

$$\begin{aligned} \left| \tilde{F}_D(t_b - t_a - \Delta T, \delta_{cf}) \right|^2 = \Bigg| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega R_A(\omega_a + \omega) R_B(\omega_b + \delta_{cf} - \omega) \\ \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[\omega(t_a - t_b + \Delta T) - \beta_2(\omega_a - \omega_0 + \omega)^2 L_a/2 - \beta_2(\omega_b - \omega_0 + \delta_{cf} - \omega)^2 L_b/2\right]} \Bigg|^2, \end{aligned} \tag{2.109}$$

où l'on rappelle que t_a et t_b sont les temps auxquels l'observation a lieu sur les deux détecteurs, ω_a et ω_b sont les centres des spectres des filtres et $\omega_a + \omega_b - 2\omega_0 = d\Omega - \delta_{cf}$, avec $\left|\delta_{cf}\right| < \Omega/2$.

Nous avons limité la dispersion au terme β_2 car les filtres sont fins, $\Delta\omega = 2,6$ GHz et sont toujours situés à quelques fréquences de modulation Ω de la fréquence de dégénérescence. Considérons un exemple extrême où les filtres sont éloignés de 50 GHz de la dégénérescence, la distance totale de propagation $L_a + L_b$ vaut 100 km et δ_{cf} est nul. Le déphasage entre les fréquences extrémales du spectre bi-photon filtré, apporté par la dispersion d'ordre 2, vaut 10π, alors que celui généré par la dispersion d'ordre 3 est 200 fois plus faible.

La dispersion d'ordre 2 introduit uniquement un élargissement temporel de l'impulsion bi-photon qui conduit à l'élargissement du pic de coïncidences. Ce phénomène n'a pas d'impact sur la figure d'interférence, nous ne propagerons donc pas les photons sur de grandes distances après modulation.

Ainsi, nous avons validé deux moyens de contrôle des effets de la dispersion linéaire sur la figure d'interférence. Pour des longueurs de propagation supérieures à 4km nous utiliserons une propagation conjointe des photons, en dessous de 4 km nous pourrons utiliser l'une ou l'autre des techniques. Nous avons vu que le terme de dispersion linéaire doit

être maitrisé et que son influence n'est pas la même si la propagation a lieu sur un bras ou sur l'autre. Nous allons maintenant voir ce qu'il en est de la dispersion quadratique.

2.2.2.1/ CARACTÈRE NON-LOCAL DE LA DISPERSION

En examinant de nouveau la probabilité de détection des photons en coïncidence (2.105), nous pouvons remarquer que la dispersion quadratique est toujours accompagnée de la distance totale de propagation $L = L_A + L_B$. Du point de vue de l'interférence, il n'y a aucun moyen de savoir si les photons se sont propagés ensemble ou séparément, ou même comment ont été réparties les longueurs de propagation entre les deux photons. La dispersion quadratique joue donc un rôle global sur cet interférence et peut être délocalisée sur n'importe lequel des photons. Ce caractère non local de la dispersion a été mis pour la première fois en avant par [Franson, 1992], avec un interféromètre à différence de trajets optiques. Avant de passer à l'étude plus poussée de la dispersion et de son annulation, nous allons traiter le cas des interférences à un photon qui peuvent survenir sur chaque bras et modifier le taux de détection des détecteurs.

2.2.2.2/ INTERFÉRENCES À UN PHOTON

Dans la partie 2.1.1.3, nous avons mis en évidence que, pour obtenir une figure d'interférence un photon à l'aide d'un filtre et d'un détecteur positionnés derrière le modulateur, il est nécessaire d'avoir un état de superposition sur plusieurs *bins* en entrée de modulateurs et une relation entre les *bins* qui ne soit pas une relation de phase linéaire. Lorsque la dispersion avant modulation n'est pas négligeable, nous avons une relation de phase quadratique qui apparaît entre les *bins*. En théorie, la probabilité de détecter un photon sur la voie A doit s'écrire,

$$\mathfrak{p}(a,\alpha,L_A) = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \left| f(\omega_0) R(\omega) \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_{-k}(a,\alpha-\beta_1\Omega L_A) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2 (k\Omega)^2 L_A/2} \right|^2 . \tag{2.110}$$

La probabilité de mesurer un photon par le détecteur doit donc varier en changeant α pour décrire le même type d'interférence que celle à deux photons. Nous n'avons pourtant jamais observé de variations du taux de détection en fonction du déphasage RF. L'explication, de l'absence de ce phénomène d'interférence à un photon, que nous avançons est que cet effet n'est pas visible car il est moyenné. La référence de phase de notre figure d'interférence est la phase RF α. Cette phase est définie comme étant celle de l'onde RF lorsque le photon entre dans le modulateur. Or, comme la diode de pompe émet de manière continue, nous n'avons aucune idée du moment où le photon pénètre dans le modulateur. Chaque photon verra donc une phase RF différente. Toutes les phases étant équiprobables, il n'y aura pas de variation du taux de détection moyen. Nous pourrions mettre en avant ce phénomène en utilisant un laser pulsé à un entier de la fréquence de modulation. De cette manière tous les photons verraient la même phase RF en entrée de modulateur. Nous pourrions aussi cadencer la détection par rapport à la fréquence de modulation, de manière à ne détecter que les photons voyant la même phase α. On peut toutefois noter qu'on serait limité par la gigue des détecteurs pour cette seconde solution.

Dans le cas de l'interférence à deux photons, nous ne connaissons pas non plus la phase RF lorsque les photons pénètrent dans les modulateurs, mais en revanche, comme les photons sont créés pendant un instant très court, la phase relative, $\alpha - \beta$, perçue par les deux photons est fixe.

Maintenant que nous avons écarté la possibilité d'être gêné par l'observation d'interférences à un photon lors de nos expériences, nous pouvons mettre en avant la manière dont nous corrigeons la dispersion.

2.2.3/ ANNULATION DE LA DISPERSION

Nous avons vu que la dispersion avant modulation joue un rôle global : peu importe quel photon parcourt réellement la fibre dispersive, la figure d'interférence est affectée de la même manière. C'est sur une idée analogue que [Franson, 1992] a proposé une implémentation de la compensation non-locale de la dispersion. Il suggère ainsi que l'on peut montrer cette non-localité en compensant la globalité de la dispersion en n'agissant que sur un photon d'une paire intriquée. L'idée est de séparer les photons jumeaux, de leur appliquer une certaine dispersion et de mesurer l'élargissement temporelle de l'impulsion bi-photon en résultant. Il suffit ensuite d'appliquer à un seul des photons une dispersion de même norme que la dispersion totale, mais de signe opposé. Ainsi l'impulsion temporelle observée devrait être identique à celle obtenue sans aucune dispersion. Cet effet a pu être mis en évidence [Steinberg et al., 1992b, Baek et al., 2009] expérimentalement mais la mesure de l'impulsion temporelle du bi-photon, réalisée à l'aide d'une mesure de coïncidence, a été limitée par la gigue des détecteurs, et une correction complète n'a pas pu être efficacement montrée. Il s'en est suivi un débat animé où des détracteurs de cet aspect non-local ont tenté de reproduire les mêmes effets avec des faisceaux classiques [Torres-Company et al., 2009, Shapiro, 2010]. Mais ces expériences n'ont reproduit qu'en partie les effets observés, et non leur totalité. En outre, il était systématiquement nécessaire de produire une interférence locale après dispersion des faisceaux, pour annuler l'effet dispersif. D'autres expériences quantiques ont pu montrer cet effet avec une correction complète, soit en réalisant une interférence locale de type Hong-Ou-Mandel [Barak et al., 2012] entre les photons jumeaux, soit par interaction de type génération de seconde harmonique dans un cristal non linéaire [O'Donnell, 2011, Lukens et al., 2013]. Dans tous les cas, une interaction locale des photons dispersés est nécessaire et ne prouve pas la non-localité du phénomène. Une solution convaincante permettant de trancher le débat a été apportée par [Zhong et al., 2013], en montrant la correction des effets de la dispersion sur une figure d'interférence non locale. Ils utilisent pour cela un interféromètre de Franson [Franson, 1991a], où les photons jumeaux séparés rencontrent chacun un interféromètre local dont un des bras subit une dispersion. Les auteurs enregistrent alors une baisse de visibilité de leur figure d'interférence sinusoïdale, due à cette dispersion. Ils montrent ensuite qu'en appliquant une certaine dispersion à un des interféromètres et la dispersion opposée au second, ils parviennent à retrouver la visibilité maximale de leur interférence, prouvant de ce fait une compensation non-locale de la dispersion.

Ce résultat a été publié au cours de mes travaux de thèse et nous avons indépendamment suggéré une idée analogue. Nous avons montré la sensibilité à la dispersion de notre interféromètre non-local, il suffit alors d'appliquer à un seul des photons la dispersion opposée à la dispersion totale et de voir si on retrouve la figure d'interférence sans

dispersion. Dans le prochain chapitre, nous allons proposer une réalisation expérimentale de ce phénomène.

2.3/ CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté une architecture d'interférence quantique à deux photons en fréquence et son évolution en fonction de la distance de propagation des photons intriqués. Par l'étude théorique, nous avons mis en évidence des paramètres expérimentaux cruciaux à contrôler afin d'observer l'interférence voulue. Nous avons vu que la propagation des photons, avant modulation, modifie la figure d'interférence. Celle-ci se répercute de manière non-locale et peut être attribuée à n'importe quel photon de la paire. Ainsi, la compensation de la dispersion, peut aussi être réalisée de manière non-locale. Nous allons maintenant présenter le dispositif expérimental permettant de réaliser une interférence à deux photons en fréquence et d'observer le phénomène de compensation de dispersion.

3

RÉALISATION EXPÉRIMENTALE DU PHÉNOMÈNE DE DISPERSION NON-LOCALE ET DE SA COMPENSATION

Sommaire

3.1 Caractérisation des éléments du système expérimental 77
3.1.1 Source de photons intriqués en fréquence 78
3.1.2 Manipulation de fréquences 84
3.1.3 Filtres accordables en fréquence 91
3.1.4 Détection et performances du système optique 95
3.2 Système interférométrique longue distance 109
3.2.1 Caractérisation des franges d'interférence à deux photons 109
3.2.2 Caractérisation des modules à compensation de dispersion . . . 112
3.2.3 Effets de la propagation et compensation de dispersion non-locale 116

Ce chapitre est dédié à la réalisation expérimentale de l'interférence quantique impliquant des chemins en fréquence, mise en évidence dans le chapitre précédent, et à l'observation des effets de la propagation sur celle-ci. Grâce à l'étude théorique de ces interférences quantiques, nous avons déduit les caractéristiques que devaient posséder les composants de notre système. Ainsi, la première partie de ce chapitre est dédiée à la présentation des composants retenus et à leur caractérisation. Par la suite, nous vérifions que le système permet bien de la réaliser la figure d'interférence quantique voulue. Enfin nous observons l'évolution d'une figure d'interférence de référence lorsque les effets de la propagation ne sont plus négligeables. Nous montrons alors qu'une compensation non-locale de la dispersion peut être obtenue sur notre figure d'interférence.

3.1/ CARACTÉRISATION DES ÉLÉMENTS DU SYSTÈME EXPÉRIMENTAL

Dans cette section nous allons décrire les caractéristiques des différents composants. Nous nous intéresserons tout d'abord à la source de photons intriqués et plus particulièrement à sa longueur d'onde d'émission et à son taux de conversion. Puis, nous pré-

senterons les caractéristiques des modulateurs de phase, qui permettent de manipuler la fréquence des photons intriqués. Nous porterons particulièrement attention à la génération de l'onde Radio-fréquence pilotant ces modulateurs. Dans une troisième partie nous vérifierons les caractéristiques des filtres de fréquence, nécessaires à la discrimination de l'état mesuré. Enfin, nous présenterons le système de détection et de corrélation utilisé et décrirons le procédé de traitement des données, avec notamment une étude statistique du bruit.

3.1.1/ SOURCE DE PHOTONS INTRIQUÉS EN FRÉQUENCE

La source de photons enchevêtrés a été développée au sein de notre laboratoire. Comme montré figure Fig.3.1, les photons jumeaux sont produits par le pompage d'un cristal de PPLN par une diode laser. Un atténuateur variable et un isolateur optique permettent de contrôler la puissance de pompe sans déstabiliser la cavité optique de la diode. Plusieurs asservissements permettent de contrôler précisément la longueur d'onde d'emission de la diode laser et celle de l'accord de phase dégénéré du cristal.

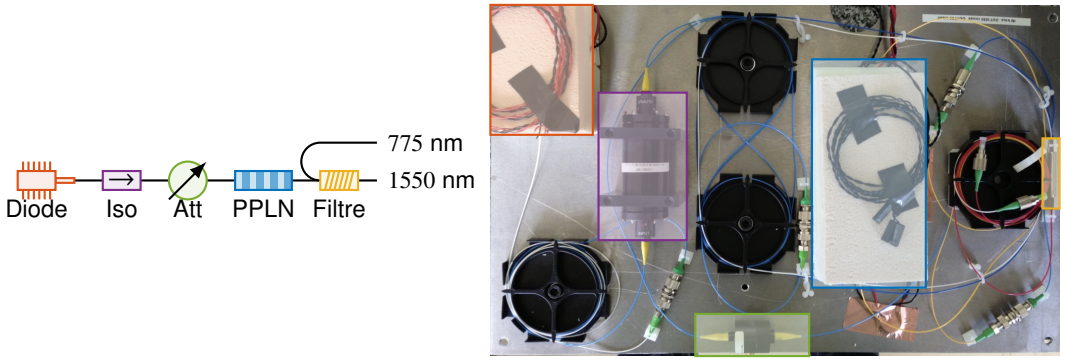


FIGURE 3.1 – Schéma de la source de photons jumeaux. Les photons intriqués sont générés à partir du pompage d'un cristal de PPLN par une diode laser continue et monochromatique. On peut ajuster la puissance de pompe à l'aide d'un atténuateur variable (Att). Afin d'éviter la déstabilisation de l'émission laser par les réflexions sur les différents composants, un isolateur (Iso) est placé en sortie de diode. Enfin les photons intriqués sont séparés des photons pompes à l'aide d'un filtre. Sur la photographie, les différents éléments sont identifiables grâce au code de couleur du schéma. Le cristal de PPLN et la diode sont masqués par leur isolement thermique.

Lors de la génération de photons jumeaux dégénérés, la longueur d'onde de la source doit être centrée sur le maximum de la bande de conversion du PPLN pour obtenir l'efficacité maximale. La longueur d'onde centrale du spectre bi-photons est identique au double de celle du laser de pompe.

De manière à obtenir une source efficace et adaptée à notre expérience, il faut tout d'abord verrouiller la fréquence d'émission de la diode de pompe pour que la fréquence de dégénérescence ne dérive pas par rapport aux filtres. Ensuite, il faut ajuster le PPLN pour que la fréquence de dégénérescence corresponde au maximum de conversion. Nous allons maintenant présenter la caractérisation de ces deux composants clés.

3.1.1.1/ CARACTÉRISATION DE LA DIODE DE POMPE

La source de pompage est une diode laser dont la cavité est stabilisée par un réseau de Bragg.

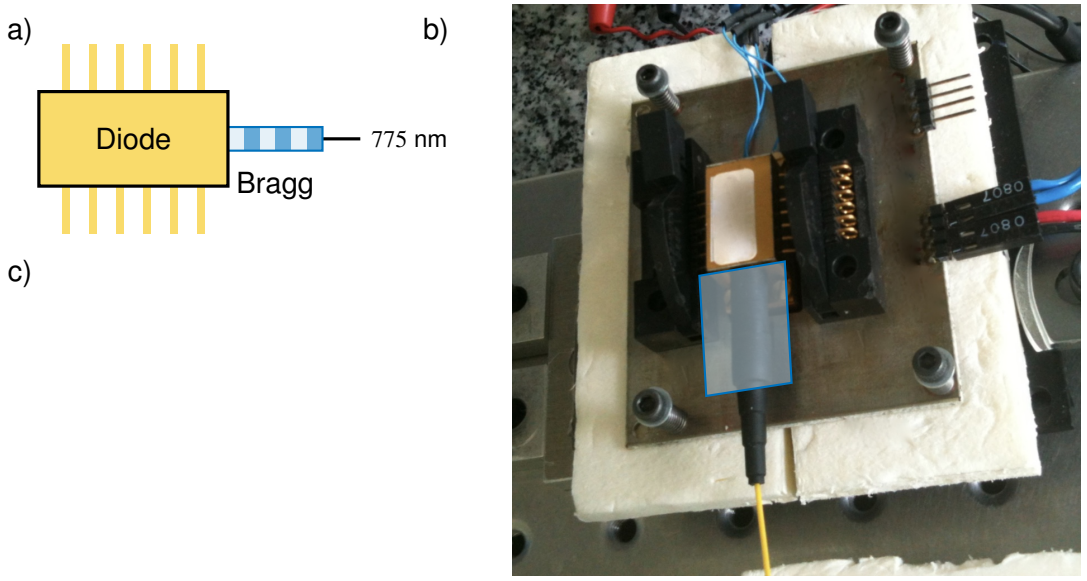


FIGURE 3.2 – Présentation de la diode laser de pompe. En a) est représenté un schéma de la diode laser, et en b) une photographie. Nous avons rappelé la position du filtre de Bragg à l'aide d'un encadré bleu sur le schéma b). Le graphique c) représente le spectre mesuré de cette diode, pour une température de 28°C et un courant d'alimentation de 53 mA.

La cavité optique est asservie en température et sa longueur d'onde centrale peut être ajustée sur quelques centaines de pm, en courant et en température. Les caractéristiques constructeur sont référencées dans le tableau 3.1.

Pour les tests préliminaires, le boitier de la diode laser a été monté sur un tampon thermique asservi en température lui servant de référence stable, comme le montre la photographie Fig.3.2. Les autres faces ont été isolées des fluctuations de la température ambiante à l'aide d'un habillage en polystyrène, comme on peut le voir sur la photographie de la source figure Fig.3.1. Une caractérisation à l'analyseur de spectre optique (OSA pour *Optical Spectrum Analyser*), possédant une résolution de 70 pm, montre que la longueur d'onde d'émission de la diode peut être accordée sur environ 200 pm selon les valeurs du courant de pompe et de la température de la cavité. Ces 200 pm correspondent à la bande-passante du réseau de Bragg en sortie de cavité. Dans les cas extrémaux où la longueur d'onde centrale du réseau est située entre deux modes de la diode laser, les photons sont émis par deux modes, on peut alors mesurer un écart de 175 pm entre les modes de la cavité, qui correspondent à une cavité laser de taille millimétrique. Nous choisirons donc le courant de pompe et la température de la cavité de manière à ce que la longueur d'onde d'émission soit identique à celle du centre du réseau de Bragg de sortie. La stabilité d'émission de la diode de pompe a pu être testée à l'aide d'une mesure de battement en utilisant un laser de référence et un analyseur de spectre RF, comme le montre le schéma Fig.3.3. Le laser de référence est un laser accordable dans la bande C. Afin de réaliser la mesure de battement, ce laser est doublé en fréquence (SHG pour *Second Harmonic Generation*) en pompant le cristal de PPLN dans le sens inverse de son utilisation pour générer de la fluorescence paramétrique. Ce processus inverse est

Caractéristiques de la diode de pompe		
Paramètre	*Valeur*	*Unité*
Puissance optique de sortie (max)	5	mW
Longueur d'onde centrale	774,6	nm
Largeur spectrale	<0,01	pm
Accordabilité en température	10	nm/˚C
Accordabilité en courant	9	pm/mA

TABLE 3.1 – Caractéristiques de la diode de pompe

bien plus efficace et le battement résultant du mélange des deux ondes optiques donne la composante radiofréquence dont nous analysons la stabilité temporelle.

La première mesure de battement figure Fig.3.4a montre une stabilité inférieure à 200 MHz de la source par rapport au laser de référence doublé en fréquence et ce pour une augmentation de la température de près de 1˚C. Ceci signifie que la longueur d'onde centrale du spectre bi-photons, générée par cette source autour de 1550 nm, présente une stabilité de l'ordre de 100 MHz/˚C. Celle-ci équivaut à une baisse du taux de coïncidences de moins de 5%.

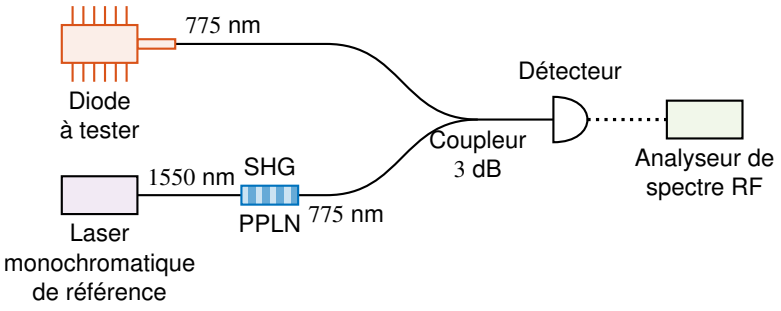
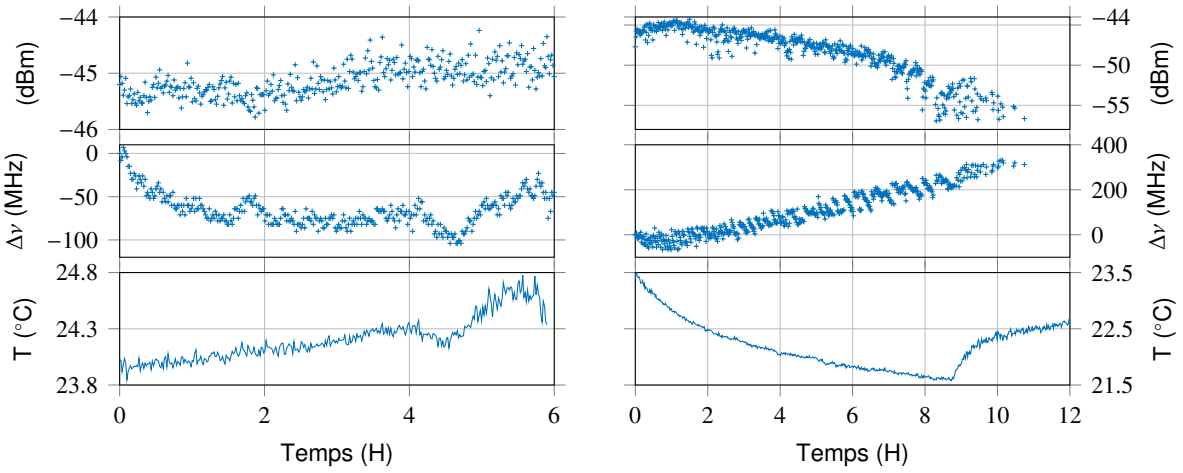


FIGURE 3.3 – Schéma de la mesure de battement RF entre la diode et le laser de référence.

Toutefois la figure Fig.3.4b montre qu'une trop grande dérive peut entraîner un saut de mode de la diode. En effet, à partir de 8H d'acquisition, le pic de battement disparait périodiquement jusqu'à ne plus être mesurable. Ce saut de mode ne correspond pas à ceux de la cavité laser, en effet le battement a été retrouvé en déplaçant le laser de référence de 10 pm, ce qui correspond à l'intervalle spectrale libre d'une cavité centimétrique. Il semble donc que le réseau de Bragg crée une seconde cavité optique pouvant entraîner un saut de mode. Ce saut de mode peut être obtenu soit par modification du courant de pompe ou de la température de la diode laser, soit par une modification de la température du réseau de Bragg. Un saut de mode de 10 pm est cependant rédhibitoire pour nos expériences quantiques car il entraîne une baisse du taux de coïncidences de près 100%, ce que nous pourrons voir lors de la caractérisation des filtres.

Cette étape de caractérisation de la diode laser nous a indiqué qu'il était nécessaire de contrôler précisément les températures de la cavité laser et du réseau de Bragg afin d'éviter qu'elles ne varient de plus de $0,01$ ˚C, dans un environnement où la température peut varier de plus de 5˚C. Il faut aussi contrôler le courant de pompe au mA près. Enfin il faudra trouver des conditions de courant et températures qui nous permettent d'être le plus éloignés possible d'une position de saut de mode.



(a) Dérive en fréquence de la source.

(b) Dérive en fréquence de la source puis saut de mode.

FIGURE 3.4 – Mesure de battement RF entre la diode et le Laser de référence (Amplitude, fréquence et température ambiante).

Comme des sauts de modes peuvent intervenir avec la modification de plusieurs paramètres, il n'est pas aisé de trouver un régime stable de la diode laser pour n'importe quelle longueur d'onde ou n'importe quelle puissance optique de sortie. Il a donc été choisi de fixer la puissance optique et la longueur d'onde de la diode, puis d'aligner la longueur d'onde centrale du maximum de conversion et la position des filtres par rapport à la diode laser. La puissance optique de la diode peut ensuite être facilement modifiée à l'aide d'un atténuateur variable.

Nous pouvons maintenant passer à la caractérisation du cristal non linéaire.

3.1.1.2/ CARACTÉRISATION DE L'ACCORD DE PHASE DÉGÉNÉRÉ

Le cristal de PPLN mesure 3 cm et a été fabriqué par HCPHOTONICS. Il est connecté, en entrée, à une fibre mono-mode à 775 nm et, en sortie, à un coupleur permettant la séparation des photons de pompe à 775 nm des photons générés par fluorescence paramétrique autour de 1550 nm. Comme la longueur d'onde d'accord de phase dégénéré dépend de la période d'inversion du cristal, il est possible de l'accorder sur quelques centaines de picomètres. Le cristal de PPLN a donc été intégré dans un bloc de cuivre dont la température est asservie.

Les caractéristiques de l'accord de phase dégénéré peuvent plus facilement être déterminées en génération de seconde harmonique qui est un processus plus efficace.

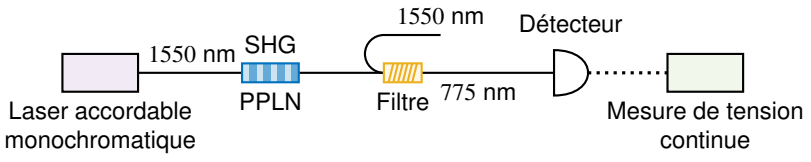
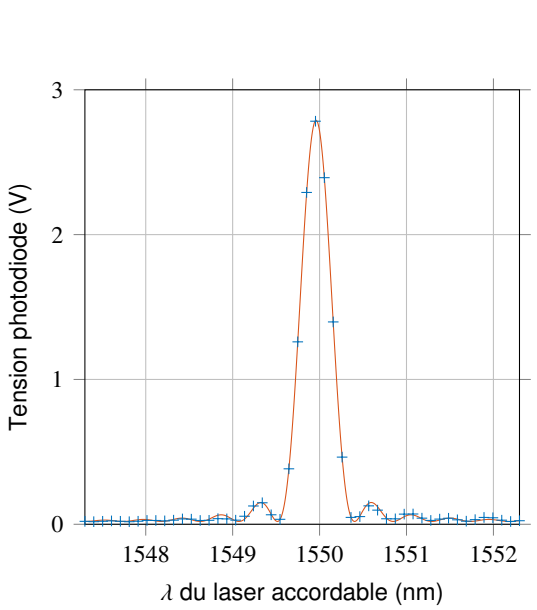
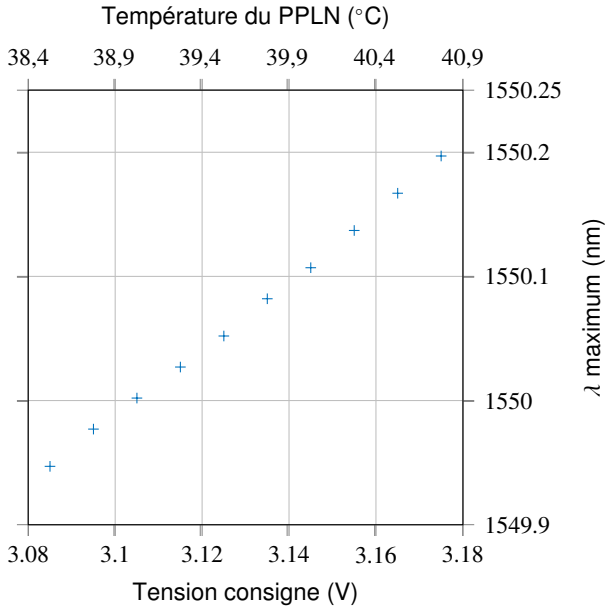


FIGURE 3.5 – Schéma de caractérisation de l'accord de phase du PPLN en SHG.

Comme représenté sur la figure Fig.3.5, on pompe le cristal à l'aide d'un laser monochromatique accordable, de longueur d'onde λ située autour de 1550 nm. On génère ainsi des photons à la longueur d'onde moitié $\lambda/2$ avec une efficacité dépendant de l'écart entre λ et la longueur d'onde d'accord de phase du cristal. On enregistre les variations de puissance optique, à l'aide d'une photodiode aveugle dans l'infrarouge et on change la longueur d'onde du laser accordable λ. La figure Fig.3.6a représente la tension fournie par la photodiode en fonction de la longueur d'onde du laser, les "+" en bleu représentent les relevés expérimentaux et la ligne rouge représente un ajustement des données expérimentales par rapport au modèle théorique de génération de second harmonique.



(a) Spectre de conversion du PPLN en SHG.



(b) Maximum de conversion du PPLN en SHG en fonction de la tension de la température.

FIGURE 3.6 – Caractérisation du maximum de conversion du PPLN en SHG.

Nous avons alors changé la température du PPLN en modifiant la tension de consigne de l'asservissement et nous avons représenté, figure Fig.3.6b, l'évolution de la longueur d'onde du maximum de conversion autour de la zone d'intérêt, c'est-à-dire proche du double de la longueur d'onde d'émission de la diode laser.

Ces deux figures nous permettent d'estimer la stabilité en température requise du cristal de PPLN afin de s'assurer que le taux de coïncidences reste au dessus de 95% du maximum. On trouve que la longueur d'onde de l'accord de phase dégénéré ne doit pas varier de plus de $7,5$ GHz, soit $13,5$ mV pour la tension de mesure de l'asservissement, ou encore $0,3$˚C pour la température du cristal.

On peut alors tester la stabilité de l'asservissement en mesurant les variations du nombre de coïncidences en fonction de la température du cristal, comme représenté sur le schéma Fig.3.7. La diode est stabilisée en température afin de correspondre à un point de fonctionnement donné.

On a représenté figure Fig.3.8 l'évolution du nombre de photons convertis et de coïncidences lors d'un cycle d'élévation de la température du PPLN depuis la température

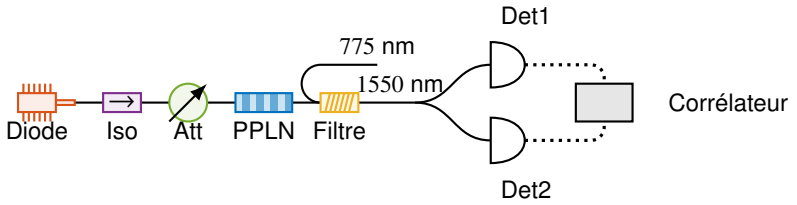


FIGURE 3.7 – Schéma de caractérisation de l'évolution du nombre de photons convertis et du nombre de coïncidences en fonction de la température du PPLN.

ambiante.

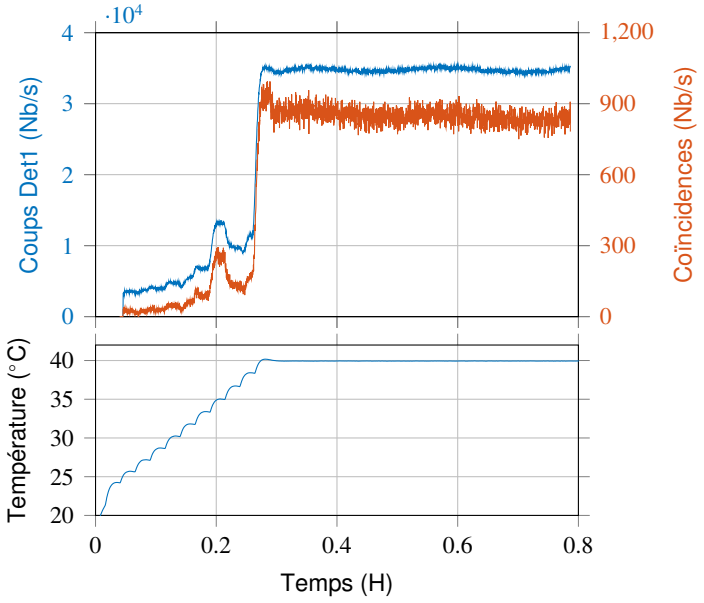


FIGURE 3.8 – Évolution des coïncidences en fonction de la température du PPLN.

Ce cycle d'élévation de la température par paliers est nécessaire pour limiter le courant débiter par le circuit d'asservissement. La diode est alimentée en courant à partir du moment où le nombre de coups détectés sur le premier détecteur n'est plus nul. On voit que le nombre de coup détectés et de coïncidences croît avec la température en décrivant le sinus cardinal de l'accord de phase. La température de consigne du PPLN a été choisie pour être proche du maximum de conversion, mais toujours dans la pente du lobe central du spectre présenté Fig.3.6a. On obtient ainsi une plus grande sensibilité du taux de photons émis que si l'on était au maximum de conversion. On peut alors remarquer que le taux de photons détectés se stabilise très rapidement, tout comme la température du cristal.

Nous avons mesuré, à l'aide d'un analyseur de spectre à faible bruit, le spectre de fluorescence obtenu pour différentes valeurs de température du cristal de PPLN. Ces résultats sont représentés sur la figure Fig.3.9.

Nous pouvons observer la figure d'accord de phase usuelle [Nguyen, 2008]. Ainsi, nous observons qu'à une température supérieure à l'accord de phase dégénéré, les photons intriqués sont émis dans deux lobes spectralement séparés. Nous sortons ainsi du cadre théorique fixé qui suppose que ce spectre est continu et large. À la température d'accord de phase, $\approx 29^{\circ}$C, le spectre mesuré à l'allure prédite théoriquement par l'équation

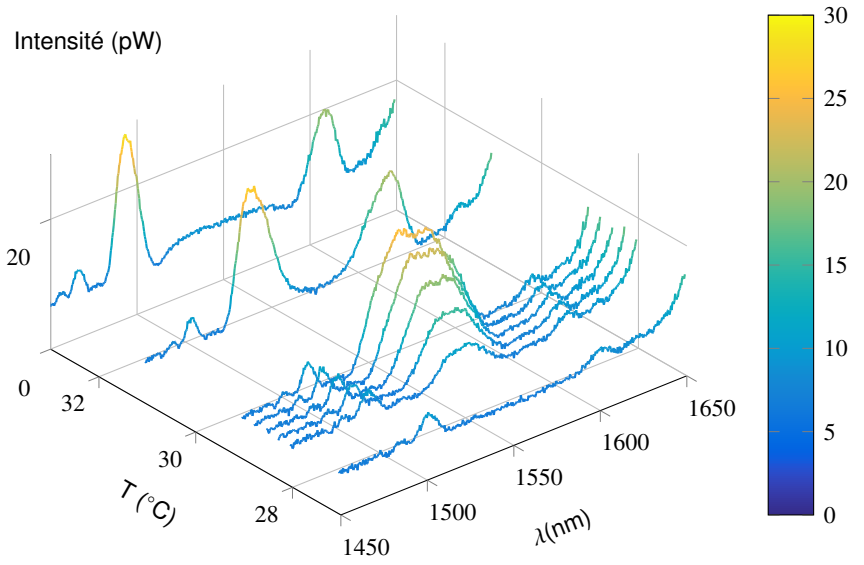


FIGURE 3.9 – Évolution, en fonction de la température du PPLN, du spectre de fluorescence paramétrique mesuré à l'OSA.

(2.70). De plus, la largeur spectrale à mi-hauteur mesurée de 57 nm est en très bon accord avec les 7 THz calculés à partir des données constructeur. Nous pouvons noter que ces spectres n'ont été obtenus que récemment et que lors des expériences réalisées, la procédure de réglage pour obtenir l'accord de phase dégénéré consistait à maximiser les coïncidences obtenues lorsque la source est filtrée finement autour de la dégénérescence.

Les caractéristiques du PPLN ont été répertoriées dans le tableau 3.2.

Les performances obtenues répondent entièrement au cahier des charges. Nous pouvons maintenant caractériser le système de manipulation des photons en fréquence.

3.1.2/ MANIPULATION DE FRÉQUENCES

Afin de manipuler les photons en fréquence, nous utilisons des modulateurs de phase électro-optiques. Chacun des modulateurs est piloté par une onde RF dont on doit contrôler l'amplitude et la phase. Nous allons tout d'abord présenter les caractéristiques des modulateurs, puis le système de contrôle RF développé au cours de cette thèse.

3.1.2.1/ LES MODULATEURS DE PHASE

Les deux modulateurs utilisés sont construits par EOSPACE et ont des propriétés très similaires. Elles sont référencées dans le tableau 3.3. Nous pouvons observer un de ces modulateurs de phases relié au système de contrôle RF sur le schéma Fig.3.10 ou en bas à gauche de la photographie Fig.3.11.

Caractéristiques du PPLN		
Paramètre	*Valeur*	*Unité*
Bande passante de la fluorescence paramétrique dégénérée	≈ 7	THz
Brillance pour $P_{pompe} = 0,1$ *mW*	$> 10^5$	paires/pm/s
Rendement de conversion	$3 \cdot 10^{-5}$	$\text{Photon}_{\text{signal}}/\text{Photon}_{\text{pompe}}$
Accordabilité en température @1550 nm	$0,11$	nm/˚C
Variation de température du PPLN pour 1 ˚*C de variation de la température ambiante*	$0,04$	˚C/˚C

TABLE 3.2 – Caractéristiques du PPLN

Caractéristiques des Modulateurs			
Modulateur	*Tension demi-onde* V_π *(V)*	*Pertes (dB)*	*Bande Passante (GHz)*
Alice	$2,9$	3	26
Bob	$2,8$	3	26

TABLE 3.3 – Caractéristiques des Modulateurs

3.1.2.2/ SYSTÈME DE CONTRÔLE RADIO-FRÉQUENCE

La fréquence de modulation a été choisie de manière à isoler correctement les différents *bins*, il faut pour cela qu'elle soit supérieure à 4 fois la bande passante des filtres, c'est-à-dire 12 GHz. Nous avons donc choisi une fréquence $\omega_0/2\pi = 12,5$ GHz proche de ce minimum, ce qui permet d'atteindre plus aisément plusieurs harmoniques de modulation à l'aide des filtres. Afin d'éviter tout problème de dérive de phase entre les deux modulateurs dû à des dérives de fréquence, l'onde pilotant chaque modulateur provient de la même source. Cette onde est divisée en amplitude et chaque partie rejoint la même architecture présentée figure Fig.3.10, dont on détaille les différentes étapes.

Le but de cette architecture est de pouvoir contrôler simplement, mais précisément l'amplitude et la phase de l'onde RF. Comme on veut pouvoir les changer de manière indépendante, la première partie du montage, représentée par l'encadré bleu sur la figure Fig.3.10, est dédiée à la création de l'onde à $12,5$ GHz et à son déphasage. Le but est d'obtenir un signal d'amplitude constante dont on peut ajuster la phase.

Ce signal traverse ensuite un amplificateur à fort gain muni d'un atténuateur variable, représenté par l'encadré vert sur la figure Fig.3.10. L'atténuation de ce dernier nous permet d'ajuster l'amplitude de l'onde RF à la valeur voulue. Par soucis de simplification expérimentale nous avons choisi des composants dont le pilotage est électronique. Ceci nous permet de modifier les valeurs d'amplitude et phase depuis un ordinateur à l'aide d'un convertisseur numérique/analogique (CAN), que l'on peut observer sur la figure Fig.3.11. Notons que sur cette dernière photographie, nous avons mis en avant les éléments clés du système RF et nous allons détailler les différentes étapes.

Décrivons tout d'abord la partie permettant de contrôler cette phase. Afin d'ajuster

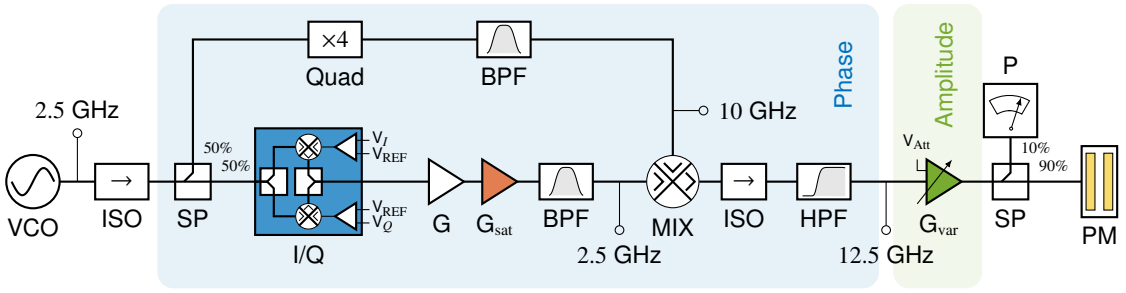


FIGURE 3.10 – Schéma du dispositif de contrôle de l'onde RF d'un modulateur. L'oscillateur piloté en tension (VCO) émet une onde sinusoïdale pure à $2,5$ GHz. Cette onde est isolée (ISO) et divisée en amplitude par un séparateur de puissance (SP). Une partie est multipliée par 4 (Quad), puis filtrée par un filtre passe bande (BPF) pour isoler correctement l'oscillation à 10 GHz. L'autre partie est envoyée dans un modulateur I/Q pour contrôler son déphasage. Elle est ensuite amplifiée dans un régime de saturation (G et G_{sat}) et filtrée pour isoler correctement l'oscillation à $2,5$ GHz. Les deux parties sont alors mélangées (MIX) pour fournir une onde à $12,5$ GHz, isolées par un filtre passe haut (HPF). Enfin on contrôle l'amplitude de l'onde résultante à l'aide d'un amplificateur à atténuation variable (G_{var}). On peut contrôler l'amplitude de cette dernière à l'aide d'un Puissance mètre (P) avant qu'elle soit envoyée dans le modulateur de phase (PM).

la phase de l'onde RF, nous utilisons un modulateur I/Q, représenté en bleu sur le schéma Fig.3.10. Ce type de modulateur utilise une modulation d'amplitude en quadrature de phase de la porteuse RF d'entrée. On peut alors appliquer deux tensions constantes V_I et V_Q qui modifient l'amplitude et la phase de la porteuse. La tension de l'onde RF en sortie du modulateur I/Q s'écrit $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0 - \phi)$ avec $V_0 = \left|\sqrt{(V_I - V_{\text{REF}})^2 + (V_Q - V_{\text{REF}})^2}\right|$, V_{REF} étant une tension de référence fixée et

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{V_I - V_{\text{REF}}}{V_Q - V_{\text{REF}}}\right) & \text{si } a > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{V_I - V_{\text{REF}}}{V_Q - V_{\text{REF}}}\right) & \text{si } a < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $a = V_I - V_{\text{REF}}$ et $b = V_Q - V_{\text{REF}}$.

Comme nous ne voulons induire que des variations de phase à l'aide du modulateur I/Q, nous envoyons l'onde RF de sortie dans un amplificateur fonctionnant en régime de saturation, que nous avons appelé G_{sat} et représenté en rouge sur la figure Fig.3.10.

Le régime de saturation permet d'obtenir une amplitude de sortie constante dès que l'amplitude d'entrée est supérieure à une tension de palier $V_{\min}$. D'un point de vue spectral, la tension de palier est une tension à partir de laquelle les harmoniques de la fréquence RF créées dans l'amplificateur ne sont plus négligeables par rapport à l'oscillation fondamentale. Si on dépasse la tension de palier, il y a saturation de l'énergie transportée par la fréquence fondamentale et le reste de l'énergie est contenu dans les harmoniques de la fréquence RF. Il suffit alors d'isoler la fréquence fondamentale à l'aide d'un filtre passe-bande fin, pour obtenir une amplitude constante dès que $V_0 > V_{\min}$.

On obtient alors le déphasage ϕ voulu en choisissant le couple de tension

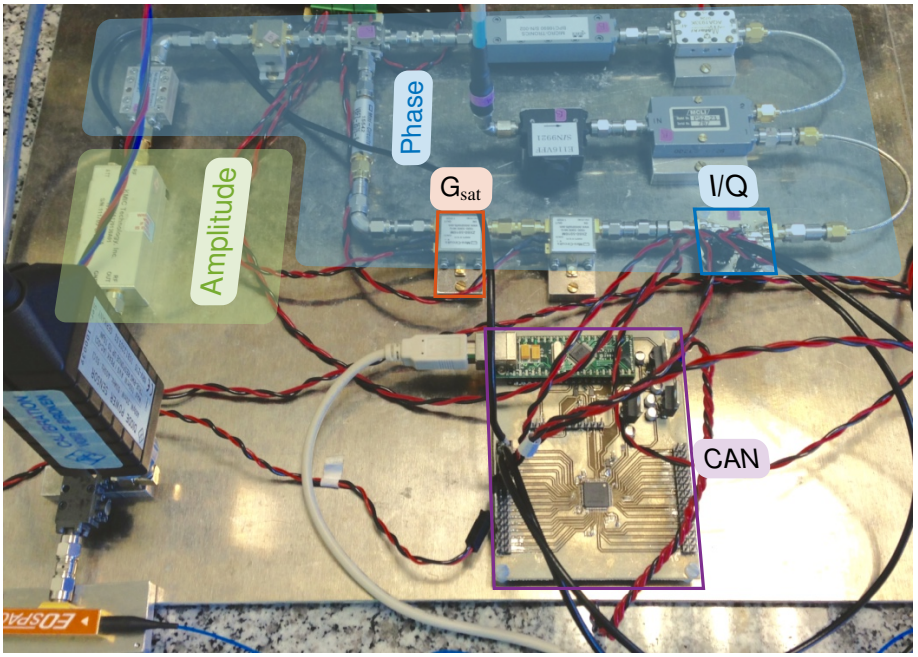


FIGURE 3.11 – Photographie du dispositif de contrôle RF d'Alice. On peut retrouver les différents éléments présentés sur le schéma Fig.3.10. L'encadré bleu correspond à la génération d'une onde RF à la fréquence de $12,5$ GHz, que l'on peut déphaser à loisir grâce au modulateur I/Q et sans en modifier l'amplitude, via l'utilisation d'un amplificateur saturé G_{sat}. L'encadré vert représente l'amplificateur à atténuation variable permettant d'ajuster l'amplitude de l'onde RF.

$$\left.\begin{aligned} V_I &= V_0 \cos\phi - V_{\text{REF}}, \\ V_Q &= V_0 \sin\phi - V_{\text{REF}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Comme il n'existe pas de modulateur I/Q standard fonctionnant à $12,5$ GHz et au coût raisonnable, nous en avons choisi un fonctionnant à $2,5$ GHz. Pour obtenir la fréquence de $12,5$ GHz requise, il suffit de multiplier le signal à $2,5$ GHz par un signal à 10 GHz. De manière à éviter les dérives de fréquence entre ces deux signaux, il faut que ceux-ci proviennent de la même source. Comme représenté sur le schéma Fig.3.10, on utilise une source fournissant une onde pure à $2,5$ GHz (VCO). Celle-ci est divisée en amplitude (SP) : une partie rencontre le modulateur I/Q et l'autre est quadruplée en fréquence (Quad) puis filtrée (BPF) pour obtenir une onde pure à 10 GHz. On filtre de nouveau en sortie du mélangeur (MIX) pour garder uniquement la composante à $12,5$ GHz, qui s'écrit

$$V(t) \propto \cos\left(5\omega t + \phi_0 - \phi\right), \tag{3.3}$$

où ϕ_0 est une phase qui dépend des phases accumulées par les ondes RF aux différentes fréquences.

Enfin, l'amplitude de l'onde est contrôlée à l'aide d'un amplificateur à fort gain (G_{var}). Cet amplificateur possède un gain constant suivi d'un atténuateur variable piloté à l'aide d'une tension constante.

À la sortie de cet amplificateur, la tension de l'onde RF s'écrit,

$$V(t) = V\cos\left(5\omega t + \phi_0 - \phi\right), \tag{3.4}$$

où V peut être ajusté par la tension de commande de l'atténuateur que l'on appelle V_{Att} et ϕ est contrôlé par les tensions V_I et V_Q.

Le modulateur I/Q utilisé est le modèle RF2480 du fabriquant RFDEVICES. La tension de référence vaut environ $V_{\text{REF}} = 3$ V et on peut faire varier V_I et V_Q entre 2 V et 4 V soit $V_{\text{REF}} \pm 1$ V. L'amplificateur variable est fabriqué par KMIC et il fournit un gain fixe de $35,8$ dB, mesuré à $V_{\text{Att}} = 0$ V. L'atténuation est maximale lorsque $V_{\text{Att}} = 5$ V et vaut 40 dB. Le gain correspondant à cette atténuation vaut $-4,2$ dB. Une caractérisation rapide montre que l'atténuation mesurée en dB est linéaire par rapport à la tension d'atténuation.

Les trois tensions de commande sont appliquées à l'aide d'un convertisseur numérique/analogique MAX5632, qui peut fournir des tensions comprises entre $-4,5$ V et 9 V. Les différentes valeurs sont codées sur 16 bits ce qui permet d'ajuster la tension par pas de $0,2$ mV. La précision obtenue est référence en table 3.4.

Caractéristiques des tensions de contrôle		
	Plage de variation (V)	*Résolution* MAX5632
Déphasage RF	2-4	$< 0,1\ ^\circ$
Atténuation	0-5	$< 0,0002$ dB

TABLE 3.4 – Caractéristiques des tensions de contrôle

Nous avons cartographié chacune des voies afin de caractériser l'amplitude et la phase des ondes RF générées. Nous avons tout d'abord voulu isoler l'influence des modulateurs I/Q sur celles-ci. Ainsi nous avons laissé constantes les tensions d'atténuation des amplificateurs G_{var} au cours de cette première série de mesures. Pour caractériser les variations d'amplitude des modulateurs I/Q, nous avons fait varier les tensions I/Q de 2 à 4 V par pas de 0,02 V et mesuré la puissance en sortie de l'amplificateur KMIC. Les résultats obtenus sont présentés figure Fig.3.12a pour la voie Alice et Fig.3.12b pour la voie Bob.

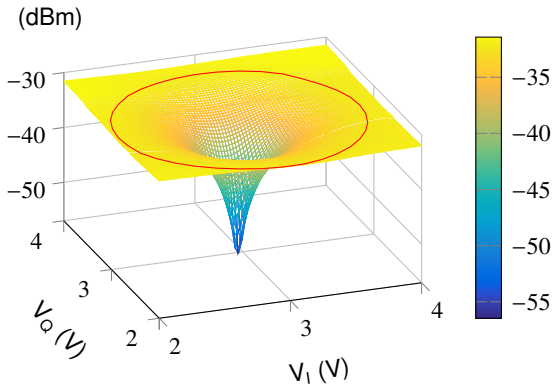
Le régime de saturation des amplificateurs en sortie des modulateurs I/Q nous permet bien d'obtenir un plateau pour lequel la puissance RF varie très peu (moins de 0.5 dB).

Fort de ce résultat, nous avons pu cartographier le déphasage optique réalisé par ces modulateurs. Nous avons procédé à une mesure de battement entre les ondes RF générées par chacune des voies. Pour cela, nous avons utilisé un mélangeur RF et mesuré la composante continue en sortie, comme le montre le schéma Fig.3.13.

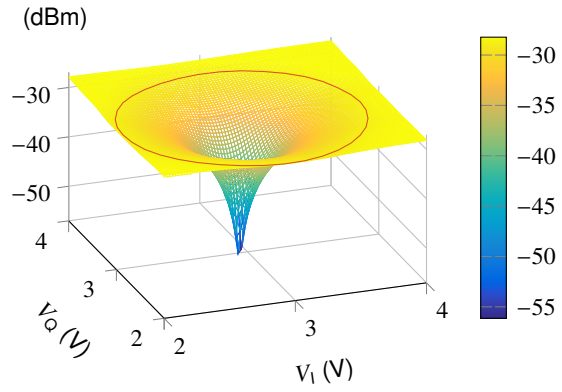
L'idée de cette mesure est d'obtenir deux cartographies de la mesure de battement en quadrature de phase pour chacune des voies. Nous avons alors fait varier les tensions I/Q d'une voie, lorsque celles de l'autre voie sont fixes, pour obtenir une série de points.

Si on considère que V_1 et V_2 sont les séries de tensions obtenues lors des deux cartographies d'une voie, on peut écrire

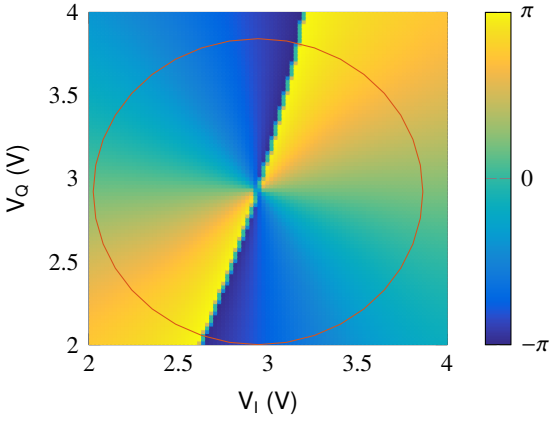
$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_{DC}\cos\varphi \\ V_2 &= V_{DC}\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$



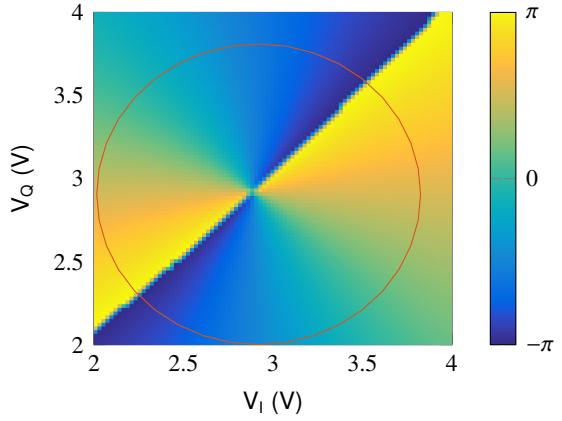
(a) Puissance RF équivalente à celle mesurée au séparateur, Alice.



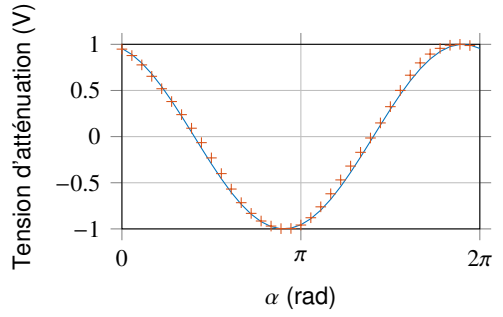
(b) Puissance RF équivalente à celle mesurée au séparateur, Bob.



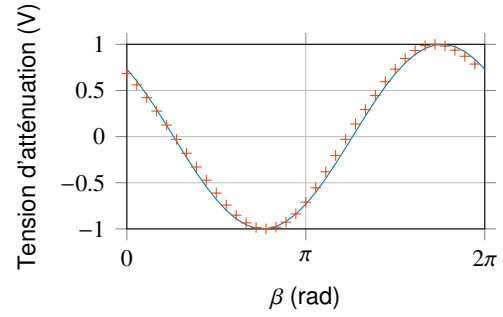
(c) Phase Alice.



(d) Phase Bob.



(e) Phase Cercle Alice.



(f) Phase Cercle Bob.

FIGURE 3.12 – Caractérisation par battement RF du déphasage en fonction des tensions I & Q pour les voies Alice et Bob.

où φ est la phase RF que l'on veut caractériser et V_{DC} est l'amplitude maximale de la tension du battement. On obtient une mesure de la phase RF en traçant

$$\varphi = \arctan(V_2/V_1). \tag{3.6}$$

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures Fig.3.12c et Fig.3.12d.

Par la suite nous aurons besoin de réaliser un déphasage linéaire φ_{exp} de 0 à 2π. Dans

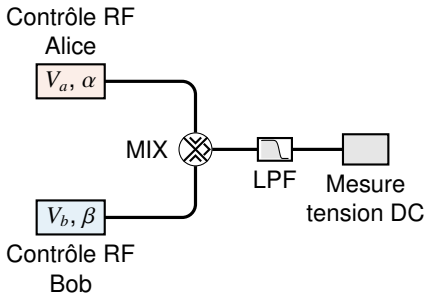


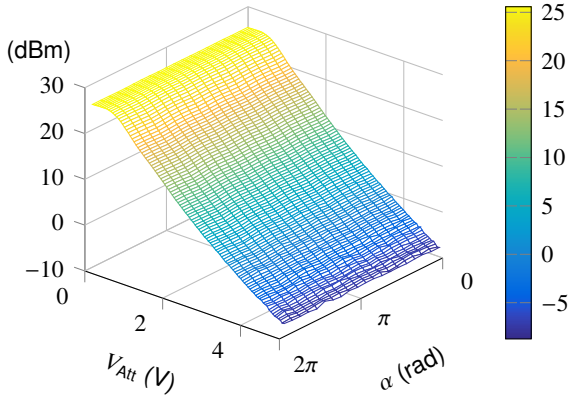
FIGURE 3.13 – Schéma de caractérisation de la phase RF par mesure de battement entre les deux systèmes de contrôle. Les système de contrôle RF de Alice et Bob sont identiques. On peut contrôler indépendamment les amplitudes et phases des onde RF, respectivement V_a, α et V_b, β pour Alice et Bob. Ces deux ondes sont envoyées dans un mélangeur RF (MIX), puis on mesure la composante continue en sortie du mélangeur à l'aide d'un détecteur lent, agissant comme un filtre passe bas (LPF).

ce but nous choisissons une série de 36 points I/Q disposés sur un cercle, représenté en rouge figure Fig.3.12. Le centre de ce cercle correspond à l'atténuation maximale de l'onde RF et son rayon est maximum. Enfin, le cosinus de φ_{exp} et sa valeur théorique sont représentés respectivement en rouge et en bleu sur les figures Fig.3.12d et Fig.3.12e,. L'erreur de mesure observée ici est inférieure à 5°, elle est du même ordre que l'erreur sur la quadrature de phase donnée par le constructeur et permet de valider le profil de phase expérimental.

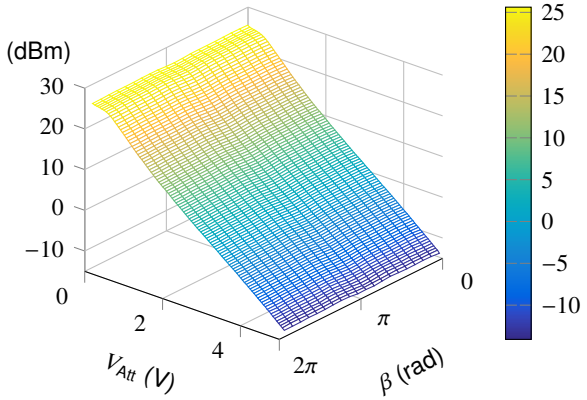
Nous pouvons maintenant mesurer les variations d'amplitude et de phase apportées par les amplificateurs variables. Nous procédons de nouveau à une cartographie représentant la puissance RF et l'amplitude du battement en fonction des 36 points de phase retenus et de 120 points d'atténuation allant de 0 à 5 V. Les résultats correspondant à la puissance RF mesurée au séparateur -10 dB et au battement RF sont représentés sur les figures Fig.3.14a et Fig.3.14c pour Alice et Fig.3.14b et Fig.3.14d pour Bob. Nous pouvons remarquer que l'amplitude est quasiment linéaire en fonction de la tension d'atténuation, avec une légère saturation aux faibles atténuations. De plus le changement de phase introduit des variations inférieures à $0,2$ dB de la puissance RF, ce qui correspond à une modification du taux de modulation optique inférieure à 2%. Les figures de battement RF Fig.3.14b et Fig.3.14d nous confirment que les phases I/Q retenues correspondent bien à un déphasage linéaire et que l'erreur de phase vaut $\pm 2^{\circ}$. Enfin, les figures Fig.3.14e et Fig.3.14f représentent le très bon accord entre l'amplitude du battement RF, en bleu, et l'équivalent en tension de la puissance RF mesurée, en rouge. Ces figures confirment que la puissance RF mesurée en sortie du séparateur est bien l'image de la tension que recevra le modulateur optique.

Afin de déterminer le déphasage associé aux variations de tension d'atténuation V_{Att}, nous avons représenté, sur les figures Fig.3.15a et Fig.3.15b, la tension de battement normalisée par la puissance RF mesurée correspondante. Un ajustement de ces courbes par une sinusoïde permet de déterminer le déphasage. Celui-ci est reporté en rouge sur les figures Fig.3.15c et Fig.3.15d. Dans nos expériences, la puissance RF est constante et ce déphasage ne fait pas l'objet d'une attention particulière.

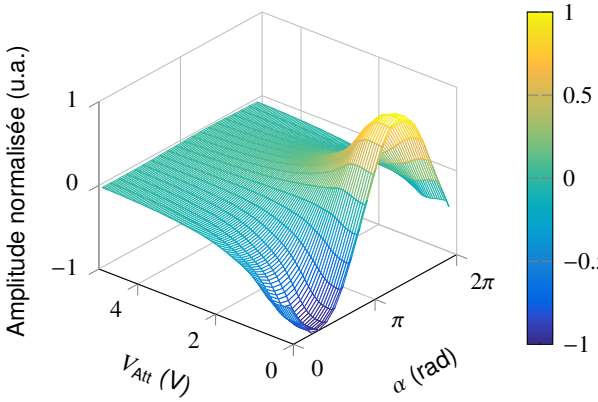
Le système RF réalisé permet de contrôler précisément l'onde RF en amplitude et en phase et compte tenu des modulateurs utilisés, nous obtenons un taux de modulation maximum proche de 4.



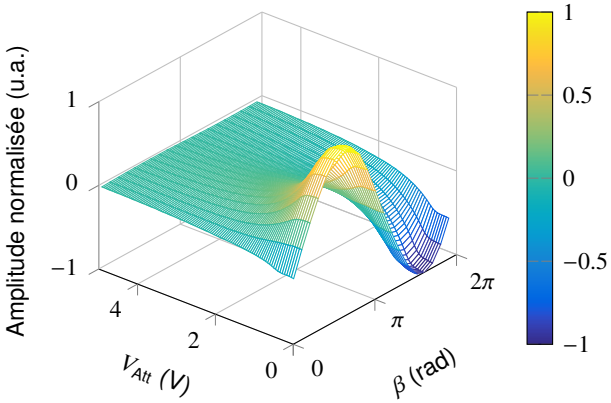
(a) Puissance RF équivalente à celle mesurée au séparateur, Alice.



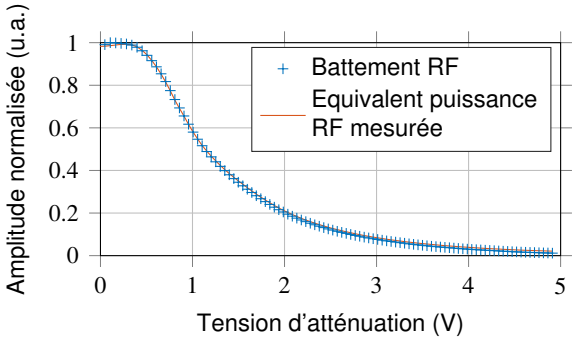
(b) Puissance RF équivalente à celle mesurée au séparateur, Bob.



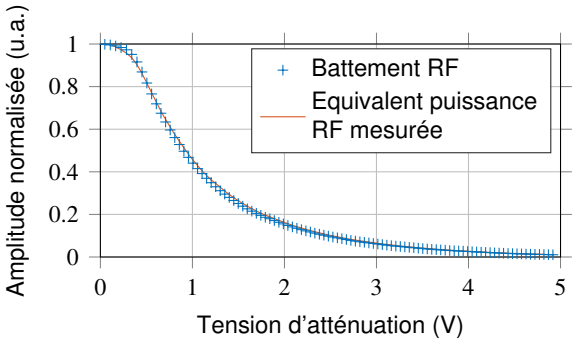
(c) Tension en sortie de mélangeur, variations Alice.



(d) Tension en sortie de mélangeur, variations Bob.



(e) Correspondance des amplitudes, Alice.

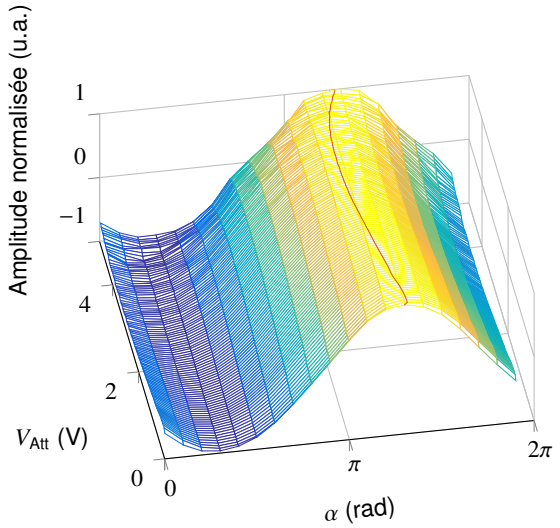


(f) Correspondance des amplitudes, Bob.

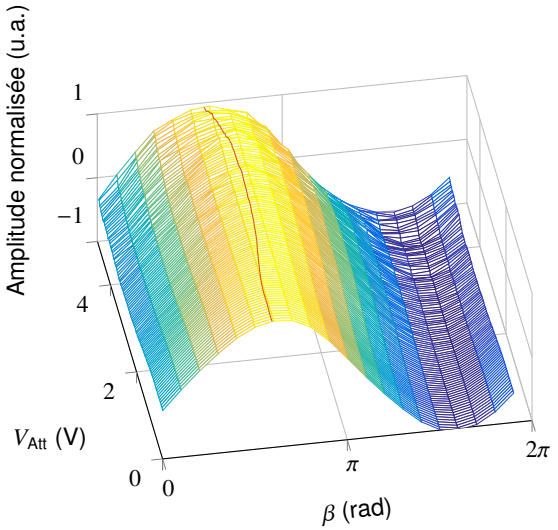
FIGURE 3.14 – Caractérisation des variations d'amplitude avec un déphasage de 2π et une variation de la tension d'atténuation pour les voies Alice et Bob.

3.1.3/ FILTRES ACCORDABLES EN FRÉQUENCE

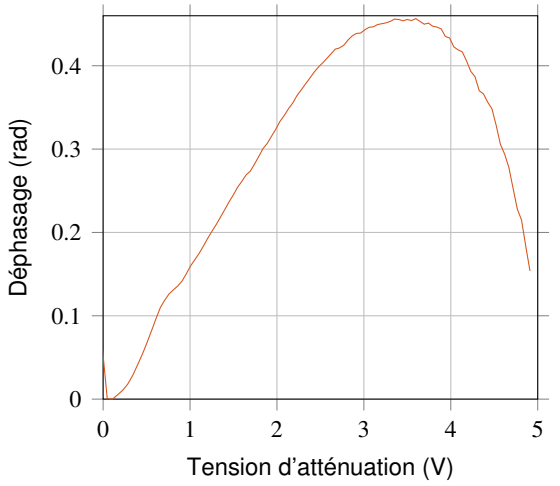
Le bloc de filtration est constitué d'un filtre de Bragg et d'un circulateur optique. Nous avons vu qu'il est nécessaire de correctement isoler les *bins* les uns des autres. Nous avons choisi des filtres passe bande de faible largeur spectrale (GHz) et présentant



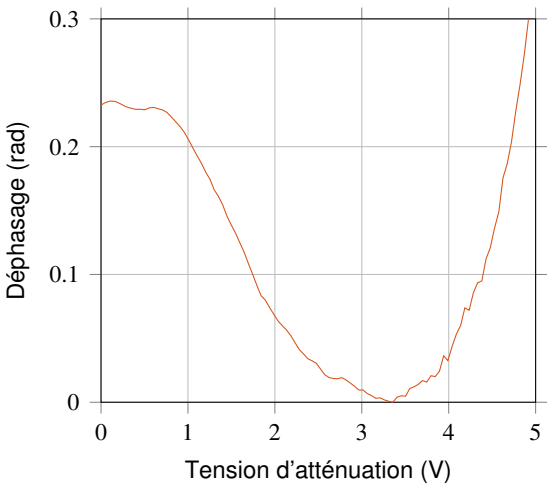
(a) Tension de sortie du mélangeur normalisée, Alice.



(b) Tension de sortie du mélangeur normalisée, Bob.



(c) Déphasage en fonction de l'atténuation, Alice.



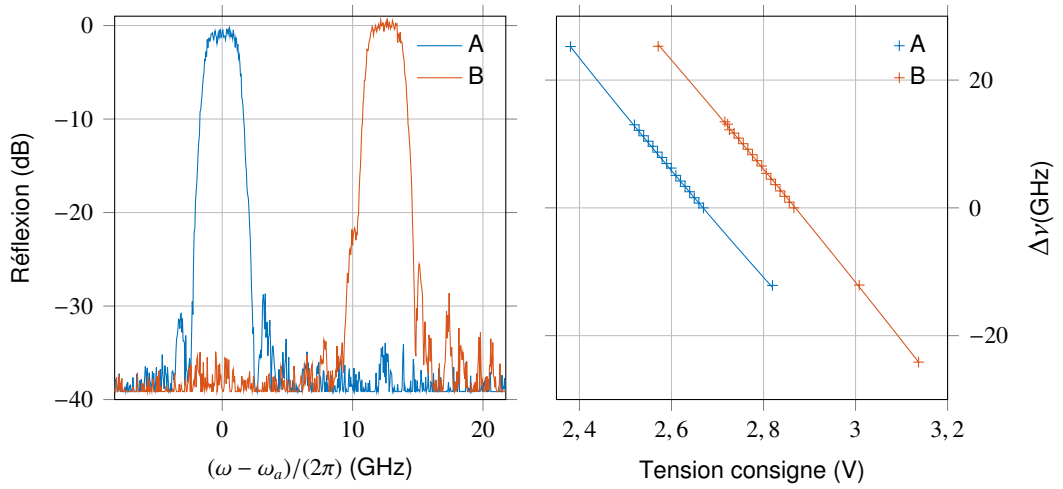
(d) Déphasage en fonction de l'atténuation, Bob.

FIGURE 3.15 – Caractérisation du déphasage en fonction de la tension d'atténuation pour les voies Alice et Bob.

un très fort taux d'extinction. Le spectre des filtres mesuré à l'OSA est présenté figure Fig.3.16. Les filtres A et B correspondent à ceux utilisés dans le système global. Les bandes-passantes mesurées sont reportées dans le tableau 3.5.

Nous avons modélisé le spectre de ces filtres par une hyper-gaussienne d'ordre 4 et ajouté un seuil correspondant à la résolution de l'analyseur de spectre optique.

La fréquence centrale des filtres ω_a et ω_b évolue en fonction de la périodicité du réseau de Bragg. Ainsi une fluctuation de la température ambiante d'un degré est susceptible de décaler les filtres de plusieurs GHz. Afin de s'assurer de la stabilité absolue des filtres, un asservissement en température a été développé. Ce dernier doit remplir deux rôles : accorder la longueur d'onde centrale des filtres à une valeur donnée dans une plage d'au moins 1 nm et la maintenir pendant des dizaines d'heures avec une précision de



(a) Spectres des filtres mesuré à l'OSA.

(b) Accordabilité de la fréquence centrale des filtres par rapport à $\lambda_0 = 1550,33$nm.

FIGURE 3.16 – Spectres des filtres et de la variation de leur fréquence centrale en fonction de la tension de consigne.

l'ordre du pm. Nous avons reporté sur la figure Fig.3.16b les variations de la fréquence centrale des filtres A et B, en fonction de la tension de consigne de l'asservissement. Ces variations sont linéaires et sont données par rapport à un longueur d'onde de référence $\lambda = 1550,33$ nm pour $\Delta\nu = 0$. Nous avons reporté dans le tableau 3.5 les coefficients reliant les variations de tension et de fréquence.

Les filtres possèdent chacun un asservissement, dont nous avons dû mesurer la précision relative et absolue. Afin de mesurer la précision relative des filtres, nous avons injecté le signal optique issu d'une source large spectre à travers les filtres disposés en série, comme représenté sur le schéma Fig.3.17.

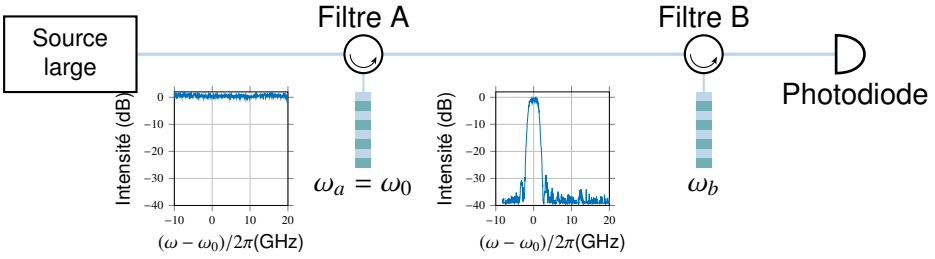
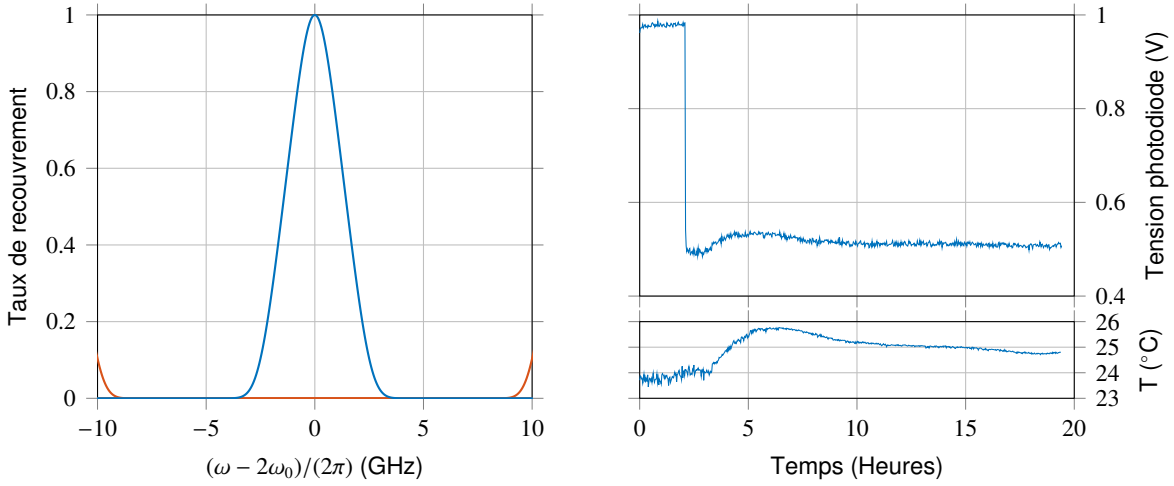


FIGURE 3.17 – Schéma de caractérisation de la stabilité relative des filtres.

Les variations de puissance optique mesurées à l'aide d'une photodiode nous donne une image du recouvrement entre les spectres des filtres. Nous avons représenté sur la figure Fig.3.16a, en bleu, le taux de recouvrement entre les filtres lorsque l'un des deux est décalé en fréquence de $\omega/(2\pi)$. Cette simulation nous montre qu'un décalage des filtres de $1,5$ GHz entraine une diminution du taux de recouvrement de 50 %. En rouge nous pouvons voir le taux de recouvrement avec un filtre situé à la première harmonique de modulation de part et d'autre de la fréquence centrale. Pour étalonner la mesure, nous avons tout d'abord maximisé la puissance optique, cette valeur correspond à un alignement parfait des filtres. Nous avons ensuite décalé un des deux filtres de $1,5$ GHz de

manière à maximiser la sensibilité de la mesure. La figure Fig.3.18b montre les résultats obtenus. On observe bien la variation de 50 % correspondant au déplacement d'un des filtres, puis des variations de la puissance lumineuse en bon accord avec les variations de la température ambiante. On relève, sur cette courbe, des variations de tension inférieures à 100 mV autour de $0,5$ V, ce qui correspond à une stabilité relative des filtres inférieure à 70 ± 30 MHz et ce pour 2°C de variations de la température ambiante. Cette mesure nous assure que, dans ces conditions de température, si les filtres sont alignés au départ de l'expérience, leur taux de recouvrement sera toujours supérieur à 99 %.



(a) Taux de recouvrement en fonction du décalage du second filtre.

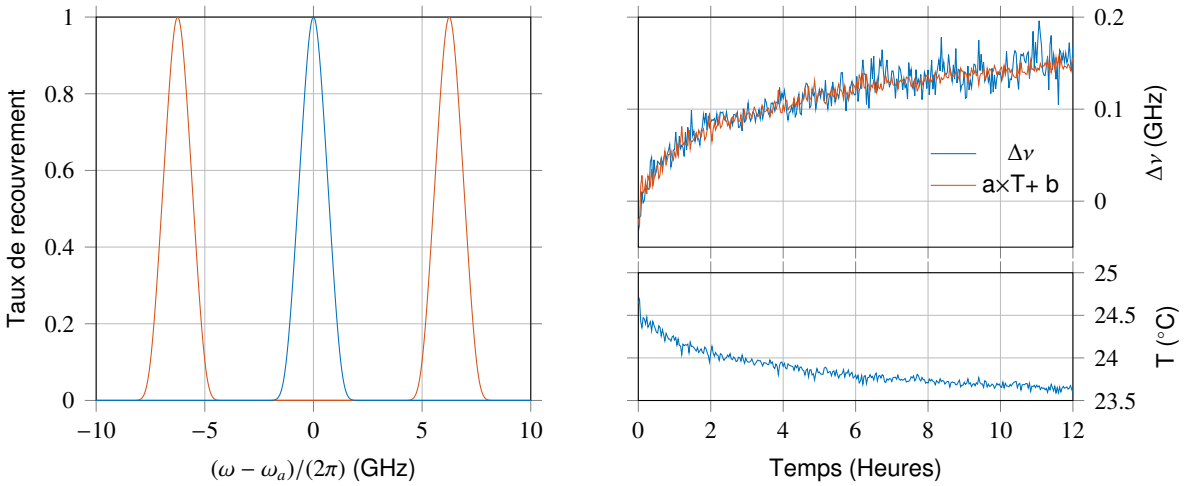
(b) Dérive relative des filtres en fonction de la température.

FIGURE 3.18 – Variation du taux de recouvrement en fonction de la position relative des filtres et de la dégénérescence.

Néanmoins la stabilité des filtres par rapport à la source est un critère encore plus important. En effet, les photons jumeaux sont générés symétriquement en fréquence par rapport à la dégénérescence de la source $2\omega_0/(2\pi)$. Dans ce cas le recouvrement maximum est atteint lorsque les filtres sont symétrique par rapport à la dégénérescence $2\omega_0 = (\omega_a + \omega_b)/2$. Nous avons simulé le décalage de la source par rapport aux filtres fixes, Fig.3.19a. Nous observons que ce décalage est deux fois plus sensible que le décalage relatif des filtres. Ainsi le taux de recouvrement est inférieur à 50% pour un décalage de fréquence supérieur à 750 MHz.

Nous avons reporté Fig.3.19b, en bleu, la stabilité mesurée d'un filtre au cours du temps à l'aide d'un analyseur de spectre et d'un laser monochromatique de référence, comme le montre le schéma Fig.3.20.

La mesure de fréquence absolue du laser de référence est donnée à ± 375 MHz @1550 nm, après calibration de l'appareil. Il possède ensuite une répétabilité de 60 MHz et une dérive en température de ± 125 MHz lorsque la température varie de ± 1 K. Les variations de la fréquence centrale des filtres est en bon accord avec les variations de la température, reportées sur la figure Fig.3.18b du bas. On a représenté en rouge une loi affine, $\Delta\nu = a \times T + b$ représentant un écart de fréquence en fonction des variations de température et pour laquelle le coefficient directeur vaut $a = -170$ MHz/$^{\circ}$ C. Ce résultat nous indique qu'au cours d'une expérience, si la température ambiante ne diffère pas de plus de 1°C par rapport à la température initiale, le taux de recouvrement des filtres par



(a) Décalage de la pompe par rapport aux filtres.

(b) Dérive relative des filtres en fonction de la température.

FIGURE 3.19 – Influence de la stabilité des filtres par rapport à la dégénérescence de la source et mesure de leur stabilité absolue en température.

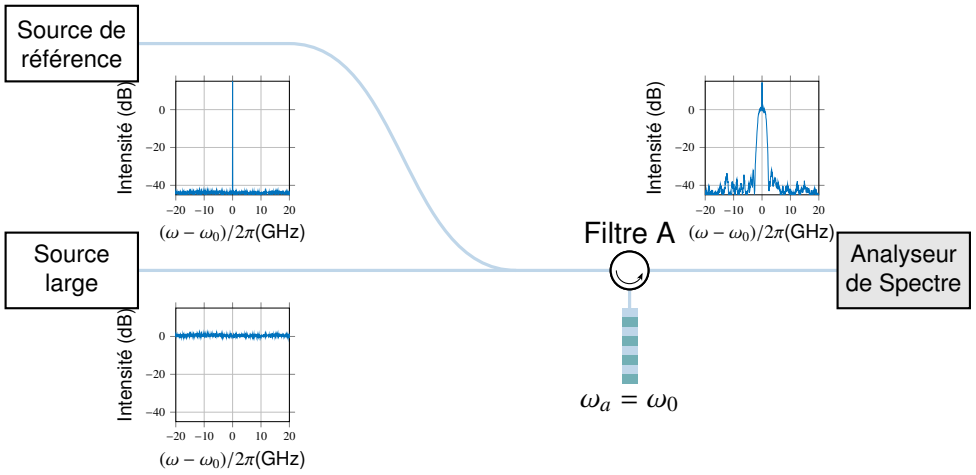


FIGURE 3.20 – Schéma de caractérisation de la stabilité du filtre A par rapport à un laser de référence.

rapport à la dégénérescence de la source (simulée par le laser de référence) ne variera pas de plus de 4%. Cette mesure n'est pas représentative de la stabilité des filtres par rapport à la source de photons enchevêtrés, mais nous montre qu'ils possèdent la stabilité requise par rapport à une fréquence absolue arbitraire. Nous présenterons en fin de chapitre une mesure du taux de coïncidences qui tiendra compte des instabilités de la source et des filtres. Les propriétés des filtres étant maintenant connues et récapitulées dans le tableau 3.5, nous pouvons nous intéresser au système de détection.

3.1.4/ DÉTECTION ET PERFORMANCES DU SYSTÈME OPTIQUE

Tout d'abord, nous allons présenter les performances des compteurs de photons utilisés, à leur méthodes de détection et nous nous intéresserons au traitement des données

Caractéristiques des filtres		
Paramètre	*Valeur*	*Unité*
Bande-Passante @ – 3 dB	$2,6$	GHz
Bande-Passante @ – 30 dB	$\approx 5,6$	GHz
Pertes Alice	3	dB
Pertes Bob	3.5	dB
Stabilité globale @1550*nm*	$\leq 170 \pm 125$	MHz/° C
Stabilité relative @1550*nm*	40 ± 30	MHz/° C
Accord du filtre Alice, $1550,33$ *nm* @$2,6695$ *V*	$-85,8$	GHz/V
Accord du filtre Bob, $1550,33$ *nm* @$2,8668$ *V*	$-89,2$	GHz/V

TABLE 3.5 – Caractéristiques des filtres

expérimentales. Nous présenterons ensuite les performances obtenues pour l'ensemble du système optique en terme de stabilité.

3.1.4.1/ LA DÉTECTION DES COÏNCIDENCES

Toute mesure physique est entachée de bruit, l'enjeu est de l'évaluer le mieux possible pour augmenter la fiabilité de la mesure. Lorsque nous voulons observer le comportement de deux photons, il faut être capable de les isoler correctement de leur environnement lors de la mesure. Si la mesure de coïncidences nous permet d'augmenter très fortement la probabilité que le déclenchement des détecteurs reflète la mesure de photons appartenant à une même paire, il reste tout de même une certaine probabilité que ce ne soit pas le cas. En effet, un déclenchement des détecteurs en coïncidence peut aussi survenir par hasard et ce pour différentes raisons. Un des photons détectés peut ne pas avoir été émis par la source et être arrivé au moment opportun, ou la source peut avoir émis plusieurs paires de photons dans un temps inférieur à celui de la fenêtre de détection et les deux photons mesurés n'appartiennent pas à la même paire. Mais aussi, pour des raisons intrinsèques au détecteur, un déclenchement peut survenir alors qu'aucun photon n'est présent à ce moment. Toutes ces coïncidences involontaires contribuent au bruit de la mesure et nous devons l'évaluer correctement pour fournir des barres d'erreur à notre mesure.

Les compteurs de photons Pour ces expériences nous avons utilisé un double compteur de photons muni d'un corrélateur interne fabriqué par AURÉA TECHNOLOGY. Les caractéristiques de cet appareil sont répertoriées dans le tableau 3.6.

Chacun des détecteurs est constitué d'une photodiode à avalanche de type Arséniure de Gallium/Indium. Ces photodiodes fonctionnent en mode Geiger [Garrison et al., 2008], pour lequel le gain est tellement élevé qu'il résulte un courant mesurable de l'absorption d'un unique photon. Toutefois, cette très grande sensibilité a des contreparties. On ne peut pas discerner le nombre de photons absorbés lorsqu'une avalanche a lieu. Afin de pouvoir compter le plus grand nombre de photons possible, il faut endiguer l'avalanche très rapidement, évacuer les charges et re-polariser la diode en mode Geiger. Un autre

inconvénient de cette extrême sensibilité est que l'excitation thermique d'un électron peut conduire à une avalanche sans qu'un photon ait été absorbé. Ce bruit thermique s'appelle bruit d'obscurité et peut-être facilement mesuré en absence de signal lumineux. Outre la réduction de ce bruit par le refroidissement des photodiodes, il peut aussi être fortement limité en ne polarisant la diode en mode Geiger que périodiquement. On appelle "taille de porte" le laps de temps pour lequel la diode est polarisée lors d'un cycle, et "taux de déclenchement" la fréquence de répétition de ce cycle.

Lors de nos expériences, ces compteurs présentaient les meilleures performances de leur catégorie en terme de compromis entre, taux de remplissage, taux de détection $\times$ taille des portes et taux de coups d'obscurité. Nous avons pu choisir un taux de remplissage de $1/2$ avec détection de 5 MHz et des tailles de portes de 100 ns. Ces paramètres conduisent à un taux de coups d'obscurité de 580 Hz.

Après une détection, il faut rendre le détecteur opérationnel le plus rapidement possible pour une autre détection. Un circuit électronique actif permet de détecter très rapidement l'avalanche, en quelques centaines de picosecondes, et polarise la diode en dessous du seuil avalanche de manière à la stopper rapidement. La diode est de nouveau polarisée au cycle d'horloge suivant. Toutefois, si les charges n'ont pas été correctement évacuées de la zone de détection, elles peuvent donner lieu à une autre avalanche après une nouvelle polarisation de la diode. Cet effet s'appelle *after pulsing* et sa probabilité décroit avec le temps durant lequel la diode n'est pas polarisée. Dans ce but, un temps mort est ainsi appliqué après chaque détection, durant lequel la diode ne sera pas polarisée. Un temps mort de 10 μs permet d'obtenir une probabilité d'*after pulsing* inférieure à $0,1\%$ pour un taux de détection de 5 MHz, une efficacité quantique de 20% et une taille de porte de 100 ns. Ce temps mort fixe à 100.000 le nombre maximum de coups pouvant être mesurés par seconde. Ce nombre s'obtient en régime de saturation pour lequel une avalanche se déclenche dès que la diode est repolarisée.

Caractéristiques des compteurs Linxéa		
Paramètre	*Valeur*	*Unité*
Efficacité quantique	20	%
Taux de détection	5	MHz
Taille de porte	≤ 100	ns
Taux de coups d'obscurité @5 MHz	600	Hz
Temps mort	10	μs
Gigue temporelle	< 200	ps
Résolution temporelle du CAN	65	ps

TABLE 3.6 – Caractéristiques des compteurs Linxéa

Enfin, la polarisation des photodiodes peut se faire à l'aide d'une horloge interne ou externe. L'utilisation d'une horloge externe, comme représenté sur le schéma Fig.3.21, permet de pouvoir utiliser le signal de détection d'une des photodiodes pour déclencher la seconde, la mesure des photons en coïncidence peut alors se faire en ajoutant un retard optique aux photons arrivant sur le second détecteur.

Cette méthode de détection est plus pratique, tout d'abord car elle permet de simplifier le traitement des données. La mesure de coïncidences ne demande pas une corrélation électronique des mesures enregistrées par chacun des détecteurs, mais seulement de

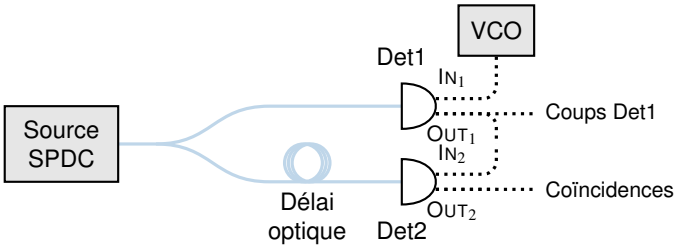


FIGURE 3.21 – Schéma de mesure des coïncidences en déclenchement externe des compteurs.

connaitre le temps d'arrivée du second photon par rapport au signal d'horloge déclenchant la polarisation de la diode.

Un second avantage de cette méthode est qu'elle permet d'avoir une image en temps réel des variations du nombre de coïncidences. En effet, la trace temporelle du second détecteur donne directement cette information, alors que le convertisseur numérique de temps d'arrivée (TDC pour *Time to Digit Converter*) de l'appareil ne fournit un signal que lorsque un certain nombre de coïncidences a été mesuré (environ 680) : un buffer se rempli et le transfert n'a lieu que lorsqu'il est plein. Cette différence est très significative pour les expériences longue distance, lorsque les pertes sont grandes et que le taux de coïncidences est très faible.

Enfin le dernier avantage notable est que le taux de coup d'obscurité est très fortement réduit sur le second détecteur, celui-ci est proportionnel au taux de déclenchement et est totalement négligeable pour un taux de déclenchement de 20 kHz et une de taille des portes de 100 ns. Cette différence est très significative lors des expériences où les pertes sont grandes, car afin de réduire le temps nécessaire à une expérience, il faut collecter un maximum de photons et donc utiliser le taux de remplissage le plus important. Dans le cas où le taux de détections est du même ordre de grandeur que le taux de coups d'obscurité, le bruit d'obscurité est très élevé lors de la mesure de coïncidences et la suppression des coups d'obscurité sur une des photodiodes permet éventuellement de mesurer une coïncidence réelle supplémentaire.

Maintenant que nous en savons un peu plus sur le comptage de photons, nous allons nous intéresser à la manière dont nous traitons les coïncidences mesurées et comment nous évaluons le bruit de cette mesure.

Statistiques de détection Le convertisseur analogique numérique des compteurs nous fournit le délai entre la polarisation de la diode et la mesure d'un coup. Lorsque le second détecteur est déclenché par une détection sur le premier, chaque coup mesuré par le second est la signature d'une coïncidence avec un photon détecté par la première photodiode. Comme les photons jumeaux arrivent toujours sur leur détecteur avec le même retard, le second détecteur sera toujours déclenché au même moment, faisant apparaître statistiquement un pic de coïncidences lorsque l'on représente le nombre d'occurrences en fonction du retard, figure Fig.3.22. Comme expliqué dans la section 2.1.2.3 et plus précisément dans l'équation (2.93), la répartition temporelle du taux de coïncidences des photons jumeaux n'est pas un pic infiniment fin, mais dépend de la répartition spectrale des photons arrivant sur le détecteur ainsi que de la réponse impulsionnelle de chacun des détecteurs. On mesure une largeur du pic de coïncidences à mi-hauteur de 330 ps

lorsque tout le spectre bi-photon est envoyé sur les détecteurs et de 460 ps lorsque les filtres sont présents. Ces données concordent avec la largeur spectrale des filtres et la gigue temporelle des détecteurs.

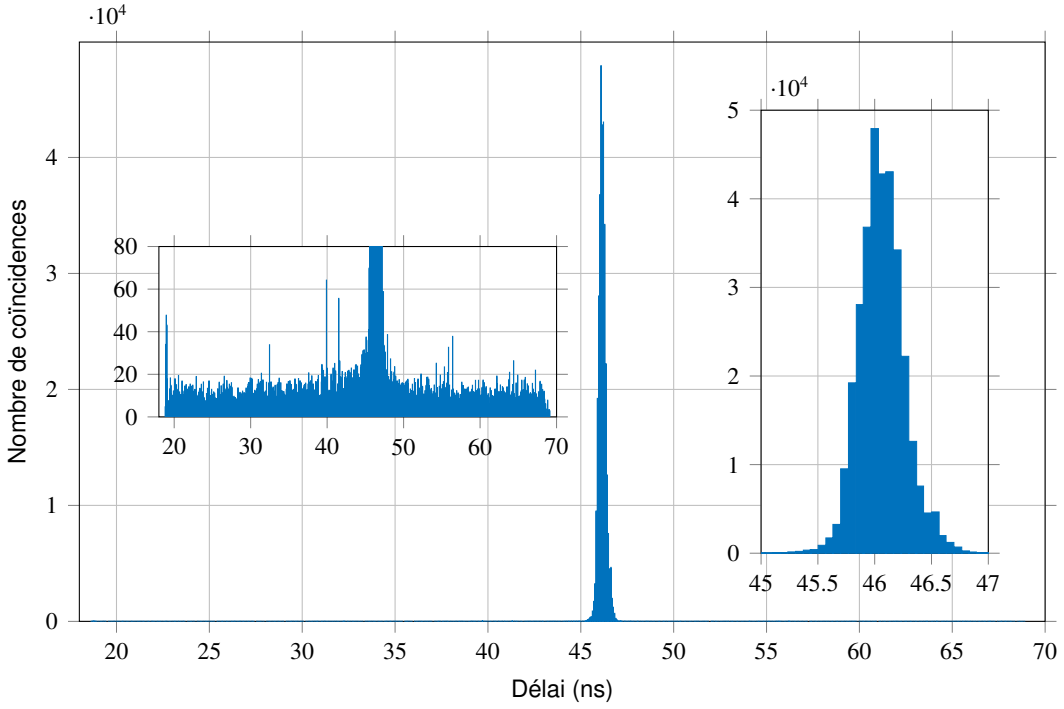


FIGURE 3.22 – Pic de coïncidences en régime déclenché, sans filtres.

La figure Fig.3.22 représente le nombre de coïncidences détectées en fonction du retard entre la polarisation de la photodiode et la détection du second détecteur. Cette mesure totalise 300.000 coups détectés sans les filtres de Bragg pour une puissance de pompe de -60 dBm. L'enjeu ici est de discerner le signal du bruit le plus précisément possible. Il est facile d'obtenir une mesure approximative du nombre de photons de signal en sommant tous les coups enregistrés dans un laps de temps donné, par exemple entre 45 nm et 47 nm, comme le montre l'encadré de droite figure Fig.3.22. Il faut en revanche soustraire le nombre de coup de bruit qui ont pu être enregistrés pour obtenir une mesure plus précise. Comme nous n'avons aucun moyen de discerner le signal effectif du bruit, le nombre de coups à retrancher ne peut s'obtenir qu'à l'aide d'une étude statistique du bruit. Ainsi nous devons déterminer le bruit moyen correspondant à la largeur du pic de coïncidences, puis déterminer la variance de ce bruit afin d'encadrer la valeur à retrancher.

Nous émettons alors trois hypothèses :

— le bruit est issu de plusieurs processus aléatoires et sa distribution temporelle est uniforme,
— la largeur du pic de coïncidences est identique pour deux expériences utilisant la même filtration avant détection,
— la position du pic de coïncidences est identique pour des différences de chemin optique identiques entre les photons jumeaux.

Nous appelons Δt_d la résolution du TDC et l'histogramme de la figure Fig.3.22 possède ce pas d'échantillonnage. Le bruit ayant une distribution uniforme sur la fenêtre de détection, le nombre de coups détectés dans un *bin* temporel de largeur Δt suit une statistique de

poisson. Nous savons ainsi que la variance du bruit sera égale à sa moyenne et que sa statistique tendra vers une loi normale de variance égale à la moyenne, lorsque cette moyenne est grande.

Nous pouvons alors sommer les coups répertoriés dans les échantillons temporels situés hors du pic de coïncidences pour déterminer cette valeur moyenne et vérifier statistiquement la distribution du bruit. Pour déterminer quels *bins* temporels sont affectés par le signal, on détermine la position centrale du pic t_p et une largeur de fenêtre de coïncidence $\Delta t_c = (2 \times N_c + 1) \times \Delta t_d$, N_c étant le nombre de *bins* pris de part et d'autre du pic. On définit alors le nombre de coup de signal, N_s, comme étant le nombre de coïncidences enregistrées sur cette fenêtre et le bruit moyen comme étant la moyenne de coïncidences sur le reste de la fenêtre de détection. Puis on regarde l'évolution du rapport

$$\frac{N_s - \langle Bruit \rangle \times \frac{\Delta t_c}{\Delta t_d}}{\langle Bruit \rangle} \tag{3.7}$$

en augmentant la largeur de la fenêtre de coïncidence, c'est-à dire N_c. Ce rapport admet une saturation à partir d'une certaine valeur de N_c et nous retiendrons comme valeur empirique $\Delta t_c = 3,1$ ns, soit $N_c = 24$, valable dans le cas où les filtres sont utilisés. Nous pouvons alors analyser la statistique du bruit en excluant la fenêtre de coïncidence. En pleine échelle temporelle, on peut clairement remarquer que le bruit ne suit pas tout à fait une loi de Poisson, comme l'illustre l'encadré de gauche figure Fig.3.23. On a représenté en histogramme la répartition du nombre de coïncidences par *bin* temporel. Ce résultat a été obtenu pour une fenêtre de détection d'environ 90 ns soit 1385 *bins*. Nous avons réalisé 12 échantillons statistiques de $11,5 \times 10^3$ coïncidences chacun, soit en moyenne $8,3$ coïncidences par *bin*. L'histogramme représente la moyenne obtenue pour les 12 échantillons et la courbe rouge correspond à la loi de Poisson associée à la moyenne globale. On peut remarquer que le nombre de *bins* possédant des valeurs extrêmes (0 coïncidences ou plus de 20) est sur-représenté.

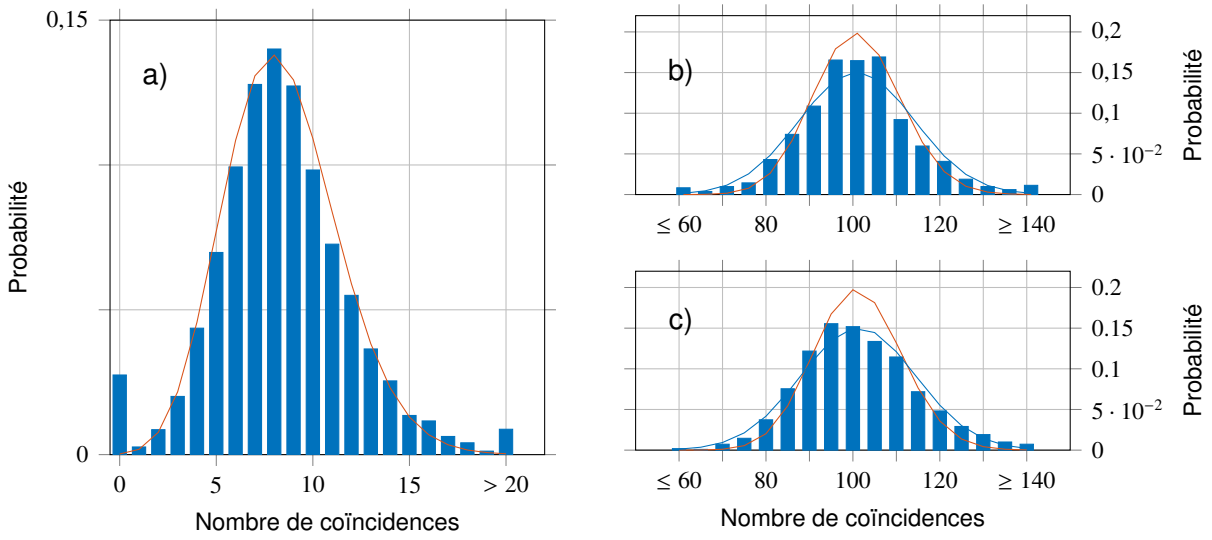


FIGURE 3.23 – Distribution du nombre de coïncidences par *bin*, pour des *bins* temporels de 65 ps en a) et $7,8$ ns en b) et c).

On peut attribuer ce phénomène à un défaut de linéarité du TDC, connu sous le nom de *Differential NonLinearity* (DNL), qui fait correspondre aux *bins* logiques des échantillons

temporels de taille variable. Ainsi, alors que tous nos échantillons temporels sont traités comme ayant une durée de 65 ps, leur durée effective peut différer. Cette erreur est aléatoire pour chaque allumage de l'appareil mais est systématique lorsque l'appareil reste allumé. Elle est en partie corrigée à chaque allumage de l'appareil, mais comme la correction est statistique il faut faire un compromis entre le temps d'intégration et l'efficacité de la correction.

Une solution pour palier en partie à ce problème est d'échantillonner avec des *bins* temporellement plus long. Nous avons mis en évidence cet impact sur les deux figures de droite. Celle du haut est obtenue lorsqu'on somme pour chaque *bin* temporel le nombre de coïncidences obtenu lors des 12 échantillons statistiques. Celle du bas représente la moyenne de ces 12 échantillons lorsqu'on multiplie par 12 la taille temporelle des *bins* afin d'obtenir la même moyenne. On peut remarquer que l'augmentation de la taille des *bins* permet de diminuer le nombre de *bins* possédant des valeurs extrêmes (nombre de coïncidences inférieur à 140 ou supérieur à 160). Une loi de poisson est déterminée d'après la moyenne de nos résultats expérimentaux. Tout événement éloigné de la moyenne de plus de 4 écart-types est considéré comme étant une valeur extrême. Cette condition est remplie uniquement lorsqu'on utilise des *bins* de plus grande dimension, cependant hormis les valeurs extrêmes, la répartition semble meilleure dans le cas où l'on n'applique pas de second *binning*. On peut comprendre ce résultat en admettant que la correction de la DNL demande une plus grande précision pour les *bins* les plus éloignés de la taille attendue, ce sont donc eux qui sont le plus susceptibles de ne pas suivre la distribution voulue après correction, mais sont toutefois des événement assez rares. Le fait de regrouper les *bins* par paquets, permet de noyer ces événement extrêmes. Cependant ceci se répercute immédiatement par une augmentation de la variance. La loi de Poisson converge vers une loi normale de variance égale à sa moyenne, $\sigma^2 = m$, lorsque la moyenne augmente. Ainsi la courbe bleu, figure Fig.3.23 b), représente une loi normale de moyenne identique mais dont la variance a été ajustée par la méthode des moindres carrés. On constate bien qu'une loi normale de variance supérieure à sa moyenne correspond mieux à l'échantillon expérimental lorsque les *bins* sont regroupés par paquets. Nous avons empiriquement constaté que l'augmentation de l'écart-type σ est inférieur à $1,3$ lorsque l'on regroupe les *bins* par paquets d'au moins 6 *bins*. Il faut toutefois que la distribution des données se rapproche d'une loi normale, ce que l'on considère acceptable lorsque la moyenne est supérieure à 5 écart-types et que la probabilité d'obtenir zéro coïncidence dans un *bin* est très faible. Si ces conditions sont respectées, nous pourrons prendre comme barre d'erreur $5,2\sigma = 4\sigma_c$, avec un intervalle de confiance à 99%, où σ_c est la variance corrigée.

Nous pouvons maintenant soustraire la bonne quantité de bruit au coïncidences enregistrées dans la fenêtre signal. Nous avons appelé Δt_c la taille temporelle de la fenêtre signal, Δt_d la taille minimale d'un *bin* temporel, N_b le nombre de *bins* regroupés pour supprimer les données extrêmes du bruit, σ_c la variance du bruit et $\langle \mathrm{Bruit}_{N_b} \rangle$ la valeur moyenne du bruit avec la nouvelle échelle temporelle. Alors, la quantité de bruit à soustraire s'écrit

$$N_{\mathrm{Bruit}} = \frac{\Delta t_c}{N_b \times \Delta t_d} \langle \mathrm{Bruit}_{N_b} \rangle = \Delta t_c \tau_{\mathrm{Bruit}}, \tag{3.8}$$

où τ_{Bruit} est le taux de bruit. Les barres d'erreur associée à N_{Bruit} avec un intervalle de confiance de 99% s'écrivent

$$\pm 4\sqrt{\frac{\Delta t_c}{N_b \times \Delta t_d}}\sigma_c. \tag{3.9}$$

Fort de ce résultat nous pouvons mesurer des photons jumeaux en coïncidence afin d'estimer les performances de notre source. Ainsi, la courbe Fig.3.24 représente l'évolution du rapport signal sur bruit en fonction de la puissance de pompe avec la détection des photons sur toute la bande de conversion. Les barres d'incertitude sur le rapport signal sur bruit proviennent de l'estimation de la variance du bruit, celle-ci dépend de la puissance de pompe et du temps d'acquisition des données. Les barres d'erreur sur la puissance de pompe proviennent de la précision du puissance-mètre pour les puissances supérieures à -60 dBm, cette dernière valeur étant son seuil de sensibilité. Pour les puissances inférieures, la valeur a été extrapolée par rapport aux variations du taux de détection que nous avons supposées linéaires en fonction de la puissance de pompe.

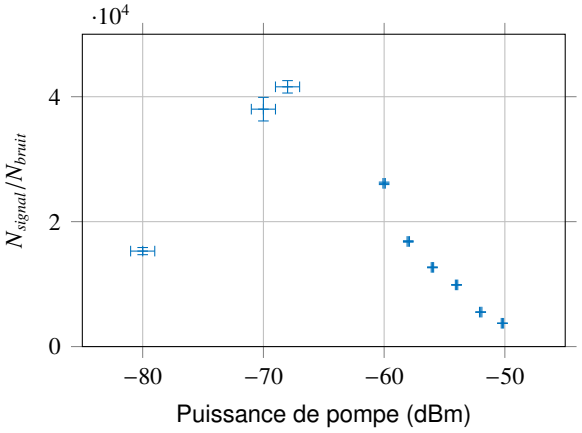


FIGURE 3.24 – Evolution du rapport signal sur bruit en fonction de la puissance de pompe.

Pour tous ces points nous avons mesuré une efficacité de conversion égale à $3 \cdot 10^{-5} \pm 2 \cdot 10^{-6}$. Le calcul de cette efficacité est indépendant des pertes et du rendement des détecteurs et s'écrit, d'après [Tanzilli, 2002],

$$\frac{T_{det1} \times T_{det1}}{2T_c} \times \frac{\lambda_p \times P_p}{h \times c_0}. \tag{3.10}$$

La dégradation du rapport signal sur bruit lorsque la puissance optique augmente est due à la génération de multi-paires de photons et à l'efficacité limitée des détecteurs. Pour expliquer cet effet, prenons le cas simple où deux paires de photons sont bien localisés temporellement, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de recouvrement temporel entre leurs fonctions d'onde. Un photon de chaque paire arrive sur un détecteur et l'autre arrive sur le second détecteur. Dans le cas où les photons arrivent sur le détecteur dans un temps inférieur à la fenêtre de détection, il est possible qu'un des détecteurs soit déclenché par le premier photon et que le second détecteur ne parvienne pas à détecter le premier photon mais se déclenche pour le second. On obtient dans ce cas une coïncidence à un temps décalé du pic de coïncidences, qui dépend de la séparation temporelle entre les paires de photons. Si la séparation des paires de photons est aléatoire, ces coïncidences

contribueront à l'ajout de bruit à la mesure. En réalité nous utilisons un pompage continu du cristal de PPLN, les paires de photons sont donc temporellement délocalisées sur un temps égal à la cohérence du laser de pompe. Comme la fenêtre de détection est bien plus petite que cette cohérence, ce bruit est tout le temps présent et croît avec la probabilité d'émission des multi-paires. Cette probabilité suit une loi de Poisson en fonction de la puissance de pompe.

Pour ces mêmes raisons l'ajout de filtres fins centrés par rapport à la longueur d'onde de dégénérescence réduit le nombre de photons détectés d'un facteur correspondant au recouvrement entre le spectre bi-photon et celui du filtre. Dans notre cas, ce rapport a été estimé car nous n'avons pas de mesure du spectre de fluorescence. Cette estimation provient du calcul l'efficacité de conversion. En effet ce facteur est indépendant des pertes uniquement si elles sont identiques sur tout le spectre bi-photon. Dans le cas où des filtres sont ajoutés, nous calculons l'efficacité de conversion de la source dans le spectre des filtres. Nous avons trouvé une efficacité de conversion de $7,7 \cdot 10^{-9}$. En considérant que le spectre de fluorescence en intensité suit les variations décrites dans la section 2.1.2.2, on trouve que la bande passante $@3$ dB équivalente à la diminution de l'efficacité de conversion vaut $\Delta\nu_s = 8,3 \pm 0,6$ THz. Ce résultat est en accord avec la bande passante théorique calculée à partir de la longueur du cristal et des coefficients de Sellmeier utilisés par le constructeur [Jundt, 1997]. La diminution de la bande passante de détection réduit la probabilité que deux paires de photons générées dans le temps de cohérence du laser parviennent aux détecteurs. La courbe du rapport signal sur bruit est ainsi décalée vers les puissances de pompe plus élevée du taux de recouvrement entre le spectre bi-photon et les filtres, soit dans notre cas 36 dB.

3.1.4.2/ PERFORMANCES DU SYSTÈME OPTIQUE

Nous avons vérifié séparément que les filtres et la source présentaient les performances requises, mais il est toutefois important de les caractériser conjointement. Dans ce but, nous avons réalisé deux séries de mesures de coïncidences, selon le schéma Fig.3.25, et corrélé les variations observées aux différents paramètres expérimentaux.

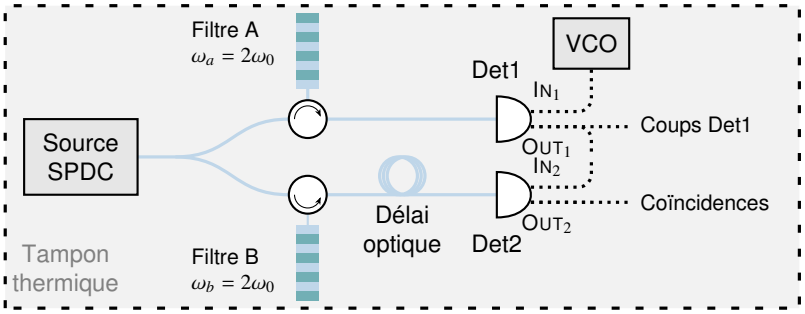


FIGURE 3.25 – Schéma de mesure de la stabilité des filtres par rapport à la source. Les filtres sont tous deux alignés sur la dégénérescence de la source $2\omega_0$. Le système est isolé de la pièce par une boite, représentée en tirets, servant de tampon thermique.

Pour les deux séries de mesures nous avons défini un temps d'acquisition de 30 minutes par mesure de coïncidences. Cette mesure est répétée pendant 6 ou 12 heures. Nous avons enregistré les variations de la température ambiante, ainsi que le taux de détection du premier détecteur et le taux de coïncidences donné par le déclenchement conditionnel du second détecteur.

Pour la première série de mesure, dont les résultats sont présentés figure Fig.3.26, nous avons démarré tous les appareils une vingtaine de minutes avant le début de la première mesure. Nous pouvons observer une forte dégradation du rapport signal sur bruit au cours de la mesure, alors que le nombre de coïncidences reste stable, de plus l'évolution du rapport signal sur bruit est corrélée avec les variations de la température. Ce comportement peut être expliqué par un décalage entre les filtres et la diode, sans mouvement relatif entre les deux filtres. On peut aussi noter que la température se stabilise au bout de 8 heures de mesure. De manière à isoler notre système des variations de luminosité et de température, il a été inséré dans une boite de $1\mathrm{m}^3$ de volume et ces 8 heures sont nécessaires à l'atteinte d'un équilibre thermique dans la boite.

La seconde série de mesure, dont les résultats sont présentés Fig.3.27, a été réalisée alors que la boite était thermalisée, nous avons cependant démarré la source et l'asservissement des filtres une vingtaine de minutes avant le début de la mesure.

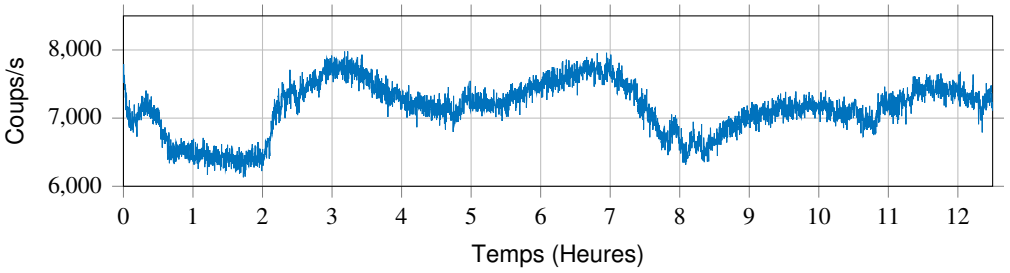
On peut cette fois remarquer que le système est très rapidement stable et les variations du rapport signal sur bruit ne peuvent plus être imputées aux variations de la température, qui varie tout de même de presque 1°C au cours de la mesure. Les variations du rapport signal sur bruit sont cette fois inversement proportionnelles aux variations du nombre de coïncidences ou du nombre de détections. Deux explications peuvent être avancées pour expliquer ce phénomène. Soit cette variation est due a une diminution de la puissance de pompe, soit le PPLN s'est stabilisé à une longueur d'onde différente de la dégénérescence de la pompe. Dans les deux cas, le rapport signal sur bruit augmente car nous nous trouvons sur la pente descendante de la figure Fig.3.24 et que le taux de conversion diminue. Ce comportement ne peut en aucun cas être dû à un mouvement des filtres par rapport à la source. Après la stabilisation initiale, nous pouvons remarquer que le taux de détection, de coïncidences et le rapport signal sur bruit, ne varie pas de plus de 5% alors que la température varie de presque 1°C.

Cette mesure nous conforte donc sur la très bonne stabilité de la longueur d'onde de la diode de pompe par rapport aux filtres. Si l'on se réfère à la figure Fig.3.19, la dérive relative entre ces composants est meilleure que 130 MHz/$^{\circ}$C, soit environ 1 pm.

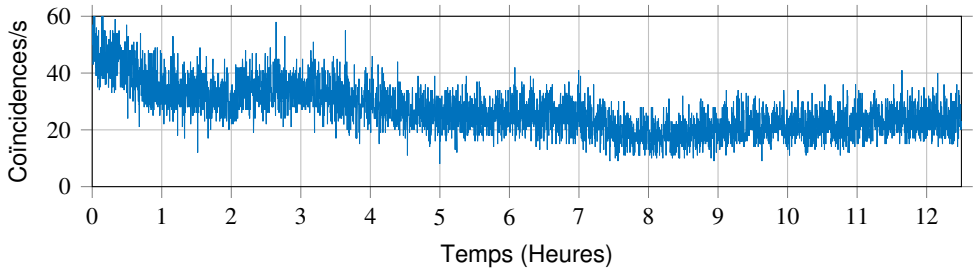
Enfin ces mesures nous ont permis d'identifier des variations des différents éléments par rapport aux variations du taux de détections et du taux de coïncidences. Nous en avons retiré une procédure de réglage fin en régime quantique. Une fois le temps de thermalisation révolu, nous pouvons agir séparément sur les différents composants afin d'optimiser le taux de détections. Comme énoncé précédemment, nous choisissons de ne pas toucher aux paramètres de la diode, afin d'éviter les risques de saut de mode. Nous pouvons ensuite déplacer un filtre de manière à maximiser le taux de coïncidences. Cette position atteinte, nous savons que la fréquence de dégénérescence se situe à la moyenne de la fréquence centrale des filtres. Comme nous avons caractérisé le déplacement des filtres en fonction de la tension de leur asservissement, nous connaissons la position de leur fréquence centrale avec une bonne précision. Nous pouvons donc déplacer les filtres de manière appropriée pour les superposer sur la dégénérescence. Enfin nous pouvons changer la température du cristal de manière à maximiser conjointement les taux de détections et de coïncidences.

Les réglages obtenus possèdent une très bonne répétabilité dans les mêmes conditions de température.

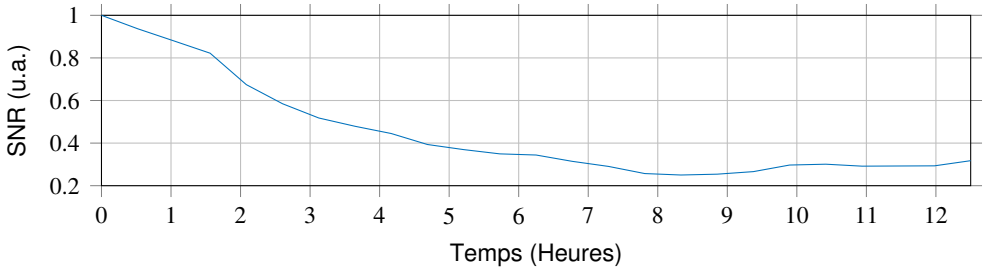
Ceci achève la partie dédiée à la caractérisation des composants optiques actifs, nous allons maintenant donner quelques chiffres sur la dispersion linéaire apportée par la pro-



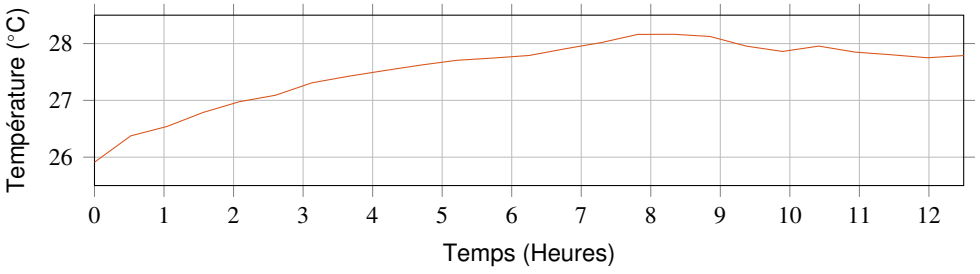
(a) Coups mesurés sur le détecteur 1.



(b) Coïncidences mesurées sur le détecteur 2.



(c) Rapport signal sur bruit par pic de coïncidences (30 min par pic).



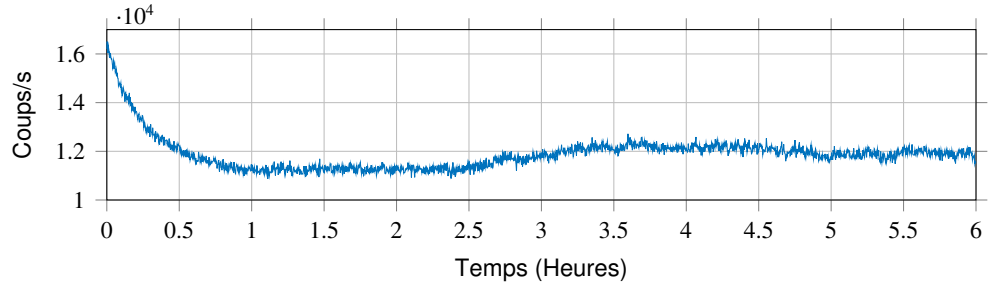
(d) Température moyenne par pic de coïncidences.

FIGURE 3.26 – Variations du rapport signal sur bruit en fonction de la température sans calibration.

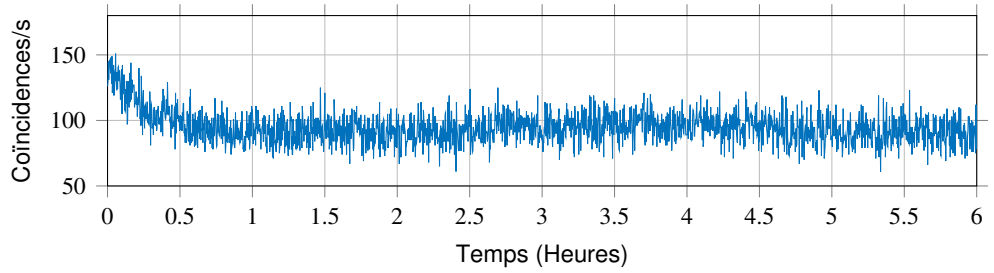
pagation dans des fibres et son influence sur une expérience d'interférence à deux photons.

3.1.4.3/ VARIATIONS THERMIQUE DES FIBRES

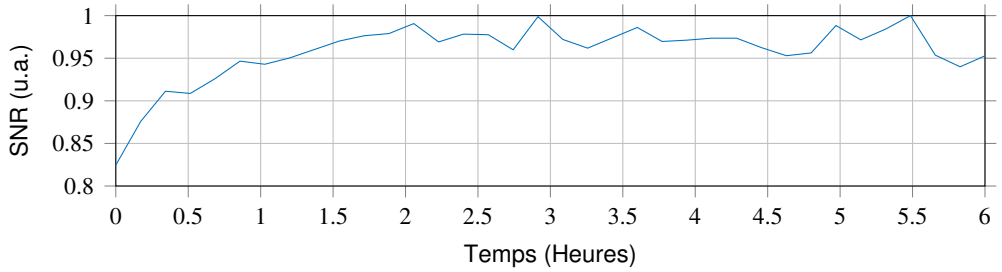
Nous traitons dans cette section uniquement les effets des variations de température sur le déphasage de la figure d'interférence, c'est à dire le terme $\beta_1 \Omega \Delta L$ jouant le même rôle que le déphasage RF. Nous verrons dans la section suivante que de grandes lon-



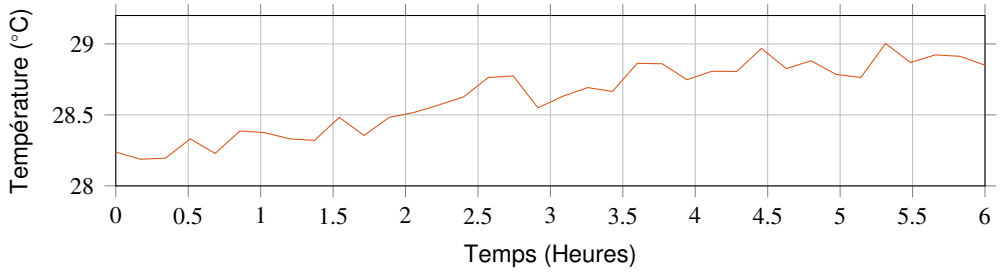
(a) Coups mesurés sur le détecteur 1.



(b) Coïncidences mesurées sur le détecteur 2.



(c) Rapport signal sur bruit par pic de coïncidences (10 min par pic).



(d) Température moyenne par pic de coïncidences.

FIGURE 3.27 – Variations du rapport signal sur bruit en fonction de la température avec calibration.

gueurs de propagation peuvent induire d'autres effets sur la figure d'interférence via la dispersion chromatique. Ici, seule la température est susceptible de faire varier le terme $\beta_1 \Omega \Delta L$, dont on peut différencier deux actions. La première est la variation de l'indice optique par la déformation du nuage électronique et l'autre est une déformation de la maille cristalline. On suppose que les deux fibres possèdent les mêmes propriétés physiques mais peuvent être soumises à des variations de température différentes et que ces variations sont linéaires par rapport à la température. Ainsi on peut écrire pour la première fibre $\beta_{1A}(T_A) = \beta_1(T_0) + \delta\beta_1 \delta T_A$ et $L_A(T_B) = L_A(T_0)(1 + \delta L \times \delta T_A)$ et pour la seconde fibre

$\beta_{1B} = \beta_1(T_0) + \delta\beta_1\delta T_B$ et $L_B(T_B) = L_B(T_0)(1 + \delta L \times \delta T_B)$. Dans ces équations $\delta\beta_1$ est le coefficient thermo électrique et δL le coefficient de dilatation thermique. On appelle T_0 la température ambiante en début d'expérience et les variations de température des fibres par rapport à celle-ci sont respectivement δT_A et δT_B soit $T_A = T_0 + \delta T_A$ et $T_B = T_0 + \delta T_B$. Ainsi $\beta_1(T_0) = \beta_1$, $\Delta T = \delta T_B - \delta T_A$ et $\Delta L = L_B(T_0) - L_A(T_0)$. On écrit alors le terme de phase de la figure d'interférence variant avec la température

$$\begin{aligned}\phi(T) =& \phi_0 + \Delta\phi(T)\\ =& \Omega\left\{(\beta_1 + \delta\beta_1\delta T_B)\left[L_B(T_0)(1 + \delta L \times \delta T_B)\right] - (\beta_1 + \delta\beta_1\delta T_A)\left[L_A(T_0) + (1 + \delta L \times \delta T_A)\right]\right\}\\ =& \Omega\left\{\beta_1\Delta L + \beta_1\delta L\left[\delta T_B L_B(T_0) - \delta T_A L_A(T_0)\right]\right.\\ &\left. + \delta\beta_1\left[\delta T_B L_B(T_0) - \delta T_A L_A(T_0)\right] + \delta\beta_1\delta L\Delta T\left(\Delta T - 2\delta T_A\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

On évalue ensuite les différentes contributions. On a calculé pour cela les variations de l'indice optique à partir de celles des coefficients de Sellmeier donnés en [Ghosh, 1997], $\beta_1 \approx 4,9\times10^{-9}$ s·m^{-1} et $\delta\beta_1 \approx 2,72\times10^{-14}$ s·m^{-1}·K^{-1}, le coefficient de dilatation thermique du verre vaut $\delta L \approx 0.55\times10^{-6}$ K^{-1}. Les variations sont essentiellement dues aux variations de l'indice optique en température et on trouve :

$$\begin{aligned}\Delta\phi(T) =& \Omega\delta\beta_1\left[\delta T_B L_B(T_0) - \delta T_A L_A(T_0)\right]\\ \approx& 2\pi\times0,34\times10^{-3}\left[\delta T_B L_B(T_0) - \delta T_A L_A(T_0)\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La différence de phase dépend donc à la fois de la différence de longueur de fibre et de la différence de température des fibres. On peut considérer que les variations de température des fibres au cours de l'expérience n'excéderont jamais 10 K, on peut poser comme limite le cas où $\delta T_A = 5$ K et $\delta T_B = -5$ K. Dans ce cas la variation de phase reste très inférieure à 2π, par exemple $2\pi/100$. Si la différence de longueur entre les deux fibres avant modulation reste inférieure à 10 m, cette variation est négligeable. Toutefois, dans le cadre de la compensation de dispersion les fibres mesureront plusieurs kilomètres. Nous allons donc évaluer expérimentalement l'influence des variations de la température.

3.1.4.4/ CONTRÔLE THERMIQUE DES FIBRES

Comme nous l'avons décrit dans la section 3.1.4.3, les variations thermiques dans les fibres optiques sont essentiellement dues aux variations de l'indice optique. Typiquement il existe un facteur 10 entre ces deux phénomènes. Or dans la section précédente, (2.104), nous avons mis en évidence un terme de phase $\Delta\phi$, qui dépend des différences de longueur de propagation des photons après leur séparation, $\beta_1(L_B - L_A)$. Nous avons mis en évidence dans la section 3.1.4.3, que la variation de cette phase en fonction de la température s'écrit

$$\Delta\phi(T) = \Omega\delta\beta_1\left[\delta T_B L_B(T_0) - \delta T_A L_A(T_0)\right], \tag{3.13}$$

avec $\delta\beta_1 = 2,72\times10^{-14}$ s· m^{-1}·K^{-1}.

Ainsi si les distances de propagations sont équilibrées, $L_A(T_0) = L_B(T_0)$, un déphasage de 2π est obtenu si $\delta T \times L_A(T_0) \approx 3000$ m·K. Si nous voulons que le déphasage n'excède pas 5° au cours d'une expérience, ce qui équivaut à la moitié de la résolution en phase de notre figure d'interférence, il faut vérifier que $\delta T \times L_A(T_0) < 42$ m·K. Ainsi si nous voulons propager les photons sur une distance de 2 km chacun, nous devons nous assurer que les variations thermiques d'une fibre par rapport à l'autre n'excèdent pas $0,02^\circ$C. Ce niveau de contrôle est réalisable expérimentalement si la propagation a lieu dans une bobine de fibre confinée dans un environnement stabilisé, mais est hors d'atteinte d'une mise en situation réelle où les fibres sont déployées sur 4 km. Si nous voulons réaliser une propagation des photons de 30 km chacun, le niveau de contrôle requis est proche de 1×10^{-3}°C, ce qui est compliqué à réaliser par rapport au volume des bobines de fibre.

Nous avons vérifié expérimentalement le degré de précision requis. Pour cela, comme montré sur le schéma Fig.3.28, nous avons réalisé une mesure d'interférence classique en disposant les modulateurs en ligne séparés par une fibre de 30 km. Nous avons injecté une source monochromatique d'un côté et mesuré l'ordre 0 de modulation en sortie du second modulateur à l'aide d'un filtre et d'une photodiode.

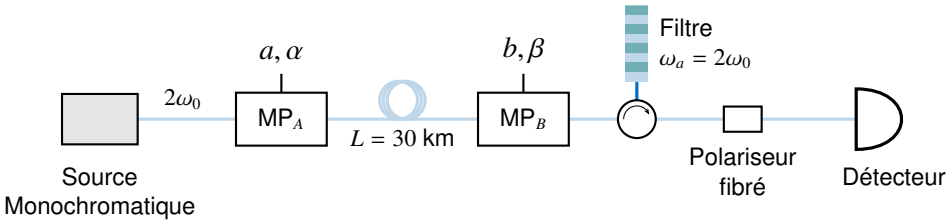


FIGURE 3.28 – Schéma de mesure de la stabilité des filtres par rapport à la source. Les filtres sont tous deux alignés sur la dégénérescence de la source $2\omega_0$. Le système est isolé de la pièce par une boite, représentée en tirets, servant de tampon thermique.

Nous pouvons voir, sur la figure Fig.3.29, une variation d'amplitude rapide qui correspond au parcours de plusieurs fois la figure d'interférence.

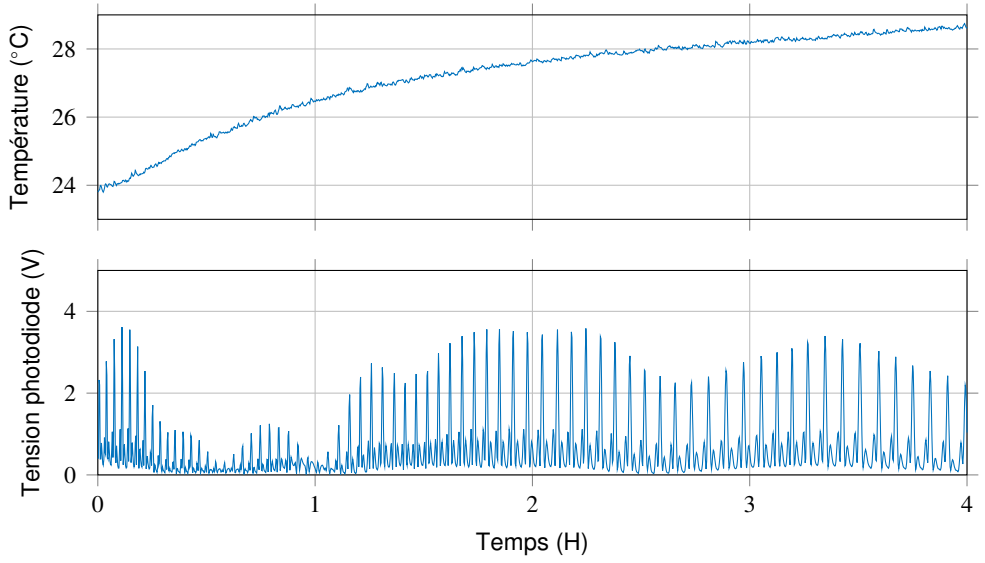


FIGURE 3.29 – Déphasage de la figure d'interférence classique en fonction de la température pour 30 km. Chaque pic représente un point de même phase.

La figure d'interférence est parcourue uniquement par le déphasage correspondant aux variations de température dans la fibre. Les variations d'amplitude lentes sont issues des variations de polarisation dans la fibre. Une polarisation rectiligne en entrée du second modulateur est obtenue à l'aide d'un polariseur fibré. La figure d'interférence a été parcourue 70 fois pour une variation de température $4,8$˚C, nous obtenons donc que la figure d'interférence est parcourue environ 15 fois par ˚C au lieu des 10 fois prédites par la théorie. L'ordre de grandeur trouvé est le même et la différence peut être expliquée par le manque d'information sur la température exacte de la fibre. Nous avons en effet mesuré la température de la pièce à un endroit proche de la fibre et non la température de la fibre elle même. Un système d'asservissement thermique sera toutefois suffisant pour négliger les variations de cette phase au cours de l'expérience.

Maintenant que nous avons caractérisé l'ensemble du système, nous pouvons passer à l'expérience d'interférence quantique longue distance.

3.2/ SYSTÈME INTERFÉROMÉTRIQUE LONGUE DISTANCE

Nous proposons dans cette partie de montrer une compensation non-locale de la dispersion sur une figure d'interférence non-locale. Les différents composants du système permettant de réaliser l'interférence à deux photons ont été présentés section 3.1. La dispersion est réalisée par propagation dans des fibres optiques standards de type SMF-28 et utilisées en télécommunication. Nous possédons deux composants permettant de compenser la dispersion, l'un est accordable mais n'est utilisable que pour des distances de propagation relativement faibles, quelques kilomètres. L'autre possède une correction de dispersion fixe de 60 km. Pour simplifier la réalisation expérimentale, nous avons choisi de co-propager les photons sur une distance de 30 km avant de les séparer. Nous appliquerons ensuite la compensation de la dispersion totale en agissant sur un seul des deux photons et examinerons cet effet sur la figure d'interférence. Afin d'éviter tout doute sur l'influence que pourrait avoir une co-propagation des photons sur la compensation non-locale de la dispersion, nous avons choisi de réaliser une seconde expérience pour quelques kilomètres de propagation. Nous pourrons ainsi montrer qu'il est équivalent de propager les photons dans une même fibre ou dans deux fibres séparées et que la correction de la dispersion totale sur un seul des deux photons donne les mêmes résultats. Nous rappelons le schéma de l'expérience sur la figure Fig.3.30.

Avant de présenter ces expériences, nous allons réaliser une interférence à deux photons sans longue distance afin de vérifier que la figure d'interférence suit bien les prédictions théoriques. Ensuite, nous allons présenter les différents composants dont nous disposons pour réaliser une compensation de la dispersion.

3.2.1/ CARACTÉRISATION DES FRANGES D'INTERFÉRENCE À DEUX PHOTONS

Tous les composants répondent au cahier des charges, nous pouvons donc vérifier que notre architecture permet d'obtenir la figure d'interférence à deux photons prédite (2.95). Nous avons représenté figure Fig.3.31, une photographie du dispositif expérimental complet. Nous pouvons voir que l'encombrement est relativement faible pour ce genre d'expériences. Nous avons réalisé 5 séries de mesures, pour lesquelles la position des filtres par rapport à la dégénérescence d varie. Nous avons tout d'abord positionné les filtres

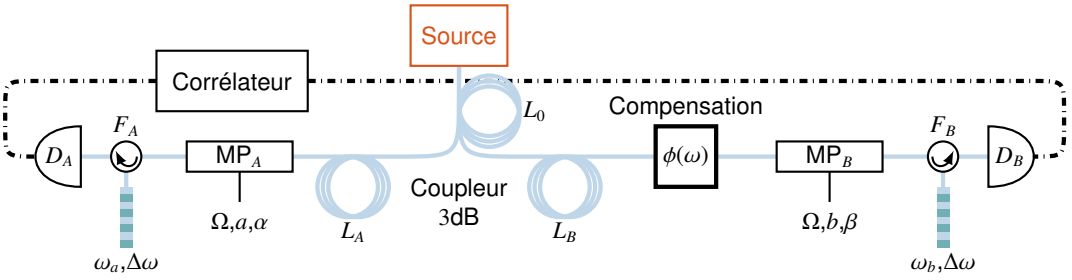


FIGURE 3.30 – Schéma expérimental de l'interférence à deux photons.

à la longueur d'onde de dégénérescence, cette position correspond à $d = 0$, puis nous avons décalé un seul des filtres d'entiers de la fréquence de modulation $\Omega/2\pi$ afin d'obtenir $d = 1$, $d = -1$, $d = 2$ et $d = -2$. Pour chacune de ces positions nous avons déphasé le modulateur côté Bob de 40 valeurs de 0 à 2π et nous avons enregistré 3000 coïncidences par phase. Ce nombre de coïncidences peut sembler assez faible, mais nous voulions uniquement vérifier la fonctionnalité du système. La limitation du nombre de coïncidences acquises nous a permis de réaliser l'ensemble des figures d'interférence en moins de 3 heures. La violation d'une inégalité de Bell a été montrée sur ce type d'architecture lors de travaux précédents [Olislager et al., 2010, Olislager et al., 2012] et le but n'est pas de reproduire ces résultats.

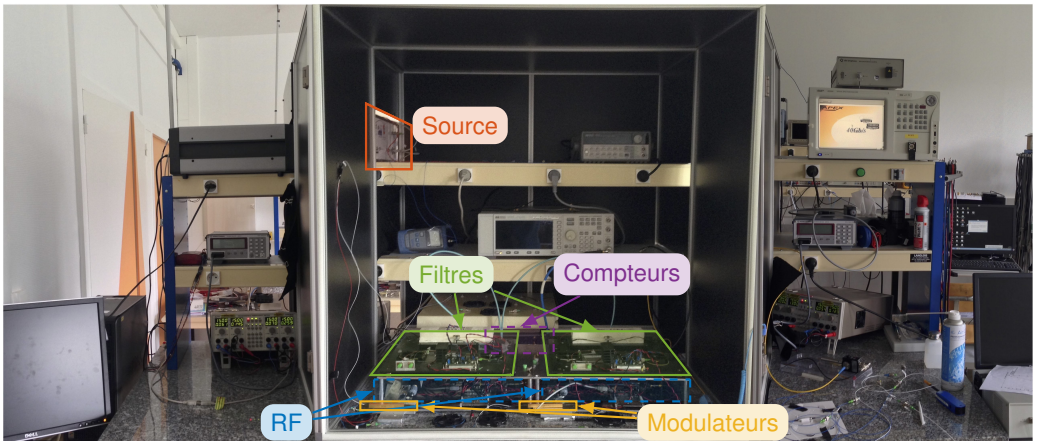


FIGURE 3.31 – Photographie du dispositif expérimental.

Les résultats obtenus dans notre cas sont présentés figure Fig.3.32 et les paramètres relatifs à l'expérience sont répertoriés dans le tableau 3.7.

Comme nous avons acquis un nombre de coïncidences total fixe, l'évolution du nombre de coïncidences mesurées dans la fenêtre du signal lors du déphasage ne correspond pas directement à celle de la figure d'interférence attendue. En effet, la figure d'interférence décrit l'évolution du taux de coïncidences, il faut donc soustraire le bruit de la fenêtre du signal, puis normaliser par le temps d'acquisition. Le logiciel utilisé ne donne pas le temps d'acquisition d'une mesure, nous avons donc normalisé par rapport à la moyenne du bruit, celle-ci étant proportionnelle au temps d'acquisition. Nous considérons que le taux moyen de bruit ne varie qu'en fonction du taux de détection, nous pourrons donc normaliser ce dernier par rapport a ces variations. Le rapport signal sur bruit normalisé peut s'écrire

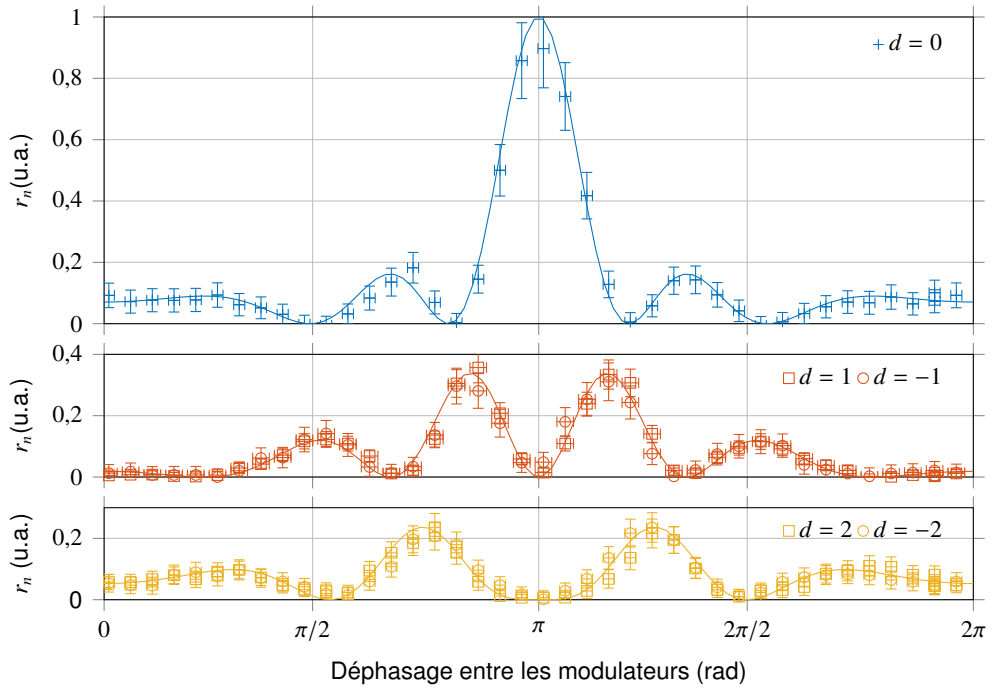


FIGURE 3.32 – Interférence à deux photons.

$$r_n = \frac{N_s - \tau_{\text{Bruit}} \times \Delta t_c}{\tau_{\text{Bruit}} \times \text{SNR}_{\text{OFF}}}, \tag{3.14}$$

où N_s est le nombre de coïncidences dans la fenêtre signal, τ_{Bruit} le taux de bruit moyen hors de la fenêtre de signal, Δt_c la longueur temporelle de la fenêtre de signal et SNR_{OFF} le rapport signal sur bruit lorsqu'il n'y a pas de modulation. Ce dernier facteur sert de normalisation à 1 du rapport signal sur bruit et s'obtient par la même mesure lorsque le générateur RF est éteint.

Les barres d'erreur associées à cette mesure prennent en compte les erreurs statistiques associées au bruit et au nombre d'échantillons, mais aussi aux variations du taux de coïncidences associées à la dérive des filtres et de la pompe et estimées à 5% pendant la phase de caractérisation.

On peut remarquer que les résultats expérimentaux représentés par des carrés et des ronds, sont en très bon accord avec les prédictions théoriques en trait plein. Les barres d'erreur étant en majeure partie dues aux fluctuations statistiques à la fois du signal et du bruit, il est possible de fortement les réduire en augmentant le temps d'acquisition. Nous garderons toutefois la limite fixe correspondant aux dérives potentielles des filtres et de la diode de pompe, car nous n'avons pas de moyen de vérification de ces paramètres en temps réel. Le seul moyen que nous ayons est une mesure des variations du rapport signal sur bruit lorsque le générateur RF est éteint et cette mesure ne peut pas être faite conjointement avec la mesure voulue. De plus, le convertisseur analogique/numérique des détecteurs ne transfert les coïncidences enregistrées que lorsqu'un *buffer* est plein, soit environ après 800 coïncidences. Ainsi cette correction n'est envisageable que lorsque le taux de coïncidences est élevé et que la mesure ne reflète les variations de ce rapport qu'avec un délai très inférieur aux variations de la température.

Paramètre	*Alice*	*Bob*	*Unité*
Puissance de pompe	-18		dBm
Taux de modulation	$2,75$		
Rendement des détecteurs	20		$\%$
Durée des portes	100		ns
Temps mort	10		μs
Taux de détection	12000	13000	coups/s
Taux de coïncidences RF éteinte	100		coïncidences/s

TABLE 3.7 – Paramètre de l'expérience d'interférence

Ces résultats nous ont permis de contrôler que l'interférence produite par notre système était bien celle attendue.

3.2.2/ CARACTÉRISATION DES MODULES À COMPENSATION DE DISPERSION

Nous avons à notre disposition deux composants permettant de contrôler la dispersion. L'un a une fonction de masque de phase ajustable et l'autre est un Module de Compensation de Dispersion Fixe (MCDF), utilisé en télécommunication optique. Nous allons d'abord voir les principaux avantages et défauts de ces composants.

3.2.2.1/ FILTRE ACCORDABLE EN PHASE ET EN AMPLITUDE

Le module WaveShaper 4000s (WS4000s), fabriqué par la société FINISAR, permet de contrôler l'amplitude et la phase d'un signal large spectre. Comme représenté figure Fig.3.33, le signal est diffracté par un réseau sur une matrice de cristaux liquides avec une polarisation optimale.

Il correspond alors une petite plage de fréquences à chaque colonne de la matrice de cristaux liquides. On peut ainsi orienter les cristaux de cette colonne pour modifier l'amplitude et la phase de la partie du spectre diffractée sur cette colonne. Cet outil étant pensé pour être utilisé sur toute la bande-C, il possède une résolution spectrale limitée de 10 GHz. De plus, il existe un léger couplage entre les cristaux liquides voisins qui nous empêche de réaliser des variations de phase trop abruptes sans entrainer une diminution de l'amplitude [Roelens et al., 2008]. Les données constructeur donnent la possibilité de corriger une dispersion équivalente à ± 100 ps/nm sur une bande de 100 GHz. Cette dispersion est équivalente à une propagation d'environ 6 km à $\lambda = 1550$ nm.

Nous avons donc successivement appliqué sur le WaveShaper des phases correspondant à une dispersion de 0 km à 6 km sur une fenêtre de 100 GHz de large, centrée sur ω_0. La transmission du WS4000s mesurée à l'OSA pour ces différentes phase est présentée figure Fig.3.34.

Comme évoqué par le constructeur, l'amplitude décroît lorsque la différence de phase entre deux canaux est forte. Ainsi l'amplitude chute fortement sur les bords de notre fenêtre et atteint jusqu'à 8dB pour 6 km. La solution proposée par le constructeur pour obtenir un spectre plat est d'infliger des pertes aux autres canaux afin de les rapporter au niveau du minimum.

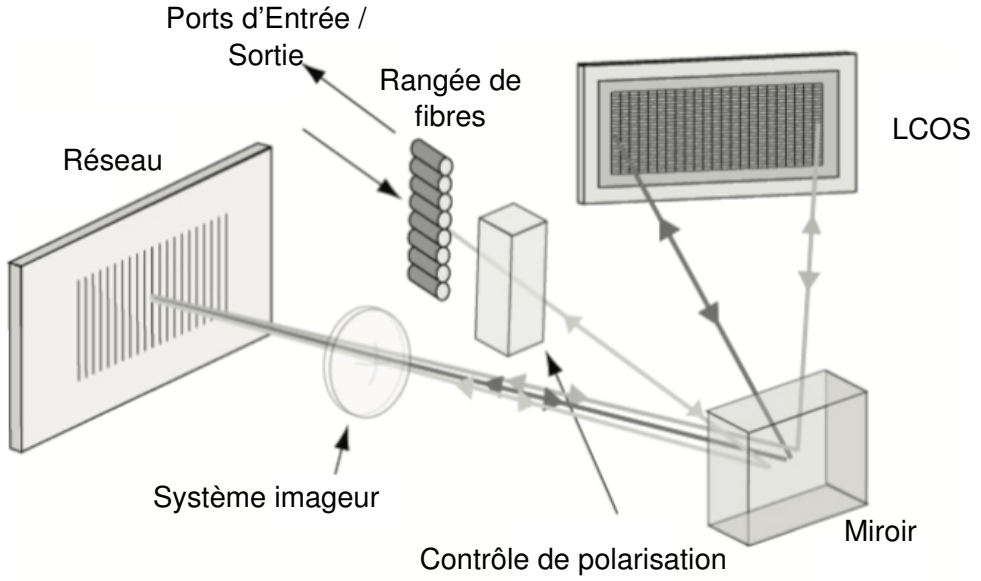


FIGURE 3.33 – Schéma du fonctionnement du WS4000s donné dans le manuel.

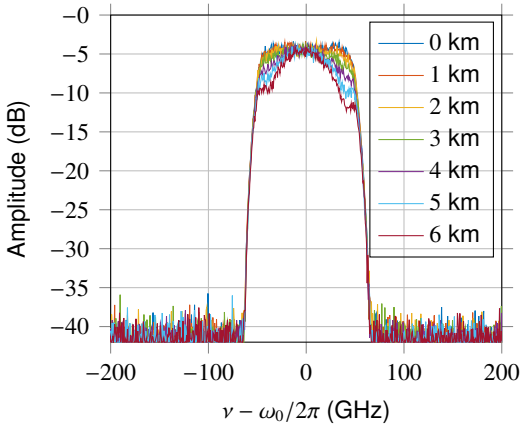


FIGURE 3.34 – Spectre en transmission du WS4000s pour différentes dispersions.

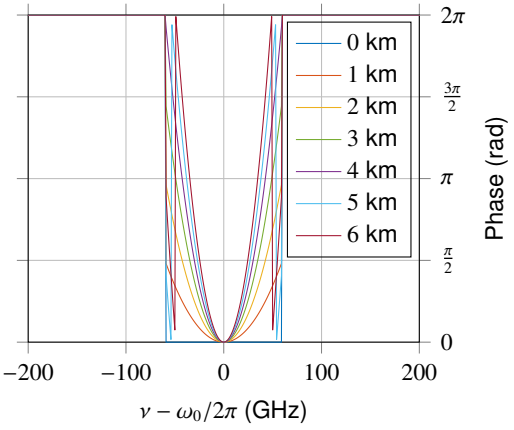


FIGURE 3.35 – Spectre en phase appliqué au WS4000s en fonction de la distance.

Nous avons appliqué cette méthode de correction pour la dispersion correspondant à 4 km et le résultat obtenu est présenté figure Fig.3.36.

Le spectre obtenu après correction, représenté sur la figure Fig.3.36, présente des variations d'amplitude inférieures à $0,5$ dB, ce qui est acceptable, d'autant plus que l'on peut tenir compte de la forme du spectre pour les résultats théoriques. Les corrections pour les propagations inférieures sont meilleures et nous limiterons l'utilisation de cet appareil à 4 km. En effet l'appareil présente une perte intrinsèque de $4,5$ dB et pour corriger 4 km de dispersion nous devons ajouter une perte supplémentaire de 3 dB. Cette distance paraît être un bon compromis entre les pertes engrangées et la déformation de la figure d'interférence Fig.2.19. En dessous de cette distance les effets de la dispersion sur la figure d'interférence ne sont pas remarquables et pour des distances supérieures à 4 km, les pertes sont trop importantes avec cette méthode de correction. Nous pouvons aussi ajou-

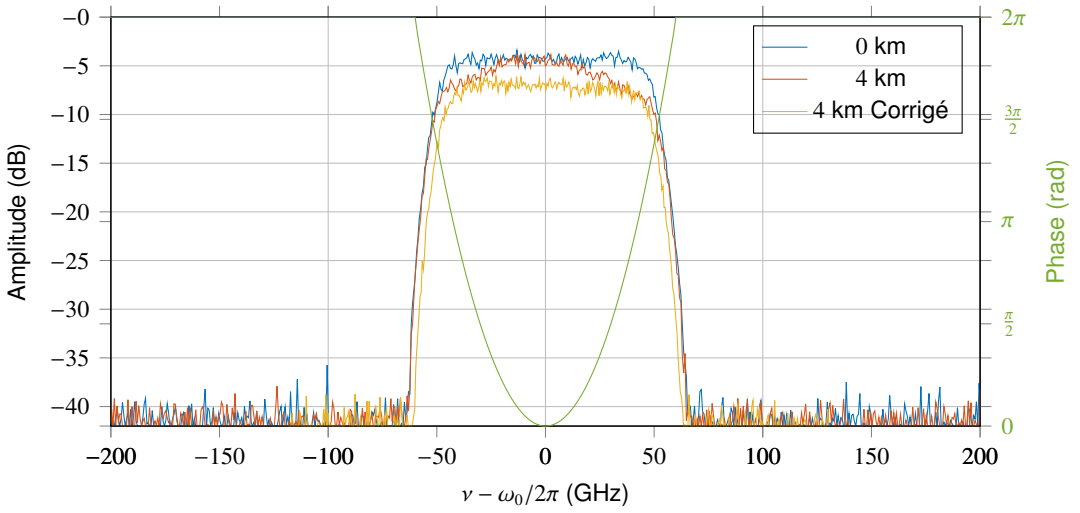


FIGURE 3.36 – Mesures du spectre en amplitude du WS4000s suivant la phase et l'amplitude appliquée.

ter que la résolution de cet appareil est supérieure à la taille de nos filtres, il applique donc une phase constante au sein d'un même *bin* et ne permet pas de corriger la dispersion intra-*bin*. Bien qu'elle soit faible pour cette distance de propagation, nous en tiendrons tout de même compte lors des simulations théoriques des courbes d'interférence.

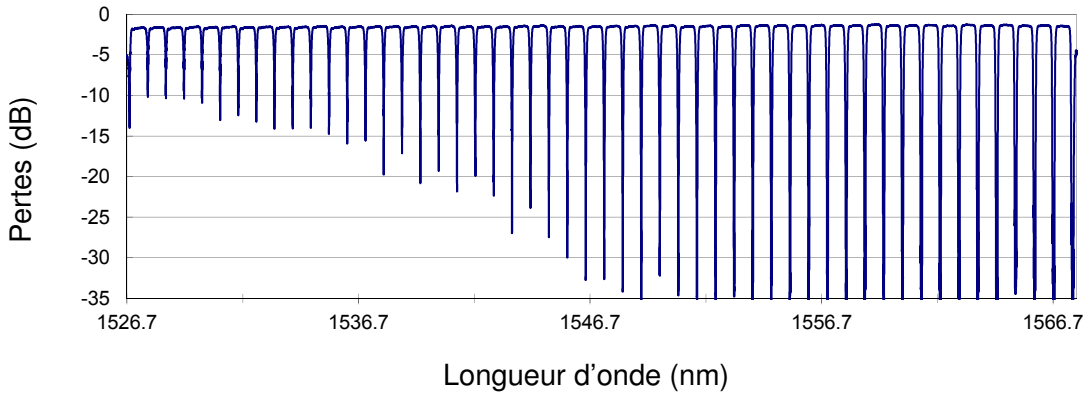
Pour de longues distances de propagation, nous utiliserons un module à compensation de dispersion fixe, que nous présentons maintenant.

3.2.2.2/ LE MODULE À COMPENSATION DE DISPERSION FIXE

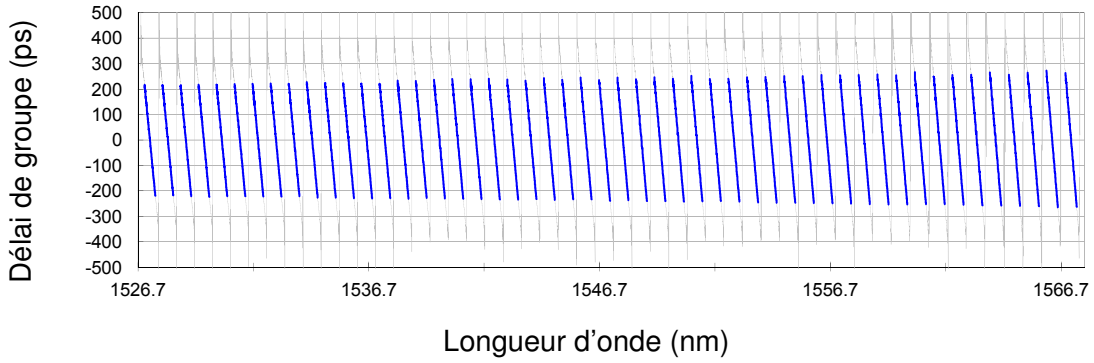
Le module à compensation de dispersion fixe est le modèle DCMX fabriqué par la société TERAXION. Il corrige la dispersion équivalente à celle introduite après une propagation de 60 km et est aligné sur les canaux 13 à 63 de la grille ITU à 100 GHz. Le MCDF est un réseau de Bragg "chirpé" inscrit dans une fibre [Ouellette, 1987]. Ce dispositif possède des pertes d'insertion de $1,6$ dB sur le canal exploité et des variations d'amplitude inférieures à $0,2$ dB sur la largeur de ce canal. La correction de la dispersion est assurée par le constructeur sur une largeur de 60 GHz sur tous les canaux et on a représenté les caractéristiques constructeur obtenues en amplitude et en phase, respectivement sur les figures Fig.3.37a et Fig.3.37b.

Ce dispositif semble parfaitement adapté à notre besoin, seulement, la dégénérescence de notre source n'est pas alignée au centre d'un canal comme le montre la courbe bleu sur la figure Fig.3.38. Ainsi le bin centré sur la troisième harmonique de modulation $\nu - \nu_0 = -37,5$ GHz, se retrouve entre deux canaux et subit une perte de 30 dB, comme le montre la courbe rouge. De plus, le bin centré en $\nu - \nu_0 = -25$ GHz se retrouve en bord de canal et la correction de la dispersion n'est pas garantie par le constructeur. Si changer la longueur d'onde de doublage du cristal est aisé, le laser de pompe, lui, n'est pas accordable. Aussi, nous avons fait le choix de réaliser l'expérience dans ces conditions et nous en tiendrons compte lors de la simulation des figures d'interférence.

Afin de nous affranchir des difficultés de stabilisation thermiques, nous avons choisi de réaliser une expérience dans laquelle la propagation est réalisée dans une fibre unique



(a) Pertes d'insertion du MCDF en fonction de la longueur d'onde.



(b) Délai de groupe du MCDF.

FIGURE 3.37 – Délai de groupe et pertes du MCDF en fonction de la longueur d'onde, donnés par le manuel.

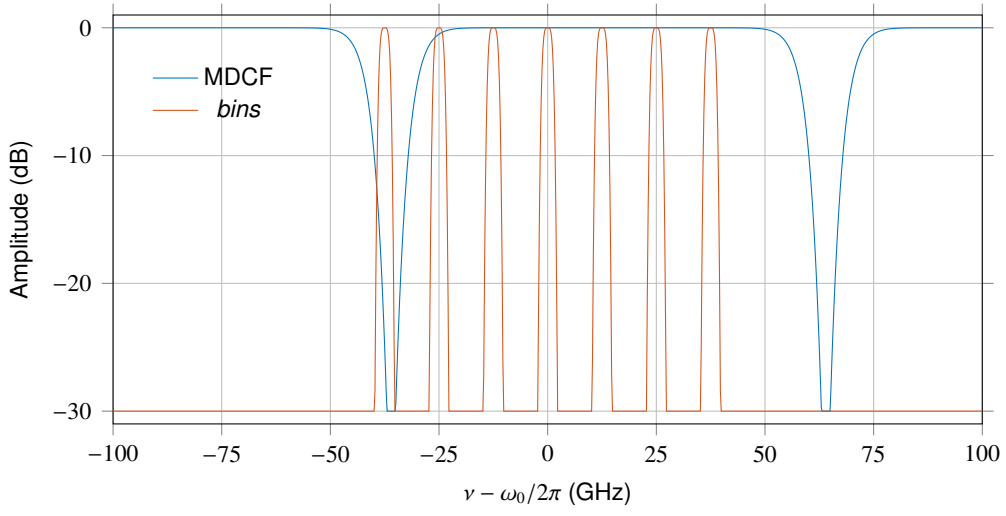


FIGURE 3.38 – Mesures du spectre en amplitude du MCDF.

de 30 km, puis de séparer les photons et de corriger la dispersion totale de 60 km sur un seul des deux photons. Avant de présenter les résultats de cette expérience nous allons montrer la compensation non-locale de la dispersion sur une distance de 4 km. Sur cette distance, nous pourrons montrer le caractère non-local de la dispersion en

construisant une figure d'interférence, soit pour la co-propagation des photons, soit pour leur propagation séparée. Dans chacun des cas, la figure d'interférence est celle d'une Bessel d'ordre 0 obtenue pour des taux de modulation $\alpha = \beta = 2,75$ et une position des filtres $\omega_a = \omega_b = \omega_0$.

3.2.3/ EFFETS DE LA PROPAGATION ET COMPENSATION DE DISPERSION NON-LOCALE

Nous avons vérifié que la figure d'interférence sans propagation correspondait bien aux prédiction théoriques, nous avons présenté les caractéristiques des modules de compensation de dispersion, nous pouvons maintenant réaliser une interférence à deux photons longue distance et montrer la compensation non-locale de la dispersion.

3.2.3.1/ RÉSULTATS POUR 4 KILOMÈTRES DE PROPAGATION

Afin de répondre à toutes les contraintes techniques, nous avons choisi une distance de propagation de 4 km. Les photons jumeaux sont soit co-propagés dans une fibre de longueur $L_0 = 2$ km, soit propagés indépendamment dans des fibres de longueur $L_A \approx L_B = 2$ km. Nous appliquons ensuite la correction de la dispersion sur un seul des deux photons à l'aide du module WS4000s. Dans les deux cas, la figure d'interférence théorique correspond à la section $L = 4$ km de la figure Fig.2.19.

Co-propagation des photons jumeaux sur 2 kilomètres : Pour cette expérience, nous avons disposé une fibre de 2 km en sortie de source, comme représenté sur la figure Fig.3.39.

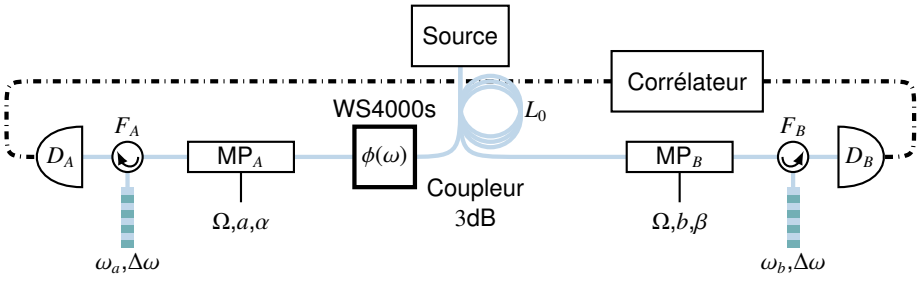


FIGURE 3.39 – Schéma expérimental de l'interférence à deux photons pour $L_0 = 2$ km.

Nous avons ensuite réajusté sa polarisation puis séparé les photons afin de produire une interférence quantique en fréquence. La figure d'interférence obtenue est présentée en bleu figure Fig.3.40. Les croix correspondent aux données expérimentales et le trait plein correspond à la simulation. Il existe une très bonne concordance entre ces résultats.

Nous avons ensuite utilisé le WaveShaper sur le bras B, juste après la séparation des photons, afin de corriger la totalité de la dispersion, soit 4 km. Le résultat est reporté en rouge sur les figures Fig.3.40. Les croix correspondent aux résultats expérimentaux et le trait plein à la simulation. Nous pouvons constater que la figure d'interférence ne correspond pas tout à fait au motif sans propagation que l'on peut observer en coupe sur la figure Fig.2.19. La dispersion n'est donc pas totalement corrigée. Une raison que

nous avançons, pour expliquer cette correction incomplète, est que le WaveShaper ne réalise pas une compensation parfaite. Nous avons en effet souligné que sa résolution est limitée. Il ne permet d'appliquer qu'une phase par *bin*, sans pouvoir corriger la dispersion intra-*bin*. Il apporte aussi de légères variations d'amplitude entre les différents *bins*, ce qui change la condition d'interférence. Pour cette simulation nous avons tenu compte de ces imperfections et on peut observer une très bonne concordance des résultats.

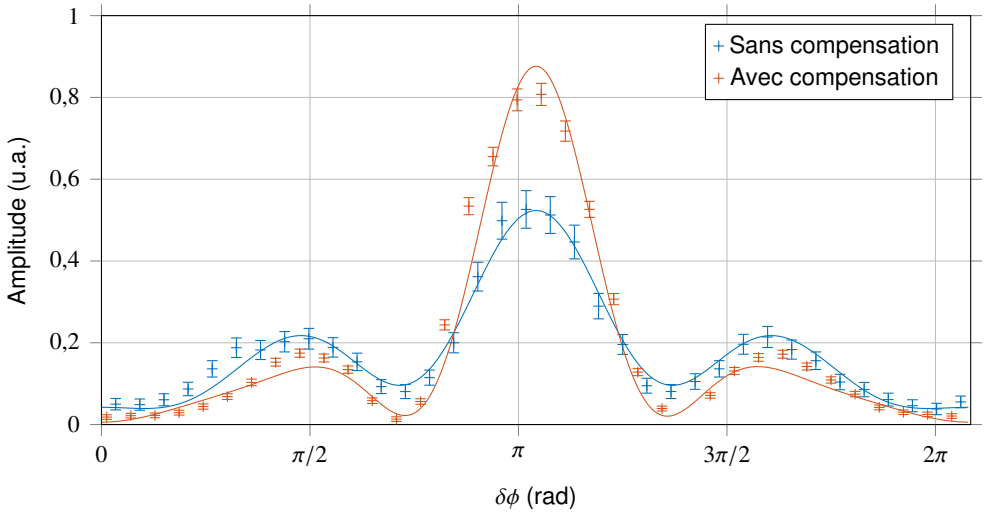


FIGURE 3.40 – Interférence à deux photons pour 2 km de co-propagation des photons, avec et sans correction, respectivement en rouge et bleu. Sont représentées les coïncidences auxquelles nous avons soustrait le bruit moyen mesuré, en suivant la procédure présentée à la section 3.1.4.1.

La plus grosse contrainte lors de cette expérience est le temps nécessaire pour acquérir les données lorsque la dispersion est corrigée. En effet le WaveShaper introduit des pertes de 7.5 dB et le temps nécessaire à la reconstruction de la figure d'interférence est d'environ 15 heures, contre 3 heures pour la courbe sans compensation. Afin de montrer le rôle non-local de la dispersion, nous allons séparer les photons avant leur propagation lors d'une nouvelle expérience.

Propagation séparée des photons intriqués : Cette fois, nous avons utilisé deux fibres de 2 km, le schéma de l'expérience est représenté figure Fig.3.41.

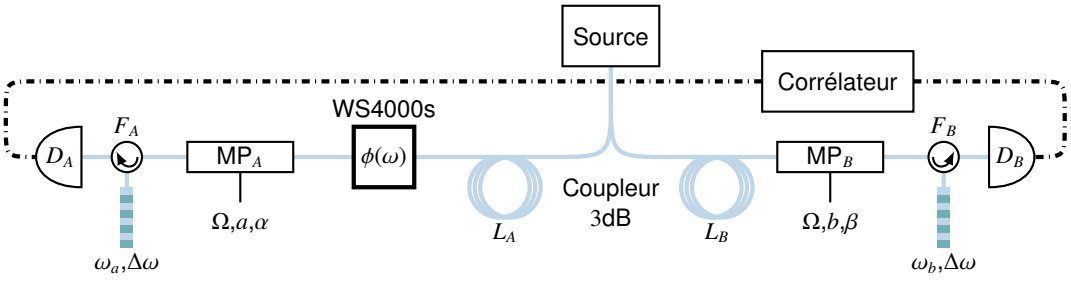


FIGURE 3.41 – Schéma expérimental de l'interférence à deux photons pour $L_A = L_B = 2$ km.

Afin de s'affranchir des variations de phase dues aux fluctuations de la température, ces

fibres sont asservies en température. Les figures d'interférence mesurées avec ou sans compensation de la dispersion sont reportées sur la figure Fig.3.42, respectivement en rouge et en bleu. Nous pouvons remarquer que nous obtenons exactement la même figure d'interférence que pour le cas précédent. Du point de vue de l'interférence il n'y a aucune différence entre la propagation des photons ensemble ou séparés. La compensation de la dispersion est encore une fois incomplète, mais suit très bien les prédictions théoriques.

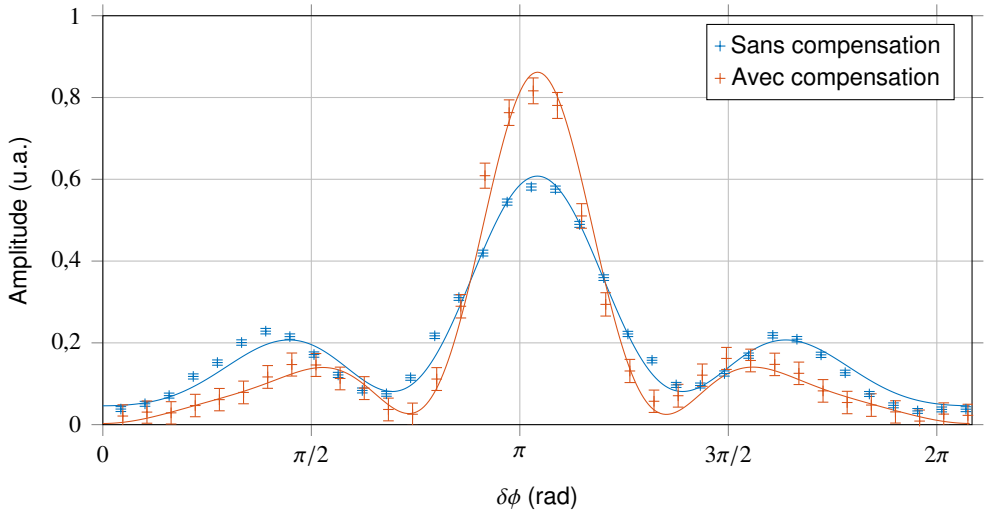


FIGURE 3.42 – Interférence à deux photons pour 2 km de propagation séparée des photons, avec et sans correction, respectivement en rouge et bleu. Sont représentées les coïncidences auxquelles nous avons soustrait le bruit moyen mesuré, en suivant la procédure présentée à la section 3.1.4.1.

La difficulté principale, lors de cette expérience, est de s'assurer que la figure d'interférence ne se déphase pas à cause des fluctuations de température. Ceci est d'autant plus vrai lorsque nous devons corriger la dispersion car le temps nécessaire à l'acquisition des données est de 15 heures. Comme nous n'avons pas de moyen de mesurer ces variations en temps réel, nous n'avons acquis qu'un buffer par point. Ceci limite le temps nécessaire à parcourir une figure d'interférence complète. Nous avons répété cette mesure plusieurs fois et sommé les résultats obtenus après avoir constaté que les courbes ne présentent pas de déphasage.

Nous pouvons maintenant passer à notre troisième expérience qui est la réalisation d'une interférence quantique avec 60 km de propagation.

3.2.3.2/ RÉSULTATS POUR 60 KILOMÈTRES DE PROPAGATION

Cette expérience n'a pas été la plus compliquée à mettre en oeuvre d'un point de vue technique. Son schéma est représenté sur la figure Fig.3.43.

La propagation se faisant dans une même fibre, il n'y a pas d'importance à attacher aux variations de température. De plus, le module de compensation de la dispersion possède des caractéristiques fixes. Il n'y a donc pas d'ajustement nécessaire à faire sur cet élément. La seule difficulté est liée aux pertes de la fibre. Effectivement, chaque photon subit 6 dB de perte. Ce qui équivaut à un total de 12 dB pour le taux de coïncidences. Ainsi,

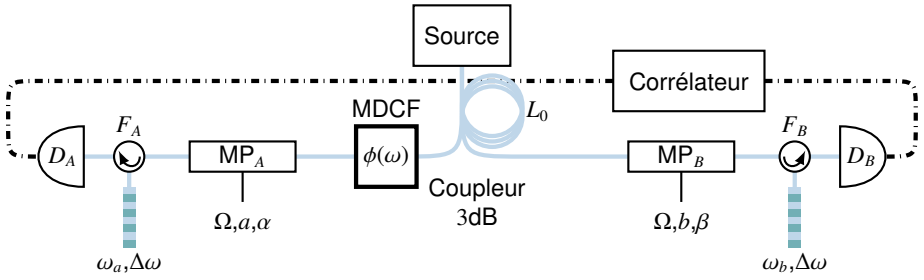


FIGURE 3.43 – Schéma expérimental de l'interférence à deux photons pour $L_0 = 30$ km.

la réalisation de cette expérience à nécessité 48 heures d'acquisition pour chacune des figures d'interférence. Bien entendu l'ensemble des paramètres définissant le système doit être stable pendant l'acquisition d'une courbe. Ainsi, nous avons utilisé le même procédé que pour l'expérience précédente, qui consiste à se limiter à la taille d'un buffer du corrélateur pour chaque point et à répéter plusieurs fois la mesure. Cette méthode permet à la fois d'obtenir un effet moyen des fluctuations de puissance de la pompe, mais aussi de ne pas perdre l'intégralité des résultats si un élément fait défaut au cours de l'expérience. L'acquisition d'une courbe avec un buffer pour chaque point nécessite cependant que tous les paramètres restent stables durant plus de 9 heures.

Les résultats obtenus sont reportés sur la figure Fig.3.44. Ils peuvent être comparés aux résultats que l'on obtiendrait dans le cas d'une compensation de dispersion idéale représentés en coupe de la figure Fig.2.19.

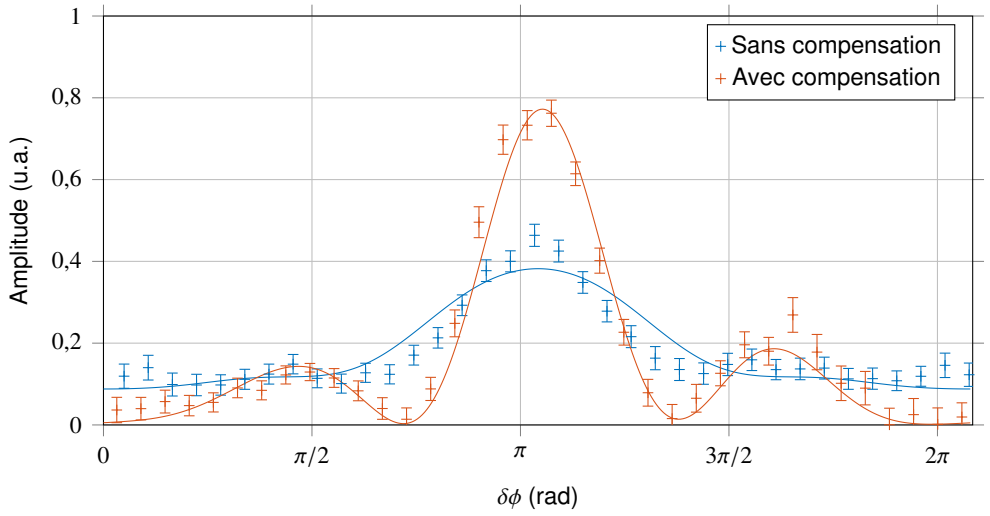


FIGURE 3.44 – Interférence à deux photons pour 30 km de co-propagation des photons, avec et sans compensation. Sont représentées les coïncidences auxquelles nous avons soustrait le bruit moyen mesuré, en suivant la procédure présentée à la section 3.1.4.1.

La méthode de compensation de la dispersion n'est pas parfaite, mais l'effet est bien visible. Nous avons identifié la raison conduisant à cette imperfection et nous en avons tenu compte pour la simulation des résultats, représentés en traits rouges, figure Fig.3.44. Cette imperfection est due à la perte d'un chemin participant à l'interférence. Il se trouve en effet entre deux canaux de transmission du module de compensation et ne participe plus à l'interférence. Une des conséquences caractéristiques de ce phénomène est la dis-

symétrie des lobes secondaires de la figure d'interférence. Encore une fois nous pouvons noter le très bon accord entre les résultats expérimentaux et les prédictions simulées.

C'est sur cette dernière expérience que s'achève notre démonstration de la compensation non-locale de la dispersion. Nous avons montré cet effet de manière originale à l'aide d'une interférence non locale en fréquence. Bien que la correction ne soit pas parfaite il est difficile de mettre en doute la réalité de cet effet sur des photons séparés de plusieurs kilomètres.

Nous pouvons toutefois apporter des pistes afin de corriger complètement la dispersion et de pouvoir utiliser ce type d'interférence pour des communications longue distance.

Tout d'abord il faut impérativement s'affranchir des variations de phase dues aux fluctuations de la température de la fibre. Il est inimaginable de pouvoir contrôler la température de la fibre sur de longues distances physiques. Un moyen simple à mettre en oeuvre et qui a déjà été utilisé lors d'interférences quantiques en fréquence, est d'injecter un laser monochromatique dans le canal quantique à une fréquence que l'on est capable d'isoler très efficacement. Ce signal percevra les mêmes variations de phase que les photons intriqués et nous pourrons synchroniser le déphasage RF de manière appropriée à l'aide de ce laser.

La seconde amélioration que nous pouvons suggérer est de parfaire la compensation de la dispersion. Si nous voulons utiliser cette interférence pour distribuer des clés quantiques, il faut s'assurer d'obtenir une violation des inégalités de Bell. Cette violation est d'autant plus efficace que la visibilité de la figure d'interférence est grande. Un moyen simple d'obtenir une bonne correction est d'utiliser un module de compensation de dispersion qui ne modifie par la relation d'amplitude entre les chemins.

Dans cette partie nous avons étudié les effets de la dispersion sur une interférence à deux photons en fréquence. Cette étude nous a permis de mettre en avant le caractère non-local de la dispersion pour cette figure d'interférence. De ce fait, ce type d'interférence a permis de montrer de manière original la compensation non locale de la dispersion.

Les interférences quantiques en fréquence recèlent de grandes richesses qui sont peu exploitées, nous allons entrevoir dans la partie suivant d'autres phénomènes induits par la manipulation de fréquence.

4

LES MARCHES ALÉATOIRES QUANTIQUES EN FRÉQUENCE

Sommaire

4.1 Marches aléatoires en fréquence 121
4.1.1 Les atouts de la fréquence 127
4.1.2 Étude d'un système reblouclé 129
4.1.3 Autres modifications de l'opération unitaire et limitations 139
4.1.4 Modification de l'état initial 140
4.1.5 Marche quantique ? 142
4.2 Etude d'une réalisation expérimentale 142
4.3 Conclusion 145

4.1/ MARCHES ALÉATOIRES EN FRÉQUENCE

Une marche aléatoire classique est un processus stochastique de type chaîne de Markov, c'est-à-dire une succession d'événements aléatoires discrets dans un espace discret ou continu. Une propriété fondamentale des chaînes de Markov, appelée propriété faible, est que toute l'information utile à la prédiction de l'état du système après n événements aléatoires est contenue dans l'état du système à l'instant $n-1$ et par la connaissance de la loi de probabilité à l'instant n. Autrement dit, la prédiction d'un événement futur, se limite à la connaissance du présent et n'est pas rendue plus précise par celle du passé. On distingue deux types de chaînes de Markov, l'un homogène pour lequel l'événement aléatoire est identique à chaque étape, et le type non homogène pour lequel l'événement aléatoire peut différer. Il s'en suit tout un panel de marches aléatoires en fonction du type d'événement. On peut trouver une forme encore plus générale de ce type de marche en définissant les marches aléatoires à temps continu, où le temps de transition d'une étape à l'autre n'est pas constant et suit une distribution exponentielle. Ces marches aléatoires sont semblables à des processus de diffusion.

Nous pouvons illustrer ce processus par un exemple simple, celui d'une planche de Galton. Une planche verticale est cloutée en quinconce et on veut suivre la trajectoire d'une bille qui choit de son sommet, comme le montre la figure Fig.4.1.

On considère qu'à chaque fois que la bille rencontre un clou, il est équiprobable que sa chute continue à gauche ou à droite de ce clou sur un clou situé en contrebas. On peut

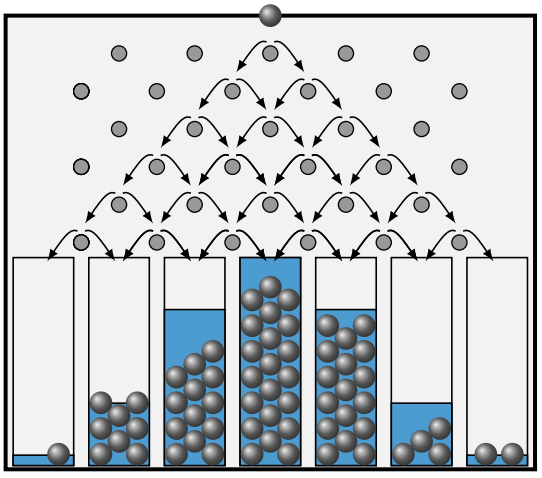


FIGURE 4.1 – Schéma d'une planche de Galton. Une bille chute le long d'une planche cloutée et possède une probabilité équivalente d'aller à gauche ou à droite de chaque clou. En bas de cette planche est représenté le résultat de l'expérience renouvelée un grand nombre de fois. Le niveau de bleuté correspond à la loi binomiale vers laquelle tend cette distribution.

scinder chaque étape de ce processus, appelé événement aléatoire, en deux parties distinctes. Le première étant le tirage aléatoire, qui apparaît à chaque fois que la bille rencontre un clou et qui décide si celle-ci poursuivra son chemin à gauche ou à droite de ce clou. La seconde est l'étape de propagation entre deux tirages aléatoires, c'est-à-dire la chute de la bille d'un clou au clou suivant désigné par le tirage aléatoire. La marche aléatoire est le chemin suivit par la bille lors de sa chute. Si on relève la position de la bille après sa chute et qu'on répète un très grand nombre de fois cette expérience, la distribution des billes tend vers une loi normale. Cette expérience a été utilisée pour montrer la convergence de la loi binomiale vers la loi normale.

En résumé, on considère que la planche de Galton est une marche aléatoire homogène et isotrope dans un espace discret. En effet, le tirage aléatoire est isotrope car la bille possède la même probabilité d'aller à gauche ou à droite. Aussi l'espace est discret dans le sens où le nombre de trajectoires que peut suivre la bille après avoir rencontré un clou est discret et vaut deux : elle va soit à gauche soit à droite. Enfin, la marche est homogène car chaque événement aléatoire sera identique, les trajectoires possibles seront toujours les mêmes, et les probabilités de les suivre ne différeront pas.

Il existe toutes sortes de marches aléatoires suivant les propriétés de l'espace de propagation et du tirage aléatoire, et elles sont utilisées pour la simulation ou la résolution de problèmes dans des thématiques très variées.

En particulier, l'utilisation d'algorithmes basés sur les marches aléatoires s'est révélée particulièrement efficace pour traiter un bon nombre de problèmes complexes. La complexité d'un problème est définie par rapport au temps nécessaire à sa résolution par une machine de Turing en fonction de la dimension du problème.

Les problèmes P sont ceux pour lesquelles le temps de calcul nécessaire à une machine de Turing déterministe croît de manière polynomial en fonction de la dimension du problème.

On appelle NP les problèmes dont la résolution nécessite un temps de calcul polynomial pour une machine de Turing non déterministe, et dont une solution peut être vérifiée en

un temps polynomial par une machine de Turing déterministe. Une machine de Turing déterministe est un calculateur séquentiel abstrait, capable de simuler n'importe quel algorithme informatique. Pour une entrée donnée, la machine de Turing effectue l'action correspondante enregistrée dans sa base de donnée. Ainsi, à chaque entrée correspond une sortie prédéfinie. Une machine de Turing non déterministe diffère dans le sens où il peut correspondre plusieurs actions à une entrée donnée. Plusieurs séquences de calcul donnent donc naissance à un arbre dont les ramifications correspondent aux différentes actions possibles. Le calcul effectué par une machine non déterministe correspond à l'exploration parallèle de toutes les branches possibles. Le calcul effectué par une machine déterministe correspond à une branche particulière de cet arbre et P est donc inclus dans NP. Deux autres classes importantes, sont celles des problèmes NP-difficiles et NP-complets. Un problème NP-complet est un problème NP qui vérifie, de plus, que tout problème NP peut être ramené à ce premier problème en un temps polynomial. En particulier, un problème NP-complet peut être rapporté à un autre problème NP-complet donné en un temps polynomial. Ce qui nous amène à considérer la classe des problèmes NP-difficiles qui est formée de tous les problèmes pouvant être rapportés en un temps polynomial à un problème NP-complet. Les problèmes NP-complets sont des problèmes NP-difficiles, mais les problèmes NP-difficiles ne sont pas nécessairement des problèmes NP, ainsi une solution donnée de ces problèmes n'est pas forcément vérifiable en un temps polynomial.

On peut par example citer le problème du voyageur de commerce : Quelle est la distance minimale parcourue par un voyageur visitant un nombre de villes donné et revenant à son point de départ ? Ce problème appartient à la catégorie des problèmes NP-difficiles et la vérification de la solution passe par l'évaluation de tous les chemins possibles. Il peut cependant être ramené à un problème de décision NP-complet en un temps polynomial dont la question est : Existe-il une distance plus courte qu'une distance L donnée pour visiter un nombre de villes donné et revenir à son point de départ ?

C'est dans ce cadre qu'une machine de Turing non déterministe trouve tout son sens. En effet, cette machine peut explorer parallèlement tous les trajets possibles, dont le nombre croît de manière factorielle en fonction du nombre de villes. Il n'existe cependant pas d'implémentation physique d'une telle machine, explorant parallèlement toutes les ramifications. Lorsque le nombre de ville est très grand, il est alors intéressant d'utiliser une méthode heuristique permettant de trouver une solution approchée. L'exploration aléatoire s'avère être une bonne option, et on converge statistiquement vers une solution arbitrairement proche de l'optimum en un temps raisonnable. Pour certains problèmes NP-complets, comme les problèmes de satisfaisabilité d'une équation booléenne 3-SAT, les algorithmes de recherche basés sur des marches aléatoires sont même les plus performants [Schoning, 1999].

Le premier algorithme de calcul quantique qui a prouvé sa supériorité sur toute méthode classique a été mis au point par [Deutsch et al., 1992]. Si son utilité est très limitée, il a tout de même insufflé l'intérêt d'élaborer des algorithmes quantiques répondant à un réel besoin. Ainsi pour ne citer que les plus célèbres, l'algorithme de [Shor, 1994] permet de factoriser de grands nombres premiers et l'algorithme de [Grover, 1996] est utilisé pour identifier une entrée particulière dans une base de données.

Il est donc naturellement venu l'idée d'utiliser des algorithmes quantiques exploitant les marches aléatoires. La première appellation de marche aléatoire quantique provient de [Aharonov et al., 1993]. Les auteurs ont eu l'idée d'exploiter le caractère probabiliste de

la mécanique quantique afin de générer un tirage aléatoire naturel. Mieux encore, l'idée a été d'utiliser l'état de superposition afin d'explorer, en même temps, toutes les marches possibles. Cette différence induit de grandes disparités entre les marches aléatoires classiques et quantiques. En effet pour une marche aléatoire classique, le marcheur suit un unique chemin, choisi par un lancer de pièce, avec une probabilité donnée. La probabilité qu'il se trouve en un point donné équivaut à la somme des probabilités qu'il ait suivit un chemin conduisant en ce point. Par exemple, si il existe N chemins conduisant à la position k, la probabilité que le marcheur classique se trouve en k s'écrit $P(k) = \sum_{i=1}^{N} P_i$, où P_i est la probabilité qu'il ait suivit le chemin i.

Le marcheur quantique se trouve, quant à lui, à tout instant dans l'état de superposition de tous les chemins qui s'offrent à lui avec les amplitudes de probabilité correspondantes. Toute la différence réside dans le fait que ces amplitudes de probabilité sont complexes et donnent lieu à un phénomène d'interférences. Cette fois la probabilité que le marcheur se trouve en k s'écrit $P(k) = \left|\sum_{i=1}^{N} p_i\right|^2$ où p_i est l'amplitude de probabilité qu'il ait suivi le chemin i et $|p_i|^2 = P_i$. Ainsi pour un même schéma, la marche aléatoire quantique ne correspondra pas à l'exploration simultanée de tous les chemins de la marche aléatoire classique équivalente, mais apparaît comme un phénomène d'interférences. On peut toutefois noter que si on mesure l'état de la marche aléatoire quantique après chaque pas, l'état de superposition est détruit, et la marche quantique devient alors équivalente à une marche classique.

Afin d'étudier plus en détail cette différence de comportement, nous pouvons maintenant ajouter un peu de formalisme à la réalisation d'une marche aléatoire quantique. Nous allons rester dans le cadre des marches aléatoires évoluant dans un espace discret à une dimension. Cet espace possède un maillage régulier, et on identifie un noeud de ce maillage par un indice n, tel que $n \in \mathbb{Z}$. Nous étudions le cas d'une marche homogène, c'est-à-dire : à chaque pas temporel, si le marcheur se trouve au noeud i, l'amplitude de probabilité qu'il se trouve en j au pas suivant ne dépend que $j - i$. L'état du marcheur après k pas, s'écrit $|\Psi_k\rangle$, et peut se décomposer sur la base des noeuds sous la forme $|\Psi_k\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,k}|n\rangle$. Nous pouvons donc naïvement écrire un pas de propagation

$$|\Psi_{k+1}\rangle = \hat{\mathcal{U}}|\Psi_k\rangle, \tag{4.1}$$

où $\hat{\mathcal{U}}$ est une matrice composée de toutes les amplitudes de probabilité de transiter d'un noeud i à un noeud j lors d'un pas. Le principe de conservation de l'énergie nous indique qu'à tout instant $|\langle\Psi_k|\Psi_k\rangle|^2 = 1$ et donc $\hat{\mathcal{U}}$ doit être unitaire. Ce problème est bien connu dans le domaine des automates cellulaires quantiques, introduits par [Grössing et al., 1988]. Les automates cellulaires quantiques sont des concepts très proches des marches aléatoires quantiques et on retrouve, dans [Grössing et al., 1988], l'expression (4.1) qui représente l'évolution d'un pas d'un automate cellulaire linéaire homogène. Dans [Grössing et al., 1988], les auteurs ont voulu étudier un cas particulier de $\hat{\mathcal{U}}$ pour lequel un noeud est uniquement lié à ses plus proches voisins, ce qui se résume à $\hat{\mathcal{U}}|n\rangle = a|n-1\rangle + b|n\rangle + c|n+1\rangle$. Les seules solutions trouvées sont qu'au moins deux des coefficients $\{a, b, c\}$ sont nuls, ce qui correspond à une simple translation. Leur étude s'est poursuivie en renonçant à la condition unitaire. Une étude plus poussée de [Meyer, 1996a, Meyer, 1996b] a conduit à un théorème de *no-go*, postulant qu'il n'existe pas de transformation unitaire homogène finie de ce type. Ce dernier a toutefois montré que cette transformation unitaire existe dans un cas non-homogène, c'est à dire si les

différents noeuds ne sont pas affectés de la même manière. Dans le cadre de l'étude des marches aléatoires discrètes, ce problème a été surmonté en introduisant un degré de liberté supplémentaire pour effectuer le tirage aléatoire. Ainsi l'espace de propagation du marcheur et le tirage aléatoire de sa direction de propagation se font dans des espaces distincts intriqués. Le résultat de [Aharonov et al., 1993] a été repris de manière plus synthétique par [Kempe, 2003] dans une revue sur les marches aléatoires quantiques. On imagine le déplacement d'une particule conditionné par son spin dont les valeurs propres sont $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. L'état du marcheur, la particule dans ce cas, dépend alors de sa position et de son spin et s'écrit $|\Psi_k\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n,k}|n\rangle \otimes |\uparrow\rangle + b_{n,k}|n\rangle \otimes |\downarrow\rangle$. On peut alors réécrire $\hat{\mathcal{U}} = \hat{\mathcal{W}}\left(\mathbb{I} \otimes \hat{C}\right)$, où $\hat{C}$ est un tirage aléatoire du spin de la particule, $\hat{\mathcal{W}}$ régit son déplacement, et on a $|\Psi_k\rangle = \hat{\mathcal{U}}^k|\Psi_0\rangle$. On choisit alors un déplacement de la particule vers les n croissants lorsque son spin est dans l'état $|\uparrow\rangle$, et vers les n décroissants lorsque son spin est dans l'état $|\downarrow\rangle$. Ainsi, le déplacement est régi par l'opération unitaire $\hat{\mathcal{W}} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |i+1\rangle\langle i| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |i-1\rangle\langle i| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$. Le lancer de pièce est choisi non biaisé, c'est à dire qu'aucun des deux spins n'est favorisé et ce, quel que soit l'état du spin avant le tirage. Cette opération est réalisée par une transformation de Hadamard :

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

agissant sur les vecteurs orthogonaux $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\hat{\mathcal{U}}$ est bien une transformation unitaire correspondant à une marche homogène. Cette expérience est un équivalent quantique d'une planche de Galton si la position de départ de la particule est bien définie, par exemple $\left|a_{n,0}\right|^2 + \left|b_{n,0}\right|^2 = \delta_{n,0}$. On peut donc directement comparer la distribution finale de la position de la particule avec la loi binomiale équivalente obtenue classiquement lorsque la bille est lâchée à la position 0.

On peut toutefois remarquer que la transformation de Hadamard n'est pas symétrique par rapport $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. Ainsi suivant l'état initial, la probabilité de présence de la particule différera en fonction de l'état initial. Nous avons représenté en bleu figure Fig.4.2 le cas où la particule est dans un état initial symétrique $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|\uparrow\rangle + \mathrm{i}|\downarrow\rangle)$ et en rouge figure Fig.4.2 le cas où la particule est dans l'état initial $|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\downarrow\rangle$.

Comme le souligne [Kempe, 2003], l'état initial du spin joue un rôle important sur la propagation de la marche quantique, et le déséquilibre initial de l'état $|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ tend à favoriser le déplacement de la particule vers les n négatifs. L'état $|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\uparrow\rangle$, non représenté tend à favoriser le déplacement de la particule vers les n positifs. Un état symétrique ne favorisant pas de direction est obtenu avec $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|\uparrow\rangle + \mathrm{i}|\downarrow\rangle)$, le déphasage de π entre les amplitudes de probabilité initiales des deux spins permet de découpler les deux composantes du spin initial. En effet, la transformation unitaire correspondant à la propagation d'un pas laisse réelles les amplitudes de probabilité réelles, et imaginaires pures les amplitudes imaginaires pures. Enfin la distribution binomiale d'une marche aléatoire classique est représentée en jaune figure Fig.4.2. On peut remarquer qu'en plus du phénomène d'interférences, la marche aléatoire quantique présente un écart-type beaucoup plus grand que son pendant classique. Le maximum de probabilité se situe proche des valeurs extrémales de la marche. Là où la distribution classique reste confinée autour de sa moyenne, la distribution quantique a plutôt tendance à adopter le comportement inverse. Ainsi la variance de la distribution classique

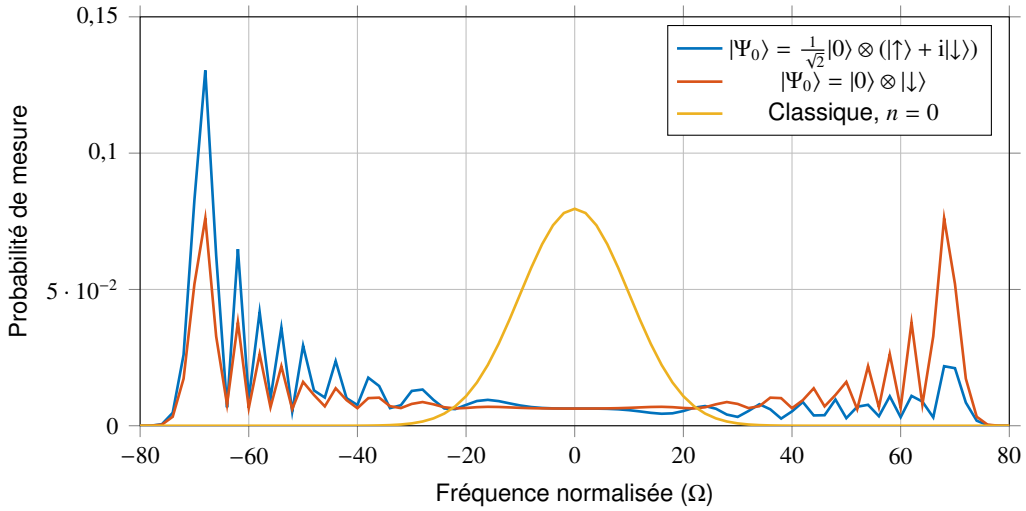


FIGURE 4.2 – Comparaison des distributions de probabilité après 100 pas, pour une marche aléatoire quantique discrète et une marche aléatoire classique. On différencie deux états quantiques d'entrée différents $|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ et $|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\downarrow\rangle$.

varie en $\sigma = \sqrt{k}$, alors que celle de la distribution quantique sera $\sigma \propto k$. Cette marche aléatoire quantique se propage donc plus vite de manière quadratique, dans l'espace de la marche, par rapport à la marche aléatoire classique. Cette notion de vitesse de propagation est connue sous le nom de *hitting time*. C'est un des gros avantages que l'on veut exploiter lors de la réalisation d'algorithmes quantiques. Une grande quantité de réalisations théoriques existent, selon le choix de l'espace de propagation de la marche : espace de une dimension sur une ligne bornée [Ambainis et al., 2001] ou sur un cercle [Aharonov et al., 2000]. D'autres réalisations se rapprochent d'une expérience physique [Dür et al., 2002, Sanders et al., 2003, Knight et al., 2003a], mais il existe aussi des prospections sur des espaces de plus grande dimension [Aharonov et al., 2000, Mackay et al., 2002, Shenvi et al., 2003, Krovi et al., 2007, Manouchehri et al., 2008]. Le lecteur peut se référer à une récente revue de [Venegas-Andraca, 2012] sur les marches aléatoires quantiques dont les références sont très complètes.

Une seconde approche des marches aléatoires quantiques a été initiée par [Aharonov et al., 2000]. Elle est basée sur le paradigme classique des marches aléatoires à temps continu. Dans cette représentation, le temps passé par le marcheur en chaque noeud n'est pas constant et est défini par une loi de probabilité exponentielle. Ainsi, la matrice décrivant la probabilité de passer d'un noeud à l'autre peut être vue comme une matrice de diffusion. Cette vision s'adapte particulièrement bien au cas quantique pour lequel il n'est pas étrange d'imaginer l'état du marcheur diffuser vers tous les chemins qui lui sont offerts. L'équation de Schrödinger régissant l'évolution temporelle d'un noeud j peut alors s'écrire :

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\langle j|\Psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle j|\hat{\mathcal{H}}|k\rangle\langle k|\Psi(t)\rangle, \tag{4.3}$$

où le Hamiltonien d'évolution vérifie $\langle j|\hat{\mathcal{H}}|k\rangle = a_{j,k} \in \mathbb{C}$ et où $a_{j,k}$ est le coefficient reliant le noeud j au noeud k.

L'évolution de l'état initial du marcheur peut alors s'écrire :

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}_t|\Psi(0)\rangle, \tag{4.4}$$

avec $\hat{\mathcal{U}}_t = \exp\left(-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t/\hbar\right)$ devant être une opération unitaire.

Cette description correspond plus naturellement à l'évolution d'un système physique et a suscité un grand intérêt car elle s'affranchit naturellement de la nécessité d'un espace dédié au tirage aléatoire [Hillery et al., 2003, Childs et al., 2004, Mülken et al., 2005, Solenov et al., 2006, Krovi et al., 2006, Jafarizadeh et al., 2007, Manouchehri et al., 2007, Salimi, 2009, Mülken et al., 2011, Ahlbrecht et al., 2011]. Il s'en est suivi un grand nombre de travaux consistant à relier les marches aléatoires quantiques discrètes et continues [Strauch, 2006, Konno, 2008, Childs, 2010] dans des cas particuliers.

Maintenant que nous avons un aperçu de ce qu'est une marche aléatoire quantique, nous allons voir comment nos marches dans l'espace des fréquences s'y inscrivent. Nous n'avons pas vocation ici à construire un algorithme quantique, ce qui est un travail difficile, mais uniquement à apporter un nouvel objet physique sur lequel pourraient s'appuyer ces algorithmes. Dans ce but, nous allons mettre en évidence les possibilités qu'offrent les marches aléatoires quantiques utilisant la modulation de phase.

Le but initial de cette thèse était l'étude et la réalisation de marches aléatoires quantiques en fréquence. Une étude théorique a été menée dans ce but, mais la réalisation expérimentale de ce phénomène a été proscrite par plusieurs verrous techniques. Si l'idée initiale est très intéressante, aucune réalisation expérimentale n'a pu être envisagée dans un délai raisonnable. Nous nous contenterons donc, dans cette section, d'expliquer les avantages de l'utilisation d'un espace de fréquence, et de la modulation pour la réalisation de marches aléatoires quantiques. Puis nous proposerons un schéma expérimental possible et mettrons en évidence les difficultés techniques identifiées.

4.1.1/ LES ATOUTS DE LA FRÉQUENCE

L'approche que nous avons eue pour aborder ce problème est expérimentale. L'idée initiale est d'utiliser la modulation de phase des photons pour générer une marche aléatoire quantique. En effet nous avons vu, dans la section 2.1.1.1, qu'un modulateur de phase permettait à un photon issu d'un laser monochromatique d'acquérir ou de perdre de l'énergie via un processus non linéaire d'interaction avec une onde RF. Le photon peut ainsi changer de couleur de manière discrète avec un pas correspondant à la fréquence de modulation. Si un seul photon, dont on connait la fréquence de manière précise, est envoyé dans un modulateur de phase, alors en sortie, l'état de fréquence du photon est distribué sur un peigne de dirac centré sur la fréquence initiale du photon et possédant un pas correspondant à la fréquence de modulation. Le photon a donc effectué une marche aléatoire quantique dans le modulateur, dans l'espace des fréquences.

Pour formaliser cette marche aléatoire, on utilise l'espace de fréquence discret $|n\rangle = |\omega_0 + n\Omega\rangle$ que nous avons précédemment construit, pour lequel ω_0 désigne la fréquence bien définie du photon en entrée de modulateur, Ω la fréquence de modulation et $n \in \mathbb{Z}$. Nous rappelons l'action du modulateur sur un état monochromatique décrit par (2.15) :

$$|\omega_0, 0\rangle_{\text{in}} = \hat{a}^{\dagger}_{0,\text{in}}(0)|vac\rangle_{\text{in}} \xrightarrow{\hat{M}(a,\phi)} \hat{a}^{\dagger}_{0,\text{out}}(l)|vac\rangle_{\text{out}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_k(\gamma l, \phi)|\omega_{k,l}\rangle. \tag{4.5}$$

Cette expression décrit l'état en fonction de la longueur d'interaction l et pour laquelle γ est un gain linéaire. Comme nous l'avons souligné, l'action du modulateur peut-être vue comme une succession de collisions entre des photons optiques et des photons RF où seules les interactions d'un photon optique avec un photon RF sont possibles. Par collisions successives au cours de la propagation, le photon optique peut accéder à des fréquences de plus en plus éloignées de sa fréquence initiale. Cette interaction peut donc être vue comme une diffusion dans l'espace des fréquences, pour laquelle un état de fréquence est uniquement couplé à ses plus proches voisins. L'évolution de l'état de fréquence au sein du modulateur se comporte donc comme une marche aléatoire à temps continu pour laquelle l'évolution temporelle correspond à la progression spatiale du photon dans le modulateur.

On peut alors écrire l'évolution de l'état initial sous la même forme qu'une marche aléatoire continue :

$$|\Psi_l\rangle = \hat{\mathcal{U}}(l)|\Psi(0)\rangle, \tag{4.6}$$

où $\hat{\mathcal{U}}_l$ est une matrice unitaire infinie dont les coefficients sont tous non nuls et valent $\hat{\mathcal{U}}_{i,j}(l) = J_{j-i}(\gamma l)\exp\left[\mathrm{i}(j-i)\phi\right]$. Dans [Konno, 2008], on retrouve ce type de matrice en faisant le lien entre les marches aléatoires quantiques discrètes et continues. En effet, dans le cas discret, le lemme de *no-go* de [Meyer, 1996b] stipule qu'il n'existe pas de matrice homogène finie non triviale. L'idée de [Konno, 2008] a été de chercher une matrice homogène infinie et de trouver une matrice dont les coefficients sont des fonctions de Bessel. Il a montré que cette matrice peut être obtenue en considérant une marche aléatoire continue pour laquelle la diffusion s'effectue uniquement entre les plus proches voisins.

La diffusion d'une marche aléatoire quantique continue au sein d'un modulateur de phase peut donc être vue en sortie de modulateur comme un pas de propagation d'une marche aléatoire discrète. Il suffit alors de disposer successivement un grand nombre de modulateurs ou de reboucler la sortie d'un modulateur sur son entrée pour obtenir une marche aléatoire discrète.

Contrairement à la majorité des choix adoptés par la littérature, cette marche aléatoire discrète ne nécessite pas d'espace supplémentaire pour effectuer le tirage aléatoire : les différents chemins en fréquence sont naturellement offerts au photon et fournissent un état de superposition. Un autre avantage est que chaque marche est effectuée par un unique modulateur de phase. En comparaison, les réalisations expérimentales spatiales ont besoin de créer physiquement les noeuds, comme par exemple dans [Sansoni et al., 2012]. Cette approche d'optique intégrée nous permet d'espérer réaliser une marche aléatoire faisant intervenir un grand nombre de noeuds sans augmenter proportionnellement les ressources nécessaires pour les créer.

Nous allons maintenant étudier le comportement de ce type de marches aléatoires quantiques en fréquence dans un système simple.

4.1.2/ ÉTUDE D'UN SYSTÈME REBLOUCLÉ

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence que le passage d'un photon dans un modulateur pouvait être considéré comme un pas d'une marche aléatoire dans un espace où tous les noeuds sont connectés. La connection entre le noeud, c'est à dire l'amplitude de probabilité de passer d'un noeud à un autre, est proportionnelle à une fonction de Bessel dont l'ordre dépend de l'écart entre ces noeuds. L'état du photon en sortie de modulateur, en fonction de son état d'entrée, est donné par l'équation (4.6). Nous choisissons une longueur d'interaction l fixée au sein du modulateur et une amplitude de modulation fixe, conduisant à un gain linéaire γ fixe. Nous écrivons donc que l'amplitude de probabilité de présence du photon au noeud j en sortie, alors qu'il se trouve au noeud i en entrée de modulateur, s'écrit $\hat{\mathcal{M}}_{i,j} = J_{j-i}(a)\exp[\mathrm{i}(j-i)\phi]$, où a est le taux de modulation. Le modulateur introduit à la fois une amplitude et une phase différentes en fonction de l'écart entre les noeuds, cette phase ϕ correspond au déphasage entre le photon et l'onde RF lorsque celui-ci pénètre dans le modulateur.

Nous proposons alors de reboucler la sortie du modulateur fibré sur son entrée comme le montre le schéma Fig.4.3 et de décrire l'évolution de l'état du photon en fonction du nombre de tours effectués dans le modulateur.

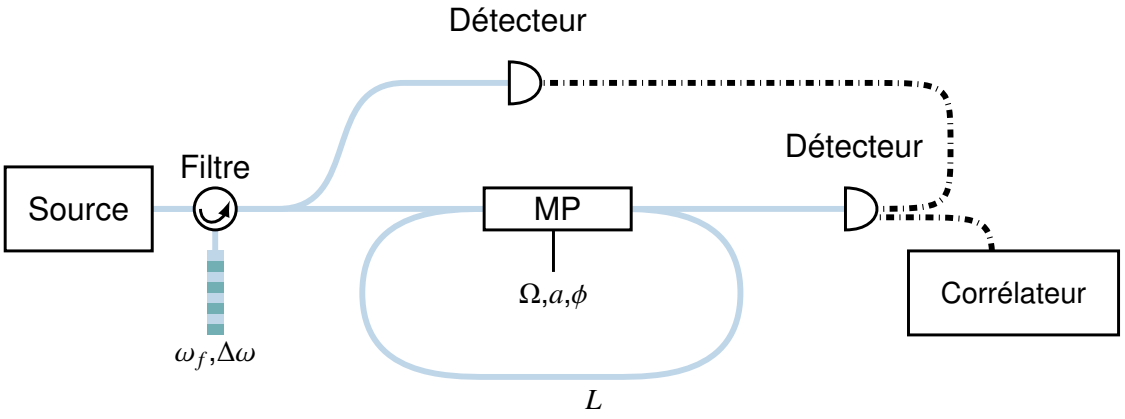


FIGURE 4.3 – Schéma de marche aléatoire quantique à l'aide d'un modulateur reboulclé.

La transformation correspondant à un tour dans le modulateur peut être écrite :

$$|\Psi_{k+1}\rangle = \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{M}}|\Psi_k\rangle, \tag{4.7}$$

où $\hat{\mathcal{M}}$ est la marche unitaire effectuée par le modulateur et $\hat{\mathcal{P}}$ correspond à la propagation dans une fibre optique nécessaire pour retourner en entrée de modulateur. Nous limiterons l'étude au cas où $\hat{\mathcal{P}}$ introduit une phase qui diffère en fonction de chaque valeur de fréquence, mais dont l'amplitude est indépendante de la fréquence. Il est important de noter que $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{P}}$ ne commutent pas. Un argument physique simple pour s'en convaincre est qu'une différence de phase introduite sur une seule fréquence avant modulation se répercutera sur toutes les fréquences en sortie de modulateur, alors que cette même phase n'affectera qu'une seule fréquence si elle est appliquée après modulation. Pour le moment nous allons considérer que :

— la boucle ne comporte aucune perte,

— que l'on a été capable d'introduire un photon à l'intérieur,
— et que l'on est capable, au besoin, de mesurer son état après chaque tour.

On peut alors écrire l'action de l'opérateur modulation sur un vecteur propre $|n\rangle$ de la base des fréquences :

$$\hat{\mathcal{M}}|n\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi}|k+n\rangle. \tag{4.8}$$

De même, nous pouvons considérer l'action de l'opérateur de propagation sur ce même vecteur propre selon :

$$\hat{\mathcal{P}}|n\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega+n\Omega)L}|n\rangle, \tag{4.9}$$

où $\beta(\omega)$ est la relation de dispersion de la fibre optique pour la pulsation ω. Comme précédemment, la relation de dispersion peut-être décomposée en une série de Taylor autour d'une fréquence de référence, par exemple ω_0. En considérant une fibre de télécommunication standard et une longueur d'onde centrale de travail autour de 1550 nm, on peut raisonnablement restreindre ce développement limité au terme β_2. Nous verrons que le terme β_2 nécessite déjà des longueurs de propagation relativement élevées pour ne pas être négligeable. On obtient que de manière générale l'état du photon après un nombre k de tours s'écrit :

$$|\Psi_k\rangle = \left(\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{M}}\right)^k |\Psi_0\rangle. \tag{4.10}$$

Étudions tout d'abord un cas simple pour lequel la dispersion est négligeable.

Considérons le cas où le photon de départ se trouve dans l'état propre $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$. Après un tour, l'état du photon peut s'écrire :

$$\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{M}}|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} J_k(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\phi+\beta_1\Omega L)}|k\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} U_k(a,\phi+\beta_1\Omega L)|k\rangle, \tag{4.11}$$

avec $\phi_0 = \beta_1\omega_0 L$.
Le photon se trouve bien dans une superposition de fréquences avec une amplitude de probabilité dépendant du taux de modulation, du saut de fréquence effectué et de la propagation.

Si on mesure l'état du photon à cet instant, la probabilité de le mesurer à une fréquence $\omega_0 + k\Omega$ donnée s'écrit :

$$|\langle\Psi_1|k\rangle|^2 = |J_k(a)|^2 \tag{4.12}$$

et ne dépend que du taux de modulation et de k, et correspond bien à une marche aléatoire effectuée dans l'espace des fréquences.

Si cette fois un photon préparé dans le même état effectue deux tours dans le modulateur, l'état de sortie s'écrit :

$$\left(\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{M}}\right)^2|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_0}\sum_{\{k,l\}\in\mathbb{Z}^2} U_l(a,\phi)U_k(a,\phi+\beta_1\Omega L)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)\beta_1\Omega L}|k+l\rangle, \tag{4.13}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_0}\sum_{\{k,n\}\in\mathbb{Z}^2} U_{n-k}(a,\phi+\beta_1\Omega L)U_k(a,\phi+2\beta_1\Omega L)|n\rangle, \tag{4.14}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} U_n(z,\gamma)|n\rangle, \tag{4.15}$$

où la dernière ligne a été obtenue d'après la formule d'addition de Graf (B.5), qui donne $z = 2a\cos(\beta_1\Omega L)$ et $\gamma = \phi + 3\beta_1\Omega L/2$ car les amplitudes de modulation a sont identiques. Si on mesure l'état du photon à cet instant, la probabilité de le mesurer à une fréquence $\omega_0 + k\Omega$ donnée s'écrit :

$$|\langle\Psi_2|k\rangle|^2 = |J_k(2a\cos(\beta_1\Omega L))|^2\,. \tag{4.16}$$

Cette fois la probabilité dépend en plus de la longueur de propagation L correspondant à la longueur de rétroaction sur le modulateur. On peut intuitivement comprendre que suivant cette longueur, et donc suivant la variation de la phase [1] $\phi_\mathrm{L} = \beta_1\Omega L$ entre 0 et 2π, la distribution de probabilité va fortement changer. Nous représentons deux cas différents : le premier cas sur la figure Fig.4.4 a) et l'autre sur la figure Fig.4.4 b).

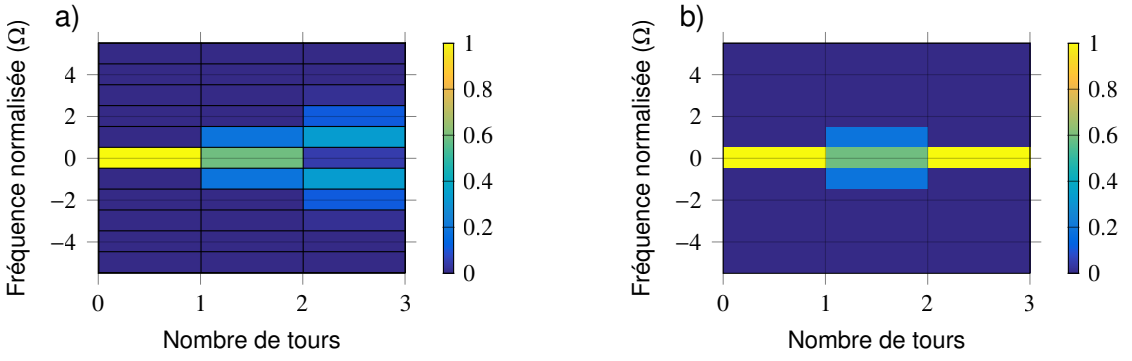


FIGURE 4.4 – Cas particuliers d'évolution d'une marche aléatoire. En a) est représenté l'évolution d'une marche avec une longueur de propagation tel que l'interférence, dans le modulateur, soit constructive, soit $\phi_\mathrm{L} = 0$. En b) est représenté le cas de l'interférence destructive, soit $\phi_\mathrm{L} = \pi$.

Le premier cas correspond à $\phi_\mathrm{L} \equiv 0[2\pi]$, soit $z = 2a$; on se trouve dans un cas où l'action des deux modulateurs sera cumulée de manière constructive et la propagation de la marche s'accroît dans l'espace des fréquences. Dans le second cas $\phi_\mathrm{L} \equiv \pi[2\pi]$, soit $z = 0$, l'action des deux modulateurs sera cumulée de manière destructive, on retombe sur l'état de départ.

Ce comportement est très intéressant, car il nous donne un degré de liberté sur lequel nous pouvons agir à chaque tour pour modifier la distribution de la marche. Nous ne

1. La notation ϕ_L stipule que la phase varie linéairement en fonction de la fréquence.

nous attardons toutefois pas plus sur celui-ci pour le moment car nous voulons étudier un cas où la marche explore l'espace des fréquences de manière optimale. Nous pouvons facilement obtenir cette condition si $\phi_L \equiv 0[2\pi]$. Dans ce cas, la propagation n'introduit plus de déphasage entre les différentes fréquences et les opérateurs $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{P}}$ commutent. On obtient directement l'état de la marche après n pas :

$$(\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{M}})^n|0\rangle = \hat{\mathcal{P}}^n\hat{\mathcal{M}}^n|0\rangle = e^{in\phi_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} U_k(na,\phi)|k\rangle. \tag{4.17}$$

Nous représentons sur la figure Fig.4.5 a) la probabilité de mesurer le photon à une fréquence donnée en fonction du nombre de pas, c'est-à-dire du nombre de tours effectués.

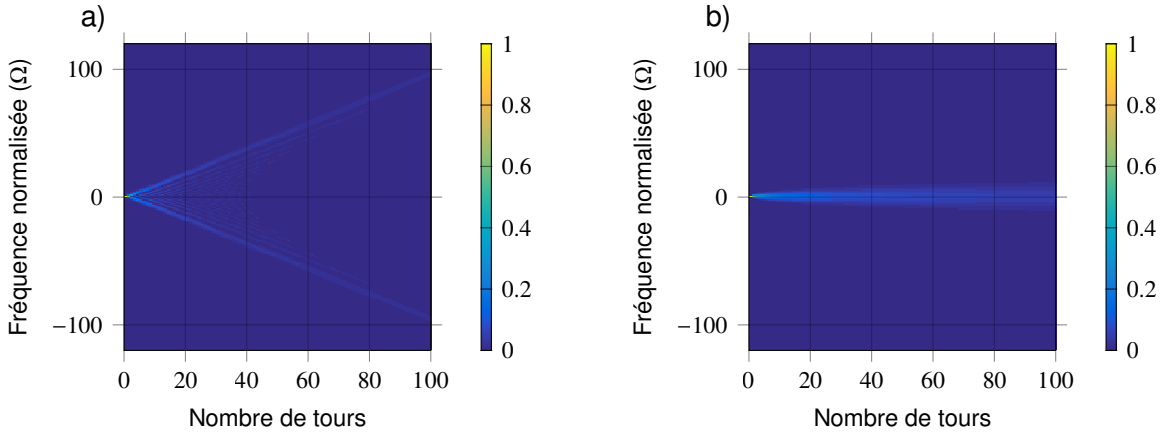


FIGURE 4.5 – Comparaison entre une marche quantique et une marche classique. En a) est représenté l'évolution d'une marche quantique en fréquence en fonction du nombre de tours dans le modulateur, et pour $\phi_L = 0$. En b) est représenté l'évolution de la marche classique équivalente.

Cette probabilité s'écrit pour la fréquence k :

$$|\langle\Psi_n|k\rangle|^2 = |J_k(na)|^2\,. \tag{4.18}$$

On peut remarquer que la distribution obtenue est très semblable à celle d'une planche de Galton quantique Fig.4.2. On peut mieux observer cet effet en bleu sur la figure Fig.4.6 où nous avons représenté la distribution après 100 pas de propagation.

Effectivement, la distribution met en avant un phénomène d'interférences et une distribution maximale sur les flancs de l'espace d'évolution. Cependant, une différence notable entre ces deux phénomènes est qu'à tous les pas le marcheur est dans une superposition de tous les états de fréquence. Dans le cas de la planche de Galton, le marcheur ne pouvait qu'occuper les positions paires ou impaires simultanément. Une autre différence est qu'il n'existe pas d'espace de lancer de pièce, notre marche ne dépend donc pas de l'état initial du marcheur dans cet espace, ce qui se rapproche du schéma de la planche de Galton. Enfin, nous pouvons noter que pour notre marche, le taux de modulation a et le nombre de pas de la marche n jouent exactement le même rôle. On peut comprendre intuitivement ce phénomène en considérant que se retrouver avec une condition de phase identique en sortie et en entrée de modulateur revient à mettre des modulateurs bout à

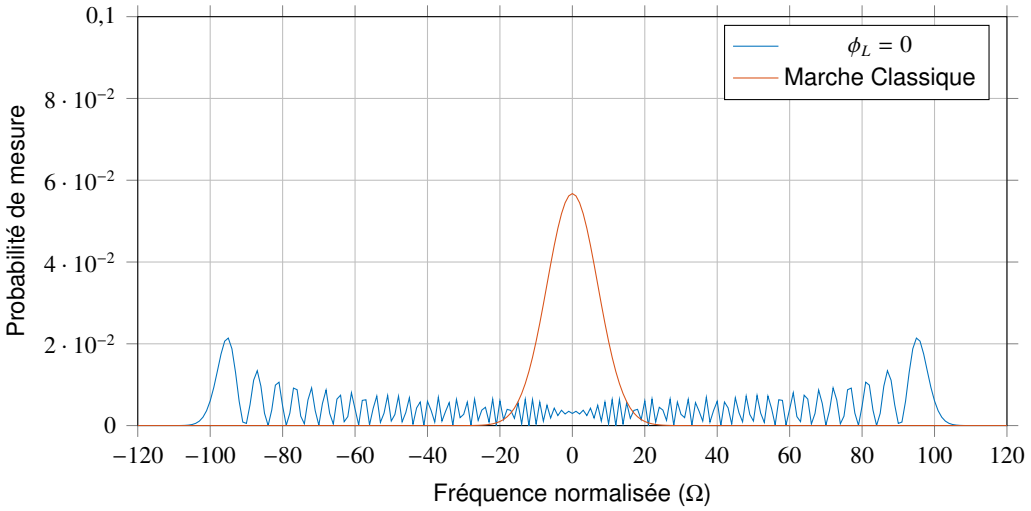


FIGURE 4.6 – Comparaison des distributions de probabilité après 100 pas, pour une marche aléatoire quantique en fréquence et son équivalent classique.

bout. Comme le taux de modulation est proportionnel à la longueur d'interaction dans le modulateur, la succession de plusieurs modulateurs cohérents se comporte comme un unique modulateur plus long. Le résultat notable, ici, est que la vitesse de propagation de la marche dans l'espace des fréquences peut donc être modifiée directement à l'aide du taux de modulation, ce qui n'a pas d'équivalent pour la marche de Galton. Pour la construction de la figure Fig.4.6, nous avons arbitrairement utilisé un taux de modulation $a = 1$ qui est une valeur expérimentale aisément réalisable.

Nous pouvons comparer la distribution obtenue à celle d'un marcheur classique possédant la même probabilité de passer d'un état de fréquence à un autre. C'est-à-dire, à chaque pas, le marcheur se trouvant au noeud de fréquence l possède la probabilité $P(d) = |J_d(a)|^2$ de continuer sa marche vers un noeud k avec $d = k - l$. La distribution obtenue après 100 pas de propagation est obtenue en rouge figure Fig.4.6. Comme dans le cas de la planche de Galton cette distribution est gaussienne et centrée sur la position initiale du marcheur. Nous avons représenté sur la figure Fig.4.7 l'évolution de la variance du marcheur classique et du marcheur quantique.

Dans le cas classique, la variance évolue en $\sigma_n \propto \sqrt{n}$, où n est le nombre de tours effectués alors que dans le cas quantique cette variance varie comme $\sigma_n \propto n$. Comme dans le cas de la planche de Galton, la vitesse d'exploration de l'espace de la marche est plus rapide de manière quadratique dans le cas quantique. Notre marche aléatoire quantique à une dimension se comporte donc comme les autres marches à une dimension étudiées dans la littérature. Comme elle a été pensée à partir d'une expérience, elle est un candidat idéal à la réalisation physique de ce type de marches aléatoires. Nous verrons cependant, dans un paragraphe suivant, que sa réalisation expérimentale est soumise à plusieurs difficultés.

Avant cela, nous pouvons étudier plus en détail l'influence de paramètres négligés jusqu'ici. En premier lieu, nous avons supposé que la phase accumulée lors de la propagation valait un entier de 2π pour toutes les fréquences, soit $\exp(\mathrm{i}\phi_\mathrm{L}) = 1$. Cette commodité nous a permis de faire commuter les opérateurs de propagation et de modulation. Nous pouvons toutefois considérer que cette condition n'est pas réalisée. Nous avons étudié le

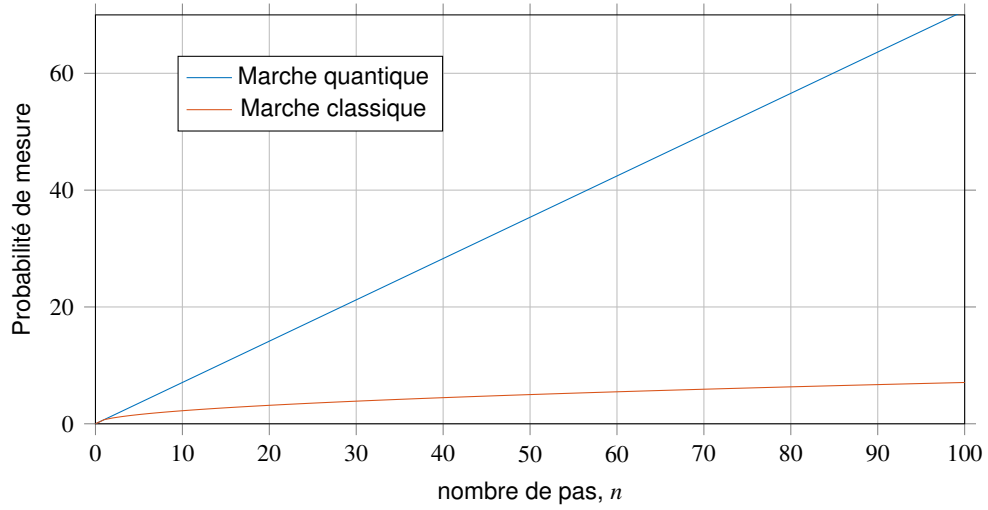


FIGURE 4.7 – Comparaison de la vitesse de propagation dans l'espace des fréquence pour une marche aléatoire quantique en fréquence et son équivalent classique.

cas où cette phase vaut 0 ce qui conduit à une interférence constructive, et le cas où elle vaut π et conduit à une interférence destructive. Ces cas sont valides seulement pour le second tour, et on peut chercher la relation de récurrence entre deux tours. Au tour k, on a l'état :

$$|\Psi_k\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_n(c_k, \gamma_k)|n\rangle. \tag{4.19}$$

Au tour $k+1$, l'état devient :

$$|\Psi_{k+1}\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_k+\phi_0)} \sum_{\{d,n\}\in\mathbb{Z}^2} U_{d-n}(a, \phi+\phi_\mathrm{L}) U_n(c_k, \gamma_k+\phi_\mathrm{L})|d\rangle, \tag{4.20}$$

$$|\Psi_{k+1}\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{k+1}} \sum_{d\in\mathbb{Z}} U_d(c_{k+1}, \gamma_{k+1})|d\rangle, \tag{4.21}$$

avec c_{k+1} et γ_{k+1} définis par la formule d'addition de Graf (B.5) et (B.6)[2]. On choisit c_{k+1} positif, ce qui détermine complètement la phase γ_{k+1} [Olislager et al., 2012], et on obtient :

$$\left.\begin{aligned} c_{k+1} &= \sqrt{a^2 + c_k^2 + 2ac_k\cos(\gamma_k - \phi)}, \\ \tan(\gamma_{k+1}) &= \frac{a\sin(\phi+\phi_\mathrm{L}) + c_k\sin(\gamma_k+\phi_\mathrm{L})}{a\cos(\phi+\phi_\mathrm{L}) + c_k\cos(\gamma_k+\phi_\mathrm{L})}. \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

Comme ϕ est constant, on peut poser $\delta_k = \gamma_k - \phi$ valable pour tout k, qui est le déphasage apparaissant dans la première ligne de l'équation précédente. Ce déphasage correspond à l'écart de phase qui existe, en sortie de modulateur, entre les amplitudes de probabilité

2. On peut noter que la récurrence sur le terme de phase commun ϕ_{k+1} est immédiate, et on a $\phi_k = k\phi_0$. De plus ce terme de phase comme n'interviendra jamais dans la mesure de coïncidences et nous préoccupe peu.

de deux fréquences voisines. Dans ce cas la seconde ligne de l'équation précédente devient :

$$\tan(\delta_{k+1}+\phi) = \frac{a\sin(\phi+\phi_{\mathrm{L}}) + c_k\sin(\phi+\delta_k+\phi_{\mathrm{L}})}{a\cos(\phi+\phi_{\mathrm{L}}) + c_k\cos(\phi+\delta_k+\phi_{\mathrm{L}})}. \tag{4.23}$$

On cherche alors la relation entre δ_{k+1} et δ_k. La relation précédente est vérifiée pour tout ϕ, en particulier si $\phi = -\phi_{\mathrm{L}}$ on obtient

$$\delta_{k+1} = \phi_{\mathrm{L}} + \arctan\left(\frac{c_k\sin(\delta_k)}{a + c_k\cos(\delta_k)}\right). \tag{4.24}$$

et les équations de récurrence deviennent :

$$\left.\begin{aligned} c_{k+1} &= \sqrt{a^2 + c_k^2 + 2ac_k\cos(\delta_k)}, \\ \delta_{k+1} &= \phi_{\mathrm{L}} + \arctan\left(\frac{c_k\sin(\delta_k)}{a + c_k\cos(\delta_k)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

Nous avons étudié numériquement cette récurrence afin de découpler ces équations. Nous avons trouvé que les solutions :

$$\left.\begin{aligned} c_k &= \left| a\frac{\sin\left(\frac{k\phi_{\mathrm{L}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_{\mathrm{L}}}{2}\right)}\right|, \\ \delta_k &= \begin{cases} \frac{k+1}{2}\phi_{\mathrm{L}} & \text{si } \delta_k + 2n\pi \in [0;\pi[, n\in\mathbb{Z} \\ \frac{k+1}{2}\phi_{\mathrm{L}} + \pi & \text{sinon} \end{cases}, \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

vérifiaient les relations de récurrence. Le résultat de la seconde équation qui exprime un déphasage linéairement croissant par rapport à la phase accumulée lors de la propagation est assez intuitif, car les différents paramètres sont fixes pour chaque tour. Les variations de l'amplitude de modulation sont alors simples à comprendre. On se place pour cela dans un cas où le déphasage est faible, et nous avons représenté figure Fig.4.8 la distribution de probabilité du photon en fonction de la fréquence et du nombre de tours, pour $\phi_{\mathrm{L}} = \pi/50$ et un état de départ $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$.

Nous pouvons observer une figure périodique en fonction du nombre de tours et possédant une période de 100 tours. Sur l'intervalle $[0;2\pi]$, tant que le déphasage vérifie $0 < \delta_k < \pi/2$, alors $\delta_{k+1} > \delta_k$. En effet, la première ligne de (4.25) donne :

$$c_{k+1} < c_k \iff c_k < -\frac{a}{2\cos(\delta_k)}. \tag{4.27}$$

Comme c_k est défini positif et a est positif, cette condition est vérifiée pour $\delta \in]\pi/2;\pi[$. Sur l'intervalle $]0;\pi/2[$, c_k va croître et décroître sur $]\pi/2;\pi[$. Comme le déphasage varie linéairement en fonction du nombre de tour, la fonction c_k peut être périodique. Pour que la fonction soit périodique, il faut qu'il existe un couple $\{k,l\} \in \mathbb{N}^2$, avec $k \neq l$ tel que $c_k = c_l$:

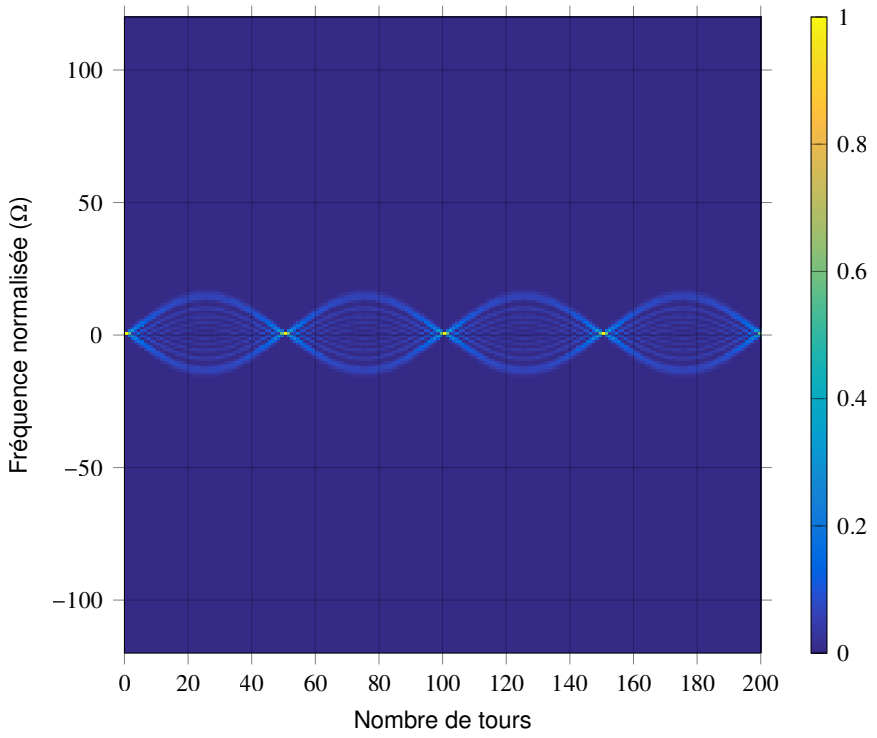


FIGURE 4.8 – Évolution d'une marche quantique en fréquence lorsque la phase accumulée sur un tour est proche de 0.

$$\begin{aligned} c_k = c_l &\iff \frac{k}{2}\phi_{\mathrm{L}} = \frac{l}{2}\phi_{\mathrm{L}} + 2n\pi, \\ c_k = c_l &\iff k = l + \frac{4n\pi}{\phi_{\mathrm{L}}}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Cette condition est vérifiée s'il existe un entier relatif n, tel que

$$\frac{\phi_{\mathrm{L}}}{4n\pi} = m, \tag{4.29}$$

$m \in \mathbb{Z}$ et la période vaut alors $4n\pi/\phi_{\mathrm{L}}$, où $|n|$ est le plus petit entier vérifiant (4.29).

Il faut en revanche noter que les variations de c_k seront bornées par la périodicité de la fonction f :

$$f(x) = a\frac{\sin\left(\frac{x\phi_{\mathrm{L}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_{\mathrm{L}}}{2}\right)} \tag{4.30}$$

dont le maximum vaut $a/\sin(\phi_{\mathrm{L}}/2)$.

Il devient alors évident que plus le déphasage ϕ_{L}, introduit par propagation, est proche de 0 modulo π, plus les valeurs de c_k pourront être élevées. En utilisant les équations (4.26) dans (4.19), la probabilité d'observer le photon dans l'état $|k\rangle$ après n pas s'écrit [3]

3. En considérant toujours un état initial $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$.

$$|\langle\Psi_n|k\rangle|^2 = |J_n(c_k)|^2 . \tag{4.31}$$

Il faut noter que pour de grandes valeurs de c_k, le maximum de probabilité se déplace linéairement en fonction de k ce qui est une caractéristique intrinsèque aux fonctions de Bessel. Cet effet peut être observé sur la figure Fig.4.5 a), qui représente la probabilité en fonction du nombre de pas de la marche. L'espace de propagation de la marche peut alors être limité de manière naturelle en choisissant une longueur de boucle telle que $\phi_{\mathrm{L}} \not\equiv 0[\pi]$. Une limitation similaire de l'espace de propagation de la marche est relevé dans [Regensburger et al., 2011]. Leur système possède lui aussi une variation de phase linéaire entre chaque tour. Les auteurs associent cet effet aux oscillations de Bloch pouvant être observées dans des guides cristallins couplés de manière évanescente [Pertsch et al., 1999].

Il serait intéressant de savoir si et comment ce phénomène peut être utilisé lors de la réalisation d'algorithmes quantiques, nous ne nous sommes cependant pas penché sur la recherche d'un algorithme efficace, notre travail s'étant limité à la faisabilité d'une marche aléatoire quantique à l'aide de modulation optique.

Un dernier phénomène intéressant susceptible de modifier la transformation unitaire de notre marche est lié à la dispersion chromatique β_2. Celle-ci induit une phase quadratique entre les différents états de fréquence à chaque tour. En utilisant toujours un état initial monochromatique, nous pouvons exprimer l'état après un tour de propagation sous la forme :

$$\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{NL}}\hat{\mathcal{M}}|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} U_k(a,\phi+\phi_{\mathrm{L}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2(k\Omega)^2L/2}|k\rangle, \tag{4.32}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{NL}}\hat{\mathcal{M}}\right)^2|0\rangle &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_0}\sum_{\{k,l\}\in\mathbb{Z}^2} U_l(a,\phi+\phi_{\mathrm{L}})U_k(a,\phi+2\phi_{\mathrm{L}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2(2k^2+l^2+2kl)\Omega^2L/2}|k+l\rangle \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_0}\sum_{\{k,d\}\in\mathbb{Z}^2} U_{d-k}(a,\phi+\phi_{\mathrm{L}})U_k(a,\phi+2\phi_{\mathrm{L}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2(d^2+k^2)\Omega^2L/2}|d\rangle. \end{aligned}\tag{4.33}$$

Nous n'avons pas trouvé de forme analytique plus simple de l'expression précédente, la phase quadratique nous empêchant d'utiliser la formule d'addition de Graf pour sommer sur k. Nous pouvons tout de même simuler numériquement cette transformation en procédant de manière itérative. En considérant que la propagation a lieu dans une fibre de type SMF-28 et que le modulateur est piloté par une onde RF oscillant à $12,5$ GHz, nous pouvons considérer que la phase [4] $\phi_{\mathrm{NL}} = \beta_2\Omega^2L/2$ est très petite devant 1. En effet, cette phase vaut 2π si la longueur de propagation vaut $92,6$ km. Il n'est pas raisonnable, compte tenu des pertes des fibres, d'implémenter une marche aléatoire possédant une rétroaction d'une telle distance. Nous nous contenterons de simuler une rétroaction de taille métrique. Nous avons tout d'abord représenté, sur la figure Fig.4.9, la probabilité de mesurer le photon, en fonction de la fréquence et du nombre de pas effectués, lorsque la différence de phase linéaire accumulée sur un tour est nulle, $\phi_{\mathrm{L}} \equiv 0[2\pi]$.

4. La notation ϕ_{NL}, indique que cette phase varie non linéairement en fonction de la fréquence Ω, en l'occurence de manière quadratique.

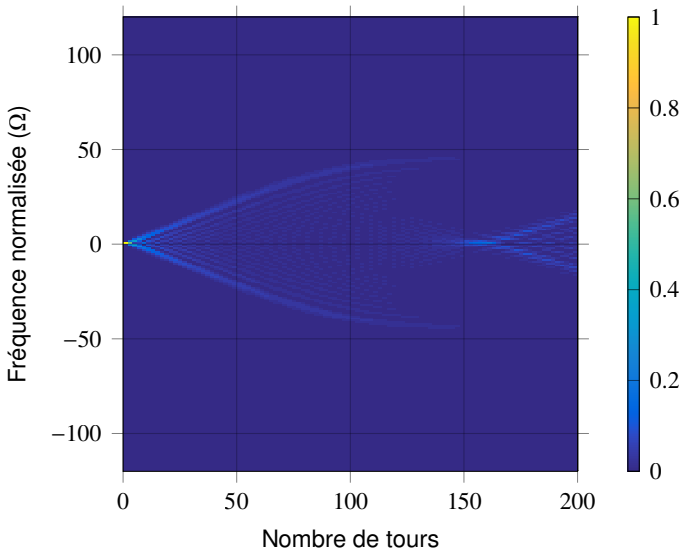


FIGURE 4.9 – Évolution d'une marche quantique en fréquence lorsqu'on tient compte de la dispersion et $\phi_{\mathrm{L}} = 0$.

Nous avons choisi pour cela une longueur de propagation correspondant à $\beta_1 \Omega L = 800\pi \approx 6,6$ m, qui correspond à $\phi_{\mathrm{NL}} = 4,4 \times 10^{-4}$. Nous pouvons comparer la figure obtenue Fig.4.9 à celle pour laquelle toute dispersion a été négligée Fig.4.5 a) et celle pour laquelle une dispersion linéaire a été introduite Fig.4.8. On remarque tout d'abord un comportement similaire de la marche aléatoire, avec une expansion linéaire de l'espace de propagation, puis comme dans le cas où une phase linéaire est introduite, la vitesse d'expansion diminue. Cependant au lieu d'une contraction identique à l'expansion que l'on observait dans le cas linéaire Fig.4.8, cette contraction semble discontinue et on observe une localisation singulière de la marche aléatoires.

Toutefois on n'observe pas une re-localisation totale pour laquelle on retrouve l'état de départ. Intuitivement, on pourrait s'attendre à ce que ce phénomène puisse survenir si la relation de phase entre chaque fréquence devient nulle. Or l'application successive de l'opérateur $\hat{\mathcal{P}}_{\mathrm{NL}}\hat{\mathcal{M}}$ sur l'état initial, dont les deux premiers pas sont donnés par l'équation (4.33), semble compromettre cette possibilité. Nous ne pousserons pas plus cette étude, mais nous avons tout de même répertorier quelques régimes, que l'on peut observer figure Fig.4.10, pour montrer la richesse du phénomène lorsque $\phi_{\mathrm{L}} \not\equiv 0[2\pi]$. Nous avons représenté la probabilité de détection du photon en fonction de la fréquence et du nombre de tours pour, a) $L = 800\pi/(\beta_1\Omega) + 2\pi/(200\beta_1\Omega)$, b) $L = 800\pi/(\beta_1\Omega) + 2\pi/(100\beta_1\Omega)$ et c)$L = 800\pi/(\beta_1\Omega) + 2\pi/(50\beta_1\Omega)$.

La différence entre ces figures tient de la variation de la périodicité de ϕ_{L} en fonction du nombre de tours. On remarque qu'il apparaît des asymétries dans l'évolution de l'état, que l'on explique par le fait que pour des fréquences symétriques par rapport à l'état initial, la phase quadratique et la phase linéaire vont se sommer pour la première alors qu'elles se soustrairont pour la seconde.

Grâce à des simulations, nous avons vu les effets de la dispersion quadratique sur l'opération unitaire de notre marche aléatoire. Nous allons brièvement énoncer d'autres moyens de modifier cet opérateur et nous verrons ensuite l'étude d'autres régimes de la marche aléatoire.

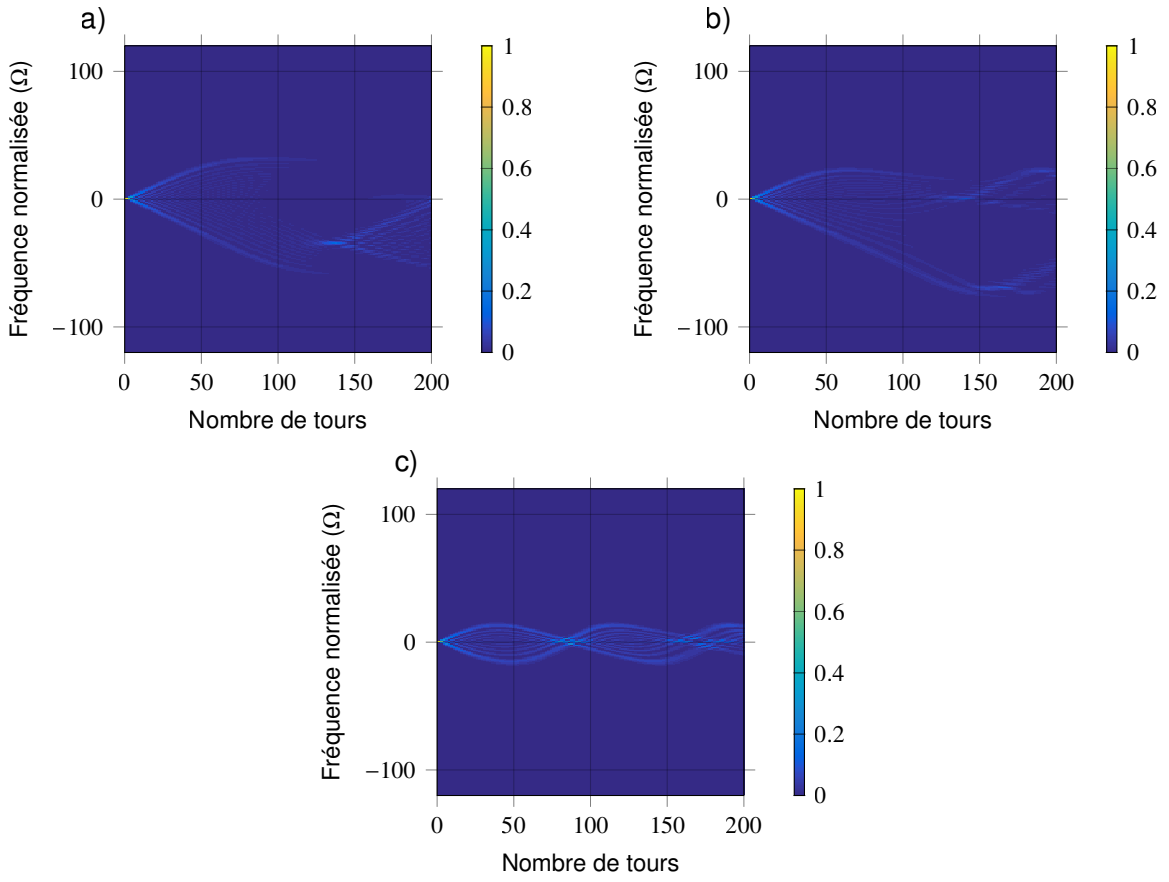


FIGURE 4.10 – Influence du déphasage linéaire sur la marche aléatoire, lorsque la dispersion n'est pas négligeable. En a) est représenté le cas $L = 800\pi/(\beta_1\Omega) + 2\pi/(200\beta_1\Omega)$, en b) le cas $L = 800\pi/(\beta_1\Omega) + 2\pi/(100\beta_1\Omega)$ et en c) le cas $L = 800\pi/(\beta_1\Omega) + 2\pi/(50\beta_1\Omega)$.

4.1.3/ AUTRES MODIFICATIONS DE L'OPÉRATION UNITAIRE ET LIMITATIONS

Nous avons montré l'influence que pouvaient avoir les phases linéaires et quadratiques introduites par la propagation fibrée. Des effets intéressants ont pu être observés. Nous ne sommes cependant pas limités à la modification de la longueur de la fibre pour jouer sur ces paramètres. En effet n'importe quelle introduction de phase reste une opération unitaire. Nous pourrions donc imaginer utiliser le masque de phase accordable présenté en section 3.2.2.1 pour réaliser des transformations plus riches. Enfin, en plus de pouvoir jouer sur l'amplitude de modulation, nous pouvons ajouter des harmoniques de la fréquence de modulation. En ayant une liberté sur l'amplitude et la phase de chacune des harmoniques, on pourrait modifier le poids des connexions entre les différents noeuds avec une plus grande liberté, tout en s'assurant que l'opération reste unitaire.

Nous pouvons toutefois noter que la connectivité de chacun des noeuds avec tous les autres nous enlève aussi certaines libertés. En effet, la connectivité est réalisée par un modulateur de phase, et celui-ci est conçu de manière à réaliser une transformation identique sur une bande de fréquence optique la plus large possible. Ainsi chaque fréquence en entrée de modulateur subira la même transformation, donnée par la relation (4.8). Il advient donc que la connexion entre deux noeuds dépend uniquement de la distance entre ces noeuds, et nous ne pouvons pas appliquer une connectivité différente d'un

noeud à l'autre. La possibilité de changer l'opération unitaire d'un noeud par rapport à un autre est utilisée dans plusieurs algorithmes quantiques, comme [Shenvi et al., 2003]. Si nous ne pouvons pas modifier l'opération unitaire des noeuds séparément, nous pouvons tout de même changer cette opération à chaque tour, ce qui pourrait apporter des dynamiques différentes dans la marche aléatoire. On pourrait toutefois imaginer des algorithmes utilisant à la fois les dimensions spectrale et temporelle pour résoudre un problème donné.

Un dernier degré de liberté existe sur notre marche aléatoire, il réside dans le choix de l'état initial. Nous avons considéré dans cette section que l'état initial était monochromatique. Nous allons maintenant voir les modifications sur le comportement de la marche suivant le choix de cet état initial.

4.1.4/ MODIFICATION DE L'ÉTAT INITIAL

Jusqu'ici nous avons choisi l'état initial le plus simple possible, afin de caractériser l'opérateur unitaire caractérisant la marche aléatoire. Nous avons cependant vu qu'il n'était pas possible de modifier la connectivité d'un noeud avec ses voisins en fonction de la fréquence, mais nous pouvons toutefois agir sur l'état de départ pour observer des comportement différents de la marche. En effet, notre marche aléatoire introduit une relation d'amplitude/phase entre une fréquence et ses voisins. Nous avons ensuite vu que la modification de la relation de phase par la propagation induisait des comportements différents de la marche. Il est donc intéressant de voir comment évolue la marche lorsque l'état initial se trouve déjà dans une superposition d'états de fréquence.

Si nous admettons que le photon est dans une superpositions de plusieurs fréquences voisines avec des amplitudes et des phases identiques,

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |n\rangle, \tag{4.34}$$

alors, si on néglige la dispersion quadratique, la probabilité de mesurer le photon à une fréquence angulaire $\omega_0 + m\Omega$ à un tour k peut s'écrire :

$$\begin{aligned} |\langle m|\Psi_k\rangle|^2 =& \frac{1}{N+1} \left| \langle m| \sum_{n=-N/2}^{N/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_l(c_k, \delta_k)|n+l\rangle \right|^2 \\ =& \frac{1}{N+1} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} U_{m-n}(c_k, \gamma_k) \right|^2 \\ =& \frac{1}{N+1} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2} J_{m-n}(c_k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\gamma_k} \right|^2, \end{aligned} \tag{4.35}$$

où $\gamma_k = \delta_k + \phi$, ϕ étant la phase de l'onde RF lorsque le photon entre dans le modulateur et c_k et δ_k sont donnés par (4.26). On peut voir, grâce à l'équation précédente, que la probabilité de mesurer le photon à une fréquence donnée va cette fois dépendre de la

phase ϕ, ce qui n'était pas vrai dans le cas monochromatique comme le montre l'équation (4.31). Un comportement intéressant apparaît avec ce degré de liberté, si nous comparons la probabilité de mesurer le photon en $|m\rangle$, donnée par l'équation (4.35), et en $|-m\rangle$, qui s'écrit

$$\begin{aligned}
|\langle -m|\Psi_k\rangle|^2 =& \frac{1}{N+1}\left|\sum_{n=-N/2}^{N/2} J_{-m-n}(c_k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\gamma_k}\right|^2 \\
=& \frac{1}{N+1}\left|\sum_{n=-N/2}^{N/2} (-1)^{-m-n} J_{m+n}(c_k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\gamma_k}\right|^2 \\
=& \frac{1}{N+1}\left|\sum_{n=-N/2}^{N/2} J_{m-n}(c_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\gamma_k+\pi)}\right|^2,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

il advient que les probabilités diffèrent fonction de la phase γ_k, hormis pour $\gamma_k = \pm\pi/2$. Deux cas sont particulièrement intéressants. Remarquons tout d'abord que lorsque $m + N/2 > 0$, alors $J_{m-n}(c_k)$ est toujours positif. De plus :

— si $\gamma_k = \pi$, alors tous les termes de $|\langle m|\Psi_k\rangle|^2$ interféreront de manière constructive, alors qu'un terme sur 2 sera négatif pour $|\langle -m|\Psi_k\rangle|^2$ et on observera une interférence destructive. On remarque que ce choix de phase biaise la propagation de la marche en favorisant les fréquences positives.
— si $\gamma_k = 0$, l'effet inverse est observé, l'interférence constructive a lieu pour les fréquences négatives. La marche est cette fois biaisée pour favoriser les fréquences négatives.

Les cas $\gamma_k = 0$ et $\gamma_k = \pi/2$ sont représentés respectivement sur les figures Fig.4.11 a) et Fig.4.11 b), lorsque $\phi_\mathrm{L} = 0$ et $N = 2$.

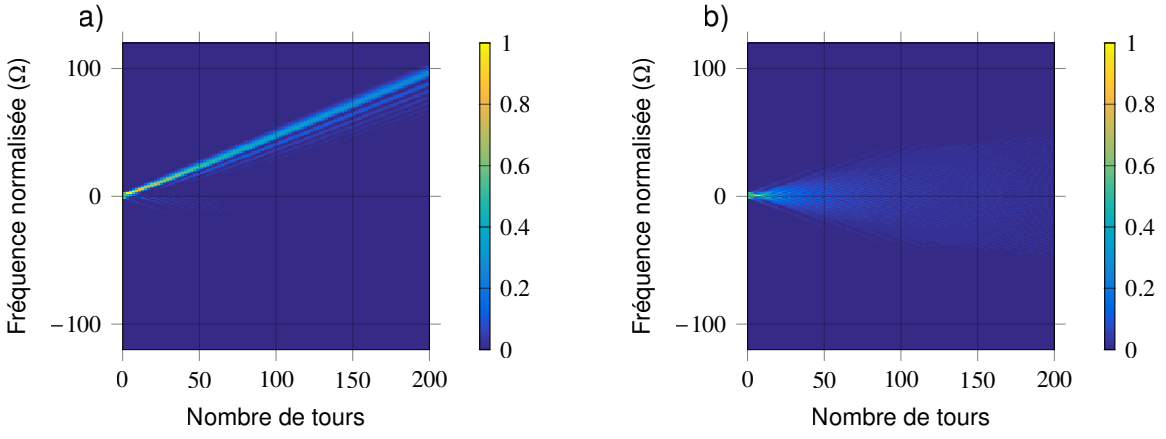


FIGURE 4.11 – Propagation de la marche aléatoire en fréquence pour un état d'entrée superposé sur 3 *bins*. En a) est représenté le cas pour lequel le déphasage RF vaut $\gamma = 0$. En b) est représenté le cas pour lequel le déphasage RF vaut $\gamma = \pi/2$.

Ce nouveau degré de liberté pourrait être mis à profit dans l'élaboration d'un algorithme de calcul quantique. On pourrait aussi imaginer préparer l'état du photon avec une relation d'amplitude et phase particulière. Cette option ouvre de nombreuses possibilités, dont nous ne présentons pas de cas en particulier.

Maintenant que nous avons répertorié les différents degrés de liberté de notre marche aléatoire, nous pouvons voir les difficultés expérimentales limitant la réalisation d'une telle marche.

4.1.5/ MARCHE QUANTIQUE ?

Nous avons décrit la propagation d'un photon dans un modulateur de phase rebouclé. Le caractère indivisible du photon oblige à une reconstruction statistique de la figure d'interférence. Toutefois l'évolution obtenue et l'exploration plus rapide dans l'espace des fréquences par la marche aléatoire quantique, par rapport à son équivalent classique, sont purement dues à un phénomène d'interférences et pourrait s'obtenir avec des impulsions laser classiques. Différents travaux [Knight et al., 2003c, Knight et al., 2003a, Knight et al., 2003b] ont conduit à la même conclusion. Comme souligné dans [Venegas-Andraca, 2012], la marche ne peut toutefois être considérée comme quantique que si l'observation partielle du marcheur après chaque pas conduit à une modification de la figure d'interférence par complémentarité. La complémentarité pourrait alors être utilisée comme une ressource utile à l'élaboration d'un algorithme quantique, celle-ci ne pouvant pas être réalisée classiquement. Enfin, l'exploration d'une marche aléatoire par des photons intriqués ne peut en aucun cas être reproduite de manière classique. On peut se référer aux travaux théoriques de [Omar et al., 2006] sur une marche aléatoire discrète à une dimension, ou encore à ceux de [Sansoni et al., 2012] qui associent théorie et expérience. Cette piste nous semble très prometteuse dans le cadre des marches aléatoires en fréquence, d'autant plus que nous possédons déjà une source d'états intriqués en fréquence. L'étude théorique de la propagation des photons intriqués dans notre système rebouclé est toutefois complètement différente, car la mesure des photons en coïncidence ne permet pas de différencier si les photons ont effectué un ou plusieurs tours. Si la source possède une grande cohérence, la probabilité résulte de l'interférence de tous ces chemins possibles. Nous n'avons pas encore étudié ces phénomènes, mais ils semblent être une piste de recherche très intéressante.

4.2/ ETUDE D'UNE RÉALISATION EXPÉRIMENTALE

Nous pouvons examiner de nouveau le schéma présenté figure Fig.4.3. Pour simuler nos résultats, nous avons négligé les pertes et l'interaction au niveau du coupleur lors de la rétroaction. Or lors de cette étude, nous avons étudié un cas monochromatique, ou tout du moins possédant un spectre fin par rapport à la fréquence de modulation Ω. Cette finesse de spectre induit que la longueur de cohérence des photons est très grande, ce qui correspond à un très grand nombre de tours. Afin d'éviter tout phénomène d'interférence à un photon, il faut connaître le temps d'émission du photon plus précisément que le temps correspondant à la rétroaction sur le modulateur. Ce temps d'émission connu, il suffit alors de synchroniser la détection pour supprimer les interférences à un photon. La source que nous avons présenté en section 2.1.2.2 émet des photons jumeaux et est un candidat idéal pour ce type d'expérience. En effet, il suffit de filtrer fortement le spectre de la source pour obtenir des photons dont la variation de fréquence est très petite devant Ω. Il suffit ensuite de séparer les photons jumeaux et d'en détecter un. On peut alors synchroniser le déclenchement de la seconde photodiode par rapport à une détection positive sur le premier détecteur, et choisir le délai en fonction du nombre de tours voulu.

Le même résultat peut être obtenu à l'aide d'une source pulsée et atténuée dans un régime où la probabilité d'émettre deux photons par impulsion est très petite devant celle d'avoir un photon. Il suffit alors de synchroniser la détection sur la cadence d'émission des impulsions laser.

Un second paramètre demandant notre attention est la longueur de la rétroaction L. Nous avons mis en évidence que cette longueur de propagation modifie la transformation constituant un pas de propagation. Elle induit une différence de phase entre les différentes fréquences et modifie la condition d'interférence des différents noeuds à chaque tour. Si nous voulons prédire le comportement de la marche, il faut connaitre la longueur de propagation de manière précise et pouvoir l'ajuster pour observer le comportement voulu. Nous avons vu qu'il fallait que cette phase accumulée par dispersion linéaire ϕ_{L} soit proche de 0 modulo $[2\pi]$ pour que la probabilité d'observer un photon éloigné de sa fréquence initiale ne tende pas 0, quel que soit le nombre de pas de propagation. Lors de l'étude de cette phase linéaire seule, nous avons vu que si $\phi_{\mathrm{L}} = 2\pi/(N\beta_1\Omega L)$, alors on observe une relocalisation de la marche à sa fréquence initiale au bout de N tours et la fréquence la plus éloignée explorée par cette marche est inférieur à $\omega = \omega_0 + Na\Omega/2$. Compte tenu de la fréquence de modulation, un déphasage de 2π est obtenu pour une longueur de propagation $L \approx 1,6$ cm. Dans ce cas, si nous voulons explorer un espace de dimension M il faut être capable d'ajuster la longueur de propagation sur au moins $1,6$ cm avec une précision meilleure que $1,6/(2M)$ cm. Il existe des lignes à délai optique permettant de réaliser cette opération avec une précision inférieure à $10\ \mu$m.

Un autre point délicat est la détection des différents états. Afin de reconstruire la distribution de probabilité du photon d'être détecté dans chacun des états de fréquence $\omega_0 + k\Omega$, $k \in \mathbb{Z}$, il faut reproduire l'expérience un très grand nombre de fois, dans le but d'obtenir une statistique convenable. Nous pouvons alors utiliser le système de détection présenté en section 2.1.1.2, composé d'un détecteur large bande et d'un filtre accordable plus fin que la fréquence de modulation Ω. L'état de fréquence détecté est alors choisi à l'aide du filtre. Il faut alors déterminer un temps de collection fixe pour toutes les fréquences et répéter l'expérience pour chaque état de fréquence dont on veut la probabilité. Ce type de détection est toutefois compliqué à mettre en oeuvre car il implique que les conditions expérimentales doivent être parfaitement identiques pour chaque fréquence. Il faut en outre que la statistique des photons après séparation soit identique. Nous avons souligné ceci lors de l'étape de caractérisation de la source, section 3.1.1. Cette statistique peut varier en fonction d'un désaccord de fréquence entre le cristal non linéaire et la diode de pompe, en fonction de la puissance de la diode de pompe et du désaccord de fréquence entre la longueur d'onde de dégénérescence et du filtre utilisé pour restreindre le spectre bi-photon. Nous avons en effet indiqué qu'il fallait utiliser un filtre très fin par rapport à Ω pour que l'état des photons entrant dans la boucle puisse être considéré comme monochromatique. Si nous voulons isoler par filtration un maximum de paires de photons, la relation de conservation de l'énergie induit que le filtre doit être parfaitement aligné avec la dégénérescence de la pompe. Nous pouvons toutefois relaxer cette condition en ne filtrant que les photons pénétrant dans la boucle après séparation des photons jumeaux. Cette solution n'est, cependant, pas idéale car il est aussi nécessaire de filtrer les photons utilisés pour conditionner la détection. En effet, comme seuls les photons ayant leur jumeau dans la boucle nous intéressent, si nous n'isolons pas un minimum ces photons, la majeure partie des déclenchements ne correspondra pas à une détection recherchée. Si le ratio entre la largeur spectrale de la source et celle du filtre fin est très grand, le nombre de détections correspondant à des photons jumeaux devient très petit devant

le bruit, et la visibilité du pic de coïncidences est fortement réduite. Ainsi, nous devons aussi filtrer le spectre des photons utilisés pour le déclenchement. Il existe donc un compromis sur la largeur spectrale de ce filtre. Un filtre large permet une bonne stabilité du taux de photons utiles détectés en coïncidences, mais au détriment de la visibilité du pic de coïncidences. Une autre solution pourrait être envisagée, elle consisterait à ajouter une dispersion en sortie de boucle, dans le but de séparer temporellement les différentes fréquences. Cette solution réduirait le grand besoin de stabilité du système. Cependant en tenant compte de la fréquence de modulation, de la largeur des filtres et du temps de réponse des détecteurs, nous avons calculé qu'il est nécessaire d'effectuer au moins 300 km de propagation dans une fibre standard pour obtenir cette dispersion. Cette solution est peu envisageable compte tenu des pertes engrangées et des dispersions d'ordre supérieur qui deviennent non négligeables. L'utilisation d'un réseau de Bragg "chirpé" [Ouellette, 1987] pourrait être envisagée pour simuler cette dispersion, mais il n'existe pas de composant standard appliquant de grandes dispersions sur des bandes de fréquence supérieures à 50 GHz.

Aussi lors de notre analyse, nous avons supposé que la rétroaction était parfaite et qu'un photon restait piégé dans la boucle autant de temps que désiré. Or, les coupleurs directionnels actifs actuels ne sont pas suffisamment rapides pour changer d'état en un temps inférieur à la rétroaction du modulateur [5]. Nous pouvons au mieux utiliser un coupleur équilibré pour diriger les photons, soit vers le modulateur, soit vers le détecteur. Cette solution induit statistiquement que la probabilité qu'un photon effectue N tours tend vers $(1/2)^N$. Ceci implique que le temps nécessaire pour obtenir un échantillon statistique représentatif de notre mesure croît de manière exponentielle avec le nombre de tours.

Enfin le même problème existe pour les pertes. Nous avons considéré un système parfait, mais chaque composant possède des pertes. Celles introduites par le modulateur et la rétroaction seront subies à chaque tour. Ainsi les pertes augmenteront, elles aussi, exponentiellement en fonction du nombre de tours.

Les deux derniers points rendent l'expérience très difficile à réaliser. Imaginons que nous voulons effectuer $N_t = 10$ tours dans le modulateur. Si dans un cas sans pertes, nous estimons que nous avons besoin d'un échantillon statistique de $N = 10^4$ photons pour obtenir la variance voulue sur notre mesure, alors nous associons un temps moyen t_N, nécessaire à l'émission des N photons dans la bande de fréquence envoyée vers le modulateur. Statistiquement le nombre de photons détectés N_d après N_t tours, sur toute la bande de fréquence, vaudra en moyenne :

$$N_d = g\left(\frac{g_t}{2}\right)^{N_t} N, \tag{4.37}$$

où $g_t < 1$ représente les pertes par tour, le facteur $1/2$ représente la moitié des photons quittant la boucle à chaque tour sous l'action du coupleur, et g représente les autres pertes. Dans le cas où les pertes par tour sont faibles, par exemple $g_t = -1dB \approx 0,8$ et que $g = 1$, on obtient $N_d \approx 10^{-4}$. Ainsi le temps nécessaire pour chaque acquisition est augmenté d'un facteur 10^4. On peut aussi estimer les pertes (indépendantes du nombre de tours) qui sont apportées par la séparation des photons jumeaux et par les différentes filtrations spectrales. Enfin ,on estime que $g \approx 0,1$. Une possibilité pour réduire

5. Les plus rapides du marché nécessitent environ 50 ms pour changer d'état, ce qui correspond à une longueur de propagation de 10000 km dans une fibre optique standard.

le temps d'attente est d'augmenter le taux de photons émis. Toutefois nous allons être limité dans ce cas par la détection conditionnelle du photon jumeau. En effet, les compteurs ne peuvent compter qu'un photon à la fois, et leur taux de comptage doit être limité afin de réduire la probabilité d'*after pulsing*. Pour les compteurs que nous possédons, nous pouvons au maximum détecter 10^5 photons par seconde. Ainsi le temps nécessaire à l'acquisition d'un échantillon est équivalent, dans le meilleur des cas, à 2H45min, temps durant lequel tous les paramètres doivent être rigoureusement stables. Pour 10 tours nous devons mesurer environ 21 fréquences, conduisant l'expérience totale à durer environ 2 jours et demi.

Ce temps de stabilité étant tout à fait atteignable avec la source à photons jumeaux que nous possédons, caractérisée en section 3.1.1, il n'a pas été jugé nécessaire d'acquérir une source laser pour effectuer cette expérience en régime impulsionnel atténué. La source à photons jumeaux possède en plus l'avantage de pouvoir approfondir l'étude des marches aléatoires quantiques en fréquence dans le régime où les deux photons effectuent la marche. Cette expérience est en voie d'être réalisée.

4.3/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons initié l'étude théorique des marches aléatoires en fréquence. Nous avons mis en évidence qu'elles possédaient le même type de comportement que les marches continues, dans le sens où la propagation de la marche ne nécessite pas un espace supplémentaire pour effectuer le tirage aléatoire. Nous avons étudié la propagation de cette marche dans un espace de fréquence à une dimension, et proposé un schéma utilisant un modulateur de phase rebouclé sur lui-même. Nous avons montré l'existence de différent régimes qui dépendent de la relation de phase entre les états de fréquence en entrée de modulateur. Cette relation de phase est modifiée par la propagation de l'état dans la boucle de rétroaction, ce qui nous a amené à nous intéresser aux effets de la dispersion. L'architecture que nous avons proposé nous semble donc très prometteuse, et l'implémentation d'une marche aléatoire quantique en fréquence à une dimension est en voie d'être réalisée. De plus, cette architecture peut être facilement modifiée pour ajouter des dimensions supplémentaires à la propagation de la marche quantique. Notre plateforme est ainsi un outil très prometteur pour l'étude de marches aléatoires plus complexes.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce manuscrit de thèse, nous avons présenté une étude théorique et une réalisation expérimentale du phénomène de compensation non-locale de dispersion. Pour cette démonstration, nous avons montré que lors d'une expérience d'interférence à deux photons dans le domaine fréquentiel, chaque photon était sensible à la dispersion. Nous avons ensuite mis en évidence que la dispersion agit de manière globale, sur l'état intriqué quel que soit l'endroit où la dispersion a lieu. Finalement, nous avons construit et caractérisé une plateforme expérimentale pour observer ce phénomène. Nous avons ainsi pu vérifier que propager les deux photons au sein d'une même fibre ou dans deux fibres séparément conduisait aux mêmes observations. Ce résultat nous a permis de montrer la compensation non-locale de la dispersion pour un total de 60 km de propagation lorsque les photons se propageaient dans la même fibre et 4 km pour une propagation indépendante des photons. En parallèle, nous avons étudié la possibilité d'utiliser la manipulation en fréquence pour réaliser une marche aléatoire quantique dans le domaine fréquentiel. La modulation de phase s'avère être un bon candidat pour la propagation de marches dans l'espace des fréquences. En effet, elle agit comme le propagateur d'une marche continue qui ne nécessite pas d'espace supplémentaire pour réaliser un tirage aléatoire. Cette solution permettrait de réaliser un grand nombre de pas de propagation à l'aide d'un unique modulateur de phase, rendant accessible l'exploration de très grands espaces de propagation. Nous avons initié l'analyse de ce type de marche aléatoire et proposé une architecture dont la réalisation est à la portée du matériel expérimentale. Ainsi nos résultats confirment le potentiel de la manipulation en fréquence pour l'étude des phénomènes quantiques et le développement de l'information quantique. Comme elle l'a été dans le cas de la compensation non-locale de la dispersion, cette technique pourrait être profitable à d'autres applications. On pourrait imaginer utiliser un profil de dispersion particulier pour signer une communication quantique secrète, ou encore utiliser la sensibilité de notre interférence pour tomographier un milieu dispersif. Du côté des marches aléatoires quantiques dans l'espace des fréquences, outre la proximité de la réalisation d'une marche à une dimension, il serait tout à fait envisageable d'augmenter le nombre de dimensions. Notre marche n'exploitant qu'un ensemble discret de l'espace des fréquences, on pourrait envisager multiplier le nombre de ces ensembles avec le nombre de dimensions. Ces différentes dimensions pourraient même être réalisées dans le même modulateur, simplement en multiplexant le signal radio-fréquence.

BIBLIOGRAPHIE

[Aharonov et al., 2000] Aharonov, D., Ambainis, A., Kempe, J., et Vazirani, U. (2000). **Quantum Walks On Graphs**. *arXiv :quant-ph/0012090*. arXiv : quant-ph/0012090.

[Aharonov et al., 1993] Aharonov, Y., Davidovich, L., et Zagury, N. (1993). **Quantum random walks**. *Physical Review A*, 48(2) :1687–1690.

[Ahlbrecht et al., 2011] Ahlbrecht, A., Scholz, V. B., et Werner, A. H. (2011). **Disordered quantum walks in one lattice dimension**. *Journal of Mathematical Physics*, 52(10) :102201.

[Ambainis et al., 2001] Ambainis, A., Bach, E., Nayak, A., Vishwanath, A., et Watrous, J. (2001). **One-dimensional quantum walks**. *STOC '01 Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*.

[Aspect et al., 1982a] Aspect, A., Dalibard, J., et Roger, G. (1982a). **Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time- Varying Analyzers**. *Physical Review Letters*, 49(25) :1804–1807.

[Aspect et al., 1981] Aspect, A., Grangier, P., et Roger, G. (1981). **Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem**. *Physical Review Letters*, 47(7) :460–463.

[Aspect et al., 1982b] Aspect, A., Grangier, P., et Roger, G. (1982b). **Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment : A new violation of bell's inequalities**. *Physical Review Letters*, 49(2) :91–94.

[AureaTechnology, 2015] AureaTechnology (2015). **http ://aureatechnology.net/fr/**.

[Baek et al., 2009] Baek, S.-Y., Cho, Y.-W., et Kim, Y.-H. (2009). **Nonlocal dispersion cancellation using entangled photons**. *Optics Express*, 17(21) :19241–19252.

[Barak et al., 2012] Barak, A., et Segev, M. (2012). **Measuring dispersion of biphotons**. *Physical Review A*, 86(4) :043838.

[Bell, 1964] Bell, J. S. (1964). **On the einstein-podolsky-rosen paradox**. *Physics*, 1(3) :195–200.

[Bloch, 2006] Bloch, M. (2006). **Algorithme de réconciliation et méthodes de distribution quantique de clés adaptées au domaine fréquentiel**. PhD thesis, Université de Franche-Comté, Besançon, France.

[Bloch et al., 2007] Bloch, M., McLaughlin, S. W., Merolla, J.-M., et Patois, F. (2007). **Frequency-coded quantum key distribution**. *Optics Letters*, 32(3) :301–303.

[Blow et al., 1990] Blow, K. J., Loudon, R., Phoenix, S. J. D., et Shepherd, T. J. (1990). **Continuum fields in quantum optics**. *Physical Review A*, 42(7) :4102–4114.

[Brendel et al., 1998] Brendel, J., Zbinden, H., et Gisin, N. (1998). **Measurement of chromatic dispersion in optical fibers using pairs of correlated photons**. *Optics Communications*, 151(1–3) :35 – 39.

[Capmany et al., 2011] Capmany, J., et Fernández-Pousa, C. (2011). **Quantum modelling of electro-optic modulators**. *Laser & Photonics Reviews*, 5(6) :750–772.

[Childs, 2010] Childs, A. M. (2010). **On the Relationship Between Continuous- and Discrete-Time Quantum Walk**. *Communications in Mathematical Physics*, 294(2) :581–603. WOS :000273445900010.

[Childs et al., 2004] Childs, A. M., et Goldstone, J. (2004). **Spatial search by quantum walk**. *Physical Review A*, 70(2) :022314.

[Clauser et al., 1974] Clauser, J. F., et Horne, M. A. (1974). **Experimental consequences of objective local theories**. *Physical Review D*, 10(2) :526–535.

[Clauser et al., 1969] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., et Holt, R. A. (1969). **Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories**. *Physical Review Letters*, 23(15) :880–884.

[Clauser et al., 1978] Clauser, J. F., et Shimony, A. (1978). **Bell's theorem. Experimental tests and implications**. *Reports on Progress in Physics*, 41(12) :1881.

[Cova et al., 1996] Cova, S., Ghioni, M., Lacaita, A., Samori, C., et Zappa, F. (1996). **Avalanche photodiodes and quenching circuits for single-photon detection**. *Applied Optics*, 35(12) :1956.

[Dauler et al., 2014] Dauler, E. A., et Grein, M. E. (2014). **Review of superconducting nanowire single-photon detector system design options and demonstrated performance**. *Optical Engineering*, 53(8) :081907.

[d'Espagnat, 2002] d'Espagnat, B. (2002). **Traité de physique et de philosophie**. Fayard, Paris.

[Deutsch et al., 1992] Deutsch, D., et Jozsa, R. (1992). **Rapid solution of problems by quantum computation**. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 439(1907) :553–558.

[Dür et al., 2002] Dür, W., Raussendorf, R., Kendon, V. M., et Briegel, H.-J. (2002). **Quantum walks in optical lattices**. *Physical Review A*, 66(5) :052319.

[Duraffourg et al., 2001] Duraffourg, L., Merolla, J.-M., Goedgebuer, J.-P., Mazurenko, Y., et Rhodes, W. T. (2001). **Compact transmission system using single-sideband modulation of light for quantum cryptography**. *Optics Letters*, 26(18) :1427–1429.

[Eberhard, 1993] Eberhard, P. H. (1993). **Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment**. *Physical Review A*, 47(2) :R747–R750.

[Einstein et al., 1935] Einstein, A., Podolsky, B., et Rosen, N. (1935). **Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?** *Physical Review*, 47(10) :777–780.

[Franson, 1989] Franson, J. D. (1989). **Bell inequality for position and time**. *Physical Review Letters*, 62(19) :2205–2208.

[Franson, 1991a] Franson, J. D. (1991a). **Two-photon interferometry over large distances**. *Physical Review A*, 44(7) :4552–4555.

[Franson, 1991b] Franson, J. D. (1991b). **Violations of a simple inequality for classical fields**. *Physical Review Letters*, 67(3) :290–293.

[Franson, 1992] Franson, J. D. (1992). **Nonlocal cancellation of dispersion**. *Physical Review A*, 45(5) :3126–3132.

[Franson, 2007] Franson, J. D. (2007). **Nonlocal interferometry : Beyond bell's inequality**. *arXiv :0707.0475 [quant-ph]*. arXiv : 0707.0475.

[Franson, 2009] Franson, J. D. (2009). **Nonclassical nature of dispersion cancellation and nonlocal interferometry**. *Physical Review A*, 80(3) :032119.

[Garrison et al., 2008] Garrison, J., et Chiao, R. (2008). **Quantum Optics**. Oxford Graduate Texts.

[Ghosh, 1997] Ghosh, G. (1997). **Sellmeier coefficients and dispersion of thermo-optic coefficients for some optical glasses**. *Applied Optics*, 36(7) :1540.

[Gisin et al., 2002] Gisin, N., Ribordy, G., Tittel, W., et Zbinden, H. (2002). **Quantum cryptography**. *Reviews of Modern Physics*, 74(1) :145–195.

[Gisin et al., 2007] Gisin, N., et Thew, R. (2007). **Quantum communication**. *Nature Photonics*, 1(3) :165–171.

[Giustina et al., 2013] Giustina, M., Mech, A., Ramelow, S., Wittmann, B., Kofler, J., Beyer, J., Lita, A., Calkins, B., Gerrits, T., Nam, S. W., Ursin, R., et Zeilinger, A. (2013). **Bell violation with entangled photons, free of the fair-sampling assumption**. *Nature*, 497(7448) :227–230. arXiv : 1212.0533.

[Grössing et al., 1988] Grössing, G., et Zeilinger, A. (1988). **Quantum cellular automata**. *Complex Systems*, 2 :197.

[Grover, 1996] Grover, L. K. (1996). **A fast quantum mechanical algorithm for database search**. *arXiv :quant-ph/9605043*. arXiv : quant-ph/9605043.

[Harris, 2008] Harris, S. E. (2008). **Nonlocal modulation of entangled photons**. *Physical Review A*, 78(2) :021807.

[Hensen et al., 2015] Hensen, B., Bernien, H., Dréau, A. E., Reiserer, A., Kalb, N., Blok, M. S., Ruitenberg, J., Vermeulen, R. F. L., Schouten, R. N., Abellán, C., Amaya, W., Pruneri, V., Mitchell, M. W., Markham, M., Twitchen, D. J., Elkouss, D., Wehner, S., Taminiau, T. H., et Hanson, R. (2015). **Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres**. *Nature*, 526(7575) :682–686.

[Hillery et al., 2003] Hillery, M., Bergou, J., et Feldman, E. (2003). **Quantum walks based on an interferometric analogy**. *Physical Review A*, 68(3) :032314.

[Hong et al., 1987] Hong, C. K., Ou, Z. Y., et Mandel, L. (1987). **Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference**. *Physical Review Letters*, 59(18) :2044–2046.

[Horodecki et al., 2009] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., et Horodecki, K. (2009). **Quantum entanglement**. *Reviews of Modern Physics*, 81(2) :865–942. arXiv : quant-ph/0702225.

[IDQuantique, 2015] IDQuantique (2015). **http ://www.idquantique.com/**.

[Jafarizadeh et al., 2007] Jafarizadeh, M. A., et Salimi, S. (2007). **Investigation of continuous-time quantum walk via spectral distribution associated with adjacency matrix**. *Annals of Physics*, 322(5) :1005–1033.

[Jannson et al., 1981] Jannson, T., et Jannson, J. (1981). **Temporal self-imaging effect in single-mode fibers**. *J. Opt. Soc. Am.*, 71(11) :1373–1376.

[Jundt, 1997] Jundt, D. H. (1997). **Temperature-dependent sellmeier equation for the index of refraction, ne, in congruent lithium niobate**. *Opt. Lett.*, 22(20) :1553–1555.

[Kempe, 2003] Kempe, J. (2003). **Quantum random walks : An introductory overview**. *Contemporary Physics*, 44(4) :307–327.

[Knight et al., 2003a] Knight, P. L., Roldán, E., et Sipe, J. E. (2003a). **Optical cavity implementations of the quantum walk**. *Optics Communications*, 227(1–3) :147–157.

[Knight et al., 2003b] Knight, P. L., Roldan, E., et Sipe, J. E. (2003b). **Propagating quantum walks : the origin of interference structures**. *arXiv :quant-ph/0312133*. J. Mod. Opt. 51 (2004) 1761-1777.

[Knight et al., 2003c] Knight, P. L., Roldán, E., et Sipe, J. E. (2003c). **Quantum walk on the line as an interference phenomenon**. *Physical Review A*, 68(2) :020301.

[Konno, 2008] Konno, N. (2008). **Quantum Walks**. Dans Schurmann, M., et Franz, U., éditeurs, *Quantum Potential Theory*, volume 1954, pages 309–+. Springer-Verlag Berlin, Berlin. WOS :000260092100006.

[Krovi et al., 2006] Krovi, H., et Brun, T. A. (2006). **Quantum walks with infinite hitting times**. *Physical Review A*, 74(4) :042334.

[Krovi et al., 2007] Krovi, H., et Brun, T. A. (2007). **Quantum walks on quotient graphs**. *Physical Review A*, 75(6) :062332.

[Lo et al., 2014] Lo, H.-K., Curty, M., et Tamaki, K. (2014). **Secure quantum key distribution**. *Nature Photonics*, 8(8) :595–604.

[Lukens et al., 2013] Lukens, J. M., Dezfooliyan, A., Langrock, C., Fejer, M. M., Leaird, D. E., et Weiner, A. M. (2013). **Demonstration of high-order dispersion cancellation with an ultrahigh-efficiency sum-frequency correlator**. *Physical Review Letters*, 111(19) :193603.

[Lukens et al., 2014] Lukens, J. M., Odele, O., Langrock, C., Fejer, M. M., Leaird, D. E., et Weiner, A. M. (2014). **Generation of biphoton correlation trains through spectral filtering**. *Optics Express*, 22(8) :9585–9596.

[Mackay et al., 2002] Mackay, T. D., Bartlett, S. D., Stephenson, L. T., et Sanders, B. C. (2002). **Quantum walks in higher dimensions**. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 35(12) :2745.

[Mandel et al., 1995] Mandel, L., et Wolf, E. (1995). **Optical Coherence and Quantum Optics**. Cambridge University Press. Cambridge Books Online.

[Manouchehri et al., 2007] Manouchehri, K., et Wang, J. B. (2007). **Continuous-time quantum random walks require discrete space**. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40(45) :13773.

[Manouchehri et al., 2008] Manouchehri, K., et Wang, J. B. (2008). **Solid state implementation of quantum random walks on general graphs**. *arXiv :0811.1795 [quant-ph]*, pages 56–61.

[Marsili et al., 2013] Marsili, F., Verma, V. B., Stern, J. A., Harrington, S., Lita, A. E., Gerrits, T., Vayshenker, I., Baek, B., Shaw, M. D., Mirin, R. P., et Nam, S. W. (2013). **Detecting single infrared photons with 93% system efficiency**. *Nature Photonics*, 7(3) :210–214.

[Mbodji, 2012] Mbodji, I. (2012). **Etude de l'enchevêtrement en fréquence pour la sécurisation de l'information**. PhD thesis, Université de Franche-Comté, Besançon, France.

[Mbodji et al., 2012] Mbodji, I., Olislager, L., Woodhead, E., Galmes, B., Cussey, J., Furfaro, L., Emplit, P., Massar, S., Phan Huy, K., et Merolla, J.-M. (2012). **Two-photon experiments in the frequency domain**. volume 8440, pages 84400J–84400J–8.

[Merolla et al., 2002] Merolla, J.-M., Duraffourg, L., Goedgebuer, J.-P., Soujaeff, A., Patois, F., et Rhodes, W. T. (2002). **Integrated quantum key distribution system using single sideband detection**. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 18(2) :141–146.

[Mérolla et al., 1999] Mérolla, J.-M., Mazurenko, Y., Goedgebuer, J.-P., Duraffourg, L., Porte, H., et Rhodes, W. T. (1999). **Quantum cryptographic device using single-photon phase modulation**. *Physical Review A*, 60(3) :1899–1905.

[Meyer, 1996a] Meyer, D. A. (1996a). **From quantum cellular automata to quantum lattice gases**. *Journal of Statistical Physics*, 85(5-6) :551–574. arXiv : quant-ph/9604003.

[Meyer, 1996b] Meyer, D. A. (1996b). **On the absence of homogeneous scalar unitary cellular automata**. *Physics Letters A*, 223(5) :337–340.

[Mülken et al., 2005] Mülken, O., et Blumen, A. (2005). **Spacetime structures of continuous-time quantum walks**. *Physical Review E*, 71(3) :036128.

[Mülken et al., 2011] Mülken, O., et Blumen, A. (2011). **Continuous-time quantum walks : Models for coherent transport on complex networks**. *Physics Reports*, 502(2–3) :37–87.

[Nguyen, 2008] Nguyen, A. T. (2008). **Utilisation de l'optique fibrée pour la manipulation et la génération d'états quantiques : pile ou face quantique et paires de photons**. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, , Faculté des sciences appliquées – Physique, Bruxelles.

[O'Donnell, 2011] O'Donnell, K. A. (2011). **Observations of dispersion cancellation of entangled photon pairs**. *Physical Review Letters*, 106(6) :063601.

[Ohmachi et al., 1975] Ohmachi, Y., et Noda, J. (1975). **Electro-optic light modulator with branched ridge waveguide**. *Applied Physics Letters*, 27(10) :544–546.

[Olislager et al., 2010] Olislager, L., Cussey, J., Nguyen, A. T., Emplit, P., Massar, S., Merolla, J.-M., et Huy, K. P. (2010). **Frequency-bin entangled photons**. *Physical Review A*, 82(1) :013804.

[Olislager et al., 2012] Olislager, L., Mbodji, I., Woodhead, E., Cussey, J., Furfaro, L., Emplit, P., Massar, S., Huy, K. P., et Merolla, J.-M. (2012). **Implementing two-photon interference in the frequency domain with electro-optic phase modulators**. *New Journal of Physics*, 14(4) :043015.

[Olislager et al., 2014] Olislager, L., Woodhead, E., Huy, K. P., Merolla, J.-M., Emplit, P., et Massar, S. (2014). **Creating and manipulating entangled optical qubits in the frequency domain**. *Physical Review A*, 89(5). arXiv : 1403.0805.

[Omar et al., 2006] Omar, Y., Paunković, N., Sheridan, L., et Bose, S. (2006). **Quantum walk on a line with two entangled particles**. *Physical Review A*, 74(4) :042304.

[Ouellette, 1987] Ouellette, F. (1987). **Dispersion cancellation using linearly chirped bragg grating filters in optical waveguides**. *Opt. Lett.*, 12(10) :847–849.

[Pertsch et al., 1999] Pertsch, T., Dannberg, P., Elflein, W., Bräuer, A., et Lederer, F. (1999). **Optical Bloch Oscillations in Temperature Tuned Waveguide Arrays**. *Physical Review Letters*, 83(23) :4752–4755.

[Prevedel et al., 2011] Prevedel, R., Schreiter, K. M., Lavoie, J., et Resch, K. J. (2011). **Classical analog for dispersion cancellation of entangled photons with local detection**. *Physical Review A*, 84(5) :051803.

[Rann, 1939] Rann, W. H. (1939). **Amplification by secondary electron emission**. *Journal of Scientific Instruments*, 16(8) :241.

[Regensburger et al., 2011] Regensburger, A., Bersch, C., Hinrichs, B., Onishchukov, G., Schreiber, A., Silberhorn, C., et Peschel, U. (2011). **Zitterbewegung, bloch oscillations and landau-zener tunneling in a quantum walk**. *arXiv :1104.0105 [quant-ph]*.

[Resch et al., 2007] Resch, K. J., Puvanathasan, P., Lundeen, J. S., Mitchell, M. W., et Bizheva, K. (2007). **Classical dispersion-cancellation interferometry**. *Optics Express*, 15(14) :8797–8804.

[Ribordy et al., 2000] Ribordy, G., Brendel, J., Gautier, J.-D., Gisin, N., et Zbinden, H. (2000). **Long-distance entanglement-based quantum key distribution**. *Physical Review A*, 63(1) :012309.

[Roelens et al., 2008] Roelens, M. A. F., Frisken, S., Bolger, J. A., Abakoumov, D., Baxter, G., Poole, S., et Eggleton, B. J. (2008). **Dispersion Trimming in a Reconfigurable Wavelength Selective Switch**. *Journal of Lightwave Technology*, 26 :73–78.

[Salimi, 2009] Salimi, S. (2009). **Continuous-time quantum walks on star graphs**. *Annals of Physics*, 324(6) :1185–1193.

[Sanders et al., 2003] Sanders, B. C., Bartlett, S. D., Tregenna, B., et Knight, P. L. (2003). **Quantum quincunx in cavity quantum electrodynamics**. *Physical Review A*, 67(4) :042305.

[Sansoni et al., 2012] Sansoni, L., Sciarrino, F., Vallone, G., Mataloni, P., Crespi, A., Ramponi, R., et Osellame, R. (2012). **Two-particle bosonic-fermionic quantum walk via integrated photonics**. *Physical Review Letters*, 108(1) :010502.

[Schoning, 1999] Schoning, T. (1999). **A probabilistic algorithm for k-SAT and constraint satisfaction problems**. Dans *40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1999*, pages 410–414.

[Sensarn et al., 2009] Sensarn, S., Yin, G. Y., et Harris, S. E. (2009). **Observation of nonlocal modulation with entangled photons**. *Physical Review Letters*, 103(16) :163601.

[Shapiro, 2010] Shapiro, J. H. (2010). **Dispersion cancellation with phase-sensitive gaussian-state light**. *Physical Review A*, 81(2) :023824.

[Shenvi et al., 2003] Shenvi, N., Kempe, J., et Whaley, K. B. (2003). **Quantum random-walk search algorithm**. *Physical Review A*, 67(5) :052307.

[Shor, 1994] Shor, P. (1994). **Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring**. Dans *, 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings*, pages 124–134.

[SingleQuantum, 2015] SingleQuantum (2015). **http ://www.singlequantum.com/**.

[Solenov et al., 2006] Solenov, D., et Fedichkin, L. (2006). **Continuous-time quantum walks on a cycle graph**. *Physical Review A*, 73(1) :012313.

[Stefanov et al., 2002] Stefanov, A., Zbinden, H., Gisin, N., et Suarez, A. (2002). **Quantum correlations with spacelike separated beam splitters in motion : Experimental test of multisimultaneity**. *Physical Review Letters*, 88(12) :120404.

[Stefanov et al., 2003] Stefanov, A., Zbinden, H., Gisin, N., et Suarez, A. (2003). **Quantum entanglement with acousto-optic modulators : Two-photon beats and bell experiments with moving beam splitters**. *Physical Review A*, 67(4) :042115.

[Steinberg et al., 1992a] Steinberg, A. M., Kwiat, P. G., et Chiao, R. Y. (1992a). **Dispersion cancellation and high-resolution time measurements in a fourth-order optical interferometer**. *Physical Review A*, 45(9) :6659–6665.

[Steinberg et al., 1992b] Steinberg, A. M., Kwiat, P. G., et Chiao, R. Y. (1992b). **Dispersion cancellation in a measurement of the single-photon propagation velocity in glass**. *Physical Review Letters*, 68(16) :2421–2424.

[Strauch, 2006] Strauch, F. W. (2006). **Connecting the discrete- and continuous-time quantum walks**. *Physical Review A*, 74(3) :030301.

[Suhara et al., 2005] Suhara, T., et Kintaka, H. (2005). **Quantum Theory Analysis of Twin-Photon Beams Generated by Parametric Fluorescence**. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 41(9) :1203–1212.

[Tanzilli, 2002] Tanzilli, S. (2002). **Optique intégrée pour les communications quantiques**. PhD thesis, Nice.

[Thorlabs, 2015] Thorlabs (2015). **http ://www.thorlabs.de**.

[Tittel et al., 2000] Tittel, W., Brendel, J., Zbinden, H., et Gisin, N. (2000). **Quantum cryptography using entangled photons in energy-time bell states**. *Physical Review Letters*, 84(20) :4737–4740.

[Torres-Company et al., 2009] Torres-Company, V., Lajunen, H., et Friberg, A. T. (2009). **'nonlocal' dispersion cancelation with classical light**. *New Journal of Physics*, 11(6) :063041.

[Torres-Company et al., 2011] Torres-Company, V., Lancis, J., Lajunen, H., et Friberg, A. T. (2011). **Coherence revivals in two-photon frequency combs**. *Physical Review A*, 84(3) :033830.

[Toshiba, 2015] Toshiba (2015). **http ://www.toshiba.eu/eu/cambridge-research-laboratory/quantum-information-group/quantum-key-distribution/toshiba-qkd-system/**.

[Venegas-Andraca, 2012] Venegas-Andraca, S. E. (2012). **Quantum walks : a comprehensive review**. *Quantum Information Processing*, 11(5) :1015–1106.

[Weisstein, 2015] Weisstein, E. W. (2015). **Wolfram MathWorld : The Web's Most Extensive Mathematics Resource**.

[Zhong et al., 2013] Zhong, T., et Wong, F. N. C. (2013). **Nonlocal cancellation of dispersion in franson interferometry**. *Physical Review A*, 88(2) :020103.

TABLE DES FIGURES

1.1 Schéma d'interférences quantiques temporelles. 5
1.2 Schéma de recouvrement de chemins temporels. 7
1.3 Schéma d'une expérience de test d'une inégalité de Bell. 13
1.4 Schéma d'une interférence temporelle à deux photons. 17
1.5 Passage de l'interférence temporelle à deux photons à une interférence à un photon. 18
1.6 Schémas de compensation de dispersion de Franson ou de Steinberg. . . . 20
1.7 Schéma d'une compensation non-locale de dispersion basée sur un interféromètre non-local. 22
1.8 Schéma de modulation non-locale de Harris. 23

2.1 Schéma interférence à un photon en fréquence. 26
2.2 Schéma d'un modulateur de phase en coupe X. 28
2.3 Action du modulateur sur une fréquence optique. 29
2.4 Spectre en intensité en sortie de modulateur. 29
2.5 Représentation des sauts de fréquence dans le modulateur. 33
2.6 Condition de détection d'états en fréquence. 34
2.7 Création de chemins superposés par deux modulateurs de phase. 35
2.8 Opérateur de filtration. 40
2.9 Association de la mesure à un *bin*. 43
2.10 Schéma de l'interférence à un photon en fréquence. 44
2.11 Représentation de l'écart de fréquence entre les filtres. 47
2.12 Représentation des premiers ordres d'interférence à un photon, avec $a = b = 2$. 48
2.13 Équivalence entre un schéma à deux photons et un schéma à un photon. . 49
2.14 Schéma d'interférence à deux photons avec propagation. 65
2.15 Représentation des "chemins fréquentiels" de l'interférence à deux photons dans l'espace des fréquences. 65
2.16 Interférence à deux photons avec propagation et filtres monochromatiques . 69
2.17 Simulation de la figure d'interférence en fonction du déphasage RF et de la distance de propagation des photons, pour des filtres infiniment fins. . . . 69

2.18 Interférence à deux photons avec propagation. 71
2.19 Simulation de la figure d'interférence en fonction de la phase et de la propagation. 72

3.1 Schéma de la source de photons jumeaux. 78
3.2 Présentation de la diode laser de pompe. 79
3.3 Schéma de la mesure de battement RF entre la diode et le laser de référence. 80
3.4 Mesure de battement RF entre la diode et le Laser de référence. 81
3.5 Schéma de caractérisation de l'accord de phase du PPLN en SHG. 81
3.6 Caractérisation du maximum de conversion du PPLN en SHG. 82
3.7 Schéma de caractérisation de l'évolution du nombre de photons convertis et du nombre de coïncidences en fonction de la température du PPLN. . . . 83
3.8 Évolution des coïncidences en fonction de la température du PPLN. 83
3.9 Spectre de fluorescence paramétrique mesuré à l'OSA. 84
3.10 Schéma du dispositif de contrôle de l'onde RF d'un modulateur. 86
3.11 Photographie du dispositif de contrôle RF d'Alice. 87
3.12 Caractérisation par battement RF du déphasage en fonction des tensions I & Q pour les voies Alice et Bob. 89
3.13 Schéma de caractérisation de la phase RF par mesure de battement. . . . 90
3.14 Caractérisation des variations d'amplitude avec un déphasage de 2π et une variation de la tension d'atténuation pour les voies Alice et Bob. 91
3.15 Caractérisation du déphasage en fonction de la tension d'atténuation pour les voies Alice et Bob. 92
3.16 Spectres des filtres et de la variation de leur fréquence centrale en fonction de la tension de consigne. 93
3.17 Schéma de caractérisation de la stabilité relative des filtres. 93
3.18 Variation du taux de recouvrement en fonction de la position relative des filtres et de la dégénérescence. 94
3.19 Influence de la stabilité des filtres par rapport à la dégénérescence de la source et mesure de leur stabilité absolue en température. 95
3.20 Schéma de caractérisation de la stabilité du filtre A par rapport à un laser de référence. 95
3.21 Schéma de mesure des coïncidences en déclenchement externe des compteurs. 98
3.22 Pic de coïncidences en régime déclenché, sans filtres. 99
3.23 Distribution du nombre de coïncidences par *bin*. 100
3.24 Evolution du rapport signal sur bruit en fonction de la puissance de pompe. 102
3.25 Schéma de mesure de la stabilité des filtres par rapport à la source. 103

3.26 Variations du rapport signal sur bruit en fonction de la température sans calibration. 105

3.27 Variations du rapport signal sur bruit en fonction de la température avec calibration. 106

3.28 Schéma de mesure de la stabilité des filtres par rapport à la source. 108

3.29 Déphasage de la figure d'interférence classique en fonction de la température pour 30 km. 108

3.30 Schéma expérimental de l'interférence à deux photons. 110

3.31 Photographie du dispositif expérimental. 110

3.32 Interférence à deux photons. 111

3.33 Schéma du fonctionnement du WS4000s donné dans le manuel. 113

3.34 Spectre en transmission du WS4000s pour différentes dispersions. 113

3.35 Spectre en phase appliqué au WS4000s en fonction de la distance. 113

3.36 Mesures du spectre en amplitude du WS4000s suivant la phase et l'amplitude appliquée. 114

3.37 Délai de groupe et pertes du MCDF en fonction de la longueur d'onde, donnés par le manuel. 115

3.38 Mesures du spectre en amplitude du MCDF. 115

3.39 Schéma expérimental de l'interférence à deux photons pour $L_0 = 2$ km. . . 116

3.40 Interférence à deux photons pour 2 km de co-propagation des photons. . . 117

3.41 Schéma expérimental de l'interférence à deux photons pour $L_A = L_B = 2$ km.117

3.42 Interférence à deux photons pour 2 km de propagation séparée des photons.118

3.43 Schéma expérimental de l'interférence à deux photons pour $L_0 = 30$ km. . . 119

3.44 Interférence à deux photons pour 30 km de co-propagation des photons. . 119

4.1 Schéma d'une planche de Galton. 122

4.2 Comparaison des distributions de probabilité après 100 pas, pour une marche aléatoire quantique discrète et une marche aléatoire classique. . . 126

4.3 Schéma de marche aléatoire quantique à l'aide d'un modulateur reboulclé. 129

4.4 Cas particuliers d'évolution d'une marche aléatoire. 131

4.5 Comparaison entre une marche quantique et une marche classique. 132

4.6 Comparaison des distributions de probabilité après 100 pas, pour une marche aléatoire quantique en fréquence et son équivalent classique. . . . 133

4.7 Comparaison de la vitesse de propagation dans l'espace des fréquence pour une marche aléatoire quantique en fréquence et son équivalent classique. 134

4.8 Évolution d'une marche quantique en fréquence lorsque la phase accumulée sur un tour est proche de 0. 136

4.9 Évolution d'une marche quantique en fréquence lorsqu'on tient compte de la dispersion et $\phi_{\mathrm{L}} = 0$. 138

4.10 Influence du déphasage linéaire sur la marche aléatoire, lorsque la dispersion n'est pas négligeable. 139

4.11 Propagation de la marche aléatoire en fréquence pour un état d'entrée superposé sur 3 *bins*. 141

A.1 Schéma d'une lame séparatrice 175

A.2 Représentation des événements correspondant à l'absorption du photon 1 ou 2. 181

LISTE DES TABLES

3.1 Caractéristiques de la diode de pompe 80
3.2 Caractéristiques du PPLN 85
3.3 Caractéristiques des Modulateurs 85
3.4 Caractéristiques des tensions de contrôle 88
3.5 Caractéristiques des filtres 96
3.6 Caractéristiques des compteurs Linxéa 97
3.7 Paramètre de l'expérience d'interférence 112

I

ANNEXES

A

ELÉMENTS D'OPTIQUE QUANTIQUE FIBRÉE

A.1/ NOTATIONS

A.1.1/ ETATS DE FOCK CONTINUS

Nos expériences ne faisant intervenir qu'une seule polarisation du champ et uniquement des propagations dans des fibres mono-modes, nous utiliserons une notation faisant intervenir un espace de Fock continu dont seul des modes de fréquence apparaissent. Dans la plupart des cas nous utiliserons des états de Fock continus à un photon et nous noterons $f(\omega)|\omega\rangle$ où l'état $|\omega\rangle$ correspond au photon dans le mode ω. La fonction f est l'amplitude spectrale de probabilité du photon, on supposera en général qu'elle est continue et bornée, que sa moyenne vaut ω_0 et que son écart type $\Delta\omega_s$ est petit devant cette dernière ($\omega_0 >> \Delta\omega_s$). On suppose de plus que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, |f(\omega)|^2 = 1$. L'action de l'opérateur d'annihilation associé à une fréquence ω' sur un tel état est notée :

$$\hat{a}(\omega')|\omega\rangle = \delta(\omega - \omega')|vac\rangle. \tag{A.1}$$

Dans la plupart des cas ces résultats seront suffisants, mais l'état émis par notre source est une superposition d'états de Fock continus à $2k$ photons, $k \in \mathbb{N}$. Nous allons alors décrire les propriétés d'un état de Fock continu à n photons. Comme chacun des photons peut se trouver dans une infinité de modes, il est compliqué d'utiliser la notation des états de Fock discrets consistant à représenter le vecteur état en écrivant le nombre de photons dans chaque mode. Il est plus simple d'écrire explicitement le mode de chaque photon dans le vecteur état, ce qui implique d'avoir potentiellement des redondances. On écrit $|\omega,\omega\rangle$ un vecteur état à 2 photons dans le même mode ω. On utilisera alors une version un peu différente de l'action des opérateurs de création et d'annihilation que celles habituellement utilisées lorsqu'ils agissent sur un état à n photons $|\phi_n\rangle = |\omega_1, \cdots, \omega_n\rangle$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\omega_k)|\omega_1, \cdots, \omega_n\rangle &= \sqrt{n+1}|\omega_k, \omega_1, \cdots, \omega_n\rangle \\ \hat{a}(\omega_k)|\omega_1, \cdots, \omega_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \delta(\omega_k - \omega_j)|\omega_1, \cdots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \cdots, \omega_n\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{A.2}$$

Et les relations conjuguées hermitiques s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned}\langle\omega_n,\cdots,\omega_1|\hat{a}(\omega_k) =&\langle\omega_n,\cdots,\omega_1,\omega_k|\sqrt{n+1}\\ \langle\omega_n,\cdots,\omega_1|\hat{a}^\dagger(\omega_k) =&\langle\omega_n,\cdots,\omega_{j+1},\omega_{j-1},\cdots,\omega_1|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\delta(\omega_k-\omega_j).\end{aligned}\right\} \tag{A.3}$$

Cette nouvelle notation implique que le produit scalaire entre deux vecteurs ne vaut plus forcément 0 où 1. Pour vérifier cela, on prend l'exemple de deux vecteurs état $|\omega_1,\cdots,\omega_n\rangle$ et $|\omega'_1,\cdots,\omega'_n\rangle$ comprenant le même nombre n de photons, et on regarde ce que vaut le produit scalaire entre les deux en utilisant tout d'abord n fois la relation (A.3) associée à l'opérateur d'annihilation sur le "bra" :

$$\langle\omega'_n,\cdots,\omega'_1|\omega_1,\cdots,\omega_n\rangle =\langle vac|\frac{1}{\sqrt{n!}}\prod_{k=1}^{n}\hat{a}(\omega'_k)|\omega_1,\cdots,\omega_n\rangle, \tag{A.4}$$

puis on fait agir sur le "ket" les opérateurs d'annihilation ainsi extraits. Cette dernière opération est plus compliquée car on doit tester le vecteur état élément par élément. On trouve :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\hat{a}(\omega'_k)|\omega_1,\cdots,\omega_n\rangle =&\frac{1}{\sqrt{n}}\prod_{k=1}^{n-1}\hat{a}(\omega'_k)\sum_{j_1\in\{1,\cdots,n\}}\delta(\omega'_n-\omega_{j_1})|\phi_n\backslash\{\omega_{j_1}\}\rangle\\ =&\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\prod_{k=1}^{n-2}\hat{a}(\omega'_k)\sum_{j_1\in\{1,\cdots,n\}}\delta(\omega'_n-\omega_{j_1})\sum_{j_2\in\{1,\cdots,n\}\backslash\{j_1\}}\delta(\omega'_{n-1}-\omega_{j_2})|\phi_n\backslash\{\omega_{j_1},\omega_{j_2}\}\rangle\\ =&\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{j_1\in\{1,\cdots,n\}}\delta(\omega'_n-\omega_{j_1})\cdots\sum_{j_n\in\{1,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_{n-1}\}}\delta(\omega'_1-\omega_{j_n})|vac\rangle,\end{aligned} \tag{A.5}$$

où nous avons noté $\{1,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_{n-1}\}$ l'ensemble des éléments de 1 à n privé des éléments $j_1\cdots j_{n-1}$. La suite de sommes de la dernière ligne fait intervenir au total $n!$ termes, correspondant à l'ensemble des permutations entre n éléments.

On trouve au final :

$$\langle\omega'_n,\cdots,\omega'_1|\omega_1,\cdots,\omega_n\rangle =\frac{1}{n!}\sum_{j_1\in\{1,\cdots,n\}}\delta(\omega'_n-\omega_{j_1})\cdots\sum_{j_n\in\{1,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_{n-1}\}}\delta(\omega'_1-\omega_{j_n}). \tag{A.6}$$

Dans le cas où à un élément d'un vecteur correspond un et un seul élément de l'autre vecteur, le produit scalaire vaut $1/n!$. Dans le cas où chacun des éléments des deux vecteurs peut prendre un continuum de valeurs dont l'amplitude de probabilité s'écrit $f(\omega)$, avec $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,|f(\omega)|^2=1$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega'_1 f(\omega'_1)^*\cdots\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega'_n f(\omega'_n)^*\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1)\cdots\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_n f(\omega_n)\langle\omega'_n,\cdots,\omega'_1|\omega_1,\cdots,\omega_n\rangle\\ &\quad=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1\,|f(\omega_1)|^2\cdots\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_n\,|f(\omega_n)|^2\\ &\quad=1.\end{aligned} \tag{A.7}$$

Pour trouver ce résultat, lors des permutations, on associe à chacun des éléments de $\{\omega'_1 \cdots \omega'_n\}$ et son intégrale correspondante, un des éléments de $\{\omega_1 \cdots \omega_n\}$. On aura alors une somme de $n!$ termes, dans lesquels chaque intégrale du "bra" est associée à une intégrale du "ket" par une relation $\delta(\omega'_k - \omega_k)$. Ceci permettra de retirer n intégrales pour chaque terme de la somme, puis d'utiliser les mêmes variables muettes pour chaque somme afin de regrouper tous les termes.

A.2/ OPÉRATEUR CHAMP DANS UN GUIDE D'ONDE

Nous voulons décrire l'opérateur champ correspondant à une propagation dans les fibres-optiques mono-modes. Pour cela, nous allons considérer que la fibre est mono-mode pour toutes les fréquences mises en jeu. La relation exposée se limitera donc a une plage de fréquence dont l'étendue est très inférieure à la fréquence centrale mise en jeu $\Delta\omega/\omega_0 << 1$. Dans les expériences décrites, la bande passante de notre source sera au maximum de $\Delta\omega$ =7 THz et la fréquence centrale ω_0=193.5 THz, ce qui justifie l'hypothèse. Tant que les courbures ne sont pas trop grandes (petit rayon de courbure), on peut modéliser la fibre comme un guide d'onde cylindrique suivant l'axe z. Nous pouvons alors décomposer le champ en ondes planes monochromatiques se propageant suivant l'axe z. Soit $\hat{E}(r,t)$ le champ couplé dans la fibre à la position $z = 0$ à l'instant $t = 0$. D'après [Blow et al., 1990] ,on peut écrire ce champ :

$$\hat{E}(r,t) = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)v_g(k)}{4\pi\epsilon_0 n(k)c_0}} A(x,y,k)\left[\hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} - h.c.\right]. \tag{A.8}$$

à une position z et un temps t, où $r = (x,y,z)$ et où k et ω sont reliés par la relation de dispersion $\omega c = n(\omega)k$.

Dans cette équation nous avons utilisé les notations suivantes :

- $A(x,y)$ est l'amplitude transverse du champ dans la fibre.
- On note $n(k)$ l'indice optique,
- $\hat{a}(k)$ et son conjugué hermitique $\hat{a}^\dagger(k)$ sont les opérateur d'annihilation et de création d'un photon dans le mode k,
- $v_g(k)$ est la vitesse de groupe. Elle vérifie la relation :

$$v_g(k) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}. \tag{A.9}$$

Dans le cadre où nous avons supposé que les champs couplés dans la fibre vérifient $\Delta\omega/\omega_0 << 1$, nous pouvons considérer que les termes qui dépendent de k et qui ne sont pas impliqués dans une phase sont constants. Ainsi $n(k) \approx n(k_0) = n_0$, $\omega(k) \approx \omega(k_0) = \omega_0$, $v_g(k) \approx v_g(k_0) = v_g$ et $A(x,y,k) \approx A(x,y)$. On peut réécrire l'opérateur champ couplé dans la fibre (A.8) :

$$\hat{E}(r,t) = \mathrm{i}A(x,y)\sqrt{\frac{\hbar\omega_0 v_g}{4\pi\epsilon_0 n_0 c_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \left[\hat{a}(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} - h.c.\right]. \tag{A.10}$$

Dans cette dernière équation, on a écrit l'opérateur $\hat{a}(k,t) = \hat{a}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. La transformée de Fourier de ce dernier opérateur peut s'écrire :

$$\hat{a}(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \hat{a}(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \hat{a}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}. \tag{A.11}$$

Les opérateurs champs correspondant à la création et l'annihilation de photons s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} \hat{E}^{+}(r,t) =& \mathrm{i}E_0 A(x,y)\hat{a}(z,t), \\ \hat{E}^{-}(r,t) =& -\mathrm{i}E_0 A(x,y)\hat{a}^{\dagger}(z,t). \end{aligned}\right\} \tag{A.12}$$

On peut regarder l'évolution de $\hat{a}(z,t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}(z,t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\omega(k)\hat{a}(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}. \tag{A.13}$$

En utilisant un développement limité de $\omega(k)$ au second ordre on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}(z,t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \left[\omega^{(0)} + \omega^{(1)}(k-k_0) + \frac{\omega^{(2)}}{2}(k-k_0)^2\right] \hat{a}(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}, \tag{A.14}$$

où $\omega^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n\omega(k)}{\mathrm{d}k^n}|_{k=k_0}$.

On peut évaluer ces termes en calculant les différentes dérivées de ω par rapport à k :

$$\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k} = v_g(k) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{1}{\beta_1(\omega)}, \tag{A.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\beta_1(\omega)}\right] = \frac{-\frac{\mathrm{d}\beta_1(\omega)}{\mathrm{d}\omega}}{\beta_1(\omega)^2} = \frac{-\beta_2(\omega)}{\beta_1(\omega)^2}, \tag{A.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\omega(k)}{\mathrm{d}k^2} = \frac{\mathrm{d}v_g(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\beta_1(\omega)}\right] = \frac{-\beta_2(\omega)}{\beta_1(\omega)^3}. \tag{A.17}$$

On a donc $\omega^{(1)}(k_0) = 1/\beta_1(\omega_0)$ et $\omega^{(2)} = -\beta_2(\omega_0)/\beta_1(\omega_0)^3$.

On pose alors un opérateur dont l'oscillation est centrée sur le vecteur d'onde moyen :

$$\hat{c}(z,t) = \hat{a}(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \hat{a}(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0 t + (k-k_0)z]}. \tag{A.18}$$

On trouve :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}(z,t)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\left[\omega^{(0)}\hat{c}(z,t) - \mathrm{i}\omega^{(1)}\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z} - \frac{\omega^{(2)}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)}. \tag{A.19}$$

L'opérateur $\hat{c}(z,t)$ vérifie :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\hat{c}^\dagger(z,t)\hat{c}(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k',t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)z}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k',t)\delta(k'-k)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t),\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\hat{c}(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\frac{\mathrm{d}\hat{a}^\dagger(k,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k_0)z}}{\mathrm{d}z}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'\hat{a}(k',t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k_0)z}\\ &= -\mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'(k-k_0)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k',t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)z}\\ &= -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'(k-k_0)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k',t)\delta(k'-k)\\ &= -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k(k-k_0)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t),\end{aligned} \tag{A.21}$$

et de même pour les dérivées successives.

On peut aussi noter que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\hat{c}(z,t) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\hat{c}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z} \tag{A.22}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z^2}\hat{c}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\hat{c}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z}. \tag{A.23}$$

Le Hamiltonien linéaire du champ couplé dans la fibre s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\hbar\omega(k)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)\\ &= \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\left[\omega^{(0)}\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t) + \omega^{(1)}(k-k_0)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t) + \frac{\omega^{(2)}}{2}(k-k_0)^2\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)\right]\\ &= \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\left[\omega^{(0)}\hat{c}^\dagger(z,t)\hat{c}(z,t) + \mathrm{i}\omega^{(1)}\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\hat{c}(z,t) - \frac{\omega^{(2)}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z^2}\hat{c}(z,t)\right].\end{aligned} \tag{A.24}$$

À noter que la deuxième ligne dans la version précédente n'était pas un détail de calcul, mais simplement une autre forme que l'on obtient à l'aide de (A.11) quand le Hamiltonien ne dépend pas du temps, et donc que $\hat{a}(k,t) = \hat{a}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. C'est a priori le cas pour une interaction linéaire. On obtient directement cette version en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \hat{a}^\dagger(z,t)\hat{a}(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\hat{a}^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'\hat{a}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'z-\omega t)}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t),\end{aligned} \tag{A.25}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}\hat{a}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}t}\hat{a}(z,t) &= \mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'\omega(k)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k',t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)z}\\ &= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\omega(k)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t),\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\hbar\omega(k)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)\\ &= \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\left[\omega^{(0)}\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)+\omega^{(1)}(k-k_0)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)+\frac{\omega^{(2)}}{2}(k-k_0)^2\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)\right]\\ &= \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\left[\omega^{(0)}\hat{c}^\dagger(z,t)\hat{c}(z,t)+\mathrm{i}\omega^{(1)}\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\hat{c}(z,t)-\frac{\omega^{(2)}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z^2}\hat{c}(z,t)\right],\end{aligned} \tag{A.27}$$

ou sous d'autres formes :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\hbar\omega(k)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)\\ &= -\mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\hat{a}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}\hat{a}(z,t)}{\mathrm{d}t}\\ &= \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\left[\omega^{(0)}\hat{c}^\dagger(z,t)\hat{c}(z,t)-\mathrm{i}\omega^{(1)}\hat{c}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z}-\frac{\omega^{(2)}}{2}\hat{c}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z^2}\right],\end{aligned} \tag{A.28}$$

dont une symétrique :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\hbar\omega(k)\hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t)\\ &= \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\left[\frac{\mathrm{d}\hat{a}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}t}\hat{a}(z,t)-\hat{a}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}\hat{a}(z,t)}{\mathrm{d}t}\right]\\ &= \frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\left\{2\omega^{(0)}\hat{c}^\dagger(z,t)\hat{c}(z,t)+\mathrm{i}\omega^{(1)}\left[\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\hat{c}(z,t)-\hat{c}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z}\right]+\omega^{(2)}\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z}\right\}.\end{aligned} \tag{A.29}$$

On écrit $\hat{\mathcal{H}}_0(t)$ le Hamiltonien du champ libre, que l'on exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_0(t) &= \hbar\omega^{(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \hat{c}^\dagger(z,t)\hat{c}(z,t) \\ &= \hbar\omega^{(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \hat{a}^\dagger(k,t)\hat{a}(k,t).\end{aligned} \tag{A.30}$$

Si on écrit l'évolution de l'opérateur $\hat{c}(z,t)$ dans la représentation de Heisenberg, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{c}(z,t), \hat{\mathcal{H}}(t)\right] + \frac{\partial \hat{c}(z,t)}{\partial t} \\ &= -\mathrm{i}\left[\omega^{(0)}\hat{c}(z,t) - \mathrm{i}\omega^{(1)}\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z} - \frac{\omega^{(2)}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z^2}\right] + \mathrm{i}\omega^{(0)}\hat{c}(z,t) \\ &= -\omega^{(1)}\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}\frac{\omega^{(2)}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z^2},\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\beta_1}\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}\frac{\beta_2}{2\beta_1^3}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z^2}. \tag{A.32}$$

On peut comparer les termes apparaissant devant la dérivée première et la dérivée seconde en fonction de z, $\beta_1 \approx 5\times10^{-9}\ \mathrm{m}^{-1}\cdot\ \mathrm{s}$ et $\beta_2 \approx 20\times10^{-27}\mathrm{m}^{-1}\cdot\ \mathrm{s}^2$. Si on pose que l'écart entre les deux modes couplés dans la fibre les plus éloignés vaut $\Delta k \approx \beta_1\Delta\omega$, alors :

$$\frac{\beta_2}{4\beta_1^2}\Delta k << 1 \iff \Delta\omega << 10^{18}. \tag{A.33}$$

Ce qui est toujours vérifié aux pulsations optiques. Les variations temporelles sont donc essentiellement dues aux variations linéaires en fonction de la propagation ; on peut donc voir l'équation de propagation comme l'évolution spatiale d'un paquet d'ondes temporel ou l'évolution temporelle d'un paquet d'ondes spatial, on écrit cette dernière version :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z} = -\beta_1\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\frac{\beta_2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}t^2}. \tag{A.34}$$

On peut alors construire un analogue spatial du Hamiltonien et son équation du mouvement en effectuant les opérations inverses. On pose :

$$\hat{c}(z,t) = \hat{a}(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\hat{a}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\omega-\omega_0)t-(k-k_0)z]}, \tag{A.35}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\hat{c}^\dagger(z,t)\hat{c}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\hat{a}^\dagger(z,t)\hat{a}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\hat{a}^\dagger(\omega,z)\hat{a}(\omega,z), \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(z) =&\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\beta(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega,z)\hat{a}(\omega,z)\\ =&\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \left\{\beta_0+\beta_1(\omega-\omega_0)+\frac{\beta_2}{2}(\omega-\omega_0)^2\right\}\hat{a}^\dagger(\omega,z)\hat{a}(\omega,z)\\ =&\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left[\frac{\mathrm{d}\hat{a}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}z}\hat{a}(z,t)-\hat{a}^\dagger(z,t)\frac{\mathrm{d}\hat{a}(z,t)}{\mathrm{d}z}\right]\\ =&\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left\{\beta_0\hat{c}^\dagger(z,t)-\mathrm{i}\beta_1\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\beta_2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}t^2}\right\}\hat{c}(z,t),\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{c}(z,t),\hat{\mathcal{U}}(z)\right] &= \left[\hat{c}(z,t),\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left\{\beta_0\hat{c}^\dagger(z,t)-\mathrm{i}\beta_1\frac{\mathrm{d}\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\beta_2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}^\dagger(z,t)}{\mathrm{d}t^2}\right\}\hat{c}(z,t)\right]\\ &= \mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left[-\mathrm{i}\beta_0\hat{c}(z,t)-\beta_1\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\frac{\beta_2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}t^2}\right].\end{aligned} \tag{A.38}$$

On obtient ainsi l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{c}(z,t)}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{c}(z,t),\hat{\mathcal{U}}(z)\right]-\frac{\partial\hat{c}(z,t)}{\partial z}. \tag{A.39}$$

On obtient $\hat{\mathcal{U}}(z)$ qui régit l'évolution spatiale de la même manière que le Hamiltonien, simplement en remplaçant l'intégrale spatiale suivant la dimension z par une intégrale temporelle. Nous avons ici représenté uniquement la partie linéaire, qui répond à l'équation :

$$\hat{\mathcal{U}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\epsilon_0\hat{E}(r,t)\hat{D}(r,t)+\frac{1}{\mu_0}\hat{B}(r,t)\hat{B}(r,t), \tag{A.40}$$

où $\hat{D}(r,t)=\epsilon_r\hat{E}(r,t)$ est l'opérateur déplacement du champ électrique, et $\hat{B}(r,t)$ est l'opérateur champ magnétique. Lors d'interactions non linéaires dont les vecteurs d'ondes sont seulement dirigés suivant z, on obtiendra un opérateur correspondant aux évolutions spatiales en remplaçant l'intégrale sur z par une intégrale sur t dans l'expression du Hamiltonien non linéaire. L'équation d'évolution spatiale est adaptée à la description des opérateurs de création et d'annihilation dans l'espace des impulsions. On veut alors exprimer l'opérateur champ électrique en fonction du continuum de modes de fréquence. On limite l'étude aux ondes se propageant vers les z positifs ($k \geqslant 0$), et on opère le changement de variable :

$$\left.\begin{aligned} k &\to \frac{\omega n(\omega)}{c_0}=\beta(\omega),\\ \mathrm{d}k &\to \frac{\mathrm{d}\omega}{v_g(\omega),}\\ \hat{a}(k) &\to \sqrt{v_g(\omega)}\hat{a}(\omega).\end{aligned}\right\} \tag{A.41}$$

La dernière relation peut être trouvée en écrivant la relation de commutation entre les opérateurs de création et d'annihilation, $\hat{a}(k)\ \hat{a}^{\dagger}(k')$. En effet le changement de variable s'obtient grâce à la relation [Weisstein, 2015] :

$$\delta\left[g(x-x_0)\right] = \frac{\delta(x-x_0)}{\frac{\mathrm{d}|g(x_0))|}{\mathrm{d}x}}, \tag{A.42}$$

et le commutateur devient :

$$\left[\hat{a}(k), \hat{a}^{\dagger}(k')\right] = \delta(k-k') = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}\delta(\omega-\omega') = v_g(\omega')\delta(\omega-\omega') = v_g(\omega)\left[\hat{a}(\omega), \hat{a}^{\dagger}(\omega')\right]. \tag{A.43}$$

On en déduit la relation recherchée, $\hat{a}(k) = \sqrt{v_g(\omega)}\hat{a}(\omega)$.

On substitue alors les relations (A.41) dans (A.8) et on trouve :

$$\hat{E}(r,t) = \mathrm{i}A(x,y)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\left[\hat{a}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)z-\omega t]} - h.c.\right]. \tag{A.44}$$

où $E_0(\omega) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 n(\omega)c_0}}$. On décompose l'opérateur champ en deux opérateurs : $\hat{E}(r,t) = \hat{E}^{-}(r,t)+\hat{E}^{+}(r,t)$, où le premier dépend des opérateurs de création et l'autre des opérateurs d'annihilation. Ils vérifient $\hat{E}^{-}(r,t)^{\dagger} = \hat{E}^{+}(r,t)$, et on peut les écrire explicitement :

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}^{+}(r,t) =& \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)A(x,y)\hat{a}(\omega,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ \hat{E}^{-}(r,t) =& -\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)A(x,y)\hat{a}^{\dagger}(\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\end{aligned}\right\} \tag{A.45}$$

où on a adopté l'écriture $\hat{a}(\omega,z) = \hat{a}(\omega)\exp(\mathrm{i}\beta(\omega)z)$. Les opérateurs champ magnétique ainsi décomposés s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned}\hat{B}^{+}(r,t) =& -\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\frac{E_0(\omega)n(\omega)}{c_0}A(x,y)\hat{a}(\omega,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ \hat{B}^{-}(r,t) =& \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\frac{E_0(\omega)n(\omega)}{c_0}A(x,y)\hat{a}^{\dagger}(\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{A.46}$$

Les opérateurs champ de déplacement électrique s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned}\hat{D}^{+}(r,t) =& \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)n(\omega)^2\hat{a}(\omega,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ \hat{D}^{-}(r,t) =& -\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)n(\omega)^2A(x,y)\hat{a}^{\dagger}(\omega,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{A.47}$$

On retrouve bien :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \epsilon_0 \hat{E}^+(r,t)\hat{D}^-(r,t) + \frac{1}{\mu_0}\hat{B}^+(r,t)\hat{B}^-(r,t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\omega' \left[\epsilon_0 E_0(\omega)E_0(\omega')n(\omega)^2 + \epsilon_0 E_0(\omega')E_0(\omega)n(\omega')n(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega',z)\hat{a}(\omega,z)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'-\omega)t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \hbar\beta(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega,z)\hat{a}(\omega,z). \end{aligned} \tag{A.48}$$

Dans cette dernière équation, on a pu étendre les bornes d'intégration à l'infini car on ne décrira que des photons oscillant sur une plage de fréquence $\Delta\omega << \omega_0$ avec ω_0 la pulsation moyenne.

On peut aussi écrire les relations liant les opérateurs d'annihilation et de création d'entrée et de sortie d'une fibre de longueur L. On effectue pour cela un développement en séries de Taylor et $\beta(\omega)$ et on considère que $t_L = \beta_1 L$ correspond au temps de propagation du photon dans la fibre dans la fibre :

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_{\mathrm{out}}(\omega, t+t_L) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\sum_{k>1}\frac{\beta_k(\omega-\omega_0)^k}{k!}L+\beta_0 L-\beta_1\omega_0 L\right]}\hat{a}_{\mathrm{in}}(\omega,t), \\ \hat{a}^\dagger_{\mathrm{out}}(\omega, t+t_L) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[\sum_{k>1}\frac{\beta_k(\omega-\omega_0)^k}{k!}L+\beta_0 L-\beta_1\omega_0 L\right]}\hat{a}^\dagger_{\mathrm{in}}(\omega,t).\end{aligned}\right\} \tag{A.49}$$

A.3/ DESCRIPTION QUANTIQUE D'UNE LAME SÉPARATRICE

La plupart de nos composants linéaires (qui ne créent pas de photons), ainsi que les pertes, seront modélisés par des interactions avec des lames séparatrices. Nous allons donc rappeler des résultats bien connus sur celles-ci.

La lame séparatrice se modélise de manière classique par la transmission d'une partie de l'amplitude champ et la réflexion de l'autre partie. Cet échange est caractérisé par les coefficients de Fresnel qui dépendent en général de beaucoup des caractéristiques du champ incident : fréquence, vecteur d'onde, polarisation. Nous considérons cependant que cet élément optique est linéaire, et nous pourrons traiter séparément les différents modes du champ. On considèrera donc l'interaction de deux champs monochromatiques oscillant à la même fréquence et de même polarisation, arrivant de chaque coté de la lame séparatrice, comme décrit sur le schéma Fig.A.1.

Leur incidence est telle que la réflexion de l'un et la transmission de l'autre sont dans le même mode, comme représenté sur la figure Fig.A.1. Les deux cotés de la lame ne possèdent pas forcément le même indice optique ; on appelle respectivement r et t les coefficients de réflexion et de transmission lorsque l'onde arrive de gauche et respectivement r' et t' lorsqu'elle arrive de droite. La relation de conservation de l'énergie et les relations de Stokes donnent [Mandel et al., 1995] page 640 :

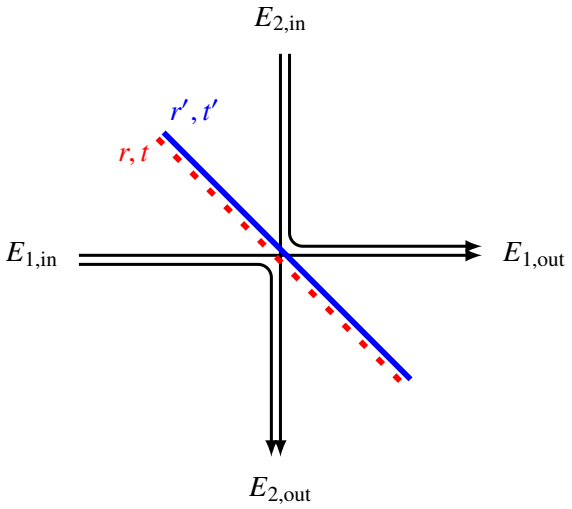


FIGURE A.1 – Schéma d'une lame séparatrice

$$\left.\begin{aligned} |r'| &= |r|, \\ |t'| &= |t|, \\ |r|^2 + |t|^2 &= 1, \\ r^* t' + r' t^* &= 0, \\ r^* t + r' t'^* &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{A.50}$$

D'un point de vue quantique, on peut remplacer les amplitudes complexes de champs d'entrée par les opérateurs d'annihilation $\hat{a}_{1,\mathrm{in}}, \hat{a}_{2,\mathrm{in}}, \hat{a}_{1,\mathrm{out}}, \hat{a}_{2,\mathrm{out}}$. On suppose que les opérateurs d'entrée obéissent aux relations de commutation :

$$\left.\begin{aligned} \left[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}, \hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{in}}\right] &= \left[\hat{a}_{2,\mathrm{in}}, \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}\right] = 1, \\ \left[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}, \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}\right] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{A.51}$$

On obtient alors que les opérateurs de sortie commutent :

$$\left.\begin{aligned} \left[\hat{a}_{1,\mathrm{out}}, \hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{out}}\right] &= \left[\hat{a}_{2,\mathrm{out}}, \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{out}}\right] = 1, \\ \left[\hat{a}_{1,\mathrm{out}}, \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{out}}\right] &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{A.52}$$

et vérifient les relations

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_{1,\mathrm{out}} &= r\hat{a}_{1,\mathrm{in}} + t'\hat{a}_{2,\mathrm{in}}, \\ \hat{a}_{2,\mathrm{out}} &= t\hat{a}_{1,\mathrm{in}} + r'\hat{a}_{2,\mathrm{in}}. \end{aligned}\right\} \tag{A.53}$$

Ces relations sont valables pour tous les modes. Nous serons cependant confrontés à la présence de champs oscillants sur un continuum de fréquences, mais dont la polarisation et la direction du vecteur d'onde est identique. On écrira alors plus généralement :

$$\left.\begin{aligned}
\left|r'(\omega)\right| &= |r(\omega)|\,, \\
\left|t'(\omega)\right| &= |t(\omega)|\,, \\
|r(\omega)|^2 + |t(\omega)|^2 &= 1, \\
r^*(\omega)t'(\omega) + r'(\omega)t^*(\omega) &= 0, \\
r^*(\omega)t(\omega) + r'(\omega)t'^*(\omega) &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{A.54}$$

les opérateurs de création et d'annihilation respectivement :

$$\left.\begin{aligned}
\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega) &= r\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega) + t'\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega), \\
\hat{a}_{2,\mathrm{out}}(\omega) &= t\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega) + r'\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega),
\end{aligned}\right\} \tag{A.55}$$

et

$$\left.\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{out}}(\omega) &= r^*\hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{in}}(\omega) + t'^*\hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}(\omega), \\
\hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{out}}(\omega) &= t^*\hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{in}}(\omega) + r'^*\hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}(\omega),
\end{aligned}\right\} \tag{A.56}$$

et les commutateurs :

$$\left.\begin{aligned}
\left[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{in}}(\omega')\right] &= \left[\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}(\omega')\right] = \delta_{\omega,\omega'}, \\
\left[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{in}}(\omega')\right] &= 0, \\
\left[\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega), \hat{a}^\dagger_{1,\mathrm{out}}(\omega')\right] &= \left[\hat{a}_{2,\mathrm{out}}(\omega), \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{out}}(\omega')\right] = \delta_{\omega,\omega'}, \\
\left[\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega), \hat{a}^\dagger_{2,\mathrm{out}}(\omega')\right] &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{A.57}$$

A.3.1/ FILTRES DE BRAGG

On peut assimiler les filtres de Bragg à une lame séparatrice de faisceaux dont les coefficients de réflexion et de transmission dépendent de la fréquence. Les réseaux de Bragg étant inscrits dans une fibre mono-mode, nous supposerons que ces coefficients ne dépendent pas de la polarisation incidente, et nous ne prendrons en compte qu'un seul vecteur d'onde dont l'incidence est perpendiculaire à la lame. La conséquence est que la partie transmise d'une onde arrivant de la gauche se propagera dans la même direction que la partie réfléchie d'une onde arrivant de droite et vice et versa.

On suppose que les coefficients sont symétriques (même milieu d'incidence à gauche et à droite) ce qui implique que :

$$\left.\begin{aligned}
R(\omega)' = R(\omega) &= |R(\omega)|\,, \\
T(\omega) = T(\omega) &= \mathrm{i}\,|T(\omega)|\,, \\
R(\omega)^2 - T(\omega)^2 &= |R(\omega)|^2 + |T(\omega)|^2 = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{A.58}$$

Ces opérateurs vérifiant les relations de commutation (A.51), on écrit les relations entre les opérateurs d'annihilation d'entrée et de sortie (A.53) :

$$\left.\begin{aligned}
\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega) &= R(\omega)\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega) + T(\omega)\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega), \\
\hat{a}_{2,\mathrm{out}}(\omega) &= T(\omega)\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega) + R(\omega)\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega).
\end{aligned}\right\} \tag{A.59}$$

Celles entre les opérateurs de création s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{out}}(\omega) &= R(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega) - T(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega),\\ \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{out}}(\omega) &= -T(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega) + R(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega).\end{aligned}\right\} \tag{A.60}$$

On peut vérifier les relations de commutation des opérateurs de sortie (A.52) :

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{out}}(\omega')\right] =& |R(\omega)|^2 \left[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega')\right] + |T(\omega)|^2 \left[\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega')\right]\\ &- R(\omega)T(\omega)[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega')] + R(\omega)T(\omega)[\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega')]\\ =& \left(|R(\omega)|^2 + |T(\omega)|^2\right)\delta_{\omega,\omega'}\\ =& \delta_{\omega,\omega'}.\end{aligned} \tag{A.61}$$

On montre de la même manière la relation :

$$[\hat{a}_{2,\mathrm{out}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{out}}(\omega')] = \delta_{\omega,\omega'}, \tag{A.62}$$

mais aussi :

$$\begin{aligned}[\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{out}}(\omega')] =& |R(\omega)|^2 [\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega')] + |T(\omega)|^2 [\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega')]\\ &- R(\omega)T(\omega)[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega')] + R(\omega)T(\omega)[\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega), \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega')]\\ =& \left[-R(\omega)T(\omega) + R(\omega)T(\omega)\right]\delta_{\omega,\omega'}\\ =& 0.\end{aligned} \tag{A.63}$$

Cette dernière relation relate qu'une mesure sur une des sorties du filtre n'affecte pas l'autre sortie.

On peut aussi écrire les opérateurs "nombre de photons" qui sont proportionnels aux opérateurs de la mesure par une photodiode :

$$\begin{aligned}\hat{n}_{1,\mathrm{out}}(\omega) =& \hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{out}}(\omega)\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega)\\ =& |R(\omega)|^2 \hat{n}_{1,\mathrm{in}}(\omega) + |T(\omega)|^2 \hat{n}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\\ &+ R(\omega)T(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega)\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega) - R(\omega)T(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega),\end{aligned} \tag{A.64}$$

$$\begin{aligned}\hat{n}_{2,\mathrm{out}}(\omega) =& \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{out}}(\omega)\hat{a}_{2,\mathrm{out}}(\omega)\\ =& |T(\omega)|^2 \hat{n}_{1,\mathrm{in}}(\omega) + |R(\omega)|^2 \hat{n}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\\ &- R(\omega)T(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega)\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega) + R(\omega)T(\omega)\hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega).\end{aligned} \tag{A.65}$$

On retrouve bien la relation de conservation de l'énergie :

$$\hat{n}_{1,\text{out}}(\omega) + \hat{n}_{2,\text{out}}(\omega) = \hat{n}_{1,\text{in}}(\omega) + \hat{n}_{2,\text{in}}(\omega). \tag{A.66}$$

Dans la représentation de Schrödinger, comme nous avons considéré le filtre comme étant un élément linéaire, on peut inverser les relations (A.59) et (A.60) pour exprimer directement l'état de sortie en fonction de l'état d'entrée. L'inverse de ces relations donne :

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_{1,\text{in}}(\omega) &= R(\omega)\hat{a}_{1,\text{out}}(\omega) - T(\omega)\hat{a}_{2,\text{out}}(\omega), \\ \hat{a}_{2,\text{in}}(\omega) &= -T(\omega)\hat{a}_{1,\text{out}}(\omega) + R(\omega)\hat{a}_{2,\text{out}}(\omega), \end{aligned}\right\} \tag{A.67}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}^\dagger_{1,\text{in}}(\omega) &= R(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega) + T(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega), \\ \hat{a}^\dagger_{2,\text{in}}(\omega) &= T(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega) + R(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{A.68}$$

On peut alors retrouver un résultat bien connu, si sur les deux entrées nous avons l'état à un photon $|\psi\rangle_{1,\text{in}} = |\omega\rangle_1 = \hat{a}^\dagger_{1,\text{in}}(\omega)|vac\rangle_{1,\text{in}}$ et $|\psi\rangle_{2,\text{in}} = \hat{a}^\dagger_{2,\text{in}}(\omega)|vac\rangle_{2,\text{in}}$. L'état de sortie s'écrit :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{out}} &= \left[R(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega) + T(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega)\right]\left[T(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega) + R(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega)\right]|vac\rangle_{1,\text{out}}|vac\rangle_{2,\text{out}}, \\ &= \Big\{R(\omega)T(\omega)\left[\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega) + \hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega)\right] \\ &\quad + \left[|R(\omega)|^2 - |T(\omega)|^2\right]\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega)\Big\}|vac\rangle_{1,\text{out}}|vac\rangle_{2,\text{out}}. \end{aligned} \tag{A.69}$$

Dans le cas où $|R(\omega)|^2 = |T(\omega)|^2 = 1/2$, les deux photons sortent sur la même sortie (effet Hong-Ou-Mandel).

Dans nos expériences le second port du filtre, ne sert jamais à introduire un signal optique. On peut alors toujours considérer que l'état vide est présent sur ce port, $|\psi\rangle_{2,\text{in}} = |vac\rangle_2$.

Si en entrée 1 nous avons un état $|\psi\rangle_{1,\text{in}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{in}}(\omega)|vac\rangle_1$,

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |\psi\rangle_{1,\text{in}}|\psi\rangle_{2,\text{in}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{in}}(\omega)|vac\rangle_1|vac\rangle_2, \tag{A.70}$$

alors on peut écrire l'état de sortie :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{out}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)\left[R(\omega)\hat{a}^\dagger_{1,\text{out}}(\omega) + T(\omega)\hat{a}^\dagger_{2,\text{out}}(\omega)\right]|vac\rangle_{1,\text{out}}|vac\rangle_{2,\text{out}}, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)\left[R(\omega)|\omega\rangle_{1,\text{out}}|vac\rangle_{2,\text{out}} + T(\omega)|vac\rangle_{1,\text{out}}|\omega\rangle_{2,\text{out}}\right]. \end{aligned} \tag{A.71}$$

Cependant, on reste dans la présentation de Heisenberg et on associe l'action du filtre à l'opérateur champ. En utilisant les relations (A.56) et (2.20), on peut écrire directement l'opérateur champ dans le détecteur correspondant à celui issu de la sortie 1 du filtre puis parcourant la distance L_{fil} pour arriver sur le détecteur :

$$\begin{aligned}\hat{E}^{+}(\mathbf{r}_0,t) =& \mathrm{i}A(x_0,y_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)L_{\mathrm{fil}}-\omega t]}\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega)\\ \hat{E}^{+}(\mathbf{r}_0,t) =& \mathrm{i}A(x_0,y_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)L_{\mathrm{fil}}-\omega t]}\left[R(\omega)\hat{a}_{1,in}(\omega)+T(\omega)\hat{a}_{2,in}(\omega)\right].\end{aligned} \tag{A.72}$$

A.3.2/ COUPLEUR FIBRÉ ÉQUILIBRÉ 1 ENTRÉE VERS 2 SORTIES

On considère que les opérateurs que l'on vient de décrire sont associés à un opérateur "champ électrique" dont on veut décrire l'évolution dans la représentation de Heisenberg à travers un coupleur fibré mono-mode, celui-ci possède une entrée et deux sorties dont en moyenne la moitié de la puissance est dirigée vers chaque sortie. De part le couplage par fibre mono-mode nous n'étudions qu'un seul vecteur d'onde par fréquence. De plus, nous n'étudions qu'une seule polarisation, la dispersion inter-modale étant négligeable sur les distances mises en jeu. Nous considérons que les coefficients de transmission et de réflexion ne dépendent pas de la fréquence, sont symétriques suivant l'incidence du champ, et sont de même norme ($t(\omega)=t'(\omega)=\mathrm{i}r(\omega)=\mathrm{i}r'(\omega)=\mathrm{i}/\sqrt{2}$). On supposera enfin qu'il existe un second port d'entrée virtuel sur lequel l'état vide sera toujours appliqué. On réécrit les relations entre les opérateurs de création et d'annihilation en entrée et sortie de coupleur (A.55) (A.56) :

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_{1,\mathrm{out}}(\omega) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega)+\mathrm{i}\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\right],\\ \hat{a}_{2,\mathrm{out}}(\omega) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{i}\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega)+\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\right],\end{aligned}\right\} \tag{A.73}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{out}}(\omega) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega)-\mathrm{i}\hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\right],\\ \hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{out}}(\omega) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\mathrm{i}\hat{a}^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\omega)+\hat{a}^{\dagger}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\right].\end{aligned}\right\} \tag{A.74}$$

L'opérateur "champ électrique" associé aux opérateurs de création et d'annihilation dans une fibre mono-mode est décrit par (A.45). On peut donc décrire les opérateurs champ associés aux sorties 1 et 2, après différentes propagations dans des fibres optiques avant et après couplage à la position $z=0$:

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}^{+}_{1,\mathrm{out}}(L_{1,\mathrm{out}},t) =& \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}A(x_0,y_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\left[\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)L_{1,\mathrm{in}}}+\mathrm{i}\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)L_{2,\mathrm{in}}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)L_{1,out}-\omega t]},\\ \hat{E}^{+}_{2,\mathrm{out}}(L_{2,\mathrm{out}},t) =& \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}A(x_0,y_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\left[\mathrm{i}\hat{a}_{1,\mathrm{in}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)L_{1,\mathrm{in}}}+\hat{a}_{2,\mathrm{in}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)L_{2,\mathrm{in}}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)L_{2,out}-\omega t]},\end{aligned}\right\} \tag{A.75}$$

où $L_{1,\mathrm{in}}$, $L_{2,\mathrm{in}}$, $L_{1,\mathrm{out}}$ et $L_{2,\mathrm{out}}$ sont respectivement les longueurs de propagation dans les fibres 1 et 2 avant couplage et après couplage.

Nous allons maintenant étudier l'action du coupleur sur différents états.

A.3.2.1/ ETAT 1-PHOTON EN ENTRÉE

Si, en entrée du coupleur ($\{1, \text{in}\}$), on a un photon délocalisé sur un continuum de fréquences :

$$|\psi\rangle_{1,\text{in}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega) \hat{a}^{\dagger}_{\text{in}}(\omega)|vac\rangle_1. \tag{A.76}$$

Le coupleur étant un élément linéaire, on peut directement écrire l'état de sortie en fonction des opérateurs d'entrée en considérant que le vide est présent sur la seconde entrée, et on obtient :

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega) \left(|\omega\rangle_1|vac\rangle_2 + \mathrm{i}|vac\rangle_1|\omega\rangle_2\right). \tag{A.77}$$

Un détecteur large bande disposé en voie 1 ou 2 détectera un photon avec la probabilité $\eta/2$. Ce résultat s'obtient facilement à partir de l'équation (2.26) lorsque les bandes d'intégration sont étendues à l'infini. Par contre, on ne détectera jamais simultanément un photon sur chacune des voies : ce résultat est directement lié à l'aspect corpusculaire et à l'effondrement de la fonction d'onde lors de la mesure, et va être traité dans la section suivante lorsque nous mesurerons des coïncidences.

A.3.2.2/ ETAT N-PHOTONS EN ENTRÉE

On va tout d'abord considérer un état à deux photons. On suppose que chaque photon est délocalisé sur le même continuum de fréquence caractérisé par son amplitude spectrale de probabilité $f(\omega)$, et que ces probabilités sont indépendantes ($f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1)f(\omega_2)$). On écrit cet état dans la base des états de Fock continus :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,\text{in}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' f(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)|\omega, \omega'\rangle_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' f(\omega') \hat{a}^{\dagger}_{\text{in}}(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega) \hat{a}^{\dagger}_{\text{in}}(\omega)|vac\rangle_1. \end{aligned} \tag{A.78}$$

L'état de sortie peut alors s'écrire :

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' f(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega) \left[|\omega, \omega'\rangle_1|vac\rangle_2 - |vac\rangle_1|\omega, \omega'\rangle_2 + \mathrm{i}\left(|\omega\rangle_1|\omega'\rangle_2 + |\omega'\rangle_1|\omega\rangle_2\right)\right]. \tag{A.79}$$

En procédant de la même manière, l'état à N-photons :

$$|\psi\rangle_{1,\text{in}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1) \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n f(\omega_n)|\omega_1, \cdots, \omega_n\rangle_1, \tag{A.80}$$

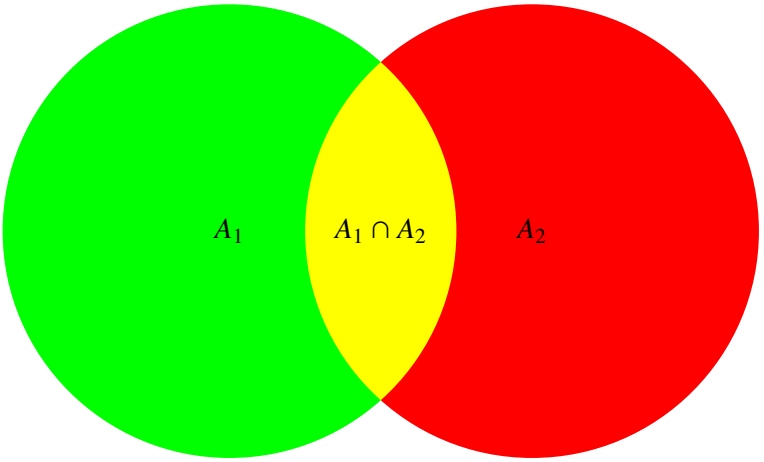


FIGURE A.2 – Représentation des événements correspondant à l'absorption du photon 1 ou 2.

devient :

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1) \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n f(\omega_n) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{\sqrt{2}^k}\right)^{n-k} \sum_{D_k} |\psi_k\rangle_1 |\psi_{n-k}\rangle_2, \tag{A.81}$$

où la somme sur le domaine D_k décrit les $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ combinaisons possibles pour répartir k éléments du vecteur $|\omega_1, \cdots, \omega_n\rangle_1$ dans $|\psi_k\rangle_1$ et $n-k$ dans $|\psi_{n-k}\rangle_2$. Si on ne s'intéresse qu'à la probabilité d'avoir un nombre k de photons, peu importe lesquels, sur la sortie 1 et $n-k$ sur la sortie 2, celle-ci suit une loi binomiale de paramètre $1/2$ qui est la probabilité qu'un photon en entrée sorte sur la voie 1. On obtient :

$$p(k)_{1,\text{out}} = \frac{n!}{(n-k)!k!2^n}. \tag{A.82}$$

A.4/ DÉTECTION D'UN ÉTAT À N-PHOTONS

Nous avons toujours considéré des états à un photon arrivant sur le détecteur ; dans le cas où plusieurs photons arrivent dans un temps inférieur à sa résolution temporelle, le signal que nous transmet le détecteur ne permet en aucun cas de différencier si un ou plusieurs photons ont étés absorbés. Cependant, la probabilité de détection augmente en fonction du nombre de photons qui arrivent sur le détecteur. Nous allons donc voir comment écrire la probabilité de détecter au moins un photon lorsque n arrivent sur le détecteur.

On peut commencer par un cas simple où deux photons arrivent sur le détecteur. On représente ces évènements sur la figure Fig.A.2. On appelle évènement A, le photon 1 est détecté (en vert) et évènement B, le photon 2 est détecté (en rouge).

La probabilité que le compteur détecte au moins un photon s'écrit :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{A.83}$$

où $\cup$ désigne l'union des évènements et $\cap$ l'intersection des évènements.

Si on considère que l'on envoie directement l'état d'entrée sur le détecteur, sans passer par le coupleur, les photons sont distribués sur le même spectre et on a d'après (2.26) :

$$P(A) = P(B) = \eta. \tag{A.84}$$

Lorsqu'on considère que le détecteur possède un très grand nombre d'atomes susceptibles de détecter un photon et suffisamment éloignés pour ne pas s'influencer, la probabilité de détecter un photon est indépendante de celle de détecter l'autre et s'écrit très simplement [1] :

$$P(A \cap B) = \eta^2. \tag{A.85}$$

La probabilité de détecter au moins 1 photon devient alors :

$$P(A \cup B) = 2\eta - \eta^2 = 1 - (1 - \eta)^2. \tag{A.86}$$

Comme $(1 - \eta)$ est la probabilité de ne pas détecter un photon qui arrive sur le détecteur, on trouve logiquement que la probabilité de détecter au moins un photon quand 2 arrivent sur le détecteur vaut "$1 -$ (probabilité de détecter aucun photon)".

On peut généraliser ce résultat à un état pur à n photons $|\psi_n\rangle$, lesquels sont tous distribués sur le même spectre $f(\omega)$. On suppose que chaque événement "absorption du photon i", $i \in \{1 : n\}$ est indépendant. On peut alors écrire la somme des probabilités d'absorber exactement k photons par un détecteur large bande en adaptant (2.21) que l'on avait pour un photon unique, à l'aide de la fonction d'auto-corrélation d'ordre k. On prétend alors que chaque photon est absorbé en un point d'espace temps $(\mathbf{r}_i, t_i)$, avec $i \in \{t_1, \cdots, t_k\}$ et $\mathbf{r}_i \in \{(x_1, y_1, z_0 = 0), \cdots, (x_k, y_k, z_0 = 0)\}$. On somme chacune des probabilités en intégrant sur la surface du détecteur et sur tous les temps. La somme des probabilités des différentes combinaisons pour qu'exactement k photons soient absorbés lorsque n sont présents en entrée de détecteur s'écrit :

$$\begin{aligned} B(k,n) =& \frac{\sigma^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y_k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_k \\ & \times G_n^{(k)}(\mathbf{r}_1, t_1, \cdots, \mathbf{r}_k, t_k, \mathbf{r}_k, t_k, \cdots \mathbf{r}_1, t_1) \end{aligned} \tag{A.87}$$

et pour laquelle :

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$G_n^{(k)}(\mathbf{r}_0, t_1, \cdots, \mathbf{r}_k, t_k, \mathbf{r}_k, t_k, \cdots \mathbf{r}_1, t_1) = \langle \psi_n | \hat{E}^-(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{E}^-(\mathbf{r}_k, t_k) \hat{E}^+(\mathbf{r}_k, t_k) \cdots \hat{E}^+(\mathbf{r}_1, t_1) | \psi_n \rangle. \tag{A.88}$$

Cette dernière est la fonction d'auto-corrélation d'ordre k pour laquelle on a écrit explicitement qu'elle agissait sur un état pur à n photons, et la définition des opérateurs champ électrique est donnée par (A.45). Cette fonction contient tous les arrangements possibles permettant de détecter k photons au point d'espace temps $(\mathbf{r}_i, t_i)$. La probabilité d'absorber un même sous-ensemble de k photons parmi les n apparaît $k!$ fois, ce chiffre venant des différentes permutations possibles entre les atomes et les photons, tel atome absorbe tel photon ou tel autre. Du point de vue du détecteur, les photons sont indiscernables, c'est pourquoi nous avons un facteur $k!$ qui apparait au dénominateur de (A.87). Il permet d'éliminer ces permutations et obtenir seulement les $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ combinaisons.

On peut alors écrire la probabilité de détecter au moins un photon à partir du principe d'inclusion-exclusion des probabilités [Weisstein, 2015] :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} B(k, n), \tag{A.89}$$

où on a appelé A_k l'événement "absorption du photon k".

Afin d'évaluer cette probabilité, nous devons calculer la fonction d'auto-corrélation correspondant à l'absorption de k photons parmi n. On écrit pour cela l'état d'entrée à n photons sous la forme d'états de Fock continus, dont le formalisme est donné en section A.1.1 :

$$|\psi_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n f(\omega_1) \cdots f(\omega_n) |\omega_1, \cdots, \omega_n\rangle. \tag{A.90}$$

On veut tout d'abord évaluer la fonction d'auto-corrélation d'ordre k (A.88) s'appliquant sur un état à n photons distribués sur le même continuum d'amplitudes de probabilité $f(\omega)$. La formulation étant un peu lourde, on va se contenter d'appliquer uniquement les opérateurs d'annihilation présents dans $G^{(k)}$ sur l'état $|\psi_n\rangle$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 \cdots \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_{k+n} f(\omega_{k+1}) \cdots f(\omega_{k+n}) \hat{a}(\omega_1) \cdots \hat{a}(\omega_k) |\omega_{k+1}, \cdots, \omega_{k+n}\rangle = \\ = \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_1 \cdots \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n f(\omega_1) \cdots f(\omega_n) |\omega_{k+1}, \cdots, \omega_n\rangle. \end{aligned} \tag{A.91}$$

Le vecteur état résultant, contenant les $n - k$ photons qui n'ont pas été absorbés, donne 1 lors du produit scalaire en suivant le raisonnement fait pour (A.7).

En utilisant ces résultats, on peut donner l'expression de la fonction d'auto-corrélation correspondant à l'absorption de k photons parmi n, en utilisant (A.91) dans (A.88),

$$
\begin{aligned}
&G^{(k)}\left(\mathbf{r}_1,t_1,\cdots,\mathbf{r}_k,t_k,\mathbf{r}_k,t_k,\cdots\mathbf{r}_1,t_1\right)\\
&=\frac{n!}{(n-k)!}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1' E_0(\omega_0)^* A(x_1,y_1)^* f(\omega_1')^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1' t_1}\cdots\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_k' E_0(\omega_0)^* A(x_k,y_k)^* f(\omega_k')^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k' t_k}\\
&\quad\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1 E_0(\omega_0)A(x_1,y_1)f(\omega_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t_1}\cdots\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_k E_0(\omega_0)A(x_k,y_k)f(\omega_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t_k}\\
&=\frac{n!}{(n-k)!}\left|E_0(\omega_0)\right|^{2k}\left|A(x_1,y_1)\tilde{f}(t_1)\right|^2\cdots\left|A(x_k,y_k)\tilde{f}(t_k)\right|^2. \qquad \text{(A.92)}
\end{aligned}
$$

Pour obtenir la dernière ligne, nous avons étendu les bornes d'intégration à $-\infty$ pour en faire la transformée de Fourier, ce qui ne pose pas de problème car $f(\omega)$ est restreinte à un domaine strictement positif. Nous avons aussi choisi $z=0$ de manière à supprimer le terme de phase correspondant à la propagation dans le détecteur [2].

La probabilité de compte k photons parmi n arrivant sur le détecteur (A.87) se trouve en intégrant (A.92) sur la section transverse et sur les différent temps et on trouve :

$$
\boxed{B(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!k!}\eta^k,} \qquad \text{(A.93)}
$$

où on a considéré que l'intégrale sur la section transverse était normée quelque soit la fréquence du photon. De même, par définition, $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\left|f(\omega)\right|^2=1$ donc $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\left|\tilde{f}(t)\right|^2=1$ d'après le théorème de Plancherel.

On trouve ainsi que la probabilité de détecter au moins un photon quand n arrivent sur le détecteur vaut :

$$
\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\eta^k\\
&=1-(1-\eta)^n. \qquad \text{(A.94)}
\end{aligned}
$$

On trouve bien la probabilité attendue, correspondant à la probabilité de détection d'au moins un événement lorsqu'ils sont indépendants.

A.5/ MESURE DE COÏNCIDENCES

La probabilité de détecter des photons provenant d'un même champ en deux points d'espace distinct s'écrit à l'aide de la fonction de corrélation du champ d'ordre 2 sous la forme :

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_0,t,t_0',t')=&\int_{t_0}^{t_0+t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\int_{t_0'}^{t_0'+t'}\mathrm{d}t_3\int_{t_0'}^{t_3}\mathrm{d}t_4\sigma_1(t_1-t_3)\sigma_2(t_2-t_4)\\
&\times G^{(2)}(\mathbf{r}_1,t_1,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_2,t_4,\mathbf{r}_1,t_3), \qquad \text{(A.95)}
\end{aligned}
$$

2. On avait gardé ce terme lorsqu'on s'intéressait aux problèmes de propagation avant détection, ici il ne fait qu'alourdir la notation

Pour un état pur, la fonction de corrélation d'ordre 2 s'écrit dans la base des états de Fock continus :

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1,t_1,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_2,t_4,\mathbf{r}_1,t_3) = \langle\psi|\hat{E}^-(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{E}^-(\mathbf{r}_2,t_2)\hat{E}^+(\mathbf{r}_2,t_4)\hat{E}^+(\mathbf{r}_1,t_3)|\psi\rangle. \tag{A.96}$$

Nous considérons toujours que nous sommes dans le cas où la bande passante des deux détecteurs est très large par rapport à l'étendue des fréquences de l'état que l'on veut observer, et la probabilité de détection devient :

$$\boxed{p(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_0,t,t_0',t') = \sigma_1\sigma_2\int_{t_0}^{t_0+t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0'}^{t_0'+t'}\mathrm{d}t_2 G^{(2)}(\mathbf{r}_1,t_1,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_1,t_1).} \tag{A.97}$$

Nous nous intéressons uniquement à la détection d'état à deux photons, et nous pouvons écrire un état pur correspondant à deux photons émis en même temps :

$$|\psi\rangle = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_2 f(\omega_1,\omega_2)|\omega_1,\omega_2;t\rangle, \tag{A.98}$$

dont l'amplitude spectrale de probabilité vérifie $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_1\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_2\,|f(\omega_1,\omega_2)|^2 = 1$.

Pour être détectés en deux positions différentes, les photons doivent être séparés, ce que l'on peut faire à l'aide d'un coupleur fibré et équilibré par exemple (dont on peut trouver une description en Annexe A.3.2). Si on considère dans ce cas que le détecteur 1 est sur la voie 1, que le détecteur 2 est sur la voie 2, et qu'ils possèdent chacun leur propre filtre (de même bande passante mais dont la fréquence centrale peut varier), on peut utiliser les relations (A.75) et utiliser les transformations liées aux filtres pour écrire l'opérateur champ dans le détecteur lorsqu'on considère que l'état est inséré dans une fibre de longueur L avant le coupleur. C'est toujours la partie réfléchie par les filtres qui est envoyée sur les détecteurs, et on considère que le vide est présent sur toutes les autres entrée que celle du coupleur où l'on insert l'état. De manière à simplifier l'écriture, nous notons toutes les entrées où le vide est présent par un indice v (en résumé le second port de chaque filtre et le second port du coupleur). On note la longueur de propagation entre les voies 1 ou 2 de sortie du coupleur et les détecteurs L_1 et L_2. Les opérateurs champs dans les détecteurs 1 et 2, aux coordonnées $(x_1,y_1,L+L_1)$ et $(x_2,y_2,L+L_2)$ et aux temps t_1 et t_2 peuvent alors s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}
\hat{E}^+(\mathbf{r}_1,t_1) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}A(x_0,y_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\left\{[R(\omega)\hat{a}_{\mathrm{in}}(\omega)+T(\omega)\hat{a}_v(\omega)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)L}+\mathrm{i}\hat{a}_v(\omega)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)L_1-\omega t_1]},\\
\hat{E}^+(\mathbf{r}_2,t_2) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}A(x_0,y_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\left\{\mathrm{i}\,[R(\omega)\hat{a}_{\mathrm{in}}(\omega)+T(\omega)\hat{a}_v(\omega)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)L}+\hat{a}_v(\omega)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\omega)L_2-\omega t_2]},
\end{aligned}\right\} \tag{A.99}$$

On peut alors utiliser ces états dans la fonction de corrélation d'ordre 2, et après les calculs, on obtient en utilisant les propriétés des opérateurs de création et d'annihilation des états de Fock continus (A.2) :

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1,t_1,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_1,t_1) = \frac{1}{2}\left|2\pi A(x_1,y_1)A(x_2,y_2)E_0(\omega_a)E_0(\omega_b)f(\omega_a,\omega_b)\right|^2 \times \left|\tilde{B}(t_1-\beta_1[L_1+L])\right|^2\left|\tilde{B}(t_2-\beta_1[L_1+L])\right|^2. \quad \text{(A.100)}$$

où $\tilde{B}(t)$ a été défini comme la transformée de Fourier de (2.35) qui est égale à la fonction de transfert du filtre $R(\omega)$, multipliée par la phase accumulée par dispersion dans les fibres, cette fonction étant centrée en $t=0$. On néglige la dispersion pour le moment car les filtres fins nous le permettent ($\tilde{B}(t)=\tilde{R}(t)$), et la probabilité totale de détection s'obtient en intégrant sur la section transverse :

$$p_c(t_0,t,t_0',t') = \frac{\eta_1\eta_2}{2}\left|f(\omega_a,\omega_b)\right|^2\int_{t_0}^{t_0+t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0'}^{t_0'+t'}\mathrm{d}t_2\left|\tilde{B}(t_1-\beta_1[L_1+L])\right|^2\left|\tilde{B}(t_2-\beta_1[L_2+L])\right|^2. \quad \text{(A.101)}$$

On peut directement noter que si l'on étend les bornes d'intégration à l'infini, on obtient $p(-\infty,\infty,-\infty,\infty)\propto\eta_1\eta_2/2$ qui est le produit de rendement des détecteurs divisé par 2. Ceci correspond au fait que l'on a une chance sur deux que les photons sortent sur les mêmes bras et une chance sur deux qu'ils soient séparés par le coupleur. Le but d'une mesure de coïncidence est de discriminer les 2 photons, que nous avons écrit dans l'état (A.98), de tout autre signal que pourrait nous fournir le détecteur, que l'on appelle bruit (pouvant résulter de la détection d'autres photons ou d'autres bruit électroniques dus au système de détection), que l'on suppose suivre une statistique gaussienne. Comme nous ne pouvons pas discerner si un signal envoyé par le détecteur correspond à un photon détecté ou à plusieurs photons détectés ou à du bruit, il faut minimiser les temps t et t' afin de localiser les deux photons de la manière la plus précise possible. Nous avons vu précédemment que la limite de résolution était celle des systèmes d'amplification des deux détecteurs (Δt_{d1}) et (Δt_{d2}). On fixe les temps d'intégration à cette résolution $\Delta t_{d1}=t$ et $\Delta t_{d2}=t'$. Nous sommes dans un cas où les densités temporelles de probabilité $\tilde{B}(t_1)$ et $\tilde{B}(t_2)$ ont un écart-type ($\Delta\tau$) du même ordre de grandeur que la résolution temporelle et correspondant à l'inverse de la bande passante des filtres ($\Delta\tau=1/\Delta\omega$). La probabilité d'une coïncidence dépend alors très fortement des temps initiaux t_0 et t_0'. On peut alors faire les changements de variables $t_1'=t_1-\beta_1[L_1+L]$ et $t_2'=t_2-\beta_1[L_2+L]$ pour centrer les intégrations sur les densités temporelles de probabilité et on obtient :

$$p_c(t_0,\Delta\tau,t_0',\Delta\tau) = \frac{\eta_1\eta_2}{2}\left|f(\omega_a,\omega_b)\right|^2\int_{t_0-\beta_1[L_1+L]}^{t_0+\Delta\tau-\beta_1[L_1+L]}\mathrm{d}t_1'\int_{t_0'-\beta_1[L_2+L]}^{t_0'-\Delta\tau+\beta_1[L_2+L]}\mathrm{d}t_2'\left|\tilde{B}(t_1')\right|^2\left|\tilde{B}(t_2')\right|^2. \quad \text{(A.102)}$$

On voit que la probabilité de coïncidence est maximum pour $t_0=\Delta\tau/2-\beta_1[L_1+L]$ et $t_0'=\Delta\tau/2-\beta_1[L_2+L]$ qui correspondent naturellement au temps de propagation des deux photons pour atteindre un des deux détecteurs. Dans l'expérience, les photons seront en général émis de manière continue, et la quantité qui nous intéresse réellement est l'écart de temps entre les deux détecteurs $t_0'-t_0=\beta_1[L_2+L_1]$ auquel nous pourrons observer des photons coïncidants.

On ajoute maintenant les modulateurs de la même manière que nous l'avons fait pour l'expérience à 1 photon. En regardant les opérateurs champs dans le détecteur sans modulateur, sans coupleur (2.30) et avec coupleur (A.99), on remarque que l'on peut facilement adapter les équations trouvées avec un seul photon au cas à deux photons. Ainsi, si on rajoute un modulateur avant le coupleur, on peut directement s'inspirer de l'équation (2.39) décrivant l'opérateur champ dans le détecteur avec le modulateur, et on écrit en tenant compte du coupleur :

$$\left.\begin{aligned}
\hat{E}^+(\mathbf{r}_1,t_1) =& \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}A(x_0,y_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\sum_{k\in\mathbb{Z}}E_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t_1-\beta_1(L_T+L_1)]}\\
&\times\left[R(\omega)U_{-k}(a,\phi)D(\omega)\hat{a}_{\mathrm{in}}(\omega+k\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_T+L_1)+\beta_1 k\Omega L_0\right]}+\hat{X}(\omega)\right],\\
\hat{E}^+(\mathbf{r}_2,t_2) =& \frac{-1}{\sqrt{2}}A(x_0,y_0)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega E_0(\omega)\sum_{k\in\mathbb{Z}}E_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[t_2-\beta_1(L_T+L_2)]}\\
&\times\left[R(\omega)U_{-k}(a,\phi)D(\omega)\hat{a}_{\mathrm{in}}(\omega+k\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\beta_0-\beta_1\omega_0)(L_T+L_2)+\beta_1 k\Omega L_0\right]}+\hat{X}(\omega)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{A.103}$$

où $\hat{X}(\omega)$ contient les termes correspondants aux entrées couplées avec le vide.

Pour écrire la fonction de corrélation d'ordre 2 de l'état (A.98) en entrée du premier modulateur, on peut alors adapter la fonction $\mathcal{M}(\omega)$ définie équation (2.43) au cas à deux photons :

$$\mathcal{M}^{(2)}(\omega_1,\omega_2) = \frac{R(\omega_1)R(\omega_2)}{2}\sum_{\{k,l\}\in\mathbb{Z}^2}U_{-k}(a,\phi)U_{-l}(a,\phi)f(\omega_1+k\Omega,\omega_2+l\Omega)D_k(\omega_1)D_l(\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_1(k+l)\Omega L_0}. \tag{A.104}$$

Et on écrit directement la fonction de corrélation d'ordre 2 à partir de celle d'ordre 1 (A.105) :

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1,t_1,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_2,t_2,\mathbf{r}_1,t_1) = 2\pi\left|A(x_0,y_0)E_0(\omega_f)\right|^2\left|\tilde{\mathcal{M}}^{(2)}\left(t_1-\beta_1[L_T+L_1],t_2-\beta_1[L_T+L_2]\right)\right|^2. \tag{A.105}$$

B

LES FONCTIONS DE BESSEL DE PREMIÈRE ESPÈCE

Les fonctions de Bessel de première espèce sont notées $J_n(x)$, et sont les solutions de l'équation différentielle :

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{B.1}$$

Nous utiliserons les propriétés suivantes valables pour $n \in \mathbb{Z}$:

— La relation de récurrence (Abramowitz and Stegun 9.1.27 p.361) :

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x). \tag{B.2}$$

— Equivalences :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = J_n(-x). \tag{B.3}$$

— Formule d'addition de Graf :
En posant

$$U_n(x,\phi) = J_n(x)\mathrm{e}^{in\phi}. \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned} U_d(z,\gamma) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{d-n}(x,\phi)U_n(y,\psi) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{d+n}(x,\phi)U_n(y,-\psi+\pi). \end{aligned} \tag{B.5}$$

où z et γ vérifient :

$$\left.\begin{aligned} z\cos(\gamma) &= x\cos(\phi) + y\cos(\psi), \\ z\sin(\gamma) &= x\sin(\phi) + y\sin(\psi). \end{aligned}\right\} \tag{B.6}$$

Si $x = y$, en sommant les deux lignes de (B.6) on déduit la relation :

$$z\mathrm{e}^{i\gamma} = 2x\cos\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)\exp\left(i\frac{\phi+\psi}{2}\right) = 2x\cos(\Delta)\exp(i\Gamma). \tag{B.7}$$

Celle-ci reportée dans (B.5) donne :

$$\begin{aligned} U_d(2x\cos(\Delta),\Gamma) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}d\phi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{d-n}(x)J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\psi-\phi)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}d\phi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{d+n}(x)J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi-\psi-\pi)}, \end{aligned}$$

$$U_d(2x\cos(\Delta),\Gamma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{d-n}(x,\phi)U_n(x,\psi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{d+n}(x,\phi)U_n^*(x,\psi+\pi). \tag{B.8}$$

Si $\psi = \phi + \pi$, on déduit directement de (B.8) que :

$$\delta_{d,0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{d-n}(x,\phi)U_n(x,\phi+\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{d+n}(x,\phi)U_n^*(x,\phi). \tag{B.9}$$

Ou encore si $\phi = 0$, on retrouve les formules d'addition de Neumann :

— si $\psi = \pi$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{d+n}(x)J_n(x) = \delta_{d,0}, \tag{B.10}$$

— si $\psi = 0$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{d-n}(x)J_n(x) = J_d(2x). \tag{B.11}$$

Autre formulation utile :

$$U_{d-l}(x-y,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{d+n}(x,\phi)U_{l+n}^*(y,\phi). \tag{B.12}$$

— Autres relations

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)t^n. \tag{B.13}$$

En posant $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ on obtient :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin(\phi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}. \tag{B.14}$$

On montre facilement en utilisant (B.14) et (B.4) et les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin(\phi)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} && \text{(B.15)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi+\pi)} && \text{(B.16)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi} && \text{(B.17)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{-n}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}. && \text{(B.18)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin(\phi)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_n(x,\phi), && \text{(B.19)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_n(-x,\phi+\pi), && \text{(B.20)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_n^*(-x,\phi), && \text{(B.21)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_{-n}(x,\phi). && \text{(B.22)}
\end{aligned}
$$

C

FLUORESCENCE PARAMÉTRIQUE EN QUASI ACCORD DE PHASE

Cette annexe est dédiée au traitement quantique de la fluorescence paramétrique en quasi-accord de phase dans un cristal de PPLN. Dans ce processus, un photon que l'on appelle photon pompe se scinde de manière spontanée, et génère deux photons d'énergie moindre appelé photon signal et *idler*. Ce processus doit respecter la conservation de l'énergie que l'on note $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ avec $\omega_s = \omega_0 + \Delta\omega$, $\omega_i = \omega_0 - \Delta\omega$ et $\omega_0 = \omega_p/2$. Lors de ce processus on suppose que les photons signal et *idler* seront générés symétriquement autour de la fréquence de dégénérescence de la pompe ω_0. Afin de générer de manière efficace des paires de photons à partir des fluctuations du vide, il faut respecter une relation d'accord de phase entre les photons pompe, signal et *idler*. Cet accord de phase dépend directement des propriétés diélectriques du milieu. On note la condition d'accord de phase $\Delta\beta = 0 = \beta(\omega_p) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i)$, où $\beta(\omega_j)$ est le vecteur d'onde effectif dans le milieu. Dans le cas où la pompe est quasi-monochromatique, on note $\omega_p = \omega_{0,p} + \delta\omega$. On peut utiliser un développement limité, dont l'ordre 2 est supposé suffisant, des différents vecteurs d'onde en leur position centrale. On écrit :

$$\beta(\omega_j)_{|\omega=\omega_{0,j}} \approx \beta_0(\omega_{0,j}) + \beta_1(\omega_{0,j})\left(\omega - \omega_{0,j}\right) + \frac{\beta_2(\omega_{0,j})}{2}\left(\omega - \omega_{0,j}\right)^2, \tag{C.1}$$

où $j \in \{p, s, i\}$ et $\omega_{0,s} = \omega_{0,i} = \omega_0$ et $\omega_{0,p} = 2\omega_0$. Comme $\omega_s = \frac{\omega_p}{2} + \omega = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} + \omega$ et $\omega_i = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} - \omega$, on peut réécrire la condition d'accord de phase :

$$\Delta\beta \approx \beta_0(2\omega_0) - 2\beta_0(\omega_0) - \left[\beta_1(\omega_0) - \beta_1(2\omega_0)\right]\delta\omega - \beta_2(\omega_0)\omega^2. \tag{C.2}$$

Pour remplir cette condition, il est possible d'utiliser la biréfringence du matériau et d'orienter la polarisation des photons pompe suivant un angle déterminé par rapport aux axes cristallins. Une deuxième solution est de choisir l'orientation des polarisation des photons pompe, signal et *idler* de manière à exploiter le plus grand du tenseur de susceptibilité du cristal. Une inversion périodique de ce coefficient induit une variation de phase périodique des photons produits par l'interaction le long de la propagation. Cette variation de phase supplémentaire peut-être choisie pour compenser le désaccord de phase à une fréquence donnée, c'est ce qu'on appelle un quasi-accord de phase.

Comme pour l'interaction à 3 photons dans le modulateur de phase, nous considérons ici aussi que l'interaction se passe dans un milieu guidé où seuls les modes fondamentaux peuvent se propager. Le coefficient non-linéaire que nous voulons exploiter est le même (d_{33}) qui couple les photons polarisés linéairement suivant le même axe cristallin Z. Nous pourrons adopter la même écriture des opérateurs champs que celle que nous avons utilisée dans les fibres mono-modes.

On peut écrire le Hamiltonien d'interaction entre les photons pompe, signal et *idler* par le biais du cristal,

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{NL}} = 2\epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z d_{33}(x,y,z)\left[\hat{E}_p^-(r,t)\hat{E}_s^+(r,t)\hat{E}_i^+(r,t) + h.c.\right]. \tag{C.3}$$

Comme tous les vecteurs d'ondes se propagent dans la même direction z, on peut utiliser l'équation d'évolution spatiale (2.6). L'opérateur correspondant à l'interaction non linéaire peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) = &-\mathrm{i}4\pi\epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y A_p(x,y)A_s(x,y)A_i(x,y)d_{33}(x,y,z)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega_0\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega \\ &\times\left[E_0(2\omega_0)E_0(\omega_0+\omega)E_0(\omega_0-\omega)\hat{\mathcal{A}}_s^\dagger(\omega_0+\omega,z)\hat{\mathcal{A}}_i^\dagger(\omega_0-\omega,z)\hat{\mathcal{A}}_p(2\omega_0,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z} - h.c.\right],\end{aligned} \tag{C.4}$$

où $\hat{\mathcal{A}}(\omega,z) = \hat{a}(\omega,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(\omega)z}$ est un opérateur régissant l'évolution de l'enveloppe. On pose alors $\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z) = \hat{\mathcal{A}}_s(\omega_0+\omega,z)$, $\hat{\mathcal{A}}_{\omega,i}(z) = \hat{\mathcal{A}}_i^\dagger(\omega_0-\omega,z)$ et $\hat{\mathcal{A}}_p(z) = \hat{\mathcal{A}}_p(2\omega_0,z)$. En examinant cette dernière équation, on comprend bien la nécessité de l'accord de phase $\Delta\beta = 0$. Effectivement si ce terme n'est pas nul, l'interaction oscillera périodiquement en fonction de la propagation dans le cristal, de la même manière que le vide oscille. Si nous voulons produire efficacement des photons signal et *idler*, il faut soit orienter la polarisation des photons de manière à obtenir $\Delta\beta = 0$ -ce qu'on appelle un accord de phase par biréfringence- soit nous pouvons introduire une périodicité dans le milieu qui compense le désaccord de phase. En inversant périodiquement l'orientation de l'axe Z et donc le signe de d_{33}, on peut décomposer ce dernier en une série de Fourier :

$$d_{33}(x,y,z) = d_{33}(x,y)\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(2k+1)z}{L}}. \tag{C.5}$$

En supposant que la plus grosse contribution est apportée par le terme pour lequel $k = 0$, on obtient comme condition de quasi-accord de phase $\Delta\beta - 2\pi/L = 0$. Il faut bien rappeler que $\Delta\beta$ dépend de ω et on ne peut pas réaliser un accord de phase pour toutes les fréquences. On choisit donc de périodiser le cristal de manière à ce que le quasi accord de phase soit réalisé à la dégénérescence de la fréquence centrale de la pompe ($\delta\omega = 0$ et $\omega = 0$). On obtient $\Delta\beta_0 - 2\pi/L = \beta_0(2\omega_0) - 2\beta_0(\omega_0) - 2\pi/L = 0$ On suppose aussi que le coefficient de couplage non linéaire est homogène sur la section du guide $d_{33}(x,y) = d_{33}$.

On réécrit alors l'opérateur non linéaire spatial :

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}} = \mathrm{i}4\epsilon_0 d_{33} R \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \times \left[E_0(2\omega_0) E_0(\omega_0+\omega) E_0(\omega_0-\omega) \hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,s}(z) \hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,i}(z) \hat{\mathcal{A}}_p(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta-\Delta\beta_0)z} - h.c. \right]. \tag{C.6}$$

On peut alors résoudre l'équation du mouvement spatial associée à l'opérateur d'annihilation affranchi des oscillations rapides, $\hat{\mathcal{A}}_s(\omega, z)$, dont on montre facilement qu'elle suit la relation :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \left[\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z), \hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) \right]. \tag{C.7}$$

On peut aussi supposer que le nombre de photons pompe est très grand par rapport au nombre qui sera annihilé pendant l'interaction, on le considère donc classique et on peut remplacer les opérateurs associés par une amplitude de champ classique :

$$\hat{\mathcal{A}}_p(z) \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi P_p}{\hbar 2\omega_0}} u^*, \tag{C.8}$$

$$\hat{\mathcal{A}}^\dagger_p(z) \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi P_p}{\hbar 2\omega_0}} u. \tag{C.9}$$

De plus la pompe est quasi-monochromatique, on peut donc considérer que tous les termes d'amplitude impliquant ω_0 peuvent être sortis de l'intégrale sur les fréquences de la pompe. On peut utiliser la même approximation pour les amplitudes des ondes signal et *idler* et, en rappelant que $E_0(\omega) = \sqrt{\hbar\omega/[4\pi\epsilon_0 n(\omega) c_0]}$, on peut considérer que $E_0(\omega_0+\omega) \approx E_0(\omega_0)$. Le commutateur entre $\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}, z)$ et l'opérateur spatial non-linéaire total peut s'écrire :

$$\left[\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z), \hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{NL}}(z) \right] = \mathrm{i} \frac{d_{33} R \hbar \omega_0}{\pi c_0 n(\omega_0)} \sqrt{\frac{2P_p}{\epsilon_0 c_0 n(2\omega_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_0 u^* \hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,i}(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta-\Delta\beta_0)z}. \tag{C.10}$$

L'équation du mouvement associée à $\hat{\mathcal{A}}_s(\omega_0+\omega, t)$ s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{d_{33} R \omega_0}{\pi n(\omega_0) c_0} \sqrt{\frac{2P_p}{\epsilon_0 c_0 n(2\omega_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_0 u^* \hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,i}(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta-\Delta\beta_0)z}. \tag{C.11}$$

Cette dernière équation nous indique que les opérateurs de création et d'annihilation de photons aux fréquences signal et *idler* ne sont pas liés de manière unique, l'indétermination sur la somme des fréquences des photons correspond à la largeur spectrale de la pompe. Nous allons considérer par la suite que la pompe est monochromatique $u(\omega_0) = \delta(\omega_0 - \omega_0')$ ($\delta\omega = 0$). Cette opération permet de rendre unique la relation entre les opérateurs signal et *idler* en supprimant l'intégrale sur la largeur de la pompe.

On pose de plus $\mathfrak{g}$ un gain linéaire :

$$\mathfrak{g} = \frac{d_{33} R \omega_0}{\pi n(\omega_0) c_0} \sqrt{\frac{2P_p}{\epsilon_0 c_0 n(2\omega_0)}} u^* \tag{C.12}$$

et le vecteur d'onde d'accord de phase $\Delta K = \Delta\beta - \Delta\beta_0$.

On obtient l'équation d'évolution de l'opérateur d'annihilation du photon signal à partir de (C.11), et celle du photon *idler* en faisant le changement de variable $\omega' = -\omega$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}\hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,i}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z}, \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}_{\omega,i}(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}\hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,s}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z}. \end{aligned}\right\} \tag{C.13}$$

On peut alors écrire l'évolution de l'opérateur de création associé aux photons signal et *idler* :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}^*\hat{\mathcal{A}}_{\omega,i}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K z}, \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{A}}^\dagger_{\omega,i}(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}^*\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K z}. \end{aligned}\right\} \tag{C.14}$$

On résout ces équations couplées en posant $\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z) = \hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z/2}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}\hat{\mathcal{B}_{\omega,i}}^\dagger(z) - \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2}\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z), \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}^\dagger_{\omega,i}(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathfrak{g}^*\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z) + \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2}\hat{\mathcal{B}}^\dagger_{\omega,i}(z). \end{aligned}\right\} \tag{C.15}$$

En isolant $\hat{\mathcal{B}}^\dagger_{\omega,i}(z)$ dans la première équation, nous pouvons substituer $\hat{\mathcal{B}}^\dagger_{\omega,i}(z)$ et sa dérivée dans la seconde équation. On obtient ainsi une équation différentielle du second ordre dépendant uniquement de $\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)$ et de ses dérivées. En substituant de la même manière $\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)$ dans la première équation, on trouve une équation dépendant uniquement de $\hat{\mathcal{B}}_{\omega,i}(z)$ et de ses dérivées. Le système d'équations découplées obtenu est

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z^2} &= \left[g^2 - \left(\frac{\Delta K}{2}\right)^2\right]\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z), \\ \frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathcal{B}}^\dagger_{\omega,i}(z)}{\mathrm{d}z^2} &= \left[g^2 - \left(\frac{\Delta K}{2}\right)^2\right]\hat{\mathcal{B}}^\dagger_{\omega,i}(z), \end{aligned}\right\} \tag{C.16}$$

où $g = |\mathfrak{g}|$.

On pose alors :

$$\kappa = \sqrt{g^2 - \left(\frac{\Delta K}{2}\right)^2}. \tag{C.17}$$

Cependant, si $g^2 < \left(\frac{\Delta K}{2}\right)^2$, κ est imaginaire pur, on traite alors κ comme un complexe.
On peut facilement vérifier qu'il existe des solutions de la forme :

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z) &= a\cosh(\kappa z) + b\sinh(\kappa z)\\ \hat{\mathcal{B}}^{\dagger}_{\omega,i}(z) &= c\cosh(\kappa z) + d\sinh(\kappa z).\end{aligned}\right\} \tag{C.18}$$

On trouve facilement les coefficients a, b, c et d en utilisant les conditions initiales et on obtient :

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z) &= \left[\cosh(\kappa z) - \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right]\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(0) + \frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa z)\hat{\mathcal{B}}^{\dagger}_{\omega,i}(0),\\ \hat{\mathcal{B}}^{\dagger}_{\omega,i}(z) &= \left[\cosh(\kappa z) - \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right]\hat{\mathcal{B}}^{\dagger}_{\omega,i}(0) + \frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa z)\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(0).\end{aligned}\right\} \tag{C.19}$$

Et on obtient donc :

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(z) &= \left[\cosh(\kappa z) - \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right]\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z/2} + \frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa z)\hat{\mathcal{A}}^{\dagger}_{\omega,i}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z/2},\\ \hat{\mathcal{A}}^{\dagger}_{\omega,i}(z) &= \left[\cosh(\kappa z) - \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right]\hat{\mathcal{A}}^{\dagger}_{\omega,i}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K z/2} + \frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa z)\hat{\mathcal{A}}_{\omega,s}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K z/2}.\end{aligned}\right\} \tag{C.20}$$

et :

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}^{\dagger}_{\omega,s}(z) &= \left[\cosh(\kappa^* z) + \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa^*}\sinh(\kappa^* z)\right]\hat{\mathcal{A}}^{\dagger}_{\omega,s}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K z/2} + \frac{g^*}{\kappa^*}\sinh(\kappa^* z)\hat{\mathcal{A}}_{\omega,i}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta K z/2},\\ \hat{\mathcal{A}}_{\omega,i}(z) &= \left[\cosh(\kappa^* z) + \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa^*}\sinh(\kappa^* z)\right]\hat{\mathcal{A}}_{\omega,i}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z/2} + \frac{g^*}{\kappa^*}\sinh(\kappa^* z)\hat{\mathcal{A}}^{\dagger}_{\omega,s}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta K z/2}.\end{aligned}\right\} \tag{C.21}$$

Si le vide est présent en entrée de modulateur, alors le nombre de photons dans un mode correspondant à une fréquence signal ou *idler* peut s'écrire :

$$\langle vac|\hat{a}^{\dagger}_{\omega,s}(z)\hat{a}_{\omega,s}(z)|vac\rangle = \langle vac|\hat{n}_{\omega,s}(z)|vac\rangle = \left|\frac{g}{\kappa}\right|^2 \sinh^2(\kappa z) \tag{C.22}$$

On appelle alors $\hat{n}_{\omega,s}(z)$ la densité spectrale de photons générés après une distance de propagation z. On peut alors regarder la bande passante de conversion en cherchant les valeurs de ω pour lesquelles :

$$\hat{n}_{\omega,s}(z) = \hat{n}_{\omega,s}(z)_{\max}/2 = \sinh^2(gz)/2. \tag{C.23}$$

On écrit alors $\hat{n}_{\omega,s}(z)$ sous la forme :

$$\hat{n}_{\omega,s}(z) = g^2 z^2 \left(\frac{\sinh(\kappa z)}{\kappa z}\right)^2. \tag{C.24}$$

Dans notre cas $gz \approx 1 \times 10^{-6}$, il n'y a pas de valeur réelle de κ qui vérifie (C.23). On pose donc $\kappa = \mathrm{i}\sqrt{\Delta K^2/4 - g^2}$ et :

$$\hat{n}_{\omega,s}(z) = [gz\mathrm{sinc}(\kappa z)]^2 \tag{C.25}$$

Il faut bien rappeler que κ dépend de la fréquence du photon signal $\omega_0+\omega$ car le désaccord de phase ΔK en dépend. Dans le cas où la pompe est monochromatique, $\delta\omega = 0$, la condition d'accord de phase (C.1) permet d'écrire le désaccord de phase $\Delta K(\omega_0 + \omega)$ dégénéré sous la forme :

$$\Delta K(\omega_0 + \omega) = -\beta_2(\omega_0)\omega^2 \tag{C.26}$$

où ω est l'écart de fréquence du photon signal avec la fréquence de dégénérescence de la pompe ω_0.

Pour trouver la bande passant en fréquence de la fluorescence paramétrique, on cherche donc la solution de :

$$\mathrm{sinc}^2\left(z\sqrt{\frac{\Delta K^2}{4} - g^2}\right) = \frac{1}{2}. \tag{C.27}$$

Ce qui donne :

$$z\sqrt{\frac{\Delta K^2}{4} - g^2} = \pm x_0 \approx \pm 1,4. \tag{C.28}$$

On obtient alors :

$$\Delta K = \pm\frac{2}{z}\sqrt{x_0^2 + (gz)^2} = \pm\frac{2x_0}{z} \tag{C.29}$$

compte tenu que $gz \approx 1 \times 10^{-6}$.

On obtient donc comme bande passante :

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\frac{2x_0}{z\beta_2(\omega_0)}}. \tag{C.30}$$

Nous nous placerons toujours dans un cas où l'accord de phase est dégénéré, de manière à obtenir des photons intriqués indiscernables en fréquence.

Dans le cas où on change la longueur d'onde de pompe, l'accord de phase n'est plus réalisé à la dégénérescence de la pompe. Si on note la nouvelle fréquence de pompe

$2\omega_0 + 2\delta\omega$, on obtient une relation de désaccord de phase en fonction du décalage de la pompe qui s'écrit :

$$\Delta K(\omega, \mathrm{d}\omega) = \left[\beta_1(2\omega_0) - \beta_1(\omega_0)\right] 2\delta\omega - \left[2\beta_2(2\omega_0) - \beta_2(\omega_0)\right] \delta\omega^2 - \beta_2(\omega_0)\omega^2. \tag{C.31}$$

On s'intéresse maintenant aux photons intriqués créés par cette source, c'est à dire à l'état de sortie du cristal. Ce calcul est inspiré de [Suhara et al., 2005], mais cependant adapté aux états de Fock continus. Si on considère que l'état initial correspondant aux photons signal ou *idler* est l'état vide, on peut faire évoluer cet état dans la représentation de Schrödinger. Il faut pour cela définir un opérateur d'évolution permettant de passer de la représentation de Heisenberg où les états sont invariants, à celle de Schrödinger où les opérateurs sont invariants. On cherche à définir un opérateur de translation $\hat{T}(z)$ qui vérifie $|\Psi(z)\rangle = \hat{T}(z)|\Psi(0)\rangle = \hat{T}(z)|vac\rangle$ dans la représentation de Schrödinger, afin de vérifier $\langle\Psi(z)|\hat{\mathcal{B}}(\omega,0)|\Psi(z)\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{\mathcal{B}}(\omega,z)|\Psi(0)\rangle$, que l'on peut encore écrire $\langle\Psi_S|\hat{\mathcal{B}}(\omega)_S|\Psi_S\rangle = \langle\Psi_H|\hat{\mathcal{B}}(\omega)_H|\Psi_H\rangle$. L'opérateur de translation permet de faire le lien entre les représentations de Heisenberg et de Schrödinger, et on obtient $\hat{\mathcal{B}}(\omega,z) = \hat{T}^\dagger(z)\hat{\mathcal{B}}(\omega,0)\hat{T}(z)$. $\hat{T}(z)$ doit être unitaire $\hat{T}(z)\hat{T}^\dagger(z) = \hat{T}^\dagger(z)\hat{T}(z) = 1$, de manière à vérifier $\langle\Psi(z)|\Psi(z)\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{T}^\dagger(z)\hat{T}(z)|\Psi(0)\rangle = \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = 1$. On peut alors poser $\hat{T}(z)\exp\left(-\mathrm{i}\hat{\mathcal{U}}_S z\right)$ avec $\hat{\mathcal{U}}_S$ un opérateur hermitien, $\hat{\mathcal{U}}_S = \hat{\mathcal{U}}_S^\dagger$.

On peut revenir aux équations (C.15) qui régissent l'évolution de l'opérateur $\hat{\mathcal{B}}(\omega,z)$. Comme $\hat{\mathcal{U}}_S$ commute avec $\hat{T}(z)$, on peut mettre l'équation du mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} &= \left[\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z), \hat{\mathcal{U}}_S\right] \\
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} &= \hat{T}^\dagger(z)\left[\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(0), \hat{\mathcal{U}}_S\right]\hat{T}(z).
\end{aligned} \tag{C.32}$$

On peut remarquer que $\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(0) = \hat{a}_{\omega,s}(0)$. Cette relation est aussi valable pour les opérateurs associés au photon *idler*. En utilisant les équations (C.15) et leur complexe conjugué, on déduit l'expression :

$$\hat{\mathcal{U}}_S = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \hat{a}^\dagger_{\omega,s}(0)\left[\mathfrak{g}\hat{a}^\dagger_{\omega,i}(0) - \mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}_{\omega,s}(0)\right] - \left[\mathfrak{g}^*\hat{a}_{\omega,s}(0) + \mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}^\dagger_{\omega,i}(0)\right]\hat{a}_{\omega,i}(0), \tag{C.33}$$

dont on peut facilement vérifier l'hermiticité :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}_S^\dagger &= -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \left[\mathfrak{g}^*\hat{a}_{\omega,i}(0) + \mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}^\dagger_{\omega,s}(0)\right]\hat{a}_{\omega,s}(0) - \hat{a}^\dagger_{\omega,i}(0)\left[\mathfrak{g}\hat{a}^\dagger_{\omega,s}(0) - \mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}_{\omega,i}(0)\right] \\
&= -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \hat{a}^\dagger_{\omega,s}(0)\left[-\mathfrak{g}\hat{a}^\dagger_{\omega,i}(0) + \mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}_{\omega,s}(0)\right] + \left[\mathfrak{g}^*\hat{a}_{\omega,s}(0) + \mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}^\dagger_{\omega,i}(0)\right]\hat{a}_{\omega,i}(0) \\
&= \hat{\mathcal{U}}_S.
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Nous n'avons pas explicitement écrit la dépendance de ΔK en fonction de ω, mais il faut bien se souvenir que $\Delta K(\omega_0 + \omega) = -\beta_2(\omega_0)\omega^2$. On retrouve bien les équations (C.15) en substituant (C.33) dans les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}_{\omega,s}(z)}{\mathrm{d}z} &= \hat{T}^{\dagger}(z)\left[\hat{a}_{\omega,s}(0), \hat{\mathcal{U}}_S\right]\hat{T}(z),\\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}^{\dagger}_{\omega,i}(z)}{\mathrm{d}z} &= \hat{T}(z)\left[\hat{a}^{\dagger}_{\omega,i}(0), \hat{\mathcal{U}}_S\right]\hat{T}^{\dagger}(z).\end{aligned}\right\} \tag{C.35}$$

On obtient l'état après une longueur de propagation L directement en utilisant $\hat{T}(L)$:

$$\begin{aligned}|\Psi(L)\rangle &= \hat{T}(L)|\Psi(0)\rangle\\ |\Psi(L)\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{U}}_S L}|\Psi(0)\rangle\\ |\Psi(L)\rangle &= \sum_{n\geq 0}\frac{\left(-\mathrm{i}\hat{\mathcal{U}}_S L\right)^n}{n!}|vac\rangle.\end{aligned} \tag{C.36}$$

On peut regarder ce que donne l'application de $\hat{\mathcal{U}}_S$ puis de $(\hat{\mathcal{U}}_S)^2$ sur l'état vide, afin de déduire l'état final. En utilisant les relations de création et d'annihilation de photons sur des états de Fock continus (A.2), on trouve :

$$\hat{\mathcal{U}}_S|vac\rangle = \mathrm{i}\sqrt{2}\mathfrak{g}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega|\omega_0+\omega, \omega_0-\omega\rangle. \tag{C.37}$$

On crée deux photons intriqués à partir du vide. Pour $(\hat{\mathcal{U}}_S)^2$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_S\hat{\mathcal{U}}_S|vac\rangle = &-\sqrt{2}\mathfrak{g}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega'\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\left\{\hat{a}^{\dagger}_{\omega,s}(0)\left[\mathfrak{g}\hat{a}^{\dagger}_{\omega,i}(0)-\mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}_{\omega,s}(0)\right]\right.\\ &\left.-\left[\mathfrak{g}^*\hat{a}_{\omega,s}(0)+\mathrm{i}\frac{\Delta K}{2}\hat{a}^{\dagger}_{\omega,i}(0)\right]\hat{a}_{\omega,i}(0)\right\}|\omega_0+\omega', \omega_0-\omega'\rangle\\ = &-\sqrt{4!}\mathfrak{g}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega'\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega|\omega_0+\omega', \omega_0-\omega', \omega_0+\omega, \omega_0-\omega\rangle + 2\,|\mathfrak{g}|^2\,|vac\rangle\\ &+\mathrm{i}\frac{4\mathfrak{g}\Delta K}{\sqrt{2}}|\omega_0+\omega, \omega_0-\omega\rangle,\end{aligned} \tag{C.38}$$

on peut voir cette transformation comme la création de deux photons enchevêtrés puis, soit ces photons sont annihilés, soit ils sont annihilés puis recréés à la même fréquence, soit deux autres photons sont créés. Les sommes successives font intervenir de plus en plus de termes mais toujours avec, soit la création de deux photons corrélés en fréquence, soit l'annihilation de deux photons corrélés en fréquence. On peut alors mettre (C.36) sous la forme d'un état de Fock :

$$|\Psi(L)\rangle = \sum_{n\geq 1} f_n|n, n\rangle, \tag{C.39}$$

où $|n, n\rangle$ exprime un état à $2n$ photons pour lequel chaque élément est corrélé avec un autre.

On peut exprimer cet état à l'aide des états de Fock continus :

$$f_n|n,n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n \dots \mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\dots,\omega_n)|\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\dots,\omega_0+\omega_n,\omega_0-\omega_n\rangle, \tag{C.40}$$

pour $n > 0$ et $f_0|0,0\rangle = f_0|vac\rangle$.

Ceci permet d'obtenir la relation :

$$\langle\Psi(L)|\Psi(L)\rangle = 1 = \sum_{n\geq 0}|f_n|^2 = |f_0|^2 + \sum_{n>0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n \dots \mathrm{d}\omega_1 \,|f_n(\omega_1,\dots,\omega_n)|^2 . \tag{C.41}$$

En utilisant le fait que :

$$\hat{a}_{\omega,s}(0)|vac\rangle = 0, \tag{C.42}$$

et que :

$$\begin{aligned}\hat{T}(L)\hat{a}_{\omega,s}(0)\hat{T}^\dagger(L) =& \hat{T}^\dagger(-L)\hat{a}_{\omega,s}(0)\hat{T}(-L)\\ =& \left[\cosh(\kappa L) + \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa L)\right]\hat{a}_{\omega,s}(0) - \frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa L)\hat{a}^\dagger_{\omega,i}(0),\end{aligned} \tag{C.43}$$

on obtient la relation :

$$\hat{T}^\dagger(-L)\hat{a}_{\omega,s}(0)\hat{T}(-L)|\Psi(L)\rangle = \hat{T}(L)\hat{a}_{\omega,s}(0)\hat{T}^\dagger(L)\hat{T}(L)|vac\rangle = \hat{T}(L)\hat{a}_{\omega,s}(0)|vac\rangle = 0, \tag{C.44}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\left[\cosh(\kappa L) + \frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa L)\right]&\hat{a}_{\omega,s}(0) - \frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa L)\hat{a}^\dagger_{\omega,i}(0)\\ &\times \sum_{n\geq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n \dots \mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\dots,\omega_n)\\ &\times |\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\dots,\omega_0+\omega_n,\omega_0-\omega_n\rangle = 0.\end{aligned} \tag{C.45}$$

Nous pouvons une nouvelle fois rappeler que $\hat{a}_{\omega,s}(0)$ désigne un opérateur à la fréquence $\omega_0+\omega$, $\hat{a}_{\omega,i}(0)$ désigne un opérateur à la fréquence $\omega_0-\omega$, et le désaccord de phase ΔK est défini à la fréquence signal avec $\Delta K(\omega_0+\omega) = -\beta_2(\omega_0)\omega^2$. Comme les variables ω_n sont indépendantes, on peut évaluer les différents termes de cette expression, où :

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\omega,s}(0)&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n \dots \mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\dots,\omega_n)|\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\dots,\omega_0+\omega_n,\omega_0-\omega_n\rangle\\ &= \sqrt{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_n \dots \mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\dots,\omega_n)\delta(\omega-\omega_n)|\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\dots,\omega_0-\omega_n\rangle,\end{aligned} \tag{C.46}$$

représente un état à $2n-1$ photons et :

$$\hat{a}^{\dagger}_{\omega,i}(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_n\ldots\mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\ldots,\omega_n)|\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\ldots,\omega_0+\omega_n,\omega_0-\omega_n\rangle$$
$$=\sqrt{2(n+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_n\ldots\mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\ldots,\omega_n)|\omega_0-\omega,\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\ldots,\omega_0+\omega_n,\omega_0-\omega_n\rangle, \tag{C.47}$$

représente un état à $2n+1$ photons. En regroupant les état comportant le même nombre de photons on obtient que la relation suivante doit être vérifiée pour tout n :

$$\left[\cosh\left(\kappa(\omega)L\right)+\frac{\mathrm{i}\Delta K(\omega)}{2\kappa(\omega)}\sinh\left(\kappa(\omega)L\right)\right]$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\ldots\mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\ldots,\omega)\delta(\omega-\omega)|\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\ldots,\omega_0-\omega\rangle$$
$$-\frac{g}{\kappa(\omega)}\sinh\left(\kappa(\omega)L\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_n\ldots\mathrm{d}\omega_1 f(\omega_1,\ldots,\omega_n)|\omega_0-\omega,\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\ldots,\omega_0+\omega_n,\omega_0-\omega_n\rangle=0. \tag{C.48}$$

Dans cette dernière équation, on a explicité les dépendances en ω de κ et ΔK, qu'il nous semble important de rappeler pour bien comprendre le calcul. On obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega_n\ldots\mathrm{d}\omega_1$$
$$\times\left\{\left[\cosh\left(\kappa(\omega)L\right)+\frac{\mathrm{i}\Delta K(\omega)}{2\kappa(\omega)}\sinh\left(\kappa(\omega)L\right)\right]f(\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega)-\frac{g}{\kappa(\omega)}\sinh\left(\kappa(\omega)L\right)f(\omega_1,\ldots,\omega_n)\right\}$$
$$\times|\omega_0-\omega,\omega_0+\omega_1,\omega_0-\omega_1,\ldots,\omega_0+\omega_n,\omega_0-\omega_n\rangle=0, \tag{C.49}$$

ou encore :

$$\left[\cosh(\kappa L)+\frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa L)\right]f(\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega)-\frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa L)f(\omega_1,\ldots,\omega_n)=0. \tag{C.50}$$

La supposition de l'indépendance des différents ω_i conduit naturellement à la forme :

$$f(\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega)=r(\omega)f(\omega_1,\ldots,\omega_n), \tag{C.51}$$

où

$$r(\omega)=\frac{\frac{g}{\kappa}\sinh(\kappa L)}{\cosh(\kappa L)+\frac{\mathrm{i}\Delta K}{2\kappa}\sinh(\kappa L)}. \tag{C.52}$$

On a par recurrence :

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = f_0 \prod_{i=1}^{n} r(\omega_i). \tag{C.53}$$

On obtient f_0 en utilisant la relation de normalisation (C.41) :

$$|f_0|^2 \left[1 + \sum_{n\geq 1} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_i \, |r(\omega_i)|^2 \right] = 1. \tag{C.54}$$

On peut alors simplifier l'expression de $r(\omega)$ dans deux cas, suivant que $\kappa = \sqrt{g^2 - \Delta K^2/4}$ soit réel ou soit imaginaire pur. Dans le cas où l'on regarde les photons intriqués parfaitement dégénéré, $\omega = 0$, $\Delta K = 0$ et $\kappa = g$, on a :

$$r(0) = \tanh(gL) \approx gL. \tag{C.55}$$

Dans le cas où $\Delta K >> 2g$, alors $\kappa = \mathrm{i}\Delta K/2$, et comme $\sinh(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sin(x)$ et $\cosh(\mathrm{i}x) = \cos(x)$ alors :

$$\begin{aligned}
r(\omega) =& \frac{gL}{2} \frac{\frac{\sin\left(\frac{\Delta KL}{2}\right)}{\Delta KL}}{\cos\left(\frac{\Delta KL}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Delta KL}{2}\right)} \\
r(\omega) =& \frac{gL}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta KL}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta KL}{2}} \\
r(\omega) =& \frac{gL}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{\beta_2(\omega_0)\omega^2 L}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_2(\omega_0)\omega^2 L}{2}}.
\end{aligned} \tag{C.56}$$

Cette seconde version est valable pour la majeure partie de la bande passante des photons générés. En effet, on a déterminé que la bande passante de r était déterminée par les valeurs extrémales $\kappa \approx \pm 1, 4/L$. Comme dans nos conditions $g << 1$, alors la partie du spectre où g n'est pas négligeable peut être négligée. On peut alors évaluer f_0 en utilisant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \mathrm{sinc}\left(x^2\right)^2 = 4\sqrt{\pi}/3 \approx 2,36$:

$$\begin{aligned}
|f_0|^2 =& \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega_i \, |r(\omega_i)|^2} \\
|f_0|^2 =& \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2g^2L^2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta_2(\omega_0)L}} \right)^n} \\
|f_0|^2 =& 1 - \frac{2g^2L^2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta_2(\omega_0)L}} \\
f_0 =& \sqrt{1 - \frac{2g^2L^2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta_2(\omega_0)L}}}.
\end{aligned} \tag{C.57}$$

On considère que la puissance de pompe est très faible et donc que l'on peut négliger les termes $r(\omega)^n$ pour $n > 1$. L'état de sortie est alors composé de l'état vide et de paires de photons. Si l'on ne s'intéresse qu'aux paires de photons, l'état vide n'apportant pas de contribution au taux de comptage, on peut écrire l'état intriqué à deux photons en sortie de cristal :

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle =& \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega)|\omega_0+\omega, \omega_0-\omega\rangle \\ =& bf_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \frac{gL}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\beta_2(\omega_0)\omega^2 L}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_2(\omega_0)\omega^2 L}{2}}|\omega_0+\omega, \omega_0-\omega\rangle \\ =& \frac{gL}{2\sqrt{2\left(1-f_0^2\right)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{sinc}\left(\frac{\beta_2(\omega_0)\omega^2 L}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta_2(\omega_0)\omega^2 L}{2}}|\omega_0+\omega, \omega_0-\omega\rangle. \end{aligned} \tag{C.58}$$

où $f(\omega) = bf_0 r(\omega)$ a été renormalisé par la constante b vérifiant :

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 2b^2 f_0^2\left(1-f_0^2\right) = 1, \tag{C.59}$$

$$b = \frac{1}{f_0\sqrt{2\left(1-f_0^2\right)}}. \tag{C.60}$$

Document réalisé avec LaTeX et :
le style LaTeX pour Thèse de Doctorat créé par S. Galland — http://www.multiagent.fr/ThesisStyle
la collection de paquets `tex-upmethodology` — http://www.arakhne.org/tex-upmethodology/

Résumé :

Ce manuscrit de thèse s'intéresse à l'étude théorique et à l'observation d'effets quantiques résultant de la manipulation de photons en fréquence. Ainsi nous rapportons une expérience d'interférence à deux photons, pour laquelle l'intrication et la manipulation des photons survient dans le domaine des fréquences. Nous montrons que cette figure d'interférence est sensible à la dispersion des deux photons jumeaux et que ce phénomène peut être compensé de manière non-locale. D'un autre coté, nous étudions la réalisation d'une marche aléatoire quantique établie par la modulation de phase. Nous mettons en évidence un comportement intéressant de ces marches et suggérons un schéma expérimental.

Mots-clés : Intrication quantique, interférences quantiques longue distance, optique intégrée, modulation de phase non-locale, dispersion non-locale, marche aléatoire quantique.

Abstract:

This manuscript deals with a theoretical and experimental study of quantum effects taking place in the frequency domain. On one side, we report a two photons interference experiment, where both the entanglement of the photons and their manipulation take place in the frequency domain. We show that this interference pattern is sensitive to the dispersion of both photons and allows us to perform a nonlocal dispersion cancellation. On the other side we study the implementation of a quantum walk based on the phase modulation. We predict an interesting behavior of these quantum walks and suggest a physical implementation.

Keywords: quantum entanglement, long-distance quantum interferences, integrated optics, nonlocal phase modulation, nonlocal dispersion, quantum random walk.

SPIM

■ École doctorale SPIM 1 rue Claude Goudimel F - 25030 Besançon cedex

■ tél. +33 (0)3 81 66 66 02 ■ **ed-spim@univ-fcomte.fr** ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

UFC
UNIVERSITÉ
DE FRANCHE-COMTÉ