



AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ
ÉCOLE DOCTORALE 184
UFR DES SCIENCES
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE (I2M), UMR 7373

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Mathématiques

Benjamin CONTRI

Équations de réaction-diffusion dans un environnement périodique en temps
Applications en médecine

Soutenue le 06/07/2016 devant le jury :

Mostafa ADIMY	INRIA Lyon	Rapporteur
Assia BENABDALLAH	Aix Marseille Université	Examinateur
Guillemette CHAPUISAT	Aix Marseille Université	Directrice de thèse
Emmanuel GRENIER	ENS Lyon	Examinateur
François HAMEL	Aix Marseille Université	Directeur de thèse
Mariana HARAGUS	Université de Franche-Comté	Examinateur
Elisabeth LOGAK	Université de Cergy-Pontoise	Rapporteur

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude d'équations de réaction-diffusion dans un environnement périodique en temps. Ces équations modélisent l'évolution d'une tumeur cancéreuse en présence d'un traitement qui correspond à une immunothérapie dans la première partie du manuscrit, et à une chimiothérapie cytotoxique dans la suite.

On considère dans un premier temps des nonlinéarités périodiques en temps pour lesquelles 0 et 1 sont des états d'équilibre linéairement stables. On étudie l'unicité, la monotonie et la stabilité de fronts pulsatoires. On exhibe également des cas d'existence et de non-existence de telles solutions.

Dans la deuxième partie de la thèse, on commence par travailler sur des nonlinéarités périodiques en temps qui sont la somme d'une fonction positive traduisant la croissance de la tumeur et d'un terme de mort de cellules cancéreuses du au traitement. On s'intéresse aux états d'équilibres de telles nonlinéarités, et on va déduire de cette étude des propriétés de propagation de perturbations et l'existence de fronts pulsatoires. On raffine ensuite le modèle en considérant des nonlinéarités qui sont la somme d'une fonction asymptotiquement périodique en temps et d'un terme perturbatif. On prouve notamment que les propriétés relatives à la propagation de perturbations restent valables dans ce cadre là. Pour finir, on s'intéresse à l'influence du protocole de traitement.

Mots-clés: équation de réaction-diffusion, nonlinéarité bistable, nonlinéarité KPP, valeur propre principale, front pulsatoire, vitesse de propagation, modèles médicaux.

Abstract

This PhD thesis investigates reaction-diffusion equations in a time periodic environment. These equations model the evolution of a cancerous tumor in the presence of a treatment that corresponds to an immunotherapy in the first part of the manuscript, and to a cytotoxic chemotherapy after.

We begin by considering time-periodic nonlinearities for which 0 and 1 are linearly stable equilibrium states. We study uniqueness, monotonicity and stability of pulsating fronts. We also provide some conditions for the existence and non-existence of such solutions.

In the second part of the manuscript, we begin by working on time-periodic nonlinearities which are the sum of a positive function which stands for the growth of the tumor in the absence of treatment and of a death term of cancerous cells due to treatment. We are interested in equilibrium states of such nonlinearities, and we will infer from this study spreading properties and existence of pulsating fronts. We then refine the model by considering nonlinearities which are the sum of an asymptotic periodic nonlinearity and of a small perturbation. In particular we prove that the spreading properties remain valid in this case. To finish, we are interested in the influence of the protocol of the treatment.

Keywords: Reaction-diffusion equation, bistable nonlinearity, KPP nonlinearity, principal eigenvalue, pulsating front, spreading speed, medical models.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mes directeurs de thèse Guillemette Chapuisat et François Hamel. Je n'aurais pu rêver meilleur encadrement tant ils ont été présents et bienveillants à mon égard tout au long de ces quatre années. Travailler à leur coté aura été extrêmement enrichissant pour moi.

Mostafa Adimy et Elisabeth Logak m'ont fait l'honneur de bien vouloir consacrer du temps à la relecture de ce manuscrit. Je tiens à les en remercier, tout comme Assia Benabdallah, Emmanuel Grenier et Mariana Haragus qui ont accepté de siéger dans mon jury.

Un grand merci aux membres du laboratoire dont j'ai eu la chance de suivre les cours durant mes années de licence et de master, ainsi qu'à mes collègues thésards Benjamin, Thomas A, Thomas B, Damien, Rima, Fanny, Florent, Flore, Guillaume, Caroline, Cécile, Julie, Marie-Ève, Remi, Nicolas, Weiwei et Annamaria.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Jonathan Martin pour avoir relu une grande partie de ce manuscrit ainsi qu'à Michel Cristofol pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de mes travaux et pour ses précieux conseils.

Merci également à tous les membres des projets ERC Readi et ANR Nonlocal qui m'ont chaleureusement accueilli et grâce auxquels j'ai pu suivre des exposés passionnantes sur des sujets proches de mon thème de recherche.

J'ai une pensée pour mes parents et mon frère Arthur qui, chacun à leur manière m'ont permis d'arriver où j'en suis aujourd'hui.

Aurélie, je conclus ces quelques lignes en te remerciant pour ton aide précieuse durant ces derniers mois, mais surtout pour la douceur de vivre chaque jour à tes côtés et pour ce petit bonheur qui fait parfois le dinosaure.

Sommaire

Chapitre 1

Introduction

1.1	Cadre général	1
1.1.1	Problématique de la thèse	1
1.1.2	Equations de réaction-diffusion en milieu homogène	3
1.1.3	Equations de réaction-diffusion en milieu hétérogène	5
1.1.4	Etats d'équilibre et stabilité asymptotique	8
1.2	Fonction bistable en moyenne hétérogène en temps	9
1.2.1	Cadre général et motivations biologiques	9
1.2.2	Unicité, monotonie et stabilité de fronts pulsatoires	11
1.2.3	Existence de fronts pulsatoires pour des nonlinéarités bistables en moyenne de petite période	11
1.2.4	Existence de fronts pulsatoires et perturbations	13
1.2.5	Un exemple de nonlinéarités bistables en moyenne pour lesquelles il n'existe pas de front pulsatoire	13
1.2.6	Perspectives	15
1.3	Etude numérique dans le cas de nonlinéarités bistables en moyenne	16
1.3.1	Cadre de l'étude	16
1.3.2	Cas où g est une fonction bistable	17
1.3.3	Cas où g est une fonction tristable	17
1.3.4	Bilan	18
1.4	Un modèle en sciences médicales utilisant une nonlinéarité de type KPP hétérogène en temps	19
1.4.1	Cadre médical	19
1.4.2	Nonlinéarités périodiques en temps	20
1.4.3	Nonlinearités asymptotiquement périodiques en temps avec perturbation .	23
1.4.4	Influence du protocole de traitement	26
1.4.5	Perspectives	27

Chapitre 2

Pulsating fronts for bistable on average reaction-diffusion equations in a time periodic environment

2.1	Introduction and main results	29
2.1.1	Context	30
2.1.2	Uniqueness and monotonicity of pulsating fronts	31
2.1.3	Asymptotic stability of pulsating fronts	31
2.1.4	Existence and convergence of pulsating fronts for small periods	32
2.1.5	Existence and convergence of pulsating fronts for small perturbations	33
2.1.6	An example of bistable on average nonlinearities for which pulsating front does not exist	34
2.2	Preliminaries on the characterization of the asymptotic stability of equilibrium state	36
2.3	Uniqueness and monotonicity of pulsating front	40
2.3.1	Two comparison principles	40
2.3.2	Monotonicity of the front	43
2.3.3	Uniqueness of (U, c)	45
2.4	Asymptotic stability of pulsating waves	46
2.5	Pulsating fronts for nonlinearities of small periods	54
2.5.1	Existence and uniqueness	55
2.5.2	Convergence of the couple (c_T, U_T) as $T \rightarrow 0$	58
2.6	Pulsating fronts for small perturbations of the nonlinearity	64
2.6.1	Existence of pulsating fronts	64
2.6.2	Convergence of the couple $(c_\varepsilon, U_\varepsilon)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$	66
2.7	An example of bistable on average nonlinearities for which pulsating front does not exist	70

Chapitre 3

Etude numérique de solutions d'équations de réaction-diffusion dont la nonlinéarité est bistable en moyenne

3.1	Introduction	75
3.1.1	Cadre de l'étude	75
3.1.2	Méthodes numériques	76
3.2	Cas où g est une fonction bistable	78
3.2.1	Présentation du problème	78
3.2.2	Cas de petites périodes	79
3.2.3	Cas général	79
3.3	Cas où g est une nonlinéarité tristable	80

3.3.1	Présentation du problème	80
3.3.2	Cas où u_g se comporte comme un front	80
3.3.3	Cas où u_g se comporte comme une terrasse de fronts	82
3.4	Bilan	85
Chapitre 4		
Fisher-KPP equations and applications to a model in medical sciences		
4.1	Framework and main results	87
4.1.1	Biological interpretation	88
4.1.2	Mathematical framework	89
4.1.3	Nonlinearities periodic in time	91
4.1.4	Nonlinearities asymptotically periodic in time with perturbation	94
4.1.5	Influence of the protocol of the treatment	96
4.2	Nonlinearities periodic in time	98
4.2.1	Proof of Proposition 4.1.1	98
4.2.2	Proof of Proposition 4.1.4	102
4.2.3	Proof of Proposition 4.1.5	103
4.3	Nonlinearities asymptotically periodic in time with perturbation	109
4.3.1	Proof of Theorem 4.1.6	109
4.3.2	Proof of Proposition 4.1.7	114
4.3.3	Proof of Theorem 4.1.8	116
4.4	Influence of the protocol of the treatment	120
Annexes		123
Annexe A Solutions numériques des équations intervenant dans le chapitre 3		123
Bibliographie		127

Sommaire

Chapitre 1

Introduction

1.1 Cadre général

1.1.1 Problématique de la thèse

Le but de cette thèse est d'étudier l'évolution d'une tumeur cancéreuse traitée par chimiothérapie ou immunothérapie en la modélisant par une équation de réaction-diffusion du type

$$u_t - u_{xx} = f(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

La fonction inconnue u représente la densité de cellules cancéreuses dans la tumeur. La nonlinéarité f doit prendre en compte la croissance de la tumeur en l'absence de traitement, mais aussi la réduction de celle-ci en présence d'une thérapie. Dans tout ce manuscrit, on suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et qu'elle vérifie

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Concrètement, cela veut dire qu'on ne s'intéresse pas à la génération de la tumeur. La question principale qui se pose d'un point de vue médical est de déterminer les situations où le patient guérit. Mathématiquement, cela nécessite de caractériser la stabilité de l'état d'équilibre 0. On traite de deux types différents de stabilité dans cette thèse. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(t, u) & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.2)$$

On dit que l'état d'équilibre 0 est uniformément asymptotiquement stable si pour une condition initiale u_0 assez proche de 0, la solution u de (1.2) converge uniformément vers 0 quand t tend vers l'infini. On dit que l'état 0 est inconditionnellement stable dans le cas où cette convergence vers 0 est vérifiée quelle que soit la condition initiale u_0 . D'un point de vue médical, le premier type de stabilité mentionné ici est plus restrictif que le second car il nécessite que la tumeur ne soit pas trop grosse lorsqu'elle est détectée pour que le patient guérisse.

La première partie de la thèse concerne la modélisation du traitement par immunothérapie. Le principe d'une immunothérapie est d'injecter une substance dans l'organisme du patient en vue de stimuler ses défenses immunitaires. Lorsque ce type de traitement agit, il est efficace seulement pour des tumeurs de petites tailles. Ainsi, à un instant t où le traitement est effectif, la nonlinéarité $f(t, \cdot)$ doit être négative pour de petites densités de cellules cancéreuses et positive

lorsque cette densité dépasse un certain seuil. Par ailleurs, on suppose que la nonlinéarité est positive en l'absence de médication pour transcrire le fait que dans cette situation, la tumeur grossit. Enfin, la dernière hypothèse de modélisation est de considérer que le traitement est administré à intervalles de temps réguliers. Une première approche consisterait donc à travailler sur des nonlinéarités f qui oscillent de façon périodique au cours du temps entre une fonction bistable homogène et une fonction de type monostable homogène. En particulier, ce type de fonction vérifie

$$f(t, 1) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et il se pose alors à nouveau la question de la stabilité de l'état d'équilibre 1, qui va caractériser cette fois-ci les cas où le cancer va envahir entièrement le tissu sain. On va travailler ici sur des nonlinéarités plus générales que celles décrites précédemment. On suppose que les états 0 et 1 sont tous les deux des états d'équilibre de la fonction f , et qu'ils sont uniformément asymptotiquement stables. C'est une hypothèse conforme à ce que l'on observe dans la réalité car la taille de la tumeur au début de l'observation est un facteur prédictif important de l'issue de la maladie. On montre que pour de telles nonlinéarités, que l'on qualifie de bistables en moyenne, on peut étendre certains résultats propres aux nonlinéarités bistables homogènes.

La deuxième partie de cette thèse est basée sur l'étude d'un traitement par chimiothérapie. Ce type de médication consiste à injecter au patient une substance qui arrête la division des noyaux des cellules cancéreuses. En règle générale, un traitement par chimiothérapie est administré à intervalle de temps réguliers par cycles qui sont composés d'un laps de temps où le traitement agit et d'une période de repos nécessaire à la régénération des globules blancs qui sont affectés par le médicament. Pour modéliser cela, on travaille dans un premier temps sur des nonlinéarités du type

$$f(t, u) = g(u) - m^T(t)u.$$

La fonction g est une fonction positive qui traduit la croissance de la tumeur. Le terme de mort de cellules cancéreuses est pondéré par la fonction T -périodique m^T qui est nulle aux instants où le patient n'est pas traité et strictement positive lorsque le traitement agit. Concrètement, $m^T(t)$ représente la concentration de médicament dans le corps du patient à l'instant t . Il faut noter qu'ici, l'état 1 n'est plus nécessairement un état d'équilibre associé à la nonlinéarité f . Concernant la stabilité de l'état d'équilibre 0 (en d'autres termes la guérison du patient), on suppose que celle-ci dépend à la fois de la taille de la tumeur au moment où la maladie est détectée, mais aussi de la durée T des cycles de chimiothérapie. Plus précisément, on suppose que l'état d'équilibre 0 est uniformément asymptotiquement stable pour des périodes T inférieures à une valeur critique T^* . D'un point de vue médical, cette hypothèse est naturelle car elle signifie que si la tumeur est détectée à un stade précoce, alors, à condition de traiter le patient de façon massive, celui-ci va guérir. On raffine ensuite notre modèle. Sachant que dans la réalité les cycles de traitement décrits précédemment ne sont pas strictement identiques (oubli du médicament par le patient, délai entre l'injection et le début de l'efficacité du produit...), on est amené à considérer des nonlinéarités qui ne sont pas nécessairement périodiques mais qui sont la somme d'une perturbation et d'une fonction asymptotiquement périodique. Enfin, étant donné une quantité de médicament à administrer au patient, on s'intéresse à la façon optimale de le faire. Plus précisément, on cherche à savoir s'il vaut mieux donner une forte dose sur un laps de temps court et laisser plus de repos au patient, ou bien si au contraire il vaut mieux traiter le patient de façon plus diffuse, quitte à diminuer la période d'interruption avant le cycle suivant. Il faut noter qu'on ne prend pas en compte les effets secondaires du traitement, mais seulement l'influence de la période sur son efficacité.

1.1.2 Equations de réaction-diffusion en milieu homogène

L'étude des équations de réaction-diffusion débute dans les années 1930. Fisher en 1937 [23] et Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov en 1938 [32] modélisent l'invasion d'un gène mutant dans une population avec l'équation

$$u_t - u_{xx} = f(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

La quantité $u(t, x)$ représente la densité de population du gène mutant au temps t et à la position x tandis que le terme de réaction $f(u)$ correspond au taux de croissance de la population. Ils considèrent des nonlinéarités satisfaisant

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f'(0) > 0, \quad f'(1) < 0, \quad f > 0 \text{ sur } (0, 1), \quad (1.4)$$

$$f(u) \leq f'(0)u, \quad \forall u \in [0, 1]. \quad (1.5)$$

On parle de nonlinéarité monostable si f satisfait (1.4). Si de plus f vérifie (1.5), on dit que la fonction est de type KPP. Pour de telles nonlinéarités, ils s'intéressent à une classe particulière de solutions, appelés fronts plans, qui traduisent l'envahissement d'un état d'équilibre par un autre et la vitesse à laquelle celui-ci a lieu.

Définition I. Un front plan connectant 0 et 1 pour l'équation (1.3) est une solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle qu'il existe un réel c et une fonction $U : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$\begin{cases} u(t, x) = U(x - ct), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = 1, \quad U(+\infty) = 0, \end{cases}$$

Ainsi, un front plan connectant 0 et 1 solution de l'équation (1.3) est une couple (c, U) solution du problème

$$\begin{cases} U'' + cU' + f(U) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = 1, \quad U(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Notons qu'il existe d'autres définitions de tels fronts (notamment où l'on n'impose pas forcément à U d'être à valeur dans $[0, 1]$), mais dans la suite de ce manuscrit, on ne considérera que des fronts plans donnés par la définition I.

Dans [32], il est prouvé qu'il existe un unique (à translation près) front plan U_c connectant 0 et 1 à la vitesse c si et seulement si $c \geq c^* := 2\sqrt{f'(0)}$.

En 1978, toujours pour f satisfaisant (1.4) et (1.5), Aronson et Weinberger [2] généralisent les résultats précédents à l'équation multidimensionnelle

$$u_t - \Delta u = f(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$. Ils prouvent également une propriété d'expansion, connue sous le nom de "Hair trigger effect" : pour une donnée initiale positive à support compact u_0 non identiquement nulle, la solution u de l'équation (1.3) vérifie $u(t, x) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$. De plus, cette expansion a lieu à la vitesse c^* . C'est ce résultat qui donne un sens à la dénomination de fonction monostable pour ce type de nonlinéarités.

En 1960, Kanel [31] introduit deux nouvelles classes de nonlinéarités. On dit que f est de type combustion s'il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$f(u) = f(1) = 0 \text{ si } u \in [0, \theta], \quad f'(1) < 0 \text{ et } f > 0 \text{ sur } (\theta, 1). \quad (1.6)$$

On parle de fonction bistable s'il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$f(0) = f(\theta) = f(1) = 0, \quad f'(0) < 0, \quad f'(\theta) > 0, \quad f'(1) < 0,$$

$f < 0$ sur $(0, \theta)$ et $f > 0$ sur $(\theta, 1)$. (1.7)

Dans le cadre de la modélisation de phénomènes de combustion, θ représente la température d'ignition en dessous de laquelle la combustion est impossible. Dans le cadre de la dynamique des populations, ces fonctions modélisent le fait qu'en dessous d'une certaine densité de population, celle-ci à tendance à s'éteindre. Concrètement, cela correspond au fait que lorsque la densité de population est faible, la probabilité de rencontre des individus est proche de zéro et ainsi, la population n'évolue pas (cas (1.6)) ou diminue (cas (1.7)). On parle d'effet Allee. Pour ces deux types de nonlinéarités, il existe un unique front (à translation près) de vitesse c^{**} unique elle aussi. Aronson et Weinberger prouvent dans [2] l'existence d'un effet de seuil qui justifie la dénomination de fonction bistable : si on a $u_0 < \theta$ sur \mathbb{R} , où θ est le zéro intermédiaire de la nonlinéarité, alors la solution u de l'équation (1.3) associée à la condition initiale u_0 vérifie $u(t, x) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, tandis que si $u_0 > \theta$ sur \mathbb{R} , on a $u(t, x) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$. Fife et McLeod en 1977 [22] montrent une propriété de stabilité du front. Si la fonction u_0 "ressemble" à un front (plus précisément si $u_0 > \theta + \varepsilon$ quand $x \rightarrow -\infty$ et si $u_0 < \theta - \varepsilon$ quand $x \rightarrow +\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$), alors, la solution de l'équation (1.3) associée à la condition initiale u_0 converge vers un front plan quand $t \rightarrow +\infty$. De plus, cette convergence est exponentielle. L'article [22] étudie des nonlinéarités plus générales que les fonctions bistables pour lesquelles il existe plus d'un zéro interne. On parlera de fonctions multistables lorsque

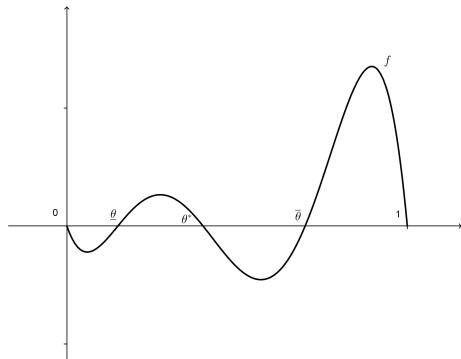
$$f(0) = f(1) = 0, \quad f'(0) < 0, \quad f'(1) < 0. \quad (1.8)$$

Restreignons-nous maintenant au cas d'une nonlinéarité tristable qui est une fonction multistable particulière telle qu'il existe $0 < \underline{\theta} < \theta^* < \bar{\theta} < 1$ vérifiant

$$f(0) = f(\underline{\theta}) = f(\theta^*) = f(\bar{\theta}) = f(1) = 0,$$

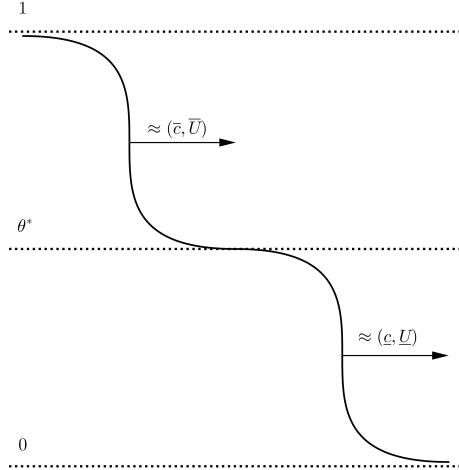
$$f'(0) < 0, \quad f'(\underline{\theta}) > 0, \quad f'(\theta^*) < 0, \quad f'(\bar{\theta}) > 0, \quad f'(1) < 0,$$

$f < 0$ sur $(0, \underline{\theta}) \cup (\theta^*, \bar{\theta})$, $f > 0$ sur $(\underline{\theta}, \theta^*) \cup (\bar{\theta}, 1)$. (1.9)



D'après ce qui précède, il existe un unique front plan \underline{U} connectant 0 et θ^* avec une vitesse \underline{c} (unique elle aussi), et un unique front plan \bar{U} connectant θ^* et 1 à une vitesse \bar{c} . Fife et McLeod s'intéressent à l'existence d'un front plan connectant 0 à 1 dans cette situation. Si $\underline{c} < \bar{c}$, alors un tel front existe et est unique, alors que si $\underline{c} \geq \bar{c}$ il n'y a pas de front reliant 0 et 1. Néanmoins, sous de bonnes conditions sur la fonction u_0 , la solution de (1.3) avec u_0 comme condition initiale

converge vers ce qu'on appelle une terrasse de fronts. Pour schématiser, une terrasse de fronts peut être comparée à un escalier dont chaque marche se comporte comme un front plan. De plus la vitesse des fronts qui composent la terrasse est ordonnée : la plus rapide en bas et la plus lente en haut. Dans le cas d'une fonction tristable, la terrasse va se composer de deux marches. Celle du haut se comporte comme \bar{U} et celle du bas comme \underline{U} .



Pour plus de détails sur cette notion, on peut se reporter aux articles de Ducrot, Giletti et Matano [18] et de Fife et McLeod [22]. Notons que le cas $c = \bar{c}$ n'est pas traité dans [22], mais dans [27] par Hamel et Omrani pour des équations plus générales. Enfin, il est important de préciser que les résultats que l'on vient de mentionner se généralisent aux cas de fonctions comportant plus de triplets de zéros consécutifs.

1.1.3 Equations de réaction-diffusion en milieu hétérogène

Hétérogénéité périodique en espace

On considère des équations de la forme

$$u_t - u_{xx} = f^L(x, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

où f est une fonction L -périodique en espace. L'étude des équations de réaction-diffusion hétérogènes en espace débute en 1979 avec les travaux de Freidlin et Gärtner [25] qui considèrent une nonlinéarité de la forme $f(x, u) = u(\mu(x) - u)$, où μ est une fonction périodique. Dans leur article, ils étendent les propriétés d'expansion vérifiées dans le cas KPP homogène. En général, lorsque la nonlinéarité n'est pas homogène, il n'existe plus de front plan solution de (1.10). Pour de telles équations, Shigesada, Kawasaki et Teramoto en 1986 dans [48] et Xin en 1991 dans [50] définissent en parallèle une notion plus générale que les fronts plans : les fronts pulsatoires.

Définition II. *Un front pulsatoire connectant 0 et 1 pour l'équation (1.10) est une solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle qu'il existe un réel c et une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant*

$$\begin{cases} u(t, x) = U(x - ct, x), & \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(-\infty, \cdot) = 1, \quad U(+\infty, \cdot) = 0, & \text{uniformément sur } \mathbb{R}, \\ U(\xi, x + L) = U(\xi, x), & \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dès lors, l'existence et les propriétés de tels fronts ont été prouvées pour divers types de nonlinéarités. On peut citer entre autres [4, 50] dans le cas combustion, [8, 10, 19, 30, 35] dans le cas KPP et [14, 21] dans le cas bistable. Concernant la propagation de propagations, Berestycki, Hamel et Roques ont prouvé dans [9] que dans le cas où la nonlinéarité est de type KPP, selon le signe de la valeur propre principale de l'opérateur intervenant dans (1.10) linéarisé en zéro, il existe ou non une solution strictement positive périodique de (1.10). Dans le cas où celle-ci existe, les auteurs prouvent qu'elle envahit tout l'espace au cours du temps.

Hétérogénéité périodique en temps

On considère des équations de la forme

$$u_t - u_{xx} = f^T(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

où $f^T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique en temps. Pour ce type d'équations, Alikakos, Bates et Chen étendent en 1999 dans [1] la notion de front pulsatoire définie dans le cadre périodique en espace au cas périodique en temps.

Définition III. *Un front pulsatoire connectant 0 et 1 pour l'équation (1.11) est une solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle qu'il existe un réel c et une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant*

$$\begin{cases} u(t, x) = U(t, x - ct), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = 1, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformément sur } \mathbb{R}, \\ U(t + T, x) = U(t, x), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi un front pulsatoire connectant 0 et 1 pour l'équation (1.11) est un couple $(c, U(t, \xi))$ solution du problème parabolique

$$\begin{cases} U_t - cU_\xi - U_{\xi\xi} - f^T(t, U) = 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = 1, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformément sur } \mathbb{R}, \\ U(t + T, \xi) = U(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Alikakos, Bates et Chen prouvent dans [1] l'existence, l'unicité et la stabilité globale de fronts pulsatoires solutions du système (1.12) pour des nonlinéarités hétérogènes en temps de type bistable. Leur résultat d'existence est étendu par Fang et Zhao dans [21] lorsque la fonction inconnue est du type $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que les travaux de Fang et Zhao concernent des équations beaucoup plus générales que celles mentionnées ici. Toujours pour des nonlinéarités de type bistables, mais de natures différentes de celles considérées dans [1], Shen dans [45] et [46] définit et prouve l'existence de fronts pulsatoires dans le cadre d'un environnement presque périodique. Revenons sur le fait que les nonlinéarités considérées dans les travaux de Shen et d'Alikakos, Bates et Chen sont toutes qualifiées de bistables alors qu'elles ne satisfont pas les mêmes hypothèses. En fait, les fonctions sur lesquelles les auteurs travaillent généralisent toutes la notion de nonlinéarité bistable homogène, mais en des sens différents. Dans les deux visions, les fonctions f^T vérifient $f^T(\cdot, 0) = f^T(\cdot, 1) = 0$ sur \mathbb{R} . Shen suppose qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f^T(t, \theta(t)) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ f^T(t, u) < 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in (0, \theta(t)), \\ f^T(t, u) > 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in (\theta(t), 1). \end{cases}$$

Alikakos, Bates et Chen imposent à leur nonlinéarité que les valeurs propres principales associées aux états 0 et 1 soient toutes les deux strictement positives, et qu'il existe une unique solution T -périodique $w : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ à l'équation $y' = f(t, y)$ vérifiant

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_u(s, w(s)) ds < 0,$$

On justifiera dans la section 1.2 en quoi ces hypothèses étendent le concept de fonction bistable au cas hétérogène. Fréjacques, dans [24], montre l'existence de fronts pulsatoires pour des nonlinéarités hétérogènes en temps de type monostable et combustion. Liang et Zhao [35] montrent l'existence de fronts pulsatoires et des propriétés de propagation de perturbations dans le cas monostable hétérogène en temps.

Hétérogénéité périodique en temps et en espace

Cette partie est relative aux équations de réaction-diffusion périodiques les plus générales que l'on puisse rencontrer. Leur étude débute en 2005 avec les travaux de Nolen, Rudd et Xin [41] qui travaillent sur l'équation

$$u_t - \Delta u + b(t, x) \cdot \nabla u = f(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une nonlinéarité homogène de type monostable. Ils prouvent l'existence d'un front pulsatoire pour une vitesse c^* dont ils donnent une formulation variationnelle s'ils supposent en plus que leur nonlinéarité est de type KPP.

Nadin s'est penché sur des équations plus générales encore de la forme

$$u_t - \nabla \cdot (A(t, x) \nabla u) + q(t, x) \cdot \nabla u = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, et f est une nonlinéarité positive périodique en temps et en espace. Dans [36], l'auteur s'intéresse aux propriétés de valeurs propres principales généralisées associées à l'opérateur parabolique mis en jeu dans l'équation (1.13). Dans [38], Nadin montre que selon le signe de ces valeurs propres, la solution de (1.13) assortie de la condition initiale $u(0, \cdot) = u_0$ sur \mathbb{R}^n , où $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction nontriviale positive et bornée, converge vers 0 ou vers une solution strictement positive $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de (1.13) périodique à la fois en temps et en espace quand $t \rightarrow +\infty$. Dans [37], l'auteur prouve dans le cas KPP l'existence d'une vitesse critique c^* pour laquelle il existe un front pulsatoire de vitesse c si et seulement si $c \geq c^*$. Nadin démontre également des propriétés de propagation de perturbations. Plus précisément, il prouve que l'état d'équilibre p mentionné ci-dessus envahit tout l'espace au cours du temps à la vitesse c^* . Enfin, dans le cas où f n'est pas de type KPP, Nadin montre l'existence de \bar{c}^* et de \underline{c}^* telles qu'il existe un front pulsatoire de vitesse c lorsque $c \geq \bar{c}^*$ et qu'il n'en existe pas lorsque $c \leq \underline{c}^*$.

Notons que pour les équations du type (1.13), Berestycki et Hamel [5] ont défini en 2007 une notion de front qui englobe toutes celles existantes jusqu'alors : les fronts de transition. Dès lors, de nombreux papiers se sont intéressés à prouver l'existence de tels fronts. On peut citer entre autres [6, 40, 47]. Nous n'en dirons pas plus à ce sujet car ces fronts ne sont pas abordés dans la suite de la thèse.

1.1.4 Etats d'équilibre et stabilité asymptotique

Les résultats mentionnés ici sont détaillés dans le chapitre 2.

Soit $T > 0$ et f^T une fonction T -périodique en temps. On appelle états d'équilibres associés à la nonlinéarité f^T les solutions du système

$$\begin{cases} y' = f^T(t, y) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T). \end{cases} \quad (1.14)$$

Ces solutions jouent un rôle fondamental car si U est un front pulsatoire solution de (1.1), alors, par les estimations paraboliques standards, les deux fonctions $U(\cdot, -\infty)$ et $U(\cdot, +\infty)$ sont des états d'équilibres associés à f^T . En ce sens, on peut considérer que les solutions de (1.14) jouent dans le cas des nonlinéarités hétérogènes en temps le rôle que jouaient les zéros des nonlinéarités dans le cas homogène. Une autre motivation à l'étude des états d'équilibre provient du fait que dans la partie de la thèse concernant le traitement par chimiothérapie, on verra que dans le cas où le patient ne guérit pas, la densité de cellules cancéreuses dans la tumeur converge en temps grand vers une solution strictement positive de (1.14).

On considère l'équation

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) \text{ sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.15)$$

On dit qu'un état d'équilibre $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ associé à f^T est uniformément asymptotiquement stable s'il existe $\eta > 0$ tel que pour toute fonction $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la solution u de (1.15) associée à la condition initiale u_0 vérifie

$$\sup_{\mathbb{R}} |u_0 - \theta(0)| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\mathbb{R}} |u(t, \cdot) - \theta(t)| = 0.$$

Dans le cas où l'état d'équilibre n'est pas uniformément asymptotiquement stable, on dit qu'il est instable.

On définit maintenant la notion de valeur propre principale et de fonction propre principale associées à un état d'équilibre $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et à la nonlinéarité f^T . Il s'agit de l'unique réel λ_{θ, f^T} et de l'unique fonction (à multiplication par une constante près) $\Phi_{\theta, f^T} \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} (\Phi_{\theta, f^T})_t - (\Phi_{\theta, f^T})_{xx} = (f_u^T(t, \theta(t)) + \lambda_{\theta, f^T})\Phi_{\theta, f^T} \text{ sur } \mathbb{R}^2, \\ \Phi_{\theta, f^T} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2, \\ \Phi_{\theta, f^T}(\cdot, \xi) \text{ est } T - \text{périodique, } \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ \Phi_{\theta, f^T}(t, \cdot) \text{ est } 1 - \text{périodique, } \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Le fait que le second membre de la première équation de (1.16) ne dépende pas de la variable spatiale implique que Φ_{θ, f^T} n'en dépend pas non plus. La première équation de (1.16) se réécrit donc

$$(\Phi_{\theta, f^T})_t = (f_u^T(t, \theta(t)) + \lambda_{\theta, f^T})\Phi_{\theta, f^T}, \text{ sur } \mathbb{R}. \quad (1.17)$$

Notons que l'observation précédente implique que Φ_{θ, f^T} et λ_{θ, f^T} ne dépendent pas des dérivées spatiales qui interviennent dans l'opérateur. On trouve donc la même fonction propre principale

et la même valeur propre principale lorsqu'on travaille sur l'opérateur $\partial_t - \partial_{\xi\xi} - c\partial_\xi$, où $c \in \mathbb{R}$. C'est d'ailleurs cet opérateur, qui intervient dans l'équation vérifiée par les fronts pulsatoires, que l'on étudiera dans le deuxième chapitre.

En divisant l'équation (1.17) par Φ_{θ,f^T} puis en intégrant entre 0 et T , on obtient une formulation explicite de la valeur propre principale

$$\lambda_{\theta,f^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(s, \theta(s)) ds. \quad (1.18)$$

On verra que la stabilité asymptotique uniforme d'un état d'équilibre $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (1.14) se caractérise par le signe de la valeur propre principale qui lui est associé. Plus précisément, si $\lambda_{\theta,f^T} > 0$ (resp. < 0), alors l'état d'équilibre est uniformément asymptotiquement stable (resp. instable).

Il existe un autre formalisme qui caractérise les solutions de (1.14) et leur stabilité, basé sur la notion d'application de Poincaré. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $w(\alpha, \cdot)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \text{ sur } (0, +\infty), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

L'application de Poincaré associée à la nonlinéarité f^T est la fonction $P^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$P^T(\alpha) = w(\alpha, T).$$

Si α_0 est un point fixe de P^T , on dit qu'il est stable si $(P^T)'(\alpha_0) < 1$ et instable si $(P^T)'(\alpha_0) > 1$. Concernant le lien entre les solutions de (1.14) et les points fixes de l'application de Poincaré, il faut remarquer que α_0 est un point fixe de P^T si et seulement si $w(\alpha_0, \cdot)$ est une solution de (1.14). De plus sachant qu'on a la relation

$$(P^T)'(\alpha_0) = e^{-T\lambda_{w(\alpha_0, \cdot), f^T}},$$

la stabilité uniforme asymptotique de $w(\alpha_0, \cdot)$ avec signe strict dans l'inégalité $\lambda_{w(\alpha_0, \cdot), f^T} > 0$ est équivalente au fait que α_0 soit un point fixe stable de l'application de Poincaré.

1.2 Fonction bistable en moyenne hétérogène en temps

Les résultats mentionnés ici sont détaillés dans le deuxième chapitre de la thèse. Hormis le théorème VII, ils sont issus de l'article [13].

1.2.1 Cadre général et motivations biologiques

On s'intéresse à des nonlinéarités qui modélisent un processus cancéreux traité par immunothérapie. Il faut prendre en compte que ce type de traitement est efficace pour des tumeurs de petites tailles, mais pas lorsque la densité de cellules cancéreuses devient trop importante. En ce sens, on fait l'hypothèse qu'à un instant t où le traitement par immunothérapie est effectif, la nonlinéarité $f(t, \cdot)$ est une fonction bistable homogène. Par ailleurs, on suppose que la fonction f est positive en l'absence de traitement pour traduire le fait que dans cette situation, la tumeur grossit. On peut donc considérer en première approche des fonctions f qui vont osciller au cours

du temps entre une nonlinéarité homogène de type KPP et une nonlinéarité homogène de type bistable. Sachant qu'en règle générale le traitement est administré à intervalles de temps réguliers, on fera l'hypothèse supplémentaire que f est une fonction périodique en temps. On peut prendre l'exemple où f est de la forme

$$f(t, u) = m(t)u(1 - u) + (1 - m(t))u(1 - u)(u - \theta),$$

avec $\theta \in (0, 1)$ et m une fonction périodique qui oscille de 0 à 1. En particulier, ce type de fonction vérifie

$$f(t, 0) = f(t, 1) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et il se pose alors la question de la stabilité de ces deux états d'équilibre 0 et 1. On suppose ici qu'ils sont tous les deux uniformément asymptotiquement stables, ce qui est conforme à ce que l'on observe dans la réalité car la taille de la tumeur au moment où elle est détectée est un facteur prédictif important de l'issue de la maladie. On peut citer entre autres le travail de D'Onofrio qui développe dans [16] de tels modèles de traitement par immunothérapie.

On s'intéresse en fait dans ce chapitre à des nonlinéarités plus générales que l'exemple donné ci-dessus. On considère des fonctions T -périodiques $f^T : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f^T(\cdot, 0) = f^T(\cdot, 1) \text{ sur } \mathbb{R}, \tag{1.19}$$

$$\lambda_{0,f^T} > 0 \text{ et } \lambda_{1,f^T} > 0. \tag{1.20}$$

On parlera de nonlinéarités bistables en moyenne. Justifions cette dénomination. Le terme "bistable" s'explique par le fait que d'après la section 1.1.4, l'hypothèse (1.20) implique que les deux états d'équilibre 0 et 1 sont uniformément asymptotiquement stables. On peut considérer cette propriété comme une généralisation de l'effet de seuil mis en évidence par Aronson et Weinberger dans [2] pour les nonlinéarités bistables homogènes. De plus, toujours d'après la section 1.1.4, on a la caractérisation

$$\lambda_{0,f^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(t, 0) dt \text{ et } \lambda_{1,f^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(t, 1) dt.$$

Par conséquent, supposer que les deux valeurs propres principales sont strictement positives, c'est supposer que la moyenne des pentes en 0 et la moyenne des pentes en 1 de f^T sont toutes les deux strictement négatives. C'est cette observation qui justifie le terme de bistable "en moyenne", car pour les nonlinéarités bistables homogènes, les dérivées en 0 et en 1 sont strictement négatives.

On a mentionné précédemment le fait que les solutions du système (1.14) représentent les états stationnaires possiblement connectés par des fronts pulsatoires dans le cas hétérogène, tout comme les zéros des nonlinéarités homogènes représentent les états stationnaires éventuellement connectés avec des fronts plans dans le cas homogène. Dans cette logique, la généralisation au cas hétérogène de la définition de fonction bistable donnée dans (1.7) consiste à supposer l'existence et l'unicité d'une solution de (1.14) comprise strictement entre 0 et 1, dont la valeur propre principale associée est strictement négative. Si on reformule cette idée avec le formalisme de l'application de Poincaré vu dans la section 1.1.4, cela revient à dire que 0 et 1 sont des points fixes stables, et qu'il existe un unique point fixe entre les deux, celui-ci étant instable. C'est dans ce cadre là qu'Alikakos, Bates et Chen ont travaillé dans [1] en 1999. Ils arrivent notamment à prouver des propriétés analogues à celles vérifiées dans le cas bistable homogène.

En particulier, ils montrent l'existence, l'unicité, la monotonie et la stabilité exponentielle de fronts pulsatoires. Les nonlinéarités que l'on considère ici sont plus générales, puisque l'on ne va pas imposer l'unicité de l'état d'équilibre intermédiaire. En ce sens nos linéarités bistables en moyenne sont plutôt une extension des nonlinéarités multistables homogènes définies dans (1.8). On donne maintenant les principaux résultats auxquels nous sommes arrivés

1.2.2 Unicité, monotonie et stabilité de fronts pulsatoires

Le premier théorème démontré concerne l'unicité et la monotonie des solutions de (1.12).

Théorème I. *Sous les hypothèses (1.19) et (1.20), s'il existe un couple (c, U) solution du problème (1.12), il est unique, la fonction $U : (t, \xi) \mapsto U(t, \xi)$ étant unique à translation en ξ près. Dans ce cas, on a*

$$U_\xi(t, \xi) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

La preuve de ce théorème découle d'un principe de comparaison adapté aux fonctions bistables en moyenne, que l'on va démontrer en utilisant une méthode de glissement.

On donne maintenant un résultat de stabilité globale des fronts pulsatoires.

Théorème II. *Sous les hypothèses (1.19) et (1.20), supposons qu'il existe un front pulsatoire U de vitesse c solution de (1.12). On considère une solution u du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = h(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où la condition initiale $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est uniformément continue. On définit $v(t, \xi) = u(t, x) = u(t, \xi + ct)$. Il existe une constante $\gamma \in (0, 1)$ dépendant seulement de f^T telle que si

$$\liminf_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) > 1 - \gamma \quad \text{et} \quad \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) < \gamma,$$

alors, il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t, \xi) - U(t, \xi + \xi_0)) = 0, \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Dans le cas bistable homogène, ce sont Fife et McLeod qui ont prouvé la stabilité globale des fronts plans. Dans le cas hétérogène périodique, Alikakos, Bates et Chen dans [1] (pour un environnement dépendant du temps) et Ding, Hamel et Zhao dans [14] (pour un environnement dépendant de l'espace) ont prouvé un résultat de stabilité des fronts pulsatoires pour des nonlinéarités de type bistable. La démonstration du théorème II fait appel à une méthode de sur et de sous-solutions inspirée des idées utilisées dans [22]. On donne également une preuve alternative inspirée de l'article de Shen [47] basée sur l'unicité des fronts pulsatoires.

1.2.3 Existence de fronts pulsatoires pour des nonlinéarités bistables en moyenne de petite période

On considère des nonlinéarités de la forme

$$f^T(t, u) = f\left(\frac{t}{T}, u\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1].$$

La fonction f est 1-périodique en temps, et l'hypothèse (1.20) devient

$$\int_0^1 f_u(s, 0) ds < 0 \text{ et } \int_0^1 f_u(s, 1) ds < 0.$$

Par conséquent le signe des valeurs propres principales associées à 0 ou 1 et à f^T ne dépend pas de la période T . Pour comprendre le problème limite quand $T \rightarrow 0^+$, on considère la fonction moyennée $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u) = \int_0^1 f(s, u) ds.$$

On suppose cette fonction est de type bistable au sens de (1.7), c'est à dire qu'il existe $\theta_g \in (0, 1)$ tel que $g(0) = g(\theta_g) = g(1) = 0$, $g'(0) < 0$, $g'(\theta_g) > 0$, $g'(1) < 0$, $g < 0$ sur $(0, \theta_g)$, $g > 0$ sur $(\theta_g, 1)$. Notons que le fait que $g'(0) < 0$ et que $g'(1) < 0$ est une conséquence de (1.20). On a alors le théorème d'existence suivant.

Théorème III. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $T_f > 0$ tel que pour tout $T \in (0, T_f)$, il existe un unique front pulsatoire (U_T, c_T) solution de*

$$\begin{cases} (U_T)_t - c_T(U_T)_\xi - (U_T)_{\xi\xi} = f^T(t, U_T), & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_T(\cdot, -\infty) = 1, \quad U_T(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformément sur } \mathbb{R}, \\ U_T(t + T, \xi) = U_T(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_T(0, 0) = \theta_g. \end{cases}$$

Pour prouver ce théorème, on montre que pour T suffisamment petit, il existe un unique état d'équilibre associé à f^T compris strictement entre 0 et 1, et qu'il est instable au sens de la valeur propre principale. Ainsi, les hypothèses de l'article d'Alikakos, Bates et Chen sont vérifiées, et il existe bien un front pulsatoire reliant 0 et 1.

On s'est ensuite intéressé à la convergence du couple (c_T, U_T) lorsque $T \rightarrow 0$. On rappelle que d'après [2] il existe un unique front plan (c_g, U_g) solution de

$$\begin{cases} U_g'' + c_g U_g' + g(U_g) = 0, & \text{sur } \mathbb{R}, \\ U_g(-\infty) = 1, \quad U_g(+\infty) = 0, \\ U_g(0) = \theta_g. \end{cases}$$

On étend la fonction U_g sur \mathbb{R}^2 par $U_g(t, \xi) = U_g(\xi)$ pour tout $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$.

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on définit

$$W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2) = \left\{ U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2) \mid U_t, U_\xi, U_{\xi\xi} \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in (0, 1)$, on définit également $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions de classe $C^k(\mathbb{R}^2)$ dont la k^{me} dérivée partielle est α -hölderienne.

On a alors le théorème de convergence suivant.

Théorème IV. *Quand $T \rightarrow 0$, la vitesse c_T converge vers c_g et U_T converge vers U_g dans $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ faiblement et dans $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, pour tout $1 < p < +\infty$ et pour tout $\alpha \in (0, 1)$.*

Un tel résultat de convergence est prouvé dans le cas hétérogène en espace par Hamel, Ding et Zhao dans [14] pour des nonlinéarités de type bistable et par El Smaily dans [19] pour des nonlinéarités de type KPP.

1.2.4 Existence de fronts pulsatoires et perturbations

Pour $\varepsilon > 0$ on considère une famille de fonctions $f^{T,\varepsilon} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ayant la même régularité que f^T et telles que

$$\begin{cases} f^{T,\varepsilon}(t, 0) = f^{T,\varepsilon}(t, 1) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ f^{T,\varepsilon}(t, u) = f^{T,\varepsilon}(t + T, u), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1]. \end{cases}$$

On suppose également qu'il existe une fonction bornée $\omega(\varepsilon) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\omega(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ et telle que

$$|f_u^T(t, u) - f_u^{T,\varepsilon}(t, u)| \leq \omega(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall u \in [0, 1].$$

On va montrer que si f^T est bistable au sens d'Alikakos, Bates et Chen, c'est-à-dire si l'application de Poincaré associée à f^T a exactement deux points fixes stables 0 et 1 et un point fixe instable entre les deux, alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'application de Poincaré associée à $f^{T,\varepsilon}$ vérifie la même hypothèse. En conséquence, il existe un unique front pulsatoire associé à $f^{T,\varepsilon}$ reliant 0 et 1. On résume cela dans le théorème suivant.

Théorème V. *On suppose que l'application de Poincaré associée à f^T a exactement deux points fixes stables 0 et 1 et un point fixe instable α_0 entre les deux.*

Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, il existe un unique front pulsatoire $(c_\varepsilon, U_\varepsilon(t, \xi))$ solution de

$$\begin{cases} (U_\varepsilon)_t - c_\varepsilon(U_\varepsilon)_\xi - (U_\varepsilon)_{\xi\xi} - f^{T,\varepsilon}(t, U_\varepsilon) = 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon(\cdot, -\infty) = 1, \quad U_\varepsilon(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformément sur } \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon(t + T, \xi) = U_\varepsilon(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon(0, 0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Notons que par hypothèses sur f^T , il existe un unique front pulsatoire (c_T, U_T) associé à f^T tel que $U_T(0, 0) = \alpha_0$. On a alors le théorème de convergence suivant.

Théorème VI. *Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la vitesse c_ε converge vers c_T et U_ε converge vers U_T dans $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ faiblement et dans $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, pour tout $1 < p < +\infty$ et pour tout $\alpha \in (0, 1)$.*

1.2.5 Un exemple de nonlinéarités bistables en moyenne pour lesquelles il n'existe pas de front pulsatoire

On a mentionné précédemment que dans leur article [1], Alikakos, Bates et Chen considéraient des nonlinéarités bistables en moyenne pour lesquelles il existe un unique état d'équilibre intermédiaire. Il s'agit donc d'une généralisation de la définition (1.7). Il est donc assez intuitif de retrouver que pour de telles fonctions, il existe un front pulsatoire. Les nonlinéarités considérées ici sont plus générales car il peut exister plusieurs états d'équilibres entre 0 et 1. En cela on généralise le concept de nonlinéarités multistables homogènes définies dans (1.8). On a vu dans la section 1.1.2 que pour de telles fonctions, il n'existe pas forcément de front pulsatoire (on a rappelé ce qu'il se passait pour le cas de nonlinéarités tristables homogènes). On va maintenant exhiber un cas de non-existence de front pulsatoire connectant 0 et 1 dans le cas des nonlinéarités bistables en moyenne.

On considère une fonction 1-periodique en temps $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (1.19) et (1.20).

Si $T > 0$, on définit la fonction $f^T : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f^T(t, u) = f\left(\frac{t}{T}, u\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1].$$

On a vu précédemment que f^T est une fonction T -périodique en temps vérifiant elle aussi (1.19) et (1.20). On considère la fonction moyennée $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u) = \int_0^1 f(s, u) ds.$$

On suppose ici que g est une fonction tristable, c'est à dire qu'il existe trois réels $0 < \underline{\theta} < \theta^* < \bar{\theta} < 1$ tels que

$$\begin{aligned} g(0) &= g(\underline{\theta}) = g(\theta^*) = g(\bar{\theta}) = g(1) = 0, \\ g'(0) &< 0, \quad g'(\underline{\theta}) > 0, \quad g'(\theta^*) < 0, \quad g'(\bar{\theta}) > 0, \quad g'(1) < 0, \\ g &< 0 \text{ sur } (0, \underline{\theta}) \cup (\theta^*, \bar{\theta}), \quad g > 0 \text{ sur } (\underline{\theta}, \theta^*) \cup (\bar{\theta}, 1). \end{aligned}$$

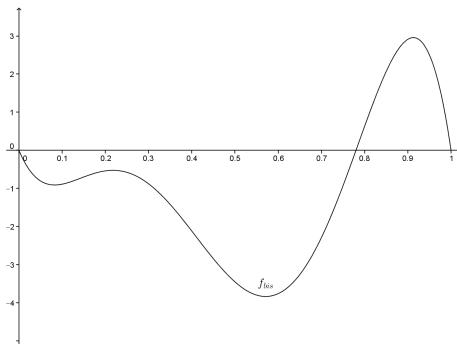
Notons que par (1.20), on a automatiquement $g'(0) < 0$ et $g'(1) < 0$. On a déjà mentionné que pour g , il existe un front plan \underline{U} connectant 0 et θ^* avec une vitesse \underline{c} et un front plan \bar{U} connectant θ^* et 1 avec une vitesse \bar{c} . Cependant il n'y a pas toujours de front plan connectant 0 et 1. Si $\underline{c} < \bar{c}$, alors il existe un tel front. Cependant si $\underline{c} \geq \bar{c}$, il n'en existe pas. On donne maintenant un cas de non-existence.

Théorème VII. *Soient f et g définies ci-dessus. Si $\underline{c} > \bar{c}$, alors, il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \in (0, T_0)$, il n'existe pas de solution au problème*

$$\begin{cases} U_t - cU_\xi - U_{\xi\xi} = f^T(t, U), & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = 1, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformément sur } \mathbb{R}, \\ U(t + T, \xi) = U(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour conclure, on donne un exemple concret de fonction f vérifiant le théorème. On définit la fonction bistable $f_{bis} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_{bis}(u) = 580u(1-u)(u-0.78)(u^2-0.45u+0.055), \quad \forall u \in [0, 1].$$



On définit également la fonction KPP $f_{kpp} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

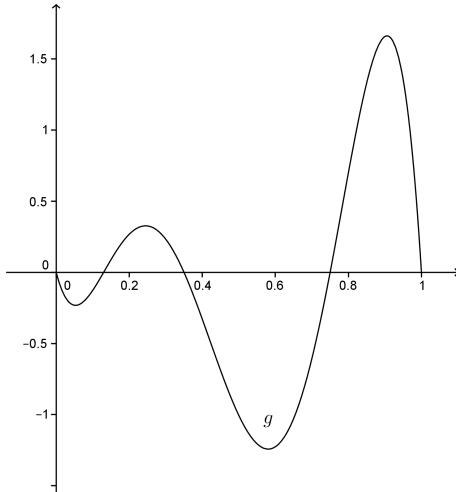
$$f_{kpp}(u) = 5u(1-u), \quad \forall u \in [0, 1],$$

et la fonction bistable en moyenne 1-périodique $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(t, u) = \left(\frac{1 - \sin(2\pi t)}{2} \right) f_{kpp}(u) + \left(\frac{1 + \sin(2\pi t)}{2} \right) f_{bis}(u), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1].$$

La fonction moyennée $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est alors donnée par

$$g(u) = \int_0^1 f(s, u) du = 290u(1-u)(u-0.749)(u-0.35)(u-0.131), \quad \forall u \in [0, 1].$$



Cette fonction est une nonlinéarité tristable homogène avec $\underline{\theta} = 0.131$, $\theta^* = 0.35$ et $\bar{\theta} = 0.749$. De plus, on a $\int_0^{0.35} g(u) du > 0$ et $\int_{0.35}^1 g(u) du < 0$. Par conséquent $\underline{c} > 0$ et $\bar{c} < 0$. Ainsi $\underline{c} > \bar{c}$.

1.2.6 Perspectives

Dans les résultats énoncés ci-dessus, on a seulement exhibé des exemples d'existence ou de non-existence de fronts pulsatoires pour les nonlinéarités bistables en moyenne. Dans le cas de nonlinéarités tristables homogènes, on a vu à la fin de la section 1.1.2 que l'on savait caractériser les cas où il existait un front plan connectant 0 et 1 (si $\underline{c} < \bar{c}$ en reprenant les notations de la section 1.1.2), et que dans les situations où un tel front n'existe pas (si $\underline{c} \geq \bar{c}$), alors, sous de bonnes conditions sur u_0 , la solution du problème (1.2) convergeait vers une terrasse de front. Considérons maintenant une fonction bistable en moyenne f pour laquelle le système (1.14) admet exactement trois solutions $\underline{w} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, $w^* : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ et $\bar{w} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ telles que $\underline{w} < w^* < \bar{w}$ sur \mathbb{R} . On suppose également que

$$\lambda_{\underline{w}, f} < 0, \quad \lambda_{w^*, f} > 0, \quad \lambda_{\bar{w}, f} < 0.$$

D'après tout ce qu'on a dit précédemment, cette nonlinéarité généralise le cas des fonctions tristables homogènes. D'après les résultats d'Alikakos, Bates et Chen dans [1], il existe un front pulsatoire de vitesse \underline{c} connectant 0 et w^* , et un front pulsatoire de vitesse \bar{c} connectant w^* et 1. En s'inspirant du cas homogène, il est alors légitime de conjecturer que si $\underline{c} < \bar{c}$, alors il existe un front pulsatoire reliant 0 et 1, et si $\underline{c} \geq \bar{c}$, alors il n'en existe pas. Dans ce cas, sous de bonnes hypothèses sur u_0 , la solution du problème (1.2) devrait converger vers une terrasse de front. Notons que le cas hétérogène en espace a été traité dans [18] par Ducrot, Giletti et Matano.

Une autre extension possible concernant les nonlinéarités bistables en moyenne serait d'étudier

des problèmes de type dichotomie extinction/propagation pour la solution $u_L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ du système

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = \mathbf{1}_{[-L, L]} & \text{sur } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.21)$$

suivant la valeur du paramètre $L > 0$, où $\mathbf{1}_{[-L, L]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-L, L]$. Dans le cadre de nonlinéarités bistables homogènes, Du et Matano dans [17] prouvent qu'une des deux situations suivantes se produit :

- $u_L(t, x) \rightarrow 0$ uniformément sur \mathbb{R} quand $t \rightarrow +\infty$ pour tout $L > 0$
- il existe une valeur critique $L^* > 0$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_L(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{uniformément sur } \mathbb{R} \text{ si } 0 < L < L^*, \\ 1 & \text{localement uniformément sur } \mathbb{R} \text{ si } L > L^*. \end{cases}$$

Poláčik dans [42] étend le résultat précédent au cas multidimensionnel pour des nonlinéarités dépendant périodiquement du temps de type bistable. Il faut néanmoins noter que les fonctions considérées dans son article sont moins générales que les nonlinéarités bistables en moyenne. En effet, l'auteur impose entre autres que $f_u^T(t, 0) < 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Une extension de cette partie de la thèse serait donc de prouver que le résultat de dichotomie ci-dessus reste encore vrai si la nonlinéarité est de type bistable en moyenne.

1.3 Etude numérique de solutions d'équations de réaction-diffusion dont la nonlinéarité est bistable en moyenne

1.3.1 Cadre de l'étude

Dans le chapitre 3 de cette thèse, on s'intéresse au comportement des solutions numériques d'une équation de réaction-diffusion du type

$$u_t - u_{xx} = f\left(\frac{t}{T}, u\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.22)$$

où $T > 0$, et la nonlinéarité $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 1-périodique de classe C^1 de la forme

$$f(t, u) = A m(t)u(1 - u) + B(1 - m(t))f_b(u),$$

où $A > 0$ et $B > 0$. La fonction $f_b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bistable homogène au sens de (1.7). La fonction $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 1-périodique de classe C^1 qui oscille de 0 à 1. On note \bar{m} la moyenne de la fonction m sur une période

$$\bar{m} = \int_0^1 m(s)ds.$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que la fonction f est bistable en moyenne, c'est-à-dire que

$$\lambda_{0,f} > 0 \text{ et } \lambda_{1,f} > 0, \quad (1.23)$$

où $\lambda_{0,f}$ et $\lambda_{1,f}$ sont respectivement les valeurs propres principales associées aux états d'équilibre 0 et 1 et à la nonlinéarité f .

Enfin, on note $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(u) = \int_0^1 f(s, u) ds = A \bar{m} u (1 - u) + B (1 - \bar{m}) f_b(u),$$

et on considère l'équation

$$u_t - u_{xx} = g(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

D'après l'hypothèse (1.23), la fonction g est une fonction multistable au sens de (1.8). Dans toute la suite, on note $u_f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (resp. $u_g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$) la solution numérique de l'équation (1.22) (resp. (1.24)) assortie de la condition initiale $u_0 = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$ sur \mathbb{R} , où $\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$ représente la fonction indicatrice de l'intervalle $(-\infty, 0]$.

On va commencer par étudier des fonctions g de type bistable, puis on va traiter de fonctions g de type tristable.

1.3.2 Cas où g est une fonction bistable

On commence par considérer des fonctions bistables f_b du type $f_b(u) = u(1 - u)(u - \theta)$, où $\theta \in (0, 1)$. Pour de telles nonlinéarités f_b , on montre que le fait que la fonction f soit bistable en moyenne implique que la fonction g est une nonlinéarité bistable homogène. Or, on a prouvé dans le chapitre 2 que dans cette situation, pour des périodes T suffisamment petites, l'application de Poincaré associée à la nonlinéarité f admet un unique point fixe strictement compris entre 0 et 1, et que celui-ci est instable. Dès lors, d'après [1], il existe un unique front pulsatoire (c_f, U_f) solution de (1.22). De plus $c_f \rightarrow c_g$ et $U_f \rightarrow U_g$ quand $T \rightarrow 0$, où (c_g, U_g) est l'unique front plan associé à la nonlinéarité g . On retrouve bien ces propriétés numériquement. On observe également que même lorsque T n'est pas proche de 0, l'application de Poincaré associée à la fonction f vérifie les hypothèses de l'article [1]. Il existerait donc un front pulsatoire (c_f, U_f) quelle que soit la période T . Si on se penche maintenant sur les valeurs numériques de c_f et de c_g , il semble que la fonction $T \mapsto c_f$ est croissante, et que l'on a $c_f > c_g$.

On trouve des résultats théoriques du même type concernant le régime d'homogénéisation et les propriétés des vitesses de propagation dans [14] pour le cas bistable, dans [15, 28] pour le cas bistable ou combustion, et dans [20, 39] pour le cas KPP.

1.3.3 Cas où g est une fonction tristable

On étudie ici des fonctions g qui sont de type tristable au sens de (1.9). On a mentionné dans la section 1.1.2 avec les notations de (1.9) que, pour l'équation (1.24), il existe un unique front plan (c_g, U_g) qui connecte 0 et θ^* et un unique front plan (\bar{c}_g, \bar{U}_g) qui connecte θ^* et 1. De plus, il existe un unique front plan (c_g, U_g) connectant 0 et 1 si et seulement si $c_g < \bar{c}_g$. Dans le cas où $\underline{c}_g \geq \bar{c}_g$, la solution de (1.24) converge vers une terrasse de fronts quand $t \rightarrow +\infty$.

On choisit dans la suite deux fonctions bistables f_b telles que la fonction moyennée g soit une nonlinéarité tristable qui vérifie $\underline{c}_g < \bar{c}_g$ dans le premier cas et $\underline{c}_g \geq \bar{c}_g$ dans le second. Il faut noter que le seul résultat théorique concernant l'existence (ou la non existence) d'un front pulsatoire solution de l'équation (1.22) dans le cas où g est de type tristable est que dans la situation où $\underline{c}_g > \bar{c}_g$, si T est proche de 0, alors il n'existe pas de front pulsatoire solution de (1.22) (voir chapitre 2).

Cas où $\underline{c}_g < \bar{c}_g$

Dans cette situation, la fonction u_g se comporte comme un front plan (c_g, U_g) connectant 0 et 1. On observe numériquement les mêmes propriétés que dans la section 1.3.2, à savoir qu'il existe un front pulsatoire (c_f, U_f) solution de (1.22) quelle que soit la période T , que la fonction $T \mapsto c_f$ est croissante, et que l'on a toujours $c_f > c_g$. De plus on retrouve ici encore que $c_f \rightarrow c_g$ et $U_f \rightarrow U_g$ quand $T \rightarrow 0$

Cas où $\underline{c}_g > \bar{c}_g$

Dans cette configuration, la solution numérique de l'équation (1.24) se comporte comme une terrasse de fronts. Contrairement aux situations précédentes où u_f et u_g étaient toujours de même nature, on va montrer numériquement ici que l'on peut trouver des situations où la fonction u_f se comporte comme une terrasse de fronts, et d'autres où u_f se comporte comme un front.

La propriété selon laquelle $u_f \rightarrow u_g$ quand $T \rightarrow 0$ semble de nouveau se vérifier numériquement. On retrouve en cela le résultat théorique selon lequel il n'existe pas de front dans cette situation lorsque T est proche de 0. Pour quantifier ce qu'il en est en terme de vitesse de propagation, on définit

$$\begin{cases} \underline{x}_f(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid u_f(t, x) > \frac{\theta^*}{2}\}, \\ \underline{x}_g(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid u_g(t, x) > \frac{\theta^*}{2}\}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{x}_f(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid u_f(t, x) > \frac{\theta^*+1}{2}\}, \\ \bar{x}_g(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid u_g(t, x) > \frac{\theta^*+1}{2}\}. \end{cases}$$

L'abscisse \underline{x}_g se déplace à la vitesse \underline{c}_g tandis que \bar{x}_g se déplace à la vitesse \bar{c}_g . On note \underline{c}_f (resp. \bar{c}_f) la vitesse de l'abscisse $(\underline{x}_f(nT))_n$ (resp. $(\bar{x}_f(nT))_n$). Numériquement, on observe que l'on a bien $\bar{c}_f \rightarrow \bar{c}_g$ et $\underline{c}_f \rightarrow \underline{c}_g$ quand $T \rightarrow 0$. Par contre, cette fois-ci $T \mapsto \bar{c}_f$ est croissante et $\bar{c}_f > \bar{c}_g$ tandis que $T \mapsto \underline{c}_f$ est décroissante et $\underline{c}_f < \underline{c}_g$.

Sachant que lorsque la période T augmente, la vitesse \bar{c}_f augmente tandis que la vitesse \underline{c}_f diminue, on peut s'imaginer que lorsque \bar{c}_g et \underline{c}_g ont des valeurs assez proches, pour T assez grand, il doit être possible "d'effacer" la terrasse de fronts en obtenant $\bar{c}_f \approx \underline{c}_f$. Ainsi la solution numérique u_f se comporterait comme un front. On a réussi à observer numériquement ce phénomène. Il semble donc possible d'exhiber des situations où il y a existence d'un front pulsatoire alors qu'il n'y a pas existence de front homogène.

1.3.4 Bilan

On résume l'étude numérique ci-dessus. On observe que lorsqu'il existe un front plan (c_g, U_g) solution de (1.24), il semble toujours exister un front pulsatoire (c_f, U_f) solution de (1.22). De plus, on a $c_f > c_g$ et la fonction $T \mapsto c_f$ est croissante, où T représente la période en temps de la nonlinéarité intervenant dans (1.22). Enfin, lorsque $T \rightarrow 0$, on a $U_f \rightarrow U_g$ et $c_f \rightarrow c_g$. Il semble également que lorsqu'il n'existe pas de front plan solution de (1.24), on peut trouver des configurations où il existe un front pulsatoire solution de (1.22), et d'autres où une telle solution n'existe pas. Cependant, quelle que soit la situation, on a encore $u_f \rightarrow u_g$ quand $T \rightarrow 0$, où u_f (resp. u_g) représente la solution numérique de l'équation (1.22) (resp. (1.24)) assortie de la condition initiale $u_0 = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$, où $\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$ représente la fonction indicatrice de l'intervalle $(-\infty, 0]$.

1.4 Un modèle en sciences médicales utilisant une nonlinéarité de type KPP hétérogène en temps

Les résultats qui interviennent ici sont détaillés dans le chapitre 4.

1.4.1 Cadre médical

Cette partie de la thèse concerne la modélisation du traitement par chimiothérapie. Dans cette situation, on souhaite que la nonlinéarité prenne en compte la croissance de la tumeur lorsqu'elle n'est pas traitée, et sa diminution éventuelle lorsque la chimiothérapie agit. Pour ce faire, on va travailler sur des nonlinéarités du type

$$f(t, u) = g(u) - m(t)u. \quad (1.25)$$

La fonction g est une fonction KPP (au sens où elle vérifie les hypothèses (1.4) et (1.5)) qui traduit la croissance de la tumeur. On suppose de plus que

$$u \mapsto \frac{g(u)}{u} \text{ est décroissante sur } (0, +\infty), \quad (1.26)$$

$$g < 0 \text{ on } (1, +\infty). \quad (1.27)$$

L'hypothèse (1.26) signifie que le taux de reproduction par individu diminue lorsque la densité de la population augmente, tandis que l'hypothèse (1.27) implique qu'il existe une densité de cellules cancéreuses maximale au delà de laquelle la population ne fait que décroître. Le terme de mort de cellules cancéreuses est pondéré par la fonction $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui est nulle aux instants où le patient n'est pas traité et strictement positive lorsque le traitement agit. Concrètement, $m(t)$ représente la concentration de médicament dans le corps du patient à l'instant t . Notons que contrairement aux nonlinéarités étudiées dans le deuxième chapitre, l'état 1 n'est plus nécessairement un état d'équilibre associé à la fonction f .

La chimiothérapie est administrée par cycles au patient. Chaque cycle est a priori identique, composé d'une période effective de traitement et d'une période de repos nécessaire entre autres à la régénération des globules blancs du patient. Il est donc naturel dans un premier temps de considérer des fonctions m qui seront T -périodiques, où $T > 0$ représente la durée d'un cycle de chimiothérapie. Pour plus de lisibilité, on notera dans ce cas m^T au lieu de m et f^T au lieu de f . On donne un exemple concret d'une fonction m^T entrant dans ce cadre. Pour $T > 1$, on définit

$$\begin{cases} m^T = \varphi \text{ sur } [0, 1], \\ m^T = 0 \text{ sur } [1, T), \end{cases} \quad (1.28)$$

où $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction régulière positive non triviale telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Dans cette situation, le traitement agit sur une période égale à 1 suivie d'une période de repos égale à $T - 1$. Pour les fonctions du type (1.28), on impose que

$$g'(0) - \int_0^1 \varphi(t)dt < 0. \quad (1.29)$$

Cette inégalité n'est pas réellement une contrainte car on verra qu'elle signifie que le patient guérira en l'absence de période de repos dans les cycles de chimiothérapie (c'est-à-dire lorsque

$T = 1$.

On a mentionné précédemment que $m(t)$ représentait la concentration du médicament dans le corps du patient à l'instant t . Dans la pratique, ce n'est pas cette donnée qui est périodique, mais la concentration de médicament administrée au patient à l'instant t , notée $D^T(t)$. On suppose que $D^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est T -périodique et satisfait

$$D^T(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \in [0, 1], \\ 0, & \forall t \in (1, T). \end{cases} \quad (1.30)$$

D'après les modèles classiques en pharmacocinétique, la concentration dans le corps du patient m est alors la solution d'un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} m'(t) = D^T(t) - \frac{m(t)}{\tau}, & \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ m(0) = m_0 \geq 0, \end{cases} \quad (1.31)$$

où le réel $\tau > 0$ est appelé clairance. Ce paramètre caractérise la capacité du corps du patient à éliminer le médicament. Il est important de noter que la fonction m considérée ici n'est pas périodique mais tend à le devenir en temps grands.

On peut encore raffiner le modèle en prenant en compte le fait que le patient ne prend pas toujours son traitement de façon optimale ou bien qu'il n'absorbe pas celui-ci de façon homogène. Ainsi, on rajoute à la nonlinéarité un terme perturbatif du type $\varepsilon p(t, u)$, où $\varepsilon > 0$ et $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En résumé, si on prend en compte le fait que c'est D^T qui est une donnée (et non plus m) et le fait que le traitement est suivi de façon imparfaite, on est ramené à étudier des nonlinéarités du type

$$f(t, u) = g(u) - m(t)u + \varepsilon p(t, u), \quad (1.32)$$

où m est solution de (1.31).

1.4.2 Nonlinéarités périodiques en temps

On commence par donner les résultats obtenus dans le cas où $m = m^T$ est une fonction T -périodique. Dans cette partie, on considère des nonlinéarités plus générales que la fonction définie dans (1.28). Plus précisément, on suppose qu'il existe $T^* > 0$ tel que

$$\lambda_{0,f^T} \begin{cases} > 0 \text{ si } T < T^*, \\ < 0 \text{ si } T > T^*, \\ = 0 \text{ si } T = T^*. \end{cases} \quad (1.33)$$

C'est notamment le cas si m^T satisfait (1.28) car on a alors

$$\lambda_{0,f^T} = -g'(0) + \frac{1}{T} \int_0^T m^T(s) ds = -g'(0) + \frac{1}{T} \int_0^1 \varphi(s) ds.$$

Pour de telles fonctions m^T , l'hypothèse (1.29) implique que $T^* > 1$. Notons que le temps critique T^* représente la période maximale pour laquelle l'état d'équilibre 0 est uniformément asymptotiquement stable. D'un point de vue médical, cela signifie que si la tumeur est détectée assez tôt et si le patient est traité de façon massive (c'est-à-dire, avec une petite période de repos

entre les injections) alors celui-ci va guérir.

On commence par caractériser les solutions du système (1.14) avec $f^T(t, u) = g(u) - m^T(t)u$ comme nonlinéarité.

Proposition I. *On considère le réel $T^* > 0$ défini dans (1.33).*

- (I) *Si $T \leq T^*$, il n'existe pas de solution strictement positive de (1.14).*
- (II) *Si $T > T^*$, il existe une unique solution strictement positive w^T de (1.14). Dans ce cas,*
 - (i) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $w^T(t) \in (0, 1]$, et $\lambda_{w^T, f^T} \geq 0$.*
 - (ii) *Si $T \mapsto m^T$ est continue dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, alors la fonction $T \in (T^*, +\infty) \mapsto w^T(0)$ est continue et, si m^T est du type (1.28) avec l'hypothèse (1.29), elle est strictement croissante.*
 - (iii) *Si $T \mapsto m^T$ est continue dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, alors la fonction w^T converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R} quand $T \rightarrow (T^*)^+$.*
 - (iv) *Si $T \mapsto m^T$ est du type (1.28) avec l'hypothèse (1.29), alors w^T converge en moyenne vers 1 quand $T \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w^T(t) dt = 1.$$

Un résultat analogue d'existence et d'unicité (résultat de type (II)) a été prouvé par Berestycki, Hamel et Roques dans [9] pour des nonlinéarités de type KPP dépendant périodiquement de l'espace et par Nadin dans [38] pour des nonlinéarités de type KPP dépendant périodiquement du temps et de l'espace. On donne ici une preuve utilisant l'application de Poincaré associée à f^T . Les deux derniers points de la proposition sont intuitifs. En effet, le cas limite où $T \rightarrow (T^*)^+$ s'explique par le fait que pour $T \leq T^*$, le seul état d'équilibre positif ou nul associé à f^T est 0. La situation $T \rightarrow +\infty$ se comprend par le fait que dans ce cas, la fonction m^T est proche de zéro en moyenne. Ainsi la nonlinéarité f^T est "presque" égale la fonction g , dont le seul état d'équilibre strictement positif est 1.

Pour mieux comprendre l'évolution de la maladie au cours du temps, on énonce un résultat de Nadin dans [38] qui traite du comportement de $u(t, x)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Proposition II. [38] *Soit $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} telle que $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$. Sous l'hypothèse (1.33), on considère la fonction $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $T < T^$, alors il existe $M > 0$ dépendant seulement de u_0 et Φ_{0, f^T} tel que*

$$0 \leq u(t, x) \leq M\Phi_{0, f^T}(t)e^{-\lambda_{0, f^T}t}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (1.34)$$

Si $T = T^$, alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Si $T > T^$, alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, on a*

$$\sup_{x \in K} |u(t, x) - w^T(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On trouve un résultat similaire dans le cas de nonlinéarités de type KPP qui dépendent périodiquement de l'espace dans l'article [9] de Berestycki, Hamel and Roques.

Dans la section 1.1.4, on a expliqué que l'hypothèse (1.33) était corrélée à la stabilité asymptotique uniforme de l'état d'équilibre 0, et que celle-ci était dépendante de la condition initiale u_0 de laquelle on partait. La proposition précédente donne des renseignements plus précis puisque les résultats de stabilité ne dépendent plus de la fonction u_0 . D'un point de vue médical, cela signifie que la guérison du patient ne dépend pas de la taille de la tumeur au début de l'observation, mais seulement du traitement.

Si on reprend l'exemple où m^T vérifie (1.28), le patient va guérir si et seulement si la durée des cycles de chimiothérapie est inférieure ou égale à T^* . En particulier, comme l'hypothèse (1.29) signifie que $T^* > 1$, le traitement est efficace en l'absence de période de repos entre deux injections, c'est-à-dire lorsque $T = 1$. Ce résultat est intéressant car il implique que $T^* - 1$ est la période de repos la plus longue pour laquelle la maladie va disparaître. Notons que l'inégalité (1.34) raffine le critère de guérison du patient car, comme la fonction $T \mapsto \lambda_{0,f^T}$ est strictement positive et strictement décroissante sur $(0, T^*)$, le taux de convergence de la densité $u(t, x)$ vers 0 est d'autant plus rapide que T est petit. Cela signifie que dans le cas d'un traitement efficace, plus la période de repos entre les injections est courte, plus le patient est guéri rapidement. Dans le cas où le traitement n'est pas efficace, l'état d'équilibre w^T envahit tout l'espace quand $t \rightarrow +\infty$. En particulier, cela montre que la tumeur ne peut pas croître indéfiniment. Enfin, la proposition II éclaire le résultat de la proposition I selon lequel $T \mapsto w^T(0)$ est strictement croissante sur $(T^*, +\infty)$. En effet, cela implique que dans le cas où le traitement ne fonctionne pas, plus la durée entre deux injections est longue, plus l'état d'équilibre atteint par la tumeur est dense. Le résultat que l'on va maintenant énoncer est du à Nadin [37] et à Liang et Zhao [34]. Il précise ce qu'il se passe lorsque la patient ne guérit pas. Plus précisément, on va caractériser la vitesse à laquelle a lieu l'invasion de l'espace par l'état d'équilibre w^T . La première partie concerne l'existence de fronts pulsatoires connectant 0 et w^T . La deuxième traite de propagation de perturbations.

Théorème VIII. [34],[37] Soit $T > T^*$, où T^* est donné dans (1.33). (I) Il existe un réel strictement positif c_T^* tel qu'il existe un front pulsatoire connectant 0 et w^T à la vitesse c si et seulement si $c \geq c_T^*$.

(II) On note $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Si u_0 est une fonction continue et bornée telle que $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors

$$\forall c \in (0, c_T^*), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| < ct} |u(t, x) - w^T(t)| = 0.$$

Si u_0 est une fonction continue à support compact telle que $u_0 \geq 0$, alors

$$\forall c > c_T^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| > ct} u(t, x) = 0.$$

Dans son article [37], Nadin considère pour la première assertion des propriétés de propagation ci-dessus des conditions initiales plus générales. Il suppose que u_0 n'est pas nécessairement à

support compact, mais que u_0 est de la forme $O(e^{-\beta|x|})$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, où $\beta > 0$. Le théorème VIII complète la proposition II. En effet, on sait maintenant que l'invasion de l'espace par l'état d'équilibre w^T a lieu à la vitesse c_T^* . On peut caractériser cette vitesse à partir de la valeur propre principale λ_{0,f^T} . Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition III. Soit $T > T^*$. La vitesse critique c_T^* est donnée par

$$c_T^* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}.$$

Ainsi, si $T \mapsto \int_0^T m^T(s)ds$ est continue, alors la fonction $T \in (T^*, +\infty) \mapsto c_T^*$ est continue, et, si $\int_0^T m^T(s)ds$ ne dépend pas de T , elle est strictement croissante. De plus, on a les deux cas limites :

$$\lim_{T \rightarrow (T^*)^+} c_T^* = 0,$$

et, si $\frac{1}{T} \int_0^T m^T(s)ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} c_T^* = 2\sqrt{g'(0)}.$$

Ainsi, la vitesse d'envahissement de l'espace par w^T est d'autant plus rapide que le temps de repos entre deux injections est long. Notons que dans le cas où m^T est du type (1.28), alors les propriétés concernant $\int_0^T m^T(s)ds$ sont satisfaites.

On termine cette partie sur le cas périodique en énonçant un résultat sur l'existence de fronts pulsatoires pour des nonlinéarités pour lesquelles les hypothèses (1.5) et (1.26) ne sont pas forcément vérifiées, mais pour lesquelles on a toujours (1.4), (1.27) et (1.33). Pour ce type de fonctions monostables non KPP, on a encore l'existence de solutions du système (1.14), mais il n'y plus forcément unicité. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que les solutions de (1.14) sont ordonnées sur $[0, T]$. On peut donc définir pour $T > T^*$ la fonction $y^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme l'infimum de toutes les solutions strictement positives de (1.14). On va montrer que $y^T > 0$ puis on va s'intéresser à l'existence de fronts pulsatoires connectant 0 et y^T .

Proposition IV. Soit f^T de type (1.25) satisfaisant les hypothèses (1.4), (1.27), (1.33), et soit $T > T^*$. Il existe un réel strictement positif c_T^{**} tel que des fronts pulsatoires $U(t, \xi)$ monotones en ξ connectant 0 et y^T à la vitesse c existent si et seulement si $c \geq c_T^{**}$.

Nadin, dans [37], montre qu'il existe deux vitesses critiques $c_* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}$ et c^* pour lesquelles il existe un front pulsatoire si $c \geq c^*$ et il n'existe pas de front pulsatoire si $c \leq c_*$. Cependant, le cas $c \in (c_*, c^*)$ n'est pas traité. Il faut noter que c_T^{**} n'est pas nécessairement égal à $2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}$. Cependant, on a quand même $c_T^{**} \geq c_* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}$. Dans [34], Liang et Zhao prouvent la proposition IV en utilisant une méthode sur les semi-flots. On donne ici une preuve alternative. On commence par prouver l'existence d'un front pulsatoire $U(t, \xi)$ pour des domaines du type $\mathbb{R} \times [-a, a]$ qui sont bornés en ξ , puis on passe à la limite quand $a \rightarrow +\infty$.

1.4.3 Nonlinearités asymptotiquement périodiques en temps avec perturbation

On s'intéresse à des nonlinearités qui ne sont plus périodiques en temps. Pour $\varepsilon \geq 0$, on considère des équations du type

$$u_t - u_{xx} = g(u) - m(t)u + \varepsilon p(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où m est solution de (1.31) avec $T > 1$ et D^T est définie dans (1.30). On suppose que $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 pour laquelle il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \frac{p(t, u)}{u} \right| \leq C, \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times (0, +\infty).$$

La fonction m n'est pas périodique, mais elle est asymptotiquement T -périodique en temps. Plus précisément, il existe une fonction T -périodique strictement positive $m_\infty^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |m(t) - m_\infty^T(t)| = 0. \quad (1.36)$$

En effet, un calcul élémentaire montre que si on définit la fonction strictement positive $m_\infty^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ par

$$m_\infty^T(t) = \begin{cases} \tau \left[1 + \left(\frac{e^{\frac{1}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right], & \forall t \in [0, 1], \\ \tau \frac{e^{\frac{1}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} e^{\frac{T-t}{\tau}}, & \forall t \in [1, T), \end{cases}$$

alors, le résultat de convergence (1.36) est vérifié. De plus, on a $\int_0^T m_\infty^T(t) dt = \tau$. Par conséquent, la fonction $f^T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f^T(t, u) = g(u) - m_\infty^T(t)u$$

satisfait (1.33) car $\lambda_{0, f^T} = -g'(0) + \tau/T$. On suppose que $\tau > g'(0)$. La fonction f^T est T -périodique et satisfait les hypothèses générales de la section 1.4.2. On note encore T^* le temps critique (notons que $T^* > 1$ car $\tau > g'(0)$), w^T l'unique état d'équilibre strictement positif et c_T^* la vitesse critique associée à f^T . On définit les nonlinéarités $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(t, u) = g(u) - m(t)u, \quad \text{et} \quad f_\varepsilon(t, u) = f(t, u) + \varepsilon p(t, u).$$

Grâce à (1.36), on a

$$\sup_{u \in (0, +\infty)} \left| \frac{f(t, u) - f^T(t, u)}{u} \right| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On va prouver que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la proposition II et les résultats de propagation du théorème VIII restent valables si on remplace f^T par f_ε dans les hypothèses. De manière heuristique, ce phénomène s'explique par le fait que d'une part, si ε est petit, alors le terme εp est négligeable comparé à f , et d'autre part, f "tend" vers f^T quand $t \rightarrow +\infty$.

Théorème IX. Soit $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on considère la fonction $u_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f_\varepsilon(t, u) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.37)$$

Si $T < T^*$, il existe $\varepsilon_T > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$ on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_\varepsilon(t, x)| = 0.$$

1.4. Un modèle en sciences médicales utilisant une nonlinéarité de type KPP hétérogène en temps

Si $T > T^*$ et si $\lambda_{w^T, f^T} > 0$, alors il existe $\tilde{\varepsilon}_T > 0$ et $M_T > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_T)$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |u_\varepsilon(t, x) - w^T(t)| \leq M_T \varepsilon.$$

On a vu dans la proposition I que $\lambda_{w^T, f^T} \geq 0$. Dans le cas $T > T^*$ du théorème ci-dessus, on impose que $\lambda_{w^T, f^T} > 0$. Cette propriété n'est pas automatiquement satisfaite. En effet, si on considère la fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(u) = u(1-u)^3$, alors, on a $h(0) = h(1) = 0$, $h > 0$ sur $(0, 1)$, $h < 0$ sur $(1, +\infty)$, $h(u)/u$ strictement décroissante sur $(0, +\infty)$ et $h'(1) = 0$. Par contre, dans le cas où la fonction $f^T(t, \cdot)$ est concave pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la propriété $\lambda_{w^T, f^T} > 0$ est vérifiée pour tout $T > T^*$. En effet, si on définit $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{f^T(s, x w^T(s))}{w^T(s)} ds,$$

alors on a $F(0) = F(1) = 0$ et F est convexe sur $[0, 1]$. Par conséquent, si $F'(1) = 0$, c'est-à-dire si $\lambda_{w^T, f^T} = 0$, alors on a $F' = 0$ sur $[0, 1]$. C'est une contradiction car $F'(0) = \lambda_{0, f^T} < 0$.

Donnons maintenant le plan de la démonstration du théorème IX. Pour $T > 0$ et $\varepsilon > 0$, on va encadrer f_ε par deux fonctions T -périodiques f_ε^T et $f_{-\varepsilon}^T$ pour lesquelles les résultats de la proposition II s'appliquent. Dans le cas où $T < T^*$, si f_ε^T est la fonction majorante de l'encadrement, on montre que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\lambda_{0, f_\varepsilon^T} > 0$. Ainsi, la solution de (1.37) avec f_ε^T comme nonlinéarité est une sur-solution du problème (1.37), et, d'après la proposition II, elle converge vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Dans le cas où $T > T^*$, on prouve que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\lambda_{0, f_\varepsilon^T} < 0$ et $\lambda_{0, f_{-\varepsilon}^T} < 0$. Par conséquent, il existe une unique solution strictement positive w_ε^T (resp. $w_{-\varepsilon}^T$) du système (1.14) avec f_ε^T (resp. $f_{-\varepsilon}^T$) comme nonlinéarité (voir la proposition I). La solution de (1.37) avec f_ε^T comme nonlinéarité est une sur-solution de (1.37), et, grâce à la proposition II, elle converge vers w_ε^T quand $t \rightarrow +\infty$. De la même façon, la solution de (1.37) avec $f_{-\varepsilon}^T$ comme nonlinéarité est une sous-solution de (1.37), et elle converge vers $w_{-\varepsilon}^T$ quand $t \rightarrow +\infty$. On conclut en utilisant le fait que w_ε^T et $w_{-\varepsilon}^T$ sont proches de w^T quand ε est suffisamment petit.

Notons que le cas $T = T^*$ n'est pas traité dans le théorème précédent. Si $\varepsilon = 0$, la solution du problème de Cauchy (1.37) converge uniformément vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, tandis que si $\varepsilon > 0$, la convergence vers 0 n'a pas forcément lieu. On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition V. Soit $T = T^*$ et $\varepsilon \geq 0$. On considère la fonction $u_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant le problème de Cauchy (1.37).

(I) Si $\varepsilon = 0$, alors u_ε converge uniformément vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

(II) Si $\varepsilon > 0$, on peut conclure dans deux cas.

(i) Si $f(t, u) = f^{T^*}(t, u)$ et $p(t, u) = u$, alors, pour ε assez petit, u_ε converge vers une solution strictement positive de (1.14) avec f_ε comme nonlinéarité quand $t \rightarrow +\infty$.

(ii) Si $p(t, u) \leq 0$, alors u_ε converge uniformément vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Les résultats de propagation restent également vrais si on remplace f^T par f_ε dans l'énoncé du théorème VIII.

Théorème X. Soit $T > T^*$. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on considère $u_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f_\varepsilon(t, u) & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si u_0 est une fonction continue bornée telle que $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, et si $\lambda_{w^T, f^T} > 0$, alors, pour tout $c \in (0, c_T^*)$, il existe $\hat{\varepsilon}_{c,T} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_{c,T})$ on a

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| < ct} |u_\varepsilon(t, x) - w^T(t)| \leq M_T \varepsilon,$$

où M_T est défini dans le théorème IX.

Si u_0 est une fonction continue à support compact telle que $u_0 \geq 0$, alors, pour tout $c > c_T^*$, il existe $\bar{\varepsilon}_{c,T} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_{c,T})$ on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| > ct} u_\varepsilon(t, x) = 0.$$

La preuve de ce théorème utilise les mêmes idées que la preuve du théorème IX. Pour $T > T^*$ et $\varepsilon > 0$, on va encadrer f_ε par deux fonctions T -périodiques f_ε^T et $f_{-\varepsilon}^T$ pour lesquelles les résultats du théorème VIII s'appliquent. Un point important de la démonstration est que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les vitesses critiques $c_{T,\varepsilon}^*$ et $c_{T,-\varepsilon}^*$ associées respectivement à f_ε^T et à $f_{-\varepsilon}^T$ sont proches de la vitesse critique c_T^* associée à f^T .

1.4.4 Influence du protocole de traitement

On revient ici à au cas où la fonction $m = m^T$ est T -périodique, avec $T \geq 1$, et de la forme

$$\begin{cases} m^T = \varphi \text{ on } [0, 1), \\ m^T = 0 \text{ on } [1, T), \end{cases}$$

où $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ vérifie $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Dans cette partie, on s'intéresse à des équations de la forme

$$u_t - u_{xx} = g(u) - m_\tau^T(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où le paramètre $\tau \in (0, T]$ désigne ici la durée pendant laquelle le traitement agit sur un cycle de chimiothérapie. La fonction g satisfait les hypothèses mentionnées dans la section 1.4.1. La fonction $m_\tau^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est T -périodique et est définie par

$$\begin{cases} m_\tau^T(t) = \frac{1}{\tau} \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right), & \forall t \in [0, \tau), \\ m_\tau^T(t) = 0, & \forall t \in [\tau, T), \end{cases}$$

où la fonction φ est la même que dans l'expression de m^T . Dans cette nouvelle modélisation, la durée du traitement est égale à τ . De plus, on a

$$\int_0^T m_\tau^T(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

L'égalité précédente implique que dans ce modèle, la quantité totale de médicament administrée au patient durant un cycle de chimiothérapie est indépendante de la durée du traitement τ . On veut étudier l'influence du paramètre τ sur l'évolution de la maladie. On définit les fonctions $f^T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_\tau^T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f^T(t, u) = g(u) - m^T(t)u \quad \text{et} \quad f_\tau^T(t, u) = g(u) - m_\tau^T(t)u.$$

La première proposition traite de la valeur propre principale associée à f_τ^T et à l'état d'équilibre 0.

Proposition VI. Soit $T > 0$ et $\tau \in (0, T]$. Le réel λ_{0,f_τ^T} est indépendant de τ . Plus précisément, on a

$$\lambda_{0,f_\tau^T} = \lambda_{0,f^T} = -g'(0) + \frac{\int_0^1 \varphi(s)ds}{T}.$$

Ainsi, si $T^* > 0$ représente le temps critique associé à la fonction f^T , alors pour tout $\tau \in (0, T^*)$, f_τ^T satisfait (1.33) pour $T \in [\tau, +\infty)$, et le temps critique T^* correspondant à f_τ^T est le même que celui correspondant à f^T . On s'est intéressé aux solutions du système

$$\begin{cases} y' = f_\tau^T(t, y) & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T). \end{cases} \quad (1.38)$$

On peut encore montrer que pour tout $\tau \in (0, T^*)$ et $T \in [\tau, T^*]$, il n'y a pas de solution strictement positive de (1.38), et que si $T > T^*$ et $\tau \in (0, T]$, il existe une unique solution strictement positive $w_\tau^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ de (1.38). On peut également prouver que si $\tau \in (0, T^*)$ et $T \in [\tau, T^*]$, alors, le traitement est efficace et que si $T > T^*$ et $\tau \in (0, T]$, alors l'état d'équilibre w_τ^T envahit tout l'espace quand $t \rightarrow +\infty$. Pour résumer tout cela, on peut dire que la durée optimale d'un cycle de chimiothérapie pour laquelle le patient guérit ne dépend pas de la manière dont le médicament est administré.

On se place maintenant dans le cas où le traitement ne fonctionne pas, c'est-à-dire la situation où $T > T^*$ et $\tau \in (0, T]$. La proposition IV reste valide si on remplace f^T par f_τ^T et w^T par w_τ^T dans l'énoncé, mais avec une vitesse $c_{T,\tau}^*$ qui dépend a priori de τ . Cependant $c_{T,\tau}^* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f_\tau^T}} = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}} = c_T^*$, où c_T^* est la vitesse critique associée à f^T . Là encore, on trouve que la vitesse d'invasion ne dépend pas de la façon dont le médicament est administré.

Pour finir, on s'est intéressé à l'influence du paramètre τ sur l'état d'équilibre w_τ^T .

Proposition VII. Soit $T > T^*$. La fonction $\tau \in (0, T) \mapsto w_\tau^T(0)$ est continue et strictement décroissante.

L'interprétation de ce résultat est que dans le cas où le traitement n'est pas efficace, plus la durée de traitement pendant un cycle est courte, plus la valeur de $w_\tau^T(0)$ est grande. Ainsi, il vaut mieux injecter le médicament sur des périodes plus longues, qui à réduire le temps de repos.

1.4.5 Perspectives

Soit $T > T^*$. On définit

$$X(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, u(t, x) = \frac{1}{2} \inf_{[0,T]} w^T\},$$

où la fonction $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la solution du problème de Cauchy (1.35) avec une condition initiale positive non identiquement nulle à support compact. On a vu dans la deuxième partie du théorème VIII que l'état d'équilibre w^T envahissait tout l'espace à la vitesse c_T^* lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent, on a

$$\frac{X(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_T^*.$$

Dans le cas où la nonlinéarité intervenant dans l'équation (1.35) est une nonlinéarité homogène de type KPP, Bramson raffine le résultat de convergence ci-dessus en prouvant dans [11] et [12] que

$$X(t) = c^*t - \frac{3}{c^*} \log(t) + O(1) \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

où c^* désigne la vitesse minimale pour laquelle il existe un front. Hamel, Nolen, Roquejoffre et Ryzhik étendent dans [26] ce résultat au cas de nonlinéarités dépendant périodiquement de l'espace de type KPP. Un prolongement de notre étude pourrait être de prouver que le résultat de Bramson reste également vrai pour les nonlinéarités qui interviennent dans cette partie de la thèse.

Chapitre 2

Pulsating fronts for bistable on average reaction-diffusion equations in a time periodic environment

2.1 Introduction and main results

We investigate equations of the type

$$u_t - u_{xx} = f^T(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

where

$$f^T(t + T, u) = f^T(t, u), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1],$$

and

$$f^T(t, 0) = f^T(t, 1) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Throughout this article, we assume the function $f^T : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is of class \mathcal{C}^1 with respect to t uniformly for $u \in [0, 1]$, and \mathcal{C}^2 with respect to u uniformly for $t \in \mathbb{R}$. The main hypotheses imposed on the function f^T are the following

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(s, 0) ds < 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(s, 1) ds < 0. \quad (2.3)$$

We say the function f^T is bistable on average if it satisfies hypotheses (2.2) and (2.3).

We begin by recalling the definition of monostable and bistable homogeneous nonlinearities. A function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is said monostable if it satisfies $f(0) = f(1) = 0$ and $f > 0$ on $(0, 1)$. If in addition to this we have $f(u) \leq f'(0)u$ on $(0, 1)$, we say that f is of KPP type. A function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is called bistable if there exists $\theta \in (0, 1)$ such that $f(0) = f(\theta) = f(1) = 0$, $f < 0$ on $(0, \theta)$ and $f > 0$ on $(\theta, 1)$.

We give now two examples of bistable on average functions $f^T : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. The first example is a bistable homogeneous function balanced by a periodic function depending only on time. Namely, if $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is a bistable function and $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a T -periodic function, then the function f^T defined by $f^T(t, u) = m(t)g(u)$ is bistable on average if and only if the quantity $\frac{1}{T} \int_0^T m(s) ds$ is positive and both $g'(0)$ and $g'(1)$ are negative. The second example of bistable on average function is a combination of a bistable homogeneous function and a monostable

homogeneous function, both balanced by periodic functions (with the same period) depending only on time. Namely, if $g_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is a monostable function, $g_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is a bistable function, and $m_1, m_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are two T -periodic functions, then the function f^T defined by $f^T(t, u) = m_1(t)g_1(u) + m_2(t)g_2(u)$ is bistable on average if and only if we have $\mu_1 g'_1(0) + \mu_2 g'_2(0) < 0$ and $\mu_1 g'_1(1) + \mu_2 g'_2(1) < 0$, where $\mu_i := \frac{1}{T} \int_0^T m_i(s) ds$. It is important to note that for a bistable on average function, there can very well exist times t for which the homogeneous function $f^T(t, \cdot)$ is not a bistable function in the sense of homogeneous nonlinearities. Indeed, if we set in the previous case $g_1(u) = u(1-u)$, $g_2(u) = u(1-u)(u-\theta)$ with $0 < \theta < 1$, $m_1(t) = \sin(2\pi t)$ and $m_2(t) = 1 - \sin(2\pi t)$, we can notice that although the function $f^1(t, u) = m_1(t)g_1(u) + m_2(t)g_2(u)$ is bistable on average, the homogeneous function $f^1(1/4, \cdot)$ is of KPP type.

2.1.1 Context

The study of reaction-diffusion equations began in the 1930's. Fisher [23] and Kolmogorov, Petrovsky and Piskunov [32] were interested in the equation

$$u_t - u_{xx} = f(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

with a nonlinearity f of KPP type. They proved existence and uniqueness (up to translation) of planar fronts U_c of speed c , for all speeds $c \geq c^* := 2\sqrt{f'(0)}$, that is, for all $c \geq c^*$, there exists a function u_c satisfying (2.4) and which can be written $u_c(t, x) = U_c(x - ct)$, with $0 < U_c < 1$, $U_c(-\infty) = 1$ and $U_c(+\infty) = 0$. Numerous articles have been dedicated to the study of existence, uniqueness, stability, and other properties of planar fronts for various nonlinearities, see e.g. [2, 22, 31, 33, 44]. In particular, for bistable nonlinearities, there exists a unique (up to translation) planar front $U(x - ct)$ and a unique speed c solution of (2.4). When the nonlinearity is not homogeneous, there are no planar front solutions of (2.1) anymore. For equations with coefficients depending on the space variable, Shigesada, Kawasaki and Teramoto [48] defined in 1986 a notion more general than the planar fronts, namely the pulsating fronts. This notion can be extended for time dependent equations as follows.

Definition 2.1.1. A pulsating front connecting 0 and 1 for equation (2.1) is a solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ such that there exists a real number c and a function $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ verifying

$$\begin{cases} u(t, x) = U(t, x - ct), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = 1, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U(t + T, x) = U(t, x), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

So, a pulsating front connecting 0 and 1 for equation (2.1) is a solution couple $(c, U(t, \xi))$ of the problem

$$\begin{cases} U_t - cU_\xi - U_{\xi\xi} - f^T(t, U) = 0, & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = 1, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U(t + T, \xi) = U(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5)$$

For an environment depending on space only, we can refer to [4, 7, 8, 10, 14, 21, 30, 35, 49, 50, 51] for some existence, uniqueness and stability results. As far as environments depending on time (and possibly on space), Nolen, Rudd and Xin in [41] were interested in equations with a homogenous nonlinearity and an advection coefficient depending periodically on space and on time. Frejacques in [24] proved the existence of pulsating fronts in the case of a time periodic

environment with positive and combustion nonlinearities. Nadin in [37] proved the existence of pulsating fronts in an environment depending on space and time with KPP type nonlinearity. If we consider Nadin's results in the context of our equation, he imposes in his existence results that the steady state 0 is unstable in the sense that the principal eigenvalue associated with the equilibrium 0 is negative. Yet, we shall see in section 2.2 that hypotheses (2.2) and (2.3) in our paper are equivalent to the fact that 0 and 1 are stable steady states, that is, the principal eigenvalues associated with equilibria 0 and 1 are positive. Shen in [45] and [46] defined and proved the existence of pulsating fronts in the case of an almost-periodic environment with a bistable nonlinearity, that is, for functions f which satisfy $f(\cdot, 0) = f(\cdot, 1) = 0$ and are negative near the equilibrium 0 and positive near the equilibrium 1 for any time. More exactly, it is assumed that there exists $\gamma > 0$ and $\delta \in (0, 1/2)$ such that

$$\begin{cases} f(t, u) \leq -\gamma u, & \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times [0, \delta], \\ f(t, u) \geq \gamma(1 - u), & \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times [\delta, 1]. \end{cases}$$

Alikakos, Bates and Chen in [1] (in the case of a periodic nonlinearity) and Shen in [47] (in the case of an almost periodic nonlinearity) consider as in our paper the equation (2.1). They impose the Poincaré map associated with the function f^T has exactly two stable fixed points and one unstable fixed point in between. They prove under this hypothesis there exists a unique pulsating front (U, c) solution of the problem (2.5). They show that for each t , the function $U(t, \cdot)$ is monotonic and that U , U_ξ and $U_{\xi\xi}$ exponentially approach their limits as $\xi \rightarrow \pm\infty$. They also prove a global exponential stability result. In section 2.3, we will see that hypotheses (2.2) and (2.3) are equivalent to the fact that 0 and 1 are two stable fixed points of the Poincaré map associated with f^T . Let us note that in this paper, we do not impose the uniqueness of intermediate fixed points between 0 and 1.

We now give the main results of the paper.

2.1.2 Uniqueness and monotonicity of pulsating fronts

In this paper, we begin by showing the monotonicity of pulsating front solving (2.5). Then we use this result to prove the uniqueness (up to translation) of the pair (U, c) solving (2.5). For that purpose, we use some new comparison principles adapted to hypotheses (2.2) and (2.3), that we show using sliding methods. We have the following theorem.

Theorem 2.1.1. *There exists at most one couple (c, U) solution of problem (2.5), the function $U(t, \xi)$ being unique up to shifts in ξ . In this case, we have that*

$$U_\xi(t, \xi) < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

2.1.3 Asymptotic stability of pulsating fronts

We now investigate global stability of pulsating fronts. In case of homogeneous bistable nonlinearities, Fife and McLeod in [22] proved the global stability of planar fronts. For heterogeneous bistable nonlinearities, Alikakos, Bates and Chen [1] (in case depending on time variable) and Ding, Hamel and Zhao [14] (in case depending on space variable) also proved a global exponential stability result. In our case with assumptions (2.2) and (2.3), the following stability result is proved.

Theorem 2.1.2. Assume there exists a pulsating front U with speed c solution of (2.5). We consider a solution u of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = h(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

where the initial condition $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ is uniformly continuous. We denote $v(t, \xi) = u(t, x) = u(t, \xi + ct)$. There exists a constant $\gamma \in (0, 1)$ depending only on f^T such that if

$$\liminf_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) > 1 - \gamma \quad \text{and} \quad \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) < \gamma,$$

then, there exists $\xi_0 \in \mathbb{R}$ such that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t, \xi) - U(t, \xi + \xi_0)) = 0, \quad \text{uniformly for } \xi \in \mathbb{R}.$$

Roughly speaking, if the initial condition h "looks like" a front, then v converges to a front as $t \rightarrow +\infty$. To prove this theorem we use the method of sub- and supersolution. We adapt here some ideas used in [22] in case of a bistable homogeneous nonlinearity to our equation (2.1) with assumptions (2.2) and (2.3).

2.1.4 Existence and convergence of pulsating fronts for small periods

We are interested here in understanding the role of the period T of the function f^T in the limit of small periods. We consider nonlinearities of the form

$$f^T(t, u) = f\left(\frac{t}{T}, u\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1].$$

The function f is 1-periodic in time, and hypothesis (2.3) becomes

$$\int_0^1 f_u(s, 0) ds < 0 \quad \text{and} \quad \int_0^1 f_u(s, 1) ds < 0.$$

Consequently, the sign of the quantities (2.3) do not depend on the period T . In order to understand the homogenization limit as $T \rightarrow 0^+$, we define the averaged nonlinearity

$$\begin{array}{rcl} g & : & [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \int_0^1 f(s, u) ds \end{array} \tag{2.6}$$

We assume that the function g is a bistable function, that is, there exists $\theta_g \in (0, 1)$ such that

$$\begin{cases} g(0) = g(\theta_g) = g(1) = 0, \\ g(u) < 0, \quad \forall u \in (0, \theta_g), \quad g(u) > 0, \quad \forall u \in (\theta_g, 1). \end{cases}$$

We also assume that

$$g'(\theta_g) > 0. \tag{2.7}$$

Let us noticing that according to (2.3), one gets $g'(0) < 0$ and $g'(1) < 0$. We have the following existence theorem.

Theorem 2.1.3. *Under the above assumptions, there exists $T_f > 0$ such that for all $T \in (0, T_f)$, there exists a unique pulsating front $(U_T(t, \xi), c_T)$ solving*

$$\begin{cases} (U_T)_t - c_T(U_T)_\xi - (U_T)_{\xi\xi} = f^T(t, U_T), & \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_T(\cdot, -\infty) = 1, \quad U_T(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U_T(t + T, \xi) = U_T(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_T(0, 0) = \theta_g. \end{cases}$$

We are then interested in the convergence of the couple (c_T, U_T) as $T \rightarrow 0$. We recall from [2] that for the bistable nonlinearity g , there exists a unique planar fronts (c_g, U_g) solving

$$\begin{cases} U_g'' + c_g U_g' + g(U_g) = 0, & \text{on } \mathbb{R}, \\ U_g(-\infty) = 1, \quad U_g(+\infty) = 0, \\ U_g(0) = \theta_g. \end{cases}$$

For any $1 \leq p \leq +\infty$, we define

$$W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2) = \{U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2) \mid \partial_t U, \partial_\xi U, \partial_{\xi\xi} U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)\}.$$

For any $k \in \mathbb{N}$ and any $\alpha \in (0, 1)$, we also define $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ the space of functions of class $C^k(\mathbb{R}^2)$ with the k^{th} partial derivatives α -Hölder.

In terms of convergence, we extend the function U_g on \mathbb{R}^2 by $U_g(t, \xi) = U_g(\xi)$ for any $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$, and we have the following result

Theorem 2.1.4. *As $T \rightarrow 0$, the speed c_T converges to c_g and U_T converges to U_g in $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$.*

Let us mention that for nonlinearities depending only on space variable, such convergence results were proved by Ding, Hamel and Zhao [14] in the bistable case and by El Smaily [19] in the KPP case.

2.1.5 Existence and convergence of pulsating fronts for small perturbations

In this part, we consider some families of functions $f^{T,\varepsilon} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ having the same regularity as f^T and such that

$$\begin{cases} f^{T,\varepsilon}(t, 0) = f^{T,\varepsilon}(t, 1) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ f^{T,\varepsilon}(t, u) = f^{T,\varepsilon}(t + T, u), & \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1]. \end{cases} \quad (2.8)$$

We also suppose that there exists a bounded function $\omega(\varepsilon) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $\omega(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ and such that

$$|f_u^T(t, u) - f_u^{T,\varepsilon}(t, u)| \leq \omega(\varepsilon), \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (2.9)$$

We will first show that if f^T satisfies the hypotheses of existence and uniqueness theorem of Alikakos, Bates and Chen [1], then for $\varepsilon > 0$ small enough, the Poincaré map associated with $f^{T,\varepsilon}$ also verifies it. As consequence, the following theorem holds.

Theorem 2.1.5. We suppose the Poincaré map associated to f^T has exactly two stable fixed points 0 and 1 and one unstable fixed point α_0 between both.

Then, there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, there exists a unique pulsating front $(U_\varepsilon(t, \xi), c_\varepsilon)$ solving

$$\begin{cases} (U_\varepsilon)_t - c_\varepsilon(U_\varepsilon)_\xi - (U_\varepsilon)_{\xi\xi} - f^{T,\varepsilon}(t, U_\varepsilon) = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon(\cdot, -\infty) = 1, \quad U_\varepsilon(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon(t + T, \xi) = U_\varepsilon(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon(0, 0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Let us note that by hypothesis on f^T , there exists a unique pulsating front (U_T, c_T) solving problem (2.5) with $U_T(0, 0) = \alpha_0$. We have then the following convergence result

Theorem 2.1.6. As $\varepsilon \rightarrow 0$, the speed c_ε converges to c_T and U_ε converges to U_T in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$.

2.1.6 An example of bistable on average nonlinearities for which pulsating front does not exist

In the last section of this paper, we give a class of bistable on average functions for which there does not exist a pulsating front connecting 0 and 1. We consider a 1-periodic in time function $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying (2.2) and (2.3). If $T > 0$, we define the function $f^T : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f^T(t, u) = f\left(\frac{t}{T}, u\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1].$$

We saw above that f^T is a T -periodic in time function satisfying (2.2) and (2.3). We also define the averaged function $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$g(u) = \int_0^1 f(s, u) ds.$$

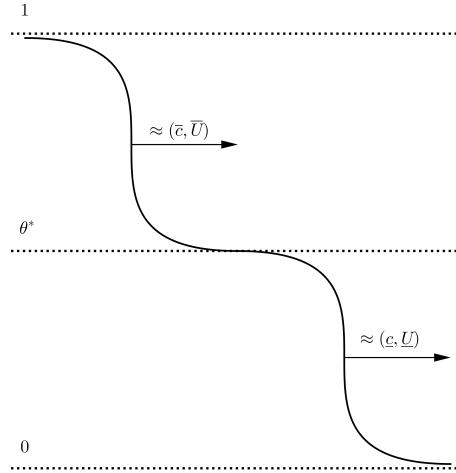
In this part we suppose that g is a tristable function, that is, there exists three real numbers $0 < \underline{\theta} < \theta^* < \bar{\theta} < 1$ such that

$$\begin{cases} g(0) = g(\underline{\theta}) = g(\theta^*) = g(\bar{\theta}) = g(1) = 0, \\ g(u) < 0, \quad \forall u \in (0, \underline{\theta}) \cup (\theta^*, \bar{\theta}), \quad g(u) > 0, \quad \forall u \in (\underline{\theta}, \theta^*) \cup (\bar{\theta}, 1). \end{cases} \quad (2.11)$$

We also assume that

$$g'(\theta^*) > 0.$$

Let us notice that according to (2.3), one gets $g'(0) < 0$ and $g'(1) < 0$. We have already mentioned above that for the nonlinearity g , there exist a planar front \underline{U} connecting 0 and θ^* with speed \underline{c} and a planar front \bar{U} connecting θ^* with 1 with speed \bar{c} . Nevertheless, there does not always exist a planar front connecting 0 and 1. If $\underline{c} < \bar{c}$, then there exists a unique such front. Moreover, if $\underline{c} \geq \bar{c}$, then such a front does not exist, but under suitable initial conditions, owing to [22], solutions of (2.4) converge to a propagating terrace. Roughly speaking, a propagating terrace can be pictured as a layer of several planar fronts going at various speeds. For more details on the concept of propagating terrace, we can refer to [18, 22]. The cases $\underline{c} > \bar{c}$ and $\underline{c} < \bar{c}$ are treated in [22], while the case $\underline{c} = \bar{c}$ is solved in [27] for more general equations.



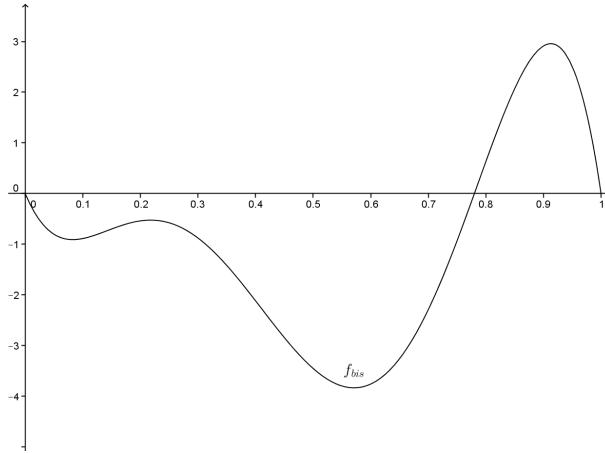
The main result of this part is the following.

Theorem 2.1.7. *Let f and g be as above. If $\underline{c} > \bar{c}$, then there is $T_0 > 0$ such that for any $T \in (0, T_0)$, there is no pulsating front solving the problem*

$$\begin{cases} U_t - cU_\xi - U_{\xi\xi} = f^T(t, U), & \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = 1, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U(t + T, \xi) = U(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

To conclude, we give a concrete example of such a function f . We define the bistable function $f_{bis} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f_{bis}(u) = 580u(1-u)(u-0.78)(u^2-0.45u+0.055), \quad \forall u \in [0, 1].$$



We also define the KPP function $f_{kpp} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by

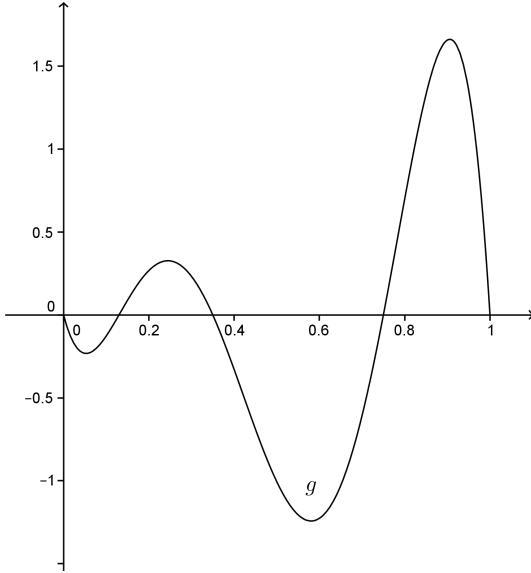
$$f_{kpp}(u) = 5u(1-u), \quad \forall u \in [0, 1],$$

and the 1-periodic bistable on average function $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f(t, u) = \left(\frac{1 - \sin(2\pi t)}{2}\right)f_{kpp}(u) + \left(\frac{1 + \sin(2\pi t)}{2}\right)f_{bis}(u), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0, 1].$$

The averaged function $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is then given by

$$g(u) = \int_0^1 f(s, u) du = 290u(1-u)(u-0.749)(u-0.35)(u-0.131), \quad \forall u \in [0, 1].$$



This function is a tristable nonlinearity, with $\underline{\theta} = 0.131$, $\theta^* = 0.35$ and $\bar{\theta} = 0.749$. Furthermore, we have $\int_0^{0.35} g(u) du > 0$ and $\int_{0.35}^1 g(u) du < 0$. Consequently $\underline{c} > 0$ and $\bar{c} < 0$. Hence $\underline{c} > \bar{c}$.

Outline

Section 2.2 of this paper is devoted to some equivalent formulations of hypotheses (2.2) and (2.3), in particular using Poincaré map and principal eigenvalue. In the following two sections, we prove uniqueness, monotonicity and uniform stability of pulsating front solution of (2.1) that is, Theorems 2.1.1 and 2.1.2. In Section 2.5, we prove Theorems 2.1.3 and 2.1.4 on the homogenization limit. In Section 2.6, we prove Theorems 2.1.5 and 2.1.6 on a small perturbation of a given pulsating front. The section 2.7 is devoted to the proof of Theorem 2.1.7.

2.2 Preliminaries on the characterization of the asymptotic stability of equilibrium state

This part is devoted to the study of various characterizations of bistable on average functions. As we mentioned it previously, it is necessary to know its various points of view to be able to place the results of our paper in the literature already existing. We begin by defining the notion of equilibrium state.

Definition 2.2.1. Consider the problem

$$\begin{cases} \partial_t U - c\partial_\xi U - \partial_{\xi\xi} U = f^T(t, U) & \text{on } \mathbb{R}^2, \\ U(t, \xi) = U(t + T, \xi), & \forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.12)$$

The T -periodic solutions of the equation $y' = f^T(t, y)$ are called equilibrium states of (2.12).

Indeed, if $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ is a solution of (2.12) and if there exists a function $t \mapsto \theta(t)$ such that $|U(t, \xi) - \theta(t)| \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$ for all $t \in \mathbb{R}$, then, by standard parabolic estimates, the function θ is a T -periodic solution of the equation $y' = f^T(t, y)$ on \mathbb{R} . We recall the notion of uniformly asymptotic stability of such an equilibrium state.

Definition 2.2.2. Let $t \mapsto \theta(t)$ be an equilibrium state of (2.12). Let $(t, \xi) \mapsto U(t, \xi)$ be another solution of the same equation. We say that θ is a uniformly asymptotic stable equilibrium if there exists $\eta > 0$ such that

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}, |U(0, \xi) - \theta(0)| < \eta) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} |U(t, \cdot) - \theta(t)| = 0 \text{ unif. on } \mathbb{R}.$$

If θ is not a uniformly asymptotic stable equilibrium, we say it is a uniformly asymptotic unstable equilibrium.

We approach now the notion of principal eigenvalue.

Proposition 2.2.1. [29],[36] Let $t \mapsto \theta(t)$ an equilibrium state of (2.12). There exists a constant λ_{θ, f^T} and a function $\Phi_{\theta, f^T} \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_{\theta, f^T} - c \partial_\xi \Phi_{\theta, f^T} - \partial_\xi \xi \Phi_{\theta, f^T} = f_u^T(t, \theta(t)) \Phi_{\theta, f^T} + \lambda_{\theta, f^T} \Phi_{\theta, f^T} & \text{on } \mathbb{R}^2, \\ \Phi_{\theta, f^T} > 0 \text{ on } \mathbb{R}^2, \\ \Phi_{\theta, f^T}(\cdot, \xi) \text{ is } T\text{-periodic, } \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ \Phi_{\theta, f^T}(t, \cdot) \text{ is } 1\text{-periodic, } \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.13)$$

The real number λ_{θ, f^T} is unique. It is called the principal eigenvalue associated with the function f^T and the equilibrium state θ . The function Φ_{θ, f^T} is unique up to multiplication by a positive constant. It is called the principal eigenfunction associated with the function f^T and the equilibrium state θ .

We give an explicit formulation of the principal eigenvalue.

Proposition 2.2.2. The function Φ_{θ, f^T} does not depend on the variable ξ , and the constant λ_{θ, f^T} is given by

$$\lambda_{\theta, f^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(s, \theta(s)) ds.$$

Démonstration. We know that Φ_{θ, f^T} is unique up to multiplication by a positive constant. Let us suppose for example that $\|\Phi_{\theta, f^T}\|_\infty = 1$. Let $\xi_0 \in \mathbb{R}$. The function $\Phi_{\theta, f^T}(t, \xi + \xi_0)$ is also a positive solution of the problem (2.13). Yet $\|\Phi_{\theta, f^T}(\cdot, \cdot + \xi_0)\|_\infty = 1$. So, by uniqueness $\Phi_{\theta, f^T}(t, \xi + \xi_0) = \Phi_{\theta, f^T}(t, \xi)$ for any (t, ξ) in \mathbb{R}^2 . Since ξ_0 is arbitrary, it follows that Φ_{θ, f^T} does not depend on the variable ξ . Furthermore, the first equation in (2.13) becomes

$$\partial_t \Phi_{\theta, f^T} = f_u^T(t, \theta(t)) \Phi_{\theta, f^T} + \lambda_{\theta, f^T} \Phi_{\theta, f^T}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

We divide this equation by Φ_{θ, f^T} , then we integrate between 0 and T . According to the fact that Φ_{θ, f^T} is a T -periodic function, we obtain the expression of λ_{θ, f^T} given in Proposition 2.2.2. \square

We give a characterization of the uniformly asymptotic stability of the equilibrium state θ from the principal eigenvalue λ_{θ, f^T} .

Proposition 2.2.3. If $\lambda_{\theta, f^T} > 0$ (resp. < 0), then the equilibrium state θ is uniformly asymptotically stable (resp. unstable).

Démonstration. We are going to handle the case where $\lambda_{\theta,f^T} > 0$. We consider a solution $U(t, \xi)$ of (2.12). We saw that the function $\Phi_{\theta,f^T} = \Phi_{\theta,f^T}(t)$ satisfies

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_{\theta,f^T} = f_u^T(t, \theta(t)) \Phi_{\theta,f^T} + \lambda_{\theta,f^T} \Phi_{\theta,f^T} \text{ on } \mathbb{R}, \\ \Phi_{\theta,f^T} > 0, \\ \Phi_{\theta,f^T} \text{ is } T - \text{periodic.} \end{cases}$$

There exists $\varepsilon_0 > 0$ small enough such that for any $t \geq 0$ we have

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{4} \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t) &\leq f^T(t, \theta(t) + \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t)) - \\ &f^T(t, \theta(t)) - f_u^T(t, \theta(t)) \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t) \leq \frac{\lambda_{\theta,f^T}}{4} \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t). \end{aligned}$$

We note $\chi(t) = \theta(t) + \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t)$. For any $t \geq 0$, we have

$$\chi_t(t) - c\chi_\xi(t) - \chi_{\xi\xi}(t) - f^T(t, \chi(t)) \geq \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t) [\lambda_{\theta,f^T} - \frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} - \frac{\lambda_{\theta,f^T}}{4}] > 0.$$

If we suppose that for any ξ in \mathbb{R} , we have $U(0, \xi) \leq \theta(0) + \varepsilon_0 \Phi_{0,f^T}(0)$, then, applying the maximum principle, we have that

$$U(t, \xi) \leq \theta(t) + \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

In the same way, possibly reducing ε_0 , one can show that if we suppose for any $\xi \in \mathbb{R}$ that we have $\theta(0) - \varepsilon_0 \Phi_{0,f^T}(0) \leq U(0, \xi)$, then

$$\theta(t) - \varepsilon_0 e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t) \leq U(t, \xi), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Consequently, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |U(t, \xi) - \theta(t)| = 0$ uniformly on \mathbb{R} .

We are now interested in case where $\lambda_{\theta,f^T} < 0$. Let $\eta > 0$. There exists $\varepsilon_{0,T} > 0$ small enough such that $\varepsilon_{0,T} \leq \frac{\eta}{\Phi_{\theta,f^T}(0)}$ and, for any $t \in [0, T]$ and any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{0,T})$ we have

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\theta,f^T}}{4} \varepsilon e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t) &\leq f^T(t, \theta(t) + \varepsilon e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t)) - \\ &f^T(t, \theta(t)) - f_u^T(t, \theta(t)) \varepsilon e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t) \leq -\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{4} \varepsilon e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t). \end{aligned}$$

We note $\chi_\varepsilon(t) = \theta(t) + \varepsilon e^{-\frac{\lambda_{\theta,f^T}}{2} t} \Phi_{\theta,f^T}(t)$. The same calculations as previously give us that for any $t \in [0, T]$ we have

$$(\chi_\varepsilon)_t(t) - c(\chi_\varepsilon)_\xi(t) - (\chi_\varepsilon)_{\xi\xi}(t) - f^T(t, \chi_\varepsilon(t)) \leq 0.$$

We define $U_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} (U_\varepsilon)_t - c(U_\varepsilon)_\xi - (U_\varepsilon)_{\xi\xi} - f^T(t, U_\varepsilon) \text{ on } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon(0, \cdot) = \chi_\varepsilon(0) \text{ on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Applying the maximum principle on $[0, T] \times \mathbb{R}$ to the function U_ε and χ_ε , we obtain that $U_\varepsilon \geq \chi_\varepsilon$ on $[0, T] \times \mathbb{R}$. In particular, since χ_ε is a nondecreasing function on $[0, T]$, we have

$$U_\varepsilon(T, \cdot) \geq \chi_\varepsilon(0) \text{ on } \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

The function $U_\varepsilon(\cdot + T, \cdot)$ satisfies the same equation as U_ε . According to (2.14), we can apply the maximum principle on $[0, T] \times \mathbb{R}$ to the function $U_\varepsilon(\cdot + T, \cdot)$ and χ_ε . We obtain for $t = T$ that

$$U_\varepsilon(2T, \cdot) \geq \chi_\varepsilon(T) \geq \chi_\varepsilon(0) \text{ on } \mathbb{R}.$$

For any $n \in \mathbb{N}^*$, we can show by induction that

$$U_\varepsilon(nT, \cdot) \geq \chi_\varepsilon(0) \text{ on } \mathbb{R}.$$

According to the fact that $\chi_\varepsilon(0) > \theta(0)$, and that $\theta(nT) = \theta(0)$ we have that $\lim_{t \rightarrow +\infty} (U_\varepsilon(t, \cdot) - \theta(t)) \neq 0$ for any $\xi \in \mathbb{R}$, although we have $|U_\varepsilon(0, \xi) - \theta(0)| \leq \eta$, for any $\xi \in \mathbb{R}$ \square

Finally, we connect now the previous notions with the notion of Poincaré map associated with the function f^T .

Definition 2.2.3. For any $\alpha \in [0, 1]$, let $w(\alpha, \cdot)$ be the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' = f^T(t, y), \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (2.15)$$

The Poincaré map associated with f^T is the function $P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that

$$P(\alpha) := w(\alpha, T).$$

Let α_T be a fixed point of P . We say that α_T is stable (resp. unstable) if $P'(\alpha_T) < 1$ (resp. $P'(\alpha_T) > 1$).

We give the link between equilibrium states of (2.12) and fixed points of the Poincaré map associated with f^T . First of all, it follows from the definition of P that a real number $\alpha \in [0, 1]$ is a fixed point of P if and only if $w(\alpha, \cdot)$ is an equilibrium state of (2.12).

Proposition 2.2.4. Let α be a fixed point of P . We have

$$P'(\alpha) = e^{-T\lambda_{w(\alpha, \cdot), f^T}}.$$

Démonstration. We have

$$\partial_t w(\alpha, t) = f^T(t, w(\alpha, t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Differentiating with respect to α , we obtain that $\partial_\alpha w(\alpha, \cdot)$ solves the linear ODE $y' = y f_u^T(s, w(\alpha, s))$. It follows that

$$\partial_\alpha w(\alpha, t) = \partial_\alpha w(\alpha, 0) e^{\int_0^t f_u^T(s, w(\alpha, s)) ds}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

If we take $t = T$, we have that $\partial_\alpha w(\alpha, T) = \partial_\alpha w(\alpha, 0) e^{\int_0^T f_u^T(s, w(\alpha, s)) ds}$, and since $\partial_\alpha w(\alpha, 0) = 1$, we infer that $\partial_\alpha w(\alpha, T) = e^{\int_0^T f_u^T(s, w(\alpha, s)) ds}$. In other words, by Proposition 2.2.2, $P'(\alpha) = e^{-T\lambda_{w(\alpha, \cdot), f^T}}$. \square

Consequently, the fact that a fixed point α of the Poincaré map associated with f^T is stable (resp. unstable) in the sense of Definition 2.2.3 is equivalent to the fact that the principal eigenvalue associated with $w(\alpha, \cdot)$ and f^T is positive (resp. negative), that is, by Proposition (2.2.3), the solution $w(\alpha, \cdot)$ of (2.15) is a uniformly asymptotic stable (resp. unstable) equilibrium of (2.12).

In particular, in our paper, the hypothetic (2.2) implies that 0 and 1 are two fixed points of the Poincaré map associated with f^T , and the condition (2.3) is a condition of positivity of the principal eigenvalues associated with 0 and 1. In this way, the equilibria 0 and 1 are uniformly asymptotically stable for the equation (2.1).

2.3 Uniqueness and monotonicity of pulsating front

This section is devoted to the proof of Theorem 2.1.1.

2.3.1 Two comparison principles

Lemma 2.3.1. *Let us fix $c \in \mathbb{R}$, $R_+ \in \mathbb{R}$, $l_0 < l_1$ and $\alpha \in (0, 1)$. We consider two functions \underline{g} and \bar{g} of class $C^1(\mathbb{R} \times [l_0, l_1], \mathbb{R})$, T -periodic and such that*

$$\underline{g}(t, u) \leq \bar{g}(t, u), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [l_0, l_1]. \quad (2.16)$$

We assume that \bar{g} satisfies $\bar{g}(\cdot, l_0) = 0$ on $[0, T]$ and that $\frac{1}{T} \int_0^T \bar{g}_u(t, l_0) dt < 0$.

Suppose there exist two functions $\bar{v} : \mathbb{R} \times [R_+, +\infty) \rightarrow [l_0, l_1]$, $(t, \xi) \mapsto \bar{v}(t, \xi)$ and $\underline{v} : \mathbb{R} \times [R_+, +\infty) \rightarrow [l_0, l_1]$, $(t, \xi) \mapsto \underline{v}(t, \xi)$ of class $C^{1, \frac{\alpha}{2}}$ in $t \in \mathbb{R}$ uniformly for $\xi \in [R_+, +\infty)$ and of class $C^{2, \alpha}$ in $\xi \in [R_+, +\infty)$ uniformly for $t \in \mathbb{R}$, and such that

$$\partial_t \bar{v} - c \partial_\xi \bar{v} - \partial_{\xi\xi} \bar{v} \geq \bar{g}(t, \bar{v}) \quad \text{on } \mathbb{R} \times [R_+, +\infty), \quad (2.17)$$

$$\partial_t \underline{v} - c \partial_\xi \underline{v} - \partial_{\xi\xi} \underline{v} \leq \underline{g}(t, \underline{v}) \quad \text{on } \mathbb{R} \times [R_+, +\infty), \quad (2.18)$$

$$\underline{v}(t, R_+) \leq \bar{v}(t, R_+), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

$$\underline{v}(\cdot, +\infty) = l_0 \quad \text{uniformly on } \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

There exists $\delta_+ > 0$ depending only on \bar{g} such that if we have

$$\underline{v}(t, \xi) \leq l_0 + \delta_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty), \quad (2.21)$$

then

$$\underline{v}(t, x) \leq \bar{v}(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty).$$

Démonstration. Let us first introduce a few notations. We denote $\lambda_{l_0, \bar{g}}$ and $\Phi_{l_0, \bar{g}}$ the principal eigenvalue and the principal eigenfunction associated with the function \bar{g} and the equilibrium l_0 . We saw in Section 2.2 that $\Phi_{l_0, \bar{g}}$ depends only on t (and not on ξ). Consequently, we have

$$\Phi'_{l_0, \bar{g}}(t) = (\lambda_{l_0, \bar{g}} + \bar{g}_u(t, l_0)) \Phi_{l_0, \bar{g}}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

We also saw in Section 2.2 that $\lambda_{l_0, \bar{g}} > 0$. Since \bar{g} is of class $C^1(\mathbb{R} \times [l_0, l_1], \mathbb{R})$ and periodic in t , there exists $\delta_+ > 0$ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (u, u') \in [l_0, l_1], \quad |u - u'| \leq \delta_+ \Rightarrow |\bar{g}_u(t, u) - \bar{g}_u(t, u')| < \frac{\lambda_{l_0, \bar{g}}}{2}. \quad (2.23)$$

The general strategy to prove Lemma 2.3.1 consists in using a sliding method. To do so, we define

$$\varepsilon^* = \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 \mid \frac{\bar{v} - \underline{v}}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} + \varepsilon \geq 0 \text{ on } \mathbb{R} \times [R_+, +\infty) \right\}.$$

We note that ε^* is a real number since \underline{v} and \bar{v} are bounded and $\min_{\mathbb{R}} \Phi_{l_0, \bar{g}} > 0$. Furthermore, by continuity

$$\frac{\bar{v} - \underline{v}}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} + \varepsilon^* \geq 0 \text{ on } \mathbb{R} \times [R_+, +\infty). \quad (2.24)$$

We are going to show bwoc that $\varepsilon^* = 0$. Thus let us suppose that $\varepsilon^* > 0$. We consider a sequence $(\varepsilon_n)_n$ satisfying $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^*$ and $0 < \varepsilon_n < \varepsilon^*$. There exists $(t_n, \xi_n) \in \mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$ such that

$$\frac{\bar{v}(t_n, \xi_n) - \underline{v}(t_n, \xi_n)}{\Phi_{l_0, \bar{g}}(t_n)} + \varepsilon_n < 0. \quad (2.25)$$

We write $t_n = k_n T + t'_n$, with $k_n \in \mathbb{Z}$ and $|t'_n| < T$. Since $(t'_n)_n$ is bounded, we thus have up to extraction of a subsequence that $t'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^*$. Furthermore, the sequence $(\xi_n)_n$ is also bounded. Indeed, let us suppose it is not the case. So, according to (2.20), there exists $R \in \mathbb{R}$ such that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \geq R, \quad l_0 \leq \underline{v}(t_n, \xi) \leq l_0 + \frac{\varepsilon^*}{4} \min_{\mathbb{R}} \Phi_{l_0, \bar{g}}.$$

Now, if $(\xi_n)_n$ is not bounded, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\xi_N \geq R$ and $\varepsilon_N > \frac{\varepsilon^*}{2}$. So,

$$(\underline{v}(t_N, \xi_N) - l_0) - \varepsilon_N \Phi_{l_0, \bar{g}}(t_N) \leq \frac{\varepsilon^*}{4} \min_{\mathbb{R}} \Phi_{l_0, \bar{g}} - \frac{\varepsilon^*}{2} \min_{\mathbb{R}} \Phi_{l_0, \bar{g}} < 0.$$

Now, by (2.25) we have $\bar{v}(t_N, \xi_N) \leq \underline{v}(t_N, \xi_N) - \varepsilon_N \Phi_{l_0, \bar{g}}(t_N)$. Hence $\bar{v}(t_N, \xi_N) - l_0 < 0$, which contradicts the fact that $\bar{v} \in [l_0, l_1]$. We thus have up to extraction of a subsequence that $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi^* \in [R_+, +\infty)$. We define $\underline{v}_n(t, \xi) = \underline{v}(t + k_n T, \xi)$, and $\bar{v}_n(t, \xi) = \bar{v}(t + k_n T, \xi)$. As \underline{g} and \bar{g} are T -periodic, \underline{v}_n and \bar{v}_n satisfy respectively (2.17) and (2.18). Furthermore, \underline{v}_n and \bar{v}_n converge up to extraction of a subsequence respectively to $\underline{v}^* \in [l_0, l_1]$ and $\bar{v}^* \in [l_0, l_1]$ in $C_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R} \times [R_+, +\infty))$. Passing to the limit in (2.24) we obtain

$$\frac{\bar{v}^* - \underline{v}^*}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} + \varepsilon^* \geq 0 \text{ on } \mathbb{R} \times [R_+, +\infty).$$

According to (2.25), we have

$$\frac{\bar{v}_n(t'_n, \xi_n) - \underline{v}_n(t'_n, \xi_n)}{\Phi_{l_0, \bar{g}}(t'_n)} + \varepsilon_n < 0.$$

So, passing to the limit, we have

$$\frac{\bar{v}^*(t^*, \xi^*) - \underline{v}^*(t^*, \xi^*)}{\Phi_{l_0, \bar{g}}(t^*)} + \varepsilon^* = 0. \quad (2.26)$$

We define the open set

$$\Omega = \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times [R_+, +\infty) \mid l_0 \leq \bar{v}^*(t, \xi) < \underline{v}^*(t, \xi)\}.$$

This set is open by continuity and by (2.19). We note that $(t^*, \xi^*) \in \Omega$ because $\bar{v}^*(t^*, \xi^*) - v^*(t^*, \xi^*) = -\varepsilon^* \Phi_{l_0, \bar{g}}(t^*) < 0$. Furthermore, according to (2.19), we have $\bar{v}^*(t^*, R_+) - v^*(t^*, R_+) \geq 0$. So, $\xi^* > R_+$. We will apply a strong maximum principle to the nonnegative function

$$z = \frac{\bar{v}^* - v^*}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} + \varepsilon^*.$$

There exists $\theta : \mathbb{R} \times [R_+, +\infty) \rightarrow [l_0, l_1]$, $(t, \xi) \mapsto \theta(t, \xi)$, with $\theta(t, \xi)$ between $\bar{v}^*(t, \xi)$ and $v^*(t, \xi)$ such that we have on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$

$$\begin{aligned} \partial_t z - c \partial_\xi z - \partial_{\xi\xi} z &\geq \frac{\bar{g}(t, \bar{v}^*) - g(t, v^*)}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} - \frac{\partial_t \Phi_{l_0, \bar{g}}(\bar{v}^* - v^*)}{\Phi_{l_0, \bar{g}}^2} \quad ((2.17) \text{ and } (2.18)) \\ &\geq \frac{\bar{g}(t, \bar{v}^*) - \bar{g}(t, v^*)}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} - \frac{(\bar{g}_u(t, l_0) + \lambda_{l_0, \bar{g}})(\bar{v}^* - v^*)}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} \quad ((2.22) \text{ and } (2.16)) \\ &= \frac{1}{\Phi_{l_0, \bar{g}}} (\bar{g}_u(t, \theta) - \bar{g}_u(t, l_0) - \lambda_{l_0, \bar{g}})(\bar{v}^* - v^*), \\ &= (\bar{g}_u(t, \theta) - \bar{g}_u(t, l_0) - \lambda_{l_0, \bar{g}})z - \varepsilon^*(\bar{g}_u(t, \theta) - \bar{g}_u(t, l_0) - \lambda_{l_0, \bar{g}}). \end{aligned}$$

We define the bounded function $\alpha(t, \xi) := \bar{g}_u(t, \theta(t, \xi)) - \bar{g}_u(t, l_0) - \lambda_{l_0, \bar{g}}$ on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$. According to (2.21) we have $v^* \leq l_0 + \delta_+$ on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$. Furthermore, we have $l_0 \leq \bar{v}^* < v^*$ on Ω , whence $|\theta - l_0| \leq \delta_+$ on Ω . So, by (2.23) we have on Ω

$$\partial_t z - c \partial_\xi z - \partial_{\xi\xi} z - \alpha(t, \xi)z \geq -\varepsilon^*(\bar{g}_u(t, \theta) - \bar{g}_u(t, l_0) - \lambda_{l_0, \bar{g}}) \geq \frac{\lambda_{l_0, \bar{g}} \varepsilon^*}{2} > 0.$$

Furthermore, according to (2.24), we have $z \geq 0$ on Ω and even on $\mathbb{R} \times [R^+, +\infty)$. As $z(t^*, \xi^*) = 0$ and $(t^*, \xi^*) \in \Omega$, it follows from [43, Th2 p168] that

$$z \equiv 0 \text{ on } \Omega_0, \tag{2.27}$$

where Ω_0 is the set of point $(t, \xi) \in \Omega$ such that there exists a continuous path $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ such that $\gamma(0) = (t, \xi)$ and $\gamma(1) = (t^*, \xi^*)$, and the time component of $\gamma(s)$ is nondecreasing with respect to $s \in [0, 1]$. Now, we define

$$\xi = \inf \{ \xi \geq R_+ \mid \forall \tilde{\xi} \in (\xi, \xi^*], \quad (t^*, \tilde{\xi}) \in \Omega_0 \}.$$

The equality (2.27) and the continuity of z imply that

$$z(t^*, \underline{\xi}) = 0.$$

So, according to (2.19), we have $\underline{\xi} > R_+$ (because $\bar{v}^*(t^*, R_+) \geq v^*(t^*, R_+)$). Consequently, the definition of $\underline{\xi}$ and the continuity of \bar{v}^* and v^* imply that

$$\bar{v}^*(t^*, \underline{\xi}) = v^*(t^*, \underline{\xi}).$$

Finally, the previous two displayed equalities imply that $\varepsilon^* = 0$, which contradicts the fact that ε^* is positive. Consequently $\varepsilon^* = 0$ and the lemma is proved. \square

With a similar proof, we can obtain the following lemma.

Lemma 2.3.2. *Let us fix $c \in \mathbb{R}$, $R_- \in \mathbb{R}$, $l_0 < l_1$ and $\alpha \in (0, 1)$. We consider two functions \underline{g} and \bar{g} of class $C^1(\mathbb{R} \times [l_0, l_1], \mathbb{R})$, T -periodic and such that*

$$\underline{g}(t, u) \leq \bar{g}(t, u), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall u \in [l_0, l_1].$$

We assume that \underline{g} satisfies $\underline{g}(\cdot, l_1) = 0$ on $[0, T]$ and that $\frac{1}{T} \int_0^T \underline{g}_u(t, l_1) dt < 0$.

Suppose there exist two functions $\bar{v} : \mathbb{R} \times (-\infty, R_-] \rightarrow [l_0, l_1]$, $(t, \xi) \mapsto \bar{v}(t, \xi)$ and $\underline{v} : \mathbb{R} \times (-\infty, R_-] \rightarrow [l_0, l_1]$, $(t, \xi) \mapsto \underline{v}(t, \xi)$ of class $C^{1, \frac{\alpha}{2}}$ in $t \in \mathbb{R}$ uniformly for $\xi \in (-\infty, R_-]$ and of class $C^{2, \alpha}$ in $\xi \in (-\infty, R_-]$ uniformly for $t \in \mathbb{R}$, and such that

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{v} - c \partial_\xi \bar{v} - \partial_{\xi\xi} \bar{v} &\geq \bar{g}(t, \bar{v}) \quad \text{on } \mathbb{R} \times (-\infty, R_-], \\ \partial_t \underline{v} - c \partial_\xi \underline{v} - \partial_{\xi\xi} \underline{v} &\leq \underline{g}(t, \underline{v}) \quad \text{on } \mathbb{R} \times (-\infty, R_-], \\ \underline{v}(t, R_-) &\leq \bar{v}(t, R_-), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \bar{v}(t, -\infty) &= l_1 \quad \text{uniformly on } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

There exists $\delta_- > 0$ depending only on \underline{g} such that, if we have

$$\bar{v}(t, \xi) \geq l_1 - \delta_-, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-],$$

then

$$\underline{v}(t, x) \leq \bar{v}(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-].$$

2.3.2 Monotonicity of the front

Let us consider (U, c) a solution of (2.5), with $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. We want to prove that for all $\tau \geq 0$, we have

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

We start with the following lemma.

Lemma 2.3.3. *There exists $\tau_0 \geq 0$ such that for any $\tau \geq \tau_0$, we have*

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. As $U(\cdot, +\infty) = 0$ uniformly on \mathbb{R} , there exists a real R_+ such that

$$U(t, \xi) \leq \delta_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty), \tag{2.28}$$

with $\delta_+ \in (0, 1)$ defined in Lemma 2.3.1 with $\bar{g} = \underline{g} = f$.

As $U(\cdot, -\infty) = 1$ uniformly on \mathbb{R} , there exists $\tau_0 \geq 0$ such that

$$U(t, \xi - \tau) \geq 1 - \delta_-, \quad \forall \tau \geq \tau_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_+],$$

where $\delta_- \in (0, 1)$ is defined in Lemma 2.3.2 with $\bar{g} = \underline{g} = f$.

Without loss of generality, we can assume that $\max \{\delta_-, \delta_+\} < 1/2$, whence $U(t, R_+) \leq U(t, R_+ - \tau)$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $\tau \geq \tau_0$. We can apply Lemma 2.3.1 on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$ and Lemma 2.3.2 on $\mathbb{R} \times (-\infty, R_+]$ to the functions $\underline{v} = U$ and $\bar{v} = U(\cdot, \cdot - \tau)$ for any $\tau \geq \tau_0$, and the lemma is proved. \square

Proposition 2.3.4. *We have*

$$\partial_\xi U(t, \xi) < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. We define R_+ as in the previous proof. As $U(\cdot, -\infty) = 1$ uniformly on \mathbb{R} , there exists $R_- \leq R_+$ such that

$$U(t, \xi) \geq 1 - \delta_-, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-].$$

Consequently,

$$U(t, \xi - \tau) \geq 1 - \delta_-, \quad \forall \tau \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-]. \quad (2.29)$$

We define

$$\tau^* = \inf \{ \tilde{\tau} \geq 0 \mid U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau), \forall \tau \geq \tilde{\tau}, \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

The constant τ^* is a well defined real number according to Lemma 2.3.3. We will prove that $\tau^* = 0$ by contradiction. Let us suppose that $\tau^* > 0$. The definition of τ^* and the continuity of U imply that

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

We define

$$\eta := \min_{(t, \xi) \in [0, T] \times [R_-, R_+]} \{U(t, \xi - \tau^*) - U(t, \xi)\}.$$

Two cases can occur, either $\eta > 0$, or $\eta = 0$.

1st case : $\eta > 0$. By uniform continuity of U on $[0, T] \times [R_- - \tau^*, R_+]$, there exists $\bar{\tau} \in (0, \tau^*)$ such that

$$U(t, \xi) < U(t, \xi - \tau), \quad \forall \tau \in [\bar{\tau}, \tau^*], \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in [R_-, R_+]. \quad (2.31)$$

Let $\tau \in [\bar{\tau}, \tau^*]$. According to (2.28) and (2.31), and since U is T -periodic in t , we can apply Lemma 2.3.1 to U and $U(\cdot, \cdot - \tau)$ on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$. We obtain

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty).$$

And according to (2.29) and (2.31), we can apply Lemma 2.3.2 to U and $U(\cdot, \cdot - \tau)$ on $\mathbb{R} \times (-\infty, R_-]$. We obtain

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-].$$

To summarize $U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau)$ for all $t \in [0, T]$, and $\xi \in \mathbb{R}$. Consequently, since U is T -periodic in t , we have

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau), \quad \forall \tau \in [\bar{\tau}, \tau^*] \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

That is

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau), \quad \forall \tau \geq \bar{\tau}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

This contradicts the definition of τ^* .

2nd case : $\eta = 0$. Let us begin by noting that there exists a couple $(t^*, \xi^*) \in [0, T] \times [R_-, R_+]$ such that $\eta = U(t^*, \xi^* - \tau^*) - U(t^*, \xi^*)$. Consequently, we have $U(t^*, \xi^*) = U(t^*, \xi^* - \tau^*)$. By applying the strong parabolic maximum principle on \mathbb{R}^2 , we infer that

$$U(t, \xi) = U(t, \xi - \tau^*) \quad \forall t \in (-\infty, t^*], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

This implies that $U(t^*, \cdot)$ is a periodic function, which is impossible since $U(\cdot, -\infty) = 1$ and $U(\cdot, +\infty) = 0$.

So we have $\tau^* = 0$, that is

$$U(t, \xi) \leq U(t, \xi - \tau), \quad \forall \tau \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

In other terms $\partial_\xi U(t, \xi) \leq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $\xi \in \mathbb{R}$. We apply the strong maximum principle to the equation satisfied by $\partial_\xi U$ and obtain $\partial_\xi U(t, \xi) < 0$ for all $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$ (otherwise $\partial_\xi U$ would be identically equal to zero, which is impossible since $U(\cdot, -\infty) = 1$ and $U(\cdot, +\infty) = 0$). \square

2.3.3 Uniqueness of (U, c)

We consider (U_1, c_1) and (U_2, c_2) two solutions of problem (2.5), with $U_1, U_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Without loss of generality, we can assume $c_1 \geq c_2$.

Lemma 2.3.5. *There exists $\tau_0 \geq 0$ such that for any $\tau \geq \tau_0$, we have*

$$U_1(t, \xi) \leq U_2(t, \xi - \tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. The function U_2 is supersolution of problem (2.5) with speed c_1 since $\partial_\xi U_2 < 0$ (Prop. 2.3.4) and $c_1 \geq c_2$. Indeed

$$\partial_t U_2 - c_1 \partial_\xi U_2 - \partial_{\xi\xi} U_2 = f^T(t, U_2) + (c_2 - c_1) \partial_\xi U_2 \geq f^T(t, U_2) \quad \text{on } \mathbb{R}^2.$$

As $U_1(\cdot, +\infty) = 0$ uniformly on \mathbb{R} , there exists a real number R_+ such that

$$U_1(t, \xi) \leq \delta_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty), \tag{2.32}$$

where $\delta_+ \in (0, 1)$ is given by Lemma 2.3.1 with $\bar{g} = \underline{g} = f$ and only depends on f .

As $U_2(\cdot, -\infty) = 1$ uniformly on \mathbb{R} , there exists $\tau_0 \geq 0$ such that for any $\tau \geq \tau_0$, we have

$$U_2(t, \xi - \tau) \geq 1 - \delta_-, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_+],$$

where $\delta_- \in (0, 1)$ is given by Lemma 2.3.2 with $\bar{g} = \underline{g} = f$ and only depends on f .

We can apply Lemma 2.3.1 on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$ and Lemma 2.3.2 on $\mathbb{R} \times (-\infty, R_+]$ to the functions $\underline{v} = U_1$ and $\bar{v} = U_2(\cdot, \cdot - \tau)$ for any $\tau \geq \tau_0$ to obtain the lemma. \square

Proposition 2.3.6. *There exists $\tau^* \in \mathbb{R}$ such that*

$$U_1(t, \xi) = U_2(t, \xi - \tau^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

And thus $c_1 = c_2$.

Démonstration. We define

$$\tau^* = \inf \{ \tau \in \mathbb{R} \mid U_1(t, \xi) \leq U_2(t, \xi - \tau) \ \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

The set inside infimum is not empty according to Lemma 2.3.5. Furthermore, it is bounded from below because as $U_2(0, +\infty) = 0$ and $U_1(0, 0) \in (0, 1)$, we can find a small enough τ_1 so that for any $\tau \leq \tau_1$, we have $U_2(0, -\tau) < U_1(0, 0)$. Consequently, τ^* is a well defined real number. The definition of τ^* and the continuity of U_1 and U_2 imply that

$$U_1(t, \xi) \leq U_2(t, \xi - \tau^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

We define R_+ as in the proof of Lemma 2.3.5. As $U_2(\cdot, -\infty) = 1$ uniformly on \mathbb{R} , there exists $R_- \leq R_+$ such that

$$U_2(t, \xi - \tau) \geq 1 - \delta_-, \quad \forall \tau \geq \tau^* - 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-]. \quad (2.34)$$

We define

$$\eta := \min_{(t, \xi) \in [0, T] \times [R_-, R_+]} \{U_2(t, \xi - \tau^*) - U_1(t, \xi)\}.$$

Notice that $\eta \geq 0$ by (2.33). If $\eta > 0$, by the uniform continuity of the function U_2 on $[0, T] \times [R_- - \tau^*, R_+ - \tau^* + 1]$, there exists $\bar{\tau} \in (\tau^* - 1, \tau^*)$ such that

$$U_1(t, \xi) \leq U_2(t, \xi - \bar{\tau}), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in [R_-, R_+]. \quad (2.35)$$

According to (2.32), (2.35) and the T -periodicity of U_1 and U_2 in t , we can apply Lemma 2.3.1 to the functions $\underline{v} = U_1$ and $\bar{v} = U_2(\cdot, \cdot - \bar{\tau})$ on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$. We obtain

$$U_1(t, \xi) \leq U_2(t, \xi - \bar{\tau}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty).$$

In the same way, according to (2.34) and (2.35), we can apply Lemma 2.3.2 to the functions $\underline{v} = U_1$ and $\bar{v} = U_2(\cdot, \cdot - \tau^*)$ on $\mathbb{R} \times (-\infty, R_-]$. We obtain

$$U_1(t, \xi) \leq U_2(t, \xi - \tau^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-].$$

To summarize $U_1(t, \xi) \leq U_2(t, \xi - \bar{\tau})$ for all $t \in [0, T]$ and $\xi \in \mathbb{R}$. This contradicts the definition of τ^* . Consequently, we have $\eta = 0$. So, there exists a couple $(t^*, \xi^*) \in [0, T] \times [R_-, R_+]$ such that

$$U_1(t^*, \xi^*) = U_2(t^*, \xi^* - \tau^*).$$

By applying the strong maximum principle on \mathbb{R}^2 , we get that

$$U_1(t, \xi) = U_2(t, \xi - \tau^*), \quad \forall t \in (-\infty, t^*], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

By periodicity in t , the previous inequality is true on \mathbb{R}^2 .

Now, if we subtract the equation satisfied by U_1 to the equation satisfied by $U_2(\cdot, \cdot - \tau^*)$, we obtain that

$$(c_2 - c_1) \partial_\xi U_2(t, \xi - \tau^*) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Since $\partial_\xi U_2 < 0$, we get $c_1 = c_2$ and the proof of Proposition 2.3.6 is complete. \square

2.4 Asymptotic stability of pulsating waves

This section is devoted to the proof of Theorem 2.1.2. To simplify the notations, we note λ_0 (resp. λ_1) the principal eigenvalue associated with the function f_u^T and the equilibrium 0 (resp. 1). The condition (2.3) implies that $\lambda_0 > 0$ and $\lambda_1 > 0$. Furthermore, according to Section 2.2, there exists a unique positive T -periodic function $\Phi_0(t)$ such that

$$\begin{cases} \Phi'_0(t) = (\lambda_0 + f_u^T(t, 0)) \Phi_0(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \Phi_0(0) = 1. \end{cases}$$

Also, there exists a unique positive T -periodic function $\Phi_1(t)$ such that

$$\begin{cases} \Phi'_1(t) = (\lambda_1 + f_u^T(t, 1))\Phi_1(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \Phi_1(0) = 1. \end{cases}$$

Assume there exists a pulsating front U with speed c solving (2.5). We consider a solution u of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = h(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

where the initial condition $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ is uniformly continuous. We denote $v(t, \xi) = u(t, x) = u(t, \xi + ct)$. The function v satisfies the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t v - c\partial_\xi v - \partial_{\xi\xi} v = f^T(t, v) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0, \xi) = h(\xi), & \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Our basic lemma is the following.

Lemma 2.4.1. *There exists a constant $\gamma \in (0, 1)$ depending only on f^T and U , such that if*

$$\liminf_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) > 1 - \gamma \quad \text{and} \quad \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) < \gamma,$$

then, there exist some real numbers $q_0 > 0$, $\underline{\xi}^0$ and $\bar{\xi}^0$, such that

$$U(t, \xi + \underline{\xi}^0) - q_0(\|\Phi_0\|_\infty + \|\Phi_1\|_\infty)e^{-\mu t} \leq v(t, \xi) \leq U(t, \xi + \bar{\xi}^0) + q_0(\|\Phi_0\|_\infty + \|\Phi_1\|_\infty)e^{-\mu t}, \quad (2.37)$$

for any real number ξ and for any t positive.

Démonstration. We are only going to prove the left inequality, the other is similar. We begin by defining parameters which are independant of h and from which we are going to build a subsolution of (2.36) on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. We define

$$\mu = \min \left\{ \frac{\lambda_0}{2}, \frac{\lambda_1}{2} \right\} > 0.$$

The regularity of the function f^T implies that there exists $u_0 > 0$ such that

$$\forall u \in [0, u_0], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} |f_u^T(t, u) - f_u^T(t, 0)| \leq \frac{\lambda_0 - \mu}{4}, \\ |f_u^T(t, 1) - f_u^T(t, 1 - u)| \leq \frac{\lambda_1 - \mu}{4}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Since $U(\cdot, +\infty) = 0$ and $U(\cdot, -\infty) = 1$ uniformly on \mathbb{R} , there exist $\xi^+ > 0$ and $\xi^- < 0$ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \tilde{\xi} \geq \xi^+, \quad U(t, \tilde{\xi}) \leq u_0, \quad (2.39)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \tilde{\xi} \leq \xi^-, \quad 1 - U(t, \tilde{\xi}) \leq u_0. \quad (2.40)$$

We consider a nondecreasing function χ in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ such that

$$\forall \tilde{\xi} \geq \xi^+, \quad \chi(\tilde{\xi}) = 1 \quad \text{and} \quad \forall \tilde{\xi} \leq \xi^-, \quad \chi(\tilde{\xi}) = 0.$$

According to the fact that the function U_ξ is continuous, negative and T -periodic, one has $\sup_{\mathbb{R} \times [\xi^-, \xi^+]} U_\xi > 0$, and there exist $\tilde{q}_0 > 0$ and $C_1 > 0$ (depending only on f^T and U) such that

$$\forall q \in [0, \tilde{q}_0], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \tilde{\xi} \in [\xi^-, \xi^+], \quad U_\xi(t, \tilde{\xi}) + q e^{-\mu t} \chi'(\tilde{\xi})(\Phi_1(t) - \Phi_0(t)) < -C_1. \quad (2.41)$$

There exists $C_2 > 0$ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \tilde{\xi} \in [\xi^-, \xi^+], \quad \chi(\tilde{\xi})\Phi_0(t) + (1 - \chi(\tilde{\xi}))\Phi_1(t) < \frac{C_2}{\|f_u^T\|_\infty}. \quad (2.42)$$

There exists $C_3 > 0$ such that

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \tilde{\xi} \in [\xi^-, \xi^+], \quad & \chi(\tilde{\xi})\Phi_0(t)(\mu - \lambda_0 - f_u(t, 0)) + (1 - \chi(\tilde{\xi}))\Phi_1(t)(\mu - \lambda_1 - f_u(t, 1)) \\ & + (c\chi'(\tilde{\xi}) + \chi''(\tilde{\xi}))(\Phi_0(t) - \Phi_1(t)) < C_3. \end{aligned} \quad (2.43)$$

We define

$$\underline{\omega} = \frac{C_2 + C_3}{\mu C_1} > 0. \quad (2.44)$$

From the continuity and the T -periodicity of f_u^T , there exists $\gamma \in (0, \min\{\tilde{q}_0, 1\})$ (depending only on f^T and U) such that

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (u, u') \in [0, 1]^2, \quad |u - u'| \leq \gamma \max\{\|\Phi_0\|_\infty, \|\Phi_1\|_\infty\} \Rightarrow \\ |f^T(t, u) - f^T(t, u') - f_u^T(t, u')(u - u')| \leq \min\left\{\frac{\lambda_0 - \mu}{4}, \frac{\lambda_1 - \mu}{4}\right\}|u - u'|. \end{aligned} \quad (2.45)$$

We now consider a uniformly continuous function $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ such that

$$\liminf_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) > 1 - \gamma \quad \text{and} \quad \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) < \gamma,$$

and we denote v the solution of (2.36). We consider a real number $q_0 > 0$ such that $1 - \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) < q_0 < \gamma$. We thus have $\liminf_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) > 1 - q_0$. Consequently, there exists $\xi_m \in \mathbb{R}$ such that for all $\xi \leq \xi_m$ we have $h(\xi) \geq 1 - q_0$. Yet, since $h \geq 0$ and $U(0, +\infty) = 0$, there exists $\underline{\xi} \in \mathbb{R}$ such that for all $\xi \geq \xi_m$, we have $h(\xi) \geq U(0, \xi + \underline{\xi}) - q_0$. According to the fact that $U \leq 1$ and that for all $\xi \in \mathbb{R}$ we have $\chi(\xi + \underline{\xi})\Phi_0(0) + (1 - \chi(\xi + \underline{\xi}))\Phi_1(0) = 1$, we have that

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad h(\xi) \geq U(0, \xi + \underline{\xi}) - q_0 \left[\chi(\xi + \underline{\xi})\Phi_0(0) + \{1 - \chi(\xi + \underline{\xi})\}\Phi_1(0) \right]. \quad (2.46)$$

Finally, we define

$$\underline{\Lambda}(t) = \underline{\omega} q_0 (1 - e^{-\mu t}) + \underline{\xi}.$$

We are going to show that the function defined by

$$\underline{u}(t, \xi) = \max \left\{ 0, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - q_0 e^{-\mu t} \left[\chi(\xi + \underline{\Lambda}(t))\Phi_0(t) + \{1 - \chi(\xi + \underline{\Lambda}(t))\}\Phi_1(t) \right] \right\}.$$

is a subsolution of (2.36) on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. We begin by noticing that according to (2.46), for any $\xi \in \mathbb{R}$, we have $\underline{u}(0, \xi) \leq v(0, \xi)$. We divide now the space into three zones :

$$\Omega^- = \{(t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid \xi + \underline{\Lambda}(t) < \xi^-, \text{ and } \underline{u}(t, \xi) > 0\},$$

$$\Omega^+ = \{(t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid \xi + \underline{\Lambda}(t) > \xi^+, \text{ and } \underline{u}(t, \xi) > 0\},$$

$$\Omega^0 = \{(t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid \xi + \underline{\Lambda}(t) \in [\xi^-, \xi^+], \text{ and } \underline{u}(t, \xi) > 0\}.$$

Since $f^T(t, 0) = 0$, we only have to show that $\underline{u}_t - c\underline{u}_\xi - \underline{u}_{\xi\xi} - f^T(t, \underline{u}) \leq 0$ on $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^0$.
1st step : we show that $\underline{u}_t - c\underline{u}_\xi - \underline{u}_{\xi\xi} - f^T(t, \underline{u}) \leq 0$ on Ω^+ . We have

$$\forall (t, \xi) \in \Omega^+, \quad \underline{u}(t, \xi) = U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - q_0 e^{-\mu t} \Phi_0(t).$$

Consequently, for all $(t, \xi) \in \Omega^+$, then we have

$$\begin{aligned} \underline{u}_t(t, \xi) - c\underline{u}_\xi(t, \xi) - \underline{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) &= f^T(t, U(\xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \\ &\quad + q_0 e^{-\mu t} \Phi_0(t) [\mu - \lambda_0 - f_u^T(t, 0)] + \underline{\Lambda}'(t) U_\xi(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)). \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} &f^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \\ &= \left\{ f^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) + f_u^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) [\underline{u}(t, \xi) - U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))] \right\} \\ &\quad + \left\{ [f_u^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f_u^T(t, 0)] [U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - \underline{u}(t, \xi)] \right\} \\ &\quad + f_u^T(t, 0) \{U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - \underline{u}(t, \xi)\}. \end{aligned}$$

According to the fact that $0 < q_0 \leq \gamma$, (2.45) yields

$$\begin{aligned} &f^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) + f_u^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) [\underline{u}(t, \xi) - U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))] \\ &\leq \frac{\lambda_0 - \mu}{4} q_0 \Phi_0(t) e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

Furthermore, according to (2.38) and (2.39), we have

$$[f_u^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f_u^T(t, 0)] [U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - \underline{u}(t, \xi)] \leq \frac{\lambda_0 - \mu}{4} q_0 \Phi_0(t) e^{-\mu t}.$$

So, since $\underline{\Lambda}' \geq 0$ and $U_\xi < 0$, we have

$$\underline{u}_t(t, \xi) - c\underline{u}_\xi(t, \xi) - \underline{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \leq [\mu - \lambda_0 + \frac{\lambda_0 - \mu}{4} + \frac{\lambda_0 - \mu}{4}] q_0 \Phi_0(t) e^{-\mu t} \leq 0.$$

2nd step : we show that $\underline{u}_t - c\underline{u}_\xi - \underline{u}_{\xi\xi} - f^T(t, \underline{u}) \leq 0$ on Ω^- . We have

$$\forall (t, \xi) \in \Omega^-, \quad \underline{u}(t, \xi) = U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - q_0 e^{-\mu t} \Phi_1(t).$$

Hence, for all $(t, \xi) \in \Omega^-$,

$$\begin{aligned} \underline{u}_t(t, \xi) - c\underline{u}_\xi(t, \xi) - \underline{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) &= f^T(t, U(\xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \\ &\quad + q_0 e^{-\mu t} \Phi_1(t) [\mu - \lambda_1 - f_u^T(t, 1)] + \underline{\Lambda}'(t) U_\xi(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)). \end{aligned}$$

In the same way as previously, since $\underline{\Lambda}' \geq 0$ and $U_\xi < 0$, we have that

$$\underline{u}_t(t, \xi) - c\underline{u}_\xi(t, \xi) - \underline{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \leq [\mu - \lambda_1 + \frac{\lambda_1 - \mu}{4} + \frac{\lambda_1 - \mu}{4}] q_0 \Phi_1(t) e^{-\mu t} \leq 0.$$

3rd step : we show that $\underline{u}_t - cu_{\xi} - \underline{u}_{\xi\xi} - f^T(t, \underline{u}) \leq 0$ on Ω^0 . For all $(t, \xi) \in \Omega^0$ there holds

$$\begin{aligned} \underline{u}_t(t, \xi) - cu_{\xi}(t, \xi) - \underline{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \\ = f^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \\ + q_0 e^{-\mu t} \Phi_0(t) \chi(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \{ \mu - \lambda_0 - f_u^T(t, 0) \} \\ + q_0 e^{-\mu t} \Phi_1(t) \{ 1 - \chi(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \} \{ \mu - \lambda_1 - f_u^T(t, 1) \} \\ + q_0 e^{-\mu t} \{ c \chi'(\xi + \underline{\Lambda}(t)) + \chi''(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \} \{ \Phi_0(t) - \Phi_1(t) \} \\ + \underline{\Lambda}'(t) \{ U_{\xi}(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) + q_0 e^{-\mu t} \chi'(\xi + \underline{\Lambda}(t)) (\Phi_1(t) - \Phi_0(t)) \}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

We have

$$f^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \leq \|f_u^T\|_{\infty} |U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - \underline{u}(t, \xi)|.$$

According to (2.42) applied with $\tilde{\xi} = \xi + \underline{\Lambda}(t)$, it occurs that

$$f^T(t, U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t))) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \leq C_2 q_0 e^{-\mu t}. \quad (2.48)$$

According to (2.43) applied with $\tilde{\xi} = \xi + \underline{\Lambda}(t)$, we have

$$\begin{aligned} q_0 e^{-\mu t} \Phi_0(t) \chi(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \{ \mu - \lambda_0 - f_u^T(t, 0) \} \\ + q_0 e^{-\mu t} \Phi_1(t) \{ 1 - \chi(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \} \{ \mu - \lambda_1 - f_u^T(t, 1) \} \\ + q_0 e^{-\mu t} \{ c \chi'(\xi + \underline{\Lambda}(t)) + \chi''(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \} \{ \Phi_0(t) - \Phi_1(t) \} \\ \leq C_3 q_0 e^{-\mu t}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Finally, remembering that $\underline{\Lambda}' > 0$ and according to (2.41) applied with $\tilde{\xi} = \xi + \underline{\Lambda}(t)$, it follows that

$$\{ U_{\xi}(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) + q_0 e^{-\mu t} \chi'(\xi + \underline{\Lambda}(t)) (\Phi_1(t) - \Phi_0(t)) \} \underline{\Lambda}'(t) < -C_1 \underline{\Lambda}'(t). \quad (2.50)$$

Consequently, according to (2.44), (2.47), (2.48), (2.49) and (2.50) we obtain for all $(t, \xi) \in \Omega_0$,

$$\underline{u}_t(t, \xi) - cu_{\xi}(t, \xi) - \underline{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - f^T(t, \underline{u}(t, \xi)) \leq -C_1 \underline{\Lambda}'(t) + (C_2 + C_3) q_0 e^{-\mu t} \leq 0.$$

We conclude from the maximum principle that

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) \geq \underline{u}(t, \xi).$$

So, as $U_{\xi} < 0$ on \mathbb{R}^2 and $\underline{\Lambda}' \geq 0$ on \mathbb{R}^+ , if we define the real number $\underline{\xi}^0 = \underline{\xi} + \omega q_0$, it occurs that for all $t \geq 0$ and $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v(t, \xi) &\geq U(t, \xi + \underline{\Lambda}(t)) - q_0 e^{-\mu t} [\chi(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \Phi_0(t) + \{ 1 - \chi(\xi + \underline{\Lambda}(t)) \} \Phi_1(t)] \\ &\geq U(t, \xi + \underline{\xi}^0) - q_0 (\|\Phi_0\|_{\infty} + \|\Phi_1\|_{\infty}) e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

It is exactly the same scheme to prove the right inequality of (2.37), namely we begin by showing that there exists a constant $\bar{\xi}$ such that

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad h(\xi) \leq U(0, \xi + \bar{\xi}) + q_0 [\Phi_0(0) \chi(\xi + \bar{\xi}) + \Phi_1(0) (1 - \chi(\xi + \bar{\xi}))].$$

Then we can show that there exists a positive constant $\bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$ could actually be equal to ω without loss of generality) such that if we take $\bar{\Lambda}(t) = -\bar{\omega} q_0 (1 - e^{-\mu t}) + \bar{\xi}$ (we need here that $\bar{\Lambda}' \leq 0$), and if we define

$$\bar{u}(t, \xi) = \min \left\{ 1, U(t, \xi + \bar{\Lambda}(t)) + q_0 e^{-\mu t} [\chi(\xi + \bar{\Lambda}(t)) \Phi_0(t) + \{ 1 - \chi(\xi + \bar{\Lambda}(t)) \} \Phi_1(t)] \right\},$$

then, for all $(t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ such that $\bar{u}(t, \xi) < 1$ we have

$$\bar{u}_t(t, \xi) - c\bar{u}_\xi(t, \xi) - \bar{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - f^T(t, \bar{u}(t, \xi)) \geq 0,$$

If we define the real number $\bar{\xi}^0 = \bar{\xi} - \bar{\omega}q_0$, we conclude that for all $t \geq 0$ and $\xi \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} v(t, \xi) &\leq U(t, \xi + \bar{\Lambda}(t)) + q_0 e^{-\mu t} [\chi(\xi + \bar{\Lambda}(t))\Phi_0(t) + \{1 - \chi(\xi + \bar{\Lambda}(t))\}\Phi_1(t)] \\ &\leq U(t, \xi + \bar{\xi}^0) + q_0 (\|\Phi_0\|_\infty + \|\Phi_1\|_\infty) e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

And the proof of Lemma 2.4.1 is complete. \square

Lemma 2.4.2. *Let $\gamma \in (0, 1)$ be as in Lemma 2.4.1. There exists a positive real number D such that if for some constant ξ^\sharp and some $0 < \varepsilon < \gamma$, we have*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |v(0, \xi) - U(0, \xi + \xi^\sharp)| \leq \varepsilon,$$

then,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |v(t, \xi) - U(t, \xi + \xi^\sharp)| \leq D\varepsilon.$$

Démonstration. We can adapt the previous proof. If we take $q_0 = \varepsilon$, then, , for all $\xi \in \mathbb{R}$, we have

$$U(0, \xi + \xi^\sharp) - q_0 \leq h(\xi) = v(0, \xi) \leq U(0, \xi + \xi^\sharp) + q_0.$$

We can then choose $\underline{\xi}$ and $\bar{\xi}$ equal to ξ^\sharp . Consequently, if we denote $D = \|U_\xi\|_\infty \underline{\omega} + \|\Phi_0\|_\infty + \|\Phi_1\|_\infty$ (independent of ε), the conclusion of Lemma 2.4.1 with $\underline{\xi}^0 = \underline{\xi} + \underline{\omega}q_0 = \xi^\sharp + \underline{\omega}\varepsilon$ and $\bar{\xi}^0 = \bar{\xi} - \bar{\omega}q_0 = \xi^\sharp - \bar{\omega}\varepsilon$ becomes

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad U(t, \xi + \xi^\sharp) - D\varepsilon \leq v(t, \xi) \leq U(t, \xi + \xi^\sharp) + D\varepsilon,$$

The proof of Lemma 2.4.2 is complete. \square

Before carrying out the proof of Theorem 2.1.2, we need an additional Liouville type lemma for the solution which are trapped between two shifts of a front.

Lemma 2.4.3. *Let $v \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 1))$ (with $0 < \alpha < 1$) be a solution of $\partial_t v - c\partial_\xi v - \partial_{\xi\xi} v = f^T(t, v)$ on \mathbb{R}^2 such that*

$$\forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad U(t, \xi) \leq v(t, \xi) \leq U(t, \xi - a). \quad (2.51)$$

where $(U(t, \xi), c)$ is a pulsating front solution of (2.5), and a is a nonnegative real number. Then there exists $b \in [0, a]$ such that

$$\forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad v(t, \xi) = U(t, \xi - b).$$

Démonstration. According to (2.51), we have that $v(\cdot, -\infty) = 1$ and $v(\cdot, +\infty) = 0$ uniformly on \mathbb{R} . We are going to show that $v(\cdot, \xi)$ is a T -periodic function for any real ξ . Let $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. As $v(\cdot, +\infty) = 0$ uniformly on \mathbb{R} , there exists a real number R_+ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty), \quad v(t, \xi) \leq \delta_+,$$

where $\delta_+ \in (0, 1)$ is defined in Lemma 2.3.1, with $\underline{g} = \bar{g} = f^T$.

As $v(\cdot, -\infty) = 1$ uniformly on \mathbb{R} , there exists a real σ_ε such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_+], \quad v(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon) \geq 1 - \delta_-,$$

where $\delta_- \in (0, 1)$ is defined in Lemma 2.3.2, with $\underline{g} = \bar{g} = f^T$.

We apply the comparison principles of Lemma 2.3.1 on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$ and of Lemma 2.3.2 on $\mathbb{R} \times (-\infty, R_+]$ to the functions $\underline{v}(t, \xi) = v(t, \xi)$ and $\bar{v}(t, \xi) = v(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) \leq v(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon). \quad (2.52)$$

We define

$$\sigma_\varepsilon^* := \inf \{\sigma_\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) \leq v(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon)\},$$

which is a well defined real number such that $\sigma_\varepsilon^* \leq \sigma_\varepsilon$ by (2.52). We have by continuity

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) \leq v(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon^*). \quad (2.53)$$

As $v(\cdot, -\infty) = 1$ uniformly on \mathbb{R} , there exists $R_- < R_+$ such that

$$\forall \sigma \geq \sigma_\varepsilon^* - 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-], \quad v(t + \varepsilon T, \xi - \sigma) \geq 1 - \delta_-,$$

where $\delta_- \in (0, 1)$ is as above.

We define

$$\eta := \inf_{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times [R_-, R_+]} \{v(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon^*) - v(t, \xi)\}.$$

Two cases can occur, either η is positive, or η is equal to zero. If $\eta > 0$, since $\partial_\xi v$ is globally bounded in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ by standard parabolic estimates, there exists $\bar{\sigma}_\varepsilon \in (\sigma_\varepsilon^* - 1, \sigma_\varepsilon^*)$ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_-, R_+], \quad v(t, \xi) < v(t + \varepsilon T, \xi - \bar{\sigma}_\varepsilon).$$

We can apply Lemma 2.3.1 to the functions v and $v(\cdot + \varepsilon T, \cdot - \bar{\sigma}_\varepsilon)$ on $\mathbb{R} \times [R_+, +\infty)$. We obtain

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty), \quad v(t, \xi) \leq v(t + \varepsilon T, \xi - \bar{\sigma}_\varepsilon).$$

In the same way, we can apply Lemma 2.3.2 to the functions v and $v(\cdot + \varepsilon T, \cdot - \bar{\sigma}_\varepsilon)$ on $\mathbb{R} \times (-\infty, R_-]$. We obtain

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_-], \quad v(t, \xi) \leq v(t + \varepsilon T, \xi - \bar{\sigma}_\varepsilon).$$

To summarize,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) \leq v(t + \varepsilon T, \xi - \bar{\sigma}_\varepsilon).$$

This contradicts the definition of σ_ε^* . Consequently, we have $\eta = 0$. So, there exists a sequence $(t_n, \xi_n)_n \subset \mathbb{R} \times [R_-, R_+]$ such that

$$v(t_n + \varepsilon T, \xi_n - \sigma_\varepsilon^*) - v(t_n, \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.54)$$

We write $t_n = k_n T + t'_n$, with $k_n \in \mathbb{Z}$ and $t'_n \in (0, T]$. The sequences $(t'_n)_n$ and $(\xi_n)_n$ are bounded. We thus have up to extraction of a subsequence that $t'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^* \in \mathbb{R}$ and $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi^* \in \mathbb{R}$. We define $v_n(t, \xi) = v(t + k_n T, \xi)$. As f^T is T -periodic, v_n satisfies the same equation as v . Furthermore, we have $0 \leq v_n \leq 1$. Consequently, as $(f^T(\cdot, v_n))_n$ is bounded in $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, the parabolic regularity theory implies that for $1 \leq p < +\infty$, $(v_n)_n$ is bounded in $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$. Yet $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ embeds compactly into $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for $\alpha \in (0, 1 - 2/p)$ for $p > 2$. So, there exists v^* such that up to extraction of a subsequence, $(v_n)_n$ converges to v^* in $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for all $1 < p < +\infty$ and for all $\alpha \in (0, 1)$. The function $0 \leq v^* \leq 1$ thus satisfies in the sense of distribution the equation $\partial_t v^* - c \partial_\xi v^* - \partial_{\xi\xi} v^* = f^T(t, v^*)$ on \mathbb{R}^2 . Actually, by parabolic

regularity theory, the function v^* is in fact of class $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ and it satisfies the previous equation in the classical sense. According to (2.54), we thus have

$$v^*(t^* + \varepsilon T, \xi^* - \sigma_\varepsilon^*) = v^*(t^*, \xi^*).$$

Since on the other hand $v^*(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon^*) \geq v^*(t, \xi)$, for all $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ by (2.53), the strong maximum principle implies that

$$\forall t \in (-\infty, t^*], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v^*(t, \xi) = v^*(t + \varepsilon T, \xi - \sigma_\varepsilon^*).$$

As $t^* \in [0, T]$, the previous equality is true on $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$, and in particular, we have

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v^*(0, 0) = v^*(-kT, \varepsilon k \sigma_\varepsilon^*). \quad (2.55)$$

According to (2.51) and (2.55) we have that

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U(0, \varepsilon k \sigma_\varepsilon^*) = U(-kT, \varepsilon k \sigma_\varepsilon^*) \leq v^*(-kT, \varepsilon k \sigma_\varepsilon^*) = v^*(0, 0) \leq U(0, -a) < 1. \quad (2.56)$$

In the same way, we have that

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 < U(0, 0) \leq v^*(0, 0) = v^*(-kT, \varepsilon k \sigma_\varepsilon^*) \leq U(-kT, \varepsilon k \sigma_\varepsilon^* - a) = U(0, \varepsilon k \sigma_\varepsilon^* - a). \quad (2.57)$$

We suppose that $\varepsilon \sigma_\varepsilon^* < 0$. So, we have $\varepsilon k \sigma_\varepsilon^* \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\infty$. Consequently, as $U(0, -\infty) = 1$, we obtain a contradiction in (2.56) if we pass in the limit when k tends to $+\infty$.

We suppose that $\varepsilon \sigma_\varepsilon^* > 0$. So, we have $\varepsilon k \sigma_\varepsilon^* \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. Consequently, as $U(0, +\infty) = 0$, we obtain a contradiction in (2.57) if we pass in the limit when k tends to $+\infty$.

Consequently, we have $\sigma_\varepsilon^* = 0$, and the equation (2.53) rewrites

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) \leq v(t + \varepsilon T, \xi).$$

For $\varepsilon = 1$, the previous inequality rewrites

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) \leq v(t + T, \xi). \quad (2.58)$$

And, for $\varepsilon = -1$, we have $v(t, \xi) \leq v(t - T, \xi)$, for all $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$. If we define $t' = t - T$, we have

$$\forall t' \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t' + T, \xi) \leq v(t', \xi). \quad (2.59)$$

According to (2.58) and (2.59), we get that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad v(t, \xi) = v(t + T, \xi).$$

which is the desired conclusion. \square

We can now prove Theorem 2.1.2.

Démonstration. Let $\gamma \in (0, 1)$ be as in Lemma 2.4.1 and let u be as in the statement of Theorem 2.1.2. We define $v_n(t, \xi) = v(t + nT, \xi)$. Up to extraction of a subsequence, $(v_n)_n$ converges locally uniformly to a $\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ solution v_∞ of $\partial_t v_\infty - c \partial_\xi v_\infty - \partial_{\xi\xi} v_\infty = f^T(t, v_\infty)$, for $\alpha \in (0, 1)$. According to Lemma 2.4.1, there exist some real numbers $\underline{\xi}^0$ and $\bar{\xi}^0$ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad U(t, \xi + \underline{\xi}^0) \leq v_\infty(t, \xi) \leq U(t, \xi + \bar{\xi}^0).$$

Consequently, Lemma 2.4.3 implies that there exists ξ_0 between $\underline{\xi}^0$ and $\bar{\xi}^0$ such that

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad v_\infty(t, \xi) = U(t, \xi - \xi_0).$$

Let $\varepsilon \in (0, \gamma)$ be fixed. According to the fact that $U(\cdot, -\infty) = 1$ and $U(\cdot, +\infty) = 0$, and according to Lemma 2.4.1, there exists an integer n_0 such that

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |v(n_0 T, \xi) - U(0, \xi - \xi_0)| \leq \varepsilon.$$

Lemma 2.4.2 yields

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |v(n_0 T + t, \xi) - U(t, \xi - \xi_0)| \leq D\varepsilon.$$

where D is independent of ε . Since $\varepsilon > 0$ could be arbitrary small, we get that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t, \xi) - U(t, \xi - \xi_0) = 0, \quad \text{uniformly on } \mathbb{R}.$$

That concludes the proof of the theorem. \square

Once the global stability of pulsating fronts is established, the uniqueness result in Theorem 2.1.1 is an easy corollary. This method was used in [47]. In the present paper, we preferred to prove first the uniqueness in Section 2.3 because the proof uses some new comparison principle (which have their own interest) and which lead to the monotonicity result.

Démonstration. One has to show that if (U_1, c_1) and (U_2, c_2) are two pulsating fronts solving (2.5), then $c_1 = c_2$ and U_1 and U_2 are equal up to shift in space. Theorem 2.1.2 yields the existence of $\xi_0 \in \mathbb{R}$ such that

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |U_2(t, \xi + (c_1 - c_2)t) - U_1(t, \xi + \xi_0)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.60)$$

Let $k \in \mathbb{Z}$, and $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$. By T -periodicity of U_1 and U_2 we have

$$|U_2(t + kT, \xi + (c_1 - c_2)(t + kT)) - U_1(t + kT, \xi + \xi_0)| = |U_2(t, \xi + (c_1 - c_2)(t + kT)) - U_1(t, \xi + \xi_0)|. \quad (2.61)$$

If $c_1 \neq c_2$, we pass to the limit when $k \rightarrow +\infty$. According to (2.60), the first term of (2.61) converges to zero, whereas the second term converges to $1 - U_1(t, \xi + \xi_0) > 0$ if $c_1 < c_2$, and to $U_1(t, \xi + \xi_0) > 0$ if $c_1 > c_2$. Consequently we have $c_1 = c_2$, and (2.61) becomes

$$|U_2(t + kT, \xi) - U_1(t + kT, \xi + \xi_0)| = |U_2(t, \xi) - U_1(t, \xi + \xi_0)|.$$

By passing to the limit when $k \rightarrow +\infty$, we get that $U_2(t, \xi) = U_1(t, \xi + \xi_0)$. Hence, the proof of the uniqueness result in Theorem 2.1.2 is complete. \square

2.5 Pulsating fronts for nonlinearities of small periods

In this section, we focus on the dependance on T for the pulsating fronts solving

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = f^T(t, u), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

where $f^T(t, u) = f(\frac{t}{T}, u)$, with $f(\cdot, u)$ a 1-periodic function.

Let $\alpha \in [0, 1]$. We denote $w_T(\alpha, \cdot)$ the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' = f^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

We remind the reader that the Poincaré map associated with f^T is the function $P_T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ defined by

$$P_T(\alpha) = w_T(\alpha, T).$$

2.5.1 Existence and uniqueness

This subsection is devoted to proving Theorem 2.1.3. We are going to show that for $T > 0$ small enough, the Poincaré map associated with the function f^T admits exactly one unstable fixed point which is strictly included between 0 and 1. Then, by [1], there exists a pulsating front solving (2.5). We begin by proving the existence of a fixed point of the Poincaré map between 0 and 1.

Lemma 2.5.1. *Let $T > 0$. There are solutions of the problem*

$$\begin{cases} y' = f^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ 0 < y < 1 \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T). \end{cases} \quad (2.62)$$

Démonstration. We define $\Phi_T(\alpha) = P_T(\alpha) - \alpha$. By hypotheses, 0 and 1 are stable fixed points of P_T . So,

$$\begin{cases} \Phi_T(0) = 0, \\ \Phi'_T(0) < 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \Phi_T(1) = 0, \\ \Phi'_T(1) < 0. \end{cases}$$

By continuity, there exists $\alpha_T \in (0, 1)$ such that $\Phi_T(\alpha_T) = 0$, that is $P_T(\alpha_T) = \alpha_T$. So, the function $w_T(\alpha_T, \cdot)$ satisfies Problem (2.62) as a consequence of the Cauchy-Lipschitz theorem. \square

Let $t \mapsto \theta_T(t)$ be a solution of Problem (2.62). We remind that $\theta_T(0)$ is a fixed point of the Poincaré map associated with f^T . It is unstable if $P'_T(\theta(0)) > 1$. We saw in Section 2.2 that this condition is equivalent to the fact that the principal eigenvalue associated with f^T and θ_T is negative. We are thus interested in the sign of

$$\lambda_{\theta_T, f^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(s, \theta_T(s)) ds = -\int_0^1 f_u(t, \theta_T(tT)) dt. \quad (2.63)$$

We consider a sequence of positive real numbers $(T_n)_n$ such that $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Lemma 2.5.2. *The sequence $(\theta_{T_n})_n$ converges up to extraction of a subsequence uniformly on \mathbb{R} to a constant function θ_0 .*

Démonstration. Let K be a positive constant such that

$$|\theta'_{T_n}(t)| \leq K, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Let $t \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. There exists an integer k_n such that $t \in [k_n T_n, (k_n + 1) T_n]$. As $\theta_n(0) \in (0, 1)$, there exists a real number θ_0 such that up to extraction of a subsequence

$$\theta_{T_n}(0) = \theta_{T_n}(k_n T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta_0.$$

Yet, by the mean value theorem, we get that

$$|\theta_{T_n}(t) - \theta_{T_n}(k_n T_n)| \leq K|t - k_n T_n| \leq K T_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Since $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, for all $t \in \mathbb{R}$, we have

$$|\theta_{T_n}(t) - \theta_0| \leq |\theta_{T_n}(t) - \theta_{T_n}(k_n T_n)| + |\theta_0 - \theta_{T_n}(k_n T_n)| \leq K T_n + |\theta_0 - \theta_{T_n}(k_n T_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

and the proof of Lemma 2.5.2 is complete. \square

Lemma 2.5.3. *Up to extraction of a subsequence, we have*

$$\lambda_{\theta_{T_n}, f^{T_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_0^1 f_u(s, \theta_0) ds.$$

Démonstration. Let us note that $(\theta_{T_n}(\cdot T_n))_n$ converges up to extraction of a subsequence uniformly on \mathbb{R} to θ_0 . Indeed, for any $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$|\theta_{T_n}(s) - \theta_0| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

So,

$$|\theta_{T_n}(t T_n) - \theta_0| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

We can then move the limit inside the integral (2.63). \square

Consequently, for n large enough (ie T_n small enough), $\lambda_{\theta_n, f^{T_n}}$ has the same sign as

$$h(\theta_0) := - \int_0^1 f_u(s, \theta_0) ds.$$

The function h satisfies $h = -g'$, where g is the function defined in (2.6).

Lemma 2.5.4. *The real number θ_0 satisfies*

$$g(\theta_0) = 0.$$

Démonstration. We have

$$\theta'_{T_n}(t) = f^{T_n}(t, \theta_{T_n}(t)), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

We integrate this equation between 0 and T_n

$$\theta_{T_n}(T_n) - \theta_n(0) = \int_0^{T_n} f^{T_n}(s, \theta_{T_n}(s)) ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequently

$$\int_0^{T_n} f^{T_n}(s, \theta_{T_n}(s)) ds = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

By changing the variable $t = \frac{s}{T_n}$, we get that

$$\int_0^1 f(t, \theta_{T_n}(t T_n)) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finally, we pass to the limit and we obtain $\int_0^1 f(t, \theta_0) dt = 0$. \square

So $g(\theta_0) = 0$. Consequently, θ_0 is equal to 0, θ_g or 1. We are now going to justify that θ_0 is different of 0 et 1.

Lemma 2.5.5. *We have the following equality*

$$\theta_0 = \theta_g.$$

Démonstration. Let us begin by showing that θ_0 is different from 0. We argue bwoc, supposing that $\theta_0 = 0$. So $U_n(t) := \theta_{T_n}(tT_n)$ converges uniformly to the null function on \mathbb{R} and we have $U'_n = T_n f(t, U_n)$, on \mathbb{R} . We divide this equation by $T_n U_n$, then we integrate between 0 and 1

$$\frac{1}{T_n} \int_0^1 \frac{U'_n(t)}{U_n(t)} dt = \int_0^1 \frac{f(t, U_n(t))}{U_n(t)} dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

So

$$\frac{1}{T_n} [\log(U_n(1)) - \log(U_n(0))] = \int_0^1 \frac{f(t, U_n(t)) - f(t, 0)}{U_n(t) - 0} dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequently

$$\int_0^1 \frac{f(t, U_n(t)) - f(t, 0)}{U_n(t) - 0} dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

We pass to the limit when n converges to infinity

$$\int_0^1 f_u(t, 0) dt = 0.$$

which contradicts the hypothesis (2.3). Consequently $\theta_0 \neq 0$. To show that θ_0 is different from 1, the proof is similar but one has to divide by $T_n(U_n - 1)$ instead of $T_n U_n$. \square

The previous lemma implies that θ_g is the unique accumulation point of the sequence $(\theta_{T_n})_n$. Consequently, the convergences in Lemma 2.5.2 and in Lemma 2.5.3 are not up to extraction of a subsequence, and we have

$$\lim_{T_n \rightarrow 0^+} \lambda_{\theta_{T_n}, f^{T_n}} = -g'(\theta_g).$$

Actually, we have even

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \lambda_{\theta_T, f^T} = -g'(\theta_g). \tag{2.64}$$

According to (2.7) and (2.64), we can define $T_f > 0$ such that $\lambda_{\theta_T, f^T} < 0$ for all $T \in (0, T_f)$ and for all θ_T solving (2.62). In other words, for all $T \in (0, T_f)$, if a the function $t \mapsto \theta_T(t)$ solves (2.62), then it is an unstable equilibrium state and $\theta_T(0)$ is an unstable fixed point of the Poincaré map associated with f^T . To finish the proof of Theorem 2.1.3, we are going to show the uniqueness of the fixed point in $(0, 1)$, for $T \in (0, T_f)$.

Lemma 2.5.6. *Let θ_T and Ψ_T be two solutions of Problem (2.62). For all $T \in (0, T_f)$, we have*

$$\theta_T(0) = \Psi_T(0) \text{ (ie } \theta_T \equiv \Psi_T\text{).}$$

Démonstration. Let $T \in (0, T_f)$. We define $\Phi_T(\alpha) = P_T(\alpha) - \alpha$. Let us suppose bwoc that $\theta_T(0) \neq \Psi_T(0)$. We saw that

$$\begin{cases} \Phi_T(\theta_T(0)) = 0, \\ \Phi'_T(\theta_T(0)) > 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \Phi_T(\Psi_T(0)) = 0, \\ \Phi'_T(\Psi_T(0)) > 0. \end{cases}$$

Necessarily, there exists α_T between $\theta_T(0)$ and $\Psi_T(0)$ such that $\Phi_T(\alpha_T) = 0$ and $\Phi'_T(\alpha_T) \leq 0$. Consequently, $P_T(\alpha_T) = \alpha_T$ and $P'_T(\alpha_T) \leq 1$. This contradicts the fact that all fixed points of the Poincaré map in $(0, 1)$ are unstable. \square

To summarize, for all $T \in (0, T_f)$, the Poincaré map associated with f^T has a unique fixed point $\theta_T(0)$ between 0 and 1, where θ_T is the unique solution of Problem (2.62). Furthermore, $\theta_T(0) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \theta_g$.

2.5.2 Convergence of the couple (c_T, U_T) as $T \rightarrow 0$.

We here prove Theorem 2.1.4. Let $T \in (0, T_f)$ and $M > 0$. In [1], the couple (c_T, U_T) is built as limit when M tends to infinity of the couple (c_T^M, U_T^M) solving

$$\begin{cases} (U_T^M)_t - c_T^M (U_T^M)_\xi - (U_T^M)_{\xi\xi} - f^T(t, U_T^M) = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times (-M, M), \\ U_T^M(t, -M) = 1, \quad U_T^M(t, +M) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ U_T^M(T, \xi) = U_T^M(0, \xi), & \forall \xi \in [-M, M], \\ U_T^M(0, 0) = \theta_g. \end{cases}$$

We give a lemma which comes again from the article of Alikakos, Bates and Chen [1] which is going to serve us to bound the speeds c_T .

Lemma 2.5.7. [1] Let $M > 1$ be a fixed constant. If (\tilde{U}, \tilde{c}) satisfies

$$\begin{cases} \tilde{U}_t - \tilde{c}\tilde{U}_\xi - \tilde{U}_{\xi\xi} - f^T(t, \tilde{U}) \leq 0, & \text{on } \mathbb{R} \times (-M, M), \\ \tilde{U}(t, -M) \leq 1, \quad \tilde{U}(t, +M) \leq 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{U}(T, \xi) \leq \tilde{U}(0, \xi), & \forall \xi \in [-M, M], \\ \tilde{U}(0, 0) \geq \theta_g, \end{cases}$$

then, we have

$$c_T^M \leq \tilde{c}.$$

As f is of class $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, the function f_u is bounded on $[0, 1] \times [0, 1]$. Consequently, there exists a function \bar{f} KPP and a function \underline{f} the opposite of which is KPP such that

$$\underline{f}(u) \leq f(t, u) \leq \bar{f}(u), \quad \forall (t, u) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

There are planar fronts $(\underline{c}, \underline{U})$ and (\bar{c}, \bar{U}) solving

$$\begin{cases} \underline{U}'' + \underline{c}\underline{U}' + \underline{f}(\underline{U}) = 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ \underline{U}(-\infty) = 1, \quad \underline{U}(+\infty) = 0, \\ \underline{U}(0) = \theta_g, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \bar{U}'' + \bar{c}\bar{U}' + \bar{f}(\bar{U}) = 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ \bar{U}(-\infty) = 1, \quad \bar{U}(+\infty) = 0, \\ \bar{U}(0) = \theta_g. \end{cases}$$

We can again obtain these couples from the limits when M tends to infinity of the couples $(\underline{c}^M, \underline{U}^M)$ and (\bar{c}^M, \bar{U}^M) solving

$$\begin{cases} (\underline{U}^M)'' + \underline{c}^M (\underline{U}^M)' + \underline{f}(\underline{U}^M) = 0 & \text{on } (-M, M), \\ \underline{U}^M(-M) = 1, \quad \underline{U}^M(+M) = 0, \\ \underline{U}^M(0) = \theta_g, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\bar{U}^M)'' + \bar{c}^M (\bar{U}^M)' + \bar{f}(\bar{U}^M) = 0 & \text{on } (-M, M), \\ \bar{U}^M(-M) = 1, \quad \bar{U}^M(+M) = 0, \\ \bar{U}^M(0) = \theta_g. \end{cases}$$

For the detail of this construction, we can refer to the article of Berestycki and Chapuisat [3]. The next proposition supplies bounds for the speed c_T .

Proposition 2.5.8. Let $T \in (0, T_f)$. The speed c_T satisfies

$$\bar{c} \leq c_T \leq \underline{c}.$$

Démonstration. Let $M > 1$ and $T \in (0, T_f)$. We are going to twice apply Lemma 2.5.7. We have on $(-M, M)$

$$(\underline{U}^M)_t - (\underline{U}^M)_{\xi\xi} - \underline{c}^M (\underline{U}^M)_\xi - f^T(t, \underline{U}^M) = \underline{f}(\underline{U}^M) - f^T(t, \underline{U}^M) \leq 0.$$

Furthermore, $\underline{U}^M(-M) = 1$, $\underline{U}^M(+M) = 0$ and $\underline{U}^M(0) = \theta_g$. Consequently

$$c_T^M \leq \underline{c}^M.$$

We define the functions $\tilde{f}^T : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, u) \mapsto -f^T(t, 1-u)$ and $V_T^M : \mathbb{R} \times [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, \xi) \mapsto 1 - U(t, -\xi)$. The couple $(-c_T^M, V_T^M)$ solves the problem

$$\begin{cases} (V_T^M)_t - (-c_T^M)(V_T^M)_\xi - (V_T^M)_{\xi\xi} - \tilde{f}^T(t, V_T^M) = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times (-M, M), \\ V_T^M(t, -M) = 1, \quad V_T^M(t, +M) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ V_T^M(T, \xi) = V_T^M(0, \xi), & \forall \xi \in [-M, M], \\ V_T^M(0, 0) = 1 - \theta_g. \end{cases}$$

Since the nonlinearity \tilde{f}^T satisfies the hypotheses of [1], Lemma 2.5.7 could be rewrites :
Let $M > 1$ be a fixed constant. If (\tilde{U}, \tilde{c}) satisfies

$$\begin{cases} \tilde{U}_t - \tilde{c}\tilde{U}_\xi - \tilde{U}_{\xi\xi} - \tilde{f}^T(t, \tilde{U}) \leq 0, & \text{on } \mathbb{R} \times (-M, M), \\ \tilde{U}(t, -M) \leq 1, \quad \tilde{U}(t, +M) \leq 0, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{U}(T, \xi) \leq \tilde{U}(0, \xi), & \forall \xi \in [-M, M], \\ \tilde{U}(0, 0) \geq 1 - \theta_g, \end{cases}$$

then, we have

$$-c_T^M \leq \tilde{c}.$$

Yet, defining $\bar{V}^M(\xi) = 1 - \bar{U}^M(-\xi)$, we have for all $\xi \in (-M, M)$

$$\begin{aligned} & \bar{V}_t^M(\xi) - \bar{V}_{\xi\xi}^M(\xi) - (-\bar{c}^M) \bar{V}_\xi^M(\xi) - \tilde{f}^T(t, \bar{V}^M(\xi)) \\ &= -\{\bar{U}_t^M(-\xi) - \bar{U}_{\xi\xi}^M(-\xi) - \bar{c}^M \bar{U}_\xi^M(-\xi)\} + f^T(t, \bar{U}^M(-\xi)) \\ &= f^T(t, \bar{U}^M(-\xi)) - \bar{f}(\bar{U}^M(-\xi)) \leq 0. \end{aligned}$$

Furthermore, $\bar{V}^M(-M) = 1$, $\bar{V}^M(+M) = 0$ and $\bar{V}^M(0) = 1 - \theta_g$. Consequently

$$-c_T^M \leq -\bar{c}^M.$$

We thus showed that

$$\bar{c}^M \leq c_T^M \leq \underline{c}^M, \quad \forall M > 1.$$

We pass to the limit when M tends to infinity, it occurs that $\bar{c} \leq c_T \leq \underline{c}$. \square

Consequently, there exists a sequence $(T_n)_n$, with $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ such that $(c_{T_n})_n$ converges to a constant $c^* \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.5.9. *The sequence $(U_{T_n})_n$ converges up to extraction of a subsequence in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $\mathcal{C}_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ to a function U^* for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$.*

Démonstration. U_{T_n} is solution of $(U_{T_n})_t - c_{T_n}(U_{T_n})_\xi - (U_{T_n})_{\xi\xi} - f^{T_n}(t, U_{T_n}) = 0$ on \mathbb{R}^2 and satisfies $0 \leq U_{T_n} \leq 1$. Consequently, as $(c_{T_n})_n$ is bounded in \mathbb{R} and as $(f^{T_n}(\cdot, U_{T_n}))_n$ is bounded in $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$, the parabolic regularity theory implies that for $1 \leq p < +\infty$, $(U_{T_n})_n$ is bounded in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$. Yet $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ embeds compactly into $\mathcal{C}_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for $\alpha \in (0, 1 - 2/p)$, for $p > 2$. So, there exists U^* such that up to extraction of a subsequence, $(U_{T_n})_n$ converges to U^* in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $\mathcal{C}_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$. \square

Proposition 2.5.10. *We have the following convergence result*

$$f^{T_n}(\cdot, U_{T_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(U^*) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \text{ (up to extraction of a subsequence).}$$

Démonstration. We still denote $(U_{T_n})_n$ the subsequence of $(U_{T_n})_n$ which converges to U^* . Let $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. There exist $(a, b, \xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^4$ such that the support of ϕ is included in $K = [a, b] \times [\xi_0, \xi_1]$. So we have

$$\begin{aligned} & \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} [f^{T_n}(t, U_{T_n}(t, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(t, \xi) dt d\xi \\ &= \int_{\xi=\xi_0}^{\xi_1} \int_{t=a}^b [f^{T_n}(t, U_{T_n}(t, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(t, \xi) dt d\xi. \end{aligned}$$

Let $(k_n, p_n) \in \mathbb{N}^2$ such that $[k_n T_n, p_n T_n] \subset [a, b]$, $|a - k_n T_n| \leq T_n$ et $|b - p_n T_n| \leq T_n$.

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_a^b [f^{T_n}(t, U_{T_n}(t, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(t, \xi) dt d\xi = \underbrace{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_a^{k_n T_n} \phi(t, \xi) dt d\xi}_{I_n} + \underbrace{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{k_n T_n}^{p_n T_n} \phi(t, \xi) dt d\xi}_{J_n} + \underbrace{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{p_n T_n}^b \phi(t, \xi) dt d\xi}_{K_n}.$$

The integrals I_n et K_n are treated in the same way :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_a^{k_n T_n} [f^{T_n}(t, U_{T_n}(t, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(t, \xi) dt d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[a, k_n T_n] \times [\xi_0, \xi_1]}(t, \xi) [f^{T_n}(t, U_{T_n}(t, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(t, \xi) dt d\xi. \end{aligned}$$

The quantity $[f^{T_n}(t, U_{T_n}(t, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(t, \xi)$ is bounded independently of n , t and ξ . So, by Lebesgue's theorem, the integral tends to 0 when n tend to infinity. So

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0.$$

Let us consider J_n :

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{k_n T_n}^{p_n T_n} [f^{T_n}(t, U_{T_n}(t, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(t, \xi) dt d\xi \quad (s = \frac{t}{T_n}) \\
 &= T_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{k_n}^{p_n} [f(s, U_{T_n}(sT_n, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(sT_n, \xi) ds d\xi \\
 &= T_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_q^{q+1} [f(s, U_{T_n}(sT_n, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(sT_n, \xi) ds d\xi \\
 &= T_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 [f(s+q, U_{T_n}(sT_n + qT_n, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(sT_n + qT_n, \xi) ds d\xi \\
 &= T_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 [f(s, U_{T_n}(sT_n, \xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(sT_n + qT_n, \xi) ds d\xi.
 \end{aligned}$$

We split now the integral into two parts.

$$\begin{aligned}
 J_n &= T_n \underbrace{\sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 \int_{\xi_0}^{\xi_1} [f(s, U^*(\xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(sT_n + qT_n, \xi) d\xi ds}_{J_n^1} \\
 &\quad + T_n \underbrace{\sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 [f(s, U_{T_n}(sT_n, \xi)) - f(s, U^*(\xi))] \phi(sT_n + qT_n, \xi) ds d\xi}_{J_n^2}.
 \end{aligned}$$

We study J_n^2 :

$$\begin{aligned}
 &T_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 [f(s, U_{T_n}(sT_n, \xi)) - f(s, U^*(\xi))] \phi(sT_n + qT_n, \xi) ds d\xi \\
 &\leq T_n (p_n - k_n) \|f_u\|_{\infty, [0,1]^2} \|\phi\|_{\infty} \int_0^1 |U_{T_n}(sT_n, \xi) - U^*(\xi)| ds \\
 &\leq |b - a| \|f_u\|_{\infty, [0,1]^2} \|\phi\|_{\infty} \|U_{T_n} - U^*\|_{\infty, [0,1] \times [\xi_0, \xi_1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{according to Prop 2.5.9}).
 \end{aligned}$$

We study J_n^1 :

Let $\varepsilon > 0$. By uniform continuity of the function ϕ , there exists $\eta > 0$ such that

$$\|(t, \xi) - (s, \xi')\| \leq \eta \implies |\phi(t, \xi) - \phi(s, \xi')| \leq \varepsilon.$$

For n large enough, we have

$$\forall q \in [k_n, p_n - 1], \quad \forall s \in [0, 1], \quad \forall \xi \in [\xi_0, \xi_1], \quad \|(sT_n + qT_n, \xi) - (qT_n, \xi)\| \leq \eta.$$

Consequently, we have $|\phi(sT_n + qT_n, \xi) - \phi(qT_n, \xi)| \leq \varepsilon$. We write then

$$\begin{aligned}
 J_n^1 &= T_n \underbrace{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 [f(s, U^*(\xi)) - g(U^*(\xi))] [\phi(sT_n + qT_n, \xi) - \phi(qT_n, \xi)] ds d\xi}_{J_n^3} \\
 &\quad + T_n \underbrace{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 [f(s, U^*(\xi)) - g(U^*(\xi))] \phi(qT_n, \xi) ds d\xi}_{J_n^4}.
 \end{aligned}$$

We start with J_n^4 :

$$J_n^4 = T_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \phi(qT_n, \xi) \left\{ \int_0^1 [f(s, U^*(\xi)) - g(U^*(\xi))] ds \right\} d\xi.$$

By definition of g , we have $\int_0^1 [f(s, U^*(\xi)) - g(U^*(\xi))] ds = 0$. Consequently $J_n^4 = 0$.

We look now at J_n^3 :

$$|J_n^3| \leq T_n \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{q=k_n}^{p_n-1} \int_0^1 |f(s, U^*(\xi)) - g(U^*(\xi))| |\phi(sT_n + qT_n, \xi) - \phi(qT_n, \xi)| ds d\xi.$$

The quantity $|f(s, U^*(\xi)) - g(U^*(\xi))|$ is bounded by a constant M^* . Consequently

$$|J_n^3| \leq (\xi_1 - \xi_0) T_n (p_n - k_n) M^* \varepsilon \leq (\xi_1 - \xi_0) (b - a) M^* \varepsilon.$$

So, we proved that $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n^3 = 0$. Consequently, we have $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n^1 = 0$, which concludes the proof. \square

Proposition 2.5.11. *The function U^* is of class $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R})$ and*

$$(U^*)_t - c^*(U^*)_\xi - (U^*)_{\xi\xi} - g(U^*) = 0 \text{ on } \mathbb{R}^2.$$

Démonstration. We know that U_{T_n} is a function of class $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ satisfying the equation

$$(U_{T_n})_t - c_n(U_{T_n})_\xi - (U_{T_n})_{\xi\xi} - f^{T_n}(t, U_{T_n}) = 0, \text{ on } \mathbb{R}^2. \quad (2.65)$$

We also know that $(U_{T_n})_n$ converges up to extraction of a subsequence to U^* in $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$, for any $1 < p < +\infty$. In particular, the convergence takes place for $p = 2$. Let $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Multiplying Equation (2.65) by ϕ , and integrating by parts on \mathbb{R}^2 , we obtain

$$-\int_{\mathbb{R}^2} U_{T_n} \phi_t - c_n \int_{\mathbb{R}^2} (U_{T_n})_\xi \phi + \int_{\mathbb{R}^2} (U_{T_n})_{\xi\xi} \phi - \int_{\mathbb{R}^2} f^{T_n}(t, U_{T_n}) \phi = 0. \quad (2.66)$$

We have

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^2} U_{T_n} \phi_t - \int_{\mathbb{R}^2} U^* \phi_t \right| &\leq \|U_{T_n} - U^*\|_{L^2(\text{Supp}(\phi))} \|\phi_t\|_{L^2(\text{Supp}(\phi))} \\
 &\leq \|U_{T_n} - U^*\|_{W^{1,2,2}(\text{Supp}(\phi))} \|\phi_t\|_{L^2(\text{Supp}(\phi))}.
 \end{aligned}$$

Also

$$\int_{\mathbb{R}^2} (U_{T_n})_\xi \phi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} (U^*)_\xi \phi \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^2} (U_{T_n})_{\xi\xi} \phi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} (U^*)_{\xi\xi} \phi.$$

Furthermore, we showed in Lemma 2.5.10 that

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{t}{T_n}, U_{T_n}\right) \phi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} g(U^*) \phi.$$

Consequently, if we pass to the limit as $n \rightarrow +\infty$ in (2.66), we have that

$$-\int_{\mathbb{R}^2} U^* \phi_t - c^* \int_{\mathbb{R}^2} (U^*)_\xi \phi + \int_{\mathbb{R}^2} (U^*)_\xi \phi_\xi - \int_{\mathbb{R}^2} g(U^*) \phi = 0.$$

Consequently U^* is a weak solution of the equation

$$(U^*)_t - c^*(U^*)_\xi - (U^*)_{\xi\xi} - g(U^*) = 0 \text{ on } \mathbb{R}^2.$$

By parabolic regularity theory, the function U^* is in fact a function $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, and it satisfies the previous equation in the classical sense on \mathbb{R}^2 . \square

Proposition 2.5.12. *The function U^* does not depend on t . In other terms*

$$\partial_t U^*(t, \xi) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Let $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$ and $n \in \mathbb{N}$. Let K be a compact set containing (t, ξ) and $(0, \xi)$. According to the previous proposition, there exists $C_K \in \mathbb{R}$ such that $\|U_{T_n}\|_{\mathcal{C}^{1,2}(K)} \leq C_K$. Let $k_n \in \mathbb{Z}$ such that $|t - k_n T_n| \leq T_n$. We have

$$|U^*(t, \xi) - U^*(0, \xi)| \leq |U^*(t, \xi) - U_{T_n}(t, \xi)| + |U_{T_n}(t, \xi) - U_{T_n}(0, \xi)| + |U_{T_n}(0, \xi) - U^*(0, \xi)|.$$

The first and the third term of the previous inequality are smaller than $\|U^* - U_{T_n}\|_{\infty, K}$. Let us examine the second term of the sum above :

$$|U_{T_n}(t, \xi) - U_{T_n}(0, \xi)| = |U_{T_n}(t - k_n T_n, \xi) - U_{T_n}(0, \xi)| \leq \|U_{T_n}\|_{\mathcal{C}^{1,2}(K)} |t - k_n T_n| \leq C_K T_n.$$

Passing to the limit when n tends to infinity, it occurs that

$$U^*(t, \xi) = U^*(0, \xi).$$

That is U^* do not depend on t . \square

Proposition 2.5.13. *We have $c^* = c_g$ and $U^* \equiv U_g$.*

Démonstration. For all $n \geq 0$, we have $U_{T_n}(0, 0) = \theta_g$. This thus implies that $U^*(0) = \theta_g$. The couple (c^*, U^*) satisfies in the classical sense the equation $(U^*)'' + c^*(U^*)' + g(U^*) = 0$ on \mathbb{R} . We are now going to justify that $U^*(-\infty) = 1$ and that $U^*(+\infty) = 0$. Knowing that $U^*(0) = \theta_g$, it could be possible a priori that $U^* \equiv \theta_g$. We are however going to show bwoc that this situation cannot occur. We thus suppose that $U^* \equiv \theta_g$. As $(U_{T_n})_\xi < 0$ on \mathbb{R} , there exists a unique positive real number ξ_n such that $U_{T_n}(0, \xi_n) = \frac{\theta_g}{2}$. We thus define the function $V_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ by $V_n(t, \xi) = U_{T_n}(t, \xi + \xi_n)$. Consequently, we have

$$\begin{cases} V_n(0, 0) = \frac{\theta_g}{2}, \\ V_n(t, \xi) \leq U_{T_n}(t, \xi) \text{ on } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.67)$$

The sequence $(V_n)_n$ converges up to extraction of a subsequence in $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $\mathcal{C}_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$ to a function $V^* \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ satisfying

$$(V^*)'' + c^*(V^*)' + g(V^*) = 0 \text{ on } \mathbb{R}. \quad (2.68)$$

If we pass to the limit as n tends to the infinity in (2.67), we obtain that

$$\begin{cases} V^*(0) = \frac{\theta_g}{2}, \\ V^* \leq \theta_g \text{ on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consequently, we have that $V^*(-\infty) = \theta_g$ and $V^*(+\infty) = 0$. We multiply (2.68) by $(V^*)'$, then we integrate on \mathbb{R} . It occurs that

$$c^* \int_{-\infty}^{+\infty} [(V^*)'(\xi)]^2 d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} g[(V^*)(\xi)](V^*)'(\xi) d\xi = \int_0^{\theta_g} g(s) ds < 0.$$

So,

$$c^* < 0.$$

The same reasoning on the function W_n defined by $W_n(t, \xi) = U_{T_n}(t, \xi + \tilde{\xi}_n)$ such that $W_n(0, 0) = \frac{1+\theta_g}{2}$ leads to the fact that c^* has the same sign as $\int_{\theta_g}^1 g(s) ds$, that is $c^* > 0$. We get to a contradiction. The situation $U^* \equiv \theta_g$ can not occur. Consequently, U^* is not identically equal in θ_g . Applying the strong maximum principle, one gets

$$(U^*)' < 0 \text{ on } \mathbb{R}.$$

As $U^*(0) = \theta_g$, we have necessarily $U^*(-\infty) = 1$ and $U^*(+\infty) = 0$. To summarize, the couple (c^*, U^*) satisfies

$$\begin{cases} (U^*)'' + c^*(U^*)' + g(U^*) = 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ U^*(-\infty) = 1, \quad U^*(+\infty) = 0, \\ U^*(0) = \theta_g. \end{cases}$$

Knowing that this problem admits a unique solution, it occurs that $c^* = c_g$ and $U^* \equiv U_g$. The uniqueness of accumulation point of $(c_{T_n})_n$ and $(U_{T_n})_n$ imply that $c_T \xrightarrow{T \rightarrow 0} c_g$ and $U_T \xrightarrow{T \rightarrow 0} U_g$ in $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$. \square

2.6 Pulsating fronts for small perturbations of the nonlinearity

2.6.1 Existence of pulsating fronts

This section is devoted to the proof of Theorems 2.1.5 and 2.1.6. We remind the reader that in this section, the Poincaré map associated with the function f^T has exactly two stable fixed points 0 and 1, and a unique unstable fixed point α_0 between both. According to [1], there exists a unique pulsating front (c_T, U_T) solving (2.5) with $U_T(0, 0) = \alpha_0$. We call $w_0(t)$ the solution of the equation $y' = f^T(t, y)$ satisfying $y(0) = \alpha_0$. We saw in Section 2.2 that w_0 is a T -periodic function. Furthermore, we have

$$\lambda_{w_0, f^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T f_u(s, w_0(s)) ds < 0.$$

We give a corollary of the Grönwall lemma.

Lemma 2.6.1. *Let $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a function of class C^1 such that*

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists \beta > 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad |y'(t)| \leq \beta + \alpha|y(t)|.$$

So, we have

$$\forall t \in [a, b], \quad |y(t)| \leq |y(a)|e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)} - 1).$$

Démonstration. For all t in $[a, b]$, we have

$$|y(t)| \leq |y(a)| + |y(t) - y(a)| \leq |y(a)| + \int_a^t |y'(s)|ds \leq |y(a)| + \beta(t-a) + \int_a^t |y(s)|ds.$$

We then apply the Grönwall lemma. \square

We denote by P_ε (resp. P) the Poincaré map associated with $f^{T,\varepsilon}$ (resp. f^T). We are going to show here that P_ε (resp. P'_ε) converges uniformly on $[0,1]$ to P (resp. P') when ε tends to 0. Let us specify that according to (2.2), (2.8), (2.9) and the mean value theorem, we have

$$|f^T(t, u) - f^{T,\varepsilon}(t, u)| \leq \omega(\varepsilon), \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (2.69)$$

Proposition 2.6.2. *There exists three constants C_1 , C_2 and C_3 such that for any $\varepsilon > 0$, we have*

$$\|P - P_\varepsilon\|_{\infty, [0,1]} < C_1 \omega(\varepsilon). \quad (2.70)$$

$$\|P' - P'_\varepsilon\|_{\infty, [0,1]} < C_2 \sinh(C_3 \omega(\varepsilon)). \quad (2.71)$$

Démonstration. We show the first relation. Let $\alpha \in [0, 1]$ and $\varepsilon > 0$. We define $u_\varepsilon = w(\alpha, \cdot) - w_\varepsilon(\alpha, \cdot)$. There exist two positive constants C and C' such that for any $t \in [0, T]$, we have

$$\begin{aligned} |u'_\varepsilon(t)| &= |f^T(t, w(\alpha, t)) - f^{T,\varepsilon}(t, w_\varepsilon(\alpha, t))| \\ &\leq |f^T(t, w(\alpha, t)) - f^T(t, w_\varepsilon(\alpha, t))| + |f^T(t, w_\varepsilon(\alpha, t)) - f^{T,\varepsilon}(t, w_\varepsilon(\alpha, t))| \\ &\leq C|u_\varepsilon(t)| + C'\omega(\varepsilon) \quad (\text{by (2.69)}). \end{aligned}$$

We apply Lemma 2.6.1. For all $t \in [0, T]$, we have $|u_\varepsilon(t)| \leq \frac{C'\omega(\varepsilon)}{C}(e^{Ct} - 1)$.

Consequently, if we take $t = T$, and if we define $C_1 = \frac{C'}{C}(e^{CT} - 1)$, then we conclude

$$|P(\alpha) - P_\varepsilon(\alpha)| < C_1 \omega(\varepsilon).$$

We show the second relation. Let $\alpha \in [0, 1]$ and $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} P'(\alpha) - P'_\varepsilon(\alpha) &= e^{\int_0^T f_u^T(s, w(\alpha, s))ds} - e^{\int_0^T f_u^{T,\varepsilon}(s, w_\varepsilon(\alpha, s))ds} \\ &= \underbrace{e^{\frac{1}{2} \left(\int_0^T f_u^T(s, w(\alpha, s))ds + \int_0^T f_u^{T,\varepsilon}(s, w_\varepsilon(\alpha, s))ds \right)}}_{(I)} \times 2 \sinh \left(\underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T f_u^T(s, w(\alpha, s)) - f_u^{T,\varepsilon}(s, w_\varepsilon(\alpha, s))ds}_{(II)} \right). \end{aligned}$$

Knowing that $w_\varepsilon(\alpha, \cdot) \in [0, 1]$ and that $f_u^{T,\varepsilon}$ is bounded independently of ε on $[0, T] \times [0, 1]$ (because w_ε is bounded), the term (I) can be bounded by a constant which we shall denote C_2 . Let us now consider the term (II)

$$(II) = \int_0^T f_u^T(s, w(\alpha, s)) - f_u^T(s, w_\varepsilon(\alpha, s))ds + \int_0^T f_u^T(s, w_\varepsilon(\alpha, s)) - f_u^{T,\varepsilon}(s, w_\varepsilon(\alpha, s))ds.$$

According to (2.70) and the mean value theorem, there exists $M > 0$ such that

$$f_u^T(s, w(\alpha, s)) - f_u^T(s, w_\varepsilon(\alpha, s)) \leq M|w(\alpha, s) - w_\varepsilon(\alpha, s)| \leq MC_1 \omega(\varepsilon).$$

Furthermore, according to (2.9), we have

$$f_u^T(s, w_\varepsilon(\alpha, s)) - f_u^{T,\varepsilon}(s, w_\varepsilon(\alpha, s)) \leq \omega(\varepsilon).$$

Consequently,

$$(II) \leq (MC_1 + 1)T\omega(\varepsilon).$$

We define $C_3 = (MC_1 + 1)T$. Finally, we have

$$P'(\alpha) - P'_\varepsilon(\alpha) \leq C_2 \sinh(C_3\omega(\varepsilon)),$$

and the proof of Proposition 2.6.2 is complete. \square

Proposition 2.6.3. *There exists $\varepsilon_0 > 0$ small enough such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, P_ε has exactly two stable fixed points 0 et 1 and a unique unstable fixed point $\alpha_0^\varepsilon \in (0, 1)$.*

Démonstration. We begin by making some remarks on P . As $P'(0) < 1$ (resp. $P'(1) < 1$), by continuity there exists an interval $[0, x_0]$ (resp. $[x_1, 1]$) on which $P' < 1$ (resp. $P' < 1$). As $P'(\alpha_0) > 1$, there exists an interval $[\alpha_0 - \eta, \alpha_0 + \eta]$ on which $P' > 1$.

The properties of P above can be extend to P_ε . Indeed, according to (2.70) and (2.71), there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $P'_\varepsilon < 1$ on $[0, x_0]$, $P'_\varepsilon < 1$ on $[x_1, 1]$, and $P'_\varepsilon > 1$ on $[\alpha_0 - \eta, \alpha_0 + \eta]$. Consequently, for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, as $P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1) = 0$, the function P_ε has necessarily another fixed point α_0^ε between both.

Let $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. The function P_ε has no fixed point on $[0, x_0]$ and on $[x_1, 1]$. We make the proof for $[0, x_0]$. Let $\alpha \in [0, x_0]$. According to Taylor-Lagrange's formula, we have $P_\varepsilon(\alpha) = P_\varepsilon(0) + \alpha P'_\varepsilon(\hat{\alpha})$, where $\hat{\alpha} \in [0, \alpha] \subset [0, x_0]$. According to the fact that $P_\varepsilon(0) = 0$ and $P'_\varepsilon(\hat{\alpha}) < 1$, we have $P_\varepsilon(\alpha) < \alpha$.

The function P_ε has no fixed point on $[x_0, \alpha_0 - \eta]$ and on $[\alpha_0 + \eta, x_1]$. Indeed, we can find ν_0 such that for any $\alpha \in [x_0, \alpha_0 - \eta]$, we have $P_\varepsilon(\alpha) - \alpha > \nu_0$. Consequently, according to (2.70), even if it means setting ε_0 smaller, we can prove that for any α in $[x_0, \alpha_0 - \eta]$, we have $P_\varepsilon(\alpha) - \alpha > \frac{\nu_0}{2}$.

Finally, P_ε has a unique fixed point (on $[\alpha_0 - \eta, \alpha_0 + \eta]$). Indeed, if there was others, we would have the existence of a point α_1^ε for which $P'_\varepsilon(\alpha_1^\varepsilon) < 1$. It is contradictory to the fact that $P'_\varepsilon > 1$ on $[\alpha_0 - \eta, \alpha_0 + \eta]$. \square

Consequently, if $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, then we are under the hypotheses of the existence and uniqueness theorem of Alikakos, Bates and Chen [1]. In particular, there exists a pulsating front $(U_\varepsilon, c_\varepsilon)$ solving (2.10).

2.6.2 Convergence of the couple $(c_\varepsilon, U_\varepsilon)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

This subsection is devoted to the proof of Theorem 2.1.6. By Theorem 2.1.5, for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, there exists a pulsating front $(U_\varepsilon, c_\varepsilon)$ solving (2.10). As in Section 2.5, we can show there exists a couple (c^*, U^*) such that as $\varepsilon \rightarrow 0$, c_ε converges to c^* and U_ε converges to U^* in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for any $1 < p < +\infty$ and any $\alpha \in (0, 1)$. We prove then that (c^*, U^*) is solution, at first in the sense of distributions, but also in the classical sense of the equation

$$(U^*)_t - c^*(U^*)_\xi - (U^*)_{\xi\xi} = f^T(t, U^*), \text{ on } \mathbb{R}^2.$$

We also have that $U^*(T, \cdot) = U^*(0, \cdot)$ on \mathbb{R} , and $U^*(0, 0) = \alpha_0$. Consequently, if we prove that $U^*(\cdot, -\infty) = 1$ and $U^*(\cdot, +\infty) = 0$ uniformly on \mathbb{R} , then the couple (c^*, U^*) solves Problem (2.5) with $U^*(0, 0) = \alpha_0$. By uniqueness, we shall have $c^* = c_T$ and $U^* = U_T$. We can not prove this result in the same way as in Section 2.5 because here, we do not know the sign of c_T . We use

a technique which comes from Lemma 6.5 of [4] where they are interested in the exponential behavior of the front at infinity. After, we shall denote

$$U_{\pm}^*(t) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U^*(t, \xi).$$

Knowing that $U^*(0, 0) = w_0(0)$ and $\partial_{\xi} U^* \leq 0$, we have a priori that $U_{+}^* \equiv w_0$ or $U_{-}^* \equiv 0$. We suppose at first that $U_{+}^* \equiv w_0$. So, we have that $U^* \geq w_0$. Since the two functions are equal on $(0, 0)$, the strong maximum principle implies that

$$U^*(t, \xi) = w_0(t), \quad \forall t \leq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

By periodicity, the equality is also true when t is positive. Consequently $U^* \equiv w_0$ on \mathbb{R}^2 . As $\partial_{\xi} U_{\varepsilon} < 0$, there exists a unique positive real number ξ_{ε} such that $U_{\varepsilon}(0, \xi_{\varepsilon}) = \frac{\alpha_0}{2}$. We define the function $V_{\varepsilon} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ by $V_{\varepsilon}(t, \xi) := U_{\varepsilon}(t, \xi + \xi_{\varepsilon})$. We have so

$$\begin{cases} V_{\varepsilon}(0, 0) = \frac{\alpha_0}{2}, \\ V_{\varepsilon} \leq U_{\varepsilon} \text{ on } \mathbb{R}^2, \\ \partial_{\xi} V_{\varepsilon} < 0 \text{ on } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

We can show that V_{ε} converges to a function V^* in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for $1 < p \leq +\infty$ and $\alpha \in (0, 1)$. Actually, V^* is in $C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ and satisfies in the classical sense $\partial_t V^* - c^* \partial_{\xi} V^* - \partial_{\xi\xi} V^* = f^T(t, V^*)$ on \mathbb{R}^2 . Furthermore, we have

$$\begin{cases} V^*(0, 0) = \frac{\alpha_0}{2}, \\ V^* \leq U^* \equiv w_0 \text{ on } \mathbb{R}^2, \\ \partial_{\xi} V^* < 0 \text{ on } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

The last inequality is a consequence of the strong maximum principle. We define the function $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ by $Z(t, \xi) = w_0(t) - V^*(t, \xi)$. The function Z is positive and satisfies

$$\partial_t Z - c^* \partial_{\xi} Z - \partial_{\xi\xi} Z = \alpha(t, \xi)Z \text{ on } \mathbb{R}^2,$$

$$\text{where } \alpha(t, \xi) = \begin{cases} \frac{f^T(t, w_0(t)) - f^T(t, V^*(t, \xi))}{w_0(t) - V^*(t, \xi)} & \text{if } w_0(t) \neq V^*(t, \xi), \\ f_u^T(t, w_0(t)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We also have

$$Z(t + T, \xi) = Z(t, \xi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

We are going to show that $\frac{Z_{\xi}}{Z}$ is bounded on \mathbb{R}^2 . Let $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$. Standard parabolic estimates imply that there exists a constant C_1 independent of (t, ξ) (because the function c is bounded) such that

$$0 \leq Z_{\xi}(t, \xi) \leq C_1 \max_{[t-1, t] \times [\xi-1, \xi+1]} Z. \quad (2.72)$$

Furthermore, the parabolic Harnack's inequality implies that there exists a constant C_2 independent of (t, ξ) (because the function c is bounded) such that

$$\max_{[t-1, t] \times [\xi-1, \xi+1]} Z \leq C_2 Z(t + T, \xi) = C_2 Z(t, \xi). \quad (2.73)$$

Inequalities (2.72) and (2.73) imply that

$$0 < \frac{Z_{\xi}}{Z}(t, \xi) < C_1 C_2.$$

Consequently $\limsup_{\xi \rightarrow -\infty, t \in \mathbb{R}} \frac{Z_\xi}{Z}(t, \xi)$ is a finite and non negative real number called β . So, there exists two sequences $(t_n)_n$ and $(\xi_n)_n$ with $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ such that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Z_\xi}{Z}(t_n, \xi_n) = \beta. \quad (2.74)$$

Let us note that we can show in the same way that the quotient $\frac{Z_t}{Z}$ is bounded in \mathbb{R}^2 .

Let $n \in \mathbb{N}$. We write $t_n = k_n T + t'_n$, where k_n is an integer and t'_n satisfies $|t'_n| < T$. We define the function $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$h_n(t, \xi) := \frac{Z(t, \xi + \xi_n)}{Z(t_n, \xi_n)}.$$

Let us show that the function h_n is locally bounded. Let K be a compact set of \mathbb{R}^2 , and $(t, \xi) \in K$.

$$\begin{aligned} |\ln(h_n(t, \xi))| &= |\ln(Z(t, \xi + \xi_n)) - \ln(Z(t_n, \xi_n))| \\ &= |\ln(Z(t + k_n T, \xi + \xi_n)) - \ln(Z(t_n, \xi_n))| \\ &\leq \|(\log(Z))_t\|_\infty |t - t'_n| + \|(\log(Z))_\xi\|_\infty |\xi|. \end{aligned}$$

Let us specify that $\|(\log(Z))_t\|_\infty$ and $\|(\log(Z))_\xi\|_\infty$ are well defined because the two quotients $\frac{Z_\xi}{Z}$ and $\frac{Z_t}{Z}$ are bounded on \mathbb{R}^2 . Consequently, the quantity above is bounded because $(t, \xi) \in K$ and $|t'_n| < T$. We have

$$(h_n)_t - c^*(h_n)_\xi - (h_n)_{\xi\xi} = \alpha_n(t, \xi) h_n \text{ on } \mathbb{R}^2, \quad (2.75)$$

where $\alpha_n(t, \xi) = \frac{f^T(t, w_0(t)) - f^T(t, V^*(t, \xi + \xi_n))}{w_0(t) - V^*(t, \xi + \xi_n)}$.

The sequence $(\alpha_n)_n$ is bounded by $\max_{(t,u) \in [0,T] \times [0,1]} |f_u^T|$ in $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$ independently of n . Furthermore $(h_n)_n$ is locally bounded. Consequently, we can show that $(h_n)_n$ converges to a function h in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$. Actually, passing to the limit in the equation (2.75), h satisfies (at first in the sense of distributions, but in fact in the classical sense using standard parabolic estimates)

$$h_t - c^* h_\xi - h_{\xi\xi} = f_u^T(t, w_0(t)) h \text{ on } \mathbb{R}^2. \quad (2.76)$$

We have

$$\frac{(h_n)_\xi}{h_n}(t, \xi) = \frac{Z_\xi}{Z}(t, \xi + \xi_n), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

As $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, we have that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Z_\xi}{Z}(t, \xi + \xi_n) \leq \limsup_{\xi \rightarrow -\infty ; t \in \mathbb{R}} \frac{Z_\xi}{Z}(t, \xi) := \beta, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

So

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(h_n)_\xi}{h_n}(t, \xi) \leq \beta, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

We also have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(h_n)_\xi}{h_n}(t, \xi) = \frac{h_\xi}{h}(t, \xi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Consequently

$$\frac{h_\xi}{h}(t, \xi) \leq \beta, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Furthermore, first we have that

$$\frac{(h_n)_\xi}{h_n}(t'_n, 0) = \frac{Z_\xi}{Z}(t_n, \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta,$$

and second, as $(t'_n)_n$ is bounded, it converges up to extraction of a subsequence to a constant $t_0 \in \mathbb{R}$. Consequently

$$\frac{h_\xi}{h}(t_0, 0) = \beta.$$

The function $\frac{h_\xi}{h}$ satisfies on \mathbb{R}^2 the equation

$$(\frac{h_\xi}{h})_t - c^*(\frac{h_\xi}{h})_\xi - (\frac{h_\xi}{h})_{\xi\xi} - 2(\frac{h_\xi}{h})_\xi(\frac{h_\xi}{h}) = 0.$$

So, applying the maximum principle and using the T -periodicity, we obtain that

$$h_\xi(t, \xi) = \beta h(t, \xi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Consequently, there exists a T -periodic positive function $\Gamma(t)$ such that

$$h(t, \xi) = e^{\beta \xi} \Gamma(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

We put back the previous expression in (2.76), then we simplify by $e^{\beta \xi}$. We obtain

$$\Gamma'(t) - \beta c^* \Gamma(t) - \beta^2 \Gamma(t) = f_u^T(t, w_0(t)) \Gamma(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

We divide then by $\Gamma(t)$ and we integrate between 0 and T

$$\int_0^T \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt - \beta T c^* - \beta^2 T = \int_0^T f_u^T(t, w_0(t)) dt.$$

According to the fact that $\int_0^T \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt = 0$, we have

$$\beta^2 + c^* \beta - \lambda_{w_0, f^T} = 0.$$

Consequently, β is a non negative root of $X^2 + c^* X + \lambda_{w_0, f^T} = 0$.

As $\partial_\xi U_\varepsilon < 0$, there exists a unique negative $\bar{\xi}_\varepsilon$ such that $U_\varepsilon(0, \bar{\xi}_\varepsilon) = \frac{1+\alpha_0}{2}$. We define the function $W_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ by $W_\varepsilon(t, \xi) := U_\varepsilon(t, x + \bar{\xi}_\varepsilon)$. We have

$$\begin{cases} W_\varepsilon(0, 0) = \frac{\alpha_0+1}{2}, \\ W_\varepsilon \geq U_\varepsilon \text{ on } \mathbb{R}^2, \\ \partial_\xi W_\varepsilon < 0 \text{ on } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

The function W_ε converges to a function W^* in $W_{loc}^{1,2,p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for $1 < p < +\infty$ and $\alpha \in (0, 1)$. Furthermore, W^* is in $C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ and satisfies $\partial_t W^* - c^* \partial_\xi W^* - \partial_{\xi\xi} W^* = f^T(t, W^*)$ on \mathbb{R}^2 . Consequently, we have

$$\begin{cases} W^*(0, 0) = \frac{\alpha_0+1}{2}, \\ W^* \geq U^* \equiv w_0 \text{ on } \mathbb{R}^2, \\ \partial_\xi W^* < 0 \text{ on } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

The fact that the last inequality is strict is a consequence of the strong maximum principle. We define $\bar{Z}(t, \xi) = w_0(t) - W^*(t, \xi)$. We show using parabolic standards estimates and the parabolic Harnack's inequality that the the negative function $\frac{\bar{Z}_\xi}{\bar{Z}}$ is bounded on \mathbb{R}^2 . Consequently

$\limsup_{\xi \rightarrow -\infty; t \in \mathbb{R}} \frac{\bar{Z}_\xi}{\bar{Z}}(t, \xi)$ is a finite and a non positive real called δ . As previously, we also demonstrate that δ is a non positive root of $X^2 + c^*X - \lambda_{w_0, f^T}$. Finally, the product $\beta\delta$ is a non positive real number, but it is equal to $-\lambda_{w_0, f^T}$ which is by hypothesis a positive real number. So, we have a contradiction, and the hypothetis $U_+^* \equiv w_0$ is not valid. So we have that $U_+^* \equiv 0$. Consequently, we have $U_-^* \equiv 1$. Indeed, If it was not the case, we would have $U_-^* \equiv w_0$. So we would have

$$U^*(t, \xi) \leq w_0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Yet, the two functions are equal on $(0, 0)$, so, by the strong maximum principle we would have

$$U^*(t, \xi) = w_0(t), \quad \forall t \leq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

By periodicity, the equality would be true for all $t \in \mathbb{R}$. This would contradict the fact that $U_+^* \equiv 0$.

So we have

$$U^*(\cdot, -\infty) = 1 \text{ and } U^*(\cdot, +\infty) = 0,$$

and the proof of Theorem 2.1.6 is complete.

2.7 An example of bistable on average nonlinearities for which pulsating front does not exist

We begin this section by giving a proposition on the ordering of the speeds of two planar fronts in terms of their limit states.

Proposition 2.7.1. *Let $\alpha_1 \leq \alpha_3 < \alpha_2 \leq \alpha_4$ be four real numbers. Let $g : [\alpha_1, \alpha_4] \rightarrow \mathbb{R}$ of class C^1 such that $g(\alpha_i) = 0$ for any $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. We assume there exist*

— a function $U_{12} : \mathbb{R} \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)$ such that

$$\begin{cases} (U_{12})'' + c_{12}(U_{12})' + g(U_{12}) = 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ U_{12}(-\infty) = \alpha_2, \quad U_{12}(+\infty) = \alpha_1, \end{cases}$$

— a function $U_{34} : \mathbb{R} \rightarrow (\alpha_3, \alpha_4)$ such that

$$\begin{cases} (U_{34})'' + c_{34}(U_{34})' + g(U_{34}) = 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ U_{34}(-\infty) = \alpha_4, \quad U_{34}(+\infty) = \alpha_3. \end{cases}$$

Furthermore, we suppose that

- if $\alpha_1 = \alpha_3$, then $g'(\alpha_1) < 0$,
- if $\alpha_2 = \alpha_4$, then $g'(\alpha_2) < 0$.

Then, if $\alpha_1 \neq \alpha_3$ or $\alpha_2 \neq \alpha_4$ we have $c_{12} < c_{34}$. Otherwise $c_{12} = c_{34}$.

Démonstration. It is well known that we have

$$(U_{12})' < 0 \text{ and } (U_{34})' < 0 \text{ on } \mathbb{R}.$$

There are four possible situations concerning $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and α_4 .

1st case : We assume that $\alpha_1 \neq \alpha_3$ and $\alpha_2 \neq \alpha_4$. We argue bwoc supposing that $c_{34} \leq c_{12}$. According to the fact that $U_{12}(-\infty) = \alpha_2 < \alpha_4 = U_{34}(-\infty)$ and $U_{12}(+\infty) = \alpha_1 < \alpha_3 = U_{34}(+\infty)$, there exists $\xi_0 \geq 0$ such that

$$U_{34}(\xi) > U_{12}(\xi + \xi_0), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

We thus define

$$\xi^- = \inf\{\tilde{\xi} \in \mathbb{R} \mid U_{34}(\xi) > U_{12}(\xi + \tilde{\xi}), \forall \xi \in \mathbb{R}\}.$$

There holds $\xi^- \leq \xi_0$ and $\xi^- \in \mathbb{R}$ since $\alpha_2 > \alpha_3$. Furthermore, owing to the definition of ξ^- and the continuity of U_{12} and U_{34} , there exists $\xi^* \in \mathbb{R}$ such that

$$U_{34}(\xi^*) = U_{12}(\xi^* + \xi^-) \tag{2.77}$$

and

$$U_{34}(\xi) \geq U_{12}(\xi + \xi^-), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.78}$$

Furthermore, we have on \mathbb{R}

$$(U_{34} - U_{12}(\cdot + \xi^-))'' + c_{34}(U_{34} - U_{12}(\cdot + \xi^-))' + g(U_{34}) - g(U_{12}(\cdot + \xi^-)) = (c_{12} - c_{34})(U_{12}(\cdot + \xi^-))'$$

We define the bounded function $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\beta(\xi) = \begin{cases} \frac{g(U_{34}(\xi)) - g(U_{12}(\xi + \xi^-))}{U_{34}(\xi) - U_{12}(\xi + \xi^-)} & \text{if } U_{34}(\xi) \neq U_{12}(\xi + \xi^-), \\ g'(U_{34}(\xi)) & \text{if } U_{34}(\xi) = U_{12}(\xi + \xi^-). \end{cases}$$

Consequently, since $(U_{12})' < 0$ on \mathbb{R} and since we have assumed that $c_{34} \leq c_{12}$, we have on \mathbb{R}

$$(U_{34} - U_{12}(\cdot + \xi^-))'' + c_{34}(U_{34} - U_{12}(\cdot + \xi^-))' + \beta(\xi)(U_{34} - U_{12}(\cdot + \xi^-)) \leq 0. \tag{2.79}$$

According to (2.77), (2.78) and (2.79), the strong maximum principle implies that

$$U_{12}(\cdot + \xi^-) = U_{34} \text{ on } \mathbb{R},$$

which is a contradiction because $U_{12}(+\infty) = \alpha_1 < \alpha_3 = U_{34}(+\infty)$. Consequently, in this case, we have $c_{12} < c_{34}$.

2nd case : We assume that $\alpha_1 = \alpha_3$ and $\alpha_2 \neq \alpha_4$. We recall that in this case the function g satisfy

$$g(\alpha_1) = 0 \text{ and } g'(\alpha_1) < 0.$$

We argue bwoc supposing that $c_{34} \leq c_{12}$. Since $U_{12}(+\infty) = \alpha_1$, there exists $R_+ \in \mathbb{R}$ such that

$$U_{12}(\xi) \leq \alpha_1 + \delta_+, \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty) \tag{2.80}$$

where δ_+ is defined in Lemma 2.3.1 with $l_0 = \alpha_1$, $l_1 = \alpha_4$, $\underline{g} = \bar{g} = g$. Furthermore, since $U_{34}(-\infty) = \alpha_4 > \alpha_2$, there exists $\xi_0 \geq 0$ such that

$$U_{34}(\xi - \xi_0) \geq \alpha_2, \quad \forall \xi \in (-\infty, R_+]$$

Hence, since $U_{12} \in (\alpha_1, \alpha_2)$ it follows that

$$U_{12}(\xi) \leq U_{34}(\xi - \xi_0), \quad \forall \xi \in (-\infty, R_+]. \quad (2.81)$$

In particular, we have

$$U_{12}(R_+) \leq U_{34}(R_+ - \xi_0). \quad (2.82)$$

In addition, on $[R_+, +\infty)$

$$(U_{12})'' + c_{12}(U_{12})' + g(U_{12}) = 0, \quad (2.83)$$

and, since $(U_{34})' < 0$ and $c_{34} \leq c_{12}$, we thus have on $[R_+, +\infty)$

$$(U_{34}(\cdot - \xi_0))'' + c_{12}(U_{34}(\cdot - \xi_0))' + g(U_{34}(\cdot - \xi_0)) = (c_{12} - c_{34})(U_{34}(\cdot - \xi_0))' \leq 0. \quad (2.84)$$

Owing to (2.80), (2.82), (2.83) and (2.84), we can apply Lemma 2.3.1 with $l_0 = \alpha_1$, $l_1 = \alpha_4$, $\bar{g} = g = \underline{g}$, $\underline{v} = U_{12}$ and $\bar{v} = U_{34}(\cdot - \xi_0)$. It follows that

$$U_{12}(\xi) \leq U_{34}(\xi - \xi_0), \quad \forall \xi \in [R_+, +\infty). \quad (2.85)$$

Thanks to (2.81) and (2.85), we thus obtain

$$U_{12}(\xi) \leq U_{34}(\xi - \xi_0), \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

and then $U_{12} < U_{34}(\cdot - \xi_0)$ on \mathbb{R} from the strong maximum principle. We thus define

$$\xi^- = \inf\{\tilde{\xi} \in \mathbb{R} \mid U_{12}(\xi) < U_{34}(\xi - \tilde{\xi}), \forall \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Owing to the continuity of U_{12} and U_{34} , we have

$$U_{12}(\xi) \leq U_{34}(\xi - \xi^-), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.86)$$

Two cases can occur. If there exists $\xi^* \in \mathbb{R}$ such that $U_{12}(\xi^*) = U_{34}(\xi^* - \xi^-)$, then, according to (2.86), we can apply a maximum principle. It follows that

$$U_{12}(\xi^*) = U_{34}(\xi^* - \xi^-), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

It is a contradiction because we have

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U_{12}(\xi) = \alpha_2 < \alpha_4 = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} U_{34}(\xi) \quad (2.87)$$

If $U_{12} < U_{34}(\cdot - \xi^-)$ on \mathbb{R} , then according to (2.87) and the uniform continuity of U_{12} and U_{34} on \mathbb{R} , there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$U_{12}(\xi) < U_{34}(\xi - \xi^- + \varepsilon_0), \quad \forall \xi \in (-\infty, R_+].$$

We also apply Lemma 2.3.1 with $\underline{v} = U_{12}$ and $\bar{v} = U_{34}(\cdot - \xi^- + \varepsilon_0)$. It follows that

$$U_{12}(\xi) \leq U_{34}(\xi - \xi^- + \varepsilon_0), \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

and then $U_{12} < U_{34}(\cdot - \xi^- + \varepsilon_0)$ on \mathbb{R} from the strong maximum principle. It is a contradiction with the definition of ξ^- .

3rd case : We assume that $\alpha_1 \neq \alpha_3$ and $\alpha_2 = \alpha_4$. We are here in a context similar to the previous

2.7. An example of bistable on average nonlinearities for which pulsating front does not exist

case. The proof that $c_{12} < c_{34}$ in this case is based Lemma 2.3.2. In the same way as previously, we use this lemma to prove that there exists $\xi_0^- \geq 0$ such that

$$U_{12}(\xi) < U_{34}(\xi - \xi_0^-), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

We conclude again as in the second situation.

4th case : We assume that $\alpha_1 = \alpha_3$ and $\alpha_2 = \alpha_4$. We will show that in this case $c_{34} = c_{12}$. We define $V_{12} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ and $V_{34} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ by

$$V_{12}(\xi) = \frac{U_{12}(\xi) - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{and} \quad V_{34}(\xi) = \frac{U_{34}(\xi) - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

We define the nonlinearity $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\tilde{g}(u) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} g((\alpha_2 - \alpha_1)u + \alpha_1).$$

This function satisfies hypotheses (2.2) and (2.3). Furthermore, we have

$$\begin{cases} (V_{12})'' + c_{12}(V_{12})' = \tilde{g}(V_{12}) & \text{on } \mathbb{R}, \\ V_{12}(-\infty) = 1, \quad V_{12}(+\infty) = 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} (V_{34})'' + c_{34}(V_{34})' = \tilde{g}(V_{34}) & \text{on } \mathbb{R}, \\ V_{34}(-\infty) = 1, \quad V_{34}(+\infty) = 0. \end{cases}$$

According to Theorem 2.1.1, we have necessarily $c_{12} = c_{34}$. □

Now, we demonstrate Theorem 2.1.7.

Démonstration. We assume that $\underline{c} > \bar{c}$. The function g satisfies hypothesis (2.11). Consequently, there exist a planar front \underline{U} connecting 0 and θ^* with speed \underline{c} and a planar front \bar{U} connecting θ^* with 1 with speed \bar{c} . Let $(T_n)_n$ be a sequence of positive real numbers such that $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, and let us suppose bwoc that for any $n \in \mathbb{N}$, there exists a pulsating front (U_n, c_n) solving

$$\begin{cases} (U_n)_t - c_n(U_n)\xi - (U_n)_{\xi\xi} - f^{T_n}(t, U_n) = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_n(\cdot, -\infty) = 1, \quad U_n(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U_n(t + T_n, \xi) = U_n(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.88)$$

Without loss of generality, we can assume that $U_n(0, 0) = \theta^*$. Under these conditions we saw in Section 2.3 that the couple (c_n, U_n) is unique and that

$$(U_n)_\xi < 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^2. \quad (2.89)$$

The same reasoning as in Subsection 2.5.2 implies that the sequence $(c_n)_n$ is bounded. So there exists $c^* \in \mathbb{R}$ such that up to extraction of a subsequence $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c^*$. We still note $(c_n)_n$ the convergent subsequence. Owing to (2.88) and (2.89), there exists a unique positive real number ξ_n such that $U_n(0, \xi_n) = \frac{\underline{c} + \theta^*}{2}$. We thus define the function $V_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ by $V_n(t, \xi) = U_n(t, \xi + \xi_n)$. As in Section 2.5, it follows that the sequence $(V_n)_n$ converges up to extraction of a subsequence in $W_{loc}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$ to a function $V^*(t, \xi) = V^*(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$ satisfying

$$\begin{cases} (V^*)'' + c^*(V^*)' + g(V^*) = 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ V^*(0) = \frac{\underline{c} + \theta^*}{2}. \end{cases}$$

Furthermore, V^* is nonincreasing. Necessarily, $V^*(-\infty) \in \{\theta^*, \bar{\theta}, 1\}$ and $V^*(+\infty) \in \{0, \underline{\theta}\}$. Yet, the planar front \underline{U} satisfies $\underline{U}(-\infty) = \theta^*$ and $\underline{U}(+\infty) = 0$. We can apply Proposition 2.7.1 with $(c_{34}, U_{34}) = (c^*, V^*)$ and $(c_{12}, U_{12}) = (\underline{c}, \underline{U})$, and it follows that

$$c^* \geq \underline{c}. \quad (2.90)$$

In the same way, there exists a unique positive real number $\tilde{\xi}_n$ such that $U_n(0, -\tilde{\xi}_n) = \frac{\theta^* + \bar{\theta}}{2}$. We thus define the function $W_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ by $W_n(t, \xi) = U_n(t, \xi - \tilde{\xi}_n)$. The sequence $(W_n)_n$ converges up to extraction of a subsequence in $W_{\text{loc}}^{1,2;p}(\mathbb{R}^2)$ weakly and in $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ for any $1 < p < +\infty$ and for any $\alpha \in (0, 1)$ to a function $W^*(t, \xi) = W^*(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$ satisfying

$$\begin{cases} (W^*)'' + c^*(W^*)' + g(W^*) = 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ W^*(0) = \frac{\theta^* + \bar{\theta}}{2}. \end{cases}$$

Furthermore, W^* is nonincreasing. Necessarily, $W^*(-\infty) \in \{\bar{\theta}, 1\}$ and $W^*(+\infty) \in \{0, \underline{\theta}, \theta^*\}$. Yet, the planar front \bar{U} satisfies $\bar{U}(-\infty) = 1$ and $\bar{U}(+\infty) = \theta^*$. We apply Proposition 2.7.1 with $(c_{34}, U_{34}) = (\bar{c}, \bar{U})$ and $(c_{12}, U_{12}) = (c^*, W^*)$, and it follows that

$$c^* \leq \bar{c}. \quad (2.91)$$

Finally, (2.90) and (2.91) imply that $\underline{c} \leq \bar{c}$. This is a contradiction because we assume here that $\underline{c} > \bar{c}$. \square

Chapitre 3

Etude numérique de solutions d'équations de réaction-diffusion dont la nonlinéarité est bistable en moyenne

3.1 Introduction

3.1.1 Cadre de l'étude

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement des solutions numériques d'une équation de réaction-diffusion du type

$$u_t - u_{xx} = f\left(\frac{t}{T}, u\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

où $T > 0$, et la nonlinéarité $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 1-périodique de classe \mathcal{C}^1 de la forme

$$f(t, u) = A m(t)u(1 - u) + B(1 - m(t))f_b(u),$$

où $A > 0$ et $B > 0$. La fonction $f_b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bistable homogène. En d'autres termes, il existe $\theta_b \in (0, 1)$ tel que

$$f_b(0) = f_b(\theta_b) = f_b(1) = 0, \quad f'_b(0) < 0, \quad f'_b(1) < 0, \quad f_b < 0 \text{ sur } (0, \theta_b), \quad f_b > 0 \text{ sur } (\theta_b, 1)$$

La fonction $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 1-périodique de classe \mathcal{C}^1 définie sur $[0, 1]$ par

$$m(t) = \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{t - a}{\varepsilon}\right) - \tanh\left(\frac{t - (1 - \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \right),$$

où $a \in (0, 1)$ et $\varepsilon > 0$ (voir figure 3.1). Numériquement, on prend ε très petit (de l'ordre de 10^{-2}) de sorte que l'on ait

$$m(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{sur } (0, a), \\ 1 & \text{sur } (a, 1). \end{cases}$$

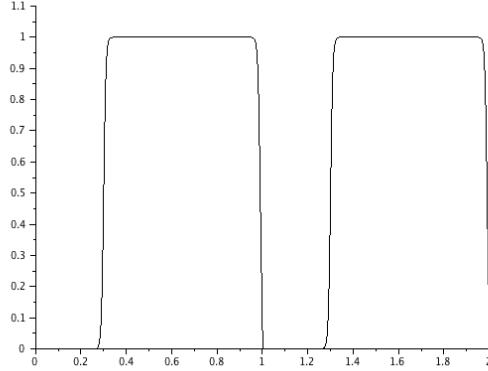


FIGURE 3.1 – Fonction $t \mapsto m(t)$ pour $a = 0.3$ et $\varepsilon = 0.01$ sur deux périodes

On note \bar{m} la moyenne de la fonction m sur une période

$$\bar{m} = \int_0^1 m(s)ds (\approx 1 - a).$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que la fonction f est bistable en moyenne, c'est-à-dire que

$$\lambda_{0,f} > 0 \text{ et } \lambda_{1,f} > 0, \quad (3.2)$$

où $\lambda_{0,f}$ et $\lambda_{1,f}$ sont respectivement les valeurs propres principales associées aux états d'équilibre 0 et 1 et à la nonlinéarité f .

Enfin, on note $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(u) = \int_0^1 f(s, u)ds = A\bar{m}u(1-u) + B(1-\bar{m})f_b(u),$$

et on considère l'équation

$$u_t - u_{xx} = g(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

D'après l'hypothèse (3.2), la fonction g est une fonction multistable au sens où elle vérifie

$$g(0) = g(1) = 0, \quad g'(0) < 0, \quad g'(1) < 0.$$

Dans toute la suite, on note $u_f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (resp. $u_g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$) la solution numérique de l'équation (3.1) (resp. (3.3)) assortie de la condition initiale $u_0 = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$ sur \mathbb{R} , où $\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$ représente la fonction indicatrice de l'intervalle $(-\infty, 0]$.

Dans la section 3.2 de ce chapitre, on va s'intéresser au cas où g est de type bistable. Dans la section 3.3, on va travailler sur des fonctions g de type tristable.

3.1.2 Méthodes numériques

On va résoudre numériquement les équations (3.1) et (3.3) avec scilab par une méthode de différences finies avec un schéma d'Euler explicite en temps et une discrétisation implicite du

laplacien. (Voir annexe A).

Etant donnée une fonction bistable f_b et un jeu de paramètres T , a , A , et B , on représente pour chaque figure de ce chapitre (sauf les figures 3.3 et 3.4) à t fixé :

Dans le cadre du haut :

- la fonction $u \mapsto Au(1 - u)$ en vert
- la fonction $u \mapsto Bf_b(u)$ en bleu
- la fonction $u \mapsto g(u)$ en rouge
- la fonction $u \mapsto f(t, u)$ en noir

Dans le cadre du bas :

- la solution numérique au temps t associée au second membre $Au(1 - u)$ en vert
- la solution numérique au temps t associée au second membre $Bf_b(u)$ en bleu
- la solution numérique u_g au temps t associée au second membre $g(u)$ en rouge
- la solution numérique u_f au temps t associée au second membre $f(t, u)$ en noir

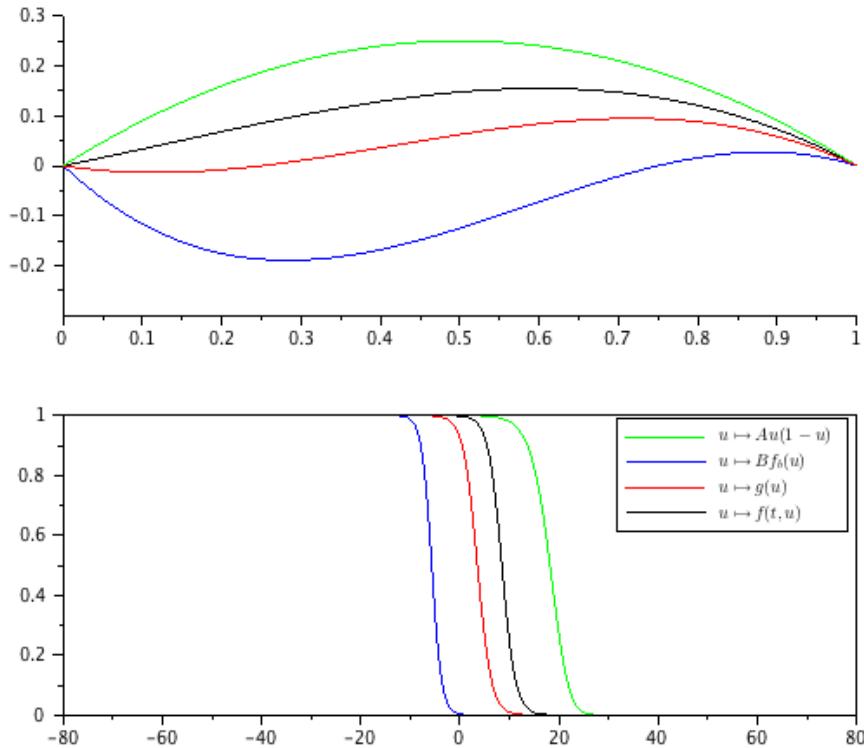


FIGURE 3.2 – Nonlinéarités et solutions approchées au temps $t = 10$ pour le jeu de paramètres $f_b(u) = u(1 - u)(u - 0.75)$, $a = 0.5$, $A = 1$, $B = 2$, $T = 1$. Dans le cadre du haut figure les nonlinéarités $u \mapsto Au(1 - u)$ en vert, $u \mapsto Bf_b(u)$ en bleu, $u \mapsto g(u)$ en rouge et $u \mapsto f(t, u)$ en noir. Dans le cadre du bas figure les solutions numériques au temps t associées aux nonlinéarités $Au(1 - u)$ en vert, $Bf_b(u)$ en bleu, $g(u)$ en rouge et $f(t, u)$ en noir.

Afin d'obtenir une valeur approchée de la vitesse des fronts, on définit

$$x_f(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, u_f(t, x) > 0.5\} \text{ et } x_g(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, u_g(t, x) > 0.5\}. \quad (3.4)$$

Lorsque la fonction u_f converge vers un front pulsatoire, noté (c_f, U_f) et que la fonction u_g converge vers un front plan, noté (c_g, U_g) quand $t \rightarrow +\infty$, l'abscisse $x_g(t)$ se déplace à une vitesse proche de c_g , tandis que la suite d'abscisses $(x_f(nT))_n$ se déplace à une vitesse proche de c_f pour t suffisamment grand. La figure 3.3 montre l'évolution de ces points et la façon d'obtenir une valeur approchée des vitesses à l'aide de droites de régression.

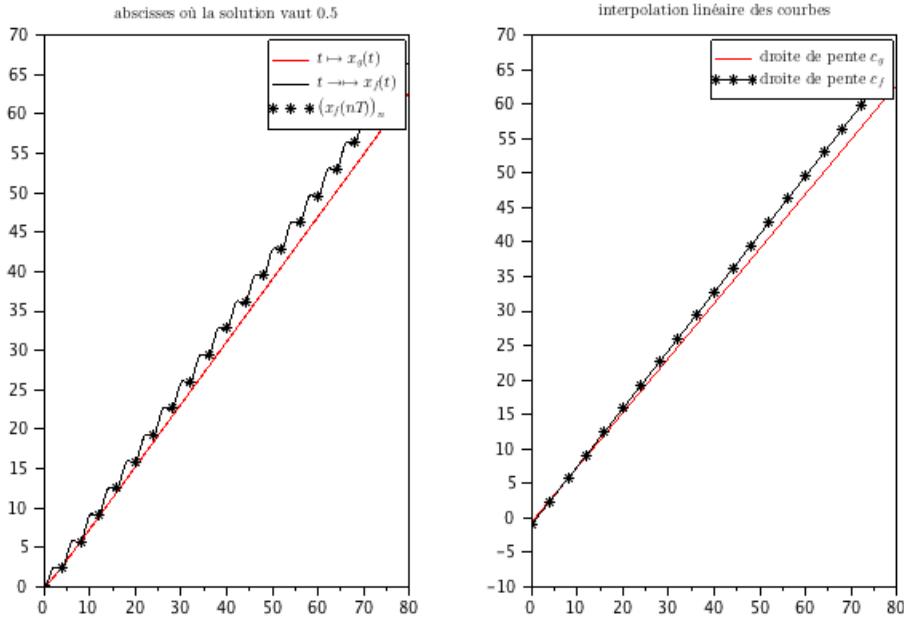


FIGURE 3.3 – Evolution des points x_f et x_g en fonction du temps et calcul approché des vitesses de fronts pour le jeu de paramètres $f_b(u) = u(1-u)(u-0.6)$, $a = 0.7$, $A = 2$, $B = 4$, $T = 4$. Dans le cadre de gauche figure les abscisses où les solutions numériques u_g et u_f valent 0.5 en fonction du temps, à savoir $t \mapsto x_g(t)$ en rouge, $t \mapsto x_f(t)$ en noir et $(x_f(nT))_n$ en étoiles noires. Dans le cadre de droite, on trace les droites de régressions linéaires associées à $t \mapsto x_g(t)$ en rouge et à $(x_f(nT))_n$ en étoiles noires. Les pentes de ces droites sont respectivement $c_g \approx 0.79$ et $c_f \approx 0.84$.

3.2 Cas où g est une fonction bistable

3.2.1 Présentation du problème

On va prendre dans cette section des fonctions bistables f_b du type

$$f_b(u) = u(1-u)(u-\theta),$$

où $\theta \in (0, 1)$. La fonction g se réécrit alors

$$g(u) = B(1-\bar{m})u(1-u)\left(u - \left(\theta - \frac{A\bar{m}}{B(1-\bar{m})}\right)\right).$$

Or, la fonction f est bistable en moyenne lorsque

$$0 < \theta - \frac{A\bar{m}}{B(1-\bar{m})} < 1.$$

Par conséquent, la fonction g est une nonlinéarité bistable homogène.

3.2.2 Cas de petites périodes

On a prouvé dans le chapitre 2 que lorsque g est de type bistable, pour des périodes T suffisamment petites, l'application de Poincaré associée à la nonlinéarité f admet un unique point fixe strictement compris entre 0 et 1, et que celui-ci est instable. Dès lors, d'après [1], il existe un unique front pulsatoire (c_f, U_f) solution de (3.1). De plus $c_f \rightarrow c_g$ et $U_f \rightarrow U_g$ quand $T \rightarrow 0$, où (c_g, U_g) est l'unique front plan associé à la nonlinéarité g . On retrouve bien ce phénomène numériquement.

3.2.3 Cas général

Pour des périodes T quelconques, il n'est pas prouvé qu'il existe de front pulsatoire solution de (3.1). Cependant on observe numériquement que pour tous les jeux de paramètres qui vont intervenir ici (notamment lorsque T n'est pas proche de 0), l'application de Poincaré associée à la nonlinéarité f a un unique point fixe strictement compris entre 0 et 1, et que celui-ci est instable. Il existerait donc un front pulsatoire (c_f, U_f) quelle que soit la période T . On précise que le calcul de l'application de Poincaré a été obtenu en résolvant l'équation différentielle associée à (3.1) via la fonction *edo* de scilab pour un jeu de conditions initiales maillant l'intervalle $[0, 1]$.

On étudie maintenant les valeurs numériques de c_f et de c_g pour différents jeux de paramètres. On commence par fixer $\theta = 0.75$, $A = 1$ et $B = 10$. On va prendre successivement $a = 0.15$, $a = 0.7$ puis $a = 0.8$ pour $T = 1$, $T = 5$, puis pour $T = 8$. On résume les valeurs des vitesses dans le tableau suivant.

	$a = 0.15$	$a = 0.7$	$a = 0.8$
$T = 1$	$c_g = 0.492$ $c_f = 0.495$	$c_g = -0.783$ $c_f = -0.767$	$c_g = -0.902$ $c_f = -0.898$
$T = 5$	$c_g = 0.492$ $c_f = 0.542$	$c_g = -0.783$ $c_f = -0.703$	$c_g = -0.902$ $c_f = -0.877$
$T = 8$	$c_g = 0.492$ $c_f = 0.722$	$c_g = -0.783$ $c_f = -0.624$	$c_g = -0.902$ $c_f = -0.824$

On change maintenant la valeur de θ en fixant le jeu de paramètres $\theta = 0.25$, $A = 1$, $B = 10$. On va prendre $a = 0.3$, $a = 0.4$, puis $a = 0.7$, pour $T = 1$, $T = 5$, puis $T = 8$. Les valeurs des vitesses obtenues sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	$a = 0.3$	$a = 0.4$	$a = 0.7$
$T = 1$	$c_g = 1.269$ $c_f = 1.271$	$c_g = 1.167$ $c_f = 1.169$	$c_g = 1.080$ $c_f = 1.100$
$T = 5$	$c_g = 1.269$ $c_f = 1.324$	$c_g = 1.167$ $c_f = 1.214$	$c_g = 1.080$ $c_f = 1.106$
$T = 8$	$c_g = 1.269$ $c_f = 1.388$	$c_g = 1.167$ $c_f = 1.293$	$c_g = 1.080$ $c_f = 1.121$

On observe que la fonction $T \mapsto c_f$ est croissante, et que l'on a toujours $c_f > c_g$. Enfin, on voit apparaître le phénomène de convergence où $c_f \rightarrow c_g$ lorsque $T \rightarrow 0$.

On trouve des résultats théoriques du même type concernant le régime d'homogénéisation et les propriétés des vitesses de propagation dans [14] pour le cas bistable, dans [15, 28] pour le cas bistable ou combustion, et dans [20, 39] pour le cas KPP.

3.3 Cas où g est une nonlinéarité tristable

3.3.1 Présentation du problème

On suppose ici que g est une fonction tristable, c'est-à-dire qu'il existe $0 < \underline{\theta} < \theta^* < \bar{\theta} < 1$ vérifiant

$$\begin{aligned} g(0) = g(\underline{\theta}) = g(\theta^*) = g(\bar{\theta}) = g(1) = 0, \\ g'(0) < 0, \quad g'(\underline{\theta}) > 0, \quad g'(\theta^*) < 0, \quad g'(\bar{\theta}) > 0, \quad g'(1) < 0, \\ g < 0, \text{ sur } (0, \underline{\theta}) \cup (\theta^*, \bar{\theta}), \quad g > 0, \text{ sur } (\underline{\theta}, \theta^*) \cup (\bar{\theta}, 1). \end{aligned}$$

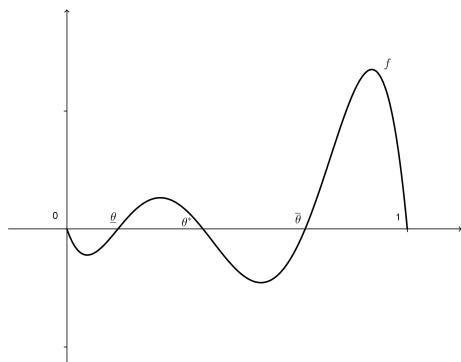


FIGURE 3.4 – Fonction tristable g

La nonlinéarité g est bistable entre 0 et θ^* , ainsi qu'entre θ^* et 1. Il existe donc pour l'équation homogène (3.3) un unique front plan (c_g, U_g) qui connecte 0 et θ^* et un unique front plan (\bar{c}_g, \bar{U}_g) qui connecte θ^* et 1. De plus, d'après [22, 27], il existe un unique front plan (c_g, U_g) connectant 0 et 1 si et seulement si $c_g < \bar{c}_g$. Dans le cas où $c_g \geq \bar{c}_g$, la solution de (3.3) converge vers une terrasse de fronts. Pour plus de précisions sur cette notion, on peut se reporter à [18, 22].

Il faut noter que le seul résultat théorique concernant l'existence (ou la non existence) d'un front pulsatoire solution de l'équation (3.1) dans le cas où g est de type tristable est que dans la situation où $c_g > \bar{c}_g$, si T est proche de 0, alors il n'existe pas de front pulsatoire solution de (3.1) (voir chapitre 2).

3.3.2 Cas où u_g se comporte comme un front

On se place ici dans un cadre où la fonction g est tristable avec $c_g < \bar{c}_g$ (voir notations de la section 3.3.1). Dès lors, la solution numérique de l'équation (3.3) tend vers un front plan (c_g, U_g)

connectant 0 et 1. On va montrer numériquement que la solution de (3.1) se comporte elle aussi comme un front.

On considère la fonction bistable

$$f_b(u) = u(1-u)(u-0.767)(u^2-0.69u+0.122)$$

On commence par calculer les valeurs propres principales associées à 0, 1 et à la nonlinéarité f pour déterminer des jeux de paramètres où la fonction f est bien bistable en moyenne. On a

$$\lambda_{0,f} = (\varepsilon + a)(A + 0.094B) - A, \text{ et } \lambda_{1,f} = (\varepsilon + a)(A + 0.1B) + A.$$

On a toujours $\lambda_{1,f} > 0$. Par contre, si on veut avoir $\lambda_{0,f} > 0$, il faut prendre B beaucoup plus grand que A . Dans la suite, on prendra $a = 0.4$ ou $a = 0.7$, $A = 1$ et $B = 182$. Pour ces valeurs des constantes a , A et B , la fonction moyennée g est une fonction tristable, et, avec les notations de la section 3.3.1, on a $\int_0^{\theta^*} g(u)du < 0$ et $\int_{\theta^*}^1 g(u)du > 0$. Par conséquent, il vient que $\underline{c}_g < 0$ et $\overline{c}_g > 0$, et ainsi $\underline{c}_g < \overline{c}_g$.

On observe numériquement que la solution u_f se comporte comme un front. De plus lorsque $T \rightarrow 0$, on observe à nouveau que $u_f \rightarrow u_g \approx U_g$. On donne une illustration de ce phénomène dans la figure 3.5.

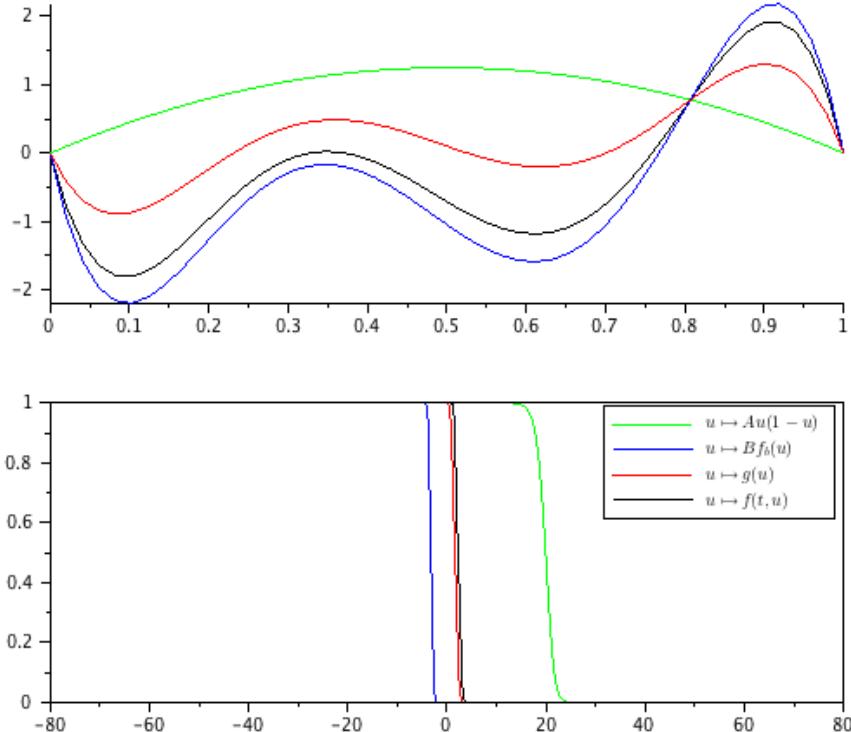


FIGURE 3.5 – Illustration numérique du fait que u_g et u_f se comportent comme des fronts et que $u_f \rightarrow u_g$ quand $T \rightarrow 0$ lorsque g est de type tristable avec $\underline{c}_g < \overline{c}_g$. Le graphique est obtenu au temps $t = 15$ pour le jeu de paramètres $f_b(u) = u(1-u)(u-0.767)(u^2-0.69u+0.122)$, $a = 0.4$, $A = 1$, $B = 182$, $T = 0.1$

On étudie maintenant les valeurs numériques des vitesses c_g et c_f auxquelles se propagent les abscisses x_g et x_f définies dans (3.4).

	$a = 0.4$	$a = 0.7$
$T = 0.2$	$c_g = 0.149$ $c_f = 0.169$	$c_g = -0.190$ $c_f = -0.190$
$T = 1$	$c_g = 0.149$ $c_f = 0.183$	$c_g = -0.190$ $c_f = -0.185$
$T = 5$	$c_g = 0.149$ $c_f = 0.330$	$c_g = -0.190$ $c_f = -0.155$

On retrouve les observations faites dans la section 3.2.3, à savoir que la fonction $T \mapsto c_f$ est croissante, et que l'on a toujours $c_f > c_g$. Enfin, on a de nouveau la convergence $c_f \rightarrow c_g$ lorsque $T \rightarrow 0$.

3.3.3 Cas où u_g se comporte comme une terrasse de fronts

On se place maintenant dans un cadre où la fonction g est tristable avec $\underline{c}_g > \bar{c}_g$ (voir notations de la section 3.3.1). Dès lors, la solution numérique de l'équation (3.3) est une terrasse de fronts. Contrairement aux situations précédentes où u_f et u_g étaient toujours de même nature, on va montrer numériquement ici que l'on peut trouver des situations où la fonction u_f se comporte comme une terrasse de fronts, et d'autres où u_f se comporte comme un front.

On considère la fonction bistable

$$f_b(u) = u(1-u)(u-0.78)(u^2-0.45u+0.055)$$

Les valeurs propres principales associées aux états 0 et 1 et à la nonlinéarité f sont données dans ce cas par

$$\lambda_{0,f} = (\varepsilon + a)(A + 0.0429B) - A, \quad \text{et} \quad \lambda_{1,f} = (\varepsilon + a)(A + 0.1331B) + A.$$

On est dans une situation analogue à celle de la section 3.3.2. Si on fixe B bien plus grand que A , on aura $\lambda_{0,f} > 0$ et $\lambda_{1,f} > 0$, et la fonction f sera bien bistable en moyenne. On prend $a = 0.5$, $A = 5$ et $B = 580$.

La fonction moyennée g est une fonction tristable. Plus précisément, on a

$$g(u) = 290u(1-u)(u-0.749)(u-0.35)(u-0.131).$$

On remarque qu'alors $\int_0^{0.35} g(u)du > 0$ et $\int_{0.35}^1 g(u)du < 0$. Par conséquent, avec les notations de la section 3.3.1, on a $c_g > 0$ et $\bar{c}_g < 0$, et ainsi $\underline{c}_g > \bar{c}_g$. Il n'existe donc pas de front plan connectant 0 et 1 solution de (3.3) et la fonction u_g converge quand $t \rightarrow +\infty$ vers une terrasse de fronts. On observe bien ce phénomène numériquement. La propriété selon laquelle la fonction u_f converge vers u_g quand $T \rightarrow 0$ semble de nouveau se vérifier. On retrouve en cela le résultat théorique selon lequel il n'existe pas de front dans cette configuration lorsque T est proche de 0. On donne une illustration de ce phénomène dans la figure 3.6.

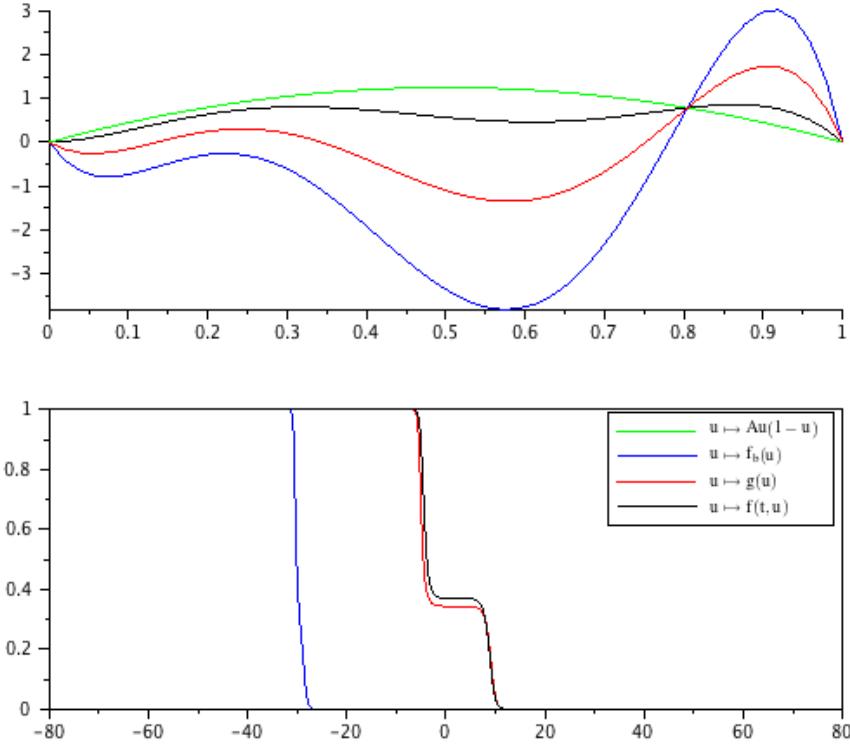


FIGURE 3.6 – Illustration numérique du fait que u_g et u_f se comportent comme des terrasses de fronts et que $u_f \rightarrow u_g$ quand $T \rightarrow 0$ lorsque g est de type tristable avec $\underline{c}_g > \bar{c}_g$. Le graphique est obtenu au temps $t = 15$ pour le jeu de paramètres $f_b(u) = u(1-u)(u-0.78)(u^2-0.45u+0.055)$, $a = 0.5$, $A = 5$, $B = 580$, $T = 0.1$

On définit maintenant avec les notations de la section 3.3.1

$$\begin{cases} \underline{x}_f(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, u_f(t, x) > \frac{\theta^*}{2}\}, \\ \underline{x}_g(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, u_g(t, x) > \frac{\theta^*}{2}\}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{x}_f(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, u_f(t, x) > \frac{\theta^*+1}{2}\}, \\ \bar{x}_g(t) = \sup\{x \in \mathbb{R}, u_g(t, x) > \frac{\theta^*+1}{2}\}. \end{cases}$$

L'abscisse \underline{x}_g se déplace à la vitesse \underline{c}_g tandis que \bar{x}_g se déplace à la vitesse \bar{c}_g . On va illustrer numériquement qu'il en est de même des abscisses \underline{x}_f et \bar{x}_f . On note \underline{c}_f (resp. \bar{c}_f) la vitesse de l'abscisse $(\underline{x}_f(nT))_n$ (resp. $(\bar{x}_f(nT))_n$).

$T = 0.4$	$T = 0.1$	$T = 0.05$
$\bar{c}_g = -0.126$	$\bar{c}_g = -0.126$	$\bar{c}_g = -0.126$
$\underline{c}_f = -0.053$	$\underline{c}_f = -0.1094$	$\underline{c}_f = -0.121$
$\underline{c}_g = 0.460$	$\underline{c}_g = 0.460$	$\underline{c}_g = 0.460$
$\underline{c}_f = 0.449$	$\underline{c}_f = 0.455$	$\underline{c}_f = 0.457$

On observe que $\bar{c}_f \rightarrow \bar{c}_g$ et que $\underline{c}_f \rightarrow \underline{c}_g$ lorsque $T \rightarrow 0$. Par contre, on a cette fois-ci que la fonction $T \mapsto \bar{c}_f$ est croissante et $\bar{c}_f > \bar{c}_g$ alors que la fonction $T \mapsto \underline{c}_f$ est décroissante et $\underline{c}_f < \underline{c}_g$. Vérifions si cette observation se confirme pour un autre jeu de paramètres. On prend

$a = 0.7$, $A = 5$ et $B = 580$. On a alors

$$g(u) = 174u(1-u)(u-0.688)(u-0.472)(u-0.07).$$

On remarque qu'on a toujours $c_g > \bar{c}_g$ (et cette fois, les deux vitesses sont strictement positives). Intéressons-nous aux vitesses des abscisses x_f et \bar{x}_f .

$T = 0.4$	$T = 0.1$	$T = 0.05$
$\bar{c}_g = 1.074$	$\bar{c}_g = 1.074$	$\bar{c}_g = 1.074$
$\underline{c}_f = 1.106$	$\underline{c}_f = 1.096$	$\underline{c}_f = 1.075$
$c_g = 1.727$	$c_g = 1.727$	$c_g = 1.727$
$c_f = 1.715$	$c_f = 1.721$	$c_f = 1.726$

Les observations faites ci-dessus se vérifient à nouveau.

On reste sur le jeu de paramètres précédent. Sachant que lorsque la période T augmente, la vitesse \bar{c}_f augmente tandis que la vitesse \underline{c}_f diminue, on peut s'imaginer que lorsque \bar{c}_g et c_g ont des valeurs assez proches, pour T assez grand, il doit être possible "d'effacer" la terrasse de fronts en obtenant $\bar{c}_f \approx c_g$. Ainsi la solution numérique u_f se comporterait comme un front. C'est le cas pour $T = 8$ comme présenté dans la figure 3.7.

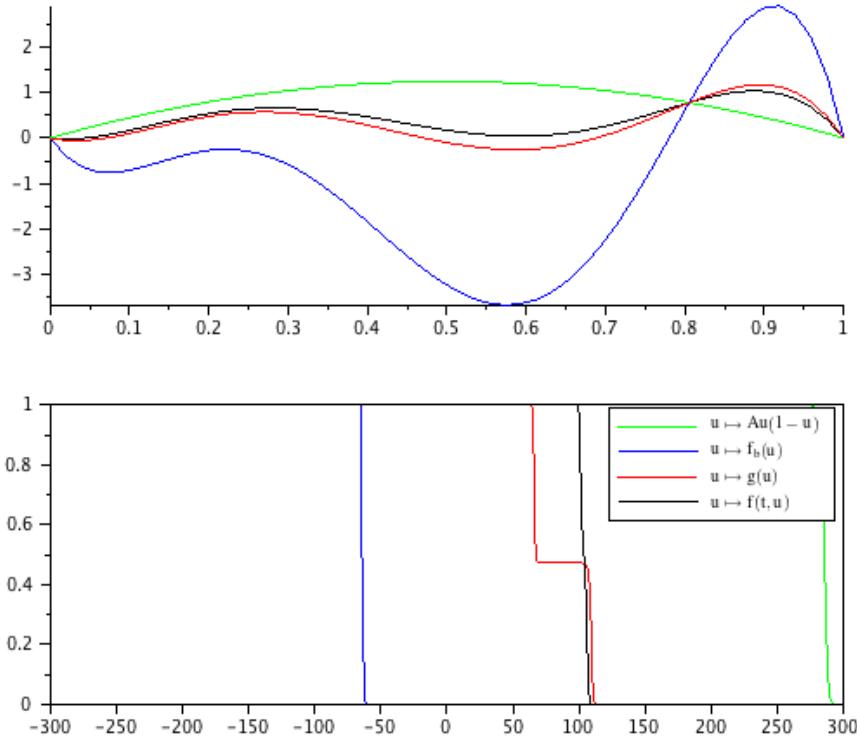


FIGURE 3.7 – Illustration numérique du fait que u_f se comporte comme un front alors que u_g se comporte comme une terrasse de fronts lorsque g est de type tristable avec $c_g > \bar{c}_g$. Le graphique est obtenu au temps $t = 60$ pour le jeu de paramètres $f_b(u) = u(1-u)(u-0.78)(u^2-0.45u+0.055)$, $a = 0.7$, $A = 5$, $B = 580$, $T = 8$

Les valeurs numériques des vitesses \bar{c}_f et c_f sont présentées dans le tableau ci-dessous. On trouve bien qu'elles sont sensiblement les mêmes. Numériquement, il semble donc qu'il y ait existence d'un front pulsatoire alors qu'il n'y a pas existence de front homogène pour ce problème.

$\bar{c}_g = 1.074$
$\bar{c}_f = 1.659$
$\underline{c}_g = 1.727$
$\underline{c}_f = 1.663$

3.4 Bilan

Résumons notre étude numérique.

On observe que lorsqu'il existe un front plan (c_g, U_g) solution de (3.3), il semble toujours exister un front pulsatoire (c_f, U_f) solution de (3.1). De plus, on a $c_f > c_g$ et la fonction $T \mapsto c_f$ est croissante, où T représente la période en temps de la nonlinéarité intervenant dans (3.1). Enfin, lorsque $T \rightarrow 0$, on a $U_f \rightarrow U_g$ et $c_f \rightarrow c_g$.

Il semble également que lorsqu'il n'existe pas de front plan solution de (3.3), on peut trouver des configurations où il existe un front pulsatoire solution de (3.1), et d'autres où une telle solution n'existe pas. Cependant, quelle que soit la situation, on a encore $u_f \rightarrow u_g$ quand $T \rightarrow 0$, où u_f (resp. u_g) représente la solution numérique de l'équation (3.1) (resp. (3.3)) assortie de la condition initiale $u_0 = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$, où $\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}$ représente la fonction indicatrice de l'intervalle $(-\infty, 0]$.

Chapitre 4

Fisher-KPP equations and applications to a model in medical sciences

4.1 Framework and main results

We investigate equations of the form

$$u_t - u_{xx} = f^T(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

where $f^T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is of the type

$$f^T(t, u) = g(u) - m^T(t)u, \quad (4.2)$$

and T is a positive parameter. We suppose that g is a KPP (for Kolmogorov, Petrovsky and Piskunov) function of class $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ with $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. More precisely, we have

$$g > 0 \text{ on } (0, 1), \quad g(0) = g(1) = 0, \quad g'(0) > 0, \quad g'(1) < 0, \quad (4.3)$$

and

$$u \mapsto \frac{g(u)}{u} \text{ decreasing on } (0, +\infty). \quad (4.4)$$

The previous hypotheses imply in particular that

$$g(u) \leq g'(0)u, \quad \forall u \in [0, +\infty), \quad (4.5)$$

and that

$$g < 0 \text{ on } (1, +\infty). \quad (4.6)$$

In Sections 4.2 and 4.4, the function m^T is T -periodic, nonnegative and of class $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. In this case, the function f^T is a T -periodic in time function of class $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ such that $f^T(\cdot, 0) = 0$ on \mathbb{R} . Furthermore, according to (4.6) and the nonnegativity of m^T , we have

$$f^T(t, u) < 0, \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty). \quad (4.7)$$

In Section 4.3, the function m^T is asymptotically periodic in time. We give more details about this notion later in this introduction.

4.1.1 Biological interpretation

Equations of the type

$$u_t - u_{xx} = g(u) - m^T(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

are proposed to model the spatial evolution over time of a cancerous tumor in the presence of chemotherapy. The quantity $u(t, x)$ represents the density of cancer cells in the tumor at the position x and at the time t . We begin by considering, for $T > 1$, a particular case of periodic function $m^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ of class $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ for which there exists a nontrivial function $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ with $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ such that

$$\begin{cases} m^T = \varphi \text{ on } [0, 1], \\ m^T = 0 \text{ on } [1, T]. \end{cases} \quad (4.9)$$

In the absence of treatment, cancer cells reproduce and spread in space. This reproduction is modeled by the reaction term of KPP type $g(u)$, which takes into account the fact that the resources of the environment of the tumor are not infinite and so, that there is a maximal size beyond which the tumor cannot grow anymore. To treat the patient, cycles of chemotherapy are given. Every cycle lasts a lapse of time T and is composed of two subcycles. The duration of the first one is equal to 1. During this time, the drug acts on the tumor. At every moment of the first subcycle, the death rate of the cancer cells due to the drug is equal to $\varphi(t)$. In this case, the total reaction term is $g(u) - \varphi(t)u$. There is a competition between the reproduction term and the death term. The chemotherapy has a toxic effect on the body because it destroys white blood cells. It is thus essential to take a break in the administration of the treatment. This break is the second subcycle of the cycle of chemotherapy. It lasts during a time equal to $T - 1$. In this case, the reaction term is just $g(u)$, and thus, the tumor starts to grow again. To summarize, the term $m^T(t)$ defined in (4.9) represents the concentration of drug in the body of the patient at time t , and the integral $\int_0^T m^T(s)ds = \int_0^1 \varphi(t)dt$ represents the total quantity of drug in the patient during a cycle of chemotherapy. Finally, we impose for this type of functions m^T that

$$g'(0) - \int_0^1 \varphi(t)dt < 0. \quad (4.10)$$

This inequality is not really restricting. Indeed, we shall see after that this hypothesis is in fact a condition so that the patient is cured in the case or there is no rest period in the cycles of chemotherapy (that is $T = 1$).

We now refine the previous modelling. In fact, the concentration of drug in the patient's body is not a datum. We only know the concentration of drug injected to the patient. We denote $D^T(t)$ this concentration at time t , and we assume that the function $D^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ is T -periodic and satisfies

$$D^T(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \in [0, 1], \\ 0, & \forall t \in (1, T). \end{cases} \quad (4.11)$$

The concentration of drug m is then the Lipschitz-continuous and piecewise \mathcal{C}^1 solution $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ of a Cauchy problem of the type

$$\begin{cases} m'(t) = D^T(t) - \frac{m(t)}{\tau}, & \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ m(0) = m_0 \geq 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

The real number $\tau > 0$ is called clearance. It characterizes the ability of the patient's body to eliminate the drug. It is also possible to take into account that the patient does not necessarily take the treatment in an optimal way. It may happen to him/her, for example, to forget his/her medicine, or being forced to move a chemotherapy session if it is programmed on a holiday. So, we add to the nonlinearity a perturbative term of the type $\varepsilon p(t, u)$, where $\varepsilon \geq 0$ and $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. It corresponds to study equations of the type

$$u_t - u_{xx} = g(u) - m(t)u + \varepsilon p(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R},$$

where m solves (4.12).

4.1.2 Mathematical framework

The mathematical study of reaction-diffusion equations began in the 1930's. Fisher [23] and Kolmogorov, Petrovsky and Piskunov [32] were interested in wave propagation in population genetics modeled by the homogeneous equation

$$u_t - u_{xx} = f(u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

In the 1970's, their results were generalized by Aronson and Weinberger [2] and Fife and McLeod [22]. In particular, if f is a KPP nonlinearity (that is, f satisfies (4.3) and (4.5)), there exists a unique (up to translation) planar fronts U_c of speed c , for any speed $c \geq c^* := 2\sqrt{f'(0)}$, that is, for any $c \geq c^*$, there exists a function u_c satisfying (4.13) and which can be written $u_c(t, x) = U_c(x - ct)$, with $0 < U_c < 1$, $U_c(-\infty) = 1$ and $U_c(+\infty) = 0$. Furthermore, if $c < c^*$, there is no such front connecting 0 and 1. Another property for this type of nonlinearities is that if we start from a nonnegative compactly supported initial datum u_0 such that $u_0 \not\equiv 0$, then the solution u of (4.13) satisfies $u(t, x) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow +\infty$. Aronson and Weinberger name this phenomenon the "hair trigger effect". Moreover the set where $u(t, x)$ is close to 1 expands at the speed c^* .

Freidlin and Gärtner in [25] were the first to study heterogeneous equations. More precisely, they generalized spreading properties for KPP type equations with periodic in space coefficients. Since this work, numerous papers have been devoted to the study of heterogeneous equations with KPP or other reaction terms. We can cite e.g. [4, 7, 8, 9, 10, 14, 21, 30, 35, 49, 50, 51] in the case of periodic in space environment, [24, 34, 35, 45, 46] in the case of periodic in time environment and [37, 38, 41] in the case of periodic in time and in space environment. The works of Nadin [37, 38] and Liang and Zhao [35] are the closest of our paper. We will compare later the contributions of our work with these references. We now give the main results of the paper.

When the nonlinearity is not homogeneous, there are no planar front solutions of (4.8) anymore. For equations with coefficients depending periodically on the space variable, Shigesada, Kawasaki and Teramoto [48] defined in 1986 a notion more general than the planar fronts, namely the pulsating fronts. This notion can be extended for time dependent periodic equations as follows.

Definition 4.1.1. *For equation (4.1), assume that f^T is T -periodic and that (4.1) has a T -periodic solution $\theta : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $t \mapsto \theta(t)$. A pulsating front connecting 0 and $\theta(t)$ for equation (4.1) is a solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that there exists a real number c and a function*

$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ verifying

$$\begin{cases} u(t, x) = U(t, x - ct), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = \theta, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U(t + T, x) = U(t, x), & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

So, a pulsating front connecting 0 and θ for equation (4.1) is a couple $(c, U(t, \xi))$ solving the problem

$$\begin{cases} U_t - cU_\xi - U_{\xi\xi} - f^T(t, U) = 0, & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U(\cdot, -\infty) = \theta, \quad U(\cdot, +\infty) = 0, & \text{uniformly on } \mathbb{R}, \\ U(t + T, \xi) = U(t, \xi), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

In this definition, by standard parabolic estimates, the limiting state $\theta = U(\cdot, -\infty)$ solves the system

$$\begin{cases} y' = f^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T), \end{cases} \quad (4.14)$$

whose solutions are called equilibrium states of the equation (4.1).

If $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a solution of (4.14), let us now define λ_{θ, f^T} and $\Phi_{\theta, f^T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as the unique real number and the unique function (up to multiplication by a constant) which satisfy

$$\begin{cases} (\Phi_{\theta, f^T})' = (f_u^T(t, \theta) + \lambda_{\theta, f^T})\Phi_{\theta, f^T} \text{ on } \mathbb{R}, \\ \Phi_{\theta, f^T} > 0 \text{ on } \mathbb{R}, \\ \Phi_{\theta, f^T} \text{ is } T - \text{periodic.} \end{cases} \quad (4.15)$$

These quantities are called respectively principal eigenvalue and principal eigenfunction associated with f^T and the equilibrium state θ . Furthermore, if we divide the previous equation by Φ_{θ, f^T} , and if we integrate over $(0, T)$, we obtain an explicit formulation of the principal eigenvalue, namely

$$\lambda_{\theta, f^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(s, \theta(s))ds.$$

We now recall the definition of the Poincaré map P^T associated with f^T . For any $\alpha \geq 0$, let $y_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ be the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' = f^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (4.16)$$

Definition 4.1.2. *The Poincaré map associated with f^T is the function $P^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ defined by*

$$P^T(\alpha) = y_\alpha(T).$$

We conclude, with the fact that each nonnegative solution of (4.14) is associated with a fixed point of P^T , and conversely. Furthermore, if $\alpha^T \geq 0$ is a fixed point of P_T we have the following equality

$$(P^T)'(\alpha^T) = e^{-T\lambda_{y_{\alpha^T}, f^T}}. \quad (4.17)$$

We can find these results concerning the notions of principal eigenvalue and Poincaré map in [13], [29] and [36].

4.1.3 Nonlinearities periodic in time

Let $T > 0$. In Section 4.2, we study (4.1) and (4.2) with functions m^T which are T -periodic in time. For these functions we assume there exists $T^* > 0$ such that

$$\lambda_{0,f^T} \begin{cases} > 0 & \text{if } T < T^*, \\ < 0 & \text{if } T > T^*, \\ = 0 & \text{if } T = T^*. \end{cases} \quad (4.18)$$

This is indeed the case if m^T is of the type (4.9) because

$$\lambda_{0,f^T} = -g'(0) + \frac{1}{T} \int_0^T m^T(s) ds = -g'(0) + \frac{1}{T} \int_0^1 \varphi(s) ds.$$

Furthermore, for this type of functions, hypothesis (4.10) implies that $\lambda_{0,f^{T=1}} > 0$. Hence, in this case $T^* > 1$. The existence and uniqueness of positive solutions of (4.14) is summarized in the following result.

Proposition 4.1.1. *We consider the real number T^* defined in (4.18).*

- (I) *If $T \leq T^*$, there is no positive solution of (4.14).*
- (II) *If $T > T^*$, there is a unique positive solution w^T of (4.14). Furthermore,*

(i) *For any $t \in \mathbb{R}$ we have $w^T(t) \in (0, 1]$, and*

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_u^T(s, w^T(s)) ds \leq 0.$$

(ii) *If $T \mapsto m^T$ is continuous in $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, then the function $T \in (T^*, +\infty) \mapsto w^T(0)$ is continuous and, if m^T is of type (4.9) with assumption (4.10), it is increasing.*

(iii) *If $T \mapsto m^T$ is continuous in $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, then the function w^T converges uniformly to 0 on \mathbb{R} as $T \rightarrow (T^*)^+$.*

(iv) *If m^T is of type (4.9) with assumption (4.10), then w^T converges on average to 1 as T tends to $+\infty$:*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w^T(t) dt = 1.$$

The same result of existence and uniqueness (result of the type (II)) was proved for KPP nonlinearities depending periodically of space by Berestycki, Hamel and Roques in [9] and for KPP nonlinearities depending periodically of space and time by Nadin in [38]. We give here a proof using the Poincaré map associated with f^T . The last two points of the proposition are quite intuitive. Indeed, the limit as $T \rightarrow (T^*)^+$ is explained by the fact that for $T \leq T^*$, the only nonnegative equilibrium state is zero. The limit as $T \rightarrow +\infty$ is explained by the fact that in this case, the nonlinearity f^T is "almost" the KPP function g since the function m^T has an average close to 0 when T is large.

Let us now summarize a result in [38], which deals with the evolution of $u(t, x)$ as $t \rightarrow +\infty$.

Proposition 4.1.2. *[38] Let $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded and continuous function on \mathbb{R} such that $u_0 \geq 0$ and $u_0 \not\equiv 0$. Under assumption (4.18), we consider the function $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.19)$$

If $T < T^*$, then there exists $M > 0$ depending only on u_0 and Φ_{0,f^T} such that

$$0 \leq u(t, x) \leq M\Phi_{0,f^T}(t)e^{-\lambda_{0,f^T}t}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

If $T = T^*$, then

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

If $T > T^*$, then for every compact set $K \subset \mathbb{R}$, we have

$$\sup_{x \in K} |u(t, x) - w^T(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

A similar result was proved for KPP nonlinearities depending periodically of space by Berestycki, Hamel and Roques in [9].

In the biological context with m^T satisfying (4.9), the treatment is effective (in the sense that $u(t, x) \rightarrow 0$ uniformly on \mathbb{R} as $t \rightarrow +\infty$) if and only if the duration of cycles of chemotherapy is equal or less than T^* . In particular, since hypothesis (4.10) implies that $T^* > 1$, the treatment is effective if there is no rest period between two injections of drug, that is as $T = 1$. The result is interesting because it implies that $T^* - 1$ is the longest rest period for which the patient recovers. Inequality (4.20) refines the criterion of cure of the patient because according to the fact that the function $T \mapsto \lambda_{0,f^T}$ is decreasing and positive on $(0, T^*)$, the convergence rate of the density $u(t, x)$ to 0 as $t \rightarrow +\infty$ is all the faster as T is small. In other words, in the case of effective treatment, shorter the period between two injections, more quickly the patient will be cured. If the treatment is not effective, the equilibrium state w^T invades the whole space as $t \rightarrow +\infty$. In particular, the tumor can not grow indefinitely. Finally, Proposition 4.1.2 also allows to clarify the result (ii) of Proposition 4.1.1. The fact that $T \mapsto w^T(0)$ is increasing on $(T^*, +\infty)$ implies that in the case where the treatment is not effective (that is $w^T > 0$ invades the whole space as $t \rightarrow +\infty$), the longer the rest period between two injections, the denser the equilibrium state of the tumor.

We now study in more detail the case where the treatment is not effective, that is, the case where $T > T^*$. We know that then, the equilibrium state w^T invades the whole space as $t \rightarrow +\infty$. The purpose of this part is to give the invasion rate of the zero state by w^T . To answer this question, we quote two results. The first one is about the existence of pulsating fronts connecting 0 and w^T , in the sense of Definition 4.1.1, and the second one concerns spreading properties. They are proved in [34] and in [37].

Theorem 4.1.3. [34], [37] Let $T > T^*$, where T^* is given in (4.18). (I) There exists a positive real number c_T^* such that pulsating fronts with speed c connecting 0 and w^T exist if and only if $c \geq c_T^*$.

(II) We denote $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^T(t, u) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

If u_0 is a bounded continuous function such that $u_0 \geq 0$ and $u_0 \not\equiv 0$, then

$$\forall c \in (0, c_T^*), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| < ct} |u(t, x) - w^T(t)| = 0.$$

If u_0 is a continuous compactly supported function such that $u_0 \geq 0$, then

$$\forall c > c_T^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| > ct} u(t, x) = 0.$$

In his paper [37], Nadin considers in the first assertion of the spreading properties in Theorem 4.1.3 initial conditions which are more general. He assumes that u_0 is not necessarily compactly supported but that u_0 is of the form $O(e^{-\beta|x|})$ as $|x| \rightarrow +\infty$, where $\beta > 0$. The previous theorem completes Proposition 4.1.2. Indeed, we know that in the case where the treatment is not effective, the equilibrium state w^T invades the whole space as $t \rightarrow +\infty$. Theorem 4.1.3 states that this invasion takes place at the speed c_T^* .

We can now characterize the critical speed c_T^* with the principal eigenvalue λ_{0,f^T} . More precisely :

Proposition 4.1.4. *For every $T > T^*$, the critical speed c_T^* is given by*

$$c_T^* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}. \quad (4.21)$$

Hence, if $T \mapsto \int_0^T m^T(s)ds$ is continuous, then the function $T \in (T^*, +\infty) \mapsto c_T^*$ is continuous and, if $\int_0^T m^T(s)ds$ does not depend on T , it is increasing. Furthermore, we have the two following limit cases :

$$\lim_{T \rightarrow (T^*)^+} c_T^* = 0,$$

and, if $\frac{1}{T} \int_0^T m^T(s)ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$, then

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} c_T^* = 2\sqrt{g'(0)}.$$

In the case where the treatment is not effective, the invasion of space by the equilibrium state w^T is all the faster as the rest time between injections is long. The two limits cases $T \rightarrow (T^*)^+$ and $T \rightarrow +\infty$ are explained in the same manner as in Proposition 4.1.1. Let us note that in the case where m^T is of the type (4.9), then the previous properties concerning $\int_0^T m^T(s)ds$ are satisfied.

We end this section by stating the existence of pulsating fronts in the case of nonlinearities which are not of KPP type (that is hypotheses (4.4) and (4.5) are not necessarily verified, but we still assume (4.3), (4.6) and (4.18))). For these nonlinearities, there is still a positive solution to problem (4.14), but it may not be unique. According to Cauchy-Lipschitz theorem, solutions of (4.14) are ordered on $[0, T]$. For $T > T^*$, we can thus define $y^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as the infimum of all positive solutions of (4.14). After showing that $y^T > 0$, we will prove there exists a critical speed $c_T^{**} > 0$ such that there is a pulsating front connecting 0 and y^T for speed $c \geq c_T^{**}$ and there is no pulsating front connecting 0 and y^T for $c < c_T^{**}$. In this case, c_T^{**} is not necessarily equal to $2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}$. For this type of nonlinearity, Nadin shows in [37] that there exist two critical speeds c_* and c^* for which there is a pulsating front for $c \geq c^*$ and there is no pulsating front for $c \leq c_*$. Nevertheless the case $c \in (c_*, c^*)$ is not treated in [37]. In [34], Liang and Zhao prove the result using a semiflow method. We give here an alternative proof. We begin by proving the existence of pulsating front $U(t, \xi)$ for domains of the type $\mathbb{R} \times [-a, a]$ which are bounded in ξ , then we pass in the limit as $a \rightarrow +\infty$. We state the result.

Proposition 4.1.5. *Let f^T satisfy assumptions (4.2), (4.3), (4.6) and (4.18), and $T > T^*$. There exists a positive real number c_T^{**} such that pulsating fronts $U(t, \xi)$ monotone in ξ connecting 0 and y^T exist if and only if $c \geq c_T^{**}$.*

4.1.4 Nonlinearities asymptotically periodic in time with perturbation

We are interested in the case of nonlinearities which are no more periodic in time, but which are the sum of a function which converges as $t \rightarrow +\infty$ to a time periodic nonlinearity and of a small perturbation. More precisely, for $\varepsilon \geq 0$, we consider equations of the type

$$u_t - u_{xx} = g(u) - m(t)u + \varepsilon p(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.22)$$

where m solves (4.12) with $T > 1$ and D^T defined in (4.11). We assume that $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a function of class C^1 for which there exists $C > 0$ such that

$$\left| \frac{p(t, u)}{u} \right| \leq C, \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times (0, +\infty). \quad (4.23)$$

The function m is not periodic, but it is asymptotically T -periodic in time. More precisely, there exists a T -periodic positive function $m_\infty^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ such that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |m(t) - m_\infty^T(t)| = 0. \quad (4.24)$$

Indeed, an elementary calculation implies that for any $n \in \mathbb{N}$, we have

$$m(t) = \begin{cases} \tau \left[1 + \left(\frac{(e^{\frac{1}{\tau}} - 1)(e^{\frac{nT}{\tau}} - 1)}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} + \frac{m_0}{\tau} - e^{\frac{nT}{\tau}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right], & \forall t \in [nT, nT + 1], \\ \tau \left[\frac{(e^{\frac{1}{\tau}} - 1)(e^{\frac{(n+1)T}{\tau}} - 1)}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} + \frac{m_0}{\tau} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}, & \forall t \in [nT + 1, (n+1)T]. \end{cases}$$

Consequently, if we define the positive T -periodic function $m_\infty^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ by

$$m_\infty^T(t) = \begin{cases} \tau \left[1 + \left(\frac{e^{\frac{1}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right], & \forall t \in [0, 1], \\ \tau \frac{e^{\frac{1}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} e^{\frac{T-t}{\tau}}, & \forall t \in [1, T], \end{cases}$$

then the convergence result (4.24) holds. Furthermore, we have $\int_0^T m_\infty^T(t) dt = \tau$. Consequently the function $f^T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f^T(t, u) = g(u) - m_\infty^T(t)u$ satisfies (4.18) because $\lambda_{0, f^T} = -g'(0) + \tau/T$. We assume that $\tau > g'(0)$. We notice that m_∞^T is independent of m_0 . It was predictable because m_∞^T is the unique positive T -periodic solution of $m' = D^T - m/\tau$ on \mathbb{R} . We define the nonlinearities $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ and $f_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f(t, u) = g(u) - m(t)u, \quad \text{and} \quad f_\varepsilon(t, u) = f(t, u) + \varepsilon p(t, u).$$

According to (4.24), we have

$$\sup_{u \in (0, +\infty)} \left| \frac{f(t, u) - f^T(t, u)}{u} \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.25)$$

The function f^T is T -periodic and satisfies the general assumptions given in Section 4.1.3. We still denote T^* the critical time (notice that $T^* > 1$ because $\tau > g'(0)$), w^T the unique positive equilibrium state for $T > T^*$ and c_T^* the critical speed associated with f^T for $T > T^*$.

The aim of this section is to show that Proposition 4.1.2 and the spreading results of Theorem 4.1.3 hold true when we replace f^T by f_ε in the statements, for ε small enough. It is reasonable to hope so. Indeed, on the one hand, if ε is small, then the term εp is negligible compared to f , and on the other hand, these results deal with the large time behavior of the solutions, and precisely, hypothesis (4.25) implies that f "looks like" f^T as $t \rightarrow +\infty$. The first result is the generalization of Proposition 4.1.2.

Theorem 4.1.6. Let $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded and continuous function such that $u_0 \geq 0$ and $u_0 \not\equiv 0$. For all $\varepsilon \geq 0$, we consider the function $u_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f_\varepsilon(t, u) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.26)$$

If $T < T^*$, there exists $\varepsilon_T > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$ we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_\varepsilon(t, x)| = 0.$$

If $T > T^*$ and if $\lambda_{w^T, f^T} > 0$, then there exist $\tilde{\varepsilon}_T > 0$ and $M_T > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_T)$ and for all compact $K \subset \mathbb{R}$, we have

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |u_\varepsilon(t, x) - w^T(t)| \leq M_T \varepsilon.$$

We saw in Proposition 4.1.1 that $\lambda_{w^T, f^T} \geq 0$. In the previous theorem, in case $T > T^*$, we impose that $\lambda_{w^T, f^T} > 0$. This property is not necessarily satisfied. Indeed, if we consider the function $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $h(u) = u(1-u)^3$, then we have $h(0) = h(1) = 0$, $h > 0$ on $(0, 1)$, $h < 0$ sur $(1, +\infty)$, $h(u)/u$ decreasing on $(0, +\infty)$ and $h'(1) = 0$. In the case where the function $f^T(t, \cdot)$ is concave for all $t \in \mathbb{R}^+$, the property $\lambda_{w^T, f^T} > 0$ is verified for any $T > T^*$. Indeed, if we define $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$F(x) = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{f^T(s, xw^T(s))}{w^T(s)} ds,$$

then we have $F(0) = F(1) = 0$ and F is convex on $[0, 1]$. Consequently, if $F'(1) = 0$, that is, if $\lambda_{w^T, f^T} = 0$, then we have $F' = 0$ on $[0, 1]$. It is a contradiction because $F'(0) = \lambda_{0, f^T} < 0$.

Let us give a sketch of the proof. For $T > 0$ and $\varepsilon > 0$, we will frame f_ε by two T -periodic functions f_ε^T and $f_{-\varepsilon}^T$ for which the results of Proposition 4.1.2 will apply. In the case where $T < T^*$, if f_ε^T is the upper bound function, we will show that for $\varepsilon > 0$ small enough, we have $\lambda_{0, f_\varepsilon^T} > 0$. Hence, the solution of (4.26) with f_ε^T as nonlinearity is a supersolution of problem (4.26) and, according to Proposition 4.1.2, it converges to 0 as $t \rightarrow +\infty$. In the case where $T > T^*$, we will prove that for $\varepsilon > 0$ small enough, we have $\lambda_{0, f_\varepsilon^T} < 0$ and $\lambda_{0, f_{-\varepsilon}^T} < 0$. Consequently, there is a unique positive solution w_ε^T (resp. $w_{-\varepsilon}^T$) of system (4.14) with f_ε^T (resp. $f_{-\varepsilon}^T$) as nonlinearity (owing to Proposition 4.1.1). The solution of (4.26) with f_ε^T as nonlinearity is a supersolution of (4.26) and, according to Proposition 4.1.2, it converges to w_ε^T as $t \rightarrow +\infty$. In the same way, the solution of (4.26) with $f_{-\varepsilon}^T$ as nonlinearity is a subsolution of (4.26), and it converges to $w_{-\varepsilon}^T$ as $t \rightarrow +\infty$. We will conclude using the fact that w_ε^T and $w_{-\varepsilon}^T$ are close to w^T as ε is small enough.

Note that the case $T = T^*$ is not treated in Theorem 4.1.6. If $\varepsilon = 0$, the solution of the Cauchy problem (4.26) converges uniformly to 0 as $t \rightarrow +\infty$, whereas if $\varepsilon > 0$, the convergence to 0 may not hold. We summarize these results in the following proposition.

Proposition 4.1.7. Let $T = T^*$ and $\varepsilon \geq 0$. We consider the function $u_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the Cauchy problem (4.26).

- (I) If $\varepsilon = 0$, then u_ε converges uniformly to 0 as $t \rightarrow +\infty$.
- (II) If $\varepsilon > 0$, we can conclude in two cases.

(i) If $f(t, u) = f^{T^*}(t, u)$ and $p(t, u) = u$, then, for ε small enough, u_ε converges to a positive solution of (4.14) with f_ε as nonlinearity as $t \rightarrow +\infty$.

(ii) If $p(t, u) \leq 0$, then, u_ε converges uniformly to 0 as $t \rightarrow +\infty$.

Concerning the spreading results of Theorem 4.1.3, they remain true if we replace f^T by f_ε in the statement.

Theorem 4.1.8. Let $T > T^*$. For any $\varepsilon \geq 0$, we consider $u_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f_\varepsilon(t, u) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

If u_0 is a continuous bounded function such that $u_0 \geq 0$ and $u_0 \not\equiv 0$, and if $\lambda_{w^T, f^T} > 0$, then for all $c \in (0, c_T^*)$, there exists $\hat{\varepsilon}_{c,T} > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_{c,T})$ we have

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| < ct} |u_\varepsilon(t, x) - w^T(t)| \leq M_T \varepsilon,$$

where M_T is defined in Theorem 4.1.6.

If u_0 is a continuous compactly supported function such that $u_0 \geq 0$, then, for all $c > c_T^*$, there exists $\bar{\varepsilon}_{c,T} > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_{c,T})$ we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| > ct} u_\varepsilon(t, x) = 0.$$

The proof of this theorem uses the same ideas as the proof of Theorem 4.1.6. For $T > T^*$ and $\varepsilon > 0$, we will frame f_ε by two T -periodic functions f_ε^T and $f_{-\varepsilon}^T$ for which the results of Theorem 4.1.3 will apply. An important point of the demonstration will be to notice that for ε small enough, the critical speeds $c_{T,\varepsilon}^*$ and $c_{T,-\varepsilon}^*$ associated respectively with f_ε^T and $f_{-\varepsilon}^T$ are close to the critical speed c_T^* associated with f^T .

4.1.5 Influence of the protocol of the treatment

As in Section 4.1.1, we consider a C^1 and T -periodic function m^T (with $T \geq 1$) of the type

$$\begin{cases} m^T = \varphi \text{ on } [0, 1], \\ m^T = 0 \text{ on } [1, T], \end{cases}$$

where $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ satisfies $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. In this part, we are interested in equations of the type

$$u_t - u_{xx} = g(u) - m_\tau^T(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \quad (4.27)$$

where $0 < \tau \leq T$. The function g satisfies hypotheses (4.3), (4.4) and (4.6). The function $m_\tau^T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ is T -periodic and defined by

$$\begin{cases} m_\tau^T(t) = \frac{1}{\tau} \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right), & \forall t \in [0, \tau], \\ m_\tau^T(t) = 0, & \forall t \in [\tau, T], \end{cases}$$

where the function φ is the same as in m^T . In these equations, the duration of the treatment is equal to τ . Furthermore, we have

$$\int_0^T m_\tau^T(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt. \quad (4.28)$$

So, it is clear that the quantity of drug administered during a cycle of chemotherapy is independent of the treatment duration τ . We will study the influence of the parameter τ with respect to the results of previous sections. We define the functions $f_\tau^T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ and $f_\tau^T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f^T(t, u) = g(u) - m^T(t)u \text{ and } f_\tau^T(t, u) = g(u) - m_\tau^T(t)u.$$

The first proposition deals with the principal eigenvalue associated with f_τ^T and the equilibrium state 0.

Proposition 4.1.9. *Let $T > 0$ and $\tau \in (0, T]$. The real number λ_{0,f_τ^T} is independent of τ . Actually, we have*

$$\lambda_{0,f_\tau^T} = \lambda_{0,f^T} = -g'(0) + \frac{\int_0^1 \varphi(s)ds}{T}.$$

Consequently, if $T^* > 0$ denotes the critical time for the function f^T , then, for any $\tau \in (0, T^*)$, f_τ^T satisfies (4.18) for $T \in [\tau, +\infty)$, and the critical time T^* associated with f_τ^T is the same as the one associated with f^T . We are interested here in the solutions of the system

$$\begin{cases} y' = f_\tau^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T). \end{cases} \quad (4.29)$$

The same proof as in Proposition 4.1.1 implies that for any $\tau \in (0, T^*)$ and $T \in [\tau, T^*]$, there is no positive solution of (4.29), while for any $T > T^*$ and $\tau \in (0, T]$, there is a unique positive solution $w_\tau^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ of (4.29). Furthermore, the same proof as in Proposition 4.1.2 implies that if $\tau \in (0, T^*)$ and $T \in [\tau, T^*]$, then the treatment is efficient, and if $T > T^*$ and $\tau \in (0, T]$, then the equilibrium state w_τ^T invades the whole space as $t \rightarrow +\infty$. More precisely, Proposition 4.1.2 remains true by replacing f^T by f_τ^T and w^T by w_τ^T . To summarize, the optimal duration of a chemotherapy cycle for which the treatment is efficient does not depend on how the drug is injected.

Let us now study the case where the treatment is not efficient, that is, $T > T^*$ and $\tau \in (0, T]$. Theorem 4.1.3 remains valid if we replace f^T by f_τ^T and w^T by w_τ^T , but with a critical speed $c_{T,\tau}^*$ depending a priori on τ . Nevertheless Propositions 4.1.4 and 4.1.9 imply that $c_{T,\tau}^* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f_\tau^T}} = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}} = c_T^*$, where c_T^* is the critical speed associated with f^T . Consequently, the invasion rate does not depend on how the drug is administered.

Finally, we are interested in the influence of the parameter τ on the equilibrium state w_τ^T .

Proposition 4.1.10. *Let $T > T^*$. The function*

$$\begin{cases} (0, T) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \tau &\mapsto w_\tau^T(0) \end{cases}$$

is continuous and decreasing.

Consequently, in the case where the treatment is not efficient, the shorter the duration of the chemotherapy cycle, the larger the value of the equilibrium state $w_\tau^T(0)$. This means that it is better to administer the treatment over long periods.

Outline

Section 4.2 is devoted to the proof of Propositions 4.1.1, 4.1.4 and 4.1.5. Section 4.3 gathers the proof of Theorem 4.1.6, Proposition 4.1.7 and Theorem 4.1.8. Finally, we prove in Section 4.4 Propositions 4.1.9 and 4.1.10.

4.2 Nonlinearities periodic in time

4.2.1 Proof of Proposition 4.1.1

We first investigate solutions of (4.14), showing Proposition 4.1.1. We begin with the case where $T \leq T^*$. We argue bwoc, supposing there is a positive solution w^* of (4.14). Then

$$\frac{(w^*)'(t)}{w^*(t)} = \frac{g(w^*(t))}{w^*(t)} - m^T(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

We integrate this equation between 0 and T . We obtain

$$\int_0^T \left(\frac{g(w^*(s))}{w^*(s)} - m^T(s) \right) ds = 0. \quad (4.30)$$

Yet, as $w^* > 0$ on $[0, T]$ and according to (4.4) and (4.18), we have

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{g(w^*(s))}{w^*(s)} - m^T(s) \right) ds < -\lambda_{0,f^T} \leq 0,$$

which contradicts (4.30).

We now consider the case where $T > T^*$. To prove the existence of a positive solution of (4.14), we give two lemmas demonstrating the existence of a positive fixed point of the Poincaré map P^T defined in Definition 4.1.2.

Lemma 4.2.1. *There exists $\alpha_0 > 0$ such that for all $\alpha \in (0, \alpha_0]$ we have $P^T(\alpha) > \alpha$.*

Démonstration. Indeed, according to the fact that $f^T(\cdot, 0) = 0$, we have $P^T(0) = 0$, and owing to (4.17) and the fact that $\lambda_{0,f^T} < 0$ we have $(P^T)'(0) > 1$. \square

Lemma 4.2.2. *For all $\alpha > 1$, we have $P^T(\alpha) < \alpha$.*

Démonstration. Let $\alpha > 1$. We consider y_α solution of (4.16). Two cases can occur.

1st case : If $y_\alpha(t) > 1$ for all $t \geq 0$, then, according to (4.7), we have $y'_\alpha(t) = f^T(t, y_\alpha(t)) < 0$ for all $t \geq 0$. Consequently $y_\alpha(T) < y_\alpha(0)$, that is $P^T(\alpha) < \alpha$.

2nd case : If there exists $t_0 \geq 0$ such that $y_\alpha(t_0) \leq 1$, then, owing to (4.7), we have $y_\alpha(t) \leq 1$ for all $t \geq t_0$. In particular, for $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n_0 T \geq t_0$, we have $y_\alpha(n_0 T) \leq 1 < y_\alpha(0)$. Yet, the sequence $(y_\alpha(nT))_n$ is constant or strictly monotone. So it is decreasing. Consequently we have $y_\alpha(T) < y_\alpha(0)$, that is $P^T(\alpha) < \alpha$. \square

Lemma 4.2.1 and Lemma 4.2.2 imply that there exists $\alpha^* \in (\alpha_0, 1]$ such that $P^T(\alpha^*) = \alpha^*$. Consequently, the solution of (4.16) with $\alpha = \alpha^*$ is a positive solution of (4.14). We prove now the uniqueness of such a solution. Let $w_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $w_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ two positive solutions of (4.14). There exists $\rho > 1$ such that $w_1 \leq \rho w_2$ on $[0, T]$. We can define

$$\rho^* = \inf \{ \rho \geq 1 \mid w_1(t) \leq \rho w_2(t), \quad \forall t \in [0, T] \}.$$

We have

$$w_1(t) \leq \rho^* w_2(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.31)$$

Moreover there exists $t^* \in [0, T]$ such that

$$w_1(t^*) = \rho^* w_2(t^*). \quad (4.32)$$

We are going to show that $\rho^* = 1$. We argue bwoc supposing that $\rho^* > 1$. So

$$w'_1(t) = f^T(t, w_1(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.33)$$

Furthermore

$$(\rho^* w_2)'(t) > f^T(t, \rho^* w_2(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.34)$$

Indeed, for all $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} (\rho^* w_2)'(t) &= \rho^* w'_2(t) \\ &= \rho^* w_2(t) \left(\frac{g(w_2(t))}{w_2(t)} - m^T(t) \right) \\ &> \rho^* w_2(t) \left(\frac{g(\rho^* w_2(t))}{\rho^* w_2(t)} - m^T(t) \right) \text{ (according to (4.4) since } \rho^* > 1) \\ &= f^T(t, \rho^* w_2(t)). \end{aligned}$$

According to (4.31), (4.32), (4.33), (4.34) and the T -periodicity of w_1 and w_2 , we have

$$w_1(t) = \rho^* w_2(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

It is a contradiction because w_1 is a solution of $y' = f^T(t, y)$ whereas $\rho^* w_2$ is a strict supersolution. So $\rho^* = 1$. Consequently, by the symmetry of the roles played by w_1 and w_2 , we have $w_1 \equiv w_2$ on $[0, T]$, and then on \mathbb{R} by periodicity.

We denote w^T the positive solution of (4.14). We now show the properties of w^T . The previous proof implies that $(P^T)'(w^T(0)) \leq 1$. Hence, according to (4.17), it follows that $\lambda_{w^T, f^T} \geq 0$. We also saw that $w^T(0) \in (0, 1]$. Consequently, owing to (4.7) and the fact that $f^T(\cdot, 0) = 0$ on \mathbb{R} , we have $w^T(t) \in (0, 1]$ for any $t \in \mathbb{R}$.

We now study the function $T \in (T^*, +\infty) \mapsto w^T(0)$. We show the monotonicity of $T \mapsto w^T(0)$ if m^T is of type (4.9), with assumption (4.10) (in this case $T^* > 1$). We consider two real numbers T_1 and T_2 such that $T^* < T_1 < T_2$. For $i \in \{1, 2\}$, the Poincaré map P^{T_i} associated with f^{T_i} is defined on \mathbb{R}^+ by

$$P^{T_i}(\alpha) = y_\alpha^{T_i}(T_i), \quad \forall \alpha \geq 0,$$

where $y_\alpha^{T_i}$ is the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' = f^{T_i}(t, y) & \text{on } \mathbb{R}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (4.35)$$

We saw in (II) that the function P^{T_i} has a unique positive fixed point α^{T_i} . Furthermore $\alpha^{T_i} \in (0, 1]$. The unique equilibrium state $w^{T_i} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ associated with f^{T_i} is the solution of the Cauchy problem (4.35) with $\alpha = \alpha^{T_i}$. Consequently, if we prove that $P^{T_1} < P^{T_2}$ on $(0, 1]$, then we will deduce that $\alpha^{T_1} < \alpha^{T_2}$, that is $w^{T_1}(0) < w^{T_2}(0)$. Let $\alpha \in (0, 1]$. The functions $y_\alpha^{T_1}$ and $y_\alpha^{T_2}$ are solutions on $[0, T_1]$ of the equation

$$y' = f^{T_1}(t, y).$$

Consequently, since $y_\alpha^{T_1}(0) = y_\alpha^{T_2}(0) = \alpha$, we have

$$y_\alpha^{T_1} \equiv y_\alpha^{T_2} \text{ on } [0, T_1].$$

Furthermore, from (4.3), (4.7) and the fact that φ in (4.9) is nonnegative and nontrivial, there holds

$$0 < y_\alpha^{T_1}(T_1) = y_\alpha^{T_2}(T_1) < 1.$$

On $[T_1, T_2]$, $y_\alpha^{T_2}$ is a solution of $y' = g(y)$. Consequently, according to (4.3), we have $y_\alpha^{T_2}(T_1) < y_\alpha^{T_2}(T_2)$. Finally, it follows that

$$y_\alpha^{T_1}(T_1) = y_\alpha^{T_2}(T_1) < y_\alpha^{T_2}(T_2).$$

In other terms

$$P^{T_1}(\alpha) < P^{T_2}(\alpha).$$

Finally, we have necessarily $\alpha^{T_1} < \alpha^{T_2}$, that is $w^{T_1}(0) < w^{T_2}(0)$.

We show now the continuity property. Let $\tilde{T} \in (T^*, +\infty)$ and $(T_n)_n$ be a sequence of $(T^*, +\infty)$ such that $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{T}$. We fixe $T^- \in (T^*, \tilde{T})$. There exists $n^- \in \mathbb{N}$ and $T^+ > T^*$ such that

$$T^* < T^- < T_n < T^+, \quad \forall n \geq n^-. \quad (4.36)$$

We will demonstrate that $w^{T_n}(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w^{\tilde{T}}(0)$. Since $0 < w^{T_n} \leq 1$ and $T \mapsto m^T$ is continuous in $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, the sequence $(w^{T_n})_n$ converges up to extraction of a subsequence to a function \tilde{w} in $C^{0,\delta}([0, T^+])$ for any $\delta \in (0, 1)$. The equilibrium state w^{T_n} satisfies

$$\begin{cases} w^{T_n}(t) = w^{T_n}(0) + \int_0^t f^{T_n}(s, w^{T_n}(s))ds, & \forall t \in [0, T^+], \\ w^{T_n}(0) = w^{T_n}(T_n). \end{cases}$$

Passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$, we obtain

$$\begin{cases} \tilde{w}(t) = \tilde{w}(0) + \int_0^t f^{\tilde{T}}(s, \tilde{w}(s))ds, & \forall t \in [0, \tilde{T}] \subset [0, T^+], \\ \tilde{w}(0) = \tilde{w}(\tilde{T}). \end{cases}$$

The function $t \mapsto \int_0^t f^{\tilde{T}}(s, \tilde{w}(s))ds$ is of class $C^1([0, \tilde{T}])$. Consequently \tilde{w} is of class $C^1([0, \tilde{T}])$ and it satisfies

$$\begin{cases} \tilde{w}' = f^{\tilde{T}}(t, \tilde{w}) & \text{on } [0, \tilde{T}], \\ \tilde{w}(0) = \tilde{w}(\tilde{T}), \end{cases}$$

and $0 \leq \tilde{w} \leq 1$ in $[0, \tilde{T}]$. Owing to (II), it follows that $\tilde{w} \equiv 0$, or $\tilde{w} \equiv w^{\tilde{T}}$. If $\tilde{w} = 0$, then $w^{T_n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$ uniformly on $[0, T^+]$. For any $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\frac{(w^{T_n})'(t)}{w^{T_n}(t)} = \frac{f^{T_n}(t, w^{T_n}(t))}{w^{T_n}(t)}, \quad \forall t \in [0, T_n].$$

We integrate the previous equation over $[0, T_n]$, then we pass to the limit as $n \rightarrow +\infty$. We obtain $-\tilde{T}\lambda_{0,f^{\tilde{T}}} = 0$. It is a contradiction because $\lambda_{0,f^{\tilde{T}}} < 0$, as $\tilde{T} > T^*$. Hence, we have necessarily $\tilde{w} \equiv w^{\tilde{T}}$. The uniqueness of the accumulation point of $(w^{T_n})_n$ implies that the convergence holds for the whole sequence. In particular, $w^{T_n}(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w^{\tilde{T}}(0)$, and consequently, the function

$T \mapsto w^T(0)$ is continuous on $(T^*, +\infty)$.

We study now the behavior of the equilibrium state w^T for the limit cases where $T \rightarrow (T^*)^+$ and $T \rightarrow +\infty$. We begin by showing that the function w^T converges uniformly to 0 on \mathbb{R} as $T \rightarrow (T^*)^+$. Let $(T_n)_n$ be a sequence such that $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T^*$ and $T_n > T^*$ for any $n \in \mathbb{N}$. Since $(T_n)_n$ is bounded, there exists $T^+ > T^*$ such that for any $n \in \mathbb{N}$ we have $T_n \in (T^*, T^+)$. Up to extraction of a subsequence, $(w^{T_n})_n$ converges to a function w^* in $\mathcal{C}^{0,\delta}([0, T^+])$ for any $\delta \in (0, 1)$. The equilibrium state w^{T_n} satisfies

$$\begin{cases} w^{T_n}(t) = w^{T_n}(0) + \int_0^t f^{T_n}(s, w^{T_n}(s))ds, & \forall t \in [0, T^+], \\ w^{T_n}(0) = w^{T_n}(T_n). \end{cases}$$

Passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$, we obtain

$$\begin{cases} w^*(t) = w^*(0) + \int_0^t f^{T^*}(s, w^*(s))ds, & \forall t \in [0, T^*] \subset [0, T^+], \\ w^*(0) = w^*(T^*). \end{cases}$$

The function $t \mapsto \int_0^t f^{T^*}(s, w^*(s))ds$ is of class $\mathcal{C}^1([0, T^*])$. Consequently w^* is of class $\mathcal{C}^1([0, T^*])$ and it satisfies

$$\begin{cases} (w^*)' = f^{T^*}(t, w^*) & \text{on } [0, T^*], \\ w^*(0) = w^*(T^*), \end{cases}$$

and $0 \leq w^* \leq 1$ on $[0, T^*]$. According to (II), $w^* \equiv 0$. The uniqueness of accumulation point of $(w^{T_n})_n$ implies that the convergence holds for the whole sequence. Furthermore since $[0, T_n] \subset [0, T^+]$ for any $n \in \mathbb{N}$, by T_n -periodicity of w^{T_n} , it occurs that

$$\sup_{\mathbb{R}} |w_{T_n}| = \sup_{[0, T_n]} |w_{T_n}| \leq \sup_{[0, T^+]} |w_{T_n}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

which completes the proof of this point.

We study now the case where $T \rightarrow +\infty$ under assumptions (4.9) and (4.10). The function w^T converges on average to 1 as T tends to $+\infty$. We give a technical lemma.

Lemma 4.2.3. *Under assumptions (4.9) and (4.10), the real number δ defined by*

$$\delta := \inf \{w^T(1) \mid T \geq T^* + 1\}$$

is positive. Furthermore, $\delta < 1$.

Démonstration. We argue bwoc. Let us suppose there exists a sequence $(T_n)_n$ such that $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ and $w^{T_n}(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. We fix $T^+ > T^*$. There exists $n^+ \in \mathbb{N}$ such that for any $n \geq n^+$, we have $T_n \in [T^+, +\infty)$. According to the monotonicity of $T \mapsto w^T(0)$, it follows that

$$0 < w^{T^+}(0) < w^{T_n}(0), \quad \forall n \geq n^+.$$

Up to extraction of a subsequence, $(w^{T_n})_n$ converges to a function w^* in $\mathcal{C}^{0,\beta}([0, 1])$ for any $\beta \in (0, 1)$. Passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$ in the previous inequalities implies that

$$0 < w^{T^+}(0) \leq w^*(0). \tag{4.37}$$

The same reasoning as previously implies that the function w^* is of class $\mathcal{C}^1([0, 1])$ and satisfies the Cauchy problem

$$\begin{cases} (w^*)' = g(w^*) - \varphi(t)w^* & \text{on } [0, 1], \\ w^*(1) = 0. \end{cases}$$

By uniqueness, we have necessarily $w^* \equiv 0$, that is, w^{T_n} converges uniformly to 0 on $[0, 1]$, which contradicts (4.37). Lastly, each function w^T ranges in $(0, 1]$, and due to (4.7) and the nontriviality of φ in (4.9), one has $w^T < 1$ on \mathbb{R} . Hence, we have $\delta < 1$. \square

We return to the proof of the last point of Proposition 4.1.1. We consider y_δ the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' = g(y) & \text{on } (1, +\infty), \\ y(1) = \delta, \end{cases}$$

where $\delta \in (0, 1)$ is defined in Lemma 4.2.3. Let $\varepsilon > 0$ be such that $\delta < 1 - \varepsilon < 1$. Since $y_\delta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$, there exists $l_\varepsilon > 1$ such that $y_\delta(l_\varepsilon) = 1 - \varepsilon/2$. We define $T_\varepsilon = 4l_\varepsilon/\varepsilon (> l_\varepsilon)$, and we consider $T \geq T_\varepsilon$. The function w^T is a solution of

$$\begin{cases} y' = g(y) & \text{on } (1, T), \\ y(1) = w^T(1). \end{cases}$$

Since $w^T(1) \geq \delta$, we have $w^T \geq y_\delta$ on $[1, T]$. In particular $w^T(l_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon/2$, and since w^T is increasing on (l_ε, T) , we have

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq w^T(t) < 1, \quad \forall t \in (l_\varepsilon, T).$$

Furthermore

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T w^T(t) dt - 1 \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |w^T(t) - 1| dt = \frac{1}{T} \int_0^{l_\varepsilon} |w^T(t) - 1| dt + \frac{1}{T} \int_{l_\varepsilon}^T |w^T(t) - 1| dt.$$

Yet,

$$\frac{1}{T} \int_0^{l_\varepsilon} |w^T(t) - 1| dt \leq \frac{2l_\varepsilon}{T} \leq \frac{2l_\varepsilon}{T_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

and

$$\frac{1}{T} \int_{l_\varepsilon}^T |w^T(t) - 1| dt \leq \frac{T - l_\varepsilon}{T} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

So $\left| \frac{1}{T} \int_0^T w^T(t) dt - 1 \right| \leq \varepsilon$, and the proof of Proposition 4.1.1 is complete.

4.2.2 Proof of Proposition 4.1.4

We begin by showing the characterization of c_T^* with the principal eigenvalue λ_{0,f^T} . Let $\mu \in \mathbb{R}$. We denote λ_μ the principal eigenvalue and Φ_μ the principal eigenfunction associated with the operator $L_\mu : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ defined by $L_\mu \Psi = \Psi_t - (\mu^2 + f_u^T(t, 0))\Psi$. Consequently, we have

$$(\Phi_\mu)_t = (\mu^2 + f_u^T(t, 0) + \lambda_\mu)\Phi_\mu \quad \text{on } \mathbb{R}.$$

We divide the previous equation by Φ_μ , then we integrate between 0 and T . According to the fact that Φ_μ is T -periodic, we obtain $\lambda_\mu = -\mu^2 + \lambda_{0,f^T}$. In [37], Nadin gives the following characterization of the critical speed c_T^* :

$$c_T^* = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \text{there exists } \mu > 0 \text{ such that } \lambda_\mu + \mu c = 0\}.$$

Consequently, we have

$$c_T^* = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \text{there exists } \mu > 0 \text{ such that } \mu^2 - \mu c - \lambda_{0,f^T} = 0\}.$$

We thus look for the smallest real number c for which the equation $\mu^2 - \mu c - \lambda_{0,f^T} = 0$ of the variable μ admits a positive solution. An elementary calculation leads to $c_T^* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}$. Consequently, we have

$$c_T^* = 2\sqrt{g'(0) - \frac{1}{T} \int_0^T m^T(t)dt}.$$

Hence the function $T \in (T^*, +\infty) \mapsto c_T^*$ is continuous, increasing if $\int_0^T m^T(t)dt$ does not depend on T , and we have the two limits cases

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} c_T^* = 2\sqrt{g'(0)} \text{ if } \frac{1}{T} \int_0^T m^T(t)dt \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0, \text{ and } \lim_{T \rightarrow (T^*)^+} c_T^* = 0,$$

which concludes the proof of Proposition 4.1.4.

4.2.3 Proof of Proposition 4.1.5

Let $\alpha \in [0, 1]$. We recall that if $y_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' = f^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

then we denote $P^T : \alpha \in [0, 1] \mapsto P^T(\alpha) = y_\alpha(T)$ the Poincaré map associated to the function f^T . According to the proof of Proposition 4.1.1, there exists a fixed point of P^T in $(0, 1]$. Nevertheless, since hypothesis (4.4) is not satisfied here, this fixed point is not necessarily unique. We define

$$\alpha_0 = \inf \{\alpha \in (0, 1] \mid P^T(\alpha) = \alpha\}.$$

To simplify the notations, we denote $y^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ the function $y^T = y_{\alpha_0}$. We begin by proving that this infimum is not equal to zero.

Lemma 4.2.4. *We have $\alpha_0 > 0$.*

Démonstration. We assume that $\alpha_0 = 0$. So, there exists a sequence $(\alpha_n)_n \subset (0, 1]^{\mathbb{N}}$ such that $P^T(\alpha_n) = \alpha_n$ and $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. We divide the equation $y'_{\alpha_n} = f^T(t, y_{\alpha_n})$ by y_{α_n} , then we integrate between 0 and T . We obtain

$$\int_0^T \frac{f^T(s, y_{\alpha_n}(s)) - f^T(s, 0)}{y_{\alpha_n}(s)} ds = 0.$$

Passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$, since $y_{\alpha_n} \rightarrow 0$ uniformly on $[0, T]$ as $n \rightarrow +\infty$ by Cauchy-Lipschitz theorem, we have

$$\int_0^T f_u^T(s, 0) ds = 0,$$

which contradicts the fact that $\lambda_{0,f^T} < 0$. Consequently $\alpha_0 > 0$. Notice also that, by continuity of P^T , there holds $P^T(\alpha_0) = \alpha_0$, and $y^T = y_{\alpha_0}$ solves (4.14). Furthermore $0 < y^T \leq 1$ on \mathbb{R} . \square

Since f^T is of class $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R})$ and T -periodic, there exists $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ and for all $t \in \mathbb{R}$ we have

$$|f^T(t, \varepsilon\Phi_{0,f^T}(t)) - \varepsilon\Phi_{0,f^T}(t)f_u^T(t, 0)| \leq \frac{|\lambda_{0,f^T}|}{2}\varepsilon\Phi_{0,f^T}(t), \quad (4.38)$$

where Φ_{0,f^T} is the principal eigenfunction associated with f^T and 0. Since $\lambda_{0,f^T} < 0$ and y^T is the smallest positive solution of system (4.14), we can apply Theorem 2.3 of the Nadin's paper [37]. Consequently, there exists a couple (c_0, U_0) , where $U_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $(t, \xi) \mapsto U_0(t, \xi)$ is of class $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ and solves

$$\begin{cases} (U_0)_t - (U_0)_{\xi\xi} - c_0(U_0)_\xi = f^T(t, U_0) \text{ on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_0(\cdot, \cdot) = U_0(\cdot + T, \cdot) \text{ on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ U_0(\cdot, -\infty) = y^T, \quad U_0(\cdot, +\infty) = 0 \text{ uniformly on } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.39)$$

Let us note that necessarily $c_0 > 0$ because Nadin shows in [37] that for $c < 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}$, which is a positive real number, there is no pulsating front of sped c connecting 0 and y^T . Furthermore, we have

$$\partial_\xi U_0(t, \xi) < 0, \quad \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Let $c_1 > 0$ be a real number such that there exists a pulsating front U_1 with speed c_1 such that $\partial_\xi U_1 < 0$ on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, and let $c_2 > c_1$. We are going to prove the existence of a pulsating front U_2 such that (c_2, U_2) solves (4.39) and $\partial_\xi U_2 < 0$ on \mathbb{R}^2 . Yet, by [37], the set

$$\mathcal{C} = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{there exists a pulsating front } U \text{ of speed } c \text{ such that } \partial_\xi U < 0 \text{ on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

is closed and included in $[2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}, +\infty)$. This will conclude the proof of Proposition 4.1.5 by denoting $c_T^{**} = \inf \mathcal{C}$.

Given $c_1 < c_2$ as above, let $a > 0$ and $r \in \mathbb{R}$. We define

$$\varepsilon_{a,r} = \min \left\{ \min_{[0,T] \times [-a,a]} \frac{U_1(\cdot, \cdot + r)}{2\Phi_{0,f^T}(\cdot)}, \varepsilon_0, \frac{y^T(0)}{\Phi_{0,f^T}(0)} \right\}.$$

We consider the problem

$$\begin{cases} U_t - U_{\xi\xi} - c_2 U_\xi = f^T(t, U) \text{ on } (0, T) \times (-a, a), \\ U(0, \cdot) = U(T, \cdot) \text{ on } [-a, a], \\ U(\cdot, -a) = U_1(\cdot, -a + r), \quad U(\cdot, a) = \varepsilon_{a,r} \Phi_{0,f^T} \text{ on } [0, T]. \end{cases} \quad (4.40)$$

We begin by showing that the previous problem has a solution.

Proposition 4.2.5. *There exists a solution to problem (4.40).*

Démonstration. We consider the problem

$$\begin{cases} U_t - U_{\xi\xi} - c_2 U_\xi = f^T(t, U) \text{ on } (0, +\infty) \times (-a, a), \\ U(\cdot, -a) = U_1(\cdot, -a + r), \quad U(\cdot, a) = \varepsilon_{a,r} \Phi_{0,f^T} \text{ on } [0, +\infty), \\ U(0, \cdot) = \psi \text{ on } [-a, a], \end{cases}$$

where $\psi \in \mathcal{C}^0([-a, a], [0, 1])$. This Cauchy problem admits a solution U_ψ defined on $\mathbb{R}^+ \times [-a, a]$. Furthermore, $0 \leq U_\psi \leq 1$ in $\mathbb{R}^+ \times [-a, a]$ from the maximum principle and the definition of $\varepsilon_{a,r}$. We define the closed convex set

$$C = \{\psi \in \mathcal{C}^0([-a, a], [0, 1]) \mid \varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}(0) \leq \psi \leq U_1(0, \cdot + r) \text{ on } [-a, a]\}.$$

Note that this set is not empty since $\Phi_{0,f^T} > 0$, $U_1 \leq 1$ and $\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}(0) \leq U_1(0, \cdot + r)$ on $[-a, a]$ according to the definition of $\varepsilon_{a,r}$. We start by proving that if $\psi \in C$, then $U_\psi(T, \cdot) \in C$ using a comparison lemma.

Lemma 4.2.6. *Let $\psi \in C$. Then we have*

$$\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}(t) < U_\psi(t, \xi) < U_1(t, \xi + r) \quad \forall (t, \xi) \in (0, +\infty) \times (-a, a). \quad (4.41)$$

Démonstration. Since $\partial_\xi U_1 < 0$ on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $c_1 < c_2$, the function $U_1(\cdot, \cdot + r)$ satisfies on $[0, +\infty) \times (-a, a)$,

$$(U_1(\cdot + r))_t - (U_1(\cdot + r))_{\xi\xi} - c_2(U_1(\cdot + r))_\xi - f^T(t, U_1(\cdot + r)) = (c_1 - c_2)(U_1(\cdot + r))_\xi > 0.$$

Moreover, since $\psi \in C$, we have $U_1(0, \cdot + r) \geq \psi$ on $[-a, a]$ and, according to the definition of $\varepsilon_{a,r}$ and the T -periodicity of U_1 and Φ_{0,f^T} , we have $U_1(\cdot, a+r) \geq \varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}$ on $[0, +\infty)$. Consequently, we can apply a comparison principle, and we obtain

$$U_\psi(t, \xi) \leq U_1(t, \xi + r) \quad \forall (t, \xi) \in [0, +\infty) \times [-a, a].$$

In the same way, since $\varepsilon_{a,r} \leq \varepsilon_0$, and according (4.38) and the negativity of λ_{0,f^T} , we have on $[0, +\infty) \times (-a, a)$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T})_t - (\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T})_{\xi\xi} - c_2(\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T})_\xi - f^T(t, \varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}) \\ &= \varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}(\lambda_{0,f^T} + f_u^T(t, 0)) - f^T(t, \varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}) \\ &= \varepsilon_{a,r}\lambda_{0,f^T}\Phi_{0,f^T} - (f^T(t, \varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}) - \varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}f_u^T(t, 0)) \\ &\leq \varepsilon_{a,r}\lambda_{0,f^T}\Phi_{0,f^T} - \varepsilon_{a,r}\frac{\lambda_{0,f^T}}{2}\Phi_{0,f^T} < 0. \end{aligned}$$

Furthermore since $\psi \in C$, we have $\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}(0) \leq \psi$ on $[-a, a]$ and, according to the definition of $\varepsilon_{a,r}$ and the T -periodicity of U_1 and Φ_{0,f^T} , we have $\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T} \leq U_1(\cdot, -a + r)$ on $[0, +\infty)$. Consequently, we can apply a comparison principle and we conclude that

$$\varepsilon_{a,r}\Phi_{0,f^T}(t) \leq U_\psi(t, \xi) \quad \forall (t, \xi) \in [0, T] \times [-a, a],$$

The fact that the inequalities in (4.41) are strict is a consequence of the strong maximum principle. \square

We return to the proof of Proposition 4.2.5. We consider

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} & : & C \rightarrow C \\ & & \psi \mapsto U_\psi(T, \cdot) \end{array}$$

Owing to (4.41) and the T -periodicity of Φ_{0,f^T} and U_1 , \mathcal{T} is well defined. We are going to demonstrate using the Schauder's fixed point theorem that the function \mathcal{T} has a fixed point in the

closed convex set C . We show now that \mathcal{T} is continuous. In fact we show that \mathcal{T} is a Lipschitz-continuous function. Let ψ and φ in C . We have on $(0, T] \times [-a, a]$

$$(U_\psi - U_\varphi)_t - (U_\psi - U_\varphi)_{\xi\xi} - c_2(U_\psi - U_\varphi)_\xi = \beta(t, \xi)(U_\psi - U_\varphi),$$

where $\beta : (0, T] \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$\beta(t, \xi) = \begin{cases} \frac{f^T(t, U_\psi(t, \xi)) - f^T(t, U_\varphi(t, \xi))}{U_\psi(t, \xi) - U_\varphi(t, \xi)}, & \text{if } U_\psi(t, \xi) \neq U_\varphi(t, \xi), \\ f_u^T(t, U_\psi(t, \xi)), & \text{if } U_\psi(t, \xi) = U_\varphi(t, \xi). \end{cases}$$

Since $|\beta| \leq \|f_u^T\|_{L^\infty([0, T] \times [0, 1])}$ on $(0, T] \times [-a, a]$, and since $U_\psi - U_\varphi = 0$ on $[0, T] \times \{-a, a\}$, the maximum principle yields

$$|U_\psi(t, \xi) - U_\varphi(t, \xi)| \leq \|\psi - \varphi\|_{L^\infty([-a, a])} e^{\|f_u^T\|_{L^\infty([0, T] \times [0, 1])} t}, \quad \forall (t, \xi) \in [0, T] \times [-a, a].$$

If we take $t = T$, we obtain

$$\|U_\psi(T, \cdot) - U_\varphi(T, \cdot)\|_{L^\infty([-a, a])} \leq e^{\|f_u^T\|_{L^\infty([0, T] \times [0, 1])} T} \|\psi - \varphi\|_{L^\infty([-a, a])}.$$

So \mathcal{T} is a Lipschitz-continuous function.

We prove now that $\mathcal{T}(C)$ is compact. Let $(\psi_n)_n$ be a sequence of C . By standard parabolic estimates, the sequence $(U_{\psi_n}(T, \cdot))_n$ is bounded in $\mathcal{C}^{2,\alpha}([-a, a], [0, 1])$ for any $\alpha \in (0, 1)$. Since $\mathcal{C}^{2,\alpha}([-a, a], [0, 1])$ embeds compactly into $\mathcal{C}^0([-a, a], [0, 1])$, $(U_{\psi_n}(T, \cdot))_n$ converges up to extraction of a subsequence in C .

So, according to Shauder's fixed point theorem, there exists $\psi_{a,r} \in \mathcal{C}([-a, a], [0, 1])$ such that $\mathcal{T}(\psi_{a,r}) = \psi_{a,r}$, that is $U_{\psi_{a,r}}(T, \cdot) = U_{\psi_{a,r}}(0, \cdot)$. Actually, the function $U_{\psi_{a,r}}$ is solution of (4.40). By uniqueness and T -periodicity of f^T , $U_{\psi_{a,r}}$ can be extended as a T -periodic solution of (4.40) in $\mathbb{R} \times [-a, a]$. \square

To simplify the notations, we denote now $U_{a,r}$ instead of $U_{\psi_{a,r}}$. Owing to Lemma 4.2.6 and the T -periodicity of $U_{a,r}$, we have the following inequalities

$$\varepsilon_{a,r} \Phi_{0,f^T}(t) < U_{a,r}(t, \xi) < U_1(t, \xi + r) \quad \forall (t, \xi) \in [0, T] \times (-a, a). \quad (4.42)$$

We are now going to use a sliding method and we first give a comparison lemma.

Lemma 4.2.7. *Let U and V be two T -periodic functions solving problem (4.40). Let $h \in [0, 2a]$. We define $V_h(t, \xi) = V(t, \xi + h)$ for any $(t, \xi) \in [0, T] \times [-a, a - h]$. Then, we have*

$$V_h \leq U \quad \text{on } [0, T] \times [-a, a - h].$$

Démonstration. We denote $I_h = [-a, a - h]$. For $h = 2a$, we have $I_h = \{-a\}$. Since $U(\cdot, -a) = U_1(\cdot, -a + r)$, $V_{2a}(\cdot, -a) = V(\cdot, a) = \varepsilon_{a,r} \Phi_{0,f^T}$ and $\varepsilon_{a,r} \Phi_{0,f^T} \leq \frac{U_1(\cdot, -a+r)}{2} < U_1(\cdot, -a + r)$ on $[0, T]$, it occurs that $V_{2a} < U$ on $[0, T] \times I_{2a}$. Furthermore, $V_h \leq U$ on $[0, T] \times I_h$ for all $h \in [0, 2a]$ sufficiently close to $2a$, by continuity of U and V . Consequently, we can define

$$h^* = \inf \{h \geq 0 \mid \forall h \in [\underline{h}, 2a], V_h \leq U \text{ on } [0, T] \times I_h\}.$$

We have $0 \leq h^* < 2a$. We are going to show bwoc that $h^* = 0$. Thus let us suppose that $h^* > 0$. By continuity and T -periodicity of U and V_h^* , the definition of h^* implies that

$$V_{h^*} \leq U \text{ on } \mathbb{R} \times I_{h^*}. \quad (4.43)$$

Furthermore, if we define the bounded function $\eta : \mathbb{R} \times I_{h^*} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\eta(t, \xi) = \begin{cases} \frac{f^T(t, U(t, \xi)) - f^T(t, V_{h^*}(t, \xi))}{U(t, \xi) - V_{h^*}(t, \xi)}, & \text{if } U(t, \xi) \neq V_{h^*}(t, \xi), \\ f_u^T(t, U(t, \xi)), & \text{if } U(t, \xi) = V_{h^*}(t, \xi), \end{cases}$$

then, we have on $\mathbb{R} \times I_{h^*}$

$$(U - V_{h^*})_t - c_2(U - V_{h^*})_{\xi\xi} - (U - V_{h^*})_{\xi\xi} = \eta(t, \xi)(U - V_{h^*}). \quad (4.44)$$

Consequently, according to (4.43) and (4.44), if there exists $(t^*, \xi^*) \in \mathbb{R} \times (-a, a - h^*)$ such that $U(t^*, \xi^*) = V_{h^*}(t^*, \xi^*)$, then, by the strong maximum principle, the continuity and the T -periodicity of U and V_{h^*} , we have

$$V_{h^*} = U \text{ on } \mathbb{R} \times I_{h^*}.$$

Yet, according to (4.42) (which is automatically fulfilled from the arguments used in Lemma 4.2.6), and since $\partial_\xi U_1 < 0$ on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, we have for any $t \in \mathbb{R}$,

$$V_{h^*}(t, -a) = V(t, -a + h^*) < U_1(t, -a + h^* + r) < U_1(t, -a + r) = U(t, -a).$$

Consequently, $V_{h^*} < U$ on $\mathbb{R} \times [-a, a - h^*]$. Furthermore, according to (4.42), for any $t \in \mathbb{R}$, we also have

$$V_{h^*}(t, a - h^*) = V(t, a) = \varepsilon_{a,r} \Phi_{0,f^T}(t) < U(t, a - h^*).$$

So, it occurs that

$$V_{h^*} < U \text{ on } \mathbb{R} \times I_{h^*}.$$

Since $[0, T] \times I_{h^*}$ is a compact set, and both U and V are continuous on $[0, T] \times [-a, a]$, there exists $h_0 \in (0, h^*)$ such that for any $\eta \in (0, h_0)$, we have $V_{h^*-\eta} < U$ on $[0, T] \times I_{h^*-\eta}$. This contradicts the definition of h^* . Consequently we have $h^* = 0$ and the proof of Lemma 4.2.7 is complete. \square

Corollary 4.2.8. *There exists a unique function $U_{a,r}$ solving (4.40).*

Démonstration. We apply the conclusion of Lemma 4.2.7 with $h = 0$ and reverse the roles of U and V . \square

Corollary 4.2.9. *The function $r \in \mathbb{R} \mapsto U_{a,r} \in \mathcal{C}^0([0, T] \times [-a, a], [0, 1])$ is continuous.*

Démonstration. Let $r^* \in \mathbb{R}$ and $(r_n)_n$ be a sequence of real numbers such that $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r^*$. According to standard parabolic estimates and the T -periodicity of each function U_{a,r_n} , there exists U^* such that, up to extraction of a subsequence, $U_{a,r_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U^*$ in $\mathcal{C}^{1,\frac{\alpha}{2}}$ in t and in $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ in ξ , for any $\alpha \in (0, 1)$. Consequently,

$$\begin{cases} (U^*)_t - (U^*)_{\xi\xi} - c_2(U^*)_{\xi} = f^T(t, U^*) \text{ on } \mathbb{R} \times (-a, a), \\ U^*(0, \cdot) = U^*(T, \cdot) \text{ on } [-a, a], \\ U^*(\cdot, -a) = U_1(\cdot, -a + r^*), \quad U^*(\cdot, a) = \varepsilon_{a,r^*} \Phi_{0,f^T} \text{ on } [0, T]. \end{cases}$$

The uniqueness of the solution of the previous problem (Corollary 4.2.8) implies that we have $U^* = U_{a,r^*}$, and that the whole sequence (U_{a,r_n}) converges to U^* . \square

Corollary 4.2.10. For any $t \in [0, T]$ and $\xi \in (-a, a)$, we have

$$\partial_\xi U_{a,r}(t, \xi) < 0.$$

Démonstration. We apply Lemma 4.2.7 with $U = V = U_{a,r}$. The strict inequality is a consequence of the maximum principle applied to $\partial_\xi U_{a,r}$. \square

Proposition 4.2.11. There exist $\varepsilon_a \in (0, \varepsilon_0]$ and $r_a \in \mathbb{R}$ such that $U_{a,r_a}(0, 0) = \frac{\varepsilon_a \Phi_{0,f^T}(0)}{2}$.

Démonstration. There exists $(t_{a,r}, \xi_{a,r}) \in [0, T] \times [-a, a]$ such that

$$\varepsilon_{a,r} = \min \left\{ \frac{U_1(t_{a,r}, \xi_{a,r} + r)}{2\Phi_{0,f^T}(t_{a,r})}, \varepsilon_0, \frac{y^T(0)}{\Phi_{0,f^T}(0)} \right\}$$

Let $(r_n)_n$ be a sequence of real numbers such that $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. There exists a function $U_{a,-\infty}$ such that up to extraction of a subsequence, $U_{a,r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U_{a,-\infty}$ in $\mathcal{C}^{0,\alpha}([0, T] \times [-a, a])$ for any $\alpha \in (0, 1)$. Since $(t_{a,r_n})_n$ is bounded, there exists $t_a \in [0, T]$ such that up to extraction of a subsequence, we have $t_{a,r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t_a$. So, according to the fact that (ξ_{a,r_n}) is also bounded (because a is fixed here), it follows that

$$\varepsilon_{a,r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_a := \min \left\{ \frac{y^T(t_a)}{2\Phi_{0,f^T}(t_a)}, \varepsilon_0, \frac{y^T(0)}{\Phi_{0,f^T}(0)} \right\}$$

We thus have $U_{a,-\infty}(\cdot, a) = \varepsilon_a \Phi_{0,f^T}$ on $[0, T]$. Consequently, since $\partial_\xi U_{a,-\infty} \leq 0$ on $[0, T] \times [-a, a]$, it occurs that $U_{a,-\infty}(0, 0) \geq \varepsilon_a \Phi_{0,f^T}(0)$. So there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $r_{n_0} < 0$ and

$$U_{a,r_{n_0}}(0, 0) \geq \frac{3}{4} \varepsilon_a \Phi_{0,f^T}(0).$$

Let now $(\tilde{r}_n)_n$ be a sequence of real numbers such that $\tilde{r}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. There exists a function $U_{a,+\infty}$ such that up to extraction of a subsequence $U_{a,\tilde{r}_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U_{a,+\infty}$ in $\mathcal{C}^{0,\alpha}([0, T] \times [-a, a])$ for any $\alpha \in (0, 1)$. Furthermore, for any $t \in [0, T]$, we have $U_{a,\tilde{r}_n}(t, -a) = U_1(t, -a + \tilde{r}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Consequently, since $\partial_\xi U_{a,+\infty} \leq 0$ and $U_{a,+\infty} \geq 0$ on $[0, T] \times [-a, a]$, it occurs that $U_{a,+\infty} \equiv 0$. So, there exists $n_1 \in \mathbb{N}$ such that $\tilde{r}_{n_1} > 0$ and

$$U_{a,\tilde{r}_{n_1}}(0, 0) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_a \Phi_{0,f^T}(0).$$

According to Corollary 4.2.9, there exists $r_a \in (r_{n_0}, \tilde{r}_{n_1})$ such that

$$U_{a,r_a}(0, 0) = \frac{1}{2} \varepsilon_a \Phi_{0,f^T}(0),$$

which completes the proof. \square

Proposition 4.2.12. There exists a sequence $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ such that $U_{a_n,r_{a_n}}$ converges on any compact set in $\mathcal{C}^{1,\frac{\alpha}{2}}$ in t and in $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ in ξ , for any $\alpha \in (0, 1)$, to a function U_2 solving (4.39) with $c = c_2$, and such that $(U_2)_\xi < 0$ on \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Since t_a is bounded, there exist $t^* \in [0, T]$ and a sequence $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ such that $t_{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^*$. Consequently,

$$\varepsilon_{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^* := \min \left\{ \frac{y^T(t^*)}{2\Phi_{0,f^T}(t^*)}, \varepsilon_0, \frac{y^T(0)}{\Phi_{0,f^T}(0)} \right\} > 0.$$

According the standard parabolic estimates, up to extraction of a subsequence, $U_{a_n, r_{a_n}}$ converges on any compact set to a function U_2 in $\mathcal{C}^{1, \frac{\alpha}{2}}$ in t and in $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ in ξ , for any $\alpha \in (0, 1)$. The function U_2 satisfies

$$\begin{cases} (U_2)_t - (U_2)_{\xi\xi} - c_2(U_2)_\xi = f^T(t, U_2) & \text{on } [0, T] \times \mathbb{R}, \\ U_2(0, \cdot) = U_2(T, \cdot) & \text{on } \mathbb{R}, \\ U_2(0, 0) = \frac{1}{2}\varepsilon^*\Phi_{0,f^T}(0), \\ (U_2)_\xi \leq 0 \text{ on } [0, T] \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Since $(\varepsilon^*\Phi_{0,f^T})' \leq f^T(t, \varepsilon^*\Phi_{0,f^T})$ and $(y^T)' = f^T(t, y^T)$ on $[0, T]$, and since $\varepsilon^*\Phi_{0,f^T}(0) \leq y^T(0)$, it occurs that $\varepsilon^*\Phi_{0,f^T} \leq y^T$ on $[0, T]$. Consequently

$$U_2(0, 0) \in \left(0, \frac{y^T(0)}{2}\right].$$

The functions $U_2(\cdot, -\infty)$ and $U_2(\cdot, +\infty)$ solve the equation $y' = f(t, y)$ on $[0, T]$. Furthermore, $U_2(t, \xi) \leq y^T(t)$ for all $t \in [0, T]$ and all $\xi \in \mathbb{R}$, since this inequality holds for U_1 and since each function $U_{a,r}$ satisfies (4.42). Consequently, since $(U_2)_\xi \leq 0$ on $[0, T] \times \mathbb{R}$, we have necessarily $U_2(\cdot, -\infty) = y^T$ and $U_2(\cdot, +\infty) = 0$. Finally we apply the strong maximum principle to the equation satisfied by $(U_2)_\xi$ and obtain $(U_2)_\xi < 0$ on \mathbb{R}^2 (otherwise $(U_2)_\xi$ would be identically equal to zero, which is impossible since $U_2(\cdot, -\infty) = y^T$ and $U_2(\cdot, +\infty) = 0$). \square

4.3 Nonlinearities asymptotically periodic in time with perturbation

4.3.1 Proof of Theorem 4.1.6

Let $T > 0$ with $T \neq T^*$ (that is $\lambda_{0,f^T} \neq 0$). We define

$$\varepsilon_T = \frac{1}{C+1} \min \left\{ |\lambda_{0,f^T}|, -\frac{g(2)}{2} \right\} > 0,$$

where C is defined in (4.23). Let $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$. According to (4.23) and (4.25), there exists $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ such that for all $t \geq n_\varepsilon T$ and for all $u \geq 0$ we have

$$f^T(t, u) - (C+1)\varepsilon u \leq f_\varepsilon(t, u) \leq f^T(t, u) + (C+1)\varepsilon u. \quad (4.45)$$

We define the T -periodic functions $f_{-\varepsilon}^T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ and $f_\varepsilon^T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f_{-\varepsilon}^T(t, u) = f^T(t, u) - (C+1)\varepsilon u, \quad \text{and} \quad f_\varepsilon^T(t, u) = f^T(t, u) + (C+1)\varepsilon u. \quad (4.46)$$

According to (4.7), it occurs that

$$\begin{cases} f_{-\varepsilon}^T(t, u) \leq 0, & \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times [2, +\infty), \\ f^T(t, u) \leq 0, & \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times [2, +\infty). \end{cases} \quad (4.47)$$

Furthermore, according to (4.4) and (4.6), for any $u \in [2, +\infty)$, we have $g(u)/u \leq g(2)/2 < 0$. Consequently, since $\varepsilon \in (0, -\frac{1}{C+1} \frac{g(2)}{2})$, the following inequality is true

$$f_\varepsilon^T(t, u) \leq 0, \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times [2, +\infty), \quad (4.48)$$

Concerning the principal eigenvalues associated with the equilibrium 0 and functions f^T , $f_{-\varepsilon}^T$ and f_ε^T , the following relations hold

$$\begin{cases} \lambda_{0,f_\varepsilon^T} = \lambda_{0,f^T} - (C+1)\varepsilon, \\ \lambda_{0,f_{-\varepsilon}^T} = \lambda_{0,f^T} + (C+1)\varepsilon. \end{cases} \quad (4.49)$$

We begin by handling the case where $T < T^*$. Owing to (4.49), the fact that $\lambda_{0,f^T} > 0$ and since $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda_{0,f^T}}{C+1})$, we have

$$\lambda_{0,f_\varepsilon^T} > 0. \quad (4.50)$$

We consider $v_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} (v_\varepsilon)_t - (v_\varepsilon)_{xx} = f_\varepsilon^T(t, v_\varepsilon) \text{ on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ v_\varepsilon(0, \cdot) = u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot) \text{ on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Owing to (4.45) and the T -periodicity of f_ε^T , the function $u_\varepsilon(\cdot + n_\varepsilon T, \cdot)$ satisfies on $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$(u_\varepsilon(\cdot + n_\varepsilon T, \cdot))_t - (u_\varepsilon(\cdot + n_\varepsilon T, \cdot))_{xx} = f_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, u_\varepsilon(\cdot + n_\varepsilon T, \cdot)) \leq f_\varepsilon^T(t, u_\varepsilon(\cdot + n_\varepsilon T, \cdot)).$$

So, applying a comparison principle, we obtain

$$0 \leq u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) \leq v_\varepsilon(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.51)$$

According to (4.50), Proposition 4.1.2 applied with the T -periodic nonlinearity f_ε^T implies that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} v_\varepsilon(t, x) = 0.$$

Hence, owing to (4.51),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} u_\varepsilon(t, x) = 0,$$

which concludes the proof of the first part of Theorem 4.1.6.

We now consider the case where $T > T^*$. Since $\lambda_{w^T, f^T} > 0$, there exists $\mu_T > 0$ such that for all $\mu \in (0, \mu_T)$ and for all $(t, u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2]^2$, we have

$$|u - v| \leq \mu \Rightarrow |f^T(t, v) - f^T(t, u) - f_u^T(t, u)(v - u)| \leq \frac{\lambda_{w^T, f^T}}{2} |v - u|. \quad (4.52)$$

We define the two positive real numbers \tilde{M}_T and $\tilde{\varepsilon}_T$ by

$$\tilde{M}_T = \frac{8(C+1)}{\lambda_{w^T, f^T}} \frac{\sup_{[0,T]} w^T}{\inf_{[0,T]} \Phi_{w^T, f^T}} > 0,$$

and

$$\tilde{\varepsilon}_T = \min \left\{ \varepsilon_T, \frac{\lambda_{w^T, f^T}}{4(C+1)}, \frac{\inf_{[0,T]} w^T}{2\tilde{M}_T \sup_{[0,T]} \Phi_{w^T, f^T}}, \frac{\min\{\mu_T, 1\}}{\tilde{M}_T \sup_{[0,T]} \Phi_{w^T, f^T}} \right\} > 0, \quad (4.53)$$

where Φ_{w^T, f^T} is the principal eigenfunction associated with f^T and the equilibrium state w^T . Let $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_T)$. According to (4.49), the fact that $\lambda_{0, f^T} < 0$ and since $\varepsilon \in (0, -\frac{\lambda_{0, f^T}}{C+1})$, we have

$$\lambda_{0, f_{-\varepsilon}^T} < 0, \quad \lambda_{0, f^T} < 0, \quad \text{and} \quad \lambda_{0, f_\varepsilon^T} < 0. \quad (4.54)$$

Owing to (4.47), (4.48) and (4.54), the same proof as in Proposition 4.1.1 implies that there exists a unique T -periodic positive equilibrium state w_ε^T (resp. $w_{-\varepsilon}^T$) associated with f_ε^T (resp. $f_{-\varepsilon}^T$). Furthermore, for any $t \in \mathbb{R}$, we have $w_\varepsilon^T(t) \in (0, 2]$ (resp. $w_{-\varepsilon}^T(t) \in (0, 2]$).

Lemma 4.3.1. *There exists $M_T > 0$ independent of ε such that*

$$\begin{cases} \sup_{t \in [0, T]} |w_\varepsilon^T(t) - w^T(t)| \leq M_T \varepsilon, \\ \sup_{t \in [0, T]} |w_{-\varepsilon}^T(t) - w^T(t)| \leq M_T \varepsilon. \end{cases} \quad (4.55)$$

Démonstration. We begin by proving the first inequality. We define the function $\bar{v}_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\bar{v}_\varepsilon(t) = w^T(t) + \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t).$$

We are interested in the problem

$$\begin{cases} y' = f_\varepsilon^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T). \end{cases} \quad (4.56)$$

We will show that \bar{v}_ε is a strict supersolution and w^T is a strict subsolution of (4.56). Let $t \in \mathbb{R}$. We have

$$\begin{aligned} (\bar{v}_\varepsilon)'(t) - f^T(t, \bar{v}_\varepsilon(t)) - (C+1)\varepsilon \bar{v}_\varepsilon(t) \\ = f^T(t, w^T(t)) + \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) f_u^T(t, w^T(t)) - f^T(t, \bar{v}_\varepsilon(t)) \\ + \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) \lambda_{w^T, f^T} - (C+1)\varepsilon \bar{v}_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Since $\varepsilon \in (0, \frac{\mu_T}{\tilde{M}_T \sup_{[0,T]} \Phi_{w^T, f^T}})$, we have $|\bar{v}_\varepsilon(t) - w^T(t)| \leq \mu_T$. Furthermore, $w^T(t) \in [0, 1]$, and since $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\tilde{M}_T \sup_{[0,T]} \Phi_{w^T, f^T}})$, the definition of \bar{v}_ε implies that $\bar{v}_\varepsilon(t) \in [0, 2]$. Consequently, it follows from (4.52) that

$$f^T(t, w^T(t)) + \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) f_u^T(t, w^T(t)) - f^T(t, \bar{v}_\varepsilon(t)) \geq -\frac{\lambda_{w^T, f^T}}{2} \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t).$$

Consequently,

$$\begin{aligned} (\bar{v}_\varepsilon)'(t) - f^T(t, \bar{v}_\varepsilon(t)) - (C+1)\varepsilon \bar{v}_\varepsilon(t) \\ \geq \frac{\lambda_{w^T, f^T}}{2} \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) - (C+1)\varepsilon \bar{v}_\varepsilon(t) \\ = \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) \left(\frac{\lambda_{w^T, f^T}}{2} - (C+1)\varepsilon \right) - (C+1)\varepsilon w^T(t). \end{aligned}$$

Yet $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda_{w^T, f^T}}{4(C+1)})$. So

$$\frac{\lambda_{w^T, f^T}}{2} - (C+1)\varepsilon \geq \frac{\lambda_{w^T, f^T}}{4}.$$

Hence

$$\begin{aligned} (\bar{v}_\varepsilon)'(t) - f^T(t, \bar{v}_\varepsilon(t)) - (C+1)\varepsilon \bar{v}_\varepsilon(t) &\geq \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) \frac{\lambda_{w^T, f^T}}{4} - (C+1)\varepsilon w^T(t) \\ &= \varepsilon \left(\frac{\lambda_{w^T, f^T}}{4} \tilde{M}_T \Phi_{w^T, f^T}(t) - (C+1)w^T(t) \right). \end{aligned}$$

Consequently, according to the definition of \tilde{M}_T , it follows that

$$\frac{\lambda_{w^T, f^T}}{4} \tilde{M}_T \Phi_{w^T, f^T}(t) - (C+1)w^T(t) = \left(2 \inf_{[0, T]} \Phi_{w^T, f^T} \sup_{[0, T]} w^T - w^T(t) \right) (C+1) > 0.$$

Finally, \bar{v}_ε is a strict supersolution of (4.56).

We now show that w^T is a strict subsolution of this problem. Let $t \in \mathbb{R}$. We have

$$(w^T)'(t) - f^T(t, w^T(t)) - (C+1)\varepsilon w^T(t) = -(C+1)\varepsilon w^T(t) < 0.$$

According to Lemma 3.1 of [38], there exists a solution \tilde{w}_ε of (4.56), and one has

$$w^T(t) < \tilde{w}_\varepsilon(t) < w^T(t) + \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.57)$$

In particular, \tilde{w}_ε is a positive solution of (4.56). So, by uniqueness, we have $\tilde{w}_\varepsilon = w_\varepsilon^T$. Finally, inequalities (4.57) rewrite

$$\sup_{t \in [0, T]} |w^T(t) - w_\varepsilon^T(t)| \leq \varepsilon M_T,$$

where M_T is defined by $M_T = \tilde{M}_T \sup_{[0, T]} \Phi_{w^T, f^T}$.

We now give a sketch of the proof of the second inequality of Lemma 4.3.1. We define the function $\underline{v}_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\underline{v}_\varepsilon(t) = w^T(t) - \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}.$$

We are interested in the problem

$$\begin{cases} y' = f_{-\varepsilon}^T(t, y) \text{ on } \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T). \end{cases} \quad (4.58)$$

We can show in the same way as previously that $\underline{v}_\varepsilon$ is a strict subsolution and that w^T is a strict supersolution of (4.58). According to Lemma 3.1 of [38], there exists a solution \hat{w}_ε of (4.58), and one has

$$w^T(t) - \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) < \hat{w}_\varepsilon(t) < w^T(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.59)$$

Yet $\varepsilon \in (0, \frac{\inf_{[0, T]} w^T}{2\tilde{M}_T \sup_{[0, T]} \Phi_{w^T, f^T}})$. So for any $t \in \mathbb{R}$

$$w^T(t) - \tilde{M}_T \varepsilon \Phi_{w^T, f^T}(t) \geq w^T(t) - \frac{1}{2} \frac{\Phi_{w^T, f^T}}{\sup_{[0, T]} \Phi_{w^T, f^T}} \inf_{[0, T]} w^T > 0.$$

Consequently \hat{w}_ε is a positive solution of (4.58). So, by uniqueness, we have $\hat{w}_\varepsilon = w_{-\varepsilon}^T$. Finally, inequalities (4.59) rewrite

$$\sup_{t \in [0, T]} |w^T(t) - w_{-\varepsilon}^T(t)| \leq \varepsilon M_T,$$

which completes the proof of Lemma 4.3.1. \square

Let us now complete the proof of Theorem 4.1.6. We recall that $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_T)$, where $\tilde{\varepsilon}_T$ is defined in (4.53). Let $K \subset \mathbb{R}$ be a compact set and let $\eta > 0$. We consider $\tilde{u}_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\tilde{u}_{-\varepsilon} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solving respectively

$$\begin{cases} (\tilde{u}_\varepsilon)_t - (\tilde{u}_\varepsilon)_{xx} = f_\varepsilon^T(t, \tilde{u}_\varepsilon) \text{ on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_\varepsilon(0, \cdot) = u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot) \text{ on } \mathbb{R}, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} (\tilde{u}_{-\varepsilon})_t - (\tilde{u}_{-\varepsilon})_{xx} = f_{-\varepsilon}^T(t, \tilde{u}_{-\varepsilon}) \text{ on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_{-\varepsilon}(0, \cdot) = u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot) \text{ on } \mathbb{R}, \end{cases}$$

where $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ is such that (4.45) holds for all $(t, u) \in [n_\varepsilon T, +\infty) \times \mathbb{R}^+$, and u_ε solves (4.26). The function $v_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x)$ satisfies

$$\begin{cases} (v_\varepsilon)_t - (v_\varepsilon)_{xx} = f_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, v_\varepsilon) \text{ on } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ v_\varepsilon(0, \cdot) = u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot) \text{ on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Owing to (4.45) and the T -periodicity of f_ε^T , it occurs that on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$(v_\varepsilon)_t - (v_\varepsilon)_{xx} = f_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, v_\varepsilon) \leq f_\varepsilon^T(t + n_\varepsilon T, v_\varepsilon) = f_\varepsilon^T(t, v_\varepsilon)$$

Consequently, since $v_\varepsilon(0, \cdot) = u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot) = \tilde{u}_\varepsilon(0, \cdot)$ on \mathbb{R} , applying a comparison principle, we obtain

$$v_\varepsilon(t, x) \leq \tilde{u}_\varepsilon(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

In other words

$$u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) \leq \tilde{u}_\varepsilon(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Actually, we can show in the same way that

$$\tilde{u}_{-\varepsilon}(t, x) \leq u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) \leq \tilde{u}_\varepsilon(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

According to the T -periodicity of w^T , we have $w^T = w^T(\cdot + n_\varepsilon T)$ on \mathbb{R} . Hence

$$\tilde{u}_{-\varepsilon}(t, x) - w^T(t) \leq u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) - w^T(t + n_\varepsilon T) \leq \tilde{u}_\varepsilon(t, x) - w^T(t), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.60)$$

Therefore, for any $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times K$,

$$\begin{cases} \tilde{u}_{-\varepsilon}(t, x) - w^T(t) \geq -\sup_{x \in K} |\tilde{u}_{-\varepsilon}(t, x) - w_{-\varepsilon}^T(t)| - \sup_{t \in [0, T]} |w_{-\varepsilon}^T(t) - w^T(t)|, \\ \tilde{u}_\varepsilon(t, x) - w^T(t) \leq \sup_{x \in K} |\tilde{u}_\varepsilon(t, x) - w_\varepsilon^T(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |w_\varepsilon^T(t) - w^T(t)|. \end{cases}$$

On the other hand, owing to Proposition 4.1.2, there exists $t_{\varepsilon, K, \eta} > 0$ such that for any $t \geq t_{\varepsilon, K, \eta}$

$$\sup_{x \in K} |\tilde{u}_{-\varepsilon}(t, x) - w_{-\varepsilon}^T(t)| + \sup_{x \in K} |\tilde{u}_\varepsilon(t, x) - w_\varepsilon^T(t)| \leq \eta. \quad (4.61)$$

According to Lemma 4.3.1, (4.60) and (4.61), we thus have, for any $(t, x) \in [t_{\varepsilon, K, \eta}, +\infty) \times K$

$$|u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) - w^T(t + n_\varepsilon T)| \leq \eta + M_T \varepsilon.$$

In other words, for any $t \geq t_{\varepsilon, K, \eta} + n_\varepsilon T$ we obtain

$$\sup_{x \in K} |u_\varepsilon(t, x) - w^T(t)| \leq \eta + M_T \varepsilon,$$

That is

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |u_\varepsilon(t, x) - w^T(t)| \leq M_T \varepsilon,$$

which completes the proof of Theorem 4.1.6.

4.3.2 Proof of Proposition 4.1.7

We begin by proving (I). According to (4.25), there exists $t_0 \geq 0$ such that

$$f(t, u) \leq f^{T^*}(t, u) - \frac{g(2)}{2}u, \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \forall u \in [0, +\infty), \quad (4.62)$$

where we recall that $g(2) < 0$. According to (4.4) and (4.6), for any $u \in [2, +\infty)$, we have $g(u)/u \leq g(2)/2 < 0$. Consequently, (4.62) implies that

$$f(t, u) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \forall u \in [2, +\infty), \quad (4.63)$$

We define

$$M = \max\{2, \sup_{\mathbb{R}} u_0\}.$$

The real number M is a supersolution of (4.26). Furthermore, 0 is solution of (4.26) and $0 \leq u(0, \cdot) \leq M$ on \mathbb{R} . Consequently, according to the maximum principle we have

$$0 \leq u(t, x) \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.64)$$

We denote $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ the function satisfying

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \text{ on } \mathbb{R}^+, \\ v(0) = M. \end{cases}$$

Owing to (4.64), we have $0 \leq u(t_0, \cdot) \leq M$ on \mathbb{R} . It follows from the comparison principle that

$$0 \leq u(t + t_0, x) \leq v(t), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Furthermore, since $2 \leq M$, it follows from (4.63) that

$$v(t) \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

To summarize

$$0 \leq u(t, +t_0, x) \leq v(t) \leq M, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.65)$$

We will show that $v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. We argue bwoc assuming there exists a real number $\delta_0 > 0$ and a sequence $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ such that

$$v(t_n) > \delta_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

For any $n \in \mathbb{N}$, we write $t_n = \tilde{t}_n + k_n T^*$, where $\tilde{t}_n \in [0, T^*)$ and $k_n \in \mathbb{N}$, and we define the function $v_n : [-k_n T^*, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ by $v_n(t) = v(t + k_n T^*)$. The function v_n satisfies

$$\begin{cases} v'_n(t) = f(t + k_n T^*, v_n(t)) & \forall t \in [-k_n T^*, +\infty), \\ v_n(\tilde{t}_n) = v(t_n) > \delta_0. \end{cases}$$

Up to extraction of a subsequence, $\tilde{t}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^* \in [0, T^*]$. Consequently, according to (4.25) and the Arzela-Ascoli theorem, there exists $v^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v^*$ locally uniformly on \mathbb{R} and which satisfies

$$\begin{cases} (v^*)' = f^{T^*}(t, v^*) & \text{on } \mathbb{R}, \\ v^*(t^*) \geq \delta_0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Furthermore, owing to (4.65), we have

$$0 \leq v^*(t) \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.67)$$

We consider $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} \sigma' = f^{T^*}(t, \sigma) & \text{on } \mathbb{R}^+, \\ \sigma(0) = M. \end{cases}$$

Owing to (4.7) and the fact that $M \geq 1$, we have $\sigma(0) \geq \sigma(T^*)$. Consequently, the sequence $(\sigma(nT^*))_n$ is nonincreasing. Furthermore, it is bounded below by 0. Hence, it converges up to extraction of a subsequence to a real number $l \geq 0$. For any $n \in \mathbb{N}$, we define the function $\sigma_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ by $\sigma_n(t) = \sigma(t + nT^*)$. The sequence $(\sigma_n)_n$ converges up to extraction of a subsequence in $C^1([0, T^*])$ to a function σ^* satisfying

$$\begin{cases} (\sigma^*)' = f^{T^*}(t, \sigma^*) & \text{on } [0, T^*], \\ \sigma^*(0) = \sigma^*(T^*) = l. \end{cases}$$

According to Proposition 4.1.1, we have necessarily $\sigma^* = 0$, and thus, the convergence holds for all the sequence. Owing to (4.67), for any $n \in \mathbb{N}$, we have $v^*(-nT^*) \leq M$. Consequently, since f^{T^*} is T^* -periodic, we can apply a comparison principle and we obtain

$$v^*(-nT^* + t) \leq \sigma(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particular

$$v^*(t^*) \leq \sigma_n(t^*), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$, we obtain

$$v^*(t^*) \leq \sigma^*(t^*) = 0,$$

which is a contradiction with (4.66). Consequently $v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ and thus, we conclude the proof of (I) using (4.65).

We now prove (II). We begin by considering the case where $f(t, u) = f^{T^*}(t, u)$ and $p(t, u) = u$ for any $(t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. In this case, we have

$$f_\varepsilon(t, u) = f^{T^*}(t, u) + \varepsilon u, \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Let $\varepsilon \in (0, -g(2)/2)$. The function f_ε is T^* -periodic, and we have

$$f_\varepsilon(t, u) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [2, +\infty).$$

Furthermore $\lambda_{0,f_\varepsilon} = \lambda_{0,f^{T^*}} - \varepsilon = -\varepsilon < 0$. Consequently, owing to Theorem 4.1.1, there exists $w_\varepsilon^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ solving (4.14) with f_ε as nonlinearity. According to Proposition 4.1.2, for all compact set $K \subset \mathbb{R}$, we have

$$\sup_{x \in K} |u_\varepsilon(t, x) - w_\varepsilon^T(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

We now consider the case where $p(t, u) \leq 0$ for any $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. In this case

$$f_\varepsilon(t, u) \leq f^{T^*}(t, u), \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

We denote u the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f^{T^*}(t, u) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

From the comparison principle, it occurs that

$$0 \leq u_\varepsilon(t, x) \leq u(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.68)$$

According to (I), we have $\sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) = 0$. Consequently $\sup_{x \in \mathbb{R}} u_\varepsilon(t, x) = 0$, which concludes the proof.

4.3.3 Proof of Theorem 4.1.8

Démonstration. Let $T > T^*$ and $c \in (0, c_T^*)$, where c_T^* is the critical speed associated with f^T defined in Proposition 4.1.3. We recall that for $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_T)$, where $\tilde{\varepsilon}_T$ is defined in (4.53), inequalities (4.45), (4.47), (4.48) and (4.54) are satisfied. Furthermore, the critical speeds associated with nonlinearities f_ε^T and $f_{-\varepsilon}^T$ are respectively defined by

$$c_{T,\varepsilon}^* = 2\sqrt{|\lambda_{0,f_\varepsilon^T}|} = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T} + (C+1)\varepsilon}, \quad \text{and} \quad c_{T,-\varepsilon}^* = 2\sqrt{|\lambda_{0,f_{-\varepsilon}^T}|} = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T} - (C+1)\varepsilon}.$$

In particular, since $c_T^* = 2\sqrt{|\lambda_{0,f^T}|} = 2\sqrt{-\lambda_{0,f^T}}$, there exists $\varepsilon_{c,T} > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{c,T})$ we have

$$c \in (0, c_{T,-\varepsilon}^*) \cap (0, c_{T,\varepsilon}^*). \quad (4.69)$$

We define

$$\hat{\varepsilon}_{c,T} = \min\{\tilde{\varepsilon}_T, \varepsilon_{c,T}\} > 0. \quad (4.70)$$

We consider $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_{c,T})$. According to the strong maximum principle, we have $u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot) > 0$ on \mathbb{R} , where $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ is such that (4.45) holds for all $(t, u) \in [n_\varepsilon T, +\infty) \times \mathbb{R}^+$. Consequently, there exists a nonnegative and nontrivial compactly supported function $\tilde{u}_{\varepsilon,0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$u_\varepsilon(n_\varepsilon T, x) \geq \tilde{u}_{\varepsilon,0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.71)$$

Let $\tilde{u}_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} (\tilde{u}_\varepsilon)_t - (\tilde{u}_\varepsilon)_{xx} = f_{-\varepsilon}^T(t, \tilde{u}_\varepsilon) & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_\varepsilon(0, \cdot) = \tilde{u}_{0,\varepsilon} & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Owing to (4.45), (4.71) and the fact that $f_{-\varepsilon}^T$ is T -periodic, we can apply a comparison principle and get that

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) \leq u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.72)$$

According to (4.48), we have $f_\varepsilon \leq 0$ on $\mathbb{R}^+ \times [2, +\infty)$. Hence, since u_0 is bounded, if we define

$$\tilde{C} = \max\{2, \sup_{\mathbb{R}} u_0\},$$

then according to the maximum principle, we have $u_\varepsilon \leq \tilde{C}$ on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. In particular

$$u_\varepsilon(n_\varepsilon T, x) \leq \tilde{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.73)$$

Let $v_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ be the solution of

$$\begin{cases} (v_\varepsilon)_t = f_\varepsilon^T(t, v_\varepsilon) & \text{on } \mathbb{R}^+, \\ v_\varepsilon(0) = \tilde{C}. \end{cases} \quad (4.74)$$

Owing to (4.45) and (4.73), we can still apply a comparison principle to get that

$$u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) \leq v_\varepsilon(t), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.75)$$

According to (4.48) and the fact that $\tilde{C} \geq 2$, it occurs that $v_\varepsilon(T) \leq v_\varepsilon(0)$. So the sequence $(v_\varepsilon(nT))_n$ is nonincreasing. Furthermore, this sequence is bounded below by 0. Consequently, it converges to a real number $l \geq 0$. For any $n \in \mathbb{N}$, we define $v_{\varepsilon,n} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ by $v_{\varepsilon,n}(t) = v_\varepsilon(t + nT)$. The sequence $(v_{\varepsilon,n})_n$ converges up to extraction of a subsequence to $v_\varepsilon^* \geq 0$ in $\mathcal{C}^1([0, T])$ satisfying

$$\begin{cases} (v_\varepsilon^*)' = f_\varepsilon^T(t, v_\varepsilon^*) & \text{on } [0, T], \\ v_\varepsilon^*(0) = v_\varepsilon^*(T) = l. \end{cases}$$

So v_ε^* is equal to 0 or w_ε^T . Yet, there exists $\kappa_\varepsilon > 0$ such that $0 < \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(0) \leq \tilde{C}$ and

$$|f_\varepsilon^T(t, \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(t)) - (f_\varepsilon^T)_u(t, 0) \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(t)| \leq -\frac{\lambda_{0,f_\varepsilon^T}}{2} \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Consequently, we have on \mathbb{R}^+

$$\begin{aligned} (\kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T})' - f_\varepsilon^T(t, \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}) &\leq \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(\lambda_{0,f_\varepsilon^T} + (f_\varepsilon^T)_u(t, 0)) - (\kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(f_\varepsilon^T)_u(t, 0) + \frac{\lambda_{0,f_\varepsilon^T}}{2} \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}) \\ &\leq \frac{\lambda_{0,f_\varepsilon^T}}{2} \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T} \leq 0. \end{aligned}$$

Hence, the function $\kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}$ is a subsolution of the problem (4.74) on \mathbb{R}^+ . Therefore

$$0 < \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(t) \leq v_\varepsilon(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Using the T -periodicity of Φ_{0,f_ε^T} and passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$, we obtain

$$0 < \kappa_\varepsilon \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(t) \leq v_\varepsilon^*(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Consequently, we have necessarily $v_\varepsilon^* \equiv w_\varepsilon^T$ on $[0, T]$. In particular, the uniqueness of accumulation point of the sequence $(v_{\varepsilon,n})_n$ implies that the convergence to w_ε^T holds for the whole sequence. Let $\eta > 0$. There exists $n_{\eta,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ such that

$$n \geq n_{\eta,\varepsilon} \Rightarrow \sup_{t \in [0, T]} |v_\varepsilon(t + nT) - w_\varepsilon^T(t)| \leq \eta. \quad (4.76)$$

On the other hand, according to (4.69), the spreading properties in periodic case (Proposition 4.1.3) give the existence of $t_{c,\eta,\varepsilon} \geq 0$ such that

$$t \geq t_{c,\eta,\varepsilon} \Rightarrow \sup_{|x| < ct} |w_{-\varepsilon}^T(t) - \tilde{u}_\varepsilon(t, x)| \leq \eta. \quad (4.77)$$

Let $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ such that $t \geq \max\{t_{c,\eta,\varepsilon}, n_{\eta,\varepsilon}T\}$ and $|x| < ct$. According to (4.72) and (4.75), it occurs that

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) \leq u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) \leq v_\varepsilon(t)$$

The fact that $t \geq n_{\eta,\varepsilon}T$ implies that we can write $t = n_t T + \tilde{t}$, where $\tilde{t} \in [0, T)$ and $n_t \in \mathbb{N}$ such that $n_t \geq n_{\eta,\varepsilon}$. Consequently, as the function w^T is T -periodic, we have

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) - w^T(t) \leq u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) - w^T(t + n_\varepsilon T) \leq v_\varepsilon(n_t T + \tilde{t}) - w^T(\tilde{t})$$

Hence, according to (4.76) and Lemma 4.3.1

$$u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) - w^T(t + n_\varepsilon T) \leq |v_\varepsilon(n_t T + \tilde{t}) - w_\varepsilon^T(\tilde{t})| + |w_\varepsilon^T(\tilde{t}) - w^T(\tilde{t})| \leq \eta + M_T \varepsilon,$$

and on the other hand, owing to (4.77) and Lemma 4.3.1, it occurs that

$$u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) - w^T(t + n_\varepsilon T) \geq - \sup_{|y| < ct} |w_{-\varepsilon}^T(t) - \tilde{u}_\varepsilon(t, y)| - \sup_{[0, T]} |w_{-\varepsilon}^T - w^T| \geq -\eta - M_T \varepsilon.$$

To conclude, for any $t \geq \max\{t_{c,\eta,\varepsilon}, n_{\eta,\varepsilon}T\} + n_\varepsilon T$, we have

$$\sup_{|x| < ct} |u_\varepsilon(t, x) - w^T(t)| \leq \eta + M_T \varepsilon,$$

which concludes the proof of the first assertion of Theorem 4.1.8.

We now show the second part of the theorem. We consider $c > c_T^*$ and c' such that $c_T^* < c' < c$. There exists $\varepsilon'_{c,T} > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_{c,T})$ we have

$$c' > \min\{c_{T,-\varepsilon}^*, c_{T,\varepsilon}^*\}. \quad (4.78)$$

Furthermore, according to (4.4), (4.23) and (4.25), there exists $D > 0$ such that for all $\varepsilon \in [0, 1]$, we have

$$f_\varepsilon(t, u) \leq Du, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+. \quad (4.79)$$

We define $\bar{\varepsilon}_{c,T} = \min\{1, \hat{\varepsilon}_{c,T}, \varepsilon'_{c,T}\} > 0$, where $\hat{\varepsilon}_{c,T}$ is defined in (4.70). Let $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_{c,T})$. We consider $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solving the heat equation

$$\begin{cases} H_t - H_{xx} = 0 & \text{on } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ H(0, \cdot) = u_0 & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

The function H is given by

$$H(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\text{Supp}(u_0)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad \forall t \in (0, +\infty), \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.80)$$

where $\text{Supp}(u_0)$ is the support of u_0 , which is here assumed to be compact. We define the function $H_D : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by $H_D(t, x) = H(t, x)e^{Dt}$. We have $(H_D)_t - (H_D)_{xx} = DH_D$

on $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Furthermore, owing to (4.79), we have $(u_\varepsilon)_t - (u_\varepsilon)_{xx} = f_\varepsilon(t, u_\varepsilon) \leq Du_\varepsilon$ on $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Consequently, since $H_D(0, \cdot) = u_\varepsilon(0, \cdot) = u_0$ on \mathbb{R} , the comparison principle yields

$$u_\varepsilon(t, x) \leq H(t, x)e^{Dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particular, owing to (4.80), it occurs that

$$u_\varepsilon(n_\varepsilon T, x) \leq \frac{e^{Dn_\varepsilon T}}{2\sqrt{\pi n_\varepsilon T}} \int_{\text{Supp}(u_0)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4n_\varepsilon T}} u_0(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.81)$$

We define the real number

$$\gamma_{c',\varepsilon} = \frac{c' + \sqrt{(c')^2 + 4\lambda_{0,f_\varepsilon^T}}}{2}.$$

Let us note that $(c')^2 + 4\lambda_{0,f_\varepsilon^T} > 0$ because $c' > c_{T,\varepsilon}^* = 2\sqrt{-\lambda_{0,f_\varepsilon^T}}$. According to (4.81), $u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot)$ has a Gaussian decay as $|x| \rightarrow +\infty$ and in particular, there exists a real number $M_{c',\varepsilon} > 0$ such that

$$u_\varepsilon(n_\varepsilon T, x) \leq M_{c',\varepsilon} \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(0) e^{-\gamma_{c',\varepsilon} x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.82)$$

We also define the function $v_{c',\varepsilon} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$v_{c',\varepsilon}(t, x) = M_{c',\varepsilon} \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(t) e^{-\gamma_{c',\varepsilon}(x-c't)},$$

We have on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$(v_{c',\varepsilon})_t - (v_{c',\varepsilon})_{xx} = (-\gamma_{c',\varepsilon}^2 + \gamma_{c',\varepsilon} c' + \lambda_{0,f_\varepsilon^T}) M_{c',\varepsilon} \Phi_{0,f_\varepsilon^T} e^{-\gamma_{c',\varepsilon}(x-c't)} + (f_\varepsilon^T)_u(t, 0) v_{c',\varepsilon}.$$

Hence according to (4.5) and the fact that $-\gamma_{c',\varepsilon}^2 + \gamma_{c',\varepsilon} c' + \lambda_{0,f_\varepsilon^T} = 0$, we obtain on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$(v_{c',\varepsilon})_t - (v_{c',\varepsilon}) \geq f_\varepsilon^T(t, v_{c',\varepsilon})$$

Furthermore, owing to (4.45), (4.46) and the T -periodicity of f_ε^T , it occurs that on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$(u_\varepsilon)_t - (u_\varepsilon)_{xx} = f_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, u_\varepsilon) \leq f_\varepsilon^T(t + n_\varepsilon T, u_\varepsilon) = f_\varepsilon^T(t, u_\varepsilon)$$

Consequently, since (4.82) implies that $u_\varepsilon(n_\varepsilon T, \cdot) \leq v_{c',\varepsilon}(0, \cdot)$ on \mathbb{R} , the comparison principle implies that

$$0 \leq u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) \leq v_{c',\varepsilon}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

For all $t \geq 0$, since $v_{c',\varepsilon}(t, \cdot)$ is decreasing on \mathbb{R} , we have

$$0 \leq \sup_{x > ct} u_\varepsilon(t, x) \leq \sup_{x > ct} v_{c',\varepsilon}(t, x) \leq v_{c',\varepsilon}(t, ct) = M_{c',\varepsilon} \Phi_{0,f_\varepsilon^T}(t) e^{-\gamma_{c',\varepsilon}(c-c')t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

In the same way, we can show that

$$0 \leq \sup_{x < -ct} u_\varepsilon(t + n_\varepsilon T, x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

To summarize

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| > ct} u_\varepsilon(t, x) = 0,$$

which concludes the proof of the second assertion of Theorem 4.1.8. \square

4.4 Influence of the protocol of the treatment

We begin by proving Proposition 4.1.9.

Démonstration. Owing to (4.28), the principal eigenvalue associated with 0 and f_τ^T is given by

$$\lambda_{0,f_\tau^T} = -\frac{1}{T} \int_0^T (f_\tau^T)_u(t, 0) dt = -g'(0) + \int_0^T m_\tau^T(t) dt = -g'(0) + \int_0^1 \varphi(t) dt = \lambda_{0,f^T}.$$

□

We now demonstrate Proposition 4.1.10.

Démonstration. Let $T > T^*$. We denote P_τ^T the Poincaré map associated with f_τ^T . We recall that P_τ^T is defined on \mathbb{R}^+ by

$$P_\tau^T(\alpha) = y_{\tau,\alpha}(T),$$

where $y_{\tau,\alpha}$ is the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} (y_{\tau,\alpha})' = f_\tau^T(t, y_{\tau,\alpha}) & \text{on } \mathbb{R}^+, \\ y_{\tau,\alpha}(0) = \alpha. \end{cases} \quad (4.83)$$

In the same way as in the proof of Proposition 4.1.1, we show that the function P_τ^T has a unique positive fixed point α_τ^T . Furthermore $\alpha_\tau^T \in (0, 1]$. Consequently there is a unique equilibrium state $w_\tau^T : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ associated with f_τ^T . It is the solution of the Cauchy problem (4.83) with $\alpha = \alpha_\tau^T$.

We begin by showing the continuity property. Let $\tau^* \in (0, T)$ and $(\tau_n)_n$ be a sequence of $(0, T)$ such that $\tau_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tau^*$. We will demonstrate that $w_{\tau_n}^T(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w_{\tau^*}^T(0)$. The sequence $(w_{\tau_n}^T)_n$ converges up to extraction of a subsequence to a function w^* in $\mathcal{C}^{0,\delta}([0, T])$ for any $\delta \in (0, 1)$. The equilibrium state $w_{\tau_n}^T$ satisfies

$$\begin{cases} w_{\tau_n}^T(t) = w_{\tau_n}^T(0) + \int_0^t f_{\tau_n}^T(s, w_{\tau_n}^T(s)) ds, & \forall t \in [0, T], \\ w_{\tau_n}^T(0) = w_{\tau_n}^T(T). \end{cases}$$

Passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$, we obtain

$$\begin{cases} w^*(t) = w^*(0) + \int_0^t f_{\tau^*}^T(s, w^*(s)) ds, & \forall t \in [0, T], \\ w^*(0) = w^*(T). \end{cases}$$

The function $t \mapsto \int_0^t f_{\tau^*}^T(s, w^*(s)) ds$ is of class $\mathcal{C}^1([0, T])$. Consequently w^* is of class $\mathcal{C}^1([0, T])$ and it satisfies

$$\begin{cases} (w^*)' = f_{\tau^*}^T(t, w^*) & \text{on } [0, T], \\ w^*(0) = w^*(T). \end{cases}$$

Owing to Proposition 4.1.1, it follows that $w^* \equiv 0$, or $w^* \equiv w_{\tau^*}^T$. If $w^* = 0$, then $w_{\tau_n}^T \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$ uniformly on $[0, T]$. For any $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\frac{(w_{\tau_n}^T)'(t)}{w_{\tau_n}^T(t)} = \frac{f_{\tau_n}^T(t, w_{\tau_n}^T(t))}{w_{\tau_n}^T(t)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

We integrate the previous equation over $[0, T]$, then we pass to the limit as $n \rightarrow +\infty$. We obtain $-T\lambda_{0,f_{\tau^*}^T} = 0$. It is a contradiction because since $T > T^*$, we have $\lambda_{0,f_{\tau^*}^T} = \lambda_{0,f^T} < 0$. Hence, we have necessarily $w^* \equiv w_{\tau^*}^T$. So the function $\tau \mapsto w_{\tau}^T(0)$ is continuous on $(0, T)$.

We now study the monotonicity of this function. We consider two real numbers τ_1 and τ_2 such that $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$. The Poincaré map $P_{\tau_i}^T$ associated with $f_{\tau_i}^T$ is defined on \mathbb{R}^+ by

$$P_{\tau_i}^T(\alpha) = y_{\tau_i, \alpha}(T),$$

where $y_{\tau_i, \alpha}$ is the solution of (4.83), with $\tau = \tau_i$. We recall that the equilibrium state $w_{\tau_i}^T$ is the solution on \mathbb{R}^+ of (4.83) with $\alpha = \alpha_{\tau_i}^T$. Consequently, if we prove that $P_{\tau_1}^T > P_{\tau_2}^T$ on $(0, +\infty)$, then we will deduce that $\alpha_{\tau_1}^T > \alpha_{\tau_2}^T$, that is, $w_{\tau_1}^T(0) > w_{\tau_2}^T(0)$. Fix $\alpha > 0$. We define the function $z_{\tau_i, \alpha} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$z_{\tau_i, \alpha}(t) = y_{\tau_i, \alpha}(t) e^{\int_0^t m_{\tau_i}^T(s) ds}. \quad (4.84)$$

This function solves on \mathbb{R}^+ the equation

$$(z_{\tau_i, \alpha})' = \frac{g(z_{\tau_i, \alpha} e^{-\int_0^t m_{\tau_i}^T(s) ds})}{e^{-\int_0^t m_{\tau_i}^T(s) ds}}$$

For any $t \in [0, T]$, we have

$$e^{-\int_0^t m_{\tau_1}^T(s) ds} \leq e^{-\int_0^t m_{\tau_2}^T(s) ds}. \quad (4.85)$$

According to (4.4) and the fact that $z_{\tau_1, \alpha} > 0$, it follows that for any $t \in [0, T]$

$$\frac{g(z_{\tau_1, \alpha} e^{-\int_0^t m_{\tau_1}^T(s) ds})}{z_{\tau_1, \alpha} e^{-\int_0^t m_{\tau_1}^T(s) ds}} \geq \frac{g(z_{\tau_1, \alpha} e^{-\int_0^t m_{\tau_2}^T(s) ds})}{z_{\tau_1, \alpha} e^{-\int_0^t m_{\tau_2}^T(s) ds}}. \quad (4.86)$$

In other terms, $z_{\tau_1, \alpha}$ is a subsolution of the equation satisfied by $z_{\tau_2, \alpha}$. Since $z_{\tau_1, \alpha}(0) = z_{\tau_2, \alpha}(0) = \alpha$, we can apply a comparison principle and we obtain

$$z_{\tau_1, \alpha}(t) \geq z_{\tau_2, \alpha}(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Actually, the previous inequality is strict with $t = T$ because (4.85) and (4.86) are strict on $(0, \tau_2)$. Owing to (4.84), we have

$$y_{\tau_1, \alpha}(T) e^{\int_0^T m_{\tau_1}^T(s) ds} > y_{\tau_2, \alpha}(T) e^{\int_0^T m_{\tau_2}^T(s) ds}$$

According to (4.28), it occurs that

$$\int_0^T m_{\tau_1}^T(s) ds = \int_0^T m_{\tau_2}^T(s) ds = \int_0^1 \varphi(s) ds.$$

Consequently

$$y_{\tau_1, \alpha}(T) > y_{\tau_2, \alpha}(T).$$

In other words, $P_{\tau_1}^T(\alpha) > P_{\tau_2}^T(\alpha)$, which concludes the proof. \square

Annexe A

Solutions numériques des équations intervenant dans le chapitre 3

```
clear;
clf();

stacksize('max')

//*****
//définition des nonlinéarités
//*****

C1=5;
C2=580;
//theta=0.75;
a=0.4;
e=0.01;
l=0.2;

function [y]=m(t)
    y=0.5*(tanh((modulo(t,1)-a)/e)-tanh((modulo(t,1)-(1-e))/e));
endfunction

function [y]=KPP(u)
    y=C1*u.* (1-u);
endfunction

function [y]=BIS(u)
    //y=C2*u.* (1-u).* (u-theta);
    //y=C2*u.* (1-u).* (u-0.78).* (u.^2-0.45*u+0.055);
    y=C2*u.* (1-u).* (u-0.767).* (u.^2-0.69*u+0.122);
endfunction;

function [y]=f(u,t)
    y=KPP(u).*m(t/l)+BIS(u).* (1-m(t/l));
```

```
endfunction;

function [y]=MOY(u)
    y=(1-a-e).*KPP(u)+(a+e).*BIS(u);
endfunction;

//*****
//discrétisation en espace
//*****
M=600;
L=80;
dx=2*L/M;
X=linspace(-L,L,M+1);

//*****
//discrétisation en temps
//*****
N=1000;
T=15;
dt=T/N;
t=linspace(0,T,N+1);

c=dt/(dx)^2;

A=diag((1+2*c)*ones(1,M+1)) + diag(-c*ones(1,M),1) + diag(-c*ones(1,M),-1);
A(1,1)=1+c;
A(M+1,M+1)=1+c;
A=sparse(A);

//*****
//condition initiale
//*****
// Cas d'un créneau
C=1.0*(abs(X)<5);
//Cas d'un heaviside
H=1.0*(X<0);

U=H';
V=[U];

U1=H'
V1=[U1]

U2=H'
V2=[U2]
```

```

U3=H'
V3=[U3]

//*****
//boucle en temps
//*****
for n=1:N
    U=A\ (U+dt*KPP(U));
    V=[V U];
    U1=A\ (U1+dt*BIS(U1));
    V1=[V1 U1];

    U2=A\ (U2+dt*MOY(U2));
    V2=[V2 U2];

    U3=A\ (U3+dt*f(U3,t(n)*ones(M+1,1)));
    V3=[V3 U3];
end;

//*****
//tracé des courbes
//*****
subplot(2,1,1)
plot2d(linspace(0,1,50),f(linspace(0,1,50),t(1)*ones(1,50)),rect=[0,-0.3,1,0.3])
s_app=gce();

plot(linspace(0,1,50),KPP(linspace(0,1,50)), 'g',linspace(0,1,50),BIS(linspace(0,1,50)), 'b',)

subplot(2,1,2)

plot(X,V(:,1), 'g')
v_app=gce();

plot(X,V1(:,1), 'b')
v1_app=gce();

plot(X,V2(:,1), 'r')
v2_app=gce();

plot(X,V3(:,1), 'black')
v3_app=gce();

for n=1:N
    s_app.children.data(:,2)=f(linspace(0,1,50)',t(n)*ones(50,1))
    v_app.children.data(:,2)=V(:,n);

```

```
v1_app.children.data(:,2)=V1(:,n);
v2_app.children.data(:,2)=V2(:,n);
v3_app.children.data(:,2)=V3(:,n);
legend('$u\mapsto A u(1-u)$','$u\mapsto B f_b(u)$','$u\mapsto g(u)$','$u\mapsto f(t,u)$')
sleep(100);
end;
```

Bibliographie

- [1] N.D. ALIKAKOS, P.W. BATES et X. CHEN : Periodic traveling waves and locating oscillating patterns in multidimensional domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351:2777–2805, 1999.
- [2] D.G. ARONSON et H.F. WEINBERGER : Multidimensional nonlinear diffusions arising in population genetics. *Adv. Math.*, 30:33–76, 1978.
- [3] H. BERESTYCKI et G. CHAPUISAT : Traveling fronts guided by the environment for reaction-diffusion equations. *Networks and Heterogeneous Media*, 8:79–114, 2013.
- [4] H. BERESTYCKI et F. HAMEL : Front propagation in periodic excitable media. *Comm. Pure Appl. Math.*, 55:949–1032, 2002.
- [5] H. BERESTYCKI et F. HAMEL : Generalized traveling waves for reaction-diffusion equations. *Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations. In honor of H. Brezis*, Contemp. Math. 446, Amer. Math. Soc., pages 101–123, 2007.
- [6] H. BERESTYCKI et F. HAMEL : Generalized transition waves and their properties. *Comm. Pure Appl. Math.*, 65:592–648, 2012.
- [7] H. BERESTYCKI, F. HAMEL et N. NADIRASHVILI : The principal eigenvalue of elliptic operators with large drift and applications to nonlinear propagation phenomena. *Comm. Math. Phys.*, 253:451–480, 2005.
- [8] H. BERESTYCKI, F. HAMEL et N. NADIRASHVILI : The speed of propagation for KPP type problems. I - Periodic framework. *J. Europ. Math. Soc.*, 7:173–213, 2005.
- [9] H. BERESTYCKI, F. HAMEL et L. ROQUES : Analysis of the periodically fragmented environment model : I - species persistence. *J. Math. Bio.*, 51:75–113, 2005.
- [10] H. BERESTYCKI, F. HAMEL et L. ROQUES : Analysis of the periodically fragmented environment model : II - biological invasions and pulsating traveling fronts. *J. Math. Pures Appl.*, 84:1101–1146, 2005.
- [11] M. D. BRAMSON : Maximal displacement of branching brownian motion. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31:531–581, 1978.
- [12] M. D. BRAMSON : Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 44, 1983.
- [13] B. CONTRI : Pulsating fronts for bistable on average reaction-diffusion equations in a time periodic environment. *J. Math. Anal. Appl.*, 437:90–132, 2016.
- [14] W. DING, F. HAMEL et X. ZHAO : Bistable pulsating fronts for reaction-diffusion equations in a periodic habitat. *Indiana Univ. Math. J.*, à paraître.
- [15] F. DKHIL et A. STEVENS : Traveling waves speed in rapidly oscillating media. *Disc. Cont. Dyn. Systems*, 25:89–108, 2009.

Bibliographie

- [16] A. D'ONOFRIO : Multifaceted kinetics of immuno-evasion from tumor dormancy. *Adv. Exp. Med. Bio.*, 734:111–143, 2013.
- [17] Y. DU et H. MATANO : Convergence and sharp thresholds for propagation in nonlinear diffusion problems. *J. Europ. Math. Soc.*, 12:279–312, 2010.
- [18] A. DUCROT, T. GILETTI et H. MATANO : Existence and convergence to a propagating terrace in one-dimensional reaction-diffusion equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366:5541–5566, 2014.
- [19] M. EL SMAILY : The homogenized equation of a heterogenous reaction-diffusion model involving pulsating traveling fronts. *Commun. Math. Sci.*, 9:1113–1128, 2011.
- [20] M. EL SMAILY, F. HAMEL et L. ROQUES : Homogenization and influence of fragmentation in a biological invasion model. *Disc. Cont. Dyn. Systems*, 25:321–342, 2009.
- [21] J. FANG et X.-Q. ZHAO : Bistable traveling waves for monotone semiflows with applications. *J. Europ. Math. Soc.*, 17:2243–2288, 2015.
- [22] P.C. FIFE et J.B. MCLEOD : The approach of solutions of non-linear diffusion equations to traveling front solutions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 65:335–361, 1977.
- [23] R.A. FISHER : The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, 7:335–369, 1937.
- [24] G. FREJACQUES : *Travelling waves in infinite cylinders with time-periodic coefficients*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille, 2005.
- [25] J. GARTNER et M. FREIDLIN : On the propagation of concentration waves in periodic and random media. *Sov. Math. Dokl.*, 20:1282–1286, 1979.
- [26] F. HAMEL, J. NOLEN, J.-M. ROQUEJOFFRE et L. RYZHIK : The logarithmic delay of KPP fronts in a periodic medium. *J. Europ. Math. Soc.*, 18:465–505, 2016.
- [27] F. HAMEL et S. OMRANI : Existence of multidimensional travelling fronts with a multistable nonlinearity. *Adv. Diff. Equations*, 5:557–582, 2000.
- [28] S. HEINZE, G. PANANICOLAOU et A. STEVENS : Variational principle for propagation speeds in inhomogeneous media. *SIAM J. Appl. Math.*, 62:129–148, 2001.
- [29] P. HESS : *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*. Longman Scientific and Technical, 1991.
- [30] W. HUDSON et B. ZINNER : Existence of travelling waves for reaction-diffusion equations of fisher type in periodic media. *Boundary Value Problems for Functional-Differential Equations*, J. Henderson (ed.), World Scientific, pages 187–199, 1995.
- [31] Ya. I. KANEL' : Stabilization of solution of the cauchy problem for equations encountered in combustion theory. *Mat. Sbornik*, 59:245–288, 1962.
- [32] A.N. KOLMOGOROV, I.G. PETROVSKY et N.S. PISKUNOV : Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bulletin Université d'Etat à Moscou (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ.)*, Ser. Intern. A 1:1–26, 1937.
- [33] K. S. LAU : On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov, Petrovsky, and Piscounov. *J. Diff. Equations*, 59:44–70, 1985.
- [34] X. LIANG et X.-Q. ZHAO : Asymptotic speeds of spread and traveling waves for monotone semiflows with applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60:1–40, 2007.

-
- [35] X. LIANG et X.-Q ZHAO : Spreading speeds and traveling waves for abstract monostable evolution systems. *J. Funct. Anal.*, 259:857–903, 2010.
 - [36] G. NADIN : The principal eigenvalue of a space-time periodic parabolic operator. *Ann. Math. Pura Appl.*, 4:269–295, 2009.
 - [37] G. NADIN : Traveling fronts in space-time periodic media. *J. Math. Pures Appl.*, 92:232–262, 2009.
 - [38] G. NADIN : Existence and uniqueness of the solutions of a space-time periodic reaction-diffusion equation. *J. Diff. Equations*, 249:1288–1304, 2010.
 - [39] G. NADIN : Some dependence results between the spreading speed and the coefficients of the space-time periodic Fisher-KPP equation. *Eur. J. Appl. Math.*, 22:169–185, 2011.
 - [40] G. NADIN et L. ROSSI : Propagation phenomena for time heterogeneous KPP reaction diffusion equations. *J. Math. Pures Appl.*, 98:633–653, 2012.
 - [41] J. NOLEN, M. RUDD et J. XIN : Existence of KPP fronts in spatially-temporally periodic advection and variational principle for propagation speeds. *Dyn. PDE*, 2:1–24, 2005.
 - [42] P. POLÁCIK : Threshold solutions and sharp transitions for nonautonomous parabolic equations on \mathbb{R}^n . *Arch. Rational Mech. Anal.*, 199:69–97, 2011.
 - [43] M.H. PROTTER et H.F. WEINBERGER : *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer, 1999.
 - [44] D. H. SATTINGER : Stability of waves of nonlinear parabolic systems. *Adv. Math.*, 22:312–355, 1976.
 - [45] W. SHEN : Travelling waves in time almost periodic structures governed by bistable nonlinearities. I. Existence. *J. Diff. Equations*, 159:55–101, 1999.
 - [46] W. SHEN : Travelling waves in time almost periodic structures governed by bistable nonlinearities. I. Stability and uniqueness. *J. Diff. Equations*, 159:1–54, 1999.
 - [47] W. SHEN : Traveling waves in time dependent bistable equations. *Diff. Integ. Equations*, 19:241–278, 2006.
 - [48] N. SHIGESADA, K. KAWASAKI et E. TERAMOTO : Traveling periodic waves in heterogeneous environments. *Theor. Pop. Bio.*, 30:143–160, 1986.
 - [49] H.F. WEINBERGER : On spreading speeds and traveling waves for growth and migration models in a periodic habitat. *J. Math. Bio.*, 45:511–548, 2002.
 - [50] J. X. XIN : Existence of planar flame fronts in convective-diffusive periodic media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 121:205–233, 1992.
 - [51] J. X. XIN : Analysis and modeling of front propagation in heterogeneous media. *SIAM Review*, 42:161–230, 2000.