

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

Université Ferhat Abbas Sétif 1

Ecole Doctorale Mathématiques et Informatique de Marseille ED 184

FACULTE DES SCIENCES

Institut de Mathématiques de Marseille UMR 7373

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Abdelkader TAMI

Etude d'un problème pour le bilaplacien dans une famille d'ouverts
du plan

Soutenue le 01/12/2016 devant le jury :

Prénom NOM	Affiliation	
M. Emmanuel RUSS	Université Grenoble Alpes	Président du Jury
M. Mohand MOUSSAOUI	École Normale Supérieure de Kouba	Rapporteur
Mme Colette GUILLOPÉ	Université Paris-Est Créteil (UPEC)	Rapporteur
Mme Assia BENABDALLAH	Aix-Marseille Université	Examinatrice
M. Salah DRABLA	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Examinateur
M. Seddik DJABI	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Examinateur
M. Philippe TCHAMITCHIAN	Aix Marseille Université	Directeur de thèse
M. Boubakeur MEROUANI	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Directeur de thèse



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France](#).

Je dédie ce travail à mes parents, ma femme, à mes enfants, et mes frères.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude du problème $\Delta^2 u_\omega = f_\omega$ avec les conditions aux limites $u_\omega = \Delta u_\omega = 0$, le second membre étant supposé dépendre continûment de ω dans $L^2(\Omega_\omega)$, où

$$\Omega_\omega = \{(r, \theta); 0 < r < 1, 0 < \theta < \omega\}, \quad 0 < \omega \leq \pi,$$

est une famille de secteurs tronqués du plan.

Si $\omega < \pi$ on sait d'après BLUM et RANNACHER 1980 que la solution de ce problème u_ω se décompose au voisinage de l'origine en

$$u_\omega = u_{1,\omega} + u_{2,\omega} + u_{3,\omega}, \quad (1)$$

où $u_{1,\omega}$, $u_{2,\omega}$ sont les parties singulières de u_ω et $u_{3,\omega}$ la partie régulière.

En effet, au voisinage de l'origine $u_{1,\omega}$ (resp. $u_{2,\omega}$, $u_{3,\omega}$) est de régularité $H^{1+\frac{\pi}{\omega}-\epsilon}$ (resp. $H^{2+\frac{\pi}{\omega}-\epsilon}$, H^4) pour tout $\epsilon > 0$, tandis que la solution u_π appartient, au moins au voisinage de l'origine, à l'espace $H^4(\Omega_\pi)$, où Ω_π est le demi-disque supérieur de centre 0 et de rayon $r = 1$.

On voit clairement une résolution de la singularité près de l'angle π dont la description est l'objectif principal de ce travail. Le résultat obtenu est que la décomposition (1) de u_ω est uniforme par rapport à ω , lorsque $\omega \rightarrow \pi$, pour les meilleures topologies possibles pour chacun des termes, et converge terme à terme vers le développement limité de u_π au voisinage de 0.

Mots clés : Polygone, Bilaplacien, Singularité, Espace de Sobolev.

Abstract

In this work, we study the family of problems $\Delta^2 u_\omega = f_\omega$ with boundary condition $u_\omega = \Delta u_\omega = 0$. There, the second members are assumed to depend smoothly on ω in $L^2(\Omega_\omega)$, where

$$\Omega_\omega = \{(r, \theta); 0 < r < 1, 0 < \theta < \omega\}, \quad 0 < \omega \leq \pi,$$

is a family of truncated sectors of the plane.

If $\omega < \pi$ it is known from BLUM et RANNACHER 1980 that the solution u_ω decomposes as

$$u_\omega = u_{1,\omega} + u_{2,\omega} + u_{3,\omega}, \quad (1)$$

where $u_{1,\omega}$, $u_{2,\omega}$ are singular and $u_{3,\omega}$ is regular. Indeed, near the origin, $u_{1,\omega}$ (resp. $u_{2,\omega}$, $u_{3,\omega}$) is of regularity $H^{1+\frac{\pi}{\omega}-\epsilon}$ (resp. $H^{2+\frac{\pi}{\omega}-\epsilon}$, H^4) for every $\epsilon > 0$, while the solution u_π is, in the neighborhood of the origin again, of regularity H^4 .

One clearly sees a resolution of the singularity near the angle π whose description is the main objective of this work. The obtained result is that there exists a decomposition (1) of u_ω which is uniform with respect to ω , when $\omega \rightarrow \pi$, with the best possible topologies for each term, and which term by term converges towards the Taylor expansion of u_π near 0.

Keywords : Polygon, Biharmonic operator, Singularity, Sobolev spaces.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre deux laboratoires : le laboratoire LATP (Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités - UMR 6632) d'Aix Marseille université, et le laboratoire LAMA (Laboratoire Mathématiques Appliquées) de l'Université de Sétif, dont je remercie les directeurs respectifs, à savoir Messieurs les professeurs Bruno TORRESANI Boubakeur MEROUANI.

L'aboutissement de ce travail s'est concrétisé grâce à plusieurs personnes que je tiens à remercier vivement.

En premier lieu, j'exprime ma profonde gratitude à mes Directeurs de thèse, Messieurs les Professeurs Philippe TCHAMITCHIAN et Boubakeur MEROUANI, je veux saluer leurs qualités d'encadrement, la richesse de leurs connaissances, leurs rigueurs, leurs dévouements et leurs disponibilités. Je leur dois beaucoup. Je tiens aussi à remercier chaleureusement : Monsieur le professeur Mohand MOUSSAOUI pour ses remarques et l'attention portée à mon travail.

Un grand merci encore aux rapporteurs, Mme Colette GUILLOPÉ et M. Mohand MOUSSAOUI, et aux autres membres du jury de thèse, Mme Assia BENABDALLAH, M. Emmanuel RUSS, M. Salah DRABLA et M. Seddik DJABI pour avoir acceptés d'évaluer le contenu du présent travail.

J'aimerais simplement rendre hommage aux nombreuses personnes rencontrées dans tous ces laboratoires, permanents et "temporaires", pour les échanges d'idées scientifiques comme pour les aspects plus personnels entretenus pendant cette période.

Table des matières

Résumé	4
Abstract	5
Liste des figures	9
0.1 Principales notations utilisées	13
0.1.1 Notions géométriques	13
0.1.2 Espaces fonctionnels	13
Introduction	13
1 Rappels sur les espace des Sobolevs dans un polygone	14
1.1 Domaines polygonaux, notations	14
1.2 Espaces de Sobolev	14
1.3 Traces de l'espace $W_p^1(\Omega)$	16
1.4 Une formule de Green	18
1.5 Espaces de Sobolev avec poids	19
2 L'étude de certains problèmes aux limites dans un polygone du plan	22
2.1 Introduction	22
2.2 Le problème du Laplacien dans un polygône	22
2.2.1 Position du problème	22
2.2.2 La formulation variationnelle du problème (P_1)	23
2.2.3 Localisation du problème (P_1^v)	23
2.2.4 Transformation du problème	25
2.2.5 Transformation de Fourier	26
2.2.6 Propriétés du noyau K_ω	28
2.2.7 Le résultat principal	28
2.3 Le problème (P_2) dans un polygône	36
2.3.1 Position du problème	36
2.3.2 Formulation variationnelle du problème aux limites	36
2.3.3 Localisation du problème (P_2^v)	40
2.3.4 Transformation du problème (P_2^v)	42
2.3.5 Etude de l'équation différentielle	43
2.3.6 Le résultat principal	48
3 Etude de singularité des solutions au voisinage de π	51
3.1 Introduction	51

3.1.1	La norme H^2 en coordonnées polaires et la caractérisation de H_z^2	53
3.1.2	Résolution des problèmes (P_ω^1) et (P_ω^2)	55
3.1.3	Le cas $k = 1$	58
3.1.4	Le cas $k = 2$	70
3.1.5	Le cas $k \geq 3$	76
4	Le comportement de la solution dans une famille d'ouverts du plan	89
4.1	La preuve du théorème 4.0.1	90
4.2	La preuve du théorème 4.0.2	97
4.2.1	Cas $k = 1$	97
4.2.2	Cas $k = 2$	103
4.3	La preuve du théorème 4.0.3	107
4.3.1	$k \geq 3$	110
4.3.2	$k = 1$	118
4.3.3	$k = 2$	123
	Conclusion	129
	Bibliographie	130
	ANNEXE	133

Liste des figures

1.1	Polygone Plan	15
2.1	L'ouvert Ω	23
2.2	Le contour γ_R , cas $\omega > \pi$	30
4.1	Le bord de Ω_ω	91
4.2		92
4.3	L'ouvert $\Omega_{\pi,\epsilon}$	101

Introduction

Dans ce projet de thèse on s'intéresse au comportement singulier de la solution près des sommets pour quelques modèles mathématiques gouvernés par les opérateurs Laplacien et/ou bilaplacien. Plus précisément, dans un ouvert plan Ω borné et à frontière polygonale Γ , on considère les deux problèmes suivants :

(P_1) problème de Laplacien-Dirichlet,

$$(P_1) \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma; \end{cases}$$

(P_2) problème de la plaque posée sur un bord,

$$(P_2) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = M(u) = 0 & \text{sur } \Gamma; \end{cases}$$

où

$$M(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Ces problèmes posés modélisent le comportement d'une plaque simplement posée sur son bord. On désignera par ν le coefficient de Poisson du matériau homogène de la plaque. La condition $u \in H^2(\Omega)$ permet de leur donner un sens variationnel.

Dans ces équations, on a désigné par u le déplacement perpendiculairement à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petit déplacement) et par f la densité des forces volumiques.

De nombreux auteurs ont étudié l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ce type de problèmes avec différentes conditions aux limites, notamment ceux de KONDRATIEV 1967, M. A. MOUSSAOUI 1977, BLUM et RANNACHER 1980, GRISVARD 1972, GRISVARD 1986, MEROUANI 1990, et beaucoup d'autres. En utilisant des espaces de Sobolev convenables on sait résoudre par la méthode variationnelle ces problèmes, voir par exemple NECAS 1967, LIONS et MAGENES 1968 et GRISVARD 1986.

Les solutions font apparaître des singularités, dont la description est la difficulté principale dans la résolution de (P_2) .

L'objet de ce mémoire est l'étude du comportement singulier des solutions des problèmes (P_1) et (P_2) au voisinage des sommets de Ω lorsque le second membre f est donné dans $L^2(\Omega)$.

BLUM et RANNACHER 1980 ont étudié de manière détaillée le problème (P_2) , en laissant toutefois la définition précise de la condition aux limites $M(u) = 0$. Le memoire est divisé en deux parties.

La première partie contient les chapitres 1 et 2 et elle est structurée comme suit :

Dans le premier chapitre on donnera un rappel des principales notations, quelques résultats d'analyse fonctionnelle et notamment sur les espaces de Sobolev avec ou sans poids.

Le second chapitre est divisé en deux parties. La première partie est consacré au problème de Laplacien-Dirichlet. On va étudier ce problème de manière détaillée. Le lecteur obtiendra ainsi une première information sur la régularité maximale de la solution au voisinage d'un coin ainsi que la forme de certaines solutions singulières. La deuxième est consacré à l'étude du problème (P_2) dans un ouvert Ω fixé. En reprenant les mêmes techniques utilisées dans la partie précédente, on trouvera un résultat identique à celui de BLUM et RANNACHER 1980. Mais le sens de la condition aux limites $M(u) = 0$ n'a pas été explicité dans l'article de BLUM et RANNACHER 1980.

En utilisant des techniques analogues à celle de NECAS 1967, on a donné un sens à la condition aux limites $M(u) = 0$ lorsque la solution variationnelle appartient à $H^2(\Omega)$.

Le troisième chapitre reprend le problème (P_2) en examinant le comportement des solutions dans une famille d'ouverts, les seconds membres étant supposés dépendre continûment des ouverts. De manière plus précise, on suppose donnés des ouverts polygonaux au voisinage de l'origine Ω_ω , $\omega \in]\frac{3\pi}{2}, \pi]$, ayant un sommet en O d'angle ω si $\omega < \pi$ et étant plat si $\omega = \pi$. La solution u_ω du problème (P_2) dans Ω_ω exhibe une singularité en O dont l'effet est de limiter la régularité de u_ω , exprimée dans l'échelle des espaces de Sobolev $H^\sigma(\Omega_\omega)$, aux exposants $\sigma < 1 + \frac{\pi}{\omega}$. En revanche, lorsque $\omega = \pi$, la solution u_π appartient, au moins au voisinage de O , à l'espace H^4 . Il y a donc un saut dans les exposants de Sobolev décrivant la régularité des solutions lorsque $\omega \rightarrow \pi$.

Ce chapitre contient le premier résultat important de cette thèse. En effet, si on revient sur la décomposition de u_ω en partie singulière et régulière, on montre que la partie régulière vérifie des estimations de régularité uniformes par rapport à ω , alors on a le théorème suivant :

Théorème 1. Pour tout $f_\omega \in L^2(\Omega_\omega)$, quelconque, il existe deux constantes a_ω^1, a_ω^2 et une fonction A_ω telle que la solution u_ω du problème (P_2) admet au voisinage de l'origine la décomposition suivante :

$$u_\omega(r, \theta) = a_\omega^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + a_\omega^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta + A_\omega(r, \theta), \quad (0.0.1)$$

où $A_\omega \in H^4$ au voisinage de 0, et où il existe une constante C ne dépendant pas

de ω tel que

$$|a_\omega^1| + |a_\omega^2| + \|A_\omega\|_{H_{loc}^4} \leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)}. \quad (0.0.2)$$

Dans ce théorème, la nouveauté réside dans l'uniformité par rapport à ω des estimations (0.0.2). Si, en effet on ne s'intéresse qu'à un problème (P_2) sur un ouvert Ω_ω fixé alors (0.0.2) est une conséquence directe des travaux antérieurs déjà cités. Pour obtenir l'uniformité par rapport à ω dans (0.0.2), on a développé dans cette thèse une méthode différente de celle des prédécesseurs pour obtenir la décomposition (0.0.1).

Le chapitre quatre contient les autres résultats nouveaux de cette thèse. Il est structuré comme suit :

Le premier résultat et le troisième décrivent les singularités des solutions u_ω et les topologies pour lesquelles il y a continuité autour de $\omega = \pi$, c'est-à-dire convergence (au moins locale) de u_ω vers u_π lorsque $\omega \rightarrow \pi$. Un deuxième résultat fournit un calcul explicite des parties singulières de u_ω , $\omega < \pi$, fondé sur une propriété de factorisation du problème (P_2) . Cela permet de décrire plus finement la manière dont u_ω converge vers u_π lorsque ω tend vers π , en prouvant que les parties singulières de u_ω ont une limite,

Dans le premier résultat, on démontre la convergence au moins locale de u_ω vers u_π , lorsque ω tend vers π pour la topologie H^1 .

Dans le deuxième résultat on démontrera le théorème suivant :

Théorème 2.

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^1 &= a_\pi^1 = \frac{\partial u_\pi}{\partial y}(0, 0) \\ \lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^2 &= a_\pi^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_\pi}{\partial x \partial y}(0, 0), \end{aligned}$$

ce qui montre que, dans (0.0.1) et lorsque $\omega \rightarrow \pi$, chaque terme converge vers l'un des termes du développement limité de u_π au voisinage de 0. Dans le troisième résultat, on démontre la convergence au moins locale de u_ω vers u_π , lorsque ω tend vers π pour la topologie H^2 . Remarque que, puisque $1 + \frac{\pi}{\omega}$ tend vers 2, cette topologie est la meilleure possible en un certain sens.

0.1 Principales notations utilisées

0.1.1 Notions géométriques

Ω : un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , à frontière polygonale de point générique $x = (x_1, x_2)$.
 Γ : frontière de Ω , ds : la mesure de longueur sur Γ .

Γ_j : une partie (segment) de Γ , $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j$.

f : la densité des forces volumiques.

∇ : le gradient.

Δ : le laplacien.

Δ^2 : le bilaplacien.

0.1.2 Espaces fonctionnels

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω muni de la topologie de limite inductive.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: désigne l'espace des distributions sur Ω .

$L^p(\Omega)$: l'espace des fonctions de puissance p-ième intégrable sur Ω
pour la mesure : $dx = dx_1 dx_2$.

$W_p^s(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre s .

$\dot{W}_p^s(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_p^s(\Omega)$.

$W_p^s(\bar{\Omega})$: l'espace des restrictions à Ω des éléments de $W_p^s(\mathbb{R}^2)$.

$\tilde{W}_p^s(\Omega)$: le sous-espace de $W_p^s(\Omega)$ formé de fonctions u dont le prolongement \tilde{u} par zéro hors de Ω appartient à $W_p^s(\mathbb{R}^2)$.

$H^m(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}, p = 2$,
par convention d'écriture $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$).

$W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$: désigne l'espace des fonctions $f \in L^p(\Gamma)$ telles que

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |f(x) - f(y)|^p \frac{ds(x) ds(y)}{|x - y|^p} < +\infty.$$

1 Rappels sur les espace des Sobolevs dans un polygone

L'étude des équations aux dérivées partielles nécessite l'utilisation des espaces de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$. Ce sont donc ces espaces et leurs propriétés que l'on va rappeler dans ce premier chapitre, ainsi que d'autres résultats d'analyse fonctionnelle qui seront d'une grande utilité dans notre travail.

L'objet de ce chapitre est de donner quelques résultats fondamentaux qui concernent les espaces de Sobolev. Ce qui nous concerne ici, sont les espaces de Sobolev relatifs à un ouvert plan Ω strictement polygonal.

Notons que l'essentiel des résultats mentionnés dans ce chapitre figure dans GRISVARD [1986](#).

1.1 Domaines polygonaux, notations

On dira qu'un ouvert plan borné Ω est un domaine polygonal si sa frontière Γ est la réunion d'un nombre fini de segments de droites. On ne suppose pas que Ω soit d'un seul côté de sa frontière. Ceci permet des coupures comme sur la figure 1.1. Pour alléger les notations, on suppose Ω connexe et simplement connexe. Ceci permet de désigner par S_1, S_2, \dots, S_N les sommets de Γ en suivant l'orientation positive (certains sommets sont donc répétés). On note Γ_j le segment ouvert $]S_{j-1}, S_j[$ (identifiant S_0 à S_N). On a donc

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j.$$

La mesure de l'angle de Ω en S_j est notée ω_j . Enfin, $\vec{\eta}_j$ (resp^t. $\vec{\tau}_j$) désigne la normale unitaire sortante (resp^t. la tangente unitaire) dans le sens direct sur Γ_j . Dans le cas particulier où il n'y a pas de coupure (tous les $\omega_j < 2\pi$), on dira que Ω est un domaine **strictement polygonal**. Dans toute la suite de ce mémoire, on suppose que Ω est strictement polygonal : c'est-à-dire un ouvert à frontière lipschitzienne au sense de NECAS [1967](#).

1.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev peuvent être définis de différentes manières lorsque l'ouvert Ω considéré est à frontière régulière. Les définitions correspondantes peuvent conduire à des espaces différents lorsque la frontière de Ω est peu régulière. C'est pourquoi il y a lieu ici de préciser la définition utilisée. On suppose

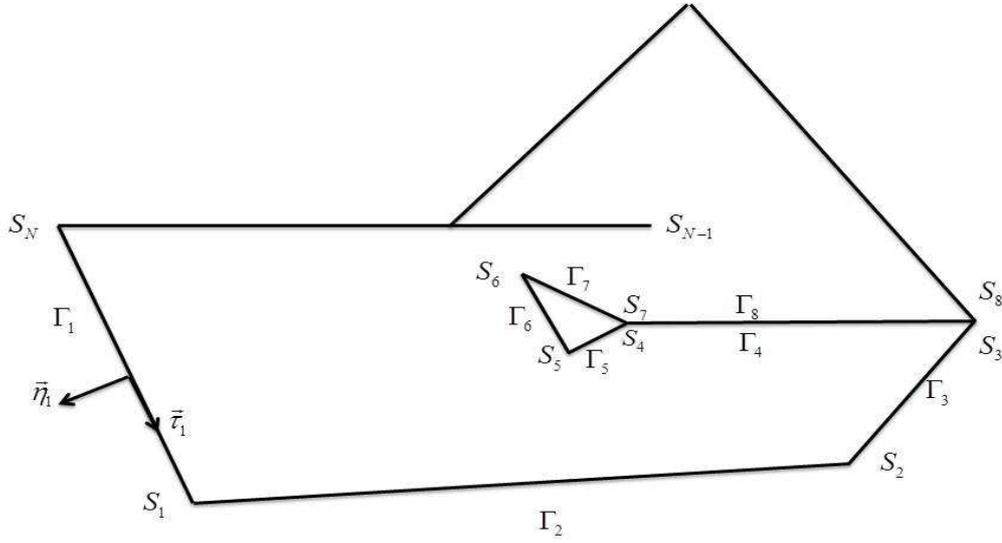


Figure 1.1 – Polygone Plan

toujours que $p \in]1, +\infty[$.

Définition 1.2.1. On note $W_p^s(\Omega)$ l'espace des distributions u définies dans Ω telles que :

- a) $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif;
- b) $u \in W_p^m(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p \frac{dx dy}{|x - y|^{2+\sigma p}} < +\infty,$$

pour α , $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier (m entier, $0 < \sigma < 1$).

La norme (naturelle) de $W_p^s(\Omega)$ est notée $\|u\|_{s,p,\Omega}$.

Comme d'habitude, $\dot{W}_p^s(\Omega)$ désigne la fermeture dans $W_p^s(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test.

Définition 1.2.2. Lorsque $s < 0$, $W_p^s(\Omega)$ est le dual de $\dot{W}_q^{-s}(\Omega)$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Les notations suivantes sont commodes.

Définition 1.2.3. On note $\widetilde{W}_p^s(\Omega)$ le sous-espace de $W_p^s(\Omega)$ formé des fonctions u dont le prolongement \tilde{u} par zéro hors de Ω appartient à $W_p^s(\mathbb{R}^2)$.

Il est bien connu (voir NECAS 1967, ADAMS 1975 et DAUTRAY et LIONS 1975) que pour Ω lipschitzien, on a

$$\widetilde{W}_p^s(\Omega) = \mathring{W}_p^s(\Omega) \text{ pour } s \geq 0 \text{ et } s \neq m + \frac{2}{p} \text{ (} m \text{ entier).}$$

Ω étant lipschitzien, il admet le théorème de prolongement (ADAMS 1975) c'est-à-dire,

$$u \in W_p^s(\Omega) \text{ si et seulement si il existe } U \in W_p^s(\mathbb{R}^2) \text{ telle que } U|_{\Omega} = u.$$

De cette propriété découle la plupart des propriétés de l'espace $W_p^s(\Omega)$, sauf celles relatives aux traces.

L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ des restrictions à Ω de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_p^s(\Omega)$.

Les immersions de Sobolev sont valables. Si $s \geq t$, $q \geq p$ et $s - \frac{2}{p} = t - \frac{2}{q}$, alors

$$W_p^s(\Omega) \subseteq W_q^t(\Omega), \quad (1.2.1)$$

$$W_p^s(\Omega) \subseteq C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad (1.2.2)$$

si $k < s - \frac{2}{p} < k + 1$ et $\alpha = s - \frac{2}{p} - k$, où $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment dérivables jusqu'à l'ordre k sont bornées et uniformément höldériennes d'exposant α dans $\bar{\Omega}$.

Lemme 1.2.4. Soit $u \in \mathring{W}_p^s(\Omega)$ avec $s - \frac{1}{p}$ non entier. Alors pour tout α tel que $|\alpha| \leq s$,

$$\rho^{-s+|\alpha|} D^\alpha u \in L^p(\Omega),$$

où ρ désigne la distance de x à Γ .

L'injection de $W_p^s(\Omega)$ dans $W_p^t(\Omega)$ est compacte pour $s > t$.

1.3 Traces de l'espace $W_p^1(\Omega)$

GAGLIARDO 1957 a donné une caractérisation de l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ des restrictions à Γ (ou traces) des fonctions de $W_p^1(\Omega)$. Soit ds la mesure de longueur sur Γ .

Définition 1.3.1. On désigne par $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Omega)$, l'espace des fonctions $f \in L^p(\Gamma)$ telles que

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |f(x) - f(y)|^p \frac{ds(x) ds(y)}{|x - y|^p} < +\infty.$$

Théorème 1.3.2. *L'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ qui est bien définie sur $D(\bar{\Omega})$ admet un prolongement γ , par densité, qui est un opérateur linéaire continu surjectif de $W_p^1(\Omega)$ sur $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Son noyau est $\dot{W}_p^1(\Omega)$.*

Il est instructif de découper l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Omega)$ en morceaux correspondants à chacun des côtés Γ_j .

On pose pour cela, si $f \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Omega)$

$$f_j = f|_{\Gamma_j}.$$

C'est la restriction de f à Γ_j . Il découle de la définition 1.3.1 que $f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$, ce dernier espace étant défini en 1.2.1 (Γ_j est un ouvert de \mathbb{R}). Les f_j ne sont pas toujours indépendantes les unes des autres. En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 1.3.3. *La fonction $f \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ si et seulement si $f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$ pour tout j et en outre :*

- (i) $f_j(S_j) = f_{j+1}(S_j)$, $1 \leq j \leq N$, si $p > 2$,
- (ii) $\int_{\Gamma_j} |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty$, $1 \leq j \leq N$, si $p = 2$.

Expliquons la notation utilisée : $x_j(\sigma)$ (resp^t. $x_j(-\sigma)$) désigne le point de Γ_{j+1} (resp^t. Γ_j) à distance σ du sommet S_j .

Ces points sont symétriques par rapport à S_j le long de Γ . La condition (i) a un sens puisque d'après le théorème de Sobolev, la fonction f_j est continue sur $\bar{\Gamma}_j$ donc en S_{j-1} et en S_j . Cette condition est naturelle car une fonction f continue sur Γ est, après découpage, une collection de fonctions f_j continues qui se raccordent aux sommets. La condition (ii) exprime aussi que f_j et f_{j+1} coïncident en S_j mais dans un sens faible. On la notera pour alléger :

$$f_j \underset{s_j}{\sim} f_{j+1}. \quad (1.3.1)$$

Il n'y a aucune condition de raccord aux sommets lorsque p est inférieur à 2. Il sera également commode de définir l'opérateur linéaire continu surjectif γ_j de $W_p^1(\Omega)$ sur $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$ par

$$\gamma_j u = (\gamma u)|_{\Gamma_j}. \quad (1.3.2)$$

On désigne par $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}$, $p = 2$, par convention d'écriture $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$).

L'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

$H_0^m(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

1.4 Une formule de Green

On considère ici l'espace $D(\Delta; L^p(\Omega))$ des fonctions de $L^p(\Omega)$ telles $\Delta u \in L^p(\Omega)$. Lorsque Ω est strictement polygonal, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D(\Delta; L_p(\Omega))$ pour la norme naturelle. De plus, on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. *L'application*

$$u \mapsto \left\{ \gamma_j u, \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j} \right\} \quad (1.4.1)$$

qui est définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, admet un prolongement par densité continue de $D(\Delta; L_p(\Omega))$ dans

$$W_p^{-\frac{1}{p}}(\Gamma_j) \times W_p^{-1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$$

lorsque $p \neq 2$ et dans le dual de

$$\widetilde{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{W}_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$$

lorsque $p = 2$.

Dans le cas d'un ouvert à frontière régulière, on peut donner un sens à la formule de Green pour $u \in D(\Delta; L^p(\Omega))$ et $v \in W_q^2(\Omega)$ pourvu que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ici la présence des coins oblige à restreindre l'espace où varie v .

Corollaire 1.4.2. *On a*

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx - \int_{\Omega} u \Delta v dx = \sum_{j=1}^N \left(\left\langle \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j}; \gamma_j v \right\rangle - \left\langle \gamma_j u; \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \right\rangle \right) \quad (1.4.2)$$

pour toute $v \in W_q^2(\Omega)$ telle que

(i) $v(S_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$ si $p > 2$.

(ii) $v(S_j) = 0$ et $\nabla v(S_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$ si $p < 2$.

(iii) v est nulle au voisinage de S_j , $j = 1, 2, \dots, N$ si $p = 2$.

Ceci est démontré dans GRISVARD 1985. Remarquons seulement que, dans l'indentité (1.4.2), les crochets de dualité sur chacun des Γ_j ont tous un sens car :

$$\begin{aligned}\gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j} &\in W_p^{-1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j) \text{ et } \gamma_j v \in \dot{W}_q^{1+\frac{1}{p}}(\Gamma_j), \\ \gamma_j u &\in W_p^{-\frac{1}{p}}(\Gamma_j) \text{ et } \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \in \dot{W}_q^{\frac{1}{p}}(\Gamma_j).\end{aligned}$$

1.5 Espaces de Sobolev avec poids

Rappelons que notre objectif est d'étudier le comportement de la solution de nos problèmes au voisinage des sommets. Pour cela, on peut classiquement se ramener au cas où le sommet est en O et où Ω est un secteur infini d'ouverture ω , noté G , et où u est à support borné. Il est commode d'introduire des espaces avec poids adaptés à la géométrie du domaine G .

Définition 1.5.1. On note $P_p^m(G)$ l'espace des distributions u définies dans G telles que :

$$r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u \in L^p(G)$$

pour $|\alpha| \leq m$ (m est entier ≥ 0), où $r(x)$ désigne la distance de x à l'origine.

Ces espaces correspondent à des espaces de Sobolev usuels dans le changement de variables $x = (x_1, x_2) \in G \mapsto (t = \ln(x), \theta = \arctan \frac{x_1}{x_2})$. Ce changement de variables transforme G en la bande $B = \mathbb{R} \times]0, \omega[$. Précisément, si u et v se correspondent par

$$u(x) = \tilde{u}(t, \theta).$$

Lemme 1.5.2. On a $u \in P_p^m(G)$ si et seulement si

$$e^{(-m+\frac{2}{p})t} \tilde{u} \in W_p^m(B).$$

On note $P^m = P_2^m$.

Cet espace est relié aux espaces de Sobolev par les injections suivantes :

Lemme 1.5.3.

- (i) $H_0^m(G) \subset P^m(G)$,
- (ii) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{G})$ et $u \in P^m(G)$, alors $\varphi u \in H^m(G)$.

Démonstration.

- (ii) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{G})$, $u \in P^m(G)$ et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}n^2$ tels que $|\alpha| \leq m$.

On a

$$D^\alpha [\varphi u] = \sum_{(k,l) \leq \alpha} C_\alpha^{(k,l)} D^{(k,l)} \varphi D^{\alpha-(k,l)} u.$$

Donc, on a le résultat désiré si on remarque que $\varphi D^\alpha u = r^{m-|\alpha|} \varphi \cdot r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u$, où

$$r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(G) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m.$$

(i) Pour $u \in \mathcal{D}(G)$, on a

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial \sigma} u(r \cos \sigma, r \sin \sigma) d\sigma.$$

Or

$$\left| \frac{\partial}{\partial \sigma} u(r \cos \sigma, r \sin \sigma) \right| \leq r |\nabla u(r \cos \sigma, r \sin \sigma)|.$$

On en déduit

$$\frac{|u(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r} \leq \int_0^\theta |\nabla u(r \cos \sigma, r \sin \sigma)| d\sigma,$$

et

$$\begin{aligned} \int_G |r^{\gamma-1} u(x, y)|^2 dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^\omega |r^{\gamma-1} u(r \cos \theta, r \sin \theta)|^2 r dr d\theta \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^\omega \left(\int_0^\theta |r^\gamma \nabla u(r \cos \sigma, r \sin \sigma)| d\sigma \right)^2 r dr d\theta \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^\omega d\theta \int_0^\theta |r^\gamma \nabla u(r \cos \sigma, r \sin \sigma)|^2 r dr d\sigma d\theta \\ &\leq \frac{\omega^2}{2} \int_G |r^\gamma \nabla u|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Cette inégalité, appliquée de façon itérée aux dérivées de u , montre que pour tout $|\alpha| \leq m$ il existe C tel que

$$\int_G |r^{-m+|\alpha|} D^\alpha u|^2 dx dy \leq C \sum_{|\beta|=m} \int_G |D^\beta u|^2 dx dy.$$

Par densité, on en déduit (i). □

On introduit également les espaces duaux des espaces précédents, au moins pour $m = 1$.

$P^{-1}(G)$ désigne l'espace des distributions de la forme :

$$\frac{g_0}{r} + D_1 g_1 + D_2 g_2, \text{ avec } g_j \in L^2(G), 0 \leq j \leq 2.$$

Lemme 1.5.4. Si $\varphi \in D(\Omega)$ et $u \in H^{-1}(G)$, alors $\varphi u \in P^{-1}(G)$.

Démonstration.

On a

$$u = f_0 + Df_1 + D_2f_2 \text{ avec } f_j \in L^2(G), 0 \leq j \leq 2.$$

On en déduit que

$$\varphi u = \{\varphi f_0 - D_1(\varphi) f_1 - D_2(\varphi) f_2\} + D_1(\varphi f_1) + D_2(\varphi f_2).$$

C'est le résultat désiré, si on pose

$$\begin{cases} \frac{g_0}{r} = \varphi f_0 - (D_1\varphi) f_1 - (D_2\varphi) f_2, \\ g_j = D_j(\varphi f_j), j = 1, 2. \end{cases}$$

□

Dans la suite, nous aurons besoin du théorème de **Paley-Wiener-Schwartz** (TREVES 1967 p. 305).

Théorème 1.5.5.

(i) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ d'ordre N_0 telle que $\text{supp}T \subset \{t \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq r\}$. Il existe alors une fonction $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que $F(\zeta) = \hat{T}(\zeta)$ si $\zeta \in \mathbb{R}^2$ et,

$$|F(z)| \leq C(1 + |z|)^{N_0} e^{r|\text{Im}z|}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Inversement, soit $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant la propriété ci-dessus ; il existe alors $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{supp}T \subset \{t \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq r\}$ et $\hat{T}(\zeta) = F(\zeta)$, $\forall \zeta \in \mathbb{R}^2$.

2 L'étude de certains problèmes aux limites dans un polygone du plan

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de faire un rappel sur l'étude de certains problèmes aux limites dans un polygone du plan. Plus précisément, on examine le comportement de la solution au voisinage d'un coin.

La section 2.2 sera consacrée aux travaux de GRISVARD 1986 pour le problème de Laplacien-Dirichlet, la section 2.3 aux travaux de BLUM et RANNACHER 1980 pour le problème suivant :

$$(P_2) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = M(u) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où Ω borné est un ouvert de \mathbb{R}^2 à frontière strictement polygonale.

BLUM et RANNACHER 1980, comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction générale, ont étudié de manière détaillée le problème (P_2) . Il reste cependant à donner un sens à la condition aux limites $M(u) = 0$, à savoir que la solution variationnelle appartienne à $H^2(\Omega)$. Pour ce faire, on va utiliser des techniques analogues à celles de NECAS 1967. On rappelle également le résultat principal de leur article.

2.2 Le problème du Laplacien dans un polygone

2.2.1 Position du problème

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on considère u , solution variationnelle du problème suivant

$$(P_1) \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il s'agit d'étudier la régularité de u dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale avec des conditions de Dirichlet homogène.

2.2.2 La formulation variationnelle du problème (P_1)

Rappelons que la formulation variationnelle du problème (P_1) est obtenue en choisissant :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0, \text{ sur } \Gamma \right\} = H_0^1(\Omega),$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

et

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Le problème variationnel est alors

$$(P_1^v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \forall v \in V. \end{cases}$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram, le problème (P_1^v) a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ (voir par exemple GRISVARD 1986).

2.2.3 Localisation du problème (P_1^v)

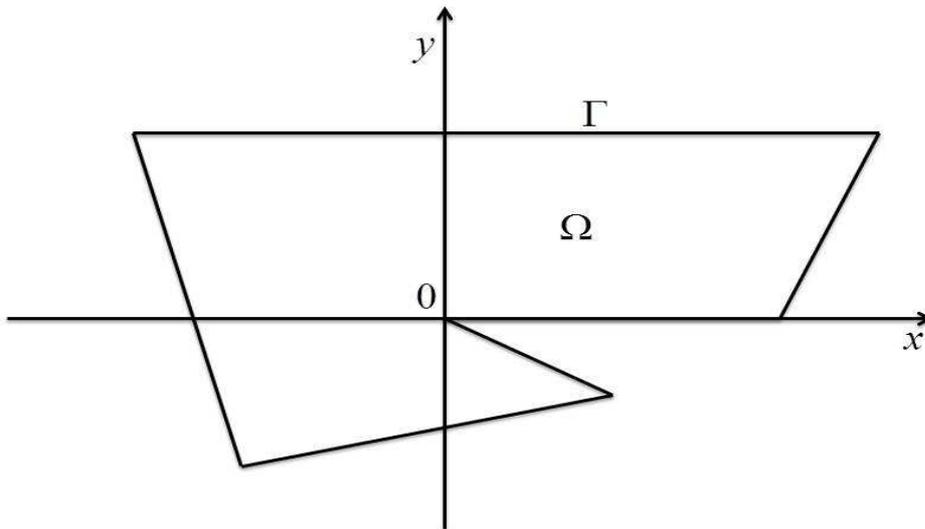


Figure 2.1 – L'ouvert Ω

Pour obtenir des énoncés plus simples, il sera commode de supposer qu'un des coins coïncide avec l'origine et que ses côtés sont portés par les demi-axes $\theta = 0$ et $\theta = \omega$ conformément à la figure 2.1.

Posons Σ l'ensemble des sommets de Ω qu'un décompose en :

$$\Sigma = \Sigma_a \cup \Sigma_b,$$

avec

$$\Sigma_a \text{ l'ensemble des sommets d'angle } < \pi$$

$$\Sigma_b \text{ l'ensemble des sommets d'angle } > \pi.$$

En appliquant la méthode de la partition de l'unité sur l'ouvert Ω , on obtient

$$1 = \sum_{\omega \in \Sigma} \chi_\omega + \chi_{reg},$$

telle que

$$\chi_\omega(\omega') = \delta_{\omega, \omega'} \text{ pour tout } \omega, \omega' \in \Sigma,$$

$$\chi_{reg}(\omega) = 0 \text{ pour tout } \omega \in \Sigma.$$

où $\chi \in C^\infty$ à support dans $D(\bar{\Omega}) \cap B(\omega, \rho)$ pour $\rho > 0$.

On déduit alors

$$u = \sum_{\omega \in \Sigma} u_\omega + u_{reg}.$$

Lemme 2.2.1. *On a*

$$u_{reg} \in H^2(\Omega)$$

Démonstration. Soit Ω_0 un ouvert de Ω de classe C^∞ , telle que $\text{supp } \chi_\omega \subset \Omega_0$.

On a

$$\Delta(\chi_{reg}u) = (\Delta\chi_{reg})u + \chi_{reg}f + 2 \left\{ \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = g.$$

On a évidemment $g \in L^2(\Omega_0)$ donne $u_{reg} \in H^2(\Omega_0)$.

Pour montrer que $u_{reg} \in H^2(\Omega)$, il suffit de prolonger u_{reg} par 0, ce qui n'endommage pas la régularité puisque u_{reg} est nulle au voisinage de $\partial\Omega_0$. \square

Un calcul analogue au précédent donne

$$\Delta u_\omega = \Delta(\chi_\omega u) = h_\omega, \tag{2.2.1}$$

avec

$$h_\omega = (\Delta\chi_\omega)u + \chi_\omega f + 2 \left\{ \frac{\partial\chi_\omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\chi_\omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\}.$$

Il est clair que $h_\omega \in L^2(\Omega)$ car $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.2.4 Transformation du problème

Pour simplifier les notations, on pose $v = u_\omega$ et $h = h_\omega$, alors l'équation (2.2.1) en coordonnées polaires s'écrit

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) v(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 v(r, \theta) = h(r, \theta), \quad (2.2.2)$$

avec $0 < r \leq 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Notons $G = \{(r, \theta) | 0 < r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Rappelons que le support de v et h est inclus dans $\{r \leq 1\}$. Ensuite, on pose $r = e^t$, et

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= v(e^t, \theta) = v_1(t, \theta), \\ h_1(t, \theta) &= e^{2t} h(e^t, \theta). \end{aligned}$$

Il vient

$$\Delta v_1(t, \theta) = h_1(t, \theta),$$

avec $\text{supp} v_1 \subset \{t \leq 0\}$ et $\text{supp} h_1 \subset \{t \leq 0\}$. A ce point, on note B la bande infinie $\mathbb{R} \times]0, \omega[$ munie de la mesure $dt d\theta$.

Lemme 2.2.2. *On a*

1. $h \in L^2(G)$ si et seulement si $e^{-t} h_1 \in L^2(B)$
2. $u \in L^2(G)$ si et seulement si $e^t v_1 \in L^2(B)$
3. $\nabla u \in L^2(G)$ si et seulement si $\nabla v_1 \in L^2(B)$
4. $\Delta u \in L^2(G)$ si et seulement si $e^{-t} \Delta v_1 \in L^2(B)$

Démonstration.

1. Cela résulte des calculs suivants

$$\int_B h_1(t, \theta)^2 e^{-2t} dt d\theta = \int_B h(e^t, \theta)^2 e^{2t} dt d\theta = \int_G h(r, \theta)^2 r dr d\theta.$$

$$\int_B v_1(t, \theta)^2 e^{2t} dt d\theta = \int_B v(e^t, \theta)^2 e^{2t} dt d\theta = \int_G u(r, \theta)^2 r dr d\theta.$$

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla v_1(t, \theta)|^2 dt d\theta &= \int_B [(\partial_t v_1(t, \theta))^2 + (\partial_\theta v_1(t, \theta))^2] dt d\theta \\
&= \int_G [(r \partial_r u(r, \theta))^2 + ((\partial_\theta u(r, \theta))^2)] \frac{1}{r} dr d\theta \\
&= \int_G [(\partial_r u(r, \theta))^2 + (\frac{1}{r} \partial_\theta u(r, \theta))^2] r dr d\theta.
\end{aligned}$$

2. Un calcul analogue au précédent donne : si $\Delta u \in L^2(G)$ alors $e^{-t} \Delta v_1 \in L^2(B)$.

Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.2.

□

2.2.5 Transformation de Fourier

Grâce à l'hypothèse $v_1 \in L^2(B)$, alors v_1 et ses dérivées d'ordre ≤ 2 admettent une transformation de Fourier sur la bande

$$B = \{(\zeta, \theta) : \zeta \in]-\infty, 0[\text{ et } \theta \in]0, \omega[\}.$$

De même, la fonction h_1 admet une transformée de Fourier sur la même bande.

En appliquant la transformation de Fourier par rapport à t sur l'équation (2.2.2), on obtient, posant $\hat{v}_1 = V$

$$-\zeta^2 V(\zeta, \theta) + \partial_\theta^2 V(\zeta, \theta) = \hat{h}_1(\zeta, \theta). \quad (2.2.3)$$

Finalement, on obtient une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 avec les conditions aux limites suivantes :

$$V(\zeta, \theta) = 0 \quad \text{pour } \theta = 0, \theta = \omega.$$

La solution de l'équation (2.2.3) à ζ fixé, est donnée par :

$$V(\zeta, \theta) = c_1(\theta) sh(\zeta\theta) + c_2(\theta) ch(\zeta\theta),$$

où c_1 et c_2 sont des fonctions de θ , dépendant régulièrement du paramètre ζ .

La méthode de variation de la constante donne

$$\begin{cases} c_1'(\theta) sh(\zeta\theta) + c_2'(\theta) ch(\zeta\theta) = 0, \\ \zeta c_1'(\theta) ch(\zeta\theta) + \zeta c_2'(\theta) sh(\zeta\theta) = \hat{h}_1(\zeta, \theta), \end{cases}$$

d'où, en faisant apparaître explicitement la dépendance en ζ :

$$\begin{cases} \partial_\theta c_1(\zeta, \theta) = \frac{1}{\zeta} \hat{h}_1(\zeta, \theta) ch(\zeta\theta), \\ \partial_\theta c_2(\zeta, \theta) = -\frac{1}{\zeta} \hat{h}_1(\zeta, \theta) sh(\zeta\theta). \end{cases}$$

Les conditions aux limites $V(\zeta, 0) = 0$ et $V(\zeta, \omega) = 0$, nous permettent de conclure que

$$\begin{aligned} c_2(\zeta, 0) &= 0, \\ c_1(\zeta, \omega) &= -\frac{ch(\zeta\omega)}{sh(\zeta\omega)} c_2(\zeta, \omega). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} c_1(\zeta, \omega) &= \frac{ch(\zeta\omega)}{\zeta sh(\zeta\omega)} \int_0^\omega \hat{h}_1(\zeta, \sigma) sh(\zeta\sigma) d\sigma - \frac{1}{\zeta} \int_\theta^\omega \hat{h}_1(\zeta, \theta) ch(\zeta\sigma) d\sigma \\ c_2(\zeta, \omega) &= -\frac{1}{\zeta} \int_0^\theta \hat{h}_1(\zeta, \sigma) sh(\zeta\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(\zeta, \theta) &= \int_0^\theta \hat{h}_1(\zeta, \sigma) \frac{1}{\zeta} \left\{ \frac{ch(\zeta\omega)}{sh(\zeta\omega)} sh(\zeta\sigma) sh(\zeta\theta) - sh(\zeta\sigma) ch(\zeta\theta) \right\} d\sigma \\ &+ \int_\theta^\omega \hat{h}_1(\zeta, \sigma) \frac{1}{\zeta} \left\{ \frac{ch(\zeta\omega)}{sh(\zeta\omega)} sh(\zeta\sigma) sh(\zeta\theta) - ch(\zeta\sigma) sh(\zeta\theta) \right\} d\sigma \\ &= -\frac{1}{\zeta} \int_0^\theta \hat{h}_1(\zeta, \sigma) \frac{sh(\zeta\sigma)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \theta) d\sigma - \frac{1}{\zeta} \int_\theta^\omega \hat{h}_1(\zeta, \sigma) \frac{sh(\zeta\theta)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \sigma) d\sigma. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Si on pose

$$K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) = -\frac{1}{\zeta} \frac{sh(\zeta\sigma)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \theta) \text{ si } 0 < \sigma < \theta.$$

$$K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) = -\frac{1}{\zeta} \frac{sh(\zeta\theta)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \sigma) \text{ si } \theta < \sigma < \omega,$$

alors l'équation (2.2.4) s'écrit sous la forme suivante :

$$V(\zeta, \theta) = \int_0^\omega K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) \hat{h}_1(\zeta, \sigma) d\sigma,$$

soit

$$\hat{v}_1(\zeta, \theta) = \int_0^\omega K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) \hat{h}_1(\zeta, \sigma) d\sigma. \quad (2.2.5)$$

2.2.6 Propriétés du noyau K_ω

On a, si $\zeta \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &\sim -\frac{1}{2\zeta} e^{-\zeta(\theta-\sigma)} \text{ si } 0 < \sigma < \theta \\ K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &\sim -\frac{1}{2\zeta} e^{-\zeta(\sigma-\theta)} \text{ si } \theta < \sigma < \omega, \end{aligned}$$

et si $\zeta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &\sim -\frac{\sigma(\omega-\theta)}{\omega} \text{ si } 0 < \sigma < \theta, \\ K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &\sim -\frac{\theta(\omega-\sigma)}{\omega} \text{ si } \theta < \sigma < \omega. \end{aligned}$$

La fonction

$$\zeta \rightarrow K_\omega(\zeta; \sigma, \theta),$$

est une fonction méromorphe, dont les pôles sont de la forme $ik\frac{\pi}{\omega}$ avec $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

La fonction

$$\zeta \rightarrow \hat{h}_1(\zeta, \sigma) = \int_{t \leq 0} e^{-\zeta t} h_1(t, \sigma) dt = \int_{t \leq 0} e^{-\zeta t} e^{2t} h(e^t, \sigma) dt,$$

est une fonction holomorphe sur le demi plan $\{Im\zeta > -1\}$.

En effet, on sait que le support de h est borné (en t) par $\ln R$ ($r \leq R$). Alors

$$\hat{h}_1(\zeta, \sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta t} h_1(t, \sigma) dt = \int_{t \leq \ln R} e^{-i(\tau_1 + i\tau_2)t} e^{2t} h(e^t, \sigma) dt = \int_{t \leq \ln R} e^{-i\tau_1 t} e^{(\tau_2 + 1)t} e^t h(e^t, \sigma) dt.$$

Comme $e^t h(e^t, \sigma) \in L^2(B)$, on a

$$|\hat{h}_1(\zeta, \sigma)| \leq CR^{(\tau_2 + 1)} \text{ si } (\tau_2 + 1) \geq 0.$$

2.2.7 Le résultat principal

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.2.3. *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, la solution u du problème (P_1) admet au*

voisinage de l'origine la décomposition :

$$u = u_r + u_s$$

où

1. $u_r \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,
2. $u_s = \sum_j c_j S_j$, avec $S_j(r_j, \theta_j) = \eta_j(r_j) r_j^{\frac{\pi}{\omega_j}} \sin(\frac{\pi}{\omega_j} \theta_j)$ pour $\omega_j > \pi$.

Dans le cas ou $\omega < \pi$, on a $u_s = 0$.

Démonstration. La démonstration est celle de GRISVARD 1986, elle est basée essentiellement sur le théorème des résidus et les espaces de Sobolev à poids définis dans le chapitre précédent.

Si on applique la transformation de Fourier inverse dans l'équation (2.2.5), on obtient

$$v_1(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta t} \hat{v}_1(\zeta, \theta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\sigma d\zeta.$$

On veut translater l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}$ a $\int_{\mathbb{R}-i}$ pour faire apparaître les termes e^t dont on a besoin pour obtenir les estimations demandées par le lemme 2.2.2.

Cela donne, si $\omega > \pi$

$$\begin{aligned} v_1(t, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\sigma d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega e^{i(\zeta-i)t} \hat{h}_1(\zeta-i, \sigma) K_\omega(\zeta-i; \sigma, \theta) d\sigma d\zeta \\ &\quad + i \int_0^\omega \text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}) d\sigma. \end{aligned}$$

Soit γ_R (voir la figure 2.2) le contour défini sur le plan complexe.

Par application du théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\zeta &= 2i\pi \text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}) \\ &= \int_{-R}^R e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\zeta - \int_{-R-i}^{R-i} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\zeta \\ &\quad + \int_R^{R-i} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\zeta + \int_{-R-i}^{-R} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\zeta. \end{aligned}$$

Or quand $R \rightarrow +\infty$, alors

$$\int_{\pm R \rightarrow \pm R-i} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\zeta \rightarrow 0. \quad (2.2.6)$$

Le résultat (2.2.6) est une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue ap-

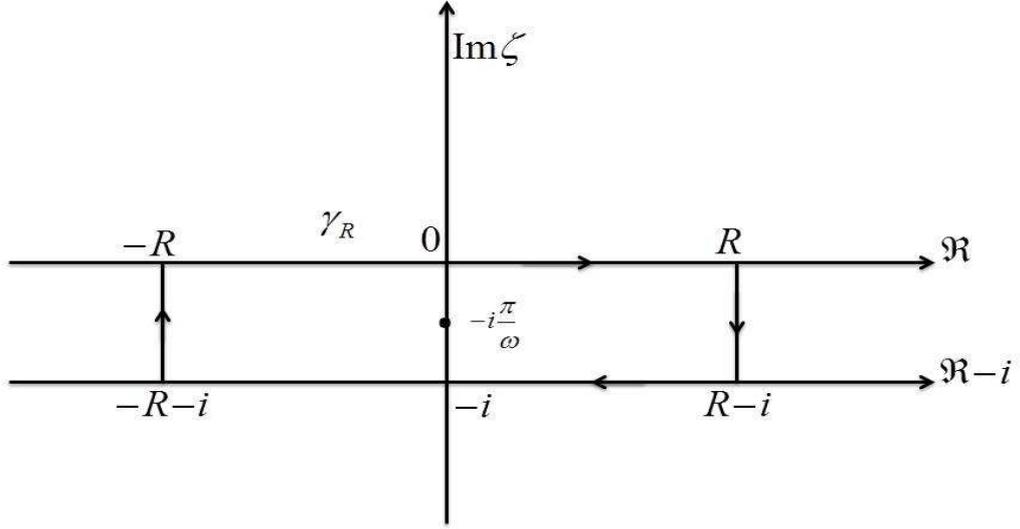


Figure 2.2 – Le contour γ_R , cas $\omega > \pi$

pliqué à la fonction $\zeta \rightarrow e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta)$.

On trouve donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta, \sigma, \theta) d\zeta = \int_{-\infty-i}^{+\infty-i} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) d\zeta + 2i\pi \text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}).$$

A ce point, on pose

$$v_{1,r}(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega e^{i(\zeta-i)t} \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma d\zeta$$

$$v_{1,s}(t, \theta) = i \int_0^\omega \text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}) d\sigma.$$

Si $\omega < \pi$, alors $\text{Im}(-i\frac{\pi}{\omega}) < -1$, et on obtient $v_1(r, \theta) = v_{1,r}(r, \theta)$ avec la même définition de $v_{1,r}$.

La suite de la démonstration du théorème 2.2.3 repose sur les lemmes suivants :

Lemme 2.2.4. On a

1. $v_{1,r}(t, \theta) \in P^2(B)$,
2. $v_{1,s}(t, \theta) = 0$ si $\omega < \pi$,
3. $v_{1,s}(t, \theta) = ce^{t\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \eta_\omega(e^t, \theta)$ si $\omega > \pi$.

Démonstration. Rappelons également qu'on désigne par $P^2(B)$, l'espace des u telles que :

$$e^{(-2+|\alpha)t} D^\alpha u \in L^2(B), |\alpha| \leq 2.$$

La démonstration de la première partie du lemme 2.2.4 est basée sur :

Lemme 2.2.5. *On a*

$$\forall \theta \in [0, \omega] \int_0^\omega |\zeta - i|^2 |K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma \leq C$$

$$\forall \sigma \in [0, \omega] \int_0^\omega |\zeta - i|^2 |K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\theta \leq C$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |\zeta - i|^2 |K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma &= \int_0^\theta |\zeta - i|^2 |K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma + \int_\theta^\omega |\zeta - i|^2 |K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

D'après la définition de $K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)$ si $0 < \sigma < \theta$, on a

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\theta |\zeta - i|^2 |K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma \\ &= \int_0^\theta |\zeta - i| |sh(\zeta - i)\sigma| d\sigma \times \left| \frac{sh((\zeta - i)(\omega - \theta))}{sh(\zeta - i)\omega} \right|. \end{aligned}$$

Comme

$$sh(\zeta - i)x = sh\zeta x \cos x - ich\zeta x \sin x = \frac{e^{(\zeta-i)x}}{2} (1 - e^{-2(\zeta-i)x}) \text{ si } \zeta \geq 0,$$

et

$$\left| 1 - e^{-2(\zeta-i)x} \right| \leq 2,$$

alors

$$\left| \frac{sh((\zeta - i)(\omega - \theta))}{sh(\zeta - i)\omega} \right| = \frac{e^{\zeta(\omega-\theta)}}{e^{\zeta\omega}} \frac{\left| 1 - e^{-2(\zeta-i)(\omega-\theta)} \right|}{\left| 1 - e^{-2(\zeta-i)\omega} \right|} \leq C e^{-\zeta\theta}.$$

Donc

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\theta |\zeta - i| |sh(\zeta - i)\sigma| d\sigma \times \left| \frac{sh((\zeta - i)(\omega - \theta))}{sh(\zeta - i)\omega} \right| \\ &\leq C \left(\int_0^\theta \sqrt{1 + \zeta^2} e^{\zeta\sigma} d\sigma \right) e^{-\zeta\theta} \leq C. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\int_0^\theta |\zeta - i|^2 |K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma \leq C.$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$J_2 = \int_{\theta}^{\omega} |\zeta - i|^2 |K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma \leq C.$$

□

Lemme 2.2.6. *On a*

$$\int_0^{\omega} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^{\omega} (\zeta - i)^2 \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma \right|^2 d\theta d\zeta \leq C \int_0^{\omega} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}_1(\zeta - i, \sigma)|^2 d\zeta d\sigma. \quad (2.2.7)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^{\omega} (\zeta - i)^2 \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma \right|^2 d\theta d\zeta &\leq \int_0^{\omega} \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\int_0^{\omega} |\hat{h}_1(\zeta - i, \sigma)|^2 |\zeta - i|^2 |K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^{\omega} |\zeta - i|^2 |K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta)| d\sigma \right) \right) d\zeta d\theta. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini et le lemme 2.2.5, on obtient (2.2.7). □

Revenons maintenant à la démonstration du Lemme 2.2.4.

Montrons que $v_{1,r} \in P^2(B)$ (c'est-à-dire $\nabla_{t,\theta}^2 v_{1,r}(t, \theta) e^{-t} \in L^2(B)$).

On a

$$\begin{aligned} \int_B \left| \nabla_{t,\theta}^2 v_{1,r}(t, \theta) \right|^2 e^{-2t} dt d\theta &= \int_B \left[(\partial_t^2 v_{1,r}(t, \theta))^2 + ((\partial_{\theta}^2 v_{1,r}(t, \theta))^2) \right] e^{-2t} dt d\theta \\ &= \int_B (\partial_t^2 v_{1,r}(t, \theta))^2 e^{-2t} dt d\theta + \int_B ((\partial_{\theta}^2 v_{1,r}(t, \theta))^2) e^{-2t} dt d\theta \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Etape 1. Estimation du terme I_1

On a

$$v_{1,r}(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\omega} e^{i(\zeta-i)t} \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma d\zeta. \quad (2.2.8)$$

Si on dérive (2.2.8) deux fois par rapport à t , on obtient

$$\partial_t^2 v_{1,r}(t, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\omega} e^{i(\zeta-i)t} (\zeta - i)^2 \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma d\zeta.$$

D'où

$$\begin{aligned} e^{-t} \partial_t^2 v_{1,r}(t, \theta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta t} \left[\int_0^{\omega} (\zeta - i)^2 \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma \right] d\zeta \\ &= -\text{TF inverse de } \zeta \longrightarrow \left[\int_0^{\omega} (\zeta - i)^2 \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_{\omega}(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma \right] \end{aligned}$$

Le théorème de Plancherel donne alors

$$\begin{aligned} \int_B |\partial_t^2 v_{1,r}(t, \theta)|^2 e^{-2t} dt d\theta &= C \int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^\omega (\zeta - i)^2 \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma \right|^2 d\zeta d\theta \\ &\leq C \int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}_1(\zeta - i, \sigma)|^2 d\zeta d\sigma \\ &= C \int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} |h_1(t, \sigma)|^2 e^{-2t} dt d\sigma \quad (\text{Plancherel et le lemme 2.2.6}). \end{aligned}$$

Etape 2. Estimation du terme I_2

On pose

$$\tilde{v}_{1,r}(\zeta, \sigma) = \int_0^\omega \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma, \quad (2.2.9)$$

On va dériver (2.2.9) deux fois par rapport à σ . La dérivée première donne

$$\partial_\theta \tilde{v}_{1,r}(\zeta, \theta) = \int_0^\omega \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) \partial_\theta K_\omega(\zeta - i; \theta, \sigma) d\sigma,$$

avec

$$\begin{aligned} \partial_\theta K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &= \frac{sh(\zeta\sigma)}{sh(\zeta\omega)} ch\zeta(\omega - \theta) \text{ si } 0 < \sigma < \theta, \\ \partial_\theta K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &= -\zeta \frac{ch(\zeta\theta)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \sigma) \text{ si } \theta < \sigma < \omega. \end{aligned}$$

Il n'y a pas de terme de bord parce que $\hat{h}_1 = 0$ en $\sigma = 0, \sigma = \omega$ et K_ω continue en θ .

Pour la deuxième dérivée, on a

$$\partial_\theta^2 \tilde{v}_{1,r}(\zeta, \theta) = \int_0^\omega \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) \partial_\theta^2 K_\omega(\zeta - i; \theta, \sigma) d\sigma + \hat{h}_1(\zeta - i, \theta),$$

avec

$$\begin{aligned} \partial_\theta^2 K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &= -\zeta \frac{sh(\zeta\sigma)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \theta) \text{ si } 0 < \sigma < \theta \\ \partial_\theta^2 K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) &= -\zeta \frac{sh(\zeta\theta)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \sigma) \text{ si } \theta < \sigma < \omega, \end{aligned}$$

et en utilisant $\hat{h}_1 = 0$ en $\sigma = 0, \sigma = \omega$ et $\frac{sh(\zeta\theta)ch\zeta(\omega - \theta) + ch(\zeta\theta)sh\zeta(\omega - \theta)}{sh(\zeta\omega)} = 1$.

Lemme 2.2.7.

$$\begin{aligned}\forall \theta \in [0, \omega] \int_0^\omega \left| \partial_\theta^2 K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta) \right| d\sigma &\leq C, \\ \forall \sigma \in [0, \omega] \int_0^\omega \left| \partial_\theta^2 K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta) \right| d\theta &\leq C.\end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 2.2.5. \square

Finalement, on a

$$e^{-t} \partial_\theta^2 v_{1,r}(t, \theta) = C \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) \partial_\theta^2 K_\omega(\zeta - i; \sigma, \theta) d\sigma d\zeta + C \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta - i, \theta) d\zeta.$$

Alors

$$\begin{aligned}\|e^{-t} \partial_\theta^2 v_{1,r}\|_{L^2(B)}^2 &\leq C \left\| \int_0^\omega \hat{h}_1(\zeta - i, \sigma) \partial_\theta^2 K_\omega d\sigma \right\|_{L^2(d\zeta d\theta)}^2 + C \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega |\hat{h}_1(\zeta - i, \theta)|^2 d\zeta d\sigma \\ &\leq I + II.\end{aligned}$$

Rappelons que $\hat{h}_1(\zeta - i, \theta) = \text{TF}(e^{-t} h_1(t, \theta))$.

Donc d'après le lemme 2.2.2

$$\begin{aligned}II &= C \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega |e^{-t} h_1(t, \theta)|^2 dt d\theta \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega |h(r, \theta)|^2 r dr d\theta \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.2.7 et l'égalité de Plancherel, on obtient

$$I \leq C \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega |\hat{h}_1(\zeta - i, \theta)|^2 d\zeta d\sigma \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Donc

$$\int_B \left| \nabla_{t,\theta}^2 v_{1,r}(t, \theta) \right|^2 e^{-2t} dt d\theta \leq c \int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} |h_1(t, \sigma)|^2 e^{-2t} dt d\sigma \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ce qui achève la démonstration de la première partie du lemme 2.2.4.

Il reste maintenant à calculer $v_{1,s}$ et démontrer la deuxième et la troisième partie du lemme 2.2.4. On a, si $\omega > \pi$

$$v_{1,s} = i \int_0^\omega \text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}) d\sigma.$$

Suivant la valeur de σ , on va distinguer deux cas :

1^{er} cas : $0 < \sigma < \theta$, on a

$$K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) = -\frac{1}{\zeta} \frac{sh(\zeta\sigma)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \theta).$$

Un calcul simple donne

$$\text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}) = -\frac{i}{\pi} e^{\frac{\pi}{\omega} t} \hat{h}_1(-\frac{i\pi}{\omega}, \sigma) \sin \frac{\pi\sigma}{\omega} \sin \frac{\pi\theta}{\omega}$$

2^{ème} cas : $\theta < \sigma < \omega$, on a

$$K_\omega(\zeta; \sigma, \theta) = -\frac{1}{\zeta} \frac{sh(\zeta\theta)}{sh(\zeta\omega)} sh\zeta(\omega - \sigma).$$

Donc

$$\text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}) = -\frac{i}{\pi} e^{\frac{\pi}{\omega} t} \hat{h}_1(-\frac{i\pi}{\omega}, \sigma) \sin \frac{\pi\sigma}{\omega} \sin \frac{\pi\theta}{\omega}.$$

D'où

$$\begin{aligned} v_{1,s} &= i \int_0^\omega \text{Res}(e^{i\zeta t} \hat{h}_1(\zeta, \sigma) K_\omega(\zeta; \sigma, \theta), -i\frac{\pi}{\omega}) d\sigma \\ &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{\pi}{\omega} t} \sin \frac{\pi\theta}{\omega} \int_0^\omega \hat{h}_1(-\frac{i\pi}{\omega}, \sigma) \sin \frac{\pi\sigma}{\omega} d\sigma = C e^{\frac{\pi}{\omega} t} \sin \frac{\pi\theta}{\omega}. \end{aligned}$$

Enfin, si $\omega < \pi$, on a vu que $v_{1,s} = 0$.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.2.4 et du théorème 2.2.3. □

□

2.3 Le problème (P_2) dans un polygône

2.3.1 Position du problème

On considère ici un problème aux limites gouverné par l'opérateur bilaplacien. Pour $f \in L^2(\Omega)$ donnée, on cherche u dans $H^2(\Omega)$ solution du problème suivant :

$$(P_2) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = M(u) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où

$$M(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Ce problème représente le modèle mathématique de la déformation d'une plaque simplement posée sur son bord Γ . f est la densité de force volumique, $u(x)$ est le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements). $M(u)$ est le moment de flexion. On s'intéresse à l'existence et à l'unicité de la solution variationnelle $u \in H^2(\Omega)$ de (P_2) .

2.3.2 Formulation variationnelle du problème aux limites

2.3.2.1 Notations

Les vecteurs

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix},$$

sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ (les sommets sont exclus). Les restrictions de η et τ à Γ_j , pour $j = 1, 2, \dots, J$, seront notées par

$$\eta_j = \begin{pmatrix} \eta_1^j \\ \eta_2^j \end{pmatrix} \text{ et } \tau_j = \begin{pmatrix} \tau_1^j \\ \tau_2^j \end{pmatrix}.$$

Pour une fonction u suffisamment régulière, $M(u)$ et $N(u)$ désignent les opérateurs différentiels suivants :

$$M(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$N(u) = -\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2},$$

où $\nu \in]0, 1[$ est le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque.
Les restrictions de $M(u)$ et de $N(u)$ à Γ seront notées

$$M(u) = \gamma(\nu\Delta u + (1 - \nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}),$$

$$N(u) = -\gamma\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta u + (1 - \nu)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2}\right),$$

où γ désigne l'application trace sur Γ .

Les restrictions de $M(u)$ et de $N(u)$ à Γ_j , pour $j = 1, 2, \dots, J$, seront notées

$$M(u)|_{\Gamma_j} = \gamma_j(\nu\Delta u + (1 - \nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_j^2}),$$

$$N(u)|_{\Gamma_j} = -\gamma_j\left(\frac{\partial}{\partial \eta_j}\Delta u + (1 - \nu)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta_j \partial \tau_j^2}\right).$$

γ_j désigne l'application trace sur Γ_j .

2.3.2.2 Existence et unicité de la solution du problème (P_2)

On va montrer que la méthode variationnelle usuelle est applicable ici pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution $u \in H^2(\Omega)$.

Une formulation variationnelle de ce problème est obtenue en choisissant :

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \right] dx,$$

et

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Le problème variationnel associé à (P_2) est alors

$$(P_2^v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram, le problème (P_2^v) a une solution unique $u \in V$. En effet, la linéarité des formes a et F et la continuité de a sont faciles à vérifier ; la coercivité de la forme a est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.3.1. (NICAISE 2000) On a

$$a(u, u) \geq (1 - \nu) |u|_{H^2(\Omega)}^2, \forall u \in V, \quad (2.3.3)$$

où $|u|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ désigne la semi-norme de $H^2(\Omega)$.

Démonstration. Par définition de a , on a

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 + 2\nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} + 2(1 - \nu) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|^2 \right] dx dy.$$

Il en résulte que

$$a(u, u) \geq (1 - \nu) \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|^2 \right] dx dy.$$

□

La coercivité de la forme a sur V découle maintenant de (2.3.3) et de l'équivalence de $|u|_{H^2(\Omega)}$ avec $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ dans V (voir Theorem I.1.9 NECAS 1967).

Il reste à montrer dans un sens à préciser, que la solution u du problème (P_2^v) est bien solution du problème (P_2) .

En choisissant $v = \varphi \in D(\Omega)$ dans (2.3.2), on obtient immédiatement

$$\Delta^2 u = f \quad \text{dans } D'(\Omega). \quad (2.3.4)$$

La condition $u|_{\Gamma} = 0$ est contenue dans la définition de V . Il reste à justifier la seconde condition.

Soit

$$H(\Delta^2, \Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \Delta^2 v \in L^2(\Omega) \right\},$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{H(\Delta^2, \Omega)} = \left(\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\Delta^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 2.3.2. $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H(\Delta^2, \Omega)$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du cas $H(\Delta, \Omega)$ (voir le lemme 1.5.3.9 GRISVARD 1985). □

Lemme 2.3.3. *L'application $v \rightarrow \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \eta_j}$ est linéaire continue surjective de V dans $\prod_{j=1}^J \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 1.5.2.8 GRISVARD 1985. \square

Lemme 2.3.4. *Pour $u \in H(\Delta^2, \Omega)$, $M(u)$ est bien définie en tant qu'application de $H(\Delta^2, \Omega)$ dans $\prod_{j=1}^J H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$, et on a la formule de Green suivante*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx - \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx + \int_{\Omega} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] dx \\ = - \sum_{j=0}^J \left\langle \gamma_j M(u), \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)} \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Démonstration. D'après le théorème 1.5.2.8 GRISVARD 1985 et le corollaire 1.4.4.10 GRISVARD 1985, pour tout $w \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$, il existe $v \in V$ tel que $w = \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \eta_j}$ et

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|w\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)}, \quad (2.3.6)$$

où C est une constante indépendante de w .

Soit $u \in D(\overline{\Omega})$ et $u = 0$ sur Γ , pour $w \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ on définit

$$\ell(w) = \sum_j \int_{\Gamma_j} M_j(u) w d\sigma, \quad j = 0 \text{ à } J.$$

En faisant une intégration par parties (voir le lemme 2.2 NICAISE 1994), on obtient

$$\ell(w) = a(u, v) - \int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx.$$

D'après la continuité de la forme a sur V et l'estimation (2.3.6), il existe une constante C indépendante de w telle que

$$\begin{aligned} |\ell(w)| &\leq C \|u\|_{H(\Delta^2, \Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{H(\Delta^2, \Omega)} \|w\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)}. \end{aligned}$$

Par densité de $D(\overline{\Omega})$ dans $H(\Delta^2, \Omega)$ (voir le lemme 2.3.2), on obtient le résultat désiré. \square

D'après (2.3.4), on voit que $u \in H(\Delta^2, \Omega)$. La formule de Green (2.3.5) entraîne

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx + \sum_{j=0}^J \left\langle \gamma_j M(u), \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx,$$

pour tout $v \in V$. D'après (2.3.4), on a donc

$$\left\langle \gamma_j M(u), \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)} = 0 \quad \forall v \in V,$$

d'où d'après le lemme 2.3.3

$$\gamma_j M(u) = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j), \quad j = 0 \text{ à } J.$$

L'interprétation du problème variationnel (2.3.2) en terme de problème aux limites est donc la suivante :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega, u \in H(\Delta^2, \Omega), \\ u = 0 \text{ dans } H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \\ \gamma_j M(u) = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j), \quad j = 0 \text{ à } J. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Les problèmes (P_2^v) et (2.3.7) ont donc exactement les mêmes solutions.

Théorème 2.3.5. *Pour $f \in L^2(\Omega)$ le problème (2.3.7) admet une solution unique $u \in H(\Delta^2, \Omega)$.*

2.3.3 Localisation du problème (P_2^v)

En suivant les mêmes démarches, que dans la sous section 2.2.3, on obtient

$$u = \sum_{\omega \in \Sigma} u_{\omega} + u_{reg}$$

Lemme 2.3.6. *On a*

$$u_{reg} \in H^4(\Omega)$$

Démonstration. Soit Ω_0 un ouvert de Ω de classe C^∞ , telle que $\text{supp } \chi_{\omega} \subset \Omega_0$.

Calculons $\Delta^2 u_{reg} = \Delta^2(\chi_{reg} u)$.

On a

$$\Delta^2(\chi_{reg} u) = \Delta(\Delta \chi_{reg} u) + \Delta(\chi_{reg} \Delta u) + 2\Delta \left\{ \frac{\partial \chi_{reg}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{reg}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\}$$

$$\Delta(\chi_{reg}\Delta u) = \Delta\chi_{reg}\Delta u + \chi_{reg}\Delta(\Delta u) + 2 \left\{ \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \frac{\partial\Delta u}{\partial y} \right\}.$$

$$\Delta(\Delta\chi_{reg}u) = (\Delta(\Delta\chi_{reg}))u + \Delta\chi_{reg}\Delta u + 2 \left\{ \frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\}.$$

$$2 \left\{ \frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\Delta \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \Delta \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \left\{ \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \right\} \\ + \\ \left(\Delta \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \Delta \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \left\{ \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \right\} \end{array} \right\}.$$

Alors

$$\Delta^2(\chi_{reg}u) = \left\{ \begin{array}{l} \chi_{reg}\Delta^2 u + (\Delta^2\chi_{reg})u + 2 \left(\frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \left(\left(\Delta \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\Delta \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + \\ \left[2\Delta\chi_{reg}\Delta u + 8 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + 2 \left[\frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \frac{\partial\Delta u}{\partial y} \right] \\ + \\ \left(4 \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(4 \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + \left(4 \frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \left(6 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(8 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \end{array} \right\}.$$

Si on pose

$$\begin{aligned} [\Delta^2; \chi_{reg}] &= \Delta^2\chi_{reg} + 4 \left(\frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + 4 \left(\frac{\partial\Delta\chi_{reg}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} + 2 \left(3 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &+ 2 \left(3 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 8 \left(\frac{\partial^2\chi_{reg}}{\partial x\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 4 \left(\frac{\partial\chi_{reg}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ &+ 4 \left(\frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} + 4 \left(\frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} + 4 \left(\frac{\partial\chi_{reg}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\Delta^2 u_{reg} = f_{reg} = [\Delta^2; \chi_{reg}] u + \chi_{reg} f.$$

Comme le support de l'opérateur du troisième ordre $[\Delta^2; \chi_{reg}]$ ne rencontre aucun des sommets de Ω , f_{reg} conserve la régularité de f . Donc $f_{reg} \in L^2(\Omega_0)$ et par

conséquent $u_{reg} \in H^4(\Omega_0)$ (voir par exemple ADAMS 1975). \square

Un calcul analogue au précédent donne

$$\Delta^2 u_\omega = \Delta^2(\chi_\omega u) = g_\omega, \quad (2.3.8)$$

avec

$$g_\omega = [\Delta^2; \chi_\omega] u + \chi_\omega g \quad (2.3.9)$$

Il est clair que $g_\omega \in L^2(\Omega)$.

En effet, les coefficients devant D^3 sont des dérivées de η_ω , donc sont nuls au voisinage de l'angle, tandis que $D^3 u \in L^2$ (et même H^1) sur tout ouvert inclu dans Ω qui ne rencontre pas un voisinage de chaque angle.

2.3.4 Transformation du problème (P_2^v)

2.3.4.1 Passage en coordonnées polaires

Pour simplifier les notations, on pose $u_\omega = u$ et $g_\omega = g$.
L'équation (2.3.8) s'écrit en coordonnées polaires :

$$(rD_r)^4 u + 2(rD_r)^3 u - 2(rD_r)^2 u + 2(rD_r)^2 D_\theta^2 u - 2rD_r D_\theta^2 u + D_\theta^4 u + 4D_\theta^2 u = r^4 g \quad (2.3.10)$$

avec $0 < r \leq 1$ et $0 \leq \theta < \omega \leq 2\pi$.

Notons $G = \{(r, \theta) | 0 < r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \omega < 2\pi\}$.

Rappelons que le support de u et g est inclus dans $\{r \leq 1\}$. En coordonnées polaires, les conditions aux limites s'écrivent sous la forme suivante :

$$M(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) M_0(u) = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0. \quad (2.3.11)$$

Ensuite, on pose

$$\begin{cases} r = e^t, \\ u(r \cos \theta, r \sin \theta) = w(t, \theta), \\ g(r \cos \theta, r \sin \theta) = k(t, \theta). \end{cases}$$

il vient

$$(D_t^4 - 4D_t^3 + 2D_t^2 D_\theta^2 + D_\theta^4 + D_\theta^2) w = e^{4t} k \quad (2.3.12)$$

A ce point on pose

$$\begin{cases} Z = e^t w, \\ l = e^{3t} k. \end{cases}$$

Le changement de variable $r = e^t$ transforme G dans la demi-bande $D =]-\infty, 0[\times]0, \omega[$.

Alors (2.3.12) et (2.3.11) prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t^4 - 2D_t^2 + 1)Z + 2(D_t^2 + 1)D_\theta^2 Z + D_\theta^4 Z = l \text{ dans } B = \mathbb{R} \times]0, \omega[, \\ Z = D_\theta^2 Z = 0 \text{ pour } \theta = 0, \\ Z = D_\theta^2 Z = 0 \text{ pour } \theta = \omega. \end{array} \right. \quad (2.3.13)$$

Dans le paragraphe qui suit, on va démontrer que $Z \in H^2(B)$.

Pour $|\alpha| \leq 2$, $D^\alpha Z$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$e^{-t} D^\beta w; \quad |\beta| \leq 2. \quad (2.3.14)$$

On e déduit l'appartenance $Z \in H^2(B)$, d'autre part il est clair que la trace de Z est nulle sur la frontière de B .

2.3.4.2 Transformation de Fourier par rapport à t

On a $Z \in L^2(B)$, alors elle admet avec ses dérivées d'ordre ≤ 4 une transformée de Fourier sur la bande infinie $B = \mathbb{R} \times]0, \omega[$.

En appliquant la transformée de Fourier complexe par rapport à la première variable sur le système (2.3.13), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} (\zeta^4 + 2\zeta^2 + 1) \widehat{Z}(\zeta, \theta) + 2(1 - \zeta^2) \widehat{Z}_\theta^{(2)}(\zeta, \theta) + \widehat{Z}_\theta^{(4)}(\zeta, \theta) = \widehat{l}(\zeta, \theta) \text{ dans } B = \mathbb{R} \times]0, \omega[, \\ \widehat{Z}(\zeta, 0) = \widehat{Z}_\theta^{(2)}(\zeta, 0) = 0, \\ \widehat{Z}(\zeta, \omega) = \widehat{Z}_\theta^{(2)}(\zeta, \omega) = 0. \end{array} \right. \quad (2.3.15)$$

2.3.5 Etude de l'équation différentielle

ζ est fixé. On considère l'équation en θ , avec $h = \widehat{l}$ et $\phi = \widehat{Z}$:

$$(\zeta^4 + 2\zeta^2 + 1) \phi(\zeta, \theta) + 2(1 - \zeta^2) \phi_\theta^{(2)}(\zeta, \theta) + \phi_\theta^{(4)}(\zeta, \theta) = h(\zeta, \theta). \quad (2.3.16)$$

La solution de l'équation (2.3.16) est donnée par

$$\phi(\zeta, \theta) = C_i(\zeta, \theta) e^{p_i \theta}, \quad p_i = \pm \tau \pm i.$$

Les $C'_i(\zeta, \theta)$ ($C'_i = D_\theta C_i$) son solutions d'un système linéaire 4×4 de déterminant $-4\zeta^2(\zeta^2 + 1)$. Pour déterminer les coefficients C_i , $i = 1$ à 4 , il suffit de trouver les C'_i et d'utiliser les conditions aux limites données dans (2.3.15).

Lemme 2.3.7. *L'équation (2.3.16) admet une solution unique lorsque ζ appartient*

à l'ensemble D défini par

$$D \begin{cases} i) \zeta \neq 0, \pm i \text{ et } (sh^2(\zeta\omega) + \sin^2 \omega) \neq 0, \text{ ou} \\ ii) \zeta = 0, \text{ ou} \\ iii) \zeta = \pm i \text{ et ou } \omega \neq \tan(\omega) \end{cases}$$

Si $\zeta \notin D$, on a des solutions multiples à l'équation différentielle (2.3.16).

Démonstration. L'équation (2.3.16) peut être résolue (presque explicitement) ; l'équation caractéristique de (2.3.16) s'écrit

$$p^4 + 2(1 - \tau^2)p^2 + (\tau^4 + 2\tau^2 + 1) = 0, \quad (2.3.17)$$

et ses racines sont $\pm\tau \pm i$. La solution de l'équation (2.3.17) est donnée par :

$$\hat{Z} = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3 + C_4 e_4, \quad (2.3.18)$$

où

$$\begin{cases} e_1(\theta) = \sin \theta sh \zeta \theta, \\ e_2(\theta) = \sin \theta ch \zeta \theta, \\ e_3(\theta) = \cos \theta sh \zeta \theta, \\ e_4(\theta) = \cos \theta ch \zeta \theta. \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients C_i , $i = 1$ à 4 , il suffit d'utiliser la variation des constantes. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=4} C'_i(\theta) e_i(\theta) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=4} C'_i(\theta) e'_i(\theta) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=4} C'_i(\theta) e_i^{(2)}(\theta) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=4} C'_i(\theta) e_i^{(3)}(\theta) = \hat{l}(\zeta, \theta). \end{cases} \quad (2.3.19)$$

Le système (2.3.19) est de Cramer, son déterminant est égal à

$$-4\zeta^2(\zeta^2 + 1).$$

On a deux cas : si $-4\zeta^2(\zeta^2 + 1) \neq 0$ (i.e $\zeta \neq 0, \pm i$), il y a une solution unique pour les $\partial_\theta C_j(\zeta, \theta)$, $j = 1, \dots, 4$.

Dans ce cas, on a

$$\begin{cases} \partial_\theta C_1(\zeta, \theta) = -\frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \hat{l}(\zeta, \theta) (e_2(\theta) + \zeta e_3(\theta)), \\ \partial_\theta C_2(\zeta, \theta) = -\frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \hat{l}(\zeta, \theta) (-\zeta e_4(\theta) - e_1(\theta)), \\ \partial_\theta C_3(\zeta, \theta) = -\frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \hat{l}(\zeta, \theta) (e_4(\theta) - \zeta e_1(\theta)), \\ \partial_\theta C_4(\zeta, \theta) = -\frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \hat{l}(\zeta, \theta) (-e_3(\theta) + \zeta e_2(\theta)). \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} C_1(\zeta, \theta) = C_1(\zeta, 0) - \frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_2(\sigma) + \zeta e_3(\sigma)) d\sigma, \\ C_2(\zeta, \theta) = C_2(\zeta, 0) - \frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (-e_1(\sigma) - \zeta e_4(\sigma)) d\sigma, \\ C_3(\zeta, \theta) = C_3(\zeta, 0) - \frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_4(\sigma) - \zeta e_1(\sigma)) d\sigma, \\ C_4(\zeta, \theta) = C_4(\zeta, 0) - \frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (-e_3(\sigma) + \zeta e_2(\sigma)) d\sigma. \end{cases} \quad (2.3.20)$$

Les $C_j(\zeta, 0)$ $j = 1, \dots, 4$ sont solutions d'un nouveau système linéaire 4×4 .

En effet, à l'aide des conditions aux limites, on a

$$\begin{cases} C_4(\zeta, 0) = 0, \\ C_1(\zeta, 0) = 0, \\ C_1(\zeta, \omega)e_1(\omega) + C_2(\zeta, \omega)e_2(\omega) + C_3(\zeta, \omega)e_3(\omega) + C_4(\zeta, \omega)e_4(\omega) = 0, \\ C_1(\zeta, \omega) (\delta e_1(\omega) + 2\zeta e_4(\omega)) + C_2(\zeta, \omega) (\delta e_2(\omega) + 2\zeta e_3(\omega)) + \\ C_3(\zeta, \omega) (\delta e_3(\omega) - 2\zeta e_2(\omega)) + C_4(\zeta, \omega) (\delta e_4(\omega) - 2\zeta e_1(\omega)) = 0, \end{cases} \quad (2.3.21)$$

où $\delta = \zeta^2 - 1$.

En substituant maintenant les valeurs $C_i(\zeta, \omega)$, $i = 1, \dots, 4$, données par (2.3.20)

dans les trois dernières équations de (2.3.21), on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ e_1(\omega) & e_2(\omega) & e_3(\omega) & e_4(\omega) \\ 2\zeta & 0 & 0 & \delta \\ \delta e_1(\omega) & \delta e_2(\omega) & \delta e_3(\omega) & \delta e_4(\omega) \\ + & + & - & - \\ 2\zeta e_4(\omega) & 2\zeta e_3(\omega) & 2\zeta e_2(\omega) & 2\zeta e_1(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\zeta, 0) \\ C_2(\zeta, 0) \\ C_3(\zeta, 0) \\ C_4(\zeta, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_1 \\ 0 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

où

$$S_1 = \frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\omega \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_3(\omega - \sigma) - \zeta e_2(\omega - \sigma)) d\sigma$$

$$S_2 = -\frac{1}{2\zeta} \int_0^\omega \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_3(\omega - \sigma) + \zeta e_2(\omega - \sigma)) d\sigma.$$

Le déterminant du système (2.3.22) vaut

$$sh^2(\zeta\omega) - \zeta^2 \sin^2 \omega.$$

Si $sh^2(\zeta\omega) - \zeta^2 \sin^2 \omega \neq 0$, on a une solution unique.

Dans le cas où $sh^2(\zeta\omega) - \zeta^2 \sin^2 \omega \neq 0$, les $C_j(\zeta, \theta)$ sont donnés par :

$$C_1(\zeta, \theta) = -\frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_2(\sigma) + \zeta e_3(\sigma)) d\sigma,$$

$$C_2(\zeta, \theta) = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{(\delta e_3(\omega) - 2\zeta e_2(\omega))}{(\zeta^2 + 1)} \int_0^\omega \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_3(\omega - \sigma) - \zeta e_2(\omega - \sigma)) d\sigma \right.$$

$$\left. - e_3(\omega) \int_0^\omega \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_3(\omega - \sigma) + \zeta e_2(\omega - \sigma)) d\sigma \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (-\zeta e_4(\sigma) - e_1(\sigma)) d\sigma, \right.$$

$$\begin{aligned}
C_3(\zeta, \theta) &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{(\delta e_2(\omega) + 2\zeta e_3(\omega))}{(\zeta^2 + 1)} \int_0^\omega \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_3(\omega - \sigma) - \zeta e_2(\omega - \sigma)) d\sigma \right. \\
&\quad + e_2(\omega) \int_0^\omega \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_3(\omega - \sigma) + \zeta e_2(\omega - \sigma)) d\sigma \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (e_4(\sigma) - \zeta e_1(\sigma)) d\sigma, \right. \\
C_4(\zeta, \theta) &= -\frac{1}{2\zeta(\zeta^2 + 1)} \int_0^\theta \hat{l}(\zeta, \sigma) (-e_3(\sigma) + \zeta e_2(\sigma)) d\sigma,
\end{aligned}$$

avec

$$\lambda = -4\zeta^2(\operatorname{sh}^2(\zeta\omega) + \sin^2\omega).$$

□

2.3.5.1 Définition du noyau $L_\omega(\zeta; \theta, \sigma)$

On pose pour $0 \leq \theta \leq \sigma \leq \omega$

$$L_\omega(\zeta; \theta, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} [((e_3(\omega - \sigma) + \zeta e_2(\omega - \sigma))(e_3(\theta) e_2(\omega) - e_2(\theta) e_3(\omega)) \\ + \frac{1}{(\zeta^2 + 1)} (e_3(\omega - \sigma) - \zeta e_2(\omega - \sigma))(e_3(\theta) (\delta e_2(\omega) + 2\zeta e_3(\omega)) \\ - \frac{1}{(\zeta^2 + 1)} (e_3(\omega - \sigma) - \zeta e_2(\omega - \sigma))(e_2(\theta) (\delta e_3(\omega) - 2\zeta e_2(\omega)))] \\ + (e_3(\theta - \sigma) - \zeta e_2(\theta - \sigma)). \end{cases}$$

et pour $0 \leq \sigma \leq \theta \leq \omega$

$$L_\omega(\zeta; \theta, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} [((e_3(\omega - \sigma) + \zeta e_2(\omega - \sigma))(e_3(\theta) e_2(\omega) - e_2(\theta) e_3(\omega)) \\ + \frac{1}{(\zeta^2 + 1)} (e_3(\omega - \sigma) - \zeta e_2(\omega - \sigma))(e_3(\theta) (\delta e_2(\omega) + 2\zeta e_3(\omega)) \\ - \frac{1}{(\zeta^2 + 1)} (e_3(\omega - \sigma) - \zeta e_2(\omega - \sigma))(e_2(\theta) (\delta e_3(\omega) - 2\zeta e_2(\omega)))] \end{cases}$$

Cela nous permet d'écrire (2.3.18) sous la forme suivante :

$$\widehat{Z}(\zeta, \theta) = \int_0^\omega \hat{l}(\zeta, \sigma) L_\omega(\zeta; \theta, \sigma) d\sigma. \quad (2.3.23)$$

2.3.5.2 Propriétés du noyau $L_\omega(\zeta; \theta, \sigma)$

On a quand $\zeta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} L_\omega(\zeta, \theta, \sigma) &= -\frac{1}{\zeta^3} \frac{(\zeta\theta + \frac{1}{6}\zeta^3\theta^3 + O(\zeta^5))(\zeta(\omega - \sigma) + \frac{1}{6}\zeta^3(\omega - \sigma)^3 + O(\zeta^5))}{\zeta\omega + \frac{1}{6}\zeta^3\omega^3 + O(\zeta^5)} \\ &= -\frac{\theta(\omega - \sigma)}{\zeta^2\omega} \frac{1}{1 + \frac{1}{6}\zeta^2\omega^2 + O(\zeta^6)} - \frac{1}{6} \frac{\theta(\omega - \sigma)}{\omega} [\theta^2 + (\omega - \theta)^2] + O(\zeta^2) \\ &= -\frac{\theta(\omega - \sigma)}{\zeta^2\omega} - \frac{1}{6} \frac{\theta(\omega - \sigma)}{\omega} (\theta^2 + \sigma^2 - 2\omega\sigma) + O(\zeta^2) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} L_\omega(0, \theta, \sigma) &= -\frac{1}{6} \frac{\sigma(\omega - \theta)}{\omega} (\theta^2 + \sigma^2 - 2\omega\theta) \text{ si } 0 < \sigma < \theta, \\ &= -\frac{1}{6} \frac{\theta(\omega - \sigma)}{\omega} (\theta^2 + \sigma^2 - 2\omega\sigma) \text{ si } \theta < \sigma < \omega. \end{aligned}$$

La fonction $\zeta \rightarrow L_\omega(\zeta; \theta, \sigma)$ est une fonction méromorphe, les pôles de cette fonction sont sous la forme

$$i(\pm 1 - n\frac{\pi}{\omega}) \text{ avec } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

La fonction $\zeta \rightarrow \hat{l}(\zeta, \sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta t} l(t, \sigma) dt$ est une fonction holomorphe sur le demi plan $Im\zeta \geq -2$.

En effet, on sait que le support de l est borné (en t) par $\ln R$ ($r \leq R$).

Alors

$$\hat{l}(\zeta, \sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta t} l(t, \sigma) dt = \int_{t \leq \ln R} e^{-i(\eta_1 + i\eta_2)t} l(t, \sigma) dt,$$

et comme $e^{-2t} l \in L^2(B)$, on a

$$|\hat{l}(\zeta, \sigma)| \leq CR^{(\eta_2+2)} \text{ si } \eta_2 \geq -2.$$

2.3.6 Le résultat principal

Enfin, on termine cette partie en rappelant le résultat de BLUM et RANNACHER 1980 dont la démonstration repose sur les idées développées par KONDRATIEV 1967. On suppose que l'origine est un point anguleux de $\partial\Omega$, d'angle ω .

Théorème 2.3.8. Si $f \in L^2(\Omega)$ alors la solution u du problème (2.3.7) admet au voisinage de l'origine la décomposition :

$$u(r, \theta) = u_r(r, \theta) + u_s(r, \theta),$$

avec

1. $u_r(r, \theta) \in H^4(\Omega)$,
2. $u_s(r, \theta) = \sum_{-2 < \text{Im} \zeta_k < 0} r^{1+i\zeta_k} \psi_k(\theta)$.

Les ζ_k sont les racines de l'équation $(sh^2(\zeta\omega) + \sin^2 \omega) = 0$ dont la partie imaginaire est dans $] -2, 0[$ et les ψ_k sont des fonctions C^∞ .

Démonstration. Si on applique la transformation de Fourier inverse, on obtient

$$Z(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta t} \widehat{Z}(\zeta, \theta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\omega e^{i\zeta t} \widehat{l}(\zeta, \sigma) L_\omega(\zeta; \theta, \sigma) d\zeta d\sigma.$$

Par l'application du théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} Z(t, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta t} \widehat{Z}(\zeta, \theta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\omega e^{it(\zeta-2i)} \widehat{l}(\zeta-2i, \sigma) L_\omega(\zeta-2i; \theta, \sigma) d\sigma d\zeta \\ &\quad + 2\pi i \int_0^\omega \sum_{-2 < \text{Im} \zeta_k < 0} \text{Res}(e^{i\zeta t} \widehat{l}(\zeta, \sigma) L_\omega(\zeta; \theta, \sigma), \zeta_k) d\sigma \\ &= Z_r(t, \theta) + Z_s(t, \theta). \end{aligned}$$

A ce point, on pose

$$\begin{cases} u_s(r, \theta) = r Z_s(\ln r, \theta) = \sum_{-2 < \text{Im} \zeta_k < 0} r^{1+i\zeta_k} \psi_k(\theta), \\ u_r(r, \theta) = r Z_r(\ln r, \theta). \end{cases}$$

Notons que les $u_s(r, \theta)$ sont des solutions singulières du problème (P_2^v) . □

Suivant les valeurs de ω et de ζ_k les solutions singulières du problème (P_2^v) sont de la forme :

1. $0 < \omega \leq \frac{\pi}{3}$, $u_s = 0$;
2. $\frac{\pi}{3} < \omega \leq \frac{2\pi}{3}$, $u_s = C_0 r^{\frac{\pi}{\omega}} \psi_0(\theta)$, $u_s \in H^\sigma(\Omega) \forall \sigma < 1 + \frac{\pi}{\omega}$;
3. $\frac{2\pi}{3} < \omega < \pi$, $u_s = C_1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \psi_1(\theta) + C_2 r^{2\frac{\pi}{\omega}} \psi_2(\theta)$, $u_s \in H^\sigma(\Omega) \forall \sigma < 1 + \frac{\pi}{\omega}$;
4. $\pi < \omega < 2\pi$, $u_s = C_2 r^{2\frac{\pi}{\omega}} \psi_2(\theta) + C_3 r^{3\frac{\pi}{\omega}} \psi_3(\theta) + C_4 r^{2+\frac{\pi}{\omega}} \psi_4(\theta)$, $u_s \in H^\sigma(\Omega) \forall \sigma < 1 + 2\frac{\pi}{\omega}$.

Remarque 2.3.9. *Avant de passer au chapitre suivant, on remarque que l'hypothèse $u = 0$ sur $\partial\Omega$ (car $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sur $\partial\Omega$), nous permet de déduire que le problème (P_2^v) est équivalent au problème suivant :*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3.24)$$

3 Etude de singularité des solutions au voisinage de π

Dans tout ce chapitre, la lettre C designera une constante positive indépendante de ω .

3.1 Introduction

On considère dans ce chapitre une famille d'ouverts Ω_ω polygonaux, dont l'origine est un sommet d'angle ω , et une famille de problèmes

$$(P_\omega) \begin{cases} \Delta^2 u_\omega = f_\omega & \text{dans } \Omega_\omega \\ u_\omega = \Delta u_\omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\omega, \end{cases}$$

où $f_\omega \in L^2(\Omega_\omega)$.

Par des techniques de localisation classique (voir GRISVARD 1985) on se ramène au cas où les ouverts Ω_ω sont les secteurs

$$\Omega_\omega = \{(r, \theta); 0 < r < 1, 0 < \theta < \omega\}, \quad \frac{2\pi}{3} < \omega \leq \pi.$$

Bien entendu, ces ouverts ne sont pas des polygones. L'étude menée ici étant locale, seule leur géométrie polygonale au voisinage de l'origine importe, tandis que le fait d'être des secteurs rend adapté l'usage de la transformée de Fourier, comme on le verra dans la suite.

On sait d'après la chapitre 2 (voir le théorème 2.3.8), que si $\omega < \pi$ alors la solution u_ω du problème (P_ω) admet au voisinage de l'origine la décomposition

$$u_\omega = u_{\omega,1} + u_{\omega,2} + u_{\omega,3},$$

où $u_{\omega,1} = a_\omega^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta$, $u_{\omega,2} = a_\omega^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta$ et $u_{\omega,3}$ est la partie régulière.

L'objectif principal de ce chapitre est d'analyser le comportement des singularités des solutions u_ω , en obtenant des estimations uniformes par rapport à ω qui sont nouvelles. Comme l'ayant déjà expliqué dans l'introduction générale (voir page 12) cette estimation uniforme est une nette amélioration en comparaison au résultat obtenu par BLUM et RANNACHER 1980; le théorème suivant donne plus de précision.

Théorème 3.1.1. *Pour tout $f_\omega \in L^2(\Omega_\omega)$, il existe un voisinage ouvert V de l'origine indépendant de ω et f_ω , deux constantes uniques a_ω^1 , a_ω^2 et une fonction*

A_ω telle que la solution u_ω du problème (P_ω) admet dans $V \cap \Omega_\omega$ la décomposition :

$$u_\omega(r, \theta) = a_\omega^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + a_\omega^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta + A_\omega(r, \theta), \quad (3.1.1)$$

avec

$$\begin{aligned} 1 - & |a_\omega^1| + |a_\omega^2| + \|A_\omega\|_{H^4(V \cap \Omega_\omega)} \leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} \\ 2 - & A_\omega = o\left(r^3 \sqrt{\ln \frac{1}{r}}\right). \end{aligned}$$

Dans ce théorème, la décomposition et la constante C dépendent du choix de V , mais pas les constantes a_ω^1, a_ω^2 . Celles-ci peuvent être considérées comme des formes linéaires continues sur le domaine de l'opérateur Δ^2 , avec les conditions aux limites $u = M(u) = 0$.

En choisissant $v_\omega = \Delta u_\omega$, on obtient immédiatement que le problème (P_ω) est équivalent à

$$(P_\omega^1) \begin{cases} \Delta v_\omega = f_\omega \in L^2 \text{ dans } \Omega_\omega \\ v_\omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\omega \end{cases} \text{ et } (P_\omega^2) \begin{cases} \Delta u_\omega = v_\omega \in H_z^2 \text{ dans } \Omega_\omega \\ u_\omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\omega \end{cases}$$

Lemme 3.1.2. *La fonction u_ω est une solution du problème (P_ω) si et seulement si le couple (u_ω, v_ω) est solution du problème $((P_\omega^1), (P_\omega^2))$.*

Démonstration. La preuve est directe. □

Notons par Δ_D^{-1} l'inverse de l'opérateur Δ_D (le Laplacien de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$). On sait que, si Ω est convexe, Δ_D^{-1} est continu de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = H_z^2(\Omega)$. De plus il existe une constante C indépendante de ω telle que $\|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)} \leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)}$:

Lemme 3.1.3. *Il existe une constante C ne dépendant pas de ω ($\omega < \pi$) telle que*

$$\|v_\omega\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)}$$

Démonstration. Pour la preuve voir par exemple GRISVARD 1985. □

Il en résulte que $v_\omega, u_\omega \in H_z^2(\Omega_\omega)$, que $u_\omega = \Delta_D^{-1} v_\omega$, et que v_ω parcourt $H_z^2(\Omega_\omega)$ lorsque f_ω parcourt $L^2(\Omega_\omega)$.

Cette égalité va permettre de retrouver la décomposition de u_ω sous forme

$$u_\omega = \Delta_D^{-1} v_\omega = \sum \text{fonctions "singulières"} + \text{reste}$$

où le reste, noté $A_\omega(r, \theta)$, vérifie l'estimation suivante :

$$\|A_\omega\|_{H^4(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Avant de donner la preuve du théorème 3.1.1, commençons par des résultats préliminaires.

3.1.1 La norme H^2 en coordonnées polaires et la caractérisation de H_z^2

On a $v_\omega \in H^2(\Omega_\omega)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \int_0^\omega \int_0^1 |v_\omega|^2 r dr d\theta < +\infty \\ \int_0^\omega \int_0^1 |\nabla v_\omega|^2 r dr d\theta = \int_0^\omega \int_0^1 ((\partial_r v_\omega)^2 + (\frac{1}{r} \partial_\theta v_\omega)^2) r dr d\theta < +\infty \\ \int_0^\omega \int_0^1 ((\partial_r^2 v_\omega)^2 + (\frac{1}{r} \partial_r v_\omega + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 v_\omega)^2 + 2(\frac{1}{r} \partial_{r\theta}^2 v_\omega - \frac{1}{r^2} \partial_\theta v_\omega)^2) r dr d\theta < +\infty \end{cases}$$

Soit $v_\omega \in H_z^2$, alors

$$v_\omega(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} b_{k,\omega}(r) \sin k \frac{\pi}{\omega} \theta$$

où

$$b_{k,\omega}(r) = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\omega(r, \theta) \sin k \frac{\pi}{\omega} \theta d\theta.$$

Cela donne

$$v_\omega \in L^2 \text{ssi} \sum_{k \geq 1} \int_0^1 (b_{k,\omega}(r))^2 r dr \leq C \|v_\omega\|_{L^2},$$

et $\sum_{k \geq 1} \int_0^1 (b_{k,\omega}(r))^2 r dr$ définit une norme équivalente à la norme de v_ω dans L^2 .

Comme

$$\begin{aligned} \partial_r v_\omega(r, \theta) &= \sum_{k \geq 1} b'_{k,\omega}(r) \sin k \frac{\pi}{\omega} \theta, \\ \frac{1}{r} \partial_\theta v_\omega(r, \theta) &= \frac{\pi}{\omega} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{r} b_{k,\omega} \cos k \frac{\pi}{\omega} \theta, \end{aligned}$$

on a

$$\nabla v_\omega \in L^2 \text{ si et seulement si } \begin{cases} \sum_{k \geq 1} \int_0^1 (b'_{k,\omega}(r))^2 r dr \leq C \|v_\omega\|_{H^1} \\ \sum_{k \geq 1} k^2 \int_0^1 (b_{k,\omega}(r))^2 \frac{1}{r} dr \leq C \|v_\omega\|_{H^1}, \end{cases}$$

et $\sum_{k \geq 1} \int_0^1 (b'_{k,\omega}(r))^2 r dr + \sum_{k \geq 1} k^2 \int_0^1 (b_{k,\omega}(r))^2 \frac{1}{r} dr$ définit une norme équivalente à la norme de $\nabla(v_\omega)$ dans L^2 .

De plus

$$\begin{aligned} \partial_r^2 v_\omega(r, \theta) &= \sum_{k \geq 1} b''_{k,\omega}(r) \sin k \frac{\pi}{\omega} \theta d\theta, \\ \frac{1}{r} \partial_r v_\omega(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 v_\omega(r, \theta) &= \sum_{k \geq 1} \left\{ \frac{1}{r} b'_{k,\omega}(r) - \frac{k^2 \pi^2}{\omega^2} \frac{1}{r^2} b_{k,\omega}(r) \right\} \sin k \frac{\pi}{\omega} \theta d\theta, \\ \frac{1}{r} \partial_{r\theta}^2 v_\omega(r, \theta) - \frac{1}{r^2} \partial_\theta v_\omega(r, \theta) &= \frac{\pi}{\omega} \sum_{k \geq 1} k \left\{ \frac{1}{r} b'_{k,\omega}(r) - \frac{1}{r^2} b_{k,\omega}(r) \right\} \cos k \frac{\pi}{\omega} \theta d\theta, \\ &= \frac{\pi}{\omega} \sum_{k \geq 1} k \left\{ \left(\frac{1}{r} b_{k,\omega}(r) \right)' \right\} \cos k \frac{\pi}{\omega} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$D^2 v_\omega \in L^2 \text{ si et seulement si } \begin{cases} (1) \sum_{k \geq 1} \int_0^1 (b''_{k,\omega}(r))^2 r dr \leq C \|v_\omega\|_{H^2} \\ (2) \sum_{k \geq 1} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{r} b'_{k,\omega}(r) - \frac{k^2 \pi^2}{\omega^2} \frac{1}{r^2} b_{k,\omega}(r) \right\}^2 r dr \leq C \|v_\omega\|_{H^2} \\ (3) \sum_{k \geq 1} k^2 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{r} b_{k,\omega}(r) \right)' \right\}^2 r dr \leq C \|v_\omega\|_{H^2}. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

On a

$$\frac{1}{r} b'_{k,\omega}(r) - \frac{k^2 \pi^2}{\omega^2} \frac{1}{r^2} b_{k,\omega}(r) = \frac{1}{r} b'_{k,\omega}(r) - \frac{1}{r^2} b_{k,\omega}(r) - \left[\frac{k^2 \pi^2}{\omega^2} - 1 \right] \frac{1}{r^2} b_{k,\omega}(r),$$

donc (2) et (3) dans (3.1.2) se ramènent à

$$(2') \sum_{k \geq 1} \left[\frac{k^2 \pi^2}{\omega^2} - 1 \right]^2 \int_0^1 \frac{1}{r^3} b_{k,\omega}(r)^2 dr \leq C \|v_\omega\|_{\infty H^2},$$

et

$$(3) \sum_{k \geq 1} k^2 \int_0^1 \frac{1}{r} (b'_{k,\omega}(r))^2 dr \leq C \|v_\omega\|_{\infty H^2}.$$

On déduit de ce qui précède le résultat suivant :

Lemme 3.1.4. On a pour tout $\omega < \pi$ et $v_\omega \in H_z^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \int_0^1 (b''_{k,\omega}(r))^2 r dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}^2 \\ \sum_{k \geq 2} k^2 \int_0^1 (b'_{k,\omega}(r))^2 \frac{1}{r} dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}^2 \\ \sum_{k \geq 2} k^4 \int_0^1 (b_{k,\omega}(r))^2 \frac{1}{r^3} dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}^2 \\ \int_0^1 \left(\frac{1}{r} b'_{1,\omega}(r) - \frac{1}{r^2} b_{1,\omega}(r) \right)^2 r dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}^2 \\ \int_0^1 (b_{1,\omega}(r))^2 \frac{1}{r^3} dr &\leq \frac{C}{(\pi - \omega)^2} \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}^2 \end{aligned}$$

3.1.2 Résolution des problèmes (P_ω^1) et (P_ω^2)

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.1.1.
Comme $f_\omega \in L^2$ alors

$$f_\omega(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} c_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta, \quad (3.1.3)$$

avec

$$c_{k,\omega}(r) = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega f_\omega(r, \theta) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta d\theta.$$

La solution du problème (P_ω^1) dans ce cas-là est de la forme suivante

$$v_\omega(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} b_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta, \quad (3.1.4)$$

avec

$$b_{k,\omega}(r) = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\omega(r, \theta) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta d\theta.$$

On va calculer $b_{k,\omega}$ en utilisant l'équation dont v_ω est solution :

$$\begin{aligned} f_\omega &= \Delta v_\omega = \partial_r^2 v_\omega + \frac{1}{r} \partial_r v_\omega + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 v_\omega \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(b''_{k,\omega}(r) + \frac{1}{r} b'_{k,\omega}(r) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{k\pi}{\omega} \right)^2 b_{k,\omega}(r) \right) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &= \sum_{k \geq 1} c_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta. \end{aligned}$$

On déduit que les $b_{k,\omega}$ sont solutions de l'équation différentielle

$$b''_{k,\omega}(r) + \frac{1}{r}b'_{k,\omega}(r) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2 b_{k,\omega}(r) = c_{k,\omega}(r);$$

la résolution de cette équation donne

$$b_{k,\omega}(r) = a_{1,k}(r)r^{\frac{k\pi}{\omega}} + a_{2,k}(r)r^{-\frac{k\pi}{\omega}} + \alpha_{1,k}r^{\frac{k\pi}{\omega}} + \alpha_{2,k}r^{-\frac{k\pi}{\omega}},$$

où $\alpha_{1,k}$ et $\alpha_{2,k}$ sont des constantes et où

$$\begin{aligned} a_{1,k}(r) &= -\frac{\omega}{2k\pi} \int_r^1 c_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds, \\ a_{2,k}(r) &= -\frac{\omega}{2k\pi} \int_0^r c_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds. \end{aligned}$$

Cela nous permet d'écrire (3.1.4) sous la forme suivante :

$$v_\omega(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} (a_{1,k}(r)r^{\frac{k\pi}{\omega}} + a_{2,k}(r)r^{-\frac{k\pi}{\omega}} + \alpha_{1,k}r^{\frac{k\pi}{\omega}} + \alpha_{2,k}r^{-\frac{k\pi}{\omega}}) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta.$$

Notons que $v_\omega \in L^2$ donne $b_{k,\omega} \in L^2(rdr)$ pour chaque k .

Montrons que

$$\int_0^\omega \int_0^1 v_\omega(r, \theta)^2 r dr d\theta < +\infty \text{ implique } \alpha_{2,k} = 0.$$

En effet, pour k fixé on a

$$\int_0^\omega \int_{r \leq 1} (\alpha_{1,k} r^{\frac{k\pi}{\omega}})^2 \sin^2 \frac{k\pi}{\omega} \theta r dr d\theta \leq C. \quad (3.1.5)$$

Pour $a_{1,k}(r)$ on a

$$|a_{1,k}(r)| = \left| -\frac{\omega}{2k\pi} \int_r^1 c_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds \right| \leq \frac{1}{k\pi} \int_r^1 \int_0^\omega |f_\omega(s, \theta)| s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds d\theta,$$

donc

$$\begin{aligned} |a_{1,k}(r)| &\leq \frac{1}{k\pi} \left(\int_r^1 \int_0^\omega f_\omega(s, \theta)^2 s ds d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^1 \int_0^\omega s^{-2\frac{k\pi}{\omega}} s ds d\theta \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \|f_\omega\|_{L^2} \frac{1}{k\pi} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\frac{k\pi}{\omega} - 2}} r^{1-\frac{k\pi}{\omega}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^\omega \int_{r \leq 1} (a_{1,k}(r) r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta)^2 r dr d\theta \leq C \left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\frac{2k\pi}{\omega} - 2}\right) \|f_\omega\|_{L^2}^2 = C \|f_\omega\|_{L^2}^2. \quad (3.1.6)$$

Pour $a_{2,k}(r)$ on a

$$|a_{2,k}(r)| = \left| -\frac{\omega}{2k\pi} \int_0^r c_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds \right| \leq \frac{1}{k\pi} \left(\int_0^r \int_0^\omega f_\omega(s, \theta)^2 s ds d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2k\frac{\pi}{\omega} + 2}} r^{1+\frac{k\pi}{\omega}}.$$

D'où

$$\int_0^\omega \int_{r \leq 1} (a_{2,k}(r) r^{-\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta)^2 r dr d\theta \leq C \left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\frac{2k\pi}{\omega} + 2}\right) \|f_\omega\|_{L^2}^2 = C \|f_\omega\|_{L^2}^2. \quad (3.1.7)$$

De (3.1.5), (3.1.6) et (3.1.7) et du fait $b_{k,\omega} \in L^2(r dr)$, on déduit que $\alpha_{2,k} = 0$. Revenons maintenant à $v_\omega(r, \theta)$. D'après (3.1.4) on a $b_{k,\omega}(1) = 0$, donc

$$\alpha_{1,k} = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^1 c_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} v_\omega(r, \theta) &= - \sum_{k \geq 1} \frac{\omega}{2k\pi} \int_r^1 c_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \sum_{k \geq 1} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^r c_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^1 c_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

On obtient d'après qui précède que la solution du problème (P_ω^2) est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} u_\omega(r, \theta) &= - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^1 b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Dans tout ce qui suit, on décompose la série (3.1.3) sous la forme suivante :

$$f_\omega(r, \theta) = f_{1,\omega}(r, \theta) + f_{2,\omega}(r, \theta) + f_{3,\omega}(r, \theta),$$

avec

$$\begin{aligned} f_{1,\omega}(r, \theta) &= c_{1,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ f_{2,\omega}(r, \theta) &= c_{2,\omega}(r) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \\ f_{3,\omega}(r, \theta) &= \sum_{k \geq 3} c_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta. \end{aligned}$$

Le but de cette décomposition est de démontrer séparément le théorème 3.1.1 pour $f_{1,\omega}$, $f_{2,\omega}$ et $f_{3,\omega}$, c'est-à-dire pour les cas $k = 1$, $k = 2$ et le cas $k \geq 3$. On obtient le résultat final par linéarité.

Commençons avec le cas le plus difficile.

3.1.3 Le cas $k = 1$

D'après (3.1.8) et (3.1.9) on a

$$\begin{aligned} v_\omega(r, \theta) &= -\frac{\omega}{2\pi} \int_r^1 c_{1,\omega}(s) s^{1-\frac{\pi}{\omega}} ds r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r c_{1,\omega}(s) s^{1+\frac{\pi}{\omega}} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^1 c_{1,\omega}(s) s^{1+\frac{\pi}{\omega}} ds r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

et

$$\begin{aligned} u_\omega(r, \theta) &= -\frac{\omega}{2\pi} \int_r^1 b_{1,\omega}(s) s^{-\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^1 b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Ecrivaint

$$\int_r^1 = \int_0^1 - \int_0^r,$$

on obtient dans (3.1.11)

$$u_\omega(r, \theta) = A_\omega(r, \theta) + a_\omega^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta,$$

avec

$$A_\omega(r, \theta) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{-\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta, \quad (3.1.12)$$

et

$$a_\omega^1 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^1 b_{1,\omega}(s) (s^{\frac{\pi}{\omega}+1} - s^{-\frac{\pi}{\omega}+1}) ds. \quad (3.1.13)$$

Le théorème 3.1.1, dans ce cas, devient :

Théorème 3.1.5. *Pour tout $f_{1,\omega}(r, \theta) = a_\omega^1 \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \in L^2(\Omega_\omega)$, il existe un voisinage ouvert V de l'origine indépendant de ω et $f_{1,\omega}$, une constante unique a_ω^1 et une fonction A_ω telle que la solution u_ω du problème (P_ω^2) admet dans $V \cap \Omega_\omega$ la décomposition :*

$$u_\omega(r, \theta) = a_\omega^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + A_\omega(r, \theta),$$

avec

$$\begin{aligned} 1 - \|A_\omega\|_{H^4(V \cap \Omega_\omega)} &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)} \\ 2 - A_\omega &= o(r^3 \sqrt{\ln \frac{1}{r}}) \\ 3 - |a_\omega^1| &\leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} \end{aligned}$$

Démonstration. On part de

$$A_\omega(r, \theta) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{-\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta.$$

On veut montrer que

$$\|A_\omega\|_{H^4} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

Pour cela on va calculer $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}$ et démontrer que

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} \right\|_{H^2} + \left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} \right\|_{H^2} + \left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

Pour simplifier la notation on pose

$$I_+(r) = \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds,$$

$$I_-(r) = \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{-\pi}{\omega}+1} ds.$$

On a

$$\frac{\partial A_\omega}{\partial r} = \frac{1}{2} I_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + \frac{1}{2} I_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-1} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_\omega}{\partial \theta} = \frac{1}{2} I_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta - \frac{1}{2} I_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-1} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta.$$

Alors

$$\frac{\partial A_\omega}{\partial x} = \frac{1}{2} I_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta + \frac{1}{2} I_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right)\theta.$$

Ensuite

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial A_\omega}{\partial x} = b_{1,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) I_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right) I_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right)\theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial A_\omega}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) I_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right) I_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right)\theta.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} = b_{1,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) I_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right) I_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta.$$

Si on fait une intégration par parties on obtient

$$I_-(r) = \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{-\pi}{\omega}+1} ds = \frac{1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} b_{1,\omega}(r) - \frac{1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \underbrace{\int_0^r d_{1,\omega}(s) s^{\frac{-\pi}{\omega}+3} ds}_{J_-(r)},$$

$$I_+(r) = \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds = \frac{1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} b_{1,\omega}(r) - \frac{1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \underbrace{\int_0^r d_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+3} ds}_{J_+(r)},$$

avec

$$d_{1,\omega}(s) = \left(\frac{b_{1,\omega}(s)}{s} \right)'. \quad (3.1.14)$$

On déduit de la régularité de $b_{1,\omega}$ que (voir le lemme 3.1.4)

$$\begin{aligned} d_{1,\omega} &\in L^2(rdr) \text{ uniformément par rapport à } \omega \\ (d_{1,\omega})' &\in L^2(r^3dr) \text{ uniformément par rapport à } \omega \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} &= b_{1,\omega}(r) \left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta \right\} &= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) P_\omega(\theta), \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

où $P_\omega(\theta)$ est un polynôme en $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \frac{\pi}{\omega} \theta$, $\cos \frac{\pi}{\omega} \theta$ uniformément borné, ainsi que ces dérivées, par rapport à ω (au voisinage de π).

En effet,

$$\begin{aligned} &\sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos^2 \theta - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta}_{\frac{1}{4} + O(\frac{\pi}{\omega} - 1)} - \underbrace{\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) \frac{1}{2} \frac{1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta}_{\text{de la forme } P_\omega(\theta)} \\ &= \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) P_\omega^1(\theta) \\ &= \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \sin 2\theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) P_\omega^1(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \left(\sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos \theta - \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \sin \theta\right) + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) P_\omega^1(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) P_\omega^1(\theta). \end{aligned}$$

Si on pose

$$P_\omega(\theta) = P_\omega^1(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta}{\frac{\pi}{\omega} - 1} \cos \theta,$$

on obtient bien (3.1.15). Il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} &= \frac{1}{4} b_{1,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) b_{1,\omega}(r) P_\omega(\theta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta.\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} &= b_{1,\omega}(r) \left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta.\end{aligned}$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$\begin{aligned}&\left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta \right\} \\ &= \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) G_\omega(\theta),\end{aligned}$$

où $G_\omega(\theta)$ est un polynôme en $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \frac{\pi}{\omega} \theta$, $\cos \frac{\pi}{\omega} \theta$ uniformément borné, ainsi que ces dérivées, par rapport à ω (au voisinage de π).

Plus précisément, on a

$$G_\omega(\theta) = G_\omega^1(\theta) - \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta}{\frac{\pi}{\omega} - 1} \cos \theta,$$

il en résulte

$$G_\omega^1(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta.$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} &= \frac{3}{4} b_{1,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) b_{1,\omega}(r) G_\omega(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta.\end{aligned}$$

La dérivée croisée s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} &= b_{1,\omega}(r) \left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} &\left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta \right\} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \sin 2\theta + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \cos 2\theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) W_\omega^1(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta + \frac{1}{4} \left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \sin 2\theta + \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \cos 2\theta - \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \right\} + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) W_\omega^1(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta + \frac{1}{4} \left\{ 2 \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \sin \theta \cos \theta + \cos \frac{\pi}{\omega} \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) - \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \right\} + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) W_\omega^1(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta \sin \theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) W_\omega^1(\theta). \end{aligned}$$

Si on pose

$$W_\omega(\theta) = W_\omega^1(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)\theta}{\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right)} \sin \theta,$$

alors $W_\omega(\theta)$ est un polynôme en $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \frac{\pi}{\omega} \theta$, $\cos \frac{\pi}{\omega} \theta$ uniformément borné, ainsi que ces dérivées, par rapport à ω (au voisinage de π).

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4} b_{1,\omega}(r) \cos \frac{\pi}{\omega} \theta + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) b_{1,\omega}(r) W_\omega(\theta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta. \end{aligned}$$

Finalement nous sommes en mesure d'estimer le terme $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}$ (respectivement $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}$) en norme H^2 .

En effet, on déduit à partir de (3.1.15) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} &= \underbrace{\frac{1}{4} v_\omega(r, \theta)}_{\Pi_1(r, \theta)} + \underbrace{\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) b_{1, \omega}(r) P_\omega(\theta)}_{\Pi_2(r, \theta)} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right) \theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right) \theta}_{\Pi_3(r, \theta)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1.3 il existe une constante C ne dépendant pas de ω ($\omega < \pi$) telle que

$$\|\Pi_1\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)}.$$

Pour Π_2 on procède comme suit

Lemme 3.1.6. *Il existe une constante C ne dépendant pas de ω ($\omega < \pi$) telle que*

$$\|\Pi_2\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Démonstration. D'après le lemme 3.1.4 on a $\Pi_2 \in L^2$ et $\nabla(\Pi_2) \in L^2$. Le cas le plus délicat est celui des dérivées d'ordre 2.

En effet, on a

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r^2} = \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) b'_{1, \omega}(r) P_\omega(\theta);$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial \theta^2}\right) = \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) \left[\frac{b'_{1, \omega}(r)}{r} - \frac{b_{1, \omega}(r)}{r^2}\right] P_\omega(\theta) + \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) \frac{b_{1, \omega}(r)}{r^2} (P_\omega(\theta) + P_\omega''(\theta));$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) \left[\frac{b'_{1, \omega}(r)}{r} - \frac{b_{1, \omega}(r)}{r^2}\right] P_\omega'(\theta).$$

On déduit d'après le lemme 3.1.4 que

$$\left\| \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r^2} \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2} \quad (C \text{ constante indépendante de } \omega).$$

$$\left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial \theta^2} \right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

$$\left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \theta} \right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

□

Il reste à estimer le terme Π_3 .

Lemme 3.1.7. *Il existe une constante ne dépendant pas de ω ($\omega < \pi$) telle que*

$$\|\Pi_3\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Démonstration. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial r^2} &= -\frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{2(3 - \frac{\pi}{\omega})} (d'_{1,\omega}(r)r + (\frac{\pi}{\omega} - 1)d_{1,\omega}(r)) \sin(\frac{\pi}{\omega} - 2)\theta \\ &\quad + \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{2(3 + \frac{\pi}{\omega})} (d'_{1,\omega}(r)r - (\frac{\pi}{\omega} + 1)d_{1,\omega}(r)) \sin(\frac{\pi}{\omega} + 2)\theta \\ &\quad - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{\omega} + 2) (\frac{\pi}{\omega} + 1) J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-4} \sin(\frac{\pi}{\omega} + 2)\theta \\ &\quad - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{\omega} - 2) (\frac{\pi}{\omega} - 1) J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-4} \sin(\frac{\pi}{\omega} - 2)\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial \theta^2} \right) &= \left(-\frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \sin(\frac{\pi}{\omega} - 2)\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \sin(2 + \frac{\pi}{\omega})\theta \right) d_{1,\omega}(r) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{\omega} + 2) (\frac{\pi}{\omega} + 1) J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-4} \sin(\frac{\pi}{\omega} + 2)\theta \\ &\quad - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{\omega} - 2) (\frac{\pi}{\omega} - 1) J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-4} \sin(\frac{\pi}{\omega} - 2)\theta. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Pi_3}{\partial \theta} \right) &= \left(-\frac{1}{2} (\frac{\pi}{\omega} - 2) \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} \cos(\frac{\pi}{\omega} - 2) + \frac{1}{2} (2 + \frac{\pi}{\omega}) \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} \cos(2 + \frac{\pi}{\omega}) \right) d_{1,\omega}(r) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{\omega} + 2) (\frac{\pi}{\omega} + 1) J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega}-4} \cos(\frac{\pi}{\omega} + 2)\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} (\frac{\pi}{\omega} - 2) (\frac{\pi}{\omega} - 1) J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega}-4} \cos(\frac{\pi}{\omega} - 2)\theta. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Estimation du terme $\frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial r^2}$

1-On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^r d_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+3} ds \right)^2 r^{-2\frac{\pi}{\omega}-8} r dr &\leq \int_0^1 \left(\int_0^r d_{1,\omega}(s)^2 s^2 ds \right) \left(\int_0^r s^{\frac{2\pi}{\omega}+4} ds \right) r^{-2\frac{\pi}{\omega}-8} r dr \\
&\leq \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega} + 5} \int_0^1 \int_0^r d_{1,\omega}(s)^2 s^2 ds r^{-2} dr \\
&\leq \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega} + 5} \int_0^1 d_{1,\omega}(s)^2 s ds \\
&\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2.
\end{aligned}$$

2-On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^r d_{1,\omega}(s) s^{-\frac{\pi}{\omega}+3} ds \right)^2 r^{2\frac{\pi}{\omega}-8} r dr &\leq \int_0^1 \left(\int_0^r d_{1,\omega}(s)^2 s^2 ds \right) \left(\int_0^r s^{-\frac{2\pi}{\omega}+4} ds \right) r^{2\frac{\pi}{\omega}-8} r dr \\
&\leq \frac{1}{-\frac{2\pi}{\omega} + 5} \int_0^1 \int_0^r d_{1,\omega}(s)^2 s^2 ds r^{-2} dr \\
&\leq \frac{1}{-\frac{2\pi}{\omega} + 5} \int_0^1 d_{1,\omega}(s)^2 s ds \\
&\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2.
\end{aligned}$$

3-On a d'après le lemme 3.1.4

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(\frac{\pi}{\omega} - 1)^2}{2(3 - \frac{\pi}{\omega})} \right)^2 \int_0^1 d_{1,\omega}(r)^2 r dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2 \\
\left(\frac{(\frac{\pi}{\omega} - 1)}{2(3 - \frac{\pi}{\omega})} \right)^2 \int_0^1 d'_{1,\omega}(r)^2 r^3 dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(\frac{\pi}{\omega} + 1)^2}{2(3 + \frac{\pi}{\omega})} \right)^2 \int_0^1 d_{1,\omega}(r)^2 r dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2 \\
\left(\frac{(\frac{\pi}{\omega} + 1)}{2(3 + \frac{\pi}{\omega})} \right)^2 \int_0^1 d'_{1,\omega}(r)^2 r^3 dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2,
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ω .

Conclusion

D'après ce qui précède on a

$$\left\| \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial r^2} \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}$$

Les termes (3.1.16) et (3.1.17) sont estimés de la même façon.

Cela implique que

$$\|\Pi_3\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

□

Finalement on a démontré que

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} \right\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

De manière similaire, on montre que

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} \right\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Pour le terme $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}$ on écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4} \underbrace{b_{1,\omega}(r) \cos \frac{\pi}{\omega} \theta}_{X_1(r,\theta)} + \underbrace{\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) b_{1,\omega}(r) W_\omega(\theta)}_{X_2(r,\theta)} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} - 1}{3 - \frac{\pi}{\omega}} J_-(r) r^{\frac{\pi}{\omega} - 2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{\omega} + 1}{3 + \frac{\pi}{\omega}} J_+(r) r^{-\frac{\pi}{\omega} - 2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} + 2\right)\theta}_{X_3(r,\theta)}. \end{aligned}$$

Les termes $X_2(r, \theta)$ et $X_3(r, \theta)$ sont estimés exactement comme dans le cas $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}$ (respectivement $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}$).

Pour le terme $X_1(r, \theta)$, on a

Lemme 3.1.8. *Il existe une constante ne dépendant pas de ω ($\omega < \pi$) telle que*

$$\|X_1\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Démonstration. Il est clair que $X_1 \in L^2$ et $\nabla(X_1) \in L^2$, le cas le plus délicat est celui des dérivées d'ordre 2.

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial r^2} = b''_{1,\omega}(r) \cos \frac{\pi}{\omega} \theta;$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial X_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X_1}{\partial \theta^2}\right) = \left(\frac{b'_{1,\omega}(r)}{r} - \frac{b_{1,\omega}(r)}{r^2}\right) \cos \frac{\pi}{\omega} \theta + \left(1 + \frac{\pi}{\omega}\right) \left(1 - \frac{\pi}{\omega}\right) \frac{b_{1,\omega}(r)}{r^2} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta;$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 X_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial X_1}{\partial \theta}\right) = -\frac{\pi}{\omega} \left(\frac{b'_{1,\omega}(r)}{r} - \frac{b_{1,\omega}(r)}{r^2}\right) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta.$$

D'après le lemme 3.1.4 on en déduit

$$\left\| \frac{\partial^2 X_1}{\partial r^2} \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

$$\left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial X_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X_1}{\partial \theta^2}\right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

$$\left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 X_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial X_1}{\partial \theta}\right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

□

D'après ce qui précède on a

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} \right\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Finalement on obtient

$$\|A_\omega\|_{H^4(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Ceci termine la démonstration de la première partie du théorème 3.1.5.

Passons maintenant à la démonstration de la deuxième partie.

Montrons tout d'abord que

$$b_{1,\omega}(r) = o\left(r \sqrt{\ln \frac{1}{r}}\right).$$

En effet, on a si $r < r_0$, où $r_0 < 1$,

$$\left| \frac{b_{1,\omega}(r)}{r} \right| = \left| \int_r^{r_0} d_{1,\omega}(s) ds + \frac{b_{1,\omega}(r_0)}{r_0} \right| \leq \left(\int_r^{r_0} d_{1,\omega}^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\ln \frac{r_0}{r}} + \left| \frac{b_{1,\omega}(r_0)}{r_0} \right|$$

où $d_{1,\omega}$ est défini dans (3.1.14).

Donc

$$\frac{|b_{1,\omega}(r)|}{r\sqrt{\ln\frac{1}{r}}} \leq \left(\int_0^{r_0} d_{1,\omega}^2(s)sd s\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|b_{1,\omega}(r_0)|}{r_0} \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ on choisit r_0 tel que

$$\int_0^{r_0} d_{1,\omega}^2(s)sd s \leq \epsilon^2.$$

Alors si $r \leq r_0$

$$\frac{|b_{1,\omega}(r)|}{r\sqrt{\ln\frac{1}{r}}} \leq \epsilon + \frac{|b_{1,\omega}(r_0)|}{r_0} \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{r}}} \leq 2\epsilon \text{ si } r \text{ est assez petit.}$$

D'après (3.1.12) on en déduit

$$A_\omega(r, \theta) = o\left(r^3 \sqrt{\ln\frac{1}{r}}\right).$$

Enfin, la dernière partie du théorème 3.1.5 se démontre de la façon suivante :
On part de

$$a_\omega^1 = \underbrace{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^1 b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds}_{h_1} - \underbrace{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^1 b_{1,\omega}(s) s^{-\frac{\pi}{\omega}+1} ds}_{h_2}$$

On a évidemment

$$|h_1| \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)},$$

où C est une constante indépendante de ω .

Pour h_2 on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|h_2| \leq \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\int_0^1 (b_{1,\omega}(s))^2 \frac{1}{s} ds} \sqrt{\int_0^1 s^{-2\frac{\pi}{\omega}+3} ds} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)},$$

où $C = C' \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4-2\frac{\pi}{\omega}}}$ est uniforme par rapport à ω ($\frac{2\pi}{3} < \omega \leq \pi$).

Finalement on déduit d'après le lemme 3.1.3 que

$$|a_\omega^1| \leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)},$$

où C est une constante indépendante de ω .

□

Le théorème 3.1.5 est entièrement démontré.

3.1.4 Le cas $k = 2$

Dans cette section on part, comme dans le cas $k = 1$, du calcul de v_ω et u_ω à partir de (3.1.8) et (3.1.9), et on déduit que

$$u_\omega(r, \theta) = A_\omega(r, \theta) + a_\omega^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta,$$

avec

$$\begin{aligned} A_\omega(r, \theta) &= \frac{\omega}{4\pi} \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \frac{\omega}{4\pi} \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta, \end{aligned}$$

et

$$a_\omega^2 = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^1 b_{2,\omega}(s) (s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} - s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1}) ds. \quad (3.1.18)$$

Le théorème 3.1.1, dans ce cas, devient :

Théorème 3.1.9. *Pour tout $f_{2,\omega}(r, \theta) = a_\omega^2 \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \in L^2(\Omega_\omega)$, il existe un voisinage ouvert V de l'origine indépendant de ω et $f_{2,\omega}$, une constante unique a_ω^2 et une fonction A_ω telle que la solution u_ω du problème (P_ω^2) admet dans $V \cap \Omega_\omega$ la décomposition :*

$$u_\omega(r, \theta) = a_\omega^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta + A_\omega(r, \theta),$$

avec

- 1 - $\|A_\omega\|_{H^4(V \cap \Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}$ où C est une constante indépendante de ω
- 2 - $A_\omega = o(r^3 \sqrt{\ln \frac{1}{r}})$
- 3 - $|a_\omega^2| \leq C \|f_\omega\|_{L^2(V \cap \Omega_\omega)}$.

Démonstration.

1-Montrons que $\|A_\omega\|_{H^4} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}$.

On a

$$\begin{aligned} A_\omega(r, \theta) &= \frac{\omega}{4\pi} \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \frac{\omega}{4\pi} \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \end{aligned}$$

Pour montrer que $\|A_\omega\|_{H^4} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}$, on procède comme dans le cas $k = 1$: on

calculer $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}$ et ensuite on démontre que chacun de ces termes vérifie une estimation du type :

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H^2}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H^2}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H^2},$$

On pose

$$L_+(r) = \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds$$

$$L_-(r) = \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds.$$

La dérivée $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} &= b_{2,\omega}(r) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \cos^2 \theta \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta \\ &= b_{2,\omega}(r) M_\omega^1(\theta) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta. \end{aligned}$$

La dérivée $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} &= b_{2,\omega}(r) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \sin^2 \theta \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta \\ &= b_{2,\omega}(r) M_\omega^2(\theta) \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta. \end{aligned}$$

La dérivée $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} &= b_{2,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \cos \theta \sin \theta \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \cos \left(\frac{\pi}{\omega} - 2 \right) \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \cos \left(\frac{\pi}{\omega} + 2 \right) \theta \\ &= b_{2,\omega}(r) M_\omega^3(\theta) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \cos \left(\frac{\pi}{\omega} - 2 \right) \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \cos \left(\frac{\pi}{\omega} + 2 \right) \theta, \end{aligned}$$

où $M_\omega^1(\theta)$, $M_\omega^2(\theta)$ et $M_\omega^3(\theta)$ sont uniformément bornées, ainsi que leurs dérivées, par rapport à ω (au voisinage de π).

Finalement nous sommes en mesure d'estimer le terme $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}$ (respectivement $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}$) en norme H^2 .

Comme dans le cas $k = 1$ on va étudier seulement les dérivées d'ordre 2.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} &= \underbrace{b_{2,\omega}(r) M_\omega^1(\theta)}_{Y_1(r,\theta)} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta}_{Y_2(r,\theta)}. \end{aligned}$$

Pour Y_1 on a

Lemme 3.1.10. *Il existe une constante ne dépendant pas de ω ($\omega < \pi$) telle que*

$$\|Y_1\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Démonstration. Il est clair que $Y_1 \in L^2$ et $\nabla(Y_1) \in L^2$.

Un calcul direct donne, pour les dérivées d'ordre 2,

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial r^2} = b_{2,\omega}''(r) M_\omega^1(\theta);$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial Y_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2} \right) = \frac{b_{2,\omega}'(r)}{r} M_\omega^1(\theta) + \frac{b_{2,\omega}(r)}{r^2} (M_\omega^1(\theta))'';$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} \right) = \frac{b_{2,\omega}'(r)}{r} (M_\omega^1(\theta))' - \frac{b_{2,\omega}(r)}{r^2} (M_\omega^1(\theta))'.$$

On en déduit d'après le lemme 3.1.4 que

$$\left\| \frac{\partial^2 Y_1}{\partial r^2} \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

$$\left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Y_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2} \right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

$$\left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} \right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

□

Pour Y_2 on a

Lemme 3.1.11. *Il existe une constante ne dépendant pas de ω ($\omega < \pi$) telle que*

$$\|Y_2\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Démonstration. Comme dans l'estimation du terme Y_1 on passe directement aux dérivées d'ordre 2.

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial r^2} &= \frac{b'_{2,\omega}(r)}{r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta \right] \\ &\quad + \frac{b_{2,\omega}(r)}{r^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 3 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-4} \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 3 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-4} \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Y_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \theta^2} \right) &= \frac{b_{2,\omega}(r)}{r^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 3 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega}-4} \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} - 2 \right) \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 3 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega}-4} \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} + 2 \right) \theta; \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta}\right) &= \frac{b_{2,\omega}(r)}{r^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right) \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\omega} - 2\right)\theta - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1\right) \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\omega} + 2\right)\theta \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 3\right) \left(\frac{2\pi}{\omega} - 2\right) \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right) L_-(r) r^{\frac{2\pi}{\omega} - 4} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega} - 2\right)\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 3\right) \left(\frac{2\pi}{\omega} + 2\right) \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1\right) L_+(r) r^{-\frac{2\pi}{\omega} - 4} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega} + 2\right)\theta.
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Estimation du terme $\frac{\partial^2 Y_2}{\partial r^2}$

1-On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega} + 1} ds \right)^2 r^{-\frac{4\pi}{\omega} - 8} r dr &\leq \int_0^1 \left(\int_0^r b_{2,\omega}(s)^2 ds \right) \left(\int_0^r s^{\frac{4\pi}{\omega} + 2} ds \right) r^{-\frac{4\pi}{\omega} - 8} r dr \\
&\leq \frac{1}{\frac{4\pi}{\omega} + 3} \int_0^1 \int_0^r b_{2,\omega}(s)^2 ds r^{-4} dr \\
&\leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{\omega} + 3} \right) \int_0^1 b_{2,\omega}(s)^2 s^{-3} ds \\
&\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2.
\end{aligned}$$

2-On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega} + 1} ds \right)^2 r^{\frac{4\pi}{\omega} - 8} r dr &\leq \int_0^1 \left(\int_0^r b_{2,\omega}(s)^2 s^{-2} ds \right) \left(\int_0^r s^{-\frac{4\pi}{\omega} + 4} ds \right) r^{\frac{4\pi}{\omega} - 8} r dr \\
&\leq \frac{1}{-\frac{2\pi}{\omega} + 5} \int_0^1 \int_0^r b_{2,\omega}(s)^2 s^{-2} ds r^{-2} dr \\
&\leq \frac{1}{-\frac{2\pi}{\omega} + 5} \int_0^1 b_{2,\omega}(s)^2 s^{-3} ds \\
&\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2.
\end{aligned}$$

3-On a d'après le lemme 3.1.4 que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right)^2 \int_0^1 b'_{2,\omega}(r)^2 \frac{1}{r} dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2 \\
\frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1\right)^2 \int_0^1 b'_{2,\omega}(r)^2 \frac{1}{r} dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right)^4 \int_0^1 b_{2,\omega}(r)^2 \frac{1}{r^3} dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2 \\
\frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1\right)^4 \int_0^1 b_{2,\omega}(r)^2 \frac{1}{r^3} dr &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2,
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ω .

D'après ce qui précède on a

$$\left\| \frac{\partial^2 Y_2}{\partial r^2} \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

Les termes (3.1.19) et (3.1.20) sont estimés de la même façon. Cela implique que

$$\|Y_2\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

□

Conclusion

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} \right\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} \right\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

et

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} \right\|_{H^2(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)} \quad (C \text{ constante indépendante de } \omega).$$

Finalement on obtient

$$\|A_\omega\|_{H^4(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)}.$$

Ceci termine la démonstration de la première partie du théorème 3.1.9.

La deuxième partie du théorème 3.1.9 se démontre exactement comme dans le cas $k = 1$.

La dernière partie du théorème 3.1.9 se démontre de la façon suivante :

On part de

$$a_\omega^2 = \underbrace{\frac{\omega}{4\pi} \int_0^1 b_{2,\omega}(s) s^{2\frac{\pi}{\omega}+1} ds}_{h'_1} - \underbrace{\frac{\omega}{4\pi} \int_0^1 b_{2,\omega}(s) s^{-2\frac{\pi}{\omega}+1} ds}_{h'_2}.$$

On a évidemment

$$|h'_1| \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)},$$

où C est une constante indépendante de ω .
 Pour h'_2 on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|h'_2| \leq \frac{\omega}{4\pi} \sqrt{\int_0^1 (b_{2,\omega}(s))^2 \frac{1}{s^3} ds} \sqrt{\int_0^1 s^{-4\frac{\pi}{\omega}+5} ds} \leq C \|v_\omega\|_{H^2_z(\Omega_\omega)},$$

où $C = C' \frac{\omega}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{6-4\frac{\pi}{\omega}}}$ est uniforme par rapport à ω ($\frac{2\pi}{3} < \omega \leq \pi$).

Finalement on déduit d'après le lemme 3.1.3 que

$$|a_\omega^2| \leq C \|f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)},$$

où C est une constante indépendante de ω . □

Le théorème 3.1.9 est entièrement démontré.

3.1.5 Le cas $k \geq 3$

On part de

$$u_\omega(r, \theta) = A_\omega(r, \theta) + \sum_{k=3}^{+\infty} a_\omega^k r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta, \quad (3.1.21)$$

avec

$$\begin{aligned} A_\omega(r, \theta) &= - \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta = \sum_{k=3}^{+\infty} A_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta, \end{aligned}$$

et

$$a_\omega^k = \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^1 b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds.$$

Le théorème 3.1.1, dans ce cas, devient :

Théorème 3.1.12. *Pour tout $f_{3,\omega}(r, \theta) = \sum_{k=3}^{+\infty} c_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta$, la solution u_ω du problème (P_ω^2) est régulière et vérifie au voisinage de l'origine l'estimation suivante :*

$$\|u_\omega\|_{H^4(\Omega_\omega)} \leq C \|v_\omega\|_{H^2_z(\Omega_\omega)}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que

$$\|A_\omega\|_{H^4} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

On procède comme dans les cas précédents.

La dérivée $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) &= \sum_{k=3}^{+\infty} A''_{k,\omega}(r) \cos^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \left\{ \sin^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta - 2\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) \sin \theta \cos \theta \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\} \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \left\{ 2\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) \sin \theta \cos \theta \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta - \left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2 \sin^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\}. \end{aligned}$$

La dérivée $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2}(r, \theta) &= \sum_{k=3}^{+\infty} A''_{k,\omega}(r) \sin^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \left\{ \cos^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta + 2\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) \sin \theta \cos \theta \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\} \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \left\{ -2\frac{k\pi}{\omega} \sin \theta \cos \theta \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta - \left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2 \cos^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\}. \end{aligned}$$

La dérivée $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y}(r, \theta) &= \sum_{k=3}^{+\infty} A''_{k,\omega}(r) \cos \theta \sin \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \left\{ -\cos \theta \sin \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta + \left(\frac{k\pi}{\omega}\right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\} \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \left\{ \frac{k\pi}{\omega} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta - \left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2 \sin \theta \cos \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\} \end{aligned}$$

La suite de la démonstration repose sur les lemmes suivants

Lemme 3.1.13. *On a*

$$\int_0^\omega \left| \sum_{k=3}^{+\infty} a_k \sin\left(2 + \frac{k\pi}{\omega}\right)\theta \right|^2 d\theta \leq C \sum_{k=3}^{+\infty} |a_k|^2, \quad (3.1.22)$$

où C est uniforme par rapport à ω proche de π .

Démonstration. Le membre de gauche de (3.1.22) s'écrit

$$\int_0^\omega \sum_k \sum_l a_k a_l \sin\left(2 + \frac{k\pi}{\omega}\right)\theta \sin\left(2 + \frac{l\pi}{\omega}\right)\theta d\theta.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \sin\left(2 + \frac{k\pi}{\omega}\right)\theta \sin\left(2 + \frac{l\pi}{\omega}\right)\theta d\theta &\leq \omega \text{ pour } k = l, \\ &= \frac{(-1)^{k+l+1}}{8 + \frac{2\pi}{\omega}(k+l)} \sin 4\omega \text{ pour } k \neq l. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hilbert (STEELE 2004 page 155), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_l \left| \int_0^\omega a_k a_l \sin\left(2 + \frac{k\pi}{\omega}\right)\theta \sin\left(2 + \frac{l\pi}{\omega}\right)\theta d\theta \right| &\leq \sum_k \sum_l \left| \frac{a_k a_l}{l+k} \right| + \omega \sum_k a_k^2 \\ &\leq Cte \sum_k a_k^2 \end{aligned}$$

Le lemme 3.1.13 est complètement démontré. \square

Lemme 3.1.14. *On a*

$$\int_0^\omega \left| \sum_{k=3}^{+\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{\omega} - 2\right)\theta \right|^2 d\theta \leq C \sum_{k=3}^{+\infty} |a_k|^2,$$

où C est uniforme par rapport à ω proche de π .

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 3.1.13. \square

Lemme 3.1.15. *On a, si P est un polynôme à deux variables,*

$$\int_0^\omega \left| \sum_k a_k P(\sin \theta, \cos \theta) \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right|^2 d\theta \leq C \sum_k |a_k|^2. \quad (3.1.23)$$

Démonstration. On part de

$$\int_0^\omega P(\sin \theta, \cos \theta)^2 \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \cos \frac{l\pi}{\omega} \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\omega P(\sin \theta, \cos \theta)^2 \left[\cos \frac{(k-l)\pi}{\omega} \theta + \cos \frac{(k+l)\pi}{\omega} \theta \right] d\theta. \quad (3.1.24)$$

Si on fait l'intégration par parties deux fois dans (3.1.24) on obtient (si $k \neq l$)

$$\begin{aligned}
(3.1.24) &= \frac{1}{2} P_1(\sin \theta, \cos \theta) \left[\left(\frac{\omega}{\pi(k-l)} \right)^2 \cos \frac{(k-l)\pi}{\omega} \theta + \left(\frac{\omega}{\pi(k+l)} \right)^2 \cos \frac{(k+l)\pi}{\omega} \theta \right] \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\omega P_2(\sin \theta, \cos \theta) \left[\left(\frac{\omega}{\pi(k-l)} \right)^2 \cos \frac{(k-l)\pi}{\omega} \theta + \left(\frac{\omega}{\pi(k+l)} \right)^2 \cos \frac{(k+l)\pi}{\omega} \theta \right] d\theta \\
&= O\left(\frac{1}{(k-l)^2}\right) + O\left(\frac{1}{(k+l)^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{(k-l)^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

avec $P_1(\sin \theta, \cos \theta) = \partial_\theta P(\sin \theta, \cos \theta)^2$ et $P_2(\sin \theta, \cos \theta) = \partial_\theta P_1(\sin \theta, \cos \theta)$.

D'après le lemme de Schur (STEELE 2004 page 83), on en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega \left| \sum_k a_k P(\sin \theta, \cos \theta) \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right|^2 d\theta &\leq C \sum_k \sum_l \frac{|a_k| |a_l|}{1 + (k-l)^2} \\
&\leq C \left(\sum_k \sum_l \frac{|a_k|^2}{1 + (k-l)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \sum_l \frac{|a_l|^2}{1 + (k-l)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sum_k |a_k|^2.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.16. *On a, si P est un polynôme à deux variables,*

$$\int_0^\omega \left| \sum_k a_k P(\sin \theta, \cos \theta) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right|^2 d\theta \leq C \sum_k |a_k|^2 \tag{3.1.26}$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 3.1.15. □

Calculons maintenant

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right), \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) \\
\text{et } &\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right).
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$\begin{aligned}
\phi_{k,\omega}^1(\theta) &= \cos^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\
\phi_{k,\omega}^2(\theta) &= \left\{ \sin^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta - 2 \left(\frac{k\pi}{\omega} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\} \\
\phi_{k,\omega}^3(\theta) &= \left\{ 2 \left(\frac{k\pi}{\omega} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta - \left(\frac{k\pi}{\omega} \right)^2 \sin^2 \theta \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) &= \sum_{k=3}^{+\infty} A_{k,\omega}^{(4)}(r) \phi_{k,\omega}^1(\theta) \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \right)'' \phi_{k,\omega}^2(\theta) \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)'' \phi_{k,\omega}^3(\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) &= \sum_{k=3}^{+\infty} \left[\frac{A_{k,\omega}^{(3)}(r)}{r} - \frac{A''_{k,\omega}(r)}{r^2} \right] (\phi_{k,\omega}^1(\theta))' \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \right)' - \frac{1}{r^2} \frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \right] (\phi_{k,\omega}^2(\theta))' \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)' - \frac{A_{k,\omega}(r)}{r^4} \right] (\phi_{k,\omega}^3(\theta))'; \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) &= \sum_{k=3}^{+\infty} \left[\frac{A_{k,\omega}^{(3)}(r)}{r} \phi_{k,\omega}^1(\theta) + \frac{A''_{k,\omega}(r)}{r^2} (\phi_{k,\omega}^1(\theta))'' \right] \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \right)' \phi_{k,\omega}^2(\theta) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \right) (\phi_{k,\omega}^2(\theta))'' \right] \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)' \phi_{k,\omega}^3(\theta) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \right) (\phi_{k,\omega}^3(\theta))'' \right]. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Estimation du terme $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right)$

Pour faire l'estimation du terme $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right)$, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.17. *On a*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right|^2 r dr d\theta &\leq C \sum_{k=3}^{+\infty} k^2 \left(\frac{k\pi}{\omega} - 3 \right)^2 \int_0^1 \left(\int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds \right)^2 r^{\frac{2k\pi}{\omega}-8} r dr \\
&+ C \sum_{k=3}^{+\infty} k^6 \int_0^1 \left(\int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds \right)^2 r^{-\frac{2k\pi}{\omega}-8} r dr \\
&+ C \sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 b''_{k,\omega}(s)^2 s ds + C \sum_{k=3}^{+\infty} k^2 \int_0^1 b'_{k,\omega}(s)^2 \frac{1}{s} ds \\
&+ C \sum_{k=3}^{+\infty} k^4 \int_0^1 b_{k,\omega}(s)^2 \frac{1}{s^3} ds.
\end{aligned}$$

Démonstration. d'après les lemmes 3.1.13 et 3.1.16

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right|^2 r dr d\theta &\leq C \sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 |A_{k,\omega}^{(4)}(r)|^2 r dr \\
&+ C \sum_{k=3}^{+\infty} k^2 \int_0^1 \left| \left(\frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \right)'' \right|^2 r dr \\
&+ C \sum_{k=3}^{+\infty} k^4 \int_0^1 \left| \left(\frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)'' \right|^2 r dr. \tag{3.1.29}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
A_{k,\omega}^{(4)}(r) &= b''_{k,\omega}(r) - \left(\frac{b_{k,\omega}(r)}{r} \right)' + \left(\frac{b_{k,\omega}(r)}{r^2} \right) \left(\left(\frac{k\pi}{\omega} \right)^2 + 1 \right) \\
&- \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{\omega} - 1 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} - 2 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} - 3 \right) \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-4} \\
&- \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{\omega} + 1 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} + 2 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} + 3 \right) \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-4}; \tag{3.1.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A'_{k,\omega}(r)}{r} \right)'' &= \left(\frac{b_{k,\omega}(r)}{r} \right)' - \left(\frac{b_{k,\omega}(r)}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{\omega} - 2 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} - 3 \right) \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-4} \\
&- \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{\omega} + 2 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} + 3 \right) \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-4}; \tag{3.1.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)'' &= \left(\frac{b_{k,\omega}(r)}{r^2} \right) - \frac{\omega}{2k\pi} \left(\frac{k\pi}{\omega} - 2 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} - 3 \right) \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-4} \\
&- \frac{\omega}{2k\pi} \left(\frac{k\pi}{\omega} + 2 \right) \left(\frac{k\pi}{\omega} + 3 \right) \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-4}. \tag{3.1.32}
\end{aligned}$$

En injectant (3.1.30), (3.1.31) et (3.1.32) dans (3.1.40) on obtient le résultat

désiré. □

Revenons maintenant à l'estimation du terme $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta))$.
D'après le lemme 3.1.17 on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2}(r, \theta)) &\leq C \underbrace{\sum_{k=3}^{+\infty} k^2 (\frac{k\pi}{\omega} - 3)^2 \int_0^1 (\int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds)^2 r^{\frac{2k\pi}{\omega}-8} r dr}_{I_1} \\ &+ \underbrace{\sum_{k=3}^{+\infty} k^6 \int_0^1 (\int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds)^2 r^{-\frac{2k\pi}{\omega}-8} r dr}_{I_2} \\ &+ C \underbrace{\sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 b''_{k,\omega}(s)^2 s ds}_{I_3} + C \underbrace{\sum_{k=3}^{+\infty} k^2 \int_0^1 b'_{k,\omega}(s)^2 \frac{1}{s} ds}_{I_4} + C \underbrace{\sum_{k=3}^{+\infty} k^4 \int_0^1 b_{k,\omega}(s)^2 \frac{1}{s^3} ds}_{I_5} \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1.4 on a

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2. \\ I_4 &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2. \\ I_5 &\leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2. \end{aligned}$$

Pour I_1 et I_2 on procède comme suit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=3}^{+\infty} k^4 (\frac{k\pi}{\omega} - 3)^2 \int_0^1 (\int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds)^2 r^{\frac{2k\pi}{\omega}-8} r dr \\ &\leq C \underbrace{\sum_{k=5}^{+\infty} k^6 \int_0^1 \int_r^1 b_{k,\omega}(s)^2 s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds \frac{1}{\frac{k\pi}{\omega} - 2} r^{\frac{2k\pi}{\omega}-6} r dr}_{I_1^1} \\ &+ C \underbrace{(\frac{3\pi}{\omega} - 3)^2 \int_0^1 (\int_r^1 b_{3,\omega}(s) s^{1-\frac{3\pi}{\omega}} ds)^2 r^{\frac{6\pi}{\omega}-8} r dr}_{I_1^2} \\ &+ C \underbrace{(\frac{4\pi}{\omega} - 3)^2 \int_0^1 (\int_r^1 b_{4,\omega}(s) s^{1-\frac{4\pi}{\omega}} ds)^2 r^{\frac{8\pi}{\omega}-8} r dr}_{I_1^3}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
I_1^1 &= C \sum_{k=5}^{+\infty} k^6 \int_0^1 \int_r^1 b_{k,\omega}(s)^2 s^{1-\frac{k\pi}{\omega}} ds \frac{1}{\frac{k\pi}{\omega} - 2} r^{\frac{2k\pi}{\omega}-6} r dr \\
&\leq C \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{k^6}{\left(\frac{k\pi}{\omega} - 2\right)\left(\frac{k\pi}{\omega} - 4\right)} \int_0^1 b_{k,\omega}(s)^2 s^{-3} ds \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2. \tag{3.1.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1^2 &= C \left(\frac{3\pi}{\omega} - 3\right)^2 \int_0^1 \left(\int_r^1 b_{3,\omega}(s) s^{1-\frac{3\pi}{\omega}} ds\right)^2 r^{\frac{6\pi}{\omega}-8} r dr \\
&\leq C \left(\frac{3\pi}{\omega} - 3\right)^2 \int_0^1 \int_r^1 b_{3,\omega}(s)^2 s^{-\frac{3\pi}{\omega}} ds \left(\int_r^1 s^{-\frac{3\pi}{\omega}+2} ds\right) r^{\frac{6\pi}{\omega}-7} dr \\
&\leq C \left(\frac{3\pi}{\omega} - 3\right) \int_0^1 \int_r^1 b_{3,\omega}(s)^2 s^{-\frac{3\pi}{\omega}} ds r^{\frac{3\pi}{\omega}-4} dr \\
&\leq C \int_0^1 b_{3,\omega}(s)^2 s^{-3} ds \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2. \tag{3.1.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1^3 &= C \left(\frac{4\pi}{\omega} - 3\right)^2 \int_0^1 \left(\int_r^1 b_{4,\omega}(s) s^{1-\frac{4\pi}{\omega}} ds\right)^2 r^{\frac{8\pi}{\omega}-8} r dr \\
&\leq C \left(\frac{4\pi}{\omega} - 3\right)^2 \int_0^1 \int_r^1 b_{4,\omega}(s)^2 s^{-\frac{4\pi}{\omega}} ds \left(\int_r^1 s^{-\frac{4\pi}{\omega}+2} ds\right) r^{\frac{8\pi}{\omega}-7} dr \\
&\leq C \left(\frac{4\pi}{\omega} - 3\right) \int_0^1 \int_r^1 b_{4,\omega}(s)^2 s^{-\frac{4\pi}{\omega}} ds r^{\frac{4\pi}{\omega}-4} dr \\
&\leq C \int_0^1 b_{4,\omega}(s)^2 s^{-3} ds \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2. \tag{3.1.35}
\end{aligned}$$

D'après (3.1.33), (3.1.34) et (3.1.35), on a

$$I_1 \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k=3}^{+\infty} k^6 \int_0^1 \left(\int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds\right)^2 r^{-\frac{2k\pi}{\omega}-8} r dr \\
&\leq \sum_{k=3}^{+\infty} k^6 \int_0^1 \int_0^r b_{k,\omega}(s)^2 s^{1+\frac{k\pi}{\omega}} ds \frac{1}{2 + \frac{k\pi}{\omega}} r^{-\frac{2k\pi}{\omega}-5} dr \\
&\leq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^6}{\left(2 + \frac{k\pi}{\omega}\right)\left(4 + \frac{k\pi}{\omega}\right)} \int_0^1 b_{k,\omega}(s)^2 s^{-3} ds \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}^2.
\end{aligned}$$

Conclusion

D'après ce qui précède on a

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} \right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

Les termes (3.1.27) et (3.1.28) sont estimés de la même façon. Cela implique que

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x^2} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial y^2} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2},$$

et

$$\left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial x \partial y} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

Finalement on obtient

$$\|A_\omega\|_{H^4} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2} \quad (C \text{ constante indépendante de } \omega).$$

Il reste maintenant à étudier la régularité du terme (voir (3.1.21)).

$$\sum_{k=3}^{+\infty} a_\omega^k r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta.$$

Les termes d'indice $k \geq 4$ sont traités ensemble :

$$\left\| \sum_{k=4}^{+\infty} a_\omega^k r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\|_{H^4} \leq C, \quad (3.1.36)$$

et ceci grâce à la remarque suivante :

$$\sum_{k=4} k^7 (a_\omega^k)^2 \leq C.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=4} k^7 (a_\omega^k)^2 &= \sum_{k=4} k^7 \left(\frac{\omega}{2k\pi} \int_0^1 b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds \right)^2 \\ &\leq C \sum_{k=4} k^5 \int_0^1 b_{k,\omega}^2(s) s^{-3} ds \int_0^1 s^{2\frac{k\pi}{\omega}+5} ds \\ &\leq C \sum_{k=4} k^4 \int_0^1 b_{k,\omega}^2(s) s^{-3} ds \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2(\Omega_\omega)} \quad (\text{d'après le lemme 3.1.4}). \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la Démonstration de (3.1.36).

Posons

$$R_\omega(r, \theta) = \sum_{k=4}^{+\infty} N_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta,$$

où $N_{k,\omega}(r) = a_\omega^k r^{\frac{k\pi}{\omega}}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) &= \sum_{k=4}^{+\infty} N_{k,\omega}(r) \phi_{k,\omega}^1(\theta) \\ &+ \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{N'_{k,\omega}(r)}{r} \right)'' \phi_{k,\omega}^2(\theta) \\ &+ \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{N_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)'' \phi_{k,\omega}^3(\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) &= \sum_{k=4}^{+\infty} \left[\frac{N_{k,\omega}^{(3)}(r)}{r} - \frac{N''_{k,\omega}(r)}{r^2} \right] (\phi_{k,\omega}^1(\theta))' \\ &+ \sum_{k=4}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{N'_{k,\omega}(r)}{r} \right)' - \frac{1}{r^2} \frac{N'_{k,\omega}(r)}{r} \right] (\phi_{k,\omega}^2(\theta))' \\ &+ \sum_{k=4}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{N_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)' - \frac{N_{k,\omega}(r)}{r^4} \right] (\phi_{k,\omega}^3(\theta))'; \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) &= \sum_{k=4}^{+\infty} \left[\frac{N_{k,\omega}^{(3)}(r)}{r} \phi_{k,\omega}^1(\theta) + \frac{N''_{k,\omega}(r)}{r^2} (\phi_{k,\omega}^1(\theta))'' \right] \\ &+ \sum_{k=4}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{N'_{k,\omega}(r)}{r} \right)' \phi_{k,\omega}^2(\theta) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{N'_{k,\omega}(r)}{r} \right) (\phi_{k,\omega}^2(\theta))'' \right] \\ &+ \sum_{k=4}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{N_{k,\omega}(r)}{r^2} \right)' \phi_{k,\omega}^3(\theta) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{N_{k,\omega}(r)}{r^2} \right) (\phi_{k,\omega}^3(\theta))'' \right]. \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Les $\phi_{k,\omega}^j(\theta)$, $j = 1, \dots, 3$ sont définis précédemment.

Estimation du terme $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right)$

D'après les lemmes 3.1.13 et 3.1.16

$$\int_{\Omega_\omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right|^2 r dr d\theta \leq C \sum_{k=4}^{+\infty} k^8 (a_\omega^k)^2 \int_0^1 r^{2\frac{k\pi}{\omega}-7} dr \quad (3.1.39)$$

$$\leq C \sum_{k=4}^{+\infty} k^7 (a_\omega^k)^2 \leq C. \quad (3.1.40)$$

D'après ce qui précède on a

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2} \right) \right\|_{L^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

Les termes (3.1.37) et (3.1.38) sont estimés de la même façon. Cela implique que

$$\left\| \frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x^2} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\left\| \frac{\partial^2 R_\omega}{\partial y^2} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2},$$

et

$$\left\| \frac{\partial^2 R_\omega}{\partial x \partial y} \right\|_{H^2} \leq C \|v_\omega\|_{H_z^2}.$$

Finalement on obtient

$$\left\| \sum_{k=4}^{+\infty} a_\omega^k r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right\|_{H^4} \leq C.$$

Pour le terme $k = 3$, on pose

$$B(r, \theta) = r^{\frac{3\pi}{\omega}} \sin \frac{3\pi}{\omega} \theta,$$

et on estime la norme H^2 des termes $\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x \partial y}$.

Ces termes s'écrivent

$$\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) = \frac{3\pi}{\omega} \left(\frac{3\pi}{\omega} - 1 \right) r^{\frac{3\pi}{\omega}-2} \sin \left(\frac{3\pi}{\omega} - 2 \right) \theta;$$

$$\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial y^2}(r, \theta) = -\frac{3\pi}{\omega} \left(\frac{3\pi}{\omega} - 1\right) r^{\frac{3\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right)\theta;$$

$$\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x \partial y}(r, \theta) = \frac{3\pi}{\omega} \left(\frac{3\pi}{\omega} - 1\right) r^{\frac{3\pi}{\omega}-2} \cos\left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right)\theta.$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right), \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) \\ \text{et } & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right). \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) = \frac{3\pi}{\omega} \left(\frac{3\pi}{\omega} - 1\right) \left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right) \left(\frac{3\pi}{\omega} - 3\right) r^{\frac{3\pi}{\omega}-4} \sin\left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right)\theta$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) = \frac{3\pi}{\omega} \left(\frac{3\pi}{\omega} - 1\right) \left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right) \left(\frac{3\pi}{\omega} - 3\right) r^{\frac{3\pi}{\omega}-4} \cos\left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right)\theta \quad (3.1.41)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right) = -\frac{3\pi}{\omega} \left(\frac{3\pi}{\omega} - 1\right) \left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right) \left(\frac{3\pi}{\omega} - 3\right) r^{\frac{3\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{3\pi}{\omega} - 2\right)\theta \quad (3.1.42)$$

On a

$$\int_0^\omega \int_0^r \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2}(r, \theta) \right) \right|^2 r dr d\theta \leq C \left(\frac{3\pi}{\omega} - 3\right)^2 \int_0^r r^{\frac{6\pi}{\omega}-7} dr = C.$$

Les termes (3.1.41) et (3.1.42) sont estimés de la même façon, d'où

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x^2} \right) \right\|_{H^2} \leq C. \quad (3.1.43)$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial y^2} \right) \right\|_{H^2} \leq C,$$

et

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 B_\omega}{\partial x \partial y} \right) \right\|_{H^2} \leq C.$$

Les autres termes s'estiment eux aussi de la même façon.
Finalement on obtient

$$\left\| r^{\frac{3\pi}{\omega}} \sin \frac{3\pi}{\omega} \theta \right\|_{H^4} \leq C,$$

□

ce qui termine la preuve du théorème 3.1.12 et celle du théorème 3.1.1.

4 Le comportement de la solution dans une famille d'ouverts du plan

Dans ce chapitre on considère la famille de problèmes aux limites (P_ω) , où les f_ω dépendent continûment de ω au sens de la norme L^2 , c'est-à-dire que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|f_\omega - \tilde{f}_\pi\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

Ici, on note par \tilde{f}_π la restriction de f_π à Ω_ω . Si $\omega < \pi$, au voisinage de 0, on sait que $u_\omega \in H^\sigma$ pour tout $\sigma < 1 + \frac{\pi}{\omega}$, tandis que u_π est de régularité H^4 . Il y a donc un saut de régularité des solutions près de l'angle π dont la description est l'objet de ce chapitre. Ainsi, la question qui se pose est la suivante :

quel est le comportement de la solution quand ω tend vers π ?

Pour répondre à cette question on va présenter trois résultats. Le premier concerne la convergence H^1 (près de la singularité) de la solution, le deuxième la convergence des constantes a_ω^1 et a_ω^2 et le troisième concerne la convergence H^2 (près de la singularité) de la solution.

Rappelons que si $\omega < \pi$, alors la solution u_ω du problème (P_ω) admet au voisinage de l'origine la décomposition

$$u_\omega = u_{\omega,1} + u_{\omega,2} + u_{\omega,3},$$

où

$$u_{\omega,1} = a_\omega^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \text{ et } u_{\omega,2} = a_\omega^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta. \quad (4.0.1)$$

L'objectif de ce chapitre est de démontrer les résultats suivants :

Théorème 4.0.1.

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|u_\omega - u_\pi\|_{H^1(\Omega_\omega)} = 0.$$

Théorème 4.0.2. Avec les notations précédentes on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^1 = \frac{1}{4\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, y>0} f_\pi(x, y) y \left\{ \frac{1}{2}((x^2 + y^2) - 1) - \ln(x^2 + y^2) \right\} dx dy = a_\pi^1 = \frac{\partial u_\pi}{\partial y}(0, 0). \quad (4.0.2)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, y>0} f_\pi(x, y) xy \left\{ \frac{1}{3}((x^2 + y^2) - 1) - \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - 1 \right) \right\} dx dy = a_\pi^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_\pi}{\partial x \partial y}(0, 0). \quad (4.0.3)$$

Le développement limité de u_π au voisinage de l'origine étant de la forme

$$u_\pi(x, y) = \frac{\partial u_\pi}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_\pi}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + (x^2 + y^2)\epsilon(x, y),$$

le théorème 4.0.2 montre que, dans la décomposition (4.0.1) de u_ω , chaque terme converge vers l'un des termes de ce développement.

Théorème 4.0.3.

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|u_\omega - u_\pi\|_{H^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

Remarque 4.0.4. $u_\omega \in H_z^2(\Omega_\omega) = H^2(\Omega_\omega) \cap H_0^1(\Omega_\omega)$ mais $u_\pi \notin H_z^2(\Omega_\omega)$, puisque $u_\pi \neq 0$ sur Γ_ω^- (voir la figure 4.1).

4.1 La preuve du théorème 4.0.1

Démonstration. On pose

$$z_\omega = \Delta u_\omega \text{ et } z_\pi = \Delta u_\pi.$$

On obtient alors les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \Delta z_\omega = f_\omega \in L^2(\Omega_\omega) \text{ dans } \Omega_\omega \\ z_\omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\omega \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta z_\pi = f_\pi \in L^2(\Omega_\pi) \text{ dans } \Omega_\pi \\ z_\pi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\pi \end{cases}$$

On a sur Ω_ω :

$$\begin{cases} \Delta z_\pi = \tilde{f}_\pi \in L^2(\Omega_\omega) \\ z_\pi = 0 \text{ sur } \Gamma^+ \\ z_\pi = g_\omega \text{ sur } \Gamma_\omega^-, \end{cases}$$

où \tilde{f}_π est la restriction de f_π à Ω_ω . On a par hypothèse $\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|f_\omega - \tilde{f}_\pi\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0$.

Il est clair que $g_\omega \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)$, c'est-à-dire que g_ω vérifie les conditions de raccord suivantes :

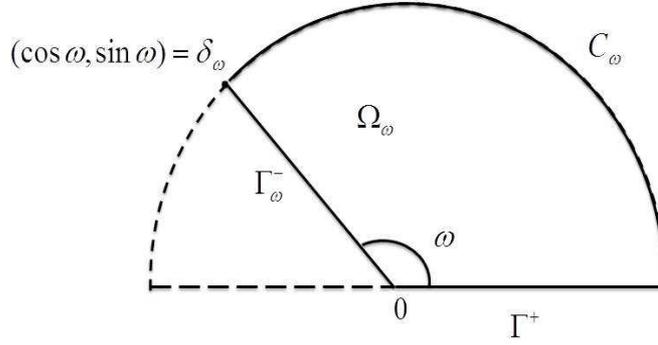


Figure 4.1 – Le bord de Ω_ω

en 0

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |g_\omega(t\tau^-)|^2 \frac{dt}{t} < +\infty,$$

et en $\gamma_\omega = (\cos \omega, \sin \omega)$ (voir la figure 4.1)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |g_\omega(\gamma_\omega - t\tau^-)|^2 \frac{dt}{t} < +\infty,$$

où τ^- désigne le vecteur unitaire porté par Γ_ω^- .

Comme $g_\omega \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)$, il existe un prolongement de g_ω à Ω_ω , noté G_ω , tel que $G_\omega \in H^1(\Omega_\omega)$ et

$$\|G_\omega\|_{H^1(\Omega_\omega)} \leq C(\Omega_\omega) \|g_\omega\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)},$$

et G_ω est nul sur Γ^+ et C_ω .

En effet, $z_\pi \in H_0^1(\Omega_\pi)$ alors

$$\begin{aligned} Tr(G_\omega) &= g_\omega \text{ sur } \Gamma_\omega^- \\ &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_\omega \setminus \Gamma_\omega^-. \end{aligned}$$

Lemme 4.1.1. *Si $g_\omega \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)$, il existe un prolongement de g_ω à Ω_ω noté G_ω ,*

tel que $G_\omega \in H^1(\Omega_\omega)$ et

$$\|G_\omega\|_{H^1(\Omega_\omega)} \leq C \|g_\omega\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)}, \quad (4.1.1)$$

où C est une constante indépendante de ω (voisin de π).

Par rotation et homothétie, on se ramène au résultat suivant.

Lemme 4.1.2. Soit $g \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}([-1, 1])$. Il existe $G \in H^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$ telle que

- i) $Tr(G) = \bar{g}$ (extension de g par 0 sur \mathbb{R})
- ii) $G(x, y) = 0$ si $|x| \geq 1 - y$ et $0 < y \leq \frac{1}{4}$
- iii) $\|G\|_{H^1} \leq C \|g\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}}$

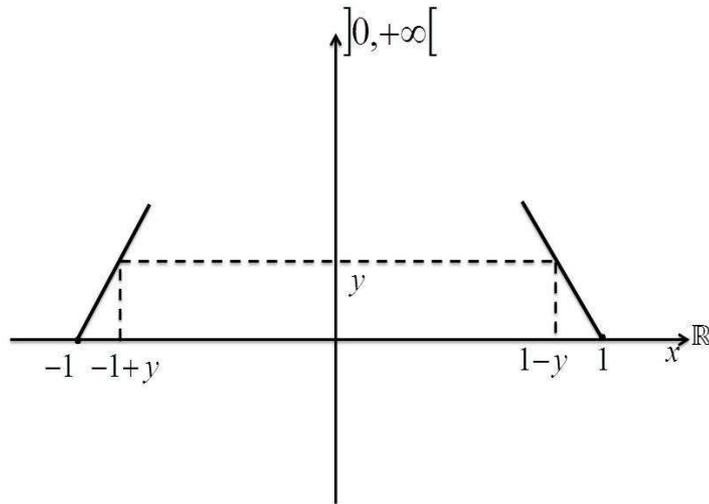


Figure 4.2

Démonstration. Pour le démontrer, on pose

$$G(x, y) = \frac{1}{2y} \int_{x-y}^{x+y} \bar{g}\left(\frac{s}{1-2y}\right) ds,$$

quand $0 < y \leq \frac{1}{4}$ (voir la figure 4.2).

On vérifie *ii*) facilement.

La propriété *i*) est vraie si \bar{g} est régulière, et s'étend par continuité à toute $g \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}$ dès que *iii*) est démontrée.

Pour démontrer *iii*), on calcule d'abord $\frac{\partial G}{\partial x}$:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2y}(\bar{g}(\frac{x+y}{1-2y}) - \bar{g}(\frac{x-y}{1-2y})).$$

Le changement de variables $u = (\frac{x+y}{1-2y})$, $v = (\frac{x-y}{1-2y})$, donne

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y > 0} (\frac{\partial G}{\partial x}(x, y))^2 dx dy &= \iint_{u > v} \frac{(1+u-v)^2}{(u-v)^2} (\bar{g}(u) - \bar{g}(v))^2 \frac{1}{2(1+u-v)^3} dudv \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{u > v} (\frac{\bar{g}(u) - \bar{g}(v)}{u-v})^2 dudv \leq C \|g\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}}^2. \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule $\frac{\partial G}{\partial y}$. On suppose d'abord que \bar{g} est C^1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) &= -\frac{1}{2y^2} \int_{x-y}^{x+y} \bar{g}(\frac{s}{1-2y}) ds \\ &\quad + \frac{1}{2y} (\bar{g}(\frac{x+y}{1-2y}) + \bar{g}(\frac{x-y}{1-2y})) \\ &\quad + \frac{1}{2y} \int_{x-y}^{x+y} \frac{2s}{(1-2y)^2} \bar{g}'(\frac{s}{1-2y}) ds. \end{aligned}$$

En intégrant par parties le troisième terme, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) &= -\frac{1}{2y^2} \int_{x-y}^{x+y} \bar{g}(\frac{s}{1-2y}) ds \\ &\quad + \frac{1}{2y} (\bar{g}(\frac{x+y}{1-2y}) + \bar{g}(\frac{x-y}{1-2y})) \\ &\quad + \frac{1}{y} ((\frac{x+y}{1-2y}) \bar{g}(\frac{x+y}{1-2y}) - (\frac{x-y}{1-2y}) \bar{g}(\frac{x-y}{1-2y})) \\ &\quad - \frac{1}{(1-2y)y} \int_{x-y}^{x+y} \bar{g}(\frac{s}{1-2y}) ds. \end{aligned}$$

Cette formule s'étend par densité au cas général où $g \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $\bar{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Le quatrième terme est égal à $-\frac{2}{1-2y}G(x, y)$: il est donc dans $L^2(dx dy)$.

Le troisième s'écrit, avec le même changement de variable que pour $\frac{\partial G}{\partial x}$:

$$2\frac{1+u-v}{u-v}(u\bar{g}(u) - v\bar{g}(v)),$$

et on l'estime facilement dans $L^2(\frac{dudv}{2(1+u-v)^3})$.

La somme des deux premiers termes est égale à

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2y^2} \int_{x-y}^{x+y} \left(\bar{g}\left(\frac{s}{1-2y}\right) - \bar{g}\left(\frac{x}{1-2y}\right) \right) ds \\
& + \frac{1}{2y} \left(\bar{g}\left(\frac{x+y}{1-2y}\right) - \bar{g}\left(\frac{x}{1-2y}\right) \right) \\
& + \frac{1}{2y} \left(\bar{g}\left(\frac{x-y}{1-2y}\right) - \bar{g}\left(\frac{x}{1-2y}\right) \right)
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes s'estiment avec les changements de variable

$$\begin{aligned}
u &= \frac{x+y}{1-2y}, \quad w = \frac{x}{1-2y} \quad \text{pour le deuxième,} \\
v &= \frac{x-y}{1-2y}, \quad w = \frac{x}{1-2y} \quad \text{pour le troisième.}
\end{aligned}$$

Pour le premier, on estime

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y > 0} \frac{1}{4y^4} \left(\int_{x-y}^{x+y} \bar{g}\left(\frac{s}{1-2y}\right) - \bar{g}\left(\frac{x}{1-2y}\right) ds \right)^2 dy dx \\
& \leq \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{x-y \leq s \leq x+y} \int_{y > 0} \left(\bar{g}\left(\frac{s}{1-2y}\right) - \bar{g}\left(\frac{x}{1-2y}\right) \right)^2 \frac{1}{2y^3} dx ds dy \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\
& \leq \int_{x' \in \mathbb{R}} \int_{s' \in \mathbb{R}} \int_{|s'-x'| \leq \frac{y}{1-2y}} \left(\bar{g}(s') - \bar{g}(x') \right)^2 \frac{(1-2y)^2}{2y^3} ds' dx' dy \quad (\text{changement de variable}) \\
& \leq C \int_{x'} \int_{s'} \left(\frac{\bar{g}(s') - \bar{g}(x')}{s' - x'} \right)^2 ds' dx' \\
& \leq C \|g\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}}^2.
\end{aligned}$$

L'ensemble des estimations obtenus démontre *iii*). □

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega_\omega)$ prolongée par 0 sur $\Omega_\pi \setminus \Omega_\omega$.

D'après la formulation variationnelle du problème de Dirichlet classique on a :

$$\int_{\Omega_\omega} \nabla z_\pi \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega_\pi} \nabla z_\pi \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega_\pi} f_\pi \varphi.$$

Comme

$$\int_{\Omega_\omega} \nabla z_\pi \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega_\omega} \nabla(z_\pi - G_\omega) \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega_\omega} \nabla G_\omega \cdot \nabla \varphi,$$

on a d'une part

$$\int_{\Omega_\omega} \nabla(z_\pi - G_\omega) \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega_\omega} \tilde{f}_\pi \varphi - \int_{\Omega_\omega} \nabla G_\omega \cdot \nabla \varphi$$

avec $z_\pi - G_\omega \in H_0^1(\Omega_\omega)$,

et d'autre part

$$\int_{\Omega_\omega} \nabla z_\omega \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega_\omega} f_\omega \varphi$$

avec $z_\omega \in H_0^1(\Omega_\omega)$.

Cela implique que

$$\int_{\Omega_\omega} \nabla(z_\pi - z_\omega - G_\omega) \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega_\omega} (\tilde{f}_\pi - f_\omega) \varphi - \int_{\Omega_\omega} \nabla G_\omega \cdot \nabla \varphi,$$

avec $z_\pi - z_\omega - G_\omega \in H_0^1(\Omega_\omega)$.

Soit $\varphi = z_\pi - z_\omega - G_\omega$, on obtient grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\omega} |\nabla(z_\pi - z_\omega - G_\omega)|^2 &\leq \int_{\Omega_\omega} |\tilde{f}_\pi - f_\omega| |z_\pi - z_\omega - G_\omega| + \int_{\Omega_\omega} |\nabla G_\omega| |\nabla(z_\pi - z_\omega - G_\omega)| \\ &\leq C_{\Omega_\omega} \|\tilde{f}_\pi - f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} \sqrt{\int_{\Omega_\omega} |\nabla(z_\pi - z_\omega - G_\omega)|^2} \\ &\quad + \sqrt{\int_{\Omega_\omega} |\nabla G_\omega|^2} \sqrt{\int_{\Omega_\omega} |\nabla(z_\pi - z_\omega - G_\omega)|^2}. \end{aligned}$$

On a désigné par C_{Ω_ω} la constante de Poincaré de l'ouvert Ω_ω . Or, il existe une constante C indépendante de ω telle que $C_{\Omega_\omega} \leq C$.

Finalement on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{\Omega_\omega} |\nabla(z_\pi - z_\omega - G_\omega)|^2} &\leq C \|\tilde{f}_\pi - f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} + \sqrt{\int_{\Omega_\omega} |\nabla G_\omega|^2} \\ &\leq C \|\tilde{f}_\pi - f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} + C \|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)} = 0$$

grâce au lemme suivant :

Lemme 4.1.3. *Si $g_\omega = Tr(z_\pi)$ sur Γ_ω^- où $z_\pi \in H_0^1(\Omega_\pi)$ alors*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)} = 0.$$

Démonstration. D'après le théorème de trace il existe C indépendante de ω telle

que

$$\|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)} \leq C \|z_\pi\|_{H_0^1(\Omega_\pi)}.$$

Notons que la constante C dépend de la norme lipschitzienne donc elle est indépendante de ω .

Comme $D(\Omega_\pi)$ est dense dans $H_0^1(\Omega_\pi)$, il existe alors $(\psi_k)_{k \geq 0}$ une suite de $C_0^\infty(\Omega_\pi)$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_\pi - \psi_k\|_{H_0^1(\Omega_\pi)} = 0.$$

Soit k fixé : il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $\pi - \omega < \epsilon$, alors $Supp \psi_k \subset \Omega_\omega$. On en déduit

$$\|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)} = \|Tr(z_\pi - \psi_k)\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)}$$

On obtient

$$\limsup_{\omega \rightarrow \pi} \|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)} \leq C \|z_\pi - \psi_k\|_{H_0^1(\Omega_\pi)},$$

d'où

$$\limsup_{\omega \rightarrow \pi} \|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)} = 0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.1.3 et du théorème 4.0.1. □

□

Remarque 4.1.4.

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Delta u_\omega - \Delta u_\pi\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

En effet,

On a d'après l'inégalité de Poincaré

$$\|z_\omega - z_\pi - G_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} \leq C \|\nabla(z_\omega - z_\pi - G_\omega)\|_{L^2(\Omega_\omega)}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\Delta u_\omega - \Delta u_\pi\|_{L^2(\Omega_\omega)} &= \|\Delta u_\omega - \Delta u_\pi - G_\omega + G_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} \\ &\leq C \|\nabla(z_\omega - z_\pi - G_\omega)\|_{L^2(\Omega_\omega)} + \|G_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} \\ &\leq C \|\tilde{f}_\pi - f_\omega\|_{L^2(\Omega_\omega)} + C \|g_\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\omega^-)}. \end{aligned}$$

4.2 La preuve du théorème 4.0.2

Comme dans le chapitre précédent on va traiter deux cas c'est-à-dire pour les cas $k = 1$ et $k = 2$. On obtient le résultat final par linéarité.

4.2.1 Cas $k = 1$

Le théorème 4.0.2, dans ce cas, devient :

Théorème 4.2.1. *Avec les notations précédentes on a*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_{\omega}^1 = \frac{1}{4\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, y>0} f_{\pi}(x, y) y \left\{ \frac{1}{2}((x^2 + y^2) - 1) - \ln(x^2 + y^2) \right\} dx dy = a_{\pi}^1 = \frac{\partial u_{\pi}}{\partial y}(0, 0). \quad (4.2.1)$$

Démonstration. La première partie de l'égalité (4.2.1) se démontre de la façon suivante.

D'après (3.1.13) on a

$$a_{\omega}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\omega}} v_{\omega}(s, \theta) (s^{\frac{\pi}{\omega}} - s^{-\frac{\pi}{\omega}}) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta s ds d\theta. \quad (4.2.2)$$

On choisit $z_{1,\omega}$ tel que

$$\Delta z_{1,\omega} = (s^{\frac{\pi}{\omega}} - s^{-\frac{\pi}{\omega}}) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta$$

et $z_{1,\omega} = 0$ sur $\partial\Omega_{\omega}$.

Un calcul simple donne

$$z_{1,\omega} = \left\{ \frac{1}{4(1 + \frac{\pi}{\omega})} (s^{2+\frac{\pi}{\omega}} - s^{\frac{\pi}{\omega}}) - \frac{1}{4(1 - \frac{\pi}{\omega})} (s^{2-\frac{\pi}{\omega}} - s^{\frac{\pi}{\omega}}) \right\} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta.$$

Alors

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\omega}} v_{\omega}(s, \theta) (s^{\frac{\pi}{\omega}} - s^{-\frac{\pi}{\omega}}) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta s ds d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\omega}} v_{\omega}(s, \theta) \Delta z_{1,\omega}(s, \theta) s ds d\theta.$$

Grâce au théorème de Green on obtient

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\omega}} v_{\omega}(s, \theta) \Delta z_{1,\omega}(s, \theta) s ds d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\omega}} \nabla v_{\omega}(s, \theta) \cdot \nabla z_{1,\omega}(s, \theta) s ds d\theta \quad (4.2.3)$$

car $v_{\omega} = 0$ sur $\partial\Omega_{\omega}$.

Donc

$$\begin{aligned}
(4.2.3) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega_\omega} \nabla v_\omega(s, \theta) \cdot \vec{n} z_{1,\omega}(s, \theta) d\Sigma_\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} \Delta v_\omega(s, \theta) z_{1,\omega}(s, \theta) s ds d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} \Delta v_\omega(s, \theta) z_{1,\omega}(s, \theta) s ds d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} f_{1,\omega}(s, \theta) z_{1,\omega}(s, \theta) s ds d\theta
\end{aligned}$$

car $z_{1,\omega} = 0$ sur $\partial\Omega_\omega$.

Lemme 4.2.2. *On a*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|f_{1,\omega} - f_{1,\pi}\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|z_{1,\omega} - z_{1,\pi}\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0 \quad (4.2.5)$$

avec

$$\begin{aligned}
f_{1,\pi}(s, \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\pi(s, \sigma) \sin \sigma d\sigma \sin \theta \\
z_{1,\pi}(s, \theta) &= \left(\frac{1}{8}(s^2 - 1) - \frac{1}{4} \ln s^2 \right) s \sin \theta
\end{aligned}$$

Démonstration.

1-La preuve de (4.2.4) résulte de

$$\begin{aligned}
f_{1,\omega}(s, \theta) - f_{1,\pi}(s, \theta) &= \frac{2}{\omega} \int_0^\omega (f_\omega(s, \sigma) - f_\pi(s, \sigma)) \sin \frac{\pi}{\omega} \sigma d\sigma \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\
&+ \int_0^\omega f_\pi(s, \sigma) \left\{ \frac{2}{\omega} \sin \frac{\pi}{\omega} \sigma \sin \frac{\pi}{\omega} \theta - \frac{2}{\pi} \sin \sigma \sin \theta \right\} d\sigma \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_\omega^\pi f_\pi(s, \sigma) \sin \sigma d\sigma \sin \theta.
\end{aligned}$$

On vérifie que chacun des trois termes ci-dessus converge vers 0 dans $L^2(\Omega_\omega)$ quand $\omega \rightarrow \pi$, le premier parce que $\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|f_\omega - f_\pi\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0$ par hypothèse, les autres par convergence dominée.

2-La preuve (4.2.5) résulte de la majoration

$$|z_{1,\omega}(s, \theta)| \leq \frac{1}{8}(1 - s^2) + \frac{1}{2},$$

valable pour tous $s \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\omega \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$, et du théorème de convergence dominée de Lebesgue. \square

Alors d'après le lemme 4.2.2 on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi f_{1,\pi}(s, \theta) \left\{ \frac{s}{8}(s^2 - 1) - \frac{s}{4} \ln s^2 \right\} \sin \theta s ds d\theta. \quad (4.2.6)$$

D'après la définition de $f_{1,\pi}$ on a

$$(4.2.6) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\pi(s, \sigma) \sin \sigma d\sigma \sin \theta \right) \left\{ \frac{s}{8}(s^2 - 1) - \frac{s}{4} \ln s^2 \right\} \sin \theta s ds d\theta \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, y>0} f_\pi(x, y) y \left\{ \frac{1}{2}((x^2 + y^2) - 1) - \ln(x^2 + y^2) \right\} dx dy.$$

Passons maintenant à la démonstration de la deuxième partie de l'égalité (4.2.1). D'après (4.2.2) on a

$$a_\omega^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\omega \int_0^1 v_\omega(s, \sigma) (s^{\frac{\pi}{\omega}} - s^{\frac{-\pi}{\omega}}) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta s ds d\sigma \\ = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} v_\omega(x, y) G_\omega^1(x, y) dx dy,$$

où $G_\omega^1(x, y) = (r^{\frac{\pi}{\omega}} - r^{\frac{-\pi}{\omega}}) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta$.

On sait que $\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^1 = a_\pi^1$, où a_π^1 est définie par (4.0.1).

Montrons que

$$a_\pi^1 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\pi} v_\pi(x, y) G_\pi^1(x, y) dx dy. \quad (4.2.7)$$

Pour cela, on note provisoirement \tilde{a}_π^1 le membre de droite de (4.2.7). Alors on a

$$|a_\omega^1 - \tilde{a}_\pi^1| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\pi \setminus \Omega_\omega} |v_\pi(x, y) G_\pi^1(x, y)| dx dy \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} |v_\pi(x, y) - v_\omega(x, y)| |G_\omega^1(x, y)| dx dy \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\pi} |v_\pi(x, y)| |G_\pi^1(x, y) - G_\omega^1(x, y)| dx dy.$$

Comme $G_\pi^1 = O(\frac{1}{s}) \in L^p$ pour tout $p < 2$, comme $v_\pi \in H_z^2$, qui implique $v_\pi \in L^q$ pour tout $q \geq 2$, alors $v_\pi G_\pi^1 \in L^1$ et par conséquent

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\pi \setminus \Omega_\omega} |v_\pi(x, y) G_\pi^1(x, y)| dx dy = 0.$$

Comme $v_\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow \pi} v_\pi$ dans L^q pour tout $2 \leq q < +\infty$, alors

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} |v_\pi(x, y) - v_\omega(x, y)| |G_\omega^1(x, y)| dx dy \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} |v_\pi(x, y) - v_\omega(x, y)|^4 dx dy \right)^{\frac{1}{4}} \\ \times \left(\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} |G_\omega^1(x, y)|^{\frac{4}{3}} dx dy \right)^{\frac{3}{4}}.$$

On a

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} |G_\omega^1(x, y)|^{\frac{4}{3}} dx dy)^{\frac{3}{4}} \leq C \left(\int_0^1 s^{\frac{-3\pi}{\omega}+1} ds \right)^{\frac{3}{4}} = C,$$

où C est une constante indépendante de ω , car $2\omega > \frac{4\pi}{3}$.

Finalement on obtient

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\omega} |v_\pi(x, y) - v_\omega(x, y)| |G_\omega^1(x, y)| dx dy = 0.$$

On a $\omega > \frac{2\pi}{3}$, alors

$$|G_\pi^1 - G_\omega^1| = O\left(\frac{1}{s^{\frac{\pi}{\omega}}}\right) \leq \frac{Cst}{s^{\frac{3}{2}}},$$

et donc

$$|v_\pi| |G_\pi^1 - G_\omega^1| \leq Cst \frac{|v_\pi|}{s^{\frac{3}{2}}} \in L^1.$$

Grâce au théorème de convergence dominée on déduit que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\pi} |v_\pi(x, y)| |G_\pi^1(x, y) - G_\omega^1(x, y)| dx dy = 0.$$

On a donc bien

$$a_\pi^1 = \lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^1 = \tilde{a}_\pi^1,$$

ce qui prouve (4.2.7).

Il reste à montrer que $a_\pi^1 = \frac{\partial u_\pi}{\partial y}(0, 0)$. Pour cela on pose $\Omega_{\pi, \epsilon} = \Omega_\pi \setminus D(0, \epsilon)$ et

$$a_{\pi, \epsilon}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi, \epsilon}} \Delta u_\pi(x, y) G_\pi^1(x, y),$$

de sorte que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a_{\pi, \epsilon}^1 = a_\pi^1.$$

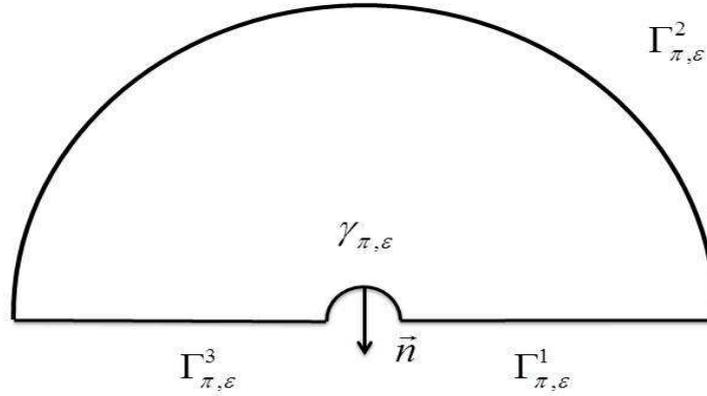


Figure 4.3 – L'ouvert $\Omega_{\pi, \epsilon}$

En appliquant le théorème de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
 a_{\pi, \epsilon}^1 &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi, \epsilon}} \Delta u_{\pi}(x, y) G_{\pi}^1(x, y) dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\partial \Omega_{\pi, \epsilon}} \nabla u_{\pi}(x, y) \cdot \vec{n} G_{\pi}^1(x, y) d\Sigma \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi, \epsilon}} \nabla u_{\pi}(x, y) \cdot \nabla G_{\pi}^1(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

Comme

1- $G_{\pi}^1 = 0$ sur $\Gamma_{\pi, \epsilon}^1$, sur $\Gamma_{\pi, \epsilon}^3$ et sur $\Gamma_{\pi, \epsilon}^2$,
 2- $u_{\pi} = 0$ au voisinage de $\Gamma_{\pi, \epsilon}^2$, par hypothèse,
 on a

$$\begin{aligned}
 a_{\pi, \epsilon}^1 &= -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi, \epsilon}} \nabla u_{\pi}(x, y) \cdot \nabla G_{\pi}^1(x, y) dx dy \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\nabla u_{\pi}(\epsilon, \sigma) \cdot \begin{pmatrix} -\cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{pmatrix}}_{-\frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial \rho}} \underbrace{G_{\pi}^1(\epsilon, \sigma)}_{(\epsilon - \frac{1}{\epsilon}) \sin \sigma} \epsilon d\sigma. \tag{4.2.8}
 \end{aligned}$$

Le terme de bord est égal à

$$-\epsilon^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u_\pi(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \sin \sigma d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u_\pi(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \sin \sigma d\sigma.$$

Or

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u_\pi(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \sin \sigma d\sigma = 0 \quad \text{car} \quad \left| \frac{\partial u_\pi}{\partial s} \right| \in L^\infty.$$

Pour la deuxième intégrale on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u_\pi(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \sin \sigma d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u_\pi(0, \sigma)}{\partial s} \sin \sigma d\sigma. \quad (4.2.9)$$

Ce résultat est justifié car $\nabla u_\pi \in H^3$, donc lipschitzienne, c'est-à-dire

$$|\nabla u_\pi(\epsilon, \sigma) - \nabla u_\pi(0, \sigma)| \leq Cte \epsilon.$$

Puisque

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos \sigma \frac{\partial}{\partial x} + \sin \sigma \frac{\partial}{\partial y},$$

on obtient

$$\begin{aligned} (4.2.9) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u_\pi(0, 0)}{\partial x} \cos \sigma \sin \sigma d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u_\pi(0, 0)}{\partial y} \sin^2 \sigma d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_\pi(0, 0)}{\partial y}. \end{aligned}$$

L'autre terme dans (4.2.8) est égal à

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi, \epsilon}} \nabla u_\pi(x, y) \cdot \nabla G_\pi^1(x, y) dx dy \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{\partial \Omega_{\pi, \epsilon}} u_\pi(x, y) \nabla G_\pi^1(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) d\Sigma(x, y) + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi, \epsilon}} u_\pi(x, y) \Delta G_\pi^1(x, y) dx dy}_{= 0 \text{ car } \Delta G_\pi^1 = 0} \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_\pi(\epsilon, \sigma) \nabla G_\pi^1(\epsilon, \sigma) \cdot \begin{pmatrix} -\cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{pmatrix} \epsilon d\sigma \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial u_\pi}{\partial y}(0, 0) \epsilon \sin \sigma + O(\epsilon^2) \right) \left(1 + \frac{1}{\epsilon^2} \right) \sin \sigma \epsilon d\sigma. \end{aligned}$$

Au passage à la limite on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi, \epsilon}} \nabla u_{\pi}(x, y) \cdot \nabla G_{\pi}^1(x, y) dx dy \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_{\pi}}{\partial y}(0, 0).$$

Finalement on a montré que

$$a_{\pi}^1 = \frac{\partial u_{\pi}}{\partial y}(0, 0).$$

□

Le théorème 4.2.1 est entièrement démontré.

4.2.2 Cas $k = 2$

Le théorème 4.0.2, dans ce cas, devient :

Théorème 4.2.3. *Avec les notations précédentes on a*

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \pi} a_{\omega}^2 &= \frac{1}{4\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, y > 0} f_{\pi}(x, y) xy \left\{ \frac{1}{3}((x^2 + y^2) - 1) - \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - 1 \right) \right\} dx dy \\ &= a_{\pi}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{\pi}}{\partial x \partial y}(0, 0). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Démonstration. La première partie de l'égalité (4.2.10) se démontre de la façon suivante.

D'après (3.1.18) on a

$$a_{\omega}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\omega}} v_{\omega}(s, \theta) (s^{\frac{2\pi}{\omega}} - s^{-\frac{2\pi}{\omega}}) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta s ds d\theta. \quad (4.2.11)$$

On choisit $z_{2, \omega}$ tel que

$$\Delta z_{2, \omega} = (s^{\frac{2\pi}{\omega}} - s^{-\frac{2\pi}{\omega}}) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta,$$

et $z_{2, \omega} = 0$ sur $\partial\Omega_{\omega}$.

Un calcul simple donne

$$z_{2, \omega} = \left\{ \frac{1}{4(1 + \frac{2\pi}{\omega})} (s^{2 + \frac{2\pi}{\omega}} - s^{\frac{2\pi}{\omega}}) - \frac{1}{4(1 - \frac{2\pi}{\omega})} (s^{2 - \frac{2\pi}{\omega}} - s^{\frac{2\pi}{\omega}}) \right\} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta.$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} v_\omega(s, \theta) (s^{\frac{2\pi}{\omega}} - s^{-\frac{2\pi}{\omega}}) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta s ds d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} v_\omega(s, \theta) \Delta z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta.$$

Grâce au théorème de Green on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} v_\omega(s, \theta) \Delta z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} \nabla v_\omega(s, \theta) \cdot \nabla z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta \quad (4.2.12)$$

car $v_\omega = 0$ sur $\partial\Omega_\omega$. On en déduit

$$\begin{aligned} (4.2.12) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} \nabla v_\omega(s, \theta) \cdot \nabla z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_\omega} \nabla v_\omega(s, \theta) \cdot \vec{n} z_{2,\omega}(s, \theta) d\Sigma_\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} \Delta v_\omega(s, \theta) z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} \Delta v_\omega(s, \theta) z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} f_{2,\omega}(s, \theta) z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

car $z_\omega = 0$ sur $\partial\Omega_\omega$.

Comme $\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|f_{2,\omega} - f_{2,\pi}\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0$ et $\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|z_{2,\omega} - z_{2,\pi}\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0$ (ce résultat se démontre exactement comme dans le cas $k = 1$). Cela permet de déduire que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{x^2+y^2 \leq 1, y>0} f_\pi(x, y) xy \left\{ \frac{1}{3}((x^2 + y^2) - 1) - \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - 1\right) \right\} dx dy$$

Passons maintenant à la démonstration de la deuxième partie de l'égalité (4.2.10). D'après (4.2.11) on a

$$\begin{aligned} a_\omega^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\omega \int_0^1 v_\omega(s, \sigma) (s^{\frac{2\pi}{\omega}} - s^{-\frac{2\pi}{\omega}}) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta s ds d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} v_\omega(x, y) G_\omega^2(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

où $G_\omega^1(x, y) = (r^{\frac{2\pi}{\omega}} - r^{-\frac{2\pi}{\omega}}) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta$.

On sait que $\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^2 = a_\pi^2$, où a_π^2 est définie par (4.0.3).

Montrons que

$$a_\pi^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\pi} v_\pi(x, y) G_\pi^2(x, y) dx dy. \quad (4.2.14)$$

Pour cela, on note provisoirement \tilde{a}_π^2 le membre de droite de (4.2.14). D'après

(4.2.13) on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} v_\omega(x, y) G_\omega^2(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} f_{2,\omega}(s, \theta) z_{2,\omega}(s, \theta) s ds d\theta \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\pi} v_\pi(x, y) G_\pi^2(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\pi} f_{2,\pi}(s, \theta) z_{2,\pi}(s, \theta) s ds d\theta.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}|a_\omega^2 - \tilde{a}_\pi^2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\pi \setminus \Omega_\omega} |f_{2,\pi}(x, y) z_{2,\pi}(x, y)| dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\omega} |f_{2,\pi}(x, y) - f_{2,\omega}(x, y)| |z_{2,\omega}(x, y)| dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\pi} |f_{2,\pi}(x, y)| |z_{2,\pi}(x, y) - z_{2,\omega}(x, y)| dx dy.\end{aligned}$$

Grâce au théorème de convergence dominée on déduit que

$$a_\pi^2 = \lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^2 = \tilde{a}_\pi^2.$$

Ce qui prouve (4.2.14).

Il reste à montrer que $a_\pi^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_\pi}{\partial x \partial y}(0, 0)$, pour cela on pose (comme dans le cas précédent) $\Omega_{\pi,\epsilon} = \Omega_\pi \setminus D(0, \epsilon)$ et

$$a_{\pi,\epsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\pi,\epsilon}} \Delta u_\pi(x, y) G_\pi^2(x, y) dx dy,$$

de sorte que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a_{\pi,\epsilon}^2 = a_\pi^2.$$

En appliquant le théorème de Green, on obtient

$$\begin{aligned}a_{\pi,\epsilon}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\pi,\epsilon}} \Delta u_\pi(x, y) G_\pi^2(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_{\pi,\epsilon}} \nabla u_\pi(x, y) \cdot \vec{n} G_\pi^2(x, y) d\Sigma \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\pi,\epsilon}} \nabla u_\pi(x, y) \cdot \nabla G_\pi^2(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Comme

- 1- $G_\pi^2 = 0$ sur $\Gamma_{\pi,\epsilon}^1$ sur $\Gamma_{\pi,\epsilon}^3$ et sur $\Gamma_{\pi,\epsilon}^2$,
- 2- $u_\pi = 0$ au voisinage de $\Gamma_{\pi,\epsilon}^2$ par hypothèse,

on a

$$\begin{aligned}
a_{\pi,\epsilon}^2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\pi,\epsilon}} \nabla u_{\pi}(x,y) \cdot \nabla G_{\pi}^2(x,y) dx dy \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\nabla u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}_{-\frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial \rho}} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{pmatrix} \underbrace{G_{\pi}^2(\epsilon, \sigma)}_{(\epsilon^2 - \frac{1}{\epsilon^2}) \sin 2\sigma} \epsilon d\sigma
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Le terme de bord est égal à

$$-\epsilon^3 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \sin 2\sigma d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \frac{1}{\epsilon} \sin 2\sigma d\sigma.$$

Or

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^3 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \sin 2\sigma d\sigma = 0 \quad \text{car} \quad \left| \frac{\partial u_{\pi}}{\partial s} \right| \in L^{\infty},$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \frac{1}{\epsilon} \sin 2\sigma d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial s} - \frac{\partial u_{\pi}(0, \sigma)}{\partial s} \right] \frac{1}{\epsilon} \sin 2\sigma d\sigma.$$

Au passage à la limite on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial u_{\pi}(\epsilon, \sigma)}{\partial s} \frac{1}{\epsilon} \sin 2\sigma d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0, \sigma)}{\partial s^2} \sin 2\sigma d\sigma. \tag{4.2.16}$$

On rappelle qu'en coordonnées polaires, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \cos^2 \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \cos \sigma \sin \sigma \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \sin^2 \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{4.2.17}$$

En injectant (4.2.17) dans (4.2.16), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0, \sigma)}{\partial s^2} \sin 2\sigma d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0, 0)}{\partial x^2} \sin 2\sigma \cos^2 \sigma d\sigma \\
&+ 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0, 0)}{\partial x \partial y} \cos \sigma \sin \sigma \sin 2\sigma d\sigma \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0, 0)}{\partial y^2} \sin^2 \sigma \sin 2\sigma d\sigma \\
&= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0, 0)}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

L'autre terme dans (4.2.15) est égal à

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\pi,\epsilon}} \nabla u_{\pi}(x,y) \cdot \nabla G_{\pi}^2(x,y) dx dy \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_{\pi,\epsilon}} u_{\pi}(x,y) \nabla G_{\pi}^2(x,y) \cdot \vec{n}(x,y) d\Sigma(x,y) + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\pi,\epsilon}} u_{\pi}(x,y) \Delta G_{\pi}^2(x,y) dx dy}_{= 0 \text{ car } \Delta G_{\pi}^2 = 0} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u_{\pi}(\epsilon, \sigma) \nabla G_{\pi}^2(\epsilon, \sigma) \cdot \begin{pmatrix} -\cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{pmatrix} \epsilon d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u_{\pi}}{\partial y}(0,0) \epsilon \sin \sigma + \epsilon^2 \frac{1}{2} \sin 2\sigma \frac{\partial^2 u_{\pi}(0,0)}{\partial x \partial y} + O(\epsilon^2) \right) \left[-\left(2\epsilon + \frac{2}{\epsilon^3}\right) \right] \sin 2\sigma \epsilon d\sigma.
\end{aligned}$$

Au passage à la limite on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{\pi,\epsilon}} \nabla u_{\pi}(x,y) \cdot \nabla G_{\pi}^2(x,y) dx dy \right) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0,0)}{\partial x \partial y}. \quad (4.2.19)$$

On déduit de (4.2.18) et (4.2.19)

$$a_{\pi}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{\pi}(0,0)}{\partial x \partial y}.$$

□

Le théorème 4.2.3 est entièrement démontré.

4.3 La preuve du théorème 4.0.3

On veut montrer que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|u_{\omega} - u_{\pi}\|_{H^2(\Omega_{\omega})} = 0.$$

Rappelons que, quand $\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ et $r \leq 1$, on a

$$u_{\omega} = u_{1,\omega} + u_{2,\omega} + A_{\omega},$$

où

$$\begin{aligned}
u_{1,\omega} &= a_{\omega}^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta, \\
u_{2,\omega} &= a_{\omega}^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta,
\end{aligned}$$

et A_ω de régularité H^4 si $\omega < \pi$.
On sait d'après le théorème 4.0.2 que

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^1 &= a_\pi^1 \\ \lim_{\omega \rightarrow \pi} a_\omega^2 &= a_\pi^2.\end{aligned}$$

La preuve du théorème 4.0.3 est alors basée sur les lemmes suivants :

Lemme 4.3.1. *Quand $\omega \rightarrow \pi$ et $r \leq 1$*

$$u_{1,\omega} \rightarrow u_{1,\pi} \text{ dans } H_{loc}^2(\Omega_\omega) \quad (4.3.1)$$

$$u_{2,\omega} \rightarrow u_{2,\pi} \text{ dans } H_{loc}^2(\Omega_\omega) \quad (4.3.2)$$

Démonstration. Preuve de (4.3.2)

Les convergences dans L^2 et H^1 sont faciles à montrer, on passe directement à H^2 .
Un calcul simple donne

$$\partial_r^2 u_{2,\omega} = a_\omega^2 \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) r^{\frac{2\pi}{\omega} - 2} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta. \quad (4.3.3)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r u_{2,\omega} + \frac{1}{r^2} \partial_r^2 u_{2,\omega} = a_\omega^2 \frac{2\pi}{\omega} \left(1 - \frac{2\pi}{\omega} \right) r^{\frac{2\pi}{\omega} - 2} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta. \quad (4.3.4)$$

$$\frac{1}{r} \partial_{r\theta}^2 u_{2,\omega} - \frac{1}{r^2} \partial_\theta u_{2,\omega} = a_\omega^2 \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) r^{\frac{2\pi}{\omega} - 2} \cos \frac{2\pi}{\omega} \theta. \quad (4.3.5)$$

Commençons avec le terme (4.3.3).

On a

(a) $\partial_r^2 u_{2,\omega} \xrightarrow{p.p} \partial_r^2 u_{2,\pi}$ quand $\omega \rightarrow \pi$.

(b) $|\partial_r^2 u_{2,\omega}| \leq C$, car $\frac{2\pi}{\omega} - 2 \geq 0$, donc $\left| r^{\frac{2\pi}{\omega} - 2} \sin \frac{2\pi}{\omega} \right| \leq 1$ quand ω proche de π .

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \partial_r^2 u_{2,\omega} - \partial_r^2 u_{2,\pi} \right\|_{H^2} = 0.$$

Les autres termes s'estiment eux aussi de la même façon.

Finalement on obtient

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|u_{2,\omega} - u_{2,\pi}\|_{H^2} = 0.$$

Preuve de (4.3.1).

Un calcul simple donne

$$\partial_r^2 u_{1,\omega} = a_\omega^1 \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1 \right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta. \quad (4.3.6)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r u_{1,\omega} + \frac{1}{r^2} \partial_r^2 u_{1,\omega} = a_\omega^1 \frac{\pi}{\omega} \left(1 - \frac{\pi}{\omega} \right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta. \quad (4.3.7)$$

$$\frac{1}{r} \partial_{r\theta}^2 u_{1,\omega} - \frac{1}{r^2} \partial_\theta u_{1,\omega} = a_\omega^1 \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1 \right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \cos \frac{1}{\omega} \pi \theta. \quad (4.3.8)$$

Commençons avec le terme (4.3.6).

On déduit, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^\omega \int_0^1 \left| \partial_r^2 u_{1,\omega} - \partial_r^2 u_{1,\pi} \right|^2 r dr d\theta = \int_0^\omega \int_0^1 \left| \partial_r^2 u_{1,\omega} \right|^2 r dr d\theta \leq C(\pi - \omega) \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi,$$

C est une constante indépendante de ω .

D'une manière similaire, on montre que

$$\int_0^\omega \int_0^1 \left| \frac{1}{r} \partial_r u_{1,\omega} + \frac{1}{r^2} \partial_r^2 u_{1,\omega} \right|^2 r dr d\theta \leq C(\pi - \omega) \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi,$$

$$\int_0^\omega \int_0^1 \left| \frac{1}{r} \partial_{r\theta}^2 u_{1,\omega} - \frac{1}{r^2} \partial_\theta u_{1,\omega} \right|^2 r dr d\theta \leq C(\pi - \omega) \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

Finalement on obtient

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|u_{1,\omega} - u_{1,\pi}\|_{H_{loc}^2} = 0.$$

□

Ce qui termine la preuve du lemme 4.3.1.

Lemme 4.3.2. *Quand $\omega \rightarrow \pi$ et $r \leq 1$ on a*

$$A_\omega \rightarrow A_\pi \text{ dans } H_{loc}^2(\Omega_\omega) \quad (4.3.9)$$

Démonstration.

Remarque 4.3.3. *Grâce à la remarque 4.1.4 et au théorème 4.0.1 on a*

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Delta A_\omega - \Delta A_\pi\|_{L^2(\Omega_\omega)} &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \pi} \|A_\omega - A_\pi\|_{H^1(\Omega_\omega)} &= 0. \end{aligned}$$

Rappelons (chapitre 3) que

$$\begin{aligned} u_\omega(r, \theta) = & - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ & - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ & + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^1 b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta, \end{aligned}$$

où

$$b_{k,\omega}(s) = \int_0^\omega v_\omega(s, \theta) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta d\theta.$$

Remarque 4.3.4. D'après le théorème 4.0.1 $v_\omega \rightarrow v_\pi$ dans H^1 quand $\omega \rightarrow \pi$ donc $b_{k,\omega} \rightarrow b_{k,\pi}$ dans $L^2(sds)$ et dans $H^1(sds)$.

Pour montrer (4.3.9) on va distinguer les cas : $k = 1$, $k = 2$ et $k \geq 3$. Commençons avec le cas le plus difficile.

4.3.1 $k \geq 3$

On part de

$$\begin{aligned} A_\omega(r, \theta) = & - \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ & - \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\omega}{2k\pi} \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta. \end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega(r, \theta)}{\partial r^2} = & \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta + b_{k,\omega}(r) \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right) \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial A_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial \theta^2} = & \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{\omega} - 1 \right) \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_{2,\omega}}{\partial \theta} &= \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_r^1 b_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_0^r b_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-2} \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \right) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Pour montrer que $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2}$ converge vers $\frac{\partial^2 A_\pi}{\partial r^2}$ dans L^2 quand $\omega \rightarrow \pi$ on va procéder comme suit :

On écrit

$$\begin{aligned} b_{k,\omega}(s) &= \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\omega(s, \theta) \sin \frac{k\pi}{\omega} d\theta \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^\omega [v_\omega(s, \theta) - v_\pi(s, \theta)] \sin \frac{k\pi}{\omega} d\theta \\ &\quad + \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\pi(s, \theta) \sin \frac{k\pi}{\omega} d\theta \\ &= \gamma_{k,\omega}(s) + c_{k,\omega}(s). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\partial^2 A_\omega(r, \theta)}{\partial r^2} = \Gamma_{1,\gamma,c,\omega} + \Gamma_{2,\gamma,c,\omega} + \Gamma_{3,\omega},$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,\gamma,c,\omega} &= \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_r^1 \gamma_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &\quad + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_r^1 c_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &= \Gamma_{1,\gamma,\omega} + \Gamma_{1,c,\omega}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,\gamma,c,\omega} &= - \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_r^1 \gamma_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k\pi}{\omega} \right) \int_r^1 c_{k,\omega}(s) s^{\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

$$\Gamma_{3,\omega} = v_{3,\omega}.$$

D'après la remarque 4.3.4 on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|v_{3,\omega} - v_{3,\pi}\|_{L^2} = 0.$$

Il ne reste donc qu'à vérifier

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Gamma_{1,\gamma,c,\omega} - \Gamma_{1,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} &= 0. \\ \lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Gamma_{2,\gamma,c,\omega} - \Gamma_{2,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} &= 0.\end{aligned}$$

Pour $\Gamma_{1,\gamma,c,\omega}$ on part de :

$$\Gamma_{1,\gamma,c,\omega} - \Gamma_{1,\gamma,c,\pi} = \Gamma_{1,\gamma,\omega} + (\Gamma_{1,c,\omega} - \Gamma_{1,c,\pi}).$$

Le terme $\Gamma_{1,\gamma,\omega}$ est estimé en écrivant :

$$\begin{aligned}\int_0^\omega \int_0^1 |\Gamma_{1,\gamma,\omega}(r, \theta)|^2 r dr d\theta &= \int_0^\omega \int_0^1 \left| \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega}\right) \int_r^1 \gamma_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right|^2 r dr d\theta \\ &= C \int_0^1 \sum_{k=3}^{+\infty} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega}\right)^2 \left(\int_r^1 \gamma_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds \right)^2 r^2 \frac{k\pi}{\omega} - 4 r dr.\end{aligned}\tag{4.3.14}$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}\left(\int_r^1 \gamma_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds \right)^2 &\leq \left(\int_r^1 \gamma_{k,\omega}^2(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds \right) \left(\int_r^1 s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{\frac{k\pi}{\omega} - 2} \int_r^1 \gamma_{k,\omega}^2(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{2-\frac{k\pi}{\omega}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(4.3.14) &\leq C \int_0^1 \left| 1 - \frac{k\pi}{\omega} \right| \int_r^1 \gamma_{k,\omega}^2(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} r dr \\ &\leq C \sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 \gamma_{k,\omega}^2(s) s ds \\ &\leq C \int_{\Omega_\omega} |v_\omega(s, \theta) - v_\pi(s, \theta)|^2 s ds d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.\end{aligned}\tag{4.3.15}$$

Il reste le terme $\Gamma_{1,c,\omega} - \Gamma_{1,c,\pi}$.

On a

$$\Gamma_{1,c,\omega} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega}\right) \int_r^1 c_{k,\omega}(s) s^{-\frac{k\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta,\tag{4.3.16}$$

et en $\omega = \pi$

$$\Gamma_{1,c,\pi} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} (1 - k) \int_r^1 c_{k,\pi}(s) s^{-k+1} ds r^{k-2} \sin k\theta.\tag{4.3.17}$$

Dans la suite on écrit

$$\Gamma_{1,c,\omega} - \Gamma_{1,c,\pi} = (\Gamma_{1,c,\omega} - \Sigma_{1,c,\pi}) + (\Sigma_{1,c,\pi} - \Gamma_{1,c,\pi}),$$

où

$$\Sigma_{1,c,\pi} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2}(1-k) \int_r^1 c_{k,\pi}(s) s^{-k+1} ds r^{k-2} \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta.$$

On aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.3.5. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, on ait*

$$\int_0^\omega \left| \sum_k \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta \leq C(\pi - \omega) \sum_k k |\lambda_k|^2,$$

pour toute suite (λ_k) telle que $\sum_k k |\lambda_k|^2 < +\infty$.

Démonstration. La preuve de ce lemme se fait en deux étapes.

Première étape : si (λ_k) est une suite finie, alors

$$\int_0^\omega \left| \sum_k \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta \leq C(\pi - \omega)^2 \sum_k k^2 |\lambda_k|^2, \quad (4.3.18)$$

En effet, on part de

$$\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta = - \int_1^{\frac{\pi}{\omega}} k\theta \cos(kt\theta) dt,$$

et on écrit, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \left| \sum_k \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta &= \int_0^\omega \left| \int_1^{\frac{\pi}{\omega}} \sum_k k \lambda_k \theta \cos(kt\theta) dt \right|^2 d\theta \\ &\leq C(\pi - \omega) \int_0^\omega \int_1^{\frac{\pi}{\omega}} \left| \sum_k k \lambda_k \cos(kt\theta) \right|^2 dt d\theta. \end{aligned}$$

Comme $\omega \leq \frac{\pi}{t}$, à t fixé on a

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \left| \sum_k k \lambda_k \cos(kt\theta) \right|^2 d\theta &\leq \int_0^{\frac{\pi}{t}} \left| \sum_k k \lambda_k \cos(kt\theta) \right|^2 d\theta \\ &\leq \frac{\pi}{2t} \sum_k k^2 |\lambda_k|^2, \end{aligned}$$

par orthogonalité ; en intégrant de $t = 1$ à $t = \frac{\pi}{\omega}$, on obtient (4.3.18).

Deuxième étape :

On distingue, pour $\omega < \pi$ fixé, les valeurs de k telles que $k \leq \frac{1}{\pi - \omega}$ ($k \in E_1$) et celles telles que $k > \frac{1}{\pi - \omega}$ ($k \in E_2$). On écrit

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \left| \sum_k \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta &\leq 2 \int_0^\omega \left| \sum_{k \in E_1} \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta \\ &\quad + 2 \int_0^\omega \left| \sum_{k \in E_2} \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta. \end{aligned}$$

La première étape donne

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \left| \sum_{k \in E_1} \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta &\leq C(\pi - \omega)^2 \sum_{k \in E_1} k^2 |\lambda_k|^2 \\ &\leq (\pi - \omega) \sum_{k \in E_1} k |\lambda_k|^2, \end{aligned}$$

par définition de E_1 .

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \left| \sum_{k \in E_2} \lambda_k (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta) \right|^2 d\theta &\leq \int_0^\omega \left| \sum_{k \in E_2} \lambda_k \sin k\theta \right|^2 d\theta + 2 \int_0^\omega \left| \sum_{k \in E_2} \lambda_k \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right|^2 d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \left| \sum_{k \in E_2} \lambda_k \sin k\theta \right|^2 d\theta + 2 \int_0^\omega \left| \sum_{k \in E_2} \lambda_k \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \right|^2 d\theta \\ &\leq (\pi + \omega) \sum_{k \in E_2} |\lambda_k|^2 \\ &\leq 2\pi(\pi - \omega) \sum_{k \in E_2} k |\lambda_k|^2, \end{aligned}$$

par définition de E_2 .

Ce qui termine la preuve du Lemme 4.3.5. □

Lemme 4.3.6. *On a*

$$\int_0^\omega \int_0^1 \left(\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2} (1-k) \int_r^1 c_{k,\pi}(s) s^{-k+1} ds \right) r^{k-2} (\sin k\theta - \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta)^2 r dr d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi. \quad (4.3.19)$$

Démonstration. D'après le lemme 4.3.5 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$(4.3.19) \leq C(\pi - \omega) \int_0^1 \sum_{k=3}^{+\infty} k(1-k)^2 \left(\int_r^1 c_{k,\pi}(s) s^{-k+1} ds \right)^2 r^{2k-4} r dr. \quad (4.3.20)$$

Or

$$\begin{aligned} \left(\int_r^1 c_{k,\pi}(s) s^{-k+1} ds \right)^2 &\leq \int_r^1 c_{k,\pi}^2(s) \frac{ds}{s} \int_r^1 s^{-2k+3} ds \\ &\leq \frac{r^{4-2k}}{2k-4} \int_r^1 c_{k,\pi}^2(s) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Donc

$$(4.3.20) \leq C(\pi - \omega) \sum_{k=3}^{+\infty} k^2 \int_0^1 c_{k,\pi}^2(s) \frac{ds}{s} \leq C(\pi - \omega) \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

Car d'après le lemme 3.1.4 on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \geq 2} \int_0^1 c_{k,\pi}^2(s) s ds \leq C, \\ \sum_{k \geq 2} k^2 \int_0^1 c_{k,\pi}^2(s) \frac{ds}{s} \leq C \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \geq 2} k \int_0^1 c_{k,\pi}^2(s) \leq C \right.$$

□

Il reste à montrer que :

$$\Gamma_{1,c,\omega}(r, \theta) - \Sigma_{1,c,\pi}(r, \theta) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2 \text{ quand } \omega \rightarrow 0, \quad (4.3.21)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 \left\{ \int_r^1 [c_{k,\omega}(s) K_\omega(k, s, r) - c_{k,\pi}(s) K_\pi(k, s, r)] s ds \right\}^2 r dr \rightarrow 0, \quad (4.3.22)$$

où

$$K_\omega(k, s, r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\pi}{\omega} \right) s^{-\frac{k\pi}{\omega}} r^{\frac{k\pi}{\omega}-2}. \quad (4.3.23)$$

Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} [c_{k,\omega}(s) K_\omega(k, s, r) - c_{k,\pi}(s) K_\pi(k, s, r)] &= c_{k,\omega}(s) [K_\omega(k, s, r) - K_\pi(k, s, r)] \\ &\quad + [c_{k,\omega}(s) - c_{k,\pi}(s)] K_\pi(k, s, r). \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Lemme 4.3.7. *On a*

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_r^1 c_{k,\omega}(s) [K_\omega(k, s, r) - K_\pi(k, s, r)] s ds \right|^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi. \quad (4.3.25)$$

Démonstration. On a

$$(4.3.25) \leq \sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 \int_r^1 c_{k,\omega}^2(s) |K_\omega(k, s, r) - K_\pi(k, s, r)| s ds \int_r^1 |K_\omega(k, s, r) - K_\pi(k, s, r)| s ds r dr. \quad (4.3.26)$$

Or

$$\int_r^1 |K_\omega(k, s, r) - K_\pi(k, s, r)| s ds \leq C(\pi - \omega). \quad (4.3.27)$$

En effet, on part de

$$\int_r^1 \left| \left(\frac{k\pi}{\omega} - 1 \right) s^{-\frac{k\pi}{\omega}} r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} - (k-1) s^{-k} r^{k-2} \right| s ds.$$

On change la variable en posant $t = s/r$ et on obtient :

$$\int_1^{1/r} \left| \left(\frac{k\pi}{\omega} - 1 \right) t^{-(\frac{k\pi}{\omega}-1)} - (k-1) t^{-(k-1)} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \left| \left(\frac{k\pi}{\omega} - 1 \right) t^{-(\frac{k\pi}{\omega}-1)} - (k-1) t^{-(k-1)} \right| dt. \quad (4.3.28)$$

Puis on écrit :

$$\left(\frac{k\pi}{\omega} - 1 \right) t^{-(\frac{k\pi}{\omega}-1)} - (k-1) t^{-(k-1)} = \int_k^{\frac{k\pi}{\omega}} \frac{1 - (x-1) \ln t}{t^{x-1}} dx.$$

On a donc :

$$(4.3.28) \leq \int_1^{+\infty} dt \int_k^{\frac{k\pi}{\omega}} t^{1-x} dx,$$

car $(x-1) \ln t \geq 0$ pour $x \geq k \geq 3$ et $t \geq 1$, d'où le résultat.

On calcule alors :

$$(4.3.28) \leq \int_k^{\frac{k\pi}{\omega}} dx \int_1^{+\infty} t^{1-x} dt = \ln\left(\frac{\frac{k\pi}{\omega} - 2}{k - 2}\right).$$

On en déduit

$$\int_r^1 \left| \left(\frac{k\pi}{\omega} - 1 \right) s^{-\frac{k\pi}{\omega}} r^{\frac{k\pi}{\omega}-2} - (k-1) s^{-k} r^{k-2} \right| s ds \leq C(\pi - \omega) \text{ uniformément par rapport à } k \geq 3.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
(4.3.25) &\leq C(\pi - \omega) \sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 \int_r^1 c_{k,\omega}^2(s) |K_\omega(k, s, r) - K_\pi(k, s, r)| s ds r dr \\
&\leq C(\pi - \omega) \sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 c_{k,\omega}^2(s) s ds \int_0^s |K_\omega(k, s, r) - K_\pi(k, s, r)| r dr \\
&\leq C(\pi - \omega)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.3.8. *On a*

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 \left| \int_r^1 [c_{k,\omega}(s) - c_{k,\pi}(s)] K_\pi(k, s, r) s ds \right|^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi. \quad (4.3.29)$$

Démonstration. D'après Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
(4.3.29) &\leq C(1 - k)^2 \int_0^1 \int_r^1 |c_{k,\omega}(s) - c_{k,\pi}(s)|^2 s ds \left(\int_r^1 s^{1-2k} ds \right) r^{k-1} dr \\
&\leq C(k - 1) \int_0^1 \int_r^1 |c_{k,\omega}(s) - c_{k,\pi}(s)|^2 s ds r^{1-k} dr \\
&\leq C \sum_{k=3}^{+\infty} \int_0^1 |c_{k,\omega}(s) - c_{k,\pi}(s)|^2 s ds. \quad (4.3.30)
\end{aligned}$$

Comme

$$c_{k,\omega}(s) = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\pi(s, \sigma) \sin \frac{k\pi}{\omega} d\sigma = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v_\pi(s, \frac{\omega}{\pi}\theta) \sin k\theta d\theta,$$

on a

$$c_{k,\omega}(s) - c_{k,\pi}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[v_\pi(s, \frac{\omega}{\pi}\theta) - v_\pi(s, \theta) \right] \sin k\theta d\theta.$$

D'où d'après l'égalité de Parseval et le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
(4.3.30) &\leq C \int_0^1 \int_0^\pi \left| v_\pi(s, \frac{\omega}{\pi}\theta) - v_\pi(s, \theta) \right|^2 s ds d\theta \\
&\leq C \left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) \int_0^1 \int_0^\pi \int_{\frac{\omega}{\pi}\theta}^\theta \left| \frac{\partial v_\pi(s, \sigma)}{\partial \theta} \right|^2 \theta d\sigma d\theta s ds \\
&\leq C \left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) \left(\int_\sigma^{\frac{\pi}{\omega}\sigma} \theta d\theta \right) \int_0^1 \int_0^\pi \left| \frac{\partial v_\pi(s, \sigma)}{\partial \sigma} \right|^2 s ds d\sigma \\
&\leq C \left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme 4.3.8.

□

Cela implique

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Gamma_{1,c,\omega} - \Gamma_{1,c,\pi}\|_{L^2} = 0. \quad (4.3.31)$$

Donc d'après (4.3.31) et (4.3.15) on en déduit

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Gamma_{1,\gamma,c,\omega} - \Gamma_{1,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} = 0. \quad (4.3.32)$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Gamma_{2,\gamma,c,\omega} - \Gamma_{2,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} = 0. \quad (4.3.33)$$

Conclusion

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 A_\pi}{\partial r^2} \right\|_{L^2} = 0.$$

Les termes (4.3.11) et (4.3.12) sont estimés de la même façon. Finalement on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|A_\omega - A_\pi\|_{H^2} = 0.$$

4.3.2 $k = 1$

On part de

$$\begin{aligned} A_\omega(r, \theta) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{-\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta, \end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{-\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta + b_{1,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial A_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial \theta^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{-\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\omega}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{-\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

Examinons le terme $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2}$.
D'après (4.3.34) on a

$$\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2} = \Psi_{1,\omega} + \Psi_{2,\omega} + \Psi_{3,\omega}, \quad (4.3.37)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{1,\omega} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} - 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{-\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ \Psi_{2,\omega} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta. \\ \Psi_{3,\omega} &= b_{1,\omega}(r) \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \end{aligned}$$

On peut montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\|\Psi_{1,\omega}\|_{L^2} \leq C(\pi - \omega),$$

et par conséquent

$$\Psi_{1,\omega} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi. \quad (4.3.38)$$

D'après la remarque 4.3.4 on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Psi_{3,\omega} - \Psi_{3,\pi}\|_{L^2} = 0,$$

Il reste maintenant à étudier le terme $\Psi_{2,\omega}$. Pour ce faire, on va procéder comme dans le cas $k \geq 3$ c'est-à-dire on décompose :

$$\begin{aligned} b_{1,\omega}(s) &= \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\omega(s, \theta) \sin \frac{\pi}{\omega} d\theta \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^\omega [v_\omega(s, \theta) - v_\pi(s, \theta)] \sin \frac{\pi}{\omega} d\theta \\ &+ \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\pi(s, \theta) \sin \frac{k\pi}{\omega} d\theta \\ &= \gamma_{1,\omega}(s) + c_{1,\omega}(s). \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Alors

$$\Psi_{2,\omega} = \Psi_{2,\gamma,\omega} + \Psi_{2,c,\omega},$$

où

$$\begin{aligned}\Psi_{2,\gamma,\omega} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right) \int_0^r \gamma_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \\ \Psi_{2,c,\omega} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right) \int_0^r c_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta.\end{aligned}$$

On a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^\omega \int_0^1 |\Psi_{2,\gamma,\omega}(r, \theta)|^2 r dr d\theta &= C \left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right)^2 \int_0^1 \left(\int_0^r (\gamma_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds)^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}-3} dr\right. \\ &\leq C \int_{\Omega_\omega} |v_\omega(s, \theta) - v_\pi(s, \theta)|^2 s ds d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.\end{aligned}$$

où C une constante indépendante de ω .

Il reste le terme $\Psi_{2,c,\omega}$.

On a

$$\Psi_{2,c,\omega} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\omega} + 1\right) \int_0^r c_{1,\omega}(s) s^{\frac{\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta,$$

et pour $\omega = \pi$

$$\Psi_{2,c,\pi} = -\int_0^r c_{1,\pi}(s) s^2 ds r^{-3} \sin \theta.$$

Montrons que

$$\Psi_{2,c,\omega} - \Psi_{2,c,\pi} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

Pour ce faire on écrit

$$\Psi_{2,c,\omega} - \Psi_{2,c,\pi} = \Psi_{2,c,\omega} - \Phi_\omega + \Phi_\omega - \Psi_{2,c,\pi},$$

où

$$\Phi_\omega = -\int_0^r c_{1,\pi}(s) s^2 ds r^{-3} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta.$$

Lemme 4.3.9. *On a*

$$\int_0^\omega \int_0^1 |\Psi_{2,c,\pi}(r, \theta) - \Phi_\omega(r, \theta)|^2 r dr d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

Démonstration. Grâce à la majoration $|\sin x - \sin y| \leq C|x - y|$ pour tout x et y

dans \mathbb{R} on a

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \int_0^1 |\Psi_{2,c,\pi}(r, \theta) - \Phi_\omega(r, \theta)|^2 r dr d\theta &= \int_0^\omega \int_0^1 \left(\int_0^r c_{1,\pi}(s) s^2 ds \right)^2 r^{-3} \left(\sin \theta - \sin \frac{\pi}{\omega} \theta \right)^2 r dr d\theta \\ &\leq C(\pi - \omega)^2 \int_0^1 \left(\int_0^r c_{1,\pi}(s) s^2 ds \right)^2 r^{-5} dr \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^r c_{1,\pi}(s) s^2 ds \right)^2 r^{-5} dr &\leq \int_0^1 \int_0^r c_{1,\pi}^2(s) s^4 ds \left(\int_0^r ds \right) r^{-5} dr \\ &\leq C \int_0^1 c_{1,\pi}^2(s) s ds = C, \end{aligned}$$

où C une constante indépendante de ω .

Ceci achève la démonstration du lemme 4.3.9. □

Il reste à montrer :

$$\int_0^\omega \int_0^1 |\Psi_{2,c,\omega}(r, \theta) - \Phi_\omega(r, \theta)|^2 r dr d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^r [c_{1,\omega}(s) K_\omega(s, r) - c_{1,\pi}(s) K_\pi(s, r)] s ds \right\}^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi,$$

où

$$K_\omega(s, r) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\omega} \right) s^{\frac{\pi}{\omega}} r^{-\frac{\pi}{\omega}-2}.$$

Pour ce faire on écrit

$$\begin{aligned} [c_{1,\omega}(s) K_\omega(s, r) - c_{1,\pi}(s) K_\pi(s, r)] &= c_{1,\omega}(s) [K_\omega(s, r) - K_\pi(s, r)] \\ &\quad + [c_{1,\omega}(s) - c_{1,\pi}(s)] K_\pi(s, r). \end{aligned}$$

La suite de la démonstration repose sur les lemmes suivants :

Lemme 4.3.10. *On a*

$$\int_0^1 \left| \int_0^r c_{1,\omega}(s) [K_\omega(s, r) - K_\pi(s, r)] s ds \right|^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi. \quad (4.3.40)$$

Démonstration. On a

$$(4.3.40) \leq \int_0^1 \int_0^r c_{1,\omega}^2(s) |K_\omega(s, r) - K_\pi(s, r)| s ds \int_0^r |K_\omega(s, r) - K_\pi(s, r)| s ds r dr. \quad (4.3.41)$$

Or

$$\int_0^r |K_\omega(s, r) - K_\pi(s, r)| s ds \leq C(\pi - \omega).$$

En effet, par le changement de variable intégrale $t = \frac{s}{r}$, on obtient

$$\int_0^r \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\omega} \right) s^{\frac{\pi}{\omega}} r^{-\frac{\pi}{\omega}-2} - s r^{-3} \right) s ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\omega} \right) t^{\frac{\pi}{\omega}+1} - t^2 \right) dt \leq C(\pi - \omega).$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} (4.3.41) &\leq C(\pi - \omega) \int_0^1 c_{1,\omega}^2(s) s ds \int_s^1 |K_\omega(s, r) - K_\pi(s, r)| r dr \\ &\leq C(\pi - \omega)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 4.3.11. *On a*

$$\int_0^1 \left| \int_0^r [c_{1,\omega}(s) - c_{1,\pi}(s)] K_\pi(s, r) s ds \right|^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow 0.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 4.3.8. □

De ce qui précède on déduit alors que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 A_\pi}{\partial r^2} \right\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\pi}{\partial \theta^2} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\omega}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\pi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\pi}{\partial \theta} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

Finalement on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|A_\omega - A_\pi\|_{H^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

4.3.3 $k = 2$

On part de

$$A_\omega(r, \theta) = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \\ - \frac{\omega}{4\pi} \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta.$$

Un calcul simple donne

$$\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta + b_{2,\omega}(r) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta. \quad (4.3.42)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta \quad (4.3.43)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\omega}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \cos \frac{2\pi}{\omega} \theta \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} + 1 \right) \int_0^r b_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \cos \frac{2\pi}{\omega} \theta \quad (4.3.44)$$

Examinons le terme $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2}$.

Pour montrer que $\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2}$ converge vers $\frac{\partial^2 A_\pi}{\partial r^2}$ dans L^2 quand $\omega \rightarrow \pi$ on va procéder comme suit :

On écrit

$$b_{2,\omega}(s) = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\omega(s, \theta) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta d\theta \\ = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega [v_\omega(s, \theta) - v_\pi(s, \theta)] \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta d\theta \\ + \frac{2}{\omega} \int_0^\omega v_\pi(s, \theta) \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta d\theta \\ = \gamma_{2,\omega}(s) + c_{2,\omega}(s).$$

Alors

$$\frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2} = \Xi_{1,\gamma,c,\omega} + \Xi_{2,\gamma,c,\omega} + \Xi_{3,\omega}, \quad (4.3.45)$$

où

$$\begin{aligned}\Xi_{1,\gamma,c,\omega} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right) \int_0^r \gamma_{2,\omega}(s) s^{\frac{-2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega}\theta \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right) \int_0^r c_{2,\omega}(s) s^{\frac{-2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega}\theta \\ &= \Xi_{1,\gamma,\omega} + \Xi_{1,c,\omega}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi_{2,\gamma,c,\omega} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega} + 1\right) \int_0^r \gamma_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega}\theta \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega} + 1\right) \int_0^r c_{2,\omega}(s) s^{\frac{2\pi}{\omega}+1} ds r^{-\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega}\theta.\end{aligned}$$

$$\Xi_{3,\omega} = b_{2,\omega}(r) \sin \frac{2\pi}{\omega}\theta.$$

D'après la remarque 4.3.4 on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Xi_{3,\omega} - \Xi_{3,\pi}\|_{L^2} = 0.$$

Il reste à vérifier que

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Xi_{1,\gamma,c,\omega} - \Xi_{1,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} &= 0. \\ \lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Xi_{2,\gamma,c,\omega} - \Xi_{2,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} &= 0.\end{aligned}$$

Pour $\Xi_{1,\gamma,c,\omega}$ on part de :

$$\Xi_{1,\gamma,c,\omega} - \Xi_{1,\gamma,c,\pi} = \Xi_{1,\gamma,\omega} + (\Xi_{1,c,\omega} - \Xi_{1,c,\pi}).$$

Le terme $\Xi_{1,\gamma,\omega}$ est estimé en écrivant :

$$\begin{aligned}\int_0^\omega \int_0^1 |\Xi_{1,\gamma,\omega}(r, \theta)|^2 r dr d\theta &= C \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right)^2 \int_0^1 \left(\int_0^r (\gamma_{2,\omega}(s) s^{-\frac{2\pi}{\omega}+1} ds)^2 r^{\frac{4\pi}{\omega}-3} dr\right. \\ &\quad \left. \leq C \int_{\Omega_\omega} |v_\omega(s, \theta) - v_\pi(s, \theta)|^2 s ds d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.\right.\end{aligned}$$

où C une constante indépendante de ω .

Il reste le terme $\Xi_{1,c,\omega} - \Xi_{1,c,\pi}$.

On a

$$\Xi_{1,c,\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega} - 1\right) \int_0^r c_{2,\omega}(s) s^{\frac{-2\pi}{\omega}+1} ds r^{\frac{2\pi}{\omega}-2} \sin \frac{2\pi}{\omega}\theta,$$

et en $\omega = \pi$

$$\Xi_{1,c,\pi} = \frac{1}{2} \int_0^r c_{2,\pi}(s) s^{-1} ds \sin 2\theta.$$

Dans la suite on écrit

$$\Xi_{1,c,\omega} - \Xi_{1,c,\pi} = (\Xi_{1,c,\omega} - T_{1,c,\pi}) + (T_{1,c,\pi} - \Xi_{1,c,\pi}),$$

où

$$T_{1,c,\pi} = \frac{1}{2} \int_0^r c_{2,\pi}(s) s^{-1} ds \sin \frac{2\pi}{\omega}.$$

On aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.3.12. *On a*

$$\int_0^\omega \int_0^1 |\Xi_{1,c,\omega}(r, \theta) - T_{1,c,\pi}(r, \theta)|^2 r dr d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

Démonstration. Grâce à la majoration $|\sin x - \sin y| \leq C|x - y|$ pour tout x et y dans \mathbb{R} on a

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \int_0^1 |\Xi_{1,c,\omega}(r, \theta) - T_{1,c,\pi}(r, \theta)|^2 r dr d\theta &= \int_0^\omega \int_0^1 \left(\int_0^r c_{2,\pi}(s) s^{-1} ds (\sin 2\theta - \sin \frac{2\pi}{\omega}\theta) \right)^2 r dr d\theta \\ &\leq C(\pi - \omega)^2 \int_0^1 \left(\int_0^r c_{2,\pi}(s) s^{-1} ds \right)^2 r dr \leq C(\pi - \omega)^2, \end{aligned}$$

car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^r c_{2,\pi}(s) s^{-1} ds \right)^2 dr &\leq \int_0^1 \int_0^r c_{2,\pi}^2(s) s^{-3} ds \left(\int_0^r s ds \right) r dr \\ &\leq C \int_0^1 c_{2,\pi}^2(s) s^{-3} ds = C, \end{aligned}$$

où C une constante indépendante de ω .

Ceci achève la démonstration du lemme 4.3.12. □

Il reste à montrer :

$$\int_0^\omega \int_0^1 |T_{1,c,\pi} - \Xi_{1,c,\pi}|^2 r dr d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^r [c_{2,\omega}(s) N_\omega(s, r) - c_{2,\pi}(s) N_\pi(s, r)] s ds \right\}^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi,$$

où

$$N_\omega(s, r) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) s^{-\frac{2\pi}{\omega}} r^{\frac{2\pi}{\omega} - 2}.$$

Pour ce faire on écrit

$$\begin{aligned} [c_{2,\omega}(s)N_\omega(s, r) - c_{2,\pi}(s)N_\pi(s, r)] &= c_{2,\omega}(s) [N_\omega(s, r) - N_\pi(s, r)] \\ &\quad + [c_{2,\omega}(s) - c_{2,\pi}(s)] N_\pi(s, r). \end{aligned}$$

Lemme 4.3.13. *On a*

$$\int_0^1 \left| \int_0^r c_{2,\omega}(s) [N_\omega(s, r) - N_\pi(s, r)] s ds \right|^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi. \quad (4.3.46)$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 4.3.10 □

Lemme 4.3.14. *On a*

$$\int_0^1 \left| \int_0^r [c_{2,\omega}(s) - c_{2,\pi}(s)] N_\pi(s, r) s ds \right|^2 r dr \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \pi.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 4.3.8. □

De ce qui précède on déduit que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Xi_{1,\gamma,c,\omega} - \Xi_{1,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} = 0.$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|\Xi_{2,\gamma,c,\omega} - \Xi_{2,\gamma,c,\pi}\|_{L^2} = 0.$$

Conclusion

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 A_\pi}{\partial r^2} \right\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

De la même façon, on démontre que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\pi}{\partial \theta^2} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \left\| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\omega}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\pi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\pi}{\partial \theta} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

Finalement on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \|A_\omega - A_\pi\|_{H^2(\Omega_\omega)} = 0.$$

□

Conclusion

L'objectif principal de cette thèse est d'analyser le comportement singulier des solutions dans certains problèmes elliptiques sur des domaines non-réguliers. La connaissance de la singularité est nécessaire pour connaître les possibilités et les limites des modèles étudiés ; elle sert aussi, lors de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles associées.

Nous commençons par exposer brièvement les grandes étapes abordées au cours de cette thèse, contribuant toutes à la rencontre des objectifs précités. Ensuite, nous insisterons sur les originalités qui jalonnent ce travail ainsi que sur les principaux enseignements tirés, avant de dégager des pistes de recherches porteuses pour le futur.

Synthèse des travaux effectués

Le chapitre 2 présente une étude approfondie du problème Laplacien-Dirichlet et le problème bilaplacien-Dirichlet-Neumann (le problème (P_2)) dans un polygone du plan. Cette étude est essentiellement basée sur la transformée de Fourier partielle et le théorème de Plancherel. Les résultats que nous avons obtenus en ce qui concerne la décomposition de la solution au voisinage d'un sommet sont identiques aux résultats de GRISVARD 1986 et BLUM et RANNACHER 1980, en revanche le sens de la condition aux limites $M(u) = 0$ dans le problème (P_2) n'a pas été explicité dans l'article de BLUM et RANNACHER 1980. En utilisant des techniques analogues à celle de NECAS 1967, on donne un sens à la condition aux limites $M(u) = 0$ lorsque la solution variationnelle appartient à H^2 . À la fin du chapitre on rappellera les résultats essentiels de BLUM et RANNACHER 1980.

Le troisième chapitre reprend le problème (P_2) en examinant le comportement des solutions dans une famille d'ouverts, les seconds membres étant supposés dépendre continûment des ouverts. De manière plus précise, on suppose donnés des ouverts polygonaux au voisinage de l'origine Ω_ω , $\omega \in]\frac{3\pi}{2}, \pi]$, ayant un sommet en O d'angle ω si $\omega < \pi$ et étant plat si $\omega = \pi$. On montre que la solution variationnelle du problème (P_2) s'écrit au voisinage de l'origine sous la forme

$$u_\omega = u_{\omega,1} + u_{\omega,2} + u_{\omega,3},$$

où $u_{\omega,1} = a_\omega^1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta$, $u_{\omega,2} = a_\omega^2 r^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \frac{2\pi}{\omega} \theta$ et $u_{\omega,3}$ est la partie régulière .

On montrera précisément que la partie régulière $u_{\omega,3}$ vérifie des estimations uniformes par rapport à ω et on donnera une description précise des parties singulières $u_{\omega,1}$ et $u_{\omega,2}$ près de l'origine.

Le chapitre quatre contient les autres résultats nouveaux de cette thèse. Dans ce chapitre nous avons montré que la solution u_ω (respectivement $u_{\omega,1}$, $u_{\omega,2}$, et $u_{\omega,3}$) converge dans H_{loc}^2 quand $\omega \rightarrow \pi$.

Notons que les résultats obtenus dans les chapitres 3 et 4 sont essentiellement basés sur les séries de Fourier.

Perspectives de recherche

1. Comme déjà mentionné ci-dessus, les résultats obtenus dans cette thèse sont essentiellement basés sur les séries de Fourier, mais cette méthode n'est pas généralisable à d'autres problèmes aux limites. Pour régler ce problème nous sommes actuellement en train de développer une méthode qui va nous permettre de traiter d'autres problèmes avec des conditions aux limites différentes.
2. Généraliser les résultats obtenus pour une donnée $f \in L^p$.
3. Une étude numérique du problème (P_ω) par la méthode des éléments finis.

Bibliographie

- [1] R. ADAMS. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Paris, 1975 (cf. p. [16](#), [42](#)).
- [2] M. S. AGRANOVITCH et M. I. VISHIK. « Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type ». In : *Russian Math* 19 (1964), p. 53–157.
- [3] V. G. MAZ'YA B. J. JAYE et I. E. VERBITSKY. « Existence and regularity of positive solutions of elliptic equations of Schrödinger type ». In : *J. Anal. Math.* 118 (2012), p. 577–621.
- [4] H. BLUM et R. RANNACHER. « On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners ». In : *Maths. Methods. App.Sc* 2 (1980), p. 556–581 (cf. p. [4](#), [5](#), [10](#), [11](#), [22](#), [48](#), [51](#), [128](#)).
- [5] A. CIANCHI et V. G. MAZ'YA. « Gradient regularity via rearrangements for p-Laplacian type elliptic boundary value problems ». In : *J. Eur. Math. Soc.* 16 (2014), p. 571–595.
- [6] M. DAUGE. « Elliptic boundary value problems in corner domains. Smoothness and asymptotics of solutions ». In : *L.N. in Math* 1341, Springer Verlag (1988).
- [7] M. DAUGE et S. NICAISE. « Oblique derivative and interface problems on polygonal domains and networks ». In : *Comm. in P.D.E.* 14 (1989), p. 1147–1192.
- [8] R. DAUTRAY et J. L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. T. 3. Masson, Paris, 1975 (cf. p. [16](#)).
- [9] E. GAGLIARDO. « Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili ». In : *Rendiconti del seminario Matematico della Università di Padova* 27 (1957), p. 284–305 (cf. p. [16](#)).
- [10] P. GRISVARD. « Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre ». In : *Bollettino U. M. I.* 4 (1972), p. 132–164 (cf. p. [10](#)).
- [11] P. GRISVARD. « Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain ». In : *Symposium on Numerical Solution of Partial Differential Equation III, Hubbard Editor* (1975), p. 207–274.
- [12] P. GRISVARD. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. T. 12. Monographs et Studies in Mathematics 21, Pitman, Boston, 1985 (cf. p. [18](#), [38](#), [39](#), [51](#), [52](#)).
- [13] P. GRISVARD. *Boundary value problems in plan polygons, Instruction for use*. T. 1. 1986, p. 21–59 (cf. p. [10](#), [14](#), [22](#), [23](#), [29](#), [128](#)).

- [14] P. GRISVARD. « Edge behavior of the solution of an Elliptic problem ». In : *Math.Nachr.* 1 (1987), p. 281–299.
- [15] P. GRISVARD. *Singularities in Boundary Value Problems*. Masson, Paris, 1992.
- [16] A. HAMMOUDI. « Equation de la chaleur sur une base polygonale ». Thèse de doct. Université de Nantes, 1987.
- [17] T. KATO. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1966.
- [18] V. A. KONDRATIEV. « Boundary problems for elliptic equation in domains with conical or angular points ». In : *Trans. Moscow Math.Soc* 16 (1967), p. 227–313 (cf. p. 10, 48).
- [19] J. L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod T1 et T2, Paris, 1968 (cf. p. 10).
- [20] M. S. LUBUMA M. BOURLARD M. DAUGE et S. NICAISE. « Coefficients des Singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un Domaine à Points coniques I : Résultats généraux pour le problème de Dirichlet ». In : *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 24 (1990), p. 27–52.
- [21] M. S. LUBUMA M. BOURLARD M. DAUGE et S. NICAISE. « Coefficients des Singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un Domaine à Points coniques II : Résultats généraux pour le problème de Dirichlet ». In : *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 24 (1990), p. 343–367.
- [22] A. MAGHNOUJI. « Problèmes elliptiques et paraboliques dans des domaines non-réguliers ». Thèse de doct. Université de Lille, 1992.
- [23] V. G. MAZ'YA et S. POBORCHI. « Existence and uniqueness of the energy solution to the Dirichlet problem for the Laplace equation in the exterior of a multi-dimensional paraboloid ». In : *J. of Math. Sciences.* 172 (2011), p. 532–554.
- [24] V.G. MAZ'YA et B.A. PLAMENEVSKII. « L_p estimates of solution of elliptic boundary value problems in domains with edges ». In : *Transactions of the Moscow Mathematic Society* 1 (1980), p. 49–97.
- [25] V.G. MAZ'YA et B.A. PLAMENEVSKII. « Estimates in L_p and in Holder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary ». In : *A.M.S. Trans.* (2) 123 (1984), p. 1–56.
- [26] R. MCOWEN et V. G. MAZ'YA. « Second order differentiability for solutions of elliptic equations in the plane ». In : *J. Math. Sci. (N. Y.)* 191 (2013), p. 243–253.
- [27] B. MEROUANI. « Comportements singuliers des solutions du système de l'élasticité dans un polygone ». Thèse de doct. USTHB. Alger, 1990 (cf. p. 10).

- [28] B. MEROUANI et R. BOUFENOUCHE. « Coefficients of singularities for a simply supported plate problems in plane sectors ». In : *Electronic Journal of Differential Equations*. 2013 (2013), p. 1–8.
- [29] B. MEROUANI et R. BOUFENOUCHE. « Trigonometric series adapted for the study of dirichlet boundary-value problems of lame systems ». In : *Electronic Journal of Differential Equations*. 2015 (2015), p. 1–6.
- [30] M. A. MOUSSAOUI. « Etude, dans les espaces de Holder, des problèmes elliptiques dans un secteur plan et, dans les espaces de sobolev d'un problème à dérivée oblique dans un polygone plan ». Thèse de doct. Université de Nice, 1977 (cf. p. 10).
- [31] M. MOUSSAOUI et B. K. SADALLAH. « Régularité des coefficients de propagation de singularités pour l'équation de la chaleur dans un ouvert plan polygonal ». In : *C.R. Acad. Sc. Paris, Série I* 293 (1981).
- [32] J. NECAS. *Les méthodes directs en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967 (cf. p. 10, 11, 14, 16, 22, 38, 128).
- [33] S. NICAISE. « Problèmes aux limites sur les réseaux deux dimensionnels polygonaux topologiques ». In : *J. Math. Pures et Appl.* 67 (1988), p. 93–113.
- [34] S. NICAISE. « Polygonal interface problems for the biharmonic operator ». In : *Maths. Methods. App.Sc* 17 (1994), p. 21–39 (cf. p. 39).
- [35] S. NICAISE. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles. Cours et problèmes résolus*. Dunod, Paris, 2000 (cf. p. 38).
- [36] A. DOUGLIS S. AGMON et L. NIRENBERG. « Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II Corn ». In : *On pure and applied Math* 17 (1964), p. 35–92.
- [37] M. STEELE. *The Cauchy-Schwarz Master Class : An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge University Press, London, 2004 (cf. p. 78, 79).
- [38] F. TREVES. *Topological vector spaces, distribution kernels*. Academicpress, New York, 1967 (cf. p. 21).
- [39] V. G. Maz'ya V. A. KOZLOV et J. ROSSMANN. *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*. T. 24. Mathematical Surveys et Monographs, 1997.

ANNEXE

Pour $u \in H^4$ nous définissons :

$$M(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$N(u) = -\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2},$$

où ν est un nombre réel appelé coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque : $\nu \in]0, 1[$.

Nous établirons un lemme qui nous sera utile pour déduire une formule de Green généralisée dont on aura besoin dans notre travail. Pour deux fonctions $u \in H^4$, $v \in H^2$ on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = a(u, v) - \left(\int_{\Gamma} [\gamma(Mu)\gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} + \gamma(Nu)\gamma v] d\sigma \right), \quad (C.47)$$

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire définie sur $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ comme suite :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \right] dx,$$

On choisit la décomposition suivante du bilaplacien :

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} [2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right). \quad (C.48)$$

d'où :

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} [2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \right\} v dx. \quad (C.49)$$

On applique la formule de Gréen deux fois à chaque terme de l'intégrale séparément :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_1 d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_1 d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_1 d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \eta_2 d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_1 d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \eta_2 d\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \eta_1 d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_2 d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \eta_1 d\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_2 d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_2 d\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \eta_1 d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_1 d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \eta_1 d\sigma\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v dx = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \eta_2 d\sigma$$

Par sommation on obtient :

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = a(u, v) + I_1 + I_2.$$

où :

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_1 + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \eta_2 + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \eta_1 \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_1 + \nu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_2 \right) v d\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_1 + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_1 + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_2 \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_1 + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 \right) d\sigma\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_2 \right\} v d\sigma \\
&= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_2 \right\} v d\sigma \\
&= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta u) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta u) \eta_2 \right\} v d\sigma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} v d\sigma.
\end{aligned}$$

Pour simplifier la deuxième intégrale, on aura besoin d'exprimer les dérivées par rapport à x_1 et x_2 en fonction des dérivées suivant la normale η et la tangente τ . En effet :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x_1} \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \eta_2 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \eta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_1 - \frac{\partial}{\partial \tau} \eta_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \eta_1 \end{cases}$$

On applique ainsi ces formules pour obtenir :

$$\begin{aligned}
I_2 &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} (\eta_1^2 + \nu(1 - \eta_1^2)) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} (\nu(1 - \eta_1^2) + \eta_2^2) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 \right] d\sigma \\
&\quad + \int_{\Gamma} (1 - \nu) \frac{\partial v}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\sigma \\
&= - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_2^2 \right) + \nu \Delta u \right] d\sigma \\
&\quad + \int_{\Gamma} (1 - \nu) \frac{\partial v}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\sigma
\end{aligned}$$

La seconde intégrale de I_2 peut être calculée par parties. Etant donné qu'elle est prise sur un contour fermé, les limites d'intégration sont confondues en un point, on obtient tout simplement :

$$\begin{aligned}
I_2 &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_2^2 \right) + \nu \Delta u \right] d\sigma \\
&\quad - \int_{\Gamma} (1 - \nu) v \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\sigma
\end{aligned}$$

Finalemment, on obtient :

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = a(u, v) - \left(\int_{\Gamma} [\gamma(Mu)\gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} + \gamma(Nu)\gamma v] d\sigma \right).$$