

Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de

VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Discipline, spécialité :

Électronique, Acoustique et Télécommunications

Présentée et soutenue par Mohammed Marouane, EL BAKKALI.

Le 28/01/2015, à CEA Saclay

Ecole doctorale :

Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Equipe de recherche, Laboratoire :

Institut d'Electronique, de Micro-Electronique et de Nanotechnologie/Département d'Opto-Acousto-Electronique (IEMN/DOAE)

Modélisation des contrôles non-destructifs par ondes ultrasonores guidées.

Application aux contrôles de canalisations

JURY

Président du jury

- Cawley, Peter. Professeur. Imperial College. London.

Rapporteurs

- Deschamps, Marc. Directeur de Recherche CNRS. Université de Bordeaux.
- Laguerre, Laurent. Directeur de Recherche à l'IFSTTAR. Nantes.

Examineurs

- Cawley, Peter. Professeur. Imperial College. London.
- Berthelot, François. Ingénieur de recherche. Cetim Nantes.

Directeur de thèse

- Grondel, Sébastien. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.

Co-encadrant :

- Lhémy, Alain. HDR, expert senior en CND. CEA Saclay.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES FIGURES.....	3
INTRODUCTION GENERALE.....	7
CHAPITRE 1. CONTEXTE ET ENJEUX DES CONTROLES NON DESTRUCTIFS PAR ONDES ELASTIQUES GUIDÉES.....	11
1. Introduction.....	12
1.1. Les ondes guidées.....	13
1.2. Génération des ondes guidées dans des canalisations.....	22
2. Le contrôle de lignes de canalisations par ondes guidées.....	28
2.1. Descriptions d'une ligne de canalisations.....	28
2.2. Détection de défauts ou d'endommagements par ondes guidées.....	31
3. État de l'art sur la simulation des CND par ondes guidées pour les canalisations.....	32
3.1. Propagation des ondes guidées.....	32
3.2. Diffraction des ondes guidées.....	34
3.3. Revue des outils de CIVA en vue de la simulation du CND par ondes guidées de réseaux canalisations.....	35
4. Conclusion.....	37
CHAPITRE 2. MODELISATION DE LA PROPAGATION DES ONDES GUIDÉES DANS DES GUIDES COURBES DE SECTIONS ARBITRAIRES.....	39
1. Introduction.....	40
2. Paramétrage géométrique d'un guide d'ondes courbe en coordonnées curvilignes.....	40
2.1. Description d'un guide d'ondes courbes.....	40
2.2. Construction d'un repère local de Serret-Frenet associé à une courbe.....	41
2.3. La base de Serret-Frenet pour un coude.....	42
2.4. Construction des bases covariante et contravariante associées au repère de Serret-Frenet.....	44
3. Formulation variationnelle des équations de propagation des ondes guidées.....	46
3.1. Équation de propagation des ondes guidées dans un guide coudé.....	46
3.2. Loi de comportement.....	47
3.3. Formulation intégrale des équations de propagation.....	47
3.4. Expressions des termes de la formulation variationnelle en coordonnées curvilignes.....	48
3.5. Formulation variationnelle dans la base de Serret-Frenet.....	51
4. Méthode SAFE (Semi-Analytic Finite Element Method) en coordonnées curviligne.....	53
4.1. Hypothèses d'application de la méthode SAFE.....	53
4.2. Formalisme SAFE pour les guides coudés.....	54
4.3. Comparaison entre les modes guidés dans un cylindre plein droit et coudé.....	63
5. Conclusion.....	72
CHAPITRE 3. MODELISATION DE LA DIFFRACTION DES ONDES GUIDÉES SE PROPAGEANT DANS UNE LIGNE DE CANALISATIONS COMPORTANT DES COUDES.....	75
1. Introduction.....	76
2. Modélisation de la diffraction des ondes guidées par la jonction entre un guide droit et un guide coudé.....	76
2.1. Expression des champs élastodynamiques.....	76
2.2. Modèle de raccordement modal pour la diffraction à une jonction.....	81
2.3. Construction de la matrice de diffraction à la jonction.....	85
2.4. Exemple d'utilisation du modèle de raccordement modal.....	89
3. Mise en série des matrices de diffractions locales.....	96
3.1. Définition de la matrice de diffraction globale.....	97

3.2. Opérateur analytique de propagation.....	98
3.3. Matrice de diffraction globale pour un coude.....	98
3.4. Exemple de mise en série de matrices de diffractions :	99
4. Bilan d'un calcul complet	103
5. Conclusion	104
CHAPITRE 4. VALIDATIONS NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DU MODELE COMPLET DE LA PROPAGATION DES ONDES GUIDEES DANS DES LIGNES DE CANALISATIONS COMPORTANT DES COUDES....	107
1. Introduction.....	108
2. Synthèse temporelle.....	108
3. Validation numérique du modèle	109
3.1. Comparaison avec les travaux de A. Demma [118] [78] dans le domaine fréquentiel	109
3.2. Comparaison avec les travaux de Sanderson <i>et al.</i> [119] dans le domaine temporel	117
4. Campagne de validation expérimentale effectuée au CETIM.....	120
4.1. Description du dispositif expérimental	120
4.2. Vérification et analyse expérimentales des phénomènes de diffraction associés aux coudes.....	123
4.3. Comparaison simulation/expérience en temporel des échos de diffraction du coude	129
5. Étude paramétrique sur une ligne de canalisations comportant un coude	131
5.1. Cartographies de transmission pour différents rayons de courbures.....	131
5.2. Cartographies de transmission à rapport k constant	132
6. Conclusion	133
CONCLUSION GENERALE	135
ANNEXE A : COMPARAISON DES COURBES DE DISPERSION CALCULEES DANS UN COUDE AVEC CELLES ISSUES DE LA LITTERATURE	139
Annexe B : DEVELOPPEMENTS INTERMEDIAIRES POUR L'OBTENTION DE LA MATRICE DE DIFFRACTION GLOBALE S_G	141
ANNEXE C : BIFFT EXPERIMENTALE DE LA MAQUETTES DE TUBES 10'' COMPORTANT UN COUDE DE 70° A LA FREQUENCE DE 128KHZ.....	143
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	145

TABLE DES FIGURES

Figure I-1 : Exemples de structures industrielles susceptibles d'être contrôlées par ondes élastiques guidées : (a) canalisations [10], (b) câbles [11], (c) réservoirs de stockage, (d) rails [12], (e) plaques composites [11]	12
Figure I-2: illustration des guides d'ondes canoniques	13
Figure I-3: illustration des déformées des modes SH et des modes de Lamb (symétriques et antisymétriques) pouvant se propager dans une plaque d'après [22].....	14
Figure I-4 : Courbes de dispersion en vitesse de phase pour les modes SH et les modes de Lamb dans une plaque en acier ($\rho = 7,8g.cm^{-3}$, $C_T = 3,23mm.\mu s^{-1}$, $C_L = 5,9mm.\mu s^{-1}$) libre, isotrope et homogène d'épaisseur 10 mm obtenues par le logiciel CIVA [2].....	15
Figure I-5 : illustration des déformées des modes de Pochhammer-Chree dans un guide cylindrique d'après [30]	15
Figure I-6: Exemples obtenus par le logiciel CIVA [2] de profils de déplacements, dans la section, des modes propagatifs $T(0,1)$, $L(0,2)$ et $F(1,1)$, dans un tube en acier ($\rho = 7,8g.cm^{-3}$, $C_T = 3,23mm.\mu s^{-1}$, $C_L = 5,9mm.\mu s^{-1}$) de diamètre extérieur 40mm et d'épaisseur 10mm à la fréquence de 200kHz	16
Figure I-7 : Courbes de dispersion en vitesse de phase pour les modes de Pochhammer-Chree dans un tube en acier ($\rho = 7,8g.cm^{-3}$, $C_T = 3,23mm.\mu s^{-1}$, $C_L = 5,9mm.\mu s^{-1}$) libre, isotrope et homogène de diamètre 40mm et d'épaisseur 10 mm obtenu par CIVA [2].	17
Figure I-8 : Courbes de dispersion en vitesse de phase (a) et vitesse de groupe (b) pour les modes de compressions L et de torsions T dans un tube en acier ($\rho = 7,8g.cm^{-3}$, $C_T = 3,23mm.\mu s^{-1}$, $C_L = 5,9mm.\mu s^{-1}$) libre, isotrope et homogène de diamètre 40mm et d'épaisseur 10 mm obtenues par le logiciel CIVA [2] sur l'intervalle de fréquences [0,500kHz].....	18
Figure I-9 : Profils de déplacements, dans la section, des modes $L(0,1)$, $L(0,2)$ et $F(1,1)$, dans un tube en acier ($\rho = 7,8g.cm^{-3}$, $C_T = 3,23mm.\mu s^{-1}$, $C_L = 5,9mm.\mu s^{-1}$) de diamètre extérieur 40mm et d'épaisseur 10mm à la fréquence de 500kHz.....	19
Figure I-10: Ascan obtenu pour une réflexion totale sur un bout de tube en acier de diamètre 40mm et d'épaisseur 10mm. Le traducteur émet en mode piston et est situé à 200mm du défaut et est excité avec un signal de trois cycles fenêtré par une gaussienne et centré sur 40kHz	19
Figure I-11 : Zone d'excitation du mode $T(0,1)$ pour un signal centré à 128kHz ayant une bande passante à -6dB comprise entre 96 et 160kHz (deux cycles temporels) fenêtré par une fonction de Hanning et employé pour un traducteur générant des sollicitations orthoradiales.....	21
Figure I-12: Photo du système de génération d'ondes guidées « Teletest » de Pi [46]	23
Figure I-13: Photo du système de génération d'ondes guidées « Wavemaker G4 » produit et commercialisé par GUL [47].....	23
Figure I-14: Photo du système magnétostrictif (MsS) de génération d'ondes guidées GWA [46]	24
Figure I-15: Photo du système de génération d'ondes guidées « Ultrawave » d'« Olympus » [48]	24
Figure I-16: Représentation à l'aide du logiciel CIVA [2] des champs émis dans les deux directions possibles par un traducteur piézoélectrique encerclant la canalisation.....	25
Figure I-17: Représentation à l'aide du logiciel CIVA [2] du montage de sommation des champs pour le choix de la direction de propagation.....	25
Figure I-18: Exemple de sommation de signaux de Ascan de champs 1) cohérent (droite) produisant des interférences constructives et 2) en opposition de phase entraînant des interférences destructives entre les champs émis	26
Figure I-19: Simulation des interférences constructives (en noir) et destructives (en rouge) entre champs élastodynamique $T(0,1)$ émis (avec un décalage temporel) par deux traducteurs encerclants la canalisation et séparés spatialement de $\lambda_{T(0,1)}/4$ à 64kHz sur un tube 6" d'épaisseur 7.1mm.....	27

Figure I-20: Position des traducteurs piézoélectriques dans un module du système « Teletest » pour la génération des modes guidés T (0,1) et L (0,2).....	27
Figure I-21 : Illustration des paramètres géométriques (pentes, extensions et hauteur) des bourrelets d'une soudure en V de canalisations	29
Figure I-22 : Exemple d'une bride (a) et d'un piquage soudé (b) sur des canalisations.....	30
Figure II-1: guide d'ondes de section quelconque avec une invariance géométrique suivant e_s ..	40
Figure II-2: illustration d'une courbe gauche Γ dans l'espace.....	41
Figure II-3: Représentation des repères cartésien et curviligne associés à un coude	42
Figure II-4: Représentation du repère de coordonnées cylindriques associé à un guide coudé...	43
Figure II-5: Discrétisation 2D d'un guide d'ondes de section arbitraire par des éléments finis triangulaires à trois nœuds.....	55
Figure II-6: Maillage 2D par éléments triangulaires d'ordre P1 de la section d'une canalisation	55
Figure II-7: Critère de maillage 1D en fonction de la longueur d'onde minimale à la fréquence maximale de calcul.....	56
Figure II-8: Élément fini triangulaire P1	57
Figure II-9: Maillage de la section d'un cylindre plein de diamètre 20mm avec des éléments finis triangulaires de type P1	63
Figure II-10 : Courbes de dispersion en nombre d'ondes pour un cylindre plein de diamètre 20mm dans la plage fréquentielle variant de 20 à 300kHz pour a) une courbure nulle $\gamma = 0$ et b) une courbure égale à $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$	64
Figure II-11 : Courbes de dispersion en vitesse de phase pour un cylindre plein de diamètre 20mm dans la plage fréquentielle variant de 20 à 300kHz pour a) une courbure nulle $\gamma = 0$ et b) une courbure égale à $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$	65
Figure II-12 : Courbes de dispersion en vitesse de groupe pour un cylindre plein de diamètre 20mm dans la plage fréquentielle variant de 20 à 300kHz pour a) une courbure nulle $\gamma = 0$ et b) une courbure égale à $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$	66
Figure II-13: Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial des solutions couplées $F(1,1)$ et $F(-1,1)$ composant le premier mode de flexion pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbure $\gamma = 0$ à la fréquence de 200kHz	67
Figure II-14 : Même légende que précédemment pour une courbure $\gamma = 0,005\text{mm}^{-1}$ à la fréquence de 200kHz	68
Figure II-15 : Même légende que précédemment pour une courbure $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$ à la fréquence de 200kHz	68
Figure II-16 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T0,1$ pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbures respectives $\gamma = [0; 0,005; 0,025\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de 200kHz	69
Figure II-17 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de compression $L0,1$ pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbures $\gamma = [0; 0,005; 0,025\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de 200kHz	69
Figure II-18 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du second mode de compression $L0,2$ pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbures $\gamma = [0; 0,005; 0,025\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de 200kHz	70
Figure II-19 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T0,1$ pour un tube de diamètre 20mm et d'épaisseur 5mm et de courbures $\gamma = [0; 0,01\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de 10kHz	71
Figure II-20 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T0,1$ pour un guide rectangulaire 10mm par 5mm et de courbures $\gamma = [0; 0,01\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de 10kHz	71
Figure II-21: Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T0,1$ pour un guide de section arbitraire et de courbures $\gamma = [0; 0,01\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de 10kHz.....	72

Figure III-1 : Illustration des directions de propagation des modes servant à la décomposition des champs de contraintes et de déplacements	78
Figure III-2: Illustration de la matrice de projection normalisée des modes guidés dans un cylindre droit de diamètre 20mm à la fréquence 250kHz	80
Figure III-3: Illustration de la matrice de projection normalisée des modes guidés dans un cylindre coudé de diamètre 20mm et de rayon de courbure 100mm à la fréquence 250kHz	80
Figure III-4 : Illustration des directions de propagation des modes utilisés dans la décomposition des champs de contraintes et de déplacements	81
Figure III-5 : Direction de propagation des familles de modes à la jonction entre un tube droit et un tube coudé	82
Figure III-6: Sous matrices de réflexion et de transmission de la matrices de diffraction de la jonction entre le guide droit et le coude Σ	89
Figure III-7: Décomposition des coefficients de la matrice de diffraction S_{Σ} de la jonction entre un guide droit et un coude en matrices de réflexions (refl) et de transmission (trans)	89
Figure III-8 : Maillage éléments finis 2D par élément triangulaire P1 (1424 nœuds) de la section du guide réalisé avec GMSH [92].....	90
Figure III-9 : Courbes de dispersion en nombre d'ondes pour un tube d'acier (cf. configuration) aux courbures $\gamma = 0$ (trait plein rouge) et $\gamma = 0,04\text{mm}^{-1}$ (Points bleus)	92
Figure III-10: Réflexion totale en bout de guide d'un champ élastodynamique incident	94
Figure III-11: Double jonction d'un coude relié à deux guides droits	96
Figure III-12: modes entrants et sortants d'un guide composé d'un coude joint à deux parties droites	97
Figure III-13: Ligne de canalisations composée d'un coude de 90° joint à deux guides tube droit dont le deuxième se termine par un bout de tube libre.....	102
Figure III-14: Exemple de configuration de simulation pour une ligne de canalisations comportant un coude joint à deux guides droits et ayant une ouverture angulaire θ_c variable	103
Figure IV-1: Exemple d'un signal Ascan obtenu lors d'un contrôle de canalisation avec le système magnétostrictif (MsS) [11] à la fréquence de 64kHz.....	108
Figure IV-2: Configuration utilisée en référence [118] [78] pour la simulation par éléments finis de la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à travers un coude de 90° avec $\gamma = 0,00275\text{mm}^{-1}$ sur des tubes 2" d'épaisseur 5,5mm	110
Figure IV-3 : Représentation CIVA du signal d'excitation (6 cycles fenêtré par une Gaussienne et centré sur la fréquence de 65kHz) utilisé par Demma pour la simulation de la transmission à travers des tubes coudés.....	110
Figure IV-4 : Exemple de nœuds dont le déplacement orthoradial s'annule pour le mode $F(1,2)$ dans un tube de diamètre 20mm et d'épaisseur 5mm à la fréquence de 100kHz	111
Figure IV-5: Signal temporel simulé pour la transmission (rouge) à travers un coude de 90° pour un signal d'émission (bleu) de six cycles et centré à la fréquence de 75kHz	112
Figure IV-6: Comparaison des coefficients de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ pour un coude de 90° dans une ligne de canalisation 2" obtenus avec notre modèle semi-analytique et ceux obtenus numériquement et expérimentalement en référence [78].....	112
Figure IV-7 : Représentation CIVA du spectre fréquentiel du signal d'excitation (en dB) utilisé dans les références [118] [78] pour la simulation de la transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ à travers des tubes coudés.....	114
Figure IV-8: comparaison des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ dans des coudes de 90° et 180° de rayon de courbure $R_c=603\text{mm}$ calculés par éléments finis par [118] et par le modèle semi-analytique (SA)	115
Figure IV-9 : comparaison des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ dans des coudes de ratios $k=5,2$ et $k=10$ et d'angle 90° calculés par éléments finis [118] [78] et par le modèle semi-analytique (SA)	116
Figure IV-10 : comparaison des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ dans des coudes de ratios $k=3,3$ et $k=25$ et d'angle 90° calculés par éléments finis par Demma et par le modèle semi-analytique (SA)	116

Figure IV-11: Schéma de la configuration choisie pour l'étude expérimentale et numérique du contrôle d'une canalisation 3" coudée par le mode $T(0,1)$ d'après [119].....	118
Figure IV-12: Forme d'onde de la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$: résultat par EF [119] (a), mesuré [119] (b) et simulé par notre modèle semi-analytique (c).....	118
Figure IV-13: Forme d'onde de la transmission avec conversions de modes $T(0,1)$ - $F(m,n)$: résultat simulé par éléments finis [119] (a), mesuré [119] (b), signal simulé par notre modèle semi-analytique (c).....	119
Figure IV-14 : Canalisations 6" comportant des coudes de 30° (droite) et de 70° (gauche) dont les bourrelets de soudures ont été arasés.....	120
Figure IV-15 : Canalisations 10" comportant des coudes de 30° (droite) et de 70° (gauche) dont les bourrelets de soudures ont été arasés.....	120
Figure IV-16 : points de mesure de l'épaisseur du tube.....	121
Figure IV-17: longueurs caractéristiques de la ligne 6" d'épaisseur nominale 7,1mm et comportant un coude de 30° de rayon de courbure 248mm.....	121
Figure IV-18 : Capteur piézoélectrique (Pzt) instrumenté pour la mesure du déplacement orthoradial.....	122
Figure IV-19 : Montage en Pitch/Catch avec capteur ponctuel – vue du dessus.....	123
Figure IV-20: Spectre fréquentiel du signal d'émission du système MsS issu du logiciel CIVA ..	123
Figure IV-21 : Signal de contrôle en mode Pulse/Echo de la canalisation 6" 70° avec le mode $T(0,1)$ émis par le Patch 2 à la fréquence de 128kHz.....	124
Figure IV-22: Schéma illustratif des mesures ponctuelles successives du déplacement orthoradial des ondes guidées se propageant dans la maquette expérimentale.....	124
Figure IV-23: Bscan des ondes se propageant au sein de la canalisation 6" avec un coude de 30° à la fréquence de 64kHz.....	125
Figure IV-24: Bscan à 128kHz, pour les maquettes expérimentales 6" 70° (a) et 10" 30° (b) obtenues avec un pas de mesure de 0,5cm.....	126
Figure IV-25: BiFFT obtenues des signaux expérimentaux de mesures de déplacement ponctuel réalisées sur la maquette 6" comportant un coude de 30° à la fréquence de 64kHz sur une distance de 66cm avec un pas de mesure de 1cm.	127
Figure IV-26: Zoom sur les modes composant les échos de diffractions réfléchis par le coude de 30° de la maquette 6" pour un mode incident $T(0,1)$ à 64kHz.....	128
Figure IV-27: BiFFT obtenues à partir des signaux expérimentaux de mesures de déplacement orthoradial ponctuel réalisées sur la maquette 6" comportant un coude de 30° aux fréquences centrales de 32, 64 et 128kHz.....	129
Figure IV-28 : Signal temporel expérimental obtenu sur la maquette 6" avec un coude de 30° et une extrémité de tube libre à 64kHz.....	130
Figure IV-29 : Signal temporel simulé pour la maquette 6" avec un coude de 30° et une extrémité de tube libre à 64kHz.....	130
Figure IV-30 : Cartographies de transmission du mode $T(0,1)$ en $T(0,1)$ à travers une ligne de canalisations 2" d'épaisseur 5,5mm comportant des coudes de ratios (a) $k=3$, (b) $k=6$, (c) $k=10$, (d) $k=19$ variant sur les angles de 30° à 180° sur l'intervalle de fréquences [20-200kHz].....	132
Figure IV-31: Cartographies de transmission du mode $T(0,1)$ en $T(0,1)$ à travers des coudes de ratio $k=10$, d'ouverture angulaire entre 30° à 180° et se trouvant dans des canalisations (a) 2" (épaisseur 3,81mm), (b) 4" (épaisseur 6,3mm) et (c) 6" (épaisseur 7,1mm) sur la plage fréquentielle [20-200kHz].....	133

INTRODUCTION GENERALE

Les structures industrielles subissent des dégradations qui peuvent résulter de leurs conditions normales d'exploitation. En effet, elles peuvent être en contact avec des produits chimiques, se trouver en présence de radioactivité, ou subir l'effet des conditions climatiques, et bien souvent, elles fonctionnent sous contraintes mécaniques ou thermiques. De plus, la survenue d'événements extérieurs accidentels tels que des impacts peut conduire à des dégradations supplémentaires et de nature différente. Le cumul de ces dégradations entraîne des pertes matérielles importantes se traduisant directement en termes de coût d'exploitation, et ce, dans des proportions significatives. Leur nocivité sur la tenue de la structure est une fonction complexe de nombreux facteurs comme leur nature, leurs dimensions et leur position. Compte-tenu du besoin permanent de maintenir ces structures en fonctionnement le plus longtemps possible afin d'en améliorer la rentabilité, les enjeux de sûreté constituent une problématique industrielle majeure dans de nombreux secteurs comme ceux de l'énergie, du transport aérien ou de la pétrochimie.

Ainsi, les méthodes de contrôles non-destructifs (CND) occupent une place de choix parmi les réponses apportées à ces enjeux de sûreté, puisqu'elles peuvent être mises en œuvre lors des différentes étapes du cycle de vie d'une pièce (production, exploitation, démantèlement). Elles constituent une solution globale efficace servant à s'assurer du bon fonctionnement des structures sans en altérer les propriétés. Grâce à la multitude des techniques [1] susceptibles d'être mises en œuvre (ultrasons, courant de Foucault, radiographie, ressuage, magnétoscopie...) et à leur complémentarité, il est possible de s'adapter aux contraintes particulières de chaque structure dans son environnement propre. Les techniques ultrasonores sont très largement utilisées et leur développement est sans cesse en progression, car elles possèdent certains avantages spécifiques en comparaison des autres techniques. Les ultrasons permettent, par exemple, un contrôle en épaisseur de la pièce contrairement aux courants de Foucault et nécessitent moins de précautions d'utilisation que les méthodes radiographiques qui présentent des risques d'irradiation. De plus, les procédés de génération existant aujourd'hui offrent une facilité d'utilisation à faible coût. Parmi les techniques de contrôles non-destructifs par ultrasons, celles utilisant les ondes guidées apparaissent comme particulièrement prometteuses. Pouvant se propager sur des distances importantes, ces ondes élastiques permettent de contrôler rapidement et dans l'épaisseur de grandes structures sans qu'il soit nécessaire de déplacer les dispositifs d'émission et de réception. Comme pour de nombreuses techniques de CND, on peut les utiliser pour effectuer des contrôles programmés *in situ* de structures en exploitation ; on peut en outre les utiliser pour assurer une surveillance permanente des structures (méthodes de contrôle santé intégré ou structural health monitoring (SHM) dans la terminologie anglo-saxonne). Mais si les ondes guidées offrent une intéressante flexibilité de mise en œuvre, elles présentent en contrepartie des difficultés spécifiques du fait de leurs caractères multi-modal et dispersif. Ainsi, l'interprétation des signaux acquis est difficile, et la mise au point de méthodes de contrôle minimisant ces inconvénients est elle-même complexe.

Les réseaux de canalisations sont couramment présents dans nombre d'industries. Essentiellement utilisées pour le transport de fluides d'un point à un autre et parfois sur de très grandes distances, les canalisations sont généralement constituées de plusieurs tubes soudés les uns aux autres auxquels s'ajoutent des éléments spécifiques de géométries complexes (coudes, brides, piquages...) ou de compositions matérielles complexes (présence de revêtement, enfouissement, encastrement...). En exploitation, ces réseaux de canalisations peuvent être le lieu de contraintes mécaniques et d'attaques chimiques importantes qui favorisent l'apparition de défauts. Du fait de l'importance des distances à contrôler et de l'existence dans certains cas de

zones inaccessibles, les réseaux de canalisations sont des structures pour lesquelles la mise en œuvre de méthodes de contrôle faisant appel aux ondes guidées est particulièrement bien adaptée. La nécessaire maîtrise de ces contrôles, dont les enjeux sont cruciaux pour une utilisation en toute sécurité des structures concernées, oblige à une compréhension approfondie des phénomènes associés à la propagation et à la diffraction des ondes élastiques en leur sein. Une meilleure connaissance du fonctionnement de la méthode de contrôle doit, d'une part, en faciliter la mise en œuvre et l'optimisation, et d'autre part, permettre à l'expert d'interpréter plus aisément les résultats du contrôle et de poser un diagnostic plus sûr quant à l'éventuelle anomalie à l'origine des signaux mesurés. De ce fait, le recours aux simulations apparaît comme le moyen idéal pour répondre efficacement et à faible coût à ces deux enjeux.

Dans la lignée des travaux réalisés au CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives) pour la mise au point de la plate-forme CIVA [2] de simulation de contrôles non-destructifs, le développement d'outils de simulation exclusivement destinés aux méthodes mettant en œuvre des ondes guidées a été lancé depuis quelques années et a abouti à la commercialisation d'un premier module. À l'heure actuelle, la modélisation des phénomènes de propagation et de diffraction des ondes guidées fait l'objet de nombreux travaux à travers le monde. Souvent, dans ces travaux, l'accent est mis sur le développement de modèles destinés à anticiper les résultats expérimentaux et à fournir une aide à la définition des paramètres de contrôle facilitant l'interprétation des signaux en s'affranchissant autant que possible des caractères dispersif et multi-modal des ondes guidées.

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués dans le cadre d'une collaboration entre le CEA et le CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques) et s'inscrivent dans la continuité des développements du module ondes guidées de CIVA. Ils ont pour objectifs le développement de modèles numériques supplémentaires compatibles avec ceux existants et adaptés à la simulation d'inspections de réseaux de canalisations, pour répondre aux besoins exprimés par le CETIM de disposer d'outils d'aide à la maîtrise des méthodes de CND par ondes guidées. Ces modèles doivent répondre à trois problématiques distinctes : la propagation des ondes élastiques dans des canalisations, leur diffraction par des perturbations locales telles que les spécificités géométriques ou structurelles liées à la ligne (coude, revêtement, soudures...) ou d'éventuels défauts et enfin, la prise en compte d'une succession de perturbations influençant la propagation des ondes élastiques.

Le présent manuscrit décrit les principaux travaux menés dans le cadre de la thèse et se divise en quatre chapitres.

Le premier chapitre est dédié à la présentation de différentes notions liées aux ondes guidées de manière générale et aux procédés de contrôles non-destructifs les exploitant en particulier. Ainsi, nous commençons par définir les guides d'ondes, les caractères multi-modal et dispersif des ondes guidées et décrivons certaines propriétés intrinsèques à chacune des familles de modes guidés dans les géométries canoniques que sont les plaques et les cylindres. En adoptant le point de vue du concepteur d'une méthode de contrôle, nous insistons sur l'influence des choix pouvant être faits des différents paramètres tels que les modes d'inspections mis en jeu, la fréquence, les dispositifs de génération et de réception adaptés aux canalisations. Nous passons ensuite en revue les principaux éléments qui composent un réseau de canalisations industrielles conventionnel et rappelons l'impact de ces différentes spécificités géométriques et structurelles sur le comportement des ondes guidées. Enfin, un état de l'art est réalisé sur les méthodes de modélisation de la propagation et de la diffraction des ondes guidées pour la simulation des contrôles non-destructifs, en insistant particulièrement sur celles ayant fait l'objet de développement pour la réalisation du module ondes guidées de la plate-forme CIVA. À partir de l'analyse de ces différents modèles implémentés dans la plate-forme, les principaux axes de développement de la thèse sont définis dans le but d'accroître les possibilités offertes par ce module.

Le second chapitre est consacré à l'extension du modèle d'éléments finis semi-analytiques, qui, dans tout le mémoire, sera appelé le modèle SAFE (suivant la terminologie anglo-saxonne de Semi-Analytic Finite Element), extension permettant de traiter en plus de la propagation modale dans les tubes droits, celle dans les canalisations coudées. La construction de la base curviligne dans laquelle le guide courbe est paramétré ainsi que les notions de géométries différentielles utiles à cette extension sont présentées. Ensuite, les étapes de cette extension basée sur les travaux de Treyssède et Laguerre [3] sont détaillées. Pour finir, les différents effets liés à la prise en compte de la courbure du guide d'ondes sur le comportement des modes guidés sont illustrés par des résultats de calculs numériques de modes se propageant au sein de structures coudées et dont les sections présentent différentes géométries.

Le troisième chapitre présente le modèle développé et mis en œuvre pour prédire les phénomènes de diffraction intervenant à la jonction entre deux guides différents. La méthode est basée sur un formalisme générique de raccordement modal servant à l'obtention de la matrice modale de diffraction. Cette matrice permet de relier les champs élastodynamiques des différents guides précédemment obtenus grâce aux bases modales calculées par le modèle SAFE. Il en découle la possibilité de décomposer tout champ incident dans un guide en des champs réfléchis et transmis. Par la suite, ces matrices locales de diffraction déterminées par raccordement modal sont utilisées dans un cadre générique aidant à la prise en compte de plusieurs jonctions successives ; cela nous permet notamment de traiter le cas d'une canalisation coudée jointe à deux guides droits. La méthode développée consiste à mettre en série les différentes matrices modales locales de diffraction avec des matrices modales de propagation guidée entre deux éléments diffractants. Cette méthode sert à décrire l'ensemble des phénomènes de diffraction s'opérant à plusieurs jonctions successives, y compris les phénomènes de réflexions multiples, par une unique matrice modale de diffraction. Une mise en série de telles matrices, suivant le même procédé, autorise à calculer une matrice modale globale de diffraction pour une ligne de canalisations rendant compte de tous les phénomènes de diffraction qui y prennent place. Pour finir, les modèles développés sont appliqués au cas de la simulation de la propagation et de la diffraction des ondes guidées dans une canalisation coudée, nous permettant d'étudier l'influence de différents paramètres tels que la fréquence ou la courbure dans le cadre d'une étude multi-paramétrique.

Le quatrième et dernier chapitre est dédié aux validations des modèles développés. Ainsi, dans un premier temps, des résultats prédits par notre modèle complet sont comparés à des résultats numériques et expérimentaux de la littérature ; les cas comparés concernent à la fois des résultats réalisés dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel. Dans un second temps, nous présentons la campagne d'essais expérimentaux menée au CETIM sur des maquettes de canalisations coudées, essais destinés à confirmer et à identifier en pratique les phénomènes de diffraction et de conversion de modes mis en évidence par les simulations numériques effectuées avec le modèle complet. Enfin, quelques résultats d'études paramétriques sont proposés. Ces simulations illustrent les possibilités offertes par les modèles développés dans le choix des paramètres de contrôle pour l'inspection par ondes élastiques guidées d'une ligne de canalisations comportant un ou plusieurs coudes.

CHAPITRE 1. CONTEXTE ET ENJEUX DES CONTROLES NON DESTRUCTIFS PAR ONDES ELASTIQUES GUIDEES

1. Introduction.....	12
1.1. Les ondes guidées.....	13
1.2. Génération des ondes guidées dans des canalisations.....	22
2. Le contrôle de lignes de canalisations par ondes guidées.....	28
2.1. Descriptions d'une ligne de canalisations	28
2.2. Détection de défauts ou d'endommagements par ondes guidées	31
3. État de l'art sur la simulation des CND par ondes guidées pour les canalisations.....	32
3.1. Propagation des ondes guidées	32
3.2. Diffraction des ondes guidées.....	34
3.3. Revue des outils de CIVA en vue de la simulation du CND par ondes guidées de réseaux canalisations.....	35
4. Conclusion	37

1. Introduction

Parmi les différentes méthodes ultrasonores existantes, les techniques de contrôles non-destructifs (CND) par ondes ultrasonores guidées suscitent un grand et large intérêt [4] depuis quelques années à la fois de la part de la communauté industrielle mais également de celle de la recherche académique [5] [6].

Au niveau industriel, en raison de sa propension à se propager sur de longues distances sans atténuation, ce type d'ondes élastiques apparaît particulièrement adapté pour des contrôles d'installations constituées de structures minces de grandes dimensions comme les tubes ou les plaques [7] [8] [9] ou possédant des zones difficilement accessibles (Figure I-1). Si l'on compare les techniques entre elles, on s'aperçoit en effet que le contrôle de grandes et larges structures par des techniques de contrôle conventionnelles (ondes ultrasonores de volume, courant de Foucault, radiographie...) peut s'avérer fastidieux et coûteux, puisque ces dernières sont plutôt adaptées à des contrôles de zones réduites se limitant généralement à la surface effective du traducteur utilisé, le contrôle de zones plus étendues nécessitant un déplacement des moyens de contrôle. À l'inverse, les techniques d'inspection par ondes guidées sont des méthodes de contrôles dites globales et restent assez souvent qualitatives. Ainsi, dans le cas d'une inspection de canalisations, l'objectif premier d'un contrôle par ondes guidées est de fournir des informations sur la présence ou non d'un éventuel défaut ou endommagement au sein de la pièce inspectée sans forcément chercher à le caractériser, entraînant ainsi un gain de temps conséquent. Ensuite et selon les résultats obtenus, des techniques locales plus quantitatives peuvent être mises en œuvre afin de mieux caractériser ces éventuels défauts ou endommagements.

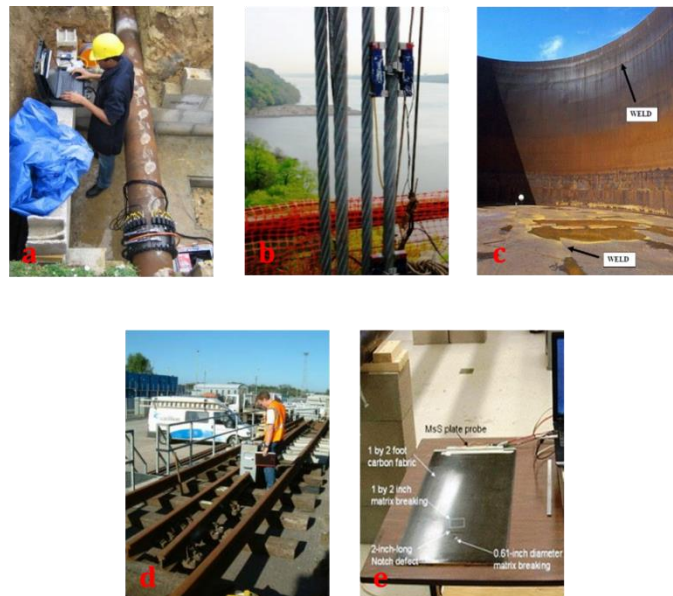


Figure I-1 : Exemples de structures industrielles susceptibles d'être contrôlées par ondes élastiques guidées : (a) canalisations [10], (b) câbles [11], (c) réservoirs de stockage, (d) rails [12], (e) plaques composites [11]

D'un point de vue théorique, l'étude des ondes guidées constitue un axe de recherche captivant [13] [14] puisqu'il demande la résolution d'un grand nombre de problèmes physiques tels que la propagation au sein de structures de géométrie et de matériaux variés ou l'interaction avec des défauts ou des endommagements de nature complexe. Jusqu'à présent les ondes guidées sont moins exploitées en CND que les techniques usuelles, l'une des raisons principales pour cela tenant à la difficulté d'interprétation des signaux expérimentaux typiques de ces méthodes. Leur complexité résulte de celle des phénomènes associés à la propagation et à la diffraction des ondes guidées, au premier chef desquels figurent les caractères multi-modal (à

une fréquence donnée, il existe plusieurs modes) et dispersifs (la vitesse d'un mode guidé varie avec la fréquence). Ainsi, la maîtrise de l'influence de ces deux propriétés sur les résultats d'une inspection est au cœur de nombreux travaux de recherche et fait notamment appel au développement de nouvelles méthodes d'émission et de réception des ondes. Parallèlement à ces travaux, de nombreuses études visent à une meilleure compréhension des phénomènes de diffraction lors de l'interaction des ondes guidées avec des perturbations géométriques et matérielles au sein de la structure guidante.

Face à ces différentes problématiques, la simulation peut constituer un apport considérable à la maîtrise de la complexité des phénomènes de génération, de propagation, de diffraction et de réception des ondes guidées en CND. Le développement de modèles numériques adaptés aux ondes guidées est donc essentiel afin de disposer d'outils adaptés à ce type de contrôle. Les enjeux sont dans un premier temps, d'optimiser le choix des paramètres de contrôle et, dans un second temps, de faciliter la compréhension et l'interprétation des signaux d'acquisition mesurés lors des contrôles.

Dans ce chapitre, nous traiterons en premier lieu des aspects théoriques de la propagation des ondes guidées puis nous dresserons un état de l'art des différents développements liés à leur utilisation en CND. Dans un deuxième temps, nous nous concentrerons plus particulièrement sur le CND de canalisations industrielles à l'aide de ces ondes et décriront à la fois des systèmes techniques traditionnellement employés pour la génération et la sélection des modes, mais aussi des outils disponibles pour la simulation des opérations de contrôle par ondes guidées.

1.1. Les ondes guidées

1.1.1. Guide d'onde uniforme

Généralement, que ce soit dans le cas des ondes acoustiques, élastiques ou, électromagnétiques, on appelle guide d'ondes un milieu délimité par des frontières qui forcent les ondes à se propager suivant une seule ou un ensemble de directions. Pour notre cas correspondant à des structures solides élastiques, la propagation est donc régie par les équations de mouvement auxquelles s'ajoutent des conditions aux limites. Ces dernières traduisent l'influence à la fois de la géométrie du guide et de son milieu environnant sur la propagation des ondes. Rappelons ici que les contrôles industriels mettant en œuvre des ondes élastiques guidées portent, le plus souvent, sur des géométries de plaques d'épaisseur fixe ou des géométries cylindriques de section invariable (Figure I-4).

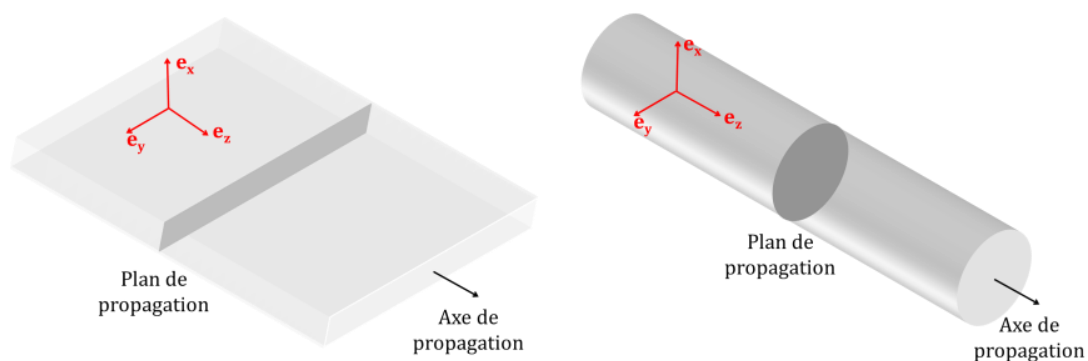


Figure I-2: illustration des guides d'ondes canoniques

Du point de vue physique, ces ondes élastiques peuvent être interprétées comme résultant des phénomènes de réflexions multiples sur les surfaces du guide que subissent les ondes volumiques transverses et longitudinales se propageant dans une structure mince (l'épaisseur de la pièce est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde). Le couplage de ces deux types d'interférences crée des ondes ultrasonores guidées qui sont excitées dans toute l'épaisseur et suivant l'axe de propagation. Il existe différentes classifications pour les modes

guidés suivant la géométrie du guide et les conditions limites à l'interface du guide avec l'extérieur (ou éventuellement avec l'intérieur). Ces modes portent en général le nom de leur découvreur : modes de Lamb [15], modes de Pochhammer-Chree [16], les ondes de Rayleigh [17], les ondes de Love [18]....

1.1.2. Ondes guidées dans les plaques

La propagation des ondes guidées dans les plaques a fait l'objet de nombreuses travaux et publications parmi lesquelles on peut citer notamment l'ouvrage de Viktorov [19] qui s'est intéressé à la génération des ondes guidées en milieu isotrope, les travaux de Nayfeh et *al.* [20] qui ont étendu l'analyse au cas de plaques anisotropes ou bien encore ceux de Haskell [21] qui concernent les milieux stratifiés.

Ici, nous présentons, de manière succincte, quelques notions de propagation d'ondes élastiques dans une plaque. Ainsi, dans une plaque libre, homogène, isotrope et parfaitement élastique, ayant une épaisseur du même ordre de grandeur que les longueurs d'ondes, on retrouve deux familles d'ondes guidées différentes en fonction de leur polarisation : les modes SH (Shear horizontal) et les modes de Lamb [15]. Cette dernière famille de modes se décompose quant à elle en des modes symétriques S et antisymétriques A suivant les symétries du champ de déplacement dans l'épaisseur du guide. La Figure I-3 montre les déformées typiques de ces familles de modes de plaques :

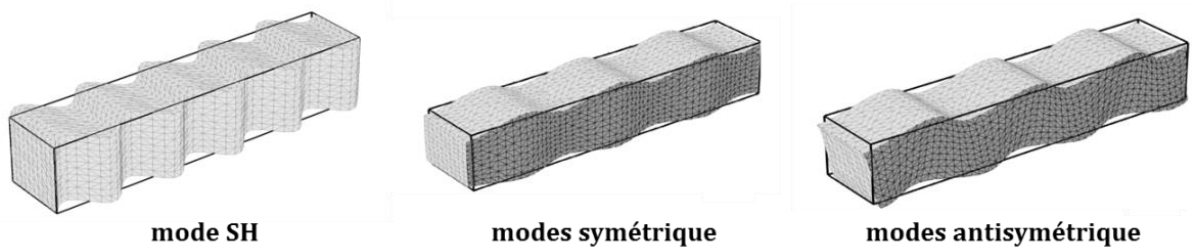


Figure I-3: illustration des déformées des modes SH et des modes de Lamb (symétriques et antisymétriques) pouvant se propager dans une plaque d'après [22]

Les modes sont numérotés par un indice correspondant à leur ordre d'apparition en fonction de la fréquence. De plus, chaque mode possède différentes grandeurs physiques comme la vitesse de groupe, la vitesse de phase, le nombre d'onde, qui le différencient des autres. Ces grandeurs peuvent être représentées en fonction de la fréquence sous la forme de courbes de dispersions comme montré sur la Figure I-4 .

Ces courbes illustrent parfaitement le phénomène de dispersion, c'est-à-dire, la dépendance de la vitesse de phase d'un mode vis-à-vis de la fréquence et ce, pour l'ensemble des modes à l'exception du SH_0 . On peut également remarquer que les modes S_0 et A_0 deviennent non dispersifs à haute fréquence car leur vitesse de phase tend vers une vitesse constante et égale à la vitesse des ondes de Rayleigh. Par ailleurs, les modes SH_0 , A_0 et S_0 sont les seuls modes ne présentant pas de fréquences de coupure, la fréquence de coupure d'un mode étant la fréquence en dessous de laquelle le mode n'existe pas en tant que mode propagatif.

Enfin, à ces modes de plaque, on peut ajouter les ondes de Rayleigh [17] qui apparaissent lorsque l'épaisseur du guide est grande par rapport à la longueur d'onde des modes excités dans la structure. Ces ondes sont propagatives à la surface du guide et évanescentes dans son épaisseur.

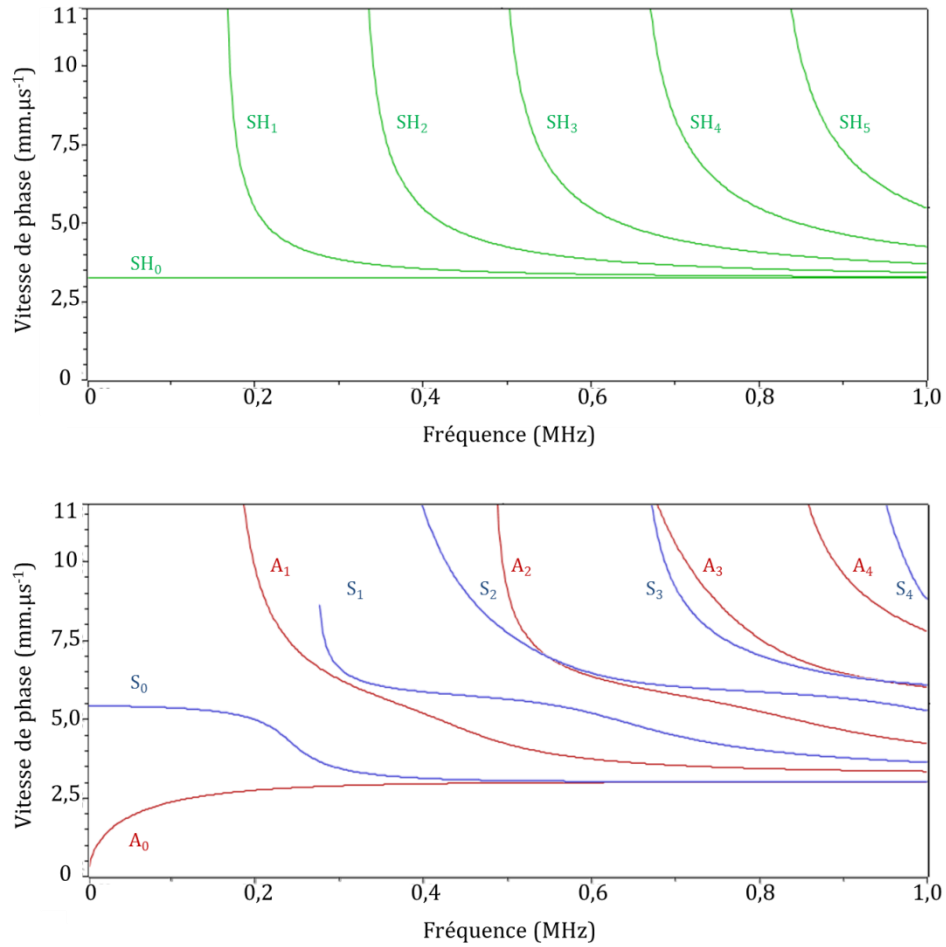


Figure I-4 : Courbes de dispersion en vitesse de phase pour les modes SH et les modes de Lamb dans une plaque en acier ($\rho = 7,8 \text{ g.cm}^{-3}$, $C_T = 3,23 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$, $C_L = 5,9 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$) libre, isotrope et homogène d'épaisseur 10 mm obtenues par le logiciel CIVA [2]

1.1.3. Ondes guidées dans les cylindres

La propagation des ondes guidées dans des géométries cylindriques a également été largement étudiée par le passé [23] [24] [25] et notamment dans le cas des tubes [26] [27] [28] dont il est ici sujet. Pour ce type de géométries, les modes guidés se propagent le long de l'axe principal de la structure et dans toute l'épaisseur de la section transverse. Les modes propagatifs sont appelés modes de Pochhammer-Chree [29] [16] et se répartissent, à l'image des modes de Lamb et des modes SH dans les plaques, en trois familles, selon l'allure de leur déformée et les caractéristiques de leur champ de déplacement. Ainsi, ces modes peuvent être soit des modes de torsion, soit des modes de compression, soit encore des modes de flexion comme le montre la Figure I-5, tirée de [30], qui représente les déformées de ces différents modes pour un guide cylindrique :



Figure I-5 : illustration des déformées des modes de Pochhammer-Chree dans un guide cylindrique d'après [30]

Ces déformées permettent de voir que les modes de torsion et de compression, notés respectivement $T(0,m)$ et $L(0,m)$ $m > 0$ et contrairement aux modes de flexion, sont axisymétriques par rapport à l'axe du guide. Dans la suite, nous présenterons des résultats issus de simulations du logiciel CIVA [2] dans le cas d'un cylindre creux afin de mettre en évidence certaines propriétés des ondes guidées qui diffèrent de celles connues dans le cas d'un cylindre plein comme l'a expliqué Pavlakovic dans sa thèse [23].

La Figure I-4 donne des exemples, dans le cas d'un tube paramétré dans le repère cylindrique (r, θ, z) , des composantes de déplacement radial U_r , orthoradial U_θ et axial U_z calculées dans la section pour un mode appartenant à chacune des trois familles :

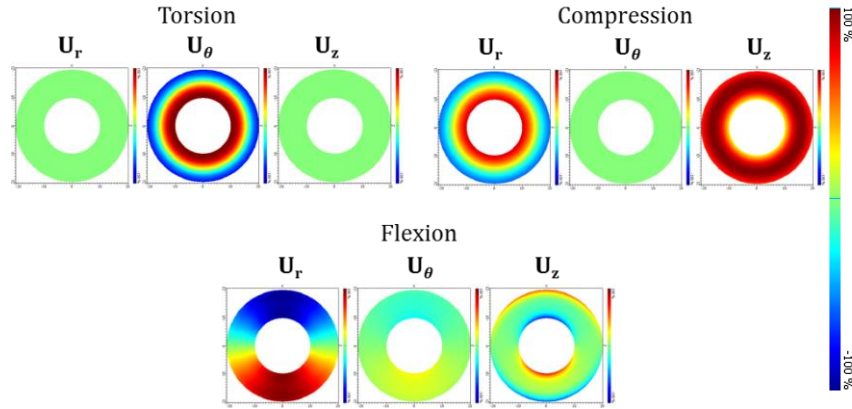


Figure I-6: Exemples obtenus par le logiciel CIVA [2] de profils de déplacements, dans la section, des modes propagatifs $T(0,1)$, $L(0,2)$ et $F(1,1)$, dans un tube en acier ($\rho = 7,8 \text{ g.cm}^{-3}$, $C_T = 3,23 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$, $C_L = 5,9 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$) de diamètre extérieur 40mm et d'épaisseur 10mm à la fréquence de 200kHz

Les modes de torsion sont des modes axisymétriques dont la composante de déplacement orthoradial u_θ est prépondérante, les composantes radiale u_r et axiale u_z sont quant à elles nulles. Les modes de compression sont également axisymétriques mais possèdent, à l'inverse des modes de torsions, des composantes radiale et axiale prépondérantes et une composante orthoradiale nulle. Enfin, concernant les modes de flexions, leur champ de déplacement se compose des trois types de déplacements et ne présente pas d'axisymétrie.

Les ondes propagatives sont notées T pour les modes de torsion, L pour les modes longitudinaux également appelés modes de compression et F pour les modes de flexion. Les modes d'une même famille sont distingués à l'aide d'une notation comportant deux nombres, $T(0,n)$, $L(0,n)$ et $F(m,n)$ avec $n \geq 1$ et $m \in \mathbb{Z}$, faisant référence à leur ordre d'apparition. Nous reviendrons plus en détails sur cet aspect de classification dans le chapitre 2.

Les courbes de dispersion en vitesse de phase pour l'exemple de calcul choisi précédemment ont été simulées par le logiciel CIVA [2] et sont données dans la Figure I-4 en séparant les modes de flexion des modes de torsion et de compression.

Ces courbes indiquent que le mode de torsion $T(0,1)$ est le seul mode non dispersif et que sa vitesse de phase est égale à la vitesse des ondes volumiques transverses $C_T = 3,23 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$. Ce mode partage ainsi des caractéristiques communes à celles du mode SH_0 dans les plaques. Pour le cas présenté ici, le mode $T(0,1)$ est l'unique mode de torsion sur une large bande fréquentielle allant de 0kHz jusqu'à environ 180kHz, c'est-à-dire jusqu'à l'apparition du second mode de torsion $T(0,2)$ qui, comme tous les suivants, est dispersif (cette plage fréquentielle varie suivant les caractéristiques du guide). Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, cette propriété du mode $T(0,1)$ combinée à celle de non-dispersion est extrêmement utile en CND. Enfin, la Figure I-8, représentant les courbes de dispersion en vitesse de phase des modes de

torsion et de compression sur une plage fréquentielle allant de 0 à 0,5MHz, permet de vérifier d'une part que d'autres modes de torsion apparaissent au fur et à mesure que la fréquence augmente et d'autre part que leur vitesse décroît vers la vitesse des ondes volumiques transverses C_T .

Concernant les modes de compression, le mode L(0,1) commence à une vitesse correspondant à la vitesse de barre définie par $V_b = \sqrt{E/\rho}$ (avec $E=210GPa$ le module de Young de l'acier et ρ la masse volumique) avant de décroître et de tendre vers la vitesse des ondes de Rayleigh. Ce mode se comporte de façon similaire au mode S_0 dans une plaque. Le second mode de compression L(0,2) possède une fréquence de coupure à laquelle la vitesse de phase est infinie et au-delà de laquelle la vitesse décroît, dans un premier temps vers la vitesse de Young donnée par $V_e = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ ($\nu = 0,31$ étant le module de Poisson de l'acier) avant de diminuer une nouvelle fois et de tendre, à l'instar du mode L(0,1), vers la vitesse de Rayleigh comme l'illustre la Figure I-8 (a). cette propriété n'est pas vérifiée dans un cylindre plein dans lequel la vitesse du mode L(0,2) tend vers la vitesse C_T . Par ailleurs, ce second mode de compression a l'avantage d'être peu dispersif sur la plage de fréquences où sa vitesse est proche de la vitesse de Young et d'avoir une vitesse de groupe élevée (qui aide à facilement l'identifier) et proche de la vitesse des ondes volumiques longitudinales C_L sur cet intervalle comme montré sur la Figure I-8 (b) ; pour ces raisons, ce mode est également privilégié en CND comme nous le verrons en détail dans la suite. Enfin les modes de compression d'ordre plus élevé apparaissent à des fréquences plus grandes et leur vitesse de phase tend vers la vitesse des ondes volumiques transverses C_T .

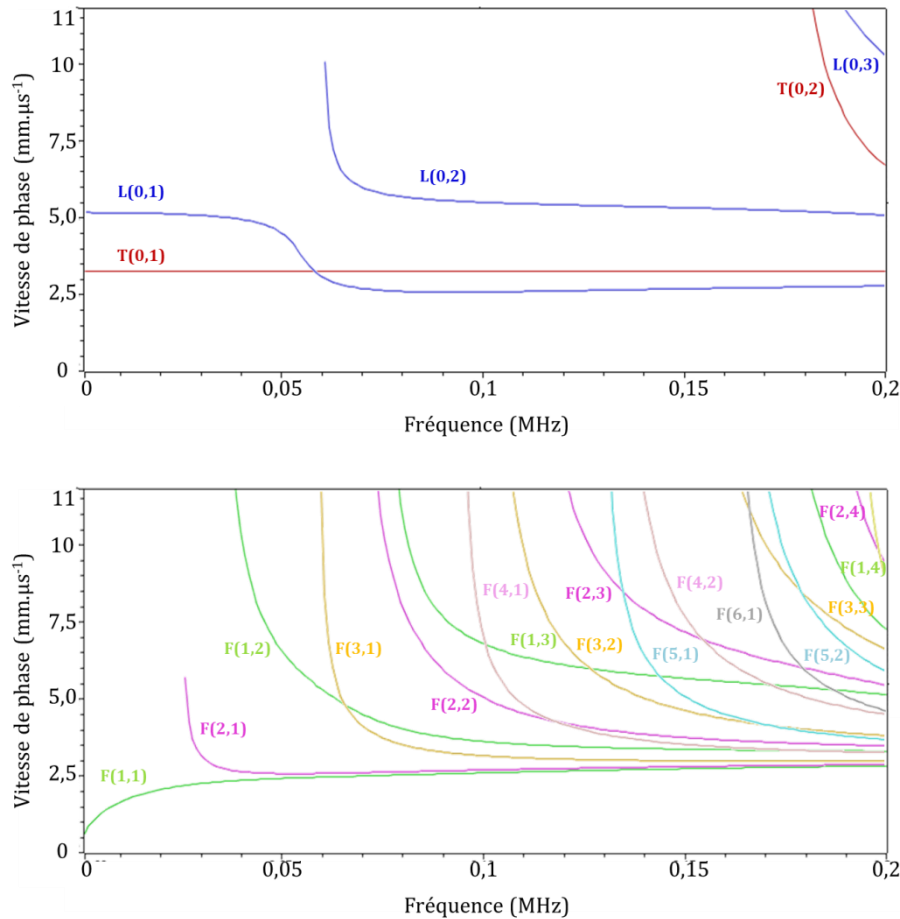


Figure I-7 : Courbes de dispersion en vitesse de phase pour les modes de Pochhammer-Chree dans un tube en acier ($\rho = 7,8g.cm^{-3}$, $C_T = 3,23mm.\mu s^{-1}$, $C_L = 5,9mm.\mu s^{-1}$) libre, isotrope et homogène de diamètre 40mm et d'épaisseur 10 mm obtenu par CIVA [2].

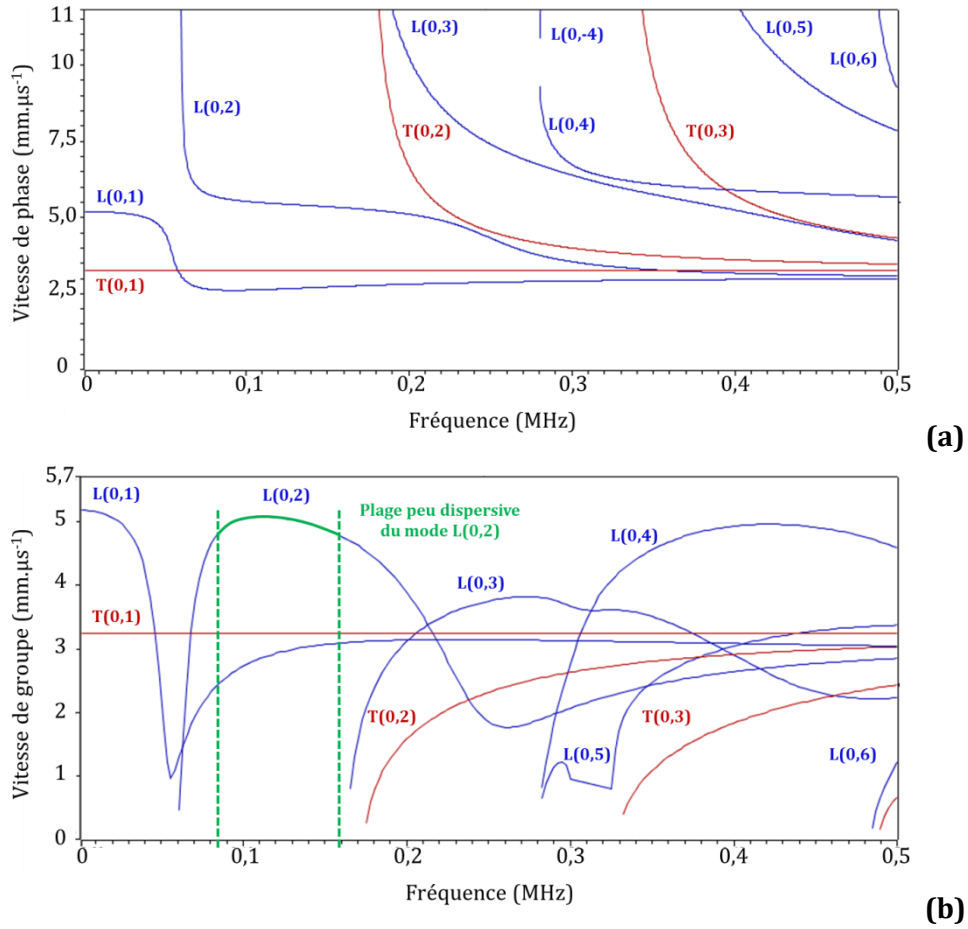


Figure I-8 : Courbes de dispersion en vitesse de phase (a) et vitesse de groupe (b) pour les modes de compressions L et de torsions T dans un tube en acier ($\rho = 7,8 \text{ g.cm}^{-3}$, $C_T = 3,23 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$, $C_L = 5,9 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$) libre, isotrope et homogène de diamètre 40mm et d'épaisseur 10 mm obtenues par le logiciel CIVA [2] sur l'intervalle de fréquences [0,500kHz]

Les modes de flexions sont quant à eux tous dispersifs et sont, en comparaison des deux autres familles de modes, beaucoup plus nombreux. À titre d'exemple, on compte 17 modes de flexions pour deux modes de torsions et trois modes de compressions à 200kHz sur l'exemple de calcul Figure I-7. Le premier mode de flexion $F(1,1)$ a un comportement, en vitesse de phase, similaire au premier mode antisymétrique A_0 dans une plaque. En effet, cette dernière augmente à basse fréquence et tend vers la vitesse de Rayleigh au même titre que les modes $L(0,2)$ et $L(0,1)$. De manière générale, les modes de flexions sont moins utilisés en CND des réseaux de canalisations car ils sont plus nombreux, très dispersifs et difficilement différenciables les uns des autres.

À haute fréquence, les modes $F(1,1)$, $L(0,1)$ et $L(0,2)$ présentent des déplacements qui se concentrent à proximité des surfaces interne et externe du guide comme le montre la Figure I-9. Ce comportement est analogue à celui des ondes A_0 et S_0 à haute fréquence dans une plaque. Rappelons ici, que lors d'une inspection, le profil des déplacements et des contraintes des modes est un critère déterminant pour détecter un type de défaut donné. Ainsi, les précédents modes pourraient servir à détecter les défauts en surface du guide mais ne seront pas adaptés à la détection de défauts internes.

Pour finir, on peut noter que les modes $F(1,1)$, $L(0,1)$, $T(0,1)$, qualifiés généralement de modes fondamentaux, sont les seuls ne possédant pas de fréquence de coupure. On peut également

remarquer la présence, sur la Figure I-8, d'un mode rétrograde (sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant), en l'occurrence ici le mode $L(0,-4)$.

Enfin, dans le cas de tubes dont les rayons interne et externe sont très grands devant les longueurs d'ondes, on peut considérer que le comportement des ondes guidées tend vers celui des modes de plaques [31], comme le laisse paraître la similitude des courbes de dispersion dans un cas et dans l'autre.

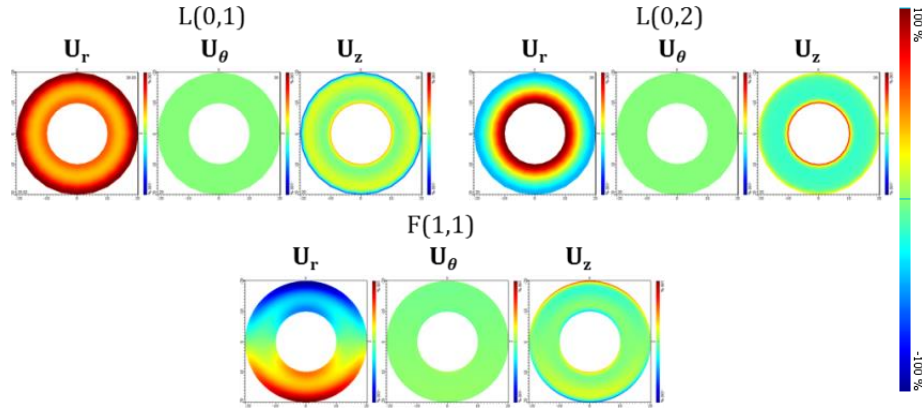


Figure I-9 : Profils de déplacements, dans la section, des modes $L(0,1)$, $L(0,2)$ et $F(1,1)$, dans un tube en acier ($\rho = 7,8 \text{ g.cm}^{-3}$, $C_T = 3,23 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$, $C_L = 5,9 \text{ mm.}\mu\text{s}^{-1}$) de diamètre extérieur 40mm et d'épaisseur 10mm à la fréquence de 500kHz

1.1.4. Analyse des paramètres influents lors d'un contrôle par ondes guidées de canalisations

Lors d'un contrôle de canalisations par ondes guidées, l'inspection consiste à émettre un champ ultrasonore suivant une direction donnée ; ce dernier se propage et interagit avec les éventuelles perturbations présentes sur les lignes contrôlées. Du fait du caractère multimodal des ondes guidées, le signal mesuré est le plus souvent composé de plusieurs échos émanant des contributions de différents modes propagatifs. La forme de ces échos ainsi que leur temps d'arrivée dépendent essentiellement de la nature des modes qui les composent. À ce caractère multimodal vient s'ajouter le phénomène de dispersion des modes guidés qui se traduit par un étalement temporel des échos des différents modes en fonction de la distance entre l'émetteur et la perturbation qui crée l'écho. La Figure I-7 illustre un exemple des conséquences, en temporel, des caractères multimodal et dispersif des ondes guidées :

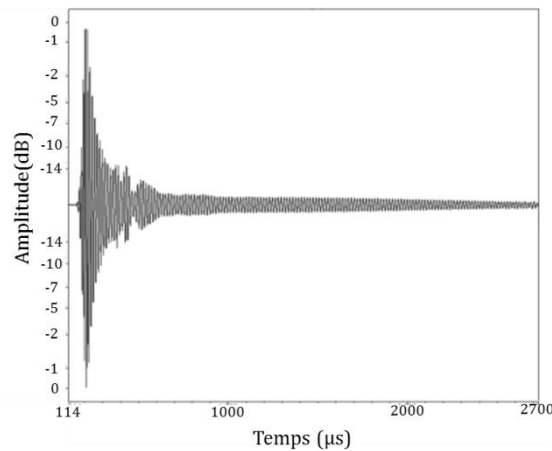


Figure I-10: Ascan obtenu pour une réflexion totale sur un bout de tube en acier de diamètre 40mm et d'épaisseur 10mm. Le traducteur émet en mode piston et est situé à 200mm du défaut et est excité avec un signal de trois cycles fenêtré par une gaussienne et centré sur 40kHz

Comme indiqué en introduction de ce chapitre, la combinaison de ces deux phénomènes donne lieu à des signaux temporels complexes dont l'interprétation est un enjeu majeur. Indépendamment des caractéristiques de la canalisation contrôlée, la complexité de ces signaux dépend de plusieurs paramètres dont les principaux sont le signal d'excitation employé (fréquence et bande passante), le(s) transducteur(s) utilisé(s) pour l'émission et pour la réception et le choix du ou des modes émis.

La fréquence :

La fréquence de contrôle détermine directement le nombre de modes susceptibles de se propager au sein de la canalisation en tenant compte de ses dimensions (diamètre externe et épaisseur) et de sa composition matérielle. Elle fixe également la valeur des grandeurs physiques caractérisant chaque mode : vitesses de phase, vitesse de groupe, nombre d'onde et atténuation. L'impact de cette dernière grandeur physique doit être pris en compte notamment lorsque des phénomènes de fuite à travers les parois de la canalisation ont lieu à cause de son enfouissement ou de la présence d'un fluide à l'intérieur. Par ailleurs, l'augmentation de la fréquence accroît le nombre de modes propagatifs ce qui complexifie la structure échographique des signaux de contrôles.

À l'instar des CND par ultrasons conventionnels, cette fréquence définit la longueur d'onde des modes émis et influence, par conséquent, la résolution spatiale et donc les dimensions de défaut que l'on peut détecter lors du contrôle.

Globalement, les systèmes de génération d'ondes guidées dans les canalisations (sur lesquels nous reviendrons dans ce chapitre) fonctionnent sur un intervalle fréquentiel variant de 0 à 250kHz, plage fréquentielle significativement plus basse que celle employée en CND par ondes de volume ; elle est choisie afin de limiter le plus possible le nombre de modes propagatifs.

Le choix du ou des modes émis :

En CND par ondes guidées, la sélection du ou des modes avec lesquels on réalise le contrôle est essentielle afin de limiter la complexité des signaux acquis. Dans le cas des plaques comme l'explique Wilcox [32], ce choix doit tenir compte de plusieurs critères : on peut citer ici la sensibilité du mode, sa dispersion, son excitabilité, sa sélectivité, et son atténuation.

En contrôle de canalisations, les modes propagatifs principalement employés sont les modes $T(0,1)$ et $L(0,2)$ [33]. Il est vrai que l'utilisation du mode de torsion fondamental paraît naturelle lorsqu'on souhaite détecter des défauts [34] : ce mode est non dispersif, ne possède pas de fréquence de coupure et, étant composé uniquement d'un déplacement orthoradial, il offre l'avantage de ne pas subir de phénomène de fuite lorsque la canalisation contient un fluide peu ou pas visqueux. De plus, il est souvent le seul mode de torsion présent aux fréquences de travail utilisées ; on peut donc le créer simplement à l'aide de transducteurs générant un déplacement orthoradial sans risquer d'exciter d'autres modes de torsion d'ordre plus élevé. Par rapport au mode $L(0,2)$, ce mode de torsion est donc indéniablement le mode privilégié pour le contrôle de canalisations en raison de sa faculté à s'affranchir le mieux d'une grande partie des contraintes intrinsèques aux ondes guidées.

Néanmoins, de par ses composantes radiales et axiales prépondérantes, l'utilisation du mode $L(0,2)$ [35] [36] comme mode de contrôle peut s'avérer nécessaire lorsque les perturbations recherchées sont moins sensibles aux sollicitations orthoradiales du mode $T(0,1)$. Par ailleurs, l'exploitation d'une fréquence d'émission plus élevée a comme avantage de concentrer l'énergie ultrasonore de ce mode au niveau des surfaces interne et externe du tube et ainsi d'améliorer la détectabilité des défauts de surface qui, dans certaines situations, se révèlent très nocifs pour la structure. En revanche, le choix de ce mode de contrôle nécessite de recourir à des techniques capables d'annuler la contribution du mode $L(0,1)$.

Bien évidemment, l'emploi d'autres modes dans certaines situations peut être utile, comme décrit dans la référence [37] avec l'exploitation des modes de flexions pour le contrôle de coudes ou bien encore dans la référence [38] où ces ondes de flexions sont exploitées afin d'assurer la focalisation des champs élastodynamiques sur des zones précises. En résumé, on peut conclure que, dans le cas des canalisations, la sélection du mode de contrôle doit tenir compte de la sensibilité du mode par rapport soit au type de défauts recherché, soit à la géométrie du guide que l'on souhaite inspecter comme l'explique Ditri et *al.* en référence [39] dans le cas des plaques.

Le traducteur d'émission et le signal d'excitation utilisé :

Généralement, les paramètres de l'émission dépendent directement du type de traducteur et des caractéristiques du signal d'excitation (principalement sa bande passante). Par exemple, la sélection du seul mode fondamental de torsion $T(0,1)$ résulte à la fois de l'utilisation d'un traducteur à sollicitation orthoradiale et d'un signal d'excitation dont la bande passante fréquentielle se situe en dessous des fréquences de coupure des modes de torsion d'ordre plus élevé, à commencer par le mode $T(0,2)$ (Figure I-11).

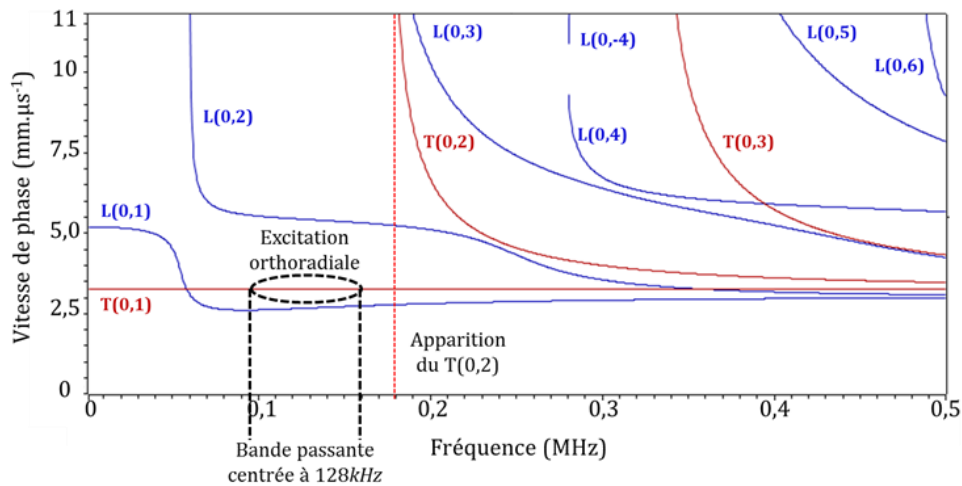


Figure I-11 : Zone d'excitation du mode $T(0,1)$ pour un signal centré à 128kHz ayant une bande passante à -6dB comprise entre 96 et 160kHz (deux cycles temporels) fenêtré par une fonction de Hanning et employé pour un traducteur générant des sollicitations orthoradiales

Le traducteur utilisé pour l'émission et/ou la réception définit le type de sollicitation (cisaillement, mode piston...) appliquée pour la génération et donc la composition modale du champ émis. Il existe actuellement plusieurs types de traducteurs exploitant différentes technologies et permettant la génération d'ondes élastiques : le traducteur piézoélectrique à angle variable [40], le traducteur piézoélectrique multiélément, le traducteur EMAT [41] (Electro Magnetic Acoustic Transducer), la génération par laser, les patches magnétostrictifs, le traducteur interdigital.... Industriellement, les principaux systèmes de contrôle par ondes guidées sont à technologie piézoélectrique ou magnétostrictive.

Enfin, les signaux temporels employés pour l'excitation des modes guidés se composent d'un certain nombre de cycles de sinusoides modulées en amplitude (« fenêtrées ») à l'aide de fonctions de Hanning, de fonctions Gaussienne, etc.... Le nombre de sinusoides et la fréquence du signal déterminent l'étendue spectrale du train d'onde ainsi que sa résolution temporelle. Plus le signal d'excitation est de courte durée temporelle, plus il est aisé *a priori* de séparer, à la réception, les différents échos engendrés par les perturbations présentes dans la canalisation inspectée ; mais l'importante largeur de bande passante accentue l'effet de la dispersion, qui se

traduit par la déformation, l'étalement temporel de ces signaux et une mauvaise sélectivité des modes. À l'inverse, un train d'onde temporellement étendu limite ces inconvénients, mais n'offre qu'une faible résolution temporelle. Il y a donc un compromis à faire qui doit tenir compte à la fois de tous les paramètres de contrôles exposés mais aussi des caractéristiques des canalisations contrôlées.

La réception :

Du fait des phénomènes de diffraction et de conversions de modes, les signaux obtenus lors d'un contrôle comportent généralement les contributions de plusieurs modes propagatifs, et ce, malgré l'utilisation d'une émission unimodale. L'enjeu de la réception consiste donc à identifier l'origine et la nature des différents échos qui composent le signal mesuré. Il existe plusieurs techniques permettant d'identifier les différents paquets d'ondes : on peut par exemple faire des mesures de leur vitesse, réaliser des Bscans à partir de Ascans successifs, utiliser une transformée de Fourier inverse [42] ou bien encore, appliquer une transformée de Fourier bidimensionnelle (BiFFT) [43] [22]. C'est, à titre d'exemple, cette dernière technique qui a été mise en œuvre dans le cadre de nos campagnes d'essais. Elle sera d'ailleurs exposée plus longuement dans le chapitre IV. En outre, dans certaines situations, la mise en œuvre de techniques de focalisation [44] ou d'outils de traitement de signaux plus développés en réception se révèle nécessaire pour améliorer la sensibilité du contrôle et ainsi mener des opérations de caractérisation de défauts [26] [45]. En résumé, la maîtrise de l'ensemble des paramètres présentés ici aide, en tout état de cause, à simplifier l'interprétation des signaux d'acquisition.

1.2. Génération des ondes guidées dans des canalisations

Après avoir présenté les principaux paramètres d'inspection et leur influence lors de l'inspection, nous décrivons dans cette section les principaux systèmes de génération d'ondes guidées destinés aux contrôles de canalisations ainsi que les méthodes utilisées pour contrôler la direction d'émission en fonction du type de mode généré.

1.2.1. Systèmes de génération des ondes guidées dans des canalisations

En réponse à la forte demande industrielle en systèmes de contrôle non destructif par ondes guidées, plusieurs systèmes dédiés à l'inspection de canalisations existent actuellement sur le marché. Ces dispositifs génèrent dans la majorité des cas les modes $T(0,1)$ et $L(0,2)$ qui, comme expliqué précédemment, présentent d'une part, des caractéristiques d'axisymétrie et de non-dispersion intéressante pour l'interprétation des signaux et d'autre part, des profils de déplacement et de contrainte adaptés à la détection des défauts.

On recense quatre principaux systèmes de génération d'ondes guidées pour l'inspection des canalisations :

Le « Teletest » de « Plant Integrity LTD » (Pi) filiale de TWI (The Welding Institute) [46]

Le « Teletest » est un système piézoélectrique fonctionnant en mode pulse/echo (émission et réception confondues) et utilisant des colliers en composites de différentes tailles afin de s'adapter aux différents diamètres des tubes et de permettre, par le biais d'une pompe hydraulique, de réaliser le couplage mécanique entre les transducteurs et la canalisation. Chaque collier est composé de plusieurs modules comportant des transducteurs piézoélectriques générant selon les besoins et leur configuration les modes $T(0,1)$ (2 transducteurs) et $L(0,2)$ (3 transducteurs). Les plages fréquentielles choisies se situent généralement entre 20 et 250kHz. En réception, les transducteurs piézoélectriques détectent soit le déplacement orthoradial dans le cas d'une inspection en mode de torsion ou le déplacement axial lors d'un contrôle en compression. Le système dispose également de fonctions de focalisation offrant la possibilité de concentrer l'énergie ultrasonore en des zones précises de la circonférence afin d'améliorer la détectabilité des éventuels défauts ou endommagement.



Figure I-12: Photo du système de génération d'ondes guidées « Teletest » de Pi [46]

Le « Wavemaker » de « Guided Ultrasonics LTD » (GUL) [47]

C'est un second système piézoélectrique similaire au « Teletest » avec un fonctionnement en mode pulse/echo. Cependant, le système peut fonctionner à des gammes de fréquences plus élevées que ceux du Teletest (jusqu'à 500kHz). Il est constitué d'anneaux comportant plusieurs modules de transducteurs piézoélectriques (à partir de deux transducteurs). Le couplage avec la canalisation est également réalisé à l'aide d'une pompe à air. Le mode généré pour le contrôle est principalement le $T(0,1)$. Enfin, le système dispose d'un procédé de focalisation servant à améliorer la détectabilité des défauts en augmentant l'amplitude de leur réponse.



Figure I-13: Photo du système de génération d'ondes guidées « Wavemaker G4 » produit et commercialisé par GUL [47]

Le système magnétostrictif « MsS » de « Guided Wave Analysis LLC » (GWA) [46]

Ce troisième système exploite des « patches » magnétostrictifs (généralement en Fer/ Cobalt) collés sur la circonférence du tube et magnétisés grâce à un aimant permanent. Ces « patches » sont mis en vibration à l'aide d'un champ magnétique créé par des bobines les entourant. Le mouvement de ces « patches » se transmet ensuite dans la pièce et crée des modes guidés qui vont se propager le long de l'axe de la canalisation. Les inspections peuvent être réalisées en mode pulse/echo avec un seul « patch » ou en mode pitch/catch (émission et réception séparées) avec plusieurs. On mesure généralement le déplacement orthoradial et donc principalement le mode $T(0,1)$. L'excitation du mode $L(0,2)$ est théoriquement possible mais se révèle complexe puisqu'elle nécessite un collage particulier des « patches » en plusieurs morceaux. Les fréquences centrales de contrôle sont plutôt basses et valent 8, 16, 32, 45, 64, 128, 180 et 250kHz avec une exploitation plus importante des fréquences entre 32 et 128kHz. Ces valeurs ne sont pas anodines puisqu'elles sont définies de façon à sélectionner la direction d'émission des ondes guidées dans la canalisation en favorisant un sens de propagation par rapport à l'autre par des méthodes d'interférences constructives et destructives qu'on présentera dans la suite de ce chapitre. Enfin, ce système comporte un dispositif de focalisation sectoriel capable de focaliser les champs ultrasonores à différentes distances de l'émetteur et ainsi d'améliorer la sensibilité.



Figure I-14: Photo du système magnétostrictif (MsS) de génération d'ondes guidées GWA [46]

En comparaison des dispositifs piézoélectriques, les patches magnétostrictifs ont l'avantage de pouvoir être utilisés en pitch/catch et permettent de générer des champs dp,t la limite de champ proche est plus courte du fait de ce que l'excitation est uniforme sur toute la circonférence du guide. En contrepartie, les phases de collage et de magnétisation des patches peuvent s'avérer longues et compliquées lorsque, par exemple, les conditions météorologiques ne favorisent par la polymérisation de la colle époxy employée.

Le système « Ultrawave LRT » de « Olympus » [48]

Ce dernier système de génération est le plus récent peu ou pas encore utilisé industriellement. Comme les systèmes « Teletest » et du « Wavemaker », l'« Ultrawave » fonctionne en pulse/echo et génère des champs élastodynamiques en T(0,1) grâce à des modules de capteurs piézoélectriques montés sur des colliers de tailles différentes assurant le couplage mécanique avec la canalisation inspectée. Il dispose également d'une capacité de focalisation active par loi de retard à l'émission et de focalisation synthétique par post-traitement des signaux d'acquisitions. Cependant, contrairement aux autres systèmes, celui-ci fonctionne dans une gamme fréquentielle plus réduite située entre 15 et 85kHz.



Figure I-15: Photo du système de génération d'ondes guidées « Ultrawave » d'« Olympus » [48]

Dans le cadre de nos campagnes d'essais expérimentaux, nous avons mis en œuvre le système de génération par « patches » magnétostrictifs « MsS » ainsi que le « Teletest ». Ces deux dispositifs dont dispose le Cetim nous ont permis de générer des champs à bande étroite T(0,1) en pulse/echo et en pitch/ catch.

1.2.2. Direction de propagation

Lors d'une inspection, le choix d'une direction d'émission (« à droite ou à gauche » de l'émetteur) aide à limiter le nombre d'échos reçus et à en simplifier l'interprétation. En pratique, aussi bien pour un système piézoélectrique que pour un système magnétostrictif, la mise en vibration du traducteur piézoélectrique ou du « patch » va exciter deux champs élastodynamiques qui se propageront de part et d'autre de l'émetteur dans des directions opposées comme l'illustre la Figure I-16:

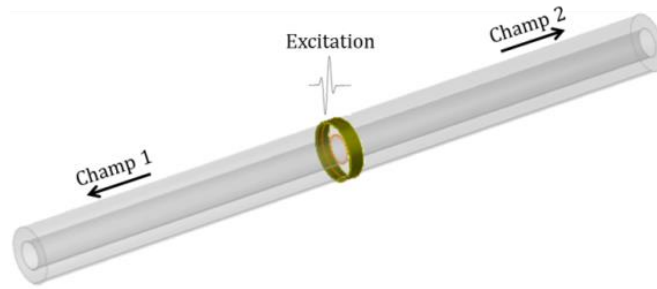


Figure I-16: Représentation à l'aide du logiciel CIVA [2] des champs émis dans les deux directions possibles par un transducteur piézoélectrique encerclant la canalisation

Afin de pouvoir contrôler le sens d'émission, les différents systèmes de génération, notamment ceux présentés précédemment, mettent en œuvre plusieurs rangées de transducteurs piézoélectriques ou émettent plusieurs champs déphasés pour les « patches » afin de privilégier une direction d'émission par rapport à une autre. Le principe pour effectuer cette sélection consiste à créer des interférences entre les champs émis par les différentes rangées de transducteurs ou champs émis. Ces interférences doivent être constructives dans le sens de l'émission voulue et destructives dans l'autre. Afin d'illustrer ce principe, nous prenons l'exemple de l'émission du mode $T(0,1)$ réalisée à l'aide de transducteurs piézoélectriques encerclant la canalisation comme le montre la Figure I-17 :

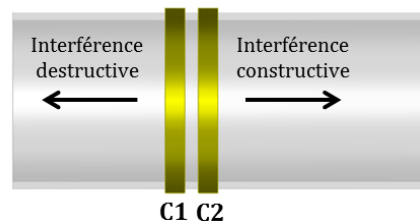


Figure I-17: Représentation à l'aide du logiciel CIVA [2] du montage de sommation des champs pour le choix de la direction de propagation

Pris séparément, chaque transducteur piézoélectrique C1 et C2 crée deux champs élasto-dynamiques monochromatiques en $T(0,1)$ se propageant dans les deux sens possibles. Dans un sens donné, les champs des deux transducteurs vont se superposer. Plus précisément, leur superposition dépend du décalage temporel imposé entre les champs émis par les transducteurs. Pour l'exemple de la Figure I-17, l'objectif est d'obtenir une sommation constructive à droite (en phase) et destructive à gauche (en opposition de phase). En pratique, les deux transducteurs sont décalés physiquement d'une distance de $\lambda/4$ avec λ correspondant à la longueur d'onde du mode émis (en l'occurrence celle du mode $T(0,1)$). L'émission du transducteur C1 est réalisée en premier avec un décalage temporel correspondant au temps nécessaire pour que l'onde émise parcoure la distance de $\lambda_{T(0,1)}/4$. Ensuite, le transducteur C2 émet à son tour. Compte tenu du décalage spatial entre les transducteurs d'une part, et du décalage temporel entre les signaux émis d'autre part, les champs se propageant vers la gauche se retrouvent décalés de $\lambda_{T(0,1)}/2$ et les signaux se propageant vers la droite sont temporellement cohérents. On obtient donc des interférences constructives pour le champ se propageant vers la droite et destructives pour le champ généré vers la gauche.

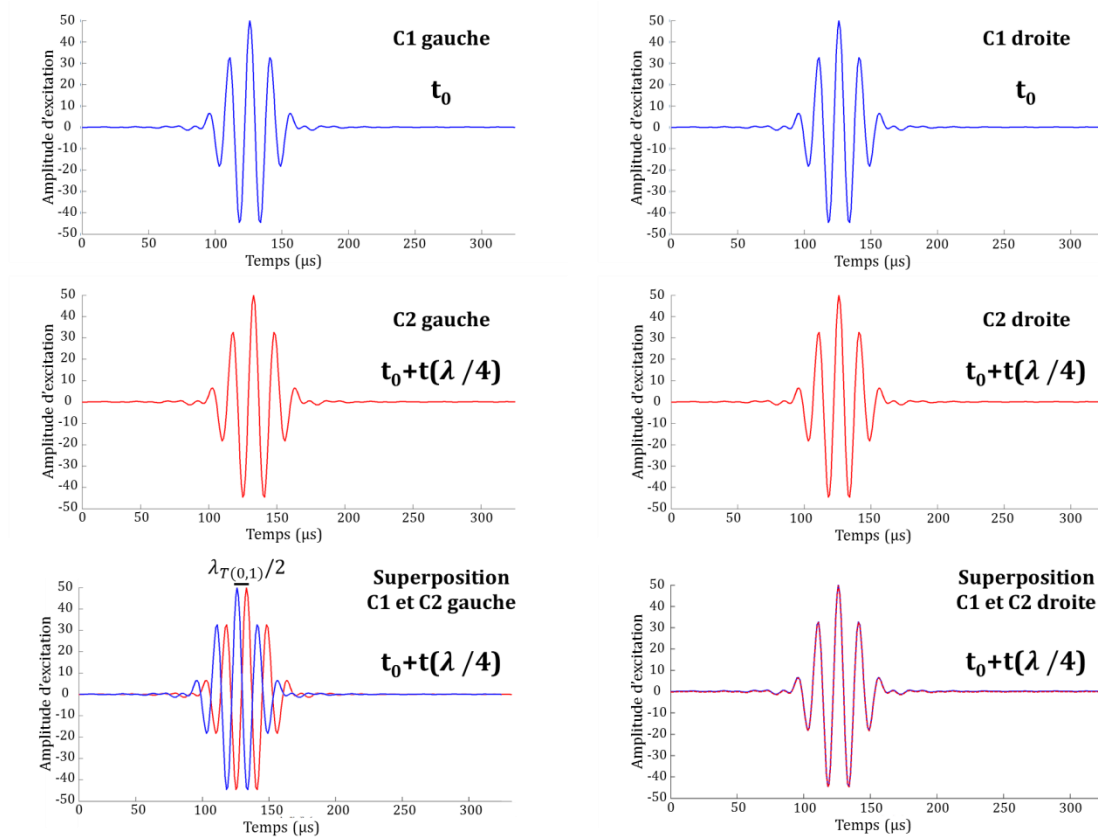


Figure I-18: Exemple de sommation de signaux de Ascan de champs 1) cohérent (droite) produisant des interférences constructives et 2) en opposition de phase entraînant des interférences destructives entre les champs émis

Sur la Figure I-18, t_0 représente l'instant initial de l'émission et $t(\lambda/4)$ représente le temps nécessaire pour que l'onde émise par le transducteur C1 parcourt la distance $\lambda/4$.

Lorsque l'on superpose les deux Ascans de gauche, on vérifie bien que les signaux sont en opposition de phase puisque leur somme s'annule. En revanche, pour les Ascans de droite, les signaux après sommation sont cohérents puisqu'ils s'additionnent de manière constructive à tous les instants. À l'inverse, pour obtenir des interférences constructives vers la gauche et destructives vers la droite, il suffit simplement d'inverser l'ordre d'émission des transducteurs C1 et C2. Ce procédé s'applique de la même manière pour les « patchs » magnétostrictifs à ceci près que la séparation spatiale se fait au niveau des spires des bobines générant le champ magnétique dynamique mettant en vibration le « patch ».

En pratique, la longueur d'onde λ étant dépendante de la fréquence de contrôle, l'écart spatial entre les deux transducteurs doit être modifié selon la fréquence d'inspection utilisée. Par conséquent, la sommation des signaux en opposition de phase est imparfaite expérimentalement, car les signaux d'excitation sont définis sur une bande fréquentielle finie et la longueur d'onde du mode émis varie dans cette plage. Aussi, la condition d'espacement spatiale de $\lambda/4$ entre les deux transducteurs n'est valable qu'à la fréquence centrale d'excitation. En dehors de cette fréquence, la sommation n'est pas totalement cohérente mais reste toutefois satisfaisante si l'on considère que l'énergie ultrasonore est majoritairement concentrée autour de la fréquence centrale d'excitation.

Par abus de langage, on appelle « directionnalité » le signal résiduel qui subsiste malgré les interférences destructives. La Figure I-19 compare les Ascans simulés des champs incidents construits et détruits dans le cas d'un tube en acier avec un signal d'excitation à la fréquence

centrale de 64kHz. On peut noter que cette méthode permet malgré tout d'avoir une différence en dB entre les signaux construits et détruits de l'ordre de 12 à 15dB.

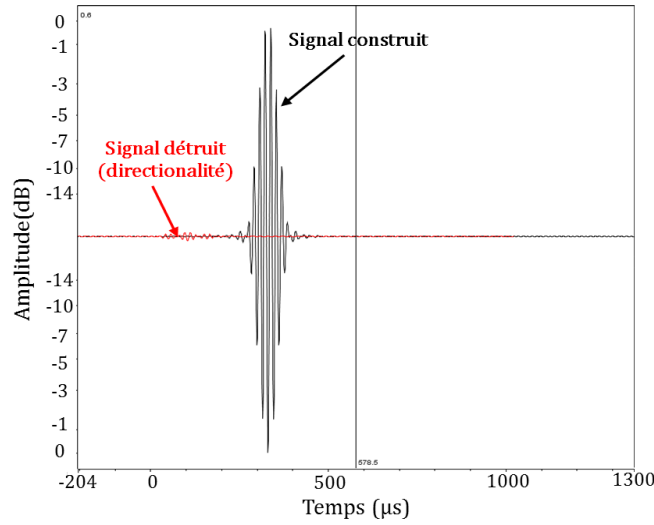


Figure I-19: Simulation des interférences constructives (en noir) et destructives (en rouge) entre champs élastodynamique $T(0,1)$ émis (avec un décalage temporel) par deux traducteurs encerclants la canalisation et séparés spatialement de $\lambda_{T(0,1)}/4$ à 64kHz sur un tube 6" d'épaisseur 7.1mm

Si maintenant on souhaite émettre en plus du mode de torsion $T(0,1)$ des champs monochromatiques en $L(0,2)$, il est nécessaire alors d'annuler les contributions du mode $L(0,1)$. Contrairement au mode $T(0,1)$ qui ne nécessitait que deux rangées de traducteurs ($T1$ et $T2$) séparés de la longueur d'onde $\lambda_{T(0,1)}$, trois traducteurs piézoélectriques sont cette fois-ci mis en œuvre sur chaque module de l'anneau afin de répondre à cet objectif. La Figure I-20 illustre la disposition des différents traducteurs sur un seul module d'émission :

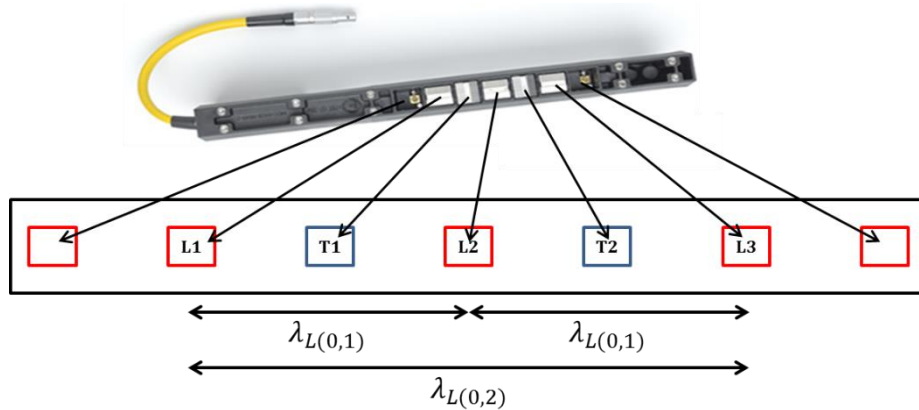


Figure I-20: Position des traducteurs piézoélectriques dans un module du système « Teletest » pour la génération des modes guidés $T(0,1)$ et $L(0,2)$

Les traducteurs $L1$, $L2$ et $L3$ sont utilisés pour la génération du mode $L(0,2)$. $L1$ et $L2$ ainsi que $L2$ et $L3$ sont séparés d'une distance correspondant à $\lambda_{L(0,1)}$ qui est la longueur d'onde du mode $L(0,1)$ à la fréquence centrale de l'émission. À l'émission, les signaux générés par les traducteurs $L1$ et $L3$ sont inversés par rapport au capteur $L2$ ce qui permet d'annuler les contributions du mode $L(0,1)$ dans le champ et de ne garder que les contributions du mode $L(0,2)$. Ensuite, la même méthode de sommation des signaux que celle décrite auparavant pour le mode $T(0,1)$ est utilisée pour favoriser une direction de propagation par rapport à l'autre.

2. Le contrôle de lignes de canalisations par ondes guidées

Les paragraphes précédents nous ont permis de décrire les paramètres influents lors du contrôle de canalisations par ondes guidées comme le traducteur, le signal d'excitation, la fréquence choisie et le mode sélectionné. Il reste cependant encore un élément essentiel que nous n'avons pas décrit jusqu'à maintenant : il s'agit des éléments de la structure qui lors du contrôle ont un impact non négligeable sur la propagation et la diffraction des ondes. Ainsi, dans des réseaux de canalisations coexistent plusieurs éléments susceptibles de modifier le comportement des ondes élastiques. Cette section est dédiée à leur description.

2.1. Descriptions d'une ligne de canalisations

Un réseau de canalisations comporte généralement des géométries variées et parfois des compositions matérielles différentes. Sur ces guides d'ondes viennent s'ajouter également des perturbations locales telles que des soudures, des jonctions entre des guides différents ou bien encore des extrémités libres.... Lorsque des ondes guidées se propagent dans un réseau de canalisations, elles interagissent avec ces perturbations et leur diffraction crée des échos qui rendent l'interprétation des signaux plus délicate. Les perturbations les plus répandues dans les canalisations industrielles et leur influence sur les ondes guidées sont recensées ci-dessous :

Extrémité libre d'un tube

Dans le cas d'une extrémité libre, les ondes guidées incidentes subissent une réflexion totale avec, suivant la géométrie du bout du tube (droite, biseautée, fermée...), potentiellement des conversions de modes. D'un point de vue théorique, l'extrémité du tube est considérée comme une rupture totale du guide d'ondes et peut donc être modélisée comme un défaut.

Tubes de section déformée

Ce sont des tubes avec des sections d'épaisseur ou de géométrie irrégulières comme des sections elliptiques qui entraînent la perte de l'axisymétrie des modes tels que le $T(0,1)$ ou le $L(0,2)$ comme le montre l'exemple de l'étude de Pattanayak et *al.* [49] portant sur les tubes excentrés. Les profils de déplacement de ces modes sont donc moins uniformes dans la section du guide, ce qui peut avoir un effet non négligeable sur la détectabilité d'éventuels défauts suivant leur emplacement dans le guide.

Les soudures circulaires

Les soudures sont des éléments primordiaux dans tout réseau de canalisations puisqu'elles servent à raccorder les tubes composant le réseau. En CND par ondes guidées, la régularité de répartition de ces soudures sur une ligne de canalisations offre la possibilité de les utiliser comme éléments de référence pour repérer la position des différents diffracteurs par rapport à l'émetteur. Par ailleurs, ces soudures sont responsables d'échos de réflexion qui sont, dans le cas des ondes guidées, essentiellement dus à la géométrie des bourrelets de soudures externes et internes. Ainsi, il est possible de limiter l'amplitude des échos provenant d'une soudure en réduisant les dimensions de ses bourrelets c'est-à-dire leur hauteur, leur extension et la pente qu'ils forment avec le tube (Figure I-21).

Les propriétés des matériaux constitutifs de la soudure (hétérogénéité et anisotropie d'une soudure en acier austénitique pour des canalisations en acier par exemple) n'affectent que faiblement le comportement des ondes élastiques. En effet, l'inspection étant faite à basses fréquences ($f < 250\text{kHz}$), les longueurs d'ondes des modes de contrôle sont relativement grandes par rapport à la microstructure hétérogène de la soudure.

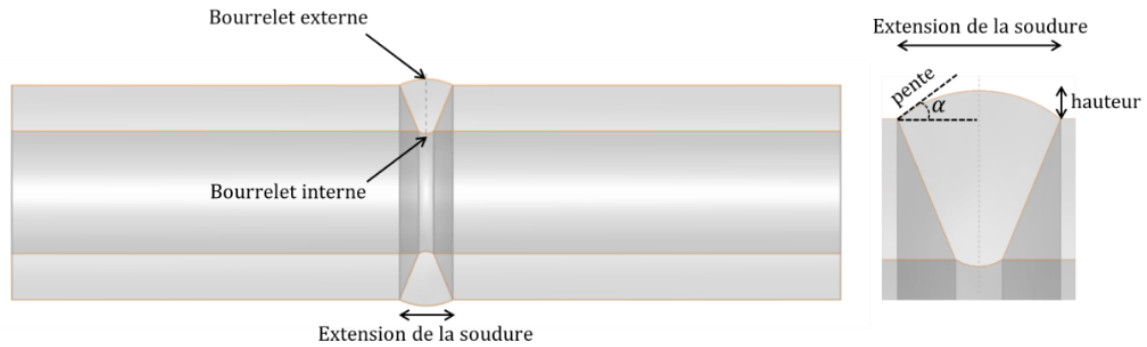


Figure I-21 : Illustration des paramètres géométriques (pentes, extensions et hauteur) des bourrelets d'une soudure en V de canalisations

Dans le cas des soudures axisymétriques et en négligeant l'impact de la microstructure de la soudure par rapport à celui des bourrelets de soudure, il est possible de calculer de manière approchée mais très rapide, les coefficients de transmission et de réflexion pour un champ incident monochromatique et axisymétrique ($T(0,1)$ ou $L(0,2)$) en tenant-compte des paramètres géométriques des bourrelets interne et externe en fonction de la fréquence. La méthode, basée sur un calcul classique de ligne de transmission, a été décrite par Choi et *al.* [50] et Kwun et *al.* [51] ; elle n'est utilisable qu'à basses fréquences et pour les modes de compressions L et de torsion T. Malgré cela, elle a l'avantage de permettre l'obtention rapide d'une estimation des coefficients de réflexion et de transmission correspondant à la configuration de contrôle.

Les coudes

Assurément essentiels pour limiter l'encombrement et pour gérer l'orientation du réseau de tubes, les coudes modifient cependant grandement le comportement des champs élastodynamiques qui s'y propagent. Ainsi, les ondes subissent l'effet de la courbure qui modifie leurs profils de contrainte et de déplacement. Ces parties coudées sont généralement raccordées à d'autres guides (droits ou coudés) et les champs incidents sont diffractés aux jonctions communes entre les différents guides. Ces diffractions sont accompagnées de phénomènes de conversions de modes dont l'importance dépend de plusieurs paramètres comme la fréquence de contrôle, la courbure du coude, la dimension du tube, ou le type de mode utilisé. Actuellement, ce type de géométrie est peu contrôlé en ondes guidées en raison de la complexité des signaux d'acquisition mesurés ; l'émission d'ondes guidées est plutôt réalisée de part et d'autre du coude vers les zones non-coudées.

Les supports

Autres éléments incontournables pour les canalisations notamment aériennes, les supports sont de différentes géométries (en V, en U, plaques...) et peuvent être soudés ou non au tube. Lors d'un contrôle, la présence de ces supports engendre des réflexions des champs élastodynamiques incidents. Ces réflexions dépendent principalement de l'importance de la surface de contact entre le tube et le support et de la contrainte appliquée au tube. D'autres paramètres peuvent entrer en ligne de compte tels que le type de matériau du support, la surface du tube supporté, l'écrasement autour de la zone de contact [52], la fréquence et le mode utilisé pour le contrôle.

L'encastrement

Du point de vue du contrôle par ondes guidées, la présence d'un encastrement du tube (dans un mur par exemple) entraîne, comme illustré par Vogt et *al.* [53] [54], deux effets différents : les champs élastodynamiques incidents sont d'abord diffractés à la jonction entre la partie nue et la

partie encastrée du tube ; ensuite, le champ transmis se propageant dans la partie encastrée subit des phénomènes de fuites dans le milieu environnant (béton par exemple) et donc d'atténuation des champs ultrasonores qui est d'autant plus importante que la partie encastrée est grande. L'encastrement réduit ainsi la distance maximale de contrôle par ondes guidées et limite l'aptitude de la technique à détecter d'éventuels défauts situés après l'encastrement. Malgré tout, les procédés de contrôle par ondes guidées restent l'une des rares techniques capables d'effectuer le contrôle de canalisations localement encastrées.

Les brides et les piquages

Ils constituent des parties spécifiques des canalisations comme le montre les photos de la Figure I-22.

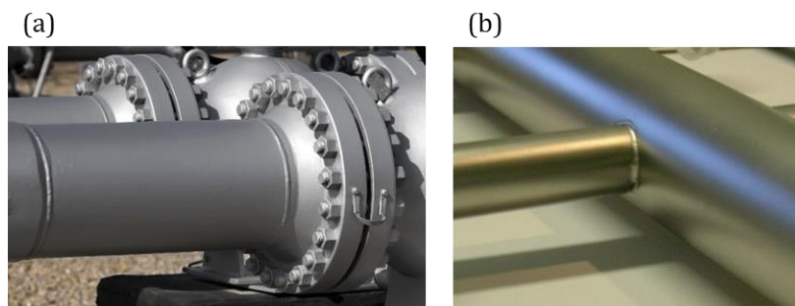


Figure I-22 : Exemple d'une bride (a) et d'un piquage soudé (b) sur des canalisations

Généralement, l'inspection par ondes guidées de ces structures s'avère difficile du fait de la complexité de leurs géométries. La difficulté d'interprétation des signaux d'acquisition fait que ce type de pièces n'est en général pas contrôlé par ondes guidées. Dans ce cas précis, des techniques plus locales, telles que celles mettant en œuvre des ondes ultrasonores volumiques, sont privilégiées pour inspecter les zones critiques.

Présence d'un fluide dans le tube

Les ondes élastiques sont souvent utilisées pour des contrôles de canalisations en cours d'exploitation. La présence de fluide à l'intérieur du tube est donc relativement courante. Ceci donne lieu à des fuites des ondes se propageant au sein de la canalisation à travers l'interface entre le guide et le fluide. Par conséquent, cela entraîne une perte de l'énergie ultrasonore du champ élastodynamique. L'importance de ces pertes varie suivant le mode sélectionné pour l'inspection et selon les caractéristiques du fluide lui-même. Ainsi, du fait de ses composantes de déplacement et de contraintes orthoradiales prépondérantes, le mode $T(0,1)$ peut se propager, sans atténuation, au sein d'une canalisation entièrement remplie d'un fluide non visqueux. Parmi les modes employés pour les contrôles en ondes guidées, le mode de torsion $T(0,1)$ se comporte globalement mieux en présence d'un fluide que le mode de compression $L(0,2)$ qui subit une atténuation plus importante.

Tubes enfouis

À l'instar de l'encastrement, l'enfouissement est responsable de phénomènes d'atténuations des champs élastodynamiques qui sont générés au sein de la canalisation. C'est généralement un facteur limitant pour le contrôle par ondes guidées puisque, suivant la nature du milieu d'enfouissement, la fréquence de contrôle et le mode d'inspection, la distance de contrôle maximale peut être très réduite comparée à celle atteinte dans le cas des canalisations aériennes. De plus, comme l'indiquent Aristegui et *al.* [55], à fréquence fixe, le nombre de modes se propageant dans un tube enfoui peut augmenter, ce qui accroît le caractère multimodal des champs et par conséquent complexifie l'interprétation des signaux acquis. Néanmoins,

l'utilisation d'ondes élastiques permet de faire un premier contrôle, sur quelques mètres, de la zone inaccessible de la canalisation sans avoir à la déterrer.

Tubes revêtus

Les revêtements sont très utilisés afin de protéger des canalisations des milieux environnants et peuvent être de différents types (bitume, béton, dépôt métallique...). Dans ce cas, le tube revêtu est considéré comme un guide multicouche dans lequel les ondes guidées se propagent à la fois dans l'épaisseur du tube mais aussi dans celle du revêtement, s'accompagnant souvent des phénomènes d'atténuations qui réduisent les distances de contrôle. Par ailleurs, dans un réseau de canalisations, ces tubes revêtus sont généralement associés à d'autres parties non-revêtues. À la jonction entre ces guides, les champs élastodynamiques sont également diffractés à cause de la variation d'épaisseur de la section.

Comme on peut le constater, l'atténuation est très présente en contrôle par ondes guidées et constitue souvent le principal facteur limitatif pour la mise en œuvre du contrôle puisqu'elle détermine, avec d'autres paramètres, la distance de propagation maximale sur laquelle le contrôle peut s'effectuer. L'évaluation de l'atténuation en fonction du milieu environnant a fait l'objet de nombreuses recherches notamment pour les tubes revêtus comme c'est le cas dans les travaux de Simonetti [56] [57] et dans ceux de Barshinger et *al.* [58].

En résumé, les différents éléments présentés ici correspondent aux principales spécificités géométriques et structurelles qui composent une ligne de canalisations industrielle conventionnelle. En effet, un réseau comporte souvent une succession de ces spécificités qui, prises à part, sont responsables de la majorité des phénomènes de diffraction, de conversion de modes et d'atténuation que subissent les champs ultrasonores lors de leur propagation dans la structure. Ces perturbations sont donc à l'origine d'échos de diffraction qui sont détectés au cours d'un contrôle par ondes guidées. La connaissance des éléments constitutifs de la ligne s'avère primordiale pour l'identification de l'origine de ces échos, afin de les différencier des éventuels échos résultant de la présence d'une anomalie (dégradation, défauts, corrosion) dans les canalisations.

2.2. Détection de défauts ou d'endommagements par ondes guidées

Au-delà des perturbations liées à la structure même de la ligne de canalisations et à l'environnement dans lequel se trouve la structure à contrôler, des défauts et des endommagements (fissures, inclusions, délaminages, zone corrodée...) peuvent apparaître et dégrader la qualité de fonctionnement de la ligne. De surcroît, ils peuvent être bien évidemment de géométrie, de nature et de positionnement différents. Dans les canalisations industrielles [59], la corrosion est une source importante d'endommagement ; celle-ci peut être liée à une corrosion généralisée (aussi appelée uniforme) étendue sur toute la structure, ou à une corrosion localisée en des régions particulières, principalement aux jonctions entre le tube et d'autres éléments de la ligne (support, revêtement...), ou encore à une corrosion cavernueuse au niveau de stagnations d'eau... La forme de la corrosion varie selon le matériau et les conditions de fonctionnement de la ligne (contraintes, présence de revêtement, environnement acide...). Elle se caractérise généralement par des pertes d'épaisseur dans la section du guide. Ceci a pour conséquence un affaiblissement de la structure et constitue un vecteur important d'apparition et de propagation de défauts qui peuvent s'avérer critiques à plus ou moins long termes. Même si les revêtements servent à se prémunir de l'apparition de la corrosion en protégeant l'acier des phénomènes d'oxydation, la présence d'un défaut de type fissure débouchante peut favoriser l'apparition et le développement de corrosion au sein de la canalisation.

Au regard de cela, la détection et l'interprétation des échos indiquant la présence de corrosion ou de défaut au sein de la ligne est un des principaux objectifs de contrôle par ondes guidées. On retrouve ainsi dans la littérature plusieurs travaux dans lesquels les auteurs se sont intéressés à l'influence des différentes dimensions (profondeur, longueur et épaisseur) d'une

perte d'épaisseur pouvant être assimilée à un défaut débouchant ou à une zone corrodée sur la réflexion de modes propagatifs en fonction de la fréquence de contrôle [35] [60] [61] [36].

Compte-tenu de la multitude des sources potentielles d'échos de diffraction ainsi que de la complexité des signaux de contrôle du fait du caractère multimodal et dispersif des modes composant les champs élastodynamiques, le recours à la simulation s'avère nécessaire afin de pouvoir anticiper les différents échos liés aux spécificités de la ligne et identifier ainsi les échos susceptibles d'indiquer la présence d'un défaut. Dans la suite de ce chapitre, nous présentons quelques méthodes de modélisation mises en œuvre pour simuler la propagation et la diffraction des ondes guidées par les différentes perturbations décrites précédemment.

3. État de l'art sur la simulation des CND par ondes guidées pour les canalisations

La simulation occupe une place importante dans la compréhension et l'analyse des signaux obtenus lors du contrôle. Ainsi, elle permet, en amont, d'anticiper la réponse de certains éléments de la ligne et d'optimiser les paramètres de contrôle afin d'améliorer la détectabilité des défauts recherchés. Dans un second temps, elle aide à interpréter les signaux acquis expérimentalement.

La simulation d'opérations de CND par ondes guidées doit répondre à deux problématiques différentes : d'une part, analyser la propagation des ondes guidées au sein du guide d'ondes et d'autre part, comprendre la diffraction des champs élastodynamiques lorsque les modes composant celui-ci interagissent avec des perturbations. Les méthodes présentées ici sont celles principalement développées pour traiter le cas des guides cylindriques.

3.1. Propagation des ondes guidées

Un contrôle par ondes élastiques guidées est souvent destiné à des contrôles portant sur de longues distances donc en champ lointain avec une excitation définie sur une plage fréquentielle limitée pour limiter l'impact du caractère multi-modal et dispersif de ces ondes. De ce fait, les principales méthodes de modélisation sont basées sur des approches modales qui sont, contrairement aux méthodes temporelles, mieux adaptées aux caractéristiques des procédés de contrôle en champ lointain. Ces approches consistent à résoudre, à fréquence fixe, les équations de propagation, afin de calculer les modes se propageant dans la structure en tenant compte des conditions aux limites qui influent sur le mouvement particulière en surface et au sein du guide. Si le guide présente une géométrie cylindrique tout en étant isotrope et homogène, l'équation de dispersion ou équation de Pochhammer [5] est connue de manière analytique. Sa résolution dans un repère cylindrique adaptée au guide conduit à l'obtention d'une part, des nombres d'onde des modes du guide et d'autre part, des champs de déplacement et de contraintes associés.

Par ailleurs, pour des guides stratifiés composés de plusieurs couches régulières de différents matériaux tels que des tubes revêtus, le calcul des modes guidés peut être réalisé à l'aide de la méthode des matrices de transferts (Thomson [62]) qui relie les déplacements et les contraintes à la surface d'une couche à ceux de la suivante. En outre, la liste n'est pas exhaustive ici car il existe d'autres méthodes matricielles comme par exemple la méthode des matrices globales à la base du logiciel DISPERSE [63] servant à faire des calculs modaux pour des guides multicouches de géométrie canonique (plaques, tubes).

Dans le cas de guides d'ondes de sections quelconques et/ou de composition matérielle complexe, l'obtention formelle des équations de dispersions s'avère impossible. De ce fait, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques. Notons que, si l'exploitation de méthodes purement numériques comme les éléments finis 3D peut être une solution dans le cas de guides d'ondes de petites dimensions, cette technique atteint rapidement ses limites lorsque les structures sont de tailles importantes. C'est pourquoi généralement on propose de coupler l'utilisation d'éléments finis pour la prise en compte de la géométrie et/ou la composition complexe du guide avec des techniques analytiques numériquement moins coûteuses pour

l'aspect propagation. L'objectif final reste la résolution des équations de propagation et l'obtention éventuelle des modes guidés. Parmi ces approches semi-analytiques, deux méthodes, assez proches l'une de l'autre en termes de principe, se distinguent par rapport au reste des propositions de la littérature. Pour le lecteur intéressé par les autres méthodes de calcul notamment en temporel, il est conseillé de se référer à la thèse de Inquiétude [64], ou une analyse comparative plus détaillée de l'ensemble des méthodes de la littérature est proposée.

La méthode WFE (Wave Finite Element)

Aussi appelée méthode des éléments finis ondulatoire [65], la méthode WFE se base sur la théorie des structures périodiques [66] et consiste à utiliser un maillage éléments finis 3D limité à une période spatiale du guide. La résolution du système se fait alors sur le maillage 3D de cette période et la solution globale est déduite en exploitant la périodicité du guide. L'avantage de cette première technique de résolution numérique est qu'elle est exploitable directement dans des logiciels éléments finis commerciaux comme ABAQUS, COMSOL ou ANSYS. Le choix d'un maillage volumique d'une partie du guide peut cependant se révéler numériquement coûteux et induire des erreurs numériques si l'on cherche à limiter de façon excessive la discrétisation spatiale.

La méthode SAFE (Semi-Analytic Finite Element)

Elle est à l'heure actuelle la principale méthode numérique pour le calcul des modes guidés car, à la différence de la méthode WFE, elle ne nécessite la mise en œuvre que d'éléments finis 2D ou 1D en exploitant de manière optimale les symétries du guide d'ondes. Ceci a pour conséquence d'accroître les capacités de calcul et permet de prendre en compte des guides d'ondes de plus grandes dimensions ou de mettre en œuvre des maillages plus fins pour réduire les erreurs numériques. Cependant, sa mise en œuvre nécessite des développements spécifiques puisqu'aucun logiciel commercial dédié à la simulation par éléments finis ne dispose des outils numériques nécessaires pour mettre en œuvre directement cette méthode.

La méthode SAFE se base sur une approche modale et consiste à exploiter l'invariance de la section du guide le long de l'axe de propagation afin de restreindre l'utilisation des éléments finis et la résolution du système des équations de propagation à la seule section transverse du guide. La dépendance suivant la direction de propagation est quant à elle prise en compte par l'intermédiaire d'un propagateur analytique. Ce modèle présente l'avantage d'être une méthode modale optimale pour le calcul des modes et ceci pour une large majorité des géométries de guides d'ondes rencontrés au niveau industriel (plaques, tubes, cylindres, câble...). Par ailleurs, depuis sa mise en œuvre pour le calcul des modes dans des guides droits soumis à des conditions aux limites de surfaces libres, plusieurs extensions de cette méthode ont été développées pour traiter des cas particuliers de la propagation dans différentes géométries de guides soumis à différentes contraintes : par exemple, on peut citer le cas des guides d'ondes précontraints [67], celui des guides supportés [52] ou des câbles hélicoïdaux précontraints [68] pour lesquels une formulation SAFE adaptée à la géométrie du guide est établie avec des conditions aux limites non-nulles. On peut aussi rappeler le cas des guides enfouis étudiés par Castaings et Lowe [69] utilisant un maillage SAFE qui prend en compte à la fois le guide et le milieu environnant avec l'emploi d'une région absorbante en plus pour traiter sur un maillage fini les fuites dans le milieu infini environnant.

Le choix de développer un module de simulation des contrôles par ondes élastiques guidées dans la plate-forme de simulation CIVA [2] du CEA en exploitant la méthode SAFE a été fait il y a quelques années. C'est donc tout naturellement que nos développements se sont tournés dans cette direction afin d'assurer une continuité, tout en permettant de bénéficier de l'expérience interne acquise.

3.2. Diffraction des ondes guidées

Les contrôles par ondes guidées visent à détecter des échos résultant de la diffraction de ces ondes par une anomalie. Comme nous l'avons décrit précédemment, la simulation de ces phénomènes aussi bien par des éléments constitutifs de la ligne de canalisations que par des défauts est primordiale pour développer des procédés optimaux d'inspection par ondes guidées et analyser les résultats des contrôles.

Selon la nature de la perturbation responsable de la diffraction, il existe différentes méthodes de modélisation permettant de prédire les champs diffractés à partir de la description modale du champ incident.

La méthode des frontières transparentes

Elle consiste à coupler des boîtes éléments finis conventionnelles situées autour de la perturbation avec des méthodes de calculs analytiques ou semi-analytiques décrivant les champs électrodynamiques dans la partie uniforme du guide. Cette méthode a fait l'objet de nombreux travaux [70] et développements comme ceux entrant dans le cadre de la thèse de Baronian [30]. Cette dernière a porté sur la mise au point de méthodes hybrides SAFE/EF pour prendre en compte dans un premier temps, par éléments finis, des perturbations localisées quelconques présentes dans un guide d'ondes et permettre, dans un second temps, de décrire les champs élastodynamiques à partir d'une décomposition modale obtenue par un calcul SAFE.

Les couches absorbantes

Ce sont des couches entourant la zone de calcul et mises en œuvre à travers des matrices d'élasticité à coefficients complexes correspondant à des matériaux artificiels viscoélastiques qui servent à absorber les ondes sortantes depuis un domaine de calcul autour de la perturbation. Ce dernier peut être de type boîte éléments finis ou autre. Ces couches absorbantes ont pour rôle d'empêcher des réflexions parasites susceptibles de se produire aux limites du domaine de calcul afin de restreindre sa taille. Cependant, l'adaptation de ces couches, le choix des coefficients d'élasticité et d'autres paramètres le définissant peut s'avérer complexe ; leur taille peut dans certains cas devenir importante, conduisant à une augmentation rédhibitoire des coûts de calcul.

La méthode PML (Perfectly Matched Layers)

Cette méthode présente des similarités avec celle des couches absorbantes puisqu'elle nécessite également de placer des couches autour de la zone de calcul afin de restreindre cette dernière tout en empêchant des réflexions parasites aux frontières finies du domaine de calcul. Dans les équations de propagation au sein de la zone munie des PMLs, un paramètre complexe avec une partie réelle positive et une partie imaginaire négative est introduit afin d'absorber progressivement les ondes sortantes de la zone de calcul. Depuis leur développement initial pour les ondes électromagnétiques, les PMLs ont connu des succès dans d'autres domaines de la physique dont celui de l'élastodynamique. Ainsi, de nombreuses publications [71] [72] proposent leur mise en œuvre pour le calcul de la diffraction engendrée par des perturbations ou pour la prise en compte de l'enfouissement du guide lorsque le milieu environnant est considéré comme infini. À la différence des couches absorbantes, cette méthode possède l'avantage de s'adapter naturellement en fonction des modes qui se propagent dans le milieu. En effet, les propriétés d'atténuation de ces PML sont directement déduites des caractéristiques des modes. Néanmoins, en présence d'ondes rétrogrades dont les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés (sur lesquels nous nous pencherons dans le chapitre II), les PMLs ne fonctionnent plus puisqu'elles produisent les effets inverses de ceux pour quoi elles sont destinées, l'énergie de ces modes augmentant au lieu de diminuer comme l'ont souligné Bécache et al. [73] dans leur étude portant sur la stabilité de la méthode.

Le raccordement modal

Cette dernière méthode de simulation de la diffraction est fondée sur la vérification de la condition de continuité des champs élastodynamiques à la section commune entre deux guides différents. Ceci revient à trouver les coefficients de diffraction décrivant la décomposition d'un champ incident connu en champs réfléchi et transmis par la jonction. La méthode étant purement modale, elle ne nécessite pas la mise en œuvre d'éléments finis. En outre, elle permet de traiter des phénomènes de diffraction restreints à la jonction comme c'est le cas des fissures transverses étudiées par Jezzine et Lhémy [74], des pertes de sections brutales ou des jonctions entre guides différents comme celles entre un guide droit et un coude sur lesquelles nous nous pencherons dans la suite de ce manuscrit. Comparée aux méthodes numériques précédentes, la méthode de raccordement est peu coûteuse en ressources de calcul mais sa mise en œuvre reste limitée au traitement de phénomènes de diffraction localisés sur une section définie. Cependant, en contrôle de canalisations, plusieurs phénomènes de diffraction entrent dans le domaine d'application de cette approche : franchissement d'une jonction entre un guide droit et un guide coudé, passage d'un tube nu à un tube revêtu, franchissement d'une portion encastrée, passage par une zone de support, réflexion à l'extrémité d'un tube, jonction entre deux guides de compositions matérielles différentes, diffraction par des défauts transverses et longitudinaux... Cette méthode, assez simple à mettre en œuvre en comparaison des autres, s'avère donc bien souvent suffisante pour traiter des cas de diffraction par des perturbations de la ligne de canalisations.

Les méthodes de frontières transparentes ainsi que celle du raccordement modal sont implémentées dans le module de simulation CIVA destiné aux CND par ondes guidées. Ces deux méthodes permettent de prédire efficacement la diffraction d'un grand nombre des cas de perturbations présentés précédemment dans la situation de guides d'ondes parfaitement droits paramétrés dans un repère cartésien. Nos développements devront être compatibles avec ces modèles déjà existants tout en étendant les capacités de simulation de la plate-forme CIVA à de nouveaux cas d'applications tels que la propagation dans des guides coudés où intervient la diffraction des champs élastodynamiques à la jonction entre des guides pouvant être définis dans des repères différents ainsi que la prise en compte de plusieurs jonctions successives.

3.3. Revue des outils de CIVA en vue de la simulation du CND par ondes guidées de réseaux canalisations

Le module général de simulation dédié aux ondes guidées et commercialisé au sein de la plate-forme CIVA comporte plusieurs modèles nécessaires à la simulation d'une opération de contrôle de canalisations, que nous passons rapidement en revue. À la suite de cette revue, nous établissons une liste de développements nouveaux ou complémentaires à réaliser pour répondre aux besoins spécifiques de la simulation d'un contrôle d'un réseau de canalisations industriel.

Propagation des ondes guidées

Le calcul de la propagation modale des ondes guidées est effectué à l'aide du modèle SAFE. Celui-ci permet de calculer les modes guidés en régime harmonique sous condition de satisfaire l'invariance géométrique et matérielle de la section du guide d'ondes. Le modèle implémenté dans CIVA est capable de traiter les guides d'ondes de section quelconques (tubes déformés) mais uniquement dans le cas de guides droits paramétrables simplement dans un repère cartésien. Par ailleurs, il offre la possibilité de prédire les champs élastodynamiques se propageant au sein de canalisations. Il permet également de prendre en compte le cas des canalisations entièrement remplies de fluide en application des conditions aux limites spécifiques à l'interface entre le cylindre et le fluide. Enfin, en termes de résultats, le modèle sert à calculer les champs de déplacement et de contraintes modaux ainsi que les grandeurs physiques qui leur sont associées : nombres d'ondes, vitesse de phase et de groupe, atténuation, énergie émise....

Génération et réception des ondes guidées

Le module propose de simuler différents types de dispositifs pour la génération par des transducteurs piézoélectriques : transducteur encerclant ou encerclé mono et multiéléments, transducteur mono et multiéléments monté sur sabot. De plus, il est possible de définir le type de sollicitations (axiale, cisaillement, piston...) générées par le transducteur afin de favoriser la création de certains modes par rapport à d'autre (sélectivité). Enfin, il est également possible de travailler suivant les deux configurations classiques de contrôle à savoir en pulse/echo pour laquelle l'émission et la réception des échos de réflexions sont confondues ou en pitch/catch où l'émission et la réception sont réalisées par deux transducteurs différents ; on peut ainsi simuler des expériences fonctionnant en réflexion ou en transmission. Au final, la simulation va permettre d'associer à chaque mode une amplitude modale significative des effets de diffraction par la source ainsi modélisée. Par réciprocité [75], il est possible de déterminer de la même façon l'amplitude modale de sensibilité de ces dispositifs à une onde qu'ils reçoivent [76].

Diffraction des ondes guidées

Le module implémente plusieurs modèles pour la simulation de la diffraction des ondes guidées. Ainsi, le raccordement modal est exploité pour calculer la réponse des fissures transverses et celle de l'extrémité libre d'un tube (assimilable à une rupture totale de la canalisation). Le modèle est aussi mis en œuvre pour les changements de section tels que le passage d'un tube nu à un tube revêtu ou dans le cas d'un l'encastrement. Le second modèle de diffraction présent dans le module de simulation est basé sur l'utilisation de boîtes éléments finis 3D incluant les éléments perturbateurs, munies de frontières transparentes adaptées à la description modale des champs élastodynamiques hors de la boîte éléments finis [30]. Ce modèle, qui hybride le calcul SAFE à un calcul éléments finis, permet de traiter les cas de géométries complexes comme celles de défauts 2D quelconques, de portions de guides de section variable, de soudures, de brides ou de piquages. Cependant, si cette méthode permet de gérer un grand nombre de cas d'intérêts, les coûts qu'elle implique en temps et en ressources peuvent être importants si la zone à mailler est grande devant les longueurs d'ondes typiquement mises en jeu.

Besoins de développements en modélisation pour traiter le cas des canalisations

Compte tenu de ces acquis, nous avons pu définir différents besoins de développements en modélisation nécessaires pour compléter les modèles existants et étendre les capacités du module de CIVA :

- **Propagation dans des zones supportées** : ce cas nécessite l'adaptation du modèle SAFE au cas d'un guide avec des conditions aux limites différentes de celles de surface libre au niveau des zones de contacts entre le guide et les supports. Ensuite, un raccordement modal est nécessaire pour prédire la diffraction intervenant à la limite entre les zones libres et la zone supportée du guide.
- **Enfouissement** : la mise en œuvre de couches absorbantes ou de PML est nécessaire afin de rendre compte du caractère illimité du milieu d'enfouissement et des phénomènes de fuites associés à la propagation des ondes guidées dans la canalisation, qui s'opère donc avec perte d'énergie.
- **Les coudes** : la modélisation d'un contrôle de canalisations comportant des coudes nécessite de mener trois développements différents. D'une part, l'extension du modèle SAFE pour la description des champs élastodynamiques rendant compte des effets liés à la courbure. Ensuite, la simulation de la diffraction à la jonction entre deux guides différents (par exemple entre un guide droit et un coude) par le biais d'un modèle de raccordement modal prédisant les champs réfléchis et transmis au niveau d'une seule jonction. Enfin, la prise en compte de la présence de plusieurs jonctions successives pour prédire les diffractions associées au coude complet relié à deux autres guides différents.

La diffraction globale par une canalisation coudée jointe à deux guides droits est un problème intéressant à traiter car il nécessite de s'intéresser aux effets d'une courbure, à la diffraction par une jonction entre guides de courbures différentes et au couplage de ces effets par l'intermédiaire de réflexions multiples entre deux jonctions. Ainsi, les développements menés pour le traitement complet de ce cas peuvent être ré-utilisés pour traiter d'autres phénomènes de diffraction par des éléments que l'on peut rencontrer dans un réseau de canalisation. De ce fait, les développements effectués dans le cadre de nos travaux se sont concentrés sur la modélisation de la propagation et de la diffraction des ondes guidées dans des lignes de canalisations comportant des coudes.

4. Conclusion

Ce premier chapitre a permis d'introduire quelques notions et définitions essentielles relatives à la propagation et à la diffraction des ondes guidées dans les réseaux de canalisations industrielles lors d'opérations de CND. Nous avons tout d'abord défini ce qu'est un guide d'ondes, puis décrit les mécanismes influents pour la génération et la réception d'ondes élastiques guidées, ainsi que la nature de ces différentes ondes et leurs propriétés remarquables. Cette section a également permis d'identifier les effets liés aux caractères dispersif et multimodal de ces ondes et leur impact sur les procédés de contrôle.

À la lumière de ces différentes propriétés, nous nous sommes intéressés dans la suite de manière plus spécifique à la problématique du contrôle des réseaux de canalisations. Les principaux systèmes disponibles commercialement pour la génération et la détection des ondes guidées ont été présentés en détaillant le principe de leur fonctionnement, en insistant particulièrement sur la manière d'opérer le choix du mode et de maîtriser le sens suivant lequel les ondes créées se propagent. La description des spécificités géométriques et structurelles associées à ces structures industrielles a été faite. Dans la pratique du CND par ondes guidées, ces spécificités constituent des perturbations échogènes ; l'identification de ces échos est nécessaire pour pouvoir les distinguer de ceux issus d'endommagements de la structure inspectée que l'on cherche à détecter et au-delà, à caractériser.

Pour finir, un point sur l'apport de la simulation au niveau du développement des méthodes de contrôle utilisant des ondes guidées a été effectué. Les principales méthodes de modélisation de la propagation et de la diffraction de ces ondes ont été exposées afin de bien situer les objectifs de modélisation de cette thèse par rapport aux développements antérieurs, et en particulier par rapport à ceux effectués pour la mise au point du module de simulation du CND par ondes guidées de la plate-forme CIVA. De fait, certains choix méthodologiques initiaux pour le développement des modèles présentés dans ce mémoire résultent de la volonté d'étendre les capacités existantes au CEA.

Afin de compléter les modèles existant du module de simulation des CND par ondes guidées de CIVA, nous nous sommes intéressés à la modélisation des contrôles par ondes guidées de tubes coudés joints à des tubes droits. Ce choix a été fait au regard des besoins d'extension du module de CIVA mais aussi à cause de la difficulté des contrôles industriels de lignes de canalisations comportant des coudes du fait de la complexité des phénomènes de diffraction engendrés par ces derniers. Dans les chapitres suivants, nous détaillons donc les différents développements réalisés pour atteindre cet objectif. En particulier, le chapitre qui suit décrit l'extension du modèle SAFE afin de permettre le calcul des modes guidés composant la base modale pour un tube coudé, sur laquelle décomposer tout champ élastodynamique s'y propageant.

CHAPITRE 2. MODELISATION DE LA PROPAGATION DES ONDES GUIDEES

DANS DES GUIDES COURBES DE SECTIONS ARBITRAIRES

1. Introduction.....	40
2. Paramétrage géométrique d'un guide d'ondes courbe en coordonnées curvilignes	40
2.1. Description d'un guide d'ondes courbes	40
2.2. Construction d'un repère local de Serret-Frenet associé à une courbe	41
2.3. La base de Serret-Frenet pour un coude	42
2.4. Construction des bases covariante et contravariante associées au repère de Serret-Frenet.....	44
3. Formulation variationnelle des équations de propagation des ondes guidées	46
3.1. Équation de propagation des ondes guidées dans un guide coudé.....	46
3.2. Loi de comportement.....	47
3.3. Formulation intégrale des équations de propagation.....	47
3.4. Expressions des termes de la formulation variationnelle en coordonnées curvilignes.....	48
3.5. Formulation variationnelle dans la base de Serret-Frenet.....	51
4. Méthode SAFE (Semi-Analytic Finite Element Method) en coordonnées curviligne	53
4.1. Hypothèses d'application de la méthode SAFE	53
4.2. Formalisme SAFE pour les guides coudés	54
4.3. Comparaison entre les modes guidés dans un cylindre plein droit et coudé	63
5. Conclusion	72

1. Introduction

L'analyse de la propagation des ondes élastiques dans des guides courbes est loin d'être simple [77] [78]. Dès lors, il apparaît nécessaire de développer des méthodes de simulations afin de mieux comprendre l'influence de cette courbure sur la propagation des ondes guidées notamment au sein de réseaux de canalisations comportant des coudes.

Dans ce chapitre, nous cherchons à modéliser la propagation dans des guides coudés. La démarche est basée sur une approche modale et consiste à décomposer le champ élastodynamique sur une base de modes guidés. Pour des guides coudés, cette base modale est obtenue par extension, en coordonnées curvilignes, de la méthode SAFE [79] [80] [81] qui est une méthode semi-analytique communément utilisée pour le calcul des modes d'un guide droit. Les développements présentés ici reposent sur les travaux de Treyssède et Laguerre [3] ainsi que sur ceux de Frikha [68] menés au cours de sa thèse.

Dans un premier temps, quelques notions de géométries différentielles sont rappelées. Par la suite, un système de coordonnées curvilignes associé au guide courbe est défini. En se plaçant dans ce nouveau repère, on garantit l'invariance géométrique et matérielle de la section suivant la fibre neutre du guide, ce qui nous permet d'utiliser le formalisme SAFE pour le calcul des modes. Dans un deuxième temps, on introduit les bases locales covariante et contravariante associées au repère curviligne, également appelé repère de Serret-Frenet. Ces bases servent à réécrire les différents termes de la formulation variationnelle des équations de propagation dans le nouveau repère associé au guide coudé. Finalement, la résolution du système d'équations écrites dans le repère de Serret-Frenet conduit au calcul des modes guidés de la structure et le champ élastodynamique se propageant dans le guide coudé peut alors être décrit à partir des décompositions modales des champs de déplacement et de contraintes.

Une fois le développement théorique effectué, les effets engendrés par la prise en compte de la courbure dans les calculs des modes guidés par le modèle SAFE sont illustrés par différents exemples numériques. En particulier, on présente les courbes de dispersion et les cartographies, en coordonnées cylindriques, de déplacements radial, orthoradial et axial des différents modes.

2. Paramétrage géométrique d'un guide d'ondes courbe en coordonnées curvilignes

Cette première section est dédiée à la construction d'un repère orthonormé et curviligne adapté à la description de la géométrie d'une pièce courbe. L'obtention de ce paramétrage constitue une étape de développement essentielle dans la démarche que nous avons adoptée pour modéliser la propagation des ondes guidées dans un guide coudé.

2.1. Description d'un guide d'ondes courbes

Comme présenté dans le chapitre I, un guide est une structure dont les spécificités géométriques et matérielles lui permettent de guider des ondes le long d'un axe de propagation. Dans le cas d'un guide coudé, l'axe de propagation est un axe d'abscisse curviligne représenté par la fibre neutre de la pièce. La Figure II-1 donne un exemple d'un guide d'ondes 3D :

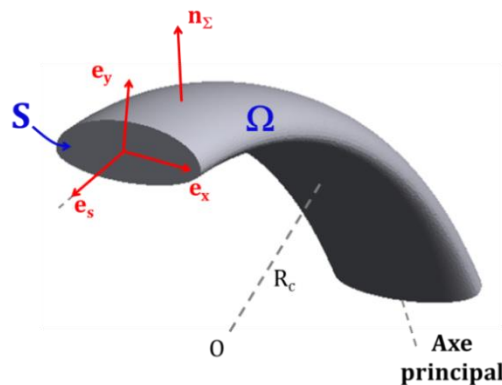


Figure II-1: guide d'ondes de section quelconque avec une invariance géométrique suivant e_s

On note Ω le guide 3D, $\mathbf{n}_\Sigma$ la normale sortante à la surface latérale $\partial\Omega$ du guide et S sa section transverse dont le contour est noté ∂S .

Dans le cas d'un guide de section invariante le long de l'axe principal, le guide entier est généré par la surface S et ce, par simple translation dans le cas d'un guide droit ou par révolution pour un guide courbe à courbure constante. Pour le modèle que l'on souhaite utiliser, cette section peut être de géométrie arbitraire du moment que son invariance suivant l'axe principal est vérifiée. Dans la suite, on considérera une section circulaire sachant que les développements restent valables pour n'importe quelle autre géométrie de section. Par ailleurs, pour un guide courbe et afin de garantir les conditions d'invariances nécessaires à la mise en œuvre de notre modèle, on doit se placer dans une base curviligne adaptée pour laquelle la section du guide reste identique le long de l'axe principal. La construction de ce nouveau repère pour le paramétrage du guide est présentée ci-après.

2.2. Construction d'un repère local de Serret-Frenet associé à une courbe

En géométrie différentielle [82] [83], le repère curviligne ou repère de Serret-Frenet est généralement choisi pour l'étude du comportement local d'une courbe. Ce repère local est associé à un point mobile qui parcourt la courbe et permet de la décrire. L'avantage de se placer dans ce repère est de pouvoir évaluer systématiquement soit la courbure dans le cas de courbes planes 2D, ou la courbure et la torsion dans le cas de courbes gauches en 3D.

Afin de construire ce repère, on considère une courbe gauche Γ parcourue par le point $\mathbf{M}(t)$ (le vecteur position $\mathbf{M}$) à laquelle on associe les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ comme le montre la Figure I-2:

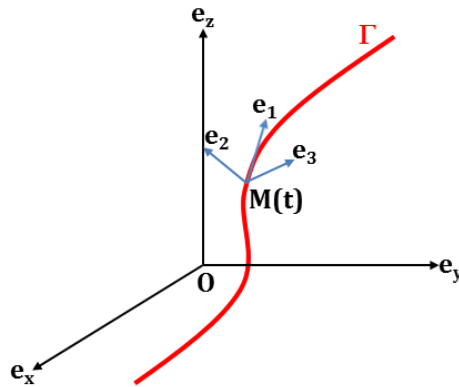


Figure II-2: illustration d'une courbe gauche Γ dans l'espace

Les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont des fonctions continûment dérivables en t et la dérivée du vecteur position $\mathbf{M}$ par rapport à t est colinéaire au vecteur $\mathbf{e}_1$ tangent à la courbe Γ . Cette dérivée est alors écrite sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \alpha \mathbf{e}_1 \quad (II.1)$$

En prenant $ds = \alpha dt$ dans (II.1) avec s la nouvelle abscisse curviligne, on définit le premier vecteur orthonormé curviligne du repère mobile que l'on cherche à construire. C'est un vecteur unitaire tangent à la courbe considérée :

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \mathbf{e}_t \quad (II.2)$$

Ensuite, on construit les deux vecteurs orthonormés restant de la base de Serret-Frenet compris dans le plan orthogonal au vecteur défini par (II.2). En notant $C(s)$ la courbure algébrique de la

courbe Γ , la normale principale $\mathbf{e}_n$ est colinéaire à la dérivée du vecteur tangent $\mathbf{e}_t$ par rapport à s et est donnée par la première formule de Frenet :

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{C(s)} \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \quad (II.3)$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_t$ et $\mathbf{e}_n$ constituent les vecteurs directeurs du plan osculateur passant par le point $\mathbf{M}$ et correspondant au meilleur plan dans lequel est contenue la courbe considérée. Le dernier vecteur de la base de Serret-Frenet $\mathbf{e}_b$ est un vecteur perpendiculaire à ce plan osculateur et est donné par le produit vectoriel :

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \wedge \mathbf{e}_n \quad (II.4)$$

Ce vecteur $\mathbf{e}_b$ est le vecteur binormal de la courbe Γ au point $\mathbf{M}$. Étant défini à partir des vecteurs $\mathbf{e}_t$ et $\mathbf{e}_n$, il est unitaire par construction et nous sert dans le cas d'une courbe gauche à définir la torsion $T(s)$ de la courbe grâce à la deuxième formule de Frenet :

$$\frac{d\mathbf{e}_b}{ds} = T(s)\mathbf{e}_n \quad (II.5)$$

Tel qu'il est construit, le trièdre $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n)$ est orthonormé direct par rapport au repère global d'origine O . Il forme la base locale de Serret-Frenet associée au point $\mathbf{M}(s)$ et permet de décrire la courbe Γ . Dans la suite, nous adoptons la notation $(\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N})$ pour faire référence à cette base de Serret-Frenet $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n)$.

2.3. La base de Serret-Frenet pour un coude

On considère un guide coudé de section circulaire et de rayon de courbure R_c constant comme illustré par la Figure II-3. Ce rayon de courbure est défini par la distance entre le centre de rotation du guide et la fibre neutre de celui-ci.

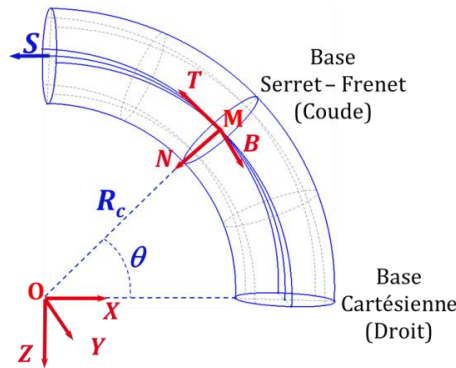


Figure II-3: Représentation des repères cartésien et curviligne associés à un coude

Dans une base cartésienne, tout point de l'espace est localisé par son vecteur position donné par :

$$\Phi(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (II.6)$$

Les coordonnées cartésiennes d'un point $\mathbf{M}$ situé sur la fibre neutre du guide sont décrites par :

$$\begin{cases} x = R_c \cos(\theta) \\ y = 0 \\ z = -R_c \sin(\theta) \end{cases} \quad (II.7)$$

À partir de ces expressions, en prenant comme abscisse curviligne au point $\mathbf{M}$ du guide $s = R_c \theta$ et en notant $\gamma = 1/R_c$ la courbure constante, on exprime l'équation paramétrique de la fibre neutre du coude $\mathbf{R}(s)$ dans la base cartésienne $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ par :

$$\mathbf{R}(s) = \frac{1}{\gamma} [(\cos(\gamma s))\mathbf{e}_x - \sin(\gamma s)\mathbf{e}_z] \quad (II.8)$$

Le vecteur $\mathbf{T}$ du repère orthonormé de Serret-Frenet étant tangent à la fibre neutre, son expression dans la base cartésienne correspond à la dérivée du vecteur $\mathbf{R}(s)$ par rapport à s . Enfin, les expressions des vecteurs $\mathbf{N}$ et $\mathbf{B}$ complétant la base curviligne que l'on cherche à construire découlent des relations (II.3) et (II.4). Ainsi, les vecteurs de la base associée au coude sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{T}(s) = -\sin(\gamma s)\mathbf{e}_x - \cos(\gamma s)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{N}(s) = -\cos(\gamma s)\mathbf{e}_x + \sin(\gamma s)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{B}(s) = -\mathbf{e}_y \end{cases} \quad (II.9)$$

Comme dans le cas de la base cartésienne, le vecteur position définit, de manière unique, tout point de l'espace dans le nouveau système de coordonnées curvilignes. Son expression est donnée par la relation suivante :

$$\Phi(x, y, s) = \mathbf{R}(s) + x\mathbf{N}(s) + y\mathbf{B}(s) \quad (II.10)$$

Par construction, ce nouveau système de coordonnées locales est naturellement adapté pour paramétrer la courbe plane représentée par la fibre neutre du guide. Par ailleurs, ce repère permet de garantir l'invariance géométrique et matérielle de la section le long de cette fibre neutre.

Remarque :

Dans ce cas particulier de courbe 2D présentant une courbure γ constante, on peut relever que l'axe $\mathbf{e}_y$ constitue un axe de rotation dans le cas d'un guide coudé ; le système de coordonnées curvilignes présente alors des similitudes avec le système de coordonnées cylindriques représenté par la Figure II-4 :

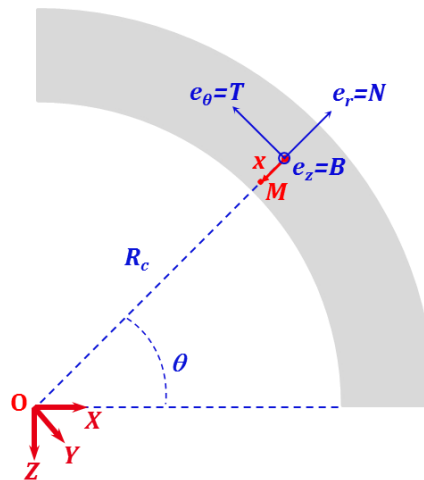


Figure II-4: Représentation du repère de coordonnées cylindriques associé à un guide coudé

Les coordonnées du point $\mathbf{M}$ dans la base cylindrique (r, θ, z) en fonction des paramètres de la base de Serret-Frenet (x, y, s) sont les suivants :

$$\begin{cases} r = R_c - x \\ \theta = \frac{s}{R_c} \\ z = y \end{cases} \quad (II.11)$$

Le repère cylindrique étant connu et plus simple à manipuler, il pourrait dans certains cas être utilisé comme repère de référence avant de repasser dans le repère de Serret-Frenet dans lequel on cherche à paramétrer le guide.

2.4. Construction des bases covariante et contravariante associées au repère de Serret-Frenet

Dans un espace vectoriel muni d'une base quelconque et d'un produit scalaire, tout vecteur peut être décrit par deux types de coordonnées différents : soit des coordonnées covariantes dans l'espace vectoriel ou des coordonnées contravariantes dans l'espace dual associé à cet espace vectoriel. En géométrie différentielle, l'exploitation simultanée de ces deux systèmes de coordonnées et des relations qui les relient, s'avère très utile. En effet, pour le cas nous intéressant, la mise en œuvre conjointe de ces deux bases est essentielle pour bien définir une courbe dans l'espace et réaliser les calculs différentiels nécessaires pour le calcul des modes. Dans ce qui suit, la construction de ces bases locales covariante et contravariante est présentée pour un coude.

Pour tout point M de l'espace défini par son vecteur position $\Phi(x, y, s)$ dans la base curviligne, on peut calculer les vecteurs $\mathbf{g}_i$ pour $i = 1, 2, 3$ dont les expressions sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \frac{d\Phi(x, y, s)}{dx} = \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{g}_2 = \frac{d\Phi(x, y, s)}{dy} = \mathbf{B}(s) \\ \mathbf{g}_3 = \frac{d\Phi(x, y, s)}{ds} = (1 - \gamma x)\mathbf{T}(s) \end{cases} \quad (II.12)$$

On peut remarquer que ces trois vecteurs évoluent de manière covariante par rapport aux vecteurs de la base curviligne. Le trièdre $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ forme la base covariante associée à la base de Serret-Frenet. Enfin, la norme du vecteur $\mathbf{g}_3$ dépend de l'abscisse x qui correspond à la distance entre l'origine de la base curviligne associée à la fibre neutre du guide et le point auquel on construit cette base covariante comme montré avec le point $\mathbf{M}$ sur la Figure II-4.

À partir de (II.12), la matrice de passage $\mathbf{P}_{cov}$ de cette base covariante vers la base de Serret-Frenet s'écrit :

$$\mathbf{P}_{cov} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma x \end{pmatrix} \quad (II.13)$$

et le tenseur métrique dans la base covariante est donné par :

$$\mathbf{g} = \mathbf{P}_{cov}^T \mathbf{P}_{cov} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \gamma x)^2 \end{pmatrix} \quad (II.14)$$

Le signe T désigne la transposée de la matrice ou du vecteur.

À cette base covariante, on associe une base dite contravariante dont les expressions des vecteurs ($\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$) sont données par la relation suivante :

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (II.15)$$

δ_i^j étant le symbole de Kronecker ($\delta_i^j = 1$ pour $i = j$ et $\delta_i^j = 0$ pour $i \neq j$).

Les expressions des vecteurs de cette base contravariante s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{g}^1 = \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{g}^2 = \mathbf{B}(s) \\ \mathbf{g}^3 = \frac{1}{(1 - \gamma x)} \mathbf{T}(s) \end{cases} \quad (II.16)$$

On remarque que, dans ce cas, la matrice de passage pour la base contravariante correspond à l'inverse de la matrice de passage dans le cas d'une base covariante,

$$\mathbf{P}_{contra} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \gamma x} \end{pmatrix} \quad (II.17)$$

et que les coefficients du tenseur métrique dans la base contravariante sont définis par la relation :

$$\mathbf{g}^{mn} = \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}^n \quad (II.18)$$

Son expression est donc décrite dans la base contravariante par :

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{P}_{contra}^T \mathbf{P}_{contra} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1 - \gamma x)^2} \end{pmatrix} \quad (II.19)$$

De ce qui précède, on peut exprimer tout vecteur $\mathbf{w}$ de la base de Serret-Frenet dans ces deux nouvelles bases à partir des matrices de passage et de leurs composantes covariantes et contravariantes :

$$\mathbf{w} = w^i \mathbf{g}_i \text{ et } \mathbf{w} = w_i \mathbf{g}^i \quad (II.20)$$

A priori, les deux bases covariante et contravariante associées à un repère curviligne ne sont généralement ni orthonormées ni orthogonales. Dans le cas présent d'une courbe plane à courbure constante, les deux bases sont orthogonales et leurs vecteurs sont colinéaires aux vecteurs de la base de Serret-Frenet.

3. Formulation variationnelle des équations de propagation des ondes guidées

En se plaçant dans ce nouveau repère de Serret-Frenet et en considérant un guide courbe, l'objectif de cette section est d'obtenir la formulation variationnelle, restreinte à la section du guide, à partir des équations de propagation des ondes avec des conditions aux limites de surfaces libres.

3.1. Équation de propagation des ondes guidées dans un guide coudé

Les équations de propagation des ondes dans un guide Ω en régime harmonique sont données par :

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \omega^2 \rho \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (II.21)$$

$\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, ω (ω réel) et ρ sont respectivement le champ de déplacement, le champ de contrainte, la pulsation et la masse volumique. La deuxième équation du système traduit les conditions aux limites appliquées au guide. Dans notre cas, nous supposons un guide non contraint en appliquant des conditions aux limites de surfaces libres.

Notre but est de résoudre ce système d'équations afin de calculer les champs de déplacements $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z)e^{-i\omega t}$ dans le cas d'un guide droit ou $\mathbf{u}(x, y, s, t) = \mathbf{u}(x, y, s)e^{-i\omega t}$ dans le cas d'un guide coudé, avec t la variable de temps.

Si le guide d'ondes considéré présente des propriétés d'invariance géométrique et matérielle le long de l'axe principal de propagation, on peut réécrire les solutions particulières recherchées en séparant la variable de propagation relative à cet axe de propagation des autres variables. Dans ce cas, les solutions du système en régime harmonique s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}(x, y)e^{i\beta z}, & \text{pour un guide droit} \\ \mathbf{u}(x, y, s) &= \mathbf{u}(x, y)e^{i\beta s}, & \text{pour un guide coudé} \end{aligned} \quad (II.22)$$

En injectant cette relation dans les équations de propagation, on peut définir l'opérateur de divergence $\mathbf{div}_S$ des équations de propagation dans le cas d'un guide coudé comme suit :

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}(x, y)}{\partial y} + i\beta \mathbf{u}(x, y) \right) e^{i\beta s} = \mathbf{div}_S(\mathbf{u})e^{i\beta s} \quad (II.23)$$

Or, nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution de ces équations de propagation dans le cas d'un système de coordonnées curvilignes afin de pouvoir traiter le cas de la propagation des ondes dans des guides coudés.

En injectant l'expression du champ de déplacement donnée par (II.22) dans (II.21) et en factorisant le terme $e^{i\beta s}$, on aboutit à l'expression des équations de propagation restreintes à la section S du guide :

$$\begin{cases} -\mathbf{div}_S(\boldsymbol{\sigma}_S(\mathbf{u})) - \omega^2 \rho \mathbf{u} = 0, & \text{dans } S \\ \boldsymbol{\sigma}_S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (II.24)$$

σ_S étant la contrainte élastique dans la section S du guide.

Par conséquent, les conditions de surfaces libres se limitent au contour de la section du guide ∂S .

3.2. Loi de comportement

Compte-tenu de la faible amplitude des déplacements et des déformations associés aux ondes guidées, l'utilisation de l'hypothèse des petites perturbations afin de simplifier la loi de comportement est justifiée. Grâce à cette hypothèse, le tenseur des déformations s'écrit de manière linéarisée à partir du déplacement comme suit :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (II.25)$$

réécrite tensoriellement sous la forme :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (II.26)$$

où u_i correspond à la $i^{\text{ème}}$ composante du déplacement et x_j à la $j^{\text{ème}}$ coordonnée du repère dans lequel le calcul est fait et ∇ l'opérateur gradient.

La loi de Hooke relie le tenseur des contraintes à celui des déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (II.27)$$

où $\mathbf{C}$ est le tenseur des constantes d'élasticité associé au guide. Ce tenseur est défini à partir du coefficient de poisson ν et du module de Young E du milieu comme suit :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (II.28)$$

3.3. Formulation intégrale des équations de propagation

L'équation de propagation donnée par la formule (II.21) est équivalente à :

$$-\int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) dV - \omega^2 \rho \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} dV = 0 \quad (II.29)$$

avec $\tilde{\mathbf{v}}$ un champ test quelconque, V le volume du guide Ω considéré et ∂V son contour.

Compte-tenu des symétries du tenseur des contraintes, on a la relation suivante :

$$\mathbf{grad}(\tilde{\mathbf{v}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{div}(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \quad (II.30)$$

et en réinjectant cette dernière formule dans la forme intégrale des équations de propagation, il vient :

$$\int_V \mathbf{grad}(\tilde{\mathbf{v}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV - \int_V \mathbf{div}(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) dV - \omega^2 \rho \int_V \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{v}} dV = 0 \quad (II.31)$$

Le théorème d'Ostrogradsky permet de réécrire le second terme de la précédente équation comme une intégrale de surface :

$$\int_V \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}) dV = \int_{\partial V} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} dV \quad (II.32)$$

Par ailleurs, les conditions aux limites de surfaces libres font apparaître que l'équation (II.32) est nulle puisque $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0$. Finalement, la formulation variationnelle des équations de propagation des ondes élastiques devient :

$$\int_V \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{v}}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dV - \omega^2 \rho \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} dV = 0 \quad (II.33)$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ étant le champ des déformations des modes guidés.

Sous forme vectorielle, cette formulation variationnelle s'écrit finalement :

$$\int_V \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{v}})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dV - \omega^2 \rho \int_V \tilde{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{u} dV = 0 \quad (II.34)$$

Dans le cas d'un guide d'ondes courbe, cette formulation variationnelle des équations de propagation doit être ré-exprimée dans la base curviligne. Il nous faut donc écrire chacun des termes dans la base de Serret-Frenet du guide considéré en exploitant les relations reliant les bases covariante et contravariante associées à ce repère curviligne.

3.4. Expressions des termes de la formulation variationnelle en coordonnées curvilignes

3.4.1. Volume élémentaire

Afin de calculer les intégrales de la formulation variationnelle dans la base de coordonnées curvilignes (x, y, s) , nous devons définir le volume élémentaire dV dans cette nouvelle base à partir de la relation suivante qui utilise les vecteurs de la base covariante définis précédemment :

$$dV = |\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3| dx dy ds \quad (II.35)$$

Le terme $|\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3|$ correspond au produit mixte des vecteurs de cette base covariante :

$$|\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3| = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3) = \sqrt{\det(\mathbf{g})} \quad (II.36)$$

Dans le cas d'un coude, le terme $\sqrt{\det(\mathbf{g})} = 1 - \gamma x$, tient compte de la présence d'une courbure non-nulle et de l'abscisse du point de calcul. On peut constater qu'en considérant qu'un

guide droit est un coude de courbure nulle, le déterminant du tenseur métrique de la base covariante est égal à 1 et le volume élémentaire vaut $dV = dx dy dz$.

3.4.2. Vecteur des déplacements

On considère les vecteurs des déplacements covariants $\mathbf{u}_{cov} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ et les vecteurs des déplacements dans la base curviligne $\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_s)^T$. À partir de la relation (II.20), le vecteur des déplacements de la base covariante s'expriment en fonction du vecteur des déplacements de la base de Serret-Frenet comme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{cov} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_s \end{pmatrix} \quad (II.37)$$

Ce vecteur des déplacements $\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_s)^T$ dans la base curviligne représente l'une des inconnues que l'on cherche à calculer afin de définir les modes élastiques guidés. La suite consiste donc à écrire le tenseur des déformations ϵ figurant dans la formulation variationnelle en fonction de ce vecteur de déplacement.

3.4.3. Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations ϵ est défini de manière générale en fonction du gradient de déplacement comme le montre la relation (II.26).

Pour obtenir l'expression de ce tenseur des déformations, nous allons le décrire dans un premier temps dans les bases covariante et contravariante afin de simplifier les calculs, puis, dans un second temps, nous passerons dans la base de Serret Frenet en exploitant les relations entre ce système de coordonnées et celui des bases covariante et contravariante.

En utilisant l'expression du gradient d'un vecteur quelconque en géométrie différentielle, celui du vecteur des déplacements covariants $\mathbf{u}_{cov}$ est donné par la relation :

$$\nabla \mathbf{u}_{cov} = \nabla u_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = (u_{i,j} - I_{ij}^k u^k) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (II.38)$$

avec $u_{i,j}$ correspondant à la dérivée de la composante de déplacement u_i dans la base covariante par rapport à la $j^{\text{ème}}$ composante et u^k étant la $k^{\text{ème}}$ composante de déplacement dans la base contravariante. Enfin, les termes I_{ij}^k correspondent aux symboles de Christoffel de première espèce et sont donnés par :

$$I_{ij}^k = \mathbf{g}_{i,j} \cdot \mathbf{g}^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (II.39)$$

Dans le cas d'un guide de courbure constante γ , les symboles de Christoffel de première espèce selon les indices contravariants valent :

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \gamma x) \end{pmatrix}, \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-\gamma}{1 - \gamma x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\gamma}{1 - \gamma x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.40)$$

En partant de (II.39) et (II.39), le tenseur des déformations ϵ_{cov} dans la base cotravariante s'écrit :

$$\epsilon_{cov} = \epsilon_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \Gamma_{ij}^k u^k \right] \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (II.41)$$

À partir de la matrice de passage $\mathbf{P}_{cov}$ on déduit l'expression des composantes du tenseur de déformations ϵ dans la base de Serret-Frenet :

$$\epsilon_{cov} = \mathbf{P}_{cov} \epsilon \quad (II.42)$$

Étant donnée la symétrie de ce tenseur, nous utilisons dans la suite la notation de Voigt pour l'écrire comme un vecteur à six composantes que l'on va continuer par abus à noter $\epsilon = (\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{ss} \ 2\epsilon_{xy} \ 2\epsilon_{xs} \ 2\epsilon_{ys})^T$. Ainsi, en prenant $\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_s)^T$ et en développant les différents termes, on obtient l'expression des déformations en fonction des composantes de déplacement dans le repère curviligne sous forme matricielle qui s'écrit comme :

$$\begin{aligned} & \epsilon = \mathbf{L} \mathbf{u} \\ \text{avec} \quad & \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{-\gamma}{1-\gamma x} & 0 & \frac{1}{1-\gamma x} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{1-\gamma x} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & \frac{\gamma}{1-\gamma x} + \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{1-\gamma x} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (II.43)$$

Remarque :

Sachant qu'il est possible, dans le cas d'un coude, d'utiliser un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour paramétrer le guide, on peut retrouver la relation précédente à partir de la définition du gradient de déplacement dans cette base qui est donnée par :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (II.44)$$

En substituant dans (II.26), on obtient l'expression de $\epsilon = (\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{ss} \ 2\epsilon_{xy} \ 2\epsilon_{xs} \ 2\epsilon_{ys})^T$ en fonction des déplacements dans ce repère cylindrique :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (II.45)$$

Par identification, les composantes de déplacement dans le repère cylindrique correspondent à celles dans le repère de Serret-Frenet de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ u_y \\ u_s \end{pmatrix} \quad (II.46)$$

et les opérateurs de dérivation cylindriques s'expriment en fonction des opérateurs de dérivation curvilignes comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = R_c \frac{\partial}{\partial s} \quad (II.47)$$

Après substitution des relations (II.46) et (II.47) dans (II.45), l'expression des composantes du tenseur des déformations dans la base de Serret-Frenet s'écrit :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{1}{1 - \gamma x} \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} - \gamma u_x \right) \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{1}{1 - \gamma x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial s} + \gamma u_x \right) + \frac{\partial u_s}{\partial x} \\ \frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{1}{1 - \gamma x} \frac{\partial u_y}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (II.48)$$

Le passage sous forme matricielle de cette dernière expression permet de retrouver la relation (II.43).

3.5. Formulation variationnelle dans la base de Serret-Frenet

On obtient l'expression de la formulation variationnelle donnée par (II.33) dans la base de Serret-Frenet en remplaçant les différents termes qui la composent par leur expression en fonction du déplacement donné par les relations (II.35), (II.37) et (II.43). Désormais, les

inconnues du problème à résoudre pour obtenir les modes élastiques guidés se propageant dans le coude sont les nombres d'onde β et les champs de déplacement dans la base curviligne $\mathbf{u}$.

On note $\mathbf{L}_{\text{xy}s}$ la matrice reliant les composantes du tenseur des déformations au vecteur des déplacements dans (II.43). Cette matrice peut se décomposer en trois sous-matrices en séparant les différents opérateurs de dérivations partielles dans la section, comme le montre la relation suivante :

$$\mathbf{L}_{\text{xy}s} = \mathbf{L}_{\text{xy}} + \mathbf{L}_s \quad (\text{II.49})$$

avec

$$\mathbf{L}_{\text{xy}} = \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_0 \text{ et } \mathbf{L}_s = \mathbf{L}_s^0 \frac{\partial}{\partial s} \quad (\text{II.50})$$

les expressions des matrices $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\mathbf{L}_0$ et $\mathbf{L}_s^0$ étant données par :

$$\mathbf{L}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.51})$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ \frac{1-\gamma x}{1-\gamma x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{1-\gamma x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_s^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\gamma x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-\gamma x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\gamma x} & 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que les matrices élémentaires $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\mathbf{L}_0$ et $\mathbf{L}_s$ tiennent compte de la courbure du guide γ tout en étant indépendantes de la variable curviligne s et par conséquent indépendantes de θ , l'ouverture angulaire du coude. Par ailleurs, dans le cas d'une courbure nulle, on retrouve les matrices élémentaires d'un guide droit. Finalement, l'expression (II.43) peut être réécrite tensoriellement comme suit :

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{L}_{\text{xy}} + \mathbf{L}_s) \mathbf{u} \quad (\text{II.52})$$

En injectant dans la formulation variationnelle les expressions du volume élémentaire (II.35), du vecteur des déplacements (II.37) et du tenseur des déformations (II.43) dans la base de Serret-Frenet, on peut ré-exprimer cette formulation dans ce repère. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_V \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} \mathbf{u} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy ds + \int_V \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{u} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy ds \\
 & - \int_V \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} \mathbf{u} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy ds + \int_V \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{u} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy ds \\
 & - \omega^2 \rho \int_V \tilde{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{u} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy ds = 0
 \end{aligned} \tag{II.53}$$

4. Méthode SAFE (Semi-Analytic Finite Element Method) en coordonnées curviligne

Comme indiqué dans le chapitre 1, la méthode SAFE est particulièrement adaptée pour le calcul des modes élastiques guidés présents dans un guide d'ondes en régime harmonique (fréquence fixe). Elle consiste à exploiter les propriétés d'invariance de la section du guide pour réduire la taille des systèmes d'équations à résoudre.

En pratique, l'objectif est de restreindre l'utilisation des éléments finis à la seule section droite du guide et de rendre compte de la dépendance dans la direction de propagation par le biais d'un opérateur analytique rendant compte du phénomène de propagation le long de l'axe. Selon les cas, la discrétisation de la section peut se faire soit par des éléments finis 1D dans le cas de sections canoniques simples [84] [85] [86], comme des plaques ou des cylindres droits, ou par des éléments finis 2D pour des sections de géométries complexes ou des guides courbes [87] [88] [89].

L'extension du modèle SAFE présentée ici s'est faite à partir des développements effectués au CEA. Ceux-ci ont été principalement réalisés dans le cadre des thèses de Jezzine [76] et de Baronian [30]. La première thèse a aidé, entre autres, à implémenter un modèle SAFE 1D pour les plaques isotropes et les guides cylindriques ainsi qu'un modèle SAFE 2D pour les guides droits de sections quelconques. La seconde thèse a conduit au développement d'un formalisme de couplage entre le modèle SAFE et des éléments finis 3D conventionnels pour la prise en compte des perturbations complexes présentes au sein du guide, comme par exemple des défauts 3D ou des zones dont la géométrie et/ou la composition matérielle ne permet pas de remplir les conditions d'application du modèle SAFE.

D'autre part, d'autres développements ont été menés au CEA pour étendre les domaines d'application de ces différents modèles. On peut citer les travaux de Taupin [90] sur la modélisation de la propagation des ondes guidées dans des plaques composites. Cette thèse a proposé une extension du modèle SAFE 1D afin de calculer les modes guidés dans le cas des structures composites multi-couches et anisotropes très répandues dans le secteur aéronautique.

De ce fait, la prise en compte de la propagation des ondes élastiques guidées dans des guides isotropes, coudés et de sections arbitraires s'inscrit dans la continuité de ces travaux pour la mise en place d'un module de simulation de la propagation et de la diffraction des ondes guidées. Le modèle mis en œuvre ici permettra, à terme, d'enrichir le module de simulation des ondes guidées de CIVA pour la simulation des CND.

4.1. Hypothèses d'application de la méthode SAFE

Dans le cas d'un guide d'ondes coudé, l'utilisation de la base de Serret-Frenet définie précédemment sert à se placer dans le domaine de validité du formalisme SAFE en vérifiant ses hypothèses d'application : invariances géométrique et matérielle de la section du guide.

D'une part, l'invariance géométrique est garantie par le fait que, dans le repère de coordonnées curvilignes, la section transverse du guide est toujours contenue dans le plan perpendiculaire à la fibre neutre et dirigée par les vecteurs de la base curviligne $(\mathbf{B}, \mathbf{N})$. D'autre part, l'invariance matérielle est quant à elle liée à la constitution du guide ; elle traduit l'invariance de la composition matérielle de la section transverse du guide le long de sa fibre neutre.

4.2. Formalisme SAFE pour les guides coudés

Nous présentons ici le formalisme SAFE dans le cas de la propagation des ondes élastiques dans un guide de courbure constante notée γ . Dans le repère de Serret-Frenet, le guide coudé vérifie l'invariance géométrique et matérielle suivant l'axe de propagation ; on peut donc exprimer le champ de déplacement en séparant la variable de propagation s associé à l'abscisse curviligne des deux autres variables (x, y) . Ainsi, le vecteur de déplacement $\mathbf{u}$ en un point $\mathbf{M}(x, y, s)$ à l'instant t s'écrit :

$$\mathbf{u}(x, y, s, t) = \mathbf{U}(x, y)e^{i(\beta s - \omega t)} \quad (II.54)$$

De même, on considère un vecteur de déplacement virtuel $\tilde{\mathbf{v}}$ qui s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, s, t) = \tilde{\mathbf{V}}(x, y)e^{i(\omega t - \beta s)} \quad (II.55)$$

L'objectif de la méthode SAFE est de calculer les vecteurs de déplacement $\tilde{\mathbf{V}}(x, y)$ et $\mathbf{U}(x, y)$ dans la section du guide. Comme décrit dans le premier chapitre, dans le cas de guides d'ondes de géométrie simple comme les plaques ou les cylindres droits, il est possible d'obtenir l'expression de ces vecteurs de manière analytique. Cependant, pour un guide de section arbitraire, l'utilisation de méthodes numériques comme les éléments finis est nécessaire afin de tenir compte de la géométrie plus complexe de la section. Comme tout modèle aux éléments finis [91], les principales étapes de construction sont les suivantes :

- discrétisation du milieu continu en sous domaines éléments finis,
- construction de l'approximation nodale pour les variables recherchées,
- établissement des matrices élémentaires pour chaque sous domaine à partir de la formulation variationnelle en tenant compte des conditions aux limites,
- détermination des matrices de masse et de rigidités globales par assemblage des matrices élémentaires,
- résolution du système d'équations en recherchant ses valeurs et vecteurs propres.

Chacune de ces étapes sera détaillée et expliquée dans la suite.

4.2.1. Discrétisation par éléments finis de la section

Pour un guide d'onde de type cylindre droit ou plaque droite, le calcul des modes guidés par la méthode SAFE peut se restreindre, pour raisons de symétrie, à un calcul où seule l'épaisseur est discrétisée (par un maillage 1D). Dans le cas d'un guide de section quelconque ou d'un guide courbe, le calcul des champs élastodynamiques nécessite un maillage par éléments finis 2D de la section du guide. Un exemple de ce type de maillage est donné dans la figure suivante :

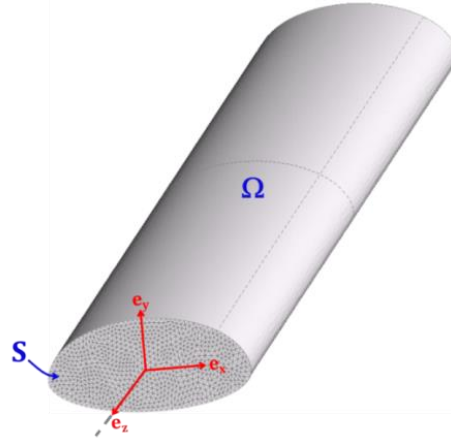


Figure II-5: Discrétisation 2D d'un guide d'ondes de section arbitraire par des éléments finis triangulaires à trois nœuds

Dans la suite, nous choisissons donc une discrétisation 2D de la section avec des éléments finis triangulaires de Lagrange d'ordre P1 (Chaque élément est composé de 3 nœuds) pour mailler la section du guide. Un exemple de ce type de maillage est montré sur la Figure II-6.

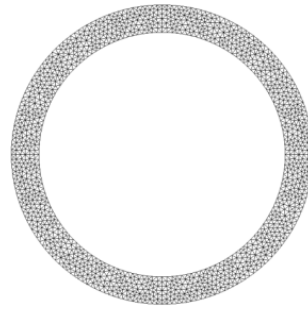


Figure II-6: Maillage 2D par éléments triangulaires d'ordre P1 de la section d'une canalisation

Ce maillage a été généré à partir du mailleur GMSH développé par Geuzaine et Remacle [92]. Pour la suite, il sera réutilisé pour discrétiser les sections des guides sur lesquels on souhaite effectuer les calculs.

D'après Zienkiewicz et Taylor [93], si on note S_e la surface d'un sous domaine de notre maillage correspondant à un élément, notre section S est approchée simplement par :

$$S \simeq \sum_{e=1}^{n_e} S_e \text{ avec } \lim_{S_e \rightarrow 0} (\cup S_e) = S \quad (II.56)$$

De manière générale, le nombre de sous domaines exploités pour approcher une géométrie donnée est un critère important. Plus le nombre de sous domaines est élevé, plus la description de la géométrie est précise. Par ailleurs, le nombre de nœuds composant chaque élément influence directement la précision des calculs : plus le nombre de nœuds augmente et plus l'erreur numérique liée à la méthode d'intégration. En contrepartie, l'augmentation du nombre de sous domaines du maillage et donc du nombre de nœuds fait augmenter la taille du système à résoudre et accroît les temps de calculs.

En discrétisation par éléments finis pour le calcul de propagation d'ondes, le critère de maillage généralement employé consiste à fixer un nombre minimal d'éléments par longueur d'onde comme l'illustre la Figure II-7 :

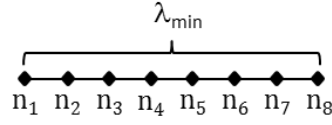


Figure II-7: Critère de maillage 1D en fonction de la longueur d'onde minimale à la fréquence maximale de calcul

Dans la littérature, il existe différents types de critères de maillage pour le calcul des modes dans des sections de guides. Jezzine [76] a comparé certains d'entre eux dont celui établi par Galan et Abascal [94] dans le cas d'un maillage 1D avec des éléments quadratiques. Ce dernier se base sur la longueur d'onde transverse des ondes de volumes pour fixer le nombre minimal d'éléments, suivant la formule :

$$\lambda_T = \frac{V_T}{f} > 4L_e \quad (II.57)$$

où L_e désigne la longueur d'un élément, λ_T la longueur d'onde, V_T la vitesse de propagation des ondes transverses et f la fréquence. Notons aussi qu'ils ajoutent un critère spécifique aux modes inhomogènes et évanescents sur lesquels nous reviendrons plus tard :

$$\text{abs}(\beta)L_e < 0.425 \quad (II.58)$$

avec β le nombre d'onde complexe du mode évanescent ou inhomogène.

Il existe dans la littérature d'autres critères de maillage spécifiques au cas du modèle SAFE pour le calcul des modes élastiques guidés. Parmi eux, on peut citer celui proposé par Park et Kausel [95] qui considèrent que pour une discrétisation permettant d'obtenir N valeurs propres, seulement un tiers de ces valeurs peut être considéré comme ayant une précision satisfaisante. Dans la suite, nous allons nous attacher à toujours nous placer dans ce cas de figure afin de limiter l'impact des erreurs de discrétisation.

De plus, compte tenu des fréquences de travail en ondes guidées ($< 250\text{kHz}$) et des conclusions des études de convergences menées par Jezzine [76] et celles que nous avons réalisées sur les guides tubulaires coudés et droits, nous nous sommes fixés le critère suivant dans le cas d'un maillage 2D avec des éléments triangulaires P1 :

$$\lambda_T = \frac{V_T}{f} > 12L_e \quad (II.59)$$

Ce choix permet d'obtenir une précision très satisfaisante ($\text{erreur} < 0.1\%$) par rapport à la valeur exacte du nombre d'onde obtenu par des méthodes analytiques.

4.2.2. Approximation nodale des vecteurs de déplacement

Dans les expressions (II.54) et (II.55), les vecteurs d'amplitudes dans la section des modes $\tilde{\mathbf{V}}(x, y)$ et $\mathbf{U}(x, y)$ sont les interpolations éléments finis des déplacements. Ils correspondent aux approximations nodales du déplacement dans la section du guide considéré.

Dans la formulation variationnelle (II.53), on injecte les expressions des champs des déplacements puis on remplace les dérivées partielles $\partial/\partial s$ des vecteurs de déplacement par rapport à la composante curviligne par le facteur $i\beta$. Après factorisation des termes dépendant de la variable curviligne s , on aboutit à la formulation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_S \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} \mathbf{U} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy + i\beta \int_S \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{U} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \\ & - i\beta \int_S \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} \mathbf{U} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy + \beta^2 \int_S \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{U} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \\ & - \omega^2 \rho \int_S \tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{U} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (II.60)$$

Soit un élément triangulaire P1 de Lagrange du maillage 2D de la section du guide tel que montré sur la Figure II-8:

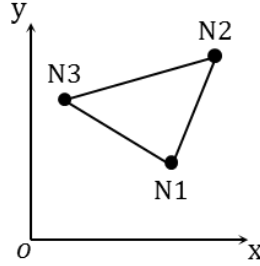


Figure II-8: Élément fini triangulaire P1

en approximation nodale, le vecteur des composantes de déplacement est donné par la relation :

$$\mathbf{u}(x, y, s, t) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{U}^e e^{i(\beta s - \omega t)} \quad (II.61)$$

De même, le vecteur des déplacements virtuels s'exprime comme :

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, s, t) = \mathbf{N}(x, y) \tilde{\mathbf{V}}^e e^{i(\beta s - \omega t)} \quad (II.62)$$

Par simple identification avec (II.54) et (II.55), on peut noter que pour un élément fini du maillage de la section du guide, on a :

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{U}^e \quad (II.63)$$

où $\mathbf{U}^e$ et $\tilde{\mathbf{V}}^e$ sont les vecteurs des composantes de déplacements des nœuds de l'élément. À titre d'exemple, $\mathbf{U}^e$ est de la forme :

$$\mathbf{U}^e = (\mathbf{U}_x^{e,1} \quad \mathbf{U}_y^{e,1} \quad \mathbf{U}_s^{e,1} \quad \mathbf{U}_x^{e,2} \quad \mathbf{U}_y^{e,2} \quad \mathbf{U}_s^{e,2} \quad \mathbf{U}_x^{e,3} \quad \mathbf{U}_y^{e,3} \quad \mathbf{U}_s^{e,3})^T \quad (II.64)$$

et $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est la matrice des fonctions de formes de l'interpolation éléments finis ; elle est définie par :

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 \end{pmatrix} \quad (II.65)$$

où les fonctions de formes $\phi_1(\xi, \eta), \phi_2(\xi, \eta), \phi_3(\xi, \eta)$ constituent une base de fonctions polynomiales. Ces fonctions, dans le cas d'une approximation linéaire en deux dimensions, sont définies par :

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (II.66)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}, \\ \eta &= \frac{(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}, \end{aligned} \quad (II.67)$$

(x_i, y_i) pour $i = 1, 2, 3$ étant les coordonnées des trois nœuds de l'éléments dans le repère de Serret-Frenet dans le cas d'un guide coudé (ou dans la base cartésienne pour un guide droit).

4.2.3. Construction des matrices élémentaires pour le guide coudé

Sur chaque élément du maillage 2D de la section du guide, nous utilisons l'approximation nodale des champs de déplacements $\mathbf{U}(x, y)$ et de déplacements virtuels $\tilde{\mathbf{V}}(x, y)$ restreints à la section.

Dans ce cas, le produit scalaire s'écrit désormais :

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \cdot \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{V}}^e T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{U}^e \quad (II.68)$$

En reprenant la relation (II.60) et en appliquant l'expression du produit scalaire défini précédemment, on écrit la relation variationnelle pour un élément infinitésimal de surface S^e :

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{V}}^e T \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \mathbf{U}^e + i\beta \tilde{\mathbf{V}}^e T \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \mathbf{U}^e \\ & - i\beta \tilde{\mathbf{V}}^e T \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \mathbf{U}^e + \beta^2 \tilde{\mathbf{V}}^e T \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \mathbf{U}^e \\ & - \omega^2 \rho \tilde{\mathbf{V}}^e T \int_{S^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \mathbf{U}^e = 0 \end{aligned} \quad (II.69)$$

À partir de cette relation, on identifie les matrices de rigidités élémentaires $\mathbf{K}_i^e$ pour $i=1,2,3$ et de masse élémentaire $\mathbf{M}^e$ traduisant localement les propriétés matérielles du guide considéré, comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1^e &= \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy, \\
 \mathbf{K}_2^e &= \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy, \\
 \mathbf{K}_3^e &= \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy, \\
 \mathbf{M}^e &= \rho \int_{S^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy
 \end{aligned} \tag{II.70}$$

Ces différentes matrices de rigidité et de masse tiennent compte de la courbure non nulle du guide étudié. Cette courbure apparaît notamment dans le déterminant du tenseur métrique de la base covariante mais aussi dans les différentes sous-matrices $\mathbf{L}_{xy}$ et $\mathbf{L}_s$ qui définissent ces matrices élémentaires.

D'un point de vue purement formel, ces matrices sont une extension des matrices élémentaires déterminées dans le cas d'un guide droit. Le formalisme introduit ici permettra donc, *in fine*, de traiter à la fois le cas des guides élastiques droits et coudés de sections arbitraires.

Par ailleurs, étant donnée une discrétisation par éléments triangulaires P1, pour chaque élément, ces matrices élémentaire sont de taille 9x9 correspondant à la somme du nombre de degrés de libertés de chacun des nœuds composant l'élément.

Finalement, pour un guide coudé de section arbitraire et avec des conditions aux limites de surfaces libres, le système matriciel obtenu à partir de la formulation variationnelle pour un élément du maillage se réécrit sous la forme :

$$(\mathbf{K}_1^e - j\beta(\mathbf{K}_2^e - \mathbf{K}_2^{eT}) + \beta^2 \mathbf{K}_3^e) \mathbf{U}^e - \omega^2 \mathbf{M}^e \mathbf{U}^e = 0 \tag{II.71}$$

Pour un guide soumis à des forces extérieures, le système précédent reste de la même forme avec l'ajout d'un second membre F correspondant à ces forces extérieures qu'elles soient de nature surfaciques ou volumiques.

4.2.4. Assemblage des matrices élémentaires

Les matrices de masse et de rigidités globales sont calculées par assemblages des différentes matrices élémentaires du maillage éléments finis (II.52). Cet assemblage s'effectue par sommation des termes élémentaires de la formulation variationnelle. Ainsi, pour les matrices de rigidités, on écrit :

$$\sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{V}}_{n_e}^T \mathbf{K}_i^e \mathbf{U}_{n_e} = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{K}_i \mathbf{U} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \tag{II.72}$$

Il en va de même pour la matrice de masse :

$$\sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{V}}_{n_e}^T \mathbf{M}_{n_e} \mathbf{U}_{n_e} = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (II.73)$$

Ces relations traduisent le fait que la forme quadratique globale du domaine éléments finis complet résulte de la somme des formes quadratiques des sous-domaines formant la section du guide. La dimension de ces matrices globales dépend de la taille du maillage et du nombre de nœuds par éléments. Dans le cas d'une discrétisation par éléments triangulaires de Lagrange de type P1, ces matrices carrées sont de tailles $3n_e \times 3n_e$.

Pour la section complète, le système aux valeurs propres quadratiques s'exprime finalement :

$$(\mathbf{K}_1 - j\beta(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + \beta^2 \mathbf{K}_3) \mathbf{U} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} = 0 \quad (II.74)$$

Le formalisme pour un guide droit avec des conditions aux limites nulles peut être retrouvé en considérant une courbure nulle dans cette dernière relation.

4.2.5. Résolution du problème aux valeurs propres quadratiques

La linéarisation du système d'équation (II.74) permet de le réécrire sous la forme :

$$(\mathbf{A} - \beta \mathbf{B}) \mathbf{Q} = 0 \quad (II.75)$$

avec

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \beta \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} \\ \mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} & -j(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) \end{pmatrix} \quad (II.76)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_3 \end{pmatrix}$$

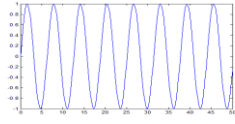
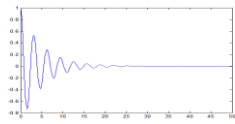
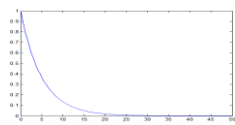
$\mathbf{Q}$ est un vecteur colonne de taille $6n_e$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices carrées de taille $6n_e \times 6n_e$ correspondant à deux fois la taille des matrices de rigidités et de masse. Pour obtenir la solution de ce problème aux valeurs propres quadratiques, nous avons exploité les développements réalisés dans la thèse de Jezzine [76] qui a mis en place plusieurs méthodes d'optimisations.

4.2.6. Analyse du spectre des valeurs propres

La résolution du système (II.76) revient à rechercher ses valeurs propres (nombres d'ondes β des modes) et ses vecteurs propres (vecteurs de déplacements des modes).

Les valeurs propres β peuvent être imaginaires pures, complexes ou réelles correspondant à des modes évanescents, inhomogènes ou propagatifs. Le tableau suivant aide à différencier les différents types d'ondes en fonction de leur nombre d'onde β :

Tableau II-1: Classification des modes guidés selon la nature de leur nombre d'onde

β	Nature du mode	Tracé du terme en $e^{i\beta s}$	Caractéristiques
$\beta \in \mathbb{R}$	Propagatif		Modes se propageant en oscillant sans atténuation
$\beta \in \mathbb{C}$	Inhomogène		Modes oscillant avec atténuation
$\beta \in i\mathbb{R}$	Évanescent		Modes sans oscillation et avec atténuation

Pour les modes inhomogènes ($\beta \in \mathbb{C}$) et du fait de la forme quadratique du système, si β est solution, alors, $-\beta, \bar{\beta}, -\bar{\beta}$ le sont aussi. Concernant les deux autres types de modes : propagatifs ($\beta \in \mathbb{R}$) et évanescent (s) ($\beta \in i\mathbb{R}$), si β est solution, alors, $-\beta$ l'est également. Des explications plus détaillées sur ce point précis sont données par Baronian [30]. En tout état de cause, ces modes guidés apparaissent par paires et correspondent à des modes dont la vitesse de phase est orientée vers la droite β ou vers la gauche $-\beta$. Comme noté dans le chapitre 1, il est possible de trouver, sur certaines plages fréquentielles, des modes propagatifs dont la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont de signes opposés : ces modes sont appelés modes rétrogrades ou modes inverses. Dans ce cas, le mode est réputé se propager dans le sens correspondant à celui de sa direction de vitesse d'énergie (qui, dans le cas du guide isotrope non atténuant, correspond à la direction de sa vitesse de groupe).

Il est aussi intéressant de noter que les modes inhomogènes et propagatifs sont en nombre fini, alors qu'il existe théoriquement une infinité de modes évanescent (s). Du fait de la discrétisation numérique et donc du nombre fini de degré de liberté d'une part, et par choix pratique d'autre part, on tronque le nombre de modes à calculer en gardant *a minima* tous les modes propagatifs responsables de la propagation de l'énergie ultrasonore sur de longues distances, ainsi qu'un certain nombre de modes évanescent (s) et inhomogènes qui entrent en ligne de compte lors des phénomènes de diffraction et de conversions de modes. Pour les modes inhomogènes, on retient principalement les modes dont l'énergie décroît le plus lentement car ils sont susceptibles de participer de manière plus importante aux mécanismes de conversions des modes que subissent les modes propagatifs utilisés pour les contrôles.

4.2.7. Classification des modes propagatifs

Comme expliqué dans le chapitre 1, les modes propagatifs sont les modes guidés possédant un nombre d'onde réel et pouvant se propager dans le cas d'un guide isotrope, sans atténuation, homogène et soumis à des conditions aux limites de surfaces libres. Dans les guides de géométries cylindriques, ces modes propagatifs peuvent se répartir, en fonction de leurs profils de déplacement, sur trois familles différentes : les modes de torsions $T(0,n)$, les modes de compressions $L(0,n)$ et les modes de flexions $F(m,n)$ avec $n \geq 1$ et $m \in \mathbb{Z}$. Ces deux indices m et n permettent de différencier les modes d'une même famille. L'indice m , appelé indice

circonférentiel, fait référence à la dépendance du champ de déplacement en $\cos(m\theta)$ ou en $\sin(m\theta)$. Cet indice sert à distinguer les modes de flexion couplés correspondant aux solutions doubles du système quadratique sur lesquels on reviendra en détails ultérieurement. L'indice n , appelé indice secondaire, aide à déterminer les modes de même ordre circonférentiel m . Dans le cas des modes de flexion, cette indice secondaire représente le nombre de *maxima* du champ de déplacement du mode dans la section du guide.

Les trois familles T, L et F, présentées brièvement dans le premier chapitre, se caractérisent par des profils de déplacements spécifiques :

- Les modes de torsion, indicés T(0,n) avec $n \geq 1$ sont des modes axisymétriques avec un déplacement orthoradial u_θ prépondérant par rapport aux déplacements radial u_r et axial u_z (ou u_s pour le coude) dont les amplitudes sont négligeables.
- Les modes de compression ou modes longitudinaux, indicés L(0,n) avec $n \geq 1$ sont également des modes axisymétriques mais cette fois-ci avec des déplacements radial u_r et axial u_z (ou u_s pour le coude) prépondérants par rapport au déplacement orthoradial u_θ .
- Les modes de flexion, indicés F(m,n) avec $n \geq 1$ et $m \in \mathbb{Z}$ sont quant à eux des modes non axisymétriques avec des déplacements radial u_r , axial u_z (ou u_s pour le coude) et orthoradial u_θ dépendants de θ et non nuls. Par ailleurs, les modes de flexions couplés (solutions doubles du système quadratique) représentent le même mode de flexion modulo un déphasage de $\pi/2$ et sont notés F(m,n) et F(-m,n).

4.2.8. Quantités physiques associées aux modes guidés

Une fois les nombres d'onde et les champs de déplacement nodaux des modes guidés déterminés par la résolution des équations de propagations dans la section, il est possible, par simple post-traitement des données, d'obtenir différentes quantités physiques : les fréquences de coupures, les vitesses de groupe, les vitesses de phase, les contraintes et les forces nodales.

Les fréquences de coupure des modes propagatifs correspondent à leur fréquence d'apparition. En dessous de celles-ci, ces modes sont soit des modes évanescents, soit des modes inhomogènes. Elles coïncident avec un nombre d'onde β nul dans le système aux valeurs propres quadratiques donné par (II.74). Le calcul de ces fréquences de coupures revient donc à trouver les valeurs de ω_c telles que :

$$\mathbf{K}_1 - \omega_c^2 \mathbf{M} = 0 \quad (\text{II.77})$$

avec $\omega_c = 2\pi f_c$, où f_c est la fréquence de coupure recherchée.

Les vitesses de groupe V_g et de phase V_p sont respectivement définies par :

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \quad (\text{II.78})$$

et

$$V_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{II.79})$$

Dans le cas d'un guide sans atténuation, la vitesse de groupe représente la vitesse de propagation de l'énergie ultrasonore dans le guide d'ondes.

Les forces nodales des modes dans la section du guide coudé sont obtenues par la relation :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K}_2^T - j\beta \mathbf{K}_3) \mathbf{U} \quad (\text{II.80})$$

Cette formule matricielle découle de la définition donnée par Bathe [82] appliquée au cas d'un guide coudé défini dans la base de Serret-Frenet :

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \epsilon \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \quad (II.81)$$

où $\epsilon = (\mathbf{L}_{xy} + \mathbf{L}_s)\mathbf{u}$ désigne la déformation définie précédemment.

Enfin, on peut calculer le tenseur des contraintes, dont nous aurons besoin par la suite à partir des forces nodales équivalentes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{F} \mathbf{M}^{-1} \quad (II.82)$$

$\mathbf{M}$ étant la matrice de masse et ρ la densité du guide.

4.3. Comparaison entre les modes guidés dans un cylindre plein droit et coudé

Dans un premier temps, les simulations avec le modèle SAFE étendu au cas des guides coudés ont été comparées aux travaux de Treysède et Laguerre [3]. Ces comparaisons portent sur un cas de cylindre plein coudé avec des tracés de courbes de dispersions en nombre d'ondes sur la plage fréquentielle variant de 0 à 1MHz. Les résultats des comparaisons sont donnés dans l'Annexe 1.

4.3.1. Les courbes de dispersion d'un guide droit et coudé

Dans cette section, on considère un cylindre plein de diamètre 20mm. Les calculs sont effectués dans des plages fréquentielles variant de 20 à 300kHz pour le tracé des courbes de dispersion et pour une fréquence unique de 200kHz pour les cartographies des composantes de déplacement présentées par la suite.

Le maillage de la section par des éléments finis triangulaires P1 est montré sur la Figure II-9 :

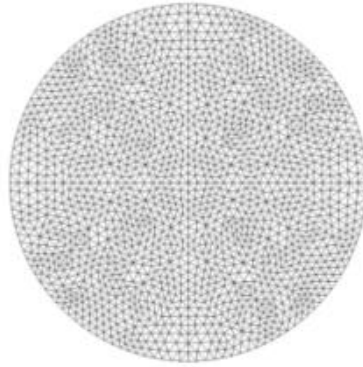


Figure II-9: Maillage de la section d'un cylindre plein de diamètre 20mm avec des éléments finis triangulaires de type P1

À partir des valeurs propres déterminées après la résolution du système quadratique, on peut tracer les courbes de dispersions en nombre d'onde, en vitesse de phase et en vitesse de groupe pour une courbure nulle représentant le guide droit et pour une courbure non nulle pour le cas d'un guide coudé.

En prenant la configuration décrite plus haut, le calcul est fait pour $\gamma = 0$ et $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$. Les courbes de dispersion en nombre d'onde, en vitesse de phase et en vitesse de groupe sont représentées, respectivement, sur les Figure II-10, Figure II-11 et Figure II-12. Sur ces figures, on peut noter qu'à la fréquence maximale de calcul (300kHz), on compte 16 modes propagatifs dans le guide droit et 28 modes propagatifs dans le guide coudé.

Présentation et analyse des courbes de dispersions en nombres d'ondes :

En comparant les courbes de dispersion en nombres d'onde, pour le même guide, avec une courbure nulle et une courbure non-nulle, on peut relever plusieurs différences aussi bien sur l'allure des courbes de dispersion que sur le nombre de modes propagatifs existants entre les cas droit et coudé.

Tout d'abord, on remarque qu'à fréquence fixe, le nombre de modes propagatifs semble plus important dans le cas du coude par rapport à celui du guide droit. En effet, certaines branches correspondant à des modes de flexions dans le guide droit sont remplacées par deux branches adjacentes dans le cas coudé. Lors de la résolution du système aux valeurs propres quadratiques pour le cas droit, les nombres d'ondes des modes de flexions sont les solutions doubles du système, identiques à un déphasage de $\pi/2$ près. Ces solutions vont par paire et représentent un seul et même mode de flexion se propageant. À l'inverse, du fait de la présence d'une courbure non nulle, ces solutions doubles sont distinctes et représentent deux modes de flexions différents.

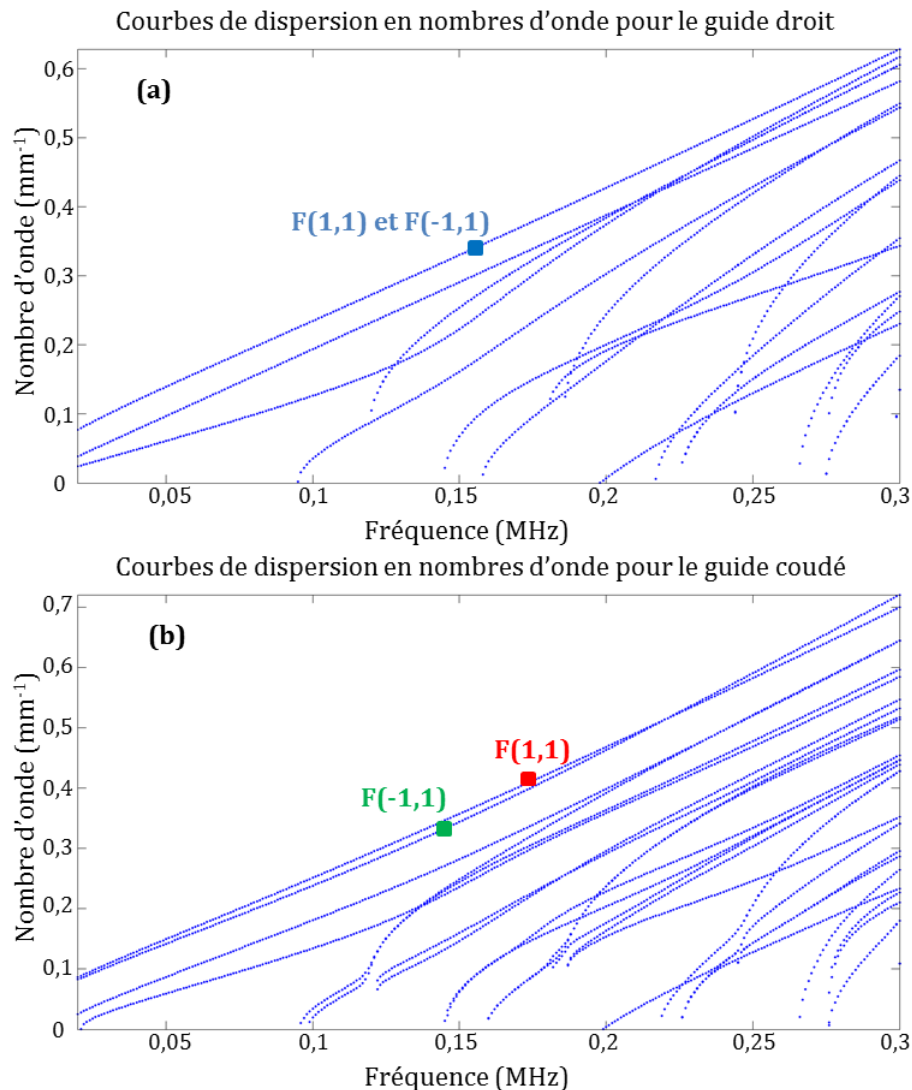


Figure II-10 : Courbes de dispersion en nombre d'ondes pour un cylindre plein de diamètre 20mm dans la plage fréquentielle variant de 20 à 300kHz pour a) une courbure nulle $\gamma = 0$ et b) une courbure égale à $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$

Un exemple de séparation des modes de flexions est visible sur la Figure II-10(b) où on observe la séparation des branches des modes notés $F(1,1)$ et $F(-1,1)$ alors que ces derniers sont confondus dans le cas du guide droit présenté dans la Figure II-10(a). De plus, l'augmentation de la courbure entraîne une séparation de plus en plus prononcée des branches associées à ces modes de flexions couplés. Ce phénomène se reproduit pour tous les modes de flexion.

Par ailleurs, en s'attardant sur les modes possédant une fréquence de coupure, on note que, pour un même mode propagatif, la valeur de cette fréquence n'est pas la même dans le guide droit et dans le guide coudé. Cet effet de la courbure sera analysé par la suite.

Présentation et analyse des courbes de dispersion en vitesse de phase :

La vitesse de phase V_p peut se calculer à partir de la relation (II.79)

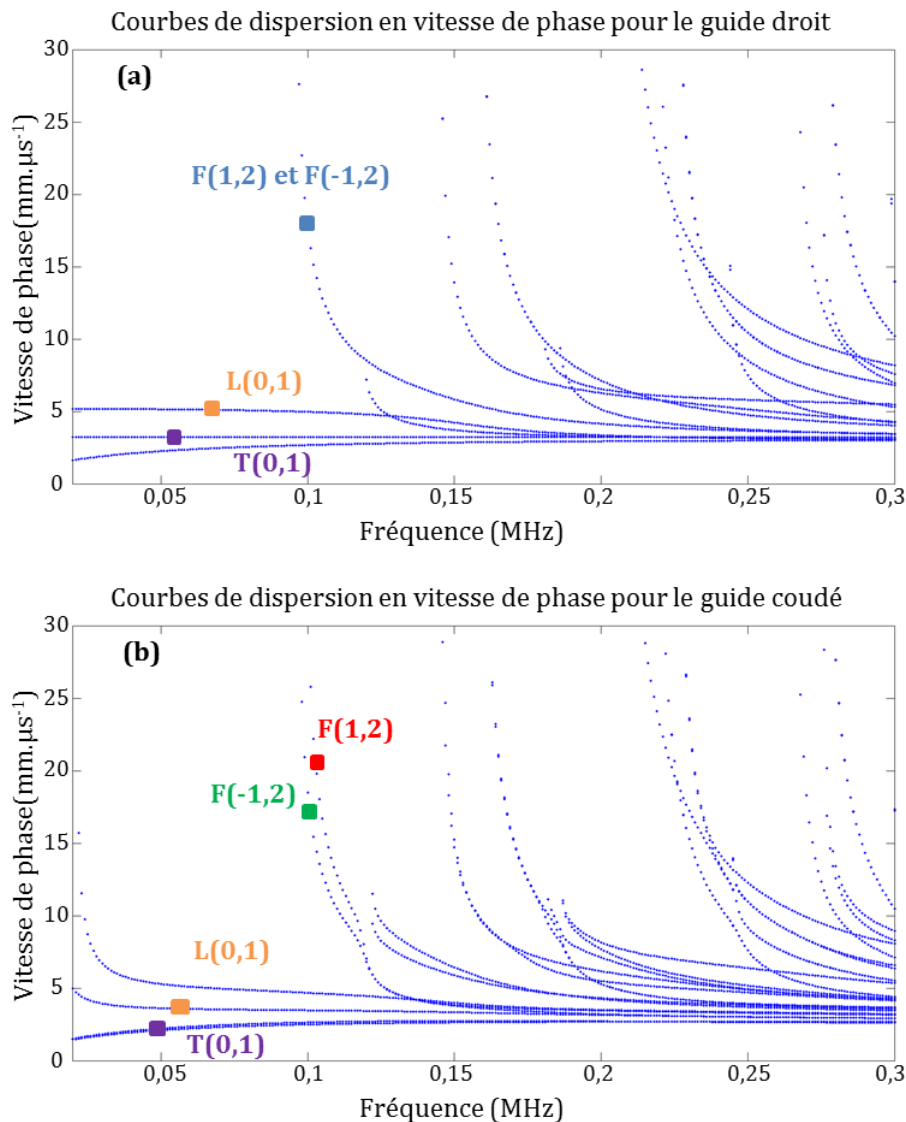


Figure II-11 : Courbes de dispersion en vitesse de phase pour un cylindre plein de diamètre 20mm dans la plage fréquentielle variant de 20 à 300kHz pour a) une courbure nulle $\gamma = 0$ et b) une courbure égale à $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$

Comme décrit dans le cas des nombres d'onde, en plus du phénomène de découplage des modes de flexions dans le coude, on remarque aussi un décalage au niveau des fréquences de

coupure en dessous desquels le mode est évanescent. Généralement, pour un même mode, la fréquence de coupure de celui-ci est plus élevée dans le coude que dans le guide droit. Par exemple, sur les courbes de dispersion en vitesses de phases représentées sur les Figure II-11 (a) et (b), on peut remarquer que la fréquence de coupure du mode de flexion couplé $F(1,2)$ (et $F(-1,2)$) équivaut à 95kHz dans le guide droit alors que dans le coude, les modes de flexions découplés $F(-1,2)$ et $F(1,2)$ apparaissent respectivement à 97 et 100kHz.

D'autre part, on constate que le premier mode de torsion $T(0,1)$ est dispersif (dépendance fréquentielle de la vitesse de phase) à basse fréquence dans le coude alors qu'il est l'unique mode non dispersif dans le cas droit. Enfin, le mode de compression $L(0,1)$ possède une fréquence de coupure non nulle dans le cas du guide coudé alors qu'il existe à toutes les fréquences dans le guide droit. À plus forte courbure, le mode de torsion $T(0,1)$ n'existe également plus à basses fréquences.

Présentation et analyse courbes de dispersions en vitesse de groupe :

La vitesse de groupe V_g est déterminée à partir de la relation (II.78).

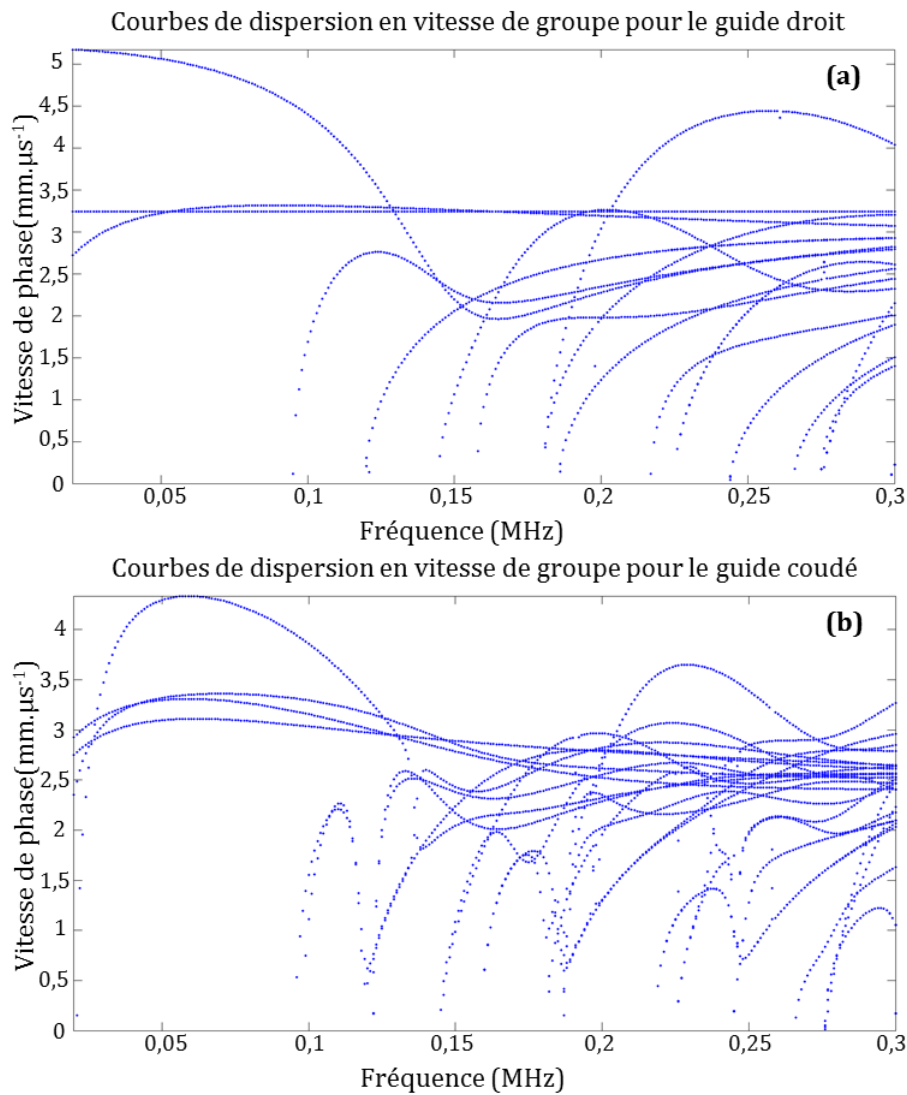


Figure II-12 : Courbes de dispersion en vitesse de groupe pour un cylindre plein de diamètre 20mm dans la plage fréquentielle variant de 20 à 300kHz pour a) une courbure nulle $\gamma = 0$ et b) une courbure égale à $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$

En addition des différents effets de la courbure relevés précédemment, les courbes données en vitesses de groupes permettent de mieux constater l'accroissement du caractère dispersif des différentes ondes propagatives dans le guide coudé. Ainsi, la dispersion du premier mode de torsion $T(0,1)$ en présence de courbure apparaît nettement. La dispersion des modes propagatifs augmente avec l'accroissement de la valeur de la courbure du guide considéré et constitue donc manifestement un des facteurs de complexification des signaux obtenus lors des contrôles portant sur des parties coudées.

4.3.2. Les champs de déplacements dans des cylindres pleins droits et coudés

À partir des vecteurs de déplacement modaux obtenus par la résolution, dans la section, des équations de propagation, on représente les cartographies des composantes de déplacement radiale, orthoradiale et axiale des différents modes propagatifs dans la section du guide. On notera ces déplacements respectivement (u_r, u_θ, u_z) pour le guide droit ($\gamma = 0$) et (u_r, u_θ, u_s) pour le coude ($\gamma \neq 0$).

Afin de montrer l'influence de la courbure sur les déplacements modaux, nous présentons ici des cartographies pour différentes familles de modes propagatifs, pour différentes valeurs de courbure et pour des guides de géométries différentes. L'analyse sera proposée à la fin de cette partie pour les différents exemples représentés.

Cartographies des déplacements dans un cylindre plein

Les cartographies de déplacement sont données dans l'ordre suivant : déplacements radial u_r , orthoradial u_θ et axial u_z pour le guide droit et u_s pour le coude. Les calculs sont effectués respectivement pour les courbures $\gamma = 0, \gamma = 0,005\text{mm}^{-1}$ et $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$ à la fréquence de 200kHz .

- Cartographie des déplacements des modes de flexions couplés $F(1,1)$ et $F(-1,1)$

Cette représentation en cartographie aide dans un premier temps à illustrer autrement le phénomène de séparation des modes de flexions couplés dans le guide droit. Ainsi, si l'on considère le premier mode de flexion, les déplacements modaux dans la section du guide des deux solutions qui le composent $F(1,1)$ et $F(-1,1)$ sont donnés dans la Figure II-13:

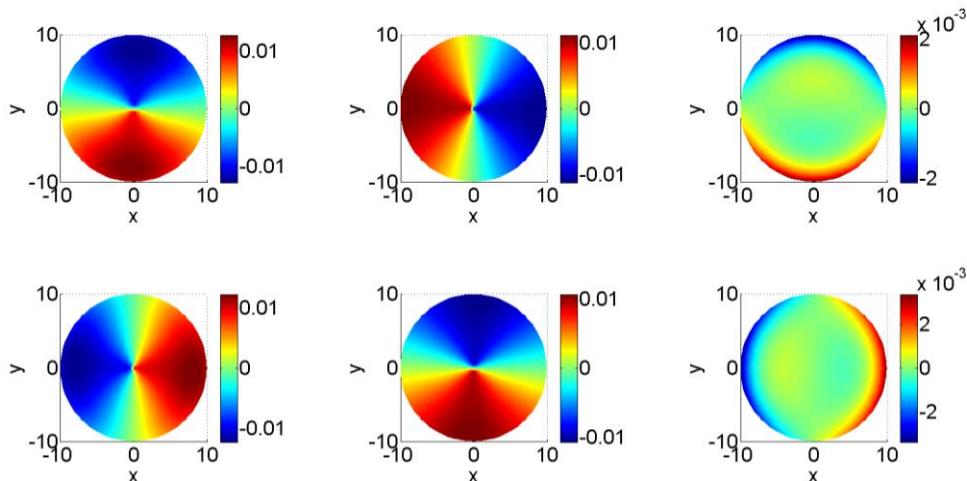


Figure II-13: Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial des solutions couplées $F(1,1)$ et $F(-1,1)$ composant le premier mode de flexion pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbure $\gamma = 0$ à la fréquence de 200kHz

Remarque : Compte-tenu des symétries du guide droit, les deux solutions du mode de flexion sont simplement déphasées de $\pi/2$ (en regardant chaque composante du déplacement

séparément), et correspondent au même mode de flexion. Dans les Figure II-14 et Figure II-15, on représente désormais ce mode avec des courbures non nulles $\gamma = 0,005\text{mm}^{-1}$ et $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$.

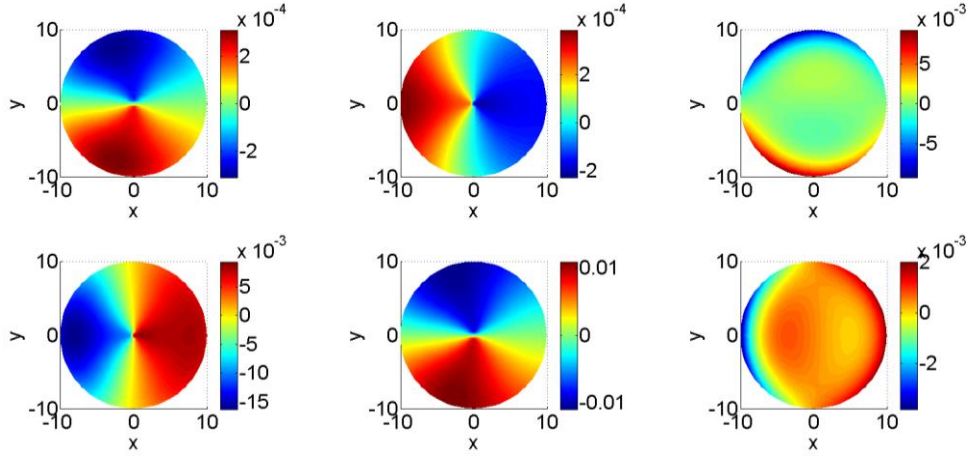


Figure II-14 : Même légende que précédemment pour une courbure $\gamma = 0,005\text{mm}^{-1}$ à la fréquence de **200kHz**

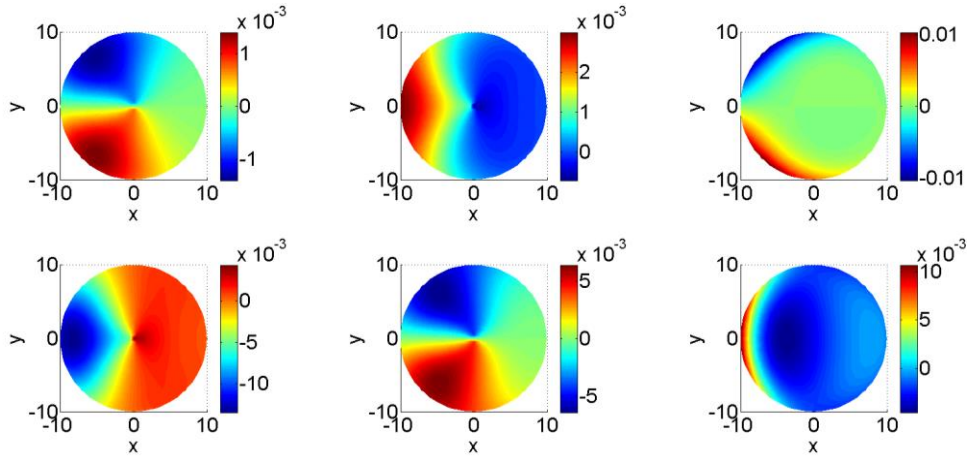


Figure II-15 : Même légende que précédemment pour une courbure $\gamma = 0,025\text{mm}^{-1}$ à la fréquence de **200kHz**

Sous l'effet de la courbure, les différentes composantes de déplacements des deux solutions couplées du premier mode de flexion ne sont plus identiques modulo un déphasage de $\pi/2$. Ceci entraîne une inégalité des amplitudes de ces déplacements lorsque l'on compare les deux solutions, à laquelle s'ajoute une distorsion de leurs profils de déplacement. Finalement, ces deux modes représentent deux modes propagatifs différents qui, dans la littérature, sont généralement notés $F(1,1)$ et $F(-1,1)$.

- Cartographie des déplacements des modes $T(0,1)$, $L(0,1)$ et $L(0,2)$

Les modes présentés dans la suite sont dans l'ordre : le premier mode de torsion $T(0,1)$, le premier mode de compression $L(0,1)$ et le second mode de compression $L(0,2)$.

Dans le cas du guide droit, le mode de torsion est axisymétrique tandis que sa composante orthoradiale est la seule non nulle. La présence d'une courbure induit une distorsion des champs de déplacement et une augmentation des amplitudes des déplacements radial et axial (Figure II-16).

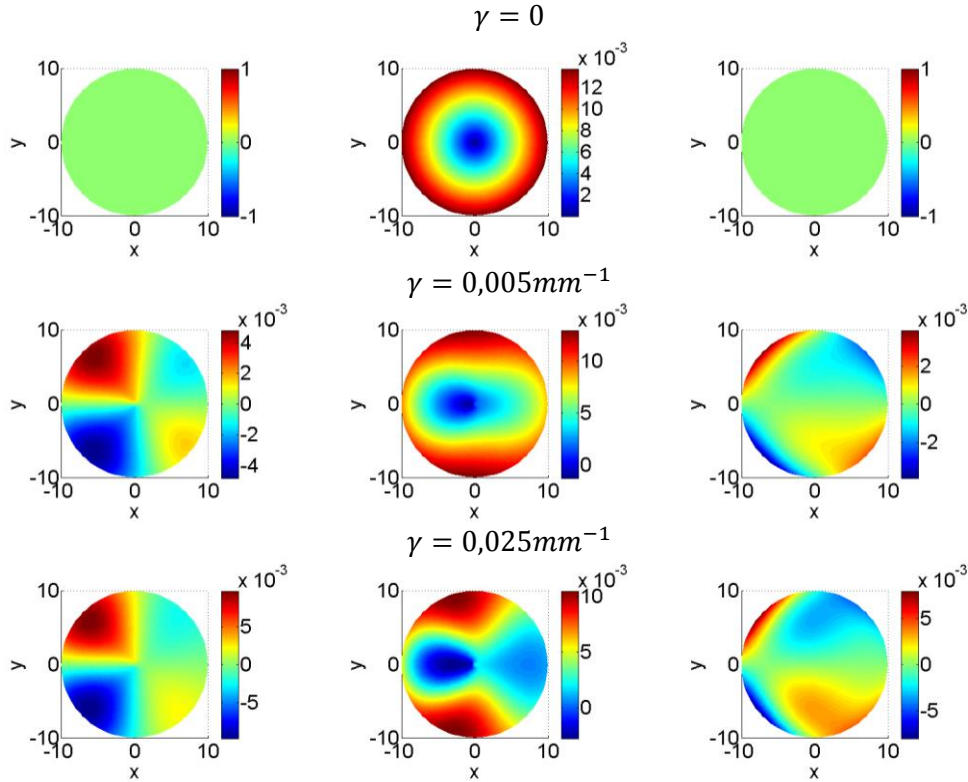


Figure II-16 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T(0,1)$ pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbures respectives $\gamma = [0; 0,005; 0,025]mm^{-1}$ à la fréquence de 200kHz

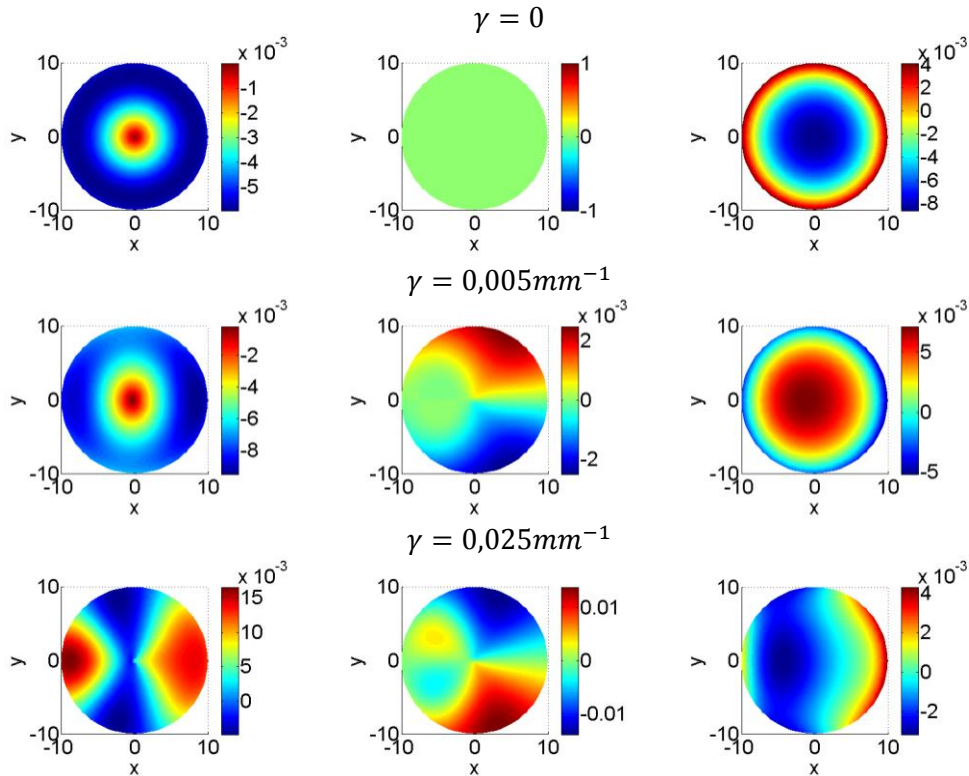


Figure II-17 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de compression $L(0,1)$ pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbures $\gamma = [0; 0,005; 0,025]mm^{-1}$ à la fréquence de 200kHz

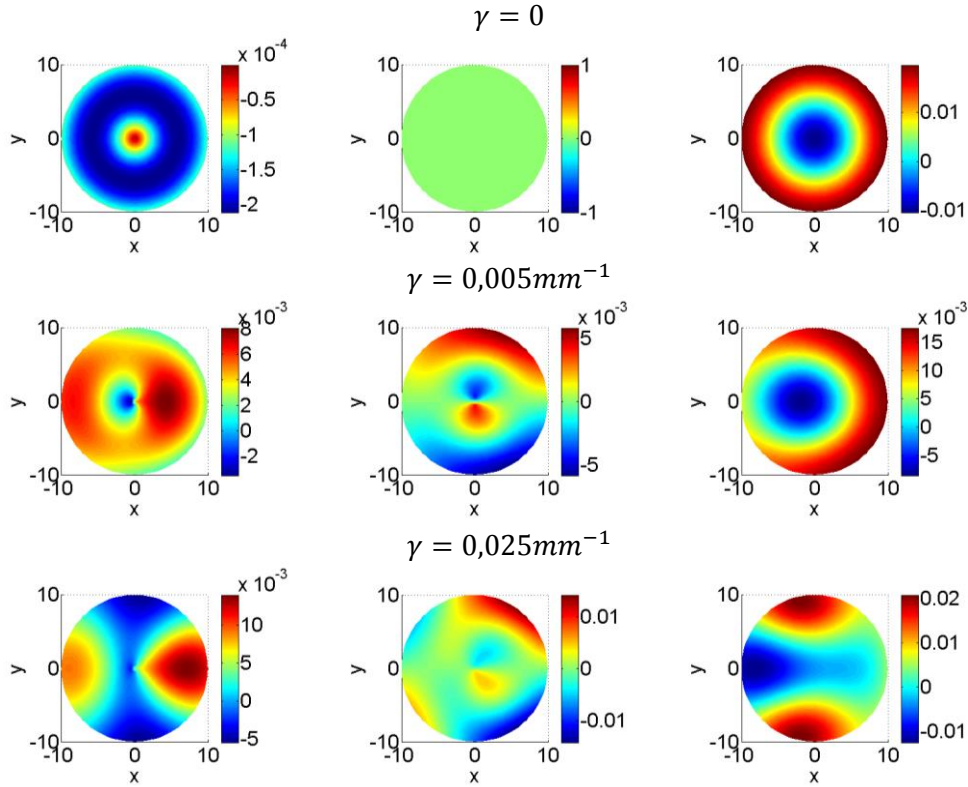


Figure II-18 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du second mode de compression $L(0,2)$ pour un cylindre plein de diamètre 20mm et de courbures $\gamma = [0; 0,005; 0,025] \text{mm}^{-1}$ à la fréquence de 200kHz

On observe les mêmes effets de la courbure sur les différents modes de flexions existant à la fréquence de calcul. De plus, la propriété d'axisymétrie des deux modes de compression $L(0,1)$ et $L(0,2)$ est perdue sous l'effet de la courbure. Enfin, dans les deux cas, on constate un accroissement du déplacement orthoradial (nul en guide droit) avec l'augmentation de la courbure et l'apparition de lobes similaires à ceux des modes de flexions.

Cartographies des déplacements dans un tube

D'autres exemples de cartographies de déplacement du mode $T(0,1)$ sont montrés pour le cas d'un guide parfaitement droit et celui d'un guide coudé avec différentes géométries de section. Les effets de la courbure sur le champ de déplacement décrit dans le cas d'un cylindre plein restent valables pour le cas des tubes Figure II-19.

De la même manière que pour le cas de la Figure II-16, la courbure entraîne la perte de l'axisymétrie et l'apparition de lobes sur les composantes radiale et axiale qui sont nulles dans un guide droit, comparables à des lobes de déplacement de modes de flexion et notamment le mode $F(1,1)$.

Cartographies des déplacements dans un rectangle

Les composantes de déplacement du premier mode de torsion $T(0,1)$ pour un guide rectangulaire sont illustrées sur la Figure II-20.

Pour le cas d'une section rectangulaire, on observe que les symétries du mode de torsion $T(0,1)$ n'existent plus dans le guide courbe. On note également une augmentation de la contribution radiale et une diminution de la contribution axiale. Enfin, le nombre de lobes constituant le déplacement axial est plus faible dans le cas courbe en comparaison au cas parfaitement droit.

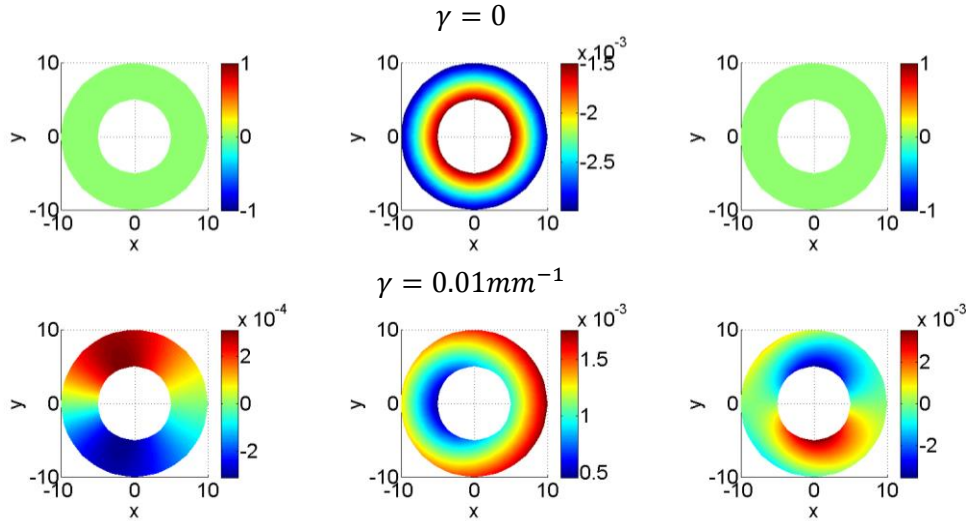


Figure II-19 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T(0,1)$ pour un tube de diamètre **20mm** et d'épaisseur **5mm** et de courbures $\gamma = [0; 0,01\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de **10kHz**

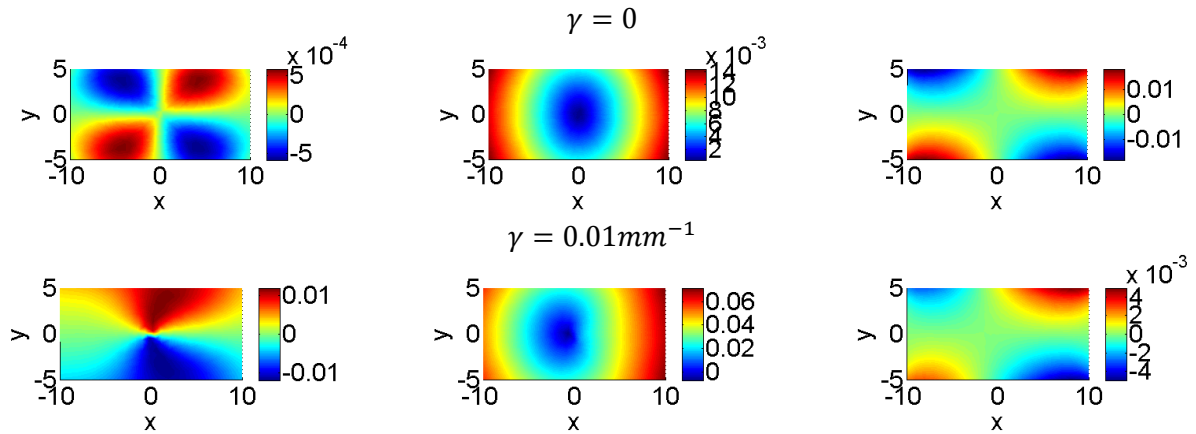


Figure II-20 : Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T(0,1)$ pour un guide rectangulaire **10mm par 5mm** et de courbures $\gamma = [0; 0,01\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de **10kHz**

Cartographies des déplacements dans une section arbitraire

Les composantes de déplacement du premier mode de torsion $T(0,1)$ pour un guide de section de géométrie complexe sont indiquées sur la Figure II-21.

Ce dernier exemple présente les composantes de déplacement dans le cas d'un guide droit puis coudé et permet de relever les mêmes effets de distorsion et de variation des valeurs de déplacement engendrés par la présence d'une courbure non nulle. Ces effets s'avèrent indépendants de la géométrie de la section du guide étudié.

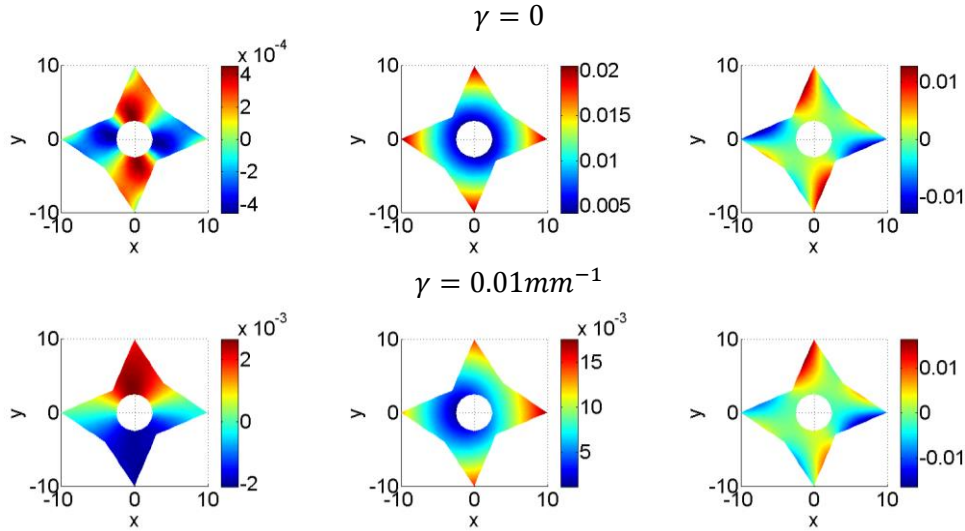


Figure II-21: Cartographies des déplacements radial, orthoradial et axial du premier mode de torsion $T(0,1)$ pour un guide de section arbitraire et de courbures $\gamma = [0; 0,01\text{mm}^{-1}]$ à la fréquence de **10kHz**

Discussion

Les exemples ci-dessus servent à illustrer les principaux effets induits pas la présence d'une courbure sur les champs de déplacement des modes guidés pour différentes géométries de guides. Ils nous permettent de faire plusieurs constats :

- La courbure non-nulle entraîne la distorsion des champs de déplacement de tous les modes guidés. Par conséquent, la propriété d'axisymétrie de certains modes (torsion et compression) n'est pas préservée. Cette distorsion est d'autant plus marquée que la courbure du guide d'onde est grande.
- Les amplitudes des composantes de déplacement sont directement influencées par la courbure du tube. En effet, on constate que, par exemple, les composantes radiale et axiale du mode $T(0,1)$, nulles dans le cas d'un guide droit, augmentent avec la courbure. En contrepartie, l'amplitude du déplacement orthoradial devient plus faible dans le guide coudé. Ainsi, ce mode de torsion ne peut plus être réellement considéré comme tel dans le cas d'un guide coudé puisqu'il n'est plus axisymétrique et n'a plus de déplacement orthoradial unique ; on parlera plutôt de pseudo mode de torsion. De plus, son comportement tend progressivement vers celles d'un mode de flexion.
- De manière semblable, les modes de compression $L(0,1)$ et $L(0,2)$ qui ont une composante orthoradiale nulle dans le cas droit voient celle-ci progressivement augmenter pour des courbures non-nulles alors que les composantes radiales et axiales tendent à diminuer.
- Enfin, les modes de flexion subissent simultanément des phénomènes de distorsion et de découplage des solutions doubles sous l'effet de la courbure du guide. De plus, des variations sur les amplitudes de déplacement peuvent être observées en fonction de la valeur de la courbure.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, une extension du modèle SAFE pour le calcul des modes d'un guide d'ondes ayant une courbure non-nulle et de section arbitraire a été présentée. Cette extension a servi à calculer les bases modales de guides coudés en intégrant l'effet de la courbure dans la formulation variationnelle des équations de propagation.

L'utilisation d'une base de Serret-Frenet pour écrire cette formulation variationnelle garantit l'invariance géométrique et matérielle de la section du guide le long de l'axe principal du guide. Ces propriétés d'invariance permettent ainsi de se placer dans le domaine d'application de la méthode SAFE et, de ce fait, de restreindre la formulation variationnelle à une expression dans la section du guide. En passant par une discrétisation par éléments finis 2D de cette formulation, les modes élastiques guidés dans la structure coudée peuvent ainsi être calculés numériquement.

Pour finir, nous avons proposé une étude des modes dans le cas de guides droits et de guides coudés ayant des sections de géométries différentes qui nous a permis de relever les principaux effets induits par la présence d'une courbure sur le comportement des modes propagatifs : perte de l'axisymétrie, séparation des modes de flexions couplés, décalage des fréquences de coupures des modes, modification des amplitudes des composantes de déplacement, etc...

La suite de notre démarche de modélisation va nous amener à nous intéresser à ce qui se produit lors du passage de ces ondes du guide droit vers le guide coudé et *vice-versa*.

CHAPITRE 3. MODELISATION DE LA DIFFRACTION DES ONDES GUIDEES SE PROPAGEANT DANS UNE LIGNE DE CANALISATIONS COMPORTANT DES COUDES

1. Introduction.....	76
2. Modélisation de la diffraction des ondes guidées par la jonction entre un guide droit et un guide coudé.....	76
2.1. Expression des champs élastodynamiques.....	76
2.2. Modèle de raccordement modal pour la diffraction à une jonction	81
2.3. Construction de la matrice de diffraction à la jonction	85
2.4. Exemple d'utilisation du modèle de raccordement modal	89
3. Mise en série des matrices de diffractions locales.....	96
3.1. Définition de la matrice de diffraction globale	97
3.2. Opérateur analytique de propagation.....	98
3.3. Matrice de diffraction globale pour un coude.....	98
3.4. Exemple de mise en série de matrices de diffractions :	99
4. Bilan d'un calcul complet	103
5. Conclusion	104

1. Introduction

Après la propagation, la modélisation de la diffraction des ondes guidées constitue un second axe de recherche essentiel puisqu'il doit aider à prédire efficacement l'interaction de ces ondes élastiques avec d'éventuelles perturbations.

Parmi les différentes approches de modélisation employées pour traiter la problématique de diffraction des ondes guidées, l'utilisation des éléments finis autour des différents diffracteurs est assez courante. Elle permet, par le biais de boîtes éléments finis situées dans la zone de la perturbation, de calculer prédire les phénomènes de diffraction associés à celle-ci. Pour aller plus loin et notamment, dans le but d'établir une matrice modale de diffraction associée à une perturbation, plusieurs travaux dont ceux de Baronian [30] ont porté sur le développement de méthodes hybrides pour coupler une boîte de calculs aux éléments finis avec des calculs modaux hors de cette boîte. Le couplage nécessite de développer des frontières transparentes associées à la boîte éléments finis, afin de limiter sa taille à une région minimale située autour de la perturbation et d'améliorer par conséquent les performances des calculs. Dans les travaux de Baronian [30], les frontières transparentes développées permettent en outre de réaliser une hybridation optimale en couplant les calculs éléments finis avec des solutions obtenues à l'aide de la méthode SAFE suivant un formalisme modal.

Cependant, dans certains cas de figures, le recours aux éléments finis classiques peut induire, malgré ces méthodes de couplage, des coûts de calculs conséquents. C'est notamment le cas lorsque la zone de maillage est grande. Le coude, souvent de grande dimension, fait partie de ces cas problématiques.

Afin de remédier à ce problème, nous nous sommes intéressés au développement d'un modèle de raccordement modal pour calculer les matrices de diffraction reliant deux champs élastodynamiques associés à deux guides différents partageant une même jonction. Différents travaux antérieurs ont mis au point des méthodes de raccordement entre solutions modales calculées analytiquement comme ceux de Feng *et al.* [96] [97] pour le cas des ondes de Lamb ou dans le cas de guides de section variable comme discutés par Pagneux et Maurel [98] ; les guides ne présentant pas de courbure.

Dans ce chapitre, nous présenterons donc le formalisme de raccordement modal pour construire la matrice de diffraction à la jonction entre deux guides pour lesquels les champs élastodynamiques sont obtenus numériquement grâce aux modèles SAFE et peuvent présenter des courbures ; ce travail généralise les résultats de Feng *et al.* [96] [97], la prise ne compte des courbures dans les formules de raccordement nécessitant une attention particulière. Ce raccordement modal sera utilisé d'une part pour prédire la diffraction à la jonction entre un coude et un guide droit et d'autre part, pour calculer la réflexion totale en bout de guide libre.

Par la suite, à partir développements réalisés par Baronian *et al.* [99], nous proposerons une méthode de mise en série des matrices de diffraction locales servant à la prise en compte de plusieurs jonctions successives. Cette méthode permet, à l'aide de matrices de propagation, de combiner plusieurs matrices de diffraction et d'obtenir une matrice unique pour l'ensemble des diffracteurs. Enfin, cette méthode de mise en série ainsi que le raccordement modal seront mis en œuvre pour l'étude de la diffraction dans une ligne de canalisations comportant des coudes.

2. Modélisation de la diffraction des ondes guidées par la jonction entre un guide droit et un guide coudé

2.1. Expression des champs élastodynamiques

2.1.1. Décomposition modale des champs de déplacements et de contraintes

La décomposition modale des champs de déplacements et de contraintes en fonction des modes calculés au préalable par des méthodes numériques ou analytiques suppose de

considérer que ces modes forment une base complète et orthonormée de l'espace vectoriel associé.

La démonstration de la validité mathématique de la décomposition modale des champs élastiques a fait l'objet de quelques publications. Ainsi, Kirrmann [100] a proposé une démonstration du caractère complet de la base formée par les modes de Lamb se propageant dans une plaque. Besserrer et Malischewski [101] se sont intéressés pour leur part à la complétude des modes de Love et de Rayleigh et à leur exploitation dans un modèle de raccordement modal des discontinuités dans des plaques.

Bien qu'en général, on suppose que tous les champs de déplacement $\mathbf{u}$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ se propageant dans une direction du guide droit puissent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \sum_n A_n \mathbf{u}_n(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \\ \text{et} \qquad \qquad \qquad & \\ \boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) &= \sum_n A_n \boldsymbol{\sigma}_n(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \end{aligned} \tag{III.1}$$

il n'existe pas, comme le relève Bonnet-Ben Dhia *et al.* [102], de démonstration établissant la complétude des modes calculés et permettant de justifier l'unicité de cette décomposition.

Les différentes hypothèses à vérifier ont été explicitées par Baronian [30] dans le cas d'un guide 3D. Ces hypothèses, non-explicitées ici, et la troncature opérée du nombre de modes à calculer lors de la mise en œuvre de méthodes de recherche des valeurs et de vecteurs propres, rendent la tâche la justification du caractère complet et orthonormé de la base encore plus délicate. La troncature du nombre de modes pris en compte entraîne, *a fortiori*, la perte du caractère complet de la base modale. Cette question dépasse la problématique du présent travail. L'expérience numérique, avec ses erreurs numériques typiques, montre cependant que tout se passe comme si la propriété que les modes calculés forment une base est vérifiée aux erreurs numériques près. De fait, certains travaux [103] ont montré que cette décomposition modale converge de mieux en mieux vers la solution exacte sous condition que l'ensemble des modes retenus après troncature comporte tous les modes propagatifs ainsi que les modes inhomogènes et évanescents dont la partie imaginaire du nombre d'ondes est la plus petite. En effet, la contribution de ces modes dans la décomposition est plus importante du fait de leur décroissance lente.

Dans cette situation, on supposera que l'ensemble tronqué des modes forme une base permettant, de façon approchée, la décomposition modale de tout champ élastodynamique.

2.1.2. Définition des vecteurs hybrides

La résolution, par la méthode SAFE, du système aux valeurs propres quadratiques aboutit à l'obtention des champs de déplacement et, par post traitement, aux champs de contrainte associés aux modes propres pouvant se propager dans la structure guidante. Ces modes guidés servent, sous certaines hypothèses, à décrire le champ élastodynamique par le biais d'une décomposition modale.

Afin de décrire les champs élastodynamiques dans des guides droits et coudés, nous introduisons les vecteurs hybrides suivant définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xs} \\ \sigma_{ys} \\ u_s \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -\sigma_{ss} \end{pmatrix} \text{ pour le coude} \\ \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ u_z \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -\sigma_{zz} \end{pmatrix} \text{ pour le guide droit} \end{aligned} \quad (III.2)$$

Ces vecteurs ont été introduits et utilisés par Pagneux et Maurel [104] puis réutilisés par Baronian [30] et Feng *et al.* [96] [97]. Ces vecteurs sont particulièrement adaptés à la projection des champs élastodynamiques nécessaire pour la construction des matrices de diffraction par raccordement modal.

2.1.3. Formulation des champs élastodynamiques à partir des vecteurs hybrides

On considère un guide d'ondes de section arbitraire et on note $(\mathbf{X}_{n+}, \mathbf{Y}_{n+}, \beta_{n+})_{0 \leq n \leq N}$ et $(\mathbf{X}_{n-}, \mathbf{Y}_{n-}, \beta_{n-})_{0 \leq n \leq N}$ les vecteurs hybrides et les nombres d'ondes des modes se propageant respectivement vers le droit (indice +) et vers la gauche (indice -) tronqués à l'ordre N comme l'illustre la Figure III-1 pour un guide Ω avec des conditions aux limites de surfaces libres :

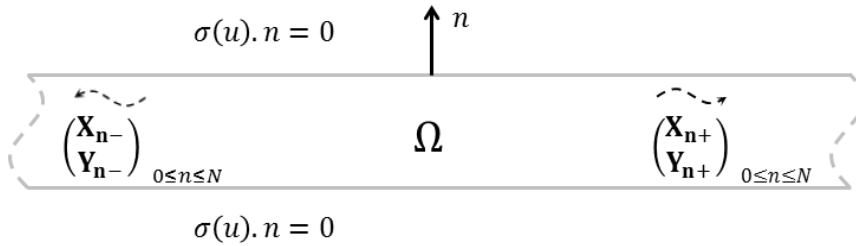


Figure III-1 : Illustration des directions de propagation des modes servant à la décomposition des champs de contraintes et de déplacements

De manière générale, connaissant la base modale associée à un guide, un champ élastodynamique peut s'écrire comme une combinaison des modes guidés composant cette base et pouvant se propager soit vers la droite soit vers la gauche. Ces différents modes permettent de prendre en compte à la fois les champs incidents et les champs réfléchis susceptibles d'être créés par des phénomènes de diffraction.

On suppose donc qu'il existe des familles de scalaires a_n et b_n avec $0 \leq n \leq N$ telles que le champ total $(\mathbf{X}_{\text{tot}} \quad \mathbf{Y}_{\text{tot}})^T$ dans un guide, coudé dans le cas présent, se décompose sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\text{tot}} \\ \mathbf{Y}_{\text{tot}} \end{pmatrix} = \sum_n b_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n-} \\ \mathbf{Y}_{n-} \end{pmatrix} e^{-i\beta_{n-}s} + \sum_n a_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n+} \\ \mathbf{Y}_{n+} \end{pmatrix} e^{-i\beta_{n+}s} \quad (III.3)$$

D'après les propriétés de symétrie des champs de déplacement et de contrainte des modes, on a les relations suivantes :

$$\mathbf{X}_{n-} = -\mathbf{X}_{n+}, \mathbf{Y}_{n-} = \mathbf{Y}_{n+} \text{ et } \beta_{n-} = \beta_{n+} \quad (III.4)$$

En prenant $A_n = a_n e^{-i\beta_{n+}s}$, $B_n = b_n e^{-i\beta_{n-}s}$ et en posant $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_{n+}$ et $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_{n+}$ l'expression du champ élastodynamique total s'écrit comme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\text{tot}} \\ \mathbf{Y}_{\text{tot}} \end{pmatrix} = \sum_n B_n \begin{pmatrix} -\mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix} + \sum_n A_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Pour le champ élastodynamique considéré, A_n et B_n sont les coefficients de pondération, proportionnels respectivement à $e^{-i\beta_n s}$ et $e^{i\beta_n s}$, de chaque mode. Dans le cas présent, ces coefficients correspondent aux amplitudes respectives des modes composant le champ total. La décomposition modale (III.5) reste valable pour un guide droit, en prenant z comme composante de propagation.

2.1.4. Propriété de bi-orthogonalité des modes dans un guide élastique

En élastodynamique, la relation de bi-orthogonalité aussi appelée relation de Fraser [105] traduit le fait qu'un mode propre se propageant dans une direction donnée (droite ou gauche) est orthogonal à tous les autres modes qui se propagent suivant cette même direction. Dans le cas d'un problème aux valeurs propres en élasticité, la démonstration de l'orthogonalité des modes en élastostatique dans un cylindre a été faite par Duncan Fama [106]. Par la suite, Fraser [107] [105] a étendu cette démonstration au cas élastodynamique et a établi la relation de bi-orthogonalité ou relation de Fraser pour les ondes élastiques dans les plaques et les cylindres.

Pour un guide cylindrique de section arbitraire, on peut montrer que cette relation de bi-orthogonalité peut s'établir à partir du théorème de réciprocité appliqué à la description modale des champs [108] décrit par Auld [75] [109] et étudié par Gregory [110]. Elle met en relation les champs de déplacement et de contrainte obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres. Dans notre cas, la relation de Fraser pour la projection des modes guidés d'une même base modale s'écrit sous la forme :

$$(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_m) = J_n \delta_{nm} \text{ avec } J_n \neq 0 \quad (\text{III.6})$$

avec $0 \leq n, m \leq N$ indices de deux modes se propageant dans la même direction, δ_{nm} le symbole de Kronecker et J_n le résultat du produit scalaire entre les deux modes considérés. Cette relation traduit que la matrice de projection de la base modale associée à un guide donné est une matrice diagonale. On notera dans la suite $\mathbf{J}^i$ la matrice de projection des modes de la base associée au $i^{\text{ème}}$ guide.

Explicitement, le produit scalaire associé à la base modale est exprimé par la relation suivante :

$$(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_m) = \int_S \mathbf{X}_n \mathbf{Y}_m dS = \int_S (\sigma_{xs}^n \mathbf{u}_x^m + \sigma_{ys}^n \mathbf{u}_y^m - \mathbf{u}_s^n \sigma_{ss}^m) dS \quad (\text{III.7})$$

Dans le cas d'un guide courbé, la surface infinitésimale d'intégration dS étant définie par $dS = \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy$, la précédente relation se réécrit :

$$(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_m) = \int_S \mathbf{X}_n \mathbf{Y}_m \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \quad (\text{III.8})$$

2.1.5. Exemples numériques de la relation de bi-orthogonalité

Les exemples suivants sont une représentation graphique des matrices de projection des bases modales d'un guide droit et d'un guide coudé. Les coefficients de projection J_n sont

normalisés. Ces illustrations permettent de vérifier la validité de la propriété de bi-orthogonalité des modes.

Les Figure III-2 et Figure III-3 représentent les matrices de projections des 55 premiers modes à 250kHz dans un cylindre de 20mm de diamètre avec une courbure $\gamma = 0$ pour le cas droit et $\gamma = 0,02\text{mm}^{-1}$ pour le cas coudé.

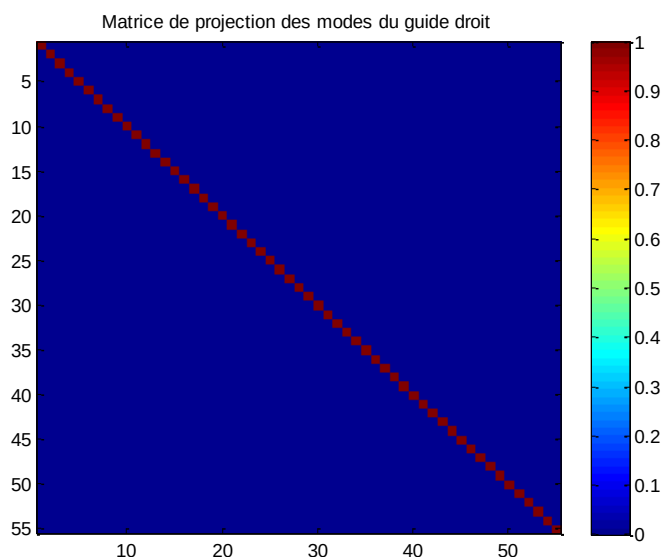


Figure III-2: Illustration de la matrice de projection normalisée des modes guidés dans un cylindre droit de diamètre 20mm à la fréquence 250kHz

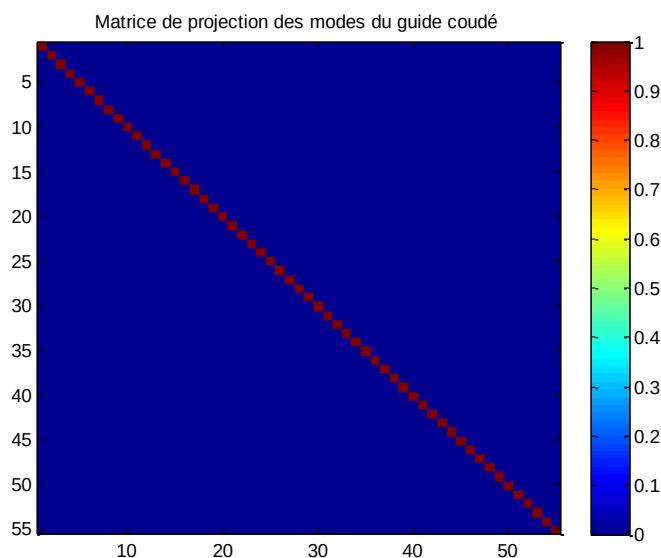


Figure III-3: Illustration de la matrice de projection normalisée des modes guidés dans un cylindre coudé de diamètre 20mm et de rayon de courbure 100mm à la fréquence 250kHz

Ces matrices carrées sont diagonales et ce, aussi bien dans le cas du guide droit que dans celui du guide coudé. Ceci ne démontre pas le caractère orthogonal de tous les modes mais nous permet de nous assurer numériquement de l'orthogonalité de l'ensemble tronqué des modes permettant la décomposition des champs élastodynamiques. D'autre part, ces résultats permettent de constater que ce résultat reste valable dans le cas d'un guide coudé.

Le choix de représentation de ces matrices de projection après normalisation est pris dans le but de mieux visualiser le caractère diagonal de la matrice de projection. Les termes hors diagonale sont nuls à une erreur numérique près 10^{-12} fois plus petite que la valeur des termes diagonaux, principalement due aux incertitudes sur le maillage de la section du guide.

2.2. Modèle de raccordement modal pour la diffraction à une jonction

2.2.1. Principe de continuité des champs élastodynamiques

Si l'on considère un guide d'ondes comme un milieu de propagation caractérisé à la fois par l'invariance géométrique de sa section et l'invariance de son milieu constitutif, tout changement (matériel, géométrique ou les deux) va naturellement être source de diffraction des ondes guidées. Si le changement s'opère entre deux portions pouvant chacune être décrite comme un guide, l'étude des effets engendrés à la jonction entre les deux guides conduit au développement d'un modèle de diffraction. Ce paragraphe a pour objectif d'établir une méthode pour calculer la transmission et la réflexion des ondes guidées à une jonction, en supposant pour toute la suite que les solutions modales sont connues dans les deux portions guidantes de part et d'autre de la jonction considérée.

Le raccordement modal est un modèle servant à décrire les interactions entre deux champs élastodynamiques associées à des guides de géométrie et/ou de compositions matérielles différentes mais partageant une jonction reliant leur section respective. Les méthodes de raccordement modal sont largement utilisées en électromagnétisme [111] et [112] pour modéliser la diffraction des ondes électromagnétiques par différentes discontinuités du guide d'ondes (circuit imprimé).

Comme le modèle se base sur le principe de continuité des champs à la jonction entre les deux guides, cela implique, dans le cas des champs élastodynamiques, d'écrire la continuité des champs de contraintes et de déplacements, notamment décrits par les vecteurs hybrides, à la jonction entre les différents guides (voir la Figure III-4) :

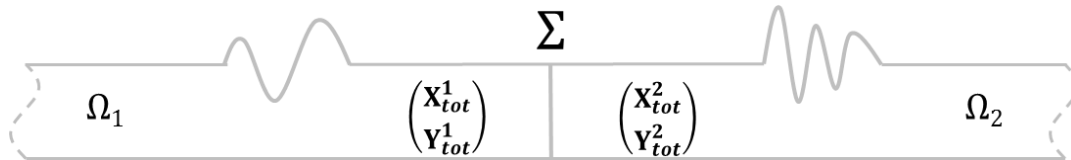


Figure III-4 : Illustration des directions de propagation des modes utilisés dans la décomposition des champs de contraintes et de déplacements

On a donc simplement :

$$\begin{pmatrix} X_{tot}^1 \\ Y_{tot}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{tot}^2 \\ Y_{tot}^2 \end{pmatrix} \quad (III.9)$$

Explicitement, en décomposant les champs en champs incidents et réfléchis dans le premier guide et champs transmis dans le second, la continuité à la jonction Σ revient à l'identification suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{inc}^1(x, y, z, t) + \mathbf{u}_{ref}^1(x, y, z, t) = \mathbf{u}_{trans}^2(x, y, z, t) \\ \boldsymbol{\sigma}_{inc}^1(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_{ref}^1(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_{trans}^2(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n} \end{cases} \text{ à la jonction } \Sigma \quad (III.10)$$

Les champs incidents et réfléchis du guide Ω_1 se décomposent sur la base modale de celui-ci tandis que le champ transmis du guide Ω_2 se décompose donc sur la seconde base modale.

Donc, en notant z_0 la position de la jonction, l'expression de continuité se réécrit modalement comme :

$$\sum_n \left[B_n^1 \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n-}^1 \\ \mathbf{Y}_{n-}^1 \end{pmatrix} e^{-i\beta_{n-}^1 z_0} + A_n^1 \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n+}^1 \\ \mathbf{Y}_{n+}^1 \end{pmatrix} e^{-i\beta_{n+}^1 z_0} \right] = \sum_n \left[B_n^2 \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n-}^2 \\ \mathbf{Y}_{n-}^2 \end{pmatrix} e^{-i\beta_{n-}^2 z_0} + A_n^2 \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n+}^2 \\ \mathbf{Y}_{n+}^2 \end{pmatrix} e^{-i\beta_{n+}^2 z_0} \right] \quad (III.11)$$

Les inconnues du problème (III.11) sont les amplitudes modales A_n^i et B_n^i pour $i = 1, 2$. Ces amplitudes sont, selon les situations, relatives aux champs incidents, réfléchis ou transmis à la jonction entre les guides. La Figure III-5 illustre, pour le cas d'une jonction entre un tube droit et un coude, le sens des modes auxquels sont associées les différentes amplitudes :

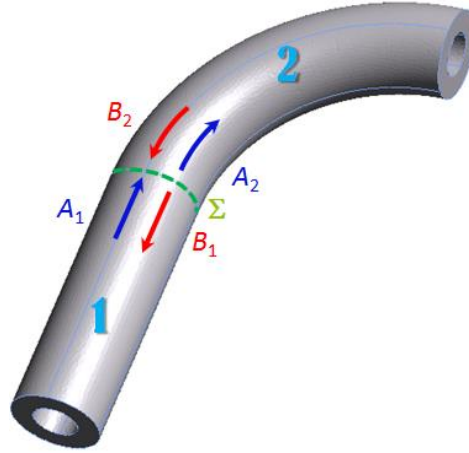


Figure III-5 : Direction de propagation des familles de modes à la jonction entre un tube droit et un tube coudé

On note $\mathbf{A}^i$ et $\mathbf{B}^j$ (pour $i, j \in [1, 2]$) les vecteurs contenant les coefficients A_i^n et B_j^n des modes se propageant respectivement vers la droite et vers la gauche.

Dans la suite, ces vecteurs représenteront les amplitudes des familles de modes considérés. Ces familles peuvent être différenciées selon leur orientation par rapport à la jonction Σ . Ainsi, les vecteurs $\mathbf{A}^1$ et $\mathbf{B}^2$ correspondent aux amplitudes des modes entrants alors que $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{B}^1$ représentent les amplitudes des modes sortants par rapport à la jonction.

Le mode incident peut l'être depuis les deux différents guides : droit et coude. Si on considère une émission par la partie droite, le paquet d'ondes incident, dont les propriétés (amplitudes modales) sont connues, va se décomposer sur la famille des modes entrants et aura un vecteur d'amplitudes $\mathbf{A}^1$ connu. À la jonction, ce champ incident va se décomposer en un champ transmis et un champ réfléchi, respectivement représentés par les vecteurs d'amplitude modales sortants $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{B}^1$. À partir de là, le raccordement modal consiste à déterminer $\mathbf{R}_1(x, y)$ la matrice de réflexion et $\mathbf{T}_{12}(x, y)$ la matrice de transmission telles qu'en Σ on ait :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^1(x, y) &= \mathbf{R}_1(x, y) \mathbf{A}^1(x, y) \\ \mathbf{A}^2(x, y) &= \mathbf{T}_{12}(x, y) \mathbf{A}^1(x, y) \end{aligned} \quad (III.12)$$

et

Le même raisonnement s'applique au cas d'une émission depuis la partie coudée de la ligne considérée afin de déterminer les matrices $\mathbf{R}_2(x, y)$ et $\mathbf{T}_{21}(x, y)$ relatives aux champs réfléchi et transmis :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2(x, y) &= \mathbf{R}_2(x, y)\mathbf{B}^2(x, y) \\ \mathbf{B}^1(x, y) &= \mathbf{T}_{21}(x, y)\mathbf{B}^2(x, y) \end{aligned} \quad (III.13)$$

De manière générale et quelle que soit la composition du champ incident, les deux relations précédentes peuvent se réécrire sous la forme d'une matrice de diffraction unique $\mathbf{S}_\Sigma$ associée à la jonction Σ et regroupant toutes les matrices de réflexion et de transmission entre le guide droit et le coude. Cette matrice est définie par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^1 \\ \mathbf{A}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_\Sigma \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{B}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{T}_{21} \\ \mathbf{T}_{12} & \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{B}^2 \end{pmatrix} \quad (III.14)$$

La matrice de diffraction opérant dans les deux sens de propagation, elle est utilisable pour toute jonction semblable impliquant des guides de même courbure et partageant la même section. Dans la suite, ce fait sera utilisé dans le traitement du cas d'un coude complet joint à deux tubes droits où le calcul de la matrice de diffraction locale à une jonction sera réutilisable pour l'autre.

La matrice de diffraction étant locale à la jonction est indépendante de l'angle d'ouverture du coude ; cette propriété permet ainsi de s'intéresser à l'influence de cet angle sans avoir à recalculer la diffraction par la jonction.

2.2.2. Définition des matrices de projection éléments finis des champs

Similairement à la discrétisation éléments finis du déplacement, la discrétisation des vecteurs hybrides du $n^{\text{ième}}$ mode propre fait appel aux fonctions de formes $\mathbf{N}(x, y)$ et s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{X}_n = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{N}(x, y) \mathbf{X}_n^e \quad (III.15)$$

avec n_e représentant le nombre d'éléments du maillage de la section du guide.

En injectant cette expression dans la formulation donnée par (III.8), la discrétisation de l'intégrale surfacique de projection est opérée naturellement sur le maillage utilisé pour le calcul modal par éléments finis de la méthode SAFE. La relation de projection s'écrit alors :

$$(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_m) = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{X}_n^{eT} \int_S \mathbf{N}(x, y)^T \mathbf{N}(x, y) \sqrt{\det(\mathbf{g})} dx dy \mathbf{Y}_m^e \quad (III.16)$$

L'intégrale contenant les fonctions d'interpolations est analogue à celle apparaissant dans le calcul de la matrice de masse élémentaire $\mathbf{M}^e$ sans la densité ρ . Cette intégrale est évaluée à chaque élément du maillage de la section du guide et tient compte du repère dans lequel celui-ci est paramétré:

$$(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_m) = \mathbf{X}_n^T \mathbf{M}_s \mathbf{Y}_m = J_n \delta_{nm} \text{ avec } J_n \neq 0 \quad (III.17)$$

La matrice $\mathbf{M}_s$ sera considérée par la suite comme la matrice de projection éléments finis des modes sur la base modale. Comme son expression dépend du repère dans lequel on se place, dans le cas d'une jonction entre un guide droit et un coude, on aura recours à deux matrices de projections différentes, la première associée au repère cartésien et la seconde au repère de Serret-Frenet.

Le modèle de raccordement modal nécessite de savoir projeter les modes d'une base à la fois sur eux-mêmes et sur la base formée par d'autres modes (associés à un autre guide). Il nous sera donc utile de définir la projection des modes d'un premier guide sur les modes d'un second. Pour ce faire, on considérera deux guides 1 et 2 partageant la même jonction et dont les bases modales respectives sont composées de N_1 et N_2 modes guidés.

On considère un champ élastodynamique associé au guide 1 et défini par ses vecteurs hybrides $(\mathbf{X}_{\text{tot}}^1 \ \mathbf{Y}_{\text{tot}}^1)^T$ et on note les modes de la base du guide 2 $(\mathbf{X}_m^2 \ \mathbf{Y}_m^2)^T$ avec $m \in [0, N_2]$. A l'aide de l'équation (III.5), les projections du champ élastodynamique du guide 1 sur la base modale du guide 2 sont décrites par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^1 | \mathbf{Y}_m^2) &= \sum_{n \in [0, N_1]} \left[\sum_{m \in [0, N_2]} \int_S \mathbf{X}_n^1{}^T \mathbf{Y}_m^2 dS_1 \right] (\mathbf{A}_n^1(x, y) - \mathbf{B}_n^1(x, y)) \\ \sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_m^2 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^1) &= \sum_{n \in [0, N_1]} \left[\sum_{m \in [0, N_2]} \int_S \mathbf{X}_m^2{}^T \mathbf{Y}_n^1 dS_2 \right] (\mathbf{A}_n^1(x, y) + \mathbf{B}_n^1(x, y)) \end{aligned} \quad (III.18)$$

avec $n \in [0, N_1]$ et $m \in [0, N_2]$ représentant les indices des modes formant, respectivement, les bases modales du guide 1 et du guide 2.

De même, les projections du champ élastodynamique $(\mathbf{X}_{\text{tot}}^2 \ \mathbf{Y}_{\text{tot}}^2)$ du guide 2 sur tous les modes $(\mathbf{X}_n^1 \ \mathbf{Y}_n^1)^T$ du guide 1 sont données par :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^2 | \mathbf{Y}_n^1) &= \sum_{m \in [0, N_2]} \left[\sum_{n \in [0, N_1]} \int_S \mathbf{X}_n^2{}^T \mathbf{Y}_m^1 dS_2 \right] (\mathbf{A}_m^2(x, y) - \mathbf{B}_m^2(x, y)) \\ \sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_n^1 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^2) &= \sum_{m \in [0, N_2]} \left[\sum_{n \in [0, N_1]} \int_S \mathbf{X}_m^1{}^T \mathbf{Y}_n^2 dS_1 \right] (\mathbf{A}_m^2(x, y) + \mathbf{B}_m^2(x, y)) \end{aligned} \quad (III.19)$$

On peut noter que la surface infinitésimale d'intégration $dS_i = \sqrt{\det(\mathbf{g}_i)} dx dy$ pour $i = 1, 2$ sur laquelle on projette dépend du repère de définition du produit scalaire de l'espace vectoriel.

La discrétisation éléments finis de ces relations de projections se fait de la même manière que celle de la relation de projection d'un mode propre sur un autre sur une même base (III.17). Finalement, les équations (III.18) et (III.19) se réécrivent :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^1 | \mathbf{Y}_m^2) &= \mathbf{J}^{12} \left[\sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{A}_n^1(x, y) - \mathbf{B}_n^1(x, y)) \right] \\ \sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_m^2 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^1) &= \mathbf{J}^{21T} \left[\sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{A}_n^1(x, y) + \mathbf{B}_n^1(x, y)) \right] \end{aligned} \quad (III.20)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^2 | \mathbf{Y}_n^1) &= \mathbf{J}^{21} \left[\sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{A}_m^2(x, y) - \mathbf{B}_m^2(x, y)) \right] \\ \sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_n^1 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^2) &= \mathbf{J}^{12T} \left[\sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{A}_m^2(x, y) + \mathbf{B}_m^2(x, y)) \right] \end{aligned} \quad (III.21)$$

avec $\mathbf{J}^{12}$ et $\mathbf{J}^{21}$ les matrices de projections couplées contenant, respectivement, les coefficients de projections modes par modes, des modes du guide 1 sur les modes du guide 2 et des modes du guide 2 sur ceux du guide 1. Ainsi, pour $(\mathbf{X}_n^1 \ \mathbf{Y}_n^1)^T$ et $(\mathbf{X}_m^2 \ \mathbf{Y}_m^2)^T$ deux modes du guide 1 et 2, les coefficients de ces matrices de projections sont définis par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_n^1 | \mathbf{Y}_m^2) &= \int_S \mathbf{X}_n^{1T} \mathbf{Y}_m^2 dS_1 = \mathbf{X}_n^{1T} \mathbf{M}_s^1 \mathbf{Y}_m^2 = J_{nm}^{12} \delta_{nm} \text{ avec } J_{nm}^{12} \neq 0 \\ (\mathbf{X}_m^2 | \mathbf{Y}_n^1) &= \int_S \mathbf{X}_m^{2T} \mathbf{Y}_n^1 dS_2 = \mathbf{X}_m^{2T} \mathbf{M}_s^2 \mathbf{Y}_n^1 = J_{nm}^{21} \delta_{nm} \text{ avec } J_{nm}^{21} \neq 0 \end{aligned} \quad (III.22)$$

Les matrices de projection données par les relations (III.17) et (III.22) vont maintenant nous permettre de définir la matrice de diffraction locale associée à la jonction entre deux guides différents.

2.3. Construction de la matrice de diffraction à la jonction

2.3.1. Expression générale de la matrice de diffraction de la jonction guide droit-coude

On se place ici dans le cas de la jonction entre les guides 1 et 2. À partir de cette configuration et en notant $(\mathbf{X}_{\text{tot}}^1 \ \mathbf{Y}_{\text{tot}}^1)^T$ et $(\mathbf{X}_{\text{tot}}^2 \ \mathbf{Y}_{\text{tot}}^2)^T$ les vecteurs hybrides associés aux champs élastodynamiques des deux guides, la condition de continuité des champs à la jonction et les relations de projections nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$\sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^1 | \mathbf{Y}_n^1) = \sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^2 | \mathbf{Y}_n^1) \quad (\text{a})$$

$$\sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_n^1 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^1) = \sum_{n \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_n^1 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^2) \quad (\text{b})$$

et

$$\sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^2 | \mathbf{Y}_m^2) = \sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_{\text{tot}}^1 | \mathbf{Y}_m^2) \quad (\text{c})$$

$$\sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_m^2 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^2) = \sum_{m \in [0, N_2]} (\mathbf{X}_m^2 | \mathbf{Y}_{\text{tot}}^1) \quad (\text{d})$$

(III.23)

À l'aide de l'équation (III.5), ces relations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^1 \left[\sum_{\mathbf{n} \in [0, N_1]} (\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^1(x, y) - \mathbf{B}_{\mathbf{n}}^1(x, y)) \right] &= \mathbf{J}^{21} \left[\sum_{\mathbf{m} \in [0, N_2]} (\mathbf{A}_{\mathbf{m}}^2(x, y) - \mathbf{B}_{\mathbf{m}}^2(x, y)) \right] & (a) \\
 \mathbf{J}^1 \left[\sum_{\mathbf{n} \in [0, N_1]} (\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^1(x, y) + \mathbf{B}_{\mathbf{n}}^1(x, y)) \right] &= \mathbf{J}^{12T} \left[\sum_{\mathbf{m} \in [0, N_2]} (\mathbf{A}_{\mathbf{m}}^2(x, y) + \mathbf{B}_{\mathbf{m}}^2(x, y)) \right] & (b) \\
 \text{et} & & (III.24) \\
 \mathbf{J}^2 \left[\sum_{\mathbf{m} \in [0, N_2]} (\mathbf{A}_{\mathbf{m}}^2(x, y) - \mathbf{B}_{\mathbf{m}}^2(x, y)) \right] &= \mathbf{J}^{12} \left[\sum_{\mathbf{n} \in [0, N_1]} (\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^1(x, y) - \mathbf{B}_{\mathbf{n}}^1(x, y)) \right] & (c) \\
 \mathbf{J}^2 \left[\sum_{\mathbf{m} \in [0, N_2]} (\mathbf{A}_{\mathbf{m}}^2(x, y) + \mathbf{B}_{\mathbf{m}}^2(x, y)) \right] &= \mathbf{J}^{21T} \left[\sum_{\mathbf{n} \in [0, N_1]} (\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^1(x, y) + \mathbf{B}_{\mathbf{n}}^1(x, y)) \right] & (d)
 \end{aligned}$$

et en injectant les formules des vecteurs d'amplitudes $\mathbf{A}^1$ et $\mathbf{A}^2$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^1 (\mathbf{A}^1(x, y) - \mathbf{B}^1(x, y)) &= \mathbf{J}^{21} (\mathbf{A}^2(x, y) - \mathbf{B}^2(x, y)) & (a) \\
 \mathbf{J}^1 (\mathbf{A}^1(x, y) + \mathbf{B}^1(x, y)) &= \mathbf{J}^{12T} (\mathbf{A}^2(x, y) + \mathbf{B}^2(x, y)) & (b) \\
 \text{et} & & (III.25) \\
 \mathbf{J}^2 (\mathbf{A}^2(x, y) - \mathbf{B}^2(x, y)) &= \mathbf{J}^{12} (\mathbf{A}^1(x, y) - \mathbf{B}^1(x, y)) & (c) \\
 \mathbf{J}^2 (\mathbf{A}^2(x, y) + \mathbf{B}^2(x, y)) &= \mathbf{J}^{21T} (\mathbf{A}^1(x, y) + \mathbf{B}^1(x, y)) & (d)
 \end{aligned}$$

À partir des équations (III.25), en effectuant les opérations $(b) - (a)$ et $(c) + (d)$ et après factorisation, on arrive aux équations suivantes :

$$\begin{cases}
 2\mathbf{J}^1 \mathbf{B}^1(x, y) = (\mathbf{J}^{12T} - \mathbf{J}^{21}) \mathbf{A}^2(x, y) + (\mathbf{J}^{12T} + \mathbf{J}^{21}) \mathbf{B}^2(x, y) \\
 2\mathbf{J}^2 \mathbf{A}^2(x, y) = (\mathbf{J}^{21T} + \mathbf{J}^{12}) \mathbf{A}^1(x, y) + (\mathbf{J}^{21T} - \mathbf{J}^{12}) \mathbf{B}^1(x, y)
 \end{cases} \quad (III.26)$$

De même, en calculant $(d) - (c)$ et $(a) + (b)$, on peut aboutir aux relations qui suivent :

$$\begin{cases}
 2\mathbf{J}^2 \mathbf{B}^2(x, y) = (\mathbf{J}^{21T} - \mathbf{J}^{12}) \mathbf{A}^1(x, y) + (\mathbf{J}^{21T} + \mathbf{J}^{12}) \mathbf{B}^1(x, y) \\
 2\mathbf{J}^1 \mathbf{A}^1(x, y) = (\mathbf{J}^{12T} + \mathbf{J}^{21}) \mathbf{A}^2(x, y) + (\mathbf{J}^{12T} - \mathbf{J}^{21}) \mathbf{B}^2(x, y)
 \end{cases} \quad (III.27)$$

Les équations (III.27) peuvent se ré-exprimer comme suit :

$$\begin{cases}
 2\mathbf{J}^1 \mathbf{B}^1(x, y) + (\mathbf{J}^{21} - \mathbf{J}^{12T}) \mathbf{A}^2(x, y) = (\mathbf{J}^{12T} + \mathbf{J}^{21}) \mathbf{B}^2(x, y) \\
 2\mathbf{J}^2 \mathbf{A}^2(x, y) + (\mathbf{J}^{12} - \mathbf{J}^{21T}) \mathbf{B}^1(x, y) = (\mathbf{J}^{21T} + \mathbf{J}^{12}) \mathbf{A}^1(x, y)
 \end{cases} \quad (III.28)$$

La relation matricielle associée à (III.28) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^1(x, y) \\ \mathbf{A}^2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{J}^1 & \mathbf{J}^{21} - \mathbf{J}^{12T} \\ \mathbf{J}^{12} - \mathbf{J}^{21T} & 2\mathbf{J}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}^{12T} + \mathbf{J}^{21} \\ \mathbf{J}^{21T} + \mathbf{J}^{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1(x, y) \\ \mathbf{B}^2(x, y) \end{pmatrix} \quad (III.29)$$

À partir de cette relation, on peut identifier, comme cela a été indiqué dans l'équation (III.14), la matrice de diffraction reliant les amplitudes des modes entrants aux amplitudes des modes sortants. Cette matrice est définie par :

$$\mathbf{S}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2\mathbf{J}^1 & \mathbf{J}^{21} - \mathbf{J}^{12T} \\ \mathbf{J}^{12} - \mathbf{J}^{21T} & 2\mathbf{J}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{N_1 \times N_1} & \mathbf{J}^{12T} + \mathbf{J}^{21} \\ \mathbf{J}^{21T} + \mathbf{J}^{12} & [\mathbf{0}]_{N_2 \times N_2} \end{pmatrix} \quad (III.30)$$

La matrice de diffraction $\mathbf{S}_\Sigma$ est une matrice carrée de taille $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$, N_1 et N_2 étant respectivement le nombre de modes des bases modales du guide 1 et du guide 2 retenus après troncature. Comme expliqué précédemment, cette matrice relie les amplitudes des modes sortants à celles des modes entrants et comporte, en sous matrices, les matrices de réflexions et de transmissions présentées dans la suite.

2.3.2. Matrices de réflexion et de transmission à la jonction

À partir de la définition de la matrice de diffraction donnée par (III.30), on peut extraire les matrices de réflexions et de transmissions en tenant compte de la manière avec laquelle la matrice $\mathbf{S}_\Sigma$ a été construite. Ainsi à partir de la relation (III.14) et après calcul de cette matrice, on identifie les différents blocs comme suit :

$$\mathbf{S}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2\mathbf{J}^1 & \mathbf{J}^{21} - \mathbf{J}^{12T} \\ \mathbf{J}^{12} - \mathbf{J}^{21T} & 2\mathbf{J}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{N_1 \times N_1} & \mathbf{J}^{12T} + \mathbf{J}^{21} \\ \mathbf{J}^{21T} + \mathbf{J}^{12} & [\mathbf{0}]_{N_2 \times N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{T}_{21} \\ \mathbf{T}_{12} & \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} \quad (III.31)$$

Par construction, cette matrice se décompose en deux blocs colonnes $(\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{T}_{12})^T$ et $(\mathbf{T}_{21} \quad \mathbf{R}_2)^T$, chacun de ces blocs étant lui-même constitué de deux matrices : une matrice carrée $\mathbf{R}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de taille $N_i \times N_i$ ($i = 1, 2$) correspondant à la matrice de réflexion à la jonction pour un champ élastodynamique incident depuis le guide i et une matrice $\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de taille $N_j \times N_i$ ($i, j = 1, 2$) représentant la matrice de transmission à la jonction pour un champ incident du guide i et transmis dans le guide j .

Ce raccordement modal aide à obtenir, par un calcul unique, les matrices de réflexions et de transmissions pour les deux sens d'incidences possibles. Dans le cas d'une jonction entre un tube droit et un coude, on va donc déterminer les matrices de réflexions et de transmissions à la fois pour un champ incident de la partie droite et pour un champ incident depuis la partie coudée.

2.3.3. Bilan d'énergie

Tel qu'il est décrit, le raccordement modal à la jonction entre deux guides relie les amplitudes des modes entrants à ceux des modes sortants. Il permet, étant donné un champ incident connu, de calculer les amplitudes des modes guidés composant les champs transmis et réfléchis.

À partir de l'exemple de la Figure III-5 et en considérant un champ incident depuis le guide Ω_1 , la conservation d'énergie consiste à vérifier l'égalité entre l'énergie de ce champ incident entrant et la somme de celles des champs réfléchis et transmis sortants. Ici, nous exploitons les résultats démontrés par Baronian [30] au cours de sa thèse et portant sur la définition des flux

d'énergie des champs incidents, réfléchis et transmis à une jonction. Ainsi, à partir des vecteurs hybrides, la puissance rayonnée à travers la section d'un guide i est définie par la relation :

$$\mathbf{W}_{\Sigma}^i = \frac{\omega}{2} \text{Im} \left((\mathbf{X}_{\text{tot}}^i | \overline{\mathbf{Y}_{\text{tot}}^i}) \right) \quad (III.32)$$

avec $(\overline{})$ correspondant au conjugué et Im à la partie imaginaire.

À la jonction Σ entre le guide 1 et le guide 2, la conservation d'énergie est décrite par :

$$\mathbf{W}_{\Sigma}^1 = \mathbf{W}_{\Sigma}^2 \quad (III.33)$$

En considérant un champ incident depuis le guide 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\Sigma}^1 &= (\mathbf{W}_{\Sigma}^1)_{\text{inc}} - (\mathbf{W}_{\Sigma}^1)_{\text{refl}} \\ \mathbf{W}_{\Sigma}^2 &= (\mathbf{W}_{\Sigma}^2)_{\text{trans}} \end{aligned} \quad (III.34)$$

En notant $\mathbf{A}^{\text{inc}}(x, y)$, $\mathbf{A}^{\text{refl}}(x, y)$ et $\mathbf{A}^{\text{trans}}(x, y)$ les vecteurs des amplitudes des modes composant les champs incident, réfléchi et transmis, les flux d'énergie de ces champs sont définis par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{\Sigma}^1)_{\text{inc}} &= \text{Im}(\mathbf{A}^{\text{inc}}(x, y)^T \mathbf{K}^1 \overline{\mathbf{A}^{\text{inc}}(x, y)}) = \sum_{n_{\text{propa1}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^1) |\mathbf{A}_n^{\text{inc}}(x, y)|^2 \\ (\mathbf{W}_{\Sigma}^1)_{\text{refl}} &= \text{Im}(\mathbf{A}^{\text{refl}}(x, y)^T \mathbf{K}^1 \overline{\mathbf{A}^{\text{refl}}(x, y)}) = \sum_{n_{\text{propa1}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^1) |\mathbf{A}_n^{\text{refl}}(x, y)|^2 \\ (\mathbf{W}_{\Sigma}^2)_{\text{trans}} &= \text{Im}(\mathbf{A}^{\text{trans}}(x, y)^T \mathbf{K}^2 \overline{\mathbf{A}^{\text{trans}}(x, y)}) = \sum_{n_{\text{propa2}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^2) |\mathbf{A}_n^{\text{trans}}(x, y)|^2 \end{aligned} \quad (III.35)$$

avec n_{propa1} et n_{propa2} les indices des modes propagatifs des guides 1 et 2 et $\mathbf{K}$ la matrice de coefficients définie par :

$$\mathbf{K}_{nm}^i = (\mathbf{X}_n^i | \overline{\mathbf{Y}_m^i}) \quad (III.36)$$

On remarque aussi que, dans le cas des modes propagatifs (β_n réels) $\overline{\mathbf{Y}_m^i} = \mathbf{Y}_m^i$, d'où le fait de prendre $\mathbf{K}^i = \mathbf{J}^i$ dans l'expression des flux d'énergies.

Finalement, la conservation d'énergie (III.33) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{n_{\text{propa1}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^1) |\mathbf{A}_n^{\text{inc}}(x, y)|^2 \\ = \sum_{n_{\text{propa1}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^1) |\mathbf{A}_n^{\text{refl}}(x, y)|^2 + \sum_{n_{\text{propa2}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^2) |\mathbf{A}_n^{\text{trans}}(x, y)|^2 \end{aligned} \quad (III.37)$$

Connaissant les relations entre les amplitudes du champ incident et celles des champs réfléchis et transmis, on peut, après factorisation, réécrire cette relation en fonction des coefficients de réflexion et de transmission sous la forme :

$$\sum_{n_{\text{propa1}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^1) = \sum_{n_{\text{propa1}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^1) |\mathbf{R}_n^{\text{refl}}(x, y)|^2 + \sum_{n_{\text{propa2}}} \text{Im}(\mathbf{J}_n^2) |\mathbf{T}_n^{\text{trans}}(x, y)|^2 \quad (\text{III.38})$$

Cette relation sera mise en œuvre afin de s'assurer que la somme des énergies des champs transmis et réfléchi est bien égale à l'énergie du champ incident. Dans le modèle de raccordement modal mis en œuvre ici, la conservation de l'énergie est une condition nécessaire mais pas suffisante pour valider notre calcul. Dans la suite, on s'attachera à vérifier systématiquement cette condition lors des différents calculs que l'on réalisera.

2.4. Exemple d'utilisation du modèle de raccordement modal

2.4.1. Cas de la diffraction par la jonction entre un guide droit et un guide coudé

On considère la configuration donnée par la Figure III-5, en utilisant la relation (III.31) définissant la matrice de diffraction entre deux guides joints ; on obtient les matrices de réflexion et de transmission pour les deux sens d'émission possibles comme le montre la Figure III-6:

$$\mathbf{S}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} \overbrace{[\mathbf{R}_1(x, y)]_{N_1 \times N_1}}^{(N_1+N_2) \times N_1} & \overbrace{[\mathbf{T}_{21}(x, y)]_{N_1 \times N_2}}^{(N_1+N_2) \times N_2} \\ \overbrace{[\mathbf{T}_{12}(x, y)]_{N_2 \times N_1}}^{(N_1+N_2) \times N_1} & \overbrace{[\mathbf{R}_2(x, y)]_{N_2 \times N_2}}^{(N_1+N_2) \times N_2} \end{pmatrix}$$

Droit $\rightarrow$ Coude Coude $\rightarrow$ Droit

Figure III-6: Sous matrices de réflexion et de transmission de la matrices de diffraction de la jonction entre le guide droit et le coude Σ

Après calcul, on identifie les différents blocs (rouge et bleu) servant à obtenir les amplitudes modales des champs diffractés en fonction de celles du champ incident. En détails, ces matrices comportent en colonne tous les modes composant le champ incident et en ligne tous les modes guidés contribuant aux champs réfléchis ou transmis. La figure III-7 ci-dessous illustre ce propos :

$$\begin{array}{c} \text{Modes } inc \text{ guide droit} \quad \text{Modes } inc \text{ coude} \\ \text{Modes } refl \text{ guide droit} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} R_{1,1}^1 & \cdots & R_{1,n_1}^1 & T_{1,1}^{21} & \cdots & T_{1,n_2}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n_1,1}^1 & \cdots & R_{n_1,n_1}^1 & T_{n_1,1}^{21} & \cdots & T_{n_1,n_2}^{21} \\ \hline T_{1,1}^{12} & \cdots & T_{1,n_1}^{12} & R_{1,1}^2 & \cdots & R_{1,n_2}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n_2,1}^{12} & \cdots & T_{n_2,n_1}^{12} & R_{n_2,1}^2 & \cdots & R_{n_2,n_2}^2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} \text{Modes } trans \text{ guide droit} \\ \text{Modes } refl \text{ coude} \end{array} \\ \text{Modes } trans \text{ coude} \end{array}$$

Figure III-7: Décomposition des coefficients de la matrice de diffraction $\mathbf{S}_{\Sigma}$ de la jonction entre un guide droit et un coude en matrices de réflexions (refl) et de transmission (trans)

2.4.2. Raccordement modal à la jonction entre un coude et un guide droit : effet de la courbure

À partir de la matrice de diffraction de la jonction entre un guide droit et un coude et des relations données par les équations (III.35) pour le calcul des énergies des champs, on peut déterminer la décomposition modale de l'énergie des champs réfléchi et transmis.

Dans les exemples qui suivent, on considère une jonction entre un tube droit et un coude en acier ($\rho = 7,92g.cm^{-3}$, $C_T = 3,24mm.\mu s^{-1}$ et $C_L = 5,92mm.\mu s^{-1}$) de diamètre externe 20mm et d'épaisseur de 5mm avec un rayon de courbure du coude de $0,04mm^{-1}$, à la fréquence de 40kHz. Le maillage choisi pour le calcul par la méthode SAFE est un maillage éléments finis 2D avec des éléments triangulaires P1 :

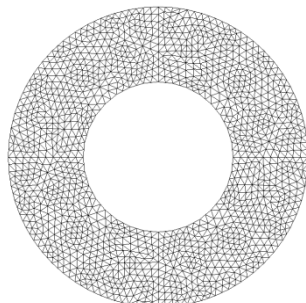


Figure III-8 : Maillage éléments finis 2D par élément triangulaire P1 (1424 nœuds) de la section du guide réalisé avec GMSH [92]

Les Tableau III-2 et Tableau III-3 ci-dessous donnent la décomposition, mode par mode, des ratios d'énergie des champs transmis et réfléchis (lignes) pour un mode incident depuis la partie droite (colonnes). Ces ratios sont normalisés par rapport à l'énergie des modes incidents et donnés en %. Ceci revient à considérer que l'énergie du champ incident depuis la partie droite vaut 100% :

Tableau III-1: Ratios en % de l'énergie transmise mode par mode à 40kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite et transmis dans le coude (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	78,82	3,60	1,80	14,22
F(-1,1)	1,05	50,42	45,80	1,07
T(0,1)	7,13	40,16	47,32	0,45
L(0,1)	11,66	4,40	0,10	74,34

Tableau III-2 : Ratios en % de l'énergie transmise mode par mode à 40kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite et transmis dans le coude (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	0,44	0,11	0,23	0,24
F(-1,1)	0,12	0,07	1,03	0,11
T(0,1)	0,26	1,05	2,97	0,07
L(0,1)	0,26	0,12	0,07	9,73

Ces tableaux aident à représenter de manière simple le résultat d'un raccordement modal à une jonction entre un tube droit et un coude. Dans le cas présent, on observe une transmission importante à travers la première jonction du coude avec des phénomènes de conversion de modes pour chacun des modes propagatifs et de façon corollaire une réflexion faible. Nous verrons dans la suite que, sous l'influence de certains paramètres (fréquence, courbure...), la réflexion peut devenir plus importante, ce qui se traduit naturellement par une perte dans l'énergie transmise dans le coude.

Pour un mode incident L(0,1) par exemple, la transmission dans le coude et la réflexion dans la partie droite se font principalement dans le même mode L(0,1) pouvant se propager dans ces deux guides. De plus, une partie de l'énergie transmise et réfléchi est transportée après conversion par d'autres modes propagatifs, ici le F(1,1) en particulier. Ces observations s'appliquent à tous les modes propagatifs incidents depuis la partie droite et transmis dans le coude.

2.4.2.1. Effet de la courbure sur la diffraction à la jonction

Afin d'illustrer l'effet de la courbure, les tableaux ci-dessous représentent les résultats du raccordement modal appliqué à la configuration précédente avec un calcul à la fréquence de 20kHz pour deux valeurs de courbures différentes $0,02\text{mm}^{-1}$ et $0,04\text{mm}^{-1}$. Dans l'ordre, nous représentons les ratios d'énergies transmise et réfléchi par la jonction pour ces deux valeurs :

Transmission :

Tableau III-3: Ratios en % de l'énergie transmise mode par mode à 20kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite et transmis dans le coude (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	51,10	4,05	1,61	36,90
F(-1,1)	3,25	52,70	41,89	0,76

Tableau III-4 : Ratios en % de l'énergie transmise mode par mode à 20kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite et transmis dans le coude (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,02mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	77,22	7,93	0,29	12,61
F(-1,1)	7,29	72,54	19,71	0,30
T(0,1)	3,55	16,39	79,56	0,01
L(0,1)	11,35	2,87	0,01	74,16

Dans un premier temps, on observe un nombre différent de modes propagatifs dans le coude selon la valeur de la courbure. En effet, à la valeur de courbure la plus élevée $0,04\text{mm}^{-1}$, on compte seulement deux modes propagatifs F(1,1) et F(-1,1) sur lesquels se décomposent les énergies des modes incidents depuis le guide droit. Ceci est la conséquence du phénomène de décalage des fréquences de coupure sous l'effet de la courbure qui, dans le cas présent, se traduit par le fait que les modes T(0,1) et L(0,1), apparaissant dans le guide droit, n'existent pas (encore) dans la partie coudée.

La Figure III-9 ci-dessous permet de constater ce phénomène pour notre cas d'intérêt. En effet, en dessous de 22kHz les modes de torsion T(0,1) et de compression L(0,1) n'existent pas dans la partie coudée alors qu'ils sont présents dans la partie droite.

Courbes de dispersion en nombre d'onde se pour le guide droit et coudé

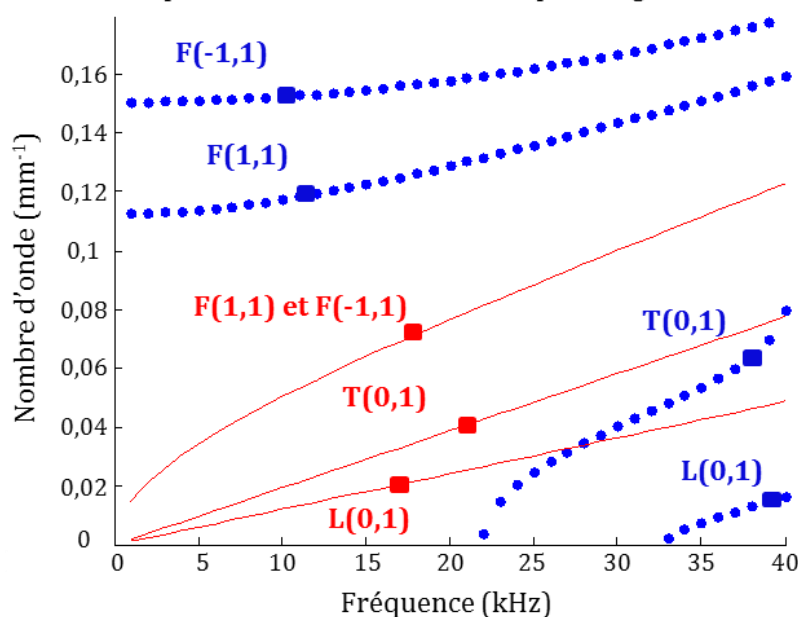


Figure III-9 : Courbes de dispersion en nombre d'ondes pour un tube d'acier (cf. configuration) aux courbures $\gamma = 0$ (trait plein rouge) et $\gamma = 0,04\text{mm}^{-1}$ (Points bleus)

Sous l'effet de ce phénomène, l'énergie transmise dans le coude de forte courbure $0,04\text{mm}^{-1}$ est beaucoup plus faible que celle transmise dans le coude de courbure plus faible $0,02\text{mm}^{-1}$.

Réflexion :

Tableau III-5 : Ratios en % de l'énergie réfléchi mode par mode à 20kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite et réfléchis dans cette même partie (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	6,76	5,88	3,58	20,74
F(-1,1)	6,87	10,12	22,49	2,61
T(0,1)	3,07	21,67	29,69	0,92
L(0,1)	21,09	1,83	1,22	36,81

Tableau III-6 : Ratios en % de l'énergie réfléchi mode par mode à 20kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite et réfléchis dans cette même partie (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,02mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	0,19	0,1	0,02	0,05
F(-1,1)	0,1	0,04	0,05	0,02
T(0,1)	0,02	0,05	0,32	0,01
L(0,1)	0,05	0,02	0,01	13,94

Contrairement à la transmission et comme on pourrait s'y attendre, l'apparition des modes T(0,1) et L(0,1) dans le coude entraîne une diminution importante de l'énergie réfléchi par la jonction entre le guide droit et coudé. À forte courbure de $0,04\text{mm}^{-1}$, l'énergie réfléchi en modes de flexions F(1,1) et F(-1,1) est transportée en grande partie par les modes axisymétriques du guide droit à savoir L(0,1) et T(0,1) suite à des conversions de modes.

Par ailleurs, en sommant colonne par colonne les Tableau III-4 et Tableau III-6 ainsi que les Tableau III-3 et Tableau III-5 précédents, on peut vérifier la conservation de l'énergie définie par la relation (III.38) :

Tableau III-7 : Somme des ratios en % des énergies des champs transmis et réfléchis à 20kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
E_{refl}+E_{trans}	100,1	100,2	100,4	99,75

Tableau III-8 : Somme des ratios en % des énergies des champs transmis et réfléchis à 20kHz par une jonction pour les modes propagatifs incidents de la partie droite (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,02mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
E_{refl}+E_{trans}	99,8	99,9	100,0	100,1

Pour les deux exemples de calcul, on vérifie bien la relation de conservation d'énergie avec des erreurs inférieures à 1%. Ces erreurs sont principalement dues à la précision du maillage choisi ainsi qu'au nombre de modes évanescents et inhomogènes utilisés dans le raccordement modal.

2.4.2.2. Effet de la fréquence sur la diffraction à la jonction

Afin d'illustrer l'effet de la fréquence sur les champs transmis et réfléchi à travers la jonction, on considère la configuration précédente avec une courbure fixe du coude de 0,04mm⁻¹, et on effectue le calcul sur la plage fréquentielle]0,100kHz]. On s'intéresse ici uniquement à la décomposition modale des champs transmis et réfléchis pour un mode incident T(0,1). Les tableaux suivants donnent ces décompositions aux fréquences respectives de 20, 40, 60, 80 et 100kHz :

Tableau III-9: Ratios en % de l'énergie transmise mode par mode par une jonction pour un mode incident T(0,1) venant de la partie droite et transmis dans le coude (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹) aux fréquences respectives de 20, 40, 60, 80 et 100kHz

	20kHz	40kHz	60kHz	80kHz	100kHz
F(1,1)	1,61	1,75	2,20	1,81	1,04
F(-1,1)	41,89	41,78	6,82	13,93	7,73
T(0,1)		50,99	68,91	60,91	51,11
L(0,1)		0,07	0,66	0,09	0,05
F(1,2)			7,44	0,18	4,09
F(-1,2)			11,28	17,95	29,34
F(2,1)				0,07	0,73
F(-2,1)				0,95	2,39

Tableau III-10: Ratios en % de l'énergie réfléchi mode par mode par une jonction pour un mode incident $T(0,1)$ venant de la partie droite et réfléchi dans cette même partie ($OD=20\text{mm}$, épaisseur= 5mm , courbure= $0,04\text{mm}^{-1}$) aux fréquences respectives de 20, 40, 60, 80 et 100kHz

	20kHz	40kHz	60kHz	80kHz	100kHz
F(1,1)	3,58	0,23	0,09	0,50	0,13
F(-1,1)	22,49	1,01	0,82	1,84	1,95
T(0,1)	29,69	2,14	0,68	0,69	0,51
L(0,1)	1,22	0,07	0,01	0,00	0,00
F(1,2)			0,00	0,01	0,51
F(-1,2)			0,09	0,96	0,78
F(2,1)				0,01	0,01
F(-2,1)				0,02	0,04

Dans le cas présent, l'accroissement de la fréquence entraîne une augmentation de l'énergie transmise à travers la jonction et, par conséquent, une diminution de l'énergie réfléchi. Similairement à l'exemple sur l'effet de la courbure, la transmission, à travers la jonction du mode $T(0,1)$ se fait principalement dans le même mode si, à la fréquence de calcul, celui-ci existe dans les deux guides. Par contre, le ratio d'énergie transmise pour ce mode en lui-même n'évolue pas constamment avec l'augmentation de la fréquence ; l'énergie transmise, en effet, décroît à partir de 60kHz.

Entre 20kHz et 40kHz, on vérifie le même effet d'apparition de nouveaux modes que celui observé dans le cas du changement de la valeur de la courbure. Ceci engendre une diminution importante de l'énergie réfléchi au moment de l'apparition du mode $T(0,1)$ dans le guide. À cela s'ajoute des conversions de modes plus importantes avec un accroissement des contributions des modes de flexions, notamment $F(-1,1)$, $F(-1,2)$ et $F(-2,1)$ dans l'énergie transmise.

À noter que la conservation d'énergie est toujours vérifiée avec un écart absolu inférieur à 0,5% aux différentes fréquences.

2.4.3. Cas de la réflexion totale en bout de tube

On s'intéresse dans cette partie à de la diffraction d'un champ incident sur l'extrémité libre d'un guide d'ondes. La prise en compte de ce type de diffracteur peut être vue comme un cas particulier de raccordement modal. En effet, on est en présence d'une rupture de la section et donc on n'a pas de changement de milieu de propagation. L'absence de milieu de transmission entraîne une réflexion totale du champ incident et le raccordement modal s'effectue sur les modes du même guide comme le montre la Figure III-10 :

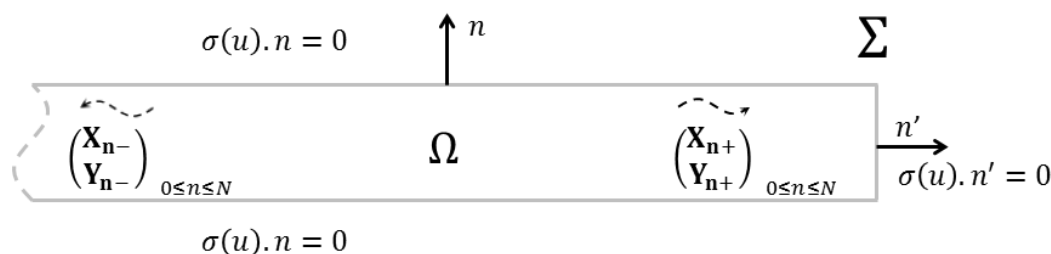


Figure III-10: Réflexion totale en bout de guide d'un champ élastodynamique incident

L'objectif du raccordement est de calculer la matrice de réflexion totale $\mathbf{R}_{EL}(x, y)$ reliant les amplitudes des modes entrants $\mathbf{A}^1(x, y)$ aux amplitudes des modes sortants $\mathbf{B}^1(x, y)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^1(x, y) &= \mathbf{R}_{\text{EL}}(x, y) \mathbf{A}^1(x, y) \\ \text{avec} \quad \mathbf{T}_{\text{EL}}(x, y) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

À l'extrémité Σ , le champ élastodynamique doit vérifier des conditions de surfaces libres. Ceci correspond à un champ de contraintes nul avec une continuité du champ de déplacement. Les vecteurs hybrides du champ à la jonction valent donc :

$$\mathbf{X}_{\text{EL}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{Y}_{\text{EL}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ en } \Sigma \quad (\text{III.40})$$

Ces vecteurs sont parfaitement connus puisqu'ils représentent les vecteurs hybrides du champ incident avec des contraintes nulles. À l'aide de la relation (III.5) et en notant $\mathbf{A}^1$ et $\mathbf{B}^1$ les vecteurs d'amplitudes des modes entrants et sortants dans Ω , les projections de ces vecteurs sur la base modale associée au guide s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m} \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\text{EL}} | \mathbf{Y}_{\mathbf{m}}) &= \left[\sum_{\mathbf{m} \in [0, N_1]} \sum_{\mathbf{n} \in [0, N_1]} \int_S (-\mathbf{u}_z^n \sigma_{zz}^{\mathbf{m}}) dS \right] (\mathbf{A}^1(x, y) - \mathbf{B}^1(x, y)) \\ \sum_{\mathbf{m} \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\mathbf{m}} | \mathbf{Y}_{\text{EL}}) &= \left[\sum_{\mathbf{m} \in [0, N_1]} \sum_{\mathbf{n} \in [0, N_1]} \int_S (\sigma_{xz}^{\mathbf{m}} \mathbf{u}_x^n + \sigma_{yz}^{\mathbf{m}} \mathbf{u}_y^n) dS \right] (\mathbf{A}^1(x, y) + \mathbf{B}^1(x, y)) \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

On introduit deux nouvelles matrices de projection $\mathbf{D}_{\text{EL}}$ et $\mathbf{L}_{\text{EL}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{EL}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) &= \int_S (-\mathbf{u}_z^n \sigma_{zz}^{\mathbf{m}}) dS \\ \mathbf{D}_{\text{EL}}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= \int_S (\sigma_{xz}^{\mathbf{m}} \mathbf{u}_x^n + \sigma_{yz}^{\mathbf{m}} \mathbf{u}_y^n) dS \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

et en injectant ces formules dans (III.41) on aboutit aux relations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m} \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\text{EL}} | \mathbf{Y}_{\mathbf{m}}) &= \mathbf{L}_{\text{EL}}^T (\mathbf{A}^1(x, y) - \mathbf{B}^1(x, y)) \\ \sum_{\mathbf{m} \in [0, N_1]} (\mathbf{X}_{\mathbf{m}} | \mathbf{Y}_{\text{EL}}) &= \mathbf{D}_{\text{EL}} (\mathbf{A}^1(x, y) + \mathbf{B}^1(x, y)) \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

En notant $(\mathbf{X}_{\text{tot}}^1 \quad \mathbf{Y}_{\text{tot}}^1)^T$ le champ total dans Ω et en utilisant les relations précédentes, on peut écrire les relations de projections de ce champ sur la base modale :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in [0, N_1]} (X_{\text{tot}}^1 | Y_m) &= J^1 (A^1(x, y) - B^1(x, y)) \\ \sum_{m \in [0, N_1]} (X_m | Y_{\text{tot}}^1) &= J^1 (A^1(x, y) + B^1(x, y)) \end{aligned} \quad (III.44)$$

Enfin, la condition de continuité des champs à l'extrémité du guide nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} J^1 (A^1(x, y) - B^1(x, y)) &= L_{EL}^T (A^1(x, y) - B^1(x, y)) \\ J^1 (A^1(x, y) + B^1(x, y)) &= D_{EL} (A^1(x, y) + B^1(x, y)) \end{aligned} \quad (III.45)$$

En sommant ces deux équations, on a :

$$(2J^1 - L_{EL}^T - D_{EL})A^1(x, y) = (D_{EL} - L_{EL}^T)B^1(x, y) \quad (III.46)$$

De cette dernière expression, on peut définir la matrice de réflexion associée au bout du tube :

$$R_{EL}(x, y) = (D_{EL} - L_{EL}^T)^{-1} (2J^1 - L_{EL}^T - D_{EL}) \quad (III.47)$$

3. Mise en série des matrices de diffractions locales

L'objet de cette partie est de mettre en œuvre une méthode permettant de prendre en compte plusieurs matrices de diffractions locales successives afin d'être capable de gérer la présence de plusieurs perturbations consécutives. Le formalisme utilisé ici a été présenté par BARONIAN et *al.* [99] et est basé sur la mise en série de matrices de diffraction associées à des perturbations locales en prenant en compte la propagation des ondes entre les différents diffracteurs.

Pour faire suite à l'étude présentée dans les paragraphes précédents, nous allons considérer le cas d'une portion coudée de guide reliée à deux parties droites, c'est-à-dire, comme le schématise la figure suivante, une pièce comportant deux jonctions successives entre une partie droite et une partie coudée :

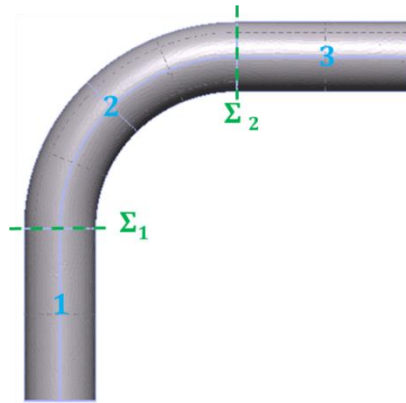


Figure III-11: Double jonction d'un coude relié à deux guides droits

Le champ incident par la partie droite 1 va, à la jonction Σ_1 , se diffracter et générer des champs réfléchi et transmis. Ce dernier va, à son tour, se propager dans le coude et être diffracté par la seconde jonction Σ_2 . Le champ transmis à cette jonction se propagera dans le guide droit 3 alors que le champ réfléchi par cette même jonction se propagera dans la partie coudée. De ce fait, en plus des phénomènes de conversion de modes et de diffraction aux jonctions vus auparavant, des réflexions multiples entre les deux jonctions vont pouvoir se produire.

3.1. Définition de la matrice de diffraction globale

À partir de la configuration de la Figure III-11, on définit les matrices de diffraction associées aux jonctions Σ_1 et Σ_2 et reliant les amplitudes des modes entrants aux amplitudes des modes sortants par :

$$\Psi_{\text{out}}^1 = S_1 \Psi_{\text{in}}^1 \quad (\text{III.48})$$

et

$$\Psi_{\text{out}}^2 = S_2 \Psi_{\text{in}}^2$$

avec

$$S_1 = \begin{pmatrix} R_1^1 & T_{21}^1 \\ T_{12}^1 & R_2^1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} R_2^2 & T_{32}^2 \\ T_{23}^2 & R_3^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.49})$$

$\Psi_{\text{in}}^1 = (A_1 \ B_2)^T$, $\Psi_{\text{out}}^1 = (B_1 \ A_2)^T$, $\Psi_{\text{in}}^2 = (A'_2 \ B_3)^T$ et $\Psi_{\text{out}}^2 = (B'_2 \ A_3)^T$ sont les matrices des amplitudes des modes entrants et sortants aux deux jonctions du coude représentées par la figure suivante :

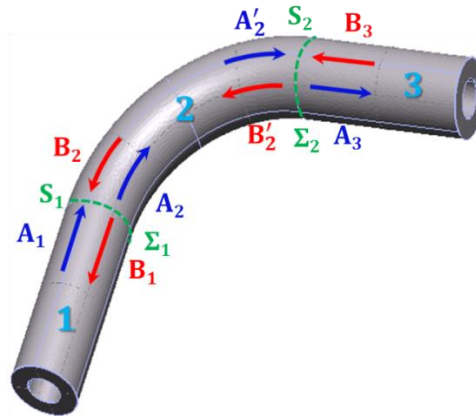


Figure III-12: modes entrants et sortants d'un guide composé d'un coude joint à deux parties droites

Comme pour le cas du raccordement modal, l'objectif est de construire la matrice de diffraction globale S_G telle que :

$$\Psi_{\text{out}}^G = S_G \Psi_{\text{in}}^G \quad (\text{III.50})$$

avec

$$S_G = \begin{pmatrix} R_1^G & T_{31}^G \\ T_{13}^G & R_3^G \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \Psi_{\text{in}}^G = (A_1 \ B_3)^T, \Psi_{\text{out}}^G = (B_1 \ A_3)^T.$$

3.2. Opérateur analytique de propagation

Comme expliqué dans le chapitre 2, le calcul des modes avec le modèle SAFE consiste à exploiter les invariances du guide afin d'écrire les solutions des équations de propagation sous la forme donnée par (II.49). La propagation des ondes guidées est prise en compte par un propagateur analytique en $e^{i\beta s}$. Ces propagateurs peuvent être regroupés dans la matrice de propagation diagonale suivante :

$$\mathbf{P} = \text{diag}(e^{i\beta_n s})_{0 \leq n \leq N} \quad (III.51)$$

Dans le coude, les β_n sont les nombres d'onde des modes de la base modale du coude.

Cette matrice de propagation $\mathbf{P}$ permet de retrouver le champ élastodynamique en tout point du guide d'ondes à partir des nombres d'onde, des vecteurs de déplacements et des vecteurs de contraintes calculés dans la section de référence du guide par la méthode SAFE.

En pratique afin de mener des études paramétriques, on définira l'abscisse curviligne s du coude par sa relation avec son angle et sa courbure :

$$s = \frac{\theta}{\gamma} \quad (III.52)$$

où θ est l'angle et γ la courbure du coude.

Par ailleurs, cette matrice de propagation relie les vecteurs des amplitudes modales entre les deux jonctions du coude ; on peut donc écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A}'_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}'_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2 \end{cases} \quad (III.53)$$

3.3. Matrice de diffraction globale pour un coude

À partir de la relation (III.48), les amplitudes des modes entrants et sortants aux jonctions du coude sont reliées par :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{B}_1 = \mathbf{R}_1^1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_{21}^1 \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{matrix} \\ \text{et} & \begin{cases} \mathbf{B}'_2 = \mathbf{R}_2^2 \mathbf{A}'_2 + \mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_3^2 \mathbf{B}_3 + \mathbf{T}_{23}^2 \mathbf{A}'_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(c)} \\ \text{(d)} \end{matrix} \end{aligned} \quad (III.54)$$

À partir des relations (a) et (c) et en utilisant les expressions (III.53), on a les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_2 = (\mathbf{R}_2^1)^{-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'_2 - \mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1) \\ \mathbf{A}'_2 = (\mathbf{R}_2^2)^{-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2 + \mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3) \end{cases} \quad (III.55)$$

Après quelques manipulations et en exploitant les formules (III.53) et (III.54) dans (III.55), on aboutit à la relation suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \left(\mathbf{R}_1^1 - \mathbf{T}_{21}^1 (\mathbf{I} - \Lambda^{13})^{-1} (\mathbf{R}_2^1)^{-1} \mathbf{T}_{12}^1 \right) \mathbf{A}_1 \\ \quad - \left[\mathbf{T}_{21}^1 \left((\mathbf{I} - \Lambda^{13})^{-1} \Lambda^{13} \mathbf{P} \mathbf{T}_{32}^2 \right) \right] \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{A}_3 = \left(\mathbf{R}_3^2 - \mathbf{T}_{23}^2 (\mathbf{I} - \Lambda^{31})^{-1} (\mathbf{R}_2^2)^{-1} \mathbf{T}_{32}^2 \right) \mathbf{B}_3 \\ \quad - \left[\mathbf{T}_{23}^2 \left((\mathbf{I} - \Lambda^{31})^{-1} \Lambda^{31} \mathbf{P} \mathbf{T}_{12}^1 \right) \right] \mathbf{A}_1 \end{cases} \quad (III.56)$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda^{13} &= (\mathbf{R}_1^1)^{-1} \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{R}_2^2)^{-1} \mathbf{P}^{-1} \\ \Lambda^{31} &= (\mathbf{R}_2^2)^{-1} \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{R}_1^1)^{-1} \mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

Les différentes étapes de calculs pour aboutir à cette dernière expression sont données dans l'annexe B.

À partir de cette équation, on peut définir les différentes sous matrices de la matrice de diffraction globale S_G :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1^G = \left(\mathbf{R}_1^1 - \mathbf{T}_{21}^1 (\mathbf{I} - \Lambda^{13})^{-1} (\mathbf{R}_2^1)^{-1} \mathbf{T}_{12}^1 \right) \\ \quad \mathbf{T}_{31}^G = - \left[\mathbf{T}_{21}^1 \left((\mathbf{I} - \Lambda^{13})^{-1} \Lambda^{13} \mathbf{P} \mathbf{T}_{32}^2 \right) \right] \\ \mathbf{R}_3^G = \left(\mathbf{R}_3^2 - \mathbf{T}_{23}^2 (\mathbf{I} - \Lambda^{31})^{-1} (\mathbf{R}_2^2)^{-1} \mathbf{T}_{32}^2 \right) \\ \quad \mathbf{T}_{13}^G = - \left[\mathbf{T}_{23}^2 \left((\mathbf{I} - \Lambda^{31})^{-1} \Lambda^{31} \mathbf{P} \mathbf{T}_{12}^1 \right) \right] \end{cases} \quad (III.57)$$

Cette matrice de diffraction globale S_G peut à son tour être recombinaée avec d'autres matrices de diffraction locales pour prendre en compte d'autres diffracteurs. Ainsi, par itération du cheminement logique décrit ci-dessus, il est aisé de combiner plusieurs matrices de diffraction locales de diffracteurs successifs présents dans un réseau composé de plusieurs guides différents et ce, en introduisant les matrices de propagation adéquates. Finalement, cette méthode de mise en série permet d'obtenir une unique matrice de diffraction pour tous les guides d'ondes.

Remarque :

Dans le cas d'un guide composé d'un coude relié à deux parties droites, il est possible de vérifier que la matrice de diffraction globale est symétrique et qu'on a alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^G &= \mathbf{R}_3^G \\ \mathbf{T}_{31}^G &= \mathbf{T}_{13}^G \end{aligned} \quad (III.58)$$

En effet, un mode incident du guide 1 ou du guide 3 va se réfléchir et se transmettre de la même façon dans les deux cas.

3.4. Exemple de mise en série de matrices de diffractions :

Pour les exemples qui suivent, les bases modales utilisées comportent tous les modes propagatifs ainsi que les modes évanescents et inhomogènes dont les amplitudes, lorsqu'elles atteignent la jonction suivante, sont supérieures à 1% de leur amplitude initiale avant propagation. Ces bases modales sont mises en œuvre pour la décomposition des champs élastodynamiques, le raccordement modal aux jonctions et la mise en série des matrices de diffraction locales.

3.4.1. Ligne composée d'un coude raccordé à deux guides droits

On considère la configuration de la Figure III-12, le calcul est effectué pour des tubes en acier ($\rho = 7,92g.cm^{-3}$, $C_T = 3,24mm.\mu s^{-1}$ et $C_L = 5,92mm.\mu s^{-1}$) avec un diamètre externe de 20mm et une épaisseur de 5mm. Le coude a une ouverture angulaire de 90° avec un rayon de courbure de $0,04mm^{-1}$.

Afin de pouvoir comparer la diffraction obtenue précédemment (paragraphe 2) à travers une jonction avec celle du coude complet, on effectue le calcul à la même fréquence 40kHz et on représente la décomposition modale des champs transmis et réfléchis pour les différents modes propagatifs incidents depuis la partie droite :

Tableau III-11: Ratios en % de l'énergie transmise mode par mode à 40kHz par le coude entier pour les modes propagatifs incidents de la partie droite 1 et transmis après le coude dans le guide droit 3 (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	83,06	6,78	7,08	0,28
F(-1,1)	6,79	36,26	52,00	0,55
T(0,1)	7,17	53,12	31,87	0,55
L(0,1)	0,31	0,53	0,52	87,45

Tableau III-12: Ratios en % de l'énergie réfléchi mode par mode à 40kHz par le coude entier pour les modes propagatifs incidents de la partie droite et réfléchis dans cette même partie (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	1,09	0,94	0,19	0,96
F(-1,1)	0,38	1,35	1,31	0,07
T(0,1)	0,21	1,51	6,84	0,06
L(0,1)	0,85	0,07	0,07	10,17

Tableau III-13: Somme des ratios en % des énergies des champs transmis et réfléchis à 40kHz par le coude entier pour les modes propagatifs incidents de la partie droite (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(-1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
$E_{refl} + E_{trans}$	99,89	100,53	99,89	100,01

De manière générale, la prise en compte de deux jonctions successives engendre naturellement de nouvelles conversions de mode. Énergétiquement, outre la conservation d'énergie satisfaisante (écart absolu < 0,6%), l'énergie des champs diffractés se répartit sur plusieurs modes, avec, comme dans le cas de la jonction unique, une prépondérance de la transmission et de la réflexion d'un mode en lui-même.

À la fréquence de calcul et en prenant l'exemple du premier mode de torsion T(0,1), l'énergie transmise par la première jonction du coude correspond à 94,59% de l'énergie incidente et se répartit majoritairement sur les deux modes T(0,1) et F(-1,1) existant dans le coude (voir Tableau III-15).

Le total de l'énergie transmise par le coude complet ne peut excéder les 94,59% initialement transmis à la première jonction. Dans l'exemple présent, on récupère 91,48% de l'énergie émise à la sortie du coude pour un mode incident en T(0,1). Les pertes en transmission sont dues aux phénomènes de réflexions multiples qui font qu'une partie de l'énergie transmise à la première

jonction se transforme en énergie réfléchi par la seconde jonction. Les tableaux suivants comparent respectivement les énergies des champs réfléchis et transmis à travers une seule jonction et un coude complet pour tous les modes propagatifs :

Tableau III-14 : Comparaison des Ratios en % de l'énergie transmise à travers une jonction ou à travers le coude complet à 40kHz pour les modes propagatifs incidents de la partie droite

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
Une jonction	98,45	98,34	94,59	89,87
Coude complet	97,35	96,69	91,48	88,84

Tableau III-15 : Comparaison des Ratios en % de l'énergie réfléchi à travers une jonction ou à travers le coude complet à 40kHz pour les modes propagatifs incidents de la partie droite

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
Une jonction	1,01	1,31	3,45	10,16
Coude complet	2,53	3,87	8,41	11,26

La propriété précédente est vérifiée pour tous les modes propagatifs. Selon la configuration choisie et suivant la fréquence de calcul, les écarts sont plus ou moins faibles entre les énergies des champs réfléchis et transmis par une jonction ou par le coude complet. Les résultats du Tableau III-17 illustrent une comparaison de ces différents champs à la fréquence plus faible de 20kHz :

Tableau III-16: Comparaison des Ratios en % de l'énergie transmise à travers une jonction ou à travers le coude complet à 20kHz pour les modes propagatifs incidents de la partie droite

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
Une jonction	54,35	56,75	43,5	37,66
Coude complet	54,31	56,68	43,09	38,46

Tableau III-17 : Comparaison des Ratios en % de l'énergie réfléchi à travers une jonction ou à travers le coude complet à 20kHz pour les modes propagatifs incidents de la partie droite

	F(1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
Une jonction	37,79	39,5	56,98	60,08
Coude complet	37,81	39,54	56,55	59,51

À la différence du premier exemple, la réflexion est plus importante aussi bien à une seule jonction que dans le coude complet sachant que, dans le cas d'un calcul à 20kHz, ce résultat était prévisible car il n'existe que deux modes propagatifs dans le coude F(1,1) et F(-1,1).

3.4.2. Prise en compte du bout de tube libre après le passage d'un coude

On s'intéresse à présent au cas d'une ligne de canalisations composée d'un coude joint à deux parties droites dont l'une des deux se termine par une extrémité de tube libre. Les caractéristiques géométriques et matérielles de la ligne de canalisation sont identiques à celle utilisées dans l'exemple précédent avec l'ajout d'une extrémité située à $z=150mm$ de la deuxième jonction du coude comme le montre la figure suivante :

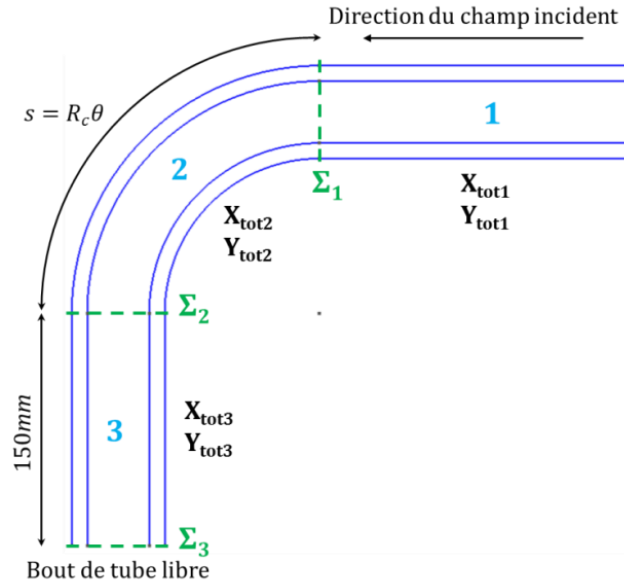


Figure III-13: Ligne de canalisations composée d'un coude de 90° joint à deux guides tube droit dont le deuxième se termine par un bout de tube libre

Le calcul est réalisé sur cette configuration avec un coude de 90° à la fréquence de 40kHz. Le module de la matrice de réflexion associée au bout du tube libre pour cette configuration est calculé à partir de la relation (III.47) et est égal à :

$$|\mathbf{R}_{EL}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \begin{pmatrix} 0,999 & 2,28e-07 & 2,51e-05 & 1,00e-04 \\ 5,81e-07 & 0,999 & 6,84e-05 & 4,39e-05 \\ 1,89e-05 & 5,16e-05 & 1,000 & 7,84e-06 \\ 4,70e-05 & 2,04e-05 & 4,86e-06 & 1,000 \end{pmatrix} \quad (III.59)$$

Comme attendu, la matrice de réflexion dans le cas présent est une matrice symétrique représentant la réflexion totale (coefficients 1 sur la diagonale). Cette matrice est mise en série avec celle de la diffraction du coude complet par le biais de la matrice de propagation entre la sortie du coude et l'extrémité du tube libre.

La décomposition modale des ratios d'énergie réfléchi, mode par mode, par la ligne complète est donnée dans le tableau suivant :

Tableau III-18: Ratios en % de l'énergie réfléchi mode par mode à 40kHz dans le cas d'un coude entier suivi d'un bout de tube libre à 150mm pour les modes incidents et réfléchi de la partie droite (OD=20mm, épaisseur=5mm, courbure=0,04mm⁻¹)

	F(-1,1)	F(-1,1)	T(0,1)	L(0,1)
F(1,1)	64,50	30,56	0,92	2,96
F(-1,1)	30,22	62,73	2,55	2,53
T(0,1)	1,15	2,74	92,34	2,15
L(0,1)	2,91	2,60	2,26	92,08

La réflexion étant totale, toute l'énergie initialement émise se retrouve dans le champ réfléchi. L'énergie de ce champ réfléchi est principalement transportée par le même mode que celui considéré pour l'émission, l'autre partie de l'énergie étant répartie sur d'autres modes propagatifs après conversions de modes. L'importance de ces conversions de modes diffère d'un mode à l'autre ; elles sont notamment plus fortes pour les modes de flexions F(1,1) et F(-1,1).

4. Bilan d'un calcul complet

Tous les développements réalisés pour traiter notre cas d'intérêt ont été effectués dans l'optique d'être intégrés, à termes, dans le module ondes guidées de la plate-forme CIVA. Cette plate-forme étant destinée à la simulation intensive d'opérations de CND, les modèles proposés se devaient de répondre à deux objectifs : d'un côté, être compatibles avec les modèles existants et de l'autre, être optimaux en termes de coûts de calcul (temps et ressources). De ce fait, le choix des approches de modélisation a été fait de manière à répondre à ces deux impératifs. Ainsi, pour la propagation, l'extension du modèle SAFE 2D aux cas des guides coudés a servi à restreindre l'utilisation des éléments finis à la seule section du guide tout en permettant de prendre en compte toute sorte de géométries de section. Concernant la diffraction aux jonctions, le formalisme de raccordement modal, en plus d'être générique, est basé sur de simples projections de champs électrodynamiques facilement calculables, ce qui se traduit par un coût numérique moindre. Enfin, la méthode de mise en série des matrices de diffraction est exploitable de manière itérative pour un coût numérique négligeable par rapport à celui des calculs des bases modales par la méthode SAFE. Ainsi, dans le cas du contrôle d'une ligne de canalisations comportant un coude, le nombre de calculs est minimisé. Afin d'illustrer cela on considère la configuration présentée par la figure qui suit :

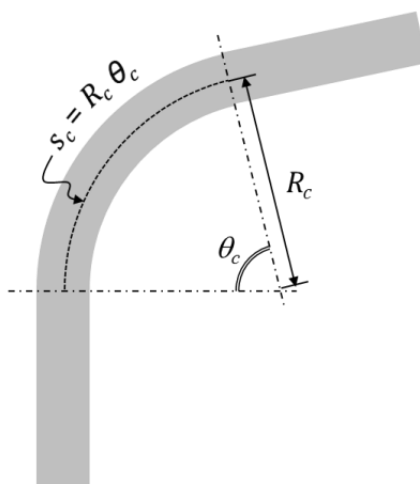


Figure III-14: Exemple de configuration de simulation pour une ligne de canalisations comportant un coude joint à deux guides droits et ayant une ouverture angulaire θ_c variable

On suppose que l'ouverture angulaire du coude θ_c est un paramètre variable dont on veut étudier l'influence et que la courbure est constante. Pour construire la matrice de diffraction globale associée au coude complet, le calcul se fait dans l'ordre suivant :

- Calcul des bases modales : à fréquence fixe, le calcul des modes guidés est réalisé dans la section du guide avec la méthode SAFE en coordonnées curvilignes pour la partie droite (courbure nulle) et la partie coudée, sur une même discrétisation 2D de la section. Le calcul est réitéré sur la plage fréquentielle souhaitée. Par ailleurs, le calcul SAFE n'étant dépendant que de la courbure, la base modale obtenue pour le coude est identique quelle que soit l'ouverture angulaire de celui-ci.
- Matrices de diffractions locales : À partir des deux bases modales obtenues précédemment, le raccordement modal permet de construire les matrices de diffraction dans les deux cas de propagation possibles : émission depuis le coude ou émission depuis une des parties droite. Le calcul fait intervenir de simples projections de champs élastodynamiques effectuées par le biais de produits matriciels avec, éventuellement, des inversions de matrices carrées de tailles équivalentes aux nombres de modes des bases modales retenus pour le calcul après

troncature. De plus, cette matrice de diffraction est la même, à une permutation des sous matrices de réflexions et de transmissions près, pour les deux jonctions du coude avec les guides droits.

- Matrice de diffraction globale : À partir des matrices de diffraction locales, le calcul de la matrice de diffraction du coude complet met en œuvre les matrices de diffraction locales combinées à une matrice de propagation qui tient compte de l'ouverture angulaire. Ce calcul est réalisé grâce à des produits matriciels simples ne nécessitant que quelques inversions de matrices carrées de tailles réduites. Si l'on veut étudier l'effet de l'ouverture angulaire du coude, une simple boucle sur cet angle intervenant dans la matrice de propagation dans le coude suffit à obtenir l'ensemble des matrices de diffraction globales sans avoir à recalculer, ni les bases modales associées à chaque guide, ni les matrices locales de diffraction aux jonctions.

À chacune des étapes décrites ci-dessus, le coût des calculs est donc réduit à son minimum alors que l'ensemble offre la possibilité de réaliser, par simples post-traitements des résultats de calcul modal, des études par simulation aidant dans le choix des paramètres de contrôle du ou des coudes de la ligne de canalisations.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la diffraction des ondes élastiques à travers la jonction entre deux guides différents et plus généralement aux phénomènes de diffraction apparaissant aux niveaux des jonctions entre des guides droits et coudés.

Dans un premier temps, nous avons mis au point un modèle de raccordement modal qui permet de construire une matrice de diffraction locale associée à la jonction. Ce modèle repose sur l'hypothèse de continuité à la jonction entre les deux guides et de la décomposition modale des champs. Cette matrice de diffraction sert à prédire les amplitudes des modes composant les champs élastodynamiques réfléchis et transmis. Grâce à ce premier développement, il nous a été possible de rendre compte de la diffraction qui se produit à la première jonction entre un guide droit et un coude.

Ensuite, à partir d'une méthode de mise en série des matrices de diffraction successives, nous avons pu simuler l'ensemble des phénomènes de diffraction se produisant dans un ensemble de guides comportant localement plusieurs éléments diffractants. Cette méthode a consisté à combiner les matrices de diffraction locales et les matrices de propagation entre deux diffracteurs successifs. Elle permet finalement d'obtenir une unique matrice de diffraction globale et, par conséquent, nous permet de prédire les champs réfléchis et transmis créés par la diffraction des champs incidents.

Enfin, des exemples d'application des modèles de raccordement modal et de mise en série des matrices de diffraction ont été présentés afin d'illustrer les possibilités qu'offre notre approche de modélisation. Ces exemples ont porté sur les cas de propagation dans des lignes de canalisations comportant un coude joint à des guides droits, avec ou sans la présence d'une extrémité libre de tube. Ils nous ont servi à mettre en exergue l'influence de certains paramètres (courbure, fréquence) sur la diffraction des ondes guidées aux jonctions entre un guide droit et un guide coudé.

Le prochain chapitre va consister à valider les différents modèles à l'aide de comparaisons avec des résultats expérimentaux. Nous mènerons ensuite des études paramétriques afin de mieux comprendre les phénomènes de diffraction liés aux contrôles des réseaux de canalisations comportant une ou plusieurs parties coudées.

CHAPITRE 4. VALIDATIONS NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DU MODELE COMPLET DE LA PROPAGATION DES ONDES GUIDEES DANS DES LIGNES DE CANALISATIONS COMPORTANT DES COUDES

1. Introduction.....	108
2. Synthèse temporelle.....	108
3. Validation numérique du modèle	109
3.1. Comparaison avec les travaux de A. Demma [118] [78] dans le domaine fréquentiel	109
3.2. Comparaison avec les travaux de Sanderson <i>et al.</i> [119] dans le domaine temporel	117
4. Campagne de validation expérimentale effectuée au CETIM.....	120
4.1. Description du dispositif expérimental	120
4.2. Vérification et analyse expérimentales des phénomènes de diffraction associés aux coudes.....	123
4.3. Comparaison simulation/expérience en temporel des échos de diffraction du coude	129
5. Étude paramétrique sur une ligne de canalisations comportant un coude	131
5.1. Cartographies de transmission pour différents rayons de courbures.....	131
5.2. Cartographies de transmission à rapport k constant	132
6. Conclusion	133

1. Introduction

Dans les chapitres 2 et 3, les développements réalisés ont consisté à étendre le modèle SAFE pour prendre en compte l'effet de la courbure sur la propagation des ondes guidées ainsi qu'à mettre en place un modèle de raccordement modal pour prédire la diffraction des champs électrodynamiques à la jonction entre deux guides différents de courbures différentes. Enfin, une méthode de mise en série des matrices de diffraction locales a permis de calculer une seule et unique matrice de diffraction afin de décrire les champs transmis et réfléchis d'un ensemble de guides partageant plusieurs jonctions différentes.

Ce chapitre 4 est dédié aux validations numériques et expérimentales des différents modèles développés précédemment. Ces validations portent sur le modèle complet, c'est-à-dire le modèle SAFE en coordonnées curvilignes et cartésiennes pour la propagation des ondes élastiques, sur le raccordement modal pour la diffraction à une jonction et enfin sur la mise en série de matrices locales de diffraction. Dans un premier temps, le travail a consisté à faire des calculs numériques sur des configurations de canalisations coudées. Les résultats obtenus par ces simulations ont été comparés à des résultats issus d'articles de la littérature, les résultats numériques reposant sur des approches différentes de calcul. Dans un second temps, en collaboration avec le CETIM, une étude expérimentale a été réalisée sur des maquettes de canalisations industrielles comportant des parties coudées. L'objectif était d'étudier les phénomènes liés à la diffraction des ondes élastiques guidées aux jonctions entre des tubes droits et coudés et de comparer les signaux temporels expérimentaux avec ceux obtenus grâce à notre modèle semi-analytique après synthèse temporelle des résultats de simulation fréquentielle.

Enfin, des études paramétriques portant sur l'influence de différents paramètres du coude ou de la configuration de contrôle sont présentées, dans le but de quantifier leur impact sur la transmission à travers des coudes de dimensions industrielles.

2. Synthèse temporelle

Les différents systèmes de génération d'ondes guidées destinés au contrôle non destructif de canalisations permettent d'obtenir un signal temporel (Ascan) contenant l'ensemble des échos enregistrés en réception. Un exemple typique de ces signaux d'acquisition est montré sur la figure suivante :

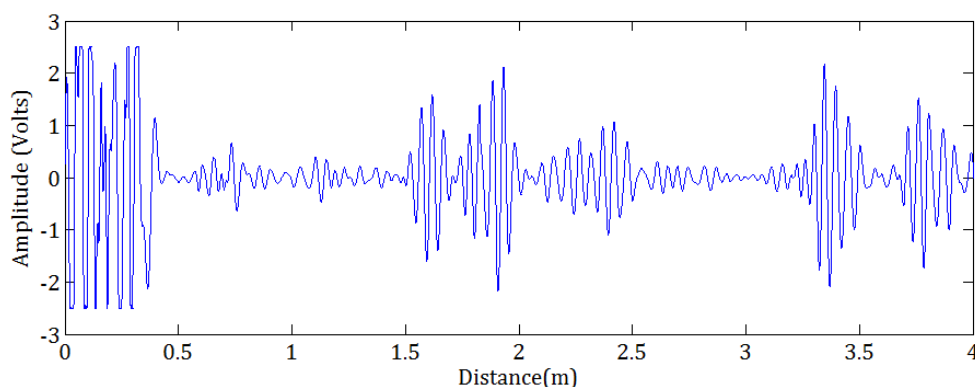


Figure IV-1: Exemple d'un signal Ascan obtenu lors d'un contrôle de canalisation avec le système magnétostrictif (MsS) [11] à la fréquence de 64kHz

Dans notre cas, le modèle numérique mis en œuvre est basé sur une approche modale donc, fréquentielle, harmonique en temps ; il est donc nécessaire de passer par une synthèse temporelle des calculs fréquentiels pour obtenir un Ascan comparable aux acquisitions expérimentales. Ainsi, nous avons intégré dans notre modèle le procédé de synthèse temporelle présent dans le module ondes guidées de la plate-forme de simulation CIVA [2].

3. Validation numérique du modèle

Cette section est consacrée aux comparaisons que nous avons réalisées entre des calculs effectués grâce à notre modèle et les résultats numériques et expérimentaux issus de la littérature et traitant de la problématique de propagation et de diffraction des ondes guidées dans des canalisations coudées. Il existe quelques travaux pour lesquels les auteurs se sont intéressés au comportement des ondes guidées se propageant dans des structures toroïdales en général ou dans des tubes coudés en particulier [77] [113] [114] [115] [116] [117]. Pour ces validations, le choix des articles a été dicté par plusieurs critères : l'existence de résultats qui soient à la fois expérimentaux et simulés, les types de méthodes de modélisation utilisées, le choix des modes guidés étudiés. De ce fait, nos comparaisons ont été réalisées avec les travaux de Demma [118] [78] en fréquentiel et avec ceux de Sanderson [119] sur des signaux de transmission en temporel.

Pour améliorer la lisibilité des résultats de ce chapitre, on utilisera les notations suivantes dont on donne la signification ici :

Transmission mode 1-mode 2 : la transmission du mode1 incident dans le mode 2 uniquement. À titre d'exemple, on notera respectivement « transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ » la transmission du mode incident $T(0,1)$ vers lui-même et « transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ » la transmission du mode incident $L(0,2)$ vers lui-même. Nous adopterons le même principe pour la réflexion (réflexion mode1-mode2)

k : ce paramètre correspond au rapport entre le rayon de courbure R_c du coude et le diamètre extérieur du tube OD.

3.1. Comparaison avec les travaux de A. Demma [118] [78] dans le domaine fréquentiel

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux travaux menés par Demma dans sa thèse [118] et dans son article [78]. Pour ces deux références, les résultats ont porté sur l'étude de la transmission des ondes guidées à travers un coude.

En premier lieu, Demma a mené une étude numérique de la transmission de différents modes guidés à travers un coude. Les modes étudiés sont le premier mode de torsion $T(0,1)$ et le second mode de compression $L(0,2)$. Ces simulations ont été faites à l'aide des éléments finis à trois dimensions (3D). Ensuite, des essais ont été menés sur des maquettes industrielles pour confronter ces résultats à ceux obtenus par simulation numérique.

3.1.1. Transmission du mode $T(0,1)$ à travers un coude de 90°

Le premier cas d'étude a porté sur le calcul du coefficient de transmission à travers un coude complet pour un mode incident $T(0,1)$ depuis la partie droite du guide. Le coude, d'ouverture angulaire de 90° , fait partie d'une canalisation constituée de tubes en acier 2" (diamètre externe de $60,3mm$) et d'épaisseur $5,5mm$. Le rayon de courbure est égal à $363mm$ (courbure $\gamma = 0,00275mm^{-1}$).

Démarche de modélisation éléments finis [118] [78] utilisée pour le calcul des coefficients de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$

La simulation par éléments finis a consisté à générer le mode $T(0,1)$ depuis la partie droite du guide d'onde et à récupérer le signal transmis à travers le coude à la sortie de celui-ci. La configuration mise en œuvre dans ce calcul s'apparente à un contrôle en Pitch/Catch (cf. Chapitre I) du coude comme le montre la figure suivante :

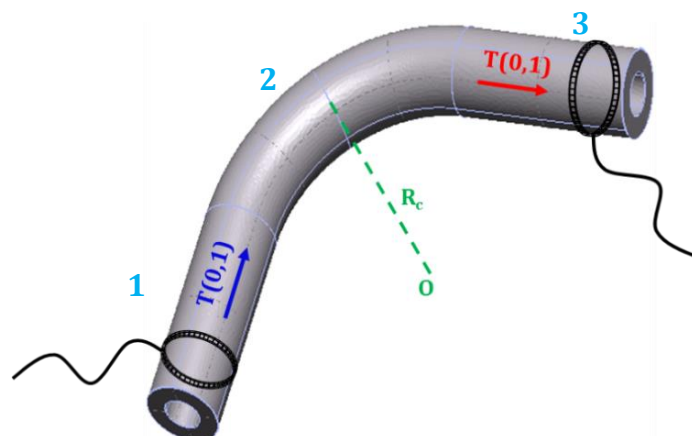


Figure IV-2: Configuration utilisée en référence [118] [78] pour la simulation par éléments finis de la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à travers un coude de 90° avec $\gamma = 0,00275\text{mm}^{-1}$ sur des tubes 2'' d'épaisseur 5,5mm

Le coefficient de transmission est déterminé sur une plage fréquentielle variant de 40 à 75kHz avec un pas de calcul de 5kHz. La simulation est faite dans le domaine temporel avec un signal d'excitation composé de six cycles fenêtré par une Gaussienne et centré autour de la fréquence de calcul. La Figure IV-3 donne un exemple de signal d'excitation pour une fréquence centrale de 65kHz :

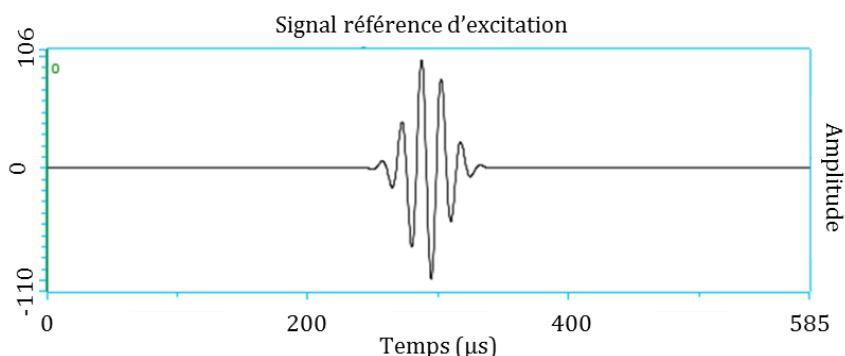


Figure IV-3 : Représentation CIVA du signal d'excitation (6 cycles fenêtré par une Gaussienne et centré sur la fréquence de 65kHz) utilisé par Demma pour la simulation de la transmission à travers des tubes coudés

La méthode employée pour le calcul du coefficient de transmission à travers le coude consiste à faire le rapport entre les valeurs crête à crête des signaux incident et transmis. L'émission étant réalisée exclusivement dans le premier mode de torsion, la réception se concentre uniquement sur ce dernier et ne prend donc pas en compte les flexions créées par conversion de modes aux jonctions du coude.

Mesures expérimentales [118] [78] des coefficients de transmission à travers le coude

Pour effectuer la mesure expérimentale des coefficients de transmission, Demma a utilisé le système de génération d'ondes guidées "Wavemaker" de Guided Ultrasonics Ltd (GUL) [47]. Ce système est composé de transducteurs piézoélectriques qui permettent de générer les modes $T(0,1)$ et $L(0,2)$ dans le tube droit. Un procédé d'interférences constructives ou destructives sert à déterminer la direction d'émission du champ. Le couplage entre ces transducteurs et le tube est réalisé mécaniquement grâce à un système de compression hydraulique. La génération du champ monochromatique $T(0,1)$ s'effectue depuis le guide 1 de la Figure IV-2.

La mesure de l'amplitude du déplacement à la sortie du coude est faite à l'aide d'un interféromètre laser différentiel placé à 55cm de la sortie du coude. Pour chaque fréquence, dix mesures d'amplitude ont été réalisées. La valeur la plus faible, crête-à-crête, du signal transmis nous donne le coefficient de transmission le plus faible et la valeur la plus élevée correspond au coefficient de transmission le plus grand. Ces deux valeurs définissent le domaine d'incertitude du coefficient de transmission.

Le coude de la maquette a été obtenu par cintrage mécanique à froid du tube droit 2". Comme expliqué en [118], le procédé de cintrage mécanique engendre une variation de l'épaisseur du tube entre l'intrados et l'extrados du coude. Dans le cas du tube 2" d'épaisseur 5,5mm, la valeur d'épaisseur la plus faible (Extrados) est de 5,2mm et la plus élevée est égale à 5,82mm (Intrados). Dans le modèle numérique, cette variation d'épaisseur n'est pas prise en compte.

Méthode de calcul des coefficients de transmission en amplitude T(0,1)-T(0,1) à partir de notre modèle semi-analytique

Dans notre modèle, on génère le mode T(0,1), en émission, en appliquant une force tangentielle, de norme constante valant 1, sur chacun des nœuds extérieurs de la section du guide droit 1. Étant en dessous de la fréquence de coupure du mode T(0,2), seul le premier mode T(0,1) sera créé. De fait, le champ élastodynamique incident sera un champ monochromatique :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\text{inc}} \\ \mathbf{Y}_{\text{inc}} \end{pmatrix} = a_{T(0,1)} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{T(0,1)+} \\ \mathbf{Y}_{T(0,1)+} \end{pmatrix} e^{-i\beta_{T(0,1)+}z} \quad (\text{IV.1})$$

Pour rappel, $a_{T(0,1)}$ représente l'amplitude du mode de torsion T(0,1) incident, $\beta_{T(0,1)+}$ son nombre d'onde, $\mathbf{X}_{T(0,1)+}$, $\mathbf{Y}_{T(0,1)+}$ ses vecteurs hybrides comportant les composantes de déplacement et de contrainte calculer dans le guide droit 1.

Comme cela a été exposé dans le chapitre précédent, ce champ incident va être diffracté par les deux jonctions du coudes et donner naissance à des champs réfléchis et transmis. À la sortie du coude et pour une émission en T(0,1), l'énergie du champ transmis va principalement se décomposer sur ce même mode de torsion et sur certains des modes de flexions F(m,n) $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ créés par conversion de modes et qui composent la bases modales des guides.

À la réception, le calcul se fait en sommant les composantes de déplacements orthoradiales sur les nœuds extérieurs de la section du guide droit d'indice 3 sur la Figure IV-2. Compte tenu des profils de déplacement des modes de flexion, cette sommation circonférentielle permet d'éliminer les contributions de ces modes. En effet, en regardant les profils du déplacement orthoradial d'un mode de flexion, on peut observer qu'à chaque nœud N, dont le déplacement est noté $\mathbf{u}(x, y, z)$, correspond un nœud N' dont le déplacement vaut $-\mathbf{u}(x, y, z)$. Finalement, les déplacements des nœuds circonférentiels des modes de flexions vont s'annuler deux à deux. La figure suivante illustre cela :

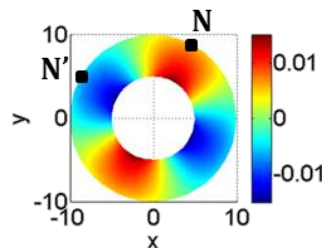


Figure IV-4 : Exemple de nœuds dont le déplacement orthoradial s'annule pour le mode F(1,2) dans un tube de diamètre 20mm et d'épaisseur 5mm à la fréquence de 100kHz

Notons ici que cette propriété est également valable pour les déplacements axial et radial du mode de flexion qui s'annulent par sommation circonférentielle.

En raison de notre approche modale, tous les calculs sont menés dans le domaine fréquentiel. Aussi, les calculs par la méthode SAFE sont effectués en boucle sur tout le spectre fréquentiel discrétisé du signal d'émission tandis que le raccordement modal et la mise en série des matrices de diffraction sont réalisés à chacune des fréquences de calcul. Le passage en temporel se fait à la sortie de la boucle du calcul en fréquence. La Figure IV-5 montre un exemple obtenu par le modèle semi-analytique complet pour le même signal d'excitation que celui des références [118] [78]. Le signal d'émission est en bleu et le signal transmis est en rouge :

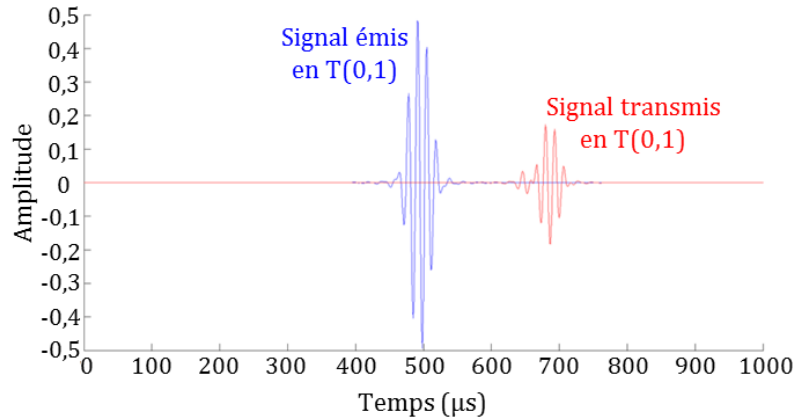


Figure IV-5: Signal temporel simulé pour la transmission (rouge) à travers un coude de 90° pour un signal d'émission (bleu) de six cycles et centré à la fréquence de 75kHz

Comparaison des coefficients la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ obtenus par notre modèle avec ceux des références [118] [78]

Pour chaque fréquence, on évalue le coefficient de transmission à travers le coude en faisant le rapport entre les amplitudes des signaux incidents et transmis mesurés crête-à-crête. Le calcul est renouvelé à chacune des fréquences centrales utilisées dans l'article [78] en prenant des signaux d'excitation centrés sur celles-ci. Les résultats présentés Figure IV-6 montrent les coefficients de transmission en amplitude normalisée pour les deux méthodes.

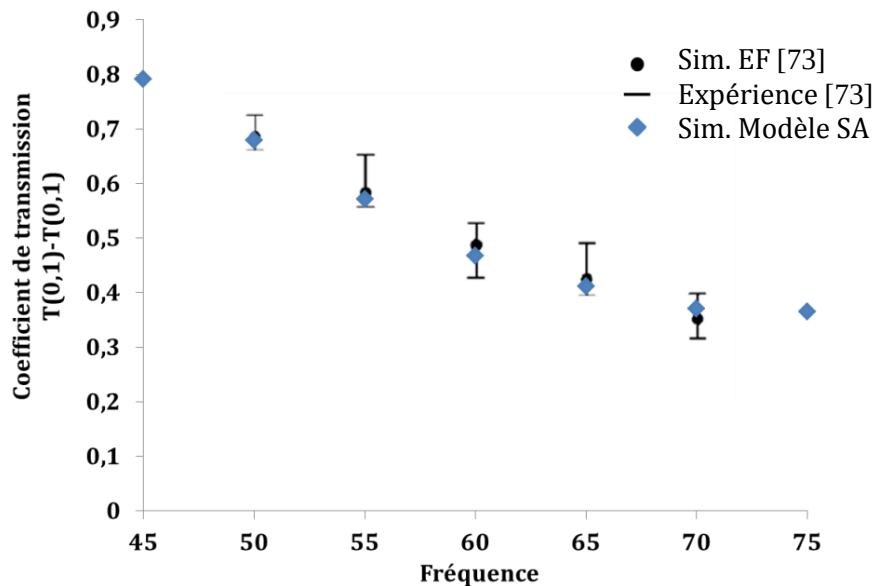


Figure IV-6: Comparaison des coefficients de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ pour un coude de 90° dans une ligne de canalisation 2'' obtenus avec notre modèle semi-analytique et ceux obtenus numériquement et expérimentalement en référence [78]

Discussion

Les comparaisons effectuées sur les coefficients de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ montrent un excellent accord entre ceux prédits par notre modèle semi-analytique et les résultats éléments finis. Aux fréquences de calcul, l'écart absolu entre les coefficients de transmission est inférieur à 1%.

Par ailleurs, l'étude expérimentale menée par Demma [118] [78] permet de vérifier la précision de ces résultats numériques. En effet, on constate qu'à toutes les fréquences, les coefficients de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ se situent systématiquement dans les intervalles de variations des coefficients de transmissions expérimentaux. De plus, cette première comparaison démontre que les variations d'épaisseur dues au cintrage mécanique n'ont pas un impact significatif sur les résultats.

Enfin, ces résultats indiquent également que la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à travers le coude diminue avec l'augmentation de la fréquence. Cependant, cette baisse ne traduit pas une diminution de l'énergie transmise. En effet, d'après résultats du chapitre III, elle est significative des phénomènes de conversions de modes (principalement en modes de flexions) plus importants aux fréquences plus élevées.

Remarque :

Notre modèle semi-analytique étant basé sur le calcul des modes par la méthode SAFE, il nous était possible d'extraire directement les coefficients de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à partir de la matrice de transmission du coude complet issue du raccordement modal et de la mise en série des matrices de diffraction. Cependant, afin d'avoir des coefficients comparables avec ceux calculés et mesurés [118] [78], nous avons choisi dans un premier temps de repasser dans le domaine temporel et d'adopter la même méthode de calcul du coefficient.

Dans l'exemple qui suit, nous présenterons des résultats obtenus directement dans le domaine fréquentiel. Ces résultats seront de nouveau comparés à ceux des articles calculés à partir de simulations éléments finis dans le domaine temporel.

3.1.2. Influence de l'angle du coude sur la transmission en amplitude du mode $L(0,2)$ en $L(0,2)$

Dans ce second cas d'étude, Demma [118] [78] s'est intéressé à la transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ à travers un coude. À la différence du cas de la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$, le travail a porté sur l'étude de l'influence de certains paramètres du coude comme l'ouverture angulaire ou la fréquence sur le coefficient de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$. L'étude a été menée uniquement par simulation en utilisant la même configuration que pour le mode $T(0,1)$ et en appliquant une excitation axiale composée de six cycles modulés par une fenêtre de Hanning et centrée autour de 65kHz pour générer le mode $L(0,2)$.

Démarche de modélisation éléments finis utilisée pour le calcul des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$

À l'instar des simulations dans le cas de la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$, celles effectuées dans [118] [78] pour le mode $L(0,2)$ ont été réalisées par éléments finis dans le domaine temporel. Le mode $L(0,2)$ est généré depuis le guide 1. La réception se limite aux échos produits par le mode $L(0,2)$, avec une séparation dans le domaine temporel de l'écho relatif au mode $L(0,2)$ de ceux associés aux modes de flexions.

Les coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ sont obtenus en faisant le rapport entre le spectre fréquentiel du signal d'émission et celui du signal de transmission correspondant à l'écho du mode $L(0,2)$. Cette méthode de calcul du coefficient de transmission

nécessite de s'assurer que les différents paquets d'ondes transmis soient temporellement dissociés pour pouvoir éliminer les éventuelles contributions des modes de flexions et ne prendre en compte que ce qui est transmis en $L(0,2)$ - $L(0,2)$.

Pour toutes les simulations, le calcul du coefficient est effectué sur la plage fréquentielle 50-80kHz. Sur cet exemple, le signal d'excitation employé en émission est centré autour de 65kHz et sa bande passante à -6dB couvre les fréquences allant de 50 à 80kHz. La Figure IV-7, issue de CIVA, permet de visualiser le spectre fréquentiel du signal d'excitation utilisé par Demma pour le calcul de la transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ sur la plage de fréquence considérée :

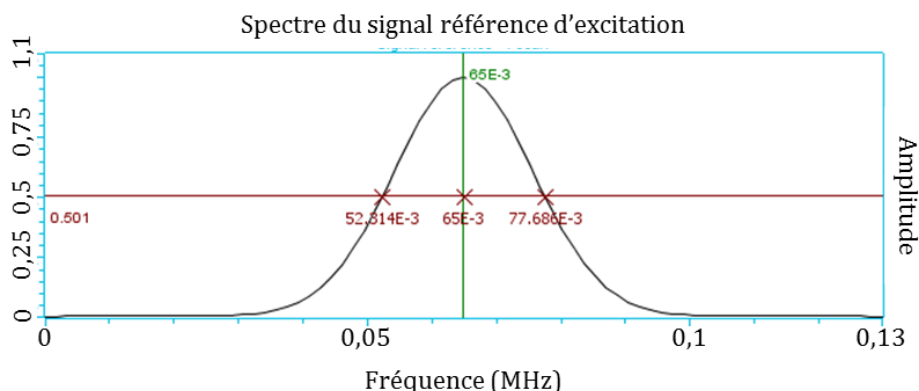


Figure IV-7 : Représentation CIVA du spectre fréquentiel du signal d'excitation (en dB) utilisé dans les références [118] [78] pour la simulation de la transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ à travers des tubes coudés

Dans les simulations qui suivent, Demma [118] [78] considère le cas d'une ligne de canalisation de tubes 2" d'épaisseur 4.5mm composée d'un coude joint à deux parties droites.

Méthode de calcul des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ avec le modèle semi-analytique

Contrairement à l'exemple précédent, les coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ à travers des coudes sont directement extraits de la matrice de diffraction du coude complet. Cette matrice globale est obtenue avec le raccordement modal et la mise en série des matrices de diffractions locales.

Dans ce cas, la simulation ne nécessite pas de signal d'excitation et permet d'obtenir la décomposition modale des champs transmis et réfléchis pour tous les modes propagatifs. Une boucle en fréquence entre 50 et 80kHz sert donc à calculer les coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ sur la plage fréquentielle adéquate.

Étude de l'effet de la valeur de l'ouverture angulaire du coude sur la transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$

Afin d'évaluer l'influence de l'angle du coude sur les coefficients de transmission, la référence [118] compare, sur la plage fréquentielle 50-80kHz, l'évolution de ces coefficients pour des coudes de 90° et 180° avec un paramètre $k=10$ correspondant à un rayon de courbure de $R_c=603mm$ dans le cas d'une canalisation 2".

Les courbes qui suivent représentent les coefficients de transmissions $L(0,2)$ - $L(0,2)$ simulés par éléments finis et ceux calculés par notre modèle en fonction de la fréquence et pour les deux angles du coude 90 et 180°:

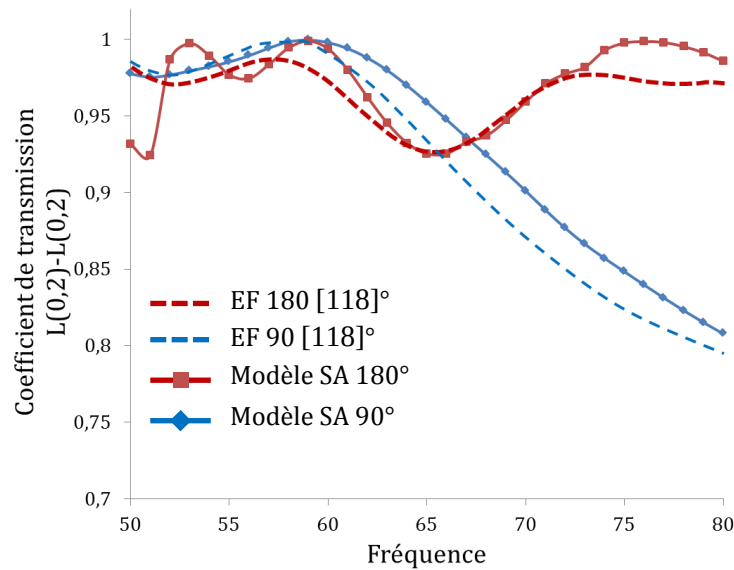


Figure IV-8: comparaison des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ dans des coudes de 90° et 180° de rayon de courbure $R_c=603\text{mm}$ calculés par éléments finis par [118] et par le modèle semi-analytique (SA)

Discussion

La comparaison des différentes courbes montre une bonne concordance entre les valeurs des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ obtenus par éléments finis et ceux calculés par notre modèle semi-analytique. L'allure générale des courbes des coefficients est semblable pour les deux méthodes de calcul. Des différences entre les courbes apparaissent cependant, mais sont exagérées par un effet d'échelle (axe des ordonnées compris entre 0,7 et 1). De fait, on relève des écarts absolus inférieurs à 2% pour le coude de 180° et inférieur à 1% pour le coude de 90° , à l'exception de certaines fréquences. C'est le cas notamment du coefficient de transmission à 52kHz pour le coude à 180° : le coefficient de transmission est plus élevé de 5% en EF par rapport à au modèle semi-analytique. Deux raisons principales sont à l'origine de cet écart : à cette fréquence, nous constatons l'apparition d'un mode de flexion qui entraîne la conversion d'une partie de l'énergie du mode $L(0,2)$ incident et la diminution de la transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$. Cet écart s'explique également par notre méthode de calcul qui consiste à extraire directement les coefficients des matrices de diffractions globales.

Il est important de noter que ces courbes permettent de mieux comprendre l'influence de l'ouverture angulaire du coude sur la transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$. Ainsi pour le coude de 90° , le coefficient de transmission en amplitude atteint un maximum à 62kHz avec une transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ quasi-totale. Au-delà de cette fréquence et jusqu'à 80kHz, le coefficient décroît de 20% pour atteindre 0,8. Pour un coude de 180° , l'évolution de la transmission est très différente : celle-ci est minimale à 65kHz et, contrairement au coude de 90° , augmente entre cette fréquence et 80kHz. Sur la plage fréquentielle de calcul, le coefficient de transmission du coude 180° est constamment supérieur à 0,9 à l'inverse du coude de 90° .

Ce type de résultats n'est pas trivial et ne peut certainement pas être trouvé intuitivement ; il illustre la complexité des phénomènes de diffraction qui entrent en jeu. L'évolution de ces coefficients de transmission est difficilement prédictible sans recourir à la simulation.

Il est à noter que, puisque dans ces exemples la courbure est constante, les résultats de nos calculs présentés pour les différentes ouvertures du coude ont été obtenus par simple post-traitements des résultats du calcul SAFE et du raccordement modal.

3.1.3. Influence de la courbure sur la transmission du mode L(0,2) en L(0,2)

Ce dernier cas est dédié à l'étude de l'influence de la courbure du coude sur la transmission en amplitude L(0,2)-L(0,2). Les calculs par éléments finis [118] [78] reprennent la configuration de simulation précédente en fixant l'angle du coude à 90° et en faisant varier le ratio k en changeant la valeur de la courbure.

Comme précédemment, nous avons comparé les résultats simulés par notre modèle semi-analytique à ceux obtenus par Demma par calculs éléments finis, pour différentes valeurs de courbures de coudes en prenant comme mode incident le mode L(0,2). Les figures qui suivent présentent les résultats obtenus pour les ratios k=5,2 et k=10 puis pour k=3,3 et k=25 :

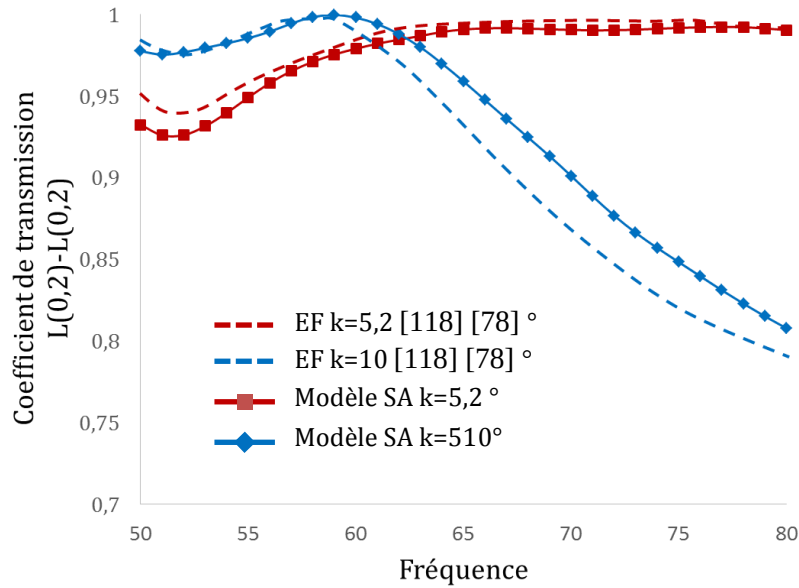


Figure IV-9 : comparaison des coefficients de transmission en amplitude L(0,2)-L(0,2) dans des coudes de ratios k=5,2 et k=10 et d'angle 90° calculés par éléments finis [118] [78] et par le modèle semi-analytique (SA)

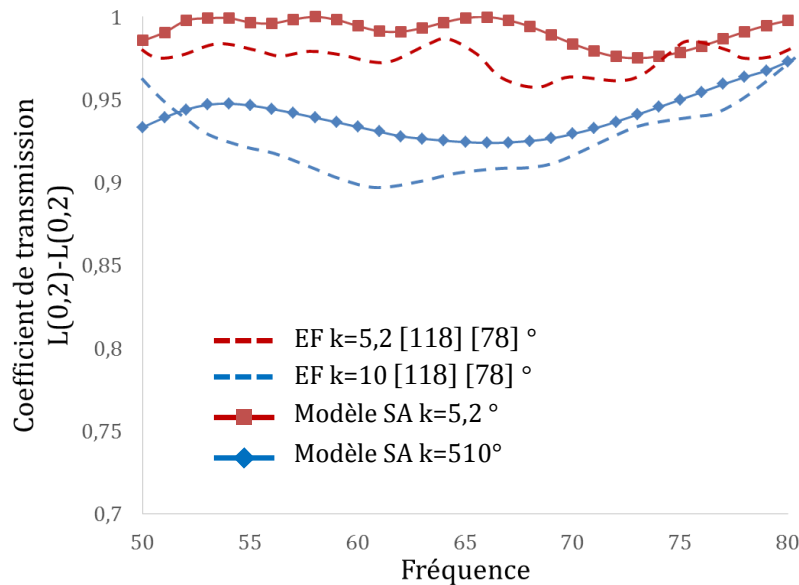


Figure IV-10 : comparaison des coefficients de transmission en amplitude L(0,2)-L(0,2) dans des coudes de ratios k=3,3 et k=25 et d'angle 90° calculés par éléments finis par Demma et par le modèle semi-analytique (SA)

Discussion

Dans le cas des ratios $k=5,2$ et $k=10$, on obtient de nouveau une très bonne concordance entre les résultats EF et ceux obtenus par le modèle semi-analytique. L'évolution des coefficients de transmission en amplitude $L(0,2)$ - $L(0,2)$ est bien prédite avec un écart absolu inférieur à 2%. Par ailleurs, la transmission est globalement plus élevée pour $k=5,2$ par rapport à $k=10$ malgré le fait que le ratio 5,2 corresponde à une courbure plus forte du coude.

Dans le cas des ratios $k=3,3$ et $k=25$, les valeurs des coefficients de transmissions calculés par notre modèle sont assez similaires à celles obtenues par EF. L'écart absolu reste inférieur à 2,5%. Cependant, on remarque des différences dans l'allure des courbes tracées en fonction de la fréquence. Ces écarts entre les deux modèles peuvent être dus à plusieurs raisons : il peut s'agir de la précision de calcul des modes, de la méthode de calculs des coefficients qui est différente ou encore de la prise en compte des modes évanescents et inhomogènes dans le raccordement modal...

Enfin, l'exemple du ratio $k=25$ correspond à un coude à très faible courbure tendant vers le cas du guide droit. Ainsi, la transmission à travers ce coude du mode $L(0,2)$ est comprise entre 0,98 et 1 correspondant à une transmission quasi-totale et sans conversion de modes sur l'ensemble des fréquences de calcul.

Ces premières comparaisons avec les résultats des références [118] [78] permettent de s'assurer de la validité de notre modèle. Bien que cette étude ait donné l'occasion de nous intéresser à l'influence de différents paramètres sur la transmission à travers un coude, ces premières validations n'ont porté que sur les coefficients de transmission des modes $L(0,2)$ et $T(0,1)$ sur eux-mêmes. C'est pourquoi, nous nous intéresserons dans la suite aux phénomènes de conversions de modes et nous nous appliquerons à comparer directement les signaux temporels simulés à ceux issus d'acquisitions expérimentales

3.2. Comparaison avec les travaux de Sanderson *et al.* [119] dans le domaine temporel

Pour leur part, Sanderson *et al.* [119] se sont intéressés au comportement d'un mode $T(0,1)$ utilisé pour le contrôle d'une canalisation comportant un coude. Leurs travaux ont consisté à faire des comparaisons entre simulations et expériences, en temporel, des formes d'ondes de la transmission à travers un coude de 90° de rayon de courbure $R_c = 229\text{mm}$ sur une ligne de canalisation en acier de 3" (OD= 88,9mm et Épaisseur= 5,49mm). Expérimentalement, le contrôle est réalisé en configuration Pitch/Catch (Figure IV-11) avec l'émetteur et le récepteur positionnés respectivement d'un côté et de l'autre du coude. La partie modélisation du contrôle a, quant à elle, été effectuée par éléments finis.

Contrairement au précédent cas de validation, ce second exemple a pour objectif principal de s'assurer du bon fonctionnement de la synthèse temporelle qui sera exploitée par la suite pour des comparaisons avec des résultats d'essais expérimentaux réalisés au CETIM sur des maquettes industrielles.

Le signal d'excitation employé est un signal de 10 cycles sinusoïdaux fenêtré par une modulation d'amplitude (de Hanning) et dont la fréquence centrale est de 25kHz. En réception, la mesure expérimentale est faite sur les quatre points (Figure IV-11) situés aux angles respectifs de 0, 90, 180 et -90° et porte sur la composante orthoradiale du déplacement.

Pour notre simulation, nous avons adapté la configuration utilisée précédemment concernant la transmission du mode $T(0,1)$ au cas présent. L'émission s'effectue de manière similaire tandis que la réception consiste en une mesure ponctuelle du déplacement à la position notée 90° sur le schéma afin de s'assurer de détecter toutes les contributions des modes de flexions. La méthode

de détection de la transmission employée dans la référence [119] repose quant à elle sur la sommation des signaux mesurés en quatre points situés sur la circonférence du tube.

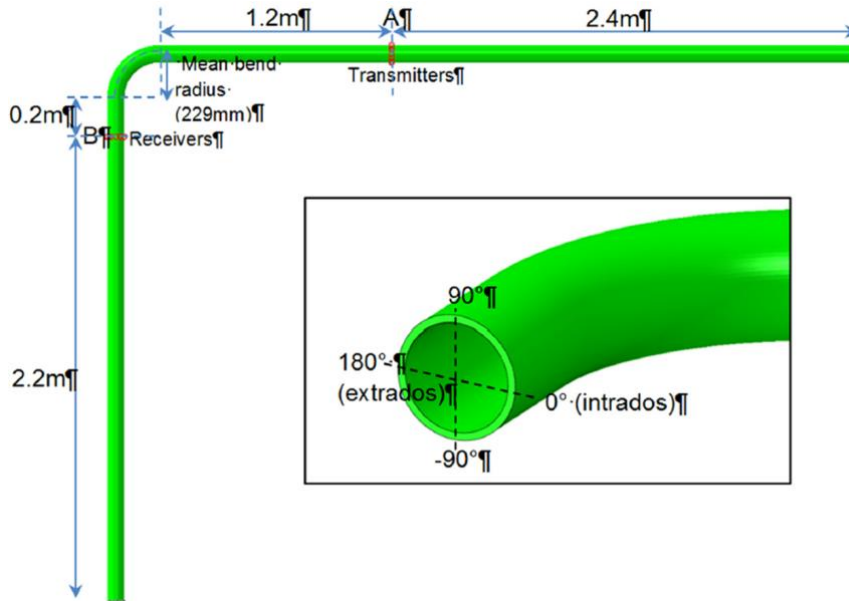


Figure IV-11: Schéma de la configuration choisie pour l'étude expérimentale et numérique du contrôle d'une canalisation 3'' coudée par le mode $T(0,1)$ d'après [119]

Nous comparons ici directement les formes d'ondes de la transmission à travers le coude d'un champ incident monochromatique $T(0,1)$. Les Figure IV-12 et Figure IV-13 présentent les signaux de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ sans et avec conversions de modes respectivement obtenus par éléments finis et par le biais de notre modèle semi-analytique :

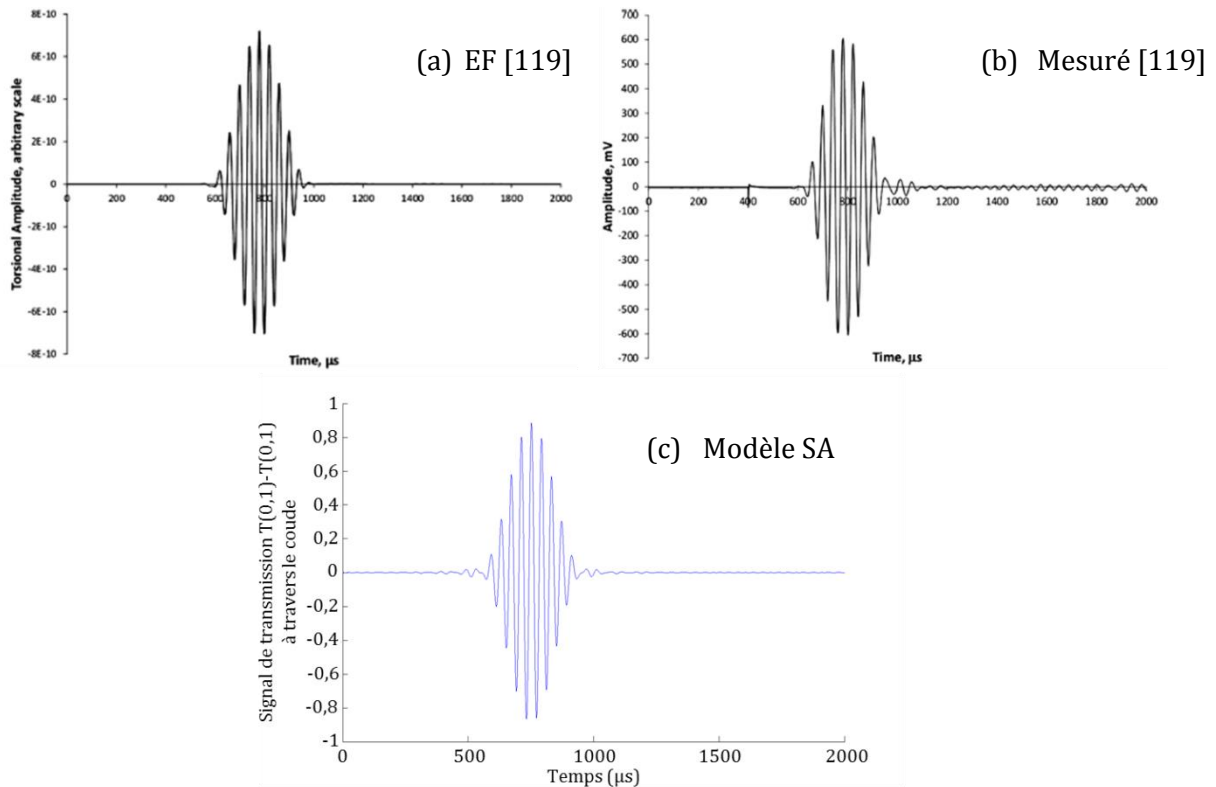


Figure IV-12: Forme d'onde de la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$: résultat par EF [119] (a), mesuré [119] (b) et simulé par notre modèle semi-analytique (c)

Après analyse des résultats, on observe sur la Figure IV-12 montre une bonne concordance des formes d'ondes de la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ entre la simulation par éléments finis et celle réalisée avec notre modèle semi-analytique. Le temps de vol de l'écho de transmission donné par rapport à l'émission effectuée à $t=0$ est identique sur les trois Ascan représentés. Il correspond bien au temps de vol d'un mode guidé non-dispersif (pas d'étalement dans le temps du signal) se propageant à $3,24\text{mm}.\mu\text{s}^{-1}$, en l'occurrence ici, le mode $T(0,1)$.

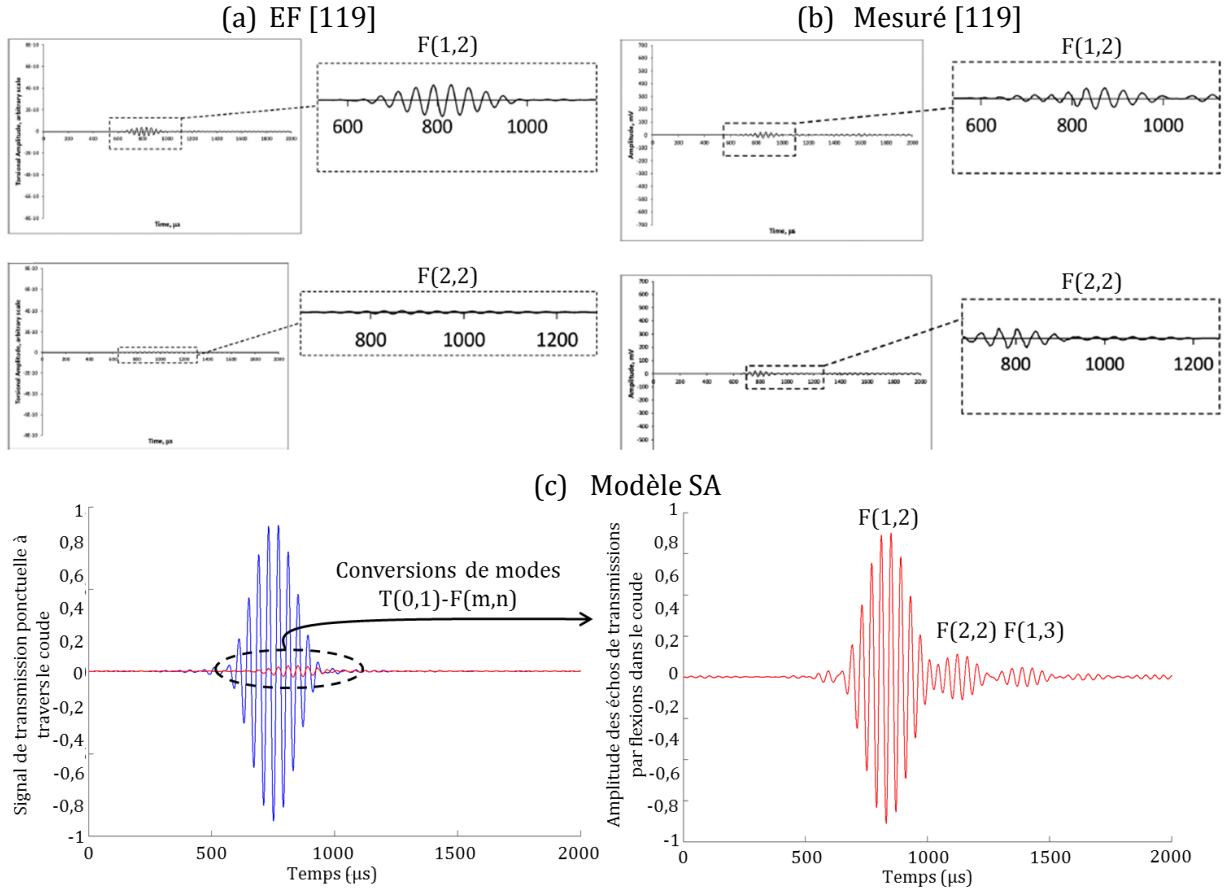


Figure IV-13: Forme d'onde de la transmission avec conversions de modes $T(0,1)$ - $F(m,n)$: résultat simulé par éléments finis [119] (a), mesuré [119] (b), signal simulé par notre modèle semi-analytique (c)

Lorsque l'on analyse la Figure IV-13 (a) cas simulé par éléments finis et (b) mesure expérimentale, on constate l'apparition de deux modes de flexions $F(1,2)$ et $F(2,2)$. Grâce à notre modèle, on retrouve des résultats similaires sur Figure IV-13 (c). De plus, la visualisation des contributions des flexions est simple du fait du caractère modal de notre approche de modélisation. Toutefois, on peut remarquer qu'en plus des échos relatifs à ces deux modes de flexion, un troisième écho apparaît dans notre cas, d'amplitude très faible, et provenant d'une troisième conversion $T(0,1)$ - $F(1,3)$. Cet écho n'apparaît pas dans [119] car la méthode de mesure par sommation des signaux en différents points utilisée par l'auteur annule les contributions de certains modes de flexions.

Finalement, compte-tenu de la configuration employée et notamment de la valeur de la fréquence de contrôle relativement basse, le nombre de modes pouvant se propager dans la structure inspectée reste limité : six modes de flexions, un mode de torsion $T(0,1)$ et deux modes de compressions $L(0,1)$ et $L(0,2)$ à la fréquence centrale 25kHz . Ainsi, le nombre d'échos d'une part et l'importance des phénomènes de conversions de modes d'autre part demeurent faibles.

Notre modèle étant validé à la fois dans le domaine fréquentiel et temporel, il s'agit dorénavant de le confronter à des résultats expérimentaux réalisés sur des canalisations industrielles.

4. Campagne de validation expérimentale effectuée au CETIM

Cette partie est consacrée à la campagne d'essais expérimentaux réalisée au CETIM. Cette dernière a été menée sur des maquettes de canalisations industrielles comportant des coudes de différentes caractéristiques. L'objectif était double : d'une part, étudier les conversions de modes créées par les jonctions du coude et d'autre part, comparer, en réflexion, les signaux mesurés expérimentalement et ceux simulés par notre modèle.

4.1. Description du dispositif expérimental

4.1.1. Tubes coudés

Pour cette étude expérimentale, nous avons utilisé des canalisations composées de deux parties droites reliées par un coude. Les coudes ont été d'abord obtenus par cintrage mécanique à froid de tube droit, puis soudés à des tubes droits. Dans notre cas, nous disposons de quatre coudes différents : deux lignes de tubes en acier 6" avec des coudes de 30° et 70° et deux lignes de tubes en acier 10" avec des coudes de 30° et 70°. Les photos Figure IV-14 et Figure IV-15 montrent les parties coudées des différentes maquettes expérimentales étudiées :



Figure IV-14 : Canalisations 6" comportant des coudes de 30° (droite) et de 70° (gauche) dont les bourrelets de soudures ont été arasés



Figure IV-15 : Canalisations 10" comportant des coudes de 30° (droite) et de 70° (gauche) dont les bourrelets de soudures ont été arasés

Afin de s'affranchir des contributions des soudures dans la diffraction des ondes guidées, les bourrelets de soudures internes et externes ont été arasés au préalable.

Les tubes en acier ($\rho = 7,92g.cm^{-3}$, $E = 210GPa$, $\nu = 0,31$) ont une épaisseur nominale respectivement de 7,1mm pour les tubes 6" et de 6,35mm pour les 10". Des mesures d'épaisseurs (Tableau IV-1) en différents points de la circonférence (Figure IV-16) ont été réalisées pour quantifier l'effet du cintrage mécanique.

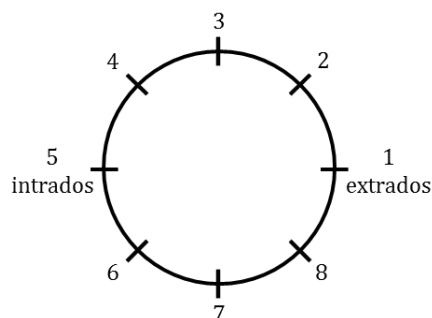


Figure IV-16 : points de mesure de l'épaisseur du tube

Tableau IV-1: Mesure de l'épaisseur (en mm) de la partie coudée en différents points de la circonférence

	1	2	3	4	5	6	7	8
10'' 30°	6,08	6,12	6,24	6,33	6,65	6,43	6,26	6,11
10'' 70°	6,05	6,19	6,26	6,38	6,58	6,37	6,26	6,15
6'' 30°	6,92	7,01	7,13	7,24	7,35	7,19	7,15	7,07
6'' 70°	7,24	7,29	7,35	7,46	7,53	7,41	7,38	7,34

Comme cela avait déjà été observé par Demma [118], le cintrage mécanique induit des variations d'épaisseurs du tube. De plus, les tubes droits étant d'épaisseur plus régulière, la jonction entre ces tubes et les coudes n'est pas parfaite. Enfin, le procédé de cintrage mécanique crée des vaguelettes qui déforment les surfaces interne et externe du tube. Les écarts relevés dans notre cas entre les valeurs minimale et maximale de l'épaisseur varient entre 4 et 9% de l'épaisseur nominale du tube [120].

Les rayons de courbures des différents coudes sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau IV-2: Valeurs des rayons de courbure des coudes des différentes maquettes expérimentales

Dimension du coude	Rayon de courbure
10'' 30°	324mm
10'' 70°	385mm
6'' 30°	248mm
6'' 70°	209mm

Un exemple des différentes longueurs caractéristiques des lignes de canalisations utilisées est présenté sur la Figure IV-17 :

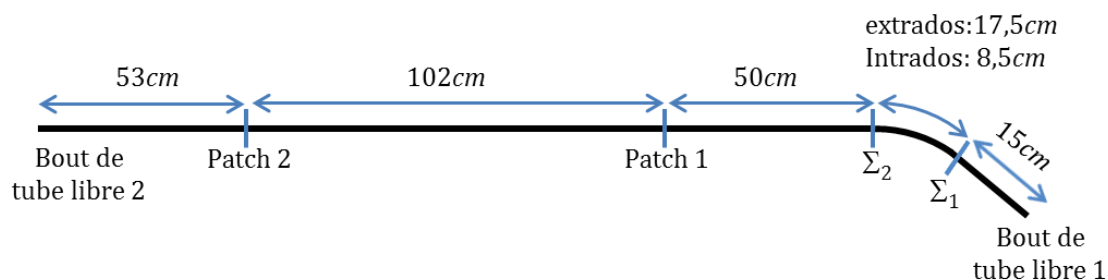


Figure IV-17: longueurs caractéristiques de la ligne 6'' d'épaisseur nominale 7,1mm et comportant un coude de 30° de rayon de courbure 248mm

Les notations Patch 1 et 2 indiquent la position des patches magnétostrictifs utilisés pour la génération et la réception de ondes guidées lors de ces essais. Les longueurs notées extradados et intrados font référence aux distances respectivement la plus longue et la plus courte séparant les deux jonctions du coude. Enfin, Σ_1 et Σ_2 correspondent aux jonctions avec soudures arasées.

4.1.2. Montage expérimental pour le contrôle

Pour nos essais en réflexion, nous avons exploité un signal à deux cycles temporels donc à large spectre fréquentiel : par exemple, le signal d'excitation centré sur 64kHz couvre la plage fréquentielle allant de 40kHz à 80kHz à moins 6dB en T(0,1). La génération de ce mode est faite en utilisant le système magnétostrictif (MsS) [11] en configuration Pulse/Echo.

En réception, nous avons mis en œuvre deux méthodes de mesure différentes. D'abord en configuration Pulse/Echo, avec la réception par le même patch magnétostrictif que celui choisi pour générer le mode de torsion. Cette méthode permet de récupérer des signaux ultrasonores similaires à ceux enregistrés lors d'un contrôle classique. Ensuite, en configuration Pitch/Catch, nous avons exploité un capteur piézoélectrique (Pzt) (Figure IV-18) « ponctuel » de 12x8mm avec une zone active de 2x12mm issu du système Teletest [46] pour effectuer une mesure localisée du déplacement. Ce capteur fait partie du collier multiéléments servant à générer des ondes guidées (mode L(0,2) et T(0,1)) pour le contrôle de canalisations. Le capteur Pzt est à large bande fréquentielle, fonctionne loin de sa fréquence de résonance et est utilisé pour mesurer le déplacement orthoradial. Le couplage de ce capteur à la canalisation est réalisé avec du couplant miel. À la différence du montage en Pulse/Echo utilisant les patches et comme expliqué au paragraphe (3.1.1), l'emploi d'un traducteur ponctuel offre l'avantage de détecter toutes les contributions y compris celles des modes de flexions dont la contribution est nulle dans une mesure circonférentielle.



Figure IV-18 : Capteur piézoélectrique (Pzt) instrumenté pour la mesure du déplacement orthoradial

La chaîne d'acquisition (Figure IV-19) choisie pour l'étude était composée du capteur Pzt relié à un amplificateur, un filtre et un oscilloscope numérique afin d'enregistrer les signaux. Pour déclencher la réception, l'oscilloscope était synchronisé sur le système MsS utilisé en émission. À chaque acquisition, la mesure était répétée plusieurs fois (80 mesures successives en moyenne) et le signal finalement obtenu résultait d'un moyennage de l'ensemble de ces mesures afin de réduire l'amplitude des signaux parasites et donc d'améliorer la valeur du rapport signal sur bruit.

Comme introduit dans le premier chapitre et expliqué dans [22], lors du contrôle de canalisations par ondes guidées, l'étendue temporelle du signal d'émission (durée du signal) définie par le nombre de cycles de sinusoides qui le composent ainsi que la fréquence d'émission, est un paramètre essentiel. En effet, plus la durée du signal est réduite, plus il est facile de séparer les différents paquets d'ondes générés par l'interaction du champ incident avec d'éventuelles perturbations sur la ligne. Le choix de ce nombre de cycles doit donc tenir compte des distances à contrôler ainsi que de la complexité des phénomènes de diffraction mis en jeu (dispersion des paquets d'ondes, conversions de modes, réflexions multiples...).

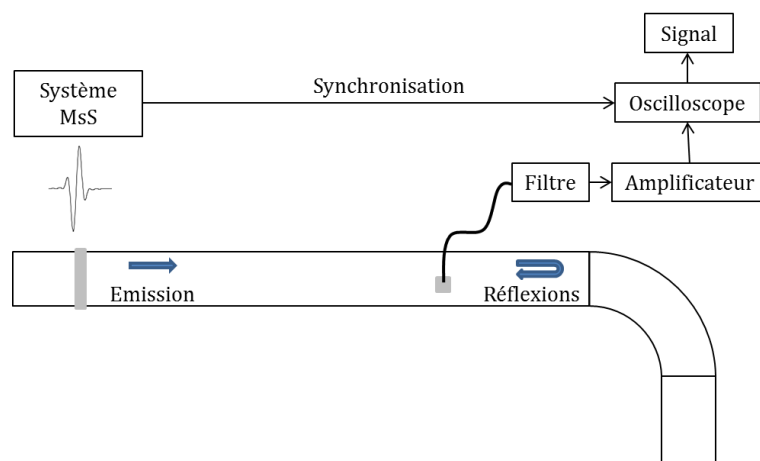


Figure IV-19 : Montage en Pitch/Catch avec capteur ponctuel – vue du dessus

Compte-tenu des courtes distances de propagation et des conversions de modes aux jonctions du coude, le signal d'émission utilisé est un signal sinusoïdal de deux cycles fenêtré par une fenêtre de Hanning et centré autour des fréquences d'excitations : 32kHz, 64kHz et 128kHz. Le spectre fréquentiel du signal d'émission est donc à large bande (Figure IV-20).

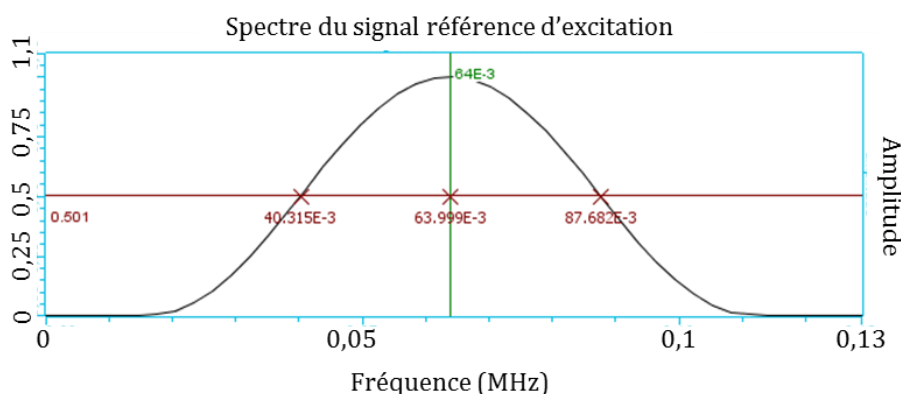


Figure IV-20: Spectre fréquentiel du signal d'émission du système MsS issu du logiciel CIVA

4.2. Vérification et analyse expérimentales des phénomènes de diffraction associés aux coudes

Ce paragraphe est consacré à l'étude expérimentale des phénomènes de diffraction et de conversion de modes constatés dans le chapitre 2 grâce à notre modèle semi-analytique, dans le cas d'un contrôle, par ondes élastiques guidées, d'une ligne de canalisations contenant un coude.

Pour commencer, nous analyserons les signaux temporels obtenus lors d'opérations de contrôle afin d'identifier les origines des échos de diffraction compte-tenu des différents éléments qui composent la ligne. Ensuite, afin d'isoler les différents modes qui composent ces paquets d'ondes, nous effectuerons une analyse fréquentielle et spatiale des signaux d'acquisition par le biais d'une transformée de Fourier bi-dimensionnelle.

4.2.1. Identification temporelle des échos de diffraction en configuration de contrôle Pulse/Echo

En configuration Pulse/Echo, les Ascans comportent les échos des modes T(0,1) issus des phénomènes de diffraction créés par les perturbations présentes dans la canalisation. La Figure IV-21 montre un exemple typique de signal obtenu par le système MsS pour une émission du patch 2 (Figure IV-17) :

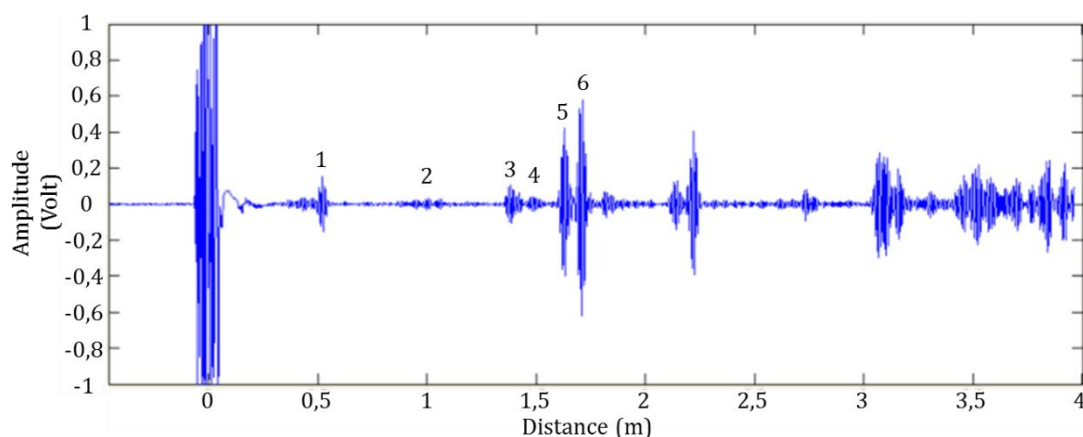


Figure IV-21 : Signal de contrôle en mode Pulse/Echo de la canalisation 6'' 70° avec le mode $T(0,1)$ émis par le Patch 2 à la fréquence de 128kHz

L'origine des différents échos est donnée ci-dessous :

- L'écho 1 est un écho de directionnalité. Il correspond à l'écho résiduel des interférences destructives en émission présenté dans le premier chapitre.
- L'écho 2 est dû au Patch situé à la position 1
- L'écho 3 provient de la réflexion $T(0,1)-T(0,1)$ à la jonction 2 du coude
- L'écho 4 est lié également à une réflexion avec, cette fois-ci, une conversion de mode $T(0,1)-F(m,n)-T(0,1)$ entre les deux jonctions du coude. L'écho 4 est composé en réalité de plusieurs échos situés entre les échos de réflexions $T(0,1)-T(0,1)$ générées aux deux jonctions du coude. Cette écho 4 est la conséquence des conversions de modes $T(0,1)-F(m,n)-T(0,1)$ aux jonctions entre le guide droit et le coude comme nous l'avons expliqué dans le troisième chapitre.
- L'écho 5 représente la réflexion $T(0,1)-T(0,1)$ à la jonction 1 du coude.
- L'écho 6 correspond à la réflexion $T(0,1)-T(0,1)$ sur l'extrémité libre du tube 1.

Enfin, les échos qui suivent celui de l'extrémité du tube libre sont dus aux réflexions multiples entre cette extrémité et le coude.

4.2.2. Bscans des signaux de mesures successives

Dans cette section, nous nous intéressons aux conversions de modes qui se produisent entre les deux jonctions du coude. L'étude a été menée à l'aide du montage expérimental présenté Figure IV-19. L'emploi du capteur ponctuel permet la mesure du déplacement orthoradial des différents modes engendrés par la diffraction aux jonctions.

À l'instar de la configuration en Pulse/Echo, la mesure en Pitch/Catch utilisant le capteur PzT en réception conduit à l'obtention des Ascans comportant les échos de réflexion. Afin d'identifier la nature les différents échos, nous réalisons des acquisitions successives (Figure IV-22) avec le capteur ponctuel à différentes distances du patch magnétostrictif émetteur.

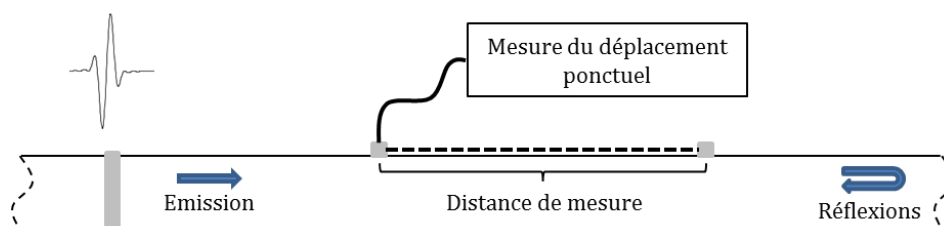


Figure IV-22: Schéma illustratif des mesures ponctuelles successives du déplacement orthoradial des ondes guidées se propageant dans la maquette expérimentale

Le capteur ponctuel détecte à la fois les modes incidents arrivant par la gauche et les modes réfléchis provenant de la droite. En déplaçant le capteur d'une position k à une position $k+1$ vers la droite, les échos incidents sont reçus plus tard par rapport à la position précédente alors que les échos réfléchis arrivent plus tôt. En renouvelant la mesure sur plusieurs positions successives et avec un pas régulier, on obtient un Bscan en superposant les différents Ascans acquis. La Figure IV-23 présente le Bscan obtenu dans le cas de la maquette 6" 30 :

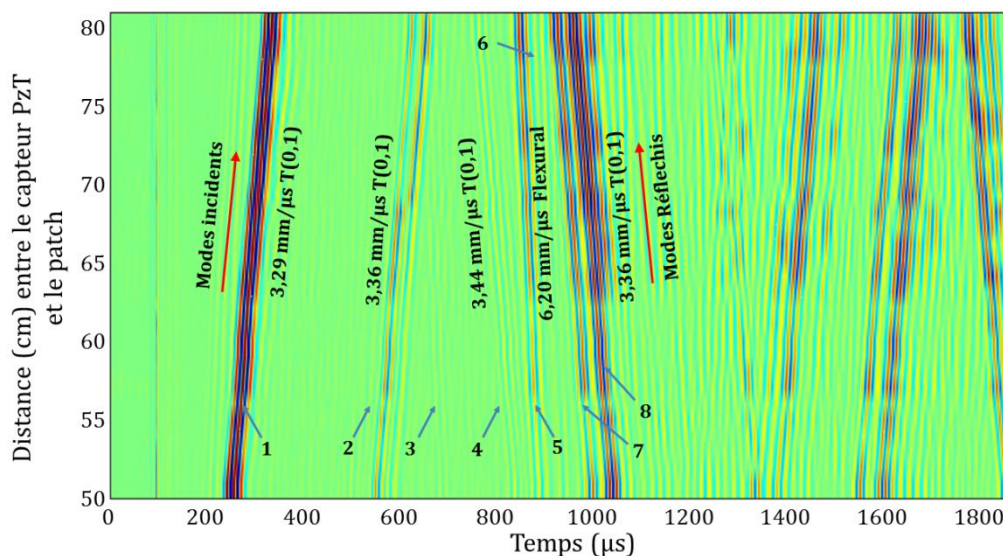


Figure IV-23: Bscan des ondes se propageant au sein de la canalisation 6'' avec un coude de 30° à la fréquence de 64kHz

Sur cette figure, on peut identifier les différents paquets d'ondes se propageant au sein de la canalisation. Les échos présentant une pente positive correspondent à des modes incidents venant de la droite et ceux avec une pente négative sont des modes réfléchis provenant de la gauche du capteur ponctuel.

La valeur des pentes des différents paquets indique leur vitesse de propagation. Cette information sur la vitesse de propagation des paquets d'ondes donne des indications quant au type de modes composant les différents échos. À titre d'exemple, l'écho 5 a une vitesse de propagation de $6,20 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$; celle-ci est différente de la vitesse de propagation du mode $T(0,1)$ ($3,24 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$). Ce paquet d'ondes ne peut donc être composé que de modes de flexions créés par conversions de modes car, d'après les résultats du chapitre III, dans le cas d'un contrôle en $T(0,1)$, les conversions de modes qui se produisent aux jonctions du coude génèrent principalement des modes de flexions.

Par ailleurs, les origines des différents échos enregistrés sont explicitées ci-dessous :

- L'écho 1 représente le champ incident $T(0,1)$
- L'écho 2 est lié à la directionalité
- L'écho 3 est dû à la présence du patch à la position 1
- L'écho 4 provient de la réflexion $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à la jonction 1 du coude
- L'écho 5 correspond à la conversion de mode $T(0,1)$ - $F(m,n)$ à la première jonction
- L'écho 6 est relatif à la conversion de mode $T(0,1)$ - $F(m,n)$ à la seconde jonction
- L'écho 7 est induit par la réflexion $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à la deuxième jonction du coude
- L'écho 8 est caractéristique de la réflexion sur l'extrémité libre du tube.

Au-delà de l'écho 8 provenant de la réflexion du champ incident sur l'extrémité libre du tube, les échos suivants ont pour origine les réflexions multiples entre l'extrémité du tube et les deux jonctions du coude contrôlé.

D'autres exemples de Bscan pour les autres maquettes utilisées pour cette étude expérimentale sont présentés ci-dessous :

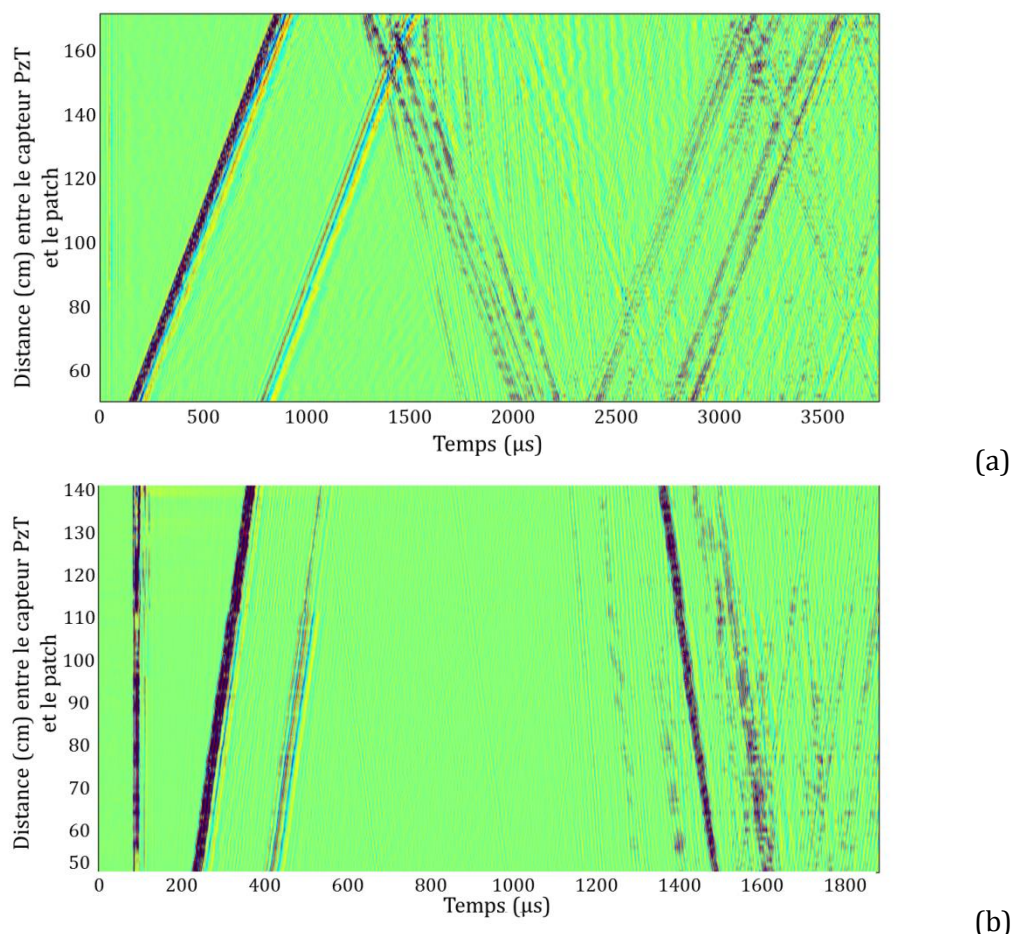


Figure IV-24: Bscan à 128kHz, pour les maquettes expérimentales 6'' 70° (a) et 10'' 30° (b) obtenues avec un pas de mesure de 0,5cm

À l'image du cas de la maquette de tubes 6'' comportant le coude de 30°, les deux Bscans relatifs aux maquettes 6'' avec un coude de 70° et 10'' avec un coude de 30 aident à identifier les différents paquets d'ondes incidents et réfléchis ayant une composante de déplacement orthoradiale non-nulle que le capteur ponctuel détecte. Ils renseignent également sur la nature des modes qui composent les différents échos. Par ailleurs, la connaissance du plan des maquettes est une information importante puisqu'elle sert à déterminer l'origine des différents échos qui, en CND par ondes guidées, constitue la principale difficulté qui se pose pour l'interprétation des signaux d'inspections. Enfin en comparant les Bscans des différentes maquettes, on remarque que le nombre de paquets d'ondes varie. Ce nombre dépend en premier lieu des dimensions du coude mais aussi des paramètres de contrôle et notamment de la fréquence.

Les résultats des simulations effectuées sur ce type de configuration montrent l'existence d'un nombre conséquent de modes guidés : à 64kHz, on compte 34 modes propagatifs dont 1 mode de torsion, 2 modes de compressions et 31 modes de flexions dans la partie droite. Ces modes peuvent se propager aux fréquences d'inspection. De ce fait, les différents paquets d'ondes des Bscans obtenus expérimentalement se composent de plusieurs modes (principalement de flexions) dus aux conversions de modes. Cependant, les vitesses de propagation des modes étant proches, l'identification de ces modes est impossible directement à partir des acquisitions temporelles. Le passage dans le domaine fréquentiel est donc nécessaire afin d'identifier les modes constituant les échos de diffraction du coude.

4.2.3. Transformée de Fourier bidimensionnelle pour l'identification des modes de flexions des conversions de modes

Afin d'identifier les modes de flexions qui composent les paquets d'ondes 5 et 6, nous nous servons d'une méthode de traitement du signal basée sur une transformée de Fourier bidimensionnelle (BiFFT) faite à partir des mesures successives acquises avec le capteur ponctuel. Cette double transformée de Fourier [43] consiste à décomposer un signal $s(t, x)$ dans les domaines des fréquences temporelles (ω) et spatiales (β) comme :

$$\text{BiFFT}(s(t, x))(\omega, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, x) e^{-i\omega t} e^{i\beta x} dt dx \quad (\text{IV.2})$$

Compte-tenu du caractère multimodal des ondes guidées, ce procédé de traitement est souvent employé [121] [22] [122] pour caractériser expérimentalement les modes composant les paquets d'ondes, car il est bien souvent impossible de séparer dans le domaine temporel les différents modes se propageant dans la structure contrôlée. Ainsi, pour la maquette 6" comportant le coude de 30°, trois séries de mesures ont été effectuées avec des signaux d'excitation centrés respectivement autour de 32, 64 et 128kHz. Concernant les acquisitions à 32 et 64kHz, une série de 120 signaux temporels est enregistrée avec, entre deux mesures consécutives, un incrément spatial $\Delta x = 10\text{mm}$. Chaque signal contient $n=5000$ points pour un intervalle d'échantillonnage temporel égal à $T = 0,2\text{ns}$. Il en découle une précision fréquentielle de $\Delta f = 1\text{kHz}$ pour une fréquence d'échantillonnage égale à $f = 5\text{MHz}$, ainsi qu'une précision en nombre d'onde de $\Delta\beta = 5,27\mu\text{m}^{-1}$ pour un nombre d'onde d'échantillonnage égal à $\beta = 0,63\text{mm}^{-1}$. De la même manière, pour les acquisitions à 128kHz, une série de 120 signaux temporels est effectuée mais, cette fois-ci, avec un incrément spatial de $\Delta x = 5\text{mm}$ correspondant à une précision en nombre d'onde $\Delta\beta = 10,54\mu\text{m}^{-1}$ et un nombre d'onde d'échantillonnage $\beta = 1,26\text{mm}^{-1}$, offrant une bonne précision de mesure afin de distinguer les différents modes propagatifs contenus dans les paquets d'ondes sur les BiFFT. On peut ainsi tracer le nombre d'onde β des modes sur la plage fréquentielle du signal d'excitation.

Dans notre cas, la BiFFT est tracée à partir de ces séries de mesures et en utilisant des fenêtres temporelles adaptées pour ne prendre en compte que le signal d'émission et les signaux réfléchis situés entre la première jonction du coude et l'extrémité libre du tube. Ce choix permet de garder uniquement les conversions de modes dues au coude sans les réflexions multiples entre celui-ci et l'extrémité du tube. Finalement, la BiFFT obtenue pour le Bscan de la Figure IV-23 est présentée à la Figure IV-25.

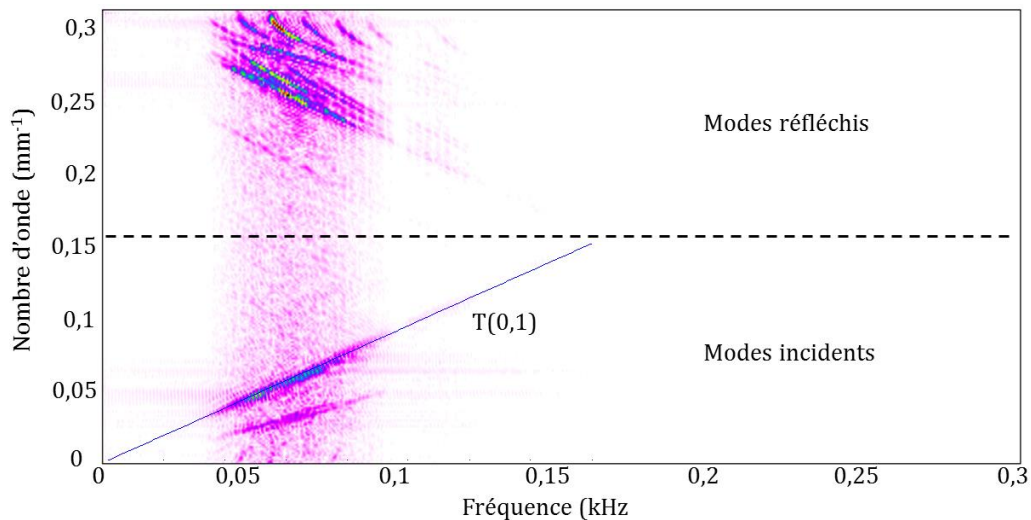


Figure IV-25: BiFFT obtenues des signaux expérimentaux de mesures de déplacement ponctuel réalisées sur la maquette 6" comportant un coude de 30° à la fréquence de 64kHz sur une distance de 66cm avec un pas de mesure de 1cm.

Après analyse de la figure, on remarque que cette BiFFT peut se décomposer en deux parties différentes : la moitié inférieure comporte les modes incidents (pentes positives sur le Bscan) tandis que la moitié supérieure contient les modes réfléchis (pentes négatives sur le Bscan). La BiFFT permet de reconstruire des branches des courbes de dispersions en nombre d'onde pour les modes qui composent les différents échos incidents et transmis sur l'ensemble du spectre fréquentiel du signal d'excitation (dans le cas présent, entre 40 et 80kHz pour une excitation à 64kHz).

Concernant les champs incidents, la BiFFT confirme que le signal d'émission est composé d'un seul mode propagatif : le premier mode de torsion $T(0,1)$. On s'assure de cela en superposant la branche des courbes de dispersion en nombre d'onde relatif à ce mode et simulées avec le modèle SAFE à celle obtenue expérimentalement. Pour la réflexion, on observe l'apparition, en plus de la réflexion $T(0,1)-T(0,1)$, de nouveaux modes propagatifs qui sont des modes de flexions obtenus par conversion d'une partie de l'énergie du champ incident. La Figure IV-26 détaille la superposition des courbes de dispersion simulées avec notre modèle et celles relatives aux conversions de modes provoquées par le coude pour la série de mesure effectuées à 64kHz.

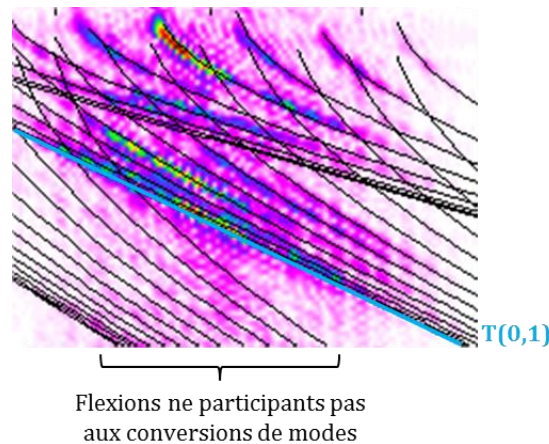


Figure IV-26: Zoom sur les modes composant les échos de diffractions réfléchis par le coude de 30° de la maquette 6'' pour un mode incident $T(0,1)$ à 64kHz

Cette figure permet de constater que tous les modes de flexion ne sont pas concernés par les conversions de modes du mode $T(0,1)$ incident. Les principaux modes de flexions impliqués dans ces conversions sont ceux possédant une composante de déplacement orthoradiale importante à la fréquence d'inspection utilisée. En effet, comme on peut le voir sur la figure, les branches des courbes de dispersions correspondant à des modes de flexions dont les nombres d'ondes sont proches de celui d'un mode de compression ne participent pas aux conversions de modes que subit le champ incident $T(0,1)$ dans le coude.

En reproduisant la même mesure pour des signaux d'excitation centrés cette fois-ci autour de 32 et 128kHz et en mettant bout à bout les résultats des BiFFT calculées aux différentes fréquences d'acquisition, on obtient la Figure IV-27 qui permet d'identifier les modes composant les champs incidents et réfléchis sur la plage fréquentielle allant de 10 à 170kHz.

Les remarques faites pour la Figure IV-25 restent valables pour la Figure IV-27. Par ailleurs, du fait de l'augmentation du nombre de modes propagatifs avec la fréquence, on note que le nombre de modes de flexion entrant en jeu dans les conversions s'accroît. Contrairement au mode de torsion dont le déplacement orthoradial est constant à toutes les positions de mesures dans un guide d'ondes droit, les branches des courbes de dispersions relatives aux modes de flexions présentent des effets de lobes dus au passage par des maxima et des minima, du déplacement u_θ mesuré par le capteur, en fonction de la position de mesure.

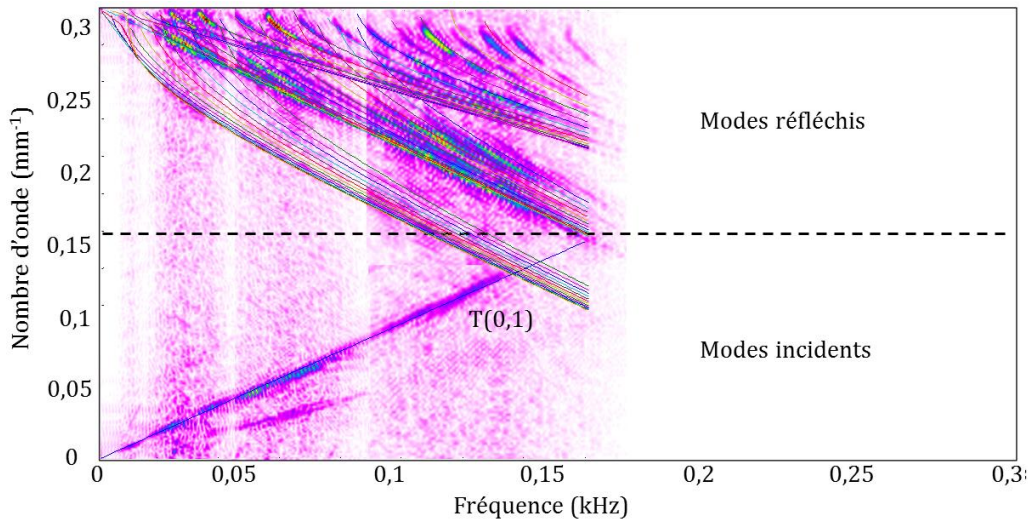


Figure IV-27: BiFFT obtenues à partir des signaux expérimentaux de mesures de déplacement orthoradial ponctuel réalisées sur la maquette 6" comportant un coude de 30° aux fréquences centrales de 32, 64 et 128kHz

De manière générale, les modes de flexions composant les champs réfléchis sont principalement ceux dont les nombres d'onde ont une valeur proche de celle du mode excité en émission, en l'occurrence ici, le mode T(0,1). Plus on s'éloigne du nombre d'onde du mode de torsion, plus les contributions des modes de flexion faiblissent. D'autre part, les modes de flexion dont le nombre d'onde est différent de celui du mode T(0,1) ou proche de celui des modes de compression L(0,2) et L(0,1) ne participent pas à la décomposition des champs élastodynamiques réfléchis. Ceci peut être observé en superposant, comme le montre la Figure IV-27, les courbes de dispersion en nombre d'onde de tous les modes propagatifs sur celles des champs réfléchis obtenus par la BiFFT.

Malgré les avantages qu'apporte l'utilisation de la BiFFT pour l'identification des modes, sa mise en œuvre reste complexe notamment sur des maquettes expérimentales de dimensions industrielles. De plus, certains des points relevés grâce à cette méthode d'analyse fréquentielle restent difficiles à exploiter pour l'interprétation de signaux d'acquisition temporels sur site par des opérateurs. C'est pourquoi, nous proposons dans le paragraphe suivant d'exploiter notre modèle semi-analytique afin de simuler, en temporel, des signaux typiques de ceux mesurables sur des lignes de canalisations comportant des coudes. Par la suite, ces signaux simulés sont directement comparés aux signaux expérimentaux obtenus lors de notre campagne d'essais.

Remarque :

La mesure ponctuelle étant réalisée sur les composantes de déplacements orthoradiales, la détection des modes de flexion créés par conversion de modes n'est possible que si les modes en question ont une composante u_θ non nulle. Étant donné que le contrôle est réalisé en mode T(0,1) dont seul le déplacement orthoradial est non-nul, nous pensons, compte-tenu des résultats de simulations, que les conversions concernent des modes de flexions dont le déplacement u_θ est non négligeable.

4.3. Comparaison simulation/expérience en temporel des échos de diffraction du coude

On modélise ici le contrôle non destructif avec le mode de torsion T(0,1) de la maquette 6" comportant un coude de 30° avec l'extrémité libre du tube. Suite à cette simulation, on compare les signaux temporels mesurés expérimentalement à l'aide de la configuration Pulse/Echo présenté par la Figure IV-28 et ceux obtenus numériquement grâce à notre modèle semi-analytique (Figure IV-29). Les amplitudes ont été normalisées par rapport au signal d'émission utilisé pour la simulation et pour l'expérience.

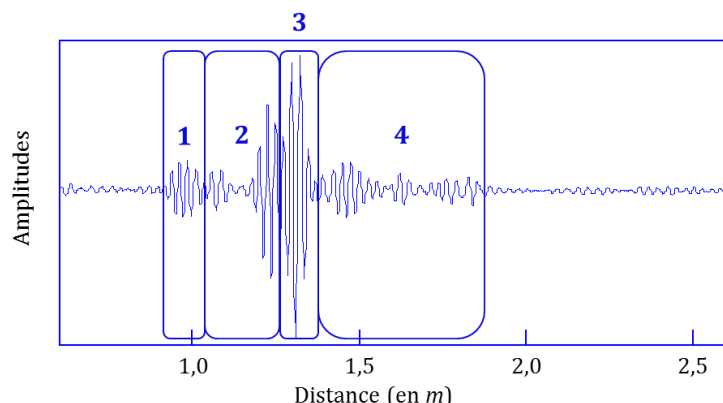


Figure IV-28 : Signal temporel expérimental obtenu sur la maquette 6'' avec un coude de 30° et une extrémité de tube libre à 64kHz

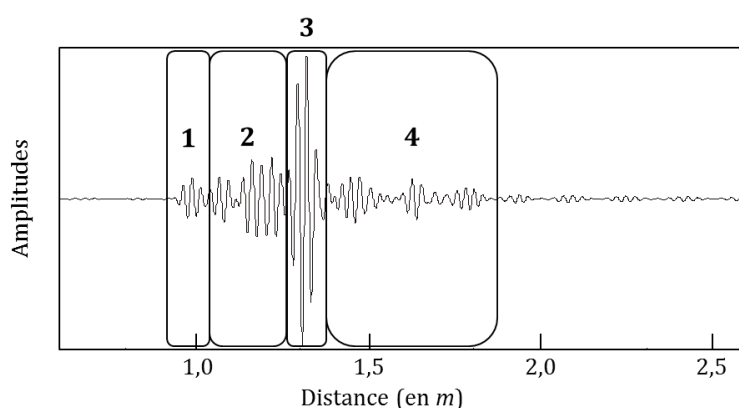


Figure IV-29 : Signal temporel simulé pour la maquette 6'' avec un coude de 30° et une extrémité de tube libre à 64kHz

À l'instar de la méthode de mesure utilisée par Sanderson et *al.* [119], la réception étant faite sur toute la circonférence du tube, les contributions des échos en flexion arrivant sur le patch sont supprimées par sommation. On ne garde donc que les échos du mode de torsion $T(0,1)$. D'autre part, la simulation est réalisée sur une canalisation de géométrie parfaite et sans prendre en compte la présence du second patch sur la ligne ni le phénomène de directionnalité créé lors de l'émission. Les comparaisons en temporel sont donc faites uniquement sur les échos du coude et de l'extrémité du tube libre.

Les différents paquets d'ondes sont listés ci-dessous :

- L'écho 1 correspond à la réflexion $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à la première jonction du coude
- L'écho 2 représente les conversions de modes T - $F(m,n)$ - T aux deux jonctions du coude
- L'écho 3 provient de la réflexion sur l'extrémité libre du tube droit
- L'écho 4 est lié aux réflexions multiples entre le coude et l'extrémité libre du tube.

La comparaison du signal temporel simulé et avec le signal expérimental montre une bonne concordance : la prédiction par la simulation du nombre d'échos et de leur temps de vol créés par la diffraction par le coude étant très satisfaisante. De plus, la prise en compte de l'extrémité libre du tube par raccordement modal aide à retrouver les échos de réflexions multiples entre cette extrémité et le coude et ce, malgré la complexité des mécanismes mis en jeu pour la création de ces contributions. Enfin en simulation, la sommation des déplacements sur la circonférence du tube en réception élimine bien les contributions des modes de flexion du résultat final.

Cependant, les amplitudes des signaux composant notamment l'écho 2, résultant des conversions de modes aux jonctions du coude, diffèrent quelque peu entre simulation et expérience. Cette différence d'amplitude est principalement due aux incertitudes sur la maquette expérimentale. Ces incertitudes sont liées au procédé de cintrage qui ne garantit pas une géométrie parfaite du coude : courbure variable, variations d'épaisseurs entre l'intrados et l'extrados du coude, vaguelettes de cintrage, section du tube déformée...

5. Étude paramétrique sur une ligne de canalisations comportant un coude

Afin de compléter les études paramétriques réalisées dans le cadre des comparaisons numériques avec les travaux des références [118] [78], nous proposons dans cette section des résultats de simulations supplémentaires. Ces derniers ont pour principal objectif de montrer l'influence de différents paramètres du coude sur les coefficients de transmission à travers le coude d'un champ incident monochromatique $T(0,1)$ sur la plage fréquentielle [20, 200kHz] généralement utilisée dans le CND par ondes guidées de canalisations.

5.1. Cartographies de transmission pour différents rayons de courbures

On considère un tube en acier 2" coudé d'épaisseur 5,5mm ($\rho = 7,92g.cm^{-3}$, $E = 210GPa$, $\nu = 0,31$, $C_T = 3,24mm.\mu s^{-1}$ et $C_L = 5,93mm.\mu s^{-1}$). L'étude paramétrique consiste à calculer le coefficient de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ à travers des coudes de différentes valeurs de courbures et d'ouvertures angulaires variables allant de 30° à 180°. Les ratios $k = R_c/OD$ pris en compte pour les calculs sont les suivants $k=3, 6, 10, 19$.

Les résultats de simulation sont présentés sous forme de cartographies donnant les valeurs des coefficients de transmission en énergie $T(0,1)$ - $T(0,1)$ en fonction de l'angle du coude et de la fréquence de calcul. En pratique, l'intérêt de ce type de cartographie est d'aider l'opérateur dans son choix des paramètres de contrôle (fréquence, nombre de cycle du signal, choix du mode) en optimisant, selon les conditions, soit la transmission soit la réflexion.

Puisque notre approche de modélisation est une approche modale, l'obtention des cartographies de coefficients de transmission en énergie calculés pour un mode incident $T(0,1)$ nécessite l'utilisation d'une boucle fréquentielle, à courbure constante, pour le calcul des bases modales par la méthode SAFE et des matrices de diffraction locale par raccordement modal. Une fois ces deux éléments obtenus à chaque fréquence, un simple post-traitement est mis en œuvre pour le calcul de la matrice de diffraction globale : il met en série les matrices de diffraction locale et les matrices de propagation adaptées selon l'angle du coude. Enfin, le calcul étant fait pour tous les modes propagatifs, les cartographies de coefficient de transmission peuvent être générées quel que soit le mode considéré.

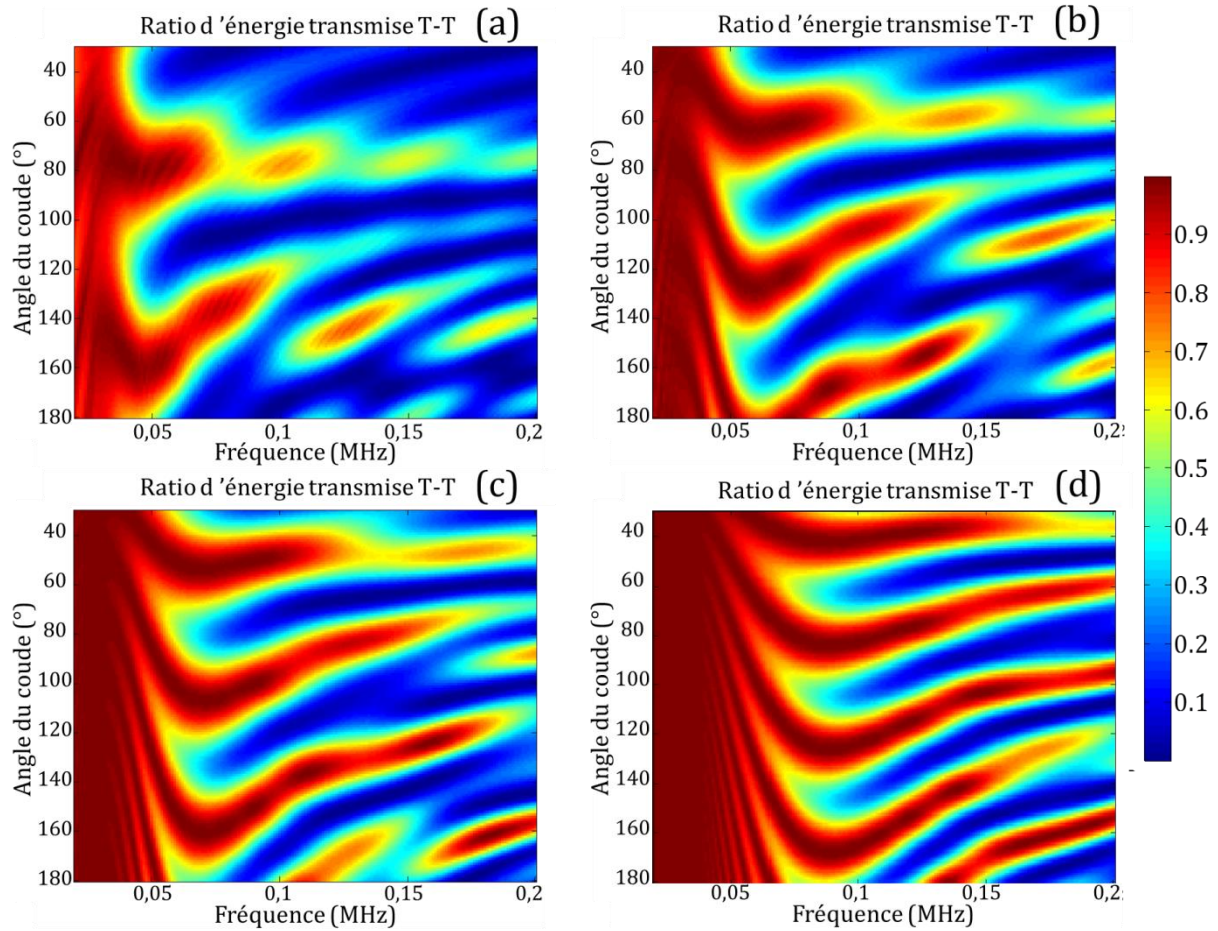


Figure IV-30 : Cartographies de transmission du mode $T(0,1)$ en $T(0,1)$ à travers une ligne de canalisations 2" d'épaisseur 5,5mm comportant des coudes de ratios (a) $k=3$, (b) $k=6$, (c) $k=10$, (d) $k=19$ variant sur les angles de 30° à 180° sur l'intervalle de fréquences [20-200kHz]

Dans ce premier exemple, l'objectif est d'observer l'évolution de la transmission en fonction de la courbure pour différents angles de coudes. Tout d'abord, on peut remarquer que plus la courbure est faible plus la transmission est importante. À très grand rayon (ex. $k=19$) ou à très faible fréquence, on tend vers le cas d'une transmission totale. La transmission est meilleure sur la plage des basses fréquences mais la bande passante de cet intervalle fréquentiel se réduit avec l'augmentation de la courbure. À ouverture angulaire constante, on remarque en fonction de la fréquence des passages par des minima et des maxima de transmission locaux. La comparaison de ces cartographies avec les courbes de dispersion du guide permet de voir que ces minima coïncident avec l'apparition de nouveaux modes propagatifs, notamment des modes de flexions, qui s'accompagnent de conversions de modes plus importantes d'où la décroissance du coefficient de transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$. Enfin, ces cartographies montrent qu'il n'existe pas de fréquence idéale permettant de contrôler plusieurs coudes puisque, d'une courbure à l'autre et selon l'angle du coude à contrôler, les valeurs optimales possibles de la fréquence, *i.e.*, maximisant la transmission, changent.

5.2. Cartographies de transmission à rapport k constant

Contrairement à l'exemple ci-dessus, les cartographies qui suivent ont été obtenues à ratio $k=10$ constant. Le calcul a été réalisé pour des dimensions de tubes différentes, tout en gardant

le même rapport entre épaisseur et diamètre externe. Le calcul est fait pour les angles de coudes de 30 à 180° sur l'intervalle de fréquence 20-200kHz.

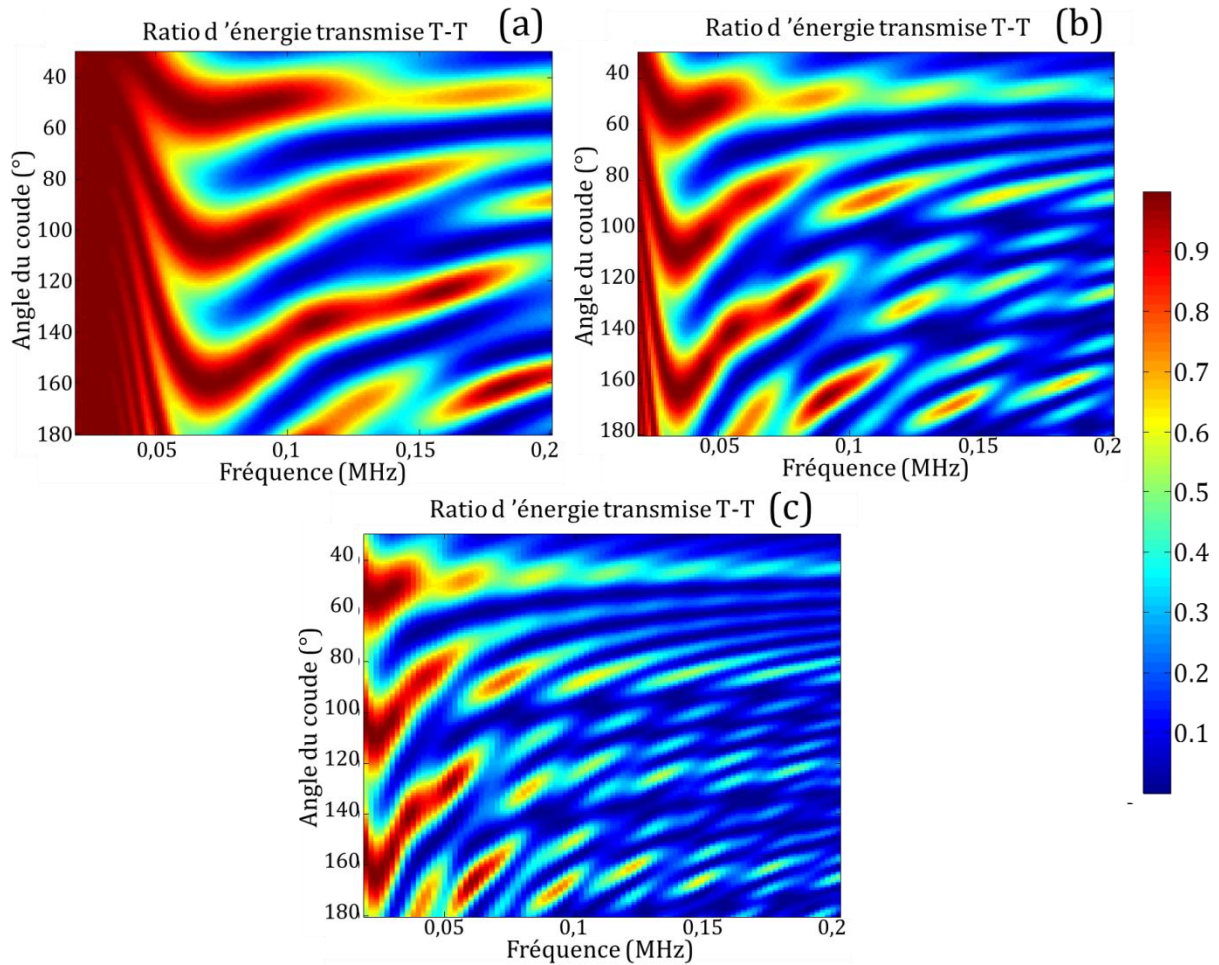


Figure IV-31: Cartographies de transmission du mode $T(0,1)$ en $T(0,1)$ à travers des coudes de ratio $k=10$, d'ouverture angulaire entre 30° à 180° et se trouvant dans des canalisations (a) 2'' (épaisseur 3,81mm), (b) 4'' (épaisseur 6,3mm) et (c) 6'' (épaisseur 7,1mm) sur la plage fréquentielle [20-200kHz]

À ratio k constant, l'analyse des cartographies indique que la taille de la zone de transmission élevée à basse fréquence, observée précédemment, dépend des dimensions de la canalisation, Celle-ci n'existe plus pour la ligne 6''. Globalement, la transmission en amplitude $T(0,1)$ - $T(0,1)$ diminue avec l'augmentation des dimensions de la canalisation à contrôler. Cette diminution s'accompagne de l'augmentation du nombre de minima et de maxima locaux de transmission en fonction de la fréquence et de l'angle du coude. Par ailleurs, la comparaison des trois cartographies montre des similitudes notamment à basses fréquences puisque, à une homothétie près sur les fréquences, on retrouve les mêmes lobes pour les différents tubes.

6. Conclusion

Ce chapitre a été l'occasion, dans un premier temps, de confronter des résultats de simulations obtenus grâce à notre modèle semi-analytique avec des travaux de la littérature qui se sont intéressés à la propagation et à la diffraction des ondes guidées au sein de canalisations coudées. Les comparaisons ont été réalisées avec les travaux de Demma [118] [78] (à la fois avec ses résultats de calcul par éléments finis et avec ses résultats expérimentaux) pour des contrôles en modes incidents $T(0,1)$ et $L(0,2)$ afin de s'assurer de la validité de notre modèle en

transmission. Cette première validation a aussi été l'occasion de montrer l'influence de certains paramètres du coude ou de la configuration de contrôle sur les coefficients de transmission $T(0,1)$ - $T(0,1)$ et $L(0,2)$ - $L(0,2)$. Ensuite, une étude expérimentale en réflexion a été effectuée sur des maquettes de dimensions industrielles au CETIM. Ces expériences ont permis de mettre en évidence les phénomènes de conversions de modes dus au coude et d'identifier les différents modes guidés composant les échos réfléchis. Des comparaisons dans le domaine temporel de signaux d'acquisition avec des signaux simulés par notre modèle ont montré une bonne prédiction des différents échos de réflexion obtenus dans un cas typique de contrôle d'une canalisation comportant un coude et ce, malgré les incertitudes liées à la maquette expérimentale et au procédé de fabrication des tubes cintrés contrôlés. Enfin, quelques exemples d'études paramétriques ont été présentés afin de mieux quantifier l'impact de différents paramètres et d'illustrer les capacités de notre modèle à obtenir des résultats rapides et directement exploitables par un opérateur pour optimiser une configuration de contrôle ou pour mieux comprendre l'origine des différents signaux expérimentaux.

CONCLUSION GENERALE

Comme indiqué en introduction, le CEA vise à proposer des méthodes numériques optimales et génériques adaptées à la simulation d'opérations de contrôles non-destructifs pour un coût numérique réduit à l'aide de micro-ordinateurs. Ces modèles doivent permettre d'une part de rendre compte des phénomènes complexes liés au caractère multimodal et dispersif des ondes guidées et, d'autre part, de faciliter la compréhension et l'interprétation des signaux obtenus lors d'un contrôle réel.

Le développement dans la plate-forme logicielle CIVA d'un module de simulation dédié aux contrôles par ondes guidées est lié directement aux résultats obtenus en modélisation. Il a ainsi débouché sur un premier module commercialisé auquel de nouvelles fonctionnalités sont ajoutées régulièrement. Ce module, basé sur une approche modale, combine un calcul par la méthode SAFE en 1D et 2D pour la propagation des ondes guidées et différentes approches de modélisation pour traiter de leur diffraction, que sont le raccordement modal pour la diffraction à des jonctions et une méthode hybride SAFE/éléments finis pour la diffraction par des perturbations complexes.

Les travaux de cette thèse se sont inscrits dans la continuité des développements antérieurs réalisés au CEA et avaient pour objectif d'étendre les capacités de simulation du module au cas des canalisations.

Dans le cas de l'inspection de réseaux de canalisations par ondes guidées, la simulation d'un contrôle nécessite de répondre à plusieurs problématiques différentes : la diffraction se produisant lors de l'émission et de la réception par un ou plusieurs traducteurs, la propagation dans les différents guides des champs élastodynamiques générés, la diffraction de ces champs par les perturbations composant la structure même du guide ou par les éventuels endommagements qu'elle comporte et qui peuvent être de forme et de positionnement variés. Par ailleurs, la prise en compte de plusieurs perturbations successives sur une même ligne est un défi supplémentaire auquel il faut répondre pour simuler de façon réaliste une opération de contrôle de canalisation.

Parmi les différents cas d'intérêt associés à l'inspection de canalisations, nous avons choisi de nous intéresser à la modélisation du contrôle d'une ligne de canalisations comportant une ou plusieurs parties coudées. Ainsi, afin de compléter les modèles dédiés à la simulation de la propagation au sein de ces structures, une extension du formalisme SAFE 2D dans le cas d'un guide d'ondes courbe, de section arbitraire, paramétré dans un repère de coordonnées curvilignes a été effectuée. Cette extension basée sur les développements de Treyssède et Laguerre [3] a permis de rendre compte des effets de la courbure dans la résolution des équations de propagation. Une fois la résolution faite, les champs élastodynamiques qui se propagent dans le guide courbe ont pu être exprimés comme une combinaison linéaire de ces modes. Ce premier développement a été mis en œuvre pour mener des comparaisons, dans le domaine fréquentiel, entre les modes se propageant dans des guides droits et ceux se propageant dans des guides courbes. Ces simulations ont révélé plusieurs effets liés à la présence d'une courbure parmi lesquels : la distorsion des champs de déplacements et de contraintes, la séparation des modes de flexions ou encore le décalage des fréquences de coupures des modes guidés.

La seconde étape de modélisation a porté sur la prédiction de la diffraction à la jonction entre deux guides d'ondes, de courbure, ou de composition matérielle différentes. Pour y parvenir, un

modèle de raccordement de modal a été développé afin de construire une matrice modale de diffraction prédisant les champs réfléchis et transmis à travers la jonction. Notons ici que le formalisme peut être mis en œuvre dès lors que les décompositions modales des champs élastodynamiques de part et d'autre de la jonction sont connues, les phénomènes de diffraction étant localisés à la seule jonction. En outre, ce calcul reposant uniquement sur la projection d'une famille de modes sur l'autre à l'aide de simples produits scalaires, il permet donc une prédiction rapide de l'amplitude modale des ondes diffractées et ne nécessite pas de ressources de calcul importantes puisque les calculs à mener consistent à procéder à des intégrations numériques à la surface maillée de la section des guides et n'impliquent aucune résolution de systèmes d'équations. Dans le cadre de notre étude, ce formalisme a été mis en œuvre pour le calcul de la diffraction des ondes élastiques entre un tube droit et un coude ainsi que pour le calcul de la réflexion totale à l'extrémité libre d'un tube, mais le formalisme générique développé permet d'effectuer des calculs de diffraction à la jonction de guides de courbures arbitraires. À l'aide des résultats de ces calculs, une première analyse des phénomènes de diffraction engendrés par la courbure du coude a pu être réalisée.

Ensuite, à partir des matrices de diffraction locale associées aux jonctions et des matrices de propagation obtenues par la méthode SAFE, nous avons montré, à la suite de Baronian *et al.* [99], qu'il était possible de déduire une matrice de diffraction globale. La méthode est ici adaptée pour rendre compte de la propagation dans des guides courbés. Cette matrice unique rend compte de l'ensemble des phénomènes et notamment des phénomènes de réflexions multiples entre éléments diffracteurs. Cette méthode est particulièrement efficace numériquement puisque, une fois les matrices locales de diffraction calculées, les différentes opérations devant être menées pour obtenir la matrice globale ne font intervenir que quelques inversions de matrices et quelques produits matriciels, mais aucune résolution de systèmes d'équations ni même de calcul d'intégrales de surface sur les sections. Finalement, des exemples de calculs de champs réfléchis et transmis par un coude ont été présentés ; ils servent ainsi à mettre en lumière les phénomènes de diffraction et de conversion de modes au sein du coude.

Afin de valider notre modèle complet, différents travaux ont été menés dont les résultats ont été présentés dans le quatrième chapitre. Ces validations ont d'abord consisté en des comparaisons de résultats de simulations fréquentielles et temporelles réalisées grâce à notre modèle semi-analytique avec des résultats numériques et expérimentaux issus de la littérature. Ces comparaisons ont montré un très bon accord aussi bien en fréquentiel qu'en temporel. Par la suite, afin de corroborer les constatations faites à l'aide de notre modèle concernant la diffraction des champs élastodynamique par les coudes, une étude expérimentale sur des maquettes industrielles a été menée et a permis d'identifier les modes de flexions participants aux conversions de modes se produisant aux jonctions du coude. Par ailleurs, des comparaisons entre signaux temporels simulés et mesurés expérimentalement ont montré la capacité du modèle développé à prédire la structure échographique complexe mesurée dans une expérience réaliste de contrôle sur la maquette. Enfin, des exemples d'études paramétriques ont permis d'illustrer l'intérêt du simulateur développé pour l'optimisation des paramètres de contrôle lors de l'inspection de canalisations comportant des parties coudées.

Si les résultats de validation obtenus donnent confiance dans les capacités du modèle à rendre compte des principaux phénomènes, d'autres campagnes d'essais sur des maquettes industrielles de géométrie mieux maîtrisée seraient utiles pour valider de façon plus complète les prédictions faites dans le cadre d'études multi-paramétriques. En outre, bien que ces modèles aient été employés principalement pour la simulation d'inspections de canalisations coudées, leur caractère générique autorise leur mise en œuvre pour traiter d'autres cas d'intérêts. Ainsi, le raccordement modal peut servir à prédire la diffraction entre un guide contraint (support, encastrement...) et un guide d'onde soumis à des conditions de surfaces libres. Le modèle SAFE en coordonnées curvilignes peut être mis en œuvre pour le cas de guides courbes de sections arbitraires. Enfin la méthode de mise en série des matrices de diffraction

permet de réaliser des simulations de contrôle de réseaux de canalisations comportant plusieurs diffracteurs locaux de natures différentes, comme le montre l'exemple où les phénomènes de diffraction par les jonctions d'un coude avec des guides droits sont couplés à la réflexion en bout de tube.

Sur la base des modèles développés, d'autres extensions peuvent être également entreprises. Ainsi, la prise en compte des soudures dans le modèle de simulation sera une étape importante vers une modélisation plus réaliste des structures coudées communément rencontrées dans l'industrie. Pour y parvenir, il sera nécessaire d'effectuer à la fois des calculs de diffraction par raccordement modal aux différentes jonctions et des boîtiers éléments finis autour des soudures avec une extension du formalisme des frontières transparentes pour traiter des modes calculés en coordonnées curvilignes afin de prendre en compte la jonction entre la soudure et l'entrée du coude. De même, tous les développements réalisés ont considéré le cas de canalisations métalliques pour lesquelles les lois de l'élastodynamique sont raisonnablement restreintes au cas de l'isotropie. Des canalisations en matériaux composites sont aussi utilisées industriellement, pour lesquelles l'hypothèse d'isotropie ne peut plus être faite. Dans la mesure où les calculs par la méthode SAFE sont aisément adaptables aux matériaux anisotropes à couches multiples [123] et que l'hybridation des modèles SAFE à des calculs éléments finis est également réalisable dans ce cas [124], la faisabilité d'une telle extension repose en partie sur la possibilité de traiter la propagation dans des guides courbes et anisotropes.

ANNEXE A : COMPARAISON DES COURBES DE DISPERSION CALCULEES DANS UN COUDE AVEC CELLES ISSUES DE LA LITTERATURE

L'extension du modèle SAFE au cas de la propagation dans un guide coudé repose sur les travaux de F. Treyssède et L. Laguerre [3] sur les câbles hélicoïdaux multi-brins.

Nous avons donc, dans un premier temps, commencé par comparer les courbes de dispersion en nombre d'ondes obtenues par notre code de calcul avec celles figurant dans l'article [3] et correspondant au cas d'un guide cylindrique de diamètre 5mm en acier ($\rho = 7920kg.m^{-3}$, $C_T = 3240mm.\mu s^{-1}$ et $C_L = 5900mm.\mu s^{-1}$) C_T et C_L étant respectivement les vitesses des ondes ultrasonores transversales et longitudinales dans le matériau. Le maillage de la section est représenté par la Figure suivante :

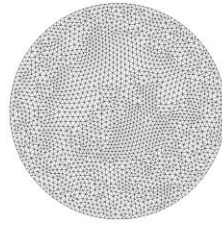


Figure A-1: Maillage de la section d'un cylindre plein de diamètre 5mm avec des éléments finis triangulaires de type P1

La courbure utilisée pour le calcul est égale à $\gamma = 0,04mm^{-1}$ ce qui revient à considérer un rayon de courbure de 25mm. Le calcul est effectué sur une plage fréquentielle allant de 0 à 1MHz. Les figures suivantes représentent les courbes de dispersion obtenues :

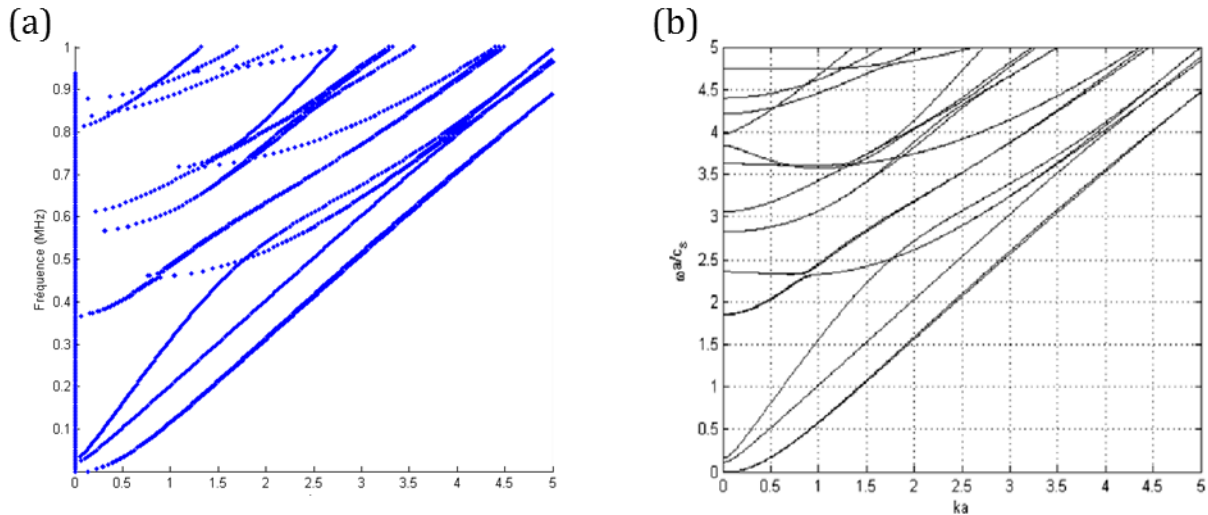


Figure A-2: Comparaison des courbes de dispersion en nombre d'ondes a) calculées et b) issues de la littérature [3] pour un cylindre plein de diamètre 5mm et ayant une courbure $\gamma = 0,04mm^{-1}$ dans la plage fréquentielle de 0 à 1MHz

Dans les faits, ces courbes représentent le nombre d'onde adimensionnel ka en fonction de la fréquence adimensionnelle définie par la relation $\omega a / C_T$ avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et $a = 2,5mm$ le rayon du cylindre.

Discussion :

La comparaison des courbes de dispersion montre une très bonne concordance. Lors de la résolution des équations de propagation, les modes de flexions correspondent aux solutions doubles du système déphasées de $\pi/2$. Ces solutions vont par paire, sont identiques et représentent un seul et même mode de flexion dans le cas d'un guide droit. Cependant, du fait de la présence d'une courbure non-nulle pour un guide coudé, ces deux solutions sont séparées et on se retrouve avec deux modes de flexion distincts. Sur les courbes de dispersion montrées plus haut, on peut remarquer que certaines branches relatives à des modes de flexions se séparent légèrement en deux branches avec l'augmentation de la fréquence. Ce phénomène est décrit de façon plus approfondie dans le corps du mémoire et des exemples plus significatifs sont montrés dans le cas de courbures plus importantes.

Enfin, étant donnée la faible courbure utilisée pour le calcul (le rayon de courbure équivaut à 12.5 fois le diamètre du cylindre) et malgré ce phénomène de séparation des branches des modes de flexions, les courbes de dispersion dans le cas coudé sont quasiment identiques à celles obtenues dans le cas du guide droit.

En pratique, dans le cas des canalisations industrielles coudées, la courbure est beaucoup plus importante et l'influence de celle-ci est beaucoup plus marquée.

Annexe B : DEVELOPPEMENTS INTERMEDIAIRES POUR L'OBTENTION DE LA MATRICE DE DIFFRACTION GLOBALE S_G

Dans l'article de BARONIAN *et al.* [99] certaines étapes de calcul n'ont pas été présentées, la présente annexe a pour objet de compléter cette partie.

On part des relations (III.53), (III.54) et (III.55) issues du troisième chapitre et rappelées ici :

$$\begin{cases} \mathbf{A}'_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}'_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2' \end{cases} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & \begin{cases} \mathbf{B}_1 = \mathbf{R}_1^1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_{21}^1 \mathbf{B}_2 & (a) \\ \mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1 & (b) \end{cases} \\ & (B.2) \\ & \begin{cases} \mathbf{B}'_2 = \mathbf{R}_2^2 \mathbf{A}'_2 + \mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3 & (c) \\ \mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_3^2 \mathbf{B}_3 + \mathbf{T}_{23}^2 \mathbf{A}'_2 & (d) \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{B}_2 = (\mathbf{R}_2^1)^{-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'_2 - \mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1) \\ \mathbf{A}'_2 = (\mathbf{R}_2^2)^{-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2' + \mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3) \end{cases} \quad (B.3)$$

On cherche d'abord à retrouver la relation reliant $\mathbf{B}_1$ à $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_3$:

Dans la relation donnant $\mathbf{B}_2$ en fonction de $\mathbf{A}'_2$ et $\mathbf{A}_1$ (B.3), on remplace $\mathbf{A}'_2$ par son expression en fonction de $\mathbf{B}'_2$ et $\mathbf{B}_3$ donnée par la relation (c) des équations (B.2) :

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{R}_2^1)^{-1}(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{R}_2^2)^{-1}(\mathbf{B}'_2 - \mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3) - \mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1) \quad (B.4)$$

En développant les différents termes, on aboutit à :

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{R}_2^2)^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_2' - (\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{R}_2^2)^{-1}\mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3 - (\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1 \quad (B.5)$$

Ce qui donne :

$$(\mathbf{I} - (\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{R}_2^2)^{-1}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{B}_2 = -(\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{R}_2^2)^{-1}\mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3 - (\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1 \quad (B.6)$$

En posant $\mathbf{\Lambda}^{13} = (\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{R}_2^2)^{-1}\mathbf{P}^{-1}$ et en remplaçant $\mathbf{B}_2$ par son expression à partir de la relation (a) de (B.2) on aboutit à :

$$(\mathbf{T}_{21}^1(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^{13})^{-1})^{-1}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{R}_1^1 \mathbf{A}_1) = -(\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{R}_2^2)^{-1}\mathbf{T}_{32}^2 \mathbf{B}_3 - (\mathbf{R}_2^1)^{-1}\mathbf{T}_{12}^1 \mathbf{A}_1 \quad (B.7)$$

Après factorisation des différents termes, on trouve l'expression de $\mathbf{B}_1$ en fonction de $\mathbf{B}_3$ et $\mathbf{A}_1$:

$$\mathbf{B}_1 = \left(\mathbf{R}_1^1 - \mathbf{T}_{21}^1 (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^{13})^{-1} (\mathbf{R}_2^1)^{-1} \mathbf{T}_{12}^1 \right) \mathbf{A}_1 - \left[\mathbf{T}_{21}^1 \left((\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^{13})^{-1} \mathbf{\Lambda}^{13} \mathbf{P} \mathbf{T}_{32}^2 \right) \right] \mathbf{B}_3 \quad (B.8)$$

En suivant la même démarche, on peut retrouver la relation reliant $\mathbf{A}_3$ à $\mathbf{B}_3$ et $\mathbf{A}_1$

ANNEXE C : BiFFT EXPERIMENTALE DE LA MAQUETTES DE TUBES 10'' COMPORTANT UN COUDE DE 70° A LA FREQUENCE DE 128KHz

À partir du Bscan expérimental réalisé sur la maquette constituée de tubes 10'' avec un coude d'ouverture angulaire de 70° et un rayon de courbure de 385mm à la fréquence de 128kHz et présenté dans la Figure C-1 qui suit :

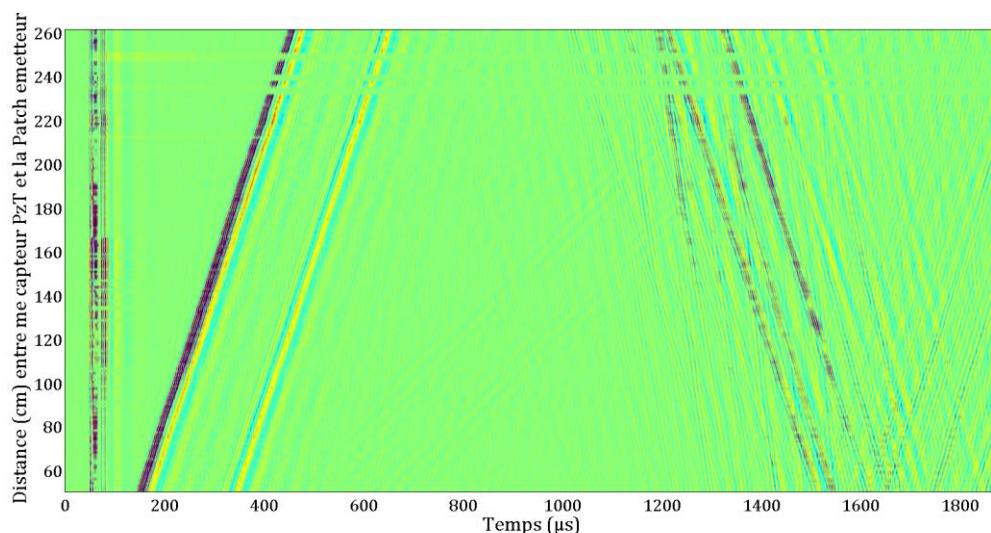


Figure C-1 : Bscan à 128kHz, pour les maquettes expérimentales 10'' 70° obtenues à partir de 210 mesures successives avec un pas de 0,5cm

On trace la BiFFT correspondante qui est donnée dans la Figure C-2 qui suit :

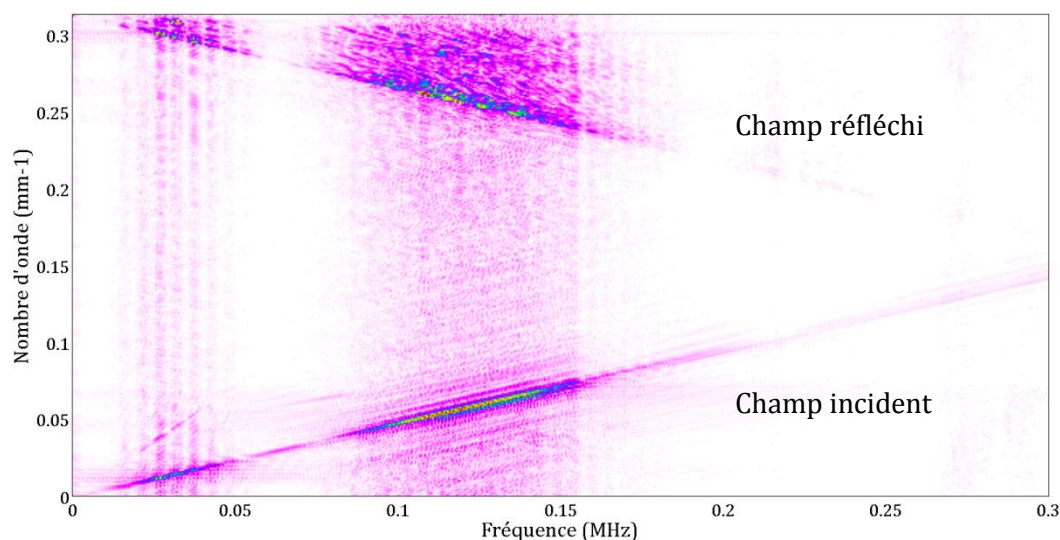


Figure C-2 : BiFFT obtenues à partir des signaux expérimentaux de mesures de déplacement orthoradial ponctuel réalisées sur la maquette 10'' comportant un coude de 70° à la fréquence centrale de 128kHz

À l'instar de la BiFFT obtenue pour la maquette 6'' avec un coude de 30°, on peut superposer les branches des courbes de dispersions du champ incident monochromatique et du champ réfléchi comportant les conversions de modes dues au coude avec les courbes de dispersions simulées grâce à notre modèle :

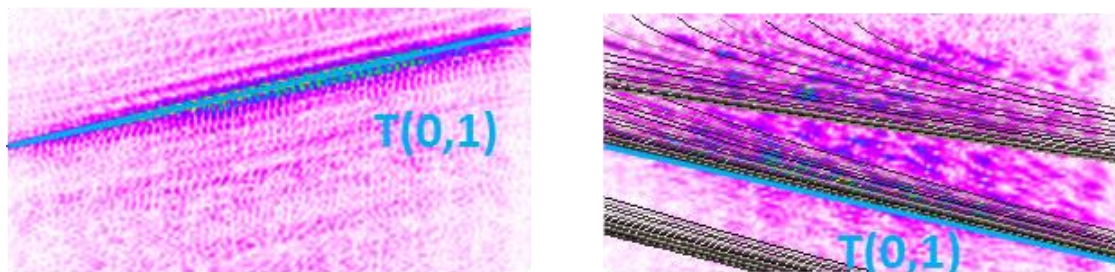


Figure C-3 : Zoom sur les modes composant le champ incident et le champ réfléchi par le coude de 70° de la maquette 10'' pour un mode incident $T(0,1)$ à 128kHz

Ces résultats permettent de retrouver les mêmes conclusions que celles faites pour le cas d'étude du chapitre 4, à savoir que:

- Le champ incident est exclusivement composé du premier mode de torsion $T(0,1)$
- Le signal d'excitation couvre une large bande fréquentielle centrée autour de 128kHz
- Le champ réfléchi est composé d'échos en mode de torsion mais également de contribution de modes de flexions créés par des conversions de modes produites par le coude.
- Tous les modes de flexions ne sont pas impliqués dans ce mécanisme. Ceux impliqués en priorité possèdent des composantes de déplacements orthoradiales importantes comme c'est le cas du mode $F(1,2)$ qui, à proximité de sa fréquence de coupure, possède un déplacement orthoradial prépondérant.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] «Présentation des méthodes de contrôles non-destructifs», Cofrend, [En ligne]. Available: <http://www.cofrend.com/contrôles-non-destructifs/les-cnd-cest-quoi/>.
- [2] Plateforme de simulation CIVA, [En ligne]. Available: www-civa.cea.fr.
- [3] F. Treyssède and L. L. Laguerre, "Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides," *J. Sound. Vib.*, vol. 329, pp. 1702-1716, 2010.
- [4] J. L. Rose, "A baseline and vision of ultrasonic guided wave inspection potential," *J. Press. Vessel Tech.*, vol. 124, pp. 274-282, 2002.
- [5] D. Royer and E. Dieulesaint, *Ondes élastiques dans les solides*, volume 2, Masson, 1996.
- [6] J. D. Achenbach, *Wave propagation in elastic solids*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V, 1975.
- [7] M. J. S. Lowe and P. Cawley, "Long range guided wave inspection usage - Current commercial capabilities and research directions," Department of Mechanical Engineering - Imperial College London, 2006.
- [8] P. Cawley, "Practical long range guided wave inspection-Applications to pipes and rail," in *NDE2002. National Semina of ISNT*, Chennai, 2002.
- [9] P. Cawley and D. Alleyne, "Practical long range guided wave inspection - Managing complexity," in *MENDT*, Jubail Industrial City, 2004.
- [10] CETIM, 2014. [En ligne]. Available: <http://www.cetim.fr/fr>.
- [11] Guided Wave analysis LLC, 2007. [Online]. Available: www.gwaanalysis.com.
- [12] P. W. Loveday, "Guided wave inspection and monitoring of railway track," *J. of Nondestruct. Eval*, vol. 31, pp. 303-309, 2012.
- [13] D. ROYER et E. DIEULESAINT, *Ondes élastiques dans les solides*, volume 2, Masson, 1996.
- [14] J. D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V, 1975.
- [15] H. Lamb, "On waves in an elstic plates," *Proc. Royal Society*, vol. 93, pp. 114-128, 1917.
- [16] C. Chree, "The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates their solutions and application," *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 14, pp. 250-369, 1889.
- [17] L. Rayleigh, "On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic matter," *Proc. Londonc Math. Soc.*, Vols. s1-20(1), pp. 225-237, 1888.
- [18] A. E. H. Love, *Some problems of geodynamics*, London: Cambridge University Press, 1911.
- [19] I. Viktorov, *Rayleigh and Lamb waves*, New York: Plenum Prss, 1967.
- [20] A. Nayfeh and D. Chimenti, "Free wave propagation in plates of general anisotropic media," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, pp. 881-886, 1989.
- [21] L. Haskell, "Dispersion of surface waves on multilayered media," *Bull. Seism. Soc.*

- Am*, vol. 43, pp. 17-34, 1953.
- [22] B. Chapuis, Contrôle santé intégré par méthode ultrasonore des réparations composites collées sur des structures métalliques, Thèse de doctorat de l'université Paris 7, 2010.
 - [23] B. N. Pavlakovic, *Leaky guided ultrasonic waves in NDT*, London: Imperial College London, University of London, 1998.
 - [24] J. Zemanek, "An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder," *J. Acoust. Soc. Am*, vol. 51, pp. 265-283, 1972.
 - [25] M. D. Beard, *Guided wave inspection of embedded cylindrical structures*, PhD Thesis, Imperial College, London, 2002.
 - [26] J. O. Davies, *Inspection of pipes using low frequency focused guided waves*, PhD Thesis, Imperial College London, 2008.
 - [27] D. C. Gazis, "Three dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders," *J. Acoust. Soc. Am*, vol. 31, pp. 568-578, 1959.
 - [28] M. G. Silk and H. D. Bainton, "The propagation in metal tubing of ultrasonic wave modes equivalent to Lamb waves," *Ultrasonics*, vol. 17, pp. 11-19, 1979.
 - [29] C. Chree, "Longitudinal vibrations of a circular bar," *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 21, pp. 287-298, 1886.
 - [30] V. Baronian, *Couplage des méthodes modales et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guide*, thèse de doctorat de l'École Polytechnique, 2009.
 - [31] D. Gridin, R. V. Craster, J. Fong, M. Lowe and M. Beard, "The high-frequency asymptotic analysis of guided waves in a circular elastic annulus," *Wave Motions*, vol. 38, pp. 67-90, 2003.
 - [32] P. D. Wilcox, R. P. Dalton, M. J. S. Lowe and P. Cawley, "Mode and transducer selection for long range Lamb wave inspection," *Key Eng. Materials Proc. Damas*, vol. 34, pp. 152-161, 1999.
 - [33] D. N. Alleyne, T. Vogt and P. Cawley, "The choice of torsional or longitudinal excitation in guided wave pipe inspection," *Insight*, vol. 51, pp. 373-377, 2009.
 - [34] A. Demma, P. Cawley, M. Lowe and A. G. Roosenbrand, "The reflection of fundamental torsional mode from cracks and notches in pipes," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 114(3), pp. 611-625, 2003.
 - [35] P. Cawley, M. J. S. Lowe, F. Simonetti, C. Chevalier and A. G. Roosenbrand, "The variation of the reflection coefficient of extensional guided waves in pipes from defects as a function of defect depth, axial extent, circumferential extent and frequency," *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 216(C), pp. 1131-1143, 2002.
 - [36] X. Wang, P. W. Tse, C. K. Mechefske and M. Hua, "Experimental investigation of reflection of guided wave-based inspection for the characterization of pipeline defects," *NDT&E International*, vol. 43, pp. 362-374, 2010.
 - [37] J. L. Rose and X. Zhao, "Flexural mode tuning for pipe elbow inspection," *Mater. Eval.*, vol. 59, pp. 621-624, 2001.
 - [38] J. L. Rose, Z. Sun, P. J. Mudge and M. J. Avioli, "Guided wave flexural mode tuning and focusing for pipe testing," *Materials Evaluation*, pp. 162-167, 2003.
 - [39] J. J. Ditri, J. L. Rose and G. Shen, "Mode selection guideline for defect detection optimisation using Lamb Waves," *Rev. Prog. QNDE*, vol. 11, pp. 2109-2015, 1992.

- [40] L. Jian et J. L. Rose, «Excitation and propagation of non-axisymmetric guided waves in a hollow cylinder,» *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 109 (2), pp. 457-464, 2001.
- [41] M. Hirao et H. Ogi, EMATs for science and industry - noncontacting ultrasonic measurements, Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [42] H. J. Shin and S. J. Song, "Time-localised frequency analysis of ultrasonic guided waves for non-destructive testing," *Rev. Prog. QNDE*, vol. 19, pp. 709-716, 2000.
- [43] D. Alleyne and P. Cawley, "A two dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 89, pp. 1159-1168, 1991.
- [44] J. Li and J. L. Rose, "Angular-profile tuning of guided waves in hollow cylinders using a circumferential phased array," *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 12, pp. 1720-1729, 2002.
- [45] K. R. Leonard and M. K. Hinders, "Guided wave helical ultrasonic tomography of pipes," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 114(2), pp. 767-774, 2003.
- [46] Teletest, "Teletest Focus +," Plant integrity, [Online]. Available: <http://www.teletestfocus.com/teletest-focus-plus/>.
- [47] Guided Ultrasonics LTD, [Online]. Available: <http://www.guided-ultrasonics.com/>.
- [48] Olympus, «UltraWave LRT,» [En ligne]. Available: <http://www.olympus-ims.com/fr/ultrawave/>.
- [49] R. K. Pattanayak, K. Balasubramaniam and P. Rajagopal, "Ultrasonic guided waves in eccentric annular pipes," *Review of Progress in Quantitative NDE, Edited by D. O. Thompson and D. E. Chimenti (American institute of Physics, Melville, NY, 2001)*, vol. 1581, p. 279, 2014.
- [50] M. S. Choi, S. Y. Kim, H. Kwun and G. M. Light, "Transmission line model for simulation of guided-wave defect signals in piping," *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 51, pp. 640-643, 2004.
- [51] H. Kwun and S. Y. Kim, "Guided-wave defect signal simulation based on transmission lin model," *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation, edited by D. O. Thompson and D. E. Chimenti (American Institute of Physics)*, vol. 27, pp. 163-169, 2008.
- [52] A. Galvagni and P. Cawley, "The reflection of guided waves from simple supports in pipes," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 129 (4), pp. 1869-1880, 2011.
- [53] T. Vogt, M. J. S. Lowe and P. Cawley, "The scattering of guided waves in partly embedded cylindrical structures," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 113 (3), pp. 1258-1272, 2003.
- [54] T. Vogt, M. J. S. Lowe and P. Cawley, "Ultrasonic waveguide techniques for the measurement of material properties," *Review of Progress in Quantitative NDE, Edited by D. O. Thompson and D. E. Chimenti (American institute of Physics, Melville, NY, 2001)*, vol. 21, pp. 1742-1749, 2001.
- [55] C. Aristegui, M. J. S. Lowe and P. Cawley, "Guided waves in fluid-filled pipes surrounded by different fluids," *Ultrasonics*, vol. 39, pp. 367-375, 2001.
- [56] F. Simonetti, Sound propagation in lossless waveguides coated with attenuative materials, London: Imperial College London, University of London, 2003.
- [57] F. Simonetti and P. Cawley, "Ultrasonic interferometry for the measurement of shear velocity and attenuation in viscoelastic solids," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 115, pp. 157-164, 2004.

- [58] J. N. Barshinger and J. L. Rose, "Guided wave propagation in an elastic hollow cylinder coated with a viscoelastic material," *IEEE Transactions on ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 51, pp. 1547-1556, 2004.
- [59] L. Garverick and S. D. Henry, Corrosion in the petrochemical industry, Materials Park OH: ASM International, 1994.
- [60] J. J. Ditri, "Utilization of guided elastic waves for the characterization of circumferential cracks in hollow cylinders," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 96, pp. 3769-3775, 1994.
- [61] R. Caradente, A. Lovstad and P. Cawley, "The influence of sharp edges in corrosion profiles on the reflection of guided waves," *NDT&E International*, vol. 52, pp. 57-68, 2012.
- [62] W. THOMSON, «Transmission of elastic waves through a stratified solid medium,» *Journal of Applied Physics*, vol. 21, p. 89-93, 1950.
- [63] B. Pavlakovic, M. J. S. Lowe, D. Alleyne and P. Cawley, "DISPERSE: A general purpose program for creating dispersion curves," *Rev. Prog. QNDE*, vol. 17, pp. 185-192, 1997.
- [64] G. Inquiétude, Simulation numérique de la propagation des ondes dans les structures composites stratifiées, Lyon: Thèse de doctorat de l'école Centrale Lyon, 2008.
- [65] M. N. Ichchou, W. J. Zhou and J. M. Mencyk, "Wave finite element for low and mid-frequency description of coupled structures with damage," *Comput. Method. Appl. Mech.*, vol. 319, pp. 335-354, 2009.
- [66] D. J. Mead, "A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling," *J. Sound Vib.*, vol. 27(2), pp. 429-438, 1973.
- [67] M. Mazzotti, A. Marzani, I. Bartoli and E. Viola, "Guided waves dispersion analysis for prestressed viscoelastic waveguides by means of the SAFE method," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49 (18), pp. 2359-2372, 2012.
- [68] A. Frikha, Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les guides multi-brins hélicoïdaux précontraints, thèse de doctorat de l'école doctorale des sciences pour l'ingénieur, géosciences, architecture, université de Nantes, 2010.
- [69] L. Castaings and M. J. S. Lowe, "Finite element model for waves guided along solid media systems of arbitrary section coupled to infinite solid media," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123 (2), pp. 696-708, 2008.
- [70] J. B. Keller and D. Givoli, "Non-reflecting boundary conditions for elastic waves," *Wave Motion*, vol. 12, pp. 267-279, 1990.
- [71] F. Nataf, "A new approach to perfectly matched layers for the linearized Euler system," *J. Comp. Phys.*, vol. 214, p. 757-772, 2006.
- [72] E. A. Skelton, S. D. M. Adams and R. V. Craster, "Guided elastic waves and perfectly matched layers," *Wave Motion*, vol. 44, pp. 573-592, 2007.
- [73] E. Bécache, S. Fauqueux and P. Joly, "Stability of perfectly matched layers, group velocity and anisotropic waves," *J. Comput. Physics*, vol. 188, pp. 399-433, 2003.
- [74] K. Jezzine and A. Lhémery, "Simulation of guided wave inspection based on the reciprocity principle and the semi-analytical finite element method," *Rev. Prog. QNDE*, vol. 26, pp. 39-46, 2007.
- [75] B. A. Auld, Acoustic fields and waves in solids vol II, Vols. ED-18, Malabar, Florida: Krieger publishing company, 1973, pp. 898-908.
- [76] K. Jezzine, Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs

- par ondes élastiques guidées, thèse de doctorat de l'Université Bordeaux 1, 2006.
- [77] T. Hayashi, K. Kawashima, Z. Sun and J. -L. Rose, "Guided wave propagation mechanics across a pipe elbow," *J. Press. Vessel Tech.*, vol. 127, pp. 322-327, 2005.
 - [78] A. Demma, P. Cawley, M. Lowe and B. Pavlakovic, "The effect of bends on the propagation of guided waves in pipes," *J. Press. Vessel Tech.*, vol. 127, pp. 328-335, 2005.
 - [79] T. Hayashi and J. -L. Rose, "Guided wave simulation and visualization by a semi-analytical finite element method," *Materials Evaluation*, vol. 60, pp. 75-79, 2003.
 - [80] L. Gavric, "Computation of propagative waves in free rail using finite element technique," *J. Sound. Vib*, vol. 185(3), pp. 531-543, 1995.
 - [81] R. Nelson and S. Dong, "High frequency vibrations and waves in laminated orthotropic plates," *J. Sound Vib*, vol. 30, pp. 33-44, 1973.
 - [82] K. -J. Bathe, Finite element procedures in engineering analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.
 - [83] J. H. Heinbockel, Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Trafford, 1996.
 - [84] S. B. Dong and R. B. Nelson, "On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates," *J. Appli. Mech.*, vol. 39, pp. 739-745, 1972.
 - [85] W. Zhuang, A. H. Shah and S. B. Dong, "Elastodynamic Green's function for laminated anisotropic circular cylinders," *J. Appl. Mech.*, vol. 66, pp. 665-674, 1999.
 - [86] T. Hayashi, K. Kawashima, Z. Sun and J. -L. Rose, "Analysis of flexural mode focusing by a semi analytical finite element methode," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 113, pp. 1241-1248, 2003.
 - [87] V. Damjanovic and R. L. Waever, "Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguide of arbitrary cross section," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 115, pp. 1572-1580, 2004.
 - [88] T. Hayashi, W. J. Song and J. -L. Rose, "Guided waves dispersion curves for a bar with an arbitrary cross section, a rod rail example," *Ultrasonics*, vol. 41, pp. 175-183, 2003.
 - [89] O. M. Mukdadi and S. Datta, "Transient ultrasonic guided waves in layered anisotropic plates with rectangular cross section," *J. Appl. Phys.*, vol. 29, pp. 729-734, 2003.
 - [90] L. Taupin, Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation, thèse de doctorat de l'École Polytechnique, 2010.
 - [91] H. Oudin, Introduction à la méthode des éléments finis, Ecole Centrale de Nantes, 2011.
 - [92] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79(11), pp. 1309-1331, 2009.
 - [93] O. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The finite element method: The basis, Oxford: Butterworth Heinemann, 2000.
 - [94] A. Galan and R. Abascal, "Lamb wave scattering by defects: a hybrid boundary element-finite element formulation," *Rev. Prog. QNDE*, vol. 21, pp. 211-217, 2002.

- [95] J. Park and E. Kausel, "Numerical dispersion in the thin-layer method," *Computers and Structures*, vol. 82, pp. 607-625, 2004.
- [96] F. Feng and S. Lin, "The band gaps of Lamb waves in a ribbed plate: A semi-analytical approach," *J. Sound. Vib.*, vol. 333, pp. 124-131, 2014.
- [97] F. Feng, J. Shen and S. Lin, "Scattering matrices of Lamb waves at irregular surface and void defects," *Ultrasonics*, vol. 52, pp. 760-766, 2012.
- [98] V. Pagneux and A. Maurel, "Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness," *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 462, pp. 1315-1339, 2006.
- [99] V. Baronian, V. Lhémery and K. Jezzine, "Hybrid SAFE/FE simulation of inspections of elastic waveguides containing several local discontinuities or defects," in *Review of Progress in QNDE*, ed. by D.O. Thompson and D. E. Chimenti, *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics, Melville, NY, vol. 1211, pp. 183-190, 2010.
- [100] P. Kirrmann, "On the completeness of Lamb modes," *J. Elasticity*, vol. 37, p. 39-69., 1995.
- [101] H. Besserer and P. G. Malischewski, "Mode series expansions at vertical boundaries in elastic boundaries in elastic waveguides," *Wave Motion*, vol. 39, pp. 41-59, 2004.
- [102] A. -S. Bonnet-Ben Dhia, C. Champeyron and G. Legendre, "On the use of perfectly matched layers in the presence of long or backward propagating guided elastic," *Wave Motion*, vol. 51, pp. 266 - 283, 2014.
- [103] E. Le Clézio, Diffraction des ondes de Lamb par des fissures verticales, Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux 1, 2001.
- [104] V. Pagneux and A. Maurel, "Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides," *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 458, pp. 1913-1930, 2002.
- [105] W. B. Fraser, "Orthogonality relation for the Rayleigh-Lamb modes of vibration of a plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 59, pp. 215-216, 1976.
- [106] M. E. Duncan Fama, "Radial eigenfunctions for the elastic circular cylinder," *Quart. Journ. Mech. and App. Math.*, vol. 25, pp. 479-495, 1972.
- [107] W. B. Fraser, "An orthogonality relation for the modes of wave propagation in an elastic circular cylinder," *J. Sound. Vib.*, vol. 43(3), pp. 568-571, 1975.
- [108] J. D. Achenbach, Reciprocity in elastodynamics, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [109] B. A. Auld, "General electromechanical reciprocity relations applies to the calculation of elastic wave scattering coefficients," *Wave Motion*, vol. 1, pp. 3-10, 1979.
- [110] R. D. Gregory, "A note on bi-orthogonality relations for elastic cylinders of general cross section," *J. Elast.*, vol. 13, pp. 351-355, 1981.
- [111] T. Itoh, Numerical techniques for microwaves and millimeter-wave passive structure, John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [112] R. Mittra, Analytical techniques in the theory of guided waves, Macmillan, New York, 1971.
- [113] D. Huang, M. Redekop and B. Xu, "Natural frequencies and mode shapes of curved pipes," *Comput. Struct*, vol. 18, pp. 465-473, 1997.
- [114] B. Verma, T. K. Mishra, K. Balasubramaniam and P. Rajagopal, "Interaction of low-frequency axisymmetric ultrasonic guided waves with bends in pipes of arbitrary bend angle and general bend radius," *Ultrasonics*, vol. 54, pp. 801-808, 2014.

- [115] M. Redekop, "Dynamic response of curved pipes," *Int. J. Pressure Vessels Piping*, vol. 63, pp. 167-172, 1997.
- [116] L. Salley and J. Pan, "A study of the modal characteristics of curved pipes," *Appl. Acoust.*, vol. 60, pp. 189-202, 2002.
- [117] N. Nishino, T. Tanaka, S. Katashima and Y. Kenichi, "Experimental investigation of mode conversion of the T(0,1) mode guided wave propagating in an elbow pipe," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 50 Article 046601, 2011.
- [118] A. Demma, The interaction of guided waves with discontinuities in structures, PhD Thesis, London University, 2003.
- [119] R. M. Sanderson, D. A. Hutchins, D. R. Bilson and P. J. Mudge, "The investigation of guided wave propagation around a pipe bend using an analytical modeling approach," *J. Acoust. Soc. Am*, vol. 133 (3), pp. 1404-1414, 2013.
- [120] T. E. ToolBox, "The Engineering ToolBox," [Online]. Available: http://www.engineeringtoolbox.com/ansi-steel-pipes-d_305.html.
- [121] K. Heller, L. J. Jacob and J. Qu, "Characterisation of adhesive bond properties using Lamb waves," *NDT & E International*, vol. 33, pp. 555-563, 2000.
- [122] D. Balageas, B. Chapuis, G. Deban et F. Passily, «Evaluation quantitative de l'amélioration apportée par la méthode TSR à la détection de défauts par thermographie stimulée impulsionnelle. Cas d'un patch composite instrumenté,» *Congrès Français de Thermique Energies et Transports durables, SFT, Le Touquet*, 2010.
- [123] L. Taupin, A. Lhémy and G. Inquiété, "A detailed study of guided wave propagation in a viscoelastic multilayered anisotropic plate," *J. Phys. Conf. Ser*, Vols. 269, 012002, 2011.
- [124] L. Taupin, A. Lhémy, V. Baronian and A. S. Bonnet-Ben Dhia, "Scattering of obliquely incident guided waves by a stiffener bonded to a plate," *J. Phys. Conf. Ser.*, Vols. 353, 012011, 2012.
- [125] G. R. Liu and J. D. Achenbach, "Strip element method to analyse wave scattering by cracks in anisotropic laminated plates," *J. Appl. Mech.*, vol. 61, pp. 270-277, 1995.
- [126] J. Ma, On-line measurements of contents inside pipes using guided ultrasonic waves, London: Imperial College London, University of London, 2007.
- [127] Z. C. Xi, G. R. Liu, K. Y. Lam and H. M. Shang, "A strip element method for analyzing wave scattering by a crack in an immersed axisymmetric laminated composite cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 108, pp. 175-183, 2000.
- [128] A. H. Meitzler, «Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylindres and plates,» *J. Acoust. Soc. Am*, vol. 38, pp. 835-842, 1965.

RESUME

La thèse s'inscrit dans les travaux du CEA LIST pour développer dans la plate-forme CIVA un module simulant le contrôle non-destructif (CND) par ondes ultrasonores guidées ; elle est dédiée au développement et à la validation de modèles simulant l'inspection de canalisations et se focalise sur le cas de canalisations comportant un ou plusieurs coudes. Pour prédire l'effet de la courbure sur les ondes guidées, une extension en coordonnées curvilignes de la méthode des éléments finis semi-analytiques est réalisée pour calculer les modes se propageant dans un coude, par résolution d'un système d'équations aux valeurs propres restreint à la section du guide. Ce développement a aidé à comprendre les effets de distorsion des champs ultrasonores et de décalage des fréquences de coupures dus à la courbure. La diffraction des ondes à la jonction entre un tube droit et un coude est ensuite calculée par raccordement modal donnant la matrice de diffraction de la jonction ; les éléments de la matrice s'obtiennent par évaluation numérique d'intégrales à la surface de la jonction. Les matrices de diffractions locales sont enfin combinées à des matrices de propagation pour rendre compte de la présence de plusieurs diffracteurs sur la canalisation, sous forme d'une matrice globale de diffraction. Le coût minimal de son calcul permet d'étudier l'influence des paramètres de contrôle et de les optimiser. Les modèles sont validés en comparant leurs prédictions avec des résultats numériques et expérimentaux de la littérature et des mesures faites au CETIM sur maquettes industrielles. Intégrés à la plate-forme CIVA, ils étendent les possibilités du module de simulation du CND par ondes guidées.

Mots clés : Ondes guidées, contrôles non-destructifs, méthode modale, modélisation, simulation, validation, contrôle de canalisations.

ABSTRACT

The thesis is in the framework of developments made at CEA LIST of a module of the CIVA platform to simulate nondestructive testing (NDT) by ultrasonic guided waves; it is dedicated to the development and the validation of models simulating the examination of pipelines and is focussed on the case of pipeline comprising one or several elbows. To predict effects due to the curvature on guided waves, an extension in curvilinear coordinates of the semi-analytic finite element method is worked out to compute modes propagating in an elbow, by solving an eigen system restricted to the guide section. This development allows us to better understand effects due to the curvature such as displacement field distortions or cut-off frequencies splits. The scattering of waves at the junction between a straight tube and an elbow is then computed by means of the mode-matching method, leading to the modal scattering matrix of the junction; matrix elements are obtained by numerical evaluation of integrals over the junction surface. Local scattering matrices are finally combined to propagation matrices to account for the presence of several scatterers in the pipeline, to form a global scattering matrix. Its minimal computation cost allows us to study the influence of the parameters of the testing configuration and to optimize them. Models are validated by comparing their predictions to numerical and experimental results of the literature and to measurements made at CETIM on industrial mock-ups. Integrated in the platform CIVA, the developed models extend the capabilities of the guided wave NDT module.

Keywords°: Guided waves, non-destructive testing, modal method, modelling, simulation, validation, pipelines inspections.