UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE
ÉCOLE DOCTORALE DE DAUPHINE
Centre de Recherche en Mathématiques de la Décision

ANALYSE ET MESURE DU RISQUE SYSTÉMIQUE

THÈSE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES – MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

(Arrêté du 7 août 2006)

présentée et soutenue publiquement par

Jean-Cyprien HÉAM

27 Janvier 2015

JURY

Directeur de thèse	**Christian GOURIÉROUX** Professeur, Université Paris-Dauphine
Rapporteurs	**Jean-Paul LAURENT** Professeur, Université Paris-I Sorbone **Georges DIONNE** Professeur, HEC Montréal
Examinateurs	**Stéphane GRÉGOIR** Directeur de la méthodologie et de la coordination statistique et internationale de l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques **Alain MONFORT** Professeur, École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique **Bertrand VILLENEUVE** Professeur, Université Paris-Dauphine **Jean-Michel ZAKOÏAN** Professeur, Université Lille-III

L'Université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

Remerciements

Si j'ai bien compris mes cours d'économétrie, une thèse pourrait se modéliserer comme une série temporelle, une variable aléatoire définie sur plusieurs dates. Ce manuscrit serait une trajectoire, la suite des valeurs prises par cette variable aléatoire temporelle à chaque date. À l'aide de quelques équations, j'écrirais que la valeur à chaque date dépend de la valeur à la date précédente et d'un choc, d'un "petit" mouvement inattendu. À la limite, la valeur finale de la thèse est une combinaison, plus ou moins sophistiquée, de ces chocs. Les chocs positifs ont tiré cette thèse vers le haut tandis que les chocs négatifs l'ont tirée vers le bas. Si j'ai bien compris mes cours d'économie, ces chocs peuvent parfois être interprétés comme des interventions ou des effets de "quelque chose" qui affecte le système considéré : la crise des subprime sur le PIB par exemple.

Indubitablement, par son encadrement Christian Gouriéroux a structuré massivement et positivement les chocs. Je crois qu'avec Chrisitan Gouriéroux comme directeur de thèse les chocs ne sont pas distribués autour de 0 mais sensiblement à droite de 0. J'exprime donc ma profonde gratitude envers Christian Gouriéroux pour m'avoir encadré tout au long de cette thèse. Ses conseils, son soutien, ses encouragements autant que ses critiques m'ont grandement aidé dans mes projets de recherche, et plus généralement dans ma façon d'aborder le métier d'"économiste-statisticien".

L'économètre introduit parfois une dépendence temporelle entre les chocs : le choc à une date donnée trouve un écho à une date ultérieure. Il y a quelques années Jean-Paul Laurent a été mon enseignant et je n'aurais assurément pas eu un goût pour la recherche sans ses enseignements. Je le remercie sincèrement pour avoir rapporté cette thèse. Même s'il peut exister des dépendences temporelles, les "chocs" sont par nature inattendus. Je souhaite ainsi exprimer ma sincère gratitude à Georges Dionne pour me faire l'honneur –inattendu– de rapporter ma thèse.

Mes remerciements s'adressent aussi à Stéphane Grégoir, Alain Monfort, Bertrand Villeneuve et Jean-Michel Zakoïan pour leur participation à mon jury de thèse. Tous ont, à un moment ou à un autre, joué un rôle significatif dans mon projet de thèse. En particulier, travailler avec Alain Monfort a été un plaisir.

Une question récurrente sur les chocs est celle de leur stabilité, appelée homoscedascité. J'ai pu profiter d'un environnement stable de travail au sein de la Direction des Études de l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution avec l'appui d'Olivier de Bandt et d'Henri Fraisse. Ces remerciements s'étendent à l'ensemble des mes collègues de l'ACPR qui m'ont soutenu au cours de ce projet. Je tiens en particulier à remercier Cécile, Claire et Sophie pour la bonne humeur qu'elles savent instiller. J'ai aussi bénéficié de l'excellent environnement de travail si typique du laboratoire de Finance-Assurance du CREST : Christian, Fanda, Erwan bien sûr, Gaëlle, Guiseppe, Guillaume, Guillaume, Jeremy, Mathilde (même si elle n'est plus au labo), Olivier, Serge, Simon, Yang... ainsi que Bertrand, Christophe, Hélène et Jean-Paul même s'ils ne sont pas du LFA. Je tiens aussi à remercier en particulier Alain Trognon et Céline Grislain-Letremy pour leurs conseils.

Réaliser cette thèse a connu quelques difficultés –disons des chocs négatifs– que j'ai pu surmonter grâce à l'équilibre qu'apportent les proches, famille et amis. Merci à Gilette, Nicole et Gérard, Ludovic, Julie, Hugues, Alexandre et Guillaume, Pierre-Cyrille, Anne, Arthur, Margaux, Isaure et Faustine, Anne-Sarah, Cyrille, Bastien, Clarisse et Anselme, Daniel et Danièle, Kiwan, Melina et Monica... comme à Aline, Aline, Damien, Gauthier, Julien, Juliette, Kiwi, Sophie et Vincent... Merci !

Je souhaite remercier Yona pour son amour qui me fait avancer un peu plus chaque jour. Je lui dédie ma thèse.

Résumé.

Cette thèse contribue en quatre chapitres à l'analyse et la mesure du risque systémique. Le premier chapitre discute la notion de risque systémique et détaille les enjeux méthodologiques de sa modélisation. Le deuxième chapitre propose un modèle structurel de contagion en solvabilité. Ce modèle d'équilibre permet de mesurer le risque de contagion en distinguant l'effet direct d'un choc de sa propagation. Dans le troisième chapitre, nous fournissons un cadre de valorisation de la dette d'une institution intégrant l'effet des interconnexions entre institutions. Nous calculons une prime de risque spécifiquement liée aux interconnexions. Dans le quatrième chapitre, nous modélisons les effets conjoints de chocs à l'actif et au passif d'une institution financière. Nous adaptons les mesures usuelles de risque pour identifier les risques de marché, de financement et de liquidité de marché. Enfin, nous expliquons comment déterminer la composition et le niveau des réserves réglementaires pour limiter le risque de défaut.

Mots clés : risque systémique, politique macroprudentielle, contagion, liquidité

Abstract.

This thesis contributes to the analysis and measure of systemic risk through four chapters. In the first chapter, we discuss the notion of systemic risk and detail the methodological issues of modeling. The second chapter proposes a structural model of solvency contagion. Within an equilibrium model, we measure the contagion by identifying the direct effect of an external shock and its propagation. In the third chapter, we provide a pricing framework for financial institution's debt encompassing the effect of interconnections between institutions. We compute a risk premium specific to interconnections. In the last chapter, we model the joint effects of the shocks on the asset side and on the liability side of a financial institution. We adapt the usual risk measures to pinpoint the funding liquidity risk and the market liquidity risk. Lastly, we explain how to set the level and the composition of regulatory reserves to control for default risk.

Keywords: systemic risk, macroprudential policy, contagion, liquidity

Sommaire

Introduction **1**

I Analyse du risque systémique, mesure du risque de contagion **5**

II Bilateral Exposures and Systemic Solvency Risk **45**

III Liquidation Equilibrium with Seniority and Hidden CDO **81**

IV Funding Liquidity Risk From a Regulatory Perspective **115**

V Perspectives **165**

Bibliographie **169**

Annexes **179**

Introduction

L'ampleur de la dernière crise financière a engendré une refonte des mécanismes de supervision du secteur financier. En particulier, suite au rapport Larosière (de) (2009), le Parlement Européen a voté la création d'une nouvelle instance de supervision : le Comité Européen du Risque Systémique (ESRB pour European Systemic Risk Board). Une partie de la réaction politique européenne à la crise financière a donc été de disposer d'une instance dédiée au risque systémique en complément du trio usuel d'autorités de supervision financière : autorité des marchés financiers (ESMA pour European Securities and Market Authority), autorité des banques (EBA pour European Banking Authority) et autorité des assurances (EIOPA pour European Insurance and Occupational Pensions Authority). Ainsi selon le règlement de l'UE 1092/2010, "le Comité Européen du Risque Systémique devrait avoir pour tâche de surveiller et d'évaluer le risque systémique en temps normal afin d'atténuer l'exposition du système au risque de défaillance d'éléments systémiques et d'améliorer la résistance du système financier aux chocs". Ce mandat précise à la fois les objectifs et la manière de les remplir. Un point clef est que la manière –"surveiller et évaluer le risque systémique"– nécessite des outils de mesure.

Disposer d'outils de mesure du risque n'est pas un enjeu récent en finance. La nouveauté, et donc une partie de la difficulté, est dans l'objet de la mesure. Mesurer le risque d'un prêt immobilier revient à résumer sous forme de quelques chiffres l'incertitude sur la capacité d'un ménage à rembourser le prêt contracté. Il vient vite à l'esprit que le montant du prêt, les revenus du ménage, la stabilité de ses

revenus... sont des grandeurs pertinentes pour évaluer ce risque. S'en suit une étape de modélisation où ces grandeurs sont agrégées, combinées pour fournir un score de crédit. Si le directeur d'une agence bancaire ne peut accorder qu'un prêt alors que deux ménages lui déposent un dossier, il peut en comparant les scores associés à chaque projet se décider entre les deux. Cette démarche intuitive pour quelque chose d'aussi familier qu'un prêt immobilier doit être adaptée à quelque chose de beaucoup moins limpide, le risque systémique. Cette thèse contribue à cet objectif en apportant une analyse du concept de risque systémique ainsi que des outils pour le mesurer.

Il serait élégant que la conception de l'outil de mesure soit indépendante de l'étape de réflexion sur la définition du risque systémique. Cependant, nous montrons dans le premier chapitre que l'analyse du concept et le développement de sa mesure sont des processus qui se nourrissent mutuellement. Ce type de dépendance se rencontre régulièrement en sciences physiques. Si le Comité Européen du Risque Systémique vient en complément des autorités usuelles, et non en remplacement, il doit d'une part apporter un point de vue nouveau et d'autre part être compatible avec elles. Nous adoptons la même démarche en cherchant à définir le risque systémique dans le prolongement des différents risques déjà clairement identifiés. Cette approche nous permet de voir le risque systémique comme un élément jusqu'alors négligé. Nous pouvons ainsi étendre les techniques existantes pour le prendre en compte, ainsi qu'identifier les grandeurs pertinentes à sa mesure. La nécessité que les mesures puissent devenir des outils effectifs de suivi des risques nous amène à discuter des contraintes de modélisation découlant de la disponibilité des données. Ces éléments analytiques nous permettent de proposer des axes pour améliorer l'adéquation entre les outils techniques de suivi des risques financiers et les objectifs de politiques publiques de supervision qui leur sont associés.

Après avoir dressé ce panorama sur les liens entre modèles économétriques et politique macroprudentielle, nous présentons au deuxième chapitre une modélisation du risque de contagion entre institutions financières. Ce modèle repose sur un équilibre entre les bilans de différentes institutions. Cet équilibre nous permet de comprendre comment les aléas que subit une institution sont répercutés auprès de ses partenaires, et plus généralement au sein du système tout entier. Cette dynamique de propagation est un phénomène de contagion, qui est une composante majeure du risque systémique. Nous montrons aussi comment utiliser ce modèle d'équilibre pour décomposer l'effet d'un choc en un effet exogène pur et un effet endogène au système. Nous pouvons ainsi mesurer le risque de contagion.

Nous prolongeons cette perspective dans le troisième chapitre en montrant comme valoriser la dette d'une institution financière au sein d'un système financier. La prise en compte des interconnexions entre institutions financières modifie les formules usuelles (développées initialement pour les entreprises non-financières). Le prix de la dette d'une institution, qui intègre sa probabilité de défaut et le taux de recouvrement, dépend in fine des probabilités de défaut et des taux de recouvrement de l'ensemble des institutions du système. Nous montrons comment ces prix sont solution d'un système d'équations traduisant un équilibre des taux de recouvrement. Il nous est alors possible de corriger le prix de la dette d'une banque issu des formules usuelles par l'ajout d'une prime de risque associée aux interconnexions. Dans un souci de mise-en-œuvre concrète, nous proposons une méthode de valorisation de dettes de l'ensemble des institutions du système financier considéré économe en temps de calcul.

Puis, nous abordons dans un quatrième chapitre un autre facteur de risque jusqu'à peu négligé. Dans un cadre stylisé nous examinons la réaction d'une institution face à des chocs à l'actif et au passif. Nous traitons donc du risque de solvabilité et du risque de liquidité dans un cadre unifié. Nous montrons que ces chocs interagissent.

Les considérer indépendants, comme il est usuel de le faire, amène à sous-estimer le risque total de l'institution. Nous montrons comment adapter les mesures de risque usuelles pour d'une part prendre en compte ces deux sources de chocs et d'autre part identifier les contributions de chaque type de risque. Une autre conséquence de l'existence de cette interaction est la nécessite de fixer de façon conjointe les réserves nécessaires pour limiter le risque de solvabilité et le risque de liquidité.

Une dernière partie présente succinctement les perspectives de recherche prolongeant les travaux présentés.

Chapitre I

Analyse du risque systémique, mesure du risque de contagion

Résumé. En comparant diverses définitions du risque systémique, il apparaît d'une part que sa définition est très liée à sa mesure et d'autre part que les différentes définitions ne sont que très partiellement compatibles. Au lieu de chercher à définir conceptuellement le risque systémique pour en déduire une mesure, nous adoptons la stratégie inverse. Ainsi, nous décomposons la mesure du risque total d'une institution en différents termes. Notre définition du risque systémique repose sur l'identification des termes pertinents dans une perspective globale, à opposer aux termes relevant d'une perspective purement individuelle. Le risque systémique est ainsi composé du risque systématique extrême et du risque de contagion. Cette décomposition nous sert de fil directeur pour construire pas à pas les éléments essentiels à la modélisation, et donc à la mesure du risque systémique. Cette démarche dessine des axes d'amélioration des outils quantitatifs de la régulation macro-prudentielle.

Mots-clefs : risque systémique, contagion, modélisation, politique macroprudentielle

Code JEL : G18, G01, E58, C58.

Abstract. A comparison various definitions of systemic risk shows that its definition is strongly linked to its measurement and the different definitions are hardly compatible. Instead of searching for a conceptual definition of systemic risk to derive a measure from it, we adopt a reverse strategy. Thus we decompose the total risk of an institution in different terms. We hinge the definition systemic risk on the relevant terms in a global perspective, contrasting to an individual perspective. Systemic risk is composed of the extreme systematic risk and of the contagion risk. Building on this decomposition, we present step-by-step the necessary features to model and measure systemic risk. This approach suggests ways forward to develop quantitative tools supporting macroprudential regulation.

Key words: systemic risk, contagion, modeling, macroprudential policy

JEL Code: G18, G01, E58, C58.

I.1 Introduction

> "*Je m'interroge, est-ce que le risque systémique devrait être un objet explicite de mesure, ou devrait-il être relégué à faire florès, à être un slogan ou un code utilisé pour justifier la liberté des régulateurs ?*" [1]

déclare Lars Hansen, lauréat du "prix Nobel" 2013 dans un court essai intitulé "Défis de l'identification et de la mesure du risque systémique" [2] [Hansen (2012)]. Lars Hansen souligne que, sans définition du risque systémique, il est inadapté de fonder un raisonnement ou une justification étayant telle ou telle position [3]. Lars Hansen lie fortement la problématique de la définition du risque systémique à celle de sa mesure en citant Lord Kelvin :

> "*Lorsque vous pouvez mesurer ce dont vous parlez, l'exprimer en nombres, vous connaissez quelque chose dessus. Mais lorsque vous ne pouvez pas le mesurer, lorsque vous ne pouvez pas l'exprimer en nombre, votre connaissance est piètre et vous ne pouvez vous en satisfaire : cela peut être le début d'une connaissance, mais vos réflexions ont à peine progressé vers l'état de* science*, quelque soit le sujet.*" [4]

Dans des contextes différents, Lord Kelvin et Lars Hansen lient intimement la définition d'un objet "scientifique" et sa mesure. Un exemple en sciences physiques d'adéquation parfaite entre définition d'un concept et sa définition est celle de la température. Il est délicat de prétendre pouvoir concevoir un thermomètre sans concevoir simultanément la notion de température, et inversement : un thermomètre est ce qui mesure la température et la température est ce qui est mesurée par un thermomètre. Néanmoins, les physiciens ont défini de façon précise la notion de chaleur qui se distingue clairement de la notion de température. La notion de chaleur, qui sommairement correspond à une quantité d'énergie nécessaire à un changement d'état (liquide à gazeux par exemple), est mesurable au sens de Lord Kelvin, c'est-à-dire exprimable sous forme de nombre (toute énergie s'exprime en Joule). Cependant, on est incapable de la mesurer directement : on ne dispose malheureusement pas de "caloromètre". La mesure de la chaleur (au sens physique) est toujours indirecte, mais fait intervenir la température, mesurable (au sens pratique) avec un thermomètre. Cette mesure indirecte nécessite l'usage de théories qui lient précisément la chaleur à la température. En effet, la température est une manifestation de chaleur (au sens physique). D'une certaine manière, la température est la contrepartie mesurable en pratique de la chaleur quantifiée au sens de Kelvin. En économétrie, on dirait que la température est une variable observable et que la chaleur est une variable latente, i.e. que l'on n'observe pas, mais que l'on peut recons-

1. En version originale : "I ask, should systemic risk be an explicit target of measurement, or should it be relegated to being a buzz word, a slogan or a code word used to rationalize regulatory discretion ?"

2. Challenges in Identifying and Measuring Systemic Risk

3. Par exemple, le Wall Street Journal a publié *The Fed Can't Monitor 'Systemic Risk', That's like asking a thief to police himself* de Peter J. Wallison le 08/09/2009 et *Addressing Systemic Risk* par Alan Greenspan, gouverneur de la FED entre 1987 et 2006, le 19/09/2009.

4. En version originale : "When you can measure something that you are speaking about, express it in numbers, you know something about it ; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of the meagre and unsatisfactory kind : it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely, in your thoughts advanced to the stage of science, whatever the matter might be."

truire, ou estimer, à partir de variable(s) observable(s). Cet exemple d'articulation entre chaleur, température et thermomètre nous pousse à une forme de prudence concernant le risque systémique. Si le risque systémique est à rapprocher de la température, il est impératif comme semble le défendre Lars Hansen que sa définition comprenne sa mesure pratique, ou au moins une manière pratique de le mesurer. Si le risque systémique est à rapprocher de la chaleur alors sa contrepartie mesurable et la manière dont on la mesure sont aussi à préciser. Gardons à l'esprit que tous les thermomètres ne sont pas propres à tous les usages. Par exemple, les pâtissiers utilisent des thermomètres particuliers pour le sucre. Ces thermomètres ne sont pas gradués en degré Celsius, mais indiquent des états du caramel (filet, boulé, cassé...) que le pâtissier sait associer à un usage particulier (imbibage, nappage, décor...). Les plages de températures de chaque état du sucre n'ont pas toute la même taille en degré. Cet exemple peut sembler quelque peu spécifique, mais il indique qu'une mesure purement physique n'est pas toujours adaptée à l'usage malgré la qualité théorique de sa conception.

Un autre exemple, où mesure et définition sont liées, est le temps [Boorstin (1988)]. Qu'est-ce qu'une heure ? Comment mesurer une heure ? Jusqu'au XII$^{\text{ème}}$ siècle, les heures avaient une durée variable. Il y avait des heures de jour et des heures de nuit qui divisaient respectivement la journée (du lever au coucher du Soleil) et la nuit (du coucher au lever du Soleil) en 12 plages égales. La durée de ces heures temporaires dépendait donc des saisons et de la latitude. En parallèle, l'écoulement des sabliers ou des clepsydres permettait de mesurer de courtes durées, qui n'étaient pas conçues comme des divisions des heures. Pour que les heures deviennent égales, il a fallu pouvoir s'affranchir d'une mesure fondée sur le cycle solaire. Ce découplage s'est réalisé avec la fabrication d'horloges mécaniques. Les premières horloges mécaniques ont permis de diviser les jours en 24 heures de durée égale. Les heures sont devenues chronométriques : une heure est définie par mesure. En changeant l'outil de mesure, la définition d'une heure a changé. Ce changement correspond aussi à l'avènement de la mécanique classique où le temps est conçu comme un absolu indépendant des conditions de l'observation. Les améliorations technologiques ont ensuite permis de diviser les heures, d'abord en quarts d'heure, puis en minutes, puis en secondes et en micro-secondes à l'ère moderne. Le système n'était pas totalement affranchi des cycles du Soleil car les heures étaient un vingt-quatrième du jour solaire moyen (*i.e.*, la durée moyenne du jour dans une année mesurée par la rotation de la Terre autour du Soleil). En 1967, la 13$^{\text{ème}}$ Conférence générale des poids et mesures fonde la définition de la seconde sur la fréquence d'un phénomène atomique [5] et définit la minute, l'heure, le jour... comme des multiples de la seconde. Ce changement marque l'indépendance totale entre la mesure du temps et la place de la Terre au sein du système solaire. On notera aussi l'inversion dans les échelles : les heures ne sont plus des divisions du jour, mais des multiples de la seconde. Au XX$^{\text{ème}}$ siècle, la théorie de la relativité et la physique quantique ont induit des changements de paradigmes théoriques. Cependant, l'impact reste limité sur la mesure quotidienne du temps. L'histoire de la mesure du temps apporte plusieurs enseignements. Premièrement, la définition de la durée change avec les outils de mesure, donc les besoins avec la technologie et la connaissance. Deuxièmement, il peut exister des outils de mesure

5. "La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental $S_{1/2}$ de l'atome de césium 133."

dédiés à différentes échelles qui ne sont pas accordés entre eux.

Pour cerner les différentes perspectives adoptées pour définir le risque systémique, quelques définitions proposées dans l'espace public seront comparées pour faire ressortir autant les convergences que les divergences (Section I.2). Ces face-à-face permettront de classer les différents risques auxquels s'exposent une institution financière en identifiant ceux qui relèvent d'une perspective globale. Ainsi, le risque systémique est défini à partir du risque systématique extrême –choc massif commun à plusieurs institutions– et du risque de contagion –propagation des pertes entre institutions– (Section I.3). Les conséquences en termes de mesure seront discutées en abordant la question de l'information disponible et le choix entre une approche structurelle ou une approche sous forme réduite (Section I.4). A partir de ces éléments, nous identifions progressivement les composantes nécessaires à formaliser la mesure du risque de contagion (Section I.5). Enfin, le transfert de modélisations théoriques ou techniques vers des enjeux opérationnels sera abordé par une description des développements récents de la régulation financière (Section I.6). La dernière section discutera les perspectives.

I.2 Quelques définitions actuelles du risque systémique

Malgré les considérations précédentes soulignant la subtilité de la définition du risque systémique, il est aisé de trouver une définition du risque systémique via n'importe quel moteur de recherche internet. La difficulté réside dans la multiplicité des définitions rencontrées qui se distinguent par la diversité des domaines qu'elles recouvrent. Examinons avec critique quelques exemples de définitions issues de divers horizons pour analyser l'articulation entre définition et mesure (au sens pratique). Le G-10 [6] définit ainsi le risque systémique :

> "*Le risque systémique financier est le risque qu'un événement entraîne une perte de la valeur économique, ou de la confiance accordée, associée à une montée de l'incertitude concernant une part substantielle du système financier, perte qui est suffisamment sérieuse pour très probablement avoir un effet négatif significatif sur l'économie réelle. Les événements associés au risque systémique peuvent être soudains et inattendus, ou la vraisemblance de leur occurrence peut s'accumuler au fil du temps en l'absence de réponses politiques appropriées.*" [7] in G10 (2001).

En tant que groupe de gouvernements, le G-10 fournit un point de vue d'autorité politique. Sur le fond, la définition du risque systémique est fondée sur la transmission potentielle d'une perturbation (en valeur, en confiance, en perspective) du secteur

6. Groupe de rencontre économique composé des 11 (et non 10 comme son nom le laisse entendre) pays les plus industrialisés : Allemagne, Belgique, Canada, États-Unis d'Amérique, France, Italie, Japon, Pays-Bas, Royaume-Uni, Suède et Suisse.

7. En version originale : "Systemic financial risk is the risk that an event will trigger a loss of economic value or confidence in, and attendant increases in uncertainty about, a substantial portion of the financial system that is serious enough to quite probably have significant adverse effects on the real economy. Systemic risk events can be sudden and unexpected, or the likelihood of their occurrence can build up through time in the absence of appropriate policy responses."

financier vers l'économie réelle (production industrielle, emploi...). Aucune mesure n'est proposée : la définition du risque systémique est découplée de sa mesure. Cette définition en appelle d'autres : qu'est-ce qu'une part substantielle du système financier ? Comment mesure-t-on le caractère substantiel ? Pense-t-on à un seuil en terme d'actif total par exemple ? Qu'est-ce qu'un effet négatif significatif ? Est-ce un point de chômage en plus ? Est-ce une perte de croissance de 0.1% ? À partir de quand la transmission devient-elle très probable ? 1 chance sur 10 suffit-elle ? Existe-il un lien entre le secteur financier considéré et l'économie réelle ? Considère-t-on le secteur financier et l'économie réelle d'un seul pays ? Est-ce que la définition recouvre la transmission d'un secteur financier d'un pays donné à l'économie réelle d'un autre pays ? En d'autres termes, définir le risque systémique nécessite de définir un double-périmètre (pour ne pas dire un double-système) : celui du secteur financier considéré et celui de la sphère réelle considérée. En endossant la robe de l'avocat du diable, on pourrait même demander : est-ce qu'une part non substantielle du système financier (une seule institution de taille moyenne par exemple) pouvant provoquer un choc négatif significatif pour l'économie réelle serait in fine considérée comme non-substantielle ?

A cette toute dernière question, le point de vue de deux chercheurs en économie, George Kaufman et Kenneth Scott, est clairement infirmatif. Selon ces académiques, le risque systémique se définit par opposition :

> "*Le risque systémique concerne le risque ou probabilité de défaillance d'un système, à opposer à des défaillances au sein de parties ou de composantes individuelles, et se manifeste par des co-mouvements (corrélations) entre la majorité ou l'intégralité de ses parties.*" [8] in Kaufman and Scott (2003).

Comme la définition précédente, celle-là pré-suppose fondamentalement l'existence d'un (unique) système, c'est-à-dire d'un espace délimité d'institutions, d'entreprises, de ménages... Le risque systémique est le risque d'un paquet de défaillances (cluster en anglais). Rien n'est dit sur un quelconque lien de transmission entre certaines défaillances et d'autres, au contraire de la définition précédente qui indiquait clairement une transmission de la finance vers l'économie réelle. Concrètement, si le système considéré est le secteur financier d'un pays, le risque systémique est le risque d'observer conjointement de nombreux défauts d'institutions financières, quelles qu'en soient les causes ou les conséquences (hors du système). Si le système considéré est élargi pour englober l'ensemble de l'économie (secteur financier et secteur réel), le risque systémique devient le risque d'observer de nombreux défauts d'entreprises dans la majorité des secteurs, quelles qu'en soient les causes ou les conséquences. Les défauts d'un secteur peuvent causer, être causés par ou être indépendants des défauts d'un autre secteur, pourvu qu'ils soient concomitants. Une fois de plus, poussons cette définition dans ses retranchements : le risque systémique recouvre certes le risque identifié dans la définition du G-10, mais aussi le risque d'une guerre, celui d'une catastrophe naturelle de grande ampleur, celui d'un accident industriel majeur... Ces derniers risques, même s'ils sont parfois jugés négligeables, entrent difficilement dans la notion intuitive que l'on peut se faire du risque systémique :

8. En version originale : "Systemic risk refers to the risk or probability of breakdowns in an entire system, as opposed to breakdowns in individual parts or components, and is evidenced by comovements (correlation) among most or all the parts."

le champ est trop large. Par ailleurs, les auteurs proposent une mesure du risque systémique via la corrélation entre les parties dudit système, c'est-à-dire la propension aux parties à évoluer conjointement. L'usage de la corrélation comme mesure du risque systémique sera détaillée dans un second temps.

Entre la définition très vague du G-10 et celle très (trop ?) compacte précédente, un juriste (Steven Schwarcz) opte pour une voie médiane et très structurée :

> "*[Le risque systémique est] le risque qu'(i) un choc économique tel une défaillance d'un marché ou d'une institution déclenche (via une panique ou autrement) soit la défaillance d'une chaîne de marchés ou d'institutions, soit une chaîne de pertes significatives pour les institutions financières, (ii) impliquant une augmentation du coût du capital ou une baisse de sa disponibilité, souvent caractérisées par une volatilité substantielle du cours sur les marchés financiers.*" [9] in Schwarcz (2008).

Selon cette approche, le risque systémique est circonscrit au secteur financier, soit via les institutions financières, soit via les marchés financiers (marchés de titres, de dérivés, de matières premières... ou de Londres, de Paris, de New-York...). Le système est en quelque sorte pré-défini. Cette définition partage avec la première l'importance de la conséquence : c'est parce que tel type d'événement implique telle conséquence qu'il est de nature systémique. Cependant, les conséquences considérées n'appartiennent pas à la sphère réelle, mais restent dans la sphère financière. En réalité, c'est la cause première qui appartient à la sphère réelle. Cette définition est en miroir de celle du G-10 : ce n'est plus une perturbation financière affectant l'économie réelle, c'est le cas d'une perturbation de l'économie réelle affectant le secteur financier qui est considérée. Ce renversement, que d'aucuns jugeront surprenant, a le mérite d'introduire explicitement la notion de choc. En limitant consciencieusement le système au secteur financier, l'auteur peut définir un choc de la sphère réelle, c'est-à-dire une perturbation extérieure au système, à opposer à une perturbation endogène, c'est-à-dire générée par le système au sein du système. La conséquence caractérisante est une tension du marché des capitaux. Avec circonspection, l'auteur propose de mesurer cette tension par la volatilité des cours. Cela ne signifie pas que toute hausse de la volatilité est de nature systémique et qu'il suffit de suivre la volatilité des marchés pour garder le risque systémique sous surveillance. Mais mesurer la probabilité et l'amplitude des hausses de volatilité dues in fine à un choc économique semble être une piste prometteuse dans la mesure du risque systémique, telle que définie par l'auteur, c'est-à-dire, un mouvement de l'économie réelle vers la finance.

L'importance de cette notion de choc en économétrie a peut-être conduit deux économètres, Paul Kupiec et David Nickerson, à fonder le risque systémique sur le phénomène d'amplification d'un choc :

> "*Le risque systémique peut être défini comme la probabilité qu'un modeste choc économique provoque une volatilité disproportionnée des prix*

9. En version originale : "the risk that (i) an economic shock such as market or institutional failure triggers (through a panic or otherwise) either (X) the failure of a chain of markets or institutions or (Y) a chain of significant losses to financial institutions, (ii) resulting in increases in the cost of capital or decreases in its availability, often evidenced by substantial financial-market price volatility."

> *des actifs financiers, d'importantes baisses de trésorerie des entreprises, de substantielles pertes sur les marchés, et peut-être même des faillites imprévues parmi les institutions financières."* [10] in Kupiec et al. (2001).

La caractérisation est faite à nouveau par l'impact significatif d'un choc économique sur la sphère financière. Cette définition met l'accent sur le caractère "modeste" du choc initial : comment définir un choc modeste ? En tout cas, la qualification ne peut se fonder sur ses conséquences (puisqu'ici elles sont grandes). Pareillement, quand peut-on parler de volatilité disproportionnée ? Comme plusieurs autres définitions, celle-ci demande de qualifier des variations comme significatives, sans donner de valeur ou même d'ordre de grandeur. Par ailleurs, la place de la contagion (au sens de contamination de défaut au sein du secteur financier) est très particulière : elle semble être suffisante sans être nécessaire. De plus, d'une manière ténue, il y a un retour de la sphère financière sur la sphère réelle via la diminution de la trésorerie des entreprises. Concernant l'aspect mesure, la définition fournit trois ou quatre indicateurs (volatilité, trésorerie, perte voire nombre de défauts imprévus) pouvant servir de mesure au risque systémique.

Enfin, terminons par la définition du Conseil de Stabilité Financière (en anglais Financial Stability Board ou FSB), consensuelle au sein des autorités de supervision que forme le FSB :

> *"[Le risque systémique est le] risque d'une interruption des services financiers qui (i) est causée par une détérioration de l'ensemble ou de partie du système financier et (ii) qui a potentiellement des conséquences sérieuses et négatives pour l'économie réelle."* [11] in Financial Stability Board (2009).

Cette définition est plus précise que celle fournie par le G-10. Elle en conserve les principaux traits, mais élimine les précautions oratoires. En un mot, le risque systémique est le risque qu'une crise financière devienne une crise économique. Pour peu que l'on sache définir une crise économique (en termes de croissance, de chômage...), identifier et mesurer le risque systémique revient à mesurer des crises économiques dont l'origine est financière.

Ces quelques définitions parmi tant d'autres [12] s'opposent nettement sur certains traits et en partagent d'autres. Schématiquement, l'opposition porte sur la direction du choc : pour les autorités publiques la finance affecte l'économie réelle tandis que pour les académiques l'économie réelle affecte la finance. Cette opposition est à la fois fondamentale dans la perception de ce qu'est le risque systémique et quelque

10. En version originale : "Systemic risk can be defined as the potential for a relatively modest economic shock to induce disproportionate volatility in the prices of financial assets, significant reductions in corporate liquidity, substantial mark-to-market losses, and perhaps even unanticipated bankruptcies among financial institutions."

11. En version originale : "[Systemic risk is the] risk of disruption to financial services that is (i) caused by an impairment of all or parts of the financial system and (ii) has the potential to have serious negative consequences for the real economy."

12. Citons aussi le point de vue d'un professionnel (Pascal Ordonneau) qui déclare que le "risque systémique est présent lorsqu'un élément est si important dans un système que sa chute entraînerait celle des autres" (Le Cercle des Echos daté du 02.03.2011) ou celle du site pédagogique Venimmen.net spécifiant "un risque systémique est un risque qui peut mettre en danger la survie du système financier. [...] Il est toujours difficile de mesurer ex-ante un risque systémique. En général on ne sait que c'est un risque systémique qu'après, lorsqu'il est trop tard."

peu stérile, car compartimenter la sphère financière et la sphère réelle soulève de nombreuses difficultés méthodologiques dans la mesure du risque systémique.

I.3 Analyse du risque systémique

La multiplicité des points de vue sur la définition et la mesure du risque systémique interroge sur la nature des acteurs concernés par les risques financiers, ainsi que la manière dont ils souhaitent les contrôler. Trois types d'acteurs sont identifiables.
Premièrement, le superviseur des marchés financiers –l'Autorité des Marchés Financiers (AMF) en France, l'European Securities and Market Authority (ESMA) au niveau européen– veille au bon fonctionnement des marchés financiers et à la protection de l'épargne des particuliers. Ce superviseur est donc sensible à la diffusion de l'information afin que chaque participant agisse en connaissance de causes. Il n'a pas d'intérêt particulier à limiter le risque des actifs disponibles pourvu que l'information sur leurs caractéristiques soit partagée. De plus, le superviseur des marchés financiers ne se préoccupe des institutions financières (banques, assurances...) que dans la mesure où elles interviennent sur les marchés financiers. Ainsi, les activités de crédit ou d'assurance non-vie ne relèvent pas de son mandat.
Deuxièmement, le superviseur des banques et des sociétés d'assurances –l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) en France, le Single Supervisory Mechanism (SSM) et l'European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) au niveau européen– veille à la fois à la solidité de chaque institution et à la stabilité du système dans son ensemble. L'évaluation des risques au niveau d'une institution permet de déterminer le niveau nécessaire de réserve afin de garantir une probabilité de défaut à un niveau socialement acceptable. Au niveau du système, les enjeux couverts par la stabilité financière sont moins bien identifiés. Cependant, un élément clef de la stabilité financière est la détermination du niveau de risque agrégé qu'il faut ensuite convertir en un niveau de réserve global à distribuer entre les institutions composant le système.
Troisièmement, les institutions financières se focalisent sur leur propre sort, donc sur leur degré d'exposition aux divers risques. Si une institution devait s'intéresser au risque du système, elle le ferait vraisemblablement dans la perspective de connaitre les impacts potentiels sur sa propre activité. Cet objectif est très différent de celui d'assurer la stabilité du système.

Gardant à l'esprit cet arrière-plan composé de différents acteurs, proposer une définition du risque systémique compatible avec les outils existants nécessite de décrire les types de risques financiers existants. Nous commencerons par adopter une approche individuelle en présentant les types de risques d'une institution. Cette typologie des risques au niveau d'une institution nous amènera à discuter de la manière d'agréger ces risques élémentaires. Ensuite, nous montrerons que cette perspective individuelle n'est pas une base adaptée à une perspective globale. La mesure du risque global et la détermination des contributions de chaque institution font appel à d'autres mécanismes. Puis, nous aborderons la notion de risque extrême qui transparait dans plusieurs définitions que nous avons rencontrées. Ces différents éléments nous permettent de proposer une définition du risque systémique cohérente avec le

cadre standard d'analyse des risques financiers et compatible avec la mission des superviseurs.

I.3.1 Typologie des risques individuels

Au niveau d'une institution financière, la prise de risque provient des actifs qu'elle détient, ou plus généralement des activités qu'elle poursuit. Par exemple, si une banque possède des obligations souveraines françaises, elle est exposée au risque de variations de la cotation de cette obligation (risque de marché). Ce risque individuel est le *risque spécifique à cet actif*. Une institution financière investit usuellement dans plusieurs actifs (prêts, titres, dérivés...). En plus des risques spécifiques de chaque actif, elle s'expose à un *risque de corrélation entre actifs*. Par exemple, si une banque possède des obligations souveraines françaises et des options de ventes sur ces mêmes obligations, le risque total pris par l'institution comporte la part propre à chaque actif et une correction prenant en compte la structure de dépendance entre ses actifs. Considérant un ensemble d'institutions, les différents actifs (ou activités) peuvent être regroupés en deux grands catégories : les actifs communs à plusieurs institutions et les actifs n'appartenant qu'à une seule institution. Le fait que plusieurs institutions possèdent les mêmes actifs introduit une forme de risque partagé au sein du système. Le risque associé à l'ensemble de ces actifs communs –spécifiques aux actifs ou de corrélations entre actifs– est appelé *risque systématique*. Le risque associé aux activités propres –spécifique ou de corrélation– à une institution forme le risque idiosyncratique. Attribuer le caractère systématique ou idiosyncratique au risque lié à une activité d'une institution n'est donc pas une différence de nature, mais, est intrinsèquement lié au système considéré. Usuellement, la partition n'est pas effectuée avec un audit complet de toutes les activités : la partie systématique est captée par l'introduction de facteurs macro-économomiques (croissance, chômage, inflation, taux d'intérêt...) et la partie idiosyncratique est construite comme un reliquat.
Les types de risques précédents, qu'ils soient idiosyncratiques ou systématiques, sont exogènes : ils découlent uniquement de l'incertitude liée à l'activité. Ces risques sont bien identifiés dans la réglementation : risque de taux, risque de marché, risque de crédit... Cependant, dans une approche exhaustive, il est nécessaire de les compléter par un risque endogène à l'institution. Ce risque correspond à la réaction de l'institution face aux chocs subis sur chacune de ses activités. Cette réaction introduit une forme de dépendance, au niveau de l'institution, entre des facteurs de risque a priori indépendants. Par exemple, le risque de financement est a priori indépendant du risque de fraude. Cependant, la mauvaise gestion médiatique de la fraude d'un employé fait augmenter les taux auxquels emprunte la banque. Deux facteurs de risque sans lien exogène deviennent comme corrélés. Nous introduisons le terme de *risque d'amplification* pour qualifier ce risque individuel endogène. Le calcul réglementaire des risques repose sur une hypothèse de cristallisation des portefeuilles : les volumes des différentes activités sont supposés constants. Cette hypothèse est très pratique pour calculer les risques exogènes, mais empêche la prise en compte du risque d'amplification.
Les risques individuels identifiés jusqu'à présent sont présentés de manière synthétique dans la table I.1.

	Risques propres à l'institution	Risques globaux affectant l'institution
Exogène	idiosyncratique : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs	systématique : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs
Endogène	amplification	

TABLE I.1 – Risques individuels I

I.3.2 Diversification

La gestion des risques au niveau d'une institution se déroule en deux temps. Premièrement, de grandes classes de risque sont identifiées et supposées indépendantes. Par exemple, la réglementation bancaire identifie trois grandes classes de risque : le risque de marché (lié aux incertitudes des cotations), le risque de crédit (lié aux incertitudes des remboursements) et le risque opérationnel (lié aux fraudes, incendie...). La mesure du risque total d'une institution est considérée comme la somme des mesures du risque de ces trois catégories. Dans un deuxième temps, il est nécessaire de mesurer le risque au niveau de chaque catégorie. Schématiquement, la démarche générale comporte deux étapes. Premièrement, l'incertitude sur la valeur d'un actif est modélisée par une variable aléatoire. Deuxièmement, une mesure de risque est appliquée pour déterminer le niveau nécessaire de réserve. Une mesure de risque associe donc à une variable aléatoire un niveau de réserve. Artzner et al. (1999) proposent de se limiter aux mesures de risques vérifiant trois conditions : i) toute perte certaine est intégralement couverte, ii) la mesure est proportionnelle à la taille du portefeuille et iii) la mesure du risque du portefeuille composé de deux actifs est inférieure à la somme des mesures de risque de chaque actif. Cette dernière condition permet de transcrire le principe de diversification : il est préférable de détenir des actifs différents. Par conséquent, une telle mesure de risque, dite cohérente au sens de Artzner et al. (1999), est sous-additive.

Cette axiomatique a permis une analyse critique des mesures de risque existantes. Par exemple, la Value-at-Risk (VaR), qui est un quantile donné sur les distributions de pertes futures, n'est pas sous-additive. Au contraire, l'Expected Shortfall (ES), qui est la moyenne des pertes au-delà d'un quantile donné, vérifie les trois conditions requises. L'ES, au contraire de la VaR, est donc cohérente au sens de Artzner et al. (1999).
Cependant, si le principe de diversification répond à une intuition, il est problématique d'en faire une exigence. En particulier, la sous-additivité est clairement bafouée en présence de risque de corrélation entre actifs. Ce risque se manifeste dès qu'il y a une structure de dépendance entre actifs. Pour le risque de crédit, la notion de *risque de corrélation de défaut* a même été introduite pour désigner le fait que les défauts de créditeurs pouvaient être dépendants.

I.3.3 Désagrégation du risque global

Même en relâchant l'exigence de sous-additivité sur la mesure de risque, la démarche précédente ne peut rendre compte de l'ensemble des risques car elle adopte

le point de vue d'une institution financière. Pour approcher la définition du risque systémique, il est nécessaire de s'interroger sur le calcul du risque au niveau du système tout entier.

Calculer le risque du système ne peut se faire en additionnant des risques totaux calculés dans une logique purement individuelle. Fondamentalement, la propriété de sous-additivité implique que la somme des contributions est inférieure au niveau de réserve global souhaité. De plus, les mesures des risques individuelles ne forment pas une clef de répartition du risque total valide. En effet, les mesures individuelles concernent le risque auquel l'institution s'expose et non le risque généré par l'institution. Au contraire, la logique est de déterminer le niveau de réserve nécessaire au système, puis d'en déduire la contribution de chaque institution à ces réserves communes en veillant à la stricte additivité du processus.
Cet objectif nécessite de nouveaux axiomes pour adopter une démarche cohérente. Par exemple, Gouriéroux and Monfort (2013) proposent de se restreindre aux mesures de risque vérifiant trois propriétés. Premièrement, la contribution doit dépendre du risque de l'institution et du risque global des autres institutions indépendamment de la manière dont ce risque global est alloué entre les autres institutions. L'intuition est de garantir un minimum de confidentialité. Deuxièmement, la mesure du risque au niveau du système ne doit pas dépendre de la répartition des activités entre institutions, mais uniquement de leur valeur agrégée. Cette contrainte évite que la mesure du risque global diminue lorsque des institutions fusionnent ou se séparent formellement alors que les activités restent identiques. Ces deux premières contraintes portent sur l'agrégation. La dernière porte sur la contribution en faisant appel à la notion de dominance stochastique entre deux variables aléatoires. Une variable aléatoire X domine stochastiquement une autre variable aléatoire Y si pour toute transformation croissante et concave u, l'espérance de $u(X)$ est supérieure à l'espérance de $u(Y)$. La troisième condition précise que si la variable aléatoire modélisant le risque d'une institution domine celle d'une autre institution alors la contribution de la première institution est plus petite que celle de la seconde. Malgré le caractère restrictif des ces conditions, les auteurs montrent qu'il existe une infinité de méthodes de désagrégation du risque global les satisfaisant. Parmi toutes ces méthodes, il y a l'Expected Shortfall calculée au niveau du bilan consolidé. Les contributions des institutions s'appellent alors Marginal Expected Shortfall (MES) [Tasche (1999), Tasche (2007), Acharya et al. (2010)].

Cette approche de désagrégation – dite "top-down"– correspond à la perspective d'un superviseur veillant à la stabilité du système. Si le passage de la mesure globale aux contributions est clair, la manière de calculer le risque global peut manquer de précision. Se restreindre aux déterminants exogènes des risques individuels n'est pas une solution viable. Intégrer les risques d'amplification associés à chaque institution du système est un premier pas. Au niveau global, le risque endogène est le risque de contagion, c'est-à-dire le risque que les pertes d'une institution génèrent des pertes pour une autre institution. Les interconnexions contractuelles entre institutions, telles que des prêts, sont le support du *risque de contagion directe*. A nouveau, la distinction entre risque de contagion, risque systématique et risque idiosyncratique dépend de la définition du système. Imaginons que deux institutions A et B prêtent à une même troisième C. Si le système est composé uniquement de A,

	Risques propres à l'institution	Risques globaux affectant l'institution
Exogène	idiosyncratique : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs	systématique : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs
Endogène	amplification	contagion : - directe - indirecte

TABLE I.2 – Risques individuels II

alors son exposition sur C est un risque idiosyncratique. Si le système est composé des institutions A et B, alors les expositions sur C constituent un risque systématique. Si les trois institutions appartiennent au système, alors il s'agit de risque de contagion. Il existe aussi un *risque de contagion indirecte* lorsque la contagion ne repose pas sur les interconnexions entre institutions. Par exemple, si une institution vend massivement un actif suite à une difficulté individuelle, cet actif se déprécie entrainant une perte pour toutes les institutions possédant aussi cet actif qu'elles soient ou non exposées à la première institution.

En considérant le risque de contagion, nous complétons en table I.2 le périmètre des risques individuels à prendre en compte pour le calcul du risque du système. Cette analyse nous permet de définir le risque du système et la manière de le distribuer aux institutions formant le système. Mais nous n'avons pas encore défini le risque systémique.

I.3.4 Risque extrêmes

Le risque systémique est parfois rapproché de la notion d'extrêmes en articulant les trois idées suivantes : i) le risque systémique est le risque d'une crise financière, ii) les crises génèrent des dommages sérieux et iii) les crises financières sont rares. Cette démarche lie la définition du risque systémique à la notion de dommage sérieux.

Premièrement, il n'y a pas de relation universelle entre la taille d'un choc exogène et son impact total. En effet, la taille d'un choc joue sur les composantes exogènes du risque, mais les effets endogènes peuvent jouer à la hausse comme à la baisse. Par exemple, Allen and Gale (2000) montrent que certains réseaux interbancaires permettent de partager le risque total créant ainsi un effet de diversification. Plus précisément, ils montrent que le terme de contagion réduit le risque lorsque les chocs sont faibles et l'augmente lorsque les chocs sont forts. Il n'y a donc ni linéarité, ni stricte monotonie entre la taille des chocs et leurs impacts. A titre d'illustration, la figure I.1, extraite de Acemoglu et al. (2013), montre l'évolution du nombre de défauts dans un réseau interbancaire en fonction de la taille d'un choc exogène. Chaque courbe représente cette évolution pour une structure de réseau donnée (voir figure I.2). La forme du réseau est cruciale pour déterminer le profil de réaction du réseau au choc. Symétriquement, il faut aussi concevoir que de petits chocs puissent avoir d'importants effets. Par exemple, un changement dans le signe d'une corrélation peut transformer un portefeuille peu risqué en un portefeuille très risqué [Dubecq and

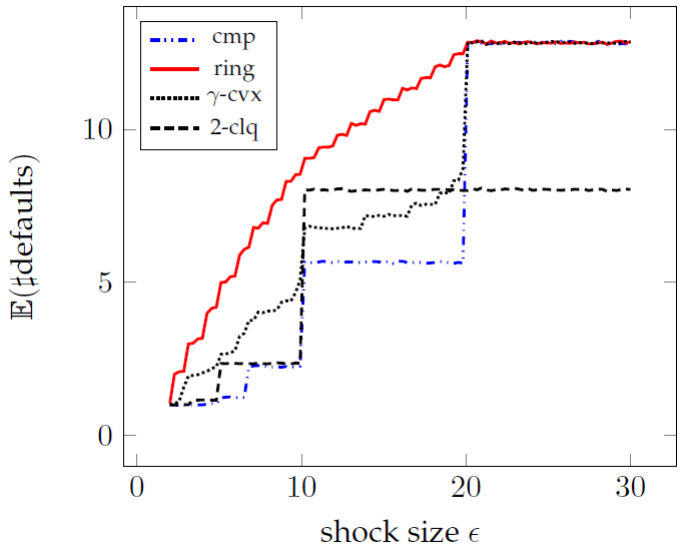
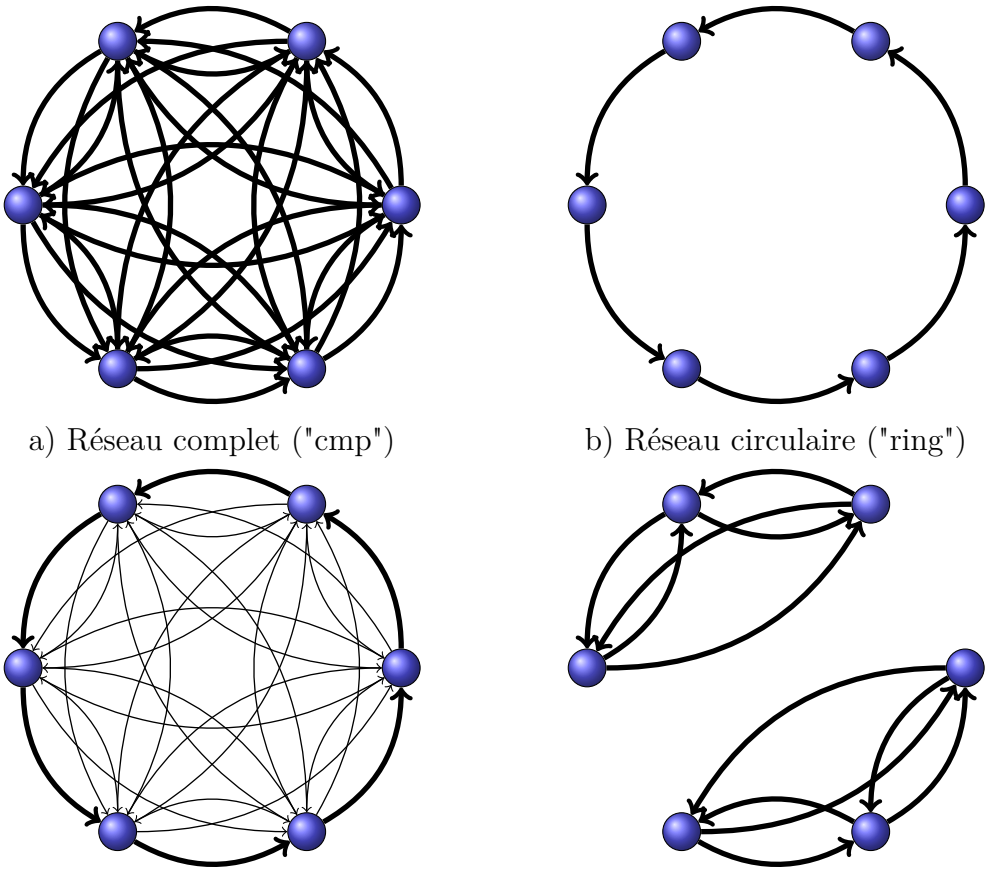


FIGURE I.1 – Evolution du nombre de défauts (sur 20) en fonction de la taille d'un choc exogène selon la forme du réseau (voir figure I.2). Extrait de Acemoglu et al. (2013).

Gourieroux (2012)]. Une conséquence de cette analyse est que s'efforcer de modéliser des chocs extrêmes n'est pas une garantie pour obtenir des effets extrêmes.

Deuxièmement, ancrer le risque systémique dans ses conséquences est un renversement dans la méthode d'identification des risques. Les risques sont habituellement définis en fonction de leurs sources : risque de marché, risque de crédit, risque de rachats anticipés... Adopter une logique conséquentialiste, c'est-à-dire centrée sur les conséquences, est à certains égards louable, mais si la définition est intuitive, la mesure est hors d'atteinte. Lorsque le risque est défini selon son origine, le mesurer s'effectue en quantifiant, selon des techniques plus ou moins sophistiquées, les pertes probables imputables à cette source. Mais lorsque le risque est défini par ses conséquences, l'objet de la mesure devient fuyant. Par exemple, faut-il mesurer la probabilité d'essuyer au moins tel niveau donné de pertes ? Ou faut-il mesurer l'amplitude des pertes lorsqu'on les sait importantes ?

Même si nous ne retenons pas la dimension extrême pour définir le risque systémique, la démarche générale de ce courant d'analyse est à retenir. La théorie des valeurs extrêmes insiste sur le fait que les relations observées pour des valeurs usuelles ne sont pas nécessairement valables pour des valeurs extrêmes. Par exemple, la corrélation rend compte de la dépendance linéaire pour des valeurs autour de la moyenne. Cette notion est complétée par la notion de corrélation des extrêmes qui rend compte de la propension des variables aléatoires à prendre des valeurs extrêmes (i.e. éloignées de leurs moyennes) simultanément [Embrechts et al. (1997)]. Sans reprendre les techniques développées dans ce courant de littérature, nous reprenons l'argumentaire sous-jacent : il n'y a pas de lien automatique entre le comportement d'un système en situations normales et son comportement en situations extrêmes. Ainsi, nous corrigeons notre tableau des risques individuels en distinguant les risques globaux usuels des risques globaux extrêmes, en table I.3.



a) Réseau complet ("cmp") b) Réseau circulaire ("ring")

c) Mixte ("γ-cvx") d) Communautaire ("2−clq")

FIGURE I.2 – Formes de réseau (6 institutions)

	Risques propres à l'institution	Risques globaux usuels affectant l'institution	Risques globaux extrêmes affectant l'institution
Exogène	idiosyncratique : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs	systématique usuel : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs	systématique extrême : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs
Endogène	amplification	contagion usuelle : - directe - indirecte	contagion extrême : - directe - indirecte

TABLE I.3 – Risques individuels III

I.3.5 Définition du risque systémique

Définir le risque systémique conduit à spécifier quelles catégories de risque identifiées précédemment sont de son ressort. Un critère de partition peut être le caractère endogène : le risque systémique recouvre l'ensemble des risques endogènes. Cependant, il est discutable d'intégrer le risque d'amplification puisque ce risque ne dépend pas du système. Un autre critère serait de se focaliser uniquement sur la dimension extrême, mais nous avons vu que le caractère extrême d'un choc n'était pas nécessairement lié au caractère extrême des effets.
Nous décidons de fonder la définition du risque systémique sur l'objectif de stabilité financière des superviseurs. Autrement dit, le risque systémique est ce qui ne relève pas d'une perspective individuelle de la gestion du risque. Ainsi le risque systémique est composé des risques systématiques extrêmes, des risques de contagion usuelle et des risques de contagion extrême. Les trois autres catégories –risque idiosyncratique, risque systématique usuel et risque d'amplification– appartiennent à une logique individuelle.

I.3.6 Illustration

Illustrons cette définition en considérant un système formé de deux institutions A et B. En notant leurs valeurs à date t respectivement $Y_{A,t}$ et $Y_{B,t}$, considérons la dynamique suivante :

$$\begin{cases} Y_{A,t} &= \beta_{A,1} f_{1,t} + \beta_{A,2} f_{2,t} + \delta_A Y_{B,t-1} + \gamma_A f_{1,t} f_{2,t}, \\ Y_{B,t} &= \beta_{B,1} f_{1,t} + \beta_{A,3} f_{3,t} + \delta_B Y_{A,t-1} + \gamma_B f_{1,t} f_{3,t}, \end{cases}$$

où $f_{1,t}$, $f_{2,t}$ et $f_{3,t}$ représentent des facteurs associées à trois actifs. Ces facteurs sont supposés corrélés et statiques : à une date donnée, il y a une structure de dépendance, mais ils sont indépendants dans le temps. On note $\tilde{X}$ les valeurs extrêmes de la variable X et X^* ses valeurs usuelles [13].

Examinons les différents termes pour identifier le risque associé. Premièrement, seule l'institution A possède l'actif 2, par conséquent $\beta_{A,2} f_{2,t}$ est spécifique à cette institution. La même analyse s'applique pour l'institution B et l'actif 3. Deuxièmement, les deux institutions possèdent l'actif 1. Cet actif forme donc un facteur systématique. Troisièmement, pour l'institution A l'effet des deux actifs qu'elle détient l'influence aussi par le terme en γ_A. Ce terme est spécifique à l'institution A et traduit son risque d'amplification. Le même raisonnement prévaut pour le terme en γ_B pour l'institution B. Enfin, la contagion de B vers A est captée par le terme δ_A (et par δ_B pour la contagion de A vers B). Les différents termes de ces équations se retrouvent dans la table I.4. Les "0" indiquent que ce risque n'est pas présent avec la dynamique retenue.

13. Une possibilité est de définir $X^* = X \mathbb{1}_{q_{5\%}(X) < X < q_{95\%}(X)}$ et $\tilde{X}$ par différence entre X et X^*, où $q_{p\%}(X)$ représente le $p-$quantile de X.

Nature	Catégorie	Sous-catégorie	Institution A	Institution B
Exogène	idiosyncratique	spécifique à un actif	$\beta_{A,2} f_{2,t}$	$\beta_{A,3} f_{3,t}$
		corrélation entre actif	$\mathbb{C}or(f_{2,t}, f_{1,t})$	$\mathbb{C}or(f_{3,t}, f_{1,t})$
	systématique usuel	spécifique à un actif	$\beta_{A,1} f^*_{1,t}$	$\beta_{B,1} f^*_{1,t}$
		corrélation entre actif	0	0
	systématique extrême	spécifique à un actif	$\beta_{A,1} \tilde{f}_{1,t}$	$\beta_{B,1} \tilde{f}_{1,t}$
		corrélation entre actif	0	0
Endogène	amplification		$\gamma_A f_{1,t} f_{2,t}$	$\gamma_B f_{1,t} f_{3,t}$
	contagion usuelle	directe	$\delta_A Y^*_{B,t-1}$	$\delta_B Y^*_{A,t-1}$
		indirecte	0	0
	contagion extrême	directe	$\delta_A \tilde{Y}_{B,t-1}$	$\delta_B \tilde{Y}_{A,t-1}$
		indirecte	0	0

TABLE I.4 – Risques individuels de A et B

I.4 Choix de modélisation

Le cadre adopté pour définir le risque systémique est assez souple en terme de modélisation. En insistant sur la décomposition du risque individuel total, nous nous sommes gardés de spécifier la formulation que devait prendre chaque terme de la décomposition. Ainsi, une large palette de modèles quantitatifs est possible.

I.4.1 Forme réduite ou forme structurelle

Les modèles quantitatifs sont usuellement classés en deux groupes : les modèles structurels et les modèles sous forme réduite. Dans une approche structurelle, l'économètre s'appuie sur un modèle économique théorique existant. Ce modèle conceptuel fait intervenir des grandeurs inobservées (voire inobservables). Le travail de l'économètre est alors d'estimer, c'est-à-dire de calculer à partir des données, les valeurs des grandeurs inobservées. Ces grandeurs peuvent être des paramètres, c'est-à-dire des grandeurs déterministes, ou des réalisations de variables aléatoires latentes. Comme il existe un raisonnement économique sous-jacent, les grandeurs estimées sont interprétables. Au contraire dans une approche sous forme réduite, l'économètre est plutôt agnostique : il cherche à mettre en avant des relations statistiques entre des grandeurs observées sans pré-supposés économiques. En l'absence de modèle économique sous-jacent, il est parfois délicat de donner un sens à certaines de ces grandeurs estimées. Lorsqu'un modèle sous forme réduite intègre des variables latentes, l'interprétation porte sur les caractéristiques de ces variables aléatoires. Pour illustrer ce choix méthodologique, prenons l'exemple du taux de chômage et des capitaux propres d'une entreprise.
Modéliser le taux de chômage dans une approche structurelle demande de se donner un modèle économique expliquant le chômage. Un des premiers modèles micro-

économique suppose que le chômage résulte de la rencontre entre l'offre et la demande d'emplois qui dépendent respectivement d'un arbitrage des entreprises entre la productivité et le salaire et d'un arbitrage des salariés entre salaire et temps libre. Les préférences des ménages et des entreprises ne sont pas observables. Par contre, en leur donnant une forme précise (par exemple, une préférence linéaire) l'économètre peut estimer ces préférences. Dans une approche sous forme réduite, l'économétre peut par exemple poser une relation linéaire entre d'une part le taux de chômage et d'autre part l'inflation, la population en âge de travailler et le salaire moyen. Schématiquement, il estime alors la variation du taux de chômage due à la variation de ces variables (dites explicatives). Il pourra quantifier l'effet d'un point d'inflation sur le chômage. Mais, *stricto sensus*, son travail ne permet pas d'expliquer comment, par quels mécanismes économiques, l'inflation affecte le taux de chômage.
Comptablement, les capitaux propres d'une entreprise sont le solde entre la valeur de ses actifs (machines, stocks, brevets, locaux...) et de ses dettes (salaires à verser, fournisseurs, emprunts bancaires...). Une approche structurelle privilégiera ainsi d'écrire d'une part l'évolution des actifs et d'autre part l'évolution des dettes. La variable d'intérêt, ici le montant des capitaux propres, sera obtenue par différence. Les résultats de l'étape économétrique permettront d'identifier dans l'évolution des capitaux propres ce qui provient de l'actif et ce qui provient du passif. Au contraire, dans une approche sous forme réduite, l'économètre mettra le niveau des capitaux propres en relation directe avec des variables explicatives qu'il aura préalablement sélectionnées : chiffre d'affaires, secteur d'activité...

Il est impossible de trancher de manière générale entre l'une ou l'autre de ces approches. La différence entre ces approches est d'ailleurs parfois bien plus ténue qu'il n'y parait [Sims (1980)]. Il serait certainement plus juste de placer les modèles sur un axe du plus structurel au plus réduit, sans chercher à tracer une frontière exacte. Sans entrer dans des débats [voir la discussion dans Fève (2006) en macroéconométrie par exemple], disons que le choix dépend des objectifs de l'économètre (sommairement, souhaite-il avoir la meilleur prévision du taux de chômage à l'avance ou souhaite-il éclairer la mise en place d'une politique de lutte contre la chômage ?) et des données disponibles. Concernant le risque systémique, aucune de ces questions n'est évidente. En termes d'objectif, préfère-t-on un indicateur qui signale l'imminence d'une crise même sans indiquer sa provenance, sorte de signal de détresse, à une approche explicative qui permette d'identifier les zones de danger ? Quelles sont les données nécessaires pour construire de tels indicateurs ? Inversement, quels types de modèle peut-on construire avec les données disponibles ? La question des objectifs et celle des données disponibles sont in fine très liées.

I.4.2 Information disponible

La question de l'information se déroule à deux niveaux. Premièrement, il y a le degré de disponibilité et la précision du contenu. La disponibilité de l'information recouvre à la fois la question de son existence (qui est liée au choix entre approche structurelle ou approche réduite) et la question de son accessibilité.

Le phénomène de contagion traduit des interactions réciproques entre entités. Il est naturel de la représenter sous la forme d'un tableau (ou d'une matrice) : chaque

case de coordonnées (i, j) représente l'influence de la $i^{\text{ème}}$ entité sur la $j^{\text{ème}}$ entité. Trois niveaux d'information disponible sont identifiables. Premièrement, l'information est observable et accessible. Considérer l'observabilité de la matrice de contagion s'inscrit dans une approche structurelle. L'accessibilité renvoie au caractère public de l'information (ou à un privilège de l'économètre). Deuxièmement, l'information existe, mais n'est accessible qu'indirectement. La stratégie de modélisation est toujours structurelle, mais les coefficients de la matrice ne sont pas disponibles. Par contre, il existe des informations accessibles renseignant sur cette matrice. L'économètre doit alors estimer (ou calibrer) la matrice d'exposition à partir des données dont il dispose (i.e. déterminer la valeur la plus plausible au vu des données). Cette étape de calibration (ou estimation) est un préalable au travail de l'économètre pour mesurer le risque de contagion : il s'agit plus d'une étape de reconstruction de données que de modélisation proprement dite. Troisièmement, l'information est inobservable. Ce cas se présente typiquement dans une approche sous forme réduite. La matrice de contagion n'a pas de réalité objective, indépendante du modèle du risque systémique choisi. Par exemple, l'étape de modélisation peut aboutir à estimer une matrice de contagion entre institutions financières. La valeur de cette matrice pourra être riche d'information car traduira des influences réciproques entre institutions. Cependant, les coefficients ne seront rien d'autres que les coefficients d'un modèle précis au contraire des prêts interbancaires qui existent et ont un sens indépendamment d'un modèle de contagion.

Illustrons ces niveaux avec deux types d'exemple. Premièrement, les prêts interbancaires se présentent aisément sous forme d'une matrice de "contagion". Le coefficient (i, j) est le montant du prêt que la banque i octroie à la banque j. Si le réseau considéré se limite à une juridiction, la matrice de contagion est observable par le superviseur correspondant. Si le réseau considéré dépasse la juridiction, l'observation n'est plus que partiellement accessible. Au deuxième niveau, l'économètre peut utiliser les bilans des banques publiquement disponibles qui indiquent les montants de ces expositions à l'actif et au passif. L'économètre observe donc les marges : pour chaque banque, il connait la somme des coefficients par ligne (total actif) et par colonne (total passif). Il doit donc déterminer les expositions à partir de cette information partielle (ou marginale). D'une manière générale, il existe une infinité de matrices vérifiant des contraintes sur les sommes par ligne et par colonne. L'étape d'estimation doit donc faire intervenir un modèle qui permet de choisir une matrice satisfaisant les contraintes. Par exemple, Upper and Worms (2004) adoptent une estimation par maximisation de la mesure d'information. Intuitivement, cette méthode alloue de manière la plus uniforme possible entre les institutions les montants en respectant les contraintes. Cette méthode est un transfert de technologie des sciences physiques. Au contraire, Anand et al. (2013) cherchent une allocation minimisant le nombre de liens, en s'appuyant sur des études empiriques [Cocco et al. (2009)]. La figure I.3, extraite de Anand et al. (2013), présente la matrice d'exposition réelle (en haut à gauche), l'information observée (en bas à gauche) et la matrice d'exposition reconstruire par maximisation de l'entropie (en haut à droite) et par minimisation du nombre de liens (en bas à droite).

Un autre exemple de matrice de "contagion" est le Tableau Entrée-Sortie (TES) de la comptabilité nationale qui référence l'ensemble des flux entre secteurs. Le TES de la France est disponible publiquement sur le site de l'Institut National de la Statis-

Actual Data

True Network

	A	B	C	D	E	F	G	A_i
A	0	3	1	0	0	1	2	7
B	2	0	2	0	0	0	1	5
C	1	1	0	0	0	1	0	3
D	1	0	0	0	0	0	0	1
E	0	0	2	0	0	0	1	3
F	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	1	0	0	0	0	0	1
L_i	4	5	5	0	0	2	4	20

Observable Interbank Market

	A	B	C	D	E	F	G	A_i
A								7
B								5
C								3
D								1
E								3
F								0
G								1
L_i	4	5	5	0	0	2	4	20

Estimated Networks

Maximum Entropy Solution

	A	B	C	D	E	F	G	A_i
A	0	2.53	2.18	0	0	0.74	1.55	7
B	1.72	0	1.6	0	0	0.54	1.14	5
C	0.98	1.06	0	0	0	0.31	0.65	3
D	0.25	0.27	0.23	0	0	0.08	0.17	1
E	0.75	0.81	0.7	0	0	0.24	0.5	3
F	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0.3	0.32	0.28	0	0	0.09	0	1
L_i	4	5	5	0	0	2	4	20

Minimum Density Solution

	A	B	C	D	E	F	G	A_i
A	0	3	0	0	0	0	4	7
B	3	0	2	0	0	0	0	5
C	0	2	0	0	0	1	0	3
D	0	0	0	0	0	1	0	1
E	0	0	3	0	0	0	0	3
F	0	0	0	0	0	0	0	0
G	1	0	0	0	0	0	0	1
L_i	4	5	5	0	0	2	4	20

FIGURE I.3 – Exemple de matrice d'exposition entre 7 banques (de A à G) et des résultats des techniques de reconstructions de données. Extrait de Anand et al. (2013).

tique et des Études Économiques (INSEE). D'ailleurs, Castrén and Kavonius (2009) utilisent des données similaires au niveau européen pour modéliser la contagion entre pays.

Le contenu de l'information est une question très générale. Néanmoins, trois degrés distincts sont identifiables ; nommons les : trajectoire, réaction et stock. Dans le meilleur des cas, l'observation porte sur des trajectoires. Un même objet est suivi au fil de plusieurs échanges entre institutions. En comparant plusieurs transferts, il est possible de distinguer dans la trajectoire ce qui relève du comportement des entités, des caractéristiques de l'objet suivi. Ensuite, l'observation peut porter sur des réactions sans que l'on puisse suivre les objets échangés. Ce type d'information est au cœur de certains modèles. En admettant des hypothèses sur les formes de comportement, il est possible d'estimer des trajectoires. Enfin, l'observation la moins riche, et la plus usuelle, est une information sur les stocks.
Dans le cadre de la contagion interbancaire, observer les trajectoires pourrait être observer les chaines de collatéralisation ("re-hypotecation" en anglais). Un collatéral est un actif pris en gage lors d'un prêt. Le prêteur peut utiliser cet actif qu'il a reçu comme gage pour emprunter à un tiers. Suivre le trajet d'un actif collatéralisé plusieurs fois permet de comprendre tout le parcours de banque en banque d'un prêt. A l'autre extrémité du spectre, les matrices d'exposition sont des informations de stocks. Elles renseignent l'exposition d'une banque sur une autre à une date donnée, sans aucune information dynamique. Seul les volumes d'actifs donnés et reçus en collatéral sont connus, par exemple. Entre ces deux extrêmes, il est possible d'observer les variations des stocks en observant par exemple des matrices d'expositions à plusieurs dates. En se dotant d'hypothèse de comportement, il est possible de déduire de la série de matrices d'exposition des fonctions de réactions : quelle est

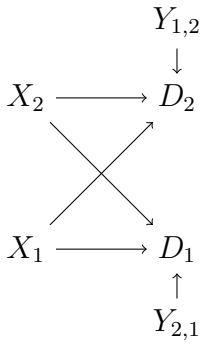
la réduction du prêt octroyé par la banque A à la banque B lorsque la banque B subit une perte de 10% de ses capitaux propres ? etc. Pour les données d'exposition, un degré de richesse supplémentaire peut être une ventilation par instrument : observer uniquement les prêts est moins riche qu'observer les expositions sous forme de prêts, les expositions sous forme de participations croisées, les expositions sous forme d'engagements au hors-bilan...
Il est facile d'illustrer le degré de précision de l'information en examinant l'exemple des échanges de mails internes au sein d'une entreprise. Disposer du parcours des mails –transferts successifs– permet d'analyser la diffusion de l'information au sein des différents services selon le contenu du mail. Disposer du nombre de mails envoyés et reçus par chaque agent toutes les demi-heures est moins précis. Estimer la probabilité de transfert d'un mail en général est possible. Par contre, estimer les caractéristiques qui font qu'un message sera vraisemblablement retransmis est hors de portée. Enfin, observer uniquement le nombre de mails envoyés et reçus par jour permet de classifier au mieux les agents selon l'usage qu'il font du service de messagerie.

Un objectif primordial d'un modèle d'évaluation du risque systémique est sa capacité à éclairer le choix de politique publique en termes de régulation et de supervision. Cet objectif pousse à opter pour une approche structurelle. Ce choix est cohérent si l'économètre dispose de données nécessaires ou de techniques satisfaisantes pour imputer ces données à partir de l'information dont il dispose. Si la contrainte d'indisponibilité des données est trop forte, une approche sous forme réduite est à adopter. Cet enjeu sera approfondi dans la section suivante où une formalisation progressive sera fournie.

I.5 Formalisation de la contagion

Les discussions développées précédemment permettent de formaliser des modèles définissant et mesurant le risque systémique. Nous commençons par présenter une modélisation sous forme réduite, qui, même si elle n'est pas à retenir, permet de formaliser simplement la contagion. Ensuite, cette section développe progressivement une approche structurelle. En partant du modèle canonique de risque de crédit (sans contagion), nous introduisons d'abord la contagion sous une forme réduite, puis un modèle de contagion complètement structurel est présenté. Les différents choix de modélisation nous amènent enfin à discuter la manière dont les chocs exogènes et les mécanismes de contagion s'intercalent temporellement. L'objectif de cette partie n'est pas d'aboutir à un modèle ultime de mesure du risque de contagion, mais de présenter le cadre minimum dans une approche structurelle. Quelques exemples permettront de présenter des développement.

Par souci de clarté, l'accent est porté sur le risque de contagion. Ainsi, le système est défini comme un ensemble de n institutions financières données et un seul facteur de risque (commun) est considéré.



Legende : Les variables aléatoires sont en police normale. Les grandeurs déterministes sont en gras. Les flèches indiquent les liens de causalité.

FIGURE I.4 – Schéma causal du modèle de Davis and Lo (2001a) (pour $n = 2$)

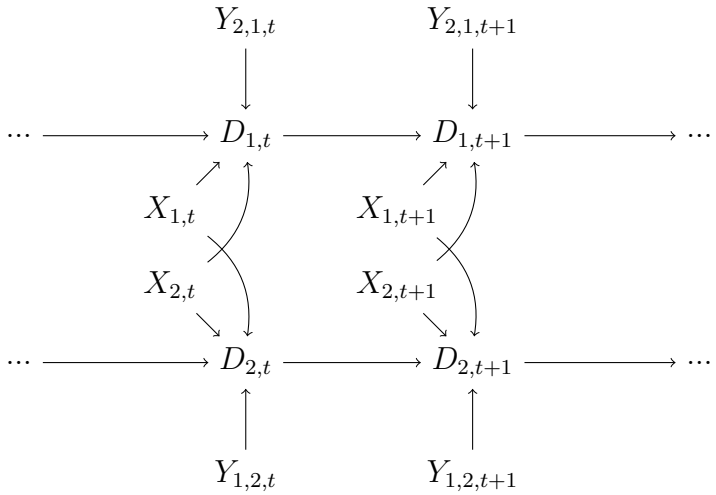
I.5.1 Risque de crédit et contagion sous forme réduite

Commençons par une modélisation du risque de contagion sous sous forme réduite. Dans une approche sous forme réduite, la variable d'intérêt s'appelle l'indicatrice de défaut. L'indicatrice de défaut de l'institution i, notée D_i, vaut 1 lorsque l'institution i est en défaut et vaut 0 sinon. En suivant Davis and Lo (2001a) [voir aussi Davis and Lo (2001b)], une formalisation de la contagion s'obtient en considérant :

$$D_i = X_i + (1 - X_i)\left(1 - \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 - Y_{j,i}X_j)\right). \tag{I.1}$$

Dans ce modèle (voir figure I.4 pour une représentation causale), l'indicatrice de défaut, D_i, résulte de la combinaison de deux types de facteurs : le facteur X_i et les facteurs $Y_{i,j}$. X_i est la composante spécifique à l'institution i : dès que $X_i = 1$, l'institution i est en défaut ($D_i = 1$). Les $Y_{i,j}$ modélisent l'incertitude sur les canaux de contagion : $Y_{i,j} = 1$ indique que si l'institution j est en défaut spécifiquement ($X_j = 1$), alors elle contamine l'institution i. En effet, l'institution i peut être en défaut pour deux raisons. Si $X_i = 1$, le défaut est d'origine individuelle. Si $X_i = 0$, alors il existe au moins une institution j telle que $X_j = 1$ et $Y_{i,j} = 1$, c'est-à-dire que l'institution j est elle-même individuellement en défaut ($X_j = 1$) et il y a un canal de contagion de l'institution j vers l'institution i ($Y_{i,j} = 1$).

Le terme de contagion respecte le caractère asymétrique de la contagion en distinguant $Y_{i,j}$ de $Y_{j,i}$. L'aspect temporel est présent en interprétant le risque individuel X_i comme antérieur aux canaux de contagion $Y_{i,j}$. L'indicatrice de défaut D_i apparaît comme la résultante de défaut spécifique et de défaut du à la contagion. Malgré ces qualités, le terme de contagion utilisé ici appelle deux commentaires. Premièrement, il est assez sommaire au sens où il suffit d'un contact avec n'importe quelle autre entité en défaut pour être en défaut. Ce terme est directionnel, mais qualitatif. Deuxièmement, la contagion ne se déroule qu'une seule fois : une institution touchée par la contagion ne génère pas elle-même de la contagion. Il n'y pas d'effet en chaîne. Il faut alors modifier le modèle initial de Davis and Lo (2001a) à l'aune de ces deux critiques.



Legende : Les variables aléatoires sont en police normale. Les grandeurs déterministes sont en gras. Les flèches indiquent les liens de causalité.

FIGURE I.5 – Schéma causal du modèle de Cousin et al. (2013) (pour $n = 2$)

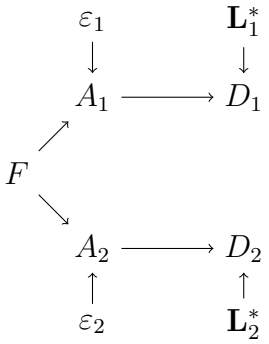
Avec Cousin et al. (2013) il est possible de corriger un aspect en écrivant le modèle sur plusieurs dates. Les auteurs considèrent qu'une institution en défaut à une certaine date peut contaminer une autre institution à une date ultérieure. Une modification possible de l'équation (I.1) est (voir figure I.5 pour une représentation causale) :

$$D_{i,t} = D_{i,t-1} + (1 - D_{i,t-1}) \times \left[X_{i,t} + (1 - X_{i,t}) \left(1 - \prod_{j/D_{j,t-1}=1} Y_{j,i,t} X_{j,t} \right) \right].$$

Des phénomènes de cascades, où des institutions en défaut à la date $t-1$ entraînent des défauts d'autres institutions à la date t, sont alors possibles. Mais la structure de contagion reste aussi sommaire que dans Davis and Lo (2001a) : toute institution peut contaminer toute autre avec des conditions similaires. Autrement dit la structure des interconnexions entre institutions reste homogène et qualitative.

I.5.2 Modèle canonique du risque de défaut sous forme structurelle

L'approche sous forme réduite met en avant les indicatrices de défaut, sans en expliquer les ressorts. Au contraire, l'approche structurelle vise à expliquer les mécanismes sous-jacents au défaut. Avant d'introduire la modélisation de la contagion, nous présentons le modèle standard du risque de défaut (ou risque de crédit) qui repose sur l'idée qu'une institution est en défaut lorsque la valeur de ses actifs est inférieure à la valeur nominale de sa dette [Merton (1974), Vasicek (1991), Gordy (2003)...]. En notant A_i la valeur des actifs de l'institution i et L_i^* sa dette nominale, la probabilité de défaut de l'institution i, notée PD_i, est alors simplement la probabilité que la valeur des actifs soit inférieure à sa dette : $PD_i = \mathbb{P}(A_i < L_i^*)$. Usuellement, la dette est supposée prédéterminée et le risque découle de l'incertitude sur la valeur des actifs.



Legende : Les variables aléatoires sont en police normale. Les grandeurs déterministes sont en gras. Les flèches indiquent les liens de causalité.

FIGURE I.6 – Schéma causal du modèle canonique de risque de défaut (pour $n = 2$)

La valeur des actifs de l'institution i, notée A_i, est la somme du facteur de risque commun F pondéré de la sensibilité de l'institution i à ce facteur de risque, notée β_i, et d'une composante propre à l'institution ε_i, dite composante spécifique ou idiosyncratique (voir figure I.6 pour une schématisation des causalités) :

$$A_i = \beta_i F + \varepsilon_i, \quad \text{pour } i = 1, ..., n.$$

Sous forme vectorielle, ce modèle canonique s'écrit :

$$A = \beta F + \varepsilon. \tag{I.2}$$

Un facteur de risque commun est une source extérieure au système qui peut affecter simultanément plusieurs institutions. Par exemple, les résultats des institutions financières dépendent du PIB (représentant les facteurs macroéconomiques), des taux d'intérêt de la BCE (conditions de financement), d'indices boursiers (type CAC 40)... Ces facteurs sont souvent associés à des types de risques : le PIB au risque de crédit, un indice boursier au risque de marché, le taux d'intérêt de la BCE au risque de liquidité... Il est usuel de supposer que les facteurs spécifiques sont indépendants entre eux et qu'ils sont indépendant du facteur commun.
Dans ce cadre, le risque total est alors décomposé en risque systématique et risque spécifique. La probabilité de défaut de l'institution i s'écrit comme une fonction de β_i et des paramètres régissant la distribution de F et de ε_i :

$$PD_i = \mathbb{P}\left(\beta_i F + \varepsilon_i < L_i^*\right).$$

La dépendance entre les défauts des différentes institutions est captée uniquement par l'exposition au facteur commun. Pour introduire de la contagion, il faut donc modifier le modèle de base. Plusieurs pistes sont envisageables.

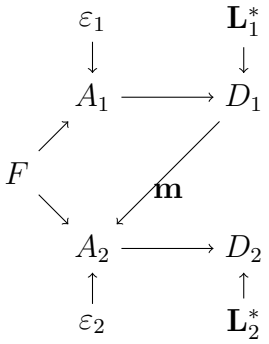
Une première idée est d'introduire de la dépendance soit en relâchant l'hypothèse d'indépendance entre composantes spécifiques, soit en relâchant l'hypothèse d'indépendance entre les facteurs communs et les composantes spécifiques. Détaillons ces approches en montrant que leur domaine de validité est discutable tant d'un point de vue opérationnel que d'un point de vue conceptuel.

Considérer que la contagion est l'apparition de dépendance entre composantes spécifiques (lors d'une crise) est la définition opérationnelle proposée par Forbes and Rigobon (2002). Le modèle (I.2) est modifié en supposant que les composantes spécifiques sont corrélées entre elles. La présence de contagion est alors caractérisée par l'existence de cette matrice de corrélation, et se mesure en comparant cette matrice de corrélation à la matrice identité (en cas d'absence de corrélation). Cette approche est valide lorsque le nombre de facteurs communs est fixé et connu. Si le nombre de facteurs communs n'est pas fixé *a priori* par l'économétre, alors le modèle est mal spécifié : on ne peut identifier ce qui relève des facteurs communs ou des composantes spécifiques. Cette ambiguïté n'est pas un simple problème technique, elle implique un problème d'interprétation. En effet, avec un modèle mal spécifié, toutes les combinaisons possibles entre un modèle avec uniquement des facteurs communs sans contagion et un modèle sans facteur commun et uniquement de la contagion sont possibles sans qu'ils soient distinguables. Autrement dit, la frontière entre facteur systématique et composante spécifique devient poreuse. La qualité statistique de ces modèles, au sens de la qualité des prévisions par exemple, sera équivalente, mais leurs interprétations économiques, c'est-à-dire l'enseignement sur la manière dont les événements surviennent, et donc sur les recommandations de politiques économiques seront radicalement différents. Si l'économètre conclut à la présence de contagion, la recommandation implicite en terme de supervision est un examen des interconnexions au sein du système au détriment des éléments extérieurs. Au contraire, s'il conclut à la présence de facteurs communs, la piste de travail s'oriente uniquement vers les éléments extérieurs en négligeant tout le volet interconnexion [14]. Introduire une dépendance entre les facteurs communs et les composantes spécifiques pose le même type de problème. A moins de spécifier avec plus détail la forme des facteurs, le modèle n'est plus identifiable.

Indépendamment de ces critiques qui soulignent que l'introduction de corrélation doit être compensée par une perte de généralité (nombre de facteurs systématiques fixé...), associer contagion et corrélation est piégeux sur le plan conceptuel. D'une part, la notion de contagion implique une direction spatiale : A peut contaminer B sans que B contamine A. D'autre part, la contagion suppose une relation de causalité qui implique une direction temporelle : dire que A contamine B requiert que A soit malade avant B et que B soit malade à cause de A. Au contraire la corrélation est un concept symétrique (la corrélation de X avec Y est par construction égale à la corrélation entre Y et X) et instantané. En fait, une corrélation positive est observable entre X et Y dès qu'il existe une troisième cause Z affectant positivement X et Y ou dès qu'il existe une cause intermédiaire W entre X et Y. Dans ces deux derniers cas, il est abusif de dire que X cause Y [Suppes (1970)].

Le second volet de la critique souligne une importante lacune du modèle défini par l'équation (I.2) : il n'y a pas de dimension dynamique. Il faut pouvoir définir un "avant la contagion" et un "après la contagion" pour pouvoir modéliser et donc mesurer son impact.

14. Sur ce point la démarche économétrique semble diverger d'une démarche physique où la simplicité est un argument de choix : "Si deux théories expliquent également bien un résultat, il convient de trancher en faveur de la plus simple" [Reeves (1981)].



Legende : Les variables aléatoires sont en police normale. Les grandeurs déterministes sont en gras. Les flèches indiquent les liens de causalité.

FIGURE I.7 – Schéma causal du modèle de Rosch and Winterfeldt (2008)(pour $n = 2$)

I.5.3 Modèle mixte

Certains auteurs développent une stratégie que nous qualifions de mixte. L'approche est globalement structurelle car l'accent est porté sur la modélisation de la valeur des actifs (et non directement sur les indicatrices de défaut), mais la modélisation de la contagion reste sommaire. Il s'agit d'un terme additionnel, sans détails sur les mécanismes sous-jacents au phénomène de contagion, qui rappelle immédiatement une approche sous forme réduite. Ainsi en s'inspirant des modélisations sous forme réduite [par exemple, Jarrow and Yu (2001), Davis and Lo (2001a), Davis and Lo (2001b)], Rosch and Winterfeldt (2008) proposent de définir explicitement deux types d'institutions : celles qui peuvent contaminer (institutions infectieuses) et celles qui peuvent être contaminées (institutions exposées). La valeur des actifs des institutions infectieuses est donnée par le modèle standard composé de facteurs communs et des facteurs individuels, via l'équation (I.2). La dynamique des actifs des institutions pouvant être contaminées fait alors intervenir un terme systématique, un terme individuel et un terme de contagion. Le terme de contagion est simplement une pénalité (m) sur l'actif par banque infectieuse en défaut. Si le système comporte deux institutions dont la première est infectieuse et la seconde exposée, les actifs s'écrivent (voir la figure I.7 pour une schématisation des causalités) :

$$\begin{cases} A_1 &= \beta_1 F + \varepsilon_1, \\ A_2 &= \beta_2 F + \varepsilon_2 - m\mathbb{1}_{A_1 < L_1^*}. \end{cases}$$

La population infectieuse est disjointe de la population contaminée. Par rapport au modèle de Davis and Lo (2001a), l'enrichissement est notable. Outre la démarche globalement structurelle, le côté qualitatif de la contamination à la Davis and Lo (2001a) devient quantitatif via le paramètre de pénalité m. Deuxièmement, la population devient hétérogène. C'est le premier modèle de la littérature où sont clairement identifiés un terme individuel, un terme systématique et un terme de contagion. Si la dichotomie de la population est jugée acceptable, ce modèle est un bon candidat pour fournir un cadre d'analyse et de mesure du risque de contagion. La structure de contagion est cependant trop pauvre pour correspondre aux in-

terconnexions entre institutions financières [15] : idéalement, toute institution peut engendrer des pertes, plus ou moins grandes, pour toute autre institution. De plus, la contagion doit pouvoir se propager en plusieurs étapes.

L'article de Egloff et al. (2007) [voir aussi Giesecke and Weber (2006)] propose une réponse élégante en développant une alternative au terme de contagion par rapport à Rosch and Winterfeldt (2008). De manière simplifiée, la méthodologie comporte deux étapes. Premièrement, une dynamique (avant contagion) des actifs est précisée avec une composante systématique et une composante individuelle. Deuxièmement, les auteurs modélisent la contagion par une matrice de transmission M. La matrice M est considérée comme connue. Le coefficient (i, j) de cette matrice représente l'impact d'une modification des actifs de l'institution i sur ceux de l'institution j. Ces coefficients jouent en quelque sorte le rôle des pénalités du modèle de Rosch and Winterfeldt (2008). Si $A^{(k)}$ représente la valeur des actifs après k étapes de contagion, le modèle s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{ll} A^{(0)} & = \beta F + \varepsilon, \\ A^{(1)} & = A^{(0)} + M \times A^{(0)}, \\ A^{(2)} & = A^{(0)} + M \times A^{(0)} + M^2 A^{(0)}, \\ & \vdots \\ A^{(k)} & = A^{(0)} + M \times A^{(0)} + ... + M^k A^{(0)}, \qquad \text{pour } k \geq 1 \end{array}\right. . \tag{I.3}$$

Après une étape de contagion, $A^{(1)}$ est la somme entre l'impact initial brut $A^{(0)}$ et l'impact indirect via M. La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ représente donc la valeur des actifs après k étapes de contagion. Sous certaines conditions techniques [16], la suite de la valeur des actifs converge. Cette valeur limite, notée $A^{(\infty)}$, est la limite d'une série géométrique de raison M :

$$A^{(\infty)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k\right) A^{(0)} = (Id - M)^{-1} A^{(0)}$$

A partir de cette valeur limite, les indicatrices de défaut se déduisent par comparaison à la valeur nominale de la dette (voir figure I.8). Cette valeur limite peut être ré-écrite pour faire apparaître le terme de contagion :

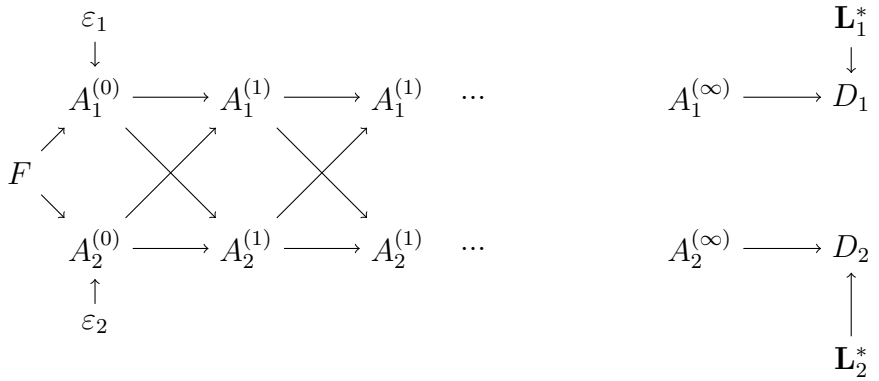
$$A^{(\infty)} = \left(Id + M \sum_{h=0}^{\infty} M^h\right) A^{(0)} = \left(Id + M(Id - M)^{-1}\right) A^{(0)} = A^{(0)} + M(Id - M)^{-1} A^{(0)}$$

Puis en remplaçant $A^{(0)}$ par $\beta F + \varepsilon$, la décomposition en trois termes apparaît :

$$A^{(\infty)} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\varepsilon}_{\text{spécifique}} + \underbrace{\beta F}_{\text{systématique}}}_{\text{effet direct}} + \underbrace{M(Id - M)^{-1}(\varepsilon + \beta F)}_{\text{contagion}}}.$$

15. Pour être juste, il est nécessaire de préciser que les modèles présentés dans cet article ont été développés pour analyser le risque de crédit. Pour les auteurs, les institutions sont donc des entreprises de service, des industries, des sociétés d'exploitation de ressources naturelles... Ces entreprises sont réputées moins interconnectées que des institutions financières.

16. La convergence est assurée lorsque les valeurs propres de M sont de modules plus petits que 1. Ceci se produit notamment lorsque les coefficients de M sont positifs et lorsque la somme des coefficients de toute ligne est plus petite que un.



Legende : Les variables aléatoires sont en police normale. Les grandeurs déterministes sont en gras. Les flèches indiquent les liens de causalité.

FIGURE I.8 – Schéma causal du modèle de Egloff et al. (2007) (pour $n = 2$)

Avec cette écriture, la nature endogène de la contagion est nette. Le terme de contagion est un terme additionnel qui propage les chocs exogènes au sein du système. Ainsi, dès que la matrice de transmission est nulle, le terme de contagion disparaît. Selon le signe des coefficients de M le terme de contagion peut être positif ou négatif.

Dans le cas de deux institutions en supposant l'absence de contagion sur soi-même ($m_{1,1} = m_{2,2} = 0$), la valeur des actifs de l'institution i est :

$$A_i = \varepsilon_i + \beta_i F + \frac{m_{i,j}}{1 - m_{i,j}m_{j,i}} (\varepsilon_j + \beta_j F) + \frac{m_{i,j}m_{j,i}}{1 - m_{i,j}m_{j,i}} (\varepsilon_i + \beta_i F), \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j.$$

Le terme de contagion se divise alors en deux parties. Le premier est la transmission du choc exogène subi par l'institution j. Le coefficient $m_{i,j}$ traduit l'exposition de l'institution i sur l'institution j. Le second terme de contagion est la rétroaction du choc initial sur l'institution i via l'institution j. Il s'agit bien d'un terme de contagion (et non pas du risque d'amplification) puisque ce terme dépend explicitement de l'exposition de l'institution j sur l'institution i (via $m_{j,i}$).

Cette écriture est intellectuellement satisfaisante car les trois termes sont identifiables et présentent une interprétation propre. De plus, cette formulation permet de quantifier l'amplitude de la contagion via le facteur $M(Id - M)^{-1}$. Par exemple, la somme par ligne des coefficients est une mesure de l'exposition à la contagion de chaque institution. Si les coefficients de $M(Id - M)^{-1}$ sont tous petits, alors l'amplitude de la contagion est vraisemblablement négligeable.
Malgré ces qualités, le principal défaut de ce modèle est l'absence de fondements économiques de la matrice M. Il est impossible de l'observer. Son estimation est délicate car elle soulève des problèmes similaires à l'introduction de corrélation entre facteurs (voir la discussion du modèle canonique précédemment). Ce n'est qu'en modélisant structurellement la contagion qu'il sera possible de construire un modèle satisfaisant d'un point de vue opérationnel.

I.5.4 Risque de crédit et contagion sous forme structurelle

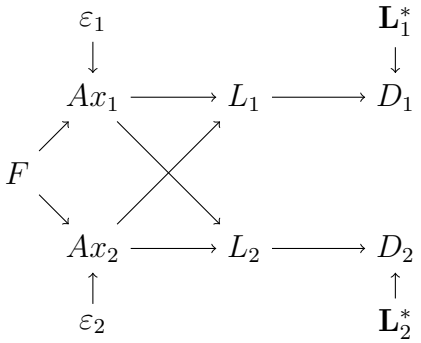
Pour adopter une approche structurelle totale, il est nécessaire de décrire le(s) mécanisme(s) de contagion. Cela permet d'écrire les variables d'intérêt du système

comme définissant un équilibre financier ou économique. Par équilibre, il faut comprendre que pour chaque grandeur l'ensemble des forces qui l'affectent sont décrites. Le cas d'école en économie est l'équilibre sur un marché qui traduit l'adéquation entre l'offre et la demande. Dans le cas de la contagion, l'équilibre s'écrira sur les expositions entre institutions qui sont à la fois des actifs et des passifs.
Si le système considéré est composé de banques, il est naturel de penser que les prêts interbancaires forment un canal de contagion. Il est donc nécessaire d'écrire explicitement les prêts dans l'actif des banques. Avec Gouriéroux et al. (2012) et Gouriéroux et al. (2013), décomposons l'actif total de l'institution i en deux parties : d'une part, les actifs exogènes, notés Ax_i, sont exposés au facteur commun et à la composante spécifique, et d'autre part, les actifs constitués de la dette des autres institutions considérées. Notons L_i^* la valeur nominale de la dette de l'institution i, et L_i sa valeur effective. Le modèle de Merton (1974) stipule que la valeur de la dette de l'institution i est le minimum entre la valeur de ses actifs et sa valeur nominale. En effet, si les actifs sont supérieurs à la dette nominale, l'institution est solvable et remboursera toute sa dette ; si les actifs sont inférieurs, les créanciers récupèrent tous les actifs dans le processus de liquidation. Écrivons la valeur de l'actif interbancaire détenu par l'institution i sur l'institution j sous la forme $\gamma_{i,j}L_j$. $\gamma_{i,j}$ représente la part des dettes émises par l'institution j possédée par l'institution i. La matrice formée par les $\gamma_{i,j}$, ou matrice de contagion, résume les caractéristiques de la contagion. Le modèle s'écrit en deux sous-systèmes :

$$\begin{cases} Ax &= \beta F + \varepsilon, \\ L &= min\Big(Ax + \Gamma L; L^*\Big) \end{cases}, \tag{I.4}$$

où l'opérateur $min(X; 0)$ est appliqué composante par composante. L'écriture en deux étapes distingue clairement le choc extérieur avec ses deux composantes (systématique, spécifique) et la propagation du choc dont la mécanique est décrite par la seconde équation. Cette dernière équation forme un système à n équations non-linéaires, du fait de l'opérateur minimum. Ce système traduit un équilibre entre les valeurs des dettes des institutions (figure I.9). La composante non-linéaire ne permet pas de décomposer la valeur d'équilibre de la dette comme une simple somme d'un terme systématique, d'un terme spécifique et d'un terme de contagion.

Il est cependant possible d'écrire la solution de ce système sous la forme d'une suite dans l'esprit du modèle (I.3). Les différentes étapes de cette suite peuvent s'interpréter comme des étapes de contagion [Eisenberg and Noe (2001)]. On note $A^{(k)}$ et $L^{(k)}$ respectivement le vecteur des actifs totaux et le vecteur de la valeur des



Legende : Les variables aléatoires sont en police normale. Les grandeurs déterministes sont en gras. Les flèches indiquent les liens de causalité.

FIGURE I.9 – Schéma causal du modèle de Gouriéroux et al. (2012) (pour $n = 2$)

dettes après k étapes de contagion :

$$\begin{cases} A^{(0)} &= \beta F + \varepsilon, \\ L^{(0)} &= min\Big(A^{(0)}; L^*), \\ A^{(1)} &= \beta F + \varepsilon + \Gamma L^{(0)}, \\ L^{(1)} &= min\Big(A^{(1)}; L^*), \\ &\vdots \\ A^{(k)} &= \beta F + \varepsilon + \Gamma L^{(k-1)}, \\ L^{(k)} &= min\Big(A^{(k)}; L^*) \qquad \text{pour } k \geq 1. \end{cases}$$

Cette écriture souligne que le vecteur L^* des dettes nominales et la matrice de contagion Γ sont des paramètres de l'équilibre.

Par rapport au modèle précédent –modèle (I.3)– où la contagion était automatique, la contagion est ici stochastique : la valeur de la dette n'est pas déterminée a priori. Nous pouvons alors passer de la modélisation du risque de contagion à sa mesure. Mesurer une variable aléatoire revient à définir un ensemble restreint de statistiques qui la résument.
Une stratégie est de raisonner par analogie avec le risque de crédit. Le risque de perte sur un prêt est résumé par deux grandeurs. La probabilité de défaut qui est la probabilité que le prêt ne soit pas intégralement remboursé est une information qualitative. La perte attendue en cas de défaut est le montant des pertes sachant qu'il y a eu défaut. Il s'agit d'une information quantitative. Dans le cas de la contagion, il nous faut donc définir une probabilité d'être en défaut à cause de la contagion et une perte attendue en cas de contagion. En suivant Gouriéroux et al. (2012), il est possible de décomposer la probabilité de défaut d'une institution comme la somme de deux termes. Le premier terme est la probabilité de défaut en l'absence d'interconnexion qui traduit la fragilité propre à l'institution. Le second terme traduit uniquement l'influence des interconnexions. Cette décomposition peut aussi s'appliquer pour décomposer la perte attendue en distinguant ce qui est intrinsèque à l'institution de ce qui résulte de la présence d'interconnexions.

Comme précédemment, la contagion est un phénomène endogène de propagation de chocs exogènes composés de chocs systématiques et de chocs spécifiques. Avec le modèle (I.4), la contagion est explicitement modélisée et il est possible de quantifier, mesurer au sens de lord Kelvin, le risque de contagion. Cependant, contrairement à la chaleur qui peut être mesurée grâce à une seule grandeur, la température, le risque de contagion nécessite plusieurs grandeurs pour être caractérisé. Notre proposition a l'avantage de fournir des extensions directes de mesures de risque usuelles. D'autres possibilités sont bien sûr envisageables. Le choix final résulte d'un arbitrage opérationnel et non intellectuel.

I.5.5 Dynamiques relatives de la contagion et des chocs exogènes

Intellectuellement, la formulation précédente est satisfaisante si deux hypothèses sont valides. D'une part, la matrice de contagion et le(s) facteur(s) commun(s) sont observables et accessibles (au moins partiellement). D'autre part, lorsque le modèle est écrit pour plusieurs dates, il y a un enchainement sans chevauchement entre les phases de choc et les phases de contagion. Autrement dit, un choc est complètement propagé avant qu'un nouveau choc apparaisse.
La dimension informationnelle des matrices de contagion a déjà été discutée. Le caractère observable du ou des facteurs communs est souvent présenté comme un choix purement technique sans réelle discussion. Schématiquement, les facteurs systématiques sont soit définis comme des variables macroéconomiques publiques (PIB, CAC40, inflation...) –et ils sont alors parfaitement identifiés et observables–, soit définis comme des processus latents (i.e. inobservables) qui sont des "inconnues" à déterminer du modèle. La première solution a un intérêt économétrique certain car le modèle est alors linéaire et les techniques usuelles d'estimation s'appliqueront Cette solution a aussi un intérêt économique : les facteurs et les sensibilités ont une interprétation immédiate. Cependant, ce choix peut se révéler être un véritable guêpier. En effet, ce choix bat souvent en brèche le caractère exogène du choc. Intuitivement, les modèles reposent fondamentalement sur le fait que les facteurs influencent les variables d'intérêt, mais que les variables d'intérêt n'influencent pas les chocs. Si la dernière proposition n'est pas vraie, les variables d'intérêt telles que définies dans la modélisation ne sont pas à l'équilibre (voir la discussion du modèle Rosch and Winterfeldt (2008) présenté précédemment). Autrement dit, la variable modélisée est la valeur de la variable d'intérêt sans aucune rétro-action. Cette valeur (conceptuelle) est différente de la valeur de la variable observée qui elle comprend l'ensemble des influences réciproques. En forçant le trait, un tel choix serait similaire à modéliser la position finale d'une balle dans un match de tennis en stipulant qu'elle finit toujours dans le camp adverse au serveur (absence de rétro-action).
Sur le plan pratique, la question de la disponibilité de l'information prend une dimension temporelle. La fréquence et le délai de publication varient avec le type de données. Par exemple, en France le PIB du premier trimestre est publié aux alentours de la mi-mai. Si les données réglementaires sont sur un rythme trimestriel ou semestriel [17], les données de marché sont au minimum journalières. La durée entre

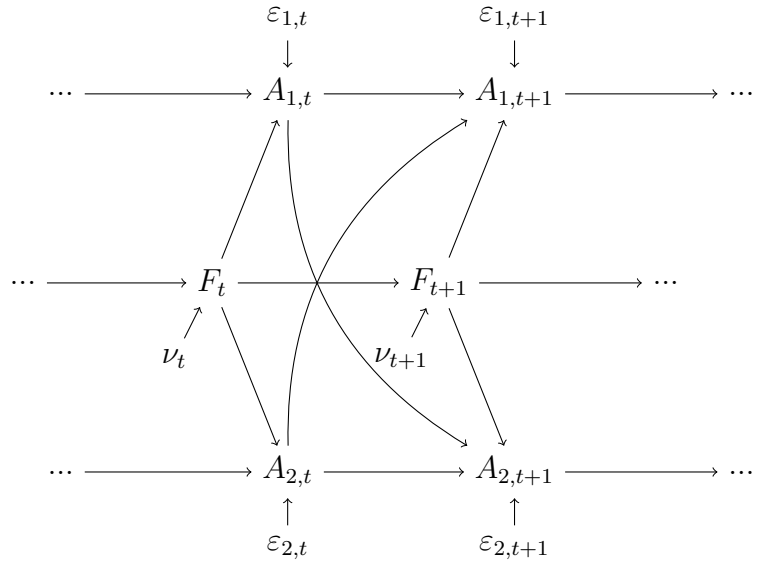
17. La réglementation actuelle requiert une remise trimestrielle pour l'ensemble des établissements. L'initiative Data-Gaps prévoit une remise partielle hebdomadaire pour les plus grands établissements [Financial Stability Board (2013)].

la date t et la date $t+1$ d'un modèle est donc conditionnée par la fréquence des données nécessaires à l'alimenter. Cette contrainte peut remettre en cause un modèle si le phénomène analysé ne se déroule pas sur le même rythme que les données utilisées. Par exemple, alimenter un modèle de flash crash (crack boursier de quelques minutes) avec des données trimestrielles n'est pas convaincant. Outre l'adéquation entre la fréquence des données et le phénomène modélisé, il faut prendre en compte l'horizon d'utilisation. Si un modèle propose un indicateur détectant les crises systémiques, cet indicateur doit pouvoir être calculé avec suffisamment d'avance sur la crise anticipée pour que le régulateur puisse réagir [Burkart and Coudert (2002)]. Pour poursuivre la comparaison, le superviseur peut être plus intéressé par un détecteur de fumée que par un thermomètre. Cependant, si le modèle propose une explication des mécanismes en jeu au cours d'une crise, il aura toute sa pertinence pour poser un diagnostic de la situation. Si chaque type de feu (sec, électrique, liquide inflammable...) est caractérisé par une gamme de température, alors le thermomètre permettra de choisir la meilleure technique d'extinction (eau, mousse, fermeture de vanne...).

En s'inspirant de Darolles et al. (2011), il est possible de formaliser les deux enjeux précédents avec un modèle temporel composé d'une équation régissant la dynamique du facteur exogène et d'une équation incorporant les trois termes spécifique/commun/contagion (voir figure I.10 pour un schéma causal) :

$$\begin{cases} F_t &= \rho F_{t-1} + \nu_t, \\ A_t &= \beta F_t + M \times A_{t-1} + \varepsilon_t, \\ (\nu_t, &\varepsilon_t) \text{ sont indépendants.} \end{cases} \tag{I.5}$$

La dynamique de la variable d'intérêt est assez proche des modèles précédents. Introduire la contagion avec un retard permet d'introduire un aspect temporel explicite étayant un caractère causal [Suppes (1970)]. Le modèle est un cas particulier de spécification FAVAR (Factor Augmented Vector Autoregressive) introduit initialement par Bernanke et al. (2005), mais contraint par l'hypothèse d'exogénéité que transcrit la troisième équation. Si les facteurs F_t sont observables, la modélisation suppose une dynamique des plus classiques : F_t suit un modèle autoregressif d'ordre 1. Le modèle est alors linéaire et s'estime par les moindres carrés ordinaires. L'estimation des innovations ν_t et ε_t est effectuée de manière autonome (équation par équation). Il n'y a donc aucune raison que les deux processus d'innovations ν et ε soient indépendants. En pratique, la contrainte d'indépendance entre ν_t et ε_t est non-satisfaite, selon toute vraisemblance.
Considérer des facteurs inobservables garantit une plus grande cohérence de la modélisation en assurant le caractère exogène des chocs. Cette approche a aussi l'avantage de faciliter les prévisions. En effet, les techniques de filtration des facteurs latents fournissent régulièrement des facteurs indépendants entre eux (par exemple via une Analyse en Composantes Principales). La prévision de F_t s'effectue donc en effectuant la prévision de chacune de ses composantes. A titre de comparaison, avec des facteurs observables, il est nécessaire de faire une prévision jointe respectant la dépendance entre ces facteurs : par exemple la prévision du PIB peut difficilement être effectuée indépendamment de celle du chômage ou de celle de l'inflation.



Legende : Les variables aléatoires sont en police normale. Les grandeurs déterministes sont en gras. Les flèches indiquent les liens de causalité.

FIGURE I.10 – Schéma causal du modèle de Darolles et al. (2011) (pour $n = 2$)

I.5.6 Extensions

Nous avons présenté une modélisation intégralement structurelle du risque de contagion en nous restreignant à la contagion résultante des expositions bilancielles entre institutions. D'autres mécanismes de contagion sont possibles et doivent dans une démarche structurelle être finement décrits et modélisés. A titre illustratif, nous présentons sans les détailler le canal de contagion par les prix et les interactions entre risque de solvabilité (risque de crédit/marché) et risque de liquidité de financement.

Contagion par les prix

Considérons un ensemble d'institutions financières ayant des investissements communs [pour plus de détails voir Cifuentes et al. (2005)]. Par exemple, plusieurs de ces institutions ont acheté les obligations émises par telle grande entreprise. Imaginons que chaque institution veille à maintenir un levier financier (rapport entre sa dette et ses capitaux propres) constant. Si une de ces institutions subit un choc spécifique diminuant ses capitaux propres, via par exemple le versement de dividendes à ses actionnaires, son levier s'éloigne de sa cible. L'institution va donc vendre ses actifs pour rembourser une partie de ses dettes et restaurer son ratio de levier. Si cette institution vend cet actif commun, elle crée une hausse de l'offre qui déprécie le prix de cet actif. Cela a pour effet direct de réduire son actif total. Dans le même temps, la baisse du cours de cet actif commun entraîne une baisse de la valeur de l'actif total des autres institutions, diminuant d'autant leurs capitaux propres. Comme chacune veille à garder constant son ratio de levier, les autres institutions commencent à vendre aussi. Certaines vendent en particulier cet actif commun accentuant la pression à la baisse sur son cours. Cette nouvelle baisse dégrade les ratios de levier provoquant une nouvelle vague de vente. Et ainsi de suite...

Interaction entre solvabilité et liquidité de financement

Considérons une banque dont l'actif est risqué et la dette constituée de dépôt [pour plus de détails voir Morris and Shin (2009)]. Les dépôts sont exigibles à tout instant par leurs propriétaires. La question de la solvabilité de la banque revient à comparer la valeur de ses actifs et la valeur de sa dette. Imaginons que les perspectives pour la valeur de l'actif de la banque soient négatives. La banque fait face à un risque de solvabilité : il est vraisemblable que la valeur de ses actifs devienne dans un avenir proche inférieure à la valeur de sa dette. Pour un déposant convaincu que le défaut de la banque est imminent et certain, il est stratégique de récupérer son dépôt au plus tôt. S'il attend et que la banque devient insolvable, il récupérera moins que s'il agit tout de suite. Selon le degré de conviction dans le défaut de la banque, les déposants vont retirer plus ou moins leurs fonds. Autrement dit, la banque va avoir des difficultés à se financer. On parle de risque de liquidité de financement (en opposition au risque de liquidité à l'actif). Cette difficulté ne provient pas de tensions générales sur le marché des dépôts, mais bien d'une transformation entre le risque de solvabilité et le risque de liquidité de financement.

I.5.7 Synthèse

Comme précisé dans l'introduction, cette partie n'a pas l'ambition de proposer un modèle parfait recouvrant toutes les dimensions du risque systémique, ni même tous les canaux de contagion possible. Néanmoins en examinant successivement divers modèles, nous avons pu identifier les forces et les faiblesses de chacune des pistes. L'évaluation de la pertinence d'un modèle n'est pas tant une question économétrique qu'une question d'acceptation des limites du modèle considéré sous contrainte de la qualité et de disponibilité de l'information.

L'absence de modèle unifié provient de l'intérêt, certes croissant, mais somme toute récent pour la problématique du risque systémique. Sans être exhaustif, trois principaux canaux de contagion sont clairement identifiées dans la littérature : les relations directement écrites dans les bilans des institutions financières [Eisenberg and Noe (2001), Gouriéroux et al. (2012), Gouriéroux et al. (2013)...], les ventes massives d'actifs [Cifuentes et al. (2005), Greenwood et al. (2012), Duarte and Eisenbach (2013)...], les sources de financement [Gai and Kapadia (2010), Gauthier et al. (2010), Fourel et al. (2013)...] et les retraits groupés d'investisseurs ou de clients [Darolles et al. (2011)...]. Les questions informationnelles, les effets de réputation,... sont d'autres canaux de contagion potentiels [de Bandt and Hartman (2000) et de Bandt et al. (2009)]. Plusieurs articles proposent la combinaison de deux canaux de contagion, parfois de façon quelque peu artisanale, mais aucun ne prétend les englober tous. Concernant les interactions entre facteurs de risques, les liens entre risque de crédit et le risque de liquidité de financement [Diamond and Dybvig (1983), Adrian and Brunnermeier (2008), Morris and Shin (2009), Gouriéroux and Héam (2013)...] ainsi que les liens entre risque de liquidité à l'actif et risque de liquidité de financement [Brunnermeier and Pedersen (2009), Darolles et al. (2011), Malherbe (2013)...] sont principalement développés.

I.6 Implications pour la régulation macro-prudentielle

Les banques et les sociétés d'assurances, et d'une manière plus générale, les acteurs du secteur financier sont soumis à une législation particulière : le code monétaire et financier vient compléter le code du commerce par exemple. Plusieurs arguments viennent traditionnellement justifier ces régulations spécifiques. Le principal argument [18] est que l'activité bancaire et l'activité d'assurance impliquent une importante confiance des clients (ménages et entreprises). Il y a un besoin social très fort pour que les ménages aient accès à des comptes courants sans aucun risque et à des assurances-dommages élémentaires parfaitement garanties. Cette attente justifie que le législateur, représentant du peuple, impose aux banques et aux sociétés d'assurances des normes spécifiques. Pour cela, les institutions financières doivent posséder un niveau en capital suffisant pour porter leur risque de défaut sous un seuil socialement acceptable.

Même si la motivation initiale de la régulation émane d'un souhait collectif, la régulation correspondante s'applique au niveau de chaque institution. La régulation micro-prudentielle vise à minimiser le risque de défaut de chaque institution. Le principal outil des régulations est d'imposer un niveau minimal de capital à chaque institution en fonction du risque des actifs. Cet niveau minimal est calculé comme montant minimal de capitaux pour couvrir des risques identifiés par leur sources. En pratique, pour chaque banque, la sensibilité aux facteurs communs ainsi que l'amplitude du choc spécifique sont évaluées. L'exigence totale dépend de la somme de ces sensibilités et de l'amplitude spécifique. Implicitement, la régulation micro-prudentielle suppose d'une part qu'assurer suffisamment de capital pour chaque type de risque suffit à assurer suffisamment de capital pour tous les risques, et d'autre part qu'assurer la stabilité de chaque institution est une condition nécessaire et suffisante au bon fonctionnement du secteur financier.
Les éléments exposés précédemment soulignent tous la limite d'une telle démarche où il n'y a ni amplification entre les sources de risques, ni contagion entre institutions. En somme, la régulation micro-prudentielle est sourde à certains type de risque : amplification, contagion et systématique extrême. L'aspect systématique extrême est traité dans le cadre des exercices de stress-test où la résilience du système à des chocs extrêmes est évaluée. Les superviseurs [19] ont développé une approche complémentaire baptisée "supervision macro-prudentielle". En suivant la définition du risque systémique donnée par les institutions de supervisions (voir la section I.2), la supervision macro-prudentielle vise effectivement à limiter l'impact de la sphère financière sur la sphère réelle. En visant à compléter la supervision micro-prudentielle, la régulation macro-prudentielle se décline en deux volets [voir Borio

18. De fait, les banques sont les principaux acteurs de la diffusion de la politique monétaire. En ce sens, elles gèrent un bien public. Les assurances ont un cycle de production inversé : elles collectent les primes avant que les sinistres aient lieu. Sans réglementation du calcul des primes, la concurrence inciterait à diminuer les primes en-deçà des montants nécessaires aux prestations ou à utiliser les primes pour un usage différent de la couverture des dommages.

19. La régulation, ou réglementation, est imposée par la loi. Elle émane donc fondamentalement du pouvoir législatif. Usuellement, elle fait suite à des accords internationaux établis par le pouvoir exécutif. La supervision concerne l'application de la réglementation. Elle est opérée par les autorités de supervision le plus souvent indépendantes des banques centrales. Une analogie serait de considérer que la régulation est la fiscalité : elle est votée par le Parlement et collectée par l'administration fiscale.

(2011) ou Galati and Moessner (2013) pour plus de détails].

Le premier volet de la supervision macro-prudentielle se concentre sur l'impact de la sphère financière sur l'économie réelle [20]. Ce second volet s'inscrit parfaitement dans le cadre des définitions institutionnelles du risque systémique. Cependant, il pose d'importantes difficultés en termes de modélisation : la discussion sur le caractère observable ou latent des facteurs communs prend ici tout son sens. Ce second volet implique qu'il n'est pas possible que le PIB, le chômage, l'inflation... soient affectés par le système financier. Toutes ces variables d'intérêt ne peuvent plus être choisies comme facteurs communs observés. L'effort doit donc être porté vers une modélisation avec facteurs communs latents, sous peine d'incohérence de la méthodologie. A cet égard, la méthodologie de définition des scénarios des stress-tests lancés en 2014 par l'Autorité Bancaire Européenne (ABE) est intéressante. Même si des facteurs observables sont in fine indiqués, la description économique du scénario de dégradation des conditions macroéconomiques souligne que l'origine du scénario est extérieure au système bancaire européen [EBA (2014)].

Le second volet consiste à limiter le risque de contagion entre institutions. Les éléments exposés dans cette note appellent à une mesure fondée sur un modèle distinguant les expositions communes via la présence de facteurs communs et le risque de contagion. L'objectif est évidemment de pouvoir éclairer des prises de décision sur la réglementation des interconnexions [21]. Considérer divers canaux de contagion est évidemment préférable à n'en considérer qu'un seul, pourvu que l'articulation entre les canaux soit cohérente. Les canaux de contagion se révèlent liés aux différentes sources de risques identifiés : le risque de crédit pour la contagion en solvabilité, le risque de liquidité de marché pour la contagion par les prix, le risque de liquidité de financement pour la contagion de financement... Il semble naturel de commencer par modéliser proprement l'articulation des facteurs de risques pour une seule institution avant de vouloir combiner les canaux de contagion. Cette étape préalable permet(trait) de ne pas superposer des canaux de contagion les uns aux autres sans les articuler. A titre informatif, la table I.5 compare quelques modèles proposés par les autorités de supervision et ayant fait l'objet de publication.

Clairement, la supervision macro-prudentielle complète la régulation micro-prudentielle. Néanmoins, proposer une supervision macro-prudentielle autonome d'une supervision micro-prudentielle (ou inversement) ouvre des possibilités d'incohérence majeure. La supervision micro-prudentielle s'effectue au niveau de chaque institution, mais doit garder à l'esprit la dimension macro. Bien que la supervision macro-prudentielle ait des objectifs clairement au niveau agrégé, ses leviers d'actions ne s'actionnent qu'au niveau des institutions, c'est-à-dire au niveau de la supervision micro-prudentielle.

20. Ce second volet a mis en avant la notion de "pro-cyclicité" de la régulation [voir Gersbach and Rochet (2012), Auray and Gouriéroux (2013), Repullo and Suarez (2013)]. A strictement parler, il ne s'agit pas de l'impact de la sphère financière en tant que telle sur l'économie réelle, mais de l'impact de la réglementation sur l'économie réelle via la sphère financière. Cette préoccupation parfaitement légitime ne s'intègre pas dans la définition du risque systémique développée ici.

21. Actuellement, le comité de Bâle a soumis au débat entre superviseurs nationaux le fait de limiter les expositions entre les groupes bancaires qualifiées de systémiques [voir Basel Committee on Banking Supervision (2013b)].

Article	Contagion en solvabilité	Contagion par les prix	Contagion de financement	Matrice de contagion	Nature du choc	Choc Commun	Périmètre d'application
Upper and Worms (2004)	Oui	Non	Non	Calibrée	Déterministe	Non	Allemagne
Alves et al. (2013)	Oui	Non	Oui	Observée	Déterministe	Oui	Europe
Fourel et al. (2013)	Oui	Non	Oui	Observée	Stochastique	Oui	France
Cifuentes et al. (2005)	Oui	Oui	Non	Observée	Déterministe	Non	simulations
Elsinger et al. (2006)	Oui	Non	Non	Calibrée	Stochastique	Oui	Autriche
Wells (2002)	Oui	Non	Non	Mixte	Déterministe	Non	Royaume-Uni
Furfine (2003)	Oui	Non	Non	Observée	Déterministe	Non	États-Unis

TABLE I.5 – Travaux des superviseurs sur la contagion

La supervision micro-prudentielle, via les exercices de stress-test, ne couvre que la composante relative au risque systématique extrême du risque systémique. La supervision macro-prudentielle recouvre les autres composantes en s'intéressant à la contagion entre institutions. Cependant, sans opposer stérilement les points de vue, la position institutionnelle sur la définition du risque systémique est à contre-courant des définitions académiques. Les académiques montrent que la définition institutionnelle pose de sérieux problèmes de cohérence globale. Chaque volet, chaque sous-partie, de la supervision macro-prudentielle est cohérente à son échelle, mais dans l'ensemble des écarts méthodologiques sérieux apparaissent. Les approches académiques proposent un cadre de réflexion robuste pour définir des concepts et en proposer des mesures. Il reste un important travail à faire pour développer au sein de ce cadre les notions et les outils adaptés aux besoins de la supervision.

I.7 Conclusions et perspectives

L'histoire de la mesure du temps ou les articulations entre les notions de chaleur et de température nous ont montré que la définition d'un concept (le temps, la chaleur...) peut être très liée à la manière dont il est mesuré (l'horloge, le thermomètre...). Dans cette lignée, la démarche retenue pour définir le risque systémique se fonde sur sa mesure. En s'attachant à rester compatible avec l'esprit des définitions usuelles du risque systémique, nous proposons la méthodologie suivante. Comme en mécanique, la première étape est de se donner un système défini par un ensemble d'institutions financières et un ensemble de facteurs de risque exogène. Cette frontière doit être telle que le système ne doit pas influencer l'extérieur, au risque de grave problème de cohérence. La présence de ces types de chocs est capitale lorsque les paramètres de contagion ne sont pas observables, au risque de sur- ou sous-estimer les effets de contagion. Ces chocs extérieurs doivent être de deux types : des chocs spécifiques représentant les aléas propres à chacune des institutions et des chocs communs (ou systématiques) représentant les expositions communes des institutions. Ensuite, le *risque systémique* est défini comme *le risque systématique extrême* et *le risque de contagion*. Les termes formant le risque total d'une institution peuvent se regrouper selon qu'ils relèvent d'une perspective individuelle ou d'une perspective globale. Notre approche a l'avantage de rester compatible avec les définitions des risques standards.

Nous avons vu que jusqu'à l'invention de l'horloge, les mesures des courtes durées n'étaient pas conçues, ni construites, comme des divisions de l'heure : la mesure d'un sablier n'était pas commensurable à la mesure du cadran solaire. La mesure du temps n'était pas additive. L'additivité des risques est un réel enjeu. Nous avons vu

que sommer les risques individuels n'est pas une manière satisfaisante pour calculer le risque global. Les contributions des institutions au risque global ne peut se calculer qu'après avoir calculé le risque au niveau agrégé. Ce processus impose un critère d'additivité alors que les éléments formant le risque systémique penchent en faveur de mécanismes sur-additifs.
Les réflexions sur le concept de température ont été un fil directeur. Près d'un siècle après l'invention des premiers thermomètres [22] au début du XVII$^{\text{ème}}$, les physiciens définissent une température absolue, le zéro absolu. Lord Kelvin contribuera sensiblement à une définition précise du zéro absolu. Adopter un zéro n'est pas changer d'étalon, qui est un changement quantitatif, mais l'introduction d'un élément qualitatif –"l'absence de"– dans une conception jusqu'à alors graduelle. Peut-on imaginer en finance un système sans risque systémique ? Si de nos jours les physiciens savent atteindre le zéro absolu, l'expérience était hors d'atteinte au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Si un tel système existe (existait ?), la mesure du risque du système pourrait être en réalité une mesure de la distance à ce point de référence.

Un point capital de discussion dans la modélisation et l'estimation concerne le caractère observable des facteurs communs exogènes. D'une manière générale, considérer des facteurs communs observables risque de brouiller grandement la frontière entre le système et "l'extérieur". Considérer les facteurs communs comme inobservables permet de garantir la cohérence interne du modèle, mais nécessite d'une part des techniques d'estimation plus sophistiquées et d'autre part un plus grand travail d'interprétation. Un second point de discussion dans la modélisation est le caractère observable des paramètres de contagion. Les données à disposition contraignent le type d'approche envisageable. Schématiquement, un modèle structurel, plus riche en interprétation, nécessite plus de données qu'un modèle sous forme réduite.

Comment définir le risque systémique ? Comment mesurer le risque systémique ? La dernière crise financière a mis sur la sellette cette notion sans qu'il y ait eu beaucoup d'efforts largement diffusés de définition ou de pédagogie. Il est usuel qu'un objet public entraine des débats tant sur sa définition que sur sa mesure : le risque systémique existe-il vraiment ? S'il existe, le risque systémique est-il nouveau ? S'il n'est pas une reformulation de risques connus, comment le mesure-t-on ? Si on dispose d'une mesure, mesure-t-on vraiment ce qu'on définit ? La position défendue ici soutient que la question de la définition et celle de la mesure sont intimement liées. Plus précisément, c'est en proposant une méthodologie opérationnelle et quantitative de mesure que le risque systémique sera défini. Cette approche quantitative n'est pas sans défaut [Israel (1998)], mais l'objectif n'est pas tant dans un épanouissement intellectuel que dans une capacité à éclairer les débats publics. La prise de décision politique intègre à juste titre de nombreux facteurs, mais il apparaît souhaitable que certains économètres proposent des outils quantitatifs d'évaluation des politiques publiques en terme de régulations financières.

En suivant la trame amorcée avec Lord Kelvin et Lars Hansen, nous avons favorisé une approche très physicienne. Dans cette démarche, le modèle est le reflet

22. Depuis le II$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C., il existait des termo*scopes* qui indiquaient des changements de température –tel que le "thermomètre" de Galilée– mais les changements de température n'étaient pas repérés sur une échelle graduée.

d'une réalité dont l'existence n'est pas contestée. S'il y a discussion sur la meilleure manière de construire un thermomètre, l'existence de la chaleur est évidente. En économie, et plus généralement en sciences sociales, la création d'une nomenclature est nécessaire à le mesure. L'identification des facteurs de risques bâlois (crédit, marché, opérationnel) est une nomenclature, l'aboutissement d'un processus de négociation entre des acteurs défendant des intérêts propres [Baud (2013)]. S'il y a une nomenclature, l'ensemble du processus de mesure peut être contesté pour son relativisme. Néanmoins, une fois que ces conventions sont socialement admises, l'objet de la mesure acquiert une réalité autonome de sa mesure [Desrosieres (1993)]. Autrement dit, alors qu'en sciences de la nature l'objet pré-existe à sa mesure, dans le champ social la mesure pré-existe parfois à son objet. Par exemple, le risque de crédit a acquis son existence propre, indépendante de la régulation. Il se peut que le risque systémique comme objet social n'ait pas encore acquis son existence propre et reste donc très dépendant de sa mesure.

Gardons à l'esprit que les méthodes actuelles, bien que prometteuses, ne sont que très partielles. Elles ne modélisent, ne mesurent, qu'une partie du risque de contagion, que certains types d'interactions entre facteurs de risques, sous certaines conditions précises. En d'autres termes, le thermomètre proposé est un prototype dont la plage opérationnelle est encore trop restreinte. Cet état, que certains qualifieront d'embryonnaire, doit être une source de motivation pour des travaux d'étude et de recherche.

Chapitre II

Bilateral Exposures and Systemic Solvency Risk

Ce chapitre reprend *Bilateral Exposures and Systemic Solvency Risk*[1] co-écrit avec Christian Gouriéroux et Alain Monfort.

Résumé. En utilisant une structure des états financiers des banques qui tient compte de leurs expositions bilatérales en termes d'actions et de prêts, nous développons un modèle structurel de faillite. Ce modèle permet de distinguer les facteurs exogènes et endogènes dont dépend la faillite. Nous prouvons l'existence et l'unicité de l'équilibre de liquidation, nous étudions les consèquences des chocs exogénes sur le système bancaire, et nous mesurons le phénomène de contagion. Nous illustrons l'usage de cette approche en l'appliquant au système bancaire français.

Mots-clefs : contagion, risque systémique, Solvabilité, compensation, quilibre de liquidation, impulsion-Réponse, modèle de la Valeur-de-la-Firme.

Code JEL : G21, G28, G18, G33.

1. Nous remercions le comité scientifique de l'ACP, les participants du séminaire Banque de France, David Thesmar, Christophe Perignon, David Green et un referee anonyme pour leurs commentaires et suggestions.

This chapter is based on *Bilateral Exposures and Systemic Solvency Risk*[2] co-authored with Christian Gouriéroux and Alain Monfort.

Abstract. By introducing a structure of the balance sheets of the banks, which takes into account their bilateral exposures in terms of stocks or lendings, we get a structural model for default analysis. This model allows to distinguish the exogenous and endogenous default dependence. We prove the existence and uniqueness of the liquidation equilibrium, we study the consequences of exogenous shocks on the banking system and we measure contagion phenomena. This approach is illustrated by an application to the French banking system.

Key words: contagion, systemic risk, solvency, clearing, liquidation equilibrium, impulse response, Value-of-the Firm model.

JEL Code: G21, G28, G18, G33.

2. We are grateful to the Scientific Committee of the ACP, to seminar participants at Banque de France, to David Thesmar, to Christophe Perignon, to David Green and to an anonymous referee for their comments and suggestions.

II.1 Introduction

Following the crisis, the measurement of risk of financial institutions has become a critical question. How far will the value of a particular bank fall after an exogenous shock? How large would a shock on asset values have to be in order for a particular bank to go bankrupt ? Consider a set of financial institutions. If these institutions are not linked, then measuring the exposure to a change in the prices of several assets would be straightforward, given information on the institution's balance sheet only. For instance, if a bank owns 100 millions in a specific corporate stock and if the market price of this stock drops by 2%, then the bank's assets drops from 100 to 98 millions.
The problem, as revealed emphatically in the financial crisis, is that financial institutions are linked : each bank has ownership of a set of exogenous assets and as well as shares of other banks equity and loans. Therefore, measuring the risk of a financial institution needs to take into account the interconnections between banks' balance sheets, i.e. to find a consistent set of balance sheet values prior to the shock, and a consistent set of values afterwards.
A main deficiency of the regulations and practices before the recent financial crisis is the stand-alone computation of risk measures, i.e. the evaluation of risk made independently for the different financial institutions, followed by a crude aggregation to deduce the magnitude of the global risk. This practice concerns the assets themselves : for instance, the ratings of sovereign bonds (resp. credits) are determined separately for the different countries (resp. borrowers), and are not really informative on the risk of a portfolio of such bonds (resp. credits). Loosely speaking a portfolio of AAA bonds might be as risky as a portfolio of AA bonds, if the AAA bonds are positively dependent. Similarly, the required capitals in Basel 2 were computed bank by bank, without taking into account the dependence between the risks of these institutions. Even if this practice is not the cause of the financial crisis, it participated in its development. Since they were jointly exposed to an exogenous adverse shock, the banks had to increase their required capital simultaneously, and, thus, they had an important demand for cash, or riskfree asset. As a consequence of this need for liquidity, they tried to sell quickly the stocks they possessed, which implied in two days a significant drop in market stock prices.

The post-crisis regulation (Basel 3, Financial Stability Board) highlights the importance of risk dependences and consider financial institutions (banks and insurance companies) as parts of a system. They focus on the risk of the system (systemic risk) and the role of each institution in this systemic risk.

For a given system, like the set of European banks, say, there exist two reasons for a joint increase of risks for a large number of institutions, that are common exogenous adverse shocks and contagion:

i) First, there can exist shocks on a factor exogenous to the system. For instance, the increase of a prime rate will have an effect on the monthly payment for adjustable rate mortgages, will imply default clustering for individual mortgages and will diminish the results of all institutions having an important quantity of such mortgages, or associated mortgage backed securities, in their balance sheets. The default on a sovereign bond is another example of an exogenous shock with joint effects on the risk of the institutions.

ii) Contagion phenomena may arise in a second step and can amplify significantly the effect of exogenous shocks. They are due to the connection between the institutions through the structure of their balance sheets. For instance, a bank failure will have an impact on the institutions holding loans, bonds, stocks of this bank. In extreme cases, this may imply the failure of other institutions and so on. These contagion phenomena and chains of failures (the so-called domino effect of solvency) can result from an exogenous shock specific to an institution, such as a management error or a fraud, not necessarily from a shock on a common risk factor.

There exist two streams of literature on risk dependences, depending on the kind of available data.

Some analyses are based on the values of the institutions. These values can be deduced from their balance sheets, possibly disaggregated by class of assets, or from their capitalizations if they are quoted on a stock market. However, these balance sheets give no information on the existing contagion channels. This explains why it is difficult with such reduced form approaches to disentangle the exogenous and contagion effects. Systemic risk measures such as the CoVaR [Adrian and Brunnermeier (2008)], the Marginal Expected Shortfall (MES) [Acharya et al. (2010), Brownlees and Engle (2012)], the Euler allocations [see Gouriéroux and Monfort (2013) for a detailed discussion], are examples of reduced form measures unable to identify the two components of risk dependences.
As usual there exist two solutions to an identification problem. First, we can constrain the model by introducing identification restrictions. This approach is followed in a static framework by Rosch and Winterfeldt (2008), who set ex-ante to 20 % the number of contaminating firms. Another identification method is used in a dynamic framework by Gagliardini and Gouriéroux (2013) or Darolles et al. (2011). Intuitively, simultaneity effects can be disentangled from lagged exogenous factor effects, interpreted as contagion. However, such identification restrictions are always rather ad hoc.

An alternative approach is based on more informative data sets. In our framework, we need balance sheets disaggregated by class of assets and counterparties, not by class of assets only. Equivalently, we need the exposures of each bank for each class of asset and each counterparty. This type of data might become available soon due to the reporting by banks and insurance companies required by the new regulations on financial stability. They were not available in the past, except for specific segments of bank interlending, corresponding to some payment systems. For instance Humphrey (1986) uses data from the Clearinghouse Interbank Payments System and Furfine (2003) from Fedwire, the Federal Reserve's large value transfer system [see also McAndews and Wasilyew (1995), Angelini et al. (1996), Elsinger et al. (2006)]. Other papers try to construct the missing data by using the knowledge on marginal exposures and by looking for the least favorable bilateral exposures [see e.g. Maurer and Sheldon (1998), Upper and Worms (2004), Cont et al. (2010)Upper (2011)]. This methodology is largely used in the central banks [see e.g. Wells (2002), Degryse and Nguyen (2007), Mistrulli (2011), Toivanen (2009)]. However, this methodology is based on a rather ad-hoc statistical criterion, called information

criterion [3], to reconstruct the missing exposures, and thus is without any financial or risk interpretation.

The aim of our paper is to provide a complete theoretical analysis which distinguishes different types of contagion channels. We extend the seminal paper by Eisenberg and Noe (2001) [see also Demange (2012)] to channels involving stocks and lendings, instead of lendings only. Moreover, we allow for stakeholders, i.e. shareholders and debtholders, outside the system.
In Section II.2, we describe the system and the balance sheets of the institutions when all institutions are alive. The interconnections between them can be summarized by matrices of exposures through stocks or lendings. Thus the framework requires that the counterparties of any financial assets were identified. Note that, for a large set of assets during the financial crisis, such as credit derivatives, it was often impossible to know who the counterparties were. The regular collection of this information is a main innovation of the new European regulation. Examples of exposure matrices are given for the French banking sector. In Section II.3, we study the consequences on the system of an exogenous shock. This shock may imply defaults of some institutions and changes in the balance sheets of the surviving ones. We prove the existence and uniqueness of the equilibrium after the shock. We discuss how the equilibrium depends on the magnitude of the shock. In particular, we construct impulse response functions and we consider the case of stochastic shocks. In Section II.4, we provide a methodology to disentangle the direct and contagion systemic effects on the liquidation equilibrium. Section II.5 concludes. The proofs are gathered in Appendices.

II.2 Balance sheet and exposure

II.2.1 System and systemic risk

Before discussing systemic risk and its exogenous or contagion components, it is necessary to precisely define the system. The perimeter of the system has to specify:

- the type of institutions : banks/insurance-companies/hedge funds...
- the activity zone : France/Europe/World.

3. The usual method is the so-called "entropy minimization method". The underlying principle is that each institution seeks for diversifying its interbank interconnections.
Consider n banks whose total interbank assets and total interbank liabilities, respectively denoted a_i and l_i, for $i = 1, ..., n$, are known. The issue is to estimate the bilateral exposures $x_{i,j}$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$, considering that $\sum_j x_{i,j} = a_i$ and $\sum_i x_{i,j} = l_j$. Moreover, a usual assumption is to set $x_{i,i} = 0$ for $i = 1, ..., n$. In practice, this assumption is required to avoid that using the "entropy minimization method" leads to almost only self-exposures [see Upper (2011)].
Technically, let us denote $\tilde{X}$ the vector of size $n^2 - n$ containing the off-diagonal elements of the bilateral exposure matrix to be estimated, Z the vector of size $n^2 - n$ containing the off-diagonal elements of matrix $(a_i l_j)_{i,j=1,...,n}$, A a $2n \times (n^2 - n)$ matrix such that $[A\tilde{X}]_i = \mathbb{1}_{i\in[1,n]} \sum_j x_{i,j} + \mathbb{1}_{i\in[n+1,2n]} \sum_j x_{j,i}$. The minimization of entropy is

$$\begin{array}{rl} \min_{\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{n^2-n}} & \sum_{k=1}^{n^2-n} \tilde{x}_k ln(\frac{\tilde{x}_k}{\tilde{z}_k}) \\ s.t. & \tilde{X} \geq 0 \\ s.t. & A\tilde{X} = [a', l']' \end{array}$$

Asset	Liability
$\pi_{i,1}Y_1$	L_i
$\vdots$	
$\pi_{i,n}Y_n$	
$\gamma_{i,1}L_1$	
$\vdots$	
$\gamma_{i,n}L_n$	
Ax_i	
A_i	L_i

Table II.1: Balance Sheet of Bank i

- the type of balance sheet, including or not the off, the intraday payments and settlements...
- the numeraire : Dollar/Euro...
- the assets which are the possible channels for contagion : loans/stocks/ derivatives...
- the existing regulation: definition and management of failure, bankruptcy, unsolvency...

It is also necessary to say what are the changes of a given system considered as risky. It is possible to consider the structure of the system, for instance the number of institutions (possibly weighted by their values), then to analyze the (weighted) number of failures following a shock, and among these failures the part due to the initial shock and the part due to contagion.

However, in some situations, a defaulted bank can be merged with a safer one. This will modify the structure of this system, but not necessarily with a significant impact on the account of the system, obtained by consolidating the balance sheets of all institutions. Thus, it is necessary to choose between a global (consolidated) analysis of the system and an analysis of its structure.

II.2.2 Balance sheet

We consider below a simplified description of the balance sheet of the institutions $i = 1, \ldots, n$ in the system, and assume that the possible interconnections appear either through stocks, or debts [4]. The structure of the balance sheet of institution i is given in Table II.1.

Y_i denotes the value of institution i, L_i the total value of its debt [5]. This debt value is equal to the nominal (contractual) value L_i^*, if the institution is alive, but

4. We do not distinguish in the paper: bonds, loans and lendings. Thus we assume a uniform debt structure.

5. Different terminologies are used in the literature, such as:
   - for institution i : node...
   - for value of the firm Y_i : equity capital, equity, net equity...
   - for debt L_i : liability, debt obligation...
   - for external asset Ax_i : net worth, operating cash-flow...

can be strictly smaller if there is default. The debt includes the issued bonds as well as the deposits, the interlending and the over-the-counter loans. For expository purpose, we assume that the debt is homogeneous, that is, we do not distinguish the seniority levels [6], the maturities and the different degrees of liquidity of the debt. In particular, we focus on solvency constraints, not on liquidity constraints, contrary to a large part of the theoretical literature. Institution i holds a proportion $\pi_{i,j}$ of the total number of shares of institution j, and a given proportion $\gamma_{i,j}$ of its total debt [7]. Thus, we assume a proportional sharing among counterparties of the debt of institution j in case of default. Ax_i gathers the asset components, which are outside the system, i.e. that correspond to Treasury, corporates, households, or even banks (which do not belong to this system). In general $\sum_i \gamma_{i,j}$ is much smaller than 1, since a significant part of the debt is hold by outsiders, such as depositors.

At this stage we do not explain how the asset and liability components are balanced. Indeed, the values of Y and L depend on the situations of the banks, that is, if they are in default, or alive.

When all institutions of the system are alive, the balance sheets are characterized by:

i) The exogenous asset values : $Ax = (Ax_1, \dots, Ax_n)'$;
ii) The nominal values of the debt : $L^* = (L_1^*, \dots, L_n^*)'$;
iii) The interconnections induced by stocks and debts, that are, the (n, n) exposure matrices $\Pi = (\pi_{i,j})$ and $\Gamma = (\gamma_{i,j})$, respectively.

In this situation, we get the standard accounting relationships:

$$\begin{cases} L_i &= L_i^*, \\ Y_i &= A_i - L_i, \qquad i = 1, \dots, n, \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\pi_{i,j} Y_j) + \sum_{j=1}^{n} (\gamma_{i,j} L_j^*) - L_i^* + Ax_i. \end{cases}$$

They provide the values of the firms when all institutions are alive:

$$Y = (Id - \Pi)^{-1} \big[(\Gamma - Id) L^* + Ax \big],$$

whenever $Id - \Pi$ is invertible (see Lemma in Appendix B.1).

II.2.3 Exposure matrices

The banks and insurance companies regularly report detailed balance sheets intended to give shareholders, investors and Supervisory Authorities information on their activities. The information on the structure of the balance sheets can be obtained by an appropriate treatment of the Financial Report database established by the European Banking Authority. An example of templates is provided in Appendix B.2. The banks (and insurance companies) have to report their connections when the amount is larger than 300 MEuros, or 10% if its total equity.

6. See Gouriéroux et al. (2013) for an extension to multiple seniority levels.
7. These assets may be hold or correspond to an uncovered operation.

Π (%)	Bank A	Bank B	Bank C	Bank D	Bank E
Bank A	0.00	0.00	0.23	0.23	0.14
Bank B	0.00	0.00	0.68	0.69	0.41
Bank C	0.00	0.00	0.39	0.71	0.42
Bank D	0.00	0.00	0.34	1.65	0.21
Bank E	0.00	0.00	0.30	0.31	0.30
Γ (%)	**Bank A**	**Bank B**	**Bank C**	**Bank D**	**Bank E**
Bank A	0.00	0.43	0.41	0.35	0.38
Bank B	0.90	0.00	1.22	1.04	1.14
Bank C	2.32	3.27	0.00	2.66	2.93
Bank D	0.45	0.63	0.61	0.00	0.57
Bank E	0.40	0.57	0.54	0.46	0.00

Source: public financial statements.

Table II.2: Exposure Matrices for the Banking Sector (at 12/31/2010)

The public financial statements on balance sheets allow us to reallocate assets and liabilities by categories and counterparties. We can estimate for every quarter t since December 2007, the matrices of exposures Π_t, Γ_t, as well as the vector of contractual debts L_t^* and the vector of exogenous asset components Ax_t.

i) The exposure matrices depend on the selected perimeter. We provide in Table II.2, the exposure matrices at date 12/31/2010. They concern a system of five large French banks. We have kept large firms in terms of total assets to get exposure matrices of reasonable dimension. In fact, the number of financial institutions can reach several hundreds of firms. There are about 1000 banking institutions, reduced to about 200 consolidated groups for France. However, the first dozen consolidated groups represent about 95% of the total asset value. The selected financial institutions include two banks quoted on the stock markets and two mutual saving banks. The fifth is mixed : it is originally a mutual saving bank with several regional mutual saving funds, but this bank has developed a publicly traded subsidiary. This subsidiary represents approximately 60% of the banking group. These banks are denoted A, B, C, D and E for confidentiality restrictions.
Let us first describe the exposure matrix for stocks Π. For pure mutual saving banks, the absence of stocks [8] implies zero columns. Only a part of the mixed bank is quoted so that the corresponding column is much lower than the two columns for quoted banks. The diagonal reports the part of the total equity of a group hold by itself.
The exposure matrix for loans Γ has non zero coefficients out of the diagonal: every bank is lending and borrowing from every other bank. This corresponds to a complete structure in Allen and Gale (2000) terminology. Since we consider consolidated groups, there is no self-lending and the diagonal elements of Γ are equal to zero.

8. Rigourously, the two mutual saving banks have a quoted subsidiary. But since they are very small, we neglected them. Moreover, it might happen that one bank holds shares of a mutual saving banks. But this type of link is very uncommon.

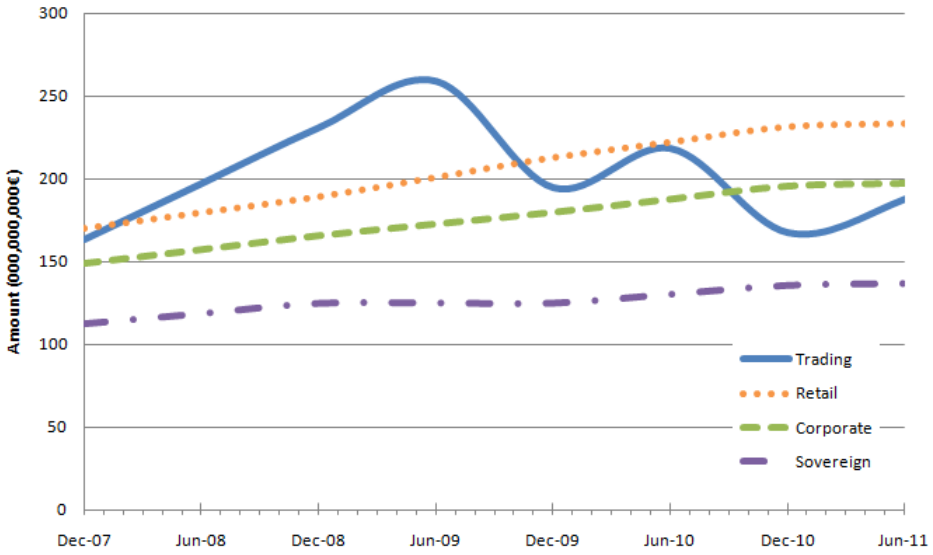


Figure II.1: Exogenous Asset Components for a mutual saving bank

These exposure matrices can vary significantly over time. This arises for instance after the supporting plans from governments and after new Basel 3 regulations introduced to reduce systemic risk and potential risk contagion.

ii) The knowledge of the exogenous asset components and their joint dynamics is also important, since it may be used to define the static/dynamic, deterministic/stochastic shocks of interest. We provide in Figures II.1-II.2 the evolutions of these exogenous components for one of the mutual saving bank and one of the commercial bank. The frequency is quarterly.
Two pricing methods coexist in the balance sheet reports, that are the marked-to-market approach mainly for trading activities and the contractual values for credit activities. A given asset has to remain evaluated using the same method during its holding time, but many exceptions exist [see e.g. WSJ (2011a), WSJ (2011b)]. These pricing methods differ from the liquidation values which are implicit in Merton's model. For expository purpose, the consequences of these different valorizations are not considered here.

The exogenous assets fall into four main categories. The trading category gathers all elements that are marked-to-market or corresponding to short term perspectives. The second category corresponds to the retail activity; it mainly consists in mortgages. Corporate loans form a third category. The last one, sovereign, includes the assets whose counterparty is part of the public sector (governments, states, local,...). We observe that the selected mutual saving bank and commercial bank have a different structure of activity portfolios. The mutual saving bank splits its assets similarly between retail and corporate activities. The commercial bank seems to favor trading activities over other activities.
Despite the differences in term of structure, a similar trend and cycle drive the evolution of the structure of balance sheets. We observe that the decrease of the part of asset dedicated to trading activity varies across banks.

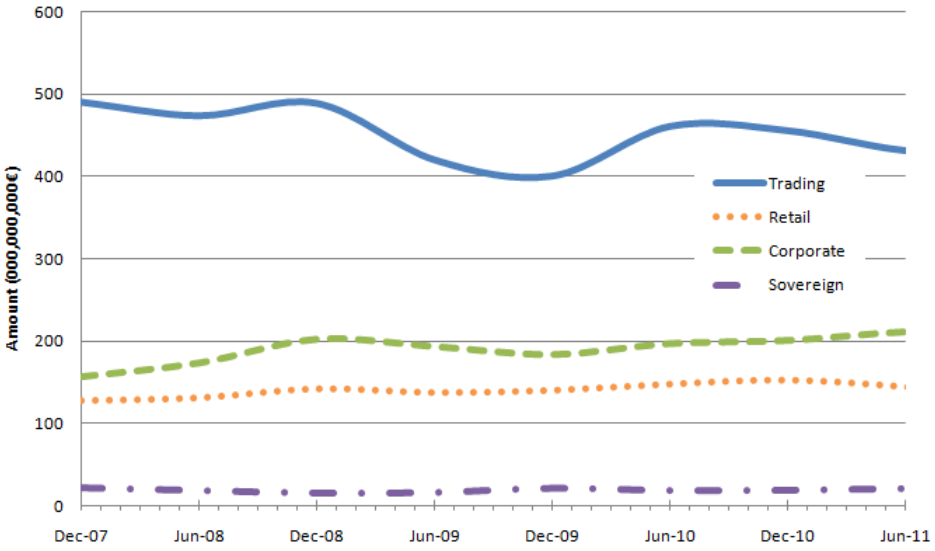


Figure II.2: Exogenous Asset Components for a commercial bank

II.3 Consequences of an exogenous shock

II.3.1 The liquidation equilibrium

Let us now consider an exogenous shock changing the initial exogenous asset value Ax^0 into Ax. This shock implies a change of the value of the firms and maybe the default of some institutions, which are no longer able to cover their nominal debt and will have zero value.

The values of the firms and the values of their debts after this shock are solutions of the system:

$$\begin{cases} Y_i = (A_i - L_i)^+, \\ \\ L_i = \min(A_i, L_i^*). \end{cases} , i = 1, \dots, n, \tag{II.1}$$

The first equation takes into account the possibility of default (when $A_i < L_i$) and the limited liability of shareholders [see Merton (1974)]. The second equation shows the seniority of debtholders with respect to shareholders. This implies an endogenous recovery rate equal to A_i/L_i^* in case of default [9]. It is easily seen that system (II.1) reduces to the standard Merton model for a system with a single firm and no self-holding of stocks, or bonds (see Appendix B.4 for the analysis of equilibrium in the standard Merton's model).

9. A part of the literature assumes a constant exogenous recovery rate [see e.g. Furfine (2003), Upper and Worms (2004)], possibly set to zero [Cont et al. (2010)]. In such a case, the piecewise affine mapping defining the equilibrium is no longer continuous and the existence and uniqueness of equilibrium is no longer ensured [Gouriéroux et al. (1980b)]. However, this assumption does not correspond to reality. For instance, the estimation of the recovery rates by Moody's are based on the value of the zero-coupon bonds of the firm one month after failure. Indeed, the bond market for a defaulted firm is still open and often shows a nonzero price of these bonds.

System (II.1) can be written explicitly as:

$$\begin{cases} Y_i &= \left[\sum_{j=1}^{n}(\pi_{ij}Y_j) + \sum_{j=1}^{n}(\gamma_{i,j}L_j) + Ax_i - L_i\right]^+, i = 1,\dots,n, \\ L_i &= \min\left[\sum_{j=1}^{n}(\pi_{i,j}Y_j) + \sum_{j=1}^{n}(\gamma_{i,j}L_j) + Ax_i, L_i^*\right]. \end{cases} \tag{II.2}$$

We get a $2n$-dimensional piecewise linear system, which can be solved to find a consistent set of values $Y = (Y_1,\dots,Y_n)'$, $L = (L_1,\dots,L_n)'$. As a by-product, the resolution of the system provides the institutions, which are in default : $\{Y_i = 0, L_i < L_i^*\}$, the set of institutions, which are still alive $\{Y_i > 0, L_i = L_i^*\}$, and the values of each asset business line of the alive institutions. In some particular cases, it has been proved that the consistent set of values Y, L can be interpreted as equilibrium values in an appropriate liquidation process managed by a centralized liquidator [see e.g. Demange (2012)]. This justifies the terminology liquidation equilibrium values used later on in the text.

The following Proposition is derived in B.1:

Proposition II.1 (Existence and Uniqueness of Equilibrium)**.** *If* $\pi_{i,j} \geq 0, \gamma_{i,j} \geq 0, \forall i,j, \sum_{i=1}^{n}\pi_{i,j} < 1, \forall j, \sum_{i=1}^{n}\gamma_{i,j} < 1, \forall j$*, the liquidation equilibrium* Y, L *exists and is unique for any choices of nonnegative*[10] Ax_i*,* L_i^**,* $i = 1,...,n$*.*

Proof. See Appendix B.1. □

This equilibrium concerns the values of the institutions Y and the values of the debt L, and depends on the financial system $\mathcal{S} = \{\Pi, \Gamma, L^*, Ax\}$. Equivalently, if the numbers of shares are given and if there is a unique maturity of the debt, this is an equilibrium in the prices of stocks and digital credit default swap (CDS) written on the n institutions.
The result in Proposition 1 can be compared with the literature analyzing the existence and uniqueness of clearing repayment vector in the interlending market [see Eisenberg and Noe (2001), Demange (2012)]. In our notations, these papers assume no contagion by means of stocks, i.e. $\Pi = 0$, and an exposure matrix Γ with all

10. As noted in Demange (2011), there can exist situations with negative exogenous net worth Ax_i. In this case, the second equation in system (II.2) has to be written with an additional zero threshold as [see Elsinger et al. (2006)]:

$$L_i = max\Big(\min\left[\sum_{j=1}^{n}(\pi_{i,j}Y_j) + \sum_{j=1}^{n}(\gamma_{i,j}L_j) + Ax_i, L_i^*\right],\ 0),$$

and the regimes of default can now distinguish whether the recovery rate is equal to zero. However, this case arises if some debtors, such as depositors, are served before the banks in the system in case of default. This is an example of model with different seniority levels [see Gouriéroux et al. (2013)].

columns summing up to 1. This explains why their proofs of existence and uniqueness rely on the interpretation in terms of graph structure of stochastic matrices. Proposition 1 completes their analysis in two respects : by introducing interconnection by means of stocks and by considering creditors outside the system. The proof is based on a necessary and sufficient condition for the invertibility of a piecewise linear function.

Let us illustrate the liquidation equilibrium as a function of the exogenous asset components for a system of two banks. For expository purpose, it is more appropriate to write the liquidation equilibrium conditions in terms of variables Y and $\Delta L = L^* - L$. Let us also denote $\Delta Ax = Ax - Ax^*$, where $Ax^* = (Id - \Gamma)L^*$. We get four possible regimes with the following liquidation equilibrium values:

Regime 1: No default. We get: $Y = (Id - \Pi)^{-1}\Delta Ax, \Delta L = 0,$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax \in (Id - \Pi)(\mathbb{R}^+)^2 \equiv \mathcal{C}_1.$$

Regime 2: Joint default. We get: $Y = 0, \Delta L = (\Gamma - Id)^{-1}\Delta Ax,$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax \in (\Gamma - Id)[0; L_1^*] \times [0; L_2^*] \equiv \mathcal{C}_2.$$

Regime 3: Default of bank 1 only. We get: $Y_1 = 0, \Delta L_2 = 0$, and

$$\begin{pmatrix} \Delta L_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} - 1 & -\pi_{1,2} \\ \\ \gamma_{2,1} & 1 - \pi_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} \Delta Ax.$$

The regime occurs if:

$$\Delta Ax \in \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} - 1 & -\pi_{1,2} \\ \\ \gamma_{2,1} & 1 - \pi_{2,2} \end{pmatrix} [0; L_1^*] \times \mathbb{R}^+ \equiv \mathcal{C}_3.$$

Regime 4: Default of bank 2 only. We get: $\Delta L_1 = 0, Y_2 = 0$, and

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \Delta L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \\ -\pi_{2,1} & \gamma_{2,2} - 1 \end{pmatrix}^{-1} \Delta Ax.$$

The regime occurs iff:

$$\Delta Ax \in \begin{pmatrix} 1 - \pi_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \\ -\pi_{2,1} & \gamma_{2,2} - 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}^+ \times [0; L_2^*] \equiv \mathcal{C}_4.$$

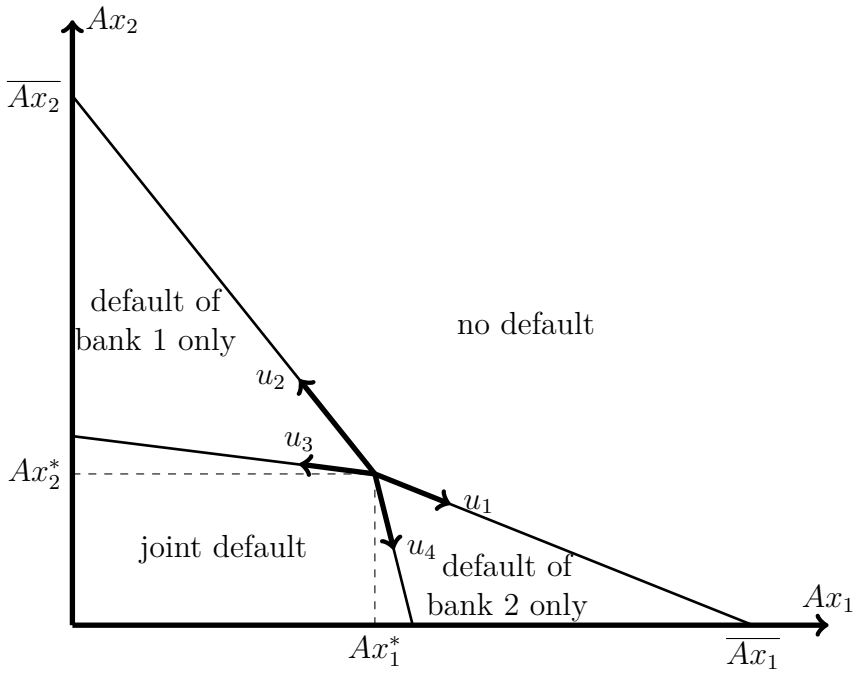


Figure II.3: The Regimes of Default

The sets $\mathcal{C}_j$, $j = 1, \ldots, 4$, are truncated positive cones. They are generated by the following pairs of vectors: $\mathcal{C}_1$ is generated by $(u_1, u_2), \mathcal{C}_4$ is generated by (u_4, u_1), $\mathcal{C}_2$ is generated by $(u_3, u_4), \mathcal{C}_3$ is generated by (u_2, u_3), where:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{1,1} \\ -\pi_{2,1} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\pi_{1,2} \\ 1 - \pi_{2,2} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} - 1 \\ \gamma_{2,1} \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,2} - 1 \end{pmatrix}.$$

The conditions in Proposition II.1 ensure that these truncated cones do not overlap. The regimes are represented in Figure II.3:

There is no default for both banks, if the exogenous asset components Ax_1 and Ax_2 are sufficiently large. We observe that there exists thresholds

$$\overline{Ax}_1 = Ax_1^* + \frac{1 - \pi_{1,1}}{\pi_{2,1}} Ax_2^*, \quad \overline{Ax}_2 = Ax_2^* + \frac{1 - \pi_{2,2}}{\pi_{1,2}} Ax_1^*,$$

such that if $Ax_i > \overline{Ax}_i$, institution i will not default whatever the exogenous asset component of the other institution.

The proof of the existence and uniqueness in the case of two banks is easy to understand. Indeed, there exists a unique equilibrium if the cones defining the regimes in Figure II.3 do not overlap. Since the sign of $det(u, v)$, where u,v are vectors of $\mathbb{R}^2$, gives the direction of rotation from u to v, the condition is simply that the four determinants: $det(u_1, u_2)$, $det(u_2, u_3)$, $det(u_3, u_4)$ and $det(u_4, u_1)$ have the same sign. It is easily checked that all these determinants are strictly positive under the assumption on the exposure matrices given in Proposition II.1.

The conditions on exposure matrices given in Proposition II.1 are sufficient for the existence and uniqueness of the liquidation equilibrium. When they are not satisfied, we do not have necessarily a unique liquidation equilibrium. For instance, we have a multiplicity of liquidation equilibria in Regime 1 if Π has a unitary eigenvalue, in particular if $\sum_{i=1}^{n} \pi_{i,j} = 1$, $j = 1, ..., n$, since $(Id - \Pi)$ is not invertible. This is easily understood : if $\sum_{i=1}^{n} \pi_{i,j} = 1$, $j = 1, ..., n$, the stock cross-holdings are so large, that we have in fact a unique group. The multiplicity of liquidation equilibria reveals that the consolidation step has not been well done [11].

II.3.2 Impulse Response Analysis and Stochastic Shock

i) Comparative statics

We can now discuss how the equilibrium responds to shocks on the exogenous asset components. We have the following monotonicity property:

Proposition II.2 (Monotonicity of Impulse Response)**.** *If* $\pi_{i,j} \geq 0$, $\gamma_{i,j} \geq 0$, $\forall i, j$, $\sum_{i=1}^{n} \pi_{i,j} < 1$, $\forall j$, $\sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j} < 1$, $\forall j$, *the equilibrium values* Y_i, L_i, $i = 1, ..., n$ *are nondecreasing functions of the asset components* Ax_j, $j = 1, ..., n$, *for any given nominal debt and exposure matrices.*

Proof. See Appendix B.3. □

This result was expected. An increase of the exogenous component decreases the default occurrence, increases the value of the firm, and also the recovery rate of any defaulting firm. It has been shown in Eisenberg and Noe (2001), that the debt level L is a componentwise concave function of Ax, when $\Pi = 0$ and $\sum_j \gamma_{i,j} = 1$, $\forall i$. This result is no longer valid when there is a feedback effect by means of stock cross-holdings.

ii) Impulse response analysis

Let us now consider an initial exogenous asset component Ax^0, a (multidimensional) direction of shocks $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)'$ and the new exogenous asset components defined by :

$$Ax(\delta) = Ax^0 + \delta\beta,$$

where δ, $\delta > 0$, is the magnitude of the deterministic shock. The impulse response [12] explains how the equilibrium values Y and L depend on δ, for given β and initial conditions.

As usual in the current regulation, the effects of the shocks are analyzed with crystallized, i.e. fixed, bilateral exposure matrices. From an economic point of view, this might be interpreted as the effect of an immediate not anticipated shock. From

11. The counterexamples provided in Eisenberg and Noe (2001), Appendix 2, and Demange (2012), p11, are of the same type.

12. An impulse response describes the reaction of a system to a function of time, or some other independent variable. The latter interpretation is used in our static framework.

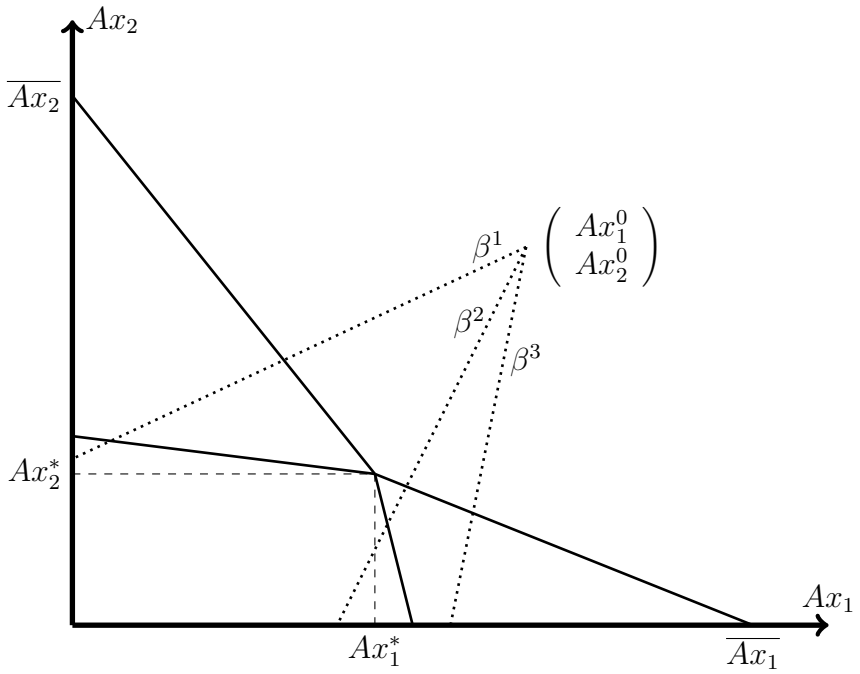


Figure II.4: Directions of the Shocks

a practical point of view, it is difficult for the regulator to make reasonable assumptions about the reaction of the financial institutions to the different types of shocks, or to get reliable information on the future strategies of the institutions under stress. However,these reactions are partly taken into account if these exercises are performed on a regular basis, monthly or quarterly, with updated bilateral exposure matrices [13].
A simple case is that of uniformly adverse shocks, when all components of the direction of the shocks are nonpositive : $\beta_i \leq 0$, $\forall i$. Indeed, by Proposition 2, we can apply the monotonicity property, and deduce a minimal value of δ : δ_1^*, say, for which we observe the first default, then a minimal value, δ_2^*, say, for which we observe the first two defaults, and so on. By studying the thresholds of magnitude δ of the shock that trigger default, we build the inverse impulse response. Central bankers call this approach "reverse stress test" [see e.g. BIS (2009)), or FSA (2009)].

This is illustrated in Figures II.4-II.5 for a system of two banks. The initial situation corresponds to a banking system in a joint no default regime. A direction of shock $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$, with $\beta_1 \leq 0, \beta_2 \leq 0$ defines a half-line with negative slope. This line can cross between 0 and 2 other regimes. For instance the directions β^1 and β^2 displayed on Figure II.4 cross two other regimes, whereas direction β^3 crosses only one.

Figure II.5 reports the impulse response functions with a direction β^2 for different characteristics of the equilibrium, that are the values of the exogenous asset components, the default indicators, the values of the firms and the values of the

13. The histories of bilateral exposure matrices may be used to introduce a dynamic definition of shocks and to understand how the financial institutions adjust their strategies.

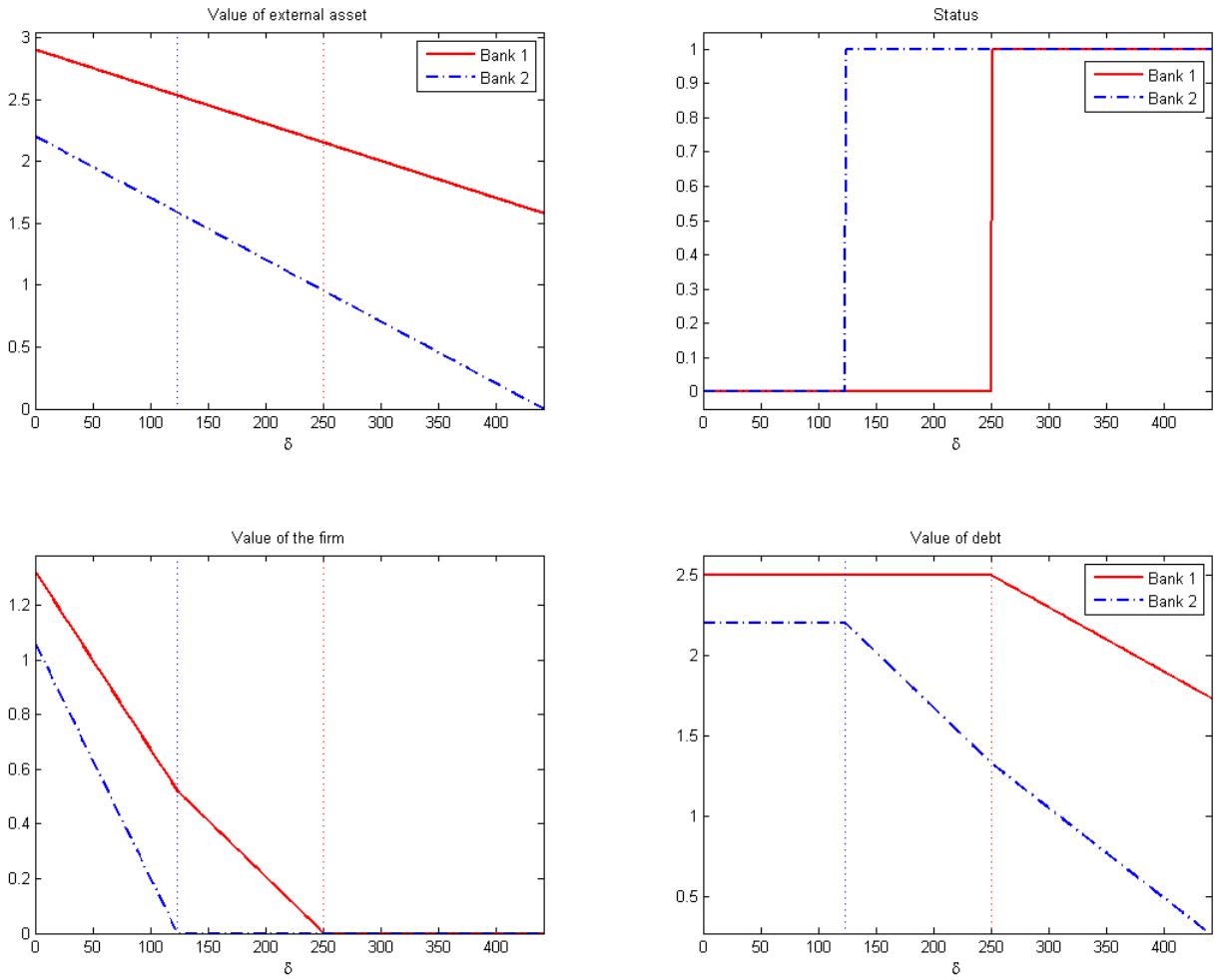


Figure II.5: Impulse Response Functions

debts. The magnitude δ of the shock is on the x-axis. We set:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.37 \\ 0.46 & 0.07 \end{pmatrix} \; ; \; \Gamma = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.13 \\ 0.15 & 0.00 \end{pmatrix} \; ; \; Ax^0 = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.2 \end{pmatrix} \; ; \; L^* = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} -0.003 \\ -0.005 \end{pmatrix}$$

The effects of the shocks on the external asset component are reported on the North-West panel. As the values of external asset decrease both for bank 1 and bank 2, the values of the banks plotted on South-West panel decrease and stop at 0, triggering first the default of bank 2, then the default of bank 1. When in default, the value of the bank remains constant equal to zero, but the value of its debt, that is the recovery rate, starts decreasing (South-East panel). The status of a bank (North-East panel) is 0, when it is alive and 1, otherwise : bank 1 defaults first at $\delta_1^* \approx 125$, then bank 2 defaults at $\delta_2^* \approx 250$.We also observe the convexity of the value of the bank and the concavity of the value of its debt corresponding to the call and put interpretations, respectively (see Appendix B.4).
Some components of Ax may become negative when δ is too large. For this reason, we increase δ up to the first zero component of Ax.

iii) Stochastic shock

We can also consider a stochastic new situation Ax, and the associated stochastic shock $Ax - Ax^0$. This situation is characterized by the multivariate distribution of the vector of exogenous asset components. Then we can deduce explicitly the distribution of the equilibrium values Y and L. More precisely, let us introduce the regime indicator : $z = (z_1, ..., z_n)$, where $z_i = 1$, if bank i defaults, $z_i = 0$ otherwise. It is shown in Appendix 2 that regime z occurs iff:

$$\Delta Ax = Ax - Ax^* \in \mathcal{C}(z),$$

where $Ax^* = (Id - \Gamma)L^*$, $\mathcal{C}(z)$ is a truncated cone, function of Π, Γ and L^*, defined in Appendix 2. Therefore the probability to be in regime z is:

$$\mathbb{P}(\text{regime } z) = \mathbb{P}\Big[Ax - Ax^* \in \mathcal{C}(z)\Big].$$

Then it is easy to derive the conditional distribution of $(Y, L)' = X$, say, given the regime. Indeed, in regime z, we have:

$$Y_i = 0, \text{ if } z_i = 1, \quad L_i = L_i^*, \text{ if } z_i = 0.$$

Let us denote by X_z the n-dimensional vector obtained by stacking the value of Y_i for the banks such that $z_i = 0$, and the value of L_i, for the banks such that $z_i = 1$. It is proved in Appendix 2, that X_z is an invertible linear function of ΔAx in regime z:

$$X_z = B_z \Delta Ax,$$

where B_z is a matrix function of Π and Γ, whose expression is given in Appendix 2. Therefore, in regime z, the vector X_z has a n-dimensional distribution with density:

$$h(x_z) = \frac{1}{det(B_z)} f(B_z^{-1} x_z),$$

where f denotes the density of ΔAx.
To summarize, the joint distribution of (Y, L) is a mixture of $2n$-dimensional distributions, which are continuous for n coordinates and discrete for the other ones.
We get a complicated uncertainty, which is well illustrated by considering for instance the probability of default (PD) of a given bank. The probability of default of bank 1, say, is given by:

$$\begin{aligned} PD_1 &= \mathbb{P}(z_1 = 1) \\ &= \sum_{z/z_1=1} \mathbb{P}(\text{regime } z) \\ &= \mathbb{P}\Big(\text{regime } (1,0,...,0)\Big) + \sum_{i\neq 1} \mathbb{P}\Big(\text{regime } z_1 = 1, z_i = 1, z_j = 0, j \neq 1, i\Big) \\ &+ \sum_{i,j/i\neq j\neq 1} \mathbb{P}\Big(\text{regime } z_1 = 1, z_i = 1, z_j = 1, z_k = 0, k \neq 1, i, j\Big) \\ &+ ... \end{aligned}$$

Thus the standard PD can be decomposed to highlight the number of banks, which are in default jointly with bank 1:

$$PD_1 = PD_1(1) + PD_1(2) + ... + PD_1(n), \text{ say.}$$

Similarly, we may compute the probability of a joint default of two banks $PD_{1,2}$, say, if these banks are 1 and 2, and decompose it according to the total number of defaults in the system. Such a decomposition may be used to complete the standard analysis of default correlation.

II.4 Contagion measure

II.4.1 The standard analysis in a linear framework

Let us consider linear system (2.1), which can be rewritten :

$$Y = \Pi Y + (\Gamma - Id)L^* + Ax^0, \text{ say,} \tag{II.3}$$

and let us introduce a deterministic shock on the exogenous asset component :

$$Ax = Ax^0 + \delta\beta,$$

where β denotes the direction of the shock and δ its magnitude. The effect on the equilibrium values of the firms is:

$$\Delta Y = \delta(Id - \Pi)^{-1}\beta.$$

This shock is linear in δ and involves both a direct effect of the shock and a contagion effect. To disentangle these two components, we usually introduce a

recursive version of model (II.3):

$$Y_k = \Pi Y_{k-1} + (\Gamma - Id)L^* + Ax^0,$$

leading to the equilibrium solution (II.3), when k tends to infinity, assuming that matrix Π has eigenvalues with modulus strictly smaller than one. Then we compute the short term effect of the shock, equal to $\delta\beta$, and decompose the total effect as:

$$\begin{array}{lll} \Delta Y = \delta(Id - \Pi)^{-1}\beta & = \underbrace{\delta\beta} & + \underbrace{\delta(\sum_{j=1}^{\infty} \Pi^j)\beta}\,. \\ & \text{direct effect of the exogenous shock} & \text{contagion effect} \end{array} \qquad \text{(II.4)}$$

In this linear framework, the direct and contagion effects are both linear in the direction β of the shock and its magnitude δ. In particular, they can easily be deduced from the shocks specific to each institution, since:

$$\beta = \beta_1(1, 0, \ldots, 0)' + \beta_2(0, 1, 0, \ldots, 0)' + \cdots + \beta_n(0, 0, \ldots, 0, 1)'.$$

Moreover, the two components in (II.4) can be obtained directly without specifying an underlying recursive process. Indeed, the direct effect is simply obtained by setting $\Pi = 0$ in formula (II.3), that is by canceling the contagion channel in terms of stocks. Note that the direct effect is independent of Γ and therefore can be also computed under $\Pi = \Gamma = 0$.

II.4.2 How to disentangle exogenous and contagion effects?

Let us consider an initial financial system with exogenous asset components Ax^0, in which all institutions are alive. As noted earlier, the equilibrium values are :

$$Y^0 = (Id - \Pi)^{-1}\Big[(\Gamma - Id)L^* + Ax^0\Big].$$

The equilibrium values with contagion, when $Ax = Ax^0 + \delta\beta \geq 0$, are the solutions of system (II.2). They will be denoted by: $Y(\mathcal{S}^0; \delta, \beta)$ and $L(\mathcal{S}^0; \delta, \beta)$, where $\mathcal{S}^0 = \{\Pi, \Gamma, L^*, Ax^0\}$ characterizes the financial system.
It is easy to suppress the contagion channel in our framework, that is to get $\Pi = \Gamma = 0$. Indeed, let us assume that, in the initial financial system $\mathcal{S}^0$, the institutions cash their stocks and bonds of the other institutions [14]. The balance sheet becomes:

Asset	Liability
$\widetilde{Ax_i^0}$	L_i

where $\widetilde{Ax_i^0} = \Pi_i Y^0 + \Gamma_i L^* + Ax_i^0 = Y_i^0 + L_i^*$. We have eliminated the contagions by setting $\Pi = 0$ and $\Gamma = 0$, while keeping the same value of the firm. Let us now

14. Implicitly we assume liquid markets for stocks and bonds. This assumption is consistent with the conditions of $\sum_j \pi_{i,j} < 1$ and $\sum_j \gamma_{i,j} < 1$, which means that a part of stocks and bonds issued by institutions are hold by external agents (households, corporates...).

apply the exogenous shock to this new financial system $\widetilde{\mathcal{S}^0} = \{0, 0, L^*, \widetilde{Ax^0}\}$. We get another equilibrium $Y(\widetilde{\mathcal{S}^0}; \delta, \beta)$ and $L(\widetilde{\mathcal{S}^0}; \delta, \beta)$, such that:

- institution i is alive if and only if : $Y_i^0 + \delta\beta_i > 0$,
- $\tilde{Y}_i = (Y_i^0 + \delta\beta_i)^+$,
- $\tilde{L}_i = min(\widetilde{Ax_i^0} + \delta\beta_i \ ; L_i^*)$.

By comparing the two liquidation equilibria associated with $\mathcal{S}^0$ and $\widetilde{\mathcal{S}^0}$, respectively, we get the effect of contagion. This approach can be applied to different aggregate measures of the final state of the system such as :

i) The number of non-defaulted banks:

$$N_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{Y_i>0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{L_i - L_i^* = 0},$$

where $\mathbb{1}_A$ denotes the indicator function of A.

ii) The total value of the banks:

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \mathbb{1}_{Y_i>0},$$

which is a criterion appropriate for shareholders.

iii) The total value of the debt:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} L_i^* \mathbb{1}_{Y_i>0} + \sum_{i=1}^{n} L_i \mathbb{1}_{L_i<L_i^*},$$

which is a criterion appropriate for bondholders

All these scalar measures of the global state of the banking system are nondecreasing functions of $Y_i, L_i, i = 1, \ldots, n$, and, therefore, also nondecreasing functions of the exogenous asset components Ax_i, by the monotonicity property established previously. If we consider for instance the number of non-defaulted banks, we compute $N_0(\mathcal{S}_0; \delta, \beta)$, $N_0(\widetilde{\mathcal{S}^0}; \delta, \beta)$, which are decreasing functions of δ (if $\beta_i < 0$, $\forall i$), and decompose the total effect $N_0(\mathcal{S}_0; \delta, \beta)$ into the direct effect $N_0(\widetilde{\mathcal{S}^0}; \delta, \beta)$ and the contagion effect equal to the difference $N_0(\mathcal{S}_0; \delta, \beta) - N_0(\widetilde{\mathcal{S}^0}; \delta, \beta)$. The (absolute and per-cent) contagion effects depend on the initial configuration $\mathcal{S}^0$, but also on the direction and magnitude of the shock. This dependence is rather complex, and, as already noted, the contagion effect is not a linear function of β. Therefore, we cannot deduce the effect of a global shock from the effects of the specific shocks. Because of this dependence of the shock, we have to avoid relying only on:

- the ranking of Systematically Important Financial Institutions (the so-called SIFI's in the terminology of the Financial Stability Board),
- the distinction between "shock transmitters" and "shock absorbers" [Nier et al. (2007)],
- a definition of contagion measure based on a unique type of shock, such as the so-called market shock [Cont et al. (2010)].

The previous approach can also be applied by partly canceling contagion channels. For instance, we can set to zero, i.e. cash, all cross-holdings between the bank and insurance sectors to evaluate the effect of bancassurance business model on systemic

risk. We may also cancel all links which do not involve a given institution i to focus on the contagion channel passing by this institution.

Let us illustrate the contagion effect in the case of two banks with nominal debts $L^* = (2,3)'$ and values $Y^0 = (1,1)'$, in all experiments below. We consider the following set of exposure matrices :

- Set 1 : $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 30\% \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- Set 2 : $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30\% & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- Set 3 : $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 30\% \\ 30\% & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- Set 4 : $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 30\% \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- Set 5 : $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30\% & 0 \end{pmatrix}$,
- Set 6 : $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 30\% \\ 30\% & 0 \end{pmatrix}$,

For each set, both banks are assumed alive and the exogenous asset components are deduced by the formula : $Ax^0 = (Id - \Pi)Y^0 + (Id - \Gamma)L^*$. We consider a shock specific to bank 1, that is : $\beta = (-1,0)'$. We report in Figures II.6 and II.7, the impulse response functions for the total debt, with their decompositions into direct and contagion effects.

The contagion effect depends on the system which is considered. It is always more pronounced on the total value of the debt. However, the effect of contagion is far to be clear in a general framework. It depends on the form of the exposure matrices, but also on the type of exogenous shock, deterministic or stochastic, of its direction and magnitude [see e.g. Dubecq and Gourieroux (2012)]. As an illustration, let us consider a small stochastic shock such that $\delta = 1$ and β is such that the system stays in the no joint default regime. We know that there is no effect of debt exposure and that the decomposition of the effect of the shock on the value of the firm corresponds to equation (II.4). The per-cent contagion effect on the expected total value of the firm is:

$$1 - \frac{\mathbb{1}'\mathbb{E}(\beta)}{\mathbb{1}'(Id - \Pi)^{-1}\mathbb{E}(\beta)},$$

where $\mathbb{E}(\beta)$ denotes the expected multivariate shock and $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)'$. In fact, the terminology per-cent contagion effect is misleading. Indeed, if this quantity is between 0 and 1 when the expected shocks are uniformly adverse $\mathbb{E}[\beta_i] \leq 0$, $i = 1, ..., n$, this is no longer the case in general. The contagion effect on the total value of the firm is more difficult to discuss for stochastic shock due to the dependence between direct and contagion effects [see also Darolles et al. (2011)].

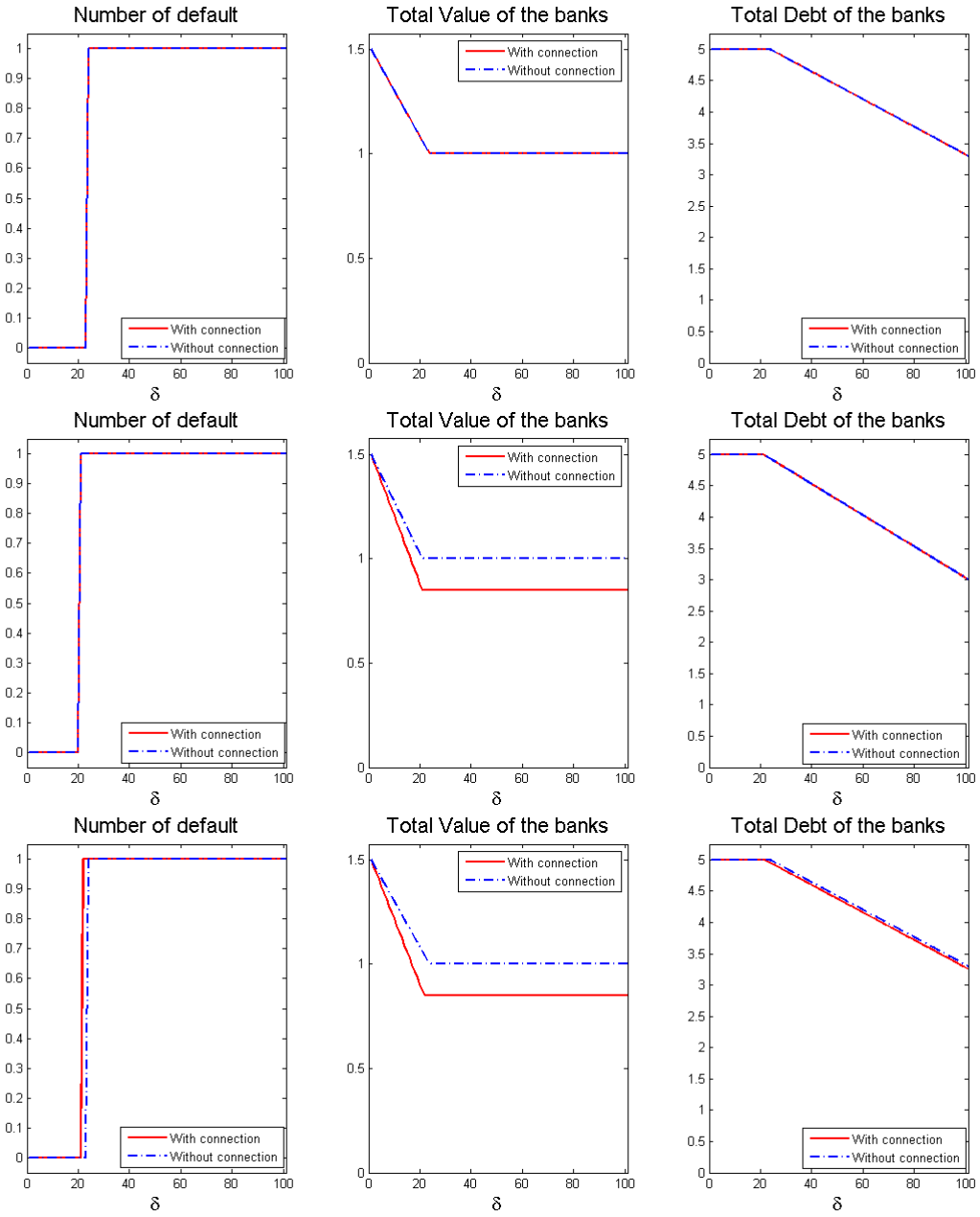


Figure II.6: Decomposition of the Impulse Response Functions for Sets 1, 2 and 3

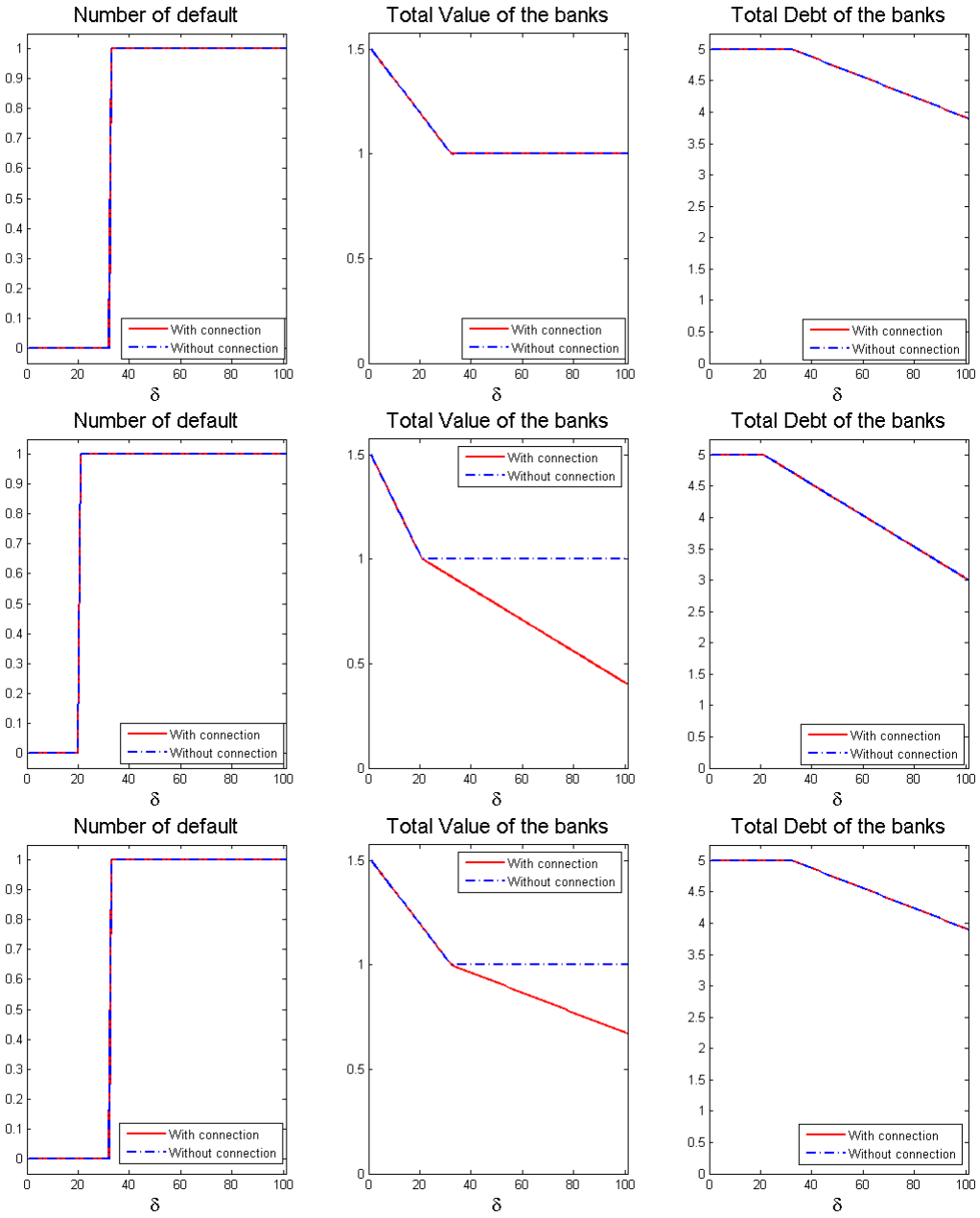


Figure II.7: Decomposition of the Impulse Response Functions for Sets 4, 5 and 6

Indeed, we get from equation (II.4):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\mathbb{1}'\Delta Y) &= \underbrace{\mathbb{V}(\mathbb{1}'\beta)}_{\text{Direct effect}} + \underbrace{\mathbb{V}\Big(\mathbb{1}'\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Pi^j\Big)\beta\Big)}_{\text{Contagion effect}} + \underbrace{2\times\mathbb{C}ov\Big(\mathbb{1}'\beta;\mathbb{1}'\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Pi^j\Big)\beta\Big)}_{\text{Cross direct-contagion effect}} \\ &= \mathbb{1}'\mathbb{V}(\beta)\mathbb{1} + \mathbb{1}'\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Pi^j\Big)\mathbb{V}(\beta)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Pi^j\Big)'\mathbb{1} + 2\times\mathbb{1}'\mathbb{V}(\beta)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Pi^j\Big)'\mathbb{1}.\end{aligned}$$

II.4.3 The effect of contagion on reverse stress-test

For a given bank, bank 1, say, and a shock specific to the exogenous asset component of this bank :

$$Ax = Ax^0 - \delta(Ax_1, 0, ..., 0)',$$

with $\delta \in (0,1)$, there is a minimal value of δ, which implies the first failure of a bank in the system. We might expect that this bank will be bank 1, but this is not always the case because of the stock interconnections. For instance, in a system of two banks with balance sheets such as :

- Bank 1 : $\pi_{1,1} = \pi_{1,2} = \gamma_{1,1} = \gamma_{1,2} = 0$, $L_1^* = 100$ and $Ax_1 = 200$,
- Bank 2 : $\pi_{2,1} = 50\%$, $\pi_{2,2} = \gamma_{2,1} = \gamma_{2,2} = 0$, $L_2^* = 100$ and $Ax_2 = 55$,

bank 2 will first fail for a decrease of 5% of Ax_1.

To illustrate the effect of contagion, we consider the French banking system as described above. For each bank i, we consider: i) the reverse stress-test of the initial system for a specific shock, ii) the reverse stress-test when the contagion effects are canceled, iii) the quantity $1 - L_i^*/Ax_i^0$. The levels of exogenous asset components and nominal debts at 12/31/2010 (in trillions of Euros) are :

$$Ax^0 = (0.58; 1.08; 1.59; 1.10; 1.98)', \qquad L^* = (0.56; 1.09; 1.67; 1.08; 1.91)'.$$

The results of the reverse stress-tests are given in Table II.3.

Specific shock on	Bank A	Bank B	Bank C	Bank D	Bank E
First bank to fail	Bank A	Bank B	Bank C	Bank D	Bank E
δ (with contagion, %)	5.810	4.544	3.073	4.559	4.340
δ (without contagion, %)	5.810	4.544	3.085	4.635	4.353
$1 - L_i^*/Ax_i^0$ (%)	1.77	-0.98	-5.36	1.76	3.19

Table II.3: Reverse Stress-Tests for the Banking Sector (at 12/31/2010) ; δ in percent

Comparing the δ's with and without contagion, two cases arises. First, for two banks, there is no significant effect of contagion, since the δ's are equal. Second, the effect of contagion increases the δ for three banks. The difference in δ corresponds up to few hundreds millions of Euros, that is up to few percent of their prudential capitals.
A positive value in the last row means that the initial exogenous assets are sufficient to cover any possible loss on the debt and stock holding of the other banks, whereas a negative value points out that at least a part of the interbank assets are needed to cover all the debt. Thus the solvency of two banks seems to be sensitive to the

health of the banking sector. This is consistent with the larger row in the exposure matrices. The small contagion effects observed above are contingent to the selected system.

The optimal δ values in Table 3 admit explicit forms. Indeed, given the initial configuration $\mathcal{S}^0$ and a direction of shock with nonpositive components, we have :

$$\begin{aligned}\delta &= \max_d \Bigg\{ \text{there exists } i \text{ such that} \\ &\qquad \Big[(Id-\Pi)^{-1}\Big((\Gamma-Id)L^* + Ax^0 + d\beta\Big)\Big]_i = 0, \\ &\qquad \Big[(Id-\Pi)^{-1}\Big((\Gamma-Id)L^* + Ax^0 + d\beta\Big)\Big]_j > 0, \forall j \neq i \Bigg\} \\ &= \max_{i/\Big[(Id-\Pi)^{-1}\beta\Big]_i>0} \Big\{ \Big[(Id-\Pi)^{-1}\Big((\Gamma-Id)L^* + Ax^0\Big)\Big]_i / \Big[(Id-\Pi)^{-1}\beta\Big]_i \Big\}.\end{aligned}$$

II.4.4 Decomposition of a probability of default

Let us consider the financial system $\mathcal{S}^0 = \{\Pi, \Gamma, L^*, Ax^0\}$ and a stochastic shock, that is a new exogenous asset component Ax which is stochastic. After the shock, we get the system : $\mathcal{S} = \{\Pi, \Gamma, L^*, Ax\}$. The equilibrium values $Y(\mathcal{S})$, $L(\mathcal{S})$ are stochastic. In particular, we can compute the probability of default of bank i : PD_i. As noted previously, it is possible to cancel the contagion channel by considering the virtual initial financial system $\widetilde{\mathcal{S}^0} = \{0, 0, L^*, \widetilde{Ax^0}\}$, with $\widetilde{Ax^0} = \Pi Y^0 + \Gamma L^* + Ax^0 = Y^0 + L^*$. Then we can apply the same shock to system $\widetilde{\mathcal{S}^0}$ in order to get a virtual financial system after shock $\widetilde{\mathcal{S}} = \{0, 0, L^*, Ax - Ax^0 + \widetilde{Ax^0}\} = \{0, 0, L^*, Ax + \Pi Y^0 + \Gamma L^*\}$, and define the probability of default without contagion (or direct PD) as : PD_i^d.
A measure of the effect of contagion on the probability of default is :

$$K_i = \frac{PD_i}{PD_i^d}$$

Contagion has an increasing effect (resp. decreasing effect), if $K_i > 1$ (resp. $K_i < 1$).

As an illustration of the effect of stochastic shocks on the probability of default, we consider the same initial situation of the French banking system as previously. Then, the stochastic shocks are introduced on the exogenous asset components as in the standard Vasicek extension of the Value-of-the-Firm model [Vasicek (1987)]. We assume that :

$$log(Ax_i) = log(Ax_i^0) + u_i, \qquad i = 1, ..., n,$$

where the stochastic u_i's are Gaussian. We set $\mathbb{E}(u) = 0$, $\mathbb{V}(u) = \sigma^2 Id$, where $\sigma = 0.0141$.
The probability of default with and without contagion can be easily derived by simulation and can be converted into ratings. For instance, for this type of stochastic

shock and without connection, the equivalent ratings vary from A to AAA [see e.g. Carey (2002)].
Considering the variation of individual probabilities of default in Table II.4, the effect of interconnection is not uniform across banks. Generally speaking, being interconnected lowers the probability of default. The interconnections can be seen as an efficient diversification of risk since the stochastic shocks u_i's, are independent. The probabilities of joint default are reported Table II.5, respectively without and with interconnections. Pairwise defaults appear slightly more with interconnections than without interconnections. Comparing this result to the general decrease of probability of default is consistent with previous results in the literature: interconnections can have ambiguous effects. Indeed, the numerical results relies on the selected shock.

	PD (in %) Without connection	PD (in %) With connection	ΔPD
bank A	0.001	0.000	-0.001
bank B	0.056	0.025	-0.003
bank C	1.348	1.391	+0.043
bank D	0.052	0.001	-0.041
bank E	0.091	0.002	-0.089

Table II.4: Simulated Probabilities of Default for the Banking Sector (at 12/31/2010); 100,000 simulations

Without	Bank A	Bank B	Bank C	Bank D	Bank E
Bank A	0.001	0.	0.	0.	0.
Bank B		0.055	0.001	0.	0.
Bank C			1.346	0.	0.001
Bank D				0.042	0.
Bank E					0.090
With	Bank A	Bank B	Bank C	Bank D	Bank E
Bank A	0.	0.	0.	0.	0.
Bank B		0.024	0.001	0.	0.
Bank C			1.388	0.001	0.001
Bank D				0.	0.
Bank E					0.

Table II.5: Simulated Probabilities of Joint Default for the Banking Sector (at 12/31/2010) ; 100,000 simulation

II.5 Concluding remarks

Until now very little was known about the actual structure of bilateral exposures in the Finance and Insurance sectors. The new regulations for financial stability

require a periodic reporting by banks and insurance companies about their counterparties by class of assets, possibly distinguished by maturities and seniorities. This information might be used to quantify the bilateral exposures in terms of stocks, lendings, or derivatives. In our paper, we considered a simplified framework, which does not distinguish seniorities, maturities, and more generally liquidity features, and focus on solvency risk. We saw how such a structural information on the balance sheet can be used to define the system of banks and its structure after an exogenous shock, the so-called liquidation equilibrium. We also saw that this information can be used to decompose the systemic effect of an exogenous deterministic or stochastic shock into a direct and a contagion effect, respectively. Such a decomposition is appealing for the interpretation of stress tests and reserve for systemic risk. It is also appealing in a perspective of controlling systemic risk. Indeed an alternative to a control of systematic exogenous factors, such as the sovereign Greek debt for instance, is the control of the exposure matrices. Such a policy was followed by the Federal Reserve of New York to avoid the forced liquidation of LTCM. In order to avoid an uncontrolled transmission of losses from LTCM to its counterparties that could put the financial sector in distress, the FED asked several private banks to take control of this institution, that is, to change the matrix of bilateral stock exposures [see McDonough (1998), Greenspan (2004)].

B.1 Existence and Uniqueness of Equilibrium

In the case of n banks, the 2^n regimes can be indexed by a sequence $z = (z_1, \ldots, z_n)$ of 0 and 1, where $z_i = 1$, if bank i defaults, $z_i = 0$, otherwise. Let us define the matrix $Q(z)$ as follows. The i^{th} column of matrix $Q(z)$ is the i^{th} column of Γ when $z_i = 1$, of Π when $z_i = 0$.

i) A preliminary lemma:

Lemma II.1. *If* $\pi_{i,j} \geq 0, \gamma_{i,j} \geq 0, \forall i,j, \sum_{i=1}^{n} \pi_{i,j} < 1, \forall j, \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j} < 1, \forall j$, *then* $det[Id - Q(z)] > 0, \forall z$.

Proof. By the assumptions in Proposition 1, the matrices $Q'(z)$ have nonnegative coefficients, which sum up to a value strictly smaller than 1 per row. By applying Perron-Froebenius theorem, we deduce that the eigenvalues of $Q'(z)$, which are also equal to the eigenvalues of $Q(z)$ have a modulus strictly smaller than 1. Therefore the eigenvalues of $Id - Q(z)$ are either complex conjugates, or real positive, and their product equal to $det[Id - Q(z)]$ is strictly positive. □

In particular, the matrices $Id - \Pi$ and $Id - \Gamma$ are invertible.

ii) Existence and Uniqueness:
The first equation of system (II.2) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} Y_i &= \Big[\sum_{j=1}^{n} \pi_{i,j} Y_j - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} \Delta L_j + Ax_i - L_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} L_j^*\Big]^+ \\ &= \Big[\sum_{j=1}^{n} \pi_{i,j} Y_j - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} \Delta L_j + \Delta L_i + \Delta Ax_i\Big]^+, \end{aligned}$$

with $\Delta L_i = L_i^* - L_i$, $\Delta Ax_i = Ax_i - Ax_i^*$ and $Ax_i^* = L_i^* - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} L_j^*$. The second equation of system (II.2) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \Delta L_i &= -min\Big[\sum_{j=1}^{n} \pi_{i,j} Y_j + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} L_j + Ax_i - L_i^* \ , \ 0\Big] \\ &= \Big[-\sum_{j=1}^{n} \pi_{i,j} Y_j + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} \Delta L_j - \Delta Ax_i\Big]^+. \end{aligned}$$

Therefore in regime z, the equilibrium values are such that:

$$z_i Y_i + (1 - z_i)\Delta L_i = 0, i = 1, \ldots, n, \tag{B.1}$$

$$\begin{bmatrix} (1 - z_1)Y_1 - z_1 \Delta L_1 \\ \vdots \\ (1 - z_n)Y_n - z_n \Delta L_n \end{bmatrix} = [Id - Q(z)]^{-1} \Delta Ax. \tag{B.2}$$

Equations (B.1) say that $Y = 0$ for a defaulted bank and $\Delta L = 0$ for a non defaulted bank. Equations (B.1) and (B.2) provide the equilibrium values of ΔL for the defaulted banks and the equilibrium values of Y for the non defaulted banks.

We deduce that regime z occurs iff:

$$\Delta Ax \in \Big[Id - Q(z)\Big] \prod_{i=1}^{n} \Big\{(1 - z_i)(\mathbb{R}^+) + z_i[-L_i^*, 0]\Big\} = \mathcal{C}(z), \text{ say.}$$

The liquidation equilibrium exists for any admissible Ax iff the union of the truncated cones $\mathcal{C}(z)$, z varying, contains the set of admissible values of ΔAx. This condition is:

$$\bigcup_z \mathcal{C}(z) \supset -Ax^* + (\mathbb{R}^+)^n = -(Id - \Gamma)L^* + (\mathbb{R}^+)^n,$$

since the exogenous asset components Ax_i are positive. Note that, since $L^* \in (\mathbb{R}^+)^n$, Ax^* cannot belong to $(\mathbb{R}^-)^n$, because, in this case, $L^* = (Id - \Gamma)^{-1}Ax^* = (Id + \Gamma + \Gamma^2 + ...)Ax^*$ would belong to $(\mathbb{R}^-)^n$.
When it exists the liquidation equilibrium is unique iff the truncated cones $\mathcal{C}(z)$, z varying, do not overlap.
To analyze the existence and uniqueness of this equilibrium let us consider the piecewise linear function from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$

$$g(x) = \sum_z [Id - Q(z)]x \mathbb{1}_{[x \in \mathcal{C}^*(z)]},$$

where $\mathcal{C}^*(z) = \prod_{i=1}^{n} \Big\{(1 - z_i)\mathbb{R}^+ + z_i\mathbb{R}^-\Big\}$ denotes the orthants of $\mathbb{R}^n$.
We have:

$$g(\mathcal{C}^*(z)) = \overline{\mathcal{C}}(z),$$

where $\overline{\mathcal{C}}(z)$ is the cone generated by the truncated cones $\mathcal{C}(z)$.
The proof of Proposition II.1 is based on Theorem 1 in Gouriéroux et al. (1980b), given below in our framework.

Theorem 1: *The following properties are equivalent:*

i) Function g is one-to-one from $\mathbb{R}^n$ *to* $\mathbb{R}^n$ *;*
ii) $det[Id - Q(z)]$*, z varying, have the same sign ;*
iii) $\bigcup_z \overline{\mathcal{C}}(z) = \mathbb{R}^n$ *;*
iv) the cones $\overline{\mathcal{C}}(z)$*, z varying, do not overlap.*

i) First note that the truncated cones are non degenerate, i.e. reduced to $\{0\}$, and that they do not overlap iff their extensions $\overline{\mathcal{C}}(z)$ do not overlap. By Theorem 1, we deduce that a necessary and sufficient condition for the uniqueness of the liquidation equilibrium is: "$det[Id - Q(z)]$, z varying, have the same sign".

ii) Then, we have to check that the equivalent condition $\bigcup_z \overline{\mathcal{C}}(z) = \mathbb{R}^n$ implies the condition for existence:

$$\bigcup_z \mathcal{C}(z) \supset -Ax^* + (\mathbb{R}^+)^n,$$

with $Ax^* = (Id - \Gamma)L^*$. Since $\bigcup_z \overline{\mathcal{C}}(z) = \mathbb{R}^n$, the previous condition can be written:

$$\begin{aligned} \bigcup_z \mathcal{C}(z) &\supset \Big(\bigcup_z \overline{\mathcal{C}}(z)\Big) \cap \Big(- Ax^* + (\mathbb{R}^+)^n\Big) \\ &\supset \bigcup_z \Big(\overline{\mathcal{C}}(z) \cap \Big(- Ax^* + (\mathbb{R}^+)^n\Big)\Big) \end{aligned}$$

which is equivalent to:

$$\mathcal{C}(z) \supset \overline{\mathcal{C}}(z) \cap \Big(- Ax^* + (\mathbb{R}^+)^n\Big), \quad \forall z,$$

(since $\mathcal{C}(z) \subset \overline{\mathcal{C}}(z)$ and the $\overline{\mathcal{C}}(z)$ do no overlap). If we denote by $M(z)$ the point in $\mathbb{R}^n$ with ith coordinate 0 if $z_i = 0$ and $-L_i^*$ if $z_i = 1$, we get:

$$\mathcal{C}(z) = \overline{\mathcal{C}}(z) \cap \Big([Id - Q(z)][M(z) + (\mathbb{R}^+)^n]\Big).$$

Moreover $[Id - Q(z)](\mathbb{R}^+)^n \supset (\mathbb{R}^+)^n$ since any point y of $(\mathbb{R}^+)^n$ is the image by $Id - Q(z)$ of $[Id - Q(z)]^{-1}y = y + Q(z)y + Q^2(z)y + ...$ which belongs to $(\mathbb{R}^+)^n$, and we get

$$\mathcal{C}(z) \supset \overline{\mathcal{C}}(z) \cap \Big([Id - Q(z)]M(z) + (\mathbb{R}^+)^n\Big).$$

We now have to check that $\overline{\mathcal{C}}(z) \cap \Big([Id - Q(z)]M(z) + (\mathbb{R}^+)^n\Big) \supset \overline{\mathcal{C}}(z) \cap \Big(- Ax^* + (\mathbb{R}^+)^n\Big)$ for any z. For instance, for $z = (1, ..., 1)' = e$, we have $[Id - Q(e)]M(e) = -Ax^*$ and the result holds.

iii) Finally, from Lemma II.1 above, the determinants of $Id - Q(z)$ have the same positive sign under the assumptions of Proposition II.1 and the results of this proposition follow.

B.2 Balance Sheet and Large Exposure European Templates

In order to collect data, the European National Supervisory Authorities could use the templates of the Committee of European Banking Supervisors (CEBS). These templates are filled by banks and controlled by National Supervisory Authorities.

Figures B.1 and B.2 are extracts of the balance sheet. The first one is the general structure of the asset side with in column : the financial item, the accounting rules (IFRS for International Financial Reporting Standards and IAS for International Accounting Standards), the reference to a sub-table where the amount is decomposed and, in last column, the amount. Figure B.2 is the sub-table for Financial Assets Held for Trading. The decomposition mixes financial instruments (Equity, Debt...) and nature of counterparties (Central Bank, General governments...). Besides the general accounting rules and the total marked-to-market amount, a decomposition between price and volume is given.

Figure B.3 is a table for large exposures report. In this template, the main counterparties (of the filling bank) are reported in column. The rows report the

1. Consolidated Balance Sheet Statement [Statement of Financial Position]			
Table 1.1. Assets			
	References	**Breakdown in table**	**Carrying amount**
Cash and cash equivalents	*IAS 7.6-7, 45; IAS 1.54 (i)*		
Cash on hand			
Demand deposits and cash equivalents	*IAS 7.6-7, 45*	5	
Financial assets held for trading	*IFRS 7.8 (a)(ii); IAS 39.9, AG 14*	5	
Derivatives held for trading	*IAS 39.9*	3	
Equity instruments	*IAS 32.11*		
Debt securities			
Loans and advances			
Financial assets designated at fair value through profit or loss	*IFRS 7.8 (a) (i); IAS 39.9*	5	
Equity instruments	*IAS 32.11*		
Debt securities			
Loans and advances			
Available-for-sale financial assets	*IFRS 7.8.(d); IAS 39.9*	5	
Equity instruments	*IAS 32.11*		
Debt securities			
Loans and advances			

Source: CEBS (2009b)

Figure B.1: Extract from the main template for asset side

name of the counterparty, the total exposed amount, a breakdown of this amount across financial instruments, provision...

B.3 Monotonicity of Impulse Response

The equilibrium values $\begin{pmatrix} Y \\ -\Delta L \end{pmatrix}$ can be written as:

$$\begin{pmatrix} Y \\ -\Delta L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ L - L^* \end{pmatrix} = \sum_z \{D^*(z)(Ax - Ax^*)\mathbb{1}_{Ax-Ax^* \in \mathcal{C}_z}\},$$

where $D^*(z)$ is a $(2n \times n)$ matrix built as follows: for the first n rows, the i^{th} row is null if $z_i = 1$, for the last n rows, the i^{th} row is null if $z_i = 0$ and the nonzero rows are exactly the rows of $D(z)^{-1}$. Since, $\begin{pmatrix} Y \\ -\Delta L \end{pmatrix}$ is a continuous piecewise linear function of Ax, we have just to check that the function is nondecreasing in each regime $\mathcal{C}_z$

After an appropriate permutation of variables, the nonzero block of the $D^*(z)$ matrix has the form $[Id - Q(z)]^{-1}$, say, where $Q(z)$ is a matrix with nonnegative coefficients, which sum to a value strictly smaller than 1 per column. As an illustration the $Q(z)$ matrices for the case of two banks $n = 2$ are:
regime of no default: $Q(0,0) = \Pi$,
regime of joint default: $Q(1,1) = \Gamma$,
regime of default of bank 1: $Q(1,0) = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \pi_{1,2} \\ \\ \gamma_{2,1} & \pi_{2,2} \end{pmatrix}$.

Table B. Financial assets held for trading			
	References	Carrying amount	Amount of cumulative change in the fair values attributable to changes in the credit risk
			IFRS 7.9 (c)
Equity instruments	*IAS 32.11*		
of which at cost			
of which: credit institutions			
of which: other financial corporations			
of which: non-financial corporations			
Debt securities			
Central banks			
General governments			
Credit institutions			
Other financial corporations			
Corporates			
Loans and advances			
Central banks			
General governments			
Credit institutions			
Other financial corporations			
Corporates			

Source: CEBS (2009b)

Figure B.2: Extract from an asset side decomposition template for Financial Assets Held for Trading

1	Code	Identification code for the counterparty or group based on national practices	...	...
2	Institution	"1" for non-credit institutions; "2" for credit institutions (counterparty meets the definition in Article 3(c) of Directive 2006/49/EC or Article 107 of Directive 2006/48/EC); "3" for intra-group credit institutions; "4" for intra-group non-credit institutions	2	2
3	Name	Name of the counterparty or "Group"	Bank A	Bank B
4	Exposure before risk provisioning: Total	5+6+7+8	100	50
5	Of which: Assets	Assets referred to in Article 74 of Directive 2006/48/EC not included in any other category.	100	10
6	Of which: Derivatives	Balance sheet value before value adjustments and provisions	0	0
7	Of which: Off-balance sheet	Off- balance sheet value before value adjustments and provisions	0	0
8	Of which: Indirect exposures	Article 117 paragraph 1 of Directive 2006/48/EC. Credit risk mitigation techniques that increase the exposure on the guarantor or third party via substitution. Indirect exsposures arising from credit derivatives	0	40
9	(-) Value adjustments and provisions	Sum of value adjustments and provisions for 5+6+7+8	0	0
10	Total exposure before CRM	4+9	100	50
11	Of which: Banking book	Share of 10 which belongs to the Banking book	100	50

Source: CEBS (2009a)

Figure B.3: Extract from the Large Exposure template

and a similar expression for the regime of default of bank 2:
$Q(0,1) = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \\ \pi_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}$. It is easily checked that the eigenvalues of $Q(z)$, equal to the eigenvalues of $Q'(z)$, have a modulus strictly smaller than one by Perron-Froebenius theorem (see Lemma A.1 in Appendix 1), and, using the expansion:

$$[Id - Q(z)]^{-1} = \sum_{h=0}^{\infty} [Q(z)^h],$$

we deduce that this inverse matrix has nonnegative elements, since the elements of $Q(z)^h$ are nonnegative for any h.

B.4 Merton's Model

Merton (1974) presents a stylized approach for evaluating credit risk of a single firm. Let us summarize and discuss the main features of this paper.

a) Merton's model
The firm has the following simple balance sheet :

Asset	Liability
Ax	L^*

Ax includes all the assets of the firm while its nominal debt is L^*. Besides, Merton identifies two types of stakeholders : the shareholders and the debtors. The shareholders own the value of the firm Y while the debtors hold its debt L of nominal value L^*.
Based on these elements, Merton derives the pricing of those components with the respect to the status of the firm : either default, or alive. The status is triggered by the relative value of asset Ax over nominal debt L^*. We get :

$$\begin{cases} Y = (Ax - L^*)^+, \\ L = min(Ax, L^*). \end{cases} \tag{B.3}$$

b) Equilibrium conditions and solutions
Let us now consider the system :

$$\begin{cases} Y = (Ax - L)^+ \\ L = min(Ax, L^*) \end{cases}$$

where Y and L are simultaneously defined. The equilibrium solution of this new system is exactly the quantity given in (B.3).
Therefore, the standard Merton's model is a special system with a single bank and no self-holding of both stocks and lendings.

c) Interpretation in terms of options
A standard interpretation of Merton's model is to consider that shareholders buy

a call on Ax with strike L^*, whereas debtors sell a portfolio including a put on Ax with strike L^* and risk free asset. This interpretation is summarized in the following table :

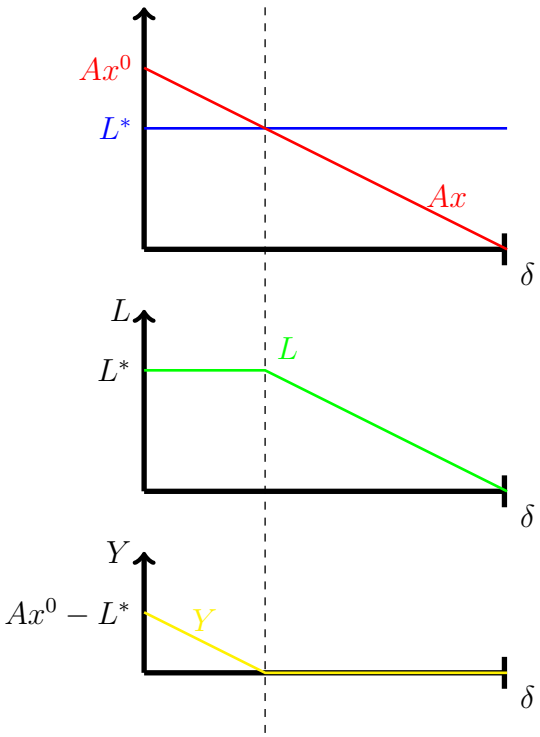
	Stakeholder	
Status	Shareholder	Debtor
$Ax > L^*$	$Y = Ax - L^*$	$L = L^*$
$Ax \leq L^*$	$Y = 0$	$L = Ax$
	$Y = (Ax - L^*)^+$	$L = min(Ax, L^*)$
	buying a call	selling a put

d) Convexity property

L is concave in Ax. Since Y is convex in Ax, $-Y$ is concave in Ax.

e) Impulse response

Consider an initial situation where $Ax = Ax^0$. We plot below the evolutions of L and Y as Ax decreases through a factor δ down to zero value. They show the convexity (resp. concavity) property of Y (resp. L) as a function of δ.



Chapitre III

Liquidation Equilibrium with Seniority and Hidden CDO

Ce chapitre reprend *Liquidation Equilibrium with Seniory and Hidden CDO* co-écrit avec Christian Gouriéroux et Alain Monfort.

Résumé. L'objectif de ce chapitre est de déterminer le prix de dérivés de crédit écrit sur une seule entité lorsque cette entité est une banque. Évidemment, à cause de la structure particulière du bilan d'une banque et aux interconnexions avec les autres institutions du système financier, les formules usuelles d'évaluation ne s'appliquent pas. Les utiliser peuvent induire d'importantes erreurs d'évaluation. L'évaluation du prix d'un dérivé de crédit sur une banque nécessite une analyse conjointe du risque de toutes les banques directement ou indirectement connectées à la banque considéré. Aucune institution ne peut être analysée isolément ; au contraire le système bancaire doit être traité comme un tout. Il est nécessaire d'analyser la propagation des pertes entre banques, en particulier l'équilibre des défaut joints et des taux de recouvrement lors de la liquidation. Nous montrons l'existence et l'unicité d'un tel équilibre. Ensuite, les formules usuels d'évaluation sont modifiées en ajoutant une prime capturant les effets de contagion.

Mots-clefs : obligation adossée à des actifs, contagion, risque de solvabilité, modèle de la valeur-de-la-firme, équilibre de liquidation, prime de contagion, systémique risque, stress-test.

Code JEL : G21, G28, G18, G33.

This chapter is based on *Liquidation Equilibrium with Seniory and Hidden CDO* co-authored with Christian Gouriéroux and Alain Monfort.

Abstract. The aim of our paper is to price credit derivatives written on a single name when this name is a bank. Indeed, due to the special structure of the balance sheet of a bank and to the interconnections with other institutions of the financial system, the standard pricing formulas do not apply and their use can imply severe mispricing. The pricing of credit derivatives written on a single bank name requires a joint analysis of the risks of all banks directly or indirectly interconnected with the bank of interest. Each name cannot be priced in isolation, but the banking system must be treated as a whole. It is necessary to analyze the contagion of losses among banks, especially the equilibrium of joint defaults and recovery rates at liquidation time. We show the existence and uniqueness of such an equilibrium. Then the standard pricing formulas are modified by adding a premium to capture the contagion effects.

Key words: Collateralized Debt Obligation, Contagion, Solvency Risk, Value-of-the Firm Model, Liquidation Equilibrium, Contagion premium, Systemic Risk, Stress-Test.

JEL Code: G21, G28, G18, G33.

III.1 Introduction

The aim of our paper is to price credit derivatives written on a single name when this name is a bank. Indeed, due to the special structure of the balance sheet of a bank and to the interconnections with other institutions of the financial system, the standard pricing formulas do not apply and their use can imply severe mispricing.
Two alternative approaches are usually followed to price credit derivatives. In the structural approach, introduced by Merton (1974), and used for instance in Basel 2 [Vasicek (1991)], the default of a firm is assumed to occur when the asset component of the balance sheet becomes smaller than its liability component. Then the probability and the price of default are deduced from the historical and risk-neutral properties of these two underlying variables.
An alternative is the reduced form or intensity approach, in which the balance sheet is not taken into account and the historical (or risk-neutral) default intensities are directly analyzed [see e.g. Duffie and Singleton (1998) or Duffie and Garleanu (2001)].
We focus on the standard pricing formulas based on the structural approach in a two period setup.
Let us consider a digital Credit Default Swap (CDS) written on a single name i. Its payoff is equal to 1, if the asset is below the liability, i.e. if $log(A_i) < log(L_i)$, and equal to 0, otherwise. Up to the discounting, its price is deduced from the risk-neutral probability of this default event. It is usually computed by assuming a deterministic level of liability and a Gaussian random log-asset, with a distribution depending on individual characteristics of the name, such as its rating, the expected return and the volatility of its stock. This single factor model, where the factor is the log-asset $log(A_i)$, is not appropriate when the name is a bank. Indeed, the asset component of the bank's balance sheet includes debts of the other banks, and therefore is also sensitive to the risk situations of these banks. In other words, a CDS written on a bank is a CDS written on a portfolio of debts and has to be considered as a more complex multiple name product, e.g. a Collateralized Debt Obligation (CDO). Let us now recall how such a CDO is usually priced. First the composition of the portfolio of interest is described, that is, the log-asset of bank i as a function of the underlying risks is defined:

$$log(A_i) = g\left(log(A_j), log(L_j), j \in J\right),$$

where J is the set of institutions appearing in the balance sheet of bank i. Then, the joint distribution of the underlying factors $log(A_j), j \in J$, is specified taking into account their possible dependence by means of a copula [see e.g. Schönbucher and Schubert (2001) or Burtschell et al. (2009)] not necessarily Gaussian [see the discussion on Li's Copula [Li (2000)] by Wired (2009) or MacKenzie and Spears (2012)] or by means of unobservable common factor (see Section III.3).
However, this pricing approach of a CDO is also inappropriate in case of banks. Indeed, this approach implicitly assumes an exogenous dependence between the underlying risk factors $log(A_j), j \in J$ (and $log(A_i)$). This does not take into account the fact that the asset component of the balance sheet of another bank j can also depend on $log(A_i)$ for instance. The pricing of credit derivatives written on a single bank name requires a joint analysis of the risks of all banks directly or indirectly interconnected with the bank of interest. We cannot price each name considered in isolation, but we have to treat the banking system as a whole. We have to analyze

the contagion of losses among banks, especially the equilibrium of joint defaults and recovery rates at liquidation date.
In Section III.2, we describe the balance sheets of the banks, including stocks and debts with two levels of seniority, and define the bilateral exposure matrices, which characterize the interconnections. We consider the possible defaults of institutions in the system. Due to the interconnections, these defaults have to be considered jointly and this leads to the so-called liquidation equilibrium. The liquidation equilibrium provides the state (either defaulted, or non defaulted) of each institution together with its equilibrium firm value and its junior and senior equilibrium debt values. We prove the existence and uniqueness of an equilibrium in the general case. As an illustration, the special case of two institutions is described in detail in Appendix C.1. In Section III.3, we focus on the pricing of the junior and senior tranches of the debts of the financial institutions. We adopt a progressive approach of this question. We first consider a financing project in the framework of the Value-of-the-Firm model, then a system of unconnected financial institutions exposed to a common exogenous risk factor and finally we analyze a system of banks, which are interconnected by means of their debt crossholdings. We note that junior and senior tranches written on a given institution, that is, on a single name, are in fact tranches written on several names due to the debt holdings. This explains why the pricing of such a tranche is equivalent to the pricing of a (hidden) Collateralized Debt Obligation (CDO). Moreover, the prices of these hidden CDO's have to take into account the liquidation equilibrium. We show how these CDO's prices under equilibrium can be decomposed in order to highlight the components of these prices due to the presence of interconnections, called contagion premium. In Section III.4, we produce numerical illustrations. We provide the dynamics of the sequence of liquidation equilibria when the exogenous asset components are driven by a single common factor and we examine how the prices of hidden CDO's, and their contagion components, depend on the design of the exposure matrices. Section III.5 concludes. Proofs are gathered in Appendices.

III.2 Liquidation Equilibrium

III.2.1 Two examples

i) The equilibrium for a single bank

Let us first present the standard value-of-the-firm model developed in Merton (1974) and Vasicek (1991), here extended to a unique firm that issued both junior and senior debts. As usual, we distinguish the contractual (or face) value of a debt fixed at the initial date $t = 0$ from its actual value at date $t = 1$ of reimbursement. Indeed, at the date of reimbursement the actual value of the debt can be strictly smaller than the face value, when there is default. Three types of stakeholders are involved: the shareholders whose interest is the net value of the assets over the total value of the debt, that is the so-called value-of-the-firm; the senior debtors, who hold the senior debt and are entitled a right over the assets up to the contractual value of senior debt; finally, the junior debtors have a right on the net value of asset over the contractual senior debt up to the contractual junior debt.
More precisely, let us denote by L^S and L^J (respectively L^{*S} and L^{*J}) the actual (respectively, contractual) values of senior and junior debts, Y the value of the firm

and A the asset value. Following Merton's analysis, the lines of the balance sheet are constrained by the following equations:

$$L^S = min(A; L^{*S}), \tag{III.1}$$

$$L^J = min(A - L^S; L^{*J}), \tag{III.2}$$

$$Y = \Big(A - (L^J + L^S)\Big)^+. \tag{III.3}$$

This system of equations defines a continuous piecewise linear system in the values of debts and the value of the firm. To invert this system, we have to express the value of the firm Y, and the values of the junior and senior debts L^J and L^S, as functions of asset value A. The invertibility of this system can be analyzed recursively: equation (III.1) provides the value of the senior debt L^S; this value can be plugged in equation (III.2) to get the value of the junior debt L^J and finally equation (III.3) gives the value of the firm Y using the two debt values already computed. Therefore this piecewise linear system (III.1)-(III.3) is invertible. The explicit solution is:

$$L^S = \begin{cases} A, & \text{if } A \leq L^{*S}, \\ L^{*S}, & \text{if } L^{*S} < A, \end{cases}$$

$$L^J = \begin{cases} 0, & \text{if } A \leq L^{*S}, \\ A - L^{*S}, & \text{if } L^{*S} < A \leq L^{*S} + L^{*J}, \\ L^{*J}, & \text{if } L^{*S} + L^{*J} < A, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{if } A \leq L^{*S} + L^{*J}, \\ A - L^{*S} - L^{*J}, & \text{if } L^{*S} + L^{*J} < A. \end{cases}$$

We get piecewise linear functions of A, solutions of the piecewise linear system (III.1)-(III.3). The values L^S, L^J and Y are expressed as functions of asset value A (see Figure III.1 given for $L^{*J} > L^{*S}$). One can identify three situations depending on the relative position of asset value A with respect of the contractual senior debt value L^{*S} and the total contractual debt value $L^{*S} + L^{*J}$:

- situation 0: the institution does not default, that is, $L^S = L^{*S}$, $L^J = L^{*J}$ and $Y > 0$; since the institution is not in default, debtors get full repayment of the debt and shareholders get a positive value; the situation is called "alive".
- situation 1: the institution defaults only on its junior debt, that is $L^S = L^{*S}$, $L^J < L^{*J}$ and $Y = 0$. Since the institution is in default, the shareholders get zero and the total debt is not fully repaid; but, the default is not very severe since senior debtors are fully repaid, whereas the junior debtors are not. We call this situation "partial default".
- situation 2: the institution defaults on its senior debt, that is, $L^S < L^{*S}$, $L^J = 0$ and $Y = 0$; being in default implies that the value of the firm is zero; in this regime, the situation is serious enough to have erased the junior debt: only the senior debtors have not lost everything; we call this situation "complete default".

ii) The equilibrium for two unconnected banks

In the case of two unconnected institutions, we can write system (III.1)-(III.3) for

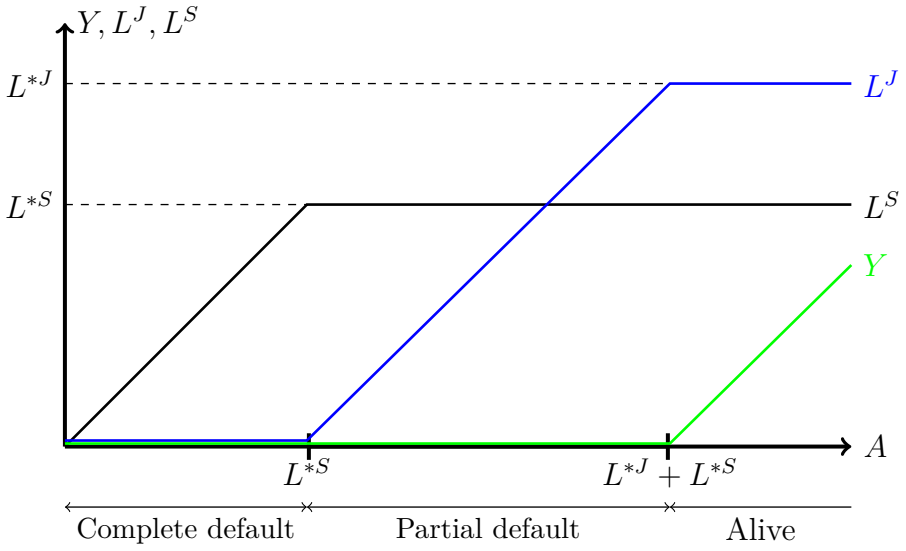


Figure III.1: Merton's Model With Two Seniority Levels

each institution. The balance sheets are constrained by:

$$\begin{cases} L_1^S &= min(A_1; L_1^{*S}), \\ L_1^J &= min(A_1 - L^S; L_1^{*J}), \\ Y_1 &= \left(A_1 - (L_1^J + L_1^S)\right)^+, \\ L_2^S &= min(A_2; L_2^{*S}), \\ L_2^J &= min(A_2 - L_2^S; L_2^{*J}), \\ Y_2 &= \left(A_2 - (L_2^J + L_2^S)\right)^+. \end{cases}$$

The invertibility of this piecewise linear system derives directly from the single institution analysis. Due to the absence of interconnections, the thresholds characterizing the situations of each bank are L_i^{*S} and $L_i^{*S} + L_i^{*J}$ for institution $i = 1, 2$. They are independent of the situation of the other bank. Since there are three situations for each institution defined by the relative position of their specific asset value with respect to their specific thresholds, there are $3^2 = 9$ regimes for the financial system (see Table III.1). These regimes are illustrated in the space of asset values A_1 and A_2 in Figure III.2.

		Bank 1		
		Alive	Partial Default	Complete Default
Bank 2	Alive	Regime $\mathcal{C}_1$	Regime $\mathcal{C}_4$	Regime $\mathcal{C}_7$
	Partial Default	Regime $\mathcal{C}_2$	Regime $\mathcal{C}_5$	Regime $\mathcal{C}_8$
	Complete Default	Regime $\mathcal{C}_3$	Regime $\mathcal{C}_6$	Regime $\mathcal{C}_9$

Table III.1: The Nine Regimes in Case of Two Institutions

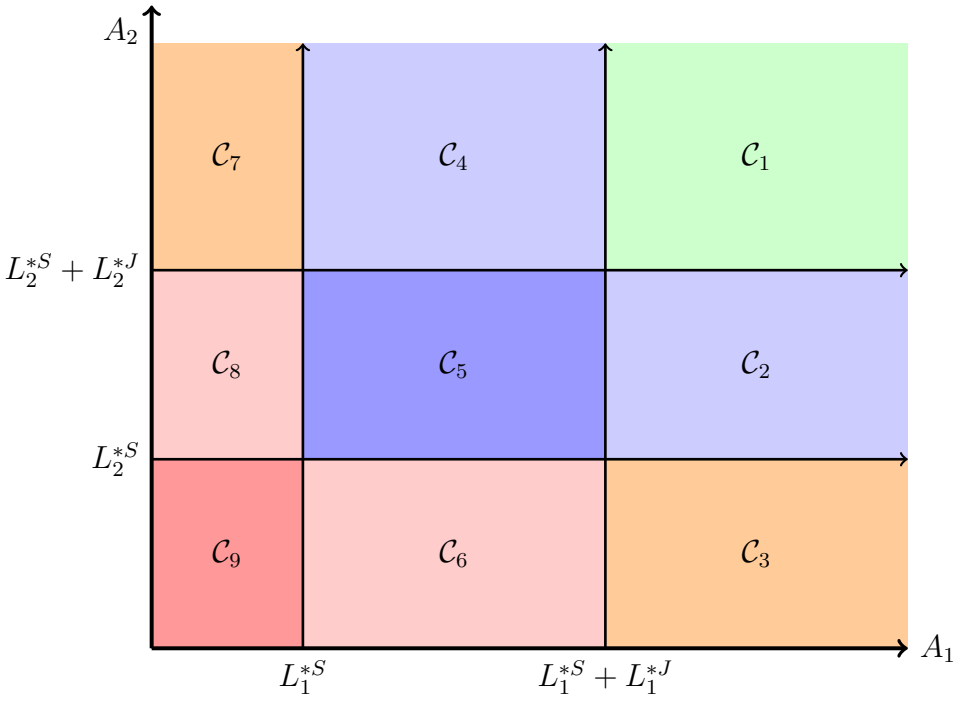


Figure III.2: The Regimes for Two Unconnected Institutions

III.2.2 The balance sheets

Let us now extend the analysis above to any set of interconnected institutions. The structure of the balance sheet of bank i is given in Table III.2, the upper index either S, or J, denoting the seniority of the debt, that is, senior and junior, respectively. We denote by Y_i, L_i^S, L_i^J, $i = 1, ..., n$, the value of bank i and its amount of senior and junior debt, respectively. The proportion of shares (resp. senior, junior debt) of bank j held by bank i is denoted by $\pi_{i,j}$ (resp. $\gamma_{i,j}^S$, $\gamma_{i,j}^J$). These proportions are expressed in number of shares (resp. volume), not in value. The exposures $\pi_{i,j}$, $\gamma_{i,j}^S$, $\gamma_{i,j}^J$, $i = 1, ..., n$, are gathered in exposure matrices Π, Γ^S, Γ^J, respectively [see Gouriéroux et al. (2012) for examples of exposures matrices for the French banking system]. Thus, we implicitly assume that the value of the debt of bank j is allocated in proportion to its initial exposure in case of default. These exposures are nonnegative and the sums of exposures on the financial institutions may be smaller than 1. Thus fractions of the stocks, junior and senior debts can be hold outside the financial system. For instance, a large fraction of the senior debt can correspond to the deposits on the bank accounts. We consider a unique maturity of the debt, which means in particular that we focus on solvency risk and are not concerned with liquidity features, including market and funding liquidity risks.

The exogenous variables are the contractual debt levels $L_i^{*S}, L_i^{*J}, i = 1, \ldots, n$, for both senior and junior debts, the matrices of bilateral exposures Π, Γ^S, Γ^J (with nonnegative elements) and the external asset components $Ax_i, i = 1, \ldots, n$. They define the state of the system $\mathcal{S} = \{L^{*S}, L^{*J}, \Pi, \Gamma^S, \Gamma^J, Ax\}$.

		Asset	Liability		
interbank cross shareholdings	$\leftrightarrow$	$\pi_{i,1}Y_1$ $\vdots$ $\pi_{i,n}Y_n$	L_i^S	$\leftrightarrow$	senior debt
interbank senior lendings	$\leftrightarrow$	$\gamma_{i,1}^S L_1^S$ $\vdots$ $\gamma_{i,n}^S L_n^S$	L_i^J	$\leftrightarrow$	junior debt
interbank junior lendings	$\leftrightarrow$	$\gamma_{i,1}^J L_1^J$ $\vdots$ $\gamma_{i,n}^J L_n^J$	Y_i	$\leftrightarrow$	value of the firm
external assets	$\leftrightarrow$	Ax_i			

Table III.2: Balance Sheet of Bank i

III.2.3 The equilibrium conditions

Let us now focus on solvency risk by considering that all assets are perfectly liquid and that the value of a given asset is the same when the bank i is alive, or is under liquidation. We follow the standard Merton's model [see Merton (1974), Vasicek (1991)].
The equilibrium conditions have to account for the recovery of the senior debt before the recovery of the junior debt in case of default. For each bank, the values of the lines of the balance sheet are constrained by the three following equations:

$$L_i^S = min(A_i; L_i^{*S}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{III.4}$$
$$L_i^J = min(A_i - L_i^S; L_i^{*J}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{III.5}$$
$$Y_i = (A_i - L_i)^+, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{III.6}$$

with $L_i = L_i^S + L_i^J$ and A_i is the total asset of bank i for $i = 1, ..., n$.
The third equation shows the value of the firm as the payment of a call written on asset A_i with strike liability L_i. The other equations provide the endogenous recovery rates for the senior and junior debts, equal to $min(1, A_i/L_i^{*S})$ and $min(1, (A_i - L_i^S)/L_i^{*J})$, respectively.
For a given bank i and a given A_i, these equations could be applied in a sequential order. The senior debt is paid first, if possible [equation (III.4)]; then, the junior debt is considered based on the remaining amount after payment of the senior debt [equation (III.5)]. Finally, the value of the firm is computed [equation (III.6)]. However, this recursive approach cannot be used to solve system (III.4)-(III.6), since the total asset A_i depends on the values Y_j, L_j^S and L_j^J of the other banks.
For each bank, we have three possible regimes:

- regime 0: no default of the bank, that is, $Y_i > 0, L_i^S = L_i^{*S}, L_i^J = L_i^{*J}$.
- regime 1: partial default of the bank : $Y_i = 0, L_i^S = L_i^{*S}, L_i^J < L_i^{*J}$.
- regime 2: complete default of the bank : $Y_i = 0, L_i^S < L_i^{*S}, L_i^J = 0$.

There is a partial default if the bank defaults on its junior debt, but does not default on the senior debt. There is a complete default, when the default occurs for both types of debts (with different recovery rates). Thus, there exist 3^n possible joint regimes for the banking system.

By introducing the expressions of the total assets A_i, $i = 1, ..., n$ in system (III.4)-(III.6), we get the equilibrium conditions:

$$L_i^S = min\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_{i,j}Y_j + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{i,j}^J L_j^J + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{i,j}^S L_j^S + Ax_i; L_i^{*S}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{(III.7)}$$

$$L_i^J = min\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_{i,j}Y_j + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{i,j}^J L_j^J + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{i,j}^S L_j^S + Ax_i - L_i^S; L_i^{*J}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \quad \text{(III.8)}$$

$$Y_i = \left(\sum_{j=1}^{n}\pi_{i,j}Y_j + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{i,j}^J L_j^J + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{i,j}^S L_j^S + Ax_i - L_i^J - L_i^S\right)^+, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{(III.9)}$$

The framework above extends the existing structural literature by increasing the number of asset categories through which the financial institutions are interconnected. The major part of the literature, following Furfine (2003), Eisenberg and Noe (2001) and Upper and Worms (2004) [1] consider connections through debts only with a single seniority level and debts totally held within the system. Recently, Gouriéroux et al. (2012) considered the case of stocks and debts, but with a single seniority level.

III.2.4 Equilibrium for two interconnected banks

The existence and uniqueness of the equilibrium is equivalent to the invertibility of the piecewise linear system (III.7)-(III.9). We first consider the case of two interconnected banks in order to compare with the case of two unconnected banks discussed previoulsy. The analysis is detailed in Appendix C.1. We derive the conditions for invertibility (see Proposition III.3) and characterize the regimes in the space of the external asset components Ax_1, Ax_2. The regimes are provided in Figure III.3. Compared with Figure III.2, we note that the regimes are still defined by means of linear affine boundaries. However, these affine boundaries are no longer parallel to either the $x-$axis, or the $y-$axis. Their slopes depend on the exposure matrices Π, Γ^S and Γ^J (see Appendix C.1).

Let us discuss some situations on Figure III.3. Point $\mathcal{A}$ represents the following situation. Bank 1 suffered a loss for its non-banking assets, and on its own it should (partially) default, since $Ax_1 < L_1^{*S} + L_1^{*J}$. But, at the same time, the non-banking assets of bank 2 is such that $Ax_2 > L_2^{*S} + L_2^{*J}$, so that the shareholders of bank 2 get a surplus. Since bank 1 is a shareholder of bank 2, this large surplus does more than compensate its own loss. Consequently, bank 2 is alive since it has made a surplus and despite its bad result bank 1 is alive too due to its participation in bank 2. In some sense, the cross-participation enables the financial system to share risk. Let us now consider point $\mathcal{B}$. The non-banking assets of bank 1 have performed (since $Ax_1 > L_1^{*S} + L_1^{*J}$), while bank 2 is in complete default due to an important loss of its non-banking asset. The situation of (complete) default of bank 2 hits bank 1 in three ways, that is a loss on stock, a loss on junior debt and a loss on senior debt. The interbank asset of bank 1 is sufficiently reduced to lead bank 1 to

1. See also Maurer and Sheldon (1998), Blåvarg and Nimander (2002), Wells (2002), Degryse and Nguyen (2007), Lublóy (2005).

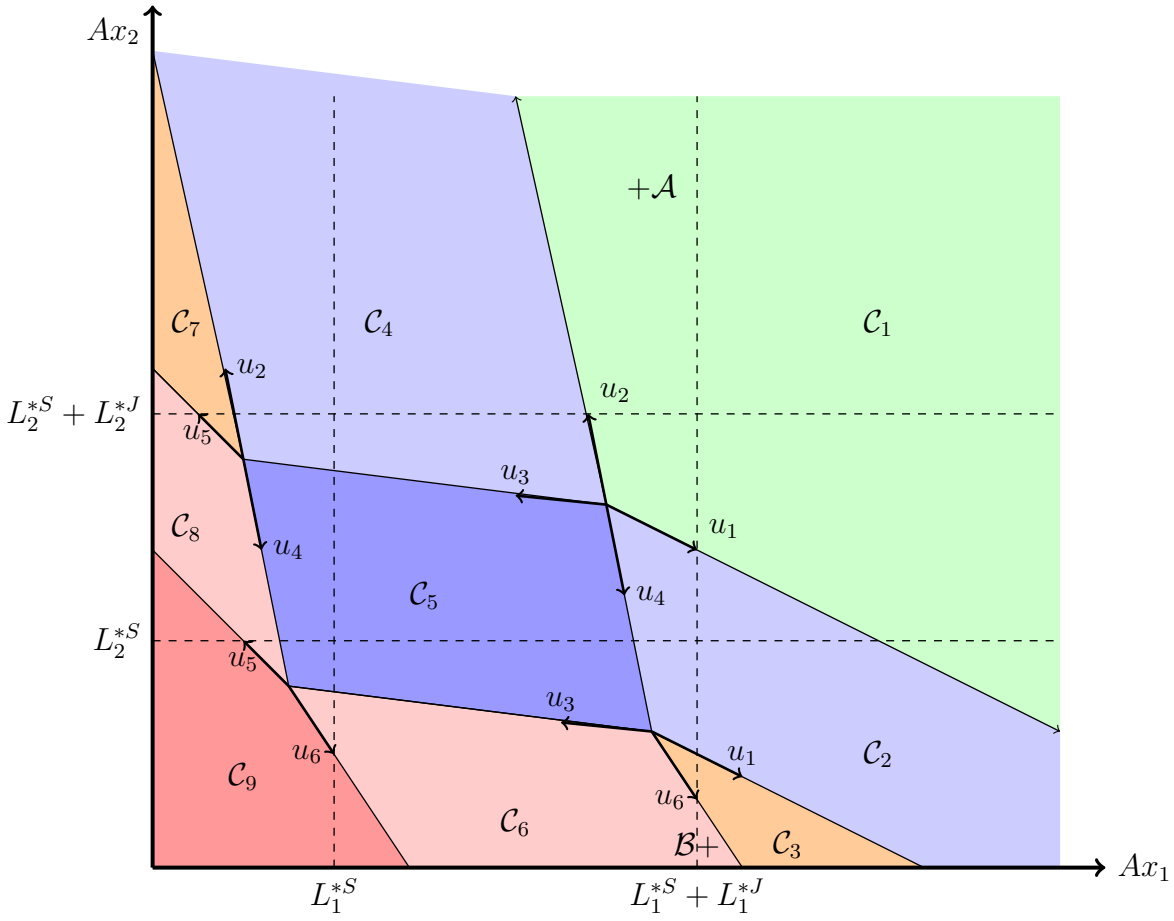


Figure III.3: The Regimes for Two Connected Institutions

(partial) default. In this case, cross-participation and cross-lending enhance risk. This model is consistent with the previous literature on interconnectedness: a high level of interconnectedness helps protecting against the effect of small systematic shocks, but can jeopardize the whole system for extreme shocks. This is also compatible with the theoretical literature saying that a more symmetric structure of interconnections can make the system less vulnerable [see e.g. Allen and Gale (2000)].

III.2.5 General case

The previous analysis, namely the detailed case of two interconnected banks, is extended to a general framework and sufficient conditions for existence and uniqueness of the liquidation equilibrium are given below.

Proposition III.1 (Existence and Uniqueness of Equilibrium with Seniority)**.** *For two seniority levels, the liquidation equilibrium exists and is unique if:*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_{i,j} < 1, \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j}^{J} < 1, \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j}^{S} < 1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Proof. See Appendix C.2. □

This result completes the result in Gouriéroux et al. (2012), where there exist only stocks and one type of debt, but requires a specific proof to treat the seniority feature. Elsinger (2009) [Theorem 8] has derived the existence and uniqueness of the liquidation equilibrium under a set of similar conditions on the exposure matrices by a different approach. The similar results obtained in Eisenberg and Noe (2001), or in Demange (2012) are special cases of Proposition 1. First, a common feature of these two papers is the absence of interconnections through stocks, that is : $\Pi = 0$. Second, their model have a single seniority level. In this respect let us discuss more carefully Demange (2012): in her paper, seniority is present under the term of "absolute priority", that is, "creditors outside the banking system have priority over those inside". But this seniority aspect matches perfectly the difference between external creditors and internal creditors. In our framework, this means that interbank loans are exclusively junior ($\Gamma^S = 0$), but there exists a senior debt ($L^S > 0$). Moreover, the "junior" debts are only composed of loans from the banks in the network : in our setting, this would be written as : $\sum_i \gamma^J_{i,j} = 1$ for $j = 1, ..., n$. In a different perspective, Elliott et al. (2013) propose to consider only cross-holdings and study integration and diversification effects across institutions.

III.3 Pricing bank debts in a CDO perspective

The liability side of the balance sheet of a financial institution can be analyzed in terms of Collateralized Debt Obligation (CDO). The junior and senior debts of each bank are tranches written on its total debt. Moreover due to the interconnections between banks, these tranches are implicitly written on a portfolio of debts of the other connected banks. We first review the standard pricing formulas of these tranches for unconnected banks and explain how a common risk factor affecting the external asset components can be introduced to capture the exogenous component of default dependence. However, the defaults of the banks are also related by means of the interconnections existing in the balance sheets. When we consider the more general framework of connected banks, the derivation of the prices of the tranches written on a single name requires to solve the liquidation equilibrium discussed in Section III.2. Then we can disentangle in the default dependence and its effect on prices the component due to the exogenous shocks and the component due to the interconnections.
For expository purpose and CDO interpretation, we consider interconnections through debts only. Indeed, the standard CDO are defined on portfolio of debts, not on portfolio of debts and stocks. However, it is easily seen that the general pricing formula is still valid if stocks are also included. The pricing formulas are also derived under the assumption of a deterministic short term riskfree rate [2].

2. Or at least the assumption of a short term rate independent of the other variables under the risk-neutral dynamics.

Asset	Liability
Ax	L^J
	L^S
	Y

Table III.3: Balance Sheet of a Financing Project with Two Seniority Levels

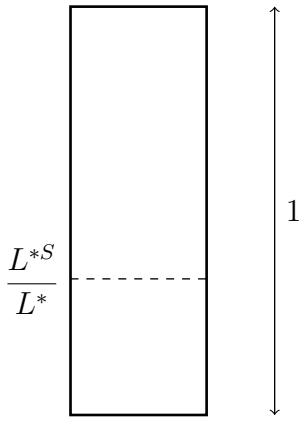


Table III.4: Normalized Debt Side of a Financing Project with Two Seniority Levels

III.3.1 Pricing tranches in the extended Merton's model

CDO interpretation

Let us consider a financing project funded by a nominal debt L^*. The debt is divided into a junior debt and a senior debt of nominal values L^{*J} and L^{*S}, respectively, which have to be reimbursed at the predetermined date $t = 1$. We have $L^* = L^{*J} + L^{*S}$. The project is represented by an asset of value Ax. The corresponding balance sheet at date $t = 1$ is given in Table III.3 where the liability components depend on the final state of the project.

The values L^S and L^J of the debts at $t = 1$ are derived from Merton's model :

$$\begin{aligned} L^S &= min(L^{*S}; Ax), \\ L^J &= min(L^{*J}; Ax - L^S). \end{aligned}$$

In a CDO pricing perspective, let us normalize the debt side as in Table III.4. The ratio L^{*S}/L^* defines the detachment point. From this CDO perspective, we can define the payoff of the zero-coupon of junior debt (respectively, senior debt), denoted ZC^J (respectively, ZC^S), in the following way:

$$ZC^S = \begin{cases} 1, & \text{if } L^{*S} < Ax, \\ \dfrac{Ax}{L^{*S}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$ZC^J = \begin{cases} 1, & \text{if } L^{*J} + L^{*S} < Ax, \\ \dfrac{Ax - L^{*S}}{L^{*J}}, & \text{if } L^{*S} < Ax < L^{*J} + L^{*S}, \\ 0, & \text{if } Ax < L^{*S}. \end{cases}$$

Thus, the associated normalized losses, denoted by $\mathcal{L}^J$ and $\mathcal{L}^S$, are :

$$\mathcal{L}^S = 1 - ZC^S = \left(1 - \frac{Ax}{L^{*S}}\right)^+,$$

$$\mathcal{L}^J = 1 - ZC^J = 1 - \left(\frac{Ax}{L^{*J}} - \frac{L^{*S}}{L^{*J}}\right)^+ + \left(\frac{Ax}{L^{*J}} - \frac{L^{*S}+L^{*J}}{L^{*J}}\right)^+.$$

Decomposition of the prices of the tranches in PD and ELGD

The prices of the tranches are deduced from the expected value of the loss under the risk-neutral probability $\mathbb{Q}$. The riskfree short term rate is assumed deterministic and the riskfree zero-coupon bond is denoted by B_{rf}.

i) Price of the senior tranche

The difference between the price B_{rf} of the riskfree bond and the price B^S of the senior zero-coupon is:

$$B_{rf} - B^S \;=\; B_{rf} \times PD^S \times ELGD^S,$$

where $PD^S = \mathbb{Q}(Ax < L^{*S})$ is the risk-neutral probability of default on the senior debt and $ELGD^S = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(1 - \frac{Ax}{L^{*S}} \middle| Ax < L^{*S}\right)$ is the expected loss given default on the senior debt.

ii) Price of the junior tranche

Let us now consider the price, B^J, of the junior zero-coupon. We have:

$$B_{rf} - B^J = B_{rf} \times \left(PD^S + PD^{J,S} ELGD^{J,S}\right), \tag{III.10}$$

where $PD^{J,S} = \mathbb{Q}(L^{*S} < Ax < L^{*S}+L^{*J})$ is the risk-neutral probability of the junior tranche with no default on the senior tranche, and $ELGD^{J,S} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\frac{Ax - L^{*S}}{L^{*J}} | L^{*S} < Ax < L^{*S} + L^{*J}\Big)$ is the associated expected loss given default.

In the Basel 2 regulation terminology, the price of the junior (defaultable) zero-coupon ZC^J would be written as:

$$B_{rf} - B^J = B_{rf} \times PD^J \times ELGD^J, \tag{III.11}$$

where PD^J denotes the probability of default on the junior debt and $ELGD^J$ the associated expected loss given default. Comparing equations (III.10) and (III.11), we see how to switch from a tranche approach to the Basel 2 approach. We get:

$$PD^J = PD^S + PD^{J,S} \;\text{ and }\; ELGD^J = \frac{PD^S}{PD^J} + \frac{PD^{J,S}}{PD^J} ELGD^{J,S}.$$

The probability of default on the junior debt, PD^J, and the expected loss given default, $ELGD^J$, are decomposed in two terms, depending on the default on the senior debt. The decompositions directly derive from the fact that a default on the

senior debt implies a total default on the junior debt.

iii) Price of a portfolio of tranches
Let us finally consider a mixed investment with a share γ of senior payoff ZC^S and a share $(1-\gamma)$ of junior payoff ZC^J. The price of this portfolio is:

$$B(\gamma) = \gamma B^S + (1-\gamma)B^J.$$

Therefore we have:

$$B_{rf} - B(\gamma) = B_{rf} \times \Big(\gamma \times PD^S \times ELGD^S + (1-\gamma) \times PD^J \times ELGD^J\Big).$$

In the Basel 2 terminology, it would be written as:

$$B_{rf} - B(\gamma) = B_{rf} \times PD(\gamma) \times ELGD(\gamma).$$

For $\gamma < 1$, the portfolio has a strictly positive allocation in junior tranche. So it suffers loss as soon as the junior tranche does. Therefore, $PD(\gamma) = PD^J$. The probability of default of the portfolio is the probability of default on the junior debt. Moreover, we have:

$$ELGD(\gamma) = \gamma \frac{PD^S}{PD^J} ELGD^S + (1-\gamma)ELGD^J.$$

The expected loss given default of the portfolio is a linear combination of the expected loss given default on the junior debt and on the senior debt. The weights are the weights of portfolio allocation combined with the ratio of the probabilities of default on the junior and senior debts.
If $\gamma = 1$, the portfolio is a pure investment in senior tranche. So $PD(1) = PD^S$, and $ELGD(1) = ELGD^S$.

III.3.2 Pricing tranches for unconnected banks

Let us now consider a portfolio of junior and senior tranches of n banks. We have n balance sheets similar to the balance sheet displayed in Table III.3. For each bank, there are two tranches on its debt, junior and senior, respectively. Therefore, there is a market of $2n$ tranches. Each tranche is either a junior, or a senior tranche on a bank debt. The standard pricing approaches will assume that the banks are unconnected, but can feature default risk dependence by means of a common exogenous factor.
To price this set of tranches, we consider the following standard factor model [3], written under the risk-neutral probability :

$$logAx_i = \beta_i F + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n,$$

where F is a common factor (or a vector of common factors), β_i is the sensitivity of bank i to the common factor, and ε_i a shock specific to bank i. We assume that F and $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)'$ are independent and that $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, diag(\sigma_i^2))$ where σ_i is the volatility specific to bank i. We denote by Φ (respectively, φ) the c.d.f. (the p.d.f.)

3. The latent factor is introduced in order to capture the dependence between the external asset components. When F is non Gaussian, this is a convenient way to get non Gaussian copulas.

of the standard Gaussian distribution.
The prices of two tranches written on two different banks are linked through the common factor F, while the prices of the two tranches of a same bank are linked through both the common factor F and the idiosyncratic shock ε_i.

Pricing with an observed factor

The prices of the tranches are easily derived if we assume that the specific shocks are unobserved by the investor, whereas the common factor is. In this case, the computations are performed conditional on the factor values (see Appendix C.3).
Let us introduce the variables:

$$\mathcal{A}_i = \frac{log(L_i^{*S}) - \beta_i F}{\sigma_i} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_i = \frac{log(L_i^{*S} + L_i^{*J}) - \beta_i F}{\sigma_i},$$

which depend on factor F.

i) Conditional price of the senior tranche
To price the senior zero-coupon of bank i, we first have to compute PD_i^S and $ELGD_i^S$. We get :

$$PD_i^S = \Phi\Big(\mathcal{A}_i\Big),$$

$$ELGD_i^S = 1 - \frac{exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)}{\Phi(\mathcal{A}_i)}\Phi(\mathcal{A}_i - \sigma_i).$$

The price of the senior zero-coupon of bank i is such that :

$$B_{rf} - B_i^S = B_{rf} \times \left[\Phi(\mathcal{A}_i) - exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\Phi(\mathcal{A}_i - \sigma_i)\right]. \tag{III.12}$$

The pricing formulas are similar to those obtain through the Black-Scholes model. We can write the payoff of a senior zero-coupon as $Ax_i/L_i^{*S} - (Ax_i/L_i^{*S} - 1)^+$ and apply the Black-Scholes formula to the second component which is the payoff of a European call option. Then, equation (III.12) becomes:

$$B_i^S = \underbrace{B_{rf}exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)}_{\text{prices of } Ax_i/L_i^{*S}} \underbrace{-B_{rf}exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\Phi\Big(-\mathcal{A}_i + \sigma_i\Big) + B_{rf}\Phi\Big(-\mathcal{A}_i\Big)}_{\text{call option}}$$

ii) Conditional price of the junior tranche
To price the junior zero-coupon of bank i, we first have to compute $PD_i^{J,S}$ and $ELGD_i^{J,S}$. We get:

$$PD_i^{J,S} = \Phi\Big(\mathcal{B}_i\Big) - \Phi\Big(\mathcal{A}_i\Big),$$

$$ELGD_i^{J,S} = 1 + \frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}} - \frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}}exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\frac{\Phi\left(\mathcal{B}_i - \sigma_i\right) - \Phi\left(\mathcal{A}_i - \sigma_i\right)}{\Phi\left(\mathcal{B}_i\right) - \Phi\left(\mathcal{A}_i\right)}.$$

We deduce the price of the junior zero-coupon of bank i as:

$$B_{rf} - B_i^J = B_{rf} \times \left[\Phi\left(\mathcal{A}_i\right) + \left(\Phi\left(\mathcal{B}_i\right) - \Phi\left(\mathcal{A}_i\right)\right) \times \left(1 + \frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}} - \frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}} exp\left(-\sigma_i \mathcal{A}_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right) \frac{\Phi\left(\mathcal{B}_i - \sigma_i\right) - \Phi\left(\mathcal{A}_i - \sigma_i\right)}{\Phi\left(\mathcal{B}_i\right) - \Phi\left(\mathcal{A}_i\right)}\right)\right].$$

Pricing with unobserved factor

Pricing formulas of the previous subsection have been derived conditional on factor F. They depend on F through $\mathcal{A}_i(F)$ and $\mathcal{B}_i(F)$. When the factor is not observed by the investor, the conditional pricing formulas have to be integrated out with respect to F under the risk-neutral probability. This marginalizing step is needed to take into account the default dependence through the dependence of the asset components of the balance sheet. In other words, this dependence is introduced through common shocks external to the system.

III.3.3 Connected banks and hidden CDO

The standard pricing formulas of the previous subsection are derived under the assumption of unconnected banks. Let us now consider a network of n banks linked through their junior and senior debts. We will see that the standard pricing formulas are modified by adding a contagion premium.

The prices of the tranches

The payoffs of junior and senior defaultable zero-coupons must now be jointly determined. These payoffs are solutions of the following system, which is a standardized version of the equilibrium system (III.7)-(III.8):

$$ZC_i^S = \frac{L_i^S}{L_i^{*S}} = min\Big[\frac{Ax_i}{L_i^{*S}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^J \frac{L_j^J}{L_i^{*S}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^S \frac{L_j^S}{L_i^{*S}}; 1\Big],$$

$$ZC_i^J = \frac{L_i^J}{L_i^{*J}} = min\Big[\frac{Ax_i}{L_i^{*J}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^J \frac{L_j^J}{L_i^{*J}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^S \frac{L_j^S}{L_i^{*J}} - \frac{L_i^S}{L_i^{*J}}; 1\Big],$$

for $i = 1, ..., n$ and $j = 1, ..., n$.
Equivalently, they are solutions of:

$$ZC_i^S = min\Big[\frac{Ax_i}{L_i^{*S}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^J \frac{L_j^{*J}}{L_i^{*S}} ZC_j^J + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^S \frac{L_j^{*S}}{L_i^{*S}} ZC_j^S; 1\Big], \quad \text{(III.13)}$$

$$ZC_i^J = min\Big[\frac{Ax_i}{L_i^{*J}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^J \frac{L_j^{*J}}{L_i^{*J}} ZC_j^J + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^S \frac{L_j^{*S}}{L_i^{*J}} ZC_j^S - \frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}} ZC_i^S; 1\Big], \quad \text{(III.14)}$$

for $i = 1, ..., n$ and $j = 1, ..., n$.
The prices of the tranches are deduced by:

i) first solving system (III.13)-(III.14) to get the payoffs in terms of external assets, the nominal debts values and the bilateral exposures. This requires an appropriate algorithm to find numerically this equilibrium (see Section III.4).

ii) Then computing their discounted risk-neutral expectations with respect to both the common factor F and the specific errors ε_i, $i = 1, ..., n$. We will not get closed form expressions of derivative prices [4], but these prices are easily computed by simulations.

The computation of the prices of the tranches is much more complicated than in the unconnected framework. In fact, the asset side of the bank includes different debts of the other banks. Thus, by buying (or selling) a tranche written on a single bank, that is, on a single name, we buy (or sell) a portfolio of tranches written on the other banks, that is, a CDO written on n names if all the banks are connected. Formulas (III.13) and (III.14) clearly show that a junior or senior zero-coupon written on bank i involves several names. The involved names are not only the names directly obtained with the strictly positive exposures of bank i, which are all the banks j such that $\gamma^S_{i,j}$, or $\gamma^J_{i,j}$ are not zero. They are also the banks connected to these banks through a chain of debt holdings. The hidden CDO is not a simple pooling of names with exogenous weights. Its design involves the structure of the network, that is the exposure matrices Γ^J and Γ^S and the structures of the balance sheets, that are the ratios Ax_j/L^{*S}_j and Ax_j/L^{*J}_j. Moreover, the pricing of these tranches, that are hidden CDO's, have to take into account the simultaneity of the liquidation process, that is, for a contagion effect (see below "contagion premium").

Seniority and rating

The seniority, S or J, of the debt is not a perfect signal of overall risk quality. It should only be interpreted as an ordering of the debts for each given bank: the junior debt of a bank is riskier than the senior debt of the same bank. In other words, the rating of the junior debt of a bank is smaller than the rating of its senior debt. But, this does not mean that all senior debts (or all junior debts) have a same rating. The rating of junior debt of bank i might be greater than the rating of the senior debt of bank $j \neq i$, since the quality of the tranches depend on the asset-liability ratios Ax_i/L^{*S}_i and Ax_i/L^{*J}_i and on the debt exposures. For instance, the senior debt of a bank with small asset/liability ratio can be riskier than the junior debt of a bank with a large asset/liability ratio. In particular, it might be misleading to consider a basket of senior tranches as weakly risky.
The seniority should only be interpreted as a priority rule for allocating the asset in case of liquidation. In this framework, defining the priority rule for each bank is enough to define endogenously the recovery rates on all debts, that is, to fix the equilibrium conversion rates between the prices of the different junior and senior tranches.
As an illustration of a junior debt which may be less risky than a senior debt, let us consider a basic network composed of three banks with two purely retail banks and one lender of last resort. Bank 1 and bank 2 have no interbanking exposures. Bank 3 plays the role of lender of last resort and has only debts of bank 1 and 2 in its asset side. The balance sheets of the banks are presented in Table III.5. In this extreme case, where there is no external asset component for bank 3, a tranche on this lender of last resort is a pure CDO, written in fact on two names and mixing junior and senior debts.

4. Even conditional on F.

Bank 1	
Asset	Liability
Ax_1	L_1^J
	L_1^S
	Y_1

Bank 2	
Asset	Liability
Ax_2	L_2^J
	L_2^S
	Y_2

Bank 3	
Asset	Liability
$\gamma_{3,1}^J L_1^J$	L_3^J
$\gamma_{3,1}^S L_1^S$	L_3^S
$\gamma_{3,2}^J L_2^J$	Y_3
$\gamma_{3,2}^S L_2^S$	

Table III.5: Balance Sheet of Two Retail Banks and One Lender of Last Resort

The payoffs of the senior and junior zero-coupons issued by bank 3 are:

$$ZC_3^S = min\left[\gamma_{3,1}^J \frac{L_1^J}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,2}^J \frac{L_2^J}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,1}^S \frac{L_1^S}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,2}^S \frac{L_2^S}{L_3^{*S}}; 1\right],$$

$$ZC_3^J = min\left[\gamma_{3,1}^J \frac{L_1^J}{L_3^{*J}} + \gamma_{3,2}^J \frac{L_2^J}{L_3^{*J}} + \gamma_{3,1}^S \frac{L_1^S}{L_3^{*J}} + \gamma_{3,2}^S \frac{L_2^S}{L_3^{*J}} - \frac{L_3^S}{L_3^{*J}}; 1\right],$$

These equations can be rewritten to show the impacts of the situations of bank 1 and bank 2 on the senior zero-coupon issued by bank 3:

$$ZC_3^S = min\left[\gamma_{3,1}^J \frac{min\left(\left(Ax_1 - L_1^{*S}\right)^+; L_1^{*J}\right)}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,2}^J \frac{min\left(\left(Ax_2 - L_2^{*S}\right)^+; L_2^{*J}\right)}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,1}^S \frac{min\left(Ax_1; L_1^{*S}\right)}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,2}^S \frac{min\left(Ax_2; L_2^{*S}\right)}{L_3^{*S}}; 1\right],$$

Let us assume that bank 2 is alive: $Ax_2 > L_2^{*J} + L_2^{*S}$, and let us focus on the senior zero-coupon of bank 3. If the external asset of bank 1 decreases, it may happen that the senior zero-coupon issued by bank 3 is riskier than the junior zero-coupon issued by bank 2. This arises if

$$Ax_1 < min\left(\frac{L_3^{*S} - \gamma_{3,2}^J L_2^{*J} - \gamma_{3,2}^S L_2^{*S}}{\gamma_{3,1}^S}; L_1^{*S}\right),$$

where we get:

$$ZC_3^S = \gamma_{3,2}^J \frac{L_2^{*J}}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,1}^S \frac{min\left(Ax_1; L_1^{*S}\right)}{L_3^{*S}} + \gamma_{3,2}^S \frac{L_2^{*S}}{L_3^{*S}} < 1,$$

Therefore there is a loss for the senior zero-coupon of bank 3 while the junior zero-coupon issued by bank 2 has a plain payoff.

III.3.4 Contagion premium

The prices of the tranches can be decomposed into a part that accounts for contagion phenomena and a part without contagion phenomena. The last component corresponds to the standard price of a tranche (see Section III.3) Let us consider an initial financial system defined by the bilateral exposure matrices, the

values of external assets and the nominal values of junior and senior debts: $\mathcal{S}^0 = \{\Pi, \Gamma^J, \Gamma^S, L^{*J}, L^{*S}, Ax^0\}$. We assume that initially all banks are alive: $Y_i^0 > 0$, $i = 1, ..., n$. The prices of the junior and senior zero-coupons can be written as functions of this initial financial system $\mathcal{S}^0$:

$$ZC_i^J(\mathcal{S}^0) \text{ and } ZC_i^S(\mathcal{S}^0), \qquad i = 1, ..., n.$$

Let us now consider an alternative initial financial system, where all the banks sell their cross holdings of stocks, junior and senior debts. These sells transform these assets into external assets. The after sell initial financial system is $\mathcal{S}^1 = \{0, 0, 0, L^{*J}, L^{*S}, Ax^1\}$, where $Ax^1 = \Pi Y^0 + \Gamma^J L^{*J} + \Gamma^S L^{*S} + Ax^0 = Y^0 + L^{*J} + L^{*S}$. Of course the banks have the same values at date $t = 0$ in both systems $\mathcal{S}^0$ and $\mathcal{S}^1$. Then let us apply a shock on the external asset components Ax^0, and thus also on Ax^1. This leads to new systems $\mathcal{S}^0 + \delta\mathcal{S}^0$ and $\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1$, respectively, depending on the initial system, which is considered. The prices of the junior and senior zero-coupons after the shock are denoted by $ZC_i^J(\mathcal{S}^0 + \delta\mathcal{S}^0)$ and $ZC_i^S(\mathcal{S}^0 + \delta\mathcal{S}^0)$, and by $ZC_i^J(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)$ and $ZC_i^S(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)$, respectively. Since there are no interconnections, the prices $ZC_i^J(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)$ and $ZC_i^S(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)$ are immune to contagion and derived by the standard formulas of Section III.3.2. By comparing the two types of prices, we define a contagion premium for the junior and senior zero-coupons:

$$ZC_i^J(\mathcal{S}^0 + \delta\mathcal{S}^0) = \underbrace{ZC_i^J(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)}_{\text{standard price}} + \underbrace{\Big(ZC_i^J(\mathcal{S}^0 + \delta\mathcal{S}^0) - ZC_i^J(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)\Big)}_{\text{contagion premium}}, \quad \text{(III.15)}$$

$$ZC_i^S(\mathcal{S}^0 + \delta\mathcal{S}^0) = \underbrace{ZC_i^S(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)}_{\text{standard price}} + \underbrace{\Big(ZC_i^S(\mathcal{S}^0 + \delta\mathcal{S}^0) - ZC_i^S(\mathcal{S}^1 + \delta\mathcal{S}^1)\Big)}_{\text{contagion premium}}, \quad \text{(III.16)}$$

for $i = 1, ..., n$.
The effect of interconnexions can increase or decrease the value of a junior, or senior zero-coupon, that is, the contagion premium in equations (III.15) and (III.16) can be either positive, or negative. Moreover, the sign of this premium may vary across banks and across seniority levels for a given bank. If the contagion premium is positive, the interconnections make the defaultable zero-coupon safer whereas a negative contagion premium makes it riskier.
Finally note that both the standard price and contagion premium depend on the dependence due to the common shock F exogenous to the system. The standard price (resp. the contagion premium) may themselves be decomposed to measure the effect of the common shock (resp. the joint effect of exogenous shock and contagion).

III.4 Applications

For illustration purpose, we consider a system of 3 banks, which are interconnected through their debt holdings only, and we assume that no bank has self-holding of its debt. We give an example of a liquidation equilibrium path when the external asset components of the balance sheets are driven by a single common dynamic factor. Then, we provide the prices of hidden CDO's and their contagion components for different junior and senior exposures.

III.4.1 The liquidation program

Let us first explain how to solve numerically the piecewise linear system defining the equilibrium. The equilibrium conditions for the junior and senior debts in a model without interconnections by stocks are given by:

$$L_i^S = min(L_i^{*S}; \sum_{j \neq i} \gamma_{i,j}^S L_j^S + \sum_{j \neq i} \gamma_{i,j}^J L_j^J + Ax_i), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{III.17}$$

$$L_i^J = min(L_i^{*J}; \sum_{j \neq i} \gamma_{i,j}^S L_j^S + \sum_{j \neq i} \gamma_{i,j}^J L_j^J + Ax_i - L_i^S), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{III.18}$$

How to solve this $2n$ dimensional piecewise linear system in practice? If n is large, it is computationally unfeasible to consider the 3^n regimes and select the one corresponding to the equilibrium. Proposition III.2 provides an approach, which involves a number of computations of order n instead of 3^n to find the liquidation equilibrium. This extends Lemma 4 in Eisenberg and Noe (2001). The idea is that the liquidation equilibrium is the solution of a linear program.

Proposition III.2 (Equilibrium through Linear Optimization)**.** *The solution of the linear program:*

$$\begin{array}{rll} \max\limits_{L_i^S, L_i^J} & \Big(\sum\limits_{i=1}^n L_i^S + \theta \sum\limits_{i=1}^n L_i^J \Big) & \\ s.t. & L_i^S \leq L_i^{*S}, & i = 1, ..., n, \\ & L_i^S \leq \sum\limits_{j \neq i} \gamma_{i,j}^S L_j^S + \sum\limits_{j \neq i} \gamma_{i,j}^J L_j^J + Ax_i, & i = 1, ..., n, \\ & L_i^J \leq L_i^{*J}, & i = 1, ..., n, \\ & L_i^J \leq \sum\limits_{j \neq i} \gamma_{i,j}^S L_j^S + \sum\limits_{j \neq i} \gamma_{i,j}^J L_j^J + Ax_i - L_i^S, & i = 1, ..., n, \end{array}$$

satisfies the equilibrium conditions (III.17)-(III.18), if the positive penalty coefficient θ is sufficiently small.

Proof : See Appendix C.4.

Therefore the liquidation equilibrium can be derived by applying a simplex method to the linear program in Proposition III.2. This optimization problem can be seen as describing the behavior of an authority, which has to define the liquidation process. The criterion of the authority considers the debt recoveries, while ensuring the priority of the senior debts with respect to the junior debts by the appropriate choice of the weighting scalar [5] θ. Then, by maximizing the objective function under the contractual and limited liabilities restrictions, this optimizing authority will reach the liquidation equilibrium.
As noted in Elsinger (2009), the result of Proposition III.2 cannot be extended when there are also stock crossholdings. It is still possible to use a fixed point algorithm converging to the liquidation equilibrium, but the limiting equilibrium is not necessarily reached in a finite number of steps

5. The discussion in Appendix C.4 shows that scalar θ has to be chosen smaller than 1.

III.4.2 Liquidation equilibrium path

For illustrative purpose, let us now consider a basic network of three banks. The exposure matrices are set to:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^J = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.35 & 0.15 & 0.00 \end{pmatrix} \text{ and } \quad \Gamma^S = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.20 & 0.00 & 0.00 \\ 0.05 & 0.05 & 0.00 \end{pmatrix}.$$

The liability components of the balance sheets are:

$$L^{*J} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ 0.10 \end{pmatrix} \text{ and } L^{*S} = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 1.25 \\ 0.90 \end{pmatrix}.$$

The external assets are driven by the following historical dynamic equation:

$$log(Ax_{i,t}) = \alpha_i + \rho\ log(Ax_{i,t-1}) + \beta_i F_t + \sigma_i \varepsilon_{i,t}, \quad \text{for } t = 2, ..., 5, \text{ and } i = 1, 2, 3, \tag{III.19}$$

with initial conditions:

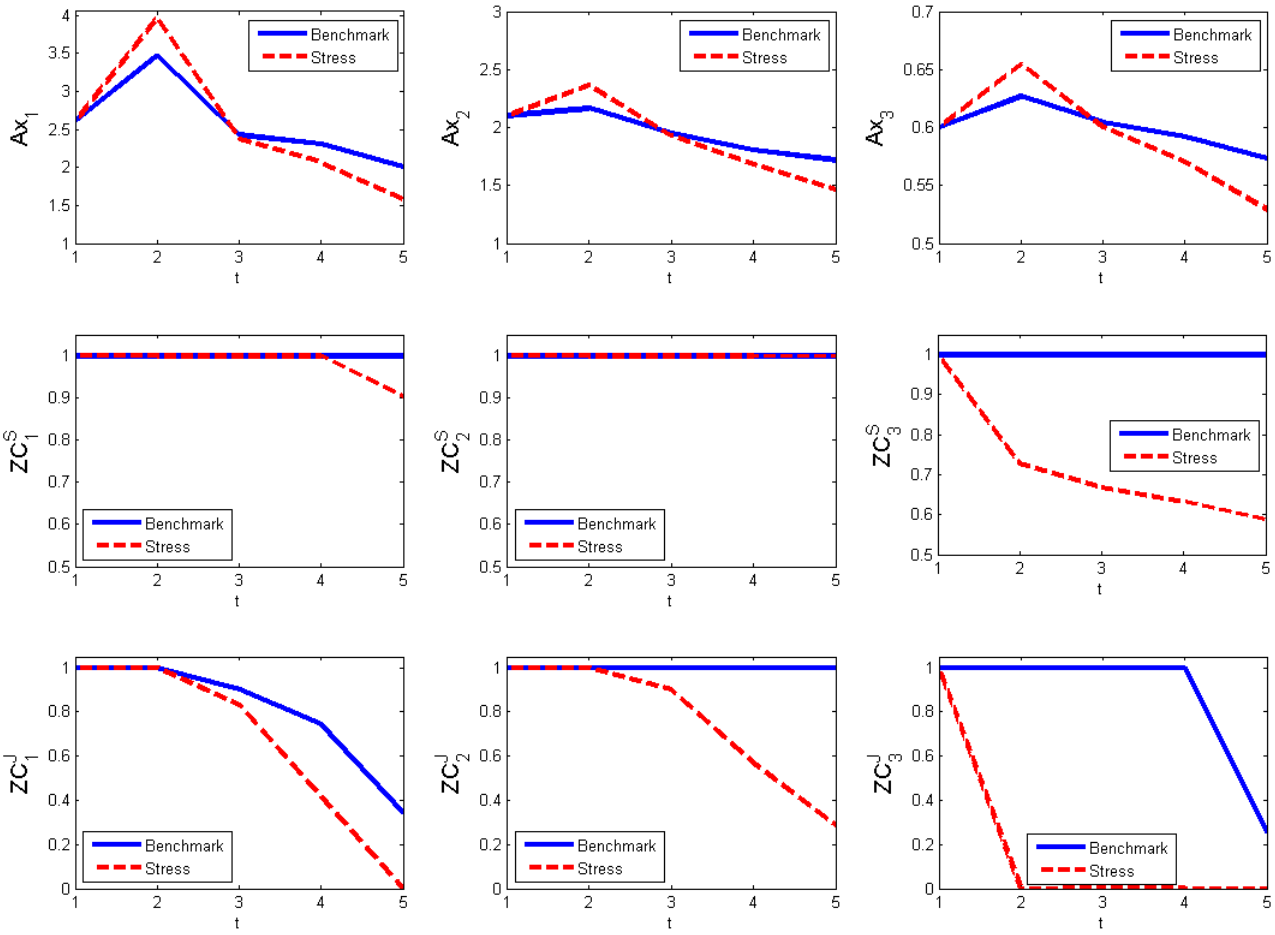
$$\left(\ Ax_{1,1}, \quad Ax_{2,1}, \quad Ax_{3,1} \ \right)' = \left(\ 2.6, \quad 2.1, \quad 0.6 \ \right)', \tag{III.20}$$

parameters set to:

$$\begin{array}{rl} \left(\ \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3 \ \right)' & = \left(\ 0.16, \quad 0.06, \quad 0.01 \ \right)', \\ \rho & = 0.95, \\ \beta & = (1.2, 0.8, 0.4)', \end{array} \tag{III.21}$$

Gaussian common factor $F_t \sim II\mathcal{N}(0; 0.001)$, and independent standard normal specific error terms $\varepsilon_{i,t} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0; 1)$. The α_i's are set such that $\mathbb{E}(Ax_{i,2}|Ax_{i,1}) = Ax_{i,1}$. Intuitively, bank 1 is a pure retail bank, which is very sensitive to the systematic factor. Bank 3 plays the role of lender of last resort: it lends to the two other banks and has very few assets on its own. The asset component of bank 2 includes interbank lending (towards bank 1) and moderately risky external assets.
The dynamic (III.19)-(III.21) defines the benchmark scenario. The external asset components at initial date 1 have been chosen to ensure that the three banks are alive at this date. Then at the next date, these external asset components receive specific shocks through the new drawing of the $\varepsilon_{i,t}$ and new common shocks through the new drawing of the common factor. At some dates these shocks can be adverse shocks implying the default of one or several banks.
The dynamic model above can also serve for stress-tests. A stress-test compares the outcomes of benchmark and stress scenarios. We build a stress scenario where the common factor F is twice bigger than in the benchmark scenario. Figure III.4 displays the payoffs of the junior and senior tranches in the benchmark and stress scenarios for given systematic and idiosyncratic trajectories.
Under the benchmark scenario, the senior zero-coupons are not risky for the three banks, but we observe default of bank 1 at date 3 (respectively, of bank 3 at date 5) on the junior debt. Under the stress scenario, the payoffs are smaller than under the benchmark scenario. The default can now reach the senior debts, for instance

for banks 3 and 1. Moreover, we observe first a default of bank 3 at date 2, then a joint default of banks 1 and 2 at date 3. Finally, note that the payoff of the junior debt of bank 3 in the benchmark scenario is higher than the payoff of its senior debt under the stress scenario. This means that the rating of a junior (resp. senior) debt can vary over time.



The x-axis corresponds to time with $t = 1$ as initial date. The y-axis represents the values of external assets (top row), senior zero-coupons (middle row) and junior zero-coupons (bottom row). The left column of the three plots refers to bank 1, the middle column of the three plots refers to bank 2 and the right column of the three plots refers to bank 3. The plain lines correspond to values under the benchmark scenario while the dashed lines correspond to values under the stress scenario.

Figure III.4: Payoffs in the Benchmark and Stress Scenarios

III.4.3 Decomposition of hidden CDO prices

Let us now focus on the decomposition of the junior and senior hidden CDO prices into the standard prices and the contagion premiums. We assume that the risk-neutral dynamics is the autoregressive system with systematic factor given in the benchmark scenario (III.19). The prices are computed by simulation with 10,000 iterations. The results are given in Table III.6 (in %) for date $t = 1$ at horizon $h = 0, ..., 4$. There is no default at current date $t = 1$ and the initial conditions are given in (III.20). For the financial system without contagion, we consider that

	Standard Price			Contagion Premium		
	ZC_1^S	ZC_2^S	ZC_3^S	ZC_1^S	ZC_2^S	ZC_3^S
$h=0$	100.00	100.00	100.00	0.00	0.00	0.00
$h=1$	99.79	100.00	100.00	0.00	0.00	-0.41
$h=2$	98.90	100.00	100.00	0.00	0.00	-1.20
$h=3$	97.68	100.00	100.00	0.00	0.00	-1.97
$h=4$	96.54	100.00	100.00	0.00	0.00	-2.56
	ZC_1^J	ZC_2^J	ZC_3^J	ZC_1^J	ZC_2^J	ZC_3^J
$h=0$	100.00	100.00	100.00	0.00	0.00	0.00
$h=1$	79.62	99.80	99.98	0.00	0.13	-13.67
$h=2$	71.07	98.81	99.62	0.00	0.54	-23.38
$h=3$	66.25	97.36	98.84	0.00	0.93	-28.19
$h=4$	63.42	96.16	97.86	0.00	1.11	-30.55

Table III.6: Prices of Tranches and Contagion Premiums

banks sell their interbank asset and invest them in their external assets, whose dynamics is given by (III.19). Since bank 1 does not lend to other banks, there is no contagion premium on the tranches of bank 1. For the senior tranches, the tranches of bank 3 are affected by a negative contagion premium. For the junior tranches, the contagion premium is negative for bank 3 whereas it is positive for bank 2. The interconnections have a positive (respectively, negative) impact on bank 2 (respectively, on bank 3). In this special case, the contagion premium for bank 1 is null, is positively increasing with the horizon for bank 2 and negatively decreasing with the horizon for bank 3. The negative risk premium for bank 3 was expected. Indeed the bank has an interpretation of lender in last resort and has to support the increased common risk introduced in the stochastic scenario. When the horizon h increases, it has to support both the direct and the indirect effects due to the interconnections.

III.5 Concluding remarks

An adverse exogenous shock on the banks can create joint defaults and a joint determination of the recovery rates of the debts. We have shown in this paper that the new situation of the financial system depends on the structure of the interconnections between the banks through the different types of assets included in their balance sheets, in particular through the matrices of exposures for stocks, junior and senior debts. We have proved the existence and uniqueness of the liquidation equilibrium under conditions on the exposures, which are generally fulfilled in practice.

These interconnections and the associated liquidation equilibrium have significant consequences on the pricing of the junior and senior debts written on a single name, when this name is a bank. Those contractual single name assets are in fact CDO's written on the names of all interconnected banks. Moreover to account for the interconnection between banks the standard CDO's pricing formulas have to be modified by adding a premium to capture the contagion effects.

C.1 The equilibrium for two banks

We consider system (III.4)-(III.6) with $n = 2$. There are nine possible joint default regimes for the two banks. The idea is first to consider the solution of the system in each regime, second to characterize each regime in the space of external assets Ax_1, Ax_2, and finally to write conditions to insure that the regions defining the regimes form a partition of this space. For each given regime, there exists a unique solution. These solutions are given below.

Regime 1: No default.
We get: $(Id - \Pi)Y = \Delta Ax$, and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax \in \begin{pmatrix} 1-\pi_{1,1} & -\pi_{1,2} \\ -\pi_{2,1} & 1-\pi_{2,2} \end{pmatrix} \mathbb{R}^{+2} \equiv \mathcal{C}_1.$$

Regime 2: bank 1 is alive ; bank 2 is in partial default.
We get:

$$(Id - \Pi) \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id) \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta L_2^J \end{bmatrix} = \Delta Ax,$$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax \in \begin{pmatrix} 1-\pi_{1,1} & \gamma_{1,2}^J \\ -\pi_{2,1} & \gamma_{2,2}^J - 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}^+ \times [0; L_2^{*J}] \equiv \mathcal{C}_2.$$

Regime 3: bank 1 is alive ; bank 2 is in complete default.
We get:

$$(Id - \Pi) \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id) \begin{bmatrix} 0 \\ L_2^{*J} \end{bmatrix} + (\Gamma^S - Id) \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta L_2^S \end{bmatrix} = \Delta Ax,$$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax - \begin{pmatrix} \gamma_{1,2}^J L_2^{*J} \\ (\gamma_{2,2}^J - 1) L_2^{*J} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1-\pi_{1,1} & \gamma_{1,2}^S \\ -\pi_{2,1} & \gamma_{2,2}^S - 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}^+ \times [0; L_2^{*S}] \equiv \mathcal{C}_3.$$

Regime 4: bank 1 is in partial default ; bank 2 is alive.
We get:

$$(Id - \Pi) \begin{bmatrix} 0 \\ Y_2 \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id) \begin{bmatrix} \Delta L_1^J \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta Ax,$$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax \in \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^J - 1 & -\pi_{1,2} \\ \gamma_{1,2}^J & 1-\pi_{2,2} \end{pmatrix} [0; L_1^{*J}] \times \mathbb{R}^+ \equiv \mathcal{C}_4.$$

Regime 5: bank 1 is in partial default ; bank 2 is in partial default.
We get: $(\Gamma^J - Id)\Delta L^J = \Delta Ax$, and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax \in \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^J - 1 & \gamma_{1,2}^J \\ \gamma_{2,1}^J & \gamma_{2,2}^J - 1 \end{pmatrix} [0; L_1^{*J}] \times [0; L_2^{*J}] \equiv \mathcal{C}_5.$$

Regime 6: bank 1 is in partial default ; bank 2 is in complete default.
We get:

$$(\Gamma^S - Id)\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta L_2^S \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id)\begin{bmatrix} \Delta L_1^J \\ 0 \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id)\begin{bmatrix} 0 \\ L_2^{*J} \end{bmatrix} = \Delta Ax,$$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax - \begin{pmatrix} \gamma_{1,2}^J L_2^{*J} \\ (\gamma_{2,2}^J - 1)L_2^{*J} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^J - 1 & \gamma_{1,2}^S \\ \gamma_{2,1}^J & \gamma_{2,2}^S - 1 \end{pmatrix} [0; L_1^{*J}] \times [0; L_2^{*S}] \equiv \mathcal{C}_6.$$

Regime 7: bank 1 is in complete default ; bank 2 is alive.
We get:

$$(Id - \Pi)\begin{bmatrix} 0 \\ Y_2 \end{bmatrix} + (\Gamma^S - Id)\begin{bmatrix} \Delta L_1^S \\ 0 \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id)\begin{bmatrix} L_1^{*J} \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta Ax,$$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax - \begin{pmatrix} (\gamma_{1,1}^J - 1)L_1^{*J} \\ \gamma_{1,2}^J L_1^{*J} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^S - 1 & -\pi_{1,2} \\ \gamma_{1,2}^S & 1 - \pi_{2,2} \end{pmatrix} [0; L_1^{*J}] \times \mathbb{R}^+ \equiv \mathcal{C}_7.$$

Regime 8: bank 1 is in complete default ; bank 2 is in partial default.
We get:

$$(\Gamma^S - Id)\begin{bmatrix} \Delta L_1^S \\ 0 \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id)\begin{bmatrix} L_1^{*J} \\ 0 \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id)\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta L_2^J \end{bmatrix} = \Delta Ax,$$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax - \begin{pmatrix} (\gamma_{1,1}^J - 1)L_1^{*J} \\ \gamma_{1,2}^J L_1^{*J} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^S - 1 & \gamma_{1,2}^J \\ \gamma_{1,2}^S & \gamma_{2,2}^J - 1 \end{pmatrix} [0; L_1^{*S}] \times [0; L_2^{*J}] \equiv \mathcal{C}_8.$$

Regime 9: bank 1 is in complete default ; bank 2 is in complete default.
We get:

$$(\Gamma^S - Id)\begin{bmatrix} \Delta L_1^S \\ \Delta L_2^S \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id)\begin{bmatrix} L_1^{*J} \\ L_2^{*J} \end{bmatrix} = \Delta Ax,$$

and this regime occurs iff:

$$\Delta Ax - \begin{pmatrix} (\gamma_{1,1}^J - 1)L_1^{*J} + \gamma_{1,2}^J L_2^{*J} \\ \gamma_{2,1}^J L_1^{*J} + (\gamma_{2,2}^J - 1)L_2^{*J} \end{pmatrix} \in \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^S - 1 & \gamma_{1,2}^S \\ \gamma_{2,1}^S & \gamma_{2,2}^S - 1 \end{pmatrix} [0; L_1^{*S}] \times [0; L_2^{*S}]}_{\equiv \mathcal{C}_9}.$$

We get a partition of the set of external asset values $Ax = (Ax_1, Ax_2)'$ into 9 bounded or unbounded quadrilaterals defined by means of 4 nodes. These quadrilaterals are generated by the six vectors u_1,...,u_6, spreading from Ax^*, $Ax^* + X_1$, $Ax^* + X_2$, or $Ax^* + X_1 + X_2$, where:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{1,1} \\ -\pi_{2,1} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^J - 1 \\ \gamma_{2,1}^J \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^S - 1 \\ \gamma_{2,1}^S \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\pi_{1,2} \\ 1-\pi_{2,2} \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} \gamma^J_{1,2} \\ \gamma^J_{2,2}-1 \end{pmatrix}, \quad u_6 = \begin{pmatrix} \gamma^S_{1,2} \\ \gamma^S_{2,2}-1 \end{pmatrix},$$

$$\text{and: } X_1 = \begin{pmatrix} (\gamma^J_{1,1}-1)L^{J*}_1 \\ \gamma^J_{2,1}L^{J*}_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \gamma^J_{1,2}L^{J*}_2 \\ (\gamma^J_{2,2}-1)L^{J*}_2 \end{pmatrix}.$$

This partition is described in Figure III.3.

In case of two banks, the existence and uniqueness of the liquidation equilibrium is given below.

Proposition III.3 (Existence and Uniqueness of Equilibrium with Seniority for two Banks)**.** *For a system with two banks and two seniority levels, the liquidation equilibrium exists and is unique, iff the determinants:*

$$\begin{aligned}
\det(u_1,u_2) &= (1-\pi_{1,1})(1-\pi_{2,2}) - \pi_{1,2}\pi_{2,1}, \\
\det(u_2,u_3) &= (1-\pi_{2,2})(1-\gamma^J_{1,1}) - \pi_{1,2}\gamma^J_{2,1}, \\
\det(u_3,u_4) &= (1-\gamma^J_{1,1})(1-\gamma^J_{2,2}) - \gamma^J_{1,2}\gamma^J_{2,1}, \\
\det(u_4,u_1) &= (1-\pi_{1,1})(1-\gamma^J_{2,2}) - \gamma^J_{1,2}\pi_{2,1}, \\
\det(u_2,u_5) &= (1-\pi_{2,2})(1-\gamma^S_{1,1}) - \pi_{1,2}\gamma^S_{2,1}, \\
\det(u_5,u_4) &= (1-\gamma^S_{1,1})(1-\gamma^J_{2,2}) - \gamma^J_{1,2}\gamma^S_{2,1}, \\
\det(u_5,u_6) &= (1-\gamma^S_{1,1})(1-\gamma^S_{2,2}) - \gamma^S_{1,2}\gamma^S_{2,1}, \\
\det(u_3,u_6) &= (1-\gamma^J_{1,1})(1-\gamma^S_{2,2}) - \gamma^S_{1,2}\gamma^J_{2,1}, \\
\det(u_5,u_1) &= (1-\pi_{1,1})(1-\gamma^S_{2,2}) - \gamma^S_{1,2}\pi_{2,1},
\end{aligned}$$

have the same sign.

Proof. Let us consider two vectors u, v of $\mathbb{R}^2$ with a same length. Vector v can be deduced from vector u by a rotation of angle $\theta \in (-\pi, \pi)$. The sign of this angle is equal to the sign of the determinant $det(u, v)$. More generally, when the two vectors have different lengths, the sign of the determinant still provides either the positive, or negative direction of the rotation to pass from $\frac{u}{||u||}$ to $\frac{v}{||v||}$.
Let us now consider Figure III.3. The equilibrium exists and is unique if and only if the (bounded and unbounded) quadrilaterals form a partition of $\mathbb{R}^2$. This happens if and only if the directions of the rotations are the same at the four nodes. This provides the conditions of Proposition III.3. □

These determinantal conditions are implied by the conditions:

$$\sum_{i=1}^{2} \pi_{i,j} < 1, \sum_{i=1}^{2} \gamma^J_{i,j} < 1, \sum_{i=1}^{2} \gamma^S_{i,j} < 1, j = 1, 2,$$

since under these inequalities all determinants of Proposition III.3 are strictly positive. Thus, the equilibrium exists and is unique if nonzero fractions of stocks and junior and senior debts are hold outside the system.

C.2 The equilibrium for n interconnected banks

The proof of the existence and uniqueness of the equilibrium in the general framework needs more complicated arguments than in the case of two banks. It requires a condition for the invertibility of a piecewise linear function in a multidimensional space like in Gouriéroux et al. (2012) and arguments of projective geometry.
Let us consider a set of n interconnected banks. There are three situations for each bank and therefore 3^n joint regimes indexed by a sequence $z = (z_1, ..., z_n)$, where $z_i = 0$, if bank i does not default, $z_i = 1$, if bank i partially defaults and $z_i = 2$, otherwise. For each state z_i and for each bank, there is only one variable among Y, L^S, L^J, which is not known.
The equilibrium conditions (III.7)-(III.9) can be written in terms of Y, $\Delta L^S = L^{*S} - L^S$ and $\Delta L^J = L^{*J} - L^J$, where Y_i, ΔL_i^S, ΔL_i^J are nonnegative variables. Let us denote $\Delta Ax = Ax - (Id - \Gamma^S)L^{*S} - (Id - \Gamma^J)L^{*J} = Ax - Ax^*$, where Ax^* denotes the out of stock net nominal assets, that is, Ax_i^* is the out of stock nominal profit and loss of bank i.
These equations are equivalent to :

$$Y_i = \left(\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} Y_j - \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^J \Delta L_j^J - \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^S \Delta L_j^S + \Delta L_i^J + \Delta L_i^S + \Delta A x_i \right)^+, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$\Delta L_i^S = \left(-\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} Y_j + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^J \Delta L_j^J + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^S \Delta L_j^S - L_i^{*J} - \Delta A x_i \right)^+, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$\Delta L_i^J = \left(-\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} Y_j + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^J \Delta L_j^J + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^S \Delta L_j^S - \Delta L_i^S - \Delta A x_i \right)^+, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Let us now denote $B = Id - \Pi$, $C^J = \Gamma^J - Id$, $C^S = \Gamma^S - Id$, and b_i, c_i^J and c_i^S the ith columns of matrices B, C^J and C^S, respectively. Let us also introduce the dummy variable $z_{i,j}$ equal to 1, if $z_i = j$, and equal to 0, otherwise, and the (n, n) matrix $D(z)$, whose ith column is given by:

$$d_i(z) = z_{i,0} b_i + z_{i,1} c_i^J + z_{i,2} c_i^S.$$

Then the equilibrium conditions become:

$$(1 - z_{i,0}) Y_i + (1 - z_{i,1}) \Delta L_i^J + (1 - z_{i,2}) \Delta L_i^S = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{C.1}$$

$$D(z) \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{i,0} Y_i + z_{i,1} \Delta L_i^J + z_{i,2} \Delta L_i^S \\ \vdots \end{bmatrix} + (\Gamma^J - Id) \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{i,2} L_i^{*J} \\ \vdots \end{bmatrix} = \Delta A x. \tag{C.2}$$

Equation (C.1) defines the regimes. For instance, if $z_{i,0} = 1$, we get $z_{i,1} = z_{i,2} = 0$, then $\Delta L_i^J = \Delta L_i^S = 0$, that is $L_i^J = L_i^{*J}$ and $L_i^S = L_i^{*S}$, since the variables ΔL_i^J and

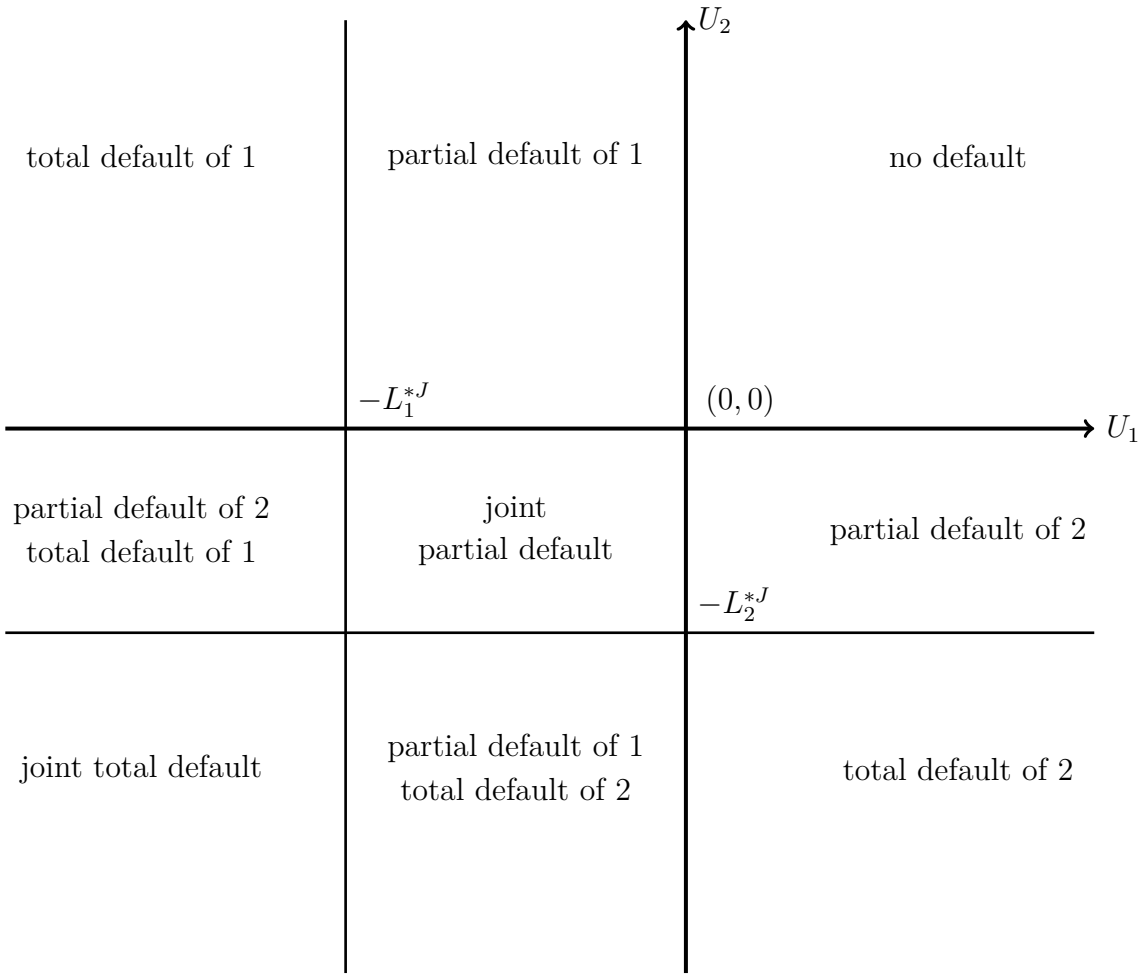


Figure C.1: The Transformed Quadrilaterals

ΔL_i^S are nonnegative.
The $n-$dimensional system (C.2) provides the closed form expression of the unconstrained variable in each regime. For instance, if $z_{i,0} = 1$ for all $i = 1, ..., n$, it provides the expression of the value of the firm, by solving:

$$BY = (Id - \Pi)Y = \Delta Ax.$$

The equilibrium conditions (C.1)-(C.2) can be rewritten in an equivalent way, which is more appropriate to study the existence and uniqueness of the liquidation equilibrium. The aim of the transformation is to consider a vector space in which the boundaries defining the regimes are orthogonal. Let us consider the new variables defined by:

$$X_i^J = -\Delta L_i^J \in [-L_i^{*J}; 0],$$
$$X_i^S = -\Delta L_i^S - L_i^{*J} \in [-L_i^{*J} - L_i^{*S}; -L_i^{*J}].$$

With these new variables, the regimes can be defined by considering the location of $U_i = z_{i,0}Y_i + z_{i,1}X_i^J + z_{i,2}X_i^S$ with respect to the thresholds $-L_i^{*J}$ and 0. We get the description of such regimes in Figure C.1 for the case of two banks.

With the new notations, the equilibrium conditions involve new matrices. Let us define the matrix $Q(z)$, whose i^{th} column is the i^{th} column of Π, if $z_i = 0$, the i^{th} column of Γ^J, if $z_i = 1$, and the i^{th} column of Γ^S, otherwise. The equilibrium conditions on the space of values of $U = (U_1, ..., U_n)'$ become :

$$\Delta Ax = \Big(Id - Q(z)\Big) \begin{pmatrix} \vdots \\ U_i \\ \vdots \end{pmatrix} + (\Gamma^J - \Gamma^S) \begin{pmatrix} \vdots \\ z_{i2} L_i^{*J} \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{C.3}$$

The function of interest is a continuous piecewise linear function with 3^n regimes, corresponding to bounded or unbounded quadrilaterals, characterized by 2^n nodes.

Let us now derive sufficient conditions for the piecewise linear function defined in Section III.2.3 to be a one-to-one mapping.

i) A necessary condition for the global invertibility of this function is its local invertibility at each node. In a neighborhood of a given node, we have 3^n regimes. The condition of local invertibility is the condition of identical sign of the determinants of the corresponding linear components of the application in each of the 3^n regimes.

ii) Moreover the border of one regime is exactly the border of the very adjacent regime. If there were an overlapping, there would be several equilibria. To avoid this situation we need the signs of the determinants to be the same for the 2^n nodes.

iii) Finally, we have to ensure that the unbounded polygons do not intersect.

Let us now discuss the different conditions.

Let us first establish the following Lemma.

Lemma III.1. *Under the inequality conditions of Proposition III.1, $det[Id - Q(z)] > 0, \forall z$.*

Proof. By the assumptions in Proposition III.1, the matrices $Q'(z)$ have nonnegative coefficients, which sum up to a value strictly smaller than 1 per row. By applying Perron-Froebenius theorem, we deduce that the eigenvalues of $Q'(z)$, which are also equal to the eigenvalues of $Q(z)$, have a modulus strictly smaller than 1. Therefore the eigenvalues of $Id - Q(z)$ are either complex conjugates, or real positive, and their product equal to $det[Id - Q(z)]$ is strictly positive. □

We can now apply Theorem 1 in Gouriéroux et al. (1980a) The condition $det[Id - Q(z)] > 0, \forall z$ is exactly the condition ensuring the global invertibility of the piecewise linear function (C.3) in a bounded region including all the nodes.
Thus, to finish the proof we have just to check that the unbounded polygons do not overlap, or equivalently that the piecewise linear mapping is locally invertible at "infinity". This condition can be derived by considering the projective geometry

[see e.g. Bennett (2011)], which provides the transformation of the asymptotic directions associated with the piecewise linear function. Let us denote $\Delta Ax^{as}, Y_i^{as}, \Delta L_i^{S,as}$ the asymptotic directions associated with $\Delta Ax, Y_i, \Delta L_i^S$, respectively. (There is no asymptotic direction for the junior debt, which is bounded). In the projective space the piecewise linear transformation becomes:

$$\begin{cases} (1-z_i^*)Y_i^{as} + z_i^*\Delta L_i^{S,as} = 0, i = 1, \dots, n. \\ \Delta Ax^{as} = [Id - Q^{as}(z^*)](z_i^* Y_i^{as} + (1-z_i^*)\Delta L_i^{S,as}), \end{cases} \tag{C.4}$$

where $z_i^* = 0$, if $Y_i^{as} \neq 0, \Delta L_i^{S,as} = 0$, $z_i^* = 1$, if $Y_i^{as} = 0, \Delta L_i^{S,as} \neq 0$, and the matrix $Q^{as}(z^*)$ is such that its i^{th} column is the i^{th} column of Π, if $z_i^* = 0$, and the i^{th} column of Γ^S, otherwise.
We get an asymptotic system, which involves only the bilateral exposures in stocks and senior debts. By reapplying Theorem 1 in Gouriéroux et al. (1980a), the invertibility of projective system (C.4) is obtained if the $det[Id - Q^{as}(z^*)], \forall z^*$, have the same sign. This condition is satisfied if: $\sum_{i=1}^{n} \pi_{i,j} < 1, \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j}^S < 1, j = 1, \dots, n$; it is in particular satisfied under the inequality conditions of Proposition III.1.

QED

C.3 Computations of the PD and $ELGD$ for tranches

We denote $\varepsilon_i = \sigma_i u_i$ where $u_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Let us first consider the senior debt and compute the associated probability of default and the expected loss given default.

$$\begin{aligned} PD_i^S &= \mathbb{Q}(Ax_i < L_i^{*S}) \\ &= \mathbb{Q}\Big(log(Ax_i) < log(L_i^{*S})\Big) \\ &= \mathbb{Q}\Big(\beta_i F + \varepsilon_i < log(L_i^{*S})\Big) \\ &= \Phi\Big(\frac{log(L_i^{*S}) - \beta_i F}{\sigma_i}\Big) \\ &= \Phi(\mathcal{A}_i). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ELGD_i^S &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(1-\frac{Ax_i}{L_i^{*S}}\middle| Ax_i < L_i^{*S}\right)\\
&= 1-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{Ax_i}{L_i^{*S}}\middle| Ax_i < L_i^{*S}\right)\\
&= 1-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(exp\left(log\left(Ax_i\right)-log\left(L_i^{*S}\right)\right)\middle| log\left(Ax_i\right)-log\left(L_i^{*S}\right)<0\right)\\
&= 1-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(exp\left(\sigma_i u_i-\sigma_i\mathcal{A}_i\right)\middle|\sigma_i u_i-\sigma_i\mathcal{A}_i<0\right)\\
&= 1-exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(exp\left(\sigma_i u_i\right)\middle| u_i-\mathcal{A}_i<0\right)\\
&= 1-\frac{exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i\right)}{\Phi(\mathcal{A}_i)}\int_{-\infty}^{\mathcal{A}_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(\sigma_i u_i-\frac{1}{2}u_i^2\right)du_i\\
&= 1-\frac{exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i\right)}{\Phi(\mathcal{A}_i)}exp(\frac{1}{2}\sigma_i^2)\int_{-\infty}^{\mathcal{A}_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{1}{2}(u_i-\sigma_i)^2\right)du_i\\
&= 1-\frac{exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i\right)}{\Phi(\mathcal{A}_i)}exp(\frac{1}{2}\sigma_i^2)\int_{-\infty}^{\mathcal{A}_i-\sigma_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{1}{2}(u_i)^2\right)du_i\\
&= 1-\frac{exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i+\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)}{\Phi\left(\mathcal{A}_i\right)}\Phi\left(\mathcal{A}_i-\sigma_i\right)
\end{aligned}
$$

Second, we derive the expression of the probability that the asset value are between the boundaries defining the junior tranche, and the corresponding expected loss given default.

$$
\begin{aligned}
PD_i^{J,S} &= \mathbb{Q}(L_i^{*S}<Ax_i<L_i^{*S}+L_i^{*J})\\
&= \mathbb{Q}\Big(log(L_i^{*S})<log(Ax_i)<log(L_i^{*S}+L_i^{*J})\Big)\\
&= \mathbb{Q}\Big(log(L_i^{*S})<\beta_i F+\varepsilon_i<log(L_i^{*S}+L_i^{*J})\Big)\\
&= \mathbb{Q}\Big(\frac{log(L_i^{*S})-\beta_i F}{\sigma_i}<u_i<\frac{log(L_i^{*S}+L_i^{*J})-\beta_i F}{\sigma_i}\Big)\\
&= \Phi\Big(\frac{log(L_i^{*S}+L_i^{*J})-\beta_i F}{\sigma_i}\Big)-\Phi\Big(\frac{log(L_i^{*S})-\beta_i F}{\sigma_i}\Big)\\
&= \Phi(\mathcal{B}_i)-\Phi(\mathcal{A}_i).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ELGD_i^{J,S} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big(1-\frac{Ax_i-L_i^{*S}}{L_i^{*J}}\Big|L_i^{*S}<Ax_i<L_i^{*S}+L_i^{*J}\Big)\\
&= 1-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{exp\left(\beta_i F+\sigma_i u_i\right)-L_i^{*S}}{L_i^{*J}}\Big|L_i^{*S}<exp\left(\beta_i F+\sigma_i u_i\right)<L_i^{*S}+L_i^{*J}\right)\\
&= 1+\frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}}-\frac{exp\left(\beta_i F\right)}{L_i^{*J}}\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(exp(\sigma_i u_i)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_i<u_i<\mathcal{B}_i}\right)}{\Phi(\mathcal{B}_i)-\Phi(\mathcal{A}_i)}\\
&= 1+\frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}}-\frac{exp\left(\beta_i F\right)}{L_i^{*J}}\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(exp(\sigma_i u_i)\mathbb{1}_{u_i<\mathcal{B}_i}\right)-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(exp(\sigma_i u_i)\mathbb{1}_{u_i<\mathcal{A}_i}\right)}{\Phi(\mathcal{B}_i)-\Phi(\mathcal{A}_i)}\\
&= 1+\frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}}-\frac{exp\left(\beta_i F\right)}{L_i^{*J}}\frac{exp\left(\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\Big(\Phi(\mathcal{B}_i-\sigma_i)-\Phi(\mathcal{A}_i-\sigma_i)\Big)}{\Phi(\mathcal{B}_i)-\Phi(\mathcal{A}_i)}\\
&= 1+\frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}}-\frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}}exp\left(-\sigma_i\mathcal{A}_i+\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\frac{\Phi(\mathcal{B}_i-\sigma_i)-\Phi(\mathcal{A}_i-\sigma_i)}{\Phi(\mathcal{B}_i)-\Phi(\mathcal{A}_i)}
\end{aligned}
$$

C.4 Equilibrium through linear optimization

The result is deduced from Lemma 4 in Eisenberg and Noe (2001) by first concentrating with respect to the junior debts.

i) Concentration with respect to the junior debts.
Let us consider fixed values for the senior debts satisfying the constraints and let us optimize with respect to the junior debt only. The maximization problem becomes :

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{L_i^J} & \Big(\sum\limits_{i=1}^{n}L_i^J\Big) & \\
s.t. & L_i^S\leq\sum\limits_{j\neq i}\gamma_{i,j}^S L_j^S+\sum\limits_{j\neq i}\gamma_{i,j}^J L_j^J+Ax_i, & i=1,...,n\\
& L_i^J\leq L_i^{*J}, & i=1,...,n\\
& L_i^J\leq\sum\limits_{j\neq i}\gamma_{i,j}^S L_j^S+\sum\limits_{j\neq i}\gamma_{i,j}^J L_j^J+Ax_i-L_i^S, & i=1,...,n
\end{array}
$$

In this maximization problem, only the two last types of inequalities matter since the first type of inequalities is implied by the third type of inequalities. Then, by Lemma 4 in Eisenberg and Noe (2001), we know that the solutions L_i^J satisfy:

$$
L_i^J=min\Big(L_i^{*J}\ \ ;\ \ \sum_{j\neq i}\gamma_{i,j}^S L_j^S+\sum_{j\neq i}\gamma_{i,j}^J L_j^J+Ax_i-L_i^S\Big),\qquad i=1,...,n.
$$

This $n-$dimensional system can be solved to express the argmax as piecewise linear functions of the levels of senior debts:

$$
L_i^J(L^S,Ax,\Gamma^S,\Gamma^J),\ \text{say.}
$$

ii) The concentrated optimization problem

By concentration, we get:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{L_i^S} & \Big(\sum\limits_{i=1}^n L_i^S + \theta \sum\limits_{i=1}^n L_i^J(L^S, Ax, \Gamma^S, \Gamma^J)\Big) \\ s.t. & L_i^S \leq L_i^{*S}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, ..., n \\ & L_i^S \leq \sum\limits_{j\neq i} \gamma_{i,j}^S L_j^S + \sum\limits_{j\neq i} \gamma_{i,j}^J L_j^J(L^S, Ax, \Gamma^S, \Gamma^J) + Ax_i, \quad i = 1, ..., n. \end{array}$$

The criterion function is a piecewise linear functions in L_i^S, $i = 1, ..., n$. To apply the argument used in the proof of Lemma 4 in Eisenberg and Noe (2001), we have to ensure that this criterion function is increasing. In some regimes, some slopes coefficients of L_j^S in the expression of $L_j^J(L^S, Ax, \Gamma^S, \Gamma^J)$ will be negative. But the presence of L_j^S in the first part of criterion will balance this sign whenever θ is chosen sufficiently small. Under this condition, we deduce that at the optimum, we have:

$$L_i^S = min\Big(L_i^{*S} \;\; ; \;\; \sum_{j\neq i} \gamma_{i,j}^S L_j^S + \sum_{j\neq i} \gamma_{i,j}^J L_j^J + Ax_i\Big), \qquad i = 1, ..., n.$$

iii) A system with a single bank

To understand the need for the weighting scalar in the criterion function, let us consider the case of a single bank $n = 1$. The equilibrium conditions are:

$$\begin{cases} L^S = min(Ax, L^{*S}), \\ L^J = min(Ax - L^S, L^{*J}). \end{cases}$$

The optimization problem of Proposition III.2 is:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{L^J, L^J} & L^S + \theta L^J \\ s.t. & L^S \leq Ax, \\ & L^S \leq L^{*S}, \\ & L^J \leq L^{*J}, \\ & L^J \leq Ax - L^S, \end{array}$$

with $\theta > 0$.

The optimization with respect to L^J provides the solution:

$$L^J(L^S, Ax, L^{*S}, L^{*J}) = min(Ax - L^S, L^{*J}).$$

Then the concentrated optimization problem is:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{L^S} & L^S + \theta\ min(Ax - L^S, L^{*J}) \\ s.t. & L^S \leq Ax, \\ & L^S \leq L^{*S}. \end{array}$$

In this very simple case, we have just to choose a value of θ strictly smaller than 1 to ensure that the concentrated criterion is a strictly increasing function of L^S.

Chapitre IV

Funding Liquidity Risk From a Regulatory Perspective

Ce chapitre reprend *Funding Liquidity Risk from a Regulatory Perspective*[1] co-écrit avec Christian Gouriéroux.

Résumé. Dans la régulation bâloise, seule l'incertitude sur la valeur des actifs ou sur le défaut des emprunteurs est prise-en-compte alors que l'incertitude sur le comportement des déposants ou des investisseurs au passif est négligée. Au contraire, nous considérons les risques à l'actif et au passif. Nous adaptons les mesures de risque usuelles, Value-at-Risk ou probabilité de défaut, pour distinguer les pertes dues à un besoin de liquidité des pertes dues à une difficulté de solvabilité. Appliqués à des données américaines, ces termes additionnels sont significatifs lorsque les chocs sur les prix et sur les volumes sont corrélés. Par conséquent, les réserves réglementaires pour le risque de solvabilité ne peuvent être établies indépendemment des réserves pour le risque de liquidité. Nous montrons comment fixer et gérer conjointement deux comptes de reserves pour limiter les différents risques.

Mots-clefs : régulation, risque de financement, besoin de trésorerie, solvabilité 2, valeur-à-risque, gestion actif-passif.

Code JEL : G18, G01, E58, C58.

1. Nous remercions S. Darolles, C.P. Georg, A. Monfort and D. Shakourzadeh pour leurs commentaires et suggestions avisés.

This chapter is based on *Funding Liquidity Risk from a Regulatory Perspective*[2] co-authored with Christian Gouriéroux.

Abstract. In the Basel regulation, only the uncertainty on the asset price or on the default of borrowers is considered while the uncertainty about depositors' or investors' behaviors on the liability side is neglected. In contrast, we consider risks on both the asset and liability sides. We adapt usual risk measures, such as Value-at-Risk or Probability of Default, to disentangle the losses due to liquidity shortage from the losses due to a lack of solvency. Applied to US data, these additional terms are significant when shocks on prices and volumes are correlated. Consequently, the regulatory reserves for solvency risk cannot be set independently of the reserves for liquidity risk. We show how to set and manage jointly two reserve accounts to control the different risks.

Key words: Regulation, Funding Liquidity Risk, Liquidity Shortage, Solvency 2, Value-at-Risk, Asset/Liability Management.

JEL Code: G18, G01, E58, C58.

2. We thanks S. Darolles, C.P. Georg, A. Monfort and D. Shakourzadeh for insightful comments and suggestions.

IV.1 Introduction

In Basel 2 regulation the computation of the required capital is based on conditional measures of risk of a future portfolio value, such as the Value-at-Risk (VaR), or the Expected Shortfall (ES). This future value is defined on a crystallized portfolio: the portfolio allocation it kept fixed, whereas prices are uncertain. This practice accounts for the uncertainty on market prices (*i.e.* the market risk) as well as for the counterparty risk (*i.e.* the default risk). However, the assumption of crystallized portfolio has to be discussed more carefully, because volume changes are very different on the asset and on the liability sides. On the asset side, volume changes result from portfolio re-allocation managed by the financial institution according to the expected price movements. This first reason, that affects the asset side, is endogenous. On the liability side, volume changes result from modifications in the behaviors of customers and investors. This second source of variations in volume, which concerns the liability component of the balance sheet, does not depend on the management of the firm: the liability variations are exogenous. Therefore, a financial institution is exposed to shocks on price on its asset side and to shocks on volumes on its liability side. In this paper we focus on these exogenous shocks to show how they should be taken into account jointly with the shocks on prices. We explicitly consider the need for cash, that is the funding liquidity risk. Thus, from a regulatory perspective, we are going from a Basel 2 approach to a Basel 3/Solvency 2 approach common to banks and insurance companies.

Our analysis highlights funding and market liquidity risks as new factors for predicting the default of financial institutions, in top of the usual market and credit risks. These factors have been identified by observers during the last crisis. For instance, in the mid-March 2008, Bear Stearns had an exposure to funding liquidity risk (through rollover mechanisms) of about $ 85 billions on the overnight market [Cohan (2010)]. Similarly in the months before its bankruptcy, Lehman-Brothers was rolling 25% of its debt every day through overnight repos. These heavy positions on short-term debt generate a high funding liquidity risk [see the discussions in Brunnermeier (2009), Krishnamurthy (2010)]. Usually, these risks were managed by different divisions in the firms. For instance, VaR models accounting for the riskiness of trading portfolios are independent of liquidity analysis made by the Asset-Liability Management (ALM) department. Our first contribution to the risk management literature is to propose a flexible framework encompassing three classes of risks: market/credit risk (risk of losses on the asset side), funding liquidity risk (risk of losing creditors) and market liquidity risk (risk of losing value in selling illiquid asset). In that framework, we show how to decompose currently used risk measures into the usual term, that considers only solvency risk, and additional terms accounting for funding liquidity risk and market liquidity risk. This decomposition takes into account the interactions between these risks.

Our framework has to be compared with the standard literature on the link between rollover risk and default risk for instance, which assumes that a unique simple default boundary is given [see e.g. Black and Cox (1976), Leland (1994), Leland and Toft (1996), He and Xiong (2012b), He and Xiong (2012a)]. Such an assumption is compatible with the basic analysis of solvency risk [Merton (1974)], but does not

capture the specificity of liquidity risks. We distance ourselves from this strand of literature by describing the different possible joint regimes of liquidity and solvency for a given firm. Loosely speaking, each regime is associated with a joint rating of the firm. The first rating accounts for the degree of liquidity distress while the second one accounts for solvency situation. Mapping these regimes leads us to distinguish in the total risk what comes from a lack of solvency from a liquidity need. Therefore, we introduce a composite boundary of default which structure depends intrinsically on the exposures to the various classes of risk.
In this respect, we also complement the current Basel 3 approach that consider two independent default boundaries: a solvency boundary considering only market and credit risks, and a liquidity boundary dealing with funding and market liquidity risks (the so-called "Liquidity Coverage Ratio"). Since there are two major sources of risks, two regulatory reserve accounts have indeed to be introduced. Our second contribution is to discuss how to jointly manage these accounts and how to set the associated required capitals in a comprehensive approach.

The plan of the paper is as follows. In Section IV.2, we consider the impacts of the exogenous shocks on volumes on a simplified balance sheet and investigate how the balance sheet is quickly adjusted to avoid a short-term default due to a funding liquidity shortage. We first analyze a financial institution with an unlimited line of credit. In this framework, a lack of cash after the shocks on volumes requires the use of the credit line with an additional cost. When the credit line is of limited size, the financial institution can be forced to sell in a hurry illiquid assets, generating fire-sale phenomena. Selling in a hurry has a negative impact on value since illiquid asset are converted into cash with an haircut. In other words, the funding liquidity risk can generate a market liquidity risk and this effect may be reinforced by the liquidity spiral highlighted in Brunnermeier and Pedersen (2009). Sections IV.3 and IV.4 focus on the adaptation of risk measures to account consistently for the various risks. We first decompose the standard Value-at-Risk (VaR) to highlight the effect of the funding and market liquidity risks. We also introduce specific measures of the probability of using the credit line and of the magnitude of this use as well as measures of the probability of selling illiquid assets and the size of these sales. Application of these decomposition on US data shows that the liquidity terms are significant when shock on prices (asset side) and on volume (liability side) are correlated. Section IV.5 discusses the definition and the design of regulatory reserves. We derive the levels of required capital associated with these reserve accounts. In other words, we provide the bidimensional Probability of Default appropriate to a joint monitoring of solvency and liquidity. Section IV.6 concludes. Proofs are gathered in appendices.

IV.2 The balance sheets and their responses to exogenous shocks on liability

In this section, we consider a simplified balance sheet, which can be impacted by exogenous shocks on the allocation of its liability component. These shocks can be due to the behavior of depositors or of holders of saving accounts for banks, to the lapse and new demand of life insurance contracts for insurance companies, to

the demand and sale by investors for funds, etc. We first describe the balance sheet at date t before the exogenous shock, then the effect of the shock on this balance sheet. Finally, we discuss how the institution can quickly react according to the existing constraints on its credit line. Thus, we assume that contagion and fire sale mechanisms work much faster than banks can adjust their balance sheets. This assumption is compatible with the perimeter of computation of the required capital in which the portfolio allocation is crystallized after the shocks.

IV.2.1 The balance sheet

Let us consider a financial institution (bank, insurance company or fund) with the simplified balance sheet at date t represented in Table IV.1.

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t}$	$L_{1,t}$
	$L_{0,t}$
$x_{0,t}$	0
	Y_t

Table IV.1: Balance sheet at date t with positive cash balance

The asset component of the balance sheet includes:

- a quantity $x_{1,t}$ of an illiquid asset with unitary value $p_{1,t}$. This value can be a market price if this asset is traded on the market, or an actuarial value if this is a bond for instance. Because of the lack of liquidity, trading a large quantity of this asset can quickly have an effect on its unitary value.
- a value of cash $x_{0,t}$. Cash is a riskfree asset with riskfree rate assumed equal to zero.

The liability component of the balance sheet includes:

- $L_{1,t}$, which is the value of the long term part of the debt. We assume that the elements of this debt are far from time-to-maturity and that the debt holders of that debt cannot ask for prepayment. Finally we assume a debt with payment in fine to avoid to account for intermediate coupons.
- $L_{0,t}$ is the part of the debt sensitive to funding liquidity risk. It includes long term debt close to maturity, but also debt whose time-to-maturity is uncertain and whose repayment can be asked for at any time such as deposits.
- 0 is the amount of debt on a credit line with interest rate γ. This is a standard credit line, which can be used without collateral.
- Y_t is the equity, that is the shareholders' (accounting) value.

In the balance sheet of Table IV.1, we assume that the financial institution has a positive quantity of cash and no debt on its credit line. What occurs if the amount of debt in the credit line is strictly positive? Since there is no return on cash and the debt on credit line is costly, there is an arbitrage opportunity and the financial institution has interest in getting the debt on its credit line as small as possible by (partly) reimbursing it in cash. Thus only the balance between cash and debt on credit line matters. If this cash balance $x_{0,t}$ is positive, we get the scheme in Table IV.1. Otherwise, the balance sheet is given in Table IV.2.

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t}$	$L_{1,t}$
	$L_{0,t}$
0	$-x_{0,t}$
	Y_t

Table IV.2: Balance sheet at date t with negative cash balance

Such a balance sheet can be summarized in different ways. For instance:

- the total asset at date t is: $A_t = x_{1,t}p_{1,t} + max(x_{0,t}, 0)$,
- the equity value at date t is:

$$\begin{aligned} Y_t &= A_t - L_{1,t} - L_{0,t} - max(-x_{0,t}, 0) \\ &= x_{1,t}p_{1,t} - L_{1,t} - L_{0,t} + x_{0,t}, \end{aligned}$$

- the leverage or debt/equity ratio is: $\tau_t = \dfrac{L_{1,t} + L_{0,t} + max(-x_{0,t}, 0)}{Y_t}$. This is a "long term" leverage ratio since the asset and debt components have different degrees of liquidity.

IV.2.2 The exogenous shocks and their consequences on the balance sheet (unlimited credit line)

The balance sheet is exposed to exogenous shocks on both prices and quantities. The exogenous shocks on the asset side only concern the unitary value of the illiquid asset: $p_{1,t}$ becomes $p_{1,t+1}$. We define the shock on price:

$$\delta p_{1,t+1} = p_{1,t+1} - p_{1,t}.$$

Since the price is positive, $p_{1,t+1} > 0$, this shock is restricted by:

$$\delta p_{1,t+1} > -p_{1,t}. \tag{IV.1}$$

The exogenous shocks on the liability side concern both the long and short term debts: $L_{1,t}$ becomes $L_{1,t+1}$ and $L_{0,t}$ becomes $L_{0,t+1}$. Similarly to shock on price, we define the shocks on liability:

$$\delta L_{1,t+1} = L_{1,t+1} - L_{1,t}, \tag{IV.2}$$

$$\delta L_{0,t+1} = L_{0,t+1} - L_{0,t}. \tag{IV.3}$$

In next section, these three shocks will be specified as joint random variables. However, the descriptive developed in this section is valid for deterministic or random shocks. Since the book value of a given debt is almost constrained for short period, these shocks are mainly shocks on quantities. These shocks on debts are subject to different restrictions:

$$\delta L_{1,t+1} \equiv L_{1,t+1} - L_{1,t} \geq 0, \tag{IV.4}$$

$$\delta L_{0,t+1} \equiv L_{0,t+1} - L_{0,t} \in [-L_{0,t}, \infty). \tag{IV.5}$$

The constraint (IV.4) states that the long term debt can only increase. This constraint results from the fact that the financial institution may issue new long-term debt (bonds for instance) and that we assume that there is no possible prepayment from the debt holders. On the contrary, the constraint (IV.5) means that the short term debt can either increase, or decrease. Depositors can withdraw or new depositors can step in. The combination of the shocks on the short-term debt and on the long-term debt imply a new demand or supply for cash. In particular, $\delta L_{t+1} = \delta L_{0,t+1} + \delta L_{1,t+1} > -L_{0,t}$, and $L_{0,t}$ is the (maximal) exposure of the institution to funding liquidity risk. Whereas Basel 2 regulation was mainly considering the shocks on prices with direct effects on the asset component (market risk or credit risk), the new Basel 3 and Solvency 2 regulations also consider the shocks on the quantities, with main effects on the liability component. Thus the new regulators have to account for at least bi-dimensional shocks (price vs quantity), and, as a consequence, bi-dimensional risk measure and reserve accounts. [3]

In our simplified framework the shocks on debt admit different interpretations.
i) They can be due to the rollover risk on the debt. When a debt matures, the bank is not necessarily successful in issuing a new debt with the same face value and possibly a different term-to-maturity. There is a debt capacity. This debt capacity may depend on the asset held by the financial institution, which might be seen as collateral [see Shleifer and Vishny (1997) or Acharya et al. (2011)]. When the short term debt is large and the debt capacity becomes small, the rollover risk can become huge [see Morris and Shin (2009) and Appendix D.1 for a comparison].
ii) A part of the long term debt becomes close to maturity, and is transferred from L_1 to L_0. This effects is neglected in our approach where $L_{1,t+1} \geq L_{1,t}$.
iii) We may have demands for an early reimbursement of the debt, depositor runs, or lapses of life insurance contracts (for insurance companies). This a redemption risk.

To summarize the shocks on debt capture a mix of rollover risk and redemption risk without identifying their relative magnitudes. The exogeneity assumption concerning redemption risk is standard in the literature [see e.g. the exogenous Poisson liquidity shocks assumed in He and Xiong (2012a), or the so-called EBIT model in Goldstein et al. (2001) or Hackbarth et al. (2006). The exogeneity assumption for the rollover component corresponds to the assumption of rather illiquid debt market and of exogenous debt capacity.
Due to this rationing on debt issuing, the liquidity needs due to these exogenous shocks on debt will be fulfilled by using sequentially the available cash, the credit line and then some asset sales.
Other assumptions have also to be commented with respect to the literature.
i) There is no exogenous shock on the equity. Typically, if the institution were a hedge fund, we assume that the withdrawal of investors is equal to zero. This other type of redemption risk is disregarded. Symmetrically, we assume that the institution in distress cannot quickly raise new equity.
ii) The interest rate on the credit line is constant and in particular independent of

3. For instance a joint analysis of solvency and liquidity risks, where the shocks are one-dimensional, for instance summarized by a change in the market return only, seems rather inappropriate.

the risk of default of the institution. Thus we disregard the so-called "margin call risk".

Let us first assume that the institution has an unlimited credit line. After these shocks on debts, the institution can have enough cash to offset the potential short term debt withdrawals. Otherwise, this institution will withdraw on its credit line with a rate $\gamma > 0$, keeping crystallized the quantity invested in illiquid assets. Just after these shocks, the cash balance becomes: [4]

$$\tilde{x}_{0,t+1|t} \equiv x_{0,t} + \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1},$$

where the index notation $t+1|t$ conditional on t mentions that the allocation $x_{1,t}$ is crystallized. This cash balance measures the mismatch between short term debt and short term asset [5] after the liquidity shock, but does not account for the cost of the credit line. The cost adjusted cash balance is:

$$x_{0,t+1|t} = \begin{cases} \tilde{x}_{0,t+1|t}, & \text{if } \tilde{x}_{0,t+1|t} \geq 0, \\ (1+\gamma)\tilde{x}_{0,t+1|t}, & \text{if } \tilde{x}_{0,t+1|t} < 0, \end{cases}$$

assuming that the interest on the credit line is immediately paid. The new balance sheets are given in Tables IV.3 or IV.4 depending on the sign of the cash balance.

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t+1}$	$L_{1,t+1}$
	$L_{0,t+1}$
$x_{0,t} + \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1}$	0
	$Y^*_{t+1\|t}$

Table IV.3: Balance sheet at date $t+1$ with positive cash balance

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t+1}$	$L_{1,t+1}$
	$L_{0,t+1}$
	$-(1+\gamma)(x_{0,t} + \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1})$
	$Y^*_{t+1\|t}$

Table IV.4: Balance sheet at date $t+1$ with negative cash balance

We deduce the expression of the equity value:

$$\begin{aligned} Y^*_{t+1|t} &= x_{1,t}p_{1,t+1} + x_{0,t} - L_{1,t} - L_{0,t} - \gamma\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}\right)^+, \\ &= Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} - \gamma\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}\right)^+. \end{aligned} \tag{IV.6}$$

4. For the sake of simplicity, we do not consider that illiquid asset are bearing cash-flows (coupons, dividends...). Considering also an income statement would burden formulas without changing our results. For instance, if one unit of illiquid asset is assumed to generate a cash-flow d, the cash balance equation becomes: $\tilde{x}_{0,t+1|t} = x_{0,t} + \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} + dx_{1,t}$. The calibration of shocks has also to be adapted to take into account this cash-flow feature.

5. which differs from the mismatch before the shock, equal to $x_{0,t} - L_{1,t}$.

This value $Y^*_{t+1|t}$ is generally different from Y_{t+1}, since the institution has not yet adjusted its portfolio allocation (especially $x_{1,t}$) to take into account the change in prices, that is the market risk. If the interest rate γ on the credit line is equal to zero, the changes in the liability components are neutral for the institution and the change in equity value is just the change in the value of the risky part of the portfolio, that is, $x_{1,t}(p_{1,t+1} - p_{1,t})$. If γ is strictly positive, there is a cost for the lack of cash proportional to the need for cash.
As noted above, this future equity value is for a portfolio which is partially crystallized, since the quantity of illiquid asset has been kept fixed.

IV.2.3 The exogenous shocks and their consequences on the balance sheet (limited credit line)

Let us now extend the analysis by considering a limited credit line: the bank can not borrow more than a given amount M, say, at rate γ. The size of the credit line is assumed fixed. At a first sight, we might have in mind the possibility of the central bank to provide quickly liquidity (with or without collateral). However we do not have this perspective. Indeed the aim of our analysis is to introduce specific reserve accounts for liquidity issues and then to avoid such immediate intervention of the central bank.

In order to include this new feature, we need to enable the bank to sell its illiquid asset. This fire sale is done with an haircut denoted by H (with $0 < H < 1$) assumed independent of the size of the sale, and of the price. Thus the value of a fire sale differs from its accounting value.
As previously, the bank is not short of cash when:

$$x_{0,t} + \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} \geq 0.$$

When the bank is short of cash, two regimes can arise. They depend on the position of the liquidity shortage $-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}$ with respect to the limit $\tilde{M} = M/(1+\gamma)$ of the credit line including the immediate payment of interest. If $-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} < \tilde{M}$, the credit line is large enough to satisfy both the need for cash and the payment of the interest on the credit line; the new balance sheet is similar to the balance sheet corresponding to an unlimited credit line. If the liquidity shortage is higher than $\tilde{M}$, the bank covers the cash balance by selling illiquid asset. The quantity of illiquid asset needed is:

$$\frac{-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M}}{H p_{1,t+1}}. \tag{IV.7}$$

The new balance sheet is given in Table IV.5.

Therefore, the equity value becomes:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^*_{t+1|t} = Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} - \gamma min\left[\tilde{M}; (-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1})^+\right] \\ - \left(\frac{1}{H} - 1\right)\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M}\right)^+. \end{aligned} \tag{IV.8}$$

To meet its liquidity shortage, why does the bank use first the credit line and then sell the illiquid asset? Actually, we have implicitly assumed that the cost of the hair-

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t+1} - \frac{1}{H}\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M}\right)$	$L_{1,t+1}$
	$L_{0,t+1}$
0	$(1+\gamma)\tilde{M}$
	$\tilde{Y}^*_{t+1\|t}$

Table IV.5: Balance sheet at date $t+1$ with the activation of the credit line and the sale of the illiquid asset

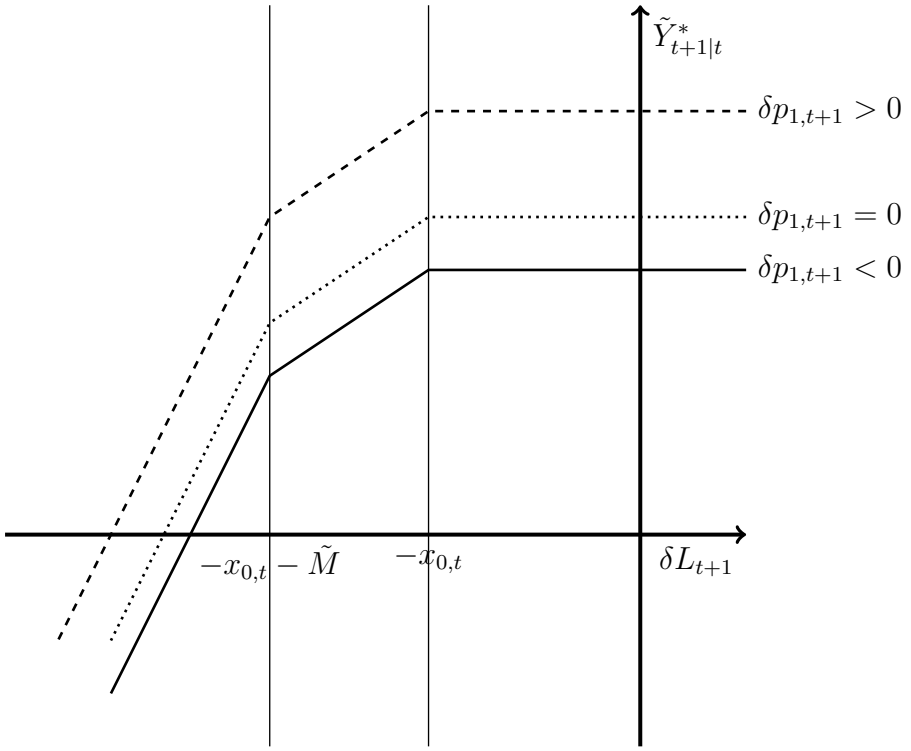


Figure IV.1: Equity Value with Tranches on the Liquidity Shortage (with $x_{0,t} > 0$)
Solid (respectively, dotted and dashed) line is the equity value as a function of the liquidity shock for a negative (respectively, null and positive) shock on price.

cut on selling illiquid asset, $\frac{1}{H} - 1$, is larger than the interest rate of the credit line γ, so that selling illiquid assets first and then using the credit line is sub-optimal. As noted above, this simplified sequence to meet the liquidity shortage does not take into account the possibility to get liquidity via the Central Bank by using illiquid asset as collateral. In fact we simply assume that such a possibility will be opened after the use of the reserve accounts introduced for liquidity risk.
By comparing the expressions of $\tilde{Y}^*_{t+1|t}$ with limited credit line [see eq. (IV.8)] and unlimited credit line [see eq. (IV.6)], we see that the call on liquidity shortage with strike 0 is now replaced by a combination of tranches written on the liquidity shortage, taking into account the different marginal costs of liquidity (see Figure IV.1). Each tranche corresponds to a level of financial vulnerability of the institution.

For small liquidity shortage ($\tilde{M} = M = \infty$), the two expressions are equal. For large liquidity shortage with a limited credit line, the cost is higher since selling

illiquid assets (with an haircut) may heavily penalize the equity value.

It may even occur that the liquidity shortage is so large that the bank has not enough illiquid assets to sell to reimburse its funding needs. This regime arises when:

$$\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M}\right)^+ > x_{1,t}(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1})H.$$

In this situation, the bank sells all its illiquid asset and then defaults: the debts are not repaid in full and the equity value is zero, $Y^*_{t+1|t} = 0$, under the assumption of limited liability of the shareholders.

Combining the different cases, the equity value of the bank is:

$$Y^*_{t+1|t} = \tilde{Y}^*_{t+1|t} \mathbb{1}_{\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M}\right)^+ < x_{1,t}(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1})H}.$$

IV.3 Profit and Loss (P&L) distribution (unlimited credit line)

From Equation (IV.6), the P&L is given by:

$$Y^*_{t+1|t} = Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} - \gamma\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}\right)^+. \tag{IV.9}$$

If $\gamma = 0$, we get the standard P&L computed as if the liability component of the balance sheet and the allocations of the asset component were crystallized. In this case, the price change $\delta p_{1,t+1}$ is the only variable which is unknown at date t and generates the uncertainty of the P&L. This is the framework of Basel 2.

If $\gamma > 0$, an additional component captures the cost of cash. This component is uncertain, since both $L_{1,t+1}$ and $L_{0,t+1}$ are stochastic too.

The P&L distribution can be summarized in different ways. In particular, it is possible to disentangle the asset (price) and liability (quantities) components of the risk, or to focus on the need for cash.

IV.3.1 Decomposition of the Value-at-Risk

Let us first consider the VaR associated with the P&L. This $VaR_t(\alpha, \gamma)$ is such that:

$$\mathbb{P}_t\left[Y^*_{t+1|t} < -VaR^\alpha_t(\gamma)\right] = \alpha,$$

where $\mathbb{P}_t$ denotes the probability conditional on the information available at date t and α is the risk level, set at 1% or 5%. This risk measure accounts for the uncertainty on both price p_1 and quantities L_1 and L_0. When $\gamma = 0$, $VaR^\alpha_t(0)$ is such that:

$$\mathbb{P}_t\left[Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} < -VaR^\alpha_t(0)\right] = \alpha.$$

$VaR_t(\alpha, 0)$ is the standard VaR at risk level α under Basel 2, which accounts for price change only. Moreover, since the P&L depends negatively on the rate γ on the credit line, by construction we get:

$$VaR^\alpha_t(\gamma) > VaR^\alpha_t(0), \quad \forall \alpha.$$

Thus the VaR at short horizon, $VaR_t^\alpha(\gamma)$ can be decomposed as:

$$VaR_t^\alpha(\gamma) = VaR_t^\alpha(0) + \left[VaR_t^\alpha(\gamma) - VaR_t^\alpha(0)\right],$$

where $VaR_t^\alpha(0)$ is the standard VaR and the non-negative difference $VaR_t^\alpha(\gamma) - VaR_t^\alpha(0)$ provides the additional cost in terms of VaR of the exogenous shocks on the liability component of the balance sheet. Even if $VaR_t^\alpha(\gamma)$ is an interesting measure of risk on the P&L, we will see in Section IV.5 that it does not provide enough information to define and manage the required capitals needed for hedging the liquidity and solvency risks, in a consistent manner.

IV.3.2 The need for the credit line

By analogy with the regulation of default risk, we can summarize the need for cash by considering the probability of using the credit line (this is the analogue of the probability of default) and the expected use of this credit line when it is used (this is the analogue of the expected loss given default). The probability of use is:

$$PU_t = \mathbb{P}_t\left[x_{0,t} + \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} < 0\right],$$

and the expected use given use is:

$$EUGU_t(\gamma) = (1+\gamma)\mathbb{E}_t\left[-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}| - x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} > 0\right].$$

IV.3.3 Illustration

Let us illustrate how these summary statistics of the risks, that are the VaR, the PU and the EUGU, depend on the initial situation of the bank and on the distribution of the shocks on price and quantity. To facilitate the comparison with the standard literature and to get closed form expressions, we assume Gaussian shocks. With such a Gaussian specification, we do not take into account the different inequality restrictions existing for the price and the short term and long term debts [see the constraints of Equations (IV.1), (IV.4) and (IV.5) on the exposures to funding liquidity risk). Only the total change in debt matters. Thus the Gaussian assumption is:

$$\begin{pmatrix} \delta p_{1,t+1} \\ \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_p \\ \mu_L \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & \rho\sigma_p\sigma_L \\ \rho\sigma_p\sigma_L & \sigma_L^2 \end{pmatrix}\right).$$

The initial situation of the bank at date t is characterized by the allocation $x_{0,t}$, $x_{1,t}$ and by the equity value Y_t.

Value-at-Risk

Let us first consider the Value-at-Risk. It is proved in Appendix D.2, that $VaR_t^\alpha(\gamma)$ is the solution of:

$$\alpha = \mathbb{E}_t\left\{\Phi\left(\frac{\gamma(-x_{0,t} - \mu_L - \sigma_L U)^+ - VaR_t^\alpha(\gamma) - Y_t - x_{1,t}\left(\mu_p + \rho\sigma_P U\right)}{x_{1,t}\sigma_p\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right\}, \tag{IV.10}$$

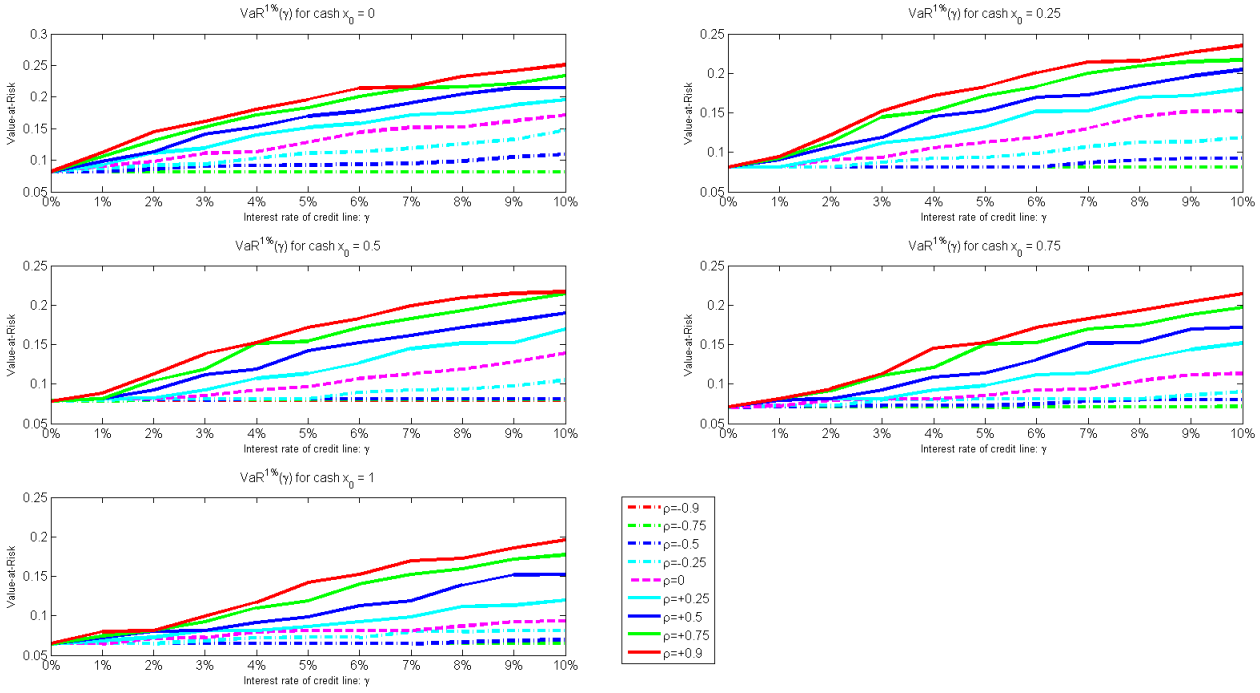


Figure IV.2: Values of the VaR for different values of γ, ρ and different levels of cash.

where U is a standard normal variable independent of the information available at date t.

When $\gamma = 0$, this equation simplifies to the standard formula of a Gaussian VaR:

$$\alpha = \Phi\left(\frac{1}{\sigma_p}\left(\frac{-VaR_t^\alpha(0) - Y_t}{x_{1,t}} - \mu_p\right)\right),$$

which is equivalent to:

$$VaR_t^\alpha(0) = -Y_t - x_{1,t}\left(\mu_p + \sigma_p \Phi^{-1}(\alpha)\right).$$

Otherwise, the value $VaR_t^\alpha(\gamma)$ has to be computed numerically.

As an illustration, let us consider the following situation:

The general size of the balance sheet is given by $L_{1,t}+L_{0,t} = 100$ and $Y_t = 5$. The volume of liquid asset, $x_{0,t}$, varies from 0 to 1 (with a step of 0.25). We normalize the unitary value of illiquid asset by setting $p_{1,t} = 1$, so that the volume of illiquid asset $x_{1,t}$ is deduced from the previous balance sheet components. For simplicity, we consider a dynamics of shocks without drift by setting $\mu_L = \mu_p = 0$. The correlation ρ ranges between -0.9 and $+0.9$. The last parameters are the variance of shocks : σ_L and σ_p. We set σ_L to get a probability of use of the credit line PU (see below) equal to 0.1%. We set $\sigma_p = \sigma_L/(L_{1,t} + L_{0,t}) = \sigma_L/100$ to get similar risks on the asset and liability sides.

Figure IV.2 displays the sensitivity of the VaR at 1% for various situations. The 5 panels provide the evolution of the VaR with respect to the interest rate γ for a given volume of cash and a given correlation ρ. The VaR seems rather linear in the interest rate γ, or even constant. The slope of this quasi linear function can be

Corr. Cash	$x_0 = 0$	$x_0 = 0.25$	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0.75$	$x_0 = 1$
$\rho = -0.90$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho = -0.75$	0.2	0.3	0.8	0.6	0.0
$\rho = -0.50$	25.5	10.1	2.5	7.9	4.5
$\rho = -0.25$	60.2	34.2	23.9	18.0	15.0
$\rho = 0$	81.9	65.0	55.0	38.4	26.3
$\rho = +0.25$	103.9	90.3	82.6	73.7	50.1
$\rho = +0.50$	121.1	112.2	100.9	91.6	79.9
$\rho = +0.75$	139.1	123.6	123.1	114.8	102.5
$\rho = +0.90$	154.0	139.8	125.7	130.3	119.9

Table IV.6: The Sensitivity of $VaR^{1\%}(0)$ with respect to γ.

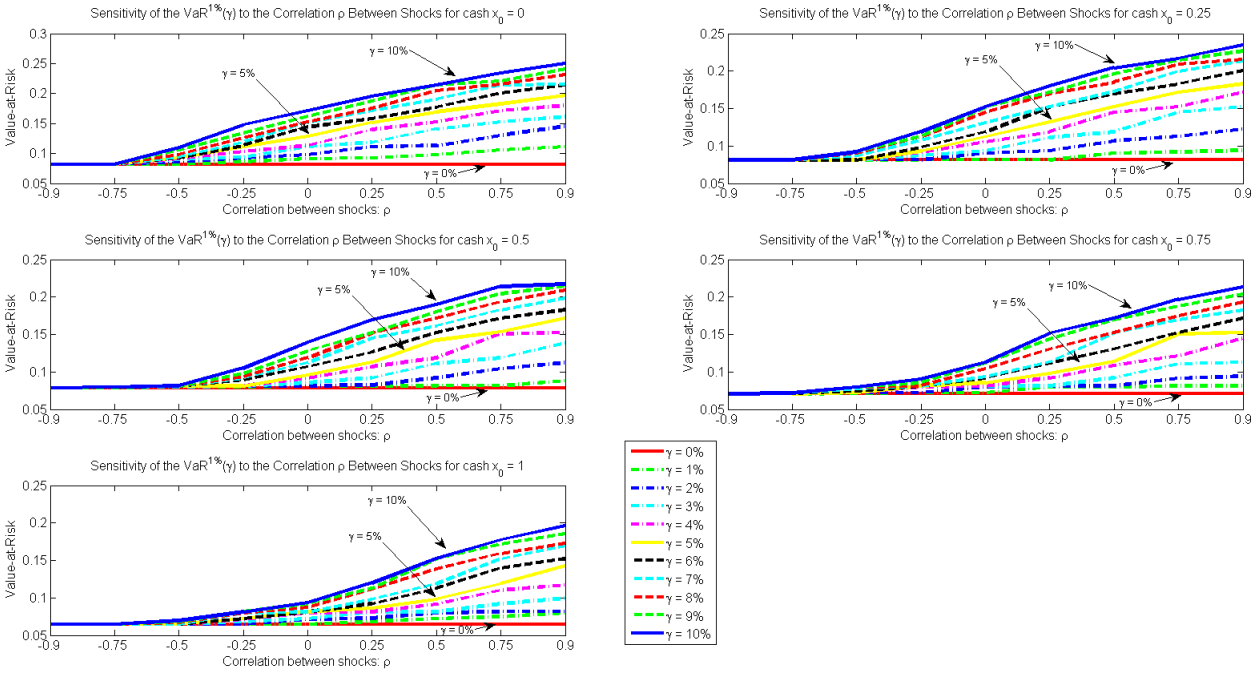


Figure IV.3: Evolution of the $VaR^{1\%}(\gamma)$ with respect to the Correlation Between Asset and Liability Shocks.

approximated by considering the Taylor expansion of the VaR in a neighborhood of $\gamma = 0$, or equivalently by computing the sensitivity of the VaR to the credit line interest rate $\dfrac{\partial VaR_t^\alpha(0)}{\partial \gamma}$. We have (see Appendix D.3):

$$\frac{\partial VaR_t^\alpha(0)}{\partial \gamma} = \mathbb{E}\left[(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1})^+ | - Y_t - x_{1,t}\delta p_{1,t+1} = VaR_t^\alpha(0)\right].$$

The values of this sensitivity are provided in Table IV.6.

We provide in Figure IV.3 the evolution of the VaR with respect to the correlation between asset and liability shocks with different values of γ. Each panel displays the results for a given level of cash. We observe a non-linear response to the correlation between the shocks as well as a spreading of the VaR for various interest rates when the correlation is high. When the shocks are anti-correlated, the interest rate does

not matter so much since there is a diversification between the asset and liability risks.

Need for cash

Let us finally consider the need for cash. In a Gaussian framework (see Appendix D.2), the probability of use PU_t and the expected use given use $EUGU_t$ of the credit line are:

$$PU_t = \Phi\left(\frac{-x_{0,t} - \mu_L}{\sigma_L}\right),$$

and

$$EUGU_t(\gamma) = -(1+\gamma)\left(x_{0,t} + \mu_L - \sigma_L \frac{\varphi\left(\frac{-x_{0,t} - \mu_L}{\sigma_L}\right)}{\Phi\left(\frac{-x_{0,t} - \mu_L}{\sigma_L}\right)}\right),$$

where Φ (resp., φ) is the cumulative density function (resp., probability density function) of a standard Gaussian distribution and the Mill's ratio φ/Φ captures the selectivity bias [see Heckman (1979)]. Whereas the total VaR [see eq. (IV.10)] depends on the joint distribution of the risks on price and quantities, the PU and $EUGU$ summary statistics are specific to the funding liquidity risk and only depend on the distribution of δL.

IV.4 P&L distribution (limited credit line)

The standard VaR is introduced to measure default risk, but is a too global measure. This measure does not distinguish the solvency and liquidity features, but also the ex-ante and ex-post solvency risks. A careful analysis requires a precise description of the different regimes of distress.

IV.4.1 Description of the regimes

From equations (IV.7) and (IV.8), the P&L is given by:

$$\begin{aligned} Y^*_{t+1|t} = \Big(& Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} - \gamma min\left[\tilde{M}; (-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1})^+\right] \\ & - \left(\frac{1}{H} - 1\right)(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M})^+\Big)\mathbb{1}_{\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M}\right)^+ < x_{1,t}p_{1,t+1}H}. \end{aligned}$$

Different regimes may occur depending on the magnitude of asset and liability shocks. We index the regimes with ratings measuring the degree of liquidity and solvency distress of the financial institution. First, we identify four regimes for liquidity, according to the differences between the need for cash and the resources of cash:

- $\mathcal{R}^\ell(AA)$: if $-x_{0,t} < \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1}$, the bank has enough cash to absorb the liquidity shock. There is no need to activate the credit line or to sell illiquid assets.
- $\mathcal{R}^\ell(A)$: if $-x_{0,t} - \tilde{M} < \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} < -x_{0,t}$, the bank activates the credit line. The cash provided by the credit line is sufficient to meet the liquidity need of the bank.

- $\mathcal{R}^{\ell}(B)$: if $-x_{0,t} - \tilde{M} - x_{1,t}H(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}) < \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} < -x_{0,t} - \tilde{M}$, the credit line is fully activated and there is enough illiquid asset to be sold.
- $\mathcal{R}^{\ell}(D)$: if $\delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} < -x_{0,t} - \tilde{M} - x_{1,t}H(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1})$, even with a full activation of the credit line and selling all the illiquid asset, the bank cannot gather enough cash to meet its liquidity requirement. In this situation, the bank will default for liquidity reasons.

Second, two solvency regimes can be defined depending on the sign of the equity.

- $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(A)$: if $\Big(Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} - \gamma min\left[\tilde{M}; (-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1})^+\right] - \Big(\frac{1}{H} - 1\Big)(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M})^+\Big) > 0$, the bank is solvent.
- $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(D)$: if $\Big(Y_t + x_1\delta p_{1,t+1} - \gamma min\left[\tilde{M}; (-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1})^+\right] - \Big(\frac{1}{H} - 1\Big)(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M})^+\Big) < 0$, the bank is insolvent.

The solvency regimes are defined ex-post, once the demand for liquidity has been satisfied. These regimes differ from the ex-ante solvency regimes usually considered in Basel 2 regulation. These ex-ante solvency regimes would depend on the sign of the ex-ante equity: $Y^{\star\star}_{t+1} = x_{1,t}p_{1,t+1} + x_{0,t} - L_{1,t+1} - L_{0,t+1}$. In particular, these is an intermediate situation for which the bank is ex-ante solvent, but can fail because of a funding liquidity shock [see Rochet and Vives (2004)].

The liquidity and solvency dimensions are crossed to define up to 7 regimes. We denote $\mathcal{R}$(liquidity rating, solvency rating) the regime where $\mathcal{R}^{\ell}$(liquidity rating) and $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}$(solvency rating) overlap. Let us describe these regimes:

- Regime $\mathcal{R}(AA, A)$: the bank is solvent and has enough cash to face the liquidity shock. This regime corresponds to a business-as-usual situation.
- Regime $\mathcal{R}(A, A)$: the bank is solvent, but has to activate a part of its credit line to meet its liquidity need. This situation is typical of a negative shock on the asset liability side combined with a normal (or positive) situation on the asset side.
- Regime $\mathcal{R}(B, A)$: the bank is solvent, but its liquidity need is so important that the credit line is not sufficient. To cover its need for cash, the bank is forced to sell a fraction of its illiquid assets with an haircut. This situation arises when the liability shock is huge while there is a significant gain-in-value on the illiquid asset. In fact, to remain solvent even with selling its illiquid asset, it is necessary that the illiquid asset has a sufficiently high price.
- Regime $\mathcal{R}(AA, D)$: the bank is insolvent without any cash difficulties. This regime reflects a severe loss on illiquid asset. The default is only due to a pure solvency matter: the liquidity effect is not involved.
- Regime $\mathcal{R}(A, D)$: the bank is insolvent and meets its liquidity need by activating its credit line. The default is at first glance due to solvency imbalance. However, it may happen that the imbalance derives from the additional cost generated by the activation of the credit line. This cost is the interest of the credit line γ which captures the cost of time.
- Regime $\mathcal{R}(D, D)$: the bank is insolvent and unable to meet its liquid need even with activating its credit line and selling all its illiquid assets. In this situation, the solvency reason and the liquidity reason are intertwined to account for the default. It is typically the case when the bank suffers from both a large

liquidity shock (e.g. massive deposit withdraw) and a large asset shock (e.g. massive drop in price of illiquid asset).

- Regime $\mathcal{R}(B, D)$: the bank is insolvent, but meets its liquidity needs. As for Regime $\mathcal{R}(A, D)$, the liquidity may have played a role (through the additional cost induced by the activation of the credit line), but the default is mainly due to solvency matter. This situation may be characteristic of a bank that sells so much of its illiquid asset that it becomes insolvent. The withdrawing creditors have been fully repaid while the staying creditors suffer a loss: it is the "first-come, first-served" principle.

The Regime $\mathcal{R}(D, A)$ is impossible. Indeed if the bank is in default for a liquidity reason, its ex-post equity is negative and it is automatically also insolvent.

This result is compatible with the observation that firms can be in default due to a liquidity shortage, whereas still in good health when the default risk is measured by the standard distance-to-default implemented by the Moody's KMV corporation [see e.g. Davydenko (2012)]. Indeed the distance-to-default is based on the asset value $x_{1,t}p_{1,t+1}$ evaluated at the market price prior to liquidity shocks and for the crystallized allocation, which does not account for the potential sale of a fraction of the portfolio to finance the need for cash (see Section IV.5.1). This asset value, often called fundamental value of the firm in the literature [Leland and Toft (1996), Brunnermeier and Pedersen (2009), He and Xiong (2012b), He and Xiong (2012a)], is prior to liquidity shocks. In our framework the financial institution has first to fulfill the need for cash, and the solvency is treated ex-post, that is, after this liquidity step. It is important to distinguish the ex-ante and ex-post notions of solvency, that is, before and after the treatment of this "senior debt" to be immediately reimbursed.

Proposition IV.1 (Number of regimes)**.** *The seven regimes arise if and only if* $Y_t < x_{1,t}p_{1,t} + \gamma\tilde{M}$ *and* $L_{0,t} > x_0 + \tilde{M}$*.*

Proof. See Appendix D.5. □

The two conditions are written on the initial structure of the balance-sheet. The first condition corresponds to the usual balance sheet of a financial institution: the equity is a small fraction of the liability while most assets are risky. The second condition means that the financial institution cannot face a complete withdrawal of its short-term funding with its cash and its credit line only.[6] Figure IV.4 represents the seven regimes with the shock on total debt on the $x-$axis and the shock on price on the $y-$axis. The dashed lines represent the frontiers of liquidity regimes (activation of the credit line, selling of the illiquid assets, depletion of illiquid assets to sell) while the solid red line represents the solvency frontier: above this frontier, the bank is solvent and the bank is insolvent, otherwise. Dotted lines are extensions of lines out of the feasible set.

When the credit line is activated (in the center of Figure IV.4), the slope of the solvency line is proportional to γ: this slope captures the cost of time. When the bank sells illiquid asset (on the left part of Figure IV.4), the slope of the solvency line is higher: the increase is proportional to $\frac{1-H}{H} - \gamma$, and captures the cost of market illiquidity.

6. The other cases are discussed in Appendix D.5.

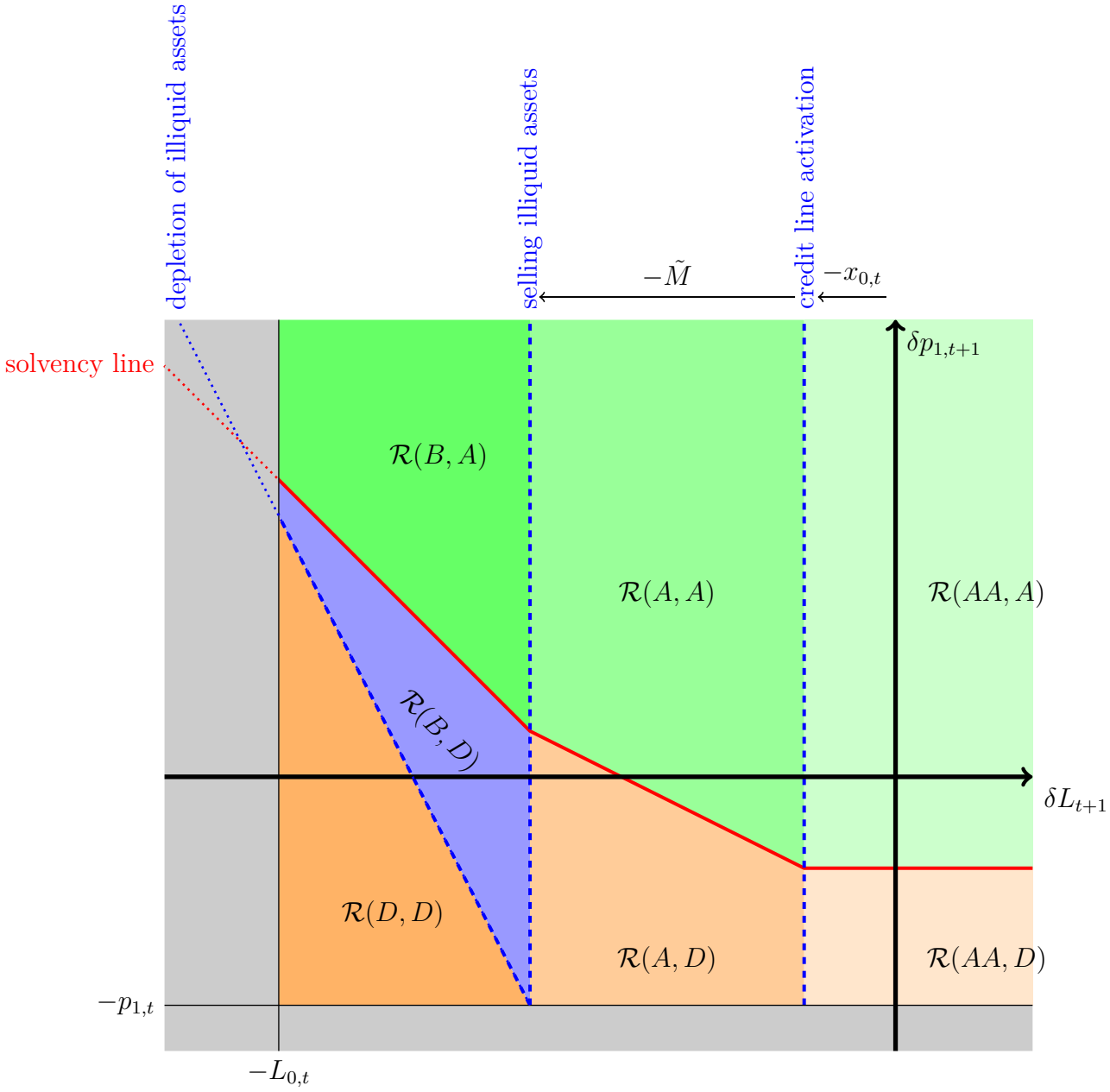


Figure IV.4: 7 Regimes with Limited Credit Line

IV.4.2 Decomposition of the Value-at-Risk

Let us consider the VaR associated with the P&L. Comparing to the case with unlimited credit line, the VaR now depends on three parameters, which are the two costs of liquidity shortage, γ and $1/H$, and the size M of the credit line. This $VaR_t^\alpha(\gamma, M, H)$ is such that:

$$\mathbb{P}_t\left[Y^*_{t+1|t} < -VaR_t^\alpha(\gamma, M, H)\right] = \alpha,$$

where $\mathbb{P}_t$ denotes the probability conditional on the information available at date t. This risk measure accounts for the uncertainty on both price p_1 and quantities L_1 and L_0.

When $M = \infty$, the VaR has been decomposed into two terms: the standard VaR (without liquidity feature) and a term accounting for liquidity risk. When $M < \infty$, the liquidity risk generates two terms for the use of the credit line and for the sale of illiquid asset, respectively. The $VaR_t^\alpha(\gamma, M, H)$ is decomposed as:

$$\begin{aligned} VaR_t^\alpha(\gamma, M, H) = & VaR_t^\alpha(0, \infty, H) \\ & + \left[VaR_t^\alpha(\gamma, \infty, H) - VaR_t^\alpha(0, \infty, H)\right] \\ & + \left[VaR_t^\alpha(\gamma, M, H) - VaR_t^\alpha(\gamma, \infty, H)\right]. \end{aligned} \tag{IV.11}$$

The first term, $VaR_t^\alpha(0, \infty, H)$ is the standard VaR under Basel 2, which accounts for price change only. The second term: $VaR_t^\alpha(\gamma, \infty, H) - VaR_t^\alpha(0, \infty, H)$, is non-negative and represents the additional cost associated with an unlimited credit line. The third term: $VaR_t^\alpha(\gamma, M, H) - VaR_t^\alpha(\gamma, \infty, H)$, represents the additional cost when selling illiquid asset due to the limitation of the credit line. This term is non-negative as far as interest rate γ is lower than the opportunity cost $\frac{1-H}{H}$.

This decomposition (IV.11) of the VaR interpreted as the global cost of default is the analogue in the physical world of the common practice of decomposing the firm's credit spread into a "liquidity premium" and a "default premium" components [see e.g. Longstaff et al. (2005), Beber et al. (2009), Schwarz (2009)]. Such an additive decomposition of a credit risk premium has been criticized, since it cannot capture the price of interaction between liquidity and solvency risks. A similar criticism is applied to decomposition (IV.11). The mistake is to use a global VaR to measure a bivariate risk.[7] We explain in Section 5 how to solve this problem.

IV.4.3 The need for the credit line

As previously, we can define the probability of use of the credit line PU_t and the expected use given use $EUGU_t$:

$$PU_t = \mathbb{P}_t\left[0 < -x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}\right],$$

and the expected use given use is:

$$EUGU_t = (1+\gamma)\mathbb{E}_t\left[-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} | 0 < -x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} < \tilde{M}\right].$$

7. The same argument applies to either global measure of risk such as the expected shortfall, or, for systemic risk, the CoVaR [Adrian and Brunnermeier (2011)], or the SRISK measure [Acharya et al. (2012)]. The scalar measure of systemic risk is mixing solvency and liquidity risk, with their interaction [see Pierret (2014) for looking for these components of SRISK].

Since the credit line is limited, we have:

$$EUGU_t \leq (1+\gamma)\tilde{M} = M.$$

IV.4.4 The need to sell illiquid asset

We can also introduce the probability to sell illiquid assets (or equivalently the probability that the credit line is not sufficiently large) PS_t and the expected volume of illiquid asset to be sold $ESGS_t$.

The probability to sell illiquid assets is:

$$PS_t = \mathbb{P}\left[\tilde{M} < -x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}\right],$$

and the expected volume of illiquid asset to be sold is:

$$ESGS_t = \frac{1-H}{H}\mathbb{E}\left[-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M}\middle|\tilde{M} < -x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} < \tilde{M} + x_{1,t}p_{1,t+1}H\right].$$

The limitation on the volume of illiquid asset to sell leads us to define the probability that the bank goes bankrupt for liquidity shortage PB_t. We have:

$$PB_t = \mathbb{P}\left[\tilde{M} + x_{1,t}p_{1,t+1}H < -x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}\right].$$

The events defining the probabilities of use PU_t, of sale PS_t and of bankruptcy PB_t are nested and then we get:

$$PB_t < PS_t < PU_t.$$

For instance, the expected use of the credit line is: $EU_t = (PU_t - PS_t) \times EUGU_t$.

These summary statistics are detailed in the Gaussian case in Appendix D.4.

IV.4.5 Illustration

We calibrate the stylized balance sheet and shocks on financial reports and standard statistics on US data to show how the tools can be used.

Data and calibration strategy

To get a representative balance sheet, we consider the average of the 5 largest US banks at 03/31/2014: JP Morgan Chase, Bank of America, Citigroup, Wells Fargo and Goldman Sachs. Building on their Consolidated Financial Statements for Holding Companies (see "FR Y-9C reports" on www.ffiec.gov.), we identify the main items of the balance sheet considering a one-year horizon to distinguish short-term assets from long-term assets (debts). Cash regroups asset with residual maturity less than 1 year [8] whereas illiquid assets are all others assets: loans, debt securities

8. This category gathers "noninterest bearing balances and currency and coin" (item BHCK 0081), "Interest bearing balances in US Offices BHCK" (item BHCK 0395), "Interest bearing balances in foreign offices" (item BHCK 0397), "Federal Funds sold in domestic offices" (item BHDM B987) and "Debt security of remaining maturity less than 1 year" (item BHCK 0383).

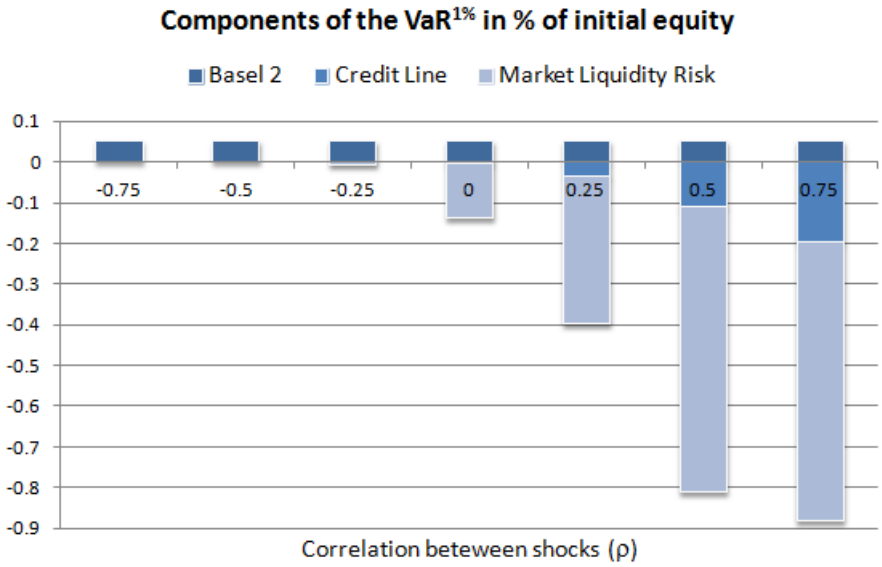
of remaining maturity more than 1 year... We normalize the price setting $p_{1,t} = 1$. The short-term debt is composed of federal funds, repo, deposits, commercial papers and borrowing with a remaining maturity less than 1 year. [9] The long-term debt is deduced as total debt minus short-term debt. Equity consists in total equity capital. In the end, cash represents about 15% of total asset, illiquid asset about 85%, short-term debt about 19%, long-term debt about 71% and equity about 10%. Figures are provided in billions of USD. The credit line is not clearly identifiable in the reports. As we expect banks to provide liquidity (rather than expecting to need it), we set the cap of the credit line to 10% of the current cash. The interest rate of the credit line is set to 1%.

For the sake of simplicity, shocks on price and on short-term debt volume are assumed Gaussian. These shocks are calibrated independently. The correlation parameter will be a degree of freedom in our analysis. The shock on price ensures a return-on-asset of 0.19% and a probability of default of 1% (considering no shock on debt). The return-on-asset corresponds to the total net income over the total assets at 03/31/2014. Calibration of the liability shocks is based on the Liquidity Coverage Ratio (LCR) [see Basel Committee on Banking Supervision (2013a)]. The LCR definition proposes several monthly run-off rates for various classes of liabilities in case of stress situations. Depending on the source of funding, run-off rates vary from 2% to 50%. Since the short-term debt category regroups various liability items, we use a mean run-off rate of 10%. Moreover, our horizon is one year and we apply this central run-off rate during 12 months to get a run-off rate at a one year horizon of 72%. We consider that this run-off rate is met with a probability of 1% (assuming no shock on price). Thus, the probability that the short-term debt is lower than 28% of its initial value is 1%, which is also the probability of default used for price shock. The short-term debt is not expected to grow. We consider that the long-term debt is constant over the exercise. The LCR definition provides us insights on haircuts. A 50% haircut is assigned to the least liquid assets ("Level 2B assets"). For comparison, Gorton and Metrick (2012) indicate haircuts up to 45% on repo operations where collateral is usually composed of high quality assets. Since our illiquid asset category covers a large set of assets (namely loans), we adopt a haircut of 50%.
We run 1,000,000 Monte Carlo simulations with the correlation between shocks, ρ, varying between -0.75 to $+0.75$.

VaR decomposition

We decompose the $VaR^{1\%}$ into three terms: the usual Basel 2 VaR, an additional term stemming from using the credit line and an additional term accounting for market liquidity risk. The Basel 2 VaR is insensitive to liquidity dimension and usually computed to set solvency reserve. The two additional terms may be used to set reserve to control for liquidity risks. Figure IV.5 presents the decomposition

9. This category gathers "Federal funds purchased in domestic offices" (item BHDM B993), "Securities sold under agreements to repurchase" (item BHCK B995), "Brokered deposits less than 100K$ with a remaining maturity less than 1 year" (item BHDM A243), "Time Deposits of more than 100K$ with a remaining matutiry less than 1 year" (item BHDM A242), "Foreign office time deposits with are remaining maturity less than 1 year" (item BHFN A245), "Commercial Papers" (item BHCK 2309) and "Other borrowed money with a remaining maturity less than 1 year" (item BHCK 2332).



Note: when $\rho = -0.75$, the $VaR^{1\%}$ represents about 0.5% of initial equity (i.e., PnL wipes out more than 99.5% with a probability of 1%) and is only composed of the Basel 2 term. When $\rho = 0.75$, the $VaR^{1\%}$ represents about -0.9% of initial equity (i.e., losses represent 100.9% of initial equity with a probability of 1%) and losses due to market liquidity risk account for about 0.7% of initial equity.

Figure IV.5: Value of VaR components for different values of ρ (in % of initial equity).

of the $VaR^{1\%}$ normalized by initial equity for ρ varying from -0.75 to $+0.75$. As correlation increases, the two last components of the VaR become larger. For positive correlation, these components become larger than the usual VaR. When shocks are highly correlated ($\rho = +0.75$), these components represent about 1% of the initial equity.

Probabilities of default

Let us now aggregate the 7 regimes identified in Figure IV.4 into two situations of distress –liquidity default for regimes $\mathcal{R}(D, D)$ and $\mathcal{R}(B, D)$ and solvency default for regimes $\mathcal{R}(A, D)$ and $\mathcal{R}(AA, D)$– and one situation of non-default. The three situations are presented in Figure IV.6. The x-axis (y-axis) is the shock on liability (respectively, illiquid asset price). Each point indicates the outcome of one simulation. The two vertical lines indicates the activation of the credit line and the sale of illiquid asset, respectively. Green circles indicate outcomes where the institution is solvent, red stars represent insolvency situation and blue crosses are default due to liquidity. Liquidity defaults are concentrated on the bottom left area, where there are adverse shocks on liability and price. Solvency defaults are concentrated on the bottom right area where price shocks are very adverse and liability shocks are regular. When the correlation is negative (top panel), there is a diversification effect leading to no liquidity default. When the correlation is zero (middle panel), defaults are almost solvency defaults. When the correlation is positive (bottom panel), there is a significant number of liquidity defaults.

Then, we deduce the Liquidity Probability of Default and the Solvency Probability of Default. Since the regimes do not overlap, the standard probability of default is the sum of these two probabilities. Figure IV.7 reports the two probabilities of default as function of the correlation between shocks. We get a bent profile. When the correlation is negative, the probability of default is flat and the probability of default for liquidity is zero. When the correlation becomes positive, the (total) probability of default increases.

IV.5 The reserves for solvency and funding liquidity risk

The different regimes following exogenous shocks on debt and price have been described in Section IV.4 without any regulation. In this section, we explain how reserves can be introduced to jointly control the risks of default due to either a lack of liquidity, or a solvency problem. We first recall the standard definition of reserve in Basel 2. Then we extend this framework. Indeed two reserve accounts have now to be introduced to manage the two types of default. We discuss how they can be jointly used by the regulator and we explain how to compute the required capital.

IV.5.1 The standard definition of reserve in Basel 2

In the standard analysis of solvency risk, the portfolio is crystallized and the debt is assumed to be predetermined. The balance sheets including the reserve account (on the asset side) are given in Table IV.7 before and after the shocks on price:

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t}$	$L_{1,t}$
	$L_{0,t}$
$x_{0,t}$	
R_t	
	Y_t

before the change in price

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t+1}$	$L_{1,t}$
	$L_{0,t}$
$x_{0,t}$	
R_t	
	Y_{t+1}

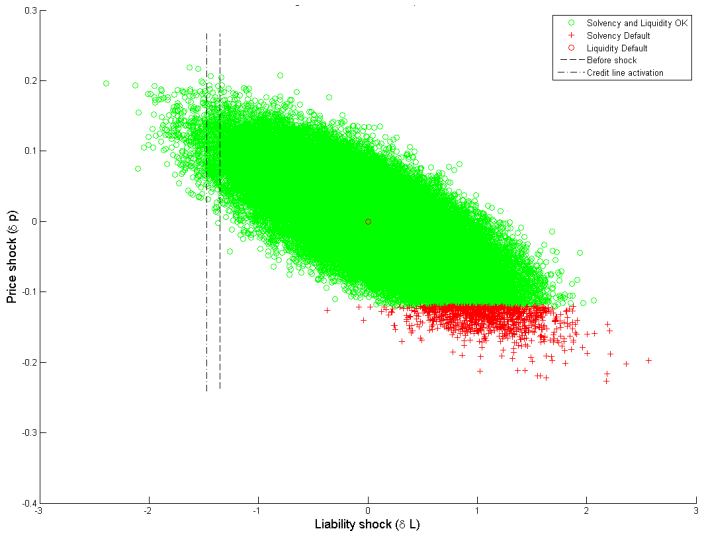
after the change in price

Table IV.7: Balance sheet with a reserve account

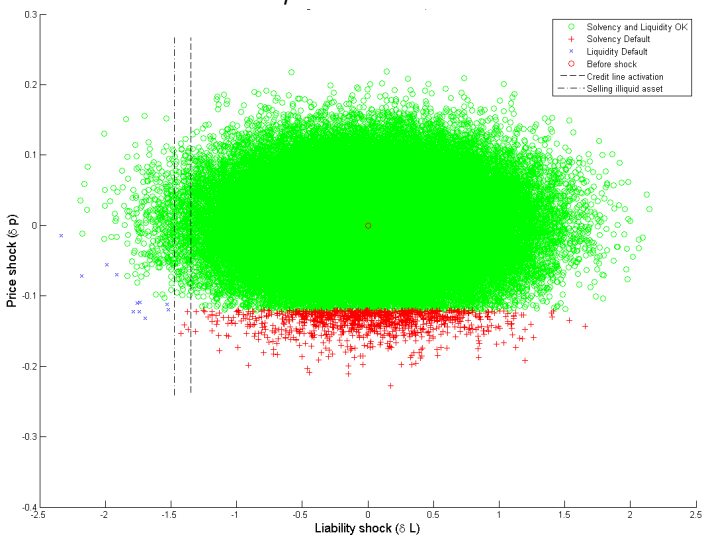
In the standard regulation, the level of reserve R_t is fixed to get a small probability of failure. When this probability is fixed to α, the level of reserve is the solution of:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_t\left[Y_{t+1} < 0\right] = \alpha \\ \iff \quad & \mathbb{P}_t\left[x_{1,t}p_{1,t+1} + x_{0,t} + R_t - L_{1,t} - L_{0,t} < 0\right] = \alpha \\ \iff \quad & \mathbb{P}_t\left[x_{1,t}\delta p_{1,t+1} + (x_{1,t}p_{1,t} + x_{0,t} - L_{1,t} - L_{0,t}) < -R_t\right] = \alpha \end{aligned}$$

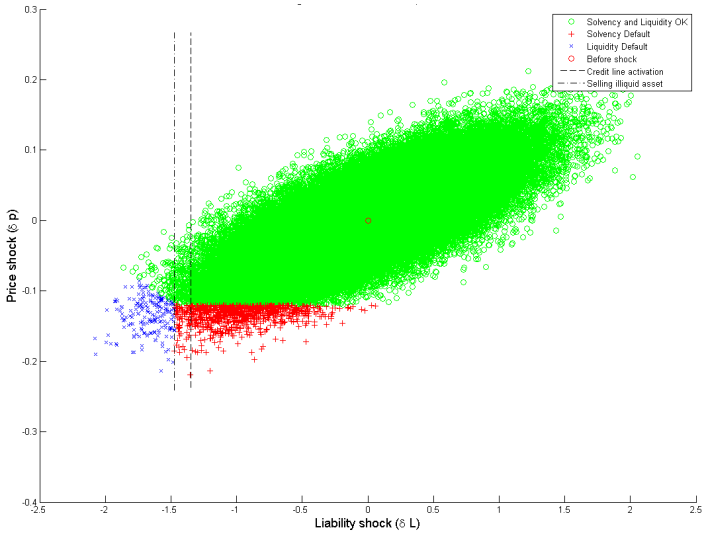
The level of reserve R_t is set to the (lower) $\alpha-$quantile of the conditional distribution of $x_{1,t}\delta p_{1,t+1} + Y_t^*$, with $Y_t^* = x_{1,t}p_{1,t} + x_{0,t} - L_{1,t} - L_{0,t}$ being the difference between the equity at date t and the reserve level. This computation shows that the reserve for solvency risk is directly linked to a VaR.



$\rho = -0.75$



$\rho = 0$



$\rho = +0.75$

Figure IV.6: Simulated outcomes mapped on the decomposition in regimes.

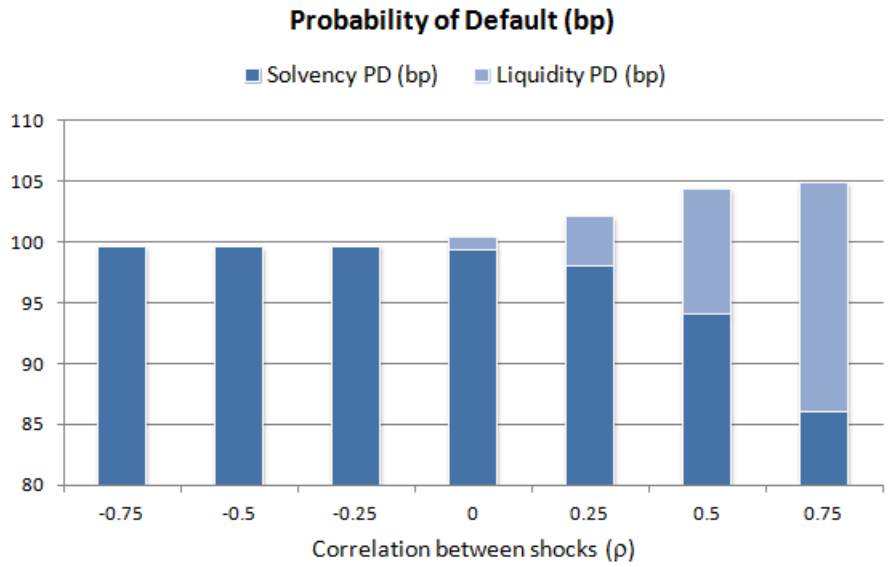


Figure IV.7: Values of the Probability of Default for different values of ρ (in bp).

In the presentation above, the reserves are represented on the asset side. It is possible to consider that the reserves are a part of equity as the label "required capital" suggests. The total equity, Y_t, is the sum of the required capital R_t and an excess of capital $\overline{Y}_t$: $Y_t = R_t + \overline{Y}_t$. The regulation imposes that the excess of capital is positive: $\overline{Y}_t > 0$. However, this excess of capital has a counterpart on the asset side which must not impact the riskiness of the financial institution; otherwise, the required capital would increased. It can be written as a total of cash $\overline{x}_{0,t} = x_{0,t} + R_t$, with the restriction that the financial institution has access only to a fraction of this cash, $x_{0,t}$ while the other part R_t is locked. In this alternative perspective, the balance sheet is given in Table IV.8.

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t}$	$L_{1,t}$
	$L_{0,t}$
$\overline{x}_{0,t}$	
	R_t
	$\overline{Y}_t$

Table IV.8: Balance sheet with required capital

IV.5.2 The extended framework

Let us now extend the standard capital requirement by introducing two reserves to hedge the two types of defaults for liquidity shortage and lack of solvency, respectively.

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t}$	$L_{1,t}$
	$L_{0,t}$
$x_{0,t}$	0
$R_{1,t}$	
$R_{2,t}$	
	Y_t

Table IV.9: The initial balance sheet with two reserve accounts

The initial balance sheet

The situation is very different when we account also for funding liquidity risk. Indeed, as seen in Section 4, the institution can default because of a liquidity shortage as well as a lack of solvency. These two causes of default require two types of reserve to be treated in an appropriate way. The balance sheet before the shocks on prices and quantities is given in Table IV.9.

There are two reserve accounts $R_{1,t}$ and $R_{2,t}$, say. Reserve account $R_{1,t}$ is introduced to target the liquidity risk, whereas the treatment of solvency risk relies on the reverse account $R_{2,t}$ augmented for the residual of $R_{1,t}$. First, these reserve accounts correspond to required capitals. Therefore, the initial equity has to be larger than the total required capital : $Y_t > R_{1,t} + R_{2,t}$. Equivalently, the excess of capital at date t is positive: $\overline{Y}_t \equiv Y_t - R_{1,t} - R_{2,t} > 0$. Second, these reserve accounts are composed of perfectly liquid asset (ie. riskfree in our model). However these reserve accounts differ from the cash line $x_{0,t}$. The cash account $x_{0,t}$ can be used freely by the financial institution for responding to the funding liquidity shocks. The reserve accounts can be used by the institution only with the authorization of the supervisor. Consequently, for the financial institution, regardless of any intervention of the supervisor, the reserve accounts have a perfect market liquidity, but have a perfect funding illiquidity.

For expository purpose, we have kept the same notations as in Table 1. But of course, the institution has to adjust its portfolio in order to satisfy the introduction of the two reserve accounts. The adjustment between periods is clearly out of the scope of this paper. [10]

Supervisor's intervention

We consider that the financial institution has first to satisfy its liquidity need, and then its solvency situation is assessed. For sake of simplicity, we consider that the supervisor [11] acts in last resort by the management of the reserve accounts: the financial institution get access to the reserve $R_{1,t}$ only when it has already fully used its credit line and sold all its illiquid assets. If a fraction of the reserve $R_{1,t}$ is sufficient, only this fraction is unlocked.

When it comes to solvency, three situations can be identified. First, if the equity is negative, the financial institution is insolvent. Second, when both the equity and

10. However, for the determination of the levels of reserves, it is assumed that the introduction of the reserve accounts is financed by an identical increase in capital.

11. Recall that the supervisors are autonomous authorities independent of the central banks. They have authority on these accounts, but cannot provide liquidity on their owns.

the excess of capital are positive, the financial institution is solvent and fulfills the regulatory constraint. Third, it may happen that the bank has positive equity, but no positive excess of capital. In this latter situation, the financial institution is in distress. Note that the supervisor's intervention concerning liquidity does not necessarily interfere with the solvency step.

Let us review the regimes described in Section IV.4 when there are two reserve accounts.

i) Liquidity regimes

We can now identify five liquidity regimes. Whereas regimes $\mathcal{R}^{\ell}(AA)$, $\mathcal{R}^{\ell}(A)$, $\mathcal{R}^{\ell}(B)$ are unchanged, in case of a liquidity problem the supervisor can unlock the cash reserve. A new regime $\mathcal{R}^{\ell}(C)$, say, arises when the cash reserve is needed and sufficient:

$$-x_{0,t}-\tilde{M}-R_{1,t}-x_{1,t}H(p_{1,t}+\delta p_{1,t+1}) < -\delta L_{1,t+1}-\delta L_{0,t+1} < -x_{0,t}-\tilde{M}-x_{1,t}H(p_{1,t}+\delta p_{1,t+1}).$$

The remaining amount of reserves after the intervention of the supervisor is denoted by $R^*_{1,t}$, and defined by:

$$R^*_{1,t} = min\left[R_{1,t}; \left(-x_{0,t} - \tilde{M} - x_{1,t}H(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}) - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1}\right)^+\right].$$

When the cash reserve is not sufficient, the default regime $\mathcal{R}^{\ell}(D)$ arises:

$$-\delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} < -x_{0,t} - \tilde{M} - R_{1,t} - x_{1,t}H(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}).$$

ii) Solvency regimes

Similarly, we get an additional solvency regime corresponding to a situation with positive equity below the regulatory constraint. Therefore we have three solvency regimes:

- regime $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(A)$ arises when the financial institution's equity is above the regulatory constraint.
- regime $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(C)$ arises when the financial institution's equity is positive, but below the regulatory constraint.
- regime $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(D)$ arises when the financial institution's equity is negative.

iii) Combining liquidity and solvency regimes

As in the analysis presented in Section 4, the five liquidity regimes are crossed with the three solvency regimes to define up to 15 regimes. The standard situation involves less than 15 regimes:

Proposition IV.2 (Number of regime with reserves)**.** *The situation with 11 regimes represented in Figure IV.8 arises if and only if* $Y_t < x_{1,t}p_{1,t}+\gamma\tilde{M}$ *and* $L_{0,t} > x_0+\tilde{M}$.

Proof. See Appendix D.6. □

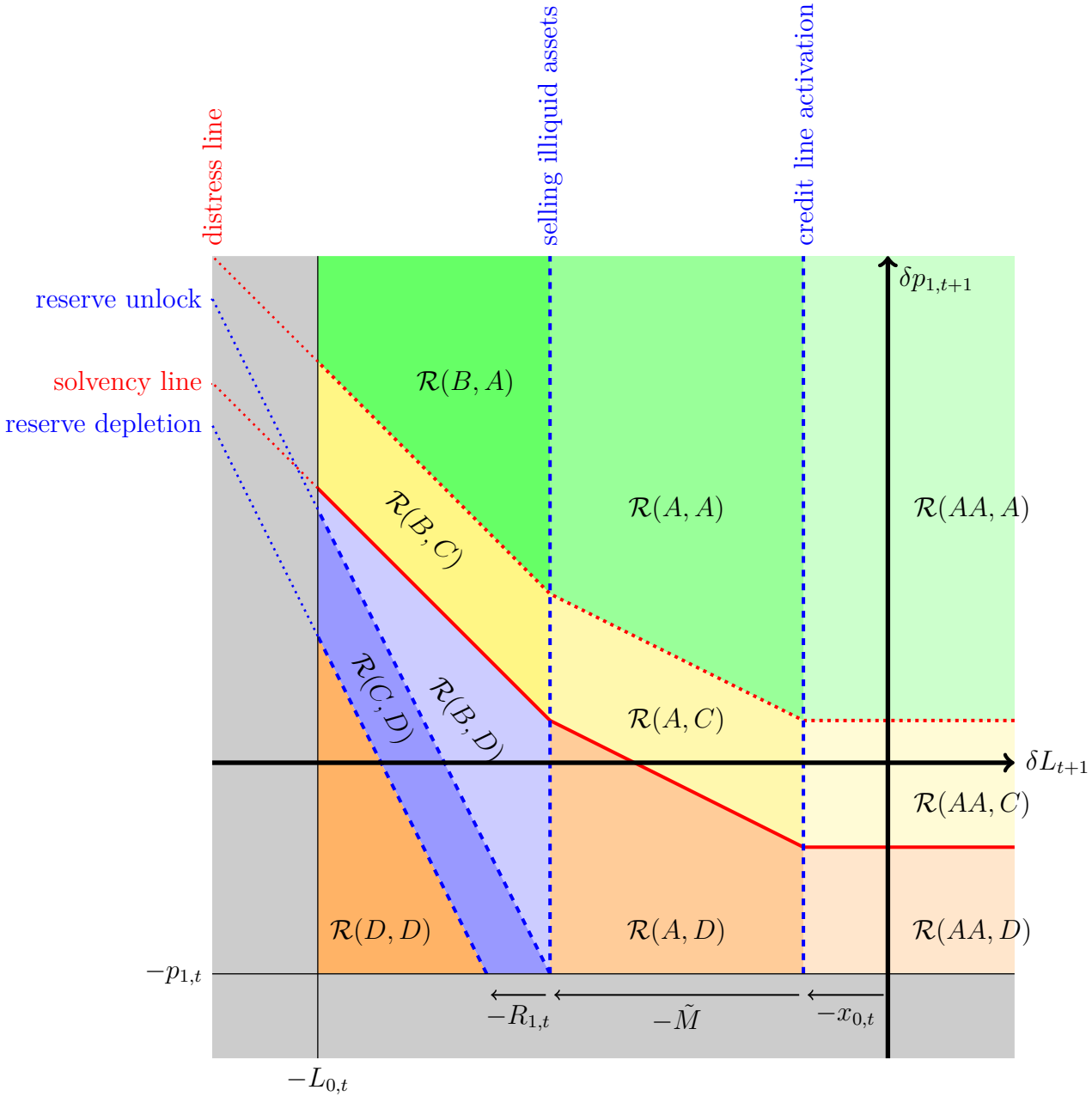


Figure IV.8: 11 Regimes with Limited Credit Line and Reserves

Impact of reserves

Figure IV.8 represents the 11 regimes combining solvency and liquidity. For instance, Regime $\mathcal{R}(A, C)$ corresponds to a financial institution, with positive but lower than the required equity, which credit line is activated to solve its liquidity shortage. Regime $\mathcal{R}(C, D)$ corresponds to the supervisor's intervention: the reserve $R_{1,t}$ is unlocked to face the massive liability shock experienced by the institution.

There are two modifications when comparing Figure IV.8 (with reserves) and Figure IV.4 (without reserves). The first modification is the "distress line" (dashed red line) which introduces a second level of equity. This line does not cross regimes when there are liquidity difficulties: it is only a benchmark. The second difference is the downward extension of the blue sector (or equivalently, a downward withdraw of Regime $\mathcal{R}(D, D)$). This extension is due to the supervisor's intervention. The intervention increases the capacity of the financial institution with respect to liquidity balance. This modification is only a liquidity matter; it does not affect the solvency status of the financial institution.

In our framework, it is possible to define typical situations that describe the vulnerability of a financial institution and accounts for risk classes. We propose to consider five main regions in our analysis (see Figure IV.9):

- A financial institution is *alive* when it fulfills the regulatory constraint [Regimes $\mathcal{R}(AA, A)$, $\mathcal{R}(A, A)$ and $\mathcal{R}(B, A)$]. This region is characteristic of business-as-usual situations.
- A financial institution is *under-capitalized* when it is solvent, but does not fulfill the regulatory constraint [Regimes $\mathcal{R}(AA, C)$, $\mathcal{R}(A, C)$ and $\mathcal{R}(B, C)$]. This region is like a buffer along the previous region: it is not as good as alive, but is close to it.
- A financial institution is in *solvcency distress* when it is insolvent without having needed to sell its illiquid assets [Regimes $\mathcal{R}(AA, D)$ and $\mathcal{R}(A, D)$]. In this region, a massive fall in price makes the equity buffer insufficient. But there is no or little liquidity issues involved in this situation.
- A financial institution is *bankrupt* when selling illiquid asset is sufficient to cover its liquidity needs, but leads the institution to insolvency [Regime $\mathcal{R}(B, D)$]. In this regime, there is no supervisory intervention.
- A financial institution is *under resolution* when liquidity needs required the unlocking of liquidity reserve [Regimes $\mathcal{R}(C, D)$]. The supervisory intervention is sufficient to solve the short-term (liquidity) issues faced by the institution. However, the financial institution is insolvent.
- A financial institution is in *in liquidity distress* when the shocks are so severe that even with the sale of illiquid asset and using the reserve, the liquidity needs cannot be met [Regimes $\mathcal{R}(D, D)$]. In that case, the two buffers are insufficient.

Other partitions of regimes may be considered, and be more adapted to other specific concerns. Moreover, our partition depends on the intervention rules. We have adopted a role of "lender of last resort" to avoid as much as possible introducing moral hazard features. As a consequence, the supervisor intervenes only when the financial institution is insolvent and only focuses on liquidity matters. If a supervisor is concerned by the well functioning of short-term market only (*i.e.* minimize the interbank market dry-up.), this intervention rule seems suitable. However, one could definitely argue that supervisor may step in earlier in order to avoid the insolvency,

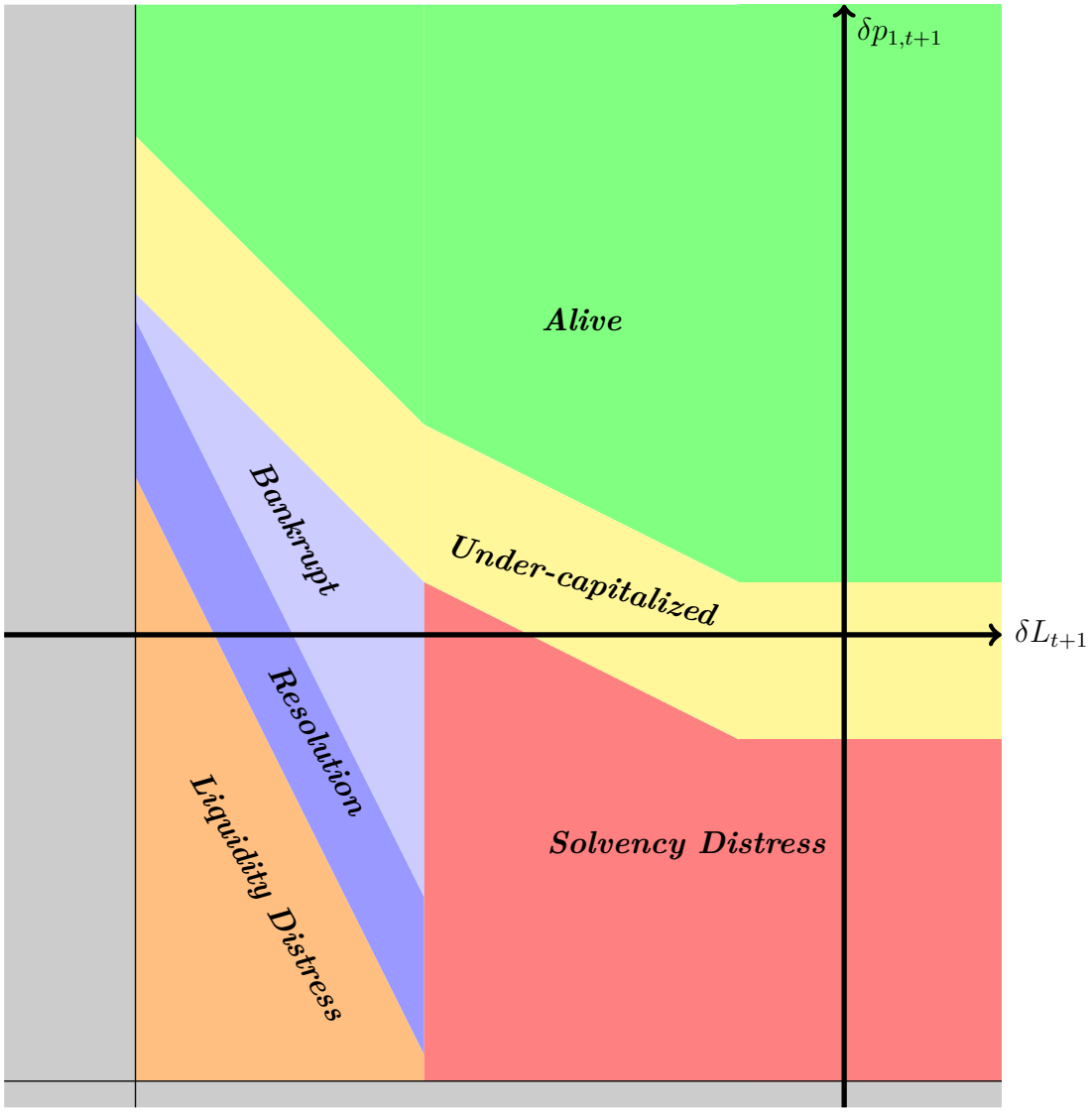


Figure IV.9: Major regimes

or at least to cushion the impact on the real economy. The objective of supervision intervention could be to avoid the fire-sales of illiquid assets that decrease the financing of the economy and may trigger fire sales spiral for other institutions. In this perspective, the supervisors would unlock the reserve as soon as the cost of selling illiquid asset is "unreasonable". Defining what is "unreasonable" goes clearly beyond our paper, but may stem from current debates on banking resolution and more generally on systemic risk.

IV.5.3 Computation of reserves

A bivariate system

How to fix the two reserve levels in practice? Intuitively, by controlling the two probabilities of default, that are:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t\left[\text{default due to funding liquidity}\right] &\equiv PD_t^F(R_{1,t}, R_{2,t}), \\ \text{and } \mathbb{P}_t\left[\text{default due to lack of solvency}\right] &\equiv PD_t^S(R_{1,t}, R_{2,t}). \end{aligned}$$

With Figure IV.8, it is possible to define explicitly the events underlying these two probabilities:

- "default due to funding liquidity" is covered by $\mathcal{R}(D, D)$,
- "default due to lack of solvency" is covered by the union of $\mathcal{R}(B, D)$, $\mathcal{R}(C, D)$, $\mathcal{R}(A, D)$ and $\mathcal{R}(AA, D)$.

With respect to Figure IV.9, "default due to funding liquidity" is identified with area "liquidity distress" and "default due to lack of solvency" is identified with the union of areas "solvency distress", "bankruptcy" and "resolution".

For given levels of the probabilities of default, α_F, α_S, say, we will have to solve the bivariate system of equations:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} PD_t^F(R_{1,t}, R_{2,t}) & = & \alpha_F, \\ PD_t^S(R_{1,t}, R_{2,t}) & = & \alpha_S, \end{array} \right.$$

whose solutions $R_{1,t}$, $R_{2,t}$ will depend on α_F, α_S, on the initial structure of balance sheet and on the joint distribution of the changes in price and quantities. In particular both $R_{1,t}$ and $R_t = R_{1,t} + R_{2,t}$ will lose the standard interpretation in terms of Value-at-Risk.

An illustration

As previously, we consider the average top 5 US banks. We use the same calibration procedure except that we set an haircut of 95% on illiquid assets and the correlation coefficient between shocks to $\rho = +0.75$, in order to emphasize liquidity risk. We let $R_{1,t}$ and $R_{2,t}$ vary assuming that these additional requirements are funded by issuing equity. The ranges for $R_{1,t}$ and $R_{2,t}$ vary from 0% to 50% of initial equity (that is before introducing reserve accounts). Thus, when $R_{1,t} = R_{2,t} = 0\%$, the balance sheet is the same as without reserves. When $R_{1,t} = R_{2,t} = 50\%$, the initial equity is twice larger than without reserves accounts.

	$R_{2,t} = 0\%$	$R_{2,t} = 10\%$	$R_{2,t} = 20\%$	$R_{2,t} = 30\%$	$R_{2,t} = 40\%$	$R_{2,t} = 50\%$
$R_{1,t} = 0\%$	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4
$R_{1,t} = 10\%$	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
$R_{1,t} = 20\%$	1	1	1	1	1	1
$R_{1,t} = 30\%$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$R_{1,t} = 40\%$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$R_{1,t} = 50\%$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

Legend: R_1 and R_2 are expressed in % of the initial equity (before imposing reserves).

Table IV.10: Probability of default due to funding liquidity PD_t^F (in bp)

	$R_{2,t} = 0\%$	$R_{2,t} = 10\%$	$R_{2,t} = 20\%$	$R_{2,t} = 30\%$	$R_{2,t} = 40\%$	$R_{2,t} = 50\%$
$R_{1,t} = 0\%$	108	65	42	30	24	21
$R_{1,t} = 10\%$	67	43	31	26	23	21
$R_{1,t} = 20\%$	44	32	26	23	22	21
$R_{1,t} = 30\%$	33	27	24	22	22	21
$R_{1,t} = 40\%$	27	24	23	22	21	21
$R_{1,t} = 50\%$	24	23	22	21	21	20

Legend: R_1 and R_2 are expressed in % of the initial equity (before imposing reserves).

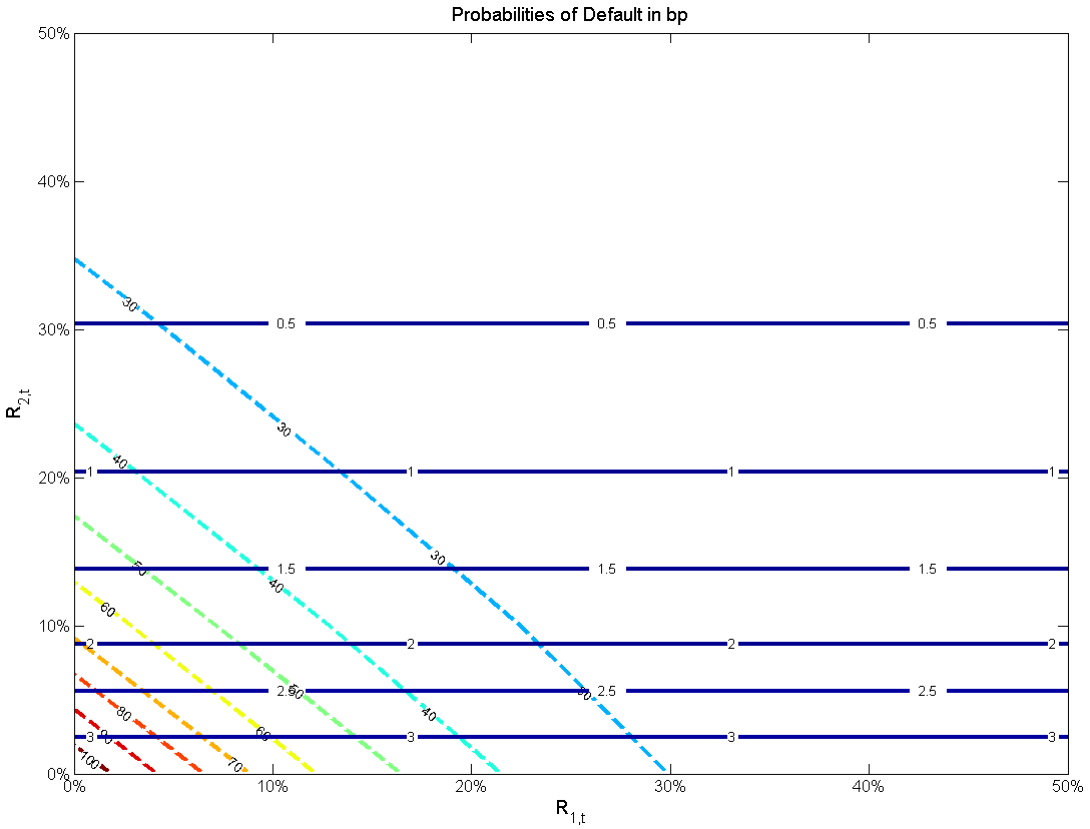
Table IV.11: Probability of default due to lack of solvency PD_t^S (in bp)

Table IV.10 (respectively Table IV.11) reports the evolution of the probability of default due to funding PD_t^F (resp. due to a lack of solvency PD_t^S). The probability of default due to a lack of solvency PD_t^S is decreasing with both sizes of reserve accounts R_1 and R_2. The reserve account R_1 which can be unlocked in case of liquidity difficulty has an impact on the probability of default due to funding, whereas this probability of default is insensitive to the level of the reserve account R_2. Then these tables have to be inverted to derive the levels of reserve R_1 and R_1 as functions of the risk levels α_F and α_S. Figure IV.10 provides the iso-probability lines for solvency and funding defaults as function of the size of reserve accounts. Based on the chosen values of α_F and α_S, the intersection of the two corresponding iso-probability lines provides the size of the two reserves accounts.

IV.5.4 Comparison with Basel 3

Let us present how our two reserve accounts would be computed in the Basel 3 framework to draw the comparison.
One of the most debated feature of Basel 3 is the monitoring of liquidity in top of the usual monitoring of solvency [Basel Committee on Banking Supervision (2011), Basel Committee on Banking Supervision (2013a)]. Basically, Basel 3 introduces a solvency constraint and a liquidity constraint. As in Basel 2, the solvency constraint imposes that the equity [12] is higher than 8% of the total risk-weighted asset. As already mentioned, the solvency constraint leads to impose $Y_t \geq R_{2,t}$ where the reserve $R_{2,t}$ is based on $x_{1,t}p_{1,t}$. The liquidity constraint is based on a short-term

12. Here, we do not distinguish equity from total capital.



Legend: plain lines indicate probabilities of funding default (in bp), dashed lines indicate probabilities of solvency default (in bp).

Figure IV.10: Probabilities of default as functions of sizes of the reserve accounts

liquidity ratio, called "Liquidity Coverage Ratio" (LCR). [13] The LCR imposes that liquid assets are larger than a weighted sum of liability. The weights represent the exposure to funding liquidity risk. In our framework, the constraint would be written $x_{0,t} - R_{1,t} \geq wL_{0,t}$ where w is a weighting coefficient (for instance w would be 3% if $L_{0,t}$ is composed the most stable class of deposit).
Our framework shares with Basel 3 that two instruments are required to deal with two sources of risk. We differ from the Basel 3 approach by the strong links existing between our two reserve accounts while Basel 3 adopts a segmented view. Our result suggests that the reserve accounts can be set in a more refine way when considering jointly the two sources of risk. A complete comparison of the two strategies would require adapting our model to a more granular balance sheet as well as to comprehensive calibration steps, that are clearly out of scope of this paper.

IV.6 Conclusion

Basel new regulation puts forward liquidity risk, when solvency risk was previously tackled. In this paper, we have developed a stylized balance-sheet that accounts for market risk and liquidity risks with both market liquidity risk and funding liquidity risk. The first risk is captured by a stochastic price of (illiquid) assets, the second risk by an haircut on illiquid asset when turns into cash (liquidation cost), and the third risk by stochastic volume on the liability side. The focus is on the liquidity management since the banks can deal their liquidity shortages by using a cash reserve, by activating a credit line, or by selling its illiquid assets. The presence of distinct sources of risk led us to extend the risk indicators and the required levels of reserve that usually only accounts for market risks (and default). This extension is twofold. First we introduce a decomposition of the VaR into a market risk VaR, a market liquidity risk premium and a funding liquidity risk premium. Second, we propose to introduce two types of reserve for a more accurate management of the default due to liquidity shortage and the default for lack of solvency, respectively. The two reserve levels might be followed overtime for the financial institutions and insurance companies under regulation in order to monitor in a consistent way the two types of risks. In particular, when designing capital requirements the dependence between liquidity and solvency risks is accounted for, in contrast to Basel 3 where they are treated separately.

Our framework relies on simple assumptions: the credit line has a unique cost or the haircut is independent of sale volume. Moreover, the supervisor's intervention corresponds to a last-resort behavior. However, it is easy to extend the model by introducing more sophisticated features. The interest rate paid for the credit line may depend on the called volume. The haircut on illiquid asset may become an increasing function of the sale volume to include a price-impact component (see Appendix D.7).

More sophisticated rules for the intervention of the supervisor may also be introduced. Typically, our approach has not distinguished the systematic and unsystematic components of the risks. Four reserve accounts will have to be introduced to also manage the systematic liquidity risk and the systematic solvency risk, which

13. Basel 3 introduced also a long-term liquidity ratio, called "Net Stable Funding Ratio" (NSFR), but this last ratio is much less relevant than the LCR for our analysis. For a deeper analysis, see Jobst (2014).

are not necessarily driven by a single systematic factor. The analysis with four reserve accounts [14] would be much more complicated since it requires the joint analysis of several balance sheets including the contagion schemes [see e.g. Cifuentes et al. (2005) or Gai et al. (2011)]. Moreover, the rule for unlocking the reserve for systematic and unsystematic liquidity risks will now depend on the existence and magnitude of fire sales of illiquid assets by several institutions simultaneously.

It might also be possible to introduce a central bank providing liquidity against collateral, especially in a situation of high systemic liquidity risk when the interventions of the supervisors are not sufficient to avoid a systemic default. The aim of such a central bank intervention would be to breakdown the liquidity spiral. These extensions, including the optimal level of intervention of the central bank are clearly out of scope of our paper. Such an extension is left for future research.

There exists a theoretical literature to analyze the optimal capital structure of a firm, to see how this structure, the optimal leverage and the default threshold are endogenously fixed, and to understand the conflicts between managers and equity holders [see e.g. Leland (1994), He and Xiong (2012a), He and Xiong (2012b), Bolton et al. (2011)]. It would be interesting to see how this literature would be modified in presence of reserve accounts and with a regulator as the third actor.

Finally, balance sheet based analysis of liquidity and solvency risks are also promising for corporates and households, not only for financial institutions. Similar approaches can be used for households to disentangle their capacities to repay the service of the debt without selling asset from their capacities to repay the total debt taking into accounts their assets and their future income flows [see e.g. Ampudia et al. (2014)]. The technique will provide connected ratings for liquidity and solvency risks. In such extensions, there is of course no reserve account, but their analogues are the regulatory caps on the per-cent levels of debt service to income, or debt to asset ratios.

14. Monitoring four reserve accounts for a financial institution is not a complex task since a genuine balance sheet has hundreds of lines. In our simplified framework, most of these lines are gathered under the illiquid asset class.

D.1 Comparison with Morris and Shin (2009)

Our model shares several features with Morris and Shin (2009). However, we distance ourselves from this paper in various respects.
The balance sheet proposed in Morris and Shin (2009) is similar to ours (see Table D.1) with two classes of assets (risky/illiquid and non-risky cash) and two classes of debts (short and long term). We both consider that short term debt holders may ask for repayment. This liquidity needs can be covered by cash and by using the risky/illiquid asset.

Asset	Liability
Cash M	Long Debt L_2
Risky Asset $\theta_2 Y$	Short Debt S_2
	Equity E_2

Table D.1: Balance sheet of the bank at the final date in Morris and Shin (2009)

In our model, the risky assets are assumed to be sold, whereas Morris and Shin propose to use them as collateral to raise new debt in the baseline model : "[their] assumption is in contrast to the usual assumption in models of bank runs where the bank has to liquidate long-term assets ("dig up potatoes planted in the field") to pay the early withdrawers" (p6). Contrasting with Morris and Shin, we authorize the financial institution to activate a credit line as an intermediate solution after using its own cash and before selling its illiquid asset.
As highlighted by Morris and Shin, when the haircut on the illiquid assets depends on the realized value of the illiquid asset (as in the extension 6.2 of their baseline model), the insolvency risk and the illiquidity risk get intertwined. Since in our model the haircut is applied to the current value of the illiquid asset, we include this feature.

The key difference between our model and Morris and Shin's one corresponds to the hinging between shocks on the asset and liability sides. In their framework, there is first a shock on the asset side. Then short-term debt holders decide to roll-over or not on the short-term debt. This choice builds on comparing the expected return of rolling over and a reserve return with game theory features. In other word, the shock on the short-term debt volume is a deterministic, albeit sophisticated, function of the shocks on the asset side.
On the contrary, we do not impose a deterministic relationship between the shocks on the asset and liability sides. For instance, in the illustration, we use a simple bivariate Gaussian distribution with a correlation parameter. However, this joint distribution can be specified to tend to Morris and Shin's framework as limiting case.

D.2 Computation for an unlimited credit line

Let us first provide some useful results concerning the truncated Gaussian distribution:

Lemma IV.1. *Let us consider a Gaussian variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:*

$$
\begin{aligned}
&i) \qquad \mathbb{P}\left[X < \alpha\right] = \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) \\
&ii) \qquad \mathbb{E}\left[X | X < \alpha\right] = \mu - \sigma \frac{\varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)} \\
&iii) \qquad \mathbb{E}\left[X | \beta < X < \alpha\right] = \mu + \sigma \frac{\varphi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)}
\end{aligned}
$$

i) VaR

For expository purpose, let us omit the time index and denote $\delta p \equiv p_{1,t+1} - p_{1,t}$, $\delta L \equiv \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1}$, $x_1 \equiv x_{1,t}$, $x_0 \equiv x_{0,t}$ and $VaR \equiv VaR_t^{\alpha}(\gamma) + Y_t$. The VaR is defined by:

$$\mathbb{P}\left[x_1 \delta p - \gamma(-x_0 - \delta L)^+ < -VaR\right] = \alpha,$$

where the time index is omitted in the conditioning. To compute the VaR, we first integrate out δp given δL, then we integrate out δL. The conditional distribution of δp given δL is Gaussian with mean $\mu_p + \rho\frac{\sigma_P}{\sigma_L}(\delta L - \mu_L)$ and variance $\sigma_p^2(1-\rho^2)$. We deduce from Lemma IV.1.i):

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{P}\left[x_1 \delta p - \gamma(-x_0 - \delta L)^+ < -VaR | \delta L\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{P}\left[\delta p < \frac{\gamma(-x_0 - \delta L)^+ - VaR}{x_1} | \delta L\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\Phi\left(\frac{\gamma(-x_0 - \mu_L - \sigma_L U)^+ - VaR - x_1\left(\mu_p + \rho\sigma_P U\right)}{x_1 \sigma_p \sqrt{1-\rho^2}}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

where U is a standard normal variable.

When $\gamma = 0$, the formula is greatly simplified. We have:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left[x_1 \delta p < -VaR\right] \\
&= \Phi\left(\frac{-VaR/x_1 - \mu_p}{\sigma_p}\right)
\end{aligned}
$$

or equivalently:

$$VaR = -x_1\left(\mu_p + \sigma_p \Phi^{-1}(\alpha)\right).$$

ii) *PU*

Let us omit the time index and denote $\delta L \equiv \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1}$. Since $\delta L \sim \mathcal{N}(\mu_L, \sigma_L^2)$, Lemma IV.1.i) gives:

$$PU = \mathbb{P}\left[\delta L < -x_0\right] = \Phi\left(\frac{-x_0 - \mu_L}{\sigma_L}\right).$$

iii) *EUGU*
We deduce from Lemma IV.1.ii):

$$\frac{EUGU_t(\gamma)}{1+\gamma} = -x_0 - \mathbb{E}\left[\delta L | \delta L < -x_0\right] = -x_0 - \mu_L + \sigma_L \frac{\varphi(\frac{-x_0-\mu_L}{\sigma_L})}{\Phi(\frac{-x_0-\mu_L}{\sigma_L})},.$$

$$EUGU_t(\gamma) = -(1+\gamma)\left(x_{0,t} + \mu_L - \sigma_L \frac{\varphi\left(\frac{-x_{0,t}-\mu_L}{\sigma_L}\right)}{\Phi\left(\frac{-x_{0,t}-\mu_L}{\sigma_L}\right)}\right).$$

D.3 VaR Sensitivity

Lemma 1 in Gouriéroux, Laurent and Scaillet (2000) is:
Let us consider a bivariate continuous vector $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *and the quantile* $Q(\varepsilon, \alpha)$ *defined by*

$$\mathbb{P}\left[\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{Y} > Q(\varepsilon, \alpha)\right] = \alpha.$$

Then:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q(\varepsilon, \alpha) \mathbb{E}\left[\mathbf{Y} | \mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{Y} = Q(\varepsilon, \alpha)\right].$$

We cannot apply directly this Lemma since in our case the quantile $Q(\varepsilon, \alpha)$ is defined by:

$$\mathbb{P}\left[\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{Y}^{+} > Q(\varepsilon, \alpha)\right] = \alpha.$$

However, the proof of Lemma 1 can be adapted for this case. Denoting by $f(x, y)$ the joint p.d.f. of the pair (X, Y), we get:

$$\mathbb{P}\left[\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{Y}^{+} > Q(\varepsilon, \alpha)\right] = \alpha \Longleftrightarrow \int \left[\int_{Q(\varepsilon,\alpha)-\varepsilon y^{+}} f(x, y) dx\right] dy = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \int_{y>0} \left[\int_{Q(\varepsilon,\alpha)-\varepsilon y} f(x, y) dx\right] dy + \int_{y<0} \left[\int_{Q(\varepsilon,\alpha)} f(x, y) dx\right] dy = \alpha.$$

Let us now differentiate with respect to ε:

$$\int_{y>0} \left(\frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} - y\right) f(Q(\varepsilon, \alpha) - \varepsilon y, y) dy + \int_{y<0} \frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} f(Q(\varepsilon, \alpha), y) dy = 0$$

$$\int \frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} f(Q(\varepsilon, \alpha) - \varepsilon y^{+}, y) dy - \int_{y>0} y f(Q(\varepsilon, \alpha) - \varepsilon y, y) dy = 0$$

$$\frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} = \frac{\int_{y>0} y f(Q(\varepsilon, \alpha) - \varepsilon y, y) dy}{\int f(Q(\varepsilon, \alpha) - \varepsilon y^{+}, y) dy}$$

$$\frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} = \frac{\int y^{+} f(Q(\varepsilon, \alpha) - \varepsilon y, y) dy}{\int f(Q(\varepsilon, \alpha) - \varepsilon y^{+}, y) dy}$$

$$\frac{\partial Q(\varepsilon,\alpha)}{\partial \varepsilon} = \frac{\mathbb{E}\left[Y^+ | X+\varepsilon Y = Q(\varepsilon,\alpha)\right] \times \mathbb{P}\left[X+\varepsilon Y = Q(\varepsilon,\alpha)\right]}{\mathbb{P}\left[X+\varepsilon Y^+ = Q(\varepsilon,\alpha)\right]}$$
$$\frac{\partial Q(\varepsilon,\alpha)}{\partial \varepsilon} = \mathbb{E}\left[Y^+ | X+\varepsilon Y = Q(\varepsilon,\alpha)\right] \times \frac{\mathbb{P}\left[X+\varepsilon Y = Q(\varepsilon,\alpha)\right]}{\mathbb{P}\left[X+\varepsilon Y^+ = Q(\varepsilon,\alpha)\right]}.$$

In our framework, with the notation used in Appendix D.2, we have:

$$\mathbb{P}\left[\underbrace{-Y_t - x_1\delta p}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\gamma}_{\varepsilon}\underbrace{(-x_0-\delta L)^+}_{\mathbf{Y}} > \underbrace{VaR_t(\alpha,\gamma)}_{Q(\varepsilon,\alpha)}\right] = \alpha.$$

Therefore we get:

$$\begin{aligned}\frac{\partial VaR_t^\alpha(\gamma)}{\partial \gamma} =& \mathbb{E}\left[(-x_0-\delta L)^+ | -Y_t - x_1\delta p + \gamma(-x_0-\delta L) = VaR_t^\alpha(\gamma)\right] \\ & \times \frac{\mathbb{P}\left[-Y_t - x_1\delta p + \gamma(-x_0-\delta L) = VaR_t^\alpha(\gamma)\right]}{\mathbb{P}\left[-Y_t - x_1\delta p + \gamma(-x_0-\delta L)^+ = VaR_t^\alpha(\gamma)\right]}.\end{aligned}$$

When $\gamma = 0$, it reduces to:

$$\frac{\partial VaR_t^\alpha(0)}{\partial \gamma} = \mathbb{E}\left[(-x_0-\delta L)^+ | -Y_t - x_1\delta p = VaR_t^\alpha(0)\right] \times \frac{\mathbb{P}\left[-Y_t - x_1\delta p = VaR_t^\alpha(0)\right]}{\mathbb{P}\left[-Y_t - x_1\delta p = VaR_t^\alpha(0)\right]}$$
$$\frac{\partial VaR_t^\alpha(0)}{\partial \gamma} = \mathbb{E}\left[(-x_0-\delta L)^+ | -Y_t - x_1\delta p = VaR_t^\alpha(0)\right].$$

D.4 Summary statistics in the Gaussian case

As in the case of a limited credit line, let us consider Gaussian shocks:

$$\begin{pmatrix} \delta p_{1,t+1} \\ \delta L_{1,t+1} + \delta L_{0,t+1} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_p \\ \mu_L \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & \rho\sigma_p\sigma_L \\ \rho\sigma_p\sigma_L & \sigma_L^2 \end{pmatrix}\right).$$

D.4.1 Value-at-Risk

As usual, the computation are based on $\tilde{Y}^*_{t+1|t}$ and not on $Y^*_{t+1|t}$: the expressions do not take into account the impossibility to sell more illiquid asset than available.

The expression of the VaR is obtained along the same lines as in Appendix D.4:

$$\alpha = \mathbb{P}\left[x_1\delta p - \gamma min\left(M, (-x_0-\delta L)^+\right) - \frac{1}{H}(-x_0-\delta L-M)^+ < -VaR\right]$$
$$\alpha = \mathbb{E}\left\{\mathbb{P}\left[x_1\delta p - \gamma min\left(M, (-x_0-\delta L)^+\right) - \frac{1}{H}(-x_0-\delta L-M)^+ < -VaR\middle|\delta L\right]\right\}$$
$$\alpha = \mathbb{E}\left\{\mathbb{P}\left[\delta p < \frac{\gamma min\left(M, (-x_0-\delta L)^+\right) + \frac{1}{H}(-x_0-\delta L-M)^+ - VaR}{x_1}\middle|\delta L\right]\right\}$$
$$\alpha = \mathbb{E}\left\{\Phi\left(\frac{1}{\sigma_p\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\gamma min\left(M, (-x_0-\delta L)^+\right) + \frac{1}{H}(-x_0-\delta L-M)^+ - VaR}{x_1}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. -\mu_p - \rho\frac{\sigma_p}{\sigma_L}(\delta L-\mu_L)\right)\right\}$$
$$\alpha = \mathbb{E}\left\{\Phi\left(\frac{\gamma min\left(M, (-x_0-\mu_L-\sigma_L U)^+\right) + \frac{1}{H}(-x_0-\mu_L-\sigma_L U-M)^+ - VaR - \rho\sigma_p U}{x_1\sigma_p\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right\},$$

where U is a standard Gaussian variable.
Indeed, when $M=\infty$, the expression reduces to the one in case of unlimited credit line [see Equation (IV.10)].

D.4.2 Use of the credit line

Let us now focus on the need for cash. We get the probability of use (which corresponds to the probability of a liquidity incident) with Lemma IV.1.i):

$$PU_t = \Phi\left(\frac{-x_{0,t}-\mu_L}{\sigma_L}\right).$$

To get the expected use given use is, we apply Lemma IV.1.iii):

$$\begin{aligned}\frac{EUGU}{1+\gamma} &= \mathbb{E}\left[-x_0-\delta L \middle| 0 < -x_0-\delta L < M\right]\\ &= -x_0 - \mathbb{E}\left[\delta L \middle| -x_0-M < \delta L < -x_0\right]\\ &= -x_0-\mu_L - \sigma_L\frac{\varphi\left(\frac{-x_0-M-\mu_L}{\sigma_L}\right) - \varphi\left(\frac{-x_0-\mu_L}{\sigma_L}\right)}{\Phi\left(\frac{-x_0-\mu_L}{\sigma_L}\right) - \Phi\left(\frac{-x_0-M-\mu_L}{\sigma_L}\right)}.\end{aligned}$$

$$EUGU = -(1+\gamma)\left(x_0+\mu_L+\sigma_L\frac{\varphi\left(\frac{-x_0-M-\mu_L}{\sigma_L}\right) - \varphi\left(\frac{-x_0-\mu_L}{\sigma_L}\right)}{\Phi\left(\frac{-x_0-\mu_L}{\sigma_L}\right) - \Phi\left(\frac{-x_0-M-\mu_L}{\sigma_L}\right)}\right).$$

D.4.3 Sell illiquid asset

Lemma IV.1.i) gives:

$$PS_t = \mathbb{P}\left[x_0 + \delta L < -M\right] = \Phi\left(\frac{-M + x_0 - \mu_L}{\sigma_L}\right).$$

The probability of selling illiquid asset is:

$$PS_t = \Phi\left(\frac{-M + x_{0,t} - \mu_L}{\sigma_L}\right).$$

The expected volume of sale of illiquid assets is given by Lemma IV.1.ii):

$$\begin{aligned} H \times ESGS &= \mathbb{E}\left[-x_0 - M - \delta L | - x_1 p_{1,t+1} H < -x_0 - M + \delta L < 0\right] \\ &= -x_0 - M - \tilde{\mu}_L - \tilde{\sigma}_L \frac{\varphi\left(\frac{-x_0 - M - \tilde{\mu}_L - x_1 p_{1,t+1} H}{\tilde{\sigma}_L}\right) - \varphi\left(\frac{-x_0 - M - \tilde{\mu}_L}{\tilde{\sigma}_L}\right)}{\Phi\left(\frac{-x_0 - M - \tilde{\mu}_L}{\tilde{\sigma}_L}\right) - \Phi\left(\frac{-x_0 - M - \tilde{\mu}_L - x_1 p_{1,t+1} H}{\tilde{\sigma}_L}\right)} \end{aligned}$$

with $\tilde{\sigma}_L = \sqrt{1-\rho^2}\sigma_L$ and $\tilde{\mu}_L = \mu_L + \rho\frac{\sigma_L}{\sigma_p}(p_{1,t+1} - p_{1,t} - \mu_p)$.
Or if $p_{1,t+1}$ is unknown:

$$\begin{aligned} H \times ESGS = -x_0 - M - \mu_L - \mathbb{E}\Bigg\{ & \rho\sigma_p U - \sqrt{1-\rho^2}\sigma_L \\ & \times \frac{\varphi\left(\frac{-x_0 - M - \mu_L - \rho\sigma_p U - x_1(p_{1,t} + \mu_p + \sigma_p U)H}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_L}\right) - \varphi\left(\frac{-x_0 - M - \mu_L - \rho\sigma_p U}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_L}\right)}{\Phi\left(\frac{-x_0 - M - \mu_L - \rho\sigma_p U}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_L}\right) - \Phi\left(\frac{-x_0 - M - \mu_L - \rho\sigma_p U - x_1(p_{1,t} + \mu_p + \sigma_p U)H}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_L}\right)} \Bigg\}, \end{aligned}$$

where U is a standard Gaussian variable.

D.4.4 Bankruptcy

For the probability of bankruptcy, Lemma IV.1.i) gives:

$$PB = \mathbb{P}\left[\delta L < -\left(x_1 p_{1,t+1} H + x_0 + M\right)\right] = \Phi\left(\frac{-\left(x_1 p_{1,t+1} H + x_0 + M\right) - \mu_L}{\sigma_L}\right).$$

Or if $p_{1,t+1}$ is unknown:

$$\begin{aligned} PB &= \mathbb{P}\left[\delta L < -\left(x_1 p_{1,t+1} H + x_0 + M\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\delta L + x_1 \delta p H < -\left(x_1 p_{1,t} H + x_0 + M\right)\right] \\ &= \Phi\left(\frac{-\left(x_1 p_{1,t} H + x_0 + M\right) - \mu_L - \mu_p H x_1}{\sqrt{\sigma_L^2 + H^2 x_1^2 \sigma_p^2 + 2\rho H x_1 \sigma_p \sigma_L}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-\left(x_1(p_{1,t} + \mu_p) H + x_0 + M + \mu_L\right)}{\sqrt{\sigma_L^2 + H^2 x_1^2 \sigma_p^2 + 2\rho H x_1 \sigma_p \sigma_L}}\right). \end{aligned}$$

D.5 The geometry of regimes

D.5.1 The figure

The 8 potential regimes are represented in Figure D.1.
Let us define:

- Point A. At point A, the financial institution is on the hedge of insolvency and the complete credit line is exactly sufficient to cover its liquidity needs. Therefore, $Y^*_{t+1|t}(A) = 0$ and $\delta L_{t+1}(A) = -x_{0,t} - \tilde{M}$.
- Point B. At point B, the financial institution has no more illiquid asset to sell and the complete credit line is exactly sufficient to cover its liquidity needs. Therefore, $-x_{0,t} - \delta L_{t+1}(B) - \tilde{M} = x_{1,t}(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}(B))H$ and $\delta L_{t+1}(B) = -x_{0,t} - \tilde{M}$.
- Point C. At point C, the financial institution is on the hedge of insolvency and has no more illiquid asset to sell. Therefore, $Y^*_{t+1|t}(C) = 0$ and $-x_{0,t} - \delta L_{t+1}(C) - \tilde{M} = x_{1,t}(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}(C))H$.
- Point E. At point E, the financial institution is on the hedge of insolvency and covers its liquidity needs by using exactly its cash. Therefore $Y^*_{t+1|t}(E) = 0$ and $\delta L_{t+1}(C) = -x_{0,t}$.

The coordinates of these points are:

$$x_A = -x_{0,t} - \tilde{M} \quad ; \quad y_A = -\frac{Y_t}{x_{1,t}} + \gamma\frac{\tilde{M}}{x_{1,t}}$$

$$x_B = -x_{0,t} - \tilde{M} \quad ; \quad y_B = -p_{1,t}$$

$$x_C = -L_{1,t} - L_{0,t} - (1+\gamma)\tilde{M} \quad ; \quad y_C = -p_{1,t} + \frac{1}{Hx_{1,t}}\left(-x_{0,t} - L_{1,t} - L_{0,t}\right)$$

$$x_E = -x_{0,t} \quad ; \quad y_E = -\frac{Y_t}{x_{1,t}}$$

D.5.2 Proof of Proposition IV.1

i) Exclusion of regime $\mathcal{R}(D, A)$
The abscissa of point C is $x_C = -L_{1,t} - L_{0,t} - (1+\gamma)\tilde{M}$. x_C is always smaller than $-L_{0,t}$, which is the limit of the shock on the liability side (see equation (5)). Thus point C is not in the feasible set and regime $\mathcal{R}(D, A)$ cannot arise. Thus the computation above confirms the remark done in the main part of the text.

ii) Liquidity regimes
The assumption $L_{0,t} > x_{0,t} + \tilde{M}$ insures that the four liquidity regimes may arise in the feasible set. Equivalently, the assumption states that the vertical limit introduced by the constraint $\delta L_{t+1} \geq -L_{0,t}$ is between point C and point A.

iii) Solvency line
The assumption $Y_t < x_{1,t}p_{1,t} + \gamma\tilde{M}$ insures point B is below point A . The solvency line is in the feasible set.

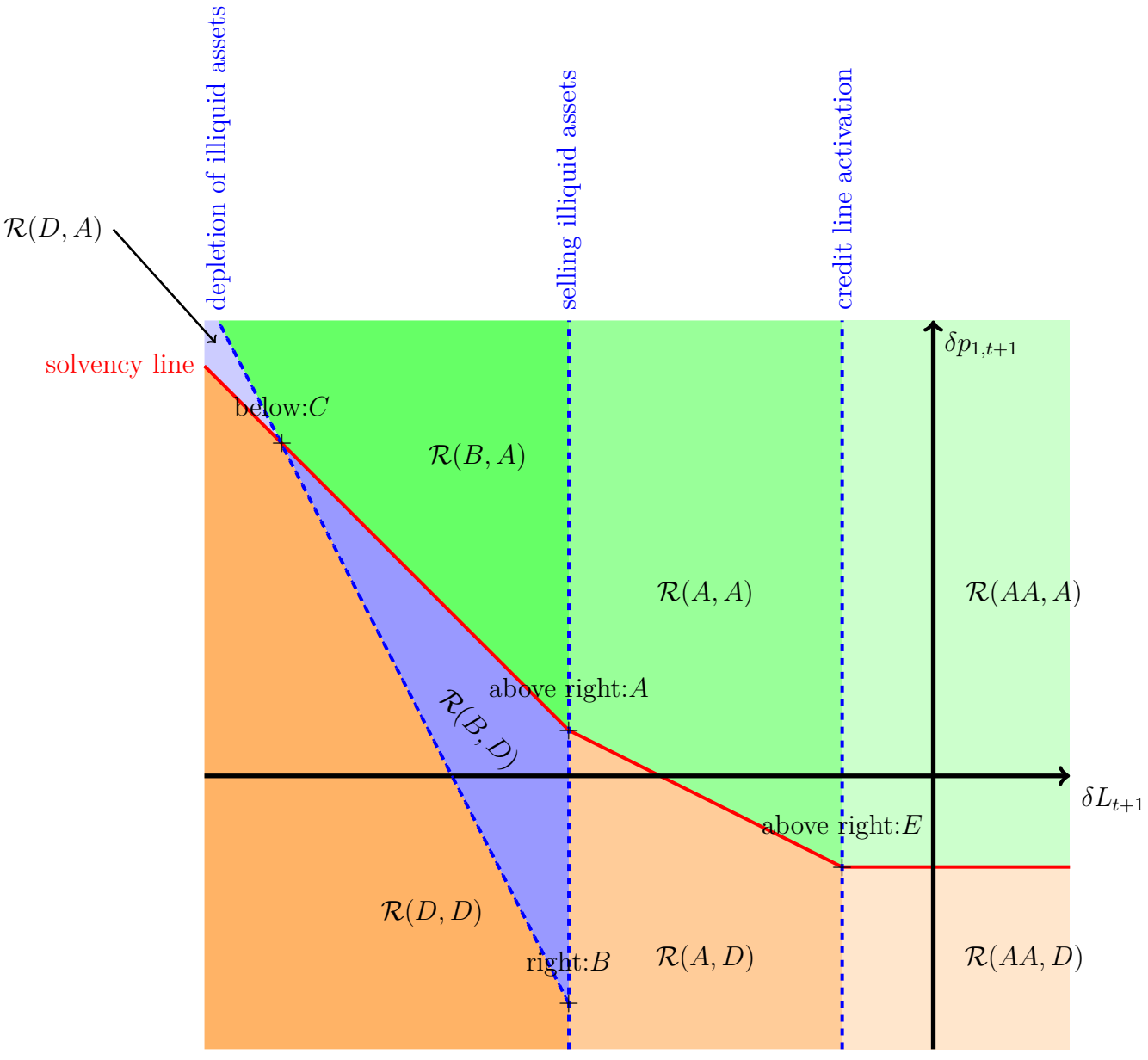


Figure D.1: All Potential Regimes (case B below A)

D.5.3 Case $Y_t > x_{1,t}p_{1,t} + \gamma\tilde{M}$

Considering $Y_t > x_{1,t}p_{1,t} + \gamma\tilde{M}$ implies that point B is above point A. The situation is represented in Figure D.2.
The abscissa of point C is still smaller than he limit of the shock on the liability side. Consequently, regimes $\mathcal{R}(B, A)$ and $\mathcal{R}(D, D)$ cannot arise.

D.6 The geometry of regimes with reserves

D.6.1 The figure

The 15 potential regimes are represented in Figure D.3.

Let us define:

- Point A. At point A, the financial institution is on the hedge of insolvency and the complete credit line is exactly sufficient to cover its liquidity needs. Therefore, $Y^*_{t+1|t}(A) = 0$ and $\delta L_{t+1}(A) = -x_{0,t} - \tilde{M}$.
- Point B. At point B, the financial institution has no more illiquid asset to sell and the complete credit line is exactly sufficient to cover its liquidity needs. Therefore, $-x_{0,t} - \delta L_{t+1}(B) - \tilde{M} = x_{1,t}(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}(B))H$ and $\delta L_{t+1}(B) = -x_{0,t} - \tilde{M}$.
- Point C. At point C, the financial institution is on the hedge of insolvency and has no more illiquid asset to sell. Therefore, $Y^*_{t+1|t}(C) = 0$ and $-x_{0,t} - \delta L_{t+1}(C) - \tilde{M} = x_{1,t}(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}(C))H$.
- Point E. At point E, the financial institution is on the hedge of insolvency and covers its liquidity needs by using exactly its cash. Therefore $Y^*_{t+1|t}(E) = 0$ and $\delta L_{t+1}(C) = -x_{0,t}$.
- Point G. At point G, the financial institution is on the hedge of insolvency and the reserve $R_{1,t}$ has been completely used. Therefore, $Y^*_{t+1|t}(G) = 0$ and $\delta L_{t+1}(G) = -x_{0,t} - \tilde{M} - R_{1,t} - x_{1,t}H(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1})$.
- Point I. At point I, the financial institution is exactly fulfilling capital regulation and has no more illiquid asset to sell. Therefore, $Y^*_{t+1|t}(I) = R_{2,t} + R_{2,t}$ and $-x_{0,t} - \delta L_{t+1}(I) - \tilde{M} = x_{1,t}(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}(I))H$.

With reserves, the PnL $Y^*_{t+1|t}$ becomes:

$$\begin{aligned} Y^*_{t+1|t} = \Big(& Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} - \gamma min\left[\tilde{M}; (-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1})^+\right] \\ & - \left(\frac{1}{H} - 1\right) min\left[(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M})^+; x_{1,t}H(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1}\right] \Big) \\ & \times \mathbb{1}_{\left(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M} - x_{1,t}H(p_{1,t} + \delta p_{1,t+1})\right)^+ < R_{1,t}}. \end{aligned}$$

The formula is very close to the one without reserve. The term corresponding to illiquid asset selling is now bounded by the quantity of available illiquid asset and the dummy variable corresponds to the complete use of the reserve. Note that when the reserve is used, there is no decrease in the PnL since the reserve is perfectly liquid (when used).

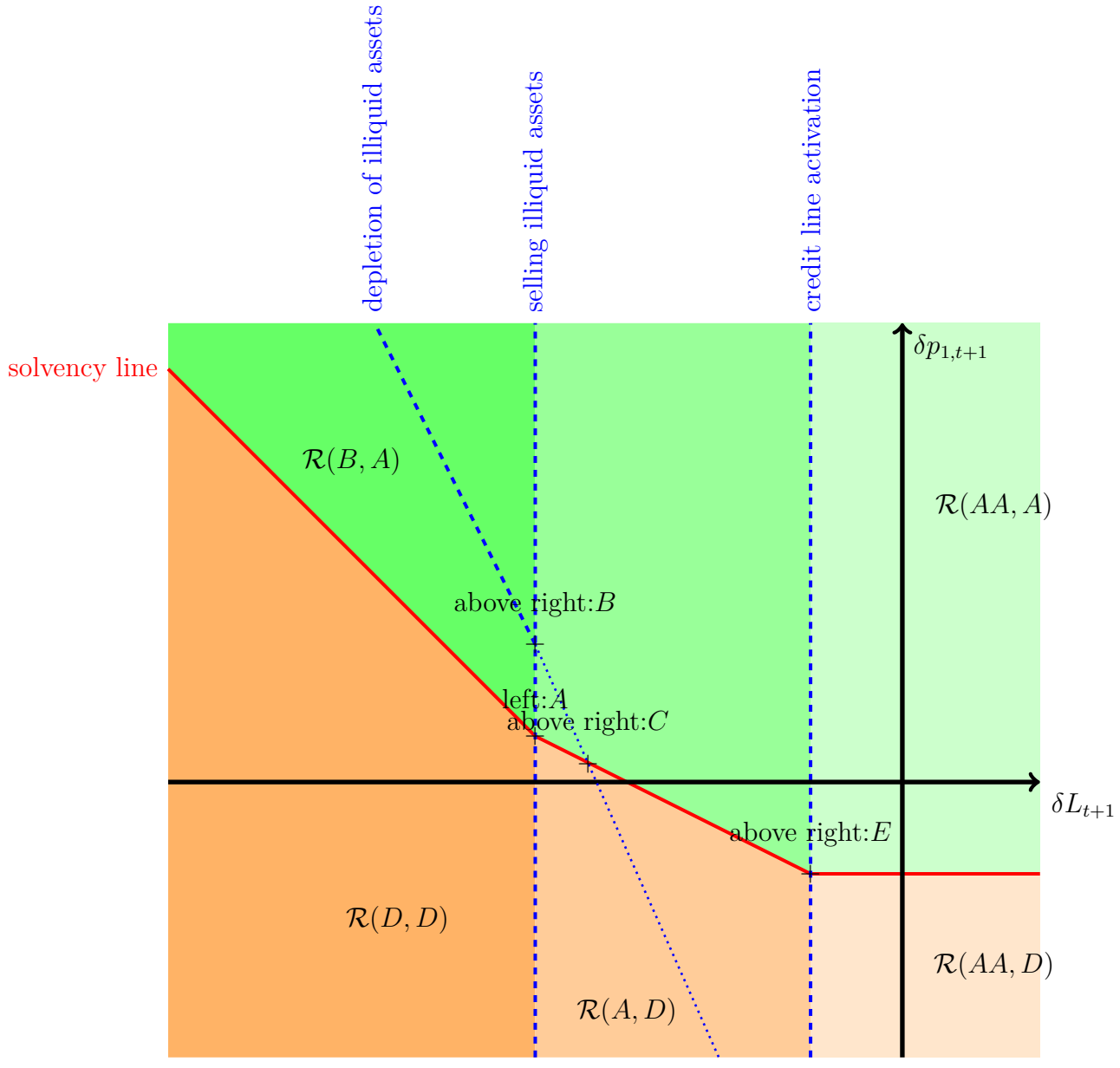


Figure D.2: All Potential Regimes (case B above A)

The coordinates of the aforementioned points are:

$$x_A = -x_{0,t} - \tilde{M} \quad ; \quad y_A = -\frac{Y_t}{x_{1,t}} + \gamma\frac{\tilde{M}}{x_{1,t}}$$

$$x_B = -x_{0,t} - \tilde{M} \quad ; \quad y_B = -p_{1,t}$$

$$x_C = -L_{1,t} - L_{0,t} - (1+\gamma)\tilde{M} \quad ; \quad y_C = -p_{1,t} + \frac{1}{Hx_{1,t}}\left(-x_{0,t} - L_{1,t} - L_{0,t}\right)$$

$$x_E = -x_{0,t} \quad ; \quad y_E = -\frac{Y_t}{x_{1,t}}$$

$$x_G = -L_{1,t} - L_{0,t} - (1+\gamma)\tilde{M} - R_{1,t} \quad ; \quad y_G = -\frac{\frac{1}{H}-1}{H}p - \frac{Y_t}{x_{1,t}H} + \gamma\frac{\tilde{M}}{x_{1,t}H} + \frac{R_{1,t}}{x_{1,t}H}$$

$$x_I = -L_{1,t} - L_{0,t} - (1+\gamma)\tilde{M} - \frac{1}{H}\left(R_{1,t} + R_{2,t}\right)$$

$$; \quad y_I = -\frac{Y_t}{x_{1,t}H} + \gamma\frac{\tilde{M}}{x_{1,t}H} + \frac{R_{1,t}+R_{2,t}}{x_{1,t}H} + \left(\frac{1}{H} - 1\right)$$

D.6.2 Proof of Proposition IV.2

i) Exclusion of Regimes $\mathcal{R}(C,C)$, $\mathcal{R}(C,A)$, $\mathcal{R}(D,A)$ and $\mathcal{R}(D,C)$
The abscissa of point C is $x_C = -L_{1,t} - L_{0,t} - (1+\gamma)\tilde{M}$. x_C is always smaller than $-L_{0,t}$, which is the limit of the shock on the liability side (see equation (5)). Thus point C is not in the feasible set. Moreover, the abscissas of point G and I are lower than the abscissa of point C, therefore points G and I are not in the feasible set. Therefore, Regimes $\mathcal{R}(C,C)$, $\mathcal{R}(C,A)$, $\mathcal{R}(D,A)$ and $\mathcal{R}(D,C)$ cannot arise.

ii) Liquidity regimes The assumption $L_{0,t} > x_0 + \tilde{M}$ insures that the four liquidity regimes may arise in the feasible set. Equivalently, the assumption states that the vertical limit introduced by the constraint $\delta L_{t+1} \geq -L_{0,t}$ is between point C and point A.

iii) Solvency regimes The assumption $Y_t < x_{1,t}p_{1,t} + \gamma\tilde{M}$ and insures point B is below point A . The solvency line is in the feasible set.

D.7 Increasing haircut with sold volume

For the sake of simplicity, we consider a unique discount rate H. Considering a price-impact model, where the more the illiquid asset is sold, the lower its price is, is straightforward. The fire-sale mechanism can be seen as a combination of N tranches with discount rate H_1,... H_N. Figure D.4 represents the situation with $N = 3$. A continuous price-impact function is a limiting situation when N goes to infinity.

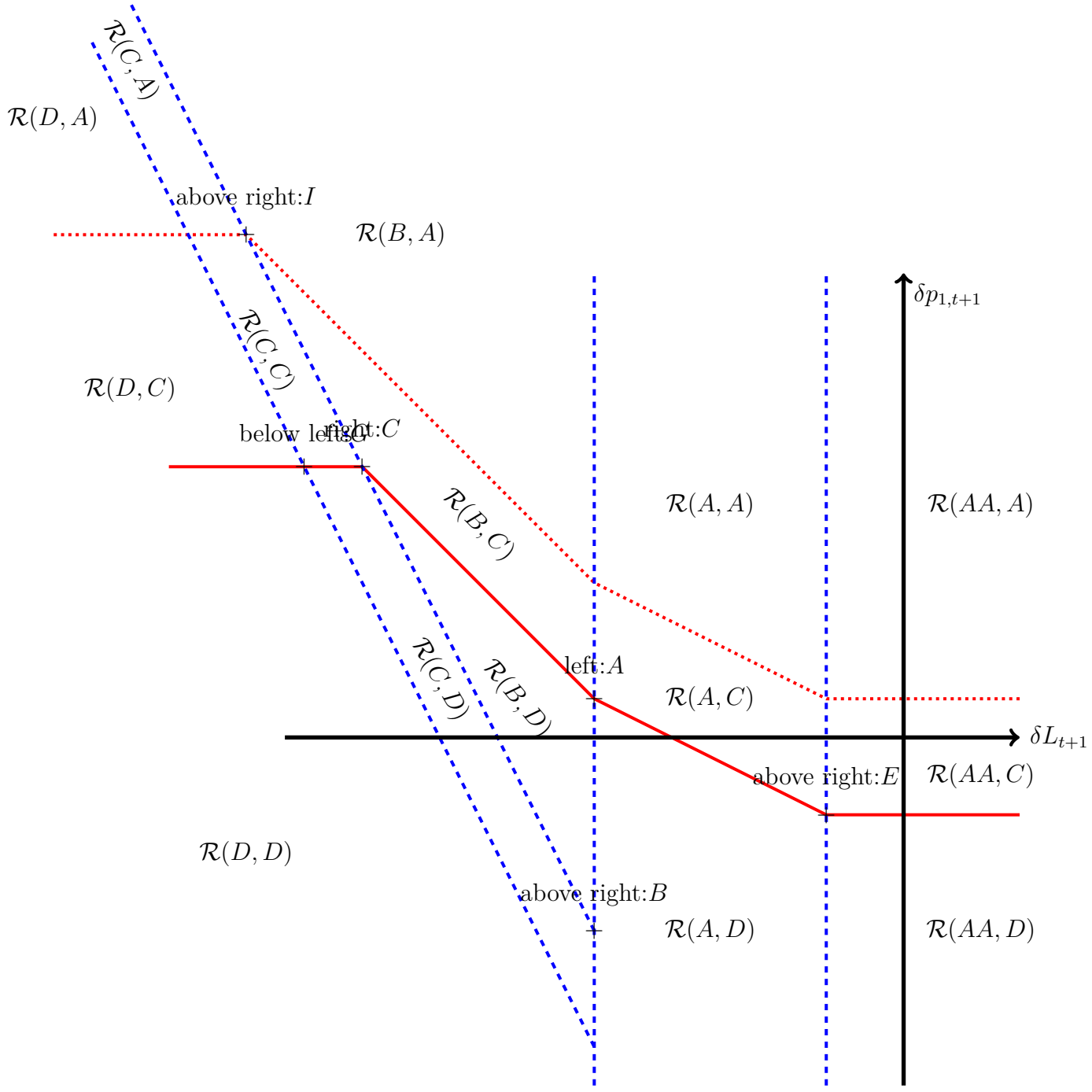


Figure D.3: All Potential Regimes with Reserves (case B below A)

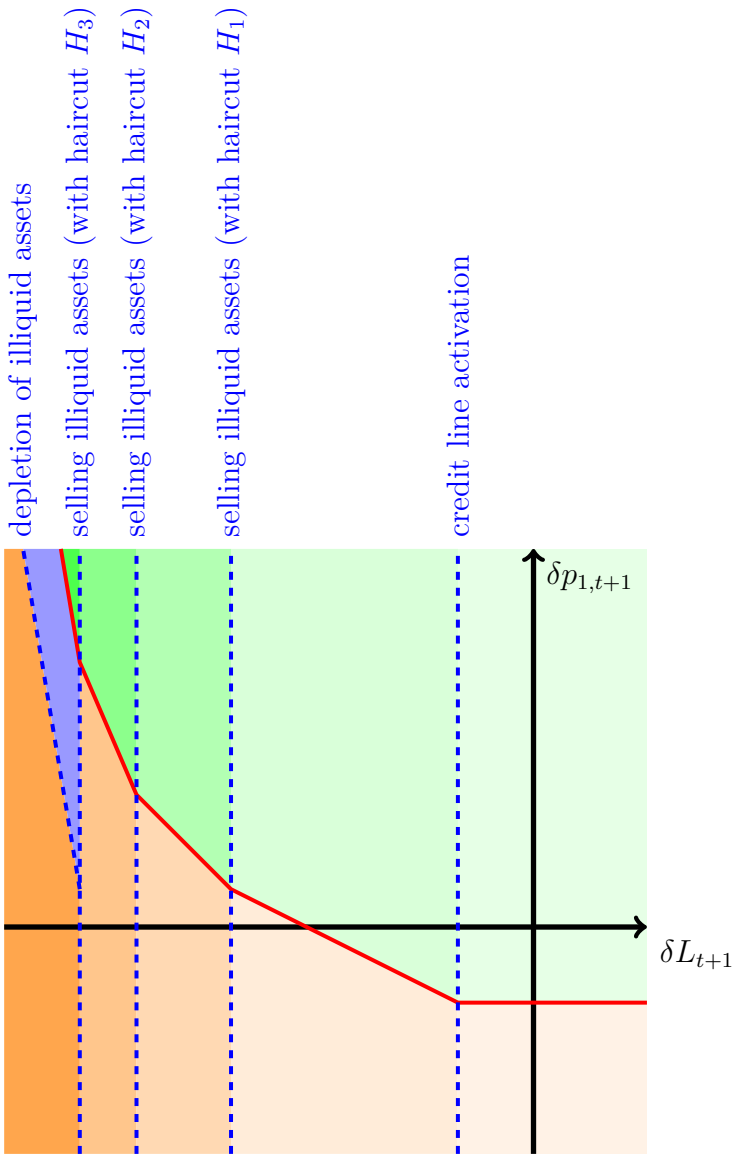


Figure D.4: 11 Regimes with Limited Credit Line and 3 Tranches of Illiquidity

Chapitre V

Perspectives

Dans le premier chapitre, nous avons pris du recul sur les outils économétriques présentés comme des mesures du risque systémique. La comparaison de différentes définitions a montré que s'il y a des ingrédients communs –une interaction entre la sphère réelle et la sphère financière, le caractère extrême, la contagion...– l'agencement de ces ingrédients varient, rendant ces définitions d'apparence si proche difficilement compatibles. Nous avons aussi vu que définir et mesurer ne sont pas des processus indépendants. Pour définir le risque systémique, nous avons examiné les différents risques auxquels est soumise une institution au sein d'un système donné. Indépendamment de la nature de ces risques –endogène/exogène, global/spécifique...–, nous prenons le parti de définir le risque systémique comme l'union des risques qui sont pertinents au niveau du système. Cette définition fondée sur la segmentation individuel/système se veut l'écho d'une distinction entre politique microprudentielle et politique macroprudentielle. Néanmoins, il ne s'agit pas d'une opposition stérile mais d'une démarcation reconnaissant à la fois des objectifs différents et des interactions réciproques. Une composante majeure du risque systémique est le risque de contagion qui traduit les influences entre institutions. La contagion peut être directe lorsqu'elle repose sur les expositions bilatérales entre institutions, ou indirecte lorsqu'elle correspond à des transmissions entre différents classes de risques.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes focalisés sur le risque de contagion en solvabilité entre institutions financières. La méthodologie proposée pour mesurer la contagion est souple car elle s'adapte à n'importe quelle mesure de l'état d'un système financier (nombre d'institutions en défaut, niveau des capitaux propres...). En effet, elle consiste à comparer pour un choc donné (ou une famille de chocs donnés) la valeur de cette mesure dans deux situations différentes : une situation observable où la contagion est présente et une situation contre-factuelle où la contagion est absente car sans interconnexions. Pour obtenir un outil effectif, il est donc nécessaire de définir une ou plusieurs mesures de l'état d'un système financier. Ces grandeurs

constituent typiquement les tableaux de bords de suivi des risques des autorités de supervision. D'autres contre-factuels sont envisageables pour identifier d'autres effets. En particulier, il est possible d'annuler seulement les interconnexions d'une institution pour obtenir une mesure de son influence au sein du système. Sous cette optique, ce chapitre contribue aussi à la problématique d'identification des institutions systémiques ("Systemically Important Financial Institutions" en anglais).

Le troisième chapitre adopte un point de vue différent des interconnexions. Si l'objectif est une problématique de marché puisque nous nous concentrons sur la valorisation de la dette des institutions financières, l'enjeu relève aussi du rôle du superviseur. En effet, une valorisation au plus juste des titres de dette émis par les institutions est une condition nécessaire à l'efficacité, voire à la stabilité, du financement des institutions. Cependant, les informations nécessaires à ce mode de calcul nécessite l'accès à des données que seul le superviseur dispose (actuellement du moins). Nos travaux suggèrent donc que la supervision macroprudentielle peut aussi consister à fournir aux acteurs des marchés les informations pertinentes sans pour autant révéler l'ensemble des données collectées. A cet égard, les autorités de supervisions américaines ont effectué des améliorations sensibles : elles mettent à disposition dans un format unifié un ensemble d'informations –les bilans bancaires– jusqu'à peu publiques mais éparses.

Dans le quatrième chapitre, nous nous concentrons sur les effets conjoints de chocs à l'actif et au passif d'une institution financière. La cadre proposé permet d'analyser et de quantifier un risque endogène à l'institution. Ce risque ne découle pas d'aléas extérieurs à l'institution mais de sa réaction. Nous montrons alors que ces aléas interagissent générant un risque additionnel par rapport à l'approche standard qui considère que seul l'extérieur est à l'origine des risques. Nous montrons comment dissocier dans toute mesure du risque calculé sur la résultante des sources de risques les influences du risque de marché (associé à l'actif), le risque de financement (associé au passif) et le risque de liquidité de marché qui est un terme d'interaction entre l'actif et le passif. Nous pouvons aussi distinguer précisément la notion de défaut de solvabilité de la notion de défaut de liquidité. Une conséquence en termes de réglementation est la nécessité de déterminer les réserves pour ces deux défauts de manière conjointe.

Ces différents travaux offrent plusieurs axes de recherche futures. Au niveau des modèles de contagion en solvabilité, il faut pouvoir étendre l'analyse aux interconnexions conditionnelles. Pour les banques, on pense aux produit dérivés (CDS par exemple) ou plus généralement aux éléments hors-bilan. Pour les assurances, il peut

s'agir des contrats d'assurance. Lorsque le sous-jacent au titre conditionnel est extérieur au système (un CDS sur un souverain par exemple), l'activation potentielle modifie les bilans de manière exogène. Il s'agirait donc d'une extension directe. Par contre, lorsque le sous-jacents appartient au système, l'activation peut devenir endogène. Un important travail d'analyse devrait être nécessaire pour déterminer les éventuelles conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre. De tels modèles seraient très appréciables pour modéliser le risque de contagion entre assureurs et ré-assureurs par exemple.

L'analyse des interactions entre solvabilité et liquidité développée au quatrième chapitre appelle un développement en termes de contagion. Il s'agirait de disposer d'un modèle de contagion en solvabilité et en liquidité. Les modèles existants sur cette thématiques (Cifuentes et al. (2005) ou Fourel et al. (2013) par exemple) reposent principalement sur des heuristiques, sans proposer de cadre structurel. La démarche serait donc d'examiner les réactions des bilans d'un ensemble d'institution interconnectées face à des chocs (communs) à l'actif et au passif. La décomposition du risque de chaque institution serait alors dédoublée en distinguant ce qui est individuel de ce qui est systémique. En termes de calcul de réserves réglementaires, quatre comptes seraient nécessaires : liquidité individuelle, liquidité systémique, solvabilité individuelle et solvabilité systémique. Les questions d'agrégation et de désagrégation des risques discutées dans le premier chapitre auraient alors toutes leurs pertinences.

D'une manière plus générale, les modèles présentés gagneraient à s'inscrire dans un cadre dynamique. Nous nous sommes attachés à modéliser le risque en considérant une partie du bilan comme fixé (les interconnexions aux deuxième et troisième chapitres ; les volumes à l'actif au quatrième). Déterminer ces éléments, considérés jusqu'alors comme exogènes, comme résultant d'un processus d'optimisation serait un grand pas. Par exemple, le niveau d'actif liquide d'une banque ainsi que le volume de la ligne de crédit –sa couverture contre le risque de liquidité– résulteraient des ses anticipations aux chocs. Il serait alors possible de prévoir les déformations du réseau d'interconnexions en fonction des paramètres exogènes (rentabilité des activités, fidélité des clients...) et des paramètres réglementaires (montants des réserves).

Enfin, en parallèle de ces prolongements conceptuels, un important axe de travail concerne deux enjeux opérationnels. Premièrement, le temps de calcul est une problématique sérieuse lorsque le nombre d'institutions devient grand. La complexité des algorithmes "naïfs" de résolution des modèles de contagion est exponentiel avec le nombre d'institutions. Nous avons montré comment réduire ce temps de calcul dans certains cas. Pour d'autres cas, il existe des algorithmes heuristiques qui gagne-

raient à être analysés pour déterminer leurs caractéristiques, voir pour les améliorer. Deuxièmement, nous avons vu dans le premier chapitre que la disponibilité des données est une contrainte sur les types de modèles possibles, donc sur les mesures envisageables. Un axe d'amélioration peut être la mise-à-disposition plus large de certaines données jugées sensibles. Il serait cependant illusoire de croire qu'il suffit de disposer de plus de données. Il faut savoir les traiter en ayant des modèles adaptés à ce qu'elles renseignent. Par exemple, le projet Data Gaps vise à collecter de manière hebdomadaire les 20 plus grandes expositions des plus grosses banques. Il faudra donc disposer non seulement de modèles pertinents à l'échelle de la semaine mais aussi des techniques de reconstruction de données de réseau censurées. L'enjeu est ici de savoir comment à partir d'un échantillon avoir une bonne estimation de l'ensemble du réseau. Le problème inverse peut aussi se rencontrer : disposer de données beaucoup trop granulaire pour le modèle adapté au besoin final nécessite d'être capable d'effectuer des regroupements pertinent et automatiques.

Bibliographie

Acemoglu, D., Ozdaglar, A., and Tahbaz-Salehi, A. (2013). Systemic risk and stability in financial networks. *National Bureau of Economic Research*, 18727.

Acharya, V., Engle, R., and Richardson, M. (2012). Capital shortfall : A new approach to ranking and regulating systemic risks. *The American Economic Review Papers and Proceedings*, 102(3) :59–64.

Acharya, V. V., Gale, D., and Yorulmazer, T. (2011). Rollover risk and market freezes. *The Journal of Finance*, 66(4) :1177–1209.

Acharya, V. V., Pedersen, L. H., Philippon, T., and Richardson, M. P. (2010). Measuring systemic risk. *FRB of Cleveland Working Paper*, 10-02.

Adrian, T. and Brunnermeier, M. (2008). Risk spillovers of financial institutions. *Federal Reserve Bank of New York, Mimeo.*

Adrian, T. and Brunnermeier, M. K. (2011). Covar. *National Bureau of Economic Research*, 17454.

Allen, F. and Gale, D. (2000). Financial contagion. *Journal of Political Economy*, 108(1) :1–33.

Alves, I., Ferrari, S., Franchini, P., Héam, J.-C., Jurca, P., Langfield, S., Laviola, S., Liedorp, F., Sanchez, A., Tavolaro, S., and Vuillemey, G. (2013). The structure and resilience of the european interbank market. *European Systemic Risk Baord (ESRB) Occasional Paper*, 3.

Ampudia, M., van Vlokhoven, H., and Zochowski, D. (2014). Financial fragility of euro area households. *Mimeo.*

Anand, K., Craig, B., and von Peter, G. (2013). Fill in the blanks : Network structure and interbank contagion. *Working Paper, Deutsche Bundesbank*, 02/2014.

Angelini, P., Maresca, G., and Russo, D. (1996). Systemic risk in the netting system. *Journal of Banking & Finance*, 20(5) :853–868.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3) :203–228.

Auray, S. and Gouriéroux, C. (2013). Procyclicity of financial regulation. *CREST Working Paper*, 2013-35.

Basel Committee on Banking Supervision, B. (2011). Basel iii : A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. *Basel Committee on Banking Supervision Consultative Document*, December 2010, revised June 2011.

Basel Committee on Banking Supervision, B. (2013a). Basel iii : the liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools. *Basel Committee on Banking Supervision Consultative Document*.

Basel Committee on Banking Supervision, B. (2013b). Supervisory framework for measuring and controlling large exposures. *Basel Committee on Banking Supervision Consultative Document*.

Baud, C. (2013). L'extension du capitalisme financier par les instruments : la réforme de la réglementation de Bâle sur le risque de crédit. In Chiapello, E. and Gilbert, P., editors, *Sociologie des outils de gestion*. La Découverte, Paris.

Beber, A., Brandt, M. W., and Kavajecz, K. A. (2009). Flight-to-quality or flight-to-liquidity ? evidence from the euro-area bond market. *Review of Financial Studies*, 22(3) :925–957.

Bennett, M. K. (2011). *Affine and projective geometry*. John Wiley & Sons.

Bernanke, B. S., Boivin, J., and Eliasz, P. (2005). Measuring the effects of monetary policy : a factor-augmented vector autoregressive (favar) approach. *The Quarterly Journal of Economics*, 120(1) :387–422.

BIS (2009). Principles for sound stress testing practices and supervision. *Bank for International Settlements Consultative Document*.

Black, F. and Cox, J. C. (1976). Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions. *The Journal of Finance*, 31(2) :351–367.

Blåvarg, M. and Nimander, P. (2002). Inter-bank exposures and systemic risk. *Sveriges Riksbank Economic Review*, 2 :19–45.

Bolton, P., Chen, H., and Wang, N. (2011). A unified theory of tobin's q, corporate investment, financing, and risk management. *The journal of Finance*, 66(5) :1545–1578.

Boorstin, D. (1988). *Les Découvreurs*. Robert Laffont.

Borio, C. (2011). Implementing a macroprudential framework : Blending boldness and realism. *Capitalism and Society*, 6(1).

Brownlees, C. T. and Engle, R. F. (2012). Volatility, correlation and tails for systemic risk measurement. *Available at SSRN 1611229*.

Brunnermeier, M. K. (2009). Deciphering the liquidity and credit crunch 2007-2008. *Journal of Economic Perspectives*, 23(1) :77–100.

Brunnermeier, M. K. and Pedersen, L. H. (2009). Market liquidity and funding liquidity. *Review of Financial Studies*, 22(6) :2201–2238.

Burkart, O. and Coudert, V. (2002). Leading indicators of currency crises for emerging countries. *Emerging Markets Review*, 3(2) :107–133.

Burtschell, X., Gregory, J., and Laurent, J.-P. (2009). A comparative analysis of cdo pricing models. *The Journal of Derivatives*, 16(4) :9–37.

Carey, M. (2002). Some evidence on the consistency of banks' internal credit ratings. *Credit ratings : Methodologies, Rationale and Default Risk, London (Risk Books)*.

Castrén, O. and Kavonius, I. K. (2009). Balance sheet interlinkages and macro-financial risk analysis in the euro area. *European Central Bank Working Paper*, 1124.

CEBS (2009a). Guidelines on the revised large exposures regime. *Committee of European Banking Supervisors*.

CEBS (2009b). Revised guidelines on financial reporting. *Committee of European Banking Supervisors*.

Cifuentes, R., Ferrucci, G., and Shin, H. S. (2005). Liquidity risk and contagion. *Journal of the European Economic Association*, 3(2-3) :556–566.

Cocco, J. F., Gomes, F. J., and Martins, N. C. (2009). Lending relationships in the interbank market. *Journal of Financial Intermediation*, 18(1) :24–48.

Cohan, W. D. (2010). *House of cards : A tale of hubris and wretched excess on Wall Street*. Random House LLC.

Cont, R., Moussa, A., and Santos, E. B. e. (2010). Network structure and systemic risk in banking systems. *Available at SSRN : 1733528*.

Cousin, A., Dorobantu, D., and Rullière, D. (2013). An extension of Davis and Lo's contagion model. *Quantitative Finance*, 13(3) :407–420.

Darolles, S., Gouriéroux, C., and Gagliardini, P. (2011). Survival of hedge funds : Frailty vs contagion. *CREST Working Paper*, 2012-36.

Davis, M. and Lo, V. (2001a). Infectious defaults. *Quantitative Finance*, 1 :382–387.

Davis, M. and Lo, V. (2001b). Modelling default correlation in bond portfolios. *Mastering Risk*, 2 :141–151.

Davydenko, S. A. (2012). When do firms default ? a study of the default boundary. In *A Study of the Default Boundary (November 2012). EFA Moscow Meetings Paper*.

de Bandt, O. and Hartman, P. (2000). Systemic risk : a survey. *European Central Bank Working Paper*, 35.

de Bandt, O., Hartmann, P., and Peydró, J.-L. (2009). Systemic risk in banking : an update. *Oxford Handbook of Banking. Oxford University Press, Oxford*.

Degryse, H. and Nguyen, G. (2007). Interbank exposures : An empirical examination of contagion risk in the belgian banking system. *International Journal of Central Banking*, 3(2) :123–171.

Demange, G. (2012). Contagion in financial networks : a threat index. *Paris School of Economics Discussion Paper*, 2012-02.

Desrosieres, A. (1993). *La politique des grands nombres*. La découverte, 1 edition.

Diamond, D. W. and Dybvig, P. H. (1983). Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *The Journal of Political Economy*, pages 401–419.

Duarte, F. and Eisenbach, T. M. (2013). Fire-sale spillovers and systemic risk. *New-York FED staff report*, 645.

Dubecq, S. and Gourieroux, C. (2012). Shock on variable or shock on distribution with application to stress-tests. *Banque de France Working Paper*, 368.

Duffie, D. and Garleanu, N. (2001). Risk and valuation of collateralized debt obligations. *Financial Analysts Journal*, pages 41–59.

Duffie, D. and Singleton, K. (1998). *Simulating correlated defaults*. Bank of England.

EBA, E. B. A. (2014). Eba/ssm stress test : The macroeconomic adverse scenario. Technical report, EBA.

Egloff, D., Leippold, M., and Vanini, P. (2007). A simple model of credit contagion. *Journal of Banking & Finance*, 31(8) :2475–2492.

Eisenberg, L. and Noe, T. H. (2001). Systemic risk in financial systems. *Management Science*, 47(2) :236–249.

Elliott, M., Golub, B., and Jackson, M. O. (2013). Financial networks and contagion. *Available at SSRN 2175056*.

Elsinger, H. (2009). Financial networks, cross holdings, and limited liability. *Oesterreichische Nationalbank Discussion Paper*.

Elsinger, H., Lehar, A., and Summer, M. (2006). Risk assessment for banking systems. *Management Science*, 52(9) :1301–1314.

Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events : for insurance and finance*, volume 33. Springer.

Fève, P. (2006). La modélisation macro-économétrique dynamique. *Revue d'économie politique*, 116(2) :147–197.

Financial Stability Board, F. (2009). Guidance to assess the systemic importance of financial institutions, markets and instruments : Initial considerations. Technical report, Financial Stability Board.

Financial Stability Board, F. (2013). Fourth progress report on the implementation of the g-20 data gaps initiative. Technical report, Financial Stability Board.

Forbes, K. J. and Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence : measuring stock market comovements. *The Journal of Finance*, 57(5) :2223–2261.

Fourel, V., Héam, J.-C., Salakhova, D., and Tavolaro, S. (2013). Domino effects when banks hoard liquidity : The French network. *Banque de France Working Paper*, 432.

FSA (2009). Stress and scenario testing : Feedback on cp08/24 and final rules. *Financial Service Authority Policy Statement*, 09/20.

Furfine, C. H. (2003). Interbank exposures : Quantifying the risk of contagion. *Journal of Money, Credit & Banking (Ohio State University Press)*, 35(1).

G10 (2001). Report on consolidation in the financial sector. Technical report, BIS, IMF, OECD.

Gagliardini, P. and Gouriéroux, C. (2013). Correlated risks vs contagion in stochastic transition models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(11) :2241–2269.

Gai, P., Haldane, A., and Kapadia, S. (2011). Complexity, concentration and contagion. *Journal of Monetary Economics*, 58(5) :453–470.

Gai, P. and Kapadia, S. (2010). Liquidity hoarding, network externalities, and interbank market collapse. *Proceeding of the Royal Society A*, 466 :2401–2423.

Galati, G. and Moessner, R. (2013). Macroprudential policy–a literature review. *Journal of Economic Surveys*, 27(5) :846–878.

Gauthier, C., He, Z., and Souissi, M. (2010). Understanding systemic risk : the trade-offs between capital, short-term funding and liquid asset holdings. *Bank of Canada Working Paper*, 2010-29.

Gersbach, H. and Rochet, J.-C. (2012). Capital regulation and credit fluctuations. *CEPR Discussion Paper*, DP9077.

Giesecke, K. and Weber, S. (2006). Credit contagion and aggregate losses. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(5) :741–767.

Goldstein, R., Ju, N., and Leland, H. (2001). An ebit-based model of dynamic capital structure. *The Journal of Business*, 74(4) :483–512.

Gordy, M. B. (2003). A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation*, 12(3) :199–232.

Gorton, G. and Metrick, A. (2012). Securitized banking and the run on repo. *Journal of Financial Economics*, 104(3) :425–451.

Gouriéroux, C. and Héam, J.-C. (2013). Funding liquidity risk from a regulatory perspective. *CREST Working Paper*, 2013-20.

Gouriéroux, C., Héam, J.-C., and Monfort, A. (2012). Bilateral exposures and systemic solvency risk. *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*, 45(4) :1273–1309.

Gouriéroux, C., Héam, J.-C., and Monfort, A. (2013). Liquidation equilibrium with seniority and hidden cdo. *Journal of Banking & Finance*, 37(12) :5261–5274.

Gouriéroux, C., Laffont, J.-J., and Monfort, A. (1980a). Coherency conditions in simultaneous linear equation models with endogenous switching regimes. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 48(1) :75–96.

Gouriéroux, C., Laffont, J.-J., and Monfort, A. (1980b). Disequilibrium econometrics in simultaneous equations systems. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 75–96.

Gouriéroux, C. and Monfort, A. (2013). Allocationg systemic risk in a regulatory perspective. *International Journal of Theorical and Applied Finance*, 16(7).

Greenspan, A. (2004). Testimony before the committee on financial services, house of representatives.

Greenwood, R., Landier, A., and Thesmar, D. (2012). Vulnerable banks. *National Bureau of Economic Research (NBER) Working Paper*, 18537.

Hackbarth, D., Miao, J., and Morellec, E. (2006). Capital structure, credit risk, and macroeconomic conditions. *Journal of Financial Economics*, 82(3) :519–550.

Hansen, L. P. (2012). Challenges in identifying and measuring systemic risk. *National Bureau of Economic Research (NBER) Working Paper*, 18505.

He, Z. and Xiong, W. (2012a). Dynamic debt runs. *Review of Financial Studies*, page hhs004.

He, Z. and Xiong, W. (2012b). Rollover risk and credit risk. *The Journal of Finance*, 67(2) :391–430.

Heckman, J. J. (1979). Sample selection bias as a specification error. *Econometrica : Journal of the econometric society*, pages 153–161.

Humphrey, D. B. (1986). Payments finality and risk of settlement failure. *Technology and the Regulation of Financial Markets : Securities, Futures, and Banking (Heath, Lexington)*, pages 97–120.

Israel, G. (1998). *La Mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique*. Éditions du Seuil.

Jarrow, R. A. and Yu, F. (2001). Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. *the Journal of Finance*, 56(5) :1765–1799.

Jobst, A. A. (2014). Measuring systemic risk-adjusted liquidity (srl) ?a model approach. *Journal of Banking & Finance*.

Kaufman, G. G. and Scott, K. E. (2003). What is systemic risk, and do bank regulators retard or contribute to it ? *Independent Review*, 7(3) :371–391.

Krishnamurthy, A. (2010). How debt markets have malfunctioned in the crisis. *Journal of Economic Perspectives*, 24(1) :3–28.

Kupiec, P., Nickerson, D., and Golding, E. (2001). Assessing systemic risk exposure under alternative approaches for capital adequacy. In *Bank of England Conference, Banks and Systemic Risk*.

Leland, H. E. (1994). Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *The journal of finance*, 49(4) :1213–1252.

Leland, H. E. and Toft, K. B. (1996). Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *The Journal of Finance*, 51(3) :987–1019.

Li, D. X. (2000). On default correlation : A copula function approach. *The Journal of Fixed Income*, 9(4) :43–54.

Larosière (de), J. (2009). Report of the high-level group on financial supervision in the eu. *Report de Larosière*.

Longstaff, F. A., Mithal, S., and Neis, E. (2005). Corporate yield spreads : Default risk or liquidity ? new evidence from the credit default swap market. *The Journal of Finance*, 60(5) :2213–2253.

Lublóy, Á. (2005). Domino effect in the hungarian interbank market. *Hungarian Economic Review*, 52(4) :377–401.

MacKenzie, D. and Spears, T. (2012). 'the formula that killed wall street' ? the gaussian copula and the material cultures of modelling. Technical report, Working paper, University of Edinburgh.

Malherbe, F. (2013). Self-fulfilling liquidity dry-ups. *The Journal of Finance*, forthcomming.

Maurer, M. and Sheldon, G. (1998). Interbank lending and systemic risk : an empirical analysis for switzerland. *REVUE SUISSE D'ECONOMIE POLITIQUE ET DE STATISTIQUE*, 134 :685–704.

McAndews, J. and Wasilyew, G. (1995). Simulations of failure in a payment system. *Federal Reserve Bank of Philadelphia Discussion Paper*.

McDonough, W. J. (1998). Testimony by the president of the federal reserve bank of new york before the committee on banking and financial services of the us house of representatives, 1 october.

Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 29(2) :449–470.

Mistrulli, P. E. (2011). Assessing financial contagion in the interbank market : Maximum entropy versus observed interbank lending patterns. *Journal of Banking & Finance*, 35(5) :1114–1127.

Morris, S. and Shin, H. S. (2009). Illiquidity component of credit risk. *Princeton University Working Paper*.

Nier, E., Yang, J., Yorulmazer, T., and Alentorn, A. (2007). Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6) :2033–2060.

Pierret, D. (2014). Systemic risk and the solvency-liquidity nexus of banks. *Available at SSRN 2346606*.

Reeves, H. (1981). *Patience dans l'azur, l'évolution cosmique*. Éditions du Seuil.

Repullo, R. and Suarez, J. (2013). The procyclical effects of bank capital regulation. *Review of Financial Studies*, 26(2) :452–490.

Rochet, J.-C. and Vives, X. (2004). Coordination failures and the lender of last resort : was bagehot right after all ? *Journal of the European Economic Association*, 2(6) :1116–1147.

Rosch, D. and Winterfeldt, B. (2008). Estimating credit contagion in a standard factor model. *Risk*, 21(8) :78–82.

Schönbucher, P. and Schubert, D. (2001). Copula-dependent default risk in intensity models. *no. TIK-Report*, 103.

Schwarcz, S. L. (2008). Systemic risk. In *American Law & Economics Association Annual Meetings*, page 20.

Schwarz, K. (2009). Mind the gap : Disentangling credit and liquidity in risk spreads. *Unpublished paper, University of Pennsylvania. Available at ssrn. com/abstract*, 1486240.

Shleifer, A. and Vishny, R. W. (1997). The limits of arbitrage. *The Journal of Finance*, 52(1) :35–55.

Sims, C. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 48 :1–48.

Suppes, P. (1970). *A probabilistic theory of causality*. North-Holland Publishing Company Amsterdam.

Tasche, D. (1999). Risk contributions and performance measurement. *Working paper, Technische Universität München.*

Tasche, D. (2007). Capital allocation to business units and sub-portfolios : the Euler principle. *Mimeo.*

Toivanen, M. (2009). *Financial interlinkages and risk of contagion in the Finnish interbank market*. Suomen Pankki.

Upper, C. (2011). Simulation methods to assess the danger of contagion in interbank markets. *Journal of Financial Stability*, 7(3) :111–125.

Upper, C. and Worms, A. (2004). Estimating bilateral exposures in the german interbank market : Is there a danger of contagion ? *European Economic Review*, 48(4) :827–849.

Vasicek, O. (1987). Probability of loss on loan portfolio. *KMV Corporation*, 12(6).

Vasicek, O. (1991). Limiting loan loss probability distribution. Discussion paper, KMV Corporation.

Wells, S. (2002). Financial interlinkages in the united kingdom's interbank market and the risk of contagion. *Bank of England Working Paper*, 230.

Wired (2009). Recipe for disaster : The formula that killed wall street. *Wired Magazine*, 17/03/2009.

WSJ (2011a). Banks' paths vary in greek write-downs. *Wall Sreet Journal*, 18/10/2011.

WSJ (2011b). Sec nearing decision on accounting standards. *Wall Sreet Journal*, 18/11/2011.

Annexes

Résumé long

Cette thèse, constituée de quatre chapitres, contribue à la littérature croissante sur le risque systémique. Le terme de risque systémique est employé depuis une dizaine d'années sous des acceptations diverses [de Bandt and Hartman (2000)]. Le premier chapitre présente la notion de risque systémique en s'appuyant sur une brève revue des différentes définitions fournies par la littérature académique et institutionnelle. Cette revue nous permet de discuter la définition du risque systémique au sein d'une analyse plus générale des types de risques auxquels les institutions financières sont exposées. Définir et modéliser sont souvent associés en finance : nous présentons donc pas à pas des éléments de modélisation et en tirons des conséquences en termes de politiques publiques. Le deuxième chapitre se concentre sur la modélisation du risque de contagion qui est un élément clef du risque systémique. Nous détaillons un modèle de propagation des chocs au sein d'un système d'institutions interconnectées en écrivant leur bilan. Nous montrons l'existence et l'unicité d'un équilibre. A partir de cet équilibre, nous développons une méthodologie pour décomposer l'effet d'un choc en un effet direct et un terme de contagion. Dans le troisième chapitre, nous fournissons un cadre de valorisation de la dette d'une institution financière. Nous montrons que les interconnexions transforment ce qui semble être un simple instrument de dette sur une seule contrepartie en un produit dérivé sur un panier de contreparties. Nous fournissons les corrections à apporter aux méthodes standards de valorisation pour prendre en compte une prime de risque spécifique aux interconnexions. Dans le quatrième chapitre, nous nous concentrons sur les effets conjoints de chocs à l'actif et au passif d'une institution financière. Les chocs au passif qui correspondent à des modifications du comportement des clients peuvent générer un risque de financement. Les chocs à l'actif correspondent à la variabilité des prix. Dans un cadre unifié, nous montrons comment prendre en compte conjointement ces deux grandes sources de risque. Ce cadre nous permet d'étendre les mesures de risques usuelles en identifiant ce qui relève du risque de marché (ou de crédit), ce qui relève du risque de financement et ce qui relève du risque de liquidité de marché. Enfin, nous adoptons le point de vue du régulateur en introduisant deux comptes de réserves. Nous expliquons comment déterminer ces niveaux réglementaires.

Analyse du risque systémique, mesure du risque de contagion

Lars Hansen, lauréat du "prix Nobel" 2013 dans un court essai intitulé "Défis de l'identification et de la mesure du risque systémique" [1] [Hansen (2012)] déclare

> "*Je m'interroge, est-ce que le risque systémique devrait être un objet explicite de mesure, ou devrait-il être relégué à faire florès, à être un slogan ou un code utilisé pour justifier la liberté des régulateurs ?*" [2]

Cette assertion de Lars Hansen souligne qu'une définition rigoureuse du risque systémique ne peut se présenter sans une réflexion sur la manière de le mesurer. Cette relation entre concept et mesure se retrouve en sciences physiques. Un premier exemple est le couple température-thermomètre. Il est difficile de définir la notion de température sans avoir en arrière-plan une idée de ce qu'est un thermomètre. Un autre exemple est la mesure des durées. Si la notion de temps a un caractère intuitif, proposer une définition des durées sans expliciter une forme de mesure du temps est délicat. Concevoir la notion de minute est envisageable lorsque la technologie permet de construire des horloges pouvant les marquer. Ces exemples montrent qu'en sciences de la nature, la définition des concepts est souvent liée aux outils de mesure, et donc évoluent au cours du temps avec les besoins et le niveau technologique.

Quelques définitions du risque systémique

Trouver une définition du risque systémique est à la portée de n'importe quel moteur de recherche internet. Prenons deux exemples. Deux académiques, dans Kupiec et al. (2001), adoptent la définition suivante :

> "*Le risque systémique peut être défini comme la probabilité qu'un modeste choc économique provoque une volatilité disproportionnée des prix des actifs financiers, d'importantes baisses de trésorerie des entreprises, de substantielles pertes sur les marchés, et peut-être même des faillites imprévues parmi les institutions financières.*" [3]

Le risque systémique est ici vu comme découlant des chocs provenant de la sphère réelle sur la sphère financière. Seuls les chocs à la fois modestes et aux conséquences

1. Challenges in Identifying and Measuring Systemic Risk

2. En version originale : "I ask, should systemic risk be an explicit target of measurement, or should it be relegated to being a buzz word, a slogan or a code word used to rationalize regulatory discretion ?"

3. En version originale : "Systemic risk can be defined as the potential for a relatively modest economic shock to induce disproportionate volatility in the prices of financial assets, significant reductions in corporate liquidity, substantial mark-to-market losses, and perhaps even unanticipated bankruptcies among financial institutions."

sérieuses relèvent du risque systémique. La manière de caractériser l'événement systémique et sa mesure sont quasiment identiques : mesurer la volatilité, le niveau de trésorerie, le niveau des pertes... sont des grandeurs usuelles en finance.
Rapprochons cette définition de celle données par le Conseil de la Stabilité Financière, organisme institutionnel proche du G-20 :

> "*[Le risque systémique est le] risque d'une interruption des services financiers qui (i) est causée par une détérioration de l'ensemble ou de partie du système financier et (ii) qui a potentiellement des conséquences sérieuses et négatives pour l'économie réelle.*"[4] in Financial Stability Board (2009).

Si des traits semblent communs, la démarche est inversée : le risque systémique est le risque d'un choc de la sphère financière sur la sphère réelle. La définition peut sembler aussi moins précise car elle ne suggère aucune mesure évidente. Mesurer les conséquences sur l'économie réelle se réduit-il à examiner l'évolution du PIB ? du taux de chômage ? des deux ?
Relever les oppositions des points de vue ne doit pas déboucher sur une position stérile, mais pousse au contraire à s'interroger sur la manière dont on peut définir le risque systémique.

Analyse du risque systémique

Pour définir le risque systémique, nous analysons les différents types de risques auxquels est soumis une institution financières pour distinguer ceux qui font sens uniquement au niveau individuel de ceux qui sont pertinents dans une analyse des risques au niveau du système. Une étape préliminaire mais indispensable à la définition du risque systémique est de se donner un système, c'est-à-dire une liste d'institutions financières.
Pour toute institution appartenant à ce système, les premiers risques identifiés sont les risques associés directement aux actifs détenus, ou plus généralement aux activités poursuivies. Si une institution possède un titre financier, elle est exposée au risque de variation de cours de ce titre. Ces *risques spécifiques aux actifs* doivent être complétés par le *risque de corrélation entre actifs*. Ce risque prend en compte la structure de dépendance entre les différentes actifs détenus par l'institution. Comme le système comporte plusieurs institutions, il est possible de distinguer les actifs détenus par une seule institution de ceux détenus par plusieurs institutions. Le risque découlant des actifs communs est le *risque systématique* alors que le risque découlant des actifs propres à une institution est le *risque idiosyncratique*. La ramification

4. En version originale : "[Systemic risk is the] risk of disruption to financial services that is (i) caused by an impairment of all or parts of the financial system and (ii) has the potential to have serious negative consequences for the real economy."

risque spécifique à un actif et risque de corrélation se décline au niveau du risque idiosyncratique et au niveau du risque systématique. Notons que le caractère systématique ou idiosyncratique dépend de la définition du système : il ne s'agit donc pas d'une différence de nature. Ces risques partagent un caractère exogène au sens où ils proviennent de l'extérieur du système financier. Ces risques sont bien identifiés dans la réglementation : risque de taux, risque de marché, risque de défaut... Dans une démarche exhaustive il est nécessaire de les compléter par un risque endogène à l'institution. Nous appelons ainsi *risque d'amplification* le risque, que par sa réaction propre, une institution introduise une structure de dépendance entre des facteurs de risques exogènes.

Agréger les mesures de risques individuels pour l'ensemble des institutions afin de déterminer déterminer le risque au niveau du système est un cul-de-sac. Premièrement, les techniques d'agrégation des risques individuels intègrent un principe de sous-additivité : la mesure d'un ensemble de risques est plus petite que la somme des mesures de chaque risque. Ce mécanisme correspond à l'intuition que la diversification est positive (voir Artzner et al. (1999) pour une formalisation). Malgré son attrait, imposer un principe de diversification n'est pas viable car cela va à l'encontre de la prise en compte du risque de corrélation entre actifs et du risque d'amplification. Deuxièmement, les mesures individuelles ne sont pas non plus une clef de répartition du risque total. Il s'agit du risque auquel s'expose l'institution alors qu'une répartition doit s'effectuer selon le risque généré par chaque institution. En réalité, pour déterminer les contributions des institutions au risque du système, il est nécessaire d'inverser la logique. Il faut d'abord mesurer le risque du système à un niveau agrégé puis en déduire les contributions de chaque institution. Ces contributions doivent être additives : la somme des contributions doit être exactement le risque du système. Gouriéroux and Monfort (2013) fournissent un ensemble d'axiomes formels pour que la démarche soit cohérente. En adoptant le point de vue agrégé, il apparaît que le système génère en son sein un risque endogène. Il s'agit du risque que les pertes d'une institution engendrent des pertes pour une autre institution. Ce *risque de contagion* peut être direct lorsqu'il repose sur des interconnexions contractuelles entre institutions ou *indirect* lorsque la contagion fait appel à d'autres mécanismes. Enfin, il faut garder l'esprit qu'il n'y a malheureusement pas de relations univoques entre la taille des chocs et la magnitude de leurs effets (Embrechts et al. (1997), Dubecq and Gourieroux (2012)). Le comportement de cause à effet en temps normal n'est pas celui en situation extrême. Nous proposons donc de diviser les risques globaux, ceux qui proviennent de l'appartenance à un système, en deux catégories : ceux usuels et ceux extrêmes.

Cette analyse des différents types de risques, résumée en Table E.1, nous permet de définir le risque systémique en postulant qu'il correspond à ce qui ne relève pas

	Risques propres à l'institution	Risques globaux usuels affectant l'institution	Risques globaux extrêmes affectant l'institution
Exogène	idiosyncratique : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs	systématique usuel : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs	systématique extrême : -spécifique à un actif -corrélation entre actifs
Endogène	amplification	contagion usuelle : - directe - indirecte	contagion extrême : - directe - indirecte

TABLE E.1 – Risques individuels

d'une perspective individuelle de la gestion du risque. Ainsi le risque systémique est composé des risques systématiques extrêmes, des risques de contagion usuelle et des risques de contagion extrême. Les trois autres catégories –risque idiosyncratique, risque systématique usuel et risque d'amplification– appartiennent à une logique individuelle.

Modélisation

Le cadre adopté pour définir le risque systémique est assez souple en terme de modélisation. Un objectif primordial d'un modèle d'évaluation du risque systémique est sa capacité à éclairer le choix de politique publique en termes de régulation et de supervision. Cet objectif pousse à opter pour une approche structurelle. Dans une approche structurelle, le modèle économétrique est une transcription d'un modèle économique modélisant le comportement des agents. Ainsi, les différents coefficients estimés à partir des données ont une interprétation propre donnée par la théorie économique. Ce choix est cohérent si l'économètre dispose de données nécessaires ou de techniques satisfaisantes pour imputer ces données à partir de l'information dont il dispose. Si la contrainte d'indisponibilité des données est trop forte, une approche sous forme réduite est à adopter.

La modélisation du risque systématique extrême doit être menée avec soin mais est un prolongement du risque systématique usuel. Au contraire, le risque de contagion est un risque nouveau à modéliser. Nous concentrons à présenter les différents points nécessaires à sa modélisation. Les modèles sous forme réduite [Davis and Lo (2001a), Davis and Lo (2001b) ou Cousin et al. (2013)] traitent l'ensemble des institutions de manières identiques sans pouvoir rendre compte avec suffisamment de finesse des interconnections entre institutions. Néanmoins, ces travaux ont inspiré les premières approches structurelles. Les modèles structurels de contagion cherchent à modéliser la contagion comme une chute de la valeur des actifs d'une institution résultante du défaut d'une autre institution. Rosch and Winterfeldt (2008) proposent de distinguer deux sous-populations d'institutions : celles qui peuvent générer du risque de

contagion et celles qui le subissent. Les premières institutions ne sont soumises qu'à du risque idiosyncratique et du risque systématique. Ces risques affectent la valeur de leurs actifs : lorsque le valeur des actifs est plus petite que la valeur de la dette nominale, l'institution est déclarée en défaut. La valeur de l'actif d'un institution de la seconde catégorie dépend d'un facteur idiosyncratique, d'un facteur systématique et d'un terme de contagion. Ce terme est une pénalisation proportionnelle au nombre d'institutions de la première catégorie en défaut. Egloff et al. (2007) prolongent cette démarche en faisant dépendre la valeur des actifs de toutes les institutions d'un terme idiosyncratique, d'un terme systématique et de la valeur des actifs des autres institutions. Ce bouclage permet de modéliser la contagion. Sous certaines conditions techniques, il est possible de distinguer dans la situation finale ce qui relève du choc initial –termes idiosyncratique et systématiques– et ce qui relève de la contagion. Malgré ses qualités, ce modèle souffre du fait que le bouclage est plus technique qu'économique. Il y a des influences réciproques mais il n'est pas possible de les rattacher à des interconnexions contractuelles par exemple. Chez Gouriéroux et al. (2012), le bouclage entre les actifs des différentes institutions dépend explicitement des prêts qu'elles se consentent mutuellement. Cette approche peut s'étendre pour intégrer des formes de contagion indirecte, par les prix par exemple avec Cifuentes et al. (2005).

Implications pour la politique macroprudentielle

Les éléments d'analyse et la discussion du choix de modélisation présentés précédemment esquissent plusieurs pistes d'améliorations des outils de régulation. Premièrement, il est nécessaire que la régulation micro-prudentielle, c'est-à-dire celle qui vise à minimiser le risque de défaut de chaque institution, prenne en compte le risque d'amplification. Deuxièmement, il est souvent dit que la politique macro-prudentielle vise à compléter la régulation micro-prudentielle. Ainsi, la politique macro-prudentielle doit d'une part s'attacher à développer des outils quantitatifs d'évaluation du risque de contagion, et d'autre part, à continuer de développer les outils de stress-test qui ciblent le risque systématique extrême. La supervision micro-prudentielle s'effectue au niveau de chaque institution, mais doit garder à l'esprit la dimension macro. Bien que la supervision macro-prudentielle ait clairement des objectifs au niveau macro, ses leviers d'actions prennent place au niveau des institutions, c'est-à-dire au niveau de la supervision micro-prudentielle. Il faut donc que les outils micro- et macro-prudentiels soient développés conjointement.

Perspectives

Gardons à l'esprit que les méthodes actuelles, bien que prometteuses, ne sont que très partielles. Elles ne modélisent, ne mesurent, qu'une partie du risque de contagion, que certains types d'interactions entre facteurs de risques, sous certaines conditions précises. Cet état, que certains qualifieront d'embryonnaire, doit être une source de motivation pour des travaux d'étude et de recherche.

Expositions bilatérales et risque systémique de solvabilité

Suite à la dernière crise financière, la question de la mesure du risque des institutions financières est (re-)venue sur le devant de la scène. En particulier, les approches usuelles rendent compte de manière insatisfaisante de la possibilité de difficultés simultanées pour diverses institutions. Deux explications sont possibles pour expliquer des difficultés simultanées. Premièrement, elles sont supposées provenir d'un choc commun aux institutions. Il peut s'agir d'une contrepartie commune ou d'une exposition à un facteur de risque commun (par exemple, des investissements en zone euro). Deuxièmement, observer simultanément des difficultés est du à des mécanismes de contagion entre institutions financières (par exemple, "Lehman Brothers"). Même s'ils sont de nature très différente, ces deux mécanismes se superposent vraisemblablement dans la réalité.
A partir de ces éléments, deux champs de la littérature se sont développés selon le type de données utilisé. Une approche sous forme réduite utilise des données de marché [Adrian and Brunnermeier (2008), Acharya et al. (2010), Brownlees and Engle (2012)...] pour mesurer la dépendance entre le cours des actions des institutions financières et un indice de marché (par exemple, le S&P500). Ce type d'approche ne permet pas de distinguer les deux mécanismes détaillés précédemment.
Une second approche, structurelle, cherche à modéliser explicitement le choc commun et la contagion. En l'absence de données privilégiées sur les expositions entre institutions, cette stratégie se heurte à des difficultés d'estimation [Rosch and Winterfeldt (2008), Darolles et al. (2011)]. Pour le secteur financier, les superviseurs collectent les expositions entre institutions [Furfine (2003)], ou cherchent à les reconstruire [Upper and Worms (2004)]. Ce chapitre s'inscrit dans ce courant structurel. Nous proposons une analyse théorique du risque de contagion en distinguant différents canaux de contagion. Ce cadre est compatible avec les méthodologies de stress-test qui sont un outil fondamental de supervision et permettent de mesurer la contagion.

Équilibre de liquidation

Nous considérons un système composé de n institutions financières, sur base consolidée, interconnectées à deux niveaux. Premièrement, chaque institution peut posséder des instruments de dettes (prêts, obligations...) émis par une autre institution. Deuxièmement, chaque institution peut être actionnaire d'une autre institution. Le bilan de l'institution i est fourni en Table E.2. Nous notons $\pi_{i,j}$ la part des actions émises par l'institution j détenues par l'institution i. De façon similaire, $\gamma_{i,j}$ est la part de la dette de l'institution j détenue par l'institution i. Les actifs sur des entités extérieures au système (ménages, entreprises...) de l'institution i sont notés Ax_i. La dette, considérée comme homogène, a une valeur (de marché) L_i et une valeur nominale L_i^*. Enfin, ses capitaux propres sont notés Y_i.

Nous notons Π et Γ les matrices d'expositions sous forme d'instruments de capitaux propres et sous forme d'instruments de dette (respectivement). Ces matrices traduisent les expositions bilatérales entre institutions. Selon le périmètre choisi et la nature des institutions, elle peuvent prendre des formes particulières. Par exemple, une institution mutualiste n'a pas d'actionnariat. La colonne qui lui correspond dans la matrice Π est donc nulle.

Actif	Passif
$\pi_{i,1}Y_1$	L_i
$\vdots$	
$\pi_{i,n}Y_n$	
$\gamma_{i,1}L_1$	
$\vdots$	
$\gamma_{i,n}L_n$	
Ax_i	Y_i

TABLE E.2 – Bilan de l'institution i

Les actifs exogènes ont été regroupés en une seule grandeur, notée Ax_i. Cependant, ils représentent en valeur la plus grande part du total actif. La connaissance de leur dynamique jointe est fondamentale puisqu'ils modélisent in fine le choc exogène affectant le système. Ce choc peut être commun ou spécifique à une institution, déterministe ou stochastique.

Le modèle de la firme de Merton [Merton (1974)] précise, d'une part, que la valeur (de marché) de la dette d'une firme est le minimum entre la valeur de ses actifs et sa dette nominale, et d'autre part, que la valeur des capitaux propres est le maximum entre zéro et la valeur des actifs nette de la dette nominale. Pour tout

institution i allant de 1 à n, nous avons donc [5] :

$$\begin{cases} Y_i &= \left[\sum_{j=1}^{n}(\pi_{ij}Y_j) + \sum_{j=1}^{n}(\gamma_{i,j}L_j) + Ax_i - L_i^*\right]^+, \\ L_i &= \min\left[\sum_{j=1}^{n}(\pi_{i,j}Y_j) + \sum_{j=1}^{n}(\gamma_{i,j}L_j) + Ax_i, L_i^*\right]. \end{cases}$$

Ces conditions d'équilibre forment un système linéaire par morceaux de taille $2n$, d'inconnues les valeurs des capitaux propres (Y_1 à Y_n) et les valeurs des dettes (L_1 à L_n). Les matrices d'expositions Π et Γ ainsi que le vecteur des dettes nominales (L^*) sont des paramètres déterministes. Le vecteur des actifs exogènes (Ax) peut être déterministe ou stochastique.
Lorsque les coefficients $\gamma_{i,j}$ et $\pi_{i,j}$ sont positifs inférieurs à 1 et lorsque leur sommes en colonne sont inférieures à 1, alors ce système admet une unique solution (Proposition II.1). Ces conditions correspondent à une inversion locale du système (autour des points de non-linéarité) qui suffisent à assurer une inversion globale du système. Ainsi lorsque ces conditions sont satisfaites, pour toutes valeurs des actifs exogènes, il est possible de déterminer la situation du système : quelles institutions sont en défaut ? quel est le niveau des pertes ou des profits de chaque institutions ? etc.

Détaillons le cas de deux institutions. Chaque institution est soit en défaut, soit en vie. Il y a donc quatre cas possibles (double défaut, défaut de la première institution, défaut de le seconde institution, aucun défaut). La proposition précédente permet de dire que pour toute valeur des actifs exogènes, un seul des quatre cas survient. Nous pouvons donc représenter cette proposition en identifiant dans le quadrant $(Ax_1; Ax_2)$ quatre zones correspondant au quatre cas (Figure E.1). Les quatre zones couvrent entièrement le quadrant et ne se superposent pas.

Nous montrons aussi que sous les mêmes conditions les valeurs des dettes et des capitaux propres sont des fonctions croissantes de la valeur des actifs exogènes (Proposition II.2). Ce modèle est donc particulièrement adapté pour la réalisation d'exercices de stress-test direct ou inverse. Un exercice de stress-test direct consiste à analyser l'effet d'un scénario particulier (par exemple, une dévaluation de 30% du taux de change euro/dollar). Dans le cadre développé ici, il s'agit de considérer une variation sur les actifs exogènes des institutions résultant du scénario considéré. Un exercice de stress-test indirect consiste à chercher pour une famille de chocs fixée l'amplitude minimale nécessaire pour observer un effet particulier. Par exemple, quel niveau de dévaluation du taux de change euro/dollar est nécessaire pour observer le

5. Avec la notation $X^+ = max(0, X)$.

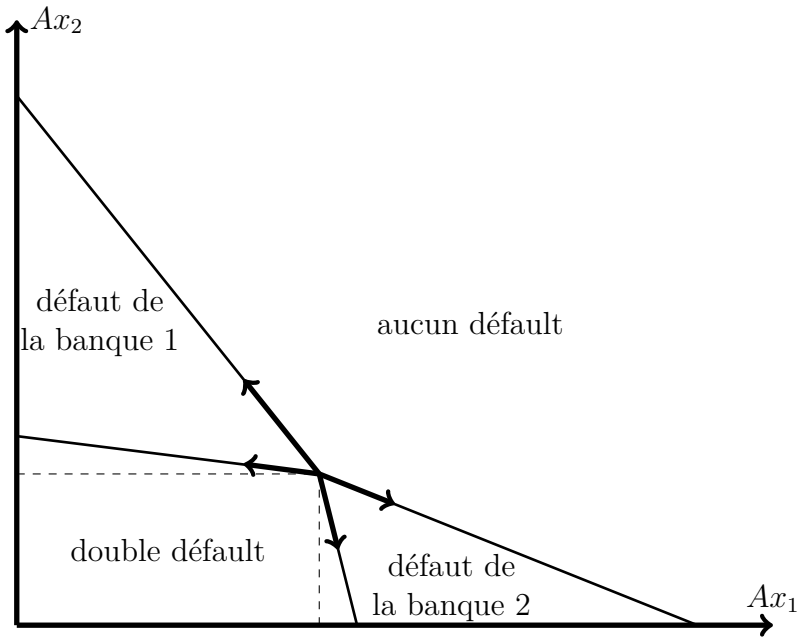


FIGURE E.1 – Les régimes défaut

défaut d'une institution ? Dans les exercices de stress-test, les chocs sont déterministes. Le modèle proposé admet aussi des chocs stochastiques. Si les actifs exogènes sont aléatoires, alors les valeurs d'équilibre le sont aussi. Il est alors possible de définir et de déterminer les probabilités de défaut (individuelles ou conjointes) des institutions.

Mesure de la contagion

Pour mesurer la contagion, il faut pouvoir distinguer l'effet direct d'un choc, c'est-à-dire les pertes immédiates, de sa propagation au sein du système financier. Il faut donc comparer l'effet d'un même choc en présence d'interconnection et en l'absence d'interconnection. Plaçons-nous avant le choc. Le système financier est décrit par la valeur initiael des actifs exogènes $-Ax^0-$, les interconnexions $-\Pi$ et $\Gamma-$, et la valeur des dettes nominales $-L^*-$. Ces trois dernières grandeurs représentent la structure du système financier. Cette structure est indépendante des chocs exogènes. Écrivons la valeur des actifs exogènes $-Ax-$ après un choc d'amplitude δ sous la forme $Ax = Ax^0 + \beta\delta$ où β est le vecteur des sensibilités des institutions à ce type de choc. La proposition II.1 nous permet d'écrire l'état du système, c'est-à-dire la valeur de dette et des capitaux propres de toutes les institutions, comme une fonction de la structure du système financier et du choc. Conservons le même choc –même δ et même β– mais modifions la structure du système pour éliminer les interconnections. Pour ce faire, imaginons qu'avant le choc les institutions vendent tous leurs actifs interbancaires. Dans cette situation, leurs actifs exogènes, notés $\widetilde{Ax}$,

deviennent $\widetilde{Ax} = Ax^0 + \Pi Y^0 + \Gamma L^*$ (où Y^0 est le vecteur des capitaux propres avant choc). Les matrices Π et Γ deviennent nulles puisqu'il n'y a plus d'interconnexions. En appliquant la proposition II.1 avec le même choc mais au système financier alternatif, nous pouvons déterminer l'état du système financier après ce choc en l'absence d'interconnexions. Nous disposons donc deux systèmes financiers après chocs, l'un avec des interconnexions et l'autre sans.
Imaginons que l'on mesure la résistance du système financier par le nombre d'institutions en défaut. Nous pouvons calculer ce nombre de défauts dans les deux situations. Notons N et $\tilde{N}$ le nombre de défauts en présence d'interconnexions et en l'absence d'interconnexions respectivement, et écrivons :

$$N = \underbrace{\tilde{N}}_{\text{effet direct}} + \underbrace{\left(N - \tilde{N}\right)}_{\text{contagion}}.$$

$\tilde{N}$ mesure l'effet direct du choc puisqu'il n'y a pas d'interconnexions pour générer de la contagion. L'écart $\left(N - \tilde{N}\right)$ est l'effet de la contagion. Ce protocole est particulièrement flexible. Il s'adapte à toute mesure de l'état d'un système (total des capitaux propres, taux de recouvrement moyen...), à une approche de stress-test inverse (quelle est l'amplitude minimale d'un choc pour générer un effet de contagion ?) ou à des chocs stochastique. Avec des chocs stochastique, il est possible de décomposer les probabilités de défaut en deux termes : la part qui provient du risque spécifique à l'institution et la part qui provient de la contagion. Ce second terme est positif lorsque les interconnexions atténuent les chocs, et négatif lorsque les interconnexions amplifient les chocs. Il peut aussi varier d'une institution à l'autre.

Conclusion

Nous proposons un modèle de contagion structurelle qui rend compte de la propagation du risque de solvabilité entre institutions interconnectées via des instruments de dettes et des instruments de capitaux propres. Ce modèle est particulièrement flexible puisqu'il accepte une grande diversité de type de chocs (spécifique/commun, déterministe/stochastique). Il permet aussi de distinguer l'effet direct d'un choc de son effet indirect pour toute mesure jugée pertinente.

Équilibre de liquidation avec séniorité et obligations adossées à des actifs cachés

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer le prix d'un titre de dette émis par une banque. Les interconnexions entre banques génèrent un risque de contagion. Ce

risque engendre une dépendance dans l'observation des défauts. La littérature en risque de crédit cherche à modéliser la dépendance entre défauts par l'introduction d'une copule liant les distributions des actifs de différentes contreparties. Cette démarche n'est pas appropriée dans le cas de banques. En effet, l'utilisation de copule ne permet pas de prendre en compte correctement les influences mutuelles entre banques. Il est donc nécessaire d'analyser le risque de l'ensemble des banques interconnectées. Cette analyse englobe la contagion et la détermination des taux de recouvrement à l'équilibre.

Équilibre de liquidation

Avant de considérer un réseau de banques, considérons une institution financière isolée. Son actif, noté A, est financé par des capitaux propres, notés Y, par des instruments de dette junior, noté L^J, et par des instruments de dette senior, notés L^S. Le modèle de Merton [Merton (1974)] s'étend directement à ce cas de figure en spécifiant l'ordre de priorité : les créanciers seniors, puis les créanciers juniors puis les actionnaires. En notant L^{*S} et L^{*J} les valeurs nominales respectives de la dette senior et junior, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} L^S &= min(A; L^{*S}), \\ L^J &= min(A - L^S; L^{*J}), \\ Y &= \Big(A - (L^J + L^S)\Big)^+. \end{cases}$$

Le profil des valeurs de Y, L^J et L^S en fonction de A est représenté sur la figure E.2. Lorsque les actifs sont supérieurs à la dette nominale totale ($A > L^{*J} + L^{*S}$), alors l'institution est en vie. Les créanciers sont intégralement remboursés et les actionnaires ont une valeur strictement positive. Lorsque les actifs sont inférieurs à la dette nominale totale mais supérieurs à la dette nominale senior ($L^{*J} + L^{*S} > A > L^{*S}$), l'institution est en défaut partiel. Les actionnaires ont tout perdu, les créanciers juniors subissent des pertes. Seuls les créanciers séniors sont intégralement remboursés. Enfin, lorsque les actifs sont inférieurs à la dette nominale senior ($L^{*S} > A$), l'institution est en défaut complet. Les actionnaires et les créanciers juniors ont tout perdu ; les créanciers seniors essuient des pertes.

Considérons maintenant un système de n institutions financières interconnectées via des instruments de dette senior, des instruments de dette junior et des instruments de capitaux propres. Le bilan de l'institution i est détaillé en Table E.3. $\pi_{i,j}$ la part des actions émises par l'institution j détenues par l'institution i, $\gamma^J_{i,j}$ la part de la dette junior de l'institution j détenue par l'institution i et $\gamma^S_{i,j}$ la part de la dette senior de l'institution j détenue par l'institution i. Les actifs exogènes, c'est-à-dire

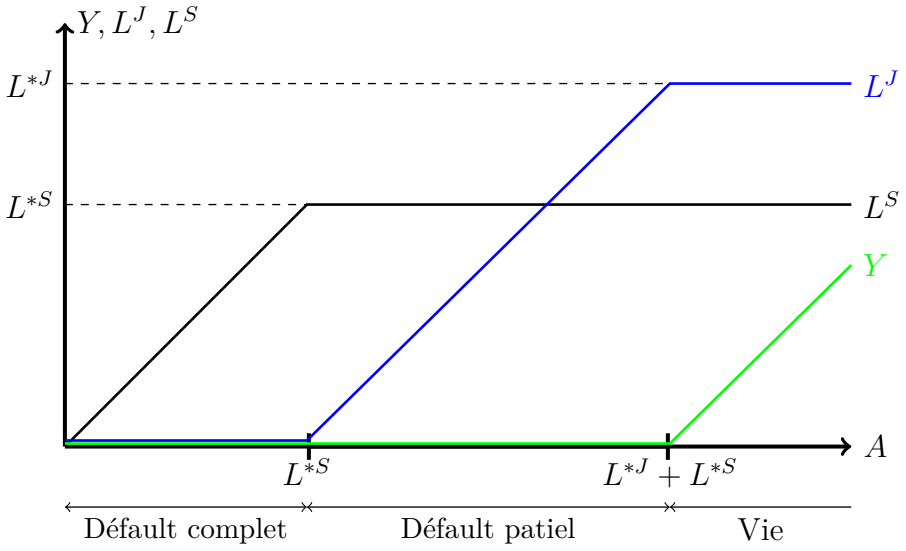


FIGURE E.2 – Modèle de Merton avec deux niveaux de séniorité

dont la contrepartie n'appartient pas au système considéré, sont notés Ax_i.
Les conditions écrites pour une seule institution deviennent dorénavant (pour tout i allant de 1 à n) :

$$\begin{cases} L_i^S &= min\left(\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} Y_j + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^J L_j^J + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^S L_j^S + Ax_i; L_i^{*S}\right), \\ L_i^J &= min\left(\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} Y_j + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^J L_j^J + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^S L_j^S + Ax_i - L_i^S; L_i^{*J}\right), \\ Y_i &= \left(\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} Y_j + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^J L_j^J + \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}^S L_j^S + Ax_i - L_i^J - L_i^S\right)^+. \end{cases}$$

Nous montrons que lorsque les coefficients $\gamma_{i,j}^J$, $\gamma_{i,j}^S$ et $\pi_{i,j}$ sont positifs inférieurs à 1 et lorsque leurd sommes en colonne sont inférieures à 1, alors le système précédent admet une unique solution (Proposition III.1). Ces conditions correspondent à une inversion locale du système (autour des points de non-linéarité) qui suffit à assurer une inversion globale du système. Cette proposition prolonge les résultats obtenus et présentés au chapitre précédent.

Évaluer le prix de la dette d'une banque

Avec plusieurs niveaux de seniorité, la dette d'une banque prend la forme d'une obligation adossée à des actifs (CDO pour "Collaterlized Debt Obligation" en anglais). Un CDO repose sur deux mécanismes. Le premier est un regroupement ("pooling") de créanciers. Par exemple, on regroupe un ensemble de prêts immobiliers octroyés à différents ménages. Le deuxième mécanisme est un découpage des remboursements. On définit usuellement trois tranches –equity, mezzanine et senior–

		Actif	Passif		
participations croisées interbancaires	$\leftrightarrow$	$\pi_{i,1}Y_1$ $\vdots$ $\pi_{i,n}Y_n$	L_i^S	$\leftrightarrow$	dette senior
prêts senior interbancaires	$\leftrightarrow$	$\gamma_{i,1}^S L_1^S$ $\vdots$ $\gamma_{i,n}^S L_n^S$	L_i^J	$\leftrightarrow$	dette junior
prêts junior interbancaires	$\leftrightarrow$	$\gamma_{i,1}^J L_1^J$ $\vdots$ $\gamma_{i,n}^J L_n^J$	Y_i	$\leftrightarrow$	capitaux propres
Actifs externes	$\leftrightarrow$	Ax_i			

TABLE E.3 – Bilan de l'institution i avec deux types de dette

qui reçoivent les remboursements avec un ordre de priorité. Les possesseurs de la tranche senior sont servis en premier, puis les possesseurs de la tranche mezzanine, et en dernier les possesseurs de la tranche equity. Pour toute institution i, nous définissons un titre financier zéro-coupon junior et un titre financier zero-coupon senior, en normalisant les deux dettes par la dette totale nominale. En l'absence de participations croisées, les paiements de ces deux titres notés respectivement ZC_i^J et ZC_i^S sont donnés par :

$$\begin{cases} ZC_i^S &= min\left[\frac{Ax_i}{L_i^{*S}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^J \frac{L_j^{*J}}{L_i^{*S}} ZC_j^J + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^S \frac{L_j^{*S}}{L_i^{*S}} ZC_j^S; 1\right], \\ ZC_i^J &= min\left[\frac{Ax_i}{L_i^{*J}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^J \frac{L_j^{*J}}{L_i^{*J}} ZC_j^J + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}^S \frac{L_j^{*S}}{L_i^{*J}} ZC_j^S - \frac{L_i^{*S}}{L_i^{*J}} ZC_i^S; 1\right]. \end{cases}$$

Cette écriture montre que le prix d'un zéro-coupon émis par l'institution i fait intervenir les actifs exogènes des autres banques. Ces autres banques sont celles chez qui l'institution i a investi, mais aussi toutes celles qui sont reliées à l'institution i par des chaines d'investissements. Le zéro-coupon est donc bien un produit de type CDO. Le panier d'actifs sous-jacents ("pool") est composé des actifs des autres banques. Cependant contrairement aux CDO classiques où tous les actifs sous-jacents ont le même poids, toutes les autres banques n'ont pas le même poids. Les pondérations dépendent de la structure d'interconnexions (les matrices Γ^J et Γ^J) et de la structure de financement de chaque institution entre dette senior et dette junior.
De plus, cette écriture montre que seniorité n'est pas synonyme de sécurité. Un titre senior d'une institution peut être plus risqué que le titre junior d'une autre institution.

Les formules usuelles d'évaluation du prix des zéros-coupon ne prennent pas en compte le fait que les institutions soient interconnectées. Notre méthodologie permet de compléter ce prix par une prime de contagion. Nous proposons une méthode simple pour évaluer l'effet d'un choc sur les actifs exogènes en l'absence d'interconnexion. En comparant le prix des zéros-coupon en présence et en l'absence d'interconnexion, nous déduisons la prime de contagion associée à chaque titre. Cette prime peut être positive ou négative, selon que les interconnexions rendent le titre plus ou moins risqué. Pour une même institution, elle peut aussi être différente pour la tranche junior et pour la tranche senior.

Calcul du prix

La complexité informatique de la résolution du système d'équations linéaires par morceaux définissant la valeur des dettes est exponentielle avec le nombre d'institution (de l'ordre de $2^n n^3$). Cependant nous montrons que la solution du système est aussi solution d'un problème de maximisation linéaire sous contrainte linéaire [Proposition III.2]. Des techniques numériques, telle que la méthode du simplexe, permettent de calculer la solution de ce type de problème de maximisation avec un coût linéaire. Nous proposons donc une méthode de complexité linéaire pour valoriser les différentes dettes d'institutions financières interconnectées via des instruments de dette. En présence de participations croisées, nous recommandons d'utiliser une méthode de point fixe. Cependant, la convergence en un nombre fini d'étapes n'est pas assurée.

Risque de financement d'un point de vue réglementaire

La réglementation Bâle 2 impose aux banques de détenir une quantité minimale de capitaux propres. Cette exigence est calculée à partir d'une mesure du risque sur les pertes et profits. Une hypothèse importante dans la procédure est l'hypothèse de cristallisation : les volumes sont considérés constants, seuls les prix sont incertains. Cette démarche rend compte de l'incertitude sur les cours (risque de marché) et sur la solvabilité d'une contrepartie (risque de défaut). Cependant, l'hypothèse de volume constant doit être analysée avec soin. En effet, les changements de volume à l'actif et au passif ne sont pas de même nature. A l'actif, les modifications de volume traduisent des ré-allocation de portefeuille par les gestionnaires des institutions. Cette ré-allocation dépend de l'anticipation des prix futurs. Les modifications de volume à l'actif sont donc endogènes. Au contraire, les changements de volumes au passif sont exogènes. Ils correspondent à des modifications dans le comportement des

clients : des déposants soldent leur compte, des assurés-vie résilient leurs contrats... Ces changements ne sont pas du ressort de l'institution, elle les subit. Par conséquent, une institution financière est soumise à des chocs à son actif via les variations de prix et à son passif via des variations de volume. Dans ce chapitre nous fournissons un cadre d'analyse qui rend compte des chocs à l'actif et au passif.

Réaction du bilan aux chocs

Considérons une institution financière (banque, assurance, fond...) dont le bilan à la date t est donné en Table E.4. A son actif, l'institution possède une quantité $x_{0,t}$ de liquidité (dont le prix est fixé à 1), une quantité $x_{1,t}$ d'actifs illiquides au prix $p_{1,t}$. Le passif est composé d'une dette de long-terme de valeur $L_{1,t}$, d'une dette de court-terme $L_{0,t}$ et de capitaux propres Y_t. $L_{1,t}$ est dite de long-terme car son échéance est au-delà d'une période et les créanciers n'ont pas la possibilité d'exiger un remboursement anticipé. $L_{0,t}$ est dite de court-terme car il s'agit de la dette qui arrive à maturité ou dont les créanciers peuvent exiger un remboursement immédiat. Nous supposons aussi que l'institution possède une ligne de crédit qui augmente la dette si elle est activée. A la date t, cette ligne inactive et la dette correspondante est donc renseignée à 0.

Les chocs concernent les prix et les volumes de dette. Nous notions δp la variation

Asset	Liability
$x_{1,t}p_{1,t}$	$L_{1,t}$
	$L_{0,t}$
$x_{0,t}$	0
	Y_t

TABLE E.4 – Bilan à la date t

du prix des actifs illiquides et δL le solde du mouvement de dette.

Analyse des pertes et profits

Lorsque le choc de liquidité δL est négatif, l'institution doit rembourser des créanciers. Elle couvre ce besoin de financement en utilisant d'abord sa trésorerie, puis en activant sa ligne de crédit, puis en vendant ses actifs illiquides. Le montant maximal de la ligne de crédit est noté $\tilde{M}$ et le taux d'intérêt payé est noté γ. La vente d'actifs illiquides est effectuée avec une décote H. Les pertes et profits de

l'institution après les chocs, notés $Y^*_{t+1|t}$, prennent la forme suivante :

$$Y^*_{t+1|t} = \Big(Y_t + x_{1,t}\delta p_{1,t+1} - \gamma min\left[\tilde{M}; (-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1})^+\right] - \left(\frac{1}{H} - 1\right)(-x_{0,t} - \delta L_{1,t+1} - \delta L_{0,t+1} - \tilde{M})^+\Big).$$

Il est possible d'identifier plusieurs situations en croisant une analyse en terme de liquidité et une analyse en terme de solvabilité. En termes de liquidité, il s'agit d'identifier la sévérité du choc en fonction des recours nécessaires (trésorerie, activation de la ligne de crédit, vente d'actifs illiquides). En termes de solvabilité, on examine si l'institution est solvable ou non. Pour nommer ces régimes, nous utilisons une double indexation. La première lettre indique le degré de sévérité du choc en liquidité : AA lorsque la trésorerie est suffisante, A lorsque la ligne de crédit est nécessaire et suffisante, B lorsque des actifs sont vendus et D lorsque l'institution ne peut pas faire face à son besoin de liquidité. La deuxième lettre est A lorsque l'institution est solvable et D lorsqu'elle est en défaut. Les différents régimes sont représentés en Figure E.3. Cette cartographie nous permet aussi de définir les deux types de défaut. Les régimes $\mathcal{R}(D, D)$ et $\mathcal{R}(B, D)$ forment les défauts de liquidité, tandis que les régimes $\mathcal{R}(A, D)$ et $\mathcal{R}(AA, D)$ forment les défauts de solvabilité.

Décomposition des mesures de risque

Connaissant la distribution des pertes et profits il est possible de calculer différentes mesures de risques. Par exemple, la Value-at-Risk (VaR) de l'institution (pour un seuil α donné) dépend de trois paramètres : le taux d'intérêt de la ligne de crédit γ, la limite $\tilde{M}$ et la décote sur les actifs illiquides H. Décomposons la VaR en trois termes :

$$\begin{aligned} VaR^\alpha_t(\gamma, M, H) = {} & VaR^\alpha_t(0, \infty, H) \\ & + \left[VaR^\alpha_t(\gamma, \infty, H) - VaR^\alpha_t(0, \infty, H)\right] \\ & + \left[VaR^\alpha_t(\gamma, M, H) - VaR^\alpha_t(\gamma, \infty, H)\right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est insensible au risque de financement puisque la ligne de crédit est illimitée et sans coût. Il s'agit donc du terme calculé sous Bâle 2. Le deuxième terme fait intervenir uniquement le taux d'intérêt γ payé sur la ligne de crédit. Il capte donc le risque de financement. Le dernier terme fait intervenir la décote des actifs illiquides. Il mesure donc le risque de liquidité de marché.
Nous appliquons la démarche proposée au secteur bancaire américain en considérant la moyenne des 5 plus grandes banques américaines au 31 mars 2014. Le bilan est calibré sur des données publiques. Les chocs sont supposés gaussiens et le paramètre

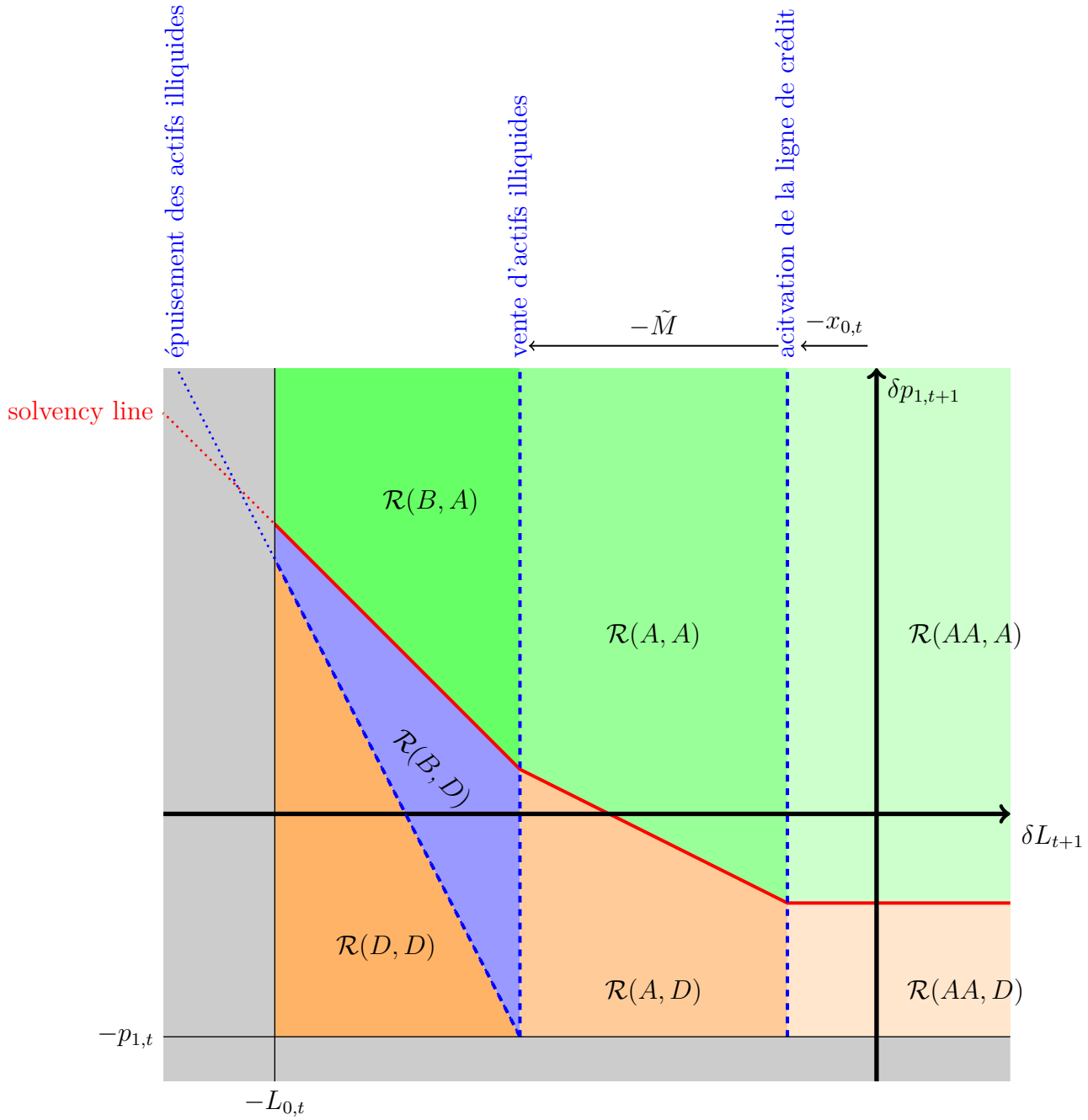
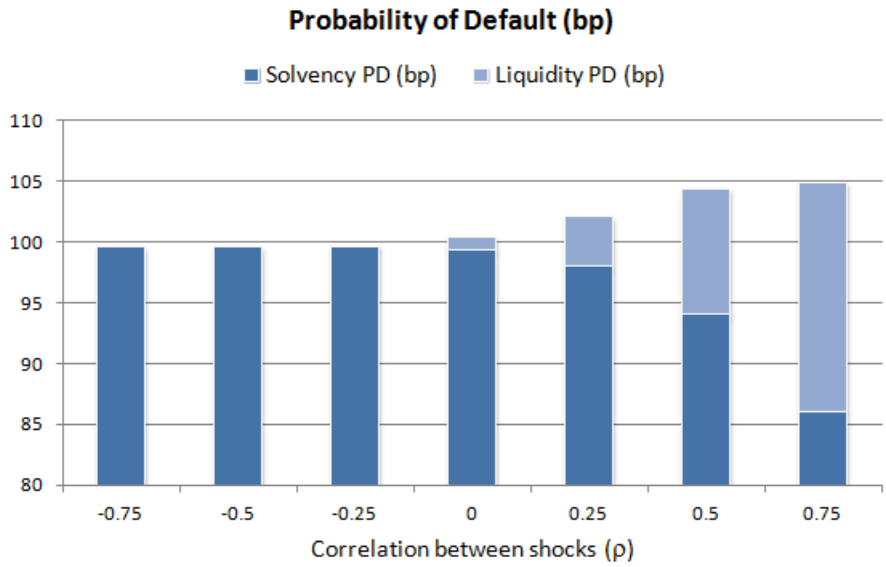


FIGURE E.3 – 7 régimes



Note : "Solvency PD" = défaut de solvabilité ; "Liquidity PD" = défaut de liquidité

FIGURE E.4 – Probabilités de Défaut pour différentes valeurs de la corrélation entre chocs ρ (in bp).

de corrélation est laissé libre. La figure E.4 représente l'évolution de la probabilité de défaut totale en fonction de la corrélation entre le choc à l'actif et le choc au passif (ρ). Le profil est coudé. Lorsque la corrélation est négative la probabilité est plate, mais lorsque la corrélation devient positive, la probabilité de défaut augmente sensiblement. Avec une corrélation positive, la liquidité devient un motif significatif de défaut. La figure E.5 présente l'évolution de la VaR en fonction de la corrélation entre les chocs. On distingue l'influence croissante avec la corrélation ρ du risque de liquidité de financement et de liquidité de marché.

Réserves réglementaires

Le cadre d'analyse permet de distinguer deux classes de défauts : les défauts dus à un problème de liquidité et les défauts dus à un problème de solvabilité. La réglementation doit donc introduire deux comptes de réserves pour contrôler ces deux risques. Un compte de réserve est utilisé pour absorber un excès de besoin de trésorerie afin de réduire le risque de défaut de liquidité. La somme des deux comptes permet de contrôler le risque de solvabilité. Pour déterminer les niveaux de ses réserves, c'est-à-dire deux types d'exigence de capitaux propres, il faut se donner un niveau cible pour la probabilité de défaut de liquidité et un niveau cible pour la probabilité de défaut en solvabilité. Il suffit alors d'inverser numériquement le système.

Nous proposons de considérer que le superviseur intervient en dernier ressort : il au-

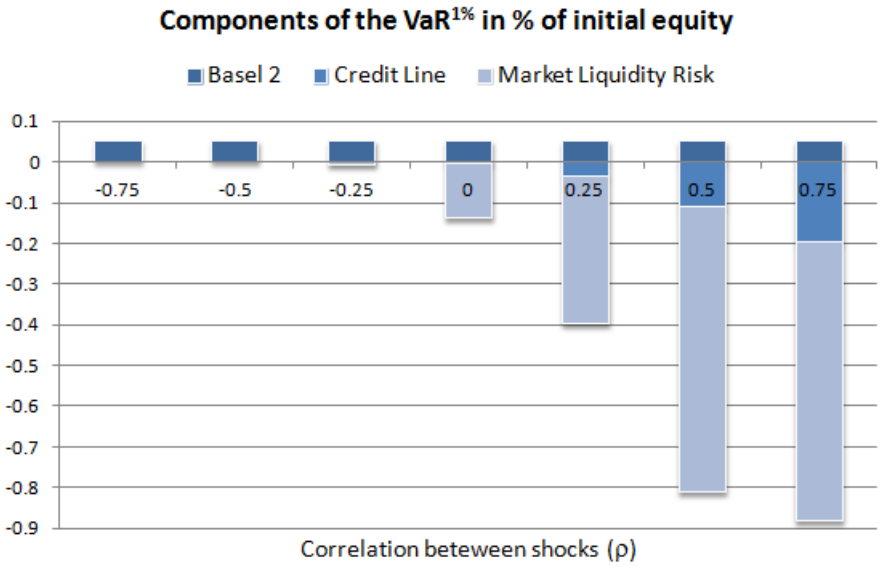
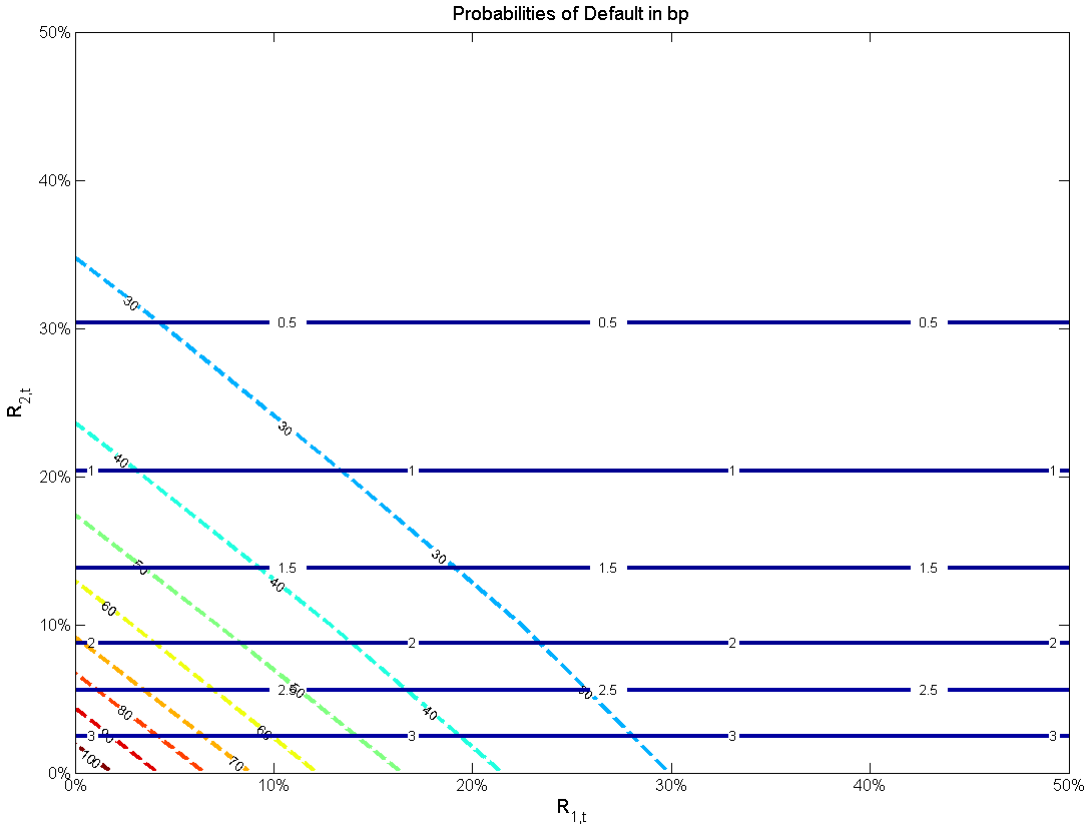


FIGURE E.5 – Valeurs des composantes de la VaR pour différentes valeurs de la corrélation entre chocs ρ (en % des capitaux propres initiaux).

torise l'utilisation du compte de réserve de liquidité lorsque l'institution a épuisé ses actifs illiquides. Nous reprenons l'illustration numérique précédente en calculant les probabilités de défaut (liquidité et solvabilité) pour différents niveaux des comptes des réserves. Nous supposons que tout accroissement des réserves est financé par une émission de capitaux propres. La Figure E.6 représente les courbes d'iso-probabilités de défaut en liquidité et en solvabilité pour différents niveaux de réserves (exprimés en % du niveau initial de capitaux propres). Sur cet abaque, on lit à l'intersection des deux courbes d'iso-probabilité le niveau de chaque compte de réserves nécessaires. Par exemple une probabilité de défaut en liquidité de 30pb et une probabilité de défaut en solvabilité de 1bp indique un compte de réserve pour la liquidité ($R_{1,t}$) de 20% et un compte de réserve pour la solvabilité de ($R_{2,t}$) de 14%.



Legende : Les iso-probabilités de défaut de liquidité (en pb) sont en trait plein. Les iso-probabilités de défaut de solvabilité (en pb) sont en trait pointillé. $R_{1,t}$ est le compte de réserve pour la liquidité et $R_{2,t}$ le compte de réserve pour solvabilité.

FIGURE E.6 – Probabilités de défaut en fonction de la taille des comptes de réserves

Table des figures

I.1 Evolution du nombre de défauts (sur 20) en fonction de la taille d'un choc exogène selon la forme du réseau (voir figure I.2). Extrait de Acemoglu et al. (2013). 19
I.2 Formes de réseau (6 institutions) 20
I.3 Exemple de matrice d'exposition entre 7 banques (de A à G) et des résultats des techniques de reconstructions de données. Extrait de Anand et al. (2013). 25
I.4 Schéma causal du modèle de Davis and Lo (2001a) (pour $n = 2$) . . . 27
I.5 Schéma causal du modèle de Cousin et al. (2013) (pour $n = 2$) 28
I.6 Schéma causal du modèle canonique de risque de défaut (pour $n = 2$) 29
I.7 Schéma causal du modèle de Rosch and Winterfeldt (2008)(pour $n = 2$) 31
I.8 Schéma causal du modèle de Egloff et al. (2007) (pour $n = 2$) 33
I.9 Schéma causal du modèle de Gouriéroux et al. (2012) (pour $n = 2$) . 35
I.10 Schéma causal du modèle de Darolles et al. (2011) (pour $n = 2$) . . . 38

II.1 Exogenous Asset Components for a mutual saving bank 54
II.2 Exogenous Asset Components for a commercial bank 55
II.3 The Regimes of Default 58
II.4 Directions of the Shocks 60
II.5 Impulse Response Functions 61
II.6 Decomposition of the Impulse Response Functions for Sets 1, 2 and 3 67
II.7 Decomposition of the Impulse Response Functions for Sets 4, 5 and 6 68
B.1 Extract from the main template for asset side 76
B.2 Extract from an asset side decomposition template for Financial Assets Held for Trading 77
B.3 Extract from the Large Exposure template 77

III.1 Merton's Model With Two Seniority Levels 87
III.2 The Regimes for Two Unconnected Institutions 88
III.3 The Regimes for Two Connected Institutions 91
III.4 Payoffs in the Benchmark and Stress Scenarios 103

C.1 The Transformed Quadrilaterals 109

IV.1 Equity Value with Tranches on the Liquidity Shortage (with $x_{0,t} > 0$) 125
IV.2 Values of the VaR for different values of γ, ρ and different levels of cash. 128
IV.3 Evolution of the $VaR^{1\%}(\gamma)$ with respect to the Correlation Between Asset and Liability Shocks. 129
IV.4 7 Regimes with Limited Credit Line 133
IV.5 Value of VaR components for different values of ρ (in % of initial equity). 137
IV.6 Simulated outcomes mapped on the decomposition in regimes. 139
IV.7 Values of the Probability of Default for different values of ρ (in bp). . 140
IV.8 11 Regimes with Limited Credit Line and Reserves 143
IV.9 Major regimes 145
IV.10Probabilities of default as functions of sizes of the reserve accounts . . 148
D.1 All Potential Regimes (case B below A) 158
D.2 All Potential Regimes (case B above A) 160
D.3 All Potential Regimes with Reserves (case B below A) 162
D.4 11 Regimes with Limited Credit Line and 3 Tranches of Illiquidity . . 163

E.1 Les régimes défaut 190
E.2 Modèle de Merton avec deux niveaux de séniorité 193
E.3 7 régimes 198
E.4 Probabilités de Défaut pour différentes valeurs de la corrélation entre chocs ρ (in bp). 199
E.5 Valeurs des composantes de la VaR pour différentes valeurs de la corrélation entre chocs ρ (en % des capitaux propres initiaux). 200
E.6 Probabilités de défaut en fonction de la taille des comptes de réserves 201

Liste des tableaux

I.1 Risques individuels I 16
I.2 Risques individuels II 18
I.3 Risques individuels III 20
I.4 Risques individuels de A et B 22
I.5 Travaux des superviseurs sur la contagion 42

II.1 Balance Sheet of Bank i 51
II.2 Exposure Matrices for the Banking Sector (at 12/31/2010) 53
II.3 Reverse Stress-Tests for the Banking Sector (at 12/31/2010) ; δ in percent 69
II.4 Simulated Probabilities of Default for the Banking Sector (at 12/31/2010); 100,000 simulations 71
II.5 Simulated Probabilities of Joint Default for the Banking Sector (at 12/31/2010) ; 100,000 simulation 71

III.1 The Nine Regimes in Case of Two Institutions 87
III.2 Balance Sheet of Bank i 89
III.3 Balance Sheet of a Financing Project with Two Seniority Levels . . . 93
III.4 Normalized Debt Side of a Financing Project with Two Seniority Levels 93
III.5 Balance Sheet of Two Retail Banks and One Lender of Last Resort . 99
III.6 Prices of Tranches and Contagion Premiums 104

IV.1 Balance sheet at date t with positive cash balance 120
IV.2 Balance sheet at date t with negative cash balance 121
IV.3 Balance sheet at date $t+1$ with positive cash balance 123
IV.4 Balance sheet at date $t+1$ with negative cash balance 123
IV.5 Balance sheet at date $t+1$ with the activation of the credit line and the sale of the illiquid asset 125
IV.6 The Sensitivity of $VaR^{1\%}(0)$ with respect to γ. 129
IV.7 Balance sheet with a reserve account 138
IV.8 Balance sheet with required capital 140
IV.9 The initial balance sheet with two reserve accounts 141

IV.10Probability of default due to funding liquidity PD_t^F (in bp) 147
IV.11Probability of default due to lack of solvency PD_t^S (in bp) 147
D.1 Balance sheet of the bank at the final date in Morris and Shin (2009) 151

E.1 Risques individuels 185
E.2 Bilan de l'institution i 188
E.3 Bilan de l'institution i avec deux types de dette 194
E.4 Bilan à la date t 196

Table des matières

Introduction **1**

I Analyse du risque systémique, mesure du risque de contagion **5**

I.1 Introduction 8

I.2 Quelques définitions actuelles du risque systémique 10

I.3 Analyse du risque systémique 14

I.3.1 Typologie des risques individuels 15

I.3.2 Diversification 16

I.3.3 Désagrégation du risque global 16

I.3.4 Risque extrêmes 18

I.3.5 Définition du risque systémique 21

I.3.6 Illustration 21

I.4 Choix de modélisation 22

I.4.1 Forme réduite ou forme structurelle 22

I.4.2 Information disponible 23

I.5 Formalisation de la contagion 26

I.5.1 Risque de crédit et contagion sous forme réduite 27

I.5.2 Modèle canonique du risque de défaut sous forme structurelle 28

I.5.3 Modèle mixte 31

I.5.4 Risque de crédit et contagion sous forme structurelle 33

I.5.5 Dynamiques relatives de la contagion et des chocs exogènes . . 36

I.5.6 Extensions 38

I.5.7 Synthèse 39

I.6 Implications pour la régulation macro-prudentielle 40

I.7 Conclusions et perspectives 42

II Bilateral Exposures and Systemic Solvency Risk **45**

II.1 Introduction 48

II.2 Balance sheet and exposure 50

II.2.1 System and systemic risk 50

II.2.2 Balance sheet 51

II.2.3 Exposure matrices 52
II.3 Consequences of an exogenous shock 55
II.3.1 The liquidation equilibrium 55
II.3.2 Impulse Response Analysis and Stochastic Shock 59
II.4 Contagion measure 63
II.4.1 The standard analysis in a linear framework 63
II.4.2 How to disentangle exogenous and contagion effects? 64
II.4.3 The effect of contagion on reverse stress-test 69
II.4.4 Decomposition of a probability of default 70
II.5 Concluding remarks 71
B.1 Existence and Uniqueness of Equilibrium 73
B.2 Balance Sheet and Large Exposure European Templates 75
B.3 Monotonicity of Impulse Response 76
B.4 Merton's Model 78

III Liquidation Equilibrium with Seniority and Hidden CDO 81
III.1 Introduction 84
III.2 Liquidation Equilibrium 85
III.2.1 Two examples 85
III.2.2 The balance sheets 88
III.2.3 The equilibrium conditions 89
III.2.4 Equilibrium for two interconnected banks 90
III.2.5 General case 91
III.3 Pricing bank debts in a CDO perspective 92
III.3.1 Pricing tranches in the extended Merton's model 93
III.3.2 Pricing tranches for unconnected banks 95
III.3.3 Connected banks and hidden CDO 97
III.3.4 Contagion premium 99
III.4 Applications 100
III.4.1 The liquidation program 101
III.4.2 Liquidation equilibrium path 102
III.4.3 Decomposition of hidden CDO prices 103
III.5 Concluding remarks 104
C.1 The equilibrium for two banks 105
C.2 The equilibrium for n interconnected banks 108
C.3 Computations of the PD and $ELGD$ for tranches 111
C.4 Equilibrium through linear optimization 113

IV Funding Liquidity Risk From a Regulatory Perspective 115
IV.1 Introduction . . . 118
IV.2 The balance sheets and their responses to exogenous shocks on liability 119
IV.2.1 The balance sheet . . . 120
IV.2.2 The exogenous shocks and their consequences on the balance sheet (unlimited credit line) . . . 121
IV.2.3 The exogenous shocks and their consequences on the balance sheet (limited credit line) . . . 124
IV.3 Profit and Loss (P&L) distribution (unlimited credit line) . . . 126
IV.3.1 Decomposition of the Value-at-Risk . . . 126
IV.3.2 The need for the credit line . . . 127
IV.3.3 Illustration . . . 127
IV.4 P&L distribution (limited credit line) . . . 130
IV.4.1 Description of the regimes . . . 130
IV.4.2 Decomposition of the Value-at-Risk . . . 134
IV.4.3 The need for the credit line . . . 134
IV.4.4 The need to sell illiquid asset . . . 135
IV.4.5 Illustration . . . 135
IV.5 The reserves for solvency and funding liquidity risk . . . 138
IV.5.1 The standard definition of reserve in Basel 2 . . . 138
IV.5.2 The extended framework . . . 140
IV.5.3 Computation of reserves . . . 146
IV.5.4 Comparison with Basel 3 . . . 147
IV.6 Conclusion . . . 149
D.1 Comparison with Morris and Shin (2009) . . . 151
D.2 Computation for an unlimited credit line . . . 151
D.3 VaR Sensitivity . . . 153
D.4 Summary statistics in the Gaussian case . . . 154
D.4.1 Value-at-Risk . . . 154
D.4.2 Use of the credit line . . . 155
D.4.3 Sell illiquid asset . . . 156
D.4.4 Bankruptcy . . . 156
D.5 The geometry of regimes . . . 157
D.5.1 The figure . . . 157
D.5.2 Proof of Proposition IV.1 . . . 157
D.5.3 Case $Y_t > x_{1,t}p_{1,t} + \gamma\tilde{M}$ . . . 159
D.6 The geometry of regimes with reserves . . . 159
D.6.1 The figure . . . 159
D.6.2 Proof of Proposition IV.2 . . . 161

D.7 Increasing haircut with sold volume 161

V Perspectives **165**

Bibliographie **169**

Annexes **179**