AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

École doctorale IAEM Lorraine

Inférences dans les modèles ARCH Tests localement asymptotiquement optimaux

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 Novembre 2015

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention statistique)

par

Tewfik Lounis

Composition du jury

Directeur :	Joseph Ngatchou-Wandji	Professeur à l'Université de Lorraine
Rapporteurs :	Delphine Blanke	Professeur à l'Université d'Avignon
	Christian Francq	Professeur à l'Université Lille 3
	Michel Harel	Professeur Emérite à l'Université de Limoges
	Simos Meintanis	Professeur à l'Université Nationale d'Athènes
Invité :	Naâmane Laib	Enseignant-Chercheur HDR à l'EISTI - Cergy
Président :	Michel Broniatowski	Professeur à l'Université Paris 6

Résumé

L'objectif de cette thèse est la construction des tests localement et asymptotiquement optimaux. Le problème traité concerne un modèle qui contient une large classe de modèles de séries chronologiques. La propriété de la normalité asymptotique locale (LAN) est l'outil fondamental utilisé dans nos travaux de recherches. Une application de nos travaux en finance est proposée.

Abstract

The purpose of this phD thesis is the construction of a locally asymptotically optimal tests. In this testing problem, the considered model contains a large class of time series models. LAN property was the fundamental tool in our research works. Our results are applied in financial area.

Remerciements

Mes vifs remerciements vont à Monsieur Joseph NGATCHOU-WANDJI, qui a assuré l'encadrement de ma thèse.

Je tiens à remercier très sincèrement Messieurs Dominique MERY (directeur de l'école doctorale), Maruis TUCSNACK et Xavier ANTOINE (directeurs du laboratoire), pour la confiance qu'ils m'ont accordé.

J'exprime ma reconnaissance à Madame Vanessa BINET et à Monsieur Georges BILLANT qui m'ont facilité l'accomplissement des démarches administratives auprès de l'université de Lorraine.

Je remercie Madame Delphine BLANKE, Messieurs Christian FRANCK, Michel HAREL et Simos MEINTANIS pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je leur suis très reconnaissant du temps qu'ils ont consacré à l'expertise de ce travail. J'apprécie à sa juste valeur leur présence dans le jury.

Je remercie Messieurs Michel BRONIATOWSKI et Naâmane LAIB, pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et l'honneur qu'ils me font en participant à mon jury. J'adresse ma reconnaissance à Monsieur Salim BOUZEBDA (Université de Compiègne) pour ses précieux conseils, ses précieuses orientations et son soutien constant. Un merci spécial pour Monsieur Issam EL HATTAB (ENCG de Casablanca) pour son aide. J'adresse également mes remerciements pour Said CERBAH (ECE de Paris) grâce à qui je me suis inscris dans cette thèse. Je ne suis pas en mesure de trouver une formule simple pour remercier très particulièrement mes amis Youness, Khelifa, Reda et Fouad pour leurs soutiens permanents. La liste des amis est assez longue, je m'excuse par avance de ne pas pouvoir citer tout le monde, je dis tout simplement merci à toutes et à tous.

À ma mère,

à mon père,

à mes frères et sœurs,

à toute ma famille.

À la mémoire de ma sœur qui nous a quitté très tôt le 04-08-2013, que son âme repose en paix.

Notations et abréviations

$\overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow}$	Convergence en loi.
$\xrightarrow{p.s.}$	Convergence presque sûre.
$\xrightarrow{P}$	Convergence en probabilité.
$\mathbf{E}$	Espérance.
$E.M.C.$	Estimateur des moindres carrés.
$E.M.C.D.$	Estimateur des moindres carrés discret.
$I(\cdot)$	Fonction indicatrice.
$i.i.d.$	Indépendante et identiquement distribuée.
"[ ]"	Partie entière.
$\mathbf{P}$	Probabilité.
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$: Ensemble des entiers.

Articles et publications

Articles en rapport avec ma thèse

1. Ngatchou-Wandji J. et Lounis T. Optimal tests in financial models. En préparation.
2. Lounis T. (2014). Optimal tests in AR(m) time series model. Comm. Statist. Simulations and Methods, to appear.
3. Lounis T. (2013). Local asymptotically optimal test in ARCH model. Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics.Vol.4, pp. 333 − 392.
4. Lounis T. (2011). Asymptotically optimal tests when parameters are estimated. Albanian J. Math., 5 (4),191−212.

Autres articles publiés

5. Bouzebda S. El Hattab I. Keziou A. et Lounis T. (2013).
   New Entropy Estimator with an Application to Test of Normality Comm. Statist. Theory Methods., vol. 42, num. 12, pp. 2245–2270.
6. Lounis T. et Bouabdellah S. (2011). Regularisation of the Langevin equation in $d = 1$ by the fractional Brownian motion. Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 5, no. 9-12, 429-442.
7. Lounis T. (2010). Towards a demonstration of Fermat's theorem. Int. Math. Forum, Vol. 5, no. 57-60, 2919-2928.

Communications

Juin 2015 : Exposé sur les "Tests optimaux dans les modèles $AR(m)$".

Groupe de travail et Séminaires de BIGS. Université de Lorraine.

Table des matières

1 Introduction et outils mathématiques **1**

1.1 Introduction générale 1

1.1.1 Introduction 1

1.1.2 Contribution 3

1.2 Outils fondamentaux 6

1.2.1 Introduction 6

1.2.2 Normalité asymptotique locale et contiguïté 6

1.2.3 Théorème limite centrale des martingales 13

1.2.4 Quelques rappels sur les séries chronologiques 15

1.2.5 Séries chronologiques non linéaires contigües aux processus $AR(1)$. 16

2 Tests optimaux dans les modèles autorégressifs d'ordre m **23**

2.1 Introduction 24

2.2 Test dans la classe des modèles $AR(1)$ contigüs aux modèles non-linéaires . 26

2.2.1 Conditions, notations et résultats obtenus 26

2.2.2 Principaux résultats 28

2.2.3 Optimalité du premier test 28

2.3 Test dans la classe des modèles AR(1) contigüs aux modèles $ARCH$ 30

2.3.1 Conditions, notation résultats obtenus 30

2.3.2 Principaux résultats 31

2.4 Tests dans la classe des modèles non-linéaires contigüs à la classe des processus $AR(p)$ 33

2.4.1 Conditions, notations et résultats utilisés 33
2.4.2 Principaux résultats 36
2.5 Simulations 37
2.6 Preuves des résultats 44
2.6.1 Preuve de la proposition 2.1 44
2.6.2 Preuve du lemme 2.1 44
2.6.3 Preuve de la proposition 2.2 47
2.6.4 Preuve du Théorème 2.1 48
2.6.5 Preuve du Lemme 2.2 50
2.6.6 Preuve de la proposition 2.3 52
2.6.7 Preuve du Théorème 2.2 52
2.6.8 Preuve de la proposition 2.4 52
2.6.9 Preuve du théorème 2.3 56

3 Tests localement asymptotiquement optimaux dans les modèles ARCH 57

3.1 Tester quand le paramètre est connu 61
3.1.1 Notations, définitions et conditions 61
3.1.2 Principaux résultats 62
3.1.3 Test optimal 63
3.2 Tester quand le paramètre est estimé 64
3.2.1 Estimation du paramètre et lien entre les suites centrales 64
3.2.2 Notations et définitions 64
3.2.3 Conditions supplémentaires 65
3.3 Généralization dans $\mathbf{Z}$ 71
3.4 Simulations 71
3.5 Preuves des résultats 74
3.5.1 Preuve du lemme 3.1 74
3.5.2 Preuve du théorème 3.1 74
3.5.3 Preuve du théorème 3.2 86

3.5.4 Preuve de la propostion 3.1 87
3.5.5 Preuve de la proposition 3.2 101
3.5.6 Preuve de la proposition 3.3 102
3.5.7 Preuve de la proposition 3.4 102
3.5.8 Preuve de la proposition 3.5 103
3.5.9 Preuve du théorème 3.3 104

4 Quelques applications en finance 109

4.1 Introduction 110
4.2 Conditions et résultats utilisés 112
4.3 Une application en finance 115
4.3.1 Régression bilinéaire simple dirigé par un Mouvement Brownien . . 115
4.3.2 Présentation du problème de test 117
4.4 Principaux résultats 118
4.5 Applications aux données réelles 121
4.6 Preuve des résultats 127
4.6.1 Preuve de la proposition 4.1 127
4.6.2 Preuve de la proposition 4.2 127
4.6.3 Preuve du lemme 4.1 127
4.6.4 Preuve de la proposition 4.3 128
4.6.5 Preuve de la proposition 4.4 128
4.6.6 Preuve du théorème 4.1 129

5 Conclusion et perspectives de recherche 131

5.1 Conclusion générale 131
5.2 Perspectives de recherches 132

Chapitre 1

Introduction et outils mathématiques

1.1 Introduction générale

1.1.1 Introduction

Pour une remise en cause de la mécanique rationnelle, et suite à des travaux des physiciens au début du vingtième siècle, l'idée de valider un modèle à partir des données a été définitivement abandonnée. De ce fait, la modélisation aléatoire a été reconnue comme un outil scientifique incontournable. La théorie des tests est venue arbitrer entre les modèles mathématiques proposés. Par exemple, pour la détection de la non-linéarité d'un modèle, plusieurs travaux de recherche ont été effectués. Parmi eux, on peut citer Hinich (1982), Guégan (1984), Keenan (1985) et Tsay (1986).

L'étude des problèmes des tests a reçu un grand intérêt de la part des mathématiciens comme Neyman, Wald et Lehmann, grâce à qui les méthodes statistiques ont connu un grand développement. Pour une présentation simple et explicite sur les tests statistiques, le lecteur intéressé peut consulter Gourieroux et Monfort (1996).

En littérature, on rencontre plusieurs types de tests. Certains sont basés sur les techniques de l'estimation non-paramétrique (voir par exemple, Hjellvik et Tjøstheim (1996) et McKeague et Zhang (1994)). D'autres sont basés sur les processus empiriques des résidus cumulés (voir par exemple, Chen et An (1997), Diebolt et al (1997), Ngatchou-Wandji (2002)) et Gao et King (2004)). D'autres sont basés sur les rapports de vraisemblance.

En général, lorsque les hypothèses à tester sont simples, le problème est facile à traiter. Cependant, de telles hypothèses restent rares en pratique. Lorsque les hypothèses sont composées, ou lorsque le paramètre sous l'hypothèse nulle est multidimensionnel, l'étude du problème de test devient moins facile. En vue d'examiner ces cas, des tests fondés sur la statistique de vraisemblance, plus caractérisés par leurs propriétés asymptotiques, sont utilisés. Parmi eux, ont peut citer les tests de Wald et du rapport de vraisemblance.

La détermination de la loi de la statistique d'un test sous l'hypothèse alternative est en général un problème difficile. Des auteurs proposent de compléter l'étude de la puissance des tests par des simulations numériques dans lesquelles le boostrap est souvent utilisé. Toutefois, l'étude théorique de la puissance peut être facile dans le cas où les hypothèses à tester sont contigües. En effet, le troisième lemme de Le Cam permet le calcul de la loi de la statistique du test sous l'hypothèse alternative (voir par exemple Le Cam (1986)). Pour citer un exemple, dans une classe des modèles bilinéaires contigüs aux modèles autorégressifs, la puissance locale du test du multiplicateur de Lagrange (ML) est étudiée dans Guégan et Pham (1992), en admettant (sans démonstration rigoureuse) que les modèles à tester sont contigüs.

Notons que la contiguïté est une conséquence de la normalité asymptotique locale parfois notée LAN. C'est un outil fondamental dans la preuve de nos résultats. C'est pour cette raison qu'ils sont précédés par l'établissement de cette importante propriété. Notons que plusieurs versions de la LAN existent dans la littérature. Celles présentées dans Swensen (1985) et Hall et Mathiason (1990) en sont des exemples. Elles ont donné lieu à l'étude des tests fondés sur des techniques paramétriques ou non-paramétriques (voir Kreiss (1990),Hwang et Basawa (1993), Taniguchi et Kakizawa (2000), Hwang et Basawa (2001, 2003), Ngatchou-Wandji (2005), Chebana et Laïb (2008)).

Rappelons qu'il est possible de proposer plusieurs statistiques pour le même problème de test. En vue de choisir la statistique la plus performante, une notion de préférabilité a été introduite sur l'ensemble des tests. Ce critère permet de choisir entre deux tests à partir de la comparaison de leurs erreurs de première et de deuxième espèces. Pour plus de détails, voir la propriété (14.13) de Gourieroux et Monfort (1996). De plus, notons qu'au

sens du préordre défini dans cette propriété, le test préféré est dit optimal. Le choix d'un test peut donc être basé sur le critère d'optimalité, mais aussi sur des critères d'efficacité comme ceux de Pitman ou de Bahadur. Ceux basés sur le critère d'optimalité sont souvent dits de Neyman-Pearson. Ils reposent sur le principe de fixer l'erreur de première espèce α et de choisir le test de puissance maximale. Pour établir ce type de tests, on a besoin d'introduire d'autres outils statistiques tels que les principes asymptotiques.

Une autre manière de rechercher les tests optimaux consiste en la sélection des tests parmi ceux qui sont uniformément convergents. Cette convergence signifie que, quand la taille de l'échantillon devient grande, la puissance du test tend vers 1. Toutefois, la limite peut être discontinue par rapport à l'un des paramètres de la fonction puissance, et dans ce cas, on n'a pas de convergence uniforme. D'où en général, la non existence des tests "asymptotiquement uniformément puissants". Devant une telle complexité, les statisticiens proposent de faire une comparaison locale des fonctions puissances. En d'autre termes, un passage de l'étude de la puissance globale à l'étude de la puissance locale.
Grâce à la propriété LAN préalablement établie, des tests optimaux sont obtenus dans Hallin et Puri (1994), Benghabrit et Hallin (1996); Benghabrit et Hallin (1998) et Cassart et al (2008). Il est utile de rappeler que par rapport à ces derniers travaux, et pour l'obtention de l'optimalité, l'introduction des estimateurs asymptotiquement discrets et l'utilisation du lemme 4.4 de Kreiss (1987) sont des outils fondamentaux.

Nos travaux de recherches contribuent à l'étude des tests localement asymptotiquement optimaux dans les modèles des séries chronologiques. Ils sont essentiellement basés sur la propriété de la normalité asymptotique locale. Nous présentons notre contribution dans le paragraphe suivant.

1.1.2 Contribution

Le développement asymptotique des statistiques de tests basées sur le rapport de vraisemblance contre certaines alternatives locales fait souvent apparaître une statistique dite centrale (voir par exemple Benghabrit et Hallin (1992), Benghabrit et Hallin (1996), Benghabrit et Hallin (1998)). Bien souvent, celle-ci dépend du paramètre du modèle testé

et c'est sur elle que repose l'étude des propriétés asymptotiques de la statistique du test. Les tests de Wald, de Rao et de Neyman-Pearson, en sont des exemples.

Il est bien connu en statistique lorsque le paramètre est inconnu, on le remplace par un estimateur. Cette opération n'est pas toujours sans incidence sur la puissance du test. Elle peut par exemple ne plus garantir son optimalité.

Notre principale contribution est l'étude de l'optimalité des tests du rapport de vraisemblance pour discriminer entre des modèles de séries chronologiques linéaires et $ARCH$. Dans les différents cas considérés, nous avons construit des estimateurs garantissant l'optimalité des tests lorsque les paramètres des modèles étudiés sont inconnus.
Ces estimateurs, construits à partir de l'espace tangent à la suite centrale, permettent d'obtenir l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. Les techniques paramétriques utilisées dans ces problèmes sont basées sur la propriété de la normalité asymptotique locale. Les deux versions de la LAN présentées dans Hwang et Basawa (2001) et Hwang et Basawa (2003) sont utilisées dans le cas autorégressif d'ordre un et d'ordre $p > 1$. Des simulations sont effectuées pour l'investigation de la performance de nos méthodes.

Au chapitre 2, nous traitons séparément le problème de tester un modèle autorégressif linéaire d'ordre 1 contre des autorégressifs non-linéaires, et le cas d'un modèle autorégressif linéaire d'ordre $p > 1$ contre des modèles autorégressifs non-linéaires. Les estimateurs que nous y construisons permettent d'obtenir l'équivalence asymptotique des suites centrales, et leurs versions estimées. Ceci permet de conserver l'optimalité asymptotique locale des tests proposés. La même démarche est adaptée au problème du test des modèles $AR(p)$ de variance 1 contigüs à des modèles autorégressifs de variances tendant vers 1. Cette première partie a fait l'objet de la publication de Lounis (2014).

Au chapitre 3, sous des conditions de stationnarité et d'ergodicité, nous nous intéressons à l'étude des tests traitant simultanément des hypothèses portant sur les moyennes et les variances conditionnelles. En se basant sur la version LAN de Hwang et Basawa (2001), nous établissons la normalité asymptotique locale pour ces modèles.

Dans le cas où le paramètre du modèle est supposé connu, les tests construits sont asymptotiquement optimaux et les expressions explicites de leurs puissances asymptotiques sont obtenues. Lorsque le paramètre inconnu est remplacé par un estimateur, nous établissons dans un premier temps, un lien entre la suite centrale et la suite centrale estimée. Ceci est obtenu grâce à l'utilisation des suites locales d'estimateurs et d'estimateurs asymptotiquement discrets, et l'application du lemme 4.4 de Kreiss (1987).

Dans ce lien entre les suites centrale et centrale estimée, un terme asymptotiquement non dégénéré apparait. Ceci affecte la puissance locale du test étudié. En vue de supprimer cet effet, une méthode d'évaluation de l'erreur de l'estimation suivie de l'introduction d'un autre estimateur du paramètre nous permet de conserver l'équivalence entre les suites centrale et centrale estimée. Ce qui permet d'obtenir une expression explicite de la puissance locale asymptotique du test.

Pour une évaluation de la performance de nos résultats, des simulations sont effectuées et commentées. Les résultats obtenus dans cette partie généralisent ceux du chapitre précédent. Cette deuxième partie a fait l'objet de la publication de Lounis (2013).

Le chapitre 4 est une application de nos résultats aux données financières tirées du marché du Capital Market France (FXCM). Nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude du logarithme du retour (log-return) du prix d'une action. Plusieurs travaux de recherche ont été effectués dans le passé pour examiner la distribution de cette série. Le grand intérêt suscité pour ce processus est lié à son application dans les investissements et à son rôle fondamental dans l'analyse des marchés financiers. Plus précisement, la distribution identique et indépendante du log-return est examinée en utilisant les tests étudiés dans les chapitres précédents. Notre étude est en majeure partie inspirée des références suivantes : Chebana et Laïb (2008), Lounis (2013) et Lounis (2014).

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord les résultats et notations utilisées. Ensuite, nous présentons quelques notions et modèles financiers. Nous énonçons et prouvons nos résultats. Enfin, nous présentons et commentons les résultats de l'application de nos résultats théoriques aux données réelles. Les résultats obtenus concordent avec les recherches

empiriques effectuées dans le passé. Ces résultats disent en substance que l'hypothèse i.i.d. du logarithme du retour ne tient pas. À la fin du chapitre, nous proposons des modèles de prévision pour des données journalières, hebdomadaires et mensuelles.

1.2 Outils fondamentaux

1.2.1 Introduction

Cette partie regroupe quelques notions et outils fondamentaux que nous utilisons dans la suite. Une notion fondamentale sur laquelle s'appuie une bonne partie de notre contribution est la normalité asymptotique locale (LAN) issue de la théorie de Le Cam.
Nous rappelons les principales définitions et les principaux résultats associés à cette notion. Nous présentons également la notion des estimateurs localement asymptotiquement discrets introduite par Le Cam (1960). Nous établissons ensuite un lien avec les suites locales en se basant sur un lemme fondamental énoncé dans Kreiss (1987).
Une version modifiée de LAN de celle de Hall et Mathiason (1990) est présentée dans Hwang et Basawa (2001). Ce dernier résultat concerne les modèles non-linéaires contigüs au processus $AR(1)$ et correspond au théorème 1 de Hwang et Basawa (2001). Sous des conditions vérifiées par une large classe de modèles de séries chronologiques, la puissance du test construit est donnée dans le théorème 3 de Hwang et Basawa (2001). Nous rappelons ces deux derniers théorèmes.
L'adaptation du travail de Hwang et Basawa (2001) aux modèles $ARCH$ nécessite le rappel de quelques résultats correspondants au théorème centrale limite des martingales énoncé dans Hall et Heyde (1980), ainsi que quelques notions de séries chronologiques.

1.2.2 Normalité asymptotique locale et contiguïté

La propriété LAN est due essentiellement à Le Cam (1960). Elle peut être décrite dans un cadre très général. Par souci de simplicité, nous nous restreignons aux cas particuliers d'observations réelles de dimension $n \in \mathbf{N}$ et de familles paramétriques de dimension k fixée. Nous nous limitons aux notions principales. Pour plus de détails, le lecteur intéressé

peut se référer au chapitre 4 de Droesbeke et Fine (1996), et aux chapitres 6 et 7 de Van der Vaart (1998).
Une bonne partie de cette présentation est tirée de Droesbeke et Fine (1996), duquel sont issues nos notations et certaines de nos définitions.

Notations et définitions

Dans toute la suite, Θ est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^k$, $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite stationnaire de variables aléatoires définie sur un espace mesurable $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ et telle que pour $i \in \mathbf{N}$, la variable aléatoire X_i admet comme mesure de probabilité $\mathbf{P}_\theta$ où $\theta \in \Theta$.
On suppose que la famille paramétrique des lois $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ est indexée d'une façon injective, c'est à dire, pour tout $(\theta,\theta') \in \Theta \times \Theta$, on a :

$$\theta \neq \theta' \Rightarrow \mathbf{P}_\theta \neq \mathbf{P}'_\theta.$$

Observer la suite de variable aléatoire $X_1,\ldots,X_n$ sur un espace mesurable $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ revient à observer sur l'espace $(\mathcal{X}^n,\mathcal{A}^n)$ le n-uple $X^{(n)} = (X_1,\ldots,X_n)$ de loi de probabilité $\mathbf{P}_\theta{}^{(n)}$, produit de n copies de $\mathbf{P}_\theta$. L'expérience $X^{(n)} = (X_1,\ldots,X_n)$ est décrite par le modèle statistique (ou expérience statistique) $\mathcal{E}_\theta^{(n)} = (\mathcal{X}^n,\mathcal{A}^n,\mathcal{P}^{(n)})$ où, $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Dans le cas où $\mathcal{X} = \mathbf{R}$, on a : $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne.
Pour tout $\theta \in \Theta$, on définit des **suites locales** de voisinages $\theta^{(n)}$ de θ qui convergent vers θ quand $n \to \infty$, la forme de ces suites est donnée par l'égalité suivante :

$$\theta^{(n)} = \theta + \nu(n)\,\tau, \quad \text{où} \quad \nu(n) \quad \text{est une matrice} \quad k \times k \quad \text{et} \quad \tau \in \mathbf{R}^k. \tag{1.1}$$

On suppose que lorsque n est assez grand, $\theta^{(n)} \in \Theta$. Nous supposons également que la matrice $\nu(n)$ est inversible avec $\|\nu(n)\| \to 0$ quand $n \to \infty$, où $\|.\|$, est la norme euclidienne. D'une façon plus générale, on écrit :

$$\theta^{(n)} = \theta + \nu(n)\,\tau^{(n)}, \quad \text{où} \quad \sup\left[(\tau^{(n)})'\tau^{(n)}\right] < +\infty. \tag{1.2}$$

La suite d'expériences $\mathcal{E}^{(n)}(\theta) = \left(\mathcal{R}^n,\mathcal{B}^n,\mathcal{P}^{(n)}(\theta)\right)$ est appelée **suite d'expériences localisées** en θ. Le choix de la suite $\nu(n)$ est lié à la nature du problème à étudier, quelques exemples de ce choix sont exposés dans Droesbeke et Fine (1996).

On désigne par P et Q deux mesures de probabilité sur l'espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.
Il existe une fonction f non négative $\mathcal{A}$-mesurable et un événement N avec $P(N) = 0$, tels que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$Q(A) \quad = \quad \int_A f dP \quad + \quad Q(A \cap N). \tag{1.3}$$

L'égalité (1.3) est "La décomposition de Lebesgue de Q par rapport à P", $Q(A \cap N)$ est la partie singulière dans cette décomposition.
Dans le cas où la mesure Q est absolument continue par rapport à P, la densité f est appelée rapport de vraisemblance de Q par rapport à P, et elle est définie par dQ/dP.
Dans le cas relatif à l'expérience statistique décrite par la suite $\mathcal{E}^{(n)}(\theta)$, on considère le rapport de vraisemblance $\frac{d\mathbf{P}^{(n)}_{\theta+\nu(n)\,\tau^{(n)}}}{d\mathbf{P}^{(n)}_{\theta}}$, ce choix est motivé par le lemme de Neyman-Pearson qui montre l'intérêt du logarithme de ce rapport dans le problème des tests statistiques et qu'on convient de noter par :

$$\Lambda_{\theta+\nu(n)\,\tau^{(n)}} \quad = \quad \log\Big(\frac{d\mathbf{P}^{(n)}_{\theta+\nu(n)\,\tau^{(n)}}}{d\mathbf{P}^{(n)}_{\theta}}\Big). \tag{1.4}$$

La performance locale asymptotique des expériences statistiques se ramène à l'étude du comportement de $\Lambda_{\theta+\nu(n)\,\tau^{(n)}}$, ce qui est décrit dans la ***"Théorie de Le Cam".***

Normalité locale asymptotique

Plusieurs sources et versions existent pour la définition de la normalité asymptotique locale que l'on note en abrégé **LAN**, en utilisant les notations des paragraphes précédents, on convient de donner la définition suivante :

Définition 1.1. *(Définition 4.1 de Droesbeke et Fine (1996))*
La suite d'expériences $\mathcal{E}^{(n)}(\theta) = (\mathbf{R}^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{P}^{(n)}(\theta))$ *est dite localement asymptotiquement normale* ***LAN****, si pour tout* $\theta \in \Theta$*, il existe une suite* $\Delta^{(n)}(\theta)$ *de vecteurs aléatoires* $\mathcal{B}^n$*-mesurables, et une matrice semi-définie positive* $\Gamma(\theta)$ *fonction continue en* θ*, telles que :*
(i) *: Pour toute suite* $\tau^{(n)}$ *telle que* $\sup\big[(\tau^{(n)})'\tau^{(n)}\big] < +\infty$*, sous* $\mathbf{P}^{(n)}(\theta)$
et quand $n \to +\infty$*, on a :*

$$\Lambda_{\theta+\nu(n)\,\tau^{(n)}} = \tau^{(n)\prime}\Delta^{(n)}(\theta) - \frac{1}{2}\tau^{(n)\prime}\Gamma(\theta)\tau^{(n)} + o_P(1).$$

(ii) : *Sous* $\mathbf{P}^{(n)}(\theta)$ *et quand* $n \to +\infty$, $\Delta^{(n)}(\theta) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0, \Gamma(\theta))$.

On appelle $\Delta^{(n)}(\theta)$ une **suite centrale**.

Un exemple important de familles vérifiant la condition **LAN**, est celui des familles régulières de Cramer. On peut également citer sous les conditions classiques de régularité et des conditions de Noether la vérification de la propriété **LAN** par des modèles linéaires simples et généraux (sous l'hypothèse nulle). Les détails de ces exemples sont bien explicités dans Droesbeke et Fine (1996).

D'autres expériences statistiques sont localement asymptotiquement normales. Parmi elles, on peut citer celles qui sont différentiables en moyenne quadratique voir par exemple le chapitre 7 de Van der Vaart (1998).

Contiguïté

On désigne par $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ deux mesures de probabilité sur l'espace mesurable $\left(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}\right)$.

Définition 1.2. *(Définition 4.2.1 de Droesbeke et Fine (1996))*
On dit que la suite $Q^{(n)}$ *est contigüe à la suite* $P^{(n)}$*, si et seulement si :*

$$lim_{n\to+\infty} P^{(n)}(A^{(n)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad lim_{n\to+\infty} Q^{(n)}(A^{(n)}) = 0.$$

Si deux suites $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ sont mutuellement contigües, on dit qu'elles sont contigües. La contiguïté est une forme d'absolue continuité. Si on reprend la décomposition de Lebesgue (1.3), dans le cas où la suite $Q^{(n)}$ est contigüe à la suite $P^{(n)}$, la partie singulière de $Q^{(n)}$ par rapport à $P^{(n)}$ tend vers 0. L'un des intérêts est que, si on a une convergence en probabilité d'une suite d'événements par rapport à une mesure de probabilité $P^{(n)}$, on en déduit la convergence en probabilité de cette suite d'événements par rapport à toute mesure de probabilité $Q^{(n)}$ contigüe à $P^{(n)}$.

Établir les critères de contiguïté en s'appuyant juste sur la définition n'est pas toujours

facile. Des critères plus pratiques sont énoncés dans les paragraphes qui vont suivre.
Un premier critère de contiguïté est fortement lié à la propriété **LAN** dont l'énoncé est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. *(Corollaire 4.2 de Droesbeke et Fine (1996))*

La suite $\Lambda^{(n)} = \log\left(\frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}}\right)$ *est localement asymptotiquement normale sous* $P^{(n)}$ *(c'est à dire s'il existe* $\mu^{(n)}$ *et* $\sigma^{(n)}$ *tels que, sous* $P^{(n)}$*, quand* $n \to +\infty$ *,* $\frac{\Lambda^{(n)}-\mu^{(n)}}{\sigma^{(n)}} \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$*) , alors :*
$P^{(n)}$ *et* $Q^{(n)}$ *sont mutuellement contigüe si et seulement si :*
(i) : $lim_{n\to+\infty} \sup \sigma^{(n)} < +\infty$,
(ii) : $lim_{n\to+\infty}(\mu^{(n)} + \frac{1}{2}\,{\sigma^{(n)}}^2) = 0$.

Remarque 1.1. *Une conséquence immédiate du corollaire précédent concerne l'expérience statistique vérifiant la propriété* ***LAN****. Ce résultat est donné par le corollaire suivant :*

Corollaire 1.2. *(Corollaire 4.3 de Droesbeke et Fine (1996))*
Dans une famille ***LAN****, les suites* $\mathbf{P}^{(n)}_{\theta+\nu(n)\,\tau^{(n)}}$ *et* $\mathbf{P}^{(n)}_{\theta}$ *sont mutuellement contigües pour tout* $\theta \in \Theta$*, et pour toute suite bornée* $\tau^{(n)}$*.*

Lemmes de Le Cam

Si deux mesures de probabilité sont contigües, la convergence en probabilité d'une suite d'événements par rapport à l'une des deux mesures de probabilité induit la convergence par rapport à l'autre. Bien évidemment on pourra s'intéresser au mode de convergence en loi et se demander : Est ce qu'on a le même type de résultat ?
La réponse à cette question concerne des situations bien précises.
Par exemple, si l'on considère deux mesures de probabilité sur un même espace, et si le calcul de la puissance asymptotique de la statistique d'un test est facile par rapport à une mesure, comment peut-on en déduire le calcul de cette puissance par rapport à l'autre mesure ? Sous quelques conditions, les trois lemmes de Le Cam fournissent des réponses à ces questions ?

En particulier, **"Le troisième Lemme de Le Cam"** se trouve très riche en conséquences et applications.

Pour le premier lemme de Le Cam, on peut se rapporter aux chapitre 6 de Droesbeke et Fine (1996), ou bien le chapitre 4 de Van der Vaart (1998). Le deuxième lemme de Le Cam est un cas particulier du premier lemme et concerne plutôt les mesures produits.

Le troisième lemme de Le Cam

Proposition 1.1. *(Proposition 4.2 de Droesbeke et Fine (1996))*
Soit $S^{(n)}$ *une suite de variables aléatoires et* $\Lambda^{(n)} = \log\left(\frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}}\right)$.
Si sous $P^{(n)}$, $\begin{pmatrix} S^{(n)} \\ \Lambda^{(n)} \end{pmatrix} \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1\,2} \\ \sigma_{1\,2} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right]$, *avec* $\mu_2 = -\frac{\sigma_2^2}{2}$, *alors :*
$P^{(n)}$ *et* $Q^{(n)}$ *sont mutuellement contigües, et sous* $Q^{(n)}$, $S^{(n)} \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\Big(\mu_1 + \sigma_{1\,2}, \sigma_1^2\Big)$.

Remarque 1.2. *Une situation qui nous intéresse plus dans notre travail est celle qui est relative aux puissances locales asymptotiques des tests statistiques, ceci est présenté au paragraphe qui va suivre.*

Puissance locale asymptotique

On considère la suite des tests ϕ^n définie par :

$$\phi^n = I_{\left\{\frac{S^{(n)}-\mu^{(n)}}{\sigma_1^{(n)}} > Z_\alpha\right\}}, \tag{1.5}$$

où Z_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une variable normale centrée et réduite. Si sous $P^{(n)}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{S^{(n)}-\mu^{(n)}}{\sigma_1^{(n)}} \\ \Lambda^{(n)} \end{pmatrix} \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{1\,2} \\ \sigma_{1\,2} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right].$$

Alors ϕ^n est de niveau asymptotique α (sous la suite d'hypothèses nulles $P^{(n)}$), et on a donc : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_{P^{(n)}}(\phi^n) = \alpha$

Le troisième lemme de Le Cam nous permet d'en déduire la puissance asymptotique de ϕ^n sous la suite des hypothèses alternatives $Q^{(n)}$, on obtient ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_{Q^{(n)}}(\phi^n) = 1 - \Psi(Z_\alpha - \sigma_{1\,2}),$$

où Ψ est la fonction de répartition d'une loi normale centreé et réduite.

Estimateurs localement asymptotiquement discrets

Les estimateurs localement asymptotiquement discrets sont introduits dans Le Cam (1960). Ils sont utilisés dans plusieurs travaux de recherche, en vue de construire des tests optimaux (Bickel (1982), Linton (1993), Benghabrit et Hallin (1992, 1996); Benghabrit et Hallin (1998) et Cassart et al (2008)). On a la définition suivante :

Définition 1.3. *$\hat{\theta}_n$ est un estimateur localement asymptotiquement discret du paramètre inconnu θ_0 si et seulement si les conditions (D_1) et (D_2) suivantes sont vérifiées :*

- (D_1) $\hat{\theta}_n$ est $\sqrt{n}$ consistent, i.e pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta_1(\theta_0, \epsilon)$ et $n_1(\theta_0, \epsilon)$ tel que sous (H_0), $\forall n \geq n_1(\omega_0, \epsilon)$, $\mathbf{P}(\sqrt{n}\|\hat{\theta}_n - \theta_0\|_k > \eta_1) \leq \epsilon$.
- (D_2) $\hat{\theta}_n$ est localement discret, i.e pour toute valeur fixée $c > 0$ et sous (H_0) quand $n \to +\infty$, le nombre possible des valeurs de $\hat{\theta}_n$ dans la boule fermée $B_1 = \{u \in \mathbf{R}^k, \sqrt{n}\|u - \theta_0\|_k \leq c\}$ est fini.

$\|\cdot\|_k$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^k$.

Remarque 1.3. *Notons que la condition (D_1) concerne plutôt la vitesse appropriée à la convergence en probabilité de ces estimateurs. Cette condition est satisfaite par plusieurs estimateurs, citons par exemple les estimateurs du maximum de vraisemblance, les estimateurs de Yule-Walker, les M-estimateurs et les estimateurs des moindres carrés.*

Lemme de Kreiss

Le grand avantage de recourir aux estimateurs localement asymptotiquement discrets réside dans l'utilisation du lemme 4.4 de Kreiss (1987) dont l'énoncé est le suivant :

Lemme 1.1. *(Lemme 4.4 de Kreiss (1987))*

Soit $\left\{S_n(\upsilon), n \in \mathbf{N}\right\}$ une suite de variables aléatoires dépendantes du paramètre υ. Si on a pour toute suite υ_n vérifiant la condition (1.6) suivante :

$$\sqrt{n}(\upsilon_n - \upsilon_0) \quad \text{est bornée par une constante} \quad c > 0 \text{ et } S_n(\upsilon_n) = o_{p_{\upsilon_0}(1)}, \tag{1.6}$$

alors, on a aussi $S_n(\bar{v_n}) = o_{p_{v_0}(1)}$, *pour toute suite* $\sqrt{n}$*-consistant d'estimateurs discrets* $\bar{v_n}$.

1.2.3 Théorème limite centrale des martingales

Les résultats obtenus concernant la somme des variables aléatoires indépendantes sont fondamentaux en probabilité moderne. On peut considérer la théorie des martingales comme une extension de notions issues d'un cadre d'indépendance. À cet effet des résultats du type " Théorème limite centrale " ont été établi dans Bernstein (1927) et Lévy (1935a,b, 1954).

D'une manière explicite, considérons la martingale centrée $\{S_n\}$, de carré intégrable et adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n$, et soit X_n la différence des martingales définie par

$$X_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 1 \text{ et, } X_1 = S_1.$$

La variance conditionnelle des martingales V_n définie par $V_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i^2/\mathcal{F}_{i-1})$ a été introduite pour la première fois par Lévy en 1927. La variance conditionnelle des martingale joue un rôle très important dans la convergence des martingales. Sous des conditions relatives à la variable aléatoire décrivant la différence des martingales et à la variance conditionnelle, de nombreux théorèmes ont été obtenus.

Nous nous contenterons d'énoncer les principaux résultats que nous utilisons dans la suite. Pour une présentation détaillée de ces notions, voir le chapitre 3 de Hall et Heyde (1980). Pour l'obtention des théorèmes limites centrales des martingales, diverses conditions de négligibilité asymptotique ont été imposées sur la suite de variables aléatoires correspondante à la différence des martingales.

Dans toute la suite, la variable aléatoire S_{ni} est une martingale centrée, de carré intégrable et adaptée à la filtration $\mathcal{F}_{ni}$, la variable aléatoire X_{ni} désigne la différence des martingales $X_{ni} = S_{ni} - S_{n,i-1}$ avec $S_{n,0} = 0 \quad$ et $\quad 1 \leq i \leq k_n \quad$ où $\quad k_n \uparrow 0, \quad n \to \infty$.

Quelques conditions sur la négligibilité asymptotique

Il y a plusieurs conditions de négligibilité asymptotique de X_{ni} pour le théorème limite centrale des martingales. Les conditions les plus classiques dans le cas indépendant sont du type :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \max_i \mathbf{P}\Big(|X_{ni}| > \epsilon\Big) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{1.7}$$

La condition (1.7) est plus faible que la condition de sommation suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sum_i \mathbf{P}\Big(|X_{ni}| > \epsilon\Big) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{1.8}$$

Quand les variables X_{in} sont indépendantes, la condition (1.8) est équivalente à :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \max_i \Big(|X_{ni}| > \epsilon\Big) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \tag{1.9}$$

Quelques auteurs ont imposé la condition de " Linderberg" suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sum_i \mathbf{E}\Big(X_{ni}^2 I_{\{|X_{ni}|>\epsilon\}} \Big/ \mathcal{F}_{i-1}\Big) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \tag{1.10}$$

où I est la fonction indicatrice.

Théorème central limite des martingales

Nous rappelons la version du théorème central limite (TCL) dont nous avons besoin :

Théorème 1.1. *(Théorème 3.2 de Hall et Heyde (1980))*
Soit $\Big\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \le i \le k_n, n \ge 1\Big\}$ *une martingale centrée et de carré integrable, et* $X_{ni} = S_{ni} - S_{n,i-1}$ *la différence des martingales correspondante. Soit* η *une variable aléatoire p.s finie.*
On suppose que :

$$\max_i(|X_{ni}|) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta^2, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{E}(\max_i(X_{ni}^2)) \quad \textit{est borné en} \quad n, \tag{1.13}$$

et les $\sigma -$ *tribus sont ordonnées, (i.e)*

$$\mathcal{F}_{ni} \subseteq \mathcal{F}_{n+1,i} \quad \textit{pour} \quad 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1. \tag{1.14}$$

On a alors, $S_{nk_n} = \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} Z$, *où la variable aléatoire* Z *admet comme fonction caractéristique* $\mathbf{E}\left[exp(-\frac{\eta^2}{2}t^2)\right]$.

Remarque 1.4. *D'autres versions du théorème limite centrale des martingales peuvent être obtenues sous les conditions citées, on a :*

Corollaire 1.3. *(Corollaire 3.1 de Hall et Heyde (1980))*
On maintient dans l'énoncé du théorème 1.1 la condition (1.14).
Si les conditions (1.11) et (1.13) sont remplacées par la condition de Linderberg (1.10), et si la condition (1.12) est remplacée par une condition du même type sur la variance conditionnelle :

$$V_{nk_n}^2 = \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}(X_n^2 i/\mathcal{F}_{n,i-1}) \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta^2,$$

le théorème précédent reste vérifié.

Remarque 1.5. *(Remarque de Hall et Heyde (1980))*
Si on maintient dans l'énoncé du théorème 1.1 les conditions (1.11), (1.12) et (1.13) et on remplace la condition (1.14) par la condition de mesurabilité de la variable aléatoire η, *le théorème reste aussi valable.*

1.2.4 Quelques rappels sur les séries chronologiques

La notion de stationnarité est très importante dans l'analyse et l'étude théorique des séries chronologiques. Une série temporelle $\{Y_t\}$ est dite strictement stationnaire si la distribution conjointe $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k})$ est identique à celle de $(Y_{t_1+t}, \ldots, Y_{t_k+t})$, quelque soit k. Autrement dit, on a l'invariance de la distribution de n'importe quel sous-vecteur de $\{Y_t\}$ quand on translate d'une même quantité. La stationnarité stricte est difficile à vérifier, c'est en partie pour cela qu'on utilise une version plus faible, dite stationnarité faible, dont la définition est la suivante :

Stationnarité faible

Définition 1.4. *Le processus stochastique* $\{X_t\}$ *est dit* ***faiblement stationnaire*** *si :*

- $\mathbf{E}(X_t) = \mu$, *constante indépendante de* t.
- $Cov(X_t, X_{t-h})$ *ne dépend que de* h *et dans ce cas elle est notée :*

$$\gamma_h = cov\left(X_t, X_{t-h}\right).$$

Ergodicité

Si l'on considère un processus stochastique quelconque, il est toujours intéressant d'obtenir des estimateurs sans biais des moments de ce processus à partir d'un seul échantillon "la série temporelle".
En général, l'obtention de ce type d'estimateurs à partir d'un seul échantillon n'est pas toujours facile. Quand c'est possible, on dit que le modèle est **ergodique**, d'une manière formelle, on a la definition suivante :

Définition 1.5. *Un processus stationnaire est dit ergodique si pour toute fonction borelienne* f *de* $\mathbf{R}^k$ *dans* $\mathbf{R}$, *on a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(X_{t_1+i}, \ldots, X_{t_k+i}\right) \xrightarrow{p.s.} \mathbf{E}f\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}\right), \quad quand \quad n \to +\infty.$$

Remarque 1.6. *On peut voir l'ergodicité comme une généralisation de la loi des grands nombres.*

1.2.5 Séries chronologiques non linéaires contigües aux processus $AR(1)$

Cette section est le noyau de notre travail de recherche. Elle est tirée de Hwang et Basawa (2001), les principaux résultats sont :

1. Le principe de la normalité asymptotique locale du logarithme de rapport vraisemblance pour le problème de test des modèles non-linéaires contigüs aux modèles $AR(1)$ est établi.
2. La construction d'un test optimal de linéarité dont la puissance asymptotique locale est calculée (le paramètre de la série chronologique est supposé connu).

3. Une extension de ces résultats aux modèles autorégressifs avec hétéroscédasticité conditionnelle $ARCH$.

Nous résumons avec un peu plus de détails dans le paragraphe qui va suivre les principaux résultats obtenus.

Notations et conditions

Considérons le modèle de série chronologique (non linéaire) d'ordre m suivant :

$$X_t = \phi X_{t-1} + \alpha G\left(\mathbf{X}(t-1)\right) + \epsilon_t, \quad |\phi| < 1, \tag{1.15}$$

où $\{\epsilon_t\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., centrée et de variance σ_ϵ, α est un réel, G est une fonction à valeurs réelles et $\mathbf{X}(t-1) = (X_{t-1}, \ldots, X_{t-m})$ est le vecteurs des m observations antérieures à l'instant t.

On suppose que la condition suivante est satisfaite :

(C.0) Le modèle (1.15) est ergodique, de moment d'ordre 2 finis.

Nous désignons par $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_n$ respectivement les mesures de probabilité des processus $AR(1)$ linéaires (1.16) et $AR(1)$ non-linéaires 1.17, avec :

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t, \quad |\phi| < 1, \quad \text{et} \tag{1.16}$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + n^{-\frac{1}{2}} G\left(\mathbf{X}(t-1)\right) + \epsilon_t, \quad |\phi| < 1. \tag{1.17}$$

On suppose que la fonction G vérifie la condition suivante :

(C.1) Il existe des constantes positives η et c telles que pour tout $\|u\| > \eta$, $|G(u)| < c\|u\|_m$, où $\|.\|_m$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^m$.

On s'intéresse au problème du test de l'hypothèse $H : \alpha = 0$ contre l'hypothèse $K_n : \alpha = n^{-\frac{1}{2}}$. Notons que cela revient à tester la linéarité contre les non-linéarités du modèle (1.15). Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les observations antérieures à l'instant n. Considérons le logarithme du rapport de vraisemblance $\Lambda_n = log(\frac{p_{0,n}}{p_{n,n}})$, où $p_{0,n}$ et $p_{n,n}$ désignent les densités des n-uples $(X_1, \ldots, X_n)$ sous H et K_n respectivement.

On montre que $\Lambda_n = \sum_{t=1}^{n} log\left(g_{n,t}\right)$, où $g_{n,t}$ est le rapport de deux densités conditionnelles et Λ_n la statistique de Neyman-Pearson. On a les résultats suivants :

Normalité locale asymptotique

Ce résultat concerne le principe de la normalité locale asymptotique établie pour le logarithme du rapport de vraisemblance. La formulation exacte est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1. *(Théorème 1 de Hwang et Basawa (2001))*
Supposons que sous $\mathbf{P}_0$, *les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- *(1)* $\max_{1\leq t\leq n}|g_{n,t}-1| = o_p(1)$,
- *(2) il existe une constante* τ^2 *telle que* $\sum_{t=1}^{n}(g_{n,t}-1)^2 = \tau^2+o_p(1)$ *et une variable aléatoire* V_n-$\mathcal{F}_n$ *mesurable vérifiant*
- *(3)* $\sum_{t=1}^{n}(g_{n,t}-1) = V_n + o_p(1)$.

Les conditions (1), (2), *et* (3) *impliquent que sous* $\mathbf{P}_0$,

$$\Lambda_n = V_n - \frac{\tau^2}{2} + o_p(1), \quad où \quad V_n \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(0,\tau^2\right).$$

Pour obtenir des résultats plus explicites (où la suite centrale V_n est spécifiée), la condition de régularité **(C.2)** suivante est admise :
(C.2) : Pour la famille des translations $\{f(x-c), -\infty < c < +\infty\}$, il existe deux fonctions positives et de carré intégrable ψ_1 et ψ_2, et une constante positive δ, telles que pour toute variable x et $|c| < \delta$, :

$$\left|\frac{1}{f(x)} \times \frac{d^k f(x-c)}{dc^k}\right| \leq \psi_k(x) \quad \text{pour} \quad k = 1, 2.$$

Plusieurs fonctions de densité vérifient cette dernière condition. Parmi elles, on peut citer la loi normale et la loi de Student de degré de liberté supérieur ou égal à 3.
Dans toute la suite, l'information contenue dans ϵ_t est notée par i_f, avec

$$i_f = \mathbf{E}\left[\frac{\dot{f}(\epsilon_t)}{f(\epsilon_t)}\right]^2. \tag{1.18}$$

Par un calcul simple, on peut montrer que :

$$g_{n,t} = \frac{f\left[X_t - \phi X_{t-1} - n^{-\frac{1}{2}}G(X(t-1))\right]}{f\left[X_t - \phi X_{t-1}\right]}. \tag{1.19}$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 1.2. *(Théorème 2 de Hwang et Basawa (2001))*
On suppose que ***(C.1)*** *et* ***(C.2)*** *sont vérifiées. Alors, sous H :*

$$\begin{aligned}
\Lambda_n &= V_n - \frac{\tau^2}{2} + o_p(1), \\
V_n &= -n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{n} \frac{\dot{f}(\epsilon_t)}{f(\epsilon_t)} G(X(t-1), \\
V_n &\overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0, \tau^2), \\
&et \\
\tau^2 &= i_f \mathbf{E}\left[G^2(X(t-1)\right].
\end{aligned}$$

Un test localement asymptotiquement optimal pour les modèles $AR(1)$

Pour tester H (linéarité) contre K_n (non linéarité), on utilise le test de Neyman-Pearson de niveau α basé sur la statistique suivante :

$$T_n = I\Big\{\frac{V_n}{\tau} \geq Z_\alpha\Big\}, \tag{1.20}$$

où V_n et τ sont définis au théorème précédent, et Z_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi normale centrée et réduite.
L'optimalité asymptotique du test T_n est donnée par le théorème suivant :

Optimalité du test

Sous les conditions du théorème 1.2, on a :

Théorème 1.3. *(Théorème 3 de Hwang et Basawa (2001))*
La puissance asymptotique du test T_n est égale à $1 - \Psi(Z_{1-\alpha} - \tau)$, où Ψ est la fonction de répartition d'une gaussienne centrée et réduite, et le test T_n est localement asymptotiquement optimal (dans le sens où, pour tout niveau α fixé, la puissance du test T_n est supérieure à celle de tout autre test de même niveau).

Remarque 1.7. *Les résultats obtenus pour l'optimalité locale asymptotique du test concernent le cas où le paramètre ϕ du modèle (1.15) est supposé connu.*

Une extension aux processus $ARCH$

Une extension des résultats précédents aux processus $ARCH$ est établie. À cet effet, on considère le modèle de série chronologique (avec hétéroscédasticité conditionnelle) suivant :

$$X_t \quad = \quad \phi X_{t-1} + \alpha G\left(\mathbf{X}(t-1)\right) + \sqrt{\left(1+\beta B\left(\mathbf{X}(t-1)\right)\right)}\,\epsilon_t, \quad |\phi| < 1, \qquad (1.21)$$

où $G(\mathbf{X}(t-1))$ et ϵ_t sont définis comme précédemment, β un réel et B une fonction à valeurs réelles. On suppose de plus que le modèle (1.21) est ergodique et stationnaire. Les conditions **(A.1)** et **(A.2)** suivantes sont nécessaires :

(A.1) Les moments d'ordre 4 du modèle (1.21) existent.

(A.2) Il existe des constantes η et c, telles que pour tout $\|u\|_m > \eta$, $\|B(u)\| \leq c\|u\|_m^2$.

On considère le problème du test de $\tilde{H}$ contre $\tilde{K}_n$, avec :

$$\tilde{H} : \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \text{et} \quad \tilde{K}_n : \alpha = n^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = n^{-\frac{1}{2}}.$$

En vue d'établir la contiguïté des hypothèses $\tilde{H}$ et $\tilde{K}_n$, la condition **(A.3)** suivante est imposée :

(A.3) Pour la famille de translation-autosimilaire $\left\{b^{-1}f(\frac{x-\alpha}{b}), -\infty < \alpha < +\infty, b > 0\right\}$, il existe une fonction positive, de carré integrable $\Pi(x)$ et une constante positive δ, telles que pour tout x et $|a| < \delta$, $|b-1| < \delta$ on a :

$$\left|\frac{1}{f(x)} \times \frac{\partial^2 b^{-1} f(\frac{x-a}{b})}{\partial a^i \partial b^j}\right| \leq \Pi(x), \quad \text{où i et j sont entiers naturels avec} \quad i+j=2. \quad (1.22)$$

On note par $\tilde{\Lambda}_n = \sum_{t=1}^{n} log(\tilde{g}_{n,t})$, le logarithme du rapport de vraisemblance obtenu par rapport au test de l'hypothèse nulle $\tilde{H}$ contre l'hypothèse alternative $\tilde{K}_n$,

$$\tilde{g}_{n,t} = {\beta_n}^{-1}\frac{f(\frac{\epsilon_t - \alpha_n}{\beta_n})}{f(\epsilon_t)}, \quad f(\epsilon_t) \neq 0,$$

$$\text{avec} \quad \alpha_n = n^{-\frac{1}{2}}G(X(t-1)) \quad \text{et} \quad \beta_n = \left[1 + n^{-\frac{1}{2}}B(X(t-1))\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Posons :

$$i_j = \mathbf{E}\left[{\epsilon^j}_t \frac{\dot{f}(\epsilon_t)}{f(\epsilon_t)}\right]^2, \quad \text{où} \quad j = 0, 1, 2.$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 1.4. *(Théorème 4 de Hwang et Basawa (2001))*

Supposons que les conditions ***(C.1)***, ***(C.2)***, ***(A.1)*** *et* ***(A.3)*** *sont vérifiées. Alors, quand* $n \to \infty$ *(sous l'hypothèse nulle* $\tilde{H}$*) :*

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_n &= \tilde{V}_n - \frac{\tilde{\tau}^2}{2} + o_p(1), \\
&\text{où} \\
\tilde{V}_n &= -n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{n} \frac{\dot{f}(\epsilon_t)}{f(\epsilon_t)} G(X(t-1) - n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{n} \left[\epsilon_t \frac{\dot{f}(\epsilon_t)}{f(\epsilon_t)} + 1 \right] B(X(t-1), \\
\tilde{V}_n &\overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(0, \tilde{\tau}^2\right), \\
&\text{et} \\
\tilde{\tau}^2 &= i_0 \mathbf{E}\left[^2(X(t-1)\right] + \frac{i_2 - 1}{4} \mathbf{E}\left[B^2(X(t-1)\right] + i_1 \mathbf{E}\left[G(X(t-1)B(X(t-1)\right].
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Tests optimaux dans les modèles autorégressifs d'ordre m

Dans ce chapitre, les cas autorégressif d'ordre 1 et autorégressif d'ordre $m \geq 1$ sont traités séparément. La construction d'un nouvel estimateur permet d'obtenir l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. Ce qui assure l'optimalité asymptotique locale du test construit. Une démarche analogue est adaptée au problème du test des modèles $AR(1)$ contigüs à des modèles $ARCH$.

La deuxième partie est une extension de notre travail au problème du test des modèles $ARCH$ contigüs au modèles $AR(p)$. Il s'agit simplement d'une généralisation du cas précédent.

Notons également que ce travail est basé sur la propriété de la normalité asymptotique locale (LAN). Les versions de la LAN de Hwang et Basawa (2001) et Hwang et Basawa (2003) sont aussi appliquées bien pour le cas $AR(1)$ que pour le cas $AR(m)$, $m \geq 1$.

Ce chapitre comporte les détails de Lounis(2014), un article à paraitre dans Comm. Statist. Simulations and Methods. Optimal tests in AR(m) time series model.

Abstract. In the univariate framework, two problems of testing the nonlinearity are investigated in Hwang et Basawa (2001). The first one is concerned with testing a nonlinear models contiguous to $AR(1)$ process. The second is on testing $ARCH$ models contiguous to $AR(1)$ models. In each case, an optimal test of linearity is obtained. The local asymptotic normality (LAN) is proved, and the asymptotic power function is derived. All these results are obtained under the assumption that the parameter is assumed to be known. In practice, these parameters are unknown and their estimation affect the limiting distribution of the test statistic. With the new estimator constructed here, the power of the test is optimal. An extension to testing $ARCH$ models contiguous to p-order Autoregressive processes is obtained. The LAN property plays a fundamental role in this study.

Keywords and phrases : $ARCH$ models, $AR(1)$, Contiguity, Efficiency, Le Cam's third lemma, Local asymptotic normality, Nonlinearity.

2.1 Introduction

L'application des modèles de séries chronologiques non-linéaires a facilité l'étude de plusieurs phénomènes dans divers domaines tels que la finance et l'économie. De ce fait, la détection de la non-linéarité a suscité un grand intérêt de la part des statisticiens et chercheurs. Le développement de ces recherches est basé sur la construction des tests statistiques suivant trois approches différentes, que sont : L'utilisation de la densité spectrale, des résidus des filtres linéaires et des méthodes paramétriques.

Pour plus de détails et de discussions voir, Subba Rao et Gabr (1980) et Hinich (1982) pour la première approche, Keenan (1985) pour le seconde approche et Hjellvik et Tjøstheim (1995) pour la troisième.

Notons qu'en générale, une large classe des tests de non-linearité est obtenue à partir du Multiplicateur de Lagrange (ML) introduit dans Saikkonen et Luukkonen (1988). Cependant, l'étude théorique de la puissance locale de ce test reste compliquée, sauf dans le cas où les hypothèses nulle et alternative sont contigües. Rappelons que la contiguïté est une conséquence directe de la normalité asymptotique locale (LAN).

Notons que dans le contexte des modèles de séries chronologiques non-linéaires la LAN n'a pas été suffisamment considérée. Parmi ces travaux, on cite Benghabrit et Hallin (1992) où le problème

de test d'un bruit blanc contre une classe particulière des modèles bilinéaires est étudié. La LAN et l'optimalité asymptotique locale sont obtenues. Dans Benghabrit et Hallin (1996) et dans un contexte similaire, il est établi l'optimalité asymptotique locale d'un test généralisant la statistique du ML. Une extension de ces travaux vers la classe des modèles $AR(m)$ est obtenue dans Benghabrit et Hallin (1998).

Tous ces travaux représentent une contribution dans le domaine de la détection de la non-linéarité avec l'utilisation de la propriété de la LAN. Toutefois, ces problèmes concernent plutôt les tests des modèles autoregressifs $AR(m)$ contigüs à la classe des modèles bilinéaires.

Rappelons que des difficultés majeures apparaissent quand on étudie l'existence, la stationnarité et l'inversibilité des modèles bilinéaires. Le lecteur interessé peut par exemple consulter Priestley (1988) pour une présentation simple de ces modèles et Pham et Tran (1981), Guégan et Dinh (1987) et Guégan (1987) pour l'étude de leurs propriètés probabilistes.

Dans le présent travail, nous nous interéssons aux modèles $ARCH$. Ces modèles aux propriétés probabilistes largement étudiées sont inversibles. Tout au long de ce travail, θ désigne le paramètre du modèle étudié. Nous considérons les cas $AR(1)$ et $AR(p)$. Pour le premier cas nous utilisons les résultats de Hwang et Basawa (2001) où une version de LAN différente de celle de Le Cam (1960) est donnée et un test optimal est construit. De plus, la puissance asymptotique locale du test est calculée et une extension de ces résultats vers la classe $ARCH$ est obtenue.

Tous ces résultats sont prouvés en supposant que le paramètre de la série chronologique est connu. Après remplacement du paramètre inconnu par un estimateur, le même problème du test que celui considéré dans Hwang et Basawa (2001) est étudié dans Chebana et Laïb (2008), mais l'optimalité asymptotique locale n'est pas prouvée.

Concernant le cas $AR(p)$ et dans le but de choisir une version convenable de la LAN, nous utilisons les résultats de Hwang et Basawa (2003). Nous nous intéressons plus particulièrement à la preuve de l'optimalité quand le paramètre de la série chronologique est remplacé par son estimateur.

L'objectif du présent travail est la construction d'un estimateur permettant de garantir l'optimalité du test étudié. Notre idée repose sur la construction d'un autre estimateur sur l'espace tangent à la courbe de la suite centrale. Nos résultats nous permettent d'obtenir l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée, entrainant ainsi la preuve de l'optimalité asymptotique locale du test.

La suite de ce travail est organisée comme suit : Le paragraphe 2.2 concerne le cas $AR(1)$ et décrit le problème du test des modèles non-linéaires contigüs à la classe des modèles $AR(1)$. Au paragraphe 2.2.1, nous rappelons les notations, les conditions et les résultats utilisés dans notre travail.

Nous présentons au paragraphe 2.2.2 nos principaux résultats et développons une méthode pour l'évaluation de l'erreur commise après estimation. Le paragraphe 2.2.3 est consacré à l'étude de l'optimalité. Le paragraphe 2.3 décrit le test dans le cas de la classe des modèles $ARCH$ contigüs au processus $AR(1)$. Une extension de nos résultats aux modèles $AR(p)$ est traitée au paragraphe 2.4. Pour l'évaluation de la performance de notre méthodologie, nous effectuons d'abondantes simulations au paragraphe 2.5. Le paragraphe 2.6 est consacré aux preuves de nos résultats.

2.2 Test dans la classe des modèles $AR(1)$ contigüs aux modèles non-linéaires

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas où le paramètre θ du modèle étudié est réel. Nous proposons d'approfondir les résultats obtenus dans Hwang et Basawa (2001) où le paramètre du modèle etudié est supposé connu. Deux probèmes de test y sont étudiés. Nous commençons d'abord par rappeler les principaux résultats de Hwang et Basawa (2001), ainsi que les notations et conditions qui y sont utilisées.

2.2.1 Conditions, notations et résultats obtenus

Considérons le modèle de séries chronologiques autoregressif d'ordre s,

$$Y_i = \theta Y_{i-1} + \alpha_0\, G(\mathbf{Y}_i) + \epsilon_i, \quad |\theta| < 1, \tag{2.1}$$

où $\mathbf{Y}_i = \Big(Y_{i-1}, Y_{i-2}, \ldots, Y_{i-s}\Big)$, α_0 un paramètre réel et G une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$. $\{\epsilon_i\}$ est une suite i.i.d centrée réduite admettant pour densité la fonction positive f. Nous supposons que pour tout i, ϵ_i est indépendant de la σ-tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_j)_{1\leq j\leq n}$. Dans toute la suite, nous désignons par "$\|\ \ \|_s$" la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^s$, et par "$[\ \ ]$" la partie entière. Nous notons par M_f la fonction $x \longmapsto M_f(x) = \frac{\dot f(x)}{f(x)}$, et par $\dot M_f$ et $\ddot M_f$ respectivement les dérivées première et seconde de la fonction M_f (dans ce cas, nous supposons que f est trois fois dérivable). De plus, nous supposons que :

(C.0) Le modèle (2.1) est ergodique, stationnaire et de moments d'ordre 2 finis.

Considérons les modèles suivants :

$$Y_i = \theta Y_{i-1} + \epsilon_i. \tag{2.2}$$

$$Y_i = \theta Y_{i-1} + n^{-\frac{1}{2}}\, G(\mathbf{Y}_i) + \epsilon_i. \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.3}$$

Soit Λ_n le logarithme du rapport de vraisemblance $\Lambda_n = \log\left(\frac{p_{n,n}}{p_{0,n}}\right)$, où $p_{n,n}$ et $p_{0,n}$ désignent respectivement les fonctions de densité du vecteur $(Y_1, \ldots, Y_n)$ correspondant aux modèles (2.2) et (2.3). On peut montrer que Λ_n s'exprime comme suit :

$$\Lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \log(g_{n,i}), \text{ où } \quad g_{n,i} = \frac{f\left(Y_i - \theta Y_{i-1} - n^{-\frac{1}{2}} G(\mathbf{Y}_i)\right)}{f\left(Y_i - \theta Y_{i-1}\right)}.$$

Le test de la linéarité ($\alpha_0 = 0$) contre la non-linéarité ($\alpha_0 = n^{-\frac{1}{2}}$) sécrit :

$$H_0 : \alpha_0 = 0 \quad \text{et} \quad H_1^{(n)} : \alpha_0 = n^{-\frac{1}{2}}. \qquad (\textbf{\textit{Premier problème de test}}) \tag{2.4}$$

Nous rappelons que sous H_0, le résidu ϵ_i est donné par :

$$\epsilon_i = Y_i - \theta Y_{i-1}. \tag{2.5}$$

Pour l'étude du problème 2.4, les conditions suivantes sont imposées dans Hwang et Basawa (2001).

(L.1) $\max_{1\leq i\leq n} |g_{n,i} - 1| = o_P(1)$.

(L.2) Il existe une constante positive τ^2, telle que $\sum_{i=1}^{n} (g_{n,i} - 1)^2 = \tau^2 + o_P(1)$.

(L.3) Il existe une variable aléatoire $\mathcal{V}_n$ $\mathcal{F}_n$-mesurable vérifiant $\sum_{i=1}^{n} (g_{n,i} - 1) = \mathcal{V}_n + o_P(1)$, où $\mathcal{V}_n \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0, \tau^2)$.

(C.1) Il existe deux constantes positives η et c telles que, pour tout u, avec $\|u\|_s > \eta$, $G(u) \leq c\|u\|_s$.

(C.2) Pour les familles $\{f(x - c),\ -\infty < c < -\infty\}$, il existe des fonctions de carré inégrables φ_1, φ_2 et une constante δ telles que, pour tout x et $|c| < \delta$, on a $\left|\frac{d^k f(x-c)}{f(x)\, dc^k}\right| \leq \varphi_k(x)$, pour $k = 1, 2$.

Dans un premier temps et sous les conditions (**L**.1), (**L**.2) et (**L**.3), la propriété LAN est établie au théorème 1 de Hwang et Basawa (2001). L'expression du logarithme du rapport de vraisemblance est donnée sous H_0 par :

$$\Lambda_n = \mathcal{V}_n(\theta) - \frac{\tau^2(\theta)}{2} + o_P(1). \tag{2.6}$$

Ensuite et sous les conditions (**C**.1) et (**C**.2), la propriété LAN est établie et la suite centrale $\mathcal{V}_n(\theta)$ est donnée au théorème 2 de Hwang et Basawa (2001) par

$$\mathcal{V}_n(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} M_f(\epsilon_i) G(\mathbf{Y}_i), \tag{2.7}$$

$$\text{où, } \ \tau^2 = \tau^2(\theta) = \mathbf{E}(M_f^2(\epsilon_0)\mathbf{E}\left(G^2(\mathbf{Y}_0)\right). \tag{2.8}$$

On montre que sous H_0, $\mathcal{V}_n(\theta) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0, \tau^2)$. Le test proposé repose sur la statistique de Neyman-Pearson T_n avec,

$$T_n = T_n(\theta) = I\left\{\frac{\mathcal{V}_n(\theta)}{\tau(\theta)} \geq Z_\alpha\right\}, \tag{2.9}$$

où Z_α est le $(1-\alpha)$-quantile d'une Gaussienne centrée réduite de fonction de répartition $\Phi(\cdot)$. La puissance asymptotique de T_n est calculée au théorème 3 de Hwang et Basawa (2001) et son expression est donnée par $1-\Phi(Z_\alpha-\tau)$.
Notons que lorsque θ est connu, T_n est localement asymptotiquement optimal. En pratique, θ est inconnu, son estimation génère une erreur qui modifie la puissance asymptotique locale du test. Par conséquent l'optimalité asymptotique n'est pas garantie.
Nous considérons le problème (2.4) quand θ est remplacé par un estimateur θ_n. Nous montrons l'optimalité asymptotique locale du test. Ceci est présenté au paragraphe qui va suivre.

2.2.2 Principaux résultats

Soit M un entier positif. On observe un échantillon $Y_1,\ldots,Y_M$ de loi stationnaire P_θ dépendant d'un paramètre θ de $\Theta\subset\mathbf{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n<M$. Dans toute la suite, θ_n désigne un estimateur $\sqrt{n}$-consistant de θ et μ est un réel positif. Soit $N=[1+n^{\mu+1}]$, tel que $N\leq M$. Nous avons l'enoncé suivant :

Proposition 2.1. (***Évaluation de l'erreur de l'estimation***)

- *Il existe une variable aléatoire R_n, telle que*

$$\sqrt{n}(\theta_n-\theta)=\sqrt{n}(\theta_n-\theta_N)+R_n,$$

où R_n est une variable aléatoire qui converge en probabilité vers 0.

Une conséquence importante de la proposition 2.1 :
On peut remplacer la quantité inconnue $\sqrt{n}(\theta_n-\theta)$ par la quantité connue $\sqrt{n}(\theta_n-\theta_N)$.
Le grand avantage dans cette opération est la convergence en probabilité de la variable aléatoire R_n vers 0. Quelques applications de ce résultat sont exposées et détaillées dans le paragraphe qui va suivre.

2.2.3 Optimalité du premier test

Pour l'étude de (2.4), il est mentionné au paragraphe précédent, que sous les conditions (**C**.1) et (**C**.2), la propriété LAN est prouvée et les expressions de la suite centrale $\mathcal{V}_n(\theta)$ et de la puissance asymptotique locale sont calculées. Mais dans tous ces résultats obtenus, le paramètre θ du modèle étudié a été supposé connu. En pratique θ est inconnu, son estimation a un impact sur la distribution limite de la puissance du test. La substitution dans 2.9 de θ par son estimateur θ_n nous donne la

version estimée de la statistique notée par $T_n(\theta_n)$ avec

$$T_n(\theta_n) = I\left\{ \frac{\mathcal{V}_n(\theta_n)}{\tau(\theta_n)} \geq Z_\alpha \right\}. \tag{2.10}$$

Observons que la statistique (2.9) dépend principalement de la suite centrale $\mathcal{V}_n(\theta)$. En général quand on remplace dans l'expression de la suite centrale le paramètre inconnu θ par un estimateur θ_n, les deux suites centrales $\mathcal{V}_n(\theta_n)$ et $\mathcal{V}_n(\theta)$ ne sont pas asymptotiquement équivalentes.
L'application de la proposition 2.1 nous permet de prouver cette équivalence. L'idée repose sur la construction d'un autre estimateur de θ qui permet d'absorber l'erreur commise après estimation. On montre l'existence de ce type d'estimateurs sur l'espace tangent de la suite centrale en θ_n. Pour obtenir nos résultats, nous avons besoin des conditions additionnelles **(E.1)** et **(E.2)** suivantes :
(E.1) Les fonctions $x \longmapsto \dot{M}_f(x)$ et $x \longmapsto \ddot{M}_f(x)$ sont bornées.
(E.2) Les moments d'ordre 4 de la distribution stationnaire de (2.1) sont finis.
On obtient ainsi le résultat suivant :

Lemme 2.1. *On suppose que les conditions* (***C***.0), (***C***.1), (***E***.1) *et* (***E***.2) *sont vérifiées. Alors on a sous* H_0 *:*

- (1) $\frac{1}{2}(\theta - \theta_n)^2 \ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) = o_P(1)$, *avec* $\tilde{\theta}_n$ *est entre* θ *et* θ_n.
- (2) $\frac{1}{\sqrt{n}} \dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) = O_P(1)$.

L'utilisation de ce dernier résultat nous permet d'obtenir l'énoncé suivant :

Proposition 2.2. ***(Equivalence entre les suites centrales (premier test))***

*On suppose que les conditions (**C**.0), (**C**.1), (**E**.1) et (**E**.2) sont vérifées. Alors on a sous* H_0 *:*

- *(1)* $\mathcal{V}_n(\theta) = \left(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n\right) \dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) + \mathcal{V}_n(\theta_n) + o_P(1)$.
- *(2) Il existe un estimateur consistant* $\bar{\theta}_n$ *du paramètre* θ, *tel que*

$$\mathcal{V}_n(\theta) = \mathcal{V}_n(\bar{\theta}_n) + o_P(1). \tag{2.11}$$

L'égalité (2.11) traduit l'équivalence entre la suite centrale $\mathcal{V}_n(\theta)$ et sa version estimée $\mathcal{V}_n(\bar{\theta}_n)$. Le remplacement de θ par son estimateur $\bar{\theta}_n$ entraine la conservation de la puissance asymptotique locale du test construit. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 2.1. ***(Optimalité)*** *On suppose que les conditions* (***C***.0), (***C***.1), (***E***.1) *et* (***E***.2) *sont satisfaites. Alors, la puissance asymptotique locale de* $T_n(\bar{\theta}_n)$ *sous* H_1^n *est égale à* $1 - \Phi\left(Z(\alpha) - \tau(\theta)\right)$. *Le test* $T_n(\bar{\theta}_n)$ *est localement asymptotiquement optimal.*

2.3 Test dans la classe des modèles AR(1) contigüs aux modèles $ARCH$

Dans ce paragraphe nous discutons le problème du test quand la classe des modèles non-linéaires correspond aux processus $ARCH$. Nous commençons dans un premier temps par rappeler les résultats et les notations utilisés. Ensuite, nous traitons ce problème quand θ est remplacé par son estimateur θ_n. Étant donné que les résultats obtenus pour ce cas dans Hwang et Basawa (2001) sont similaires à ceux obtenus au paragraphe 2.2, nous procédons de la même manière et nous suivons les mêmes étapes dans notre présentation.

2.3.1 Conditions, notation résultats obtenus

On considére le modèle de série chronologique avec hétéroscédacité conditionnelle,

$$Y_i = \theta Y_{i-1} + \alpha_0\, G(\mathbf{Y}_i) + \sqrt{1+\beta_0 B(\mathbf{Y}_i)}\,\epsilon_i, \tag{2.12}$$

où β_0 est un paramètre réel, α_0 et G sont définis comme dans (2.1) et B est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$. On note par $\tilde{P}_n$ la densité correspondante au processus $ARCH$ suivant :

$$Y_i = \theta Y_{i-1} + n^{-\frac{1}{2}}\, G(\mathbf{Y}_i) + \sqrt{1+n^{-\frac{1}{2}} B(\mathbf{Y}_i)}\,\epsilon_i, \qquad n=1,2,\ldots \tag{2.13}$$

Dans toute la suite $\tilde{\Lambda}_n$ désigne le logarithme du rapport de vraisemblance, $\tilde{\Lambda}_n = \log(\frac{\tilde{p}_{n,n}}{\tilde{p}_{0,n}})$, avec $\tilde{p}_{n,n}$ et $\tilde{p}_{0,n}$ sont les fonctions de densité du vecteur $(Y_1,\ldots,Y_n)$ correspondant à (2.12) et (2.13) respectivement. Par un calcul simple on peut montrer que $\tilde{\Lambda}_n$ peut être exprimée comme suit :

$$\tilde{\Lambda}_n = \sum_{i=1}^{n} \log(\tilde{g}_{n,i}), \quad \tilde{g}_{n,i} = \frac{f\left(\left[Y_i - \theta Y_{i-1} - \alpha_{n,i}\right]/\beta_{n,i}\right)}{f\left(Y_i - \theta Y_{i-1}\right)},$$

$$\alpha_{n,i} = n^{-\frac{1}{2}}\, G(\mathbf{Y}_i), \quad \text{et} \quad \beta_{n,i} = \sqrt{1+n^{-\frac{1}{2}} B(\mathbf{Y}_i)}.$$

Le test de $(\alpha_0=\beta_0=0)$ contre $(\alpha_0=\beta_0=n^{-\frac{1}{2}})$ s'écrit :

$$\tilde{H}_0 : \alpha_0=\beta_0=0 \quad \text{et} \quad \tilde{H}_1^{(n)} : \alpha_0=\beta_0=n^{-\frac{1}{2}}. \quad \textbf{(\textit{Deuxième problème de test})} \tag{2.14}$$

Observons que le problème posé consiste à tester la linéarité contre la la non-linéarité. Pour l'étude de ce problème, les conditions suivantes sont requises dans Hwang et Basawa (2001).

(A.1) : Les moments d'ordre 4 de la distribution stationnaire de (2.12) existent.

(A.2) : Il existe deux constantes positives η et c telles que, pour tout u, $\|u\|_s > \eta$, $B(u) \le c\|u\|_s^2$.

(A.3) : Pour la famille $\left\{\left[b^{-1}f(x-\alpha)/b)\right],\ -\infty<\alpha<\infty,\ b>0\right\}$, il existe une fonction de carré intégrable Π et une constante positive δ telles que, pour tout x et $\delta > \max\left(|a|, |b-1|\right)$,

$$\frac{\partial^2\left[b^{-1}f(x-\alpha)/b)\right]}{\partial a^i \partial a^j f(x)} \leq \Pi(x),\ \text{pour}\ \ i+j=2.$$

Sous les conditions $(\mathbf{C}.1)$ et $(\mathbf{A}.1)-(\mathbf{A}.3)$, la LAN est prouvée au théorème 4 de Hwang et Basawa (2001). L'expression de la suite centrale a été calculée et donnée par

$$\tilde{\mathcal{V}}_n(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\sum_{i=1}^{n} M_f(\epsilon_i)G(\mathbf{Y}_i) + \sum_{i=1}^{n}\left(1+\epsilon_i M_f(\epsilon_i)\right)B(\mathbf{Y}_i)\right\}. \tag{2.15}$$

Rappelons aussi que :

$$\tilde{\tau}^2(\theta) = I_0\mathbf{E}\left(G(Y(0))^2 + \frac{(I_2-1)}{4}\mathbf{E}\left(B(Y(0))^2 + I_1\mathbf{E}\left(G(Y(0))B(Y(0)\right),\right.\right. \tag{2.16}$$

où,

$$I_j = \mathbf{E}\Big(\epsilon_0^j M_f^2(\epsilon_0)\Big),\ j=0,1,2,\ \text{et}\ \tilde{\mathcal{V}}_n(\theta) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,\tilde{\tau}^2).$$

Dans ce cas, la statistique $\tilde{T}_n(\theta)$ proposée est celle de Neyman-Pearson, avec

$$\tilde{T}_n(\theta) = I\left\{\frac{\tilde{\mathcal{V}}_n(\theta)}{\tilde{\tau}(\theta)} \geq Z_\alpha\right\}.$$

Sa puissance asymptotique locale est égale á $1-\Phi\left(Z(\alpha)-\tilde{\tau}(\theta)\right)$. Ici, tout comme dans les cas précédents, θ est inconnu et son estimation affecte la puissance asymptotique du test construit. Pour résoudre ce problème, nous utilisons dans un premier temps la proposition 2.1, et par la suite nous construisons un nouvel estimateur qui permet de préserver l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée.

2.3.2 Principaux résultats

À partir du moment où notre résultat fondamental concernant le cas unidimensionnel a été énoncé à la proposition 2.1, il reste juste à établir l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. Pour cela, nous avons besoin de montrer le lemme 2.2. À cet effet, nous imposons la condition $(\mathbf{E}'.1)$: La fonction $x \longmapsto x\ddot{M}_f(x)$ est bornée.

Lemme 2.2. *Nous supposons que les conditions* $(\boldsymbol{A}.1)$, $(\boldsymbol{A}.2)$, $(\boldsymbol{E}.1)$ *et* $(\boldsymbol{E}'.1)$ *sont vérifiées. Alors, on a sous* H_0,

- (1) $\frac{1}{2}(\theta-\theta_n)^2\ddot{\tilde{\mathcal{V}}}_n(\tilde{\theta}_n) = o_P(1)$, *où* $\tilde{\theta}_n$ *est entre* θ *et* θ_n.

• (2) *Nous supposons que les conditions* $(\boldsymbol{A}.1)$, $(\boldsymbol{A}.2)$, $(\boldsymbol{E}.1)$ *et* $(\boldsymbol{E}'.1)$ *et* $(\boldsymbol{C}.0)$ *sont vérifiées.Alors, on a sous* H_0

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\tilde{\mathcal{V}}}_n(\theta_n) = O_P(1).$$

L'application du lemme 2.2, nous permet d'obtenir :

Proposition 2.3. ***(Équivalence de la suite centrale avec sa version estimée (second test))***

Nous supposons que les conditions $(\boldsymbol{A}.1)$, $(\boldsymbol{A}.2)$, $(\boldsymbol{E}.1)$, $(\boldsymbol{E}'.1)$ *et* $(C.0)$ *sont satisfaites. Alors on a sous* H_0 *:*

• (1) $\tilde{\mathcal{V}}_n(\theta) = (\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n)\dot{\tilde{\mathcal{V}}}_n(\theta_n) + \tilde{\mathcal{V}}_n(\theta_n) + o_P(1)$.

• (2) *Il existe un estimateur consistant* $\bar{\theta}_n$ *de* θ*, tel que,*

$$\tilde{\mathcal{V}}_n(\theta) = \tilde{\mathcal{V}}_n(\bar{\theta}_n) + o_P(1). \tag{2.17}$$

À partir de la propositions 2.3, nous déduisons l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. Ceci, entraine l'optimalité asymptotique locale du test. Comme on va le voir dans ce qui suit.

Optimalité du second test

En remplaçant θ par $\bar{\theta}_n$ dans les expressions (2.9) et (2.16), nous obtenons les versions estimées du test $\bar{T}_n(\bar{\theta}_n)$ et $\tau(\bar{\theta}_n)$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.2. ***(Optimalité)***

On suppose que les conditions $(\boldsymbol{A}.1)$, $(\boldsymbol{A}.2)$, $(\boldsymbol{E}.1)$, $(\boldsymbol{E}'.1)$ *et* $(\boldsymbol{C}.0)$ *sont vérifiées. Alors, la puissance asymptotique du test basé sur* $\bar{T}_n$ *sous* H_1^n *est égale à* $1 - \Phi\left(Z(\alpha) - \tau(\theta)\right)$*. Le test basé sur* $\bar{T}_n(\bar{\theta}_n)$ *est localement asymptotiquement optimal.*

Remarque 2.1. • *Notons qu'une large classe des fonctions de densité vérifie les conditions* $(\boldsymbol{E}.1)$ *et* $(\boldsymbol{E}'.1)$*. C'est le cas d'une gaussienne et de la distribution de Student de degré de liberté* ≥ 3*. Pour plus de détails sur les calculs, se referer à l'annexe de Lounis (2013).*

• *La preuve de l'optimalité est une conséquence de l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. Ces résultats sont enoncés dans les propositions 2.2 et 2.3 après l'application des lemmes 2.1 et 2.2. Pour l'obtention de nos résultats, nous avons maintenu les conditions imposées dans Hwang et Basawa (2001) et nous avons ajouté la condition* $(\boldsymbol{E}.1)$ *pour le premier problème de test et les conditions* $(\boldsymbol{E}.1)$ *et* $(\boldsymbol{E}'.1)$ *pour le second problème de test.*

Une extension de nos résultats aux modèles $AR(p)$ est décrite et présentée dans ce qui suit.

2.4 Tests dans la classe des modèles non-linéaires contigüs à la classe des processus $AR(p)$

Dans ce paragraphe nous faisons une extension de nos résultats aux cas des modèles autoregressifs d'ordre p. Comme il a été mentionné aux paragraphes précédents, deux étapes sont nécessaires. La première concerne le choix convenable de la LAN. La seconde est la preuve de l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée.

Afin d'énoncer notre prochain principal résultat, nous commençons dans un premier temps par expliquer comment nous avons choisi notre version de LAN. Ensuite nous énonçons quelques résultats techniques. Enfin nous montrons l'optimalité asymptotique locale du test construit.

Nous poursuivons la même méthodologie que celle des cas étudiées précédemment, et nous utilisons les résulats obtenus dans Hwang et Basawa (2003).

2.4.1 Conditions, notations et résultats utilisés

Le processus β-$ARCH$ d'ordre m est défini par

$$\epsilon_t = \sqrt{\mu + \alpha_1|\epsilon_{t-1}|^\beta + \cdots + \alpha_m|\epsilon_{t-m}|^\beta}\; e_t, \tag{2.18}$$

où $\{e_t\}$ est une suite i.i.d centrée réduite, et $\beta \in [0;2]$.

On considère le processus non-linéaire $\{Y_i\}$ avec erreur β- $ARCH(m)$,

$$Y_i = m_\theta(\mathbf{Y}_{i-1}) + \epsilon_i, \tag{2.19}$$

où $\mathbf{Y}_i = \Big(Y_{i-1}, Y_{i-2}, \ldots, Y_{i-s}\Big)$ et m_θ désignent la fonction de régression dépendante d'un paramètre θ. Notons par ϕ le vecteur $\phi = (\theta, \alpha, \beta)$, avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

Nous considérons le problème du test de $\hat{H}_0$ contre $\hat{H}_1^n$ avec

$$\hat{H}_0 : \phi = \phi_0, \quad \text{et} \quad \hat{H}_1^n : \phi = \phi_0 + \delta_n/\sqrt{n}, \tag{2.20}$$

où δ_n est une suite qui converge vers un vecteur constant δ quand $n \longrightarrow \infty$.

Sous $\hat{H}_0$ et $\hat{H}_1^n$, les densités conditionnelles sont notées par $c_i(\phi_0)$ et $c_i(\phi_n)$ respectivement. Pour tout entier i, on suppose que ϵ_i est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_j)_{1\leq j\leq n}$. Dans ce cas, on peut montrer que le logarithme du rapport de vraisemblance s'écrit comme suit :

$$\hat{\Lambda}_n = \sum_{i=1}^{n} \log(\hat{g}_{n,i}), \quad \text{avec} \quad \hat{g}_{n,i} = c_i(\phi_n)/c_i(\phi_0). \tag{2.21}$$

La fonction score $\dot{s}$ en ϕ_0 est définie par

$$\dot{s}(\phi_0) = \big(1/2c_i(\phi_0)\big) \cdot D_\phi[c_i(\phi)]_{\phi=\phi_0}, \tag{2.22}$$

$$\text{avec} \quad D_\phi[c_i(\phi)] = (D_\theta[c_i(\phi)], \partial[c_i(\phi)]/\partial\alpha, \partial[c_i(\phi)]/\partial\beta)'.$$

Pour l'étude du problème (2.20), la propriété LAN est prouvée au théorème 4 de Hwang et Basawa (2003) sous les conditions suivantes :

($\hat{\mathbf{C}}$.1) : $\mathbf{E}(Y_i^4) < \infty$.

($\hat{\mathbf{C}}$.2) : $\{Y_i\}$ est géométriquement ergodique.

($\hat{\mathbf{C}}$.3) : L'existence de l'information de Fisher F(a,b) pour les familles
$\big\{\big[b^{-1}f((x-a)/b)\big],\ -\infty < a < \infty,\ b > 0\big\}$, avec $f(.)$ est la densité de probabilité du processus résiduel $\{e_i\}$ et dont le support est $-\infty < x < \infty$.

($\hat{\mathbf{C}}$.4) : Pour tout θ, il existe un voisinage ouvert $N(\theta)$ de θ et une quantité aléatoire $\Psi_\theta(\cdot)$, telle que

$$\left\| \frac{\partial m_\theta(\cdot)}{\partial\theta}|_{\theta=\theta^*} \right\| \leq \Psi_\theta(\cdot), \qquad \text{pour tout } \theta^* \in N(\theta),$$

avec $\Psi_\theta(\mathbf{Y}_i)$ et $\|\mathbf{Y}_i\|\Psi_\theta(\mathbf{Y}_i)$ sont fonctions de carrés intégrables .

Dans ce cas, l'expression du logarithme du rapport de vraisemblance est donnée par :

$$\hat{\Lambda}_n = \delta'\Delta_n(\phi_0) - \frac{1}{2}\delta' I(\phi_0)\delta + o_P(1), \tag{2.23}$$

$$\text{où} \quad \Delta_n(\phi_0) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0, I(\phi_0)), \quad \Delta_n(\phi_0) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \dot{s}(\phi_0),$$

$$I(\phi_0) = 4\mathbf{E}(\dot{s}(\phi_0)\dot{s}'(\phi_0)), \quad \text{et} \quad \dot{s} \quad \text{est définie dans (2.22).}$$

Nous nous intéressons plus particulièrement au cas suivant :

Cas particulier :

$\beta = 0,\ \mu = 1,\ m = 1,\ \alpha_1 \geq 0$, $m_\theta(\mathbf{Y}_i) = \theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j Y_{i-j}$, avec $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_p)'$ et $\sum_{i=0}^{p} |\theta_j| < 1$.

À partir de (2.18), le modèle (2.19) s'écrit :

$$Y_i = m_\theta(\mathbf{Y}_i) + \sqrt{1+\alpha_1}\ \ e_i. \tag{2.24}$$

Nous considérons le modèle $AR(p)$

$$Y_i = \theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j Y_{i-j} \quad + e_i, \qquad \sum_{j=0}^{p} |\theta_j| < 1. \tag{2.25}$$

Observons que lorsque $\alpha_1 = 0$ dans (2.24), nous obtenons le modèle (2.25). Ceci, nous permet de déduire le problème du test du modèle $AR(p)$ contre des modèles non-linéaires. Étant donné que le paramètre β a été fixé, ϕ_0 est réduit à $\phi_0 = (\theta_0, \alpha_1)$, avec une autre restriction (tester par rapport à α_1). Nous obtenons

$$\check{H}_0 : \alpha_1 = 0, \quad \text{et} \quad \check{H^n}_1 : \alpha_1 = 1/\sqrt{n} \qquad \textbf{\textit{(troisième problème de test)}}. \tag{2.26}$$

Dans ce cas, nous fixons $\delta_n = \delta = (\delta_0, \ldots, \delta_p, 1, \delta_{p+2}, \ldots, \delta_{p+m})$ avec $\delta_j = 0$, pour $j \neq 1+p$. Sous les conditions, $(\hat{C}.1) - (\hat{C}.4)$, la LAN définie dans (2.23) est utilisée. Notons que dans ce cas,

$$\left\| \frac{\partial m_\theta(\mathbf{Y}_i)}{\partial \theta}|_{\theta=\theta^*} \right\| = \ \|(1, Y_1, \ldots, Y_P)\| = \sqrt{1 + Y_1^2 + \cdots + Y_P^2} = \Psi_\theta(\mathbf{Y}_i).$$

Sous $(\hat{C}.1) - (\hat{C}.4)$, on a la LAN. Par un calcul simple, nous obtenons à partir de (2.23) le logarithme du rapport de vraisemblance qu'on note $\check{\Lambda}_n$ où

$$\check{\Lambda}_n = \check{\Delta}_n(\theta) - \frac{1}{2}\check{I}(\theta) + o_P(1). \tag{2.27}$$

$$\Delta_n(\theta) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0, \check{I}(\theta)), \quad \text{avec,} \ \ \Delta_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{f}(e_i)}{2f(e_i)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_f(e_i),$$

$$\check{I}(\theta) = 4\mathbf{E}(\dot{s}(\theta)\dot{s}'(\theta)) = \mathbf{E}\left[\frac{\dot{f}(e_i)}{f(e_i)}\right]^2,$$

où f est la fonction de densité du résidu e_i dont l'expression sous $\check{H}_0$ est donnée par :

$$e_i = Y_i - \left(\theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j Y_{i-j}\right) \quad \text{et} \quad \dot{f}(e_i) = \left[\partial\left[f\left(\frac{Y_i - (\theta_0 + \sum_{j=1}^{p}\theta_j Y_{i-j})}{\sqrt{1+\alpha_1}}\right)\right]/\partial\alpha\right]_{\alpha_1=0}.$$

Dans ce cas aussi, le test proposé est celui de Neyman-Pearson dont l'expression est

$$\check{T}_n = \check{T}_n(\theta) = I\left\{\frac{\Delta_n(\theta)}{\sqrt{\check{I}(\theta)}} \geq Z(\alpha)\right\}. \tag{2.28}$$

Observons que θ est dans $\mathbf{R}^{p+1}$. En faisant un raisonnement analogue à ceux dans les paragraphes 2.2 et 2.3, nous déduisons que la puissance asymptotique locale du test est égale à $1 - \Phi\left(Z(\alpha) - \sqrt{\check{I}(\theta)}\right)$. Par contre, il est important de rappeler que pour tous ces résultats obtenus, θ est connu. Nous considérons ce problème quand θ est supposé inconnu, autrement dit, nous étudions ce problème quand θ est remplacé par son estimateur.

2.4.2 Principaux résultats

Dans toute la suite, θ_n désigne l'estimateur $\sqrt{n}$-consistant de θ. Dans le but de prouver l'optimalité du test (2.28), nous commençons d'abord par établir l'équivalence entre la suite centrale $\Delta_n(\theta)$ et sa version estimée $\Delta_n(\theta_n)$, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4. ***(Équivalence des suites centrales (cas multidimensionnel))***

Nous supposons que les conditions $(\hat{C}.1) - (\hat{C}.4)$ *sont satisfaites. Alors :*

- *(1) Sous* $\check{H}_0$*, et à un* $o_P(1)$ *près, on a l'équivalence des suites* $\Delta_n(\theta)$ *et* $\mathcal{W}^{\mu}{}_n(\theta_n) = \nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) + \Delta_n(\theta_n)$.
- *(2) Il existe un estimateur* $\sqrt{n}-$*consistant* $\bar{\theta}_n$ *de* θ*, tel que* $\mathcal{W}^{\mu}{}_n(\theta_n) = \Delta_n(\bar{\theta}_n)$.

L'égalité $\Delta_n(\theta) = \Delta_n(\bar{\theta}_n) + o_P(1)$ traduit l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. En procédant de la même manière que dans les paragraphes 2.2 et 2.3, nous obtenons :

Théorème 2.3. *On suppose que les conditions* $(\hat{C}.1)$-$(\hat{C}.4)$ *sont vérifiées. Alors, la puissance locale asymptotique du test* $\check{T}_n(\bar{\theta}_n)$ *est égale à* $1 - \Phi\left(Z(\alpha) - \sqrt{\check{I}(\theta)}\right)$*. Le test* $\check{T}_n(\bar{\theta}_n)$ *est localement asymptotiquement optimal.*

Remarque 2.2. *Le noyau de notre travail est l'agrandissement de la taille de l'échantillon de n à $N = [1 + n^{\mu+1}]$, où μ est une constante positive. Cette opération se prête bien au caractère asymptotique de notre étude. Notons que l'existence de la constante positive μ nous permet d'obtenir l'optimalité locale asymptotique du test construit.*
En pratique $\mu = [\log(N-1)/\log(n)] - 1$. Pour un choix optimal de la valeur de μ, on peut effectuer d'abondantes simulations avec la méthode de Monte Carlo, ceci sort du cadre de notre présente étude. De plus, le choix théorique du μ reste difficile et fera l'objet des futures recherches.

2.5 Simulations

Ce paragraphe est consacré aux simulations. Nous traitons les problèmes de test 2.4 et 2.14. Pour le cas $AR(p)$, nous prenons $p = 2$ et les modèles alternatifs sont non-linéaires. Les représentations graphiques sont données après les déscriptions des procédures de tests et les commentaires correspondants.

Test des modèles $AR(1)$ contigüs aux modèles non-linéaires ($\theta \in \mathbf{R}$)

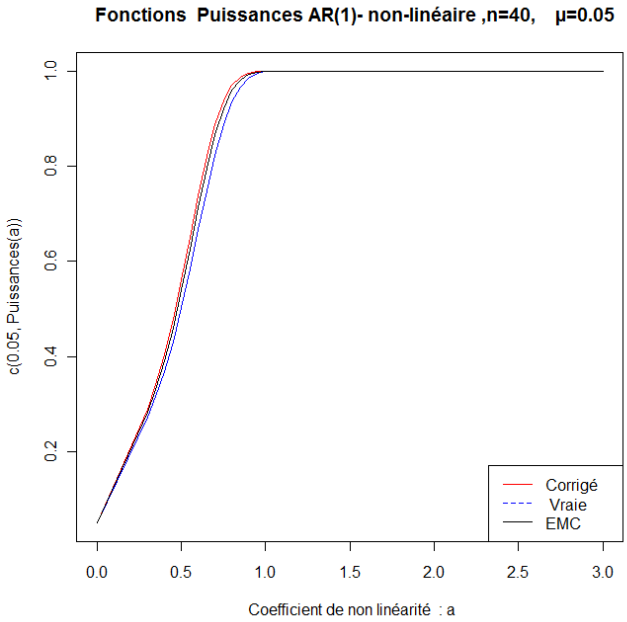
Ce travail de simulation est effectué avec le logiciel R. On simule suivant le modèle (2.3) des échantillons $Y_1, \ldots, Y_M$, où $M > 1$, de distribution stationnaire P_θ, où θ et un paramètre réel. Nous considérons dans chaque cas un sous-échantillon de taille n tel que
$n \leq N = \left[1 + n^{\mu+1}\right] \leq M$ et nous étudions le problème du test (2.4). La vraie valeur de θ est fixée à 0.8, le niveau du test est fixé à 0.05 et $n = 40, 50, 60, 70, 80, 90$. La valeur de μ est fixée à 0.05, ce qui correspond aux valeurs $N = 49, 61, 74, 87, 100, 113$. Les simulations sont effectuées avec $m = 1500$ réplications.
On note par θ_n l'estimateur des moindres carrés (E.M.C.) et par $\bar{\theta}_n = \theta_{[1+n^{\mu+1}]}$ l'estimateur corrigé.
Pour que la condition $(A.1)$ soit vérifiée, et en se basant sur l'inégalité $u^2 + v^2 \geq 2uv$, on choisit $G : x \mapsto \frac{a}{1+x^2}$, avec $a \in [0; 3]$. On appelle a le coefficient de non-linéarité.
Le résidu $\epsilon_i = Y_i - \theta Y_{i-1}$ est estimé par $\tilde{\epsilon}_i = Y_i - \theta_n Y_{i-1}$ et par le résidu corrigé
$\bar{\epsilon}_i = Y_i - \bar{\theta}_n Y_{i-1}$. Nous représentons simultanément en fonction du coefficient de non-

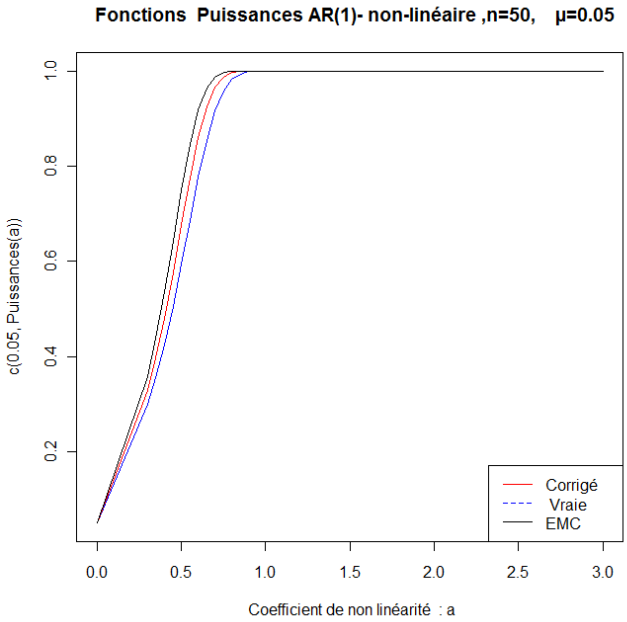
linéarité a, la puissance du test avec la vraie valeur de θ, la puissance du test quand θ est remplacé par θ_n et la puissance du test quand θ est remplacé par θ_N. Nous obtenons les représentations ci-dessous. Nous remarquons que pour chaque valeur de n, les graphes obtenus de la puissance quand θ est remplacé par l'estimateur corrigé sont très proches de ceux de la puissance avec la vraie valeur θ.

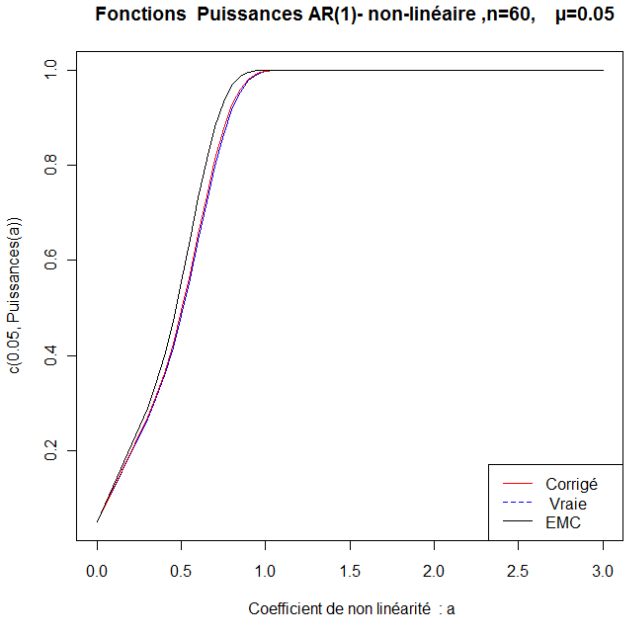
Notons que dans toutes ces simulations, on représente la puissance théorique du test basé sur la statistique de Neyman-Pearson et dont l'expression est donné dans les théorèmes énoncés.

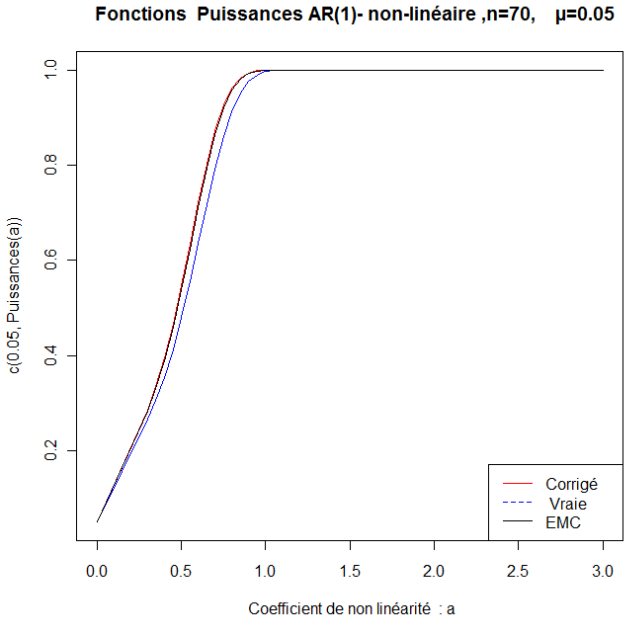
Nous rappelons également que l'un des objectifs de ces simulations est de faire apparaitre l'effet de la correction de l'estimation sur la puissance asymptotique du test construit.

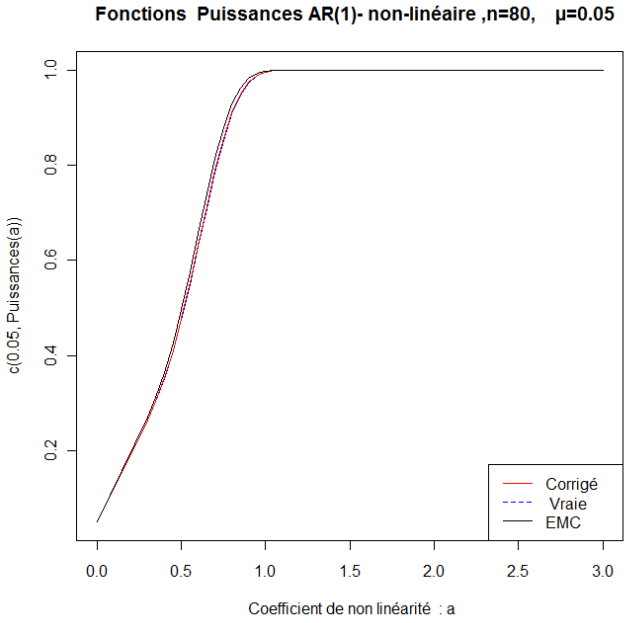
Simulations : $AR(1)$-$AR(1)$ **non-linéaire.** $(\mu = 0.05)$.

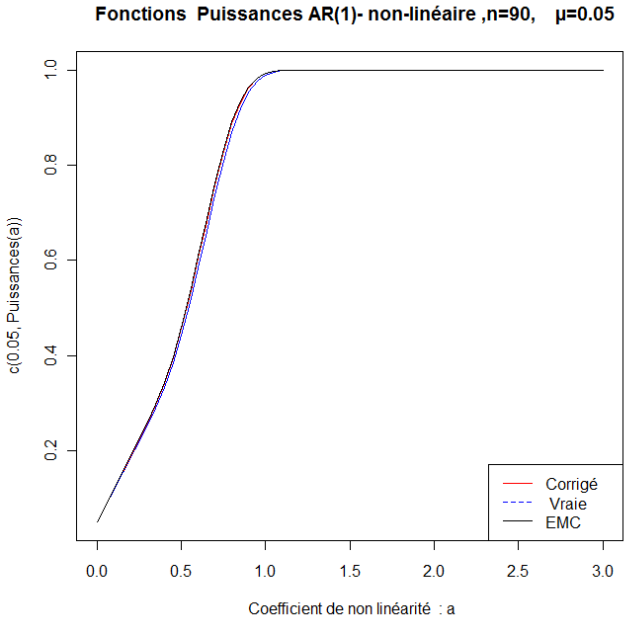





Fonctions Puissances AR(1)- non-linéaire ,n=60, µ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non linéarité : a
Corrigé
Vraie
EMC


Fonctions Puissances AR(1)- non-linéaire ,n=70, µ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non linéarité : a
Corrigé
Vraie
EMC

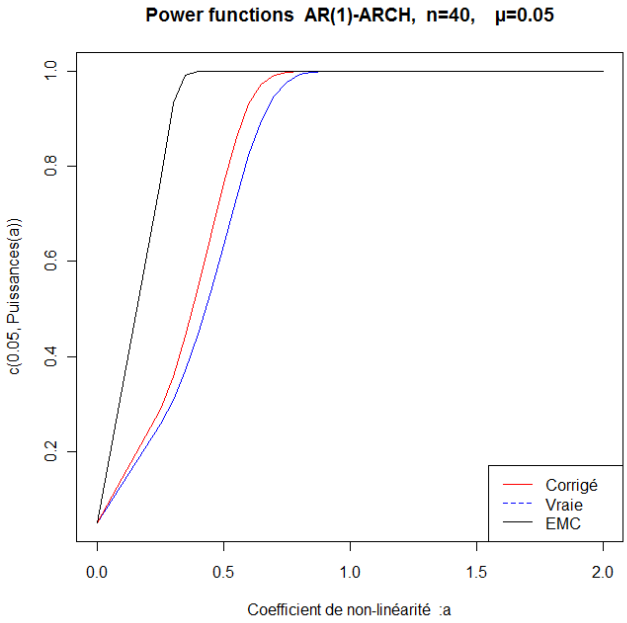

Fonctions Puissances AR(1)- non-linéaire ,n=80, µ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non linéarité : a
Corrigé
Vraie
EMC

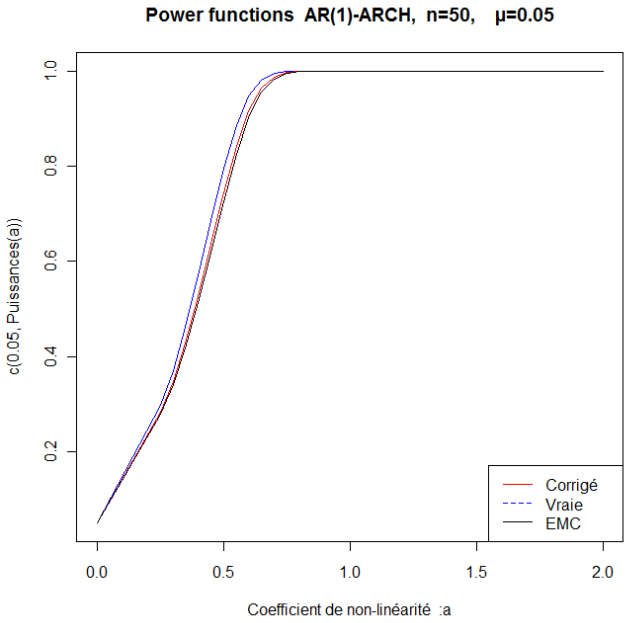

Fonctions Puissances AR(1)- non-linéaire ,n=90, µ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non linéarité : a
Corrigé
Vraie
EMC

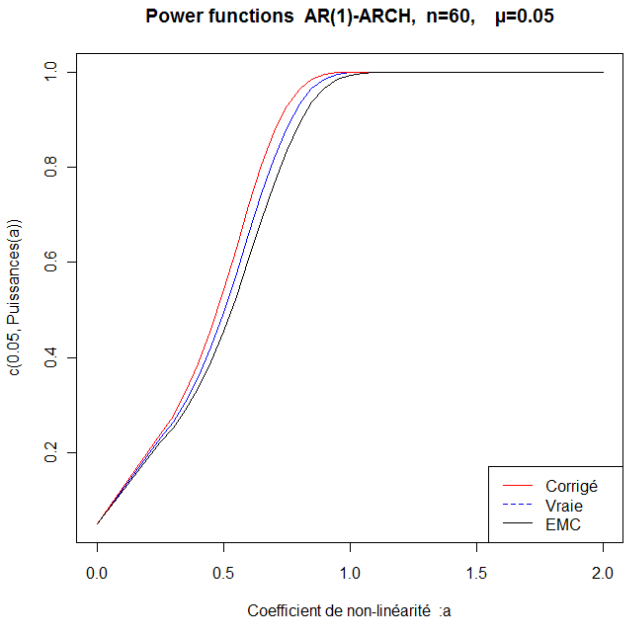
Tests des processus AR(1) contigüs à la classe des modèles $ARCH$ ($\theta \in \mathbf{R}$)

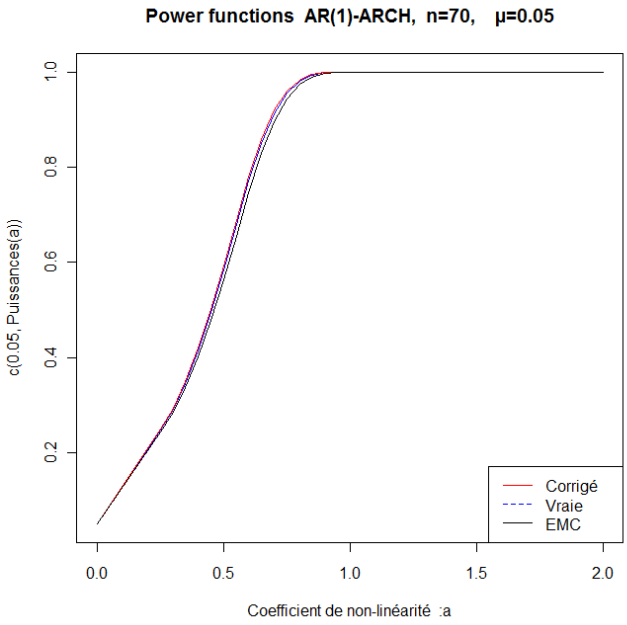
Pour l'étude du problème du test (2.14), nous suivons les mêmes étapes et nous faisons les mêmes représentations graphiques que celles dans (2.5). Nous notons que dans ce cas, les deux fonctions G et B sont définies par $G : x \mapsto \frac{a}{1+x^2}$, $B : x \mapsto \frac{a}{1+x^2}$, avec $a \in [0; 2]$. Nous remarquons qu'à partir de $n = 50$, les puissances avec l'estimateur corrigé sont proches de celles des puissances avec la vraie valeur.
En résumé, nous obtenons une conclusion similaire au cas précédent.

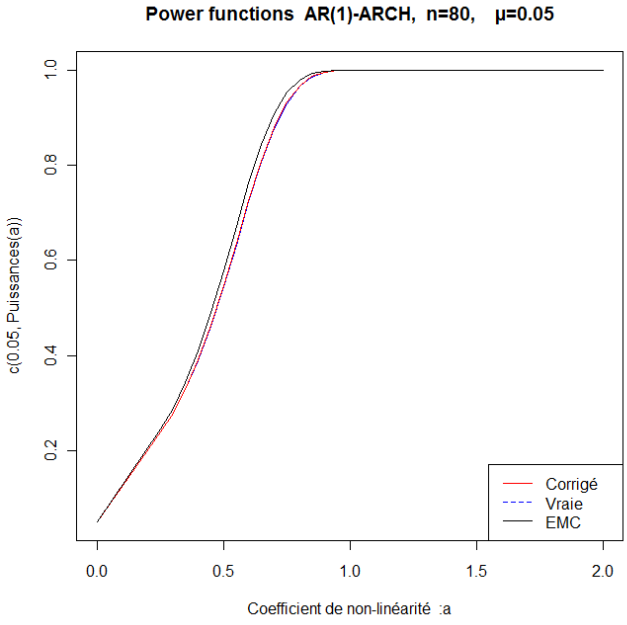
Simulations : $AR(1)$-$ARCH$**.** $(\mu = 0.05)$.

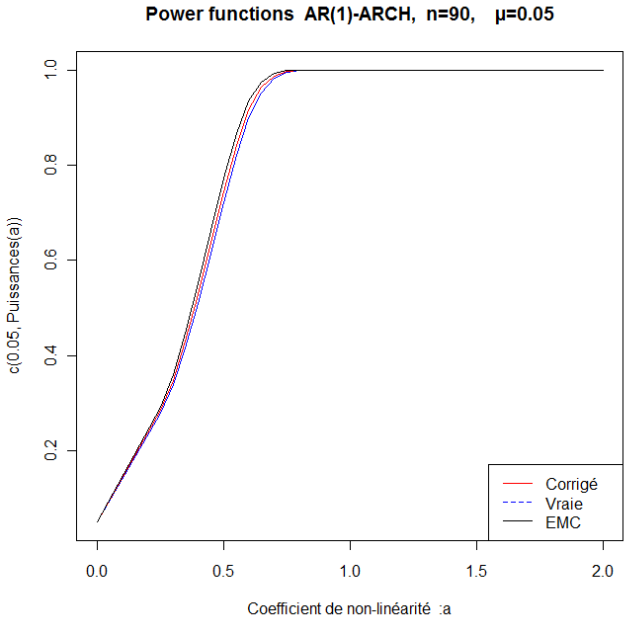





Power functions AR(1)-ARCH, n=60, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrigé
Vraie
EMC


Power functions AR(1)-ARCH, n=70, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrigé
Vraie
EMC


Power functions AR(1)-ARCH, n=80, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrigé
Vraie
EMC


Power functions AR(1)-ARCH, n=90, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrigé
Vraie
EMC

Tests dans la classe des modèles non-linéaires contigüs à la classe des modèles $AR(2)$ **(**$\theta \in \mathbf{R}^2$**)**

Considérons le problème du test $\check{H}_0 : \alpha_1 = 0, \qquad$ contre, $\qquad \check{H}^n{}_1 : \alpha_1 = 1/\sqrt{n}.$
La fonction de régression est donnée par $m_\theta(\mathbf{Y}_i) = \theta_1 Y_{i-1} + \theta_2 Y_{i-2}$, avec $\theta_1 = 0.23$ et $\theta_2 = 0.2$. (θ_1, θ_2) est estimé par l'estimateur E.M.C. $\theta_n = (\theta_{n,1}, \theta_{n,2})'$, avec
$\theta_n = [X^\top X]^{-1} X^\top Y$, et

$$Y = \begin{pmatrix} Y_3 \\ . \\ . \\ . \\ Y_{n+2} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} Y_2 & Y_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ Y_{n+1} & Y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X^\top = \begin{pmatrix} Y_2 & . & . & . & Y_{n+1} \\ Y_1 & . & . & . & Y_n \end{pmatrix}.$$

Le résidu ϵ_i est estimé par

$$\tilde{\epsilon_{i,n}} = Y_i - \theta_{1,n}\, Y_{i-1} - \theta_{2,n}\, Y_{i-2}.$$

Notons que l'estimateur corrigé $\bar{\theta}_n$ est obtenu après perturbation de la deuxième composante de θ_n, nous avons :

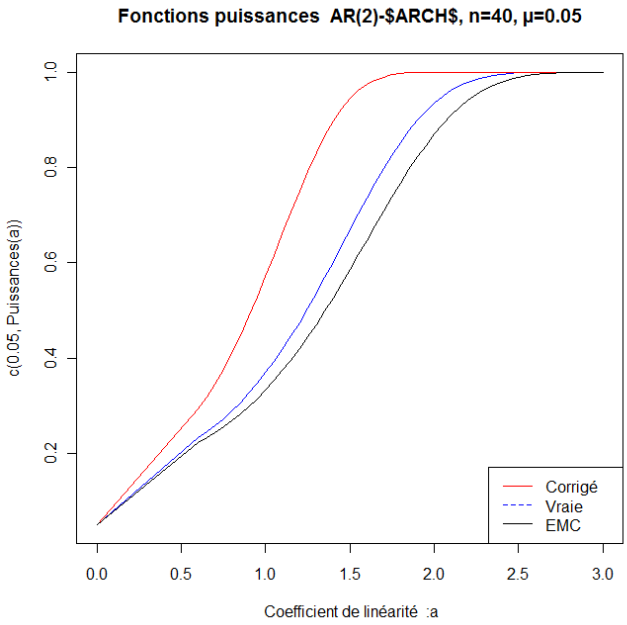
$$\bar{\theta}_n = (\theta_{n,1}, \bar{\theta}_{n,2})', \quad \text{avec} \;\; \bar{\theta}_{n,2} = \theta_{n,2} + \rho_2 \;\; \text{et} \;\; \rho_2 = \frac{\nabla \Delta_n(\theta_n) \cdot (\theta_N - \theta_n)}{\frac{\partial \Delta_n(\theta_n)}{\partial \theta_2}}.$$

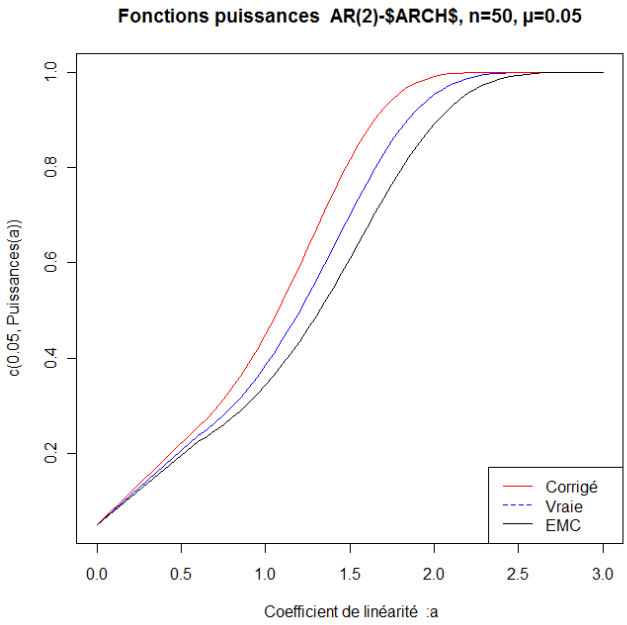
ϵ_i est estimé avec l'utilisation de l'estimateur corrigé

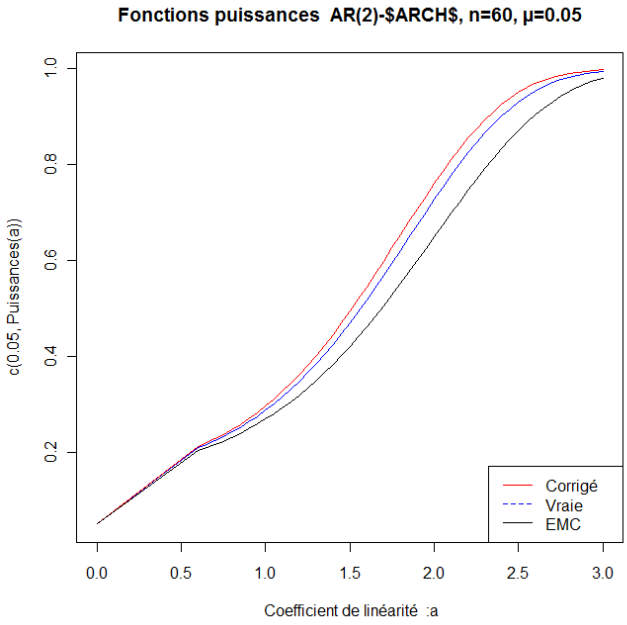
$$\bar{\epsilon}_{i,n} = Y_i - \theta_{1,n}\, Y_{i-1} - \bar{\theta}_{n,2}\, Y_{i-2}.$$

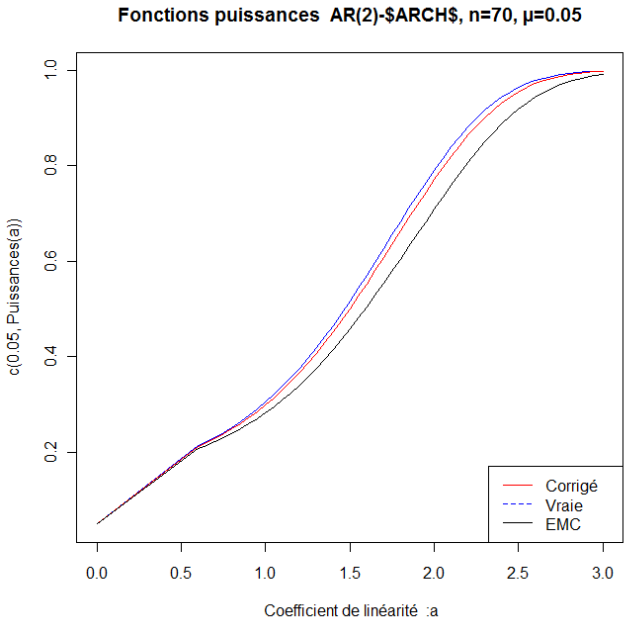
Nous faisons les mêmes représentations que celles des deux cas précédents avec $a \in [0; 3]$. La fonction G est définie de la même manière que dans le paragrahe 2.5.
Nous obtenons la même conclusion que celles des deux cas précédents. Nous remarquons que quand n est petit ($n = 30$) les puissances avec l'estimateur E.M.C. sont meilleures que celles avec l'estimateur corrigée. La tendance s'inverse quand n devient grand.

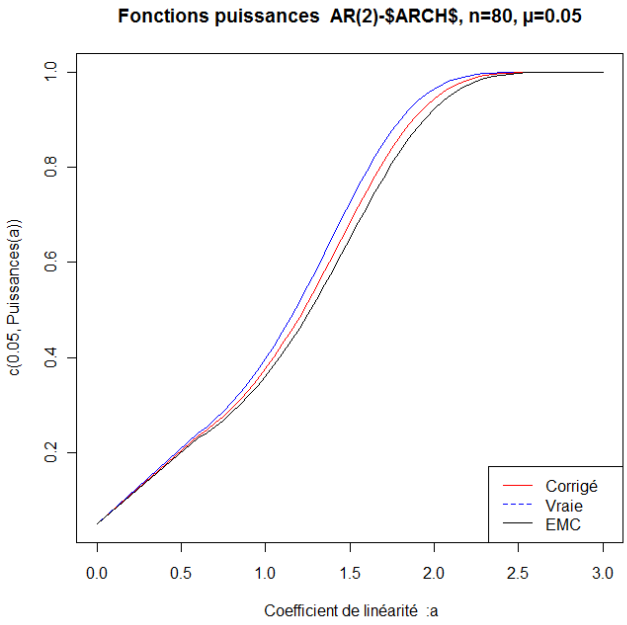
Simulations : $AR(2)$-$AR(2)$ non-linéaire. $(\mu = 0.05)$.

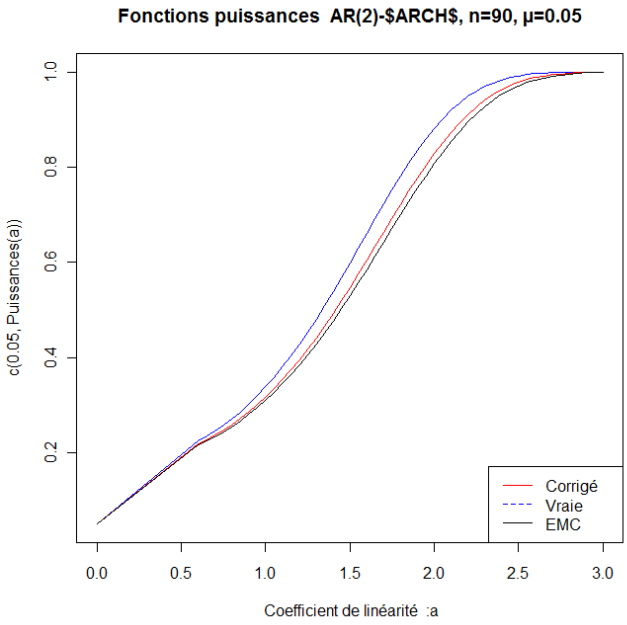












2.6 Preuves des résultats

2.6.1 Preuve de la proposition 2.1

On considère la décomposition suivante :

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta) = \sqrt{n}(\theta_n - \theta_N) + \sqrt{n}(\theta_N - \theta) = \sqrt{n}(\theta_n - \theta_N) + R_n.$$

Comme $R_n = \sqrt{N}(\theta_N - \theta) \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}$, on obtient :

$$R_n = O_p(1) \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}} = O_p(1) \times o_p(1) = o_p(1).$$

2.6.2 Preuve du lemme 2.1

1. L'utilisation des égalités (2.5) et (2.7) suivie d'un calcul simple permet d'obtenir

$$\ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \ddot{M}_f \left(Y_i - \tilde{\theta}_n Y_{i-1} \right) Y_{i-1}^2 G(\mathbf{Y}_i). \tag{2.29}$$

D'après $(E.1)$, il existe une constante positive K, telle que :

$$\ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) \leq K \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 \left| G(\mathbf{Y}_i) \right|.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\theta-\theta_n)^2\ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) &\leq \frac{K}{2}(\theta-\theta_n)^2\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Y_{i-1}^2\left|G(\mathbf{Y}_i)\right| \\ &\leq \frac{K}{2\sqrt{n}}\times\left[\sqrt{n}(\theta-\theta_n)\right]^2\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{i-1}^2\left|G(\mathbf{Y}_i)\right|.\end{aligned}$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous écrivons :

$$\mathbf{E}(Y_{i-1}^2\left|G(\mathbf{Y}_i)\right|)\leq\sqrt{\mathbf{E}\left(\{Y_{i-1}^2\}^2\right)}\times\sqrt{\mathbf{E}\left(G(\mathbf{Y}_i)^2\right)}.$$

D'après $(C.1)$, il existe une constante positive c, avec :

$$|G(\mathbf{Y}_i)|^2\leq c^2\|\mathbf{Y}_i\|_s^2\leq c^2\sum_{i=1}^{s}Y_i^2.$$

En prenant l'espérance et en utilisant la stationnarité, l'ergodicité et $(C.0)$, nous déduisons que :

$$\mathbf{E}\left|G(\mathbf{Y}_i)\right|^2\leq c^2\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{s}Y_i^2)\leq c^2\times s\times\mathbf{E}(Y_1^2)<\infty.$$

Ceci combiné avec $(E.2)$ donne :

$$\mathbf{E}\left(Y_{i-1}^2\left|G(\mathbf{Y}_i)\right|\right)<\infty.$$

L'utilisation de l'ergodicité et la stationnarité entraine la convergence presque sûre de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{i-1}^2\left|G(\mathbf{Y}_i)\right|$ vers une constante k_1.
Étant donné que $[\sqrt{n}(\theta-\theta_n)]^2=O_P(1)$, alors, on conclut que :

$$\frac{1}{2}(\theta-\theta_n)^2\ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n)=o_P(1).$$

2. Considérons à nouveau l'égalité (2.7), en dérivant $\mathcal{V}_n$ par rapport à θ, nous obtenons :

$$\dot{\mathcal{V}}_n(\theta)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\dot{M}_f\left(Y_i-\theta Y_{i-1}\right)Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i).$$

Ce qui implique que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\mathcal{V}}_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{M}_f(Y_i-\theta Y_{i-1})Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i).$$

À partir de l'ergodicité, et la stationnarité, nous déduisons la convergence presque sûre de $\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\mathcal{V}}_n(\theta)$ vers $\mathbf{E}\left(\dot{M}_f(Y_i-\theta Y_{i-1})Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i)\right)$.
L'utilisation de $(E.1)$ suivie de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, impliquent l'existence d'une constante positive K telle que :

$$\mathbf{E}\left(\dot{M}_f(Y_i-\theta Y_{i-1})Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i)\right) \leq K \times \sqrt{\mathbf{E}\left(Y_{i-1}\right)^2 \times \mathbf{E}\left(G(\mathbf{Y}_i)^2\right)}.$$

Cette dernière quantité est finie à partir de $(C.0)$ et $(C.1)$. Nous obtenons alors,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\mathcal{V}}_n(\theta) = O_P(1).$$

Nous évaluons maintenant la différence suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\mathcal{V}}_n(\theta) - \frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n).$$

En faisant un développement de Taylor d'ordre 1 de $\dot{\mathcal{V}}_n$ au voisinage de θ_n, il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\dot{\mathcal{V}}_n(\theta) - \dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \ddot{\mathcal{V}}_n(\check{\theta}_n)(\theta_n-\theta), \quad \text{où} \quad \check{\theta}_n \in [\theta_n;\theta].$$

De l'égalité (2.29), nous avons :

$$\ddot{\mathcal{V}}_n(\check{\theta}_n) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \ddot{M}_f\left(Y_i - \check{\theta}_n Y_{i-1}\right) Y_{i-1}^2 G(\mathbf{Y}_i).$$

En faisant un raisonnement analogue à celui dans la première partie de ce lemme, il vient : $\frac{1}{\sqrt{n}}\ddot{\mathcal{V}}_n(\check{\theta}_n) = O_P(1)$.
Étant donné que θ_n converge en probabilité vers θ, on déduit finalement que :
$\frac{1}{\sqrt{n}} \times \ddot{\mathcal{V}}_n(\check{\theta}_n)(\theta_n-\theta)$ converge en probabilité vers 0.
Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\dot{\mathcal{V}}_n(\theta) - \dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)\right] = o_P(1).$$

L'utilisation de l'égalité (2.30) nous permet de terminer la preuve et nous obtenons finalement :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) = O_P(1).$$

2.6.3 Preuve de la proposition 2.2

1. En faisant un développement de Taylor d'ordre 1 de $\mathcal{V}_n$ en θ_n, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_n(\theta) - \mathcal{V}_n(\theta_n) &= (\theta-\theta_n)\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) + \frac{1}{2}(\theta-\theta_n)^2\ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n), \\ &= \sqrt{n}(\theta-\theta_n) \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}(\theta-\theta_n)^2\ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n), \qquad (2.30)\end{aligned}$$

avec $\tilde{\theta}_n$ est entre θ et θ_n.

En appliquant la première partie du lemme 2.1, l'égalité (2.30) s'écrit :

$$\mathcal{V}_n(\theta) - \mathcal{V}_n(\theta_n) = \sqrt{n}(\theta-\theta_n) \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}} + o_P(1). \qquad (2.31)$$

Notons que le terme $\sqrt{n}(\theta-\theta_n) = O_P(1)$ est asymptotiquement non dégénéré. L'application de la proposition 2.1 implique l'existence d'une variable aléatoire R_n qui converge en probabilité vers 0 et vérifiant :

$$\sqrt{n}(\theta-\theta_n) = \sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) + R_n.$$

Ceci nous permet d'écrire l'égalité (2.30) comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_n(\theta) - \mathcal{V}_n(\theta_n) &= \left\{\sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) + R_n\right\} \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}}, \\ &= \left\{\sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n)\right\} \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}} \; + \; R_n \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}} + o_P(1). \qquad (2.32)\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1, la quantité $\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) = O_P(1)$. Ce qui implique que

$$R_n \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}} = o_P(1).$$

Finalement, nous déduisons que :

$$\mathcal{V}_n(\theta) = \mathcal{V}_n(\theta_n) \; + \; (\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n)\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) + o_P(1) = \mathcal{W}^{\mu}{}_n(\theta_n) + o_P(1).$$

2. Nous avons la décomposition suivante :

$$\sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) = \sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta) + \sqrt{n}(\theta - \theta_n).$$

Étant donné que les quantités $\sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta)$ et $\sqrt{n}(\theta - \theta_n)$ sont bornées en probabilité, il vient :

$$\sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) = O_P(1). \tag{2.33}$$

Remarquons que :

$$D^{\mu}{}_n = (\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n)\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) = \sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}}.$$

L'utilisation de la deuxième partie du lemme 2.1 et de l'égalité (2.33) nous donne $D^{\mu}{}_n = O_P(1)$.

Étant donné que la fonction $\theta \mapsto \mathcal{V}_n(\theta)$ est dérivable, nous définissons l'espace tangent Γ à la courbe de $\mathcal{V}_n$ en θ_n par l'équation suivante :

$$\Gamma : \Big\{ x \in \mathbf{R}, \quad \mathcal{V}_n(x) - \mathcal{V}_n(\theta_n) = \dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)(x - \theta_n) \Big\}. \tag{2.34}$$

Nous utilisons les mêmes techniques que celles introduites au paragrahe 2 de Lounis (2011). En d'autres termes, nous construisons sur l'espace tangent Γ l'estimateur modifié $\bar{\theta}_n = \theta_n + x$ qui absorbe asymptotiquement l'erreur $D^{\mu}{}_n$ et satisfaisant à :

$$\mathcal{V}_n(\bar{\theta}_n) - \mathcal{V}_n(\theta_n) = D^{\mu}{}_n. \tag{2.35}$$

La combinaison des égalités (2.34) et (2.35) nous permet de déduire que :

$$x = \theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_n = \theta_n + x = \theta_{[1+n^{\mu+1}]}.$$

Par conséquent, il vient :

$$\mathcal{V}_n(\theta_{[1+n^{\mu+1}]}) = D^{\mu}{}_n + \mathcal{V}_n(\theta_n) = \mathcal{W}^{\mu}{}_n(\theta_n).$$

L'application de la proposition 2.2 nous permet d'établir à un terme $o_P(1)$ près l'équivalence entre les deux suites $\mathcal{V}_n(\theta_{[1+n^{\mu+1}]})$ et $\mathcal{V}_n(\theta)$. Ceci achève la preuve.

2.6.4 Preuve du Théorème 2.1

La statistique de test proposée est :

$$T_n = T_n(\theta) = I\Big\{ \frac{\mathcal{V}_n(\theta)}{\tau(\theta)} \geq Z(\alpha) \Big\}.$$

Clairement, ce test est basé sur la suite centrale $\mathcal{V}_n(\theta)$. La version estimée de la suite centrale est donnée par $\mathcal{V}_n(\theta_n)$, avec θ_n un estimateur de θ. À partir de la proposition 2.2, nous avons :

$$\mathcal{V}_n(\theta) = \mathcal{V}_n(\theta_n) + \sqrt{n}(\theta - \theta_n) \times \frac{\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n)}{\sqrt{n}} + o_P(1). \tag{2.36}$$

Notons que le terme $\sqrt{n}(\theta - \theta_n) = O_P(1)$ est asymptotiquement non dégénéré. Donc en général les suites $\mathcal{V}_n(\theta)$ et $\mathcal{V}_n(\theta_n)$ ne sont pas équivalentes. L'utilisation de la proposition 2.1 entraine l'existence d'une variable aléatoire R_n qui converge en probabilité vers 0 et satisfaisant à :

$$\sqrt{n}(\theta - \theta_n) = \sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) + R_n = \sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n) + o_P(1).$$

La dernière égalité nous permet de réecrire (2.36) comme suit :
$\mathcal{V}_n(\theta) = \mathcal{V}_n(\theta_n) \ + \ (\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n)\dot{\mathcal{V}}_n(\theta_n) + o_P(1) = \mathcal{W}^{\mu}{}_n(\theta_n) + o_P(1)$.
De la proposition 2.2, on conclut que les suites $\mathcal{V}_n(\theta_{[1+n^{\mu+1}]})$ et $\mathcal{V}_n(\theta)$ sont à un terme $o_P(1)$ près èquivalentes.
Il est important de remarquer que la proposition 2.1 permet de remplacer la quantité inconnue $\sqrt{n}(\theta - \theta_n)$ par $\sqrt{n}(\theta_{[1+n^{\mu+1}]} - \theta_n)$. Ceci joue un rôle fondamental dans la preuve de l'optimalité.
De (2.11) et sous H_0, les suites $\mathcal{V}_n(\theta)$ et $\mathcal{V}_n(\theta_{[1+n^{\mu+1}]})$ sont équivalentes. Le remplacement de la suite centrale par sa version estimée $\mathcal{V}_n(\theta_{[1+n^{\mu+1}]})$ n'a pas d'effets. Sous $(C.1)$ et $(C.2)$ la LAN est établie, ce qui implique la contiguïté des hypothèses nulle et alternative (pour plus de détails, voir par exemple le corollaire 4.3 de Droesbeke et Fine (1996)).
De l'égalité (2.6) et l'utilisation du lemme de Sltusky, on obtient sous H_0 :

$$\Lambda_n(\theta) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(-\tau^2(\theta)/2, \tau^2(\theta)).$$

Soit a et b deux réels. on obtient à partir de (2.6) que :

$$a\Lambda_n(\theta) + b\mathcal{V}_n(\theta) = (a+b)\mathcal{V}_n(\theta) - a\tau^2(\theta)/2 + o_P(1).$$

L'application du lemme de Sltusky donne :
$a\Lambda_n(\theta) + b\mathcal{V}_n(\theta) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(-a\tau^2/2, \tau^2)$. D'où le vecteur $(\mathcal{V}_n(\theta), \Lambda_n(\theta))$ est gaussien.
Sous H_0, on a $\begin{pmatrix} \mathcal{V}_n(\theta) \\ \Lambda_n(\theta) \end{pmatrix} \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\tau^2(\theta)/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1\,2} \\ \sigma_{2\,1} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right]$.
La contiguïté des hypothèses nulle et alternative et l'application du troisième lemme de Le Cam nous permet d'obtenir sous $H_1^{(n)}$ que $\mathcal{V}_n \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\tau^2, \tau^2)$.
La convergence en probabilité de $\theta_{[1+n^{\mu+1}]}$ vers θ, la continuité de la fonction $\tau : \cdot \longrightarrow \tau(\cdot)$ et la conservation du mode de la convergence par les fonctions continues (voir par exemple le théorème 2.3 de Van der Vaart (1998)), nous permettent de conclure que la puissance asymptotique locale du test construit est conservée. Le remplacement de θ par son estimateur $\theta_{[1+n^{\mu+1}]}$ n'a pas d'effets. Les suites de tests $T_n(\theta)$ et $T_n([1+n^{\mu+1}])$ sont équivalentes (asymptotiquement). D'où l'optimalité.
Pour un α fixé ($\alpha \in [0;1]$), la puissance du test T_n est égale à :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_{H_1^{(n)}}(T_n(\theta)) = 1 - \Phi\left(Z(\alpha) - \tau(\theta)\right).$$

2.6.5 Preuve du Lemme 2.2

1. D'abord, nous notons par $N_f(x) = 1 + xM_f(x)$.

   En faisant un calcul simple, nous obtenons :

   $$\ddot{N}_f(x) = 2\dot{M}_f(x) + x\ddot{M}_f(x).$$

   Nous concluons à partir de la dernière égalité, de $(E.1)$ et $(E'.1)$ que la fonction $x \mapsto \ddot{N}_f(x)$ est bornée.

   L'égalité (2.15) se reécrit comme suit :

   $$\tilde{\mathcal{V}}_n(\theta_n) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\sum_{i=1}^{n} M_f(\epsilon_i)G(\mathbf{Y}_i) + \sum_{i=1}^{n} N_f(\epsilon_i)B(\mathbf{Y}_i)\right\}. \tag{2.37}$$

   En considérant l'égalité (2.15) et après un calcul simple, il vient :

$$\ddot{\tilde{\mathcal{V}}}_n(\tilde{\theta}_n) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 G(\mathbf{Y}_i)\ddot{M}_f\left(Y_i - \tilde{\theta}_n Y_{i-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 B(\mathbf{Y}_i)\ddot{N}_f\left(Y_i - \tilde{\theta}_n Y_{i-1}\right).$$

De $(E'.1)$ et étant donné que la fonction $x \mapsto \ddot{N}_f(x)$ est bornée, on a l'existence de deux constantes positives K_2 et K_3 telles que :

$$\dddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) \leq K_2 \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 \left| G(\mathbf{Y}_i) \right| \right\} + K_3 \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 |B(\mathbf{Y}_i)| \right\}.$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \dddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) \leq K_2 \times \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 |G(\mathbf{Y}_i)| \right\} + K_3 \times \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 \left| B(\mathbf{Y}_i) \right| \right\}.$$

D'après le théorème ergodique, nous déduisons la convergence presque sûre des variables aléatoires $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 \left| G(\mathbf{Y}_i) \right|$ et $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 \left| B(\mathbf{Y}_i) \right|$ vers $\mathbf{E}\left(Y_{i-1}^2 \left| G(\mathbf{Y}_i) \right| \right)$ et $\mathbf{E}\left(Y_{i-1}^2 \left| B(\mathbf{Y}_i) \right| \right)$ respectivement. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(Y_{i-1}^2 \left| G(\mathbf{Y}_i) \right| \right) &\leq \sqrt{\mathbf{E}(Y_{i-1}^4) \times \mathbf{E} \left| G(\mathbf{Y}_i) \right|^2}. \\ \text{D'où :} & \\ \mathbf{E}\left(Y_{i-1}^2 \left| B(\mathbf{Y}_i) \right| \right) &\leq \sqrt{\mathbf{E}(Y_{i-1}^4) \mathbf{E} \left| B(\mathbf{Y}_i) \right|^2}. \end{aligned}$$

De $(A.1)$ et $(A.2)$ il vient :

$$\dddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) = O_P(1).$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{2}(\theta - \theta_n)^2 \dddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{n}(\theta - \theta_n) \right]^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \ddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Étant donné que $\sqrt{n}(\theta - \theta_n) = O_P(1)$ et $\dddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) = O_P(1)$, il s'en suit que :

$$\frac{1}{2}(\theta - \theta_n)^2 \dddot{\mathcal{V}}_n(\tilde{\theta}_n) = o_P(1).$$

2. Considérons l'égalité (2.15), en dérivant $\tilde{\mathcal{V}}_n$ par rapport à θ nous obtenons :

$$\dot{\tilde{\mathcal{V}}}_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \dot{M}_f \left(Y_i - \theta Y_{i-1} \right) Y_{i-1} G(\mathbf{Y}_i) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \dot{N}_f \left(Y_i - \theta Y_{i-1} \right) Y_{i-1} B(\mathbf{Y}_i).$$

Ce qui implique que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \dot{\tilde{\mathcal{V}}}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dot{M}_f \left(\epsilon_i \right) Y_{i-1} G(\mathbf{Y}_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dot{N}_f \left(\epsilon_i \right) Y_{i-1} B(\mathbf{Y}_i).$$

L'application du théorème ergodique nous permet de déduire que les variables aléatoires $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{M}_f(\epsilon_i)\,Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i)$ et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{N}_f(\epsilon_i)\,Y_{i-1}B(\mathbf{Y}_i)$ convergent presque sûrement vers les constantes $\mathbf{E}\left(\dot{M}_f(\epsilon_i)Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i)\right) = \mathbf{E}\left(\dot{M}_f(\epsilon_i))\mathbf{E}(Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i)\right)$ et $\mathbf{E}\left(\dot{N}_f(\epsilon_i)Y_{i-1}B(\mathbf{Y}_i)\right) = \mathbf{E}\left(\dot{N}_f(\epsilon_i))\mathbf{E}(Y_{i-1}B(\mathbf{Y}_i)\right)$ respectivement.
Notons que chacune des deux quantités $\mathbf{E}\left(Y_{i-1}G(\mathbf{Y}_i)\right)$ et $\mathbf{E}\left(Y_{i-1}B(\mathbf{Y}_i)\right)$ est finie. Ceci est une conséquence directe de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivie de l'utilisation de $(A.1)$, $(A.2)$ et $(C.0)$. Il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\tilde{\mathcal{V}}}_n(\theta) = O_P(1).$$

En faisant un raisonnement similaire à celui de la deuxième partie du lemme 2.1, la preuve est terminée.

2.6.6 Preuve de la proposition 2.3

En appliquant le lemme 2.2 et faisant un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition 2.2, on obtient le résultat attendu.

2.6.7 Preuve du Théorème 2.2

La preuve est similaire à celle du théorème 2.1.

2.6.8 Preuve de la proposition 2.4

1.

$$\Delta_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\dot{f}(e_i)}{f(e_i)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_f(e_i). \tag{2.38}$$

En faisant un développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction Δ_n au voisinage de θ_n, on obtient :

$$\Delta_n(\theta) = \Delta_n(\theta_n) \;+\; \nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta-\theta_n) \;+\; \frac{1}{2}(\theta-\theta_n)'\partial^2\Delta_n(\tilde{\theta}_n)(\theta-\theta_n), \tag{2.39}$$

où $\tilde{\theta}_n$ est entre θ_n et θ, $\tilde{\theta}'_n = \left(\tilde{\theta}_{n,0}, \ldots, \tilde{\theta}_{n,p}\right)$, et

$$\partial^2\Delta_n(\tilde{\theta}_n) = \begin{pmatrix} D_{0,1}(\tilde{\theta}_n) & \cdot & \cdot & \cdot & D_{0,p}(\tilde{\theta}_n) \\ D_{1,1}(\tilde{\theta}_n) & D_{1,2}(\tilde{\theta}_n) & \cdot & \cdot & D_{1,p}(\tilde{\theta}_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{p,1}(\tilde{\theta}_n) & D_{p,2}(\tilde{\theta}_n) & \cdot & \cdot & D_{p,p}(\tilde{\theta}_n) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } k,j = 0 \ldots p,$$

$$D_{k,k}(\tilde{\theta}_n) = \frac{\partial^2\Delta_n(\tilde{\theta}_n)}{\partial\theta_k^2} \text{ et } D_{k,j}(\tilde{\theta}_n) = \frac{\partial^2\Delta_n(\tilde{\theta}_n)}{\partial\theta_k\partial\theta_j}.$$

Un calcul simple nous permet de vérifier, que

$$D_{k,k}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\mathbf{M}}_f(e_i)Y_{i-k}^2, \tag{2.40}$$

$$D_{k,j}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\mathbf{M}}_f(e_i)Y_{i-k}Y_{i-j}. \tag{2.41}$$

Il reste à montrer que $\frac{1}{2}(\theta-\theta_n)'\partial^2\Delta_n(\tilde{\theta}_n)(\theta-\theta_n) = o_P(1)$.

Nous obtenons après un calcul simple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\theta-\theta_n)'\partial^2\Delta_n(\tilde{\theta}_n)(\theta-\theta_n) &= \sum_{k=1}^{m}P_{k,n}, \\ &\text{avec} \\ P_{k,n} &= \frac{1}{2}(\theta_k-\theta_{k,n})^2D_{k,k}(\tilde{\theta}_n) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq k}^{m}(\theta_i-\theta_{i,n})(\theta_k-\theta_{k,n})\left(D_{i,k}(\tilde{\theta}_n)+D_{k,i}(\tilde{\theta}_n)\right). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ceci entraine après utilisation des égalités (2.40) et (2.41) que :

$$\frac{1}{2}(\theta_k-\theta_{k,n})^2D_{k,k}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{2}n(\theta_k-\theta_{k,n})^2 \times \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\mathbf{M}}_f(e_i)Y_{i-k}^2.$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq k}^{m}(\theta_i-\theta_{i,n})(\theta_j-\theta_{k,n})\left(D_{i,k}(\tilde{\theta}_n)+D_{k,i}(\tilde{\theta}_n)\right) &= \sum_{i=1,i\neq k}^{m}(\theta_i-\theta_{i,n})(\theta_j-\theta_{k,n}) \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\mathbf{M}}_f(e_i)Y_{i-k}Y_{i-j}\right]. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Observons que :

$$\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_{k,n})^2 D_{k,k}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2}(\sqrt{n}\,(\theta_k - \theta_{k,n}))^2 \times \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ddot{\mathbf{M}}_f(e_i) Y_{i-k}^2\right]. \quad (2.44)$$

De $(\hat{C}.2)$ et $(\hat{C}.4)$, nous déduisons que la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ddot{M}_f(e_i) Y_{i-k}^2$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(\ddot{\mathbf{M}}_f(e_i) Y_{i-k}^2) = \mathbf{E}(\ddot{\mathbf{M}}_f(e_i))\mathbf{E}(Y_{i-k}^2)$.
Étant donné que $(\sqrt{n}(\theta_k - \theta_{k,n}))^2 = O_P(1)$, il vient

$$\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_{k,n})^2 D_{k,k}(\tilde{\theta}_n) = o_P(1). \quad (2.45)$$

Il reste à évaluer la quantité suivante :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1, i\neq k}^{m} (\theta_i - \theta_{i,n})(\theta_k - \theta_{k,n}) \left(D_{i,k}(\tilde{\theta}_n) + D_{k,i}(\tilde{\theta}_n)\right).$$

Dans un premier temps, nous avons, pour tout $i = 1, \ldots, m.$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{i,n})(\theta_k - \theta_{k,n}) \left(D_{i,k}(\tilde{\theta}_n) + D_{k,i}(\tilde{\theta}_n)\right) &\leq |(\theta_i - \theta_{i,n})(\theta_k - \theta_{k,n})| \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \{\ddot{\mathbf{M}}_f(e_i) Y_{i-k} Y_{i-j}\right]. \end{aligned}$$

En faisant un raisonnement analogue à celui de la preuve de (2.45), nous obtenons :

$$\frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{i,n})(\theta_j - \theta_{k,n}) \left(D_{i,k}(\tilde{\theta}_n) + D_{i,k}(\tilde{\theta}_n)\right) = o_P(1). \quad (2.46)$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1, i\neq k}^{m} (\theta_i - \theta_{i,n})(\theta_j - \theta_{k,n}) \left(D_{i,k}(\tilde{\theta}_n) + D_{i,k}(\tilde{\theta}_n)\right) = o_P(1). \quad (2.47)$$

À partir de (2.45) et (2.47) nous déduisons que, $P_{k,n} = o_P(1)$, avec $P_{k,n}$ est défini dans (2.42). Ce qui implique que :

$$\sum_{k=1}^{m} P_{k,n} = \frac{1}{2}(\theta - \theta_n)' \partial^2 \Delta_n(\tilde{\theta}_n)(\theta - \theta_n) = o_P(1).$$

L'injection de la dernière quantité dans (2.39) nous permet d'obtenir le résultat désiré.
De l'égalité (2.39) nous avons :

$$\Delta_n(\theta) - \Delta_n(\theta_n) = \nabla\Delta(\theta_n) \cdot (\theta - \theta_N) + \nabla\Delta(\theta_n) \cdot (\theta_N - \theta_n) \; + \; o_P(1). \quad (2.48)$$

Remarquons que :

$$\nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta-\theta_N)=\sum_{i=0}^{p}\frac{\partial\Delta(\theta_n)}{\partial\theta_i}\times(\theta_i-\theta_{N,i}).$$

Pour $i\in\{0,\ldots,p\}$, nous avons,

$$\frac{\partial\Delta_n(\theta_n)}{\partial\theta_i}\times(\theta_i-\theta_{N,i})=\frac{\frac{\partial\Delta_n(\theta_n)}{\partial\theta_i}}{\sqrt{n}}\times\sqrt{n}(\theta_i-\theta_{N,i}).$$

En effectuant un même raisonnement que celui de la preuve des lemmes 2.1 et 2.2, nous obtenons sous $(\hat{C}.1)-(\hat{C}.4)$ ce qui suit :

$$\frac{\frac{\partial\Delta_n(\theta_n)}{\partial\theta_i}}{\sqrt{n}}=O_P(1).$$

Ceci combiné avec la proposition 2.1 donne :

$$\frac{\partial\Delta_n(\theta_n)}{\partial\theta_i}\times(\theta_i-\theta_{N,i})=o_P(1). \tag{2.49}$$

En utilisant (2.49) nous obtenons :

$$\nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta-\theta_N)=o_P(1).$$

L'injection de la derniére quantité dans (2.48) donne,

$$\Delta_n(\theta)-\Delta_n(\theta_n)=\nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta_N-\theta_n)\ +\ o_P(1). \tag{2.50}$$

2. Considérons maintenant l'espace tangent Γ de la courbe de Δ_n en θ_n,

$$\Gamma:\big\{x\in\mathbf{R}^{p+1},\quad\Delta_n(x)-\Delta_n(\theta_n)=\nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(x-\theta_n)\big\}. \tag{2.51}$$

Nous cherchons l'estimateur $\bar{\theta}_n^j$, avec $(\bar{\theta}_n^j;\Delta_n(\bar{\theta}_n^j))\in\Gamma$ et tel que, $\bar{\theta}_{n,k}^j=\theta_{n,k}, k\neq j,$ et $\bar{\theta}_{n,j}^j=\theta_{n,j}+\rho_j$. $\bar{\theta}_n^j$ est obtenu après perturbation de la j-ieme composante de θ_n et satisfaisant à :

$$\Delta_n(\bar{\theta}_{n,k}^j)-\Delta_n(\theta_n)=\nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta_N-\theta_n). \tag{2.52}$$

En injectant $\bar{\theta}_n^j$ dans (2.51) et en utilisant l'égalité (2.52) nous obtenons

$$\rho_j\times\frac{\partial\Delta_n(\theta_n)}{\partial\rho_j}=\nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta_N-\theta_n).$$

D'où

$$\rho_j=\frac{\nabla\Delta_n(\theta_n)\cdot(\theta_N-\theta_n)}{\frac{\partial\Delta_n(\theta_n)}{\partial\rho_j}}.$$

$$\bar{\theta}_n^j=\big(\theta_{n,0},\ldots,\theta_{n,j-1},\theta_{n,j}+\rho_j,\theta_{n,j+1},\ldots,\theta_{n,p}\big)'.$$

2.6.9 Preuve du théorème 2.3

La preuve est similaire à celle du théorème 2.1.

Conclusion 2.1. *Dans cette partie, la méthode d'évaluation de l'erreur dans les cas $AR(1)$ et $AR(p)$ nous a permis à chaque fois de montrer, théoriquement l'optimalité asymptotique locale du test construit après estimation du paramètre du modèle. La démonstration est basée essentiellement sur l'équivalence de la suite centrale et sa version estimée. Pour chacun des cas étudiés, un résultat de la normalité asymptotique locale est utilisé. Sur le plan pratique, étant donné le cadre asymptotique de notre travail, on a supposé la taille de l'échantillon très grande. D'autre possibilités d'application peuvent être envisagées, par exemple dans les cas où la série chronologique est périodique.*
Pour étendre nos résultats à des modèles de séries chronologiques plus généraux, il va falloir dans un premier temps établir le principe de normalité asymptotique LAN correspondant. Par la suite on s'intéressera à la constructions des tests localement asymptotiquement optimaux. Ceci est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Tests localement asymptotiquement optimaux dans les modèles ARCH

Dans cette partie, sous des conditions de stationnarité et d'ergodicité, nous nous intéressons à l'étude des tests traitant simultanément des hypothèses portant sur les moyennes et les variances conditionnelles. Le cadre de l'étude correspond à la considération du test 3.4 pour un modèle plus général.

Nous établissons un résultat de normalité asymptotique locale du même type que celui qui a été donné dans Hwang et Basawa (2001).

Dans le cas où le paramètre est supposé connu, les tests construits, sont asymptotiquement optimaux et les formes explicites de leurs puissances asymptotiques sont obtenues. Étant donné qu'en pratique le paramètre du modèle étudié est inconnu, il est remplacé par un estimateur. Comme les statistiques classiques se basent sur la suite centrale qui apparait dans le logarithme du rapport de vraisemblance, nous avons dans un premier temps établi un lien entre la suite centrale et la suite centrale estimée. Ceci est obtenu grâce à une utilisation des suites locales d'estimateurs et des estimateurs asymptotiquement discrets et l'application du lemme 4.4 de Kreiss (1987).

Dans ce lien établi, un terme asymptotiquement non dégénéré apparait. Ceci affecte la puissance locale du test étudié. En vue de supprimer cet effet, une méthode d'évaluation

de l'erreur suivie de l'introduction d'un autre estimateur du paramètre nous permet de conserver l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. Par conséquent, la puissance asymptotique locale du test est obtenue avec une écriture explicite de son expression.

Pour une évaluation de la performance de nos résultats, des simulations sont effectuées et commentées. Les résultats obtenus dans cette partie généralisent ceux du chapitre précédent.

Ce chapitre donne les détails de Lounis (2013). Seule la preuve de la proposition 3.3 est déduite du résultat 2.1.

Abstract. This work is an extension of the results of Hwang et Basawa (2001) to $ARCH$ models, where a testing problem in nonlinear time series contiguous to $AR(1)$ processes is studied. Our results are established under some general assumptions and under stationarity and ergodicity. Local asymptotic normality (LAN) for the log-likelihood ratio is established. Optimal tests are constructed both when the parameter is known and when it is not. The key of our proof is the construction of a new estimator.

Keywords and phrases : Local asymptotic normality, Contiguity, Efficiency, Identifiable models, Le Cam's third lemma, Discrete estimate, $ARCH$ models.

Introduction

L'étude des chroniques provenant des données économiques, biologiques, financières, hydrologiques et biomédicales ou autres est basée sur l'utilisation des modèles mathématiques. Nous considérons la classe des modèles stochastiques suivante :

$$Y_i = T(Z_i) + V(Z_i)\,\epsilon_i, \quad i \in \mathbf{Z}, \tag{3.1}$$

la suite de vecteurs aléatoires $\{(Y_i, X_i)\}$ est ergodique et stationnaire de moments d'ordre 2 finis, tels que pour tout $i \in \mathbf{Z}$, Y_i est une variable aléatoire réelle, X_i un q-vecteur aléatoire et $Z_i = \Big(Y_{i-1}, Y_{i-2}, \ldots, Y_{i-s}, X_i, X_{i-1}, \ldots, X_{i-q}\Big)$, avec q et s deux entiers positifs. Les variables aléatoires ϵ_i sont i.i.d. centrées réduites et de fonction de densité f, ϵ_i est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_i = \sigma(Z_j, j \leq i)$. Les valeurs réelles des fonctions $T(\cdot)$ et $V(\cdot)$ sont inconnues.

Soit

$$\mathcal{M} = \left\{ (m(\rho,\cdot), \sigma(\theta,\cdot)) \,,\ (\rho^\top, \theta^\top)^\top \in \Theta_1 \times \Theta_2 \right\},$$

$\Theta_1 \times \Theta_2 \subset \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^p$, $\text{int}(\Theta_1) \neq \emptyset$, $\text{int}(\Theta_2) \neq \emptyset$, où pour tout ensemble A, $\text{int}(A)$ désigne l'intérieur de A et le symbole $\top$ désigne la transposée. ℓ et p sont deux entiers positifs, et chacune des deux fonctions $m(\rho,\cdot)$ et $\sigma(\theta,\cdot)$ admet une forme connue avec $\sigma(\theta,\cdot) > 0$.
Pour un échantillon de taille n, nous voulons tester $H_0\,[(T(\cdot), V(\cdot)) \in \mathcal{M}]$ contre $H_1\,[(T(\cdot), V(\cdot)) \notin \mathcal{M}]$.
Remarquons que l'hypothèse nulle H_0 est équivalente à :

$$H_0\,[(T(\cdot), V(\cdot)] \quad = \quad [m(\rho_0,\cdot), \sigma(\theta_0,\cdot)]\,,$$

pour $(\rho_0^\top, \theta_0^\top)^\top \in \Theta_1 \times \Theta_2$, tandis que l'hypothèse alternative H_1 est équivalente à

$$H_1[(T(\cdot), V(\cdot)] \quad \neq \quad \Big[m(\rho_0,\cdot), \sigma(\theta_0,\cdot) \Big].$$

Nous définissons l'hypothèse alternative $H_1^{(n)}$ par :

$$H_1^{(n)}\,[(T(\cdot), V(\cdot)] \quad = \quad \left(m(\rho_0,\cdot) + h\, n^{-\frac{1}{2}} G(\cdot), \sigma(\theta_0,\cdot) + h'\, n^{-\frac{1}{2}} S(\cdot) \right),$$

$G(\cdot)$ et $S(\cdot)$ désignent deux fonctions connues et à valeurs dans $\mathbf{R}$, $(h, h') \in K_1 \times K_2$, avec K_1 et K_2 sont deux compacts de $\mathbf{R}$ et $hh' \neq 0$. Sous H_0, le modèle (3.1) prend la forme :

$$Y_i \quad = \quad m(\rho_0, Z_i) + \sigma(\theta_0, Z_i)\, \epsilon_i, \tag{3.2}$$

et sous $H_1^{(n)}$, il s'écrit :

$$Y_i \quad = \quad m(\rho_0, Z_i) + h\, n^{-\frac{1}{2}} G(Z_i) + \left(\sigma(\theta_0, Z_i) + h'\, n^{-\frac{1}{2}} S(Z_i) \right) \epsilon_i. \tag{3.3}$$

Nous notons par f_0 et $f_{h,h'}$ les fonctions de densité des variables aléatoires Y_i correspondants aux modèles (3.2) et (3.3) respectivement, et par $f_{n,0}$ et $f_{n,h,h'}$ les fonctions de densités des vecteurs $(Y_1, \ldots, Y_n)$ correspondants aux modèles (3.2) et (3.3) respectivement.
Différentes spécifications de $m(\rho_0,\cdot)$ et $\sigma(\theta_0,\cdot)$ montrent que (3.2) contient une large classe des modèles de séries chronologiques, tels que : AR, $ARMA$, $SETAR$, $SETAR$, $ARCH$ et β-$ARCH$.
On veut tester H_0 contre $H_1^{(n)}$, avec

$$H_0 : m(\rho, Z_i) = m(\rho_0, Z_i) \ \ et \ \ \sigma(\theta, Z_i) = \sigma(\theta_0, Z_i),$$

$$H_1^{(n)} : m(\rho, Z_i) = m(\rho_0, Z_i) + h\, n^{-\frac{1}{2}} G(Z_i) \quad \text{et} \ \ \sigma(\theta, Z_i) = \sigma(\theta_0, Z_i) + h' n^{-\frac{1}{2}} S(Z_i). \tag{3.4}$$

Nous utilisons la statistique du test de Neyman-Pearson basée sur le logarithme du rapport de vraisemblance $\Lambda_{n,h,h'}$, avec

$$\Lambda_{n,h,h'} = \log\left(\frac{f_{n,h,h'}}{f_{n,0}} \right) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(g_{n,i,h,h'} \right). \tag{3.5}$$

Notre objectif premier est d'établir la normalité asymptotique locale (LAN). Nous rappelons qu'il a été prouvé au théorème 1 de Hwang et Basawa (2001) que le logarithme du rapport de vraisemblance est asymptotiquement équivalent à une suite de variables aléatoires appelée suite centrale. De plus, lorsque le paramètre (ρ_0, θ_0) de la série chronologique est supposé connu, le test obtenu est optimal. En général ce paramètre est inconnu, l'erreur commise après son estimation affecte asymptotiquement la puissance du test.

Plusieurs travaux ont été effectués dans le passé, d'une part pour estimer le paramètre inconnu de la série chronologique et d'autre part pour conserver l'optimalité du test construit. Une bonne partie de ces travaux se repose sur l'utilisation des estimateurs discrets introduit par Le Cam (1960) et utilisés dans Bickel (1982) et Kreiss (1987).

Le grand avantage de ce type d'estimateur réside dans l'application du lemme 4.4 de Kreiss (1987). Ce lemme est un outil fondamental exploité par plusieurs auteurs pour achever la preuve de l'optimalité. Nous citons parmi ces travaux Benghabrit et Hallin (1992, 1996); Benghabrit et Hallin (1998) et Cassart et al (2008).

Rappelons que l'expression de la statistique du test considéré dans notre travail dépend principalement de la suite centrale. La version estimée de cette suite centrale est obtenue après remplacement du paramètre de la série chronologique par un estimateur. En général, quand on considère la différence entre une suite centrale et sa version estimée, un terme asymptotiquement non dégenéré apparait. C'est ce terme qui affecte la puissance asymptotique du test.

Afin de résoudre ce problème, nous utilisons les estimateurs discrets pour construire un estimateur qui garanti l'optimalité du test étudié. Notre travail est organisé comme suit :

Au paragraphe 3.1, nous étudions notre problème de test lorsque le paramètre du modèle est supposé connu. Nous commençons d'abord par le rappel de quelques notations et définitions. Ensuite, nous imposons quelques conditions et énonçons nos principaux résultats.

Au paragraphe 3.2, nous étudions notre problème de test lorsque le paramètre du modèle est remplacé par un estimateur. Nous procédons de la même façon que dans le paragraphe précédent.

Une généralisation de ces résultats quand l'indice est dans $\mathbf{Z}$ est présentée au paragraphe 3.3. Pour l'évaluation de la performance de notre méthodologie, nous effectuons des simulations au paragraphe 3.4. Les preuves et les développements mathématiques sont exposés au paragraphe 3.5.

3.1 Tester quand le paramètre est connu

Dans un premier temps, nous supposons que le paramètre du modèle de la série chronologique est connu. Dans l'objectif d'établir le principe de la normalité asymptotique locale (LAN) du logarithme du rapport de vraisemblance $\Lambda_{n,h,h'}$, nous vérifions les trois conditions **(C.1)**, **(C.2)** et **(C.3)** ci-dessous du théorème 1 de Hwang et Basawa (2001) :

(C.1) $\max_{1\leq i\leq n}|g_{n,i,h,h'}-1| = o_P(1)$.

(C.2) Il existe une constante positive $\tau^2_{h,h'}$ telle que :$\sum_{i=1}^{n}\left(g_{n,i,h,h'}-1\right)^2 = \tau^2_{h,h'} + o_P(1)$.

(C.3) Il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_n$-mesurable $\mathcal{V}_{n,h,h'}$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(g_{n,i,h,h'}-1\right) = \mathcal{V}_{n,h,h'} + o_P(1).$$

Nous commençons d'abord par rappeler quelques notations, définitions et conditions.

3.1.1 Notations, définitions et conditions

Pour tout $x\in\mathbf{R}$, nous notons par M_f la fonction $x\longmapsto M_f = \frac{\dot f(x)}{f(x)}$. De plus nous supposons que la fonction $x\longmapsto f(x)$ est trois fois dérivable. Nous désignons par $\dot M_f$ et $\ddot M_f$ respectivement les dérivées première et seconde de M_f.

Nous notons par F la fonction définie par $F\left(x;a,b\right) = \frac{1}{b}\,f\left(\frac{x-a}{b}\right)$, où $|a|<\infty$, et, $0<b<\infty$.

Dans toute la suite, les conditions suivantes sont imposées :

(A_1)

$(A_{1.1})$: Il existe une fonction mesurable et positive φ, un réel $p>1$, où $\int\varphi^p(x)f(x)dx<+\infty$, et un nombre positif ς avec $\varsigma>\max(|a|,|b-1|)$, tels que :

$$\left|\frac{\partial^2 F(x;a,b)}{f(x)\,\partial a^j\,\partial b^k}\right| \leq \varphi(x), \quad j \text{ et } k \text{ deux entiers positifs vérifiants l'égalité } j+k=2.$$

$(A_{1.2})$ Il existe des fonctions positives V_1 et V_2 telles que :

$$\left|\frac{\partial^2 F(x;a,b)}{\partial a^j\,\partial b^j} - \frac{\partial^2 F(x;a',b)}{\partial a^j\,\partial b^k}\right| \leq V_1(x;a^\star,b)\,|a-a'|\,,$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(x;a,b)}{\partial a^j\,\partial b^k} - \frac{\partial^2 F(x;a,b')}{\partial a^j\partial b^k}\right| \leq V_2(x;a,b^\star)\,|b-b'|\,,$$

où, $(a^\star,b^\star)\in[a,a']\times[b,b']$, j et k sont deux entiers positifs ou nuls vérifiant l'égalité $j+k=2$.

$(A_{1.3})$: Il existe une fonction mesurable et positive ϕ avec $\mathbf{E}\left(\phi(\epsilon_0)\right) < +\infty$, et un réel positif ς' où, $\varsigma' > \max\left(|\alpha|, |\beta - 1|\right)$, tels que :

$$\left|\frac{V_i(x;\alpha,\beta)}{f(x)}\right| \leq \phi(x), \quad i = 1, 2.$$

(A_2)

$(A_{2.1})$: $\int M_f(x) f(x) dx = 0.$

$(A_{2.2})$: $\int x M_f(x) f(x) dx = -1.$

$(A_{2.3})$: $\int \left\{\dot{M}_f(x) + M_f^2(x)\right\} f(x) dx = 0.$

$(A_{2.4})$: $\int x \left\{\dot{M}_f(x) + M_f^2(x)\right\} f(x) dx = 0.$

$(A_{2.5})$: $\int \left\{x^2(\dot{M}_f(x) + M_f^2(x))\right\} f(x) dx = 2.$

(A_3) Il existe $\lambda > 0$ tels que :

$(A_{3.1})$ $\max\left(\mathbf{E}\left|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0,Z_0)}\right|^3, \mathbf{E}\left|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0,Z_0)}\right|^{\lambda+2}, \mathbf{E}\left|\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0,Z_0)}\right|^{\lambda+2}\right) < +\infty.$

$(A_{3.2})$ $\max\left\{\int |M_f(x)\left|^{\lambda+2} f(x)dx, \int |xM_f(x)|^{\lambda+2} f(x)dx, \int \left|\dot{M}_f(x)\right|^{\lambda+2} f(x)dx,\right.$
$\left.\int \left|x\dot{M}_f(x)\right|^{\lambda+2} f(x)dx, \int |x|^{2\,\lambda+4} f(x)dx, \int \left|x^2 M_f(x)\right|^{\lambda+2} f(x)dx < +\infty.\right.$

Remarque 3.1.

- *Notons que la condition* (A_2) *est satisfaite par une large classe de fonctions de densité. C'est le cas de la distribution Gausssienne standard et de la loi de Student de degré de liberté supérieur ou égal à* 3.
- *L'hypothèse* $(A_{1.1})$ *est similaire à la troisième condition de Hwang et Basawa (2001).*
- *Pour l'obtention de* $(A_{1.2})$*, nous supposons que les dérivées partielles d'ordre 3 existent et sont localement bornées.*
- *Les conditions* $(A_{2.3})$, $(A_{2.4})$ *et* $(A_{2.5})$ *sont similaires aux conditions* $(A_{4.1})$-$(A_{4.5})$ *imposées dans Chebana et Laïb (2008).*

3.1.2 Principaux résultats

Nous sommes prêts maintenant pour énoncer nos résultats principaux. Dans un premier temps, nous commençons par prouver la normalité asymptotique locale du logarithme du rapport de vraisemblance, par la suite nous définissons une statistique de test. Enfin, nous montrons son optimalité et nous calculons sa puissance. La propriété LAN est établie au théorème suivant :

Théorème 3.1. *(**LAN**) Supposons que les conditions* $(A_1)-(A_3)$ *sont vérifées. Alors, sous* H_0 :

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,h,h'} &= \mathcal{V}_{n,h,h'} - \frac{\tau^2_{h,h'}}{2} + o_P(1), \qquad (3.6) \\ \mathcal{V}_{n,h,h'} &\overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0, \tau^2_{h,h'}) \\ \tau^2_{h,h'}(\rho_0,\theta_0) &= h^2 I_0 \mathbf{E}\left(\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z0)}\right)^2 + h'^2(I_2-1)\mathbf{E}\left(\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0,Z_0)}\right)^2 \\ &+ 2hh'(I_1)\mathbf{E}\left(\frac{G(Z_0)S(Z_0)}{\sigma^2(\theta_0,Z_0)}\right), \qquad (3.7) \end{aligned}$$

et,

$$I_j = \int x^j M_f^2(x) f(x) dx, \qquad j \in \{0,1,2\}.$$

3.1.3 Test optimal

Considérons à nouveau le problème du test 3.4. En se basant sur le théorème 3.1, nous utilisons la statistique de Neyman-Pearson $T_{n,h,h'}$ définie par :

$$T_{n,h,h'} = T_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0) = I\Big\{\frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}}{\tau_{h,h'}} \geq Z_u\Big\}, \qquad (3.8)$$

où Z_u est le quantile d'ordre $1-u$ d'une loi normale centrée réduite, et de fonction de répartition $\Phi(Z_u) = 1-u$. Nous pouvons déduire de l'égalité (3.6), la contiguïté de H_0 et H_1^n. Pour plus de détails, voir par exemple le corollaire 4.3 de Droesbeke et Fine (1996). L'application du troisième lemme de Le Cam (1986) entraine sous H_1^n la convergence en loi de la variable aléatoire $\mathcal{V}_{n,h,h'}$ vers $\mathcal{N}\left(\tau^2_{h,h'}, \tau^2_{h,h'}\right)$. Sous les mêmes conditions que celles du théorème 3.1, on a :

Théorème 3.2. *(**Optimalité**) Le test basé sur la statistique* $T_{n,h,h'}$ *est localement asymptotiquement optimal. Sa puissance locale asymptotique est* $1-\Phi\left(Z_{1-u}-\tau_{h,h'}\right)$.

Le théorème 3.2 traduit l'optimalité asymptotique locale du test considéré et donne une expression explicite de sa puissance. Notons que tous nos résultats sont obtenus en supposant que (ρ_0,θ_0) est connu, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Dans ce qui suit, nous traitons ce même problème de test en remplaçant (ρ_0,θ_0) par un estimateur.

3.2 Tester quand le paramètre est estimé

3.2.1 Estimation du paramètre et lien entre les suites centrales

L'optimalité asymptotique locale d'un test n'est pas toujours conservée quand le paramètre du modèle est remplacé par un estimateur. Cela est due à l'erreur commise après estimation. Comme l'expression de la statistique du test 3.8 dépend principalement de la suite centrale $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)$, nous cherchons à établir un lien explicite entre cette suite centrale et sa version estimée $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_n,\theta_n)$. Nous procédons en trois étapes. Dans un premier temps, nous introduisons les suites aléatoires locales ρ_n et θ_n respectivement de ρ_0 et θ_0, puis nous exprimons un lien entre les suites centrales $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)$ et $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_n,\theta_n)$. Finalement nous introduisons les estimateurs discrets, nous appliquons le lemme 4.4 de Kreiss (1987) et nous déduisons un lien explicite entre les suites centrales.
Rappelons que les estimateurs discrets ont été introduit pour la première fois par Le Cam (1960) et appliqués par Benghabrit et Hallin (1992, 1996); Benghabrit et Hallin (1998) et Cassart et al (2008) parmi d'autres.
Pour une meilleure présentation de nos résultats, on a besoin de donner quelques définitions, de préciser quelques notations, et imposer quelques conditions supplémentaires.

3.2.2 Notations et définitions

Dans tout ce qui suit, nous désignons par $\|\cdot\|_p$ la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^p$. Nous définissons les suites locales ρ_n et θ_n respectivement de ρ_0 et θ_0 par :

$$\rho_n \quad = \quad \rho_0 + n^{-\frac{1}{2}} u^{(n)} \quad \text{et} \quad \theta_n = \theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},$$

où, n un entier positif et $(u^{(n)})^\top \times (v^{(n)})^\top \in \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^p$, tels que :

$$\begin{aligned}(u^{(n)})^\top \quad &= \quad (u_1^{(n)},\ldots,u_\ell^{(n)}), \quad (v^{(n)})^\top = (v_1^{(n)},\ldots,v_P^{(n)}), \quad (\tau^{(n)})^\top = \left(u^{(n)^\top}, v^{(n)})^\top\right)^\top, \\ &\qquad \text{et,} \quad \sup_n[(\tau^{(n)})^\top(\tau^{(n)})] < +\infty.\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, nous posons $r_n = \|\rho_n - \rho_0\|_\ell \quad$ et $\quad r'_n = \|\theta_n - \theta_0\|_p$.
Pour tout entier i, le résidu ϵ_i est donné par :

$$\epsilon_i \quad = \quad \frac{Y_i - m\,(\rho_0\,,\,Z_i)}{\sigma\,(\theta_0\,,\,Z_i)}. \tag{3.9}$$

En remplaçant dans (3.9) ρ_0 et θ_0 respectivement par ρ_n et θ_n, nous obtenons la version estimée du résidu $\tilde{\epsilon}_{i,n}$:

$$\tilde{\epsilon}_{i,n} = \frac{Y_i - m\left(\rho_0 + n^{-\frac{1}{2}} u^{(n)}\,,\, Z_i\right)}{\sigma\left(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i\right)}. \tag{3.10}$$

Posons :

$$r_{f,h,n}\left(\rho_0, \theta_0\right) = -n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} h M_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma\left(\theta_0, Z_i\right)}, \tag{3.11}$$

$$q_{f,h',n}\left(\rho_0, \theta_0\right) = -n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} h'(1 + \epsilon_i M_f(\epsilon_i)) \frac{S(Z_i)}{\sigma\left(\theta_0, Z_i\right)}. \tag{3.12}$$

Clairement, nous avons :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}\left(\rho_0, \theta_0\right) = r_{f,h,n}\left(\rho_0, \theta_0\right) + q_{f,h',n}\left(\rho_0, \theta_0\right). \tag{3.13}$$

En remplaçant dans (3.12) ϵ_i et θ_0 respectivement par $\tilde{\epsilon}_{i,n}$ et θ_n, nous obtenons les égalités suivantes :

$$r_{f,h,n}(\rho_n, \theta_n) = -n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} h M_f(\tilde{\epsilon}_{i,n}) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)}, \tag{3.14}$$

$$q_{f,h',n}(\rho_n, \theta_n) = -n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} h'(1 + \tilde{\epsilon}_{i,n} M_f(\tilde{\epsilon}_{i,n})) \frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)}, \tag{3.15}$$

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_n, \theta_n) = r_{f,h,n}(\rho_n, \theta_n) + q_{f,h',n}(\rho_n, \theta_n). \tag{3.16}$$

Dans le but d'obtenir un lien explicite entre la suite centrale et sa version estimée, nous imposons quelques conditions supplémentaires. Cela est présenté au paragraphe qui va suivre.

3.2.3 Conditions supplémentaires

Tout au long de notre travail, pour une fonction donnée g, nous notons par $\ddot{g}$ sa dérivée seconde. Nous supposons que les conditions $(A_1) - (A_3)$ sont satisfaites, et pour tout x, les fonctions $\rho \to m(\rho, x)$ et $\theta \to \sigma(\theta, x)$ sont deux fois différentiables. Nous notons par :

$$\partial m(\rho, \cdot)^\top = \left(\frac{\partial m(\rho, \cdot)}{\partial \rho_1}, \ldots, \frac{\partial m(\rho, \cdot)}{\partial \rho_\ell}\right), \qquad \partial \sigma(\theta, \cdot)^\top = \left(\frac{\partial \sigma(\theta, \cdot)}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma(\theta, \cdot)}{\partial \theta_P}\right),$$

$$\partial^2 m(\rho, \cdot) = \left(\frac{\partial^2 m(\rho, \cdot)}{\partial \rho_i \partial \rho_j}\right)_{1 \le i,j \le \ell}, \qquad \partial^2 \sigma(\theta, \cdot) = \left(\frac{\partial^2 \sigma(\theta, \cdot)}{\partial \theta_i \partial_j}\right)_{1 \le i,j \le p}.$$

$\partial^2 m(\rho, \cdot)$ et $\partial^2 \sigma(\theta, \cdot)$ désignent respectivement les Hessiennes de $m(\rho, \cdot)$ en ρ et $\sigma(\theta, \cdot)$ en θ. Nous définissons la fonction N_f par $\quad N_f : x \longmapsto N_f(x) = 1 + x\, M_f(x)$.

Comme la fonction f est trois fois dérivable, après un calcul simple, on a :

$$\dot{N}_f(x) = M_f(x) + x\,\dot{M}_f(x), \quad \text{et} \quad \ddot{N}_f(x) = 2\,\dot{M}_f(x) + x\,\ddot{M}_f(x). \tag{3.17}$$

Nous supposons de plus que la fonction $x \longmapsto \ddot{N}_f(x)$ est bornée, et nous imposons la condition supplémentaire suivante :

(A_4) :

$(A_{4.1})$: Pour tout $n \geq 1$, il existe deux boules fermées $\overline{B}_{1,n} = \overline{B}_{1,n}\Big(\rho_0, r_{1,n}\Big) \subset int(\Theta_1)$, $\overline{B}_{2,n} = \overline{B}_{2,n}(\theta_0, r_{2,n}) \subset int(\Theta_2)$ avec $r_{1,n} \geq r_n$ et $r_{2,n} \geq r'_n$, et une fonction positive $N_{1,n}$ avec $E\Big(\sup_{n\geq 1} N_{1,n}(Z_0)\Big)^{\mu+2} < \infty$, $\mu > 0$, tels que pour tout x, on a :

$$\max\Big(\sup_{(\rho,\,\theta)\in\overline{B}_{1,n}\times\overline{B}_{2,n}} \frac{\max_{1\leq i\leq \ell}|\frac{\partial\, m(\rho,x)}{\partial\rho_i}|}{\sigma(\theta,x)}, \sup_{(u,\theta)\in\overline{B}_{2,n}\times\overline{B}_{2,n}} \frac{\max_{1\leq j\leq p}|\frac{\partial\,\sigma(u,x)}{\partial\theta_j}|}{\sigma(\theta,x)}\Big) \leq N_{1,n}(x).$$

$(A_{4.2})$: Pour $n \geq 1$, il existe deux boules fermées $\overline{B'}_{1,n} = \overline{B'}_{1,n}\Big(\rho_0, r'_{1,n}\Big) \subset int(\Theta_1)$, $\overline{B'_{2,n}} = \overline{B'}_{2,n}(\theta_0, r'_{2,,n}) \subset int(\Theta_2)$ avec $r'_{1,n} \geq r_n$ et $r'_{2,n} \geq r'_n$, et une fonction positive $N_{2,n}$, avec $E\Big(\sup_{n\geq 1} N_{2,n}(Z_0)\Big)^{\mu'+3} < \infty$, $\mu' > 0$, tels que pour tout x on a :

$$\max\Big(\sup_{(\rho,\,\theta)\in\overline{B'}_{1,n}\times\overline{B'}_{2,n}} \frac{\max_{1\leq i\leq \ell}|\frac{\partial\, m(\rho,x)}{\partial\rho_i}|}{\sigma(\theta,x)}, \sup_{(u,\theta)\in\overline{B'}_{2,n}\times\overline{B'}_{2,n}} \frac{\max_{1\leq j\leq p}|\frac{\partial\,\sigma(u,x)}{\partial\theta_j}|}{\sigma(\theta,x)}\Big) \leq N_{2,n}(x).$$

$(A_{4.3})$: Pour tout $n \geq 1$, il existe deux boules fermées $\overline{B^{(3)}_{1,n}} = \overline{B^{(3)}}_{1,n}\Big(\rho_0, r^{(3)}_{1,n}\Big) \subset int(\Theta_1)$, $\overline{B^{(3)}}_{2,n} = \overline{B^{(3)}}_{2,n}(\theta_0, r^{(3)}_{2,n}) \subset int(\Theta_2)$ avec $r^{(3)}_{1,n} \geq r_n$ et $r^{(3)}_{2,n} \geq r'_n$, et une fonction positive $N_{3,n}$ avec $E\Big(\sup_{n\geq 1} N_{3,n}(Z_0)\Big)^{\mu_3+1} < \infty$ et $\mu_3 > 0$, tels que pour tout x on a :

$$\max\Big(\sup_{(\rho,\theta)\in\overline{B^{(3)}}_{1,n}\times\overline{B^{(3)}}_{3,n}} \frac{\max_{1\leq i\leq \ell}|\frac{\partial\, m(\rho,x)}{\partial\rho_i}|}{\sigma(\theta,x)}, \sup_{(u,\theta)\in\overline{B^{(3)}}_{2,n}\times\overline{B^{(3)}}_{2,n}} \frac{\max_{1\leq j\leq p}|\frac{\partial\sigma(u,x)}{\partial\theta_j}|}{\sigma(\theta,x)}\Big) \leq N_{3,n}(x).$$

$(A_{4.4})$: Pour tout $n \geq 1$, il existe deux boules fermées $\overline{B^{(4)}}_{1,n} = \overline{B^{(4)}}_{1,n}\Big(\rho_0, r^{(4)}_{1,n}\Big) \subset int(\Theta_1)$, $\overline{B^{(4)}}_{2,n} = \overline{B^{(4)}}_{2,n}(\theta_0, r^{(4)}_{2,n}) \subset int(\Theta_2)$ avec $r^{(4)}_{1,n} \geq r_n$ et $r^{(4)}_{2,n} \geq r'_n$, et une fonction positive $N_{4,n}$ avec $E\Big(\sup_{n\geq 1} N_{4,n}(Z_0)^{\mu_4+1}\Big) < \infty$ avec $\mu_4 > 0$, tels que pour tout x on a :

$$\max\Big(\sup_{(\rho,\theta)\in\overline{B^{(4)}}_{1,n}\times\overline{B^{(4)}}_{2,n}} \frac{\max_{1\leq i,j\leq \ell}|\frac{\partial^2\, m(\rho,x)}{\partial\rho_i\partial\rho_j}|}{\sigma(\theta,x)}, \sup_{(u,\theta)\in\overline{B^{(4)}}_{2,n}\times\overline{B^{(4)}}_{2,n}} \frac{\max_{1\leq k,l\leq p}|\frac{\partial^2\sigma(u,x)}{\partial\theta_k\partial_l}|}{\sigma(\theta,x)}\Big) \leq N_{4,n}(x).$$

Remarque 3.2. *Une large famille de distributions vérifie cette condition "$\ddot{M}_f$* est bornée*". C'est le cas quand la fonction f est la densité d'une loi Gaussienne standard ou d'une loi*

de Student de degré de liberté supérieur à 3. Par exemple pour la loi normale centrée réduite $\dot{M}_f(x) = -1$ *et* $|\ddot{M}_f(x)| = 0$.
Pour la loi de Student de degré de liberté supérieur ou égale à 3*, on peut facilement vérifier que les fonctions* $x \longmapsto \dot{M}_f(x)$, $x \mapsto \ddot{M}_f(x)$ *et* $x \mapsto x\ddot{M}_f(x)$ *sont bornées. Pour plus de détails sur les calculs voir l'annexe.*

Estimateurs asymptotiquement discrets

Les estimateurs asymptotiquement discrets ont été introduits pour la première fois par Le Cam (1960). Ils sont largement utilisés dans Bickel (1982), Benghabrit et Hallin (1992), Linton (1993), Benghabrit et Hallin (1996); Benghabrit et Hallin (1998) et Cassart et al (2008). Le grand avantage de ces estimateurs réside dans l'application du lemme 4.4 de Kreiss (1987).
Nous introduisons les estimateurs discrets $\hat{\rho}_n$ et $\hat{\theta}_n$ respectivement de ρ_0 et θ_0. Ils vérifient les conditions suivantes :

- (D_1) $\hat{\rho}_n$ *est* $\sqrt{n}$*- consistant, i.e pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\eta_1(\rho_0, \epsilon)$ *et* $n_1(\rho_0, \epsilon)$ *tel que sous* H_0, $\forall n \geq n_1(\rho_0, \epsilon)$, $\mathbf{P}(\sqrt{n}\|\hat{\rho}_n - \rho_0\|_\ell > \eta_1) \leq \epsilon$.
  $\hat{\theta}_n$ *est* $\sqrt{n}$*- consistant, i.e., pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\eta_2(\theta_0, \epsilon)$ *et* $n_2(\theta_0, \epsilon)$ *tels que sous* H_0, *:* $\forall n \geq n_2(\theta_0, \epsilon)$, $\mathbf{P}(\sqrt{n}\|\hat{\theta}_n - \theta_0\|_p > \eta_2) \leq \epsilon$.

- (D_2) $\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n$ sont localement discrets, i.e pour toutes valeurs fixées $c > 0$ et sous H_0 et quand $n \to +\infty$, les nombres possibles de valeurs de $\hat{\rho}_n$ dans $B_1 = \{u \in \mathbf{R}^\ell, \sqrt{n}\|u - \rho_0\|_\ell \leq c\}$, et de $\hat{\theta}_n$ dans $B_2 = \{v \in \mathbf{R}^p, \sqrt{n}\|v - \theta_0\|_p \leq c\}$ sont finis.

Notons que la condition (D_1) concerne la vitesse de convergence en probabilité appropriée aux estimateurs. Cette condition est satisfaite par plusieurs estimateurs tels que l'estimateur du maximum de vraisemblance, les M-estimateurs et les estimateurs Yule-Walker.
Maintenant, nous présentons nos principaux résultats au paragraphe qui va suivre.

Principaux résultats

Nous commençons d'abord par énoncer notre proposition fondamentale représentant le noyau de la preuve de l'optimalité. On a :

Proposition 3.1. *Supposons que les conditions* $(A_1) - (A_4)$ *sont vérifiées. Alors*

$$\begin{aligned} r_{f,h,n}(\rho_n,\theta_n) - r_{f,h,n}(\rho_0,\theta_0) &= h\,(u^{(n)})^\top K^\top + h\,(v^{(n)})^\top J^\top + o_P(1), && (3.18)\\ q_{f,h',n}(\rho_n,\theta_n) - q_{f,h',n}(\rho_0,\theta_0) &= h'\,(u^{(n)})^\top K'^\top + h'\,(v^{(n)})^\top J'^\top + o_P(1), && (3.19)\\ \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_n,\theta_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0) &= (u^{(n)})^\top(h\,K^\top + h'\,K'^\top) + (v^{(n)})^\top(h\,J^\top + h'\,J'^\top) \\ &\quad + o_P(1). && (3.20) \end{aligned}$$

$K^\top = (K_1,\ldots,K_\ell), \qquad K'^\top = (K'_1,\ldots,K'_\ell)$,

$$\begin{aligned} K_j &= \mathbf{E}\left[\frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\,Z_0)}{\partial\,\rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\frac{\dot{M}_f(\epsilon_0)\,G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\right] && (3.21)\\ K'_j &= \mathbf{E}\left[\frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\,Z_0)}{\partial\,\rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\frac{\dot{N}_f(\epsilon_0)\,S(Z_0)}{\sigma(\theta_0,\,Z_0)}\right] && (3.22) \end{aligned}$$

$J^\top = (J_1,\ldots,J_P)\,, \qquad J'^\top = (J'_1,\ldots,J'_P)\,,$

$$\begin{aligned} J_k &= \mathbf{E}\left[\frac{\frac{\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_0)}{\partial\,\theta_k}}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\frac{\epsilon_0\dot{M}_f(\epsilon_0)\,G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\right], && (3.23)\\ J'_k &= \mathbf{E}\left[\frac{\frac{\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_0)}{\partial\,\theta_k}}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\frac{\epsilon_0\dot{N}_f(\epsilon_0)\,S(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\right] && (3.24) \end{aligned}$$

$(j,k) \in \{1,\ldots,\ell\}\times\{1,\ldots,p\}.$

Remarque 3.3. *La condition "*$\ddot{N}_f$ est bornée*" est vérifiée par une classe assez large de fonctions de densités. En combinant la remarque (3.2) et l'égalité (3.17), nous pouvons conclure que quand* f *est la fonction de densité d'une loi Gaussienne standard, on a* $|\ddot{N}_f(\epsilon_0)| = 2$*, et quand* f *est la fonction densité d'une Student de degré de liberté supérieur à* 3*, la fonction* $\ddot{N}_f$ *est bornée (voir annexe).*

Sous les conditions (D_1)-(D_2), et celles de la proposition 3.1, nous déduisons après utilisation des estimateurs discrets que :

Proposition 3.2. *Supposons que* (D_1) - (D_2) *et* $(A_1) - (A_4)$ *sont vérifiées. Alors,*

$$\begin{aligned} r_{f,h,n}(\hat{\rho},\hat{\theta_n}) - r_{f,h,n}(\rho_0,\theta_0) &= \sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\rho_0)^\top h\,K^\top + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)^\top h\,J^\top + o_P(1),\\ q_{f,h',n}(\hat{\rho},\hat{\theta_n}) - q_{f,h',n}(\rho_0,\theta_0) &= \sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\rho_0)^\top h'\,K'^\top + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)^\top h'\,J'^\top + o_P(1),\\ \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho},\hat{\theta_n}) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0) &= \sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\rho_0)^\top(h\,K^\top + h'\,K'^\top)\\ &\quad + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)^\top(h\,J^\top + h'\,J'^\top) + o_P(1). \qquad (3.25) \end{aligned}$$

Notons que ce dernier résultat est un outil fondamental pour la preuve de l'optimalité du

test considéré.

Considèrons à nouveau les égalités (3.25). Nous constatons que :
$\left(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n\right) = \left(\rho_0 + n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho_0)\,,\, \theta_0 + n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)\right)$, avec une probabilité proche de 1, (D_1) entraine l'inégalité suivante :

$$\sup_n \left\{ \left(\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho_0)\,,\, \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)\right)^\top \left(\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho_0)\,,\, \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)\right) < +\infty.$$

Étant donné que $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho_0) = O_P(1)$ et $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = O_P(1)$, nous concluons que pour le cas particulier $K = K' = J = J = 0$, les suites centrales $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n)$ et $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0)$ sont équivalentes. En général Les égalités $K = K' = J = J = 0$ ne sont pas toujours satisfaites. Donc l'optimalité du test n'est pas obtenue.
Dans le but de résoudre ce problème, nous appliquons les résultats de Lounis (2014). Plus précisément, nous établissons dans un premier temps l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée. Par la suite nous définissons un autre estimateur absorbant l'erreur qui affecte la puissance du test. Enfin nous déduisons l'optimalité asymptotique locale de notre test.

Test optimal

Pour achever la preuve de l'optimalité, nous avons besoin de prouver le résultat technique suivant :

Proposition 3.3. *Supposons que les conditions* $(A_1) - (A_4)$ *et* $(D_1) - (D_2)$ *sont satisfaites. Alors,*

- *(i)* $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) = \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) + o_P(1).$
- *(ii)* $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^\top)(h\,J^\top + h'\,J'^\top) = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\,J^\top + h'\,J'^\top) + o_P(1),$

avec, $N = [1 + n^{\mu+1}]$ *et* $\mu > 0$.

Cette derniére proposition entraine l'énoncé suivant :

.

Proposition 3.4. *Supposons que les conditions* $(A_1) - (A_4)$ *et* $(D_1) - (D_2)$ *sont satisfaites. Alors :*

- $$\begin{aligned} \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0) &= \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) \\ &+ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\,J^\top + h'\,J'^\top) \quad + o_P(1). \end{aligned}$$

Étant donné que K, K', J et J' sont inconnues, alors
$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\, K^\top + h'\, K'^\top) + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\, J^\top + h'\, J'^\top)$ est aussi inconnue. En vue de résoudre ce problème, nous imposons la condition supplémentaire suivante :

$(E.1)$: Pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,\ell\} \times \{1,\ldots,p\}$, $K_i - \hat{K}_{N,i} \longrightarrow 0$, $K'_i - \hat{K'}_{N,i} \longrightarrow 0$, $J_j - \hat{J}_{N,j} \longrightarrow 0$, $J'_j - \hat{J'}_{N,j} \longrightarrow 0$ quand n $\longrightarrow \infty$, où, $\hat{K}_{N,i}$, $\hat{K'}_{N,i}$, $\hat{J}_{N,j}$ et $\hat{J'}_{N,j}$ respectivement sont obtenus à partir de K, K', J et J' en remplaçant (ρ_0, θ_0) par $(\hat{\rho_N}, \hat{\theta_N})$.

Remarque 3.4. *Sous $(E.1)$, la proposition 3.4 donne à un terme $o_P(1)$ près, l'équivalence entre des quantités inconnues et des quantités connues. Dans le cas où $(\hat{\rho}_N, \hat{\theta}_N)$ converge presque sûrement vers (ρ_0, θ_0), $(E.1)$ est vérifiée. Notons qu'une large classe des modèles de séries chronologiques satisfait à $(E.1)$. C'est le cas des modèles $AR(m)$ pour lesquels, il faut juste utiliser les égalités (3.22) et (3.24).*

Proposition 3.5. *Supposons que les conditions $(A_1)-(A_4)$, $(D_1)-(D_2)$ et $(E.1)$ sont satisfaites. Alors :*

$$\bullet\ \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0) = \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\, \hat{K_N}^\top + h'\, \hat{K_N}'^\top) + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\, \hat{J_N}^\top + h'\, \hat{J_N}'^\top) + o_P(1). \tag{3.26}$$

Étant donné que $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\, \hat{K_N}^\top + h'\, \hat{K_N}'^\top) + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\, \hat{J_N}^\top + h'\, \hat{J_N}'^\top)$ est connue, nous énonçons dans ce qui suit le résultat désiré.

Proposition 3.6. *(**Équivalence entre les suites centrales**) Supposons que les conditions $(A_1)-(A_4)$, $(D_1)-(D_2)$ et $(E.1)$ sont satisfaites. Alors, il existe un estimateur consistant $(\bar{\rho}_n, \bar{\theta}_n)$ de (ρ_0, θ_0) tel que :*

$$\bullet\ \mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\rho}_n, \bar{\theta}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0) = o_P(1).$$

nous obtenons notre résultat principal énoncé comme suit :

Théorème 3.3. *(**Optimalité**) Supposons que les conditions $(A_1)-(A_4)$, $(D_1)-(D_2)$ et $(E.1)$ sont satisfaites. Alors, la puissance locale asymptotique du test basé sur $\bar{T}_n = T_n(\bar{\rho}_n, \bar{\theta}_n)$ sous H_1^n est $1 - \Phi\left(Z_{1-u} - \tau_{h,h'}\right)$. Le test $\bar{T}_n$ est localement asymptotiquement optimal.*

3.3 Généralization dans Z

Nos résultats sont établis quand l'indice i est dans $\mathbf{N}$. Faisons maintenant une extension quand l'indice de la série chronologique est dans $\mathbf{Z}$.
Considérons les variables aléatoires $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ et ε, telles que, pour tout $i \in \mathbf{Z}^-$, nous avons :

$$\mathcal{Y}_{-i} = Y_i \quad , \quad \mathcal{Z}_{-i} = Z_i, \quad \text{et} \quad \varepsilon_{-i} = \epsilon_i.$$

Clairement, $i' = -i \in \mathbf{N}$, alors, nous obtenons :

$$\mathcal{Y}_{i'} = T(\mathcal{Z}_{i'}) + V(\mathcal{Z}_{i'})\varepsilon_{i'}, \quad \text{avec,} \quad i' \in \mathbf{N}.$$

Le dernier modèle est similaire à (3.1), ce qui nous permet de construire un test $T'_{n,h,h'}$, avec :

$$\begin{aligned}
T'_{n,h,h'} &= I_{\left\{\frac{\mathcal{V}'_{n,h,h'}}{\tau'_{h,h'}} \geq Z(u)\right\}}, \\
\tau'^2_{h,h'} &= h^2 I'_0 \mathbf{E}\left(\frac{G(\mathcal{Z}_0)}{\sigma(\theta_0, \mathcal{Z}0)}\right)^2 + h'^2(I'_2 - 1)\mathbf{E}\left(\frac{S(\mathcal{Z}_0)}{\sigma(\theta_0, \mathcal{Z}_0)}\right)^2 + 2hh'(I'_1)\mathbf{E}\left(\frac{G(\mathcal{Z}_0)S(\mathcal{Z}_0)}{\sigma(\theta_0, \mathcal{Z}_0)}\right), \\
U'_{n,i',h,h'} &= -n^{-\frac{1}{2}}\left\{hM_f(\varepsilon_{i'})\frac{G(\mathcal{Z}_{i'})}{\sigma(\theta_0, \mathcal{Z}'_i)} + h'(M_f(\varepsilon_{i'})\varepsilon_{i'} + 1)\frac{S(\mathcal{Z}_{i'})}{\sigma(\theta_0, \mathcal{Z}_{i'})}\right\}, \\
I'_j &= \mathbf{E}\left({\varepsilon_{i'}}^j M_f^2(\varepsilon_{i'})\right) \quad , \quad j \in \{0, 1, 2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}'_{n,h,h'} = \sum_{i'=1}^{n} U'_{n,i',h,h'}.
\end{aligned}$$

3.4 Simulations

Pour l'évaluation de la performance de notre méthodologie, nous effectuons des simulations. Nous considérons le problème du test 3.4 correspondant au modèle autoregressif $AR(2)$. Dans ce cas, les deux fonctions G et B sont définies par $G : x \longrightarrow \frac{a}{1+x^2}$ et
$B : x \longrightarrow \frac{a}{1+x^2}$, où $a \in [0; 3]$. Nous fixons les paramètres h et h' à 1, (ρ_1, ρ_2) à $(0.5, 0.4)$, le paramètre positif μ à 0.05, et la taille de l'échantillon à $n = 40, 50, 60, 70, 80, 90$ correspondant à $N = 49, 61, 74, 87, 100, 113$. $(\rho_{n,1}, \rho_{n,2})$ désigne l'estimateur des moindres carrés $(E.M.C.)$ de (ρ_1, ρ_2), et $(\hat{\rho}_{n,1}, \hat{\rho}_{n,2})$ sa forme discrétisée $(E.M.C.D.)$. L'estimateur corrigé $(\bar{\rho}_{n,1}, \hat{\rho}_{n,2})$ est obtenu en perturbant la première composante de $E.M.C.D.$ avec

$$\bar{\rho}_{n,1} = \hat{\rho}_{n,1} + p_n$$

et

$$p_n = \left[1/\frac{\partial \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_{n,1}, \hat{\rho}_{n,2})}{\sqrt{n}\partial\rho_{n,1}}\right] \times \left[-(\hat{\rho}_{n,1} - \hat{\rho}_{N,1}) \times h\,\hat{K}_{N,1} + (\hat{\rho}_{n,2} - \hat{\rho}_{N,2}) \times h'\,\hat{K'}_{N,2}\right].$$

Notons que sous H_0 le résidu ϵ_i est donné par :

$$\epsilon_i = Y_i - \rho_1 Y_{i-1} - \rho_2 Y_{i-2}, \tag{3.27}$$

et estimé par les suites aléatoires $(\hat{\epsilon}_{n,i})$ et $(\bar{\epsilon}_{n,i})$ telles que :

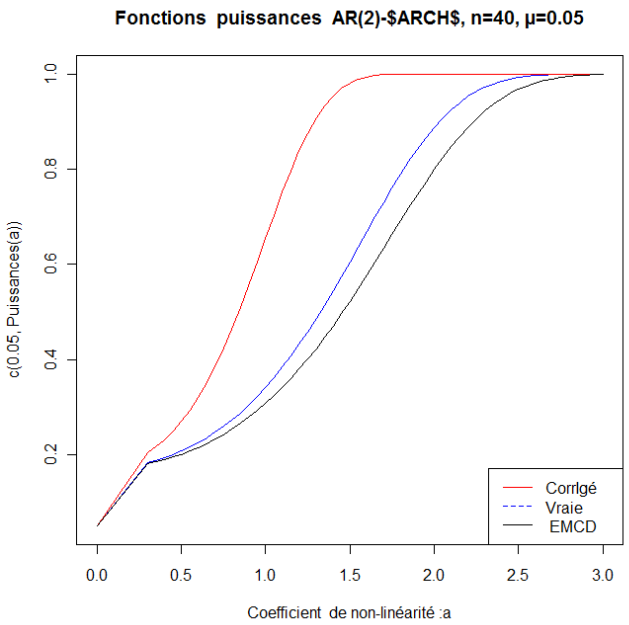
$$\hat{\epsilon}_{n,i} = Y_i - \hat{\rho}_{n,1} Y_{i-1} - \hat{\rho}_{n,2} Y_{i-2}. \tag{3.28}$$

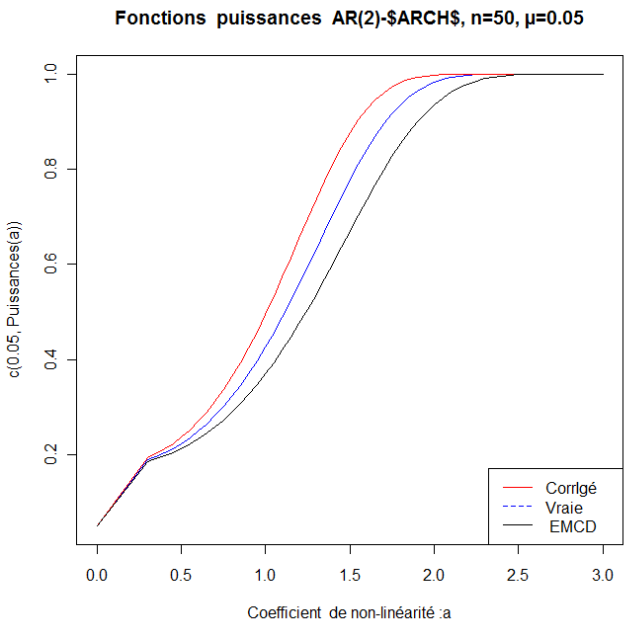
$$\bar{\epsilon}_{n,i} = Y_i - \bar{\rho}_{n,1} Y_{i-1} - \hat{\rho}_{n,2} Y_{i-2}. \tag{3.29}$$

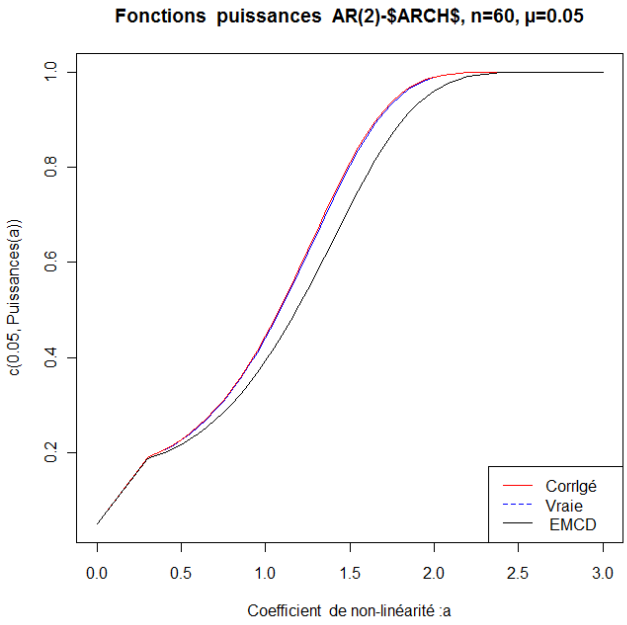
Le niveau du test est fixé à 0.05. Le remplacement dans l'expression de la statistique du test 2.9 de ϵ_i et (ρ_0, θ_0) respectivement par $\bar{\epsilon}_{n,i}$ et $(\bar{\rho}_{n,1}, \hat{\rho}_{n,2})$ donne la version estimée du test $\bar{T} = T_{n,h,h'}(\bar{\rho}_{n,1}, \hat{\rho}_{n,2})$.

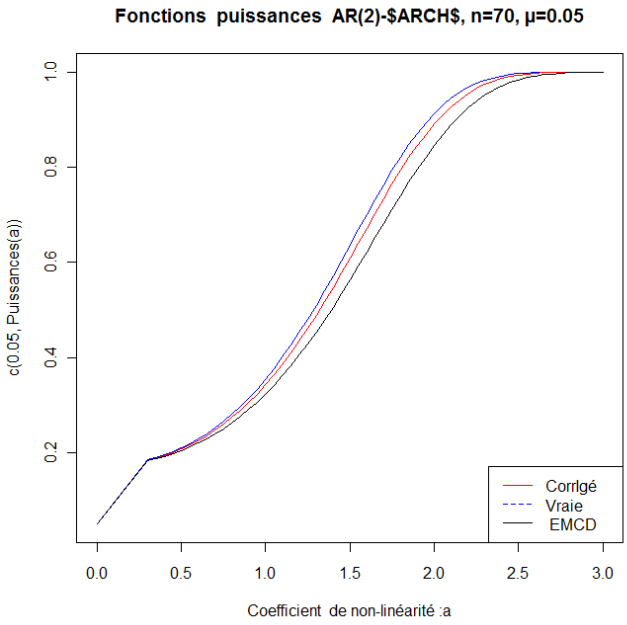
Nous représentons simultanément en fonction du coefficient de non-linárité a, les puissances (théoriques) du test, avec la vraie valeur du paramètre, avec $E.M.C.D.$, et avec l'estimateur corrigé. Ces simulations sont effectuées avec 1500 réplications. Nous constatons que quand n est assez grand, les représentations graphiques des puissances avec le vrai paramètre, et l'estimateur corrigé sont proches l'une de l'autre.

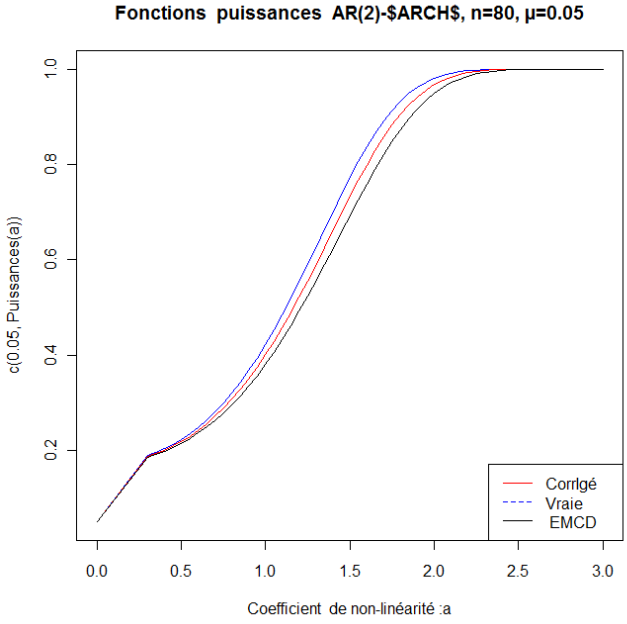
Simulations : $AR(1)$-$ARCH$. $(\mu = 0.05)$.

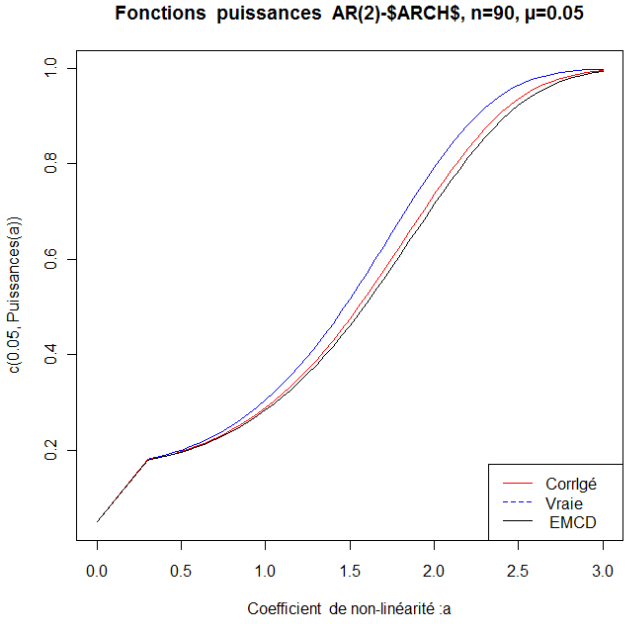





Fonctions puissances AR(2)-$ARCH$, n=60, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrlgé
Vraie
EMCD


Fonctions puissances AR(2)-$ARCH$, n=70, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrlgé
Vraie
EMCD


Fonctions puissances AR(2)-$ARCH$, n=80, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrlgé
Vraie
EMCD


Fonctions puissances AR(2)-$ARCH$, n=90, μ=0.05
c(0.05, Puissances(a))
Coefficient de non-linéarité :a
Corrlgé
Vraie
EMCD

3.5 Preuves des résultats

Dans toute cette partie, nous supposons que (h, h') *appartient au compact* $K_1 \times K_2$, *avec* $hh' \neq 0$. *La notation* $o_P(1)$ *désigne une variable aléatoire convergente en probabilité vers* 0. Pour certaines démonstrations, nous avons besoin d'utiliser cette inégalité bien connue :

Lemme 3.1.

$$(a+b)^{\xi} \leq 2^{\xi-1}(a^{\xi}+b^{\xi}),$$

avec $a > 0,\ b > 0$ *et* $\xi > 2$.

3.5.1 Preuve du lemme 3.1

La fonction $d : x \longmapsto x^{\xi}$ est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$. Comme la dérivée seconde $\ddot{d} : \xi(\xi-1)x^{\xi-2}$ est positive sur $\mathbf{R}^+$, alors $d : x \longmapsto x^{\xi}$ est une fonction convexe sur $\mathbf{R}^+$. Nous déduisons que :
$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ et $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in [0,1] \times [0,1]$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a :
$(\lambda_1 a + \lambda_2 b)^{\xi} \leq \lambda_1 a^{\xi} + \lambda_2 b^{\xi}$. En choisissant $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, nous obtenons l'inégalité.

3.5.2 Preuve du théorème 3.1

Nous vérifions les trois conditions $(C.1)$, $(C.2)$ et $(C.3)$ du théorème 1 de Hwang et Basawa (2001). Sous H_0, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$|g_{n,i,h,h'} - 1| = \left| \frac{f_{n,h,h'}(Y_i)}{f_0(Y_i)} - 1 \right| = \left| \frac{f\left(\frac{\epsilon_i - \alpha_{n,i,h}}{\beta_{n,i,h'}}\right)}{f(\epsilon_i)} - 1 \right| = \left| \frac{f\left(\frac{\epsilon_i - \alpha_{n,i,h}}{\beta_{n,i,h'}}\right) - f(\epsilon_i)}{f(\epsilon_i)} \right|,$$

où,

$$\alpha_{n,i,h} = h\, n^{-\frac{1}{2}} \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}, \quad \text{et} \quad \beta_{n,i,h'} = 1 + h'\, n^{-\frac{1}{2}} \frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}.$$

Observons que :

$$|g_{n,i,h,h'} - 1| \quad = \quad |F(\epsilon_i; \alpha_{n,i,h}, \beta_{n,i,h'}) - F(\epsilon_i; 0, 1)| \left| \frac{1}{f(\epsilon_i)} \right|.$$

En effectuant un développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction $F(\epsilon_i\ ; \cdot, \cdot)$ au voisinage de $(0,1)$, nous obtenons :

$$|g_{n,i,h,h'} - 1\,| \quad = \quad \frac{\partial F(\epsilon_i;\ 0,1)}{f(\epsilon_i)\,\partial a}\,\alpha_{n,i,h} + \frac{\partial F(\epsilon_i;\ 0,1)}{f(\epsilon_i)\,\partial b}\,(\beta_{n,i,h'} - 1) + \frac{R_{n,i,h,h'}}{f(\epsilon_i)},$$

(3.31)

et

$$R_{n,i,h,h'} \quad = \quad \frac{1}{2}\,(\alpha_{n,i,h}, \beta_{n,i,h'} - 1)\,\partial^2 A_{n,i,h,h'}(\epsilon_i; \alpha^\star_{n,i,h}, \beta^\star_{n,i,h'})\,(\alpha_{n,i,h}, \beta_{n,i,h'} - 1)^\top,$$

où $\left(\alpha^\star_{n,i,h}, \beta^\star_{n,i,h'}\right) \in [0; \alpha_{n,i,h}] \times [1; \beta_{n,i,h'}]$, et $\partial^2 A_{n,i,h,h'}\left(\cdot\,; \alpha^\star_{n,i,h}, \beta^\star_{n,i,h'}\right)$ est la matrice Hessienne de F en $\left(\cdot\,; \alpha^\star_{n,i,h}, \beta^\star_{n,i,h'}\right)$.

Posons :

$$U_{n,i,h,h'} = \frac{\partial F(\epsilon_i;\ 0,1)}{f(\epsilon_i)\,\partial a}\,\alpha_{n,i,h} \quad + \frac{\partial F(\epsilon_i;\ 0,1)}{f(\epsilon_i)\,\partial b}\,(\beta_{n,i,h'} - 1) \ \text{ et } \ R^*_{n,i,h,h'} = \frac{R_{n,i,h,h'}}{f(\epsilon_i)}.$$

Après calcul, il vient :

$$\frac{\partial F(\epsilon_i;\ 0,1)}{\partial a} = -\dot{f}(\epsilon_i), \quad \text{ et } \quad \frac{\partial F(\epsilon_i;\ 0,1)}{\partial b} = -\Big(f(\epsilon_i) + \epsilon_i\,\dot{f}(\epsilon_i)\Big).$$

On obtient alors :

$$U_{n,i,h,h'} \quad = \quad -n^{-\frac{1}{2}}\left\{hM_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} + h'\,(M_f(\epsilon_i)\epsilon_i + 1)\,\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\right\}. \tag{3.32}$$

On a :

$$g_{n,i,h,h'} - 1 = U_{n,i,h,h'} + R^*_{n,i,h,h'}.$$

De $(A_{1.1})$, il existe $p > 1$, une constante positive ς avec $\varsigma > \max\Big(|\alpha^\star_{n,i,h}|, |\beta^\star_{n,i,h'} - 1|\Big)$, et une fonction mesurable et positive φ avec $\mathbf{E}(\varphi^p(\epsilon_0)) < +\infty$ tels que :

$$\begin{aligned}
\left|R^*_{n,i,h,h'}\right| &\leq \frac{1}{2}\left\{\alpha^2_{n,i,h} + (\beta_{n,i,h} - 1)^2 + 2\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h} - 1)\right\}\varphi(\epsilon_i) \\
&\leq \frac{1}{2}\left\{[\alpha_{n,i,h} + (\beta_{n,i,h} - 1)]^2\,\varphi(\epsilon_i)\right\} \\
&\leq \frac{1}{2n}\left\{\frac{h\,G(Z_i) + h'S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\right\}^2 \varphi(\epsilon_i) \\
&\leq \frac{\delta}{n}\left\{\frac{G(Z_i) + S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\right\}^2 \varphi(\epsilon_i),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

avec $\delta = \max\left({\delta_1}^2, {\delta_2}^2\right)$, et δ_1 et δ_2 désignent respectivement les diamètres des compacts K_1 et K_2.

Soit $\nu > 1$. D'après l'inégalité de Markov, on obtient pour tout $\gamma > 0$:

$$\mathbf{P}\left(|R^*_{n,i,h,h'}| > \gamma\right) \quad = \quad \mathbf{P}\left(|R^*_{n,i,h,h'}|^\nu > \gamma^\nu\right) \leq \frac{1}{\gamma^\nu}\,\mathbf{E}|R^*_{n,i,h,h'}|^\nu.$$

En utilisant l'inégalité (3.33), il vient :

$$\mathbf{P}\left(|R^*_{n,i,h,h'}| > \gamma\right) \leq \frac{1}{\gamma^\nu}\frac{\delta^\nu}{n^\nu}\mathbf{E}\left\{\Big[\frac{G(Z_i) + S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\Big]^{2\nu}\varphi^\nu(\epsilon_i)\right\}.$$

En appliquant le lemme 3.1, on trouve :

$$\begin{aligned}\left(\frac{G(Z_i) + S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\right)^{2\nu} &\leq \left(\frac{|G(Z_i)| + |S(Z_i)|}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\right)^{2\nu} \\ &\leq 2^{2\nu-1}\left\{\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\Big|^{2\nu} + \Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}\Big|^{2\nu}\right\}.\end{aligned}$$

De la stationnarité, on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\Big|R^*_{n,i,h,h'}\Big| > \gamma\Big) &\leq 2^{2\nu-1}\frac{1}{\gamma^\nu}\frac{\delta^\nu}{n^\nu}\Big\{\mathbf{E}\Big|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{2\nu}\mathbf{E}\Big[\varphi^\nu(\epsilon_0)\Big] \\ &+ \mathbf{E}\Big|\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{2\nu}\mathbf{E}\Big[\varphi^\nu(\epsilon_0)\Big]\Big\} \\ &\leq K2^{2\nu-1}\frac{1}{\gamma^\nu}\frac{\delta^\nu}{n^\nu}\left\{\mathbf{E}\Big|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{2\nu} + \mathbf{E}\Big|\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{2\nu}\right\}.\end{aligned}$$

Comme $2\nu > 2$, alors il existe $\lambda > 0$, tel que, $2\nu = \lambda + 2$. Ainsi il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\Big|R^*_{n,i,h,h'}\Big| > \gamma\right) &\leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\Big(\Big|R^*_{n,i,h,h'}\Big| > \gamma\Big) \\ &\leq K2^{2\nu-1}\frac{\delta^\nu}{n^\nu\gamma^\nu}\Big\{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\Big|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{2\nu} \\ &+ \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\Big|\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{2\nu}\Big\} \\ &\leq K2^{\lambda+1}\frac{\delta^{\frac{\lambda}{2}+1}}{n^{\frac{\lambda}{2}}\gamma^{\frac{\lambda}{2}+1}}\ \frac{1}{n}\Big\{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\Big|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{\lambda+2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\Big|\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{\lambda+2}\Big\} \\ &\leq K2^{\lambda+1}\frac{\delta^{\frac{\lambda}{2}+1}}{n^{\frac{\lambda}{2}}\gamma^{\frac{\lambda}{2}+1}}\ \Big\{\mathbf{E}\Big|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{\lambda+2} \\ &+ \mathbf{E}\Big|\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\Big|^{\lambda+2}\Big\}.\end{aligned}$$

À partir de $(A_{3.1})$, on obtient :

$$\mathbf{P}\left(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}|R^*_{n,i,h,h'}|) > \gamma\right) \to 0, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Finalement :

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\Big|R^*_{n,i,h,h'}\Big| = o_P(1). \tag{3.34}$$

Nous montrons maintenant que :

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big|U_{n,i,h,h'}\Big| = o_P(1).$$

On peut déjà remarquer que :

$$\mathbf{P}\left(\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big|U_{n,i,h,h'}\Big| > \gamma\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\Big(\Big|U_{n,i,h,h'}\Big|^{2\nu} > \gamma^{2\nu}\Big).$$

De l'inégalité de Markov, nous avons, pour tout $\gamma > 0$:

$$\mathbf{P}\Big(\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big|U_{n,i,h,h'}\Big| > \gamma\Big) \leq \frac{1}{\gamma^{2\nu}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\Big|U_{n,i,h,h'}\Big|^{2\nu}. \tag{3.35}$$

Nous déduisons à partir du lemme 3.1 que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big|U_{n,i,h,h'}\Big|^{2\nu} &\leq n^{-\nu}\delta^{\nu}2^{2\nu-1}\left\{\mathbf{E}\left(\Big|M_f(\epsilon_i)\Big|^{2\nu}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2\nu}\right)\right.\\ &+ \left.\mathbf{E}\left(\Big|M_f(\epsilon_i)\epsilon_i+1\Big|^{2\nu}\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2\nu}\right)\right.\end{aligned}$$

(3.37)

Ceci combiné avec (3.35) donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\max_{i\in\{1,\dots,n\}}|U_{n,i,h,h'}| > \gamma\right) &\leq \frac{\delta^{\nu}2^{2\nu-1}}{n^{\nu-1}\gamma^{2\nu}}\mathbf{E}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|M_f(\epsilon_i)\Big|^{2\nu}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2\nu}\Big\}\\ &+ \frac{\delta^{\nu}2^{2\nu-1}}{n^{\nu-1}\gamma^{2\nu}}\mathbf{E}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|M_f(\epsilon_i)\epsilon_i+1\Big|^{2\nu}\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2\nu}\Big\}\\ &\leq \frac{\delta^{\frac{\lambda}{2}+1}2^{\lambda+1}}{n^{\frac{\lambda}{2}}\gamma^{\lambda+2}}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\Big|M_f(\epsilon_i)\Big|^{\lambda+2}\mathbf{E}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{\lambda+2}\Big\}\\ &+ \frac{\delta^{\frac{\lambda}{2}+1}2^{\lambda+1}}{n^{\frac{\lambda}{2}}\gamma^{\lambda+2}}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\Big|M_f(\epsilon_i)\epsilon_i+1\Big|^{\lambda+2}\mathbf{E}\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{\lambda+2}\Big\}.\end{aligned}$$

De (3.1) nous pouvons écrire

$$\Big|M_f(\epsilon_i)\epsilon_i+1\Big|^{\lambda+2} \leq 2^{\lambda+1}\Big|M_f(\epsilon_i)\epsilon_i\Big|^{\lambda+2} + 2^{\lambda+1}. \tag{3.38}$$

À partir de $(A_{3.1})$, $(A_{3.2})$ et la stationnarité, il vient :

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big|U_{n,i,h,h'}\Big| = o_P(1). \tag{3.39}$$

Finalement, nous obtenons de (3.34) et (3.39) la condition $(C1)$.

Nous vérifions maintenant la condition $(C2)$.

On a :

$$\sum_{i=1}^{n}(g_{n,i,h,h'}-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}U_{n,i,h,h'}^2+\sum_{i=1}^{n}(R_{n,i,h,h'}^*)^2+2\sum_{i=1}^{n}U_{n,i,h,h'}R_{n,i,h,h'}^*.$$

En considérant l'égalité (3.33) et après un calcul simple, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(R_{n,i,h,h'}^*)^2 &\leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}}\left|R_{n,i,h,h'}^*\right|\sum_{i=1}^{n}\mid R_{n,i,h,h'}^*\mid\\ &\leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}}\left|R_{n,i,h,h'}^*\right|\left\{\frac{\delta}{2n}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{G(Z_i)+S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2\varphi(\epsilon_i)\right\}\\ &\leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}}\left|R_{n,i,h,h'}^*\right|\left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\epsilon_i)\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right.\\ &+ \left.\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\epsilon_i)\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}.\end{aligned}$$

Posons :

$A_{n,i,\delta}=\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\epsilon_i)\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2$ et $B_{n,i,\delta}=\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\epsilon_i)\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma\theta_0,Z_i}\Big|^2$.

On considère l'ensemble Ω_1 avec $\Omega_1=\{\omega,\varphi(\epsilon_i)\leq 1\}$. Il est clair que sur le complémentaire ${\Omega_1}^c$ de Ω_1, on a pour tout réel $p>1$, $\varphi(\epsilon_i)\leq\varphi^p(\epsilon_i)$. Dans ce cas, nous choisissons la valeur de p correspondante à la condition $(A_{1.1})$. Alors on a :

$$\begin{aligned}|A_{n,i,\delta}| &\leq \left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\epsilon_i)I_{\Omega_1}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}+\left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\epsilon_i)I_{{\Omega_1}^c}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}\\ &\leq \left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}+\left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^p(\epsilon_i)\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\},\end{aligned}$$

où $I(\cdot)$ désigne la fonction indicatrice.

Posons :

$$A_{n,i,\delta}^{\star} = \left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}+\left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^p(\epsilon_i)\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}.$$

À partir du théorème ergodique, de $(A_{1.1})$, et étant donné que les moments d'ordre 2 sont finis, nous déduisons la convergence presque sûre de $A_{n,i,\delta}^{\star}$ vers une constante c_1.

En posant :

$$B_{n,i,\delta}^{\star} = \left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}+\left\{\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^p(\epsilon_i)\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^2\right\}.$$

Un raisonnement analogue à celui effectué pour $A_{n,i,\delta}^{\star}$ nous permet de déduire la convergence presque sûre de $B_{n,i,\delta}^{\star}$ vers une constante c_2, et donc la convergence presque sûre de la variable

aléatoire $A^{\star}_{n,i,\delta} + B^{\star}_{n,i,\delta}$ vers $c = c_1 + c_2$.
Le vecteur aléatoire $\Big((A^{\star}_{n,i,\delta} + B^{\star}_{n,i,\delta})\ ,\ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |R^{*}_{n,i,h,h'}|\Big)$ converge en probabilité vers $(c, 0)$. Comme la fonction $(x, y) \longmapsto xy$ est continue, il vient :

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left|R^{*}_{n,i,h,h'}\right| \left(A^{\star}_{n,i,\delta} + B^{\star}_{n,i,\delta}\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Ceci implique que :

$$\sum_{i=1}^{n} (R^{*}_{n,i,h,h'})^2 \quad = \quad o_P(1). \tag{3.40}$$

On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} U_{n,i,h,h'} R^{*}_{n,i,h,h'} &\leq \sum_{i=1}^{n} \left|U_{n,i,h,h'}\right| \left|R^{*}_{n,i,h,h'}\right| \\
&\leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left|U_{n,i,h,h'}\right| \sum_{i=1}^{n} \left|R^{*}_{n,i,h,h'}\right| \\
&\leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left|U_{n,i,h,h'}\right| \left(A^{*}_{n,i,\delta} + B^{*}_{n,i,\delta}\right).
\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire à celui du cas précédent et sous (3.39) nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} U_{n,i,h,h'} R^{*}_{n,i,h,h'} \quad = \quad o_P(1). \tag{3.41}$$

On peut également écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} U^2_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ -n^{-\frac{1}{2}} \left[h\, M_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} + h'(M_f(\epsilon_i)\epsilon_i + 1) \frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \right] \right\}^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(h M_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \right)^2 + \left(h'(M_f(\epsilon_i)\epsilon_i + 1) \frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \right)^2 \\
&+ 2hh' \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} M_f(\epsilon_i) \left[M_f(\epsilon_i)\epsilon_i + 1 \right] \frac{G(Z_i)S(Z_i)}{\sigma^2(\theta_0, Z_i)} \right\}.
\end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\frac{G(Z_i)S(Z_i)}{\sigma^2(\theta_0, Z_i)} \Big] &\leq \mathbf{E}\Big[\frac{|G(Z_i)S(Z_i)|}{\sigma^2(\theta_0, Z_i)} \Big] \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbf{E}\Big[\frac{G^2(Z_i)}{\sigma^2(\theta_0, Z_i)} \Big] + \frac{1}{2}\mathbf{E}\Big[\frac{S^2(Z_i)}{\sigma^2(\theta_0, Z_i)} \Big] < +\infty.
\end{aligned}$$

À partir de l'ergodicité et de la stationnarité, nous déduisons que $\sum_{i=1}^{n} U^2_{n,i,h,h'}$ converge p.s. vers une constante positive $\tau^2_{h,h'}$, avec :

$$\begin{aligned}
\tau^2_{h,h'} &= h^2 \mathbf{E}\left[M^2_f(\epsilon_i) \Big(\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \Big)^2 \right] + h'^2 \mathbf{E}\left[[1 + \epsilon_i M_f(\epsilon_i)]^2 \Big(\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \Big)^2 \right] \\
&+ 2hh' \mathbf{E}\left[[\epsilon_i M^2_f(\epsilon_i) + M_f(\epsilon_i)] \frac{G(Z_i)S(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \right].
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Posons $I_j = \mathbf{E}\Big(\epsilon_0^j M_f^2(\epsilon_0)\Big)$ et $K_j = \mathbf{E}\Big(\epsilon_0^j M_f(\epsilon_0)\Big), \quad j \in \{0,1,2\}$.
De $(A_{1.2})$ et $(A_{2.2})$, il vient :

$$\begin{aligned}
\tau_{h,h'}^2 &= h^2 I_0 \mathbf{E}\left(\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z0)}\right)^2 + h'^2(I_2 + 2K_1 + 1)\mathbf{E}\left(\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\right)^2 \\
&+ 2hh'(I_1 + K_0)\mathbf{E}\left(\frac{G(Z_0)S(Z_0)}{\sigma^2(\theta_0, Z_0)}\right) \\
&= h^2 I_0 \mathbf{E}\left(\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z0)}\right)^2 + h'^2(I_2 - 1)\mathbf{E}\left(\frac{S(Z_0)}{\sigma(\theta_0, Z_0)}\right)^2 \\
&+ 2hh'(I_1)\mathbf{E}\left(\frac{G(Z_0)S(Z_0)}{\sigma^2(\theta_0, Z_0)}\right). \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

À partir (3.40), (3.41) et (3.43), nous déduisons que la condition $(C.2)$ est vérifée.

Nous définissons maintenant :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0) = \sum_{i=1}^{n} U_{n,i,h,h'}. \qquad (3.44)$$

À partir de $(A_{2.1})$ et $(A_{2.2})$, on peut conclure que $U_{n,i,h,h'}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale centrée. Il reste à prouver que $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \tau_{h,h'}^2)$, on utilise le théorème 3.2 et les corollaires 3.1 et 3.2 de Hall et Heyde (1980). Nous vérifions alors les conditions suivantes :

(i) *La condition de Linderberg* : Pour tout $\gamma > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(U_{n,i,h,h'}^2 I_{\Big\{|U_{n,h,h'}|>\gamma\Big\}} \Big/ \mathcal{F}_{i-1}\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

(ii) *Variance Conditionnelle :*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(U_{n,i,h,h'}^2 \Big/ \mathcal{F}_{i-1}\right) \xrightarrow{P} \eta^2 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

(iii) *Mesurabilité :* La variable aléatoire η est $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurable.

Vérification de la condition de Linderberg

De l'inégalité de Hölder conditionnelle, il existe $\nu > 1$ et $p > 1$ avec $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{p} = 1$ tels que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(U_{n,i,h,h'}^2 I_{\Big[|U_{n,i,h,h'}|>\gamma\Big]} \Big/ \mathcal{F}_{i-1}\right) &\leq \left\{\Big[\mathbf{E}(|U_{n,i,h,h'}|^{2\nu} \Big/ \mathcal{F}_{i-1})\Big]^{\frac{1}{\nu}} \Big[\mathbf{P}(|U_{n,i,h,h'}| > \gamma \Big/ \mathcal{F}_{i-1})\Big]^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\leq \Big[\mathbf{E}(|U_{n,i,h,h'}|^{2+\lambda} \Big/ \mathcal{F}_{i-1})\Big]^{\frac{1}{\frac{\lambda}{2}+1}} \Big[\mathbf{P}(|U_{n,i,h,h'}| > \gamma \Big/ \mathcal{F}_{i-1})\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big[\mathbf{E}(|U_{n,i,h,h'}|^{2+\lambda} \Big/ \mathcal{F}_{i-1})\Big]^{\frac{1}{\frac{\lambda}{2}+1}} \Big[\mathbf{P}(|U_{n,i,h,h'}|^{2+\lambda} > \gamma^{2+\lambda} \Big/ \mathcal{F}_{i-1})\Big]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

où $\nu = 1 + \frac{\lambda}{2}$ et $\lambda > 0$. Notons qu'à partir du lemme 3.1, nous avons pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$|xM_f(x)+1)|^{2+\lambda} \quad \leq \quad 2^{1+\lambda}\left(|xM_f(x)|^{2+\lambda}+1\right).$$

De $(A_{3.2})$, il vient :

$$\mathbf{E}\,|\epsilon_i M_f(\epsilon_i)+1)|^{2+\lambda} \leq 2^{1+\lambda}\mathbf{E}\left(|\epsilon_i M_f(\epsilon_i)|^{2+\lambda}\right)+2^{1+\lambda} < +\infty.$$

L'application de l'inégalité de Markov conditionnelle nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(U^2_{n,i,h,h'} I_{\left\{|U_{n,i,h,h'}|>\gamma\right\}}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right) &\leq \gamma^{\frac{-(2+\lambda)}{p}}\left\{\mathbf{E}\left(|U_{n,i,h,h'}|^{2+\lambda}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right)\right\}^{\frac{1}{\frac{\lambda}{2}+1}} \\
&\times \quad \left\{\mathbf{E}\left(|U_{n,i,h,h'}|^{2+\lambda}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \quad \gamma^{\frac{-(2+\lambda)}{p}}\left\{\mathbf{E}\left(|U_{n,i,h,h'}|^{2+\lambda}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

À partir des propriétés des espérances conditionnelles et du lemme 3.1 nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(U^2_{n,i,h,h'} I_{\left[|U_{n,h,h'}|>\gamma\right]}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right) &\leq 2^{(1+\lambda)}\gamma^{\frac{-(2+\lambda)}{p}}\Big\{n^{-(1+\frac{\lambda}{2})}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\Big|hM_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2+\lambda}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&+ \quad n^{-(1+\frac{\lambda}{2})}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\Big|h'(\epsilon_i M_f(\epsilon_i)+1)\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2+\lambda}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right]\Big\} \\
&\leq 2^{(1+\lambda)}\delta^{1+\frac{\lambda}{2}}\gamma^{\frac{-(2+\lambda)}{p}}n^{-(1+\frac{\lambda}{2})}\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2+\lambda}\mathbf{E}\Big|M_f(\epsilon_0)\Big|^{2+\lambda} \\
&+ \quad \sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2+\lambda}\mathbf{E}\Big|\epsilon_0 M_f(\epsilon_0)+1)\Big|^{2+\lambda}\Big] \\
&\leq K2^{(1+\lambda)}\delta^{1+\frac{\lambda}{2}}\gamma^{\frac{-(2+\lambda)}{p}}n^{-\frac{\lambda}{2}} \\
&\times \quad \Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2+\lambda}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^{2+\lambda}\Big].
\end{aligned}$$

À partir de (3.45), l'ergodicité, la stationnarité, $(A_{3.1})$, et $(A_{3.2})$, nous pouvons conclure que :

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(U^2_{n,i,h,h'} I_{\left\{|U_{n,h,h'}|>\gamma\right\}}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Variance conditionnelle

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\Big(U_{n,i,h,h'}^2\Big/\mathcal{F}_{i-1}\Big) &= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\Big[hM_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right)\right.\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\Big[h'(M_f(\epsilon_i)\epsilon_i+1)\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right)\\ &+ \left.2hh'\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(M_f(\epsilon_i)\left[M_f(\epsilon_i)\epsilon_i+1\right]\frac{G(Z_i)S(Z_i)}{\sigma^2(\theta_0,Z_i)}\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right)\right\}.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle, étant donné que les variables ϵ_i sont indépendantes de $\mathcal{F}_i=\sigma\left(Z_j, j\leq i\right)$, et en appliquant le théorème ergodique nous obtenons la convergence presque sûre de $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(U_{n,i,h,h'}^2\Big/\mathcal{F}_{i-1}\right)$ vers $\eta^2=\tau_{h,h'}^2$.

Mesurabilité :

La variable aléatoire η est une constante, ceci est $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurable.

En résumé, à partir de (i), (ii) *et* (iii), *nous déduisons la convergence en loi de* $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)$ *vers* $\mathcal{N}\left(0,\tau_{h,h'}^2\right)$.

Il reste à prouver que $\sum_{i=1}^{n}R_{n,i,h,h'}^{*}=o_P(1)$, avec

$$\begin{aligned}R_{n,i,h,h'}^{*} &= \frac{\Big(\alpha_{n,i,h},(\beta_{n,i,h'}-1)\Big)\partial^2 A_{n,i,h,h'}\left(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star}\right)\Big(\alpha_{n,i,h},(\beta_{n,i,h'}-1)\Big)^{\top}}{2f(\epsilon_i)},\\ \partial^2 A_{n,i,h,h'}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star}) &= \begin{pmatrix} D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star}) & D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star})\\ D_{2,1}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star}) & D_{2,2}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star})\end{pmatrix}.\\ \sum_{i=1}^{n}R_{n,i,h,h'}^{*} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star})}{2f(\epsilon_i)}\alpha_{n,i,h}^2\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{D_{2,2}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star})}{2f(\epsilon_i)}(\beta_{n,i,h'}-1)^2\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1)\frac{D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star})}{2f(\epsilon_i)}\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1)\frac{D_{2,1}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star})}{2f(\epsilon_i)}.\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star})}{2f(\epsilon_i)}\alpha_{n,i,h}^2 = \frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{1,1}\left(\epsilon_i;\alpha_{n,i,h}^{\star},\beta_{n,i,h'}^{\star}\right)}{2f(\epsilon_i)}\left[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\right]^2.$$

Nous considérons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{1,1}\left(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'}\right)}{2f(\epsilon_i)}\left[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\right]^2 &= \frac{h^2}{n}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\\ &\times \Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2\Big\}\\ &\leq \frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\\ &\times \Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2+\left[\frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\times\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2\right].\end{aligned}$$

À partir de $(A_{1.2})$, il existe une fonction V_1, une constante positive $\varsigma' > \max\Big(|\alpha^{\star\star}_{n,i,h}|, |\beta^{\star}_{n,i,h'}-1|\Big)$ et une fonction positive et mesurable ϕ telle que $\mathbf{E}(\phi(\epsilon_0)) < +\infty$ et

$$\Big|D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)\Big| \leq \big|\alpha^{\star}_{n,i,h}\big|\,\big|V_1(\epsilon_i;\alpha^{\star\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})\big|,$$

avec $\alpha^{\star\star}_{n,i,h}\in\Big[0;\alpha^{\star}_{n,i,h}\Big]$.

Pour tout entier positif $n\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big\{\frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)|}{2f(\epsilon_i)}\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i))}\Big]^2\Big\}\\ &\leq \frac{h^2}{2n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\Big\{\phi(\epsilon_i)|\alpha^{\star}_{n,i,h}|\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i))}\Big]^2\Big\}.\end{aligned}$$

Comme $\alpha^{\star}_{n,i,h}$ est dans l'intervalle $[0;\alpha_{n,i,h}]$, il existe une suite aléatoire $(\theta_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $[0;1]$ telle que $\alpha^{\star}_{n,i,h}=\theta_n\alpha_{n,i,h}$. Alors, il vient :

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big\{\frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\Big(\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big)^2\Big\}\\ &\leq \frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_n\mathbf{E}\Big\{\phi(\epsilon_0)|\alpha_{n,i,h}|\Big(\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big)^2\Big\}\\ &\leq Kh^3n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{E}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big|^3\Big\}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\gamma>0$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\Big(\frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2>\gamma\Big)\\ &\leq \frac{1}{\gamma}K\,h^3n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{E}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^3\Big\}.\end{aligned}$$

À partir de l'ergodicité, la stationnarité, $(A_{3.1})$ et comme $n^{-\frac{1}{2}} \to 0$, nous obtenons :

$$\frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)|}{2f(\epsilon_i)}\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2 \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quand} \quad n\to+\infty.$$

Finalement :

$$R^{(1)}_{n,i,h,h'} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\alpha^2_{n,i,h}=o_P(1). \tag{3.45}$$

En effectuant un raisonnement analogue à celui du cas précédent, on peut montrer que :

$$\begin{aligned}
R^{(2)}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{2,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{2,2}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}(\beta_{n,i,h'}-1)^2=o_P(1).\\
R^{(3)}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,2}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\alpha^2_{n,i,h}=o_P(1).\\
R^{(4)}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,2}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}(\beta_{n,i,h'}-1)^2=o_P(1).\\
R^{(5)}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{2,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{2,1}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\alpha^2_{n,i,h}=o_P(1).\\
R^{(6)}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{2,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{2,1}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}(\beta_{n,i,h'}-1)^2=o_P(1).
\end{aligned}$$

Il reste à évaluer les termes $R^{(7)}_{n,i,h,h'}$ et $R^{(8)}_{n,i,h,h'}$, où :

$$\begin{aligned}
R^{(7)}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,2}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1),\\
&\text{et ,} \qquad\qquad (3.46)\\
R^{(8)}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{2,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{2,1}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

De l'inégalité :

$$\Big|\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1)\Big| \leq \frac{1}{2}\Big[{\alpha^2}_{n,i,h}+(\beta_{n,i,h'}-1)^2\Big],$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
|R^{(7)}_{n,i,h,h'}| &\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,2}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}\alpha^2_{n,i,h}\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Big|D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'})-D_{1,2}(\epsilon_i;0,1)\Big|}{2f(\epsilon_i)}(\beta_{n,i,h'}-1)^2.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.46), il vient :

$$R^{(7)}_{n,i,h,h'} = o_P(1). \tag{3.48}$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$R^{(8)}_{n,i,h,h'} = o_P(1). \tag{3.49}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} R^{*}_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{1,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'}) - D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\,\alpha^{2}_{n,i,h} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{2,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'}) - D_{2,2}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\,(\beta_{n,i,h'}-1)^{2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{1,2}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'}) - D_{1,2}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\,\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{2,1}(\epsilon_i;\alpha^{\star}_{n,i,h},\beta^{\star}_{n,i,h'}) - D_{2,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\,\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1) \\
&+ L_{n,i,h,h'},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
L_{n,i,h,h'} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\alpha^{2}_{n,i,h} + \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{2,2}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}(\beta_{n,i,h'}-1)^{2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1)\frac{D_{1,2}(\epsilon_i;0,1))}{2f(\epsilon_i)} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1)\frac{D_{2,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}.
\end{aligned}$$

À partir de (3.45), (3.46), (3.48), et (3.49), il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} R^{*}_{n,i,h,h'} \leq R^{(1)}_{n,i,h,h'} + R^{(2)}_{n,i,h,h'} + R^{(7)}_{n,i,h,h'} + R^{(8)}_{n,i,h,h'} + L_{n,i,h,h'}.$$

On a :

$$D_{1,1}(\epsilon_i;0,1) = \ddot{f}(\epsilon_i), \quad D_{1,2}(\epsilon_i;0,1) = D_{2,1}(\epsilon_i;0,1) = \dot{f}(\epsilon_i) + \epsilon_i\ddot{f}(\epsilon_i),$$

et

$$D_{2,2}(\epsilon_i;0,1) = 2\epsilon_i\dot{f}(\epsilon_i) + {\epsilon_i}^{2}\ddot{f}(\epsilon_i).$$

Par un calcul simple, on peut montrer que :

$$\frac{\ddot{f}(x)}{f(x)} = \dot{M}_f(x) + M^{2}_f(x).$$

À partir de $(A_{2.3})$, l'ergodicité et la stationnarité, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\,\alpha_{n,i,h}^2 = \frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\ddot{f}(\epsilon_i)}{2f(\epsilon_i)}\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2 \xrightarrow{p.s.} h^2\mathbf{E}\Big\{\frac{\ddot{f}(\epsilon_i)}{2f(\epsilon_i)}\Big[\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2\Big\}.$$

Alors presque sûrement quand $n \to \infty$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_{1,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}\,\alpha_{n,i,h}^2 \longrightarrow \frac{h^2}{2}\mathbf{E}\left\{\dot{M}_f(\epsilon_0) + M_f^2(\epsilon_0)\right\}\mathbf{E}\Big[\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0,Z_0)}\Big]^2 = 0.$$

D'après $(A_{2.2})$, $(A_{2.5})$, l'ergodicité et la stationnarité, on a presque sûrement quand $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
&\frac{h'^2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{D_{2,2}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)}(\beta_{n,i,h'}-1)^2 \\
&= \frac{h'^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\epsilon_i M_f(\epsilon_i) + \frac{1}{2}{\epsilon_i}^2\left(\dot{M}_f(\epsilon_i) + M_f^2(\epsilon_i)\right)\right\}\Big[\frac{S(Z_i)}{\sigma(\theta_0,Z_i)}\Big]^2 = 0.
\end{aligned}$$

Il vient à partir de $(A_{2.1})$, $(A_{2.4})$, l'ergodicité, et la stationnarité, que presque sûrement quand $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1)\frac{D_{1,2}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{n,i,h}(\beta_{n,i,h'}-1)\frac{D_{2,1}(\epsilon_i;0,1)}{2f(\epsilon_i)} \\
&= \frac{hh'}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{G(Z_i)S(Z_i)}{\sigma^2(\theta_0,Z_i)}\Big[M_f(\epsilon_i) + \epsilon_i(\dot{M}_f(\epsilon_i) + M_f^2(\epsilon_i))\Big] \\
&\longrightarrow h\mathbf{E}(\frac{G(Z_i)S(Z_i)}{\sigma^2(\theta_0,Z_i)})\mathbf{E}\Big[M_f(\epsilon_0) + \epsilon_0(\dot{M}_f(\epsilon_0) + M_f^2(\epsilon_0))\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent la variable aléatoire $L_{n,i,h,h'} \xrightarrow{p.s.} 0$ quand $n \to \infty$.
Le vecteur aléatoire $\Big(R^{(1)}_{n,i,h,h'} + R^{(2)}_{n,i,h,h'} + R^{(7)}_{n,i,h,h'} + {R^{(8)}}_{n,i,h,h'}\ ,\ L_{n,i,h,h'}\Big) \xrightarrow{P} (0,0)$ quand $n \to +\infty$. Puisque la fonction $(x,y) \longmapsto x+y$ est continue, on déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n} R^*_{n,i,h,h'} = o_P(1).$$

Les conditions $(C.1)$, $(C.2)$ et $(C.3)$ sont satisfaites, d'après le théorème 1 de Hwang et Basawa (2001), on a sous H_0 :

$$\Lambda_{n,h,h'} \quad = \quad \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0) - \frac{\tau^2_{h,h'}}{2} + o_P(1). \tag{3.50}$$

3.5.3 Preuve du théorème 3.2

La preuve est similaire à celle du théorème 3 de Hwang et Basawa (2001).

3.5.4 Preuve de la propostion 3.1

En utilisant les égalités (3.9) et (3.10), nous obtenons :

$$\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)\,\tilde{\epsilon}_{i,n} - \sigma(\theta_0\,,\, Z_i)\,\epsilon_i \;=\; -\Big(m(\rho_0 + n^{-\frac{1}{2}} u^{(n)}\,,\, Z_i) - m(\rho_0\,,\, Z_i)\Big),$$

alors,

$$\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i \;=\; -\frac{m(\rho_0 + n^{-\frac{1}{2}} u^{(n)}\,,\, Z_i) - m(\rho_0\,,\, Z_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} - \frac{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i) - \sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\,\epsilon_i,$$

En effectuant un développement de Taylor d'ordre 1 respectivement des fonctions $\rho \to m(\rho, \cdot)$ et $\theta \to \sigma(\theta, \cdot)$ aux voisinages de ρ_0 et θ_0, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
m(\rho_0 + n^{-\frac{1}{2}} u^{(n)}\,,\, Z_i) - m(\rho_0\,,\, Z_i) &= n^{-\frac{1}{2}} (u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top, \\
\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i) - \sigma(\theta_0\, Z_i) &= n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top\, \partial\sigma(\tilde{\theta}_n\,, Z_i)^\top, \\
\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i &= -\frac{n^{-\frac{1}{2}} (u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\, Z_i)} - \frac{n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\,\epsilon_i,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

où, $\tilde{\rho}_n$ et $\tilde{\theta}_n$ sont entre ρ_0 et ρ_n, et θ_0 et θ_n respectivement.

Un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $u \longmapsto M_f(u)$ au voisinage de ϵ_i combiné avec l'égalité (3.51) donne :

$$\begin{aligned}
\frac{M_f(\tilde{\epsilon}_{i,n})}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} - \frac{M_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)} &= \frac{\sigma(\theta_0,\, Z_i) M_f(\tilde{\epsilon}_{i,n}) - \sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i) M_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)} \\
&= \frac{\sigma(\theta_0,\, Z_i) M_f(\tilde{\epsilon}_{i,n}) - [\sigma(\theta_0\,,\, Z_i) + n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top\, \partial\sigma(\tilde{\theta}_n\,,\, Z_i)^\top] M_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)} \\
&= \frac{M_f(\tilde{\epsilon}_{i,n}) - M_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} - \frac{n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, M_f(\epsilon_i) \\
&= \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} + \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})}{2\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} \\
&- \frac{n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, M_f(\epsilon_i),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

où $\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n}$ est entre ϵ_i et $\tilde{\epsilon}_{i,n}$.

En utilisant les égalités (3.14) et (3.11), on écrit :

$$\tilde{r}_{f,h,n} - r_{f,h,n} \;=\; -n^{-\frac{1}{2}} h \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{M_f(\tilde{\epsilon}_{i,n})}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} - \frac{M_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\right] G(Z_i).$$

De (3.52), on a :

$$\tilde{r}_{f,h,n} - r_{f,h,n} \;=\; I_{n,h,1} + I_{n,h,2} + I_{n,h,3}.$$

avec

$$I_{n,h,1} = -n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, G(Z_i). \tag{3.53}$$

$$I_{n,h,2} = -n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)^2}{2\,\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})\, G(Z_i). \tag{3.54}$$

$$I_{n,h,3} = \frac{1}{n}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta_n},\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, M_f(\epsilon_i)\, G(Z_i). \tag{3.55}$$

Nous faisons maintenant une évaluation des termes $I_{n,h,1}$, $I_{n,h,2}$ et $I_{n,h,3}$. Toutes ces limites sont calculées sous H_0.

Évaluation de $I_{n,h,1}$

$$\begin{aligned}
I_{n,h,1} &= -n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, G(Z_i) \\
&+ n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\,,\, Z_i)}\, G(Z_i) \\
&- n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\,,\, Z_i)}\, G(Z_i). \\
&= n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} - \frac{1}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\right] (\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i) G(Z_i) \\
&- n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\,,\, Z_i)}\, G(Z_i). \\
&= I^{(1)}_{n,h,1} + I^{(2)}_{n,h,1}.
\end{aligned}$$

À partir de l'égalité (3.51), On a :

$$\begin{aligned}
I^{(1)}_{n,h,1} &= n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} - \frac{1}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\right] (\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i) G(Z_i) \\
&= \frac{1}{n}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)} (\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (3.51), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I^{(1)}_{n,h,1} &= n^{-\frac{1}{2}} h\, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A\left(\theta_0, \tilde{\rho}_n, \tilde{\theta}_n, Z_i\right) \dot{M}_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\
&+ n^{-\frac{1}{2}} h\, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B\left(\theta_0, \tilde{\theta}_n, Z_i\right) \epsilon_i \dot{M}_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)},
\end{aligned}$$

avec

$$A\left(\theta_0, \tilde{\rho}_n, \tilde{\theta}_n, Z_i\right) = -\frac{(v^{(n)})^\top \, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)} \frac{(u^{(n)})^\top \, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}, \tag{3.56}$$

et (3.57)

$$B\left(\theta_0, \tilde{\theta}_n, Z_i\right) = -\Big[\frac{(v^{(n)})^\top \, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)}\Big]^2. \tag{3.58}$$

$\tilde{\rho}_n$ et $\tilde{\theta}_n$ sont respectivement dans les segments convexes $[\rho_0; \rho_n] \subset \mathbf{R}^\ell$ et $[\theta_0; \theta_n] \subset \mathbf{R}^p$. Alors, pour tout entier positif n, il existe une suite aléatoire (s_n, t_n) à valeurs dans $[0,1] \times [0,1]$, telle que :

$$\tilde{\rho}_n = s_n \rho_0 + (1 - s_n)\, \rho_n \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_n = t_n \theta_0 + (1 - t_n)\, \theta_n.$$

Il vient :

$$\|\tilde{\rho}_n - \rho_0\|_\ell \leq (1 - s_n)\|\rho_n - \rho_0\|_\ell \leq \|\rho_n - \rho_0\|_\ell, \tag{3.59}$$

et

$$\|\tilde{\theta}_n - \theta_0\|_p \leq (1 - t_n)\|\theta_n - \theta_0\|_p \leq \|\theta_n - \theta_0\|_p. \tag{3.60}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur chaque terme du produit (3.56) donne :

$$\begin{aligned}\left|A\left(\theta_0, \tilde{\rho}_n, \tilde{\theta}_n, Z_i\right)\right| &\leq \Big\{\frac{\|(v^{(n)})\|_p \, \|\partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)} . \frac{(\|(u^{(n)})\|_\ell \, \|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\} \\ &\leq \frac{1}{2}\Big\{\Big[\frac{(\|(v^{(n)})\|_p \, \|\partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)}\Big]^2 + \Big[\frac{(\|(u^{(n)})\|_\ell \, \|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big]^2\Big\}.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n A\left(\theta_0, \tilde{\rho}_n, \tilde{\theta}_n, Z_i\right) \dot{M}_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\right| \\ &\leq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \Big[\frac{\|(v^{(n)})\|_p \, \|\partial\sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)}\Big]^2 \left|\dot{M}_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\right| \\ &+ \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \Big[\frac{(\|(u^{(n)})\|_\ell \|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big]^2 \left|\dot{M}_f(\epsilon_i) \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\right|.\end{aligned} \tag{3.61}$$

Comme pour tout x, on a :

$$\|\partial\, m(\rho,\, x)\|_\ell \leq \sqrt{\ell} \max_{1 \leq i \leq \ell} \left|\frac{\partial\, m(\rho, x)}{\partial \rho_i}\right|, \tag{3.62}$$

et

$$\|\partial\sigma(\theta, x)\|_p \leq \sqrt{p} \max_{1 \leq j \leq p} \left|\frac{\partial\, \sigma(\theta, x)}{\partial \theta_j}\right|. \tag{3.63}$$

Alors, à partir de (3.59), (3.60), (3.61), et $(A_{4.1})$, on a l'existence de deux boules fermées $\overline{B}_{1,n} = \overline{B}_{1,n}\Big(\rho_0, r_{1,n}\Big) \subset int(\Theta_1)$ et $\overline{B}_{2,n} = \overline{B}_{2,n}(\theta_0, r_{2,n}) \subset int(\Theta_2)$ avec $r_{1,n} \geq r_n$ et $r_{2,n} \geq r'_n$ et une fonction positive $N_{1,n}$, telle que $E\Big(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_0)]\Big)^{\mu+2} < \infty$, avec $\mu > 0$, telles que :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A\left(\theta_0, \tilde{\rho}_n, \tilde{\theta}_n, Z_i\right) \dot{M}_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\right| &\leq \max(\ell, p).\ \sup_n\Big[(\tau^{(n)})^{\top}(\tau^{(n)})\Big] \\ &\times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_i)]\right)^2\left|\dot{M}_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\right|.\end{aligned} \tag{3.65}$$

Notons que la quantité $E\left|\dot{M}_f(\epsilon_0)\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\big(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_0)]\big)^2\right|$ est finie.
De l'ínégalité de Hölder, nous écrivons :

$$\begin{aligned}&E\left|\dot{M}_f(\epsilon_0)\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\left(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_0)]\right)^2\right| \\ &\leq \left\{E\left|\dot{M}_f(\epsilon_0)\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\right|^{\lambda+2}\right\}^{\frac{1}{\lambda+2}}\left\{E\left(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_0)]\right)^{2t}\right\}^{\frac{1}{t}} \\ &\leq \left\{E\left|\dot{M}_f(\epsilon_0)\right|^{\lambda+2}\right\}^{\frac{1}{\lambda+2}}\left\{E\left|\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\right|^{\lambda+2}\right\}^{\frac{1}{\lambda+2}}\left\{E\left(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_0)]\right)^{2t}\right\}^{\frac{1}{t}}.\end{aligned}$$

Étant donné que $\frac{1}{\lambda+2} + \frac{1}{t} = 1$, alors $t = 1 + \frac{1}{\lambda+1}$ et $2\,t = 2 + \mu$, les conditions $(A_{3.1})$, $(A_{3.2})$ et $(A_{4.1})$ nous permettent de conclure que $E\left|\dot{M}_f(\epsilon_0)\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_0)])^2\right| < +\infty$. De la stationnarité et l'ergodicité, nous déduisons la convergence presque sûre de la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\dot{M}_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_i)])^2\right|$ vers $E\left|\dot{M}_f(\epsilon_0)\frac{G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}(\sup_{n\geq 1}[N_{1,n}(Z_0)])^2\right|$.
De (3.9) et l'inégalité (3.64), il vient :

$$n^{-\frac{1}{2}}h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A\left(\theta_0, \tilde{\rho}_n, \tilde{\theta}_n, Z_i\right) \dot{M}_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} = o_P(1). \tag{3.66}$$

En effectuant un raisonnement similaire à celui du cas précédent et après utilisation de $(A_{3.2})$, on peut montrer que :

$$\left|B\left(\theta_0, \tilde{\theta}_n, Z_i\right)\right| \leq \Big[\frac{\|(v^{(n)})\|_p\,\|\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)},\, Z_i)}\Big]^2, \tag{3.67}$$

et

$$n^{-\frac{1}{2}}h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B\left(\theta_0, \tilde{\theta}_n, Z_i\right)\,\epsilon_i\dot{M}_f(\epsilon_i)\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \quad = \quad o_P(1). \tag{3.68}$$

Des égalités (3.66) et (3.68), nous concluons que :

$$I_{n,h,1}^{(1)} \quad = \quad o_P(1). \tag{3.69}$$

En utilisant l'égalité (3.51), on peut écrire l'expression $I_{n,h,1}^{(2)}$ comme suit :

$$\begin{aligned} I_{n,h,1}^{(2)} &= -n^{-\frac{1}{2}}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)\dot{M}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, G(Z_i) \\ &= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &+ h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, \frac{\epsilon_i \dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}. \end{aligned}$$

On a les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} &= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &- h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &+ h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &= I_{n,h,1}^{(2,1)} + I_{n,h,1}^{(2,2)}, \quad \text{avec} \\ I_{n,h,1}^{(2,1)} &= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &- h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ I_{n,h,1}^{(2,2)} &= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top\, \partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, \frac{\epsilon_i \dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} &= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)}\, \frac{\epsilon_i \dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &- h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, \frac{\epsilon_i \dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &+ h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\, \frac{\epsilon_i \dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\ &= I_{n,h,1}^{(2,3)} + I_{n,h,1}^{(2,4)}. \end{aligned}$$

On a maintenant :

$$I_{n,h,1}^{(2)} \quad = \quad I_{n,h,1}^{(2,1)} + I_{n,h,1}^{(2,2)} + I_{n,h,1}^{(2,3)} + I_{n,h,1}^{(2,4)}.$$

Nous évaluons les termes $I_{n,h,1}^{(2,1)}$, $I_{n,h,1}^{(2,2)}$, $I_{n,h,1}^{(2,3)}$ et $I_{n,h,1}^{(2,4)}$.

De (3.51), l'expression $I_{n,h,1}^{(2,1)}$ s'écrit :

$$I_{n,h,1}^{(2,1)} = -n^{-\frac{1}{2}} h \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top \partial \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)} \frac{(u^{(n)})^\top \partial m(\tilde{\rho}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \dot{M}_f(\epsilon_i).$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(v^{(n)})^\top \partial \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)} \frac{(u^{(n)})^\top \partial m(\tilde{\rho}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \right| &\leq \|v^{(n)}\|_p \frac{\|\partial \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)} . \|u^{(n)}\|_\ell \frac{\|\partial m(\tilde{\rho}_n, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \\
&\leq \frac{1}{2} \Big\{ \|v^{(n)}\|_p \frac{\|\partial \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)} \Big\}^2 \\
&+ \frac{1}{2} \Big\{ \|u^{(n)}\|_\ell \frac{\|\partial m(\tilde{\rho}_n, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \Big\}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_n [(\tau^{(n)})^\top (\tau^{(n)})] \Big[\Big\{ \frac{\|\partial \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}, Z_i)} \Big\}^2 \\
&+ \Big\{ \frac{\|\partial m(\tilde{\rho}_n, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \Big\}^2 \Big].
\end{aligned}$$

Alors, nous obtenons :

$$\left| I_{n,h,1}^{(2,1)} \right| \leq n^{-\frac{1}{2}} |h| \sup_n [(\tau^{(n)})^\top (\tau^{(n)})] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \dot{M}_f(\epsilon_i) (\sup_{n \geq 1} [N_{1,n}(Z_i)])^2 \right|.$$

L'utilisation des égalités (3.59), (3.60), (3.62), (3.63), (3.70), des conditions $(A_{3.1})$, $(A_{3.5})$, $(A_{4.1})$, (3.9) et l'application du théorème ergodique nous permettent d'obtenir :

$$I_{n,h,1}^{(2,1)} = o_P(1). \tag{3.70}$$

En effectuant un raisonnement analogue au cas précédent et en utilisant $(A_{3.2})$, on peut montrer que :

$$I_{n,h,1}^{(2,3)} = o_P(1). \tag{3.71}$$

Il reste à évaluer les termes $I_{n,h,1}^{(2,2)}$ et $I_{n,h,1}^{(2,4)}$.

$$I_{n,h,1}^{(2,2)} = h \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top \partial m(\tilde{\rho}_n, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \frac{\dot{M}_f(\epsilon_i) G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)}.$$

En effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 des fonctions $\rho \mapsto m(\rho, \cdot)$ et $\theta \mapsto \sigma(\theta, \cdot)$ aux voisinages de ρ_0 et θ_0 respectivement, il vient :

$$\begin{aligned}
n^{-\frac{1}{2}} (u^{(n)})^\top \partial m(\tilde{\rho}_n, Z_i)^\top &= n^{-\frac{1}{2}} (u^{(n)})^\top \partial m(\rho_0, Z_i)^\top \\
&+ \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} (u^{(n)})^\top \partial^2 m(\tilde{\tilde{\rho}}_n, Z_i) n^{-\frac{1}{2}} (u^{(n)}), \qquad (3.72) \\
n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top \partial \sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top &= n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top \partial \sigma(\theta_0, Z_i)^\top \\
&+ \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)})^\top \partial^2 \sigma(\tilde{\tilde{\theta}}_n, Z_i) n^{-\frac{1}{2}} (v^{(n)}). \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

où, $\tilde{\tilde{\rho}}_n$ et $\tilde{\tilde{\theta}}_n$ sont respectivement entre ρ_0 et ρ_n, et θ_0 et θ_n.

De (3.72), l'expression $I_{n,h,1}^{(2,2)}$ peut être reécrite comme suit :

$$\begin{aligned} I_{n,h,1}^{(2,2)} &= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(u^{(n)})^\top\,\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\,G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \\ &+ \frac{h}{2}\,n^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(u^{(n)})^\top\,\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n,\, Z_i)(u^{(n)})}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\,G(Z_i)}{\sigma(\theta_0, Z_i)} \\ &= I_{n,h,1}^{(2,2,1)} + I_{n,h,1}^{(2,2,2)}. \end{aligned}$$

Il reste à évaluer $I_{n,h,1}^{(2,2,2)}$. On a pour tout entier i l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} (u^{(n)})^\top\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n,\, Z_i)(u^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{\ell}\frac{\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n, Z_i)}{\partial\,\rho_k^2}({u_k}^{(n)})^2 \\ &+ \sum\sum_{1\le k,j\le \ell, k\neq j}\frac{\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n, Z_i)}{\partial\rho_k\partial\rho_j}({u_k}^{(n)})({u_j}^{(n)}). \end{aligned} \tag{3.74}$$

D'autres part :

$$\begin{aligned} ({u_k}^{(n)})({u_j}^{(n)}) &\le \left|{u_k}^{(n)})({u_j}^{(n)})\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left[({u_k}^{(n)})^2 + ({u_j}^{(n)})^2\right] \\ &\le \frac{1}{2}\|u^{(n)}\|_\ell^2. \end{aligned} \tag{3.75}$$

En utilisant (3.75), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (u^{(n)})^\top\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n,\, Z_i)(u^{(n)}) &\le \max_{1\le i,j\le\ell}\left|\frac{\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n, Z_i)}{\partial\rho_k\partial\rho_j}\right|\left[\ell\|u^{(n)}\|_\ell^2 + \frac{\ell(\ell-1)}{2}\|u^{(n)}\|_\ell^2\right] \\ &\le \max_{1\le k,j\le\ell}\left|\frac{\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n, Z_i)}{\partial\rho_k\partial\rho_j}\right|\left[\ell + \frac{\ell(\ell-1)}{2}\right]\|u^{(n)}\|_\ell^2 \\ &\le \max_{1\le k,j\le\ell}\left|\frac{\partial^2\, m(\tilde{\tilde{\rho}}_n, Z_i)}{\partial\rho_k\partial\rho_j}\right|\left[\frac{\ell^2+\ell}{2}\right]\sup_n\left[({\tau^{(n)}})^\top(\tau^{(n)})\right]. \end{aligned} \tag{3.76}$$

En raisonnant comme dans (3.59), et dans (3.60), nous pouvons montrer que :

$$\|\tilde{\tilde{\rho}}_n - \rho_0\|_\ell \le \|\rho_n - \rho_0\|_\ell, \tag{3.77}$$

et (3.78)

$$\|\tilde{\tilde{\theta}}_n - \theta_0\|_p \le \|\theta_n - \theta_0\|_p. \tag{3.79}$$

L'inégalité (3.76) associée avec (3.77), (3.79), $(A_{3.1})$,$(A_{3.2})$, $(A_{4.4})$, (3.9), l'ergodicité et la stationnarité nous permettent de conclure que :

$$I_{n,h,1}^{(2,2,2)} = o_P(1). \tag{3.80}$$

Il reste à évaluer le terme $I_{n,h,1}^{(2,2,1)}$. Pour tout entier positif i, on a :

$$(u^{(n)})^\top \partial\, m(\rho_0,\, Z_i)^\top \;=\; \sum_{j=1}^{\ell} u_j^{(n)}\, \frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_j}.$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
I_{n,h,1}^{(2,2,1)} &= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{(n)})^\top \partial\, m(\rho_0,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\
&= h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{u_1^{(n)}\,\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_1}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} + \cdots + h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{u_\ell^{(n)}\,\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_\ell}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \\
&= h\, u_1^{(n)}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_1}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} + \cdots + h\, u_\ell^{(n)}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_\ell}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}.
\end{aligned}$$

De $(A_{3.1})$, $(A_{3.2})$ et $(A_{4.3})$, nos déduisons que pour tout $j \in \{1, \ldots, \ell\}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \xrightarrow{p.s.} \mathbf{E}\Big[\frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_0)}{\partial\, \rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_0)\, G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\Big] = K_j.$$

De plus, pour tout $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, il existe une variable aléatoire $E_{j,n}$ qui converge presque sûrement vers 0 quand $n \to +\infty$ telle que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} \;=\; K_j + E_{j,n}.$$

Donc :

$$u_j^{(n)}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_i)}{\partial\, \rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_i)\, G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)} = u_j^{(n)}\, K_j + u_j^{(n)}\, E_{j,n}.$$

Puisque :

$$u_j^{(n)} \le \|u^{(n)}\|_\ell \le \left[\sup_n [(\tau^{(n)})^\top (\tau^{(n)})\right] < +\infty.$$

Alors :

$$u_j^{(n)}\, E_{j,n} = o_P(1).$$

Il vient :

$$I_{n,h,1}^{(2,2,1)} \;=\; h\,(u^{(n)})^\top K^\top + o_P(1), \tag{3.81}$$

avec

$$\begin{aligned}
K^\top &= (K_1, \cdot, \cdot, \cdot, K_\ell)\,, \\
K_j &= \mathbf{E}\left[\frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_0)}{\partial\, \rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\,\frac{\dot{M}_f(\epsilon_0)\, G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\right], \\
j &\in \{1, \ldots, \ell\}.
\end{aligned}$$

De (3.80) et (3.81), nous obtenons :

$$I_{n,h,1}^{(2,2)} = h\,(u^{(n)})^\top K^\top + o_P(1). \tag{3.82}$$

Il reste à évaluer $I_{n,h,1}^{(2,4)}$. En procédant comme dans les cas précédents, nous obtenons une inégalité similaire à (3.76), à partir de laquelle nous déduisons que :

$$(v^{(n)})^\top\,\partial^2\,\sigma(\tilde{\tilde{\theta}}_n,\,Z_i)(v^{(n)}) \leq \max_{1\leq k,j\leq p}\left|\frac{\partial^2\,\sigma(\tilde{\tilde{\theta}}_n,\,Z_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\right|\left[\frac{p^2+p}{2}\right]\sup_n\left[(\tau^{(n)})^\top(\tau^{(n)})\right]. \tag{3.83}$$

.

En combinant les égalités (3.72), (3.76) avec les égalités (3.73), (3.83) respectivement, en utilisant $(A_{3.2})$, et en effectuant un raisonnement analogue à celui de $I_{n,h,1}^{(2,2)}$, nous déduisons que :

$$I_{n,h,1}^{(2,4)} = h\,(v^{(n)})^\top J^\top + o_P(1), \tag{3.84}$$

avec

$$J^\top = (J_1,\ldots,J_P)\,,$$

et

$$J_k = \mathbf{E}\left[\frac{\frac{\partial\,\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}{\partial\,\theta_k}}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\frac{\epsilon_0\dot{M}_f(\epsilon_0)\,G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_0)}\right].$$

En résumé, on a :

$$\begin{aligned} I_{n,h,1} &= I_{n,h,1}^{(1)} + I_{n,h,1}^{(2)}.\\ I_{n,h,1}^{(2)} &= I_{n,h,1}^{(2,1)} + I_{n,h,1}^{(2,2)} + I_{n,h,1}^{(2,3)} + I_{n,h,1}^{(2,4)}. \end{aligned}$$

À partir des égalités (3.69), (3.70), (3.71), (3.82) et (3.84), il vient :

$$I_{n,h,1} = h\,(u^{(n)})^\top K^\top + h\,(v^{(n)})^\top J^\top + o_P(1). \tag{3.85}$$

Évaluation du terme $I_{n,h,3}$

De l'égalité (3.73), nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_{n,h,3} &= \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^n\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta_n},Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\ &= I_{n,h,3}^{(1)} + I_{n,h,3}^{(2)},\\ \text{avec,}\quad I_{n,h,3}^{(1)} &= \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^n\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)},\\ \text{et}\quad I_{n,h,3}^{(2)} &= \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2}\,h\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial^2\,\sigma(\tilde{\tilde{\theta}}_n,\,Z_i)(v^{(n)})}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\tilde{\theta}}_n$ est entre θ_0 et θ_n.

On a :

$$|I^{(2)}_{n,h,3}| \quad \leq \quad \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2}\,|h|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|(v^{(n)})^\top\,\partial^2\,\sigma(\tilde{\tilde{\theta}}_n,\,Z_i)(v^{(n)})|}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,\left|M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\right|.$$

Nous déduisons à partir de (3.9), (3.77), (3.79) , (3.83), $(A_{3.1})$, $(A_{3.2})$, $(A_{4.4})$, l'ergodicité et la stationnarité que :

$$I^{(2)}_{n,h,3} \quad = \quad o_P(1). \tag{3.86}$$

De même et par un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $\sigma(\theta,\cdot)$ au voisinage de θ_0, il vient :

$$\begin{aligned}
I^{(1)}_{n,h,3} &= \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&= \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&- \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&+ \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&= \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}-\frac{1}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)}\Big]\,(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&+ \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&= -n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)}\\
&+ \frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)}\,M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&= I^{(1,1)}_{n,h,3}+I^{(1,2)}_{n,h,3}.
\end{aligned}$$

L'application de l'ínégalité de Cauchy-Schwartz et l'utilisation de (3.9), (3.59), (3.60) , $(A_{3.1})$, $(A_{3.2})$, $(A_{4.1})$, l'ergodicité et la stationnarité, nous permettent de prouver que :

$$\begin{aligned}
I^{(1,1)}_{n,h,3} &= -n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{n}\,h\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\theta_0,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)}M_f(\epsilon_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\
&= o_P(1).
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Nous faisons maintenant une évaluation du terme $I_{n,h,3}^{(1,2)}$, avec

$$I_{n,h,3}^{(1,2)} = \frac{1}{n}\, h \sum_{i=1}^{n} \frac{(v^{(n)})^\top\, \partial\, \sigma(\theta_0,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\, M_f(\epsilon_i)\, \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_i)}.$$

De la même façon que $I_{n,h,1}^{(2,2)}$ et après utilisation de $(A_{2.1})$, et $(A_{3.2})$, on montre que :

$$\begin{aligned} I_{n,h,3}^{(1,2)} &= h\,(v^{(n)})^\top Q^\top + o_P(1) \\ &= o_P(1). \end{aligned} \tag{3.88}$$

Par conséquent, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, nous déduisons que :

$$\begin{aligned} Q^\top &= (Q_1, \cdot, \cdot, \cdot, Q_P)\,, \\ Q_j = \mathbf{E}\left[\frac{\frac{\partial\, \sigma(\theta_0,\, Z_0)}{\partial\, \theta_j}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)} \frac{M_f(\epsilon_0)\, G(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\right] &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, à partir de (3.86), (3.87) et (3.88), il vient :

$$I_{n,h,3} = o_P(1).. \tag{3.89}$$

Évaluation de $I_{n,h,2}$

On peut écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} I_{n,h,2} &= -n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_i)\, \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} \\ &= -n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})\, \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)}\,,\, Z_i)} \\ &= n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})\, \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)} \\ &- n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_i)\, \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)} \\ &= -n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})\, \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)} \\ &- n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})\, G(Z_i) \left[\frac{1}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)} - \frac{1}{\sigma(\theta_0\, Z_i)}\right] \\ &= I_{n,h,2}^{(1)} + I_{n,h,2}^{(2)}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_{n,h,2}^{(1)} &= -n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})\, \frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}, \\ I_{n,h,2}^{(2)} &= -n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\epsilon}_{i,n} - \epsilon_i)^2 \ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{i,n})\, G(Z_i) \left[\frac{1}{\sigma(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} v^{(n)},\, Z_i)} - \frac{1}{\sigma(\theta_0\, Z_i)}\right]. \end{aligned}$$

De (3.51) et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\hat{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)^2 &\leq \frac{2}{n}\Big\{[\frac{(u^{(n)})^\top\,\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}]^2+[\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n, Z_i)^\top)\epsilon_i}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}]^2\Big\}\\ &\leq \frac{2}{n}\|u^{(n)}\|_\ell^2\Big\{\frac{\|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2+\frac{2}{n}\|v^{(n)}\|_P^2\Big\{\frac{\|\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\epsilon_i^2.\end{aligned} \tag{3.90}$$

Alors

$$\begin{aligned}|I^{(1)}_{n,h,2}| &\leq n^{-\frac{1}{2}}\,|h|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\|u^{(n)}\|_\ell^2\Big\{\frac{\|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\Big|\ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\\ &+ n^{-\frac{1}{2}}\,|h|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\|v^{(n)}\|_P^2\Big\{\frac{\|\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\epsilon_i^2\Big|\ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\\ &\leq n^{-\frac{1}{2}}\,|h|\,[\sup_n[(\tau^{(n)})^\top(\tau^{(n)})]\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\Big|\ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_i)\Big|\,\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\\ &+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\epsilon_i^2\Big|\ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_i)\Big|\,\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\Big].\end{aligned}$$

Puisque la fonction $\ddot{M}_f$ est bornée, alors il existe une constante positive ϑ telle que :
$\forall x\in\mathbf{R}$, on a :

$$|\ddot{M}_f(x)| \leq \vartheta. \tag{3.91}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}|I^{(1)}_{n,h,2}| &\leq \vartheta\, n^{-\frac{1}{2}}\,|h|\,[\sup_n[(\tau^{(n)})^\top(\tau^{(n)})]\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\\ &+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\epsilon_i^2\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\Big].\end{aligned}$$

À partir de (3.9), (3.59), (3.60),($A_{3.1}$), ($A_{3.7}$), ($A_{4.1}$) et du théorème ergodique, nous déduisons que lorsque n est assez grand

$$I^{(1)}_{n,h,2} = o_P(1). \tag{3.92}$$

Nous évaluons maintenant le terme $I^{(2)}_{n,h,2}$.
Un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $\sigma(\theta,\cdot)$ au voisinage de θ_0, nous permet d'écrire l'expression de $I^{(2)}_{n,h,2}$ comme suit :

$$I^{(2)}_{n,h,2} = \frac{1}{n}\,\frac{h}{2}\sum_{i=1}^n\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}(\tilde{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)^2\ddot{M}_f(\tilde{\tilde{\epsilon}}_i)\,\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}.$$

De (3.90), (3.91), et l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|I^{(2)}_{n,h,2}| &\leq \frac{1}{n}\vartheta\,|h|\,[\sup_n[(\tau^{(n)})^\top(\tau^{(n)})]^{\frac{3}{2}}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\,\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big| \\
&\times \Big|\frac{(v^{(n)})^\top\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big| \\
&+ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^2\epsilon_i^2\,\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\Big|\frac{\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big|\Big]\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\vartheta\,|h|\,[\sup_n[(\tau^{(n)})^\top(\tau^{(n)})]^{\frac{3}{2}}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\, m(\tilde{\rho}_n,\, Z_i)\|_\ell}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^3\,\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big| \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{\|\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\, Z_i)\|_p}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)}\Big\}^3\epsilon_i^2\,\Big|\frac{G(Z_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\Big|\Big].
\end{aligned}$$

Finalement, à partir de (3.59), (3.60), (3.9), $(A_{3.1})$, $(A_{3.7})$, $(A_{4.2})$ et l'ergodicité, il vient :

$$I^{(2)}_{n,h,2} = o_P(1). \tag{3.93}$$

L'utilisation de (3.92) et (3.93) nous permet de conclure que :

$$I_{n,h,2} = o_P(1). \tag{3.94}$$

En résumé, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{f,h,n} - r_{f,h,n} &= I_{n,h,1} + I_{n,h,2} + I_{n,h,3}, \\
I_{n,h,1} &= h\,(u^{(n)})^\top K^\top + h\,(v^{(n)})^\top J^\top + o_P(1), \\
I_{n,h,2} &= o_P(1), \\
I_{n,h,3} &= o_P(1).
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\tilde{r}_{f,h,n} - r_{f,h,n} = h\,(u^{(n)})^\top K^\top + h\,(v^{(n)})^\top J^\top + o_P(1). \tag{3.95}$$

À fin d'évaluer $\tilde{q}_{f,h',n} - q_{f,h',n}$, nous faisons la différence terme à terme des deux égalités (3.15) et (3.12), nous obtenons :

$$\hat{q}_{f,h',n} - q_{f,h',n} = -n^{-\frac{1}{2}}\,h'\sum_{i=1}^n\left[\frac{N_f(\hat{\epsilon}_{i,n})}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\, Z_i)} - \frac{N_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\, Z_i)}\right]S(Z_i).$$

Un raisonnement similaire à celui de (3.52) nous permet de montrer que :

$$\begin{aligned}\frac{N_f(\hat{\epsilon}_{i,n})}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}-\frac{N_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0,\,Z_i)} &= \frac{N_f(\hat{\epsilon}_{i,n})-N_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}-\frac{n^{-\frac{1}{2}}(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\,Z_i)^\top N_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\\ &= \frac{(\hat{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{N}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}+\frac{(\hat{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)^2\ddot{N}_f(\tilde{\epsilon}_i)}{2\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\\ &- \frac{n^{-\frac{1}{2}}(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\,N_f(\epsilon_i). \qquad (3.96)\end{aligned}$$

D'où :

$$\tilde{q}_{f,h',n}-q_{f,h',n} \;=\; I'_{n,h',1}+I'_{n,h',2}+I'_{n,h',3},$$

avec

$$I'_{n,h',1} \;=\; -n^{-\frac{1}{2}}\,h'\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)\dot{N}_f(\epsilon_i)}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\,S(Z_i), \qquad (3.97)$$

$$I'_{n,h',2} \;=\; -n^{-\frac{1}{2}}\,h'\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{\epsilon}_{i,n}-\epsilon_i)^2}{2\,\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)}\ddot{N}_f(\tilde{\epsilon}_i)\,S(Z_i), \qquad (3.98)$$

$$I'_{n,h',3} \;=\; \frac{1}{n}\,h'\sum_{i=1}^{n}\frac{(v^{(n)})^\top\,\partial\,\sigma(\tilde{\theta}_n,\,Z_i)^\top}{\sigma(\theta_0+n^{-\frac{1}{2}}v^{(n)}\,,\,Z_i)\sigma(\theta_0\,,\,Z_i)}\,N_f(\epsilon_i)\,S(Z_i). \qquad (3.99)$$

Évaluation de $I'_{n,h',1}$

Dans un premier temps, nous remarquons qu'à partir de (3.17), on a :

$$\left|\dot{N}_f(x)\right| \;\leq\; |M_f(x)|+\left|x\,\dot{M}_f(x)\right|. \qquad (3.100)$$

L'application du lemme (3.1), l'utilisation de l'inégalité (3.100), et de la condition $(A_{3.2})$ nous permettent de déduire que :

Il existe $\lambda>0$ tel que :

$$\mathbf{E}\left|\dot{N}_f(\epsilon_0)\right|^{\lambda+2}<+\infty. \qquad (3.101)$$

L'inégalité (3.17) implique que :

$$x\dot{N}_f(x) \;=\; xM_f(x)+x^2\,\dot{M}_f(x).$$

L'application de la dernière inégalité, du lemme 3.1, et de $(A_{3.2})$ nous permettent de conclure qu'il existe $\lambda>0$, tel que : $\mathbf{E}\left|\epsilon_0\dot{N}_f(\epsilon_0)\right|^{\lambda+2}<+\infty$.

De $(A'_{3.2})$ et (3.101) et en effectuant un raisonnement analogue à celui de $I_{n,h,1}$, on montre que :

$$I'_{n,h,1} \;=\; h'\,(u^{(n)})^\top K'^\top+h'(v^{(n)})^\top J'^\top+o_P(1),$$

tels que

$$\begin{aligned} K'^{\top} &= (K'_1, \cdot, \cdot, \cdot, K'_\ell)\,, \\ K'_\ell &= \mathbf{E}\Big[\frac{\frac{\partial\, m(\rho_0,\, Z_0)}{\partial\, \rho_j}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\frac{\dot{N}_f(\epsilon_0)\, S(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\Big], \\ J'^{\top} &= (J'_1, \cdot, \cdot, \cdot, J'_P)\,, \\ J'_k &= \mathbf{E}\Big[\frac{\frac{\partial\, \sigma(\theta_0,\, Z_0)}{\partial\, \theta_k}}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\frac{\epsilon_0 \dot{N}_f(\epsilon_0)\, S(Z_0)}{\sigma(\theta_0\,,\, Z_0)}\Big]. \end{aligned}$$

Évaluation de $I'_{n,h',2}$

Dans ce cas, la condition (3.91) est remplacée par :

$$|\ddot{N}_f(x)| \;\leq\; \vartheta', \tag{3.102}$$

avec ϑ' est un réel positif.

En faisant un raisonnement similaire à celui de $I_{n,h,2}$, et en utilisant $(A_{3.2})$, nous montrons que :

$$I'_{n,h',2} \;=\; o_P(1). \tag{3.103}$$

Évaluation de $I'_{n,h',3}$

À partir de $(A_{2.2})$ et de la définition de la fonction N_f, nous obtenons ce qui suit :

$$(A'_{2.1}): \qquad \mathbf{E}\left\{N_f(\epsilon_0)\right\} = 0.$$

L'utilisation de $(A_{2.1})$, $(A'_{2.1})$ et l'application d'un même raisonnement que celui de $I_{n,h,3}$ nous permettent de montrer que :

$$I'_{n,h',3} \;=\; o_P(1). \tag{3.104}$$

En résumé nous obtenons des égalités (3.102), (3.103) et (3.104) que :

$$\tilde{q}_{f,h',n} - q_{f,h',n} \;=\; h'\,(u^{(n)})^{\top} K'^{\top} + h'\,(v^{(n)})^{\top} J'^{\top} + o_P(1). \tag{3.105}$$

Ainsi la proposition est établie.

3.5.5 Preuve de la proposition 3.2

La preuve de la proposition 3.2 est une conséquence de Le Cam (1960) et Kreiss (1987). Pour plus de détails, voir le lemme 4.4 de Kreiss (1987).

3.5.6 Preuve de la proposition 3.3

(i) Nous considérons la décomposition suivante :

$$(\hat{\rho}_N - \rho)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) = \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho_N)^\top (h\,K^\top + h'K'^\top) + \sqrt{n}(\hat{\rho}_N - \rho)^\top (hK^\top + h'K'^\top) \tag{3.106}$$

avec $N = [1 + n^{\mu+1}]$, et $\mu > 0$.

Remarquons que :

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_N - \rho)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) = \sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{n}\left[(hK_j + h'K'_j)(\hat{\rho}_{N,j} - \rho_j)\right].$$

À partir de la proposition 3.1, les quantités K_j et K'_j sont finies avec $j \in \{1, \ldots, \ell\}$.
On a donc pour tout $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, $\quad hK_j + h'K'_j < \infty$. En utilisant la proposition 2.1, il vient pour tout $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, $\quad \sqrt{n}(\hat{\rho}_{N,j} - \rho_j) = o_p(1)$. Donc :

$$(hK_j + h'K'_j)\sqrt{n}(\hat{\rho}_{N,j} - \rho_j) = o_p(1).$$

Nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{n}\left[(hK_j + h'K'_j)(\hat{\rho}_{N,j} - \rho_j)\right] = o_p(1).$$

La dernière égalité combinée avec (3.106) donne :

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) = \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho_N)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) + o_p(1).$$

(ii) La preuve est similaire à celle de (i).

3.5.7 Preuve de la proposition 3.4

En considérant l'égalité (3.25) et en appliquant les résultats de la proposition (3.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} V_{n,h,h'}(\hat{\rho}, \hat{\theta_n}) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0) &= \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho_N)^\top (h\,K^\top + h'\,K'^\top) \\ &+ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_N)^\top (h\,J^\top + h'\,J'^\top) + o_P(1). \end{aligned} \tag{3.107}$$

Observons que pour tout $(j,k) \in \{1, \ldots, \ell\} \times \{1, \ldots, p\}$, on a :

$$(h\,K_i + h'\,K'_i) = h\left[(K_i - \hat{K}_{N,i}) + \hat{K}_{N,i})\right] + h'\left[(K'_i - \hat{K'}_{N,i}) + \hat{K'}_{N,i})\right], \tag{3.108}$$

et

$$(h\,J_j + h'\,J'_j) = h\left[(J - \hat{J}_{N,j}) + \hat{J}_{N,j})\right] + h'\left[(J'_j - \hat{J'}_{N,j}) + \hat{J'}_{N,j})\right]. \tag{3.109}$$

Sous $(E.1)$ et puisque $\sqrt{n}(\hat{\rho}_{n,i} - \hat{\rho}_{N,i}) = O_p(1)$ et $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,j} - \hat{\theta}_{N,j}) = O_p(1)$, il vient :

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_{n,i} - \hat{\rho}_{N,i})(h\,K_i + h'\,K_i') = \sqrt{n}(\hat{\rho}_{n,i} - \hat{\rho}_{N,i})\left(h\,\hat{K}_{N,i} + h'\,\hat{K'}_{N,i}\right), \quad (3.110)$$

et

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,j} - \hat{\theta}_{N,j})(h\,J_j + h'\,J_j') = \sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,j} - \hat{\theta}_{N,j})\left(h\,\hat{J}_{N,j} + h'\,\hat{J'}_{N,j}\right). \quad (3.111)$$

L'utilisation des égalités (3.110), (3.111) et (3.107) nous permet de terminer la preuve.

3.5.8 Preuve de la proposition 3.5

De la dernière proposition, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n) &- \left[\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\,\hat{K_N}^\top + h'\,\hat{K_N}'^\top) + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\,\hat{J_N}^\top + h'\,\hat{J_N}'^\top)\right] \\ &= \mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0, \theta_0) + o_P(1). \quad (3.112)\end{aligned}$$

L'équation de l'espace tangent Γ de la suite centrale $\mathcal{V}_{n,h,h'}$ au point $(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n)$ est :

$$\Gamma : \mathcal{V}_{n,h,h'}(X,Y) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho_n}, \hat{\theta}_n) = \partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n).\left((X - \hat{\rho}_n)^\top, (Y - \hat{\theta}_n)^\top\right)^\top, \quad (3.113)$$

avec $X^\top = (x_1, \ldots, x_\ell)$, $Y^\top = (y_1, \ldots, y_p)$, $\hat{\rho}_n^\top = (\hat{\rho}_{n,1}, \ldots, \hat{\rho}_{n,\ell})$ et $\hat{\theta}_n^\top = (\hat{\theta}_{1,n}, \ldots, \hat{\theta}_{p,n})$. En utilisant (3.112) et l'équation de l'espace tangent (3.113), nous construisons un autre estimateur $(\bar{\rho}_n, \bar{\theta}_n)$ de (ρ_0, θ_0) tel que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}_{n,h,h'}(X,Y) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho_n}, \hat{\theta}_n) = \partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n).\left((X - \hat{\rho}_n)^\top, (Y - \hat{\theta}_n)^\top\right)^\top \\ &= -\left[\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\,\hat{K_N}^\top + h'\,\hat{K_N}'^\top) + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\,\hat{J_N}^\top + h'\,\hat{J_N}'^\top)\right].\end{aligned}$$

La modification de la j-ème composante du premier estimateur $\hat{\rho}_n$ nous permet de proposer un élément de l'espace tangent Γ qui satisfait à la dernière égalité. Alors nous obtenons le nouvel estimateur $\bar{\phi}_n^\top = \phi_n^{(1,j_n)^\top} = (\bar{\rho}_n, \hat{\theta}_n)$ de (ρ_0, θ_0) avec

$$\bar{\rho_n}^\top = \left(\bar{\rho}_{n,1}, \ldots, \bar{\rho}_{n,\ell}\right),$$

où pour $s \in \{1, \ldots, \ell\}$, $\bar{\rho}_{n,s} = \hat{\rho}_{n,s}$, si $s \neq j_n$ et $\bar{\rho}_{n,j_n} \neq \hat{\rho}_{n,j_n}$.
Le remplacement dans (3.113), donne :

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\rho}_n, \hat{\theta}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho_n}, \hat{\theta}_n) = \partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n, \hat{\theta}_n).\left((\bar{\rho}_n - \hat{\rho}_n)^\top, (\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n)^\top\right)^\top \\ &= -\left[\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_N)^\top (h\,\hat{K_N}^\top + h'\,\hat{K_N}'^\top) + \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_N)^\top (h\,\hat{J_N}^\top + h'\,\hat{J_N}'^\top)\right].\end{aligned}$$

Alors , il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)-\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho_n},\hat{\theta}_n) &= \frac{\partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\partial\rho_{n,j}}[\bar{\rho}_{n,j_n}-\hat{\rho}_{n,j_n}]\\ &= -\Big[\sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\hat{\rho}_N)^\top(h\,\hat{K_N}^\top+h'\,\hat{K_N}'^\top)\\ &+ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\hat{\theta}_N)^\top(h\,\hat{J_N}^\top+h'\,\hat{J_N}'^\top)\Big].\end{aligned}$$

En utilisant (3.112), nous déduisons que :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)=\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)+o_P(1),$$

avec :

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{n,j_n} &= \left[1/(\frac{\partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\partial\rho_{n,j}}\right]\\ &\times \Big[-\sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\hat{\rho}_N)^\top(h\,\hat{K_N}^\top+h'\,\hat{K_N}'^\top)\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\hat{\theta}_N)^\top(h\,\hat{)}\Big]\\ &+ \hat{\rho}_{n,j_n},\end{aligned}$$

et,

$$\frac{\partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\partial\rho_{n,j}} \neq 0.$$

En effectuant un même raisonnement que celui de l'estimateur construit et en modifiant l'une des composantes du second estimateur $\hat{\theta}_n$, on peut également construire un autre estimateur de (ρ_0,θ_0). Pour plus de détails, voir Lounis (2011).

3.5.9 Preuve du théorème 3.3

La proposition 3.5 montre l'existence d'un estimateur $(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)$ de (ρ_0,θ_0), tel que

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)=\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)+o_P(1). \tag{3.114}$$

L'égalité (3.114) signifie que, pour des grandes valeurs de n, le remplacement de la suite centrale $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)$ par sa version estimée $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)$ dans l'expression du test (3.8) n'a pas d'effets.

Sous l'hypothèse où $\frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\partial\rho_{n,j}}\neq 0$, nous considérons à nouveau

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{n,j_n} &= \frac{1}{\frac{\partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\partial\rho_{n,j}}}\times\Big[-\sqrt{n}(\hat{\rho}_n-\hat{\rho}_N)^\top(h\,\hat{K_N}^\top+h'\,\hat{K_N}'^\top)\\ &- \sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\hat{\theta}_N)^\top(h\,\hat{J_N}^\top+h'\,\hat{J_N}'^\top)\hat{\rho}_{n,j_n}.\end{aligned}$$

(3.116)

Il vient :

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{n,j_n} &= \hat{\rho}_{n,j_n} + \left(\frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}\partial\rho_{n,j}}\right) \times -\big[(\hat{\rho}_n-\hat{\rho}_N)^\top(h\,\hat{K_N}^\top + h'\,\hat{K_N}'^\top) \\ &+ (\hat{\theta}_n-\hat{\theta}_N)^\top(h\,\hat{J_N}^\top + h'\,\hat{J_N}'^\top)\big].\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&\big[(\hat{\rho}_n-\hat{\rho}_N)^\top(h\,\hat{K_N}^\top + h'\,\hat{K_N}'^\top) + (\hat{\theta}_n-\hat{\theta}_N)^\top(h\,\hat{J_N}^\top + h'\,\hat{J_N}'^\top)\big] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell}(\hat{\rho}_{n,i}-\hat{\rho}_{N,i})(h\,\hat{K_{N,i}} + h'\,\hat{K_{N,i}}') + \sum_{j=1}^{p}(\hat{\theta}_{n,j}-\hat{\theta}_{N,j})(h\,\hat{J_{N,j}} + h'\,\hat{J'_{N,j}}).\end{aligned}$$

Pour tout $(i,j)\in\{1,\ldots,\ell\}\times\{1,\ldots,p\}$, on a les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned}(\hat{\rho}_{n,i}-\hat{\rho}_{N,i}) &= (\hat{\rho}_{n,i}-\rho_0)+(\rho_0-\hat{\rho}_{N,i}),\\ &\text{et}\\ (\hat{\theta}_{n,j}-\hat{\theta}_{N,j}) &= (\hat{\theta}_{n,j}-\theta_0)+(\theta_0-\hat{\theta}_{N,j}).\end{aligned} \tag{3.117}$$

Considérons les projections $(P_{1,i})_{i=1,\ldots,\ell}$ et $(P_{2,j})_{j=1,\ldots,p}$, telles que :

$$P_{1,i}:(x_1,\ldots,x_\ell)\longrightarrow x_i \;\text{ et, }\; P_{2,j}:(x_1,\ldots,x_p)\longrightarrow x_j.$$

Puisque les fonctions $(P_{1,i})_{i=1,\ldots,\ell}$ et $(P_{2,j})_{j=1,\ldots,p}$ sont continues, en utilisant la proposition 2.1, nous obtenons :

$$\hat{\rho}_{n,i}-\hat{\rho}_{N,i}=o_p(1),\;\text{ et, }\;\hat{\theta}_{n,j}-\hat{\theta}_{N,j}=o_p(1).$$

Pour plus de détails, voir par exemple Van der Vaart (1998).

Les dernières égalités combinées avec (3.117) donnent :

$$\frac{-1}{\frac{\partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}\partial\rho_{n,j}}}\Big[(\hat{\rho}_n-\hat{\rho}_N)^\top(h\,\hat{K_N}^\top + h'\,\hat{K_N}'^\top) + (\hat{\theta}_n-\hat{\theta}_N)^\top(h\,\hat{J_N}^\top + h'\,\hat{J_N}'^\top)\Big] = o_p(1).$$

Nous en déduisons que $(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)\xrightarrow{P}(\rho_0,\theta_0)$ quand $n\longrightarrow\infty$.

De la continuité de la fonction $\tau(\cdot,\cdot)$, de la convergence en probabilité de $(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)$ vers (ρ_0,θ_0), et de la contiguïté des hypothèses nulle et alternative, nous pouvons conclure sous H_0 que :

$$I\Big\{\frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}((\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\tau_{h,h'}(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}\geq Z(u)\Big\} = I\Big\{\frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)}{\tau_{h,h'}(\rho_0,\theta_0)}\geq Z(u)\Big\}+o_P(1).$$

Les suites de tests $\hat{T}_n = I\left\{\frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)}{\tau_{h,h'}(\bar{\rho}_n,\hat{\theta}_n)} \geq Z(u)\right\}$ et $T_n = I\left\{\frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}(\rho_0,\theta_0)}{\tau_{h,h'}(\rho_0,\theta_0)} \geq Z(u)\right\}$ sont localement et asymptotiquement équivalentes, d'où l'optimalité. La puissance locale asymptotique est égale à $1-\Phi\left(Z(\alpha)-\tau_{h,h'}\right)$. Pour plus de détails, voir le théorème (3) de Hwang et Basawa (2001).

Annexe

Nous montrons maintenant les résultats énoncés dans la remarque (3.2). Plus précisément, lorsque f est la fonction de densité d'une loi de Student degré de liberté supérieur ou egale à 3, les fonctions $x \longmapsto \dot{M}_f(x)$, $x \longmapsto \ddot{M}_f(x)$ et $x \longmapsto x\ddot{M}_f(x)$ sont bornées.
On a :

$$f(x) = C_l\left(1+\frac{x^2}{l}\right)^{-\frac{l+1}{2}},$$

avec $C_l = \frac{\Gamma(\frac{l+1}{2})}{\sqrt{\Pi l}\,\Gamma(\frac{l}{2})}$, et Γ désigne la fonction Gamma. Alors

$$\begin{aligned}
M_f(x) &= -\frac{l+1}{l}\,\frac{x}{(1+\frac{x^2}{l})}.\\
\dot{M}_f(x) &= -\frac{l+1}{l}\left[\frac{\frac{2x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}-\frac{1}{1+\frac{x^2}{l}}\right].\\
\ddot{M}_f(x) &= -\frac{l+1}{l}\left[\frac{\frac{8x^3}{l^2}}{(1+\frac{x^2}{l})^3}-\frac{\frac{4x}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}-\frac{\frac{2x}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}\right].
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que :

$$|\dot{M}_f(x)| \leq \frac{l+1}{l}\left[\frac{\frac{2x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}+\frac{1}{1+\frac{x^2}{l}}\right].$$

et

$$\frac{\frac{2x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2x}{\sqrt{l}}}{(1+\frac{x^2}{l})}.\frac{\frac{2x}{\sqrt{l}}}{(1+\frac{x^2}{l})}.$$

Puisque : $\frac{2x}{\sqrt{l}} \leq (1+\frac{x^2}{l})$ et $1 \leq (1+\frac{x^2}{l})$, il vient :

$$|\dot{M}_f(x)| \leq \frac{3(l+1)}{2l}. \tag{3.118}$$

Comme :

$$\left|\ddot{M}_f(x)\right| \leq \frac{l+1}{l}\left[\left|\frac{\frac{8x^3}{l^2}}{(1+\frac{x^2}{l})^3}\right|+\left|\frac{\frac{4x}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}\right|+\left|\frac{\frac{2x}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}\right|\right].$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{8x^3}{l^2}}{(1+\frac{x^2}{l})^3} &= \frac{\sqrt{l}}{l}\frac{\frac{2x}{\sqrt{l}}}{(1+\frac{x^2}{l})}.\frac{\frac{2x}{\sqrt{l}}}{(1+\frac{x^2}{l})}\frac{\frac{2x}{\sqrt{l}}}{(1+\frac{x^2}{l})}.\\
\frac{\frac{4x}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2} &= \frac{2}{\sqrt{l}}\frac{\frac{2x}{\sqrt{l}}}{(1+\frac{x^2}{l})}\frac{1}{(1+\frac{x^2}{l})}.\\
\frac{\frac{2x}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2} &= \frac{\sqrt{l}}{l}\frac{\frac{2x}{\sqrt{l}}}{(1+\frac{x^2}{l})}\frac{1}{(1+\frac{x^2}{l})}.
\end{aligned}$$

À partir des égalités précédentes :

$$|\ddot{M}_f(x)| \leq \frac{(l+1)(4\sqrt{l})}{l^2}.$$

Il reste à prouver que la fonction $x \longmapsto x\ddot{M}_f(x)$ est bornée. En effet :

$$x\ddot{M}_f(x) = -\frac{l+1}{l}\left[\frac{\frac{8x^4}{l^2}}{(1+\frac{x^2}{l})^3} - \frac{\frac{4x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2} - \frac{\frac{2x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}\right].$$

Par la suite :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{8x^4}{l^2}}{(1+\frac{x^2}{l})^3} &= 8\frac{\frac{x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2}\frac{\frac{x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})}.\\
\frac{\frac{4x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2} &= 4\frac{\frac{x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})}\frac{1}{(1+\frac{x^2}{l})}.\\
\frac{\frac{2x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})^2} &= 2\frac{\frac{x^2}{l}}{(1+\frac{x^2}{l})}\frac{1}{1+\frac{x^2}{l}}.
\end{aligned}$$

Étant donné que :

$$\frac{x^2}{l} \leq (1+\frac{x^2}{l}) \leq (1+\frac{x^2}{l})^2,$$

il vient :

$$\left|x\ddot{M}_f(x)\right| \leq \frac{14(l+1)}{l}.$$

L'utilisation de (3.17), (3.118) et (3.119) implique que la fonction $\ddot{N}_f$ est bornée. Ces résultats sont aussi valables quand le degré de liberté est inferieur à 3.

Conclusion 3.1. *Pour l'étude du problème du test, le paramètre du modèle (3.2) est supposé connu dans un premier temps. La propriété LAN est obtenue. La statistique de Neyman Pearson est utilisée avec la preuve de l'optimalité asymptotique locale et le calcul de la puissance du test.*

Quand le paramètre du modèle (3.2) est estimé, les propositions 3.1 et 3.2 représentent les deux outils fondamentaux de la preuve. La proposition 3.1 donne un lien explicite entre la suite centrale avec la vraie valeur du paramètre et la suite centrale estimée. La proposition 3.2 est une conséquence du lemme 4.4 de Kreiss (1987).

L'application de la proposition 2.1 nous a permis d'introduire un nouvel estimateur sur l'espace tangent de la suite centrale. L'utilisation de cet estimateur a entrainé la conservation de la puissance asymptotique locale du test. Les résultats obtenus généralisent ceux du chapitre précédent. L'optimalité locale asymptotique du test a été démontrée pour une grande classe de modèles. En pratique, on peut appliquer ces résultats en finance. Ceci est présenté au chapitre suivant.

Chapitre 4

Quelques applications en finance

Dans cette partie une application de nos résultats dans le domaine des marchés financiers est donnée. Nous nous intéressons plus particulièrement à la bourse et plus précisément au logarithme du retour (log-return) du prix d'une action.

Plusieurs travaux de recherche ont été effectués dans le passé pour examiner la distribution du processus du logarithme du retour. Le grand intérêt suscité pour ce processus est lié à son application dans les investissements et à son rôle fondamental dans l'analyse des marchés financiers.

D'une manière plus précise, la distribution identique et indépendante du log-return est examinée, un test localement asymptotiquement optimal est construit. Les techniques utilisées reposent sur les travaux de Chebana et Laïb (2008), Lounis (2013) et Lounis (2014).

Dans un premier temps, les résultats et notations utilisées sont rappelés, par la suite quelques notions sur les modèles financiers sont présentées. Finalement, nos résultats sont énoncés et prouvés.

Une application est donnée pour l'analyse des données réelles tirées du marché du Capital Market France (FXCM). Nos résultats concordent avec les recherches empiriques effectuées dans le passé. Ces résultats stipulent le rejet de l'hypothèse i.i.d. du logarithme du retour. Finalement, des modèles de prévision sont proposés lorsque les données sont journalières, hebdomadaires et mensuelles.

Ce chapitre donne les détails de Ngatchou-Wandji, J. et Lounis, T. Optimal tests in financial

models. Un article en préparation.

Abstract. Detecting the non linearity of a log-return process is studied. A powerful statistical test is constructed. The local asymptotic normality (LAN) is a fundamental tool in this work. The rejecting of the idea of the i.d.d. hypothesis is ruled out. The non-linearity is deduced. Forecast models are proposed in three various forms of log-return.

Keywords and phrases : $AR(m)$ models, Black Scholes model, Brownian Motion, Contiguity, Drift, Efficiency, Increments, Le Cam theory, Local asymptotic normality, Log-return, Samuelson Model.

4.1 Introduction

Plusieurs phénomènes dans les domaines de la biologie, la physique et la finance peuvent être modélisés par des séries chronologiques. La détection de la non-linéarité de ces modèles représente un sujet de recherche très important. En vue de la validation de ces modèles, une large variété de tests statistiques est proposées en littérature. Parmi ces travaux, on peut citer Subba Rao et Gabr (1980), Hinich (1982), Keenan (1985) et Hjellvik et Tjøstheim (1995).

Notons que l'utilisation de la densité spectrale, des résidus des filtres linéaires et des méthodes non-paramétriques correspondent à trois approches différentes pour le développement de ces tests.

Il est important de rappeler que plusieurs tests proposés sont de type statistique du multiplicateur de Lagrange (LM) introduite dans Saikkonen et Luukkonen (1988). Nous rappelons que l'étude théorique de la puissance locale de LM est difficile, sauf dans le cas où les hypothèses nulle et alternative sont contigües.

En général, la preuve directe de la contiguïté est délicate. Par contre, lorsque la propriété de la normalité asymptotique locale (LAN) est établie, on peut en déduire la contiguïté. Pour plus de détails voir par exemple Droesbeke et Fine (1996).

Depuis l'introduction de la théorie de Le Cam (1960), plusieurs versions de la LAN existent. Parmi elles, on peut citer les versions importantes de Swensen (1985), Hwang et Basawa (2001) et Hwang et Basawa (2003).

Mentionnons que dans le contexte de la détection de la non-linéarité, la LAN n'a pas été

suffisamment considérée. Très peu de travaux existent dans ce sens. Par exemple, on cite les articles de Benghabrit et Hallin (1992), Benghabrit et Hallin (1996), Benghabrit et Hallin (1998) et Cassart et al (2008). Ces derniers travaux sont tous caractérisés par l'obtention de l'une des plus désirables propriétés qu'est l'optimalité.

Dans Hwang et Basawa (2001) et toujours dans un contexte similaire, des suites de modèles contigües au processus $AR(1)$ ont été introduites. Une version de la LAN est établie. Un test optimal de non-linéarité a été obtenu. La puissance asymptotique locale du test est calculée. Cependant, le paramètre du modèle de la série chronologique est supposé connu. Une extension de ces résultats à une classe assez large de modèles et une version estimée du test sont obtenues dans Chebana et Laïb (2008). Par contre l'optimalité asymptotique locale du test n'est pas prouvée.

Dans un même contexte, et en spécifiant la vitesse de convergence vers l'hypothèse nulle H_0, un test optimal de non-linéarité est obtenu dans Ngatchou-Wandji (2005) avec l'utilisation de la LAN. En résumé, l'introduction de la LAN a beaucoup développé les travaux de recherches dans la théorie des tests. Ceci nous conduit à considérer le problème du test du log-return avec une approche différente de celles citées plus haut. En d'autres termes, avec la contribution de la LAN.

Notons que le log-return joue un rôle fondamental dans l'analyse des marchés financiers. Elle donne une prévision sur les premier et dernier prix associés à l'investissement.

Dans ce sens, d'abondantes recherches ont été effectuées dans le passé suivant deux approches. L'une est basée sur la structure de corrélation des log-return et l'autre sur la prévision des log-return à partir des données historiques. Pour la première approche, consulter par exemple Fama et French (1988a), et pour la seconde, voir par exemple Fama et French (1988b).

Le présent travail concerne le problème du test de la linéarité du processus du log-return. En se basant sur la propriété LAN, nous construisons un test localement asymptotiquement optimal. La version de la LAN utilisée est celle de Hwang et Basawa (2001) developpée par Chebana et Laïb (2008).

Comme il a été mentionné au début, l'optimalité de la version estimée du test n'a pas été montrée dans Chebana et Laïb (2008). Un terme asymptotiquement non dégénéré affecte la puissance asymptotique. En vue de la suppression de l'effet causé sur la puissance, nous appliquons les résultats de la proposition 2.1 et nous construisons un autre estimateur du paramètre, cela permet de conserver l'équivalence entre la suite centrale avec le vrai paramètre

et la suite centrale avec le paramètre estimé. En conséquence nous déduisons l'optimalité de notre test. Rappelons que le grand avantage des problèmes de la finance réside dans le fait qu'on peut disposer d'un nombre assez grand de données.

Ce travail est structuré comme suit :

Le paragraphe 4.2 est consacré aux rappels des notations et de quelques résultats et conditions.

Une application à la finance concernant le test de l'hypothèse i.i.d. du processus du log-return est présentée au paragraphe 4.3. Le paragraphe 4.4 est consacré à la présentation de nos principaux résultats.

Pour notre application au paragraphe 4.5, on utilise les données journalières, hebdomadaires et mensuelles du log-return. De même des modèles de prévision sont proposés pour chaque type de donnée.

Le paragraphe 4.6 est consacré aux preuves de nos résultats.

4.2 Conditions et résultats utilisés

En vue de construire notre test, nous avons besoin dans un premier temps de rappeler quelques résultats utilisés et préciser les hypothèses.

Θ_1 et Θ_2 désignent respectivement deux ouverts de $\mathbf{R}^q$ et $\mathbf{R}^\ell$, avec $int(\Theta_1) \neq \emptyset$ et $int(\Theta_2) \neq \emptyset$.

Nous considérons la suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq d}$ avec $\mathbf{X}_i = (X_{i-1}, \ldots, X_{i-d})^\top$, le symbole "$^\top$" désigne la transposée. Dans notre étude nous nous intéressons au modèle de série chronologique suivant :

$$X_i = m_{\theta,h}(\mathbf{X}_{i-1}) + \sigma_{\rho,h'}(\mathbf{X}_{i-1})\epsilon_i, \tag{4.1}$$

où $m_{\theta,h}(\cdot) = m_{\theta_0}(\cdot) + h\ G(\cdot)$ et $\sigma_{\rho,h'}(\cdot) = \sigma_{\rho_0}(\cdot) + h'\ S(\cdot)$, $m_{\theta,h}$ et $\sigma_{\rho,h'}$ désignent les fonctions de régression et de volatilité respectivement et $\sigma_{\rho,h'} > 0$.

G et S sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ et h et h' deux réels. $(\epsilon_i)_i$ est une suite de variables aléatoires centrée réduite et de fonction de densité f, telle que pour tout $i \geq 1$, ϵ_i est indépendante de la σ-tribu $\mathcal{F}_i = \sigma(X_j, j \leq i)$. Nous notons par M_f et N_f les fonctions $M_f : x \mapsto M_f(x) = f'(x)/f(x)$, $N_f : x \mapsto N_f(x) = 1 + xM_f(x)$ et $\phi_x(a,b) = b^{-1}f((x-a)b^{-1})$, avec $b \neq 0$.

Considérons la classe des modèles stochastiques $X_i = T(\mathbf{X}_{i-1}) + V(\mathbf{X}_{i-1})\epsilon_i$. Les valeurs

réelles des fonctions $T(\cdot)$ et $V(\cdot)$ sont inconnues. Nous nous intéressons à l'étude du problème du test du couple des fonctions $(T(\cdot), V(\cdot))$ dans une classe de modèles paramétriques. Plus précisément, soit :

$$\mathcal{M} = \left\{ (m_{\theta_0}(\cdot), \sigma_{\rho_0}(\cdot)), (\theta_0, \rho_0)^\top \in \Theta_1 \times \Theta_2 \right\},$$

chacune des deux fonctions $m_{\theta_0}(\cdot)$ et $\sigma_{\rho_0}(\cdot)$ admet une forme connue.
Pour un échantillon de taille n, on propose de tester $H_0\,[(T(\cdot), V(\cdot)) \in \mathcal{M}]$ contre $H_1\,[(T(\cdot), V(\cdot)) \notin \mathcal{M}]$.
Remarquons que l'hypothèse nulle H_0 est équivalente à :

$$H_0\,(T(\cdot), V(\cdot)] \quad = \quad \Big[m_{\theta_0}(\cdot), \sigma_{\rho_0}(\cdot) \Big],$$

pour $(\rho_0^\top, \theta_0^\top)^\top \in \Theta_1 \times \Theta_2$, tandis que l'hypothèse alternative H_1 est équivalente à

$$H_1\,(T(\cdot), V(\cdot)] \quad \neq \quad \Big[m_{\theta_0}(\cdot), \sigma_{\rho_0}(\cdot) \Big].$$

Nous définissons l'hypothèse alternative $H_1^{(n)}$ par :

$$H_1^{(n)}[(T(\cdot), V(\cdot)] \quad = \quad \Big(m_{\theta_0}(\cdot) + h\, n^{-\frac{1}{2}} G(\cdot), \sigma(\rho_0, \cdot) + h'\, n^{-\frac{1}{2}} S(\cdot) \Big),$$

Pour tester H_0 contre $H_1^{(n)}$, les conditions **(C.1)-(C.4)** sont imposées dans Chebana et Laïb (2008) avec :

(C.1) : Il existe une fonction positive et mesurable M, deux réels positifs γ et δ, avec $\max(|a|, |b-1|) < \delta$ et $\mathbf{E}(M(\epsilon_d))^{1+\gamma} < \infty$, tels que :

$$\left| \frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2}{\partial a^j \partial b^k} \phi_x(a, b) \right| \leq M(x),$$

où, j et k deux entiers positifs vérifiant l'égalité $j + k = 2$.

(C.2) : Il existe un réel positif γ', tel que

$$\max \left(\mathbf{E} \left| \frac{G(X_d)}{\sigma_{\rho_0}(X_d)} \right|^{2+\gamma'} \;\; ; \;\; \mathbf{E} \left| \frac{S(X_d)}{\sigma_{\rho_0}(X_d)} \right|^{2+\gamma'} \right) < \infty.$$

(C.3) : Il existe un réel positif γ'', tel que, pour $k = 0, 1$, on a :

$$\mathbf{E} \big| M_f(\epsilon_d) {\epsilon_d}^k \big|^{2+\gamma''} < \infty.$$

(C.4) :

$\int M_f(x) f(x) dx = \int (\dot{M}_f(x) + M_f^2(x) f(x)) dx = \int x \Big(\Big\{ \dot{M}_f(x) + M_f^2(x) \Big\} f(x) dx = 0,$
$\int x M_f(x) f(x) dx = -1,$ $\int \Big\{ x^2 (\dot{M}_f(x) + M_f^2(x)) \Big\} f(x) dx = 2.$

La condition **(C.1)** de régularité de la fonction de densité f a été imposée dans Hwang et Basawa (2001). Notons qu'une large classe de fonctions de distributions incluant la loi normale satisfait à **(C.3)** et **(C.4)**.

À partir du théorème 2.1 de Chebana et Laïb (2008) et sous **(C.1)-(C.4)** et H_0, la LAN a été prouvée et l'expression du logarithme du rapport de vraisemblance Λ_n est donnée par :

$$\Lambda_n = \Lambda_n(\theta_0, \rho_0) = \mathcal{V}_n(\theta_0, \rho_0) - \frac{{\tau^2}_{h,h'}(\theta_0, \rho_0)}{2} + o_P(1),$$

avec $\mathcal{V}_n(\theta_0, \rho_0) \overset{\mathcal{D}}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(0, \tau^2_{h,h'}(\theta_0, \rho_0)\right)$ quand $n \longrightarrow \infty$,

$$\mathcal{V}_n(\theta_0, \rho_0) = \frac{-1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} h \frac{G(X_t) M_f(\epsilon_t)}{\sigma_{\rho_0}(X_t)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} h' \frac{S(Y_t)\left(1 + \epsilon_t M_f(\epsilon_t)\right)}{\sigma_{\rho_0}(X_t)},$$

$$\tau^2_{h,h'}(\theta_0, \rho_0) = h^2 I_0 \mathbf{E}\left(\frac{G(X_d)}{\sigma_{\rho_0}(X_d)}\right)^2 + h'^2 (I_2 - 1)\mathbf{E}\left(\frac{S(X_d)}{\sigma_{\rho_0}}(X_d)\right)^2 + hh' I_1 \mathbf{E}\left(\frac{G(X_d)S(X_d)}{\sigma^2_{\rho_0}(X_d)}\right),$$

et,

$$I_j = \mathbf{E}\Big(\epsilon_0^j M_f^2(\epsilon_0)\Big), \qquad j \in \{0, 1, 2\}.$$

La statistique proposée est celle de Neyman-Pearson avec

$$T_n = T_n(\theta_0, \rho_0) = I\Big\{\frac{\mathcal{V}_n(\theta_0, \rho_0)}{\tau_{h,h'}(\theta_0, \rho_0)} \geq c_\alpha\Big\}, \tag{4.2}$$

où c_α est le $(1-\alpha)$-quantile de la loi normale standard. Rappelons que ce test consiste à rejeter H_0 lorsque $T_n \geq c_\alpha$. De plus, le test associé à T_n est localement asymptotiquement optimal quand ρ_0 et θ_0 sont connus. La puissance asymptotique du test est $1 - \Phi\left(c_\alpha - \tau(\theta_0, \rho_0)\right)$.

En pratique, le paramètre du modèle de la série chronologique est inconnu. Son estimation induit une erreur qui affecte la puissance du test.

En général, quand on considère un modèle stochastique tel que (4.1), l'obtention de l'optimalité est difficile. Deux difficultés apparaissent, l'une concerne l'établissement d'un lien explicite entre la suite centrale et sa version estimée, et l'autre concerne la suppression de l'effet de l'erreur commise après estimation.

En utilisant les estimateurs asymptotiquement discrets introduits dans Le Cam (1960) et en utilisant le lemme 4.4 de Kreiss (1987), un lien explicite est établi entre la suite centrale et sa version estimée dans la proposition 2.2 de Lounis (2013). Ce lien concerne un modèle stochastique contenant une large classe des modèles de séries chronologiques et comprenant (4.1).

Il est important de rappeler que l'expression de plusieurs statistiques de tests classiques dépend de la suite centrale qui apparait dans la version de la LAN. Le remplacement du

paramètre par un estimateur entraine la non équivalence de la suite centrale avec sa version estimée. En conséquence, la puissance du test est affectée.
En vue de résoudre ce problème, nous proposons d'abord une évaluation de l'erreur commise après estimation. Ceci est l'application directe de la proposition 2.1. Ensuite nous construisons un autre estimateur de telle manière que la suite centrale et sa version estimée soit équivalente. Enfin nous déduisons l'optimalité du test.
Nous sommes intéressé par le cas particulier suivant :

$$m_{\theta_0}(\mathbf{X}_{i-1}) = m_{(\mu_0,\sigma_0)}(\mathbf{X}_{i-1}) = \mu_0 - ({\sigma_0}^2)/2 \quad \text{et} \quad \sigma_{\rho_0}(\mathbf{X}_{i-1}) = \sigma_0.$$

On a : $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0)$, $\rho_0 = \sigma_0$, $q = 2$ et $\ell = 1$.
Ce choix est motivé par l'application de nos résultats aux données issues des marchés financiers. Plus précisement, un test de l'hypothèse i.i.d. du log-return est considéré et étudié au paragraphe 4.3.2. Dans le but de mieux présenter ce problème, nous avons besoin dans un premier temps de rappeler quelques notions sur les modèles stochastiques gouvernés par les Mouvement Brownien (MB).

4.3 Une application en finance

Dans cette partie, nous présentons une application dans la modélisation des prix d'une action. Cette application concerne le problème du test dans la classe des modèles non-linéaires. À cet effet, nous testons l'hypothèse i.i.d. du log-return. La construction de ce test est basée sur les travaux de Chebana et Laïb (2008), Lounis (2013) et Lounis (2014). Nous rappelons au paragraphe 4.3.1 quelques définitions concernant le processus de Weiner, et quelques modèles appliqués en finance. Par la suite nous présentons notre problème de test au paragraphe (4.3.2).

4.3.1 Régression bilinéaire simple dirigé par un Mouvement Brownien

L'introduction du MB a beaucoup contribué au développement de la modélisation des processus des innovations décrits par les séries temporelles dans les domaines de la physique, de la chimie, de la biologie, de la finance et autres.
Le concept du MB a été introduit pour la première fois par Robert Brown suite à la descrip-

tion du mouvement des pollens en suspension dans l'eau. Depuis, ce concept est devenu un outil incontournable dans la modélisation des événements irréguliers observés dans les différents domaines. Parmi ces applications, citons le célébre travail du physicien Albert Einstein en 1905, où un modèle décrivant la trajectoire des atomes a été développé.

Le MB $B = (B_t)$ est un processus Gaussien particulier vérifiant les trois conditions suivantes :

1) $B_0 = 0$.

2) Avec une probabilité 1, B_t est continue en t.

3) B_t admet des accroissements stationnaires indépendants et de distribution Gaussienne.

Notons que le MB peut être également caractérisé par les moments d'ordre 1 et par sa fonction de covariance, pour plus de détails consulter Karatzas et Shreve (1988).

Revenons maintenant au domaine de la finance et rappelons quelques travaux qui sont en relation directe avec la présente étude.

D'abord, en 1900 et en vue d'étudier les cours de la bourse, Bachelier (1900) propose dans sa thèse doctorale le modèle stochastique suivant :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \mu_0 t + \sigma_0 B_t,$$

où $\tilde{S}_0$, μ_0, σ_0 sont des constantes et B_t un MB. Le grand inconvénient dans ce modèle est son application lorsque $\tilde{S}_t$ est négatif. Par la suite, un modèle plus important a été proposé dans Samuelson (1965) avec

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(\{\mu_0 - \frac{{\sigma_0}^2}{2}\}t + \sigma_0 B_t\right). \tag{4.3}$$

Enfin, en se basant sur (4.3), sous l' hypothèse que pour tout $t = 0, \ldots, T.$, il existe une constante r telle que $\tilde{S}_t = \exp(rt)$, et en utilisant les calculs d'Itô, Black et Scholes (1973) proposent un modèle continu avec un actif risqué décrivant l'évolution des cours de l'action $\tilde{S}_t$, avec $\tilde{S}_t$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$d\tilde{S}_t = \mu_0 \tilde{S}_t dt + \sigma_0 \tilde{S}_t dB_t, \tag{4.4}$$

où, μ_0 et σ_0 désignent respectivement le drift et la volatilité.

En prenant le logarithme dans les deux membres de (4.3), on obtient :

$$Log(\tilde{S}_t) = Log(\tilde{S}_0) + \left(\{\mu_0 - \frac{{\sigma_0}^2}{2}\}t + \sigma_0 B_t\right), \quad t = 1, \ldots, T. \tag{4.5}$$

De (4.5), on a :

$$Log(\tilde{S}_t/\tilde{S}_{t-1}) = \mu_0 - \frac{{\sigma_0}^2}{2} + \sigma_0 W_t, \quad t = 1 \ldots, T. \tag{4.6}$$

où, $W_t = B_t - B_{t-1}$ l'accroissement du MB.
Le processus $\left(X_t = Log(\tilde{S}_t/\tilde{S}_{t-1})\right)_t$ est appelé processus du log-return en temps discret.
Une grande importance a été accordée dans le passé à l'estimation des paramètres de ce processus de diffusion. En pratique cette estimation est souvent basée sur les données historiques. Pour plus de détails, voir par exemple Rajna (1991).
L'estimateur de $(\mu_0, {\sigma_0}^2)$ est $(\mu_n, {\sigma^2}_n)$, avec

$$\mu_n = \bar{X}_n + \big((\sigma^2{}_n)/2\big). \tag{4.7}$$

$$\sigma^2{}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\big(log(\tilde{S}_t/\tilde{S}_{t-1}) - \bar{X}_n\big)^2. \tag{4.8}$$

et,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} log\left(\tilde{S}_t/\tilde{S}_{t-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t.$$

Notons que μ_n et ${\sigma^2}_n$ convergent presque sûrement vers μ_0 et ${\sigma_0}^2$ (respectivement).

4.3.2 Présentation du problème de test

Les propriétés des processus de Weiner nous pemettent de conclure que sous H_0, le log-return est i.i.d.. Le modèle (4.6) peut également s'écrire :

$$X_t = \mu_0 - \frac{{\sigma_0}^2}{2} + \sigma_0 W_t, \quad t = 1, \dots T. \tag{4.9}$$

Soit P_0 la mesure de probabilité correspondante au modèle (4.9), et P_n la mesure de probabilité correspondante à :

$$X_t = \mu_0 - \frac{{\sigma_0}^2}{2} + \frac{hG(Y_t)}{\sqrt{n}} + \left[\sigma_0 + \frac{h'S(Y_t)}{\sqrt{n}}\right] W_t, \quad t = 1, \dots T. \tag{4.10}$$

Nous considérons le modèle 4.10 et nous testons H_0 contre H_1^n tel que :

$$H_0 : h = h' = 0 \quad \text{et} \quad H_1^{(n)} : h \neq 0 \ \text{ et } \ h' \neq 0. \tag{4.11}$$

Sous H_0, le résidu W_t est donné par :

$$W_t = \left(X_t - [\mu_0 - \frac{{\sigma_0}^2}{2}]\right)/\sigma_0. \tag{4.12}$$

De (4.7) et (4.8), l'estimateur naturel $\widehat{W_t}$ de W_t est :

$$\widehat{W_t} = \widehat{W_t}(\mu_n, \sigma_n) = \left(X_t - [\mu_n - \frac{{\sigma^2}_n}{2}]\right)/\sigma_n. \tag{4.13}$$

Nous pouvons déjà remarquer qu'à partir des propriétés du MB, la stationnarité des accroissements de W_t entraine celle du modèle (4.9). Clairement, pour des observations $(X_t)_{t=1,\dots,n.}$, sous H_0, X_t est généré selon le modèle (4.9), et sous H_1^n, X_t est généré selon le modèle (4.10). Nous présentons dans le paragraphe qui va suivre nos résultats et nous supposons dans toute la suite que le modèle (4.10) est ergodique (au sens de la définition 1.2.4).

4.4 Principaux résultats

Nous sommes prêts maintenant à présenter nos principaux résultats, en commençant par le principe de la normalité asymptotique LAN établi dans la proposition suivante :

Proposition 4.1. ***(LAN)*** *Nous supposons que les conditions* ***(C.1)-(C.4)*** *sont satisfaites. Alors, sous H_0, on a :*

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0,\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} h\frac{G(X_t)W_t}{\sigma_0} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} h'\frac{S(X_t)\left(1-W_t^2\right)}{\sigma_0}.$$

Comme il a été mentionné aux paragraphes précédents, dans le but d'établir un lien explicite entre la suite centrale et sa version estimée, nous introduisons dans un premier temps la version discrétisée $(\hat{\mu_n},\hat{\sigma_n})$ de l' estimateur (μ_n,σ_n). Par la suite, en appliquant les résultats des propositions 3.1 et 3.2, il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0,\sigma_0)\\
&= \sqrt{n}(\hat{\mu}_n-\mu_0)\times\left(h\mathbf{E}\left[\frac{\partial\, m(\mu_0,\sigma_0)}{\partial\,\mu}\frac{\dot{M}_f(W_1)\,G(X_1)}{{\sigma_0}^2}_{0}\right] + h'\mathbf{E}\left[\frac{\partial\, m(\mu_0,\sigma_0)}{\partial\,\mu}\frac{\dot{N}_f(W_1)\,S(X_1)}{\sigma^2}\right]\right)\\
&\quad+\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n-\sigma)\times\left(h\mathbf{E}\left[\frac{\partial\, m(\mu_0,\sigma_0)}{\partial\,\sigma}\frac{\dot{M}_f(W_1)\,G(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right] + h'\mathbf{E}\left[\frac{\partial\, m(\mu_0,\sigma_0)}{\partial\,\sigma}\frac{\dot{N}_f(W_1)\,S(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right]\right)\\
&\quad+\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n-\sigma)\times\left(h\mathbf{E}\left[\frac{\partial\,\sigma_\rho}{\partial\,\sigma}\frac{W_1\dot{M}_f(W_1)\,G(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right] + h'\mathbf{E}\left[\frac{\partial\,\sigma_\rho}{\partial\,\sigma}\frac{W_1\dot{N}_f(W_1)\,S(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right]\right) + o_p(1).
\end{aligned}$$

Soit donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0,\sigma_0) &= \sqrt{n}(\hat{\mu}_n-\mu_0)\left(-h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right] - 2h'\mathbf{E}\left[\frac{W_1S(X_1)}{\sigma^2}\right]\right)\\
&+ \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n-\sigma)\left(h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right] + 2h'\mathbf{E}\left[\frac{W_1S(X_1)}{\sigma_0}\right]\right)\\
&+ \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n-\sigma)\left(-h\mathbf{E}\left[\frac{W_1G(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right] - 2h'\mathbf{E}\left[\frac{W_1^2S(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right]\right)\\
&+ o_p(1).
\end{aligned}$$

Étant donné que les accroissements W_i sont indépendants de la tribu $\mathcal{F}_i = \sigma(X_j, j \leq i)$, nous déduisons que :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0) &= \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_0) \times \left(-h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right]\right) \\ &+ \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \times \left(h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right] - 2h'\mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{\sigma_0^2}\right]\right) \\ &+ o_p(1). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Rappelons que les propositions 3.1 et 3.2 ont été obtenues sous la condition (A_4) du chapitre 3. Dans le présent travail, cette condition est équivalente à :

(C.5) : Pour tout $n \geq 1$, il existe une boule fermée $\overline{B_n} = \overline{B_n}\Big(\sigma_0, r_n\Big) \subset int(\Theta_2)$, avec $r_n \geq |\sigma - \hat{\sigma}_n|$, et une fonction positive N_n, telle que $E\Big(\sup_{n\geq 1} N_n(X_1)\Big)^{\delta+2} < \infty$, avec $\delta > 0$, et satisfaisant à

$$\sup_{x_n \in \overline{B_n}} (\frac{1}{x_n}) \leq N_n(X_1).$$

Notons également que pour l'obtention des propositions 3.1 et 3.2, la fonction $\cdot \mapsto \ddot{M}_f(\cdot)$ a été supposée bornée. En revanche dans le présent travail, cette condition est une conséquence directe des propriétés des accroissements du MB.

En résumé, sous **(C.1)-(C.5)**, l'égalité (4.14) est obtenue. Clairement, (4.14) donne un lien explicite entre la suite centrale avec le vrai paramètre $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0)$ et sa version estimée $\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$.

Remarquons d'une part que $\mathbf{E}\big[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\big] \neq 0$, $\mathbf{E}\big[\frac{G(X_1)}{\sigma_0^2}\big] \neq 0$ et $\mathbf{E}\big[\frac{S(X_1)}{\sigma_0^2}\big] \neq 0$, et d'une autre part que, $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_0) = O_p(1)$, et $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_0) = O_p(1)$.

Par conséquent, les deux suites centrales, avec le vrai paramètre, et avec le paramètre estimé ne sont pas équivalentes. Dans le but de supprimer l'effet des deux termes asymptotiquement non dégénérés $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_0)$ et $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_0)$, nous avons besoin de prouver le résultat suivant :

Proposition 4.2. *On suppose que les conditions **(C.1)-(C.5)** sont satisfaites. Alors, il existe $\lambda > 0$, tel que :*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0) &= \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_N) \times -h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{{\sigma_0}^2}\right] \\ &+\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_N) \times \left(h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right] - 2h'\mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{\sigma_0^2}\right]\right) + o_p(1), \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $N = [1 + n^{\lambda+1}]$ et "[ ]" désigne la partie entière.

Observons que les quantités $\mathbf{E}\Big[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\Big]$, $\mathbf{E}\Big[\frac{G(X_1)}{{\sigma_0}^2}\Big]$ et $\mathbf{E}\Big[\frac{S(X_1)}{{\sigma_0}^2}\Big]$ sont inconnues. Il est possible de remplacer ces quantités inconnues par des quantités connues. À cette fin, nous imposons

la condition suivante :

(C.6) : Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une boule fermée $\overline{B_{n,1}} = \overline{B_{n,1}}\Big(\sigma_0, r_{n,1}\Big) \subset int(\Theta_2)$ avec $r_{n,1} \geq |\sigma - \hat{\sigma}_n|$, une fonction positive $N_{n,1}$ telle que $E\Big(\sup_{n\geq 1} N_{n,1}(X_1)\Big)^{\delta'+2} < \infty$ avec $\delta' > 0$, et satisfaisant à :

$$\sup_{x_n \in \overline{B_{n,1}}} (\frac{1}{x_n^2}) \leq N_{n,1}(X_1).$$

Nous obtenons ainsi le lemme suivant :

Lemme 4.1. *On suppose que les conditions* ***(C.1)-(C.6)*** *sont satisfaites. Alors*

(i) $\mathbf{E}\Big[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\Big] - \mathbf{E}\Big[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\Big] \longrightarrow 0$, *et,* $\mathbf{E}\Big[\frac{S(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\Big] - \mathbf{E}\Big[\frac{S(X_1)}{\sigma_0}\Big] \longrightarrow 0$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

(ii) $\mathbf{E}\Big[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\Big] - \mathbf{E}\Big[\frac{G(X_1)}{\sigma_0^2}\Big] \longrightarrow 0$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

(ii) $\mathbf{E}\Big[\frac{S(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\Big] - \mathbf{E}\Big[\frac{S(X_1)}{\sigma_0^2}\Big] \longrightarrow 0$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

L'application du lemme 4.1 nous permet d'obtenir la propostion suivante :

Proposition 4.3. *On suppose que les conditions* ***(C.1)-(C.6)*** *sont satisfaites. Alors, il existe* $\lambda > 0$, *tel que :*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0) &= \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_N) \times \left(-h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right]\right) \\ &+ \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_N) \times \left(h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\right] - 2h'\mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right]\right) + o_p(1),\end{aligned}$$

$$o\grave{u} \quad , N = [1 + n^{\lambda+1}], \lambda > 0. \tag{4.16}$$

Nous construisons maintenant un autre estimateur de $(\mu_0.\sigma_0)$ telle que la suite centrale avec le vrai paramètre est équivalente à la suite centrale avec ce nouvel estimateur.

Dans toute la suite les dérivées partielles $\mathcal{V}_{n,h,h'}$ en $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$ sont supposées non nulles. Nous obtenons ainsi ce qui suit :

Proposition 4.4. ***(Équivalence entre les suites centrales)***

On suppose que les conditions ***(C.1)-(C.6)*** *sont satisfaites. Alors, il existe un estimateur consistant* $(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)$ *de* $(\mu_0.\sigma_0)$ *tel que :*

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0) = o_p(1). \tag{4.17}$$

L'estimateur construit $(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)$ permet d'obtenir l'équivalence entre les deux versions des suites centrales. C'est sur ce résultat que repose la preuve de l'optimalité du test considéré $\bar{T_n} = T_n(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)$. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 4.1. ***(Optimalité)***

On suppose que les conditions ***(C.1)-(C.6)*** *sont satisfaites. Alors, la puissance asymptotique*

locale de $\bar{T}_n = T_n(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)$ *sous* H_1^n *est égale á* $1 - \Phi\left(c_\alpha - \tau(\mu, \sigma)\right)$. *Le test* $\bar{T}_n$ *est localement asymptotiquement optimal.*

Notons que pour un niveau fixé $\alpha \in [0, 1]$, en utilisant les égalités (4.11) et (4.13), la forme explicite de notre test est :

$$T_n = I\Big\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} h \frac{G(X_t)\bar{W}_t}{\bar{\sigma_n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} h' \frac{S(X_t)(1-\bar{W}_t^2)}{\bar{\sigma_n}}}{\tau_{h,h'}} \geq c_\alpha \Big\}, \qquad (4.18)$$

$$\text{où} \quad \bar{W} = W(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n).$$

4.5 Applications aux données réelles

Dans notre application, nous examinons le test de l'hypothèse i.i.d. du log-return lorsque les données de la bourse sont journalières, hebdomadaires et mensuelles. Comme il a été prouvé au paragraphe précédent, nous considérons un test localement asymptotiquement optimal dont l'expression est donnée par (4.11). Le niveau minimal de notre test est fixé à $\alpha = 0.05$. Le principe de ce test consiste à accepter ou à rejeter l'hypothèse i.i.d. du log-return sous la base des trois formes citées. Nous proposons par la suite des modèles de prévision pour chaque type de données. Les données dont nous disposons proviennent du Forex Capital Market France (FXCM), elles ont les caractéristiques suivantes :
500 données journalières consécutives, couvrant la période du 11 Mai 1993 au 7 Novembre 1995. 500 données hebdomadaires consécutives, couvrant la période de Mai 1993 au 23 Novembre 2002. 263 données mensuelles consécutives, couvrant la période du 01 Mai 1993 au 1 mars 2015.
Nous considérons à nouveau le test 4.11 pour le log-return journalier, le paramètre λ est fixé à 0.7. Un échantillon de taille de $N = 140$ est considéré, chaque observation correspond à un instant discret t où $t = 1, 2, \ldots, 140$. Le test est étudié pour l'échantillon de taille n.
Au départ, nous testons H_0 contre H_1^n entre les instants $t = 40$ et $t = 139$ correspondant à la valeur de $n = 100$. La correction se fait en considérant l'échantillon de taille $N = 140$ correspondant aux observations en temps discret allant entre $t = 1$ et $t = 140$ (en utilisant les observations antérieures à l'instant $t = 40$). Les fonctions S et G sont prises constantes, égale à 0.02, et $h = h' = 1$. En utilisant les formules (4.7) et (4.8), nous obtenons respectivement les estimateurs μ_n et σ_n du drift μ_0 et de la volatilité σ_0. Les formes discrétisées de ces deux estimateurs sont notées $\hat{\mu}_n$ et $\hat{\sigma}_n$. Pour l'obtention de l'équivalence entre les suites centrales, nous utilisons l'estimateur corrigé $(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)$ obtenu après la perturbation de

la première composante du premier estimateur. Plus prècisèment, $\bar{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n$ et $\bar{\mu}_n = \hat{\mu}_n + x_n$, avec x_n est défini dans l'égalité (4.24).

Du théorème 4.1, le test statistique (4.18) est localement asymptotiquement optimal. Son application nous permet de rejeter l'hypothèse H_0. Nous reprenons la même procédure pour les valeurs $n = 110, 110, 120, 130, 150, 200$ et 250 correpondant respectivement aux valeurs suivantes : $N = 154, 169, 184, 214, 214, 291$ et 369.

En suivant les mêmes étapes que le cas précédent, en prenant $S(x) = G(x) = 0.02$, et en considérant les données hebdomadaires. Nous testons H_0 contre H_1^n, nous constatons que pour le log-return hebdomadaire, la conclusion est similaire à celle obtenue à partir des données journalières.

Pour le log-return mensuel, nous utilisons les mêmes méthode et démarche que celles des données journalières et hebdomadaires. Dans ce cas pour tout x, on fixe

$S(x) = G(x) = 0.02$. Dans un premier temps nous étudions le test entre $t = 40$ et $t = 139$ $(n = 100)$. Puisqu'on dispose que de 263 données, nous répètons cette procédure pour $n = 110, 120, 130, 150, 160$ et 170 correspondant à $N = 154, 169, 184, 214, 229$ et 245 (respectivement). Dans ce cas aussi, l'hypothèse i.i.d. est rejetée.

Étant donné que les accroissements du MB sont gaussiens, la vérification de $(C.2) - (C.4)$ est facile. En effet, on a :

- Les fonctions G et S sont bornées et $\sigma > 0$, d'où pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\max\left(\mathbf{E}\Big|\frac{G(X_d)}{\sigma_{\rho_0}(X_d)}\Big|^{2+\gamma'} \quad , \quad \mathbf{E}\Big|\frac{S(X_d)}{\sigma_{\rho_0}(X_d)}\Big|^{2+\gamma'}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{0.02}{\sigma}\right)^{2+\gamma'} < \infty.$$

Donc $(C.2)$ est vérifiée.

- On a pour $k = 0$, on peut par exemple choisir $\gamma = 1$ et on obtient$\mathbf{E}\,|W_1|^3 = 0 < \infty$.

Pour $k = 1$ et $\gamma = 1$, nous avons $\mathbf{E}\,|W_1|^6 < \infty$, (car les moments d'une gaussienne sont finis), d'où $(C.3)$ est vérifiée.

- Puisque $\mathbf{E}(M_f(W_1)) = \mathbf{E}(-W_1) = 0$, $\mathbf{E}(\dot{M}_f(W_1)) = -1$ et $\mathbf{E}(\ddot{M}_f(W_1)) = 0$, alors $(C.4)$ est bien vérifiée.

Les résultats de ces simulations sont présentés dans les tableaux suivants :

Log-return journalier				
n	$N = [1 + n^{\lambda+1}], \lambda > 0$	Donnée	valeur du test	Hypothèse acceptée
100	139	500	4.5028	H_1^n
110	154	500	4.5937	H_1^n
120	169	500	5.1654	H_1^n
130	184	500	5.2002	H_1^n
150	214	500	5.4729	H_1^n
200	291	500	4.7124	H_1^n
250	369	500	5.2381	H_1^n
Log-return hebdomadaire				
n	$N = [1 + n^{\lambda+1}], \lambda > 0$	Donnée	valeur du test	Hypothèse acceptée
100	139	500	5.2006	H_1^n
110	154	500	5.4519	H_1^n
120	169	500	3.3822	H_1^n
130	184	500	3.7435	H_1^n
150	214	500	4.1709	H_1^n
200	291	500	5.4203	H_1^n
250	369	500	6.4799	H_1^n
Log-return mensuelle				
n	$N = [1 + n^{\lambda+1}], \lambda > 0$	Donnée	valeur du test	Hypothèse acceptée
100	139	263	5.2006	H_1^n
110	154	263	5.4519	H_1^n
120	169	263	3.3822	H_1^n
130	184	263	3.7435	H_1^n
150	214	263	4.1709	H_1^n
160	229	263	5.4203	H_1^n
170	245	263	6.4799	H_1^n

Conclusion 4.1. *En conséquence, on rejette l'hypotèse i.i.d. du log-return dans ses trois formes, journalière, hebdomadaire et mensuelle.*

Modèles de prèvisions

Selon la règle de décision établie au paragraphe précédent l'hypothèse nulle est rejetée dans chaque cas. Ceci nous motive à proposer sous l'hypothèse alternative des modèles de prévision

pour chaque forme du log-return. Au départ, nous fixons la taille de l'échantillon à $n = 100$, nous construisons un modèle de prévision entre les instants $t = n + 1$ et t=dernierinstant, dernierinstant=500 pour les log-return journaliers et hebdomadaires et dernierinstant=263 pour le log-return mensuel. Nous répètons la même procédure en attribuant à n les valeurs $110, 120, 150$ et 180. Les valeurs prédites sont construites entre les instants $t = n + 1$ et t=dernierinstant. Nous notons par P l'horizon de la prévision .

Nous comparons l'erreur quadratique moyenne MSE 1 entre le log-return avec la vraie valeur et le log-return sous l'hypothèse nulle, avec l'erreur quadratique moyenne MSE 2 entre le log-return avec la vrai valeur et le log-return sous l'hypothès alternative. Les résultats obtenus sont présentés au tableau des prévisions.
Nous constatons que dans chaque cas, lorsque la taille de l'échantillon augmente, l'erreur MSE 2 décroit.

Concernant les log-return journalier et mensuel, nous remarquons que MSE 2 est inférieur à MSE 1 quand n dépasse 100. Ceci explique la concordance avec les résultats obtenus avec la règle de décision du test. En revanche pour le log-return hebdomadaire MSE 2 est supérieure à MSE 1.
Le modèle de prévision sous l'hypothèse alternative entre les instants $t = n+1$ et t=dernierinstant du log-return journalier est :

$$X_t = \mu_n - \frac{{\sigma_n}^2}{2} + \frac{0.02}{\sqrt{n}} + \left(\sigma_n + \frac{0.02}{\sqrt{n}}\right) W_t, \quad t = n+1, \dots T. \tag{4.19}$$

Pour le log-return hebdomadaire :

$$X_t = \mu_n - \frac{{\sigma_n}^2}{2} + \frac{0.02}{\sqrt{n}} + \left(\sigma_n + \frac{0.02}{\sqrt{n}}\right) W_t, \quad t = n+1, \dots T. \tag{4.20}$$

Et pour le log-return mensuel :

$$X_t = \mu_n - \frac{{\sigma_n}^2}{2} + \frac{0.02}{\sqrt{n}} + \left(\sigma_n + \frac{0.02}{\sqrt{n}}\right) W_t, \quad t = n+1, \dots T. \tag{4.21}$$

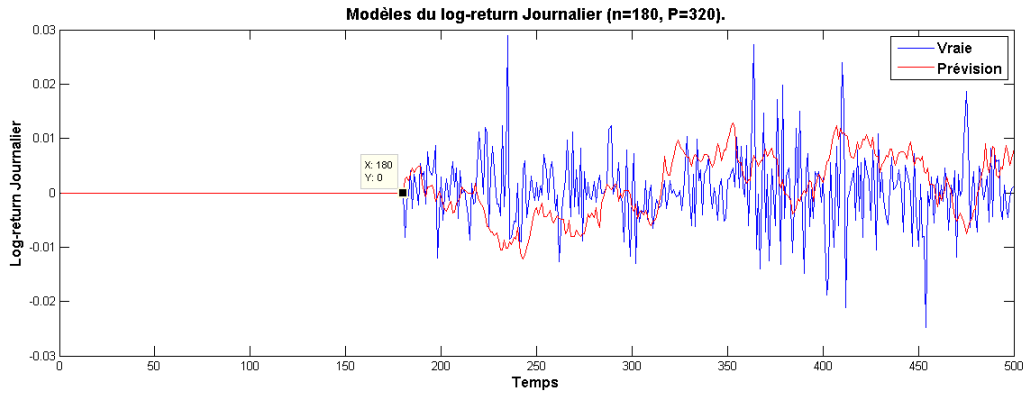
Où $W = (W_t)$ est l'accroissement du processus de Wiener.

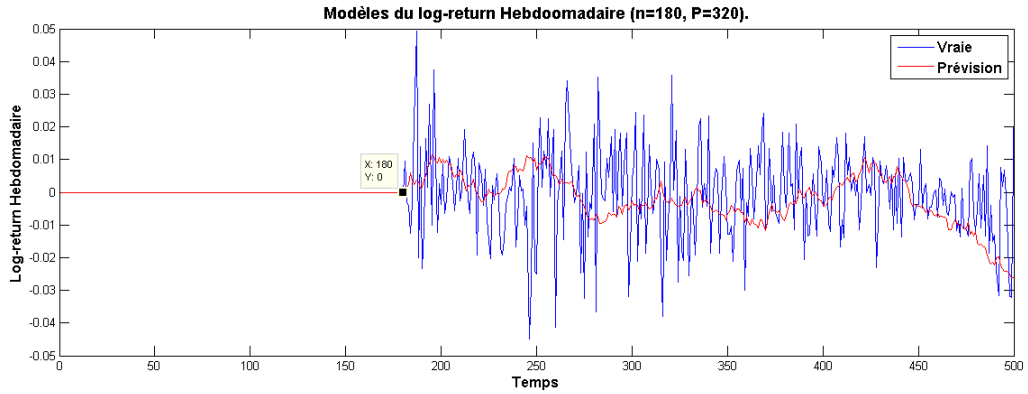
De même, pour chaque type de données, nous représentons simultanément le log-return avec les vraies valeurs et avec les valeurs prédites.

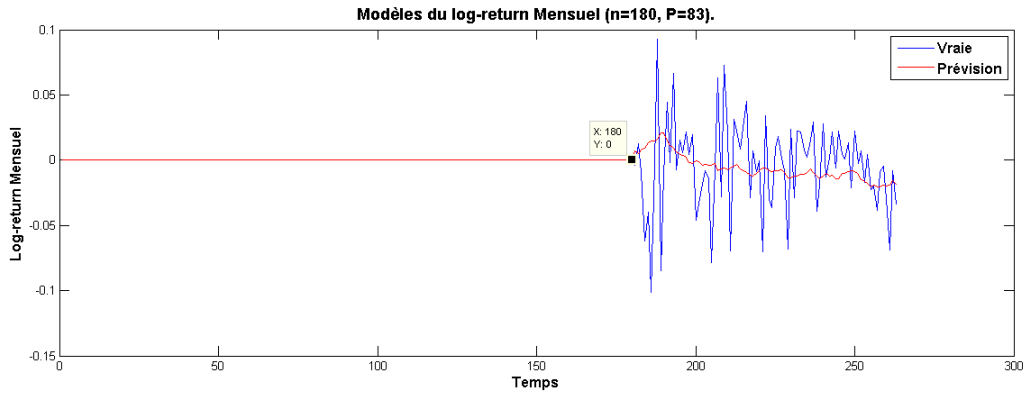
À partir des représentations graphiques et du tableau des prévisions, nous pouvons conclure que les modèles de prévision obtenus sont meilleurs pour les données journalières et mensuelles, avec de meilleurs résultats dans le cas mensuel. Nous obtenons les tableaux et graphiques suivants :

Tableau de prévision :

Prévision de log-return journalier				
n	Prévision de taille (P)	MSE 1	MSE 2	
100	400	4.0948×10^{-6}	4.8120×10^{-4}	
110	390	8.3067×10^{-4}	3.5920×10^{-4}	
120	380	8.2408×10^{-4}	2.2534×10^{-4}	
180	320	8.9676×10^{-4}	1.6695×10^{-5}	
Prévision de log-return hebdomadaire				
n	Prévision de taille (P)	MSE 1	MSE 2	
100	400	4.0948×10^{-6}	7.6927×10^{-4}	
110	390	4.2732×10^{-6}	7.0790×10^{-5}	
120	380	3.8547×10^{-6}	2.232×10^{-5}	
180	320	8.9676×10^{-4}	5.7578×10^{-5}	
Prévision de log-return mensuel				
n	Prévision de taille (P)	MSE 1	MSE 2	
100	163	9.5283×10^{-5}	0.0010	
110	153	0.0010	4.0010×10^{-5}	
120	143	0.0011	1.5369×10^{-5}	
180	63	0.0012	7.9918×10^{-5}	


Modèles du log-return Journalier (n=180, P=320).
Log-return Journalier
Temps
Vraie
Prévision
X: 180
Y: 0


Modèles du log-return Hebdoomadaire (n=180, P=320).
Log-return Hebdomadaire
Temps
Vraie
Prévision
X: 180
Y: 0


Modèles du log-return Mensuel (n=180, P=83).
Log-return Mensuel
Temps
Vraie
Prévision
X: 180
Y: 0

4.6 Preuve des résultats

4.6.1 Preuve de la proposition 4.1

En considérant l'expression de la suite centrale $\mathcal{V}_{n,h,h'}$, il suffit de prouver que pour tout entier positif i, $M_f(W_i) = -W_i$. Puisque W_i est l'accroissement du MB standard, alors à partir des propriétés du MB, W_i suit une loi Gaussienne centrée et de variance $i-(i-1) = 1$. D'où, pour tout réel x, $f'(x) = -xf(x)$ et donc $M_f(W_i) = -W_i$.

4.6.2 Preuve de la proposition 4.2

L'application de la proposition 2.1 entraine l'existence de deux constantes positives λ_1 et λ_2, telles que :

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_0) = \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_{N_1}) + o_p(1), \text{ et } \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_0) = \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_{N_2}) + o_p(1),$$

avec $N_1 = [1 + n^{\lambda_1+1}]$, et $N_2 = [1 + n^{\lambda_2+1}]$. Posons $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ et $N = [1 + n^{\lambda+1}]$. Nous avons

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_0) = \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_N) + o_p(1) \text{ et } \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_0) = \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_N) + o_p(1).$$

En combinant les dernières égalités avec (4.14), nous obtenons le résultat désiré.

4.6.3 Preuve du lemme 4.1

(i) $\mathbf{E}\left(\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\right) - \mathbf{E}\left(\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right) = \mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\frac{1}{\hat{\sigma}_n} \times (\sigma_0 - \hat{\sigma}_n)\right]$.
De l'inégalité de Cauchy-Schwartz il vient :

$$\mathbf{E}\left(\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\right) - \mathbf{E}\left(\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right) \leq \sqrt{\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\frac{1}{\hat{\sigma}_n}\right]^2} \times \sqrt{\mathbf{E}\left[\sigma_0 - \hat{\sigma}_n\right]^2}. \tag{4.22}$$

L'application de l'inégalité Hölder permet d'écrire :

$$\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\frac{1}{\hat{\sigma}_n}\right]^2 = \mathbf{E}\left[(\frac{G(X_1)}{\sigma_0})^2(\frac{1}{\hat{\sigma}_n})^2\right] \leq \left[\mathbf{E}\left(\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right)^{2+\gamma'}\right]^{1/(1+\gamma'/2)} \times \left[\mathbf{E}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_n}\right)^{2+\delta}\right]^{1/(1+\delta/2)}$$

avec γ' et δ des constantes positives, telles que : $(1+\gamma'/2) + 1/(1+\delta/2) = 1$. À partir de $(C.2)$ et $(C.5)$, nous obtenons $\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\frac{1}{\hat{\sigma}_n}\right]^2 < \infty$.
Étant donné que $\hat{\sigma}_n$ converge presque sûrement vers σ_0, il vient :

$$\mathbf{E}\left[\sigma_0 - \hat{\sigma}_n\right]^2 \longrightarrow 0, \quad \text{quand, } n \longrightarrow \infty.$$

Une combinaison de ces derniers résultats avec (4.22) donne le résultat désiré.
En changeant G par S, et en appliquant le même raisonnement, on achève la preuve de (i).
(ii) En changeant $(C.5)$ par $(C.6)$ et en faisant un raisonnement similaire à celui de (i), on obtient le résultat désiré.

4.6.4 Preuve de la proposition 4.3

On considère les décompositions suivantes :

$$\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0}\right] - \mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\right] + \mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\right],$$
$$\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{{\sigma^2}_0}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\sigma_0^2}\right] - \mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right] + \mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right],$$
$$\mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{{\sigma^2}_0}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{\sigma_0^2}\right] - \mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right] + \mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right].$$

L'application du lemme 4.1 donne le résulat désiré.

4.6.5 Preuve de la proposition 4.4

(i) L'égalité (4.16) peut s'écrire comme suit :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) - D_{n,h,h'} = \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0) + o_p(1),$$

avec

$$\begin{aligned} D_{n,h,h'} &= \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_N) \times \left(-h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right]\right) \\ &+ \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_N) \times \left(h\mathbf{E}\left[\frac{G(X_1)}{\hat{\sigma}_n}\right] - 2h'\mathbf{E}\left[\frac{S(X_1)}{\hat{\sigma}_n^2}\right]\right). \end{aligned}$$

L'équation de l'espace tangent Γ à la courbe de $\mathcal{V}_{n,h,h'}$ en $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$, est :

$$\Gamma : \{(X,Y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \text{ tels que :}$$
$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(X,Y) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) = \partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n).\left((X - \hat{\mu}_n), (Y - \hat{\sigma}_n)\right).\}$$

Soit donc :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(X,Y) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) = \frac{\partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)}{\partial\mu}(X - \hat{\mu}_n) + \frac{\partial\mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)}{\partial\sigma}(Y - \hat{\sigma}_n).$$

La construction de l'estimateur $(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)$ est obtenu en perturbant l'une des deux composantes du premier estimateur $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$. Par exemple, en perturbant la première composante, il vient :

$$\bar{\mu}_n = \hat{\mu}_n + x(n), \quad \text{et,} \quad \bar{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n.$$

Le remplacement dans l'équation de la tangente donne :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n) - \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) = \frac{\partial \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)}{\partial \mu} \times x(n),$$

avec $x(n)$ est une inconnue. Cette dernière égalité est équivalente à :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n) = \frac{\partial \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)}{\partial \mu} \times x(n) + \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n). \tag{4.23}$$

La valeur de $x(n)$ est déterminée en imposant l'identité suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)}{\partial \mu} \times x(n) = -D_{n,h,h'}.$$

D'où

$$x(n) = -D_{n,h,h'} / \left(\frac{\partial \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)}{\partial \mu} \right). \tag{4.24}$$

L'égalité (4.23) s'écrit

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n) = \mathcal{V}_{n,h,h'}(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n) - D_{n,h,h'}. \tag{4.25}$$

En combinant avec (4.23), on a :

$$\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n) = \mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0) + o_p(1), \tag{4.26}$$

où $\bar{\mu}_n = \hat{\mu}_n + x(n)$, et, $\bar{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n$. L'égalité (4.26) traduit l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée.

On peut également construire un autre estimateur en faisant une perturbation par rapport à la seconde composante du premier estimateur $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$ et en faisant un raisonnement analogue à celui du cas précédent. Pour plus de détails sur ce type d'estimateur, consulter Lounis (2011).

4.6.6 Preuve du théorème 4.1

Comme il a été expliqué au paragraphe 4.2, la puissance asymptotique locale du test est $1 - \Phi\left(c_\alpha - \tau_{h,h'}(\mu_0, \sigma_0)\right)$. De la continuité de la fonction $\tau_{h,h'}(\cdot, \cdot)$ et la convergence en probabilité de $(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)$ vers (μ_0, σ_0), on a sous H_0 :

$$I\Big\{ \frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)}{\tau_{h,h'}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n)} \geq c_\alpha \Big\} \quad = \quad I\Big\{ \frac{\mathcal{V}_{n,h,h'}(\mu_0, \sigma_0)}{\tau_{h,h'}(\mu_0, \sigma_0)} \geq c_\alpha \Big\} + o_P(1).$$

La contiguïté et l'application du troisième lemme de Le Cam (1960) nous permettent de calculer la loi de la statistique sous l'hypothèse alternative.
Les suites de tests T_n et $\bar{T}_n$ sont asymptotiquement équivalentes. D'où l'optimalité.

Conclusion 4.2. *Avec la contribution de la normalité asymptotique locale (LAN), les résultats obtenus dans ce présent chapitre concordent avec ceux qui sont obtenus dans le passé à partir des recherches effectuées avec d'autres approches. En d'autres termes, l'hypothèse i.i.d du log-return est rejetée.*

Chapitre 5

Conclusion et perspectives de recherche

5.1 Conclusion générale

En vue de valider un modèle mathématique, plusieurs recherches basées sur la construction des tests statistiques ont été effectuées. Quand le paramètre du modèle considéré est multidimensionnel ou quand les hypothèses testées sont composites, le problème à étudier est souvent compliqué.

Caractérisés par leur propriétés asymptotiques, des tests de vraisemblance sont utilisés et des techniques paramétriques et non paramétriques sont associées pour faciliter ces études. Dans la plupart des cas, la détermination de la loi de la statistique du test reste difficile sous ł'hypothèse alternative. La théorie de Le Cam (1960), riche en propriétés, fournit des outils pour en déduire cette loi à partir de ł'hypothèse nulle. En particulier, avec la propriété de la contiguïté. Mais la preuve de cette propriété reste en général difficile. La contiguïté reste une conséquence directe de la normalité asymptotique locale (LAN). Autrement dit, pour examiner un problème de test, on commence par établir le principe de la normalité asymptotique locale LAN. La complexité dépend du modèle mathématique considéré. Plus le modèle est général, plus cette propriété est difficile à obtenir.

En dehors de la version initiale introduite par Le Cam (1960), il existe des versions plus générale de la LAN telles que celles de Swensen (1985), Hall et Mathiason (1990), Hwang et Basawa (2003). Cependant ces versions restent difficiles à établir quand le modèle étudié

est similaire au modèle (3.2). C'est en partie pour cette raison que nous conservons dans cette thèse la version introduite dans Hwang et Basawa (2001) et developpée par Chebana et Laïb (2008). Son grand avantage est ł'établissement de la propriété LAN pour notre modèle et son inconvénient réside dans la suppression du terme non dégénéré après estimation du paramètre inconnu du modèle étudié.

Dans notre cas, deux difficultés apparaissent, la première concerne la distribution de la suite centrale estimée qui, en général ne suit pas une loi gaussienne. La seconde concerne la méthode de la suppression du terme qui affecte la puissance asymptotique locale du test construit.

Pour résoudre simultanément ces deux problèmes, en utilisant la proposition 2.1, une mèthode d'évaluation de cette erreur est introduite. Par la suite, on construit à partir du premier estimateur du paramètre inconnu, un autre estimateur qui permet de préserver l'équivalence entre les suites, centrale et centrale estimée. Vu que la majeure partie des tests basés sur la vraisemblance est exprimée en fonction de la suite centrale, ceci a été suffisant pour nous permettre de terminer notre preuve. Au final, l'optimalité asymptotique locale est prouvée avec le calcul de la puissance asymptotique du test. Ces derniers résultats obtenus pour les modèles $AR(1)$ et $AR(m)$ ont été généralisés à une classe très vaste décrite par le modèle stochastique (3.2).

Il est important de rappeler que notre technique se repose sur de ł'augmentation de la taille de ł'échantillon n à une taille $N = [1 + n^{\mu+1}]$. Ceci correspond bien au caractère asymptotique de notre étude.

Le but essentiel de ce travail était de construire un estimateur qui permettait au test du rapport de vraisemblance de conserver son optimalité. C'est ce que nous avons fait. Cet estimateur permet l'équivalence entre la suite centrale et sa version estimée, ce qui conduit au résultat cherché.

Nos travaux constituent une modeste contribution dans la détection de la non-linéarité dans les modèles de séries chronologiques via l'utilisation de LAN.

5.2 Perspectives de recherches

(a) Ł'obtention de ł'optimalité dans de nos travaux de recherches est liée à ł'augmentation de la taille de ł' échantillon n à $N = [1 + n^{\mu+1}]$, où $\mu > 0$. On peut s'intéresser au choix optimal de la valeur de la constante μ. Cette question peut être traitée en

combinant nos résultats avec les recherches similaires. Ł'objectif sera de déterminer les paramètres et les structures auxquelles cette constante positive est liée. Ce travail pourra être consolidé par des simulations numériques.

(b) Dans toute cette thèse notre travail a été effectué sous la condition où la loi du processus des innovations est supposé connue. Il serait intéressant de considérer et étudier le problème lorsque cette loi est inconnue. Plus précisement, une estimation de la densité de ł'erreur avec des mèthodes telles que celles des estimateurs à noyaux pourait être envisagée. En résumé on fera une extension de nos travaux du paramétrique au semi-paramétrique.

(c) Tout au long de cette thèse, les résultats sont obtenus sous l'hypothèse de la stationnarité. Il sera aussi intéressant de traiter quelques cas sans cette hypothèse. Bien évidemment l'intérêt suscité par ce cas réside dans la non-stationnarité de plusieurs phénomènes. Ceci faciliterait la construction des tests statistiques pour la validation des modèles proposés et donnerait un champ assez vaste pour les applications.

Bibliographie

Bachelier L. (1900). Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.***17**, 21–86.

Benghabrit Y. et Hallin M. (1992). Optimal rank-based tests for against first-order superdiagonal bilinear dependence against diagonal bilinear dependence. *J. Statist. Plann. Inference*, **32**(1), 45–61.

Benghabrit Y. et Hallin M. (1996). Locally asymptotically optimal tests for autoregressive against bilinear serial dependence. *Statist. Sinica*, **6**(1), 147–169.

Benghabrit Y. et Hallin M. (1998). Locally asymptotically optimal tests for AR(p) against diagonal bilinear dependence. *J. Statist. Plann. Inference*, **68**(1), 47–63.

Bernstein S. (1927). Sur l'extension du théoréme limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. *Math. Ann.*, **97**(1), 1–59.

Bickel P. J. (1982). On adaptive estimation.Ann. Statist., **3**, 381–390.

Black F. et Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econom.* **81**, 637–659.

Cassart D. Hallin M. et Paindaveine D. (2001). Optimal detection of Fechner-asymmetry. *J. Statist. Plann. Inference.*, **138**(8), 2499–2525.

Chebana F. et Laïb N. (2008). A locally asymptotically powerful test for nonlinear autoregressive models. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **346**(11-12), 671–676.

Chen M. et An H. Z. (1997). A Kolmogorov-Smirnov type test for conditional heteroskedasticity in time series. *Statist. Probab. Lett.*, **14**(3), 321–331.

Diebolt J. Laïb N. et Ngatchou-Wandji J.(1997). Limiting distribution of weighted processes of residuals. Application to parametric nonlinear autoregressive models.

Droesbeke J.-J. et Fine J. (1996). *Inférence non paramétrique. Les statistiques de rangs.* Editions de l'Université de Bruxelles.

Fama E. et French K. (1988a) Permanent and Temporary Components of Stock Prices. Journal of Political Economy. **96**, 246–273.

Fama E. et French K. (1988b). Dividend Yields and Expected Stock Returns. Journal of Financial Economics. **22**, 3–27.

Gao J. et King M. (2004). Model specification testing in nonparametric and semiparametric time series econometric models. North American Winter Meetings,**225**, Econometric Society.

Gourieroux C. et Monfort A. (1996). Statistique et modèles econométriques. Seconde édition Economica.

Guégan D. (1984). Tests de modéles non linéaires. Proceedings of the 3rd Franco-Belgian meeting of statisticians. Nov.82. Bruxelles.U.L.B., **8**(4), 45–65.

Guégan D. (1987). Different representations for bilinear models. *J. Time Ser. Anal.*, **8**(4), 389–408.

Guégan D. et Pham T. D.(1987). Minimalité et inversibilité des modèles bilinéaires à temps discret. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **304**(6), 159–162.

Guégan D. et Pham T. D. (1992). Power of the score test against bilinear time series models. *Statist. Sinica*, **2**(1), 157–169.

Hall P. et Heyde C. C. (1980). Martingale limit theory and its application.Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers].New York.

Hall W.J. et Mathiason D.J. (1990). On large-sample estimation and testing in parametric models. *Econometric Theory.*, **58**(1), 77-97.

Hallin M. et Puri M. L. (1994). Aligned rank tests for linear models with autocorrelated error terms. *J. Multivariate Anal.*, **50**(2), 175–237.

Hinich M. J. (1982). Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series. *J. Time Ser. Anal.*, **3**(3), 169–176.

Hjellvik V. et Tjøstheim D. (1995). Nonparametric tests of linearity for time series. *Biometrika*, **82**(2), 351–368.

Hjellvik V. et Tjøstheim D. (1996). Nonparametric statistics for testing of linearity and serial independence. *Nonparametr. Statist*, **6**(2-3), 223–251.

Hwang S. Y. et Basawa I. V. (1993). Asymptotic optimal inference Stochastic Process. Appl.Statist. Probab. Lett., **46**(1), 91–113. *Scand. J. Statist.*, **15**(1), 55–68.

Hwang S. Y. et Basawa I. V. (2001). Nonlinear time series contiguous to AR(1) processes and a related efficient test for linearity. *Statist. Probab. Lett.*, **52**(4), 381–390.

Hwang S. Y. et Basawa I. V. (2003). Estimation for nonlinear autoregressive models generated by beta-ARCH processes. *Sankhyā*, **65**(4), 744–762.

Karatzas. I et Shreve S. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. *Spring Verglas, Berlin.*

Keenan D. M. (1985). A Tukey nonadditivity-type test for time series nonlinearity. *Biometrika*, **72**(1), 39–44.

Kreiss J. P. (1987). On adaptive estimation in stationary ARMA processes. *The Annals of Statistics.*, **15**(1), 112–133.

Kreiss J. P. (1990). Asymptotic linear hypotheses in autoregressions. Ann. Statist., **18**, 1470–1482.

Le Cam L.(1960). Locally asymptotically normal families of distributions. Certain approximations to families of distributions and their use in the theory of estimation and testing hypotheses. *Univ. california Publ. Statist.*, **3**, 37–98.

Le Cam L. (1986). Asymptotic methods in statistical decision theory, Springer, Serglas.

Lévy P.(1935a). Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires independantes ou enchainees. *Probability theory, statistics, operations research.*

Lévy P. (1935b). Théorie de l'addition des variables aléatoires.. *Monogr. d. probabilit. calcul d. probabilit. et ses appl. 1) Paris : Gauthier-Villars. xvii, 328 p.*

Lévy P. (1954). Théorie de l'addition des variables aléatoires. 2. éd.. *="(Monographies des probabilités.) Paris : Gauthier-Villars, XX, 387 p.*

Linton O. (1993). Adaptive estimation in *ARCH* models. *Econometric Theory.*, **9**(4), 539–569.

Lounis T. (2011). Asymptotically optimal tests when parameters are estimated. *Albanian J. Math.*, **5**(4), 193–214.

Lounis T. (2013). Local asymptotically optimal test in *Arch* model. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **4**, 333–392.

Lounis T. (2014). Optimal tests in AR(m) time series model. Comm. Statist. Simulations and Methods. Accepted article. To appear.

McKeague I. W. et Zhang M. (1994). Identification of nonlinear time series from first order cumulative characteristics. Ann. Statist, **22**(1), 495–514.

Ngatchou-Wandji J. (2002). Weak convergence of some marked empirical processes : application to testing heteroscedasticity. *J. Nonparametr. Stat.*, **14**(3), 325–339.

Ngatchou-Wandji J. (2005). Checking nonlinear heteroscedastic time series models. *Journal of Statistical Planning and Inference.*, **133**(1), 33–68.

Pham T. D. et Tran L. T. (1981). On the first-order bilinear time series model. *J. Appl. Probab.*, **18**(3), 617–627.

Priestley M. B. (1988). *Nonlinear and nonstationary time series analysis.* Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London.

Rajna G. (1991). L'évaluation des options. *Press universitaires de France.*

Samuelson P.A. (1965). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review* **6**(2), 13–31.

Saikkonen P. et Luukkonen R. (1988). Lagrange multiplier tests for testing nonlinearities in time series models. *Scand. J. Statist.*, **15**(1), 55–68.

Subba Rao T. et Gabr M. M. (1980). A test for linearity of stationary time series. *J. Time Ser. Anal.*, **1**(2), 145–158.

Swensen A.R. (1985). The asymptotic distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend. *J. Multivariate Anal.***16**(1), 54–70.

Taniguchi M. et Kakizawa Y. (2000). Asymptotic theory of statistical inference for time series. Springer Series in Statistics.Springer-Verlag.New York.

Tsay R.S. (1986). Nonlinearity tests for time series . *Biometrika.*, **73**, 461–466.

Van der Vaart A. W. (1998). *Asymptotic statistics*, volume 3 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.