AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

École doctoral IAEM Lorraine
UFR Sciences et Technologies

Modélisation, observation et commande d'une classe d'équations aux dérivées partielles : Application aux matériaux semi-transparents

THÈSE DE DOCTORAT

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Présentée par

Mohamed GHATTASSI

Soutenue le 29 septembre 2015 devant un jury composé de :

Rapporteurs :	Rachid OUTBIB :	Professeur, Université Aix-Marseille
	Gérard SCORLETTI :	Professeur, École Centrale de Lyon
	Rodolphe TURPAULT :	Professeur, Université de Bordeaux
Examinateurs :	Fatmir ASLLANAJ :	Chargé de recherche (CNRS)
	Mohamed BOUTAYEB :	Professeur, Université de Lorraine (Directeur de thèse)
	Sette DIOP :	Chargé de recherche (CNRS)
	Jean Rodolphe ROCHE :	Professeur, Université de Lorraine (Directeur de thèse)
	Didier SCHMITT :	Maitre de conférences, Université de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039

Institut Élie Cartan de Lorraine
UMR 7502

In theory, there is no difference between theory and practice.
But, in practice, there is.

Sommaire

Glossaire **1**

Chapitre 1 Introduction générale de la thèse **5**

Partie I Modélisation du système couplé rayonnement conduction. **11**

Chapitre 1
Modèles régissant les transferts thermiques

1.1 Généralités . . . 13
1.1.1 Description du transfert de chaleur . . . 13
1.1.2 Vocabulaire et définitions . . . 15
1.2 Transferts de chaleur couplés rayonnement-conduction . . . 19
1.2.1 Équations de Transfert Radiatif, ETR . . . 19
1.2.2 Équation du transfert radiatif pour un milieu gris non diffusant. . . . 21
1.2.3 Équation de conservation d'énergie . . . 22
1.3 Adimensionnement des équations . . . 24
1.3.1 Équation de la chaleur non linéaire adimensionnée . . . 24
1.3.2 Équation de transfert radiatif adimensionnée . . . 25
1.4 Conclusion . . . 25

Chapitre 2
Analyse mathématique du problème couplé rayonnement-conduction

2.1 Résumé . . . 27
2.2 Introduction . . . 27
2.3 Résultats préliminaires . . . 29
2.3.1 Existence et unicité de la solution pour une équation de transfert radiatif auxiliaire . . . 29
2.3.2 Equation de la chaleur non linéaire auxiliaire . . . 33

2.4 Existence et unicité locale de la solution du problème couplé 34
2.4.1 Etude des applications $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$ 34
2.4.2 Etude de l'application $\mathbb{H}_3$. 36
2.4.3 Existence et unicité de la solution pour le système couplé 40
2.5 Conclusion 41

Chapitre 3
Résolution numérique du système couplé rayonnement-conduction par la méthode de Galerkin

3.1 Résumé 43
3.2 Introduction 44
3.3 Équation de transfert radiatif. 45
3.3.1 Discrétisation angulaire, description, propriétés. 45
3.3.2 Estimation a priori d'erreur 47
3.3.3 Méthode Galerkin discontinue pour l'ETR. 47
3.3.4 Existence et unicité des solutions du problème homogène approché. . 49
3.3.5 Estimation d'erreur, convergence. 51
3.4 Équation de la chaleur non linéaire. 55
3.4.1 Existence et unicité de la solution d'un schéma numérique pour l'équation de la chaleur linéaire homogène. 55
3.4.2 Convergence d'un schéma numérique pour l'équation de la chaleur semi-linéaire homogène 57
3.5 Convergence du schéma numérique pour le système couplé 60
3.5.1 Étude des applications $\tilde{\mathbb{H}}_1$, $\tilde{\mathbb{H}}_2$ 61
3.5.2 Étude de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_3$ 63
3.5.3 Existence et unicité de la solution d'un schéma numérique pour le système couplé 65
3.5.4 Convergence du schéma numérique pour le système couplé. 67
3.6 Conclusion 70

Chapitre 4
Résultats numériques

4.1 Couplage : Description de l'algorithme 71
4.2 Équation de transfert radiatif dans un carré unitaire. 72
4.3 Transfert de chaleur couplé rayonnement-conduction dans un carré unitaire. . 73
4.3.1 Conditions aux bords thermiques de type Dirichlet. 75
4.3.2 Conditions aux bords thermiques de type Robin. 79

4.4 Conclusion 81

Partie II Observation et Commande du système couplé rayonnement conduction. 83

Chapitre 5
Introduction à l'observation et à la commande des systèmes non linéaires.

5.1 Introduction 85
5.2 Généralités 86
5.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques 86
5.2.2 Stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov 87
5.3 Observateurs pour les systèmes non linéaires 87
5.3.1 Estimation de l'état des systèmes dynamiques 87
5.3.2 Observateurs pour une classe du système non linéaire de type Lipschitz 89
5.3.3 Observateurs pour les systèmes non linéaires de type "one sided Lipschitz" 90
5.3.4 Approche basée sur le théorème des accroissements finis 90
5.4 Stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires 94
5.5 Conclusion 95

Chapitre 6
Observation et Commande du système combiné rayonnement-conduction

6.1 Résumé 97
6.2 Introduction 98
6.3 Réduction du système radiation-conduction 99
6.3.1 La bornitude de la trajectoire 100
6.3.2 La Formulation LPV du système radiation-conduction 104
6.4 Synthèse d'observateur d'état 106
6.4.1 Observateur basé sur le théorème des accroissements finis. 106
6.4.2 Extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ 109
6.4.3 Illustrations numériques 112
6.5 Commande basée observateur 113
6.5.1 Commande basée observateur d'ordre plein 116
6.5.2 Commande basée observateur d'ordre réduit 117
6.5.3 Extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ 119
6.5.4 Exemple numérique 122

6.6 Conclusion 125

Conclusion générale

Bibliographie **129**

Glossaire

Acronymes

LMI	=	Linear Matrix Inequality = Inégalité matricielle linéaire.
DMVT	=	Differential Mean Value Theorem = Théorème des accroissements finis.
ETR	=	Équation de transfert radiatif
DG	=	Méthode de Galerkin discontinue
FEM	=	Méthode des éléments finis
FVM	=	Méthode des volumes finis
CT	=	Équation de conservation d'énergie

Symbole

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ = Domaine de $\mathbf{R}^2$

$|\Omega|$ = Mesure de Ω

$\mathcal{D}$ = Disque unité

$\partial\Omega = \Gamma$ = Direction incidente

$\mathcal{T}_h$ = Une triangulation de Ω

K = Une maille dans $\mathcal{T}_h$

F = Interface entre deux mailles de $\mathcal{T}_h$

$\mathbf{n_k}$ = La normale unitaire sortante à K.

$\mathbf{n_F}$ = La normale unitaire à F.

Γ = Frontière du domaine Ω

κ = Coefficient d'absorption m^{-1}

β = Direction de propagation du rayonnement

σ_B = Constante de Stefan Boltzmann, $Wm^{-2}K^{-1}$

Notations

c	=	Vitesse de propagation du rayonnement dans le vide, ms^{-1}
c_p	=	Chaleur spécifique, $JKg^{-1}K^{-1}$
k_c	=	Conductivité thermique, $Wm^{-1}K^{-1}$
G	=	La moyenne de la luminance sur toutes les directions de l'espace
h	=	Le diamètre de maille $K \in \mathcal{T}_h$
I_b	=	La luminance du corps noir, $Wm^{-1}sr^{-1}$
N_s	=	Nombre de Starck / nombre de radiation-conduction $= k_c k/(4_B T_{ref}^3)$
I	=	La luminance adimensionnée
$\mathbf{n}$	=	La normale unitaire
n	=	Indice de réfraction
I	=	La luminance adimensionnée
s	=	Abscisse curviligne
S_{rad}	=	Terme source radiatif, Wm^{-3}
T	=	Température adimensionnée
t	=	Temps, s
ξ	=	Temps adimensionnée
τ	=	Temps final adimensionnée
θ	=	Constante adimensionnée
x	=	Position dans le domaine
$\mathbb{A}^T$	=	Matrice transposée $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^{-1}$	=	Matrice inverse $\mathbb{A}$
T_h	=	Vecteur d'état
$\hat{T_h}$	=	Estimé de T_h
e	=	Erreur d'estimation de T_h, $e = T_h - \hat{T_h}$
$\dot{T}_h$	=	Dérivée de T_h, $\frac{dT_h}{d\xi}$.
$Co(x,\ y)$	=	$\{\lambda x + (1-\lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est l'ensemble convexe de $\{x, y\}$
y_h	=	Le vecteur de mesure de la sortie
$\mathbb{I}$	=	Matrice identité de dimension
diag$[a_{11}\ a_{22}\ ...\ a_{nn}]$	=	Matrice diagonale $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$
$tr(A)$	=	Trace de la matrice A, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Indice

b = Corps noir

inc = Direction incidente

rad = Radiatif

ref = Référence

Espaces Fonctionnels

$L^p(\Omega)$ =$\{u$ mesurable sur Ω, $\quad \Big(\int_\Omega u^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$ $\ 1 \leqslant p < \infty$

$L^p(Q_\tau)$ =$\{u$ mesurable sur $[0,\tau]\times\Omega$, $\quad \Big(\int_0^\tau \|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)} dt\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$ $\ 1 \leqslant p < \infty$

$L^\infty(\Omega)$ =$\{u$ mesurable sur Ω, et il existe C tel que $|u(x)| \leqslant C$ p.p. sur $\Omega\}$

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ = fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier $\geqslant 0$)

$\mathrm{H}^m(\Omega)$ =$\{u \in L^2(\Omega) | \forall \alpha$ tel que $\ |\alpha| \leqslant m, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$

.

$H^1_0(\Omega)$: L'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace est nulle sur $\partial\Omega$.

$\mathcal{D}(\Omega)$:=L'ensemble des applications $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.

$H^{-k}(\Omega)$:= L'espace des formes linèaires continues sur H^k_0, telles qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle $\forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $| < u, \Phi > | \leqslant X \|\Phi\|_{H^k(\Omega)}$.

$C(0,\tau;V)$:=$\{u : [0,\tau] \longrightarrow V : t \longmapsto \|u(t)\|_V$continue$\}$

$\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$:=$\|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$:= $\sup_{x\in X, \|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y$

Chapitre 1

Introduction générale de la thèse

La thèse que nous allons présenter porte d'une part sur la modélisation, l'étude théorique et la résolution numérique d'un système de transferts de chaleur couplé rayonnement-conduction dans un milieu gris, semi-transparent non diffusif. D'autre part, elle porte sur l'analyse, la synthèse d'estimateurs d'état et de lois de commande pour la stabilisation et la poursuite de trajectoires du système non linéaire de grandes dimensions. Ce dernier résulte de la discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) décrivant le transfert de chaleur combiné rayonnement-conduction. En effet, il est très difficile, voire impossible (pour des raisons d'accessibilité, techniques et/ou de coût) de mesurer le grand nombre de variables d'état dans un système de grandes dimensions. Il est donc important de développer des capteurs logiciels pouvant produire une estimation fiable des variables nécessaires pour la commande.

Ce travail est motivé par une application de grande envergure : le thermoformage du verre. Le thermoformage consiste à mettre en forme un objet, ici le verre, sous l'effet de la température. Le cycle thermique comporte un début de montée en température lent (risque de rupture) suivi d'un passage rapide de la transition vitreuse. Le thermoformage pourrait paraitre comme simple à mettre en œuvre, mais force est de constater qu'il reste difficile à maitriser et que le savoir-faire et l'expérience de l'artisan verrier constituent la clef de la réussite d'une pièce. Il en est de même à l'échelle industrielle où la maîtrise des procédés de mise en forme pose des difficultés.

Des travaux de recherches sur la modélisation, la discrétisation et la simulation des équations thermiques pour le thermoformage ont été développés récemment par le LEMTA et l'IECL afin de mieux appréhender ce phénomène [13, 133]. Le modèle utilisé se compose d'une équation de la chaleur non linéaire (l'équation de conservation de l'énergie) (CT), régissant la température dans le milieu, et de l'équation de transfert radiatif (ETR) qui est une équation de transport, régissant le champ de luminance dans le milieu.

L'étude théorique de l'ETR et de l'équation de chaleur non linéaire a été largement abordée dans la littérature. À ce sujet, nous renvoyons le lecteur au travail de synthèse [2], réalisé par V. Agoshkov, pour les différents types d'équations de transport et le travail de T. Cazenave et A. Haraux [36], pour l'équation de la chaleur non linéaire. Ce n'est que très récemment que l'étude théorique des équations couplées par rayonnement et conduction a été abordée par Kelley [88]. Ce dernier a étudié le système 1D, en régime stationnaire, lorsque le milieu est supposé homogène, gris et isotrope, avec symétrie axiale, et lorsque l'équation de la chaleur est linéaire. Une généralisation de cette étude a été faite par Asllanaj et al. [16]. Les auteurs ont montré des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution pour le système couplé en régime stationnaire, avec la symétrie azimutale, et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Le problème du point fixe compact, les théorèmes du point fixe de Schauder et de Banach, la

théorie des opérateurs intégraux et des arguments de monotonie sont les principaux outils de la démonstration.

Il existe une abondante littérature portant sur la résolution numérique du transfert radiatif, notamment [117, 113]. La simulation du transfert de chaleur a fait l'objet de nombreux travaux. Parmi les méthodes numériques possibles pour traiter le rayonnement, il existe l'approche statistique de type Monte Carlo et les méthodes déterministes : transferts discrets, éléments finis, volumes finis et Galerkin discontinue. La dernière méthode citée est relativement récente et elle apparaît comme étant très prometteuse. En effet, elle donne un bon compromis en terme de précision, coût en place mémoire et temps de calcul. La méthode de Galerkin discontinue (DG) a finalement été choisie pour résoudre l'ETR et la méthode des éléments finis pour résoudre la CT. Rappelons que la méthode DG est très largement utilisée dans tous les domaines de la physique, du transfert de chaleur aux écoulements de fluides.

Plusieurs études ont été menées sur la preuve de convergence des schémas numériques de l'équation du rayonnement (ETR) [10, 124, 75], indépendamment de celle de l'équation de conservation de l'énergie. De même, plusieurs études de convergence de l'équation de la chaleur non linéaire toute seule ont été effectuées [41]. A notre connaissance, [15] est le seul travail portant sur l'étude de la convergence des schémas numériques pour la résolution des équations couplées, en régime stationnaire avec symétrie azimutale et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Dans [15], on considère un schéma aux différences finies décentré d'ordre un pour la résolution de l'ETR et un schéma aux différences finies centré d'ordre deux, associé à la transformation de Kirchhoff pour la résolution de l'équation de la chaleur. La preuve de la convergence repose essentiellement sur des arguments de monotonie et l'application du point fixe discret, portant uniquement sur le champ de températures. Les équations non linéaires sont résolues à l'aide de la méthode de Newton.

Ces méthodes numériques permettent de transférer les EDPs non-linèaire décrivant le transfert de chaleur rayonnement conduction en un système nonlinèaire de dimension finie. Pour une analyse structurelle et un synthèse d'observateur et la loi de commande on trouve quelques résultats portant sur l'observation et la commande développés récemment pourraient être étendus à notre système non linéaire. Ces techniques sont basées sur le théorème de l'accroissement fini (DMVT) [153, 154, 72]. L'utilisation du DMVT consiste à donner une meilleure condition de Lipchitz, moins conservatrice, ce qui conduit à des conditions de synthèse moins restrictives que celles rapportées dans la formulation classique [121]. Aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire sur les non-linéarités.

A propos de ce thème, on trouve également des travaux sur le problème du contrôle optimal. Quelques algorithmes robustes d'optimisation sont proposés pour résoudre ce type de problèmes. Par exemple, dans [123, 59], les auteurs ont utilisé le contrôle optimal dans la fabrication industrielle du verre et le processus de refroidissement. Le système initial d'EDP parabolique/hyperbolique a été transformé en un problème parabolique/elliptique, en utilisant une approximation de type SP_N. Ensuite, le système des EDP décrivant le transfert de chaleur rayonnement-conduction dans ce type de matériaux a été formalisé comme un problème de minimisation sous contrainte d'une fonctionnelle. Une méthode de Newton a été utilisée pour accélérer la convergence.

L'ensemble du mémoire de thèse est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction dans un milieu semi-transparent, gris et non diffusant, ceci dans le cas d'une géométrie de deux dimensions en régime transitoire, avec des conditions aux limites

thermiques et radiatives. L'équation de la chaleur non linéaire et l'équation de transfert radiatif sont couplées par le terme source d'énergie radiative.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation des résultats d'existence et d'unicité locale de la solution en régime transitoire pour un système couplant les deux équations avec des conditions aux limites du type Dirichlet homogènes. La donnée initiale $T_0 \in L^{5(}\Omega)$ est supposée petite. Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Banach pour montrer l'existence et l'unicité de la solution $(I, T) \in L^2([0,\tau]; L^2(\Omega \times \mathcal{D}) \times L^\infty([0,\tau]; L^2(\Omega)) \cap L^{10}(Q_\tau) \cap L^2([0,\tau]; H_0^1(\Omega))$ $\cap H^1([0,\tau]; H^{-1}(\Omega))$ du système rayonnement-conduction sur un intervalle de temps $[0,\tau]$ avec un temps final τ assez petit. Nous donnerons des estimations a priori de la solution.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations couplées, en régime transitoire lorsque les températures sont imposées aux frontières. Dans le but de déterminer une approximation numérique de l'ETR, nous discrétisons l'espace angulaire suivant plusieurs directions et nous utilisons une quadrature numérique de type S_N. Il en résulte alors un système différentiel du premier ordre linéaire, associé à des conditions aux limites radiatives. La discrétisation de l'ETR dans la variable spatiale est effectuée par la méthode de Galekrin discontinue (DG) et en éléments finis pour l'équation de la chaleur non linéaire. Dans les deux cas, on utilise le même maillage structuré qui nous permet d'avoir des inconnues définies sur les mêmes nœuds de discrétisation. Pour traiter le couplage non linéaire entre ETR et CT, une linéarisation de type Newton du terme non linéaire nous permet de découpler le système des équations. Nous avons réussi à démontrer la convergence du schéma numérique couplé en utilisant la méthode du point fixe discret. La formulation de Brezzi-Rappaz-Raviart sera employée pour transformer l'équation de la chaleur semi-linéaire à un problème linéaire et établir des estimations a priori associées à la solution approchée.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les différentes simulations numériques réalisées avec le code numérique de rayonnement et conduction. Toutes les simulations ont été effectuées pour un milieu gris, semi-transparent et non diffusant. Nous présentons des résultats numériques assurant la validité du code, nous effectuons une étude de sensibilité aux maillages angulaires et spatiaux de la solution obtenue par notre code de rayonnement. Ensuite, nous présentons des résultats numériques du problème couplé rayonnement-conduction avec des conditions aux bords thermiques du type Dirichlet pour un milieu avec des surfaces noires, opaques à réflexion diffuse et des surfaces opaques à réflexion spéculaire. Enfin, nous présentons également des résultats avec des conditions aux bords thermiques du type Robin pour un milieu avec des surfaces noires.

Le cinquième chapitre est consacré d'une part à quelques rappels sur les concepts de stabilité au sens de Lyapunov, à l'observabilité et à l'estimation d'état. D'autre part, nous présentons quelques techniques d'estimation d'état pour les systèmes non linéaires. Enfin, une étude bibliographique sur la stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires sera donnée.

Après avoir établi l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la stabilité des schémas de discrétisation spatiale des EDPs représentant le transfert couplé rayonnement-conduction, nous traitons dans **le sixième chapitre** la synthèse d'observateur d'état et le problème de stabilisation du système obtenu en dimension finie. En effet, pour déterminer la température du système, il est assez coûteux d'effectuer une observation directe. Il est donc nécessaire d'observer la température du système en utilisant un système auxiliaire : c'est le rôle de l'observateur d'état. Notre objectif est de construire la température à l'aide de capteurs placés sur la surface du domaine, voir figure 6.1.

Grâce à la structure particulière du système obtenu et au théorème des accroissements finis (DMVT), nous montrons qu'il existe un gain d'observation assurant la stabilité asymptotique. Le deuxième résultat consiste à proposer un estimateur d'état d'ordre réduit qui garantisse la

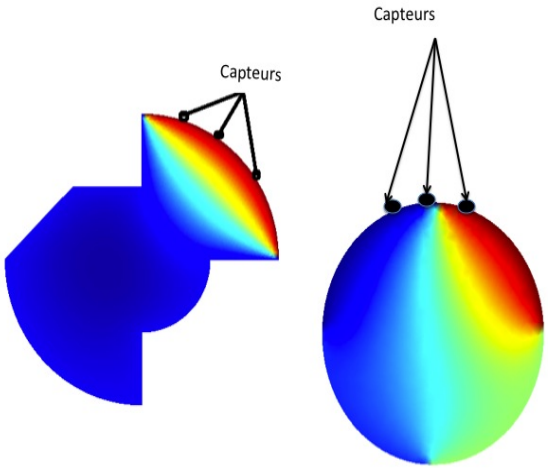


FIGURE 1.1 – Position de quelques capteurs sur la surface pour l'estimation de la température dans tout le domaine.

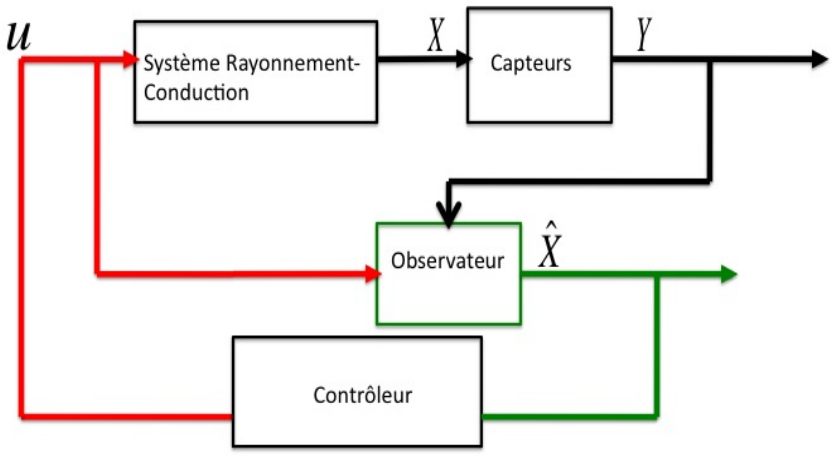


FIGURE 1.2 – Le principe de base de la stabilisation basée observateur pour le système rayonnement-conduction.

stabilité exponentielle du système global. Nous avons réussi à construire une matrice de gain d'observation pour que la condition de stabilité, écrite sous la forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI) soit satisfaite. Une nouvelle condition pour la commande basée observateur, voir figure 1.2, a été établie où les gains de la commande et de l'observation sont calculés simultanément en résolvant une seule LMI. La stabilité globale de la commande basée observateur est assurée. Une analyse de performance $\mathcal{H}_\infty$ est également établie. Enfin, des exemples numériques sont proposés afin de valider les approches proposées.

Le manuscrit se termine par une conclusion dans laquelle les principaux résultats de l'étude sont rappelés avec une proposition de quelques perspectives.

Contributions scientifiques

Les divers résultats obtenus au fil de cette thèse ont fait l'objet de plusieurs publications et présentations lors de conférences. Par catégories, ces différentes contributions sont :

– **Revues internationales**

1. F.CASENAVE, M. **GHATTASSI** et R. JOUBAUD, "A multiscale problem in thermal science : Multiscale coupling of complex models in scientific computing", **ESAIM**, Vol. 38, p. 202-219, 2012 Systems and Applications, 2015
2. M., **GHATTASSI**, F., ASLLANAJ, J.R., ROCHE et M., BOUTAYEB, "Galerkin Method for solving combined Radiative and Conductive Heat Transfer.", acceptée **International Journal of Thermal Sciences**.
3. M., **GHATTASSI**, J.R., ROCHE, D., SCHMITT "2D-Local Existence and Uniqueness of a Transient State of a Coupled Radiative-Conductive Heat Transfer Problem.", Soumise à **Journal of mathematical analysis and application**.
4. M., **GHATTASSI**, M.,BOUTAYEB et J.R., ROCHE, "LMI condition for Reduced order observer of a radiative-conductive heat transfer systems.", Soumise à **SIAM Journal(SICON)**.
5. M., **GHATTASSI**, M. BOUTAYEB , "Exponential reduced order controllers design for radiative-conductive heat transfer systems.", **, Soumise à** *:* **Automatica**.
6. *M.,* **GHATTASSI***, et al. "Convergence of a Galerkin scheme for a 2D nonlinear coupled system of radiative-conductive heat transfer equations.",* **En préparation**.

– **Conférences internationales**

1. M., **GHATTASSI**, M., BOUTAYEB et J.R., ROCHE, " On reduced order state estimators for Radiative - Conductive heat transfer systems", **Proceeding (16 pages) East Asia Section of SIAM (EASIAM)** *, Thailand*, 2014
2. M., **GHATTASSI**, M., BOUTAYEB et J.R., ROCHE, "State observer design for non linear coupled partial differential equations with application to radiative-conductive heat transfer systems.",**Proceeding (6 pages) CDC Conference on Decision and Control**- *Los Angeles, CA-USA*, 2014
3. M., **GHATTASSI** et M., BOUTAYEB " Observer based control for a class of coupled parabolic hyperbolic systems.",**Proceeding (8 pages) SIAM CT15***, Paris, France*, on July 8-10, 2015.
4. M., **GHATTASSI**, M., BOUTAYEB et J.R., ROCHE, "On reduced order observer for radiative conductive heat transfer systems.",**Proceeding (8 pages) SIAM CT15***, Paris, France*, on July 8-10, 2015.

Première partie

Modélisation du système couplé rayonnement conduction.

Chapitre 1

Modèles régissant les transferts thermiques

Sommaire

1.1 Généralités 13
1.1.1 Description du transfert de chaleur 13
1.1.2 Vocabulaire et définitions 15
1.2 Transferts de chaleur couplés rayonnement-conduction 19
1.2.1 Équations de Transfert Radiatif, ETR 19
1.2.2 Équation du transfert radiatif pour un milieu gris non diffusant. . . 21
1.2.3 Équation de conservation d'énergie 22
1.3 Adimensionnement des équations 24
1.3.1 Équation de la chaleur non linéaire adimensionnée 24
1.3.2 Équation de transfert radiatif adimensionnée 25
1.4 Conclusion 25

1.1 Généralités

Ce paragraphe décrit les trois principaux modes de transfert de chaleur. On introduit les grandeurs et le vocabulaire utilisés dans cette thèse en rayonnement en se basant sur quelques références [117, 130, 113].

1.1.1 Description du transfert de chaleur

Il s'agit de trois modes de transfert de chaleur : conduction, rayonnement et convection, chacun faisant appel à un phénomène physique bien défini. On rappelle brièvement en quoi ils consistent afin d'identifier celui ou ceux qui nous intéresseront dans notre étude.

La conduction

Ce mode de transfert a lieu dès qu'il existe un gradient de température au sein d'un matériau. L'énergie se dissipe alors par diffusion de l'énergie cinétique moyenne des particules suivant une caractéristique intrinsèque du matériau qui est la conductivité thermique k_c pour tendre vers un

état d'équilibre et une distribution homogène des températures. La densité de flux de chaleur issue de la conduction s'exprime par la loi de Fourier [113] :

$$Q = -k_c(T)\nabla T \tag{1.1}$$

où T est le champ de température du matériau dont dépend la conductivité thermique k_c.

Le rayonnement

Tout corps rayonne, *i.e* émet, absorbe et/ou diffuse des ondes électromagnétiques, à plusieurs longueurs d'onde. Le rayonnement qui nous intéresse ici est le rayonnement thermique qui est émis par la matière du fait de sa température, au détriment de son énergie calorique. Il s'agit donc d'ondes électromagnétiques émises, diffusées ou absorbées, caractérisées par une longueur d'onde λ. Cela signifie que le rayonnement se propage sans support matériel car les ondes électromagnétiques se déplacent dans le vide. Notons que le rayonnement thermique dépend de la température sur une bande de longueur d'ondes variante de 0.1 à $100\mu m$.

La convection

Ce mode de transfert ne concerne que les milieux fluide-fluide ou fluide-solide, puisqu'il consiste à homogénéiser la température du fluide en mouvement. Il s'agit d'un transport d'énergie liée au mouvement macroscopique du fluide. La convection se présente généralement sous deux formes : libre et forcée, qui se distinguent par l'origine du mouvement du fluide. Dans le premier cas, aussi appelé convection naturelle, la différence de température entre le fluide et la paroi du solide, où le gradient thermique interne à un milieu, entraine une variation locale de la masse volumique du fluide. Le fluide, réchauffé, par exemple, a une masse volumique plus faible, il se met alors en mouvement sous l'action de la poussée d'Archimède. Il est remplacé par du fluide froid dont la masse volumique est plus importante et qui sera, lui aussi, réchauffé. Il se crée alors une ou plusieurs boucles de convection résultant de l'action des forces de pesanteur et de la variation de masse volumique du fluide.

Dans le second cas, il s'agit d'un fluide mis en mouvement par un moyen mécanique. Lorsqu'il entre en contact avec une paroi, il échange avec celle-ci, puis il est transporté plus loin, c'est le cas par exemple des échangeurs de chaleur. Dans le cas qui nous intéressera, la convection sera négligée.

Le thermoformage

Le thermoformage du verre consiste à mettre en forme le verre en le faisant ramollir dans un four sur un support, mais en gardant certaines propriétés telles que la fluidité. Le thermoformage est déjà employé dans l'industrie verrière pour la mise en forme, par exemple, des pare-brises ou bien d'autres appareillages d'optique, comme les télescopes, etc. Nous distinguons plusieurs types de thermoformage, par exemple : par prise d'empreintes, sur moule convexe ou sur moule concave, par suspension, avec utilisation ou non d'un pressage mécanique. Ses différentes possibilités sont illustrées sur la figure 1.1. Le procédé de thermoformage, plusieurs exemples d'applications et la façon dont la modélisation sera mise en œuvre sont abordés dans [101, 134]. L'objectif du travail dans cette thèse est de contrôler la température dans une plaque de verre en agissant sur une partie de bord. C'est pourquoi l'aspect thermique est primordial pour modéliser finement le processus de thermoformage du verre, contrairement à l'aspect mécanique qui sera négligé dans ce travail. Le phénomène de convection est négligé pendant le cycle de thermoformage. En



FIGURE 1.1 – Les différentes techniques de thermoformage.

effet, les mouvements de matière sont faibles pendant ce cycle, car les échanges sont basés sur la conduction et le rayonnement.

1.1.2 Vocabulaire et définitions

Cette étude est axée sur le milieu qui est un milieu semi-transparent. Les transferts thermiques dans ce type de milieu font appel à un vocabulaire qui leur est propre, qui sera largement utilisé ici ; il semble donc utile de le rappeler en préambule à cette étude.

Milieu gris et non gris

Un milieu gris est un milieu qui possède des propriétés radiatives indépendantes de la longueur d'onde. Au contraire, le milieu est supposé non gris si ses propriétés sont monochromatiques. Elles seront indexées par la longueur d'onde, λ. Le rayonnement est donc caractérisé par sa composition spectrale.

Milieu semi-transparent

Un milieu est désigné comme semi-transparent dans une gamme de longueur d'onde donnée lorsqu'il transmet ou réfléchit partiellement ces ondes. Le rayonnement qui ne traverse que partiellement le milieu en question est atténué de deux manières possibles : diffusion et/ou absorption partielle du rayonnement ; c'est donc un milieu qui n'est ni transparent ni opaque.

En effet, un milieu peut transmettre intégralement l'onde incidente, il est alors appelé milieu transparent. Inversement, un corps ne transmettant aucune partie du rayonnement incident est dit corps opaque. Le milieu semi-transparent correspond donc à juste titre à tout milieu atténuant partiellement le rayonnement.

Le comportement radiatif d'un corps est défini au travers de trois grandeurs liées qui sont l'émissivité ϵ ou l'absorptivité α, la réflexivité ρ et la transmitivité τ. Afin d'établir ces coefficients caractéristiques, nous nous appuyons sur la figure 1.2. Nous considérons un flux monochromatique incident $Q_{\lambda\ \mathrm{inc}}$ contenu dans un angle solide $d\beta$ qui atteint une surface dS selon une direction β. Dans le cas le plus général des milieux semi-transparents, un flux monochromatique incident $Q_{\lambda\mathrm{inc}}$ induit trois flux, comme le présente la figure 1.2 :

1. le flux réfléchi par le corps sans l'avoir pénétré : $Q_{\lambda,\mathrm{réfl}}$;
2. le flux transmis qui pénètre le corps et le traverse : $Q_{\lambda,\mathrm{trans}}$;
3. le flux absorbé qui pénètre le corps et y est absorbé, il constitue un gain d'énergie pour le milieu : $Q_{\lambda,\mathrm{abs}}$.

De plus, la conservation de l'énergie implique la relation suivante :

$$Q_{\lambda,\mathrm{inc}} = Q_{\lambda,\mathrm{réfl}} + Q_{\lambda,\mathrm{tran}} + Q_{\lambda,\mathrm{abs}}. \tag{1.2}$$

Ces flux s'expriment en fonction des trois grandeurs énoncées précédemment.

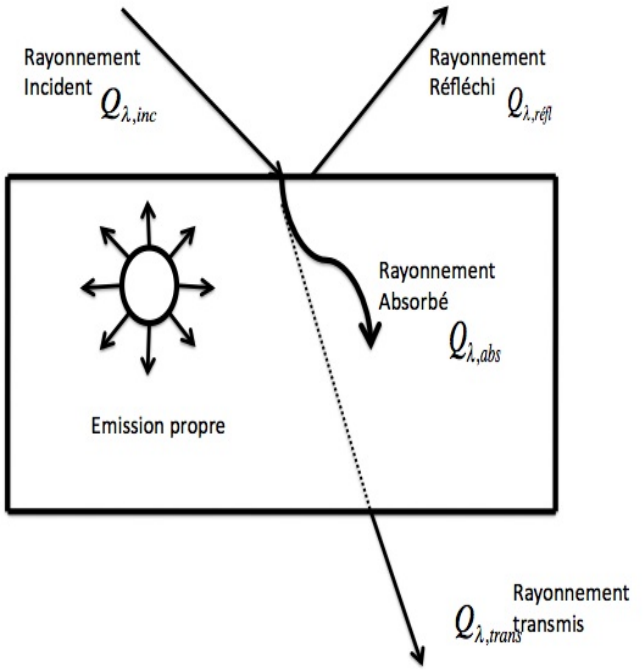


FIGURE 1.2 – Bilan de flux pour un milieu semi-transparent.

Absorption

Il s'agit d'un des deux modes d'atténuation possibles pour un milieu semi-transparent, qui constitue un apport d'énergie pour le milieu. Elle est notée κ pour les milieux gris et indexée par λ dans le cas d'un milieu non gris.

Diffusion

Le rayonnement peut également être atténué ou renforcé par diffusion (ou dispersion), c'est classiquement le cas pour les milieux contenant une phase dispersée caractérisée par deux indices de réfraction différents. La diffusion est dite isotrope lorsque la part du rayonnement diffusée est la même quelle que soit la direction considérée. Dans le cas contraire, elle est qualifiée d'anisotrope.

Rayonnement et direction

Les grandeurs caractéristiques du rayonnement dépendent de la direction considérée. Ainsi, elles sont dites hémisphériques lorsqu'elles intègrent l'ensemble des directions dans lesquelles l'élément de surface considéré peut rayonner. Au contraire, elles sont dites directionnelles lorsqu'elles sont données pour une direction de propagation du rayonnement issue de la surface considérée. Un angle solide $d\beta$, en stéradian (Sr), délimite un cône, d'axe $r = OM$ dans l'espace [101, 134, 12]. Nous considérons, *cf* figure 1.3, une surface quelconque Σ passant par le point M ; $d\beta$ découpe sur cette surface une portion $d\Sigma$. Si nous traçons la sphère S de centre O et de rayon r, cet angle solide découpe sur cette sphère une calotte d'aire dS :

$$dS = r^2 d\Omega \tag{1.3}$$

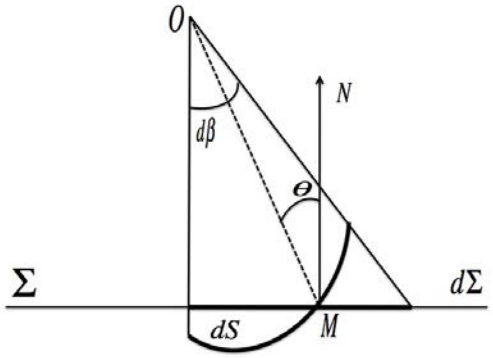


FIGURE 1.3 – Définition d'un angle solide.

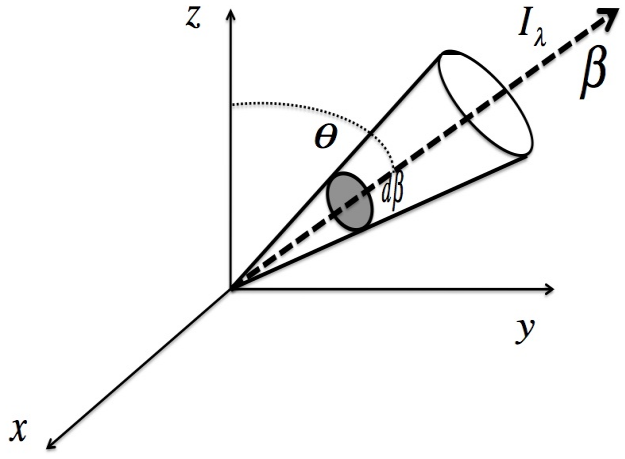


FIGURE 1.4 – Définition de la luminance monochromatique.

Soit **MN** la normale à $d\Sigma$ qui fait un angle θ avec OM. Nous avons, en assimilant dS et $d\Sigma$ à des portions de plan :

$$dS = d\Sigma \cos\theta \tag{1.4}$$

Il vient alors :

$$d\beta = \frac{d\Sigma \cos\theta}{r^2} \tag{1.5}$$

L'angle solide correspondant à tout l'espace (sphère) autour d'un point vaut $4\pi\, Sr$. Pour une surface plane, l'angle solide d'émission est de $2\pi\, Sr$ (demi-sphère).

Flux radiatif

Il s'agit de la valeur instantanée d'un débit d'énergie radiative, ou puissance (reçue, émise ou réfléchie) généralement noté Q_r, éventuellement indexé par λ s'il s'agit d'une grandeur monochromatique.

Coefficients et propriétés radiatives

La modélisation du transfert de chaleur par rayonnement à travers un milieu semi-transparent fait appel à des coefficients radiatifs qu'il est nécessaire de préciser. Les propriétés radiatives du milieu sont caractérisées par les coefficients monochromatiques d'absorption κ_λ, de diffusion $\sigma_{s\lambda}$, ainsi que la fonction de phase, P_λ. Ces grandeurs dépendent de la direction de propagation du rayonnement β et de la longueur d'onde λ. Elles varient également avec la température.

La Luminance

Soient dS une surface élémentaire située à l'abscisse s et dQ le flux traversant dS selon une famille de directions comprises dans un angle solide élémentaire $d\beta$ et centrées autour de la direction β. Cette dernière fait un angle θ avec la normale à dS. La projection de β dans le plan (x, y) est repérée par un angle solide θ formé entre cette droite projetée et l'axe (Ox), figure 1.4. On considère de plus un intervalle spectral $d\lambda$ donné. La luminance monochromatique I_λ est alors définie selon le schéma par la relation suivante :

$$I_\lambda(s, \beta) = \frac{dQ_\lambda(s, \beta)}{dS cos(\theta) d\beta d\lambda} \tag{1.6}$$

La luminance spectrale est donc définie comme le flux émis par une unité de surface apparente ou projetée par unité d'angle solide et de longueur d'onde, elle s'exprime en $Wm^{-2}sr^{-1}m^{-1}$; physiquement, il s'agit d'une intensité de luminance calculée par rapport à une surface donnée, voir [101, 134, 12].

Le corps noir est caractérisé par le fait qu'il absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit et qu'il ne réfléchit pas. Aussi, il ne transmet rien et il émet un rayonnement dont la luminance monochromatique $I_{\lambda,b}$ est donnée par la loi de Planck :

$$I_{\lambda,b}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5(exp(\frac{C-2}{\lambda T}) - 1)} \tag{1.7}$$

Les constantes C_1 et C_2 ont pour valeurs : $C_1 = 1.1910^{-16} Wm^{-2}$; $C_2 = 1.438810^{-2} mK$. Le corps noir émet une luminance totale qui présente la moyenne de la luminance chromatique sur

tout le spectre de longueurs d'onde. La luminance monochromatique est donnée par la relation (1.7). Nous avons

$$\int_0^\infty I_{\lambda,b}(T)d\lambda = \frac{\sigma_B T^4}{\pi} \tag{1.8}$$

où σ_B est la constante de Stefan-Boltzmann :$\sigma_B = 5.669810^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$.

1.2 Transferts de chaleur couplés rayonnement-conduction

1.2.1 Équations de Transfert Radiatif, ETR

Afin d'établir l'ETR, nous effectuons un bilan d'énergie radiative. Ce bilan d'interactions rayonnement dans le cas général d'un milieu semi-transparent qui transmet, émet, absorbe et diffuse s'effectue sur un volume de contrôle de longueur ds, comme présenté sur la figure 1.5, en considérant une longueur d'onde donnée λ et un faisceau se propageant dans la direction. La

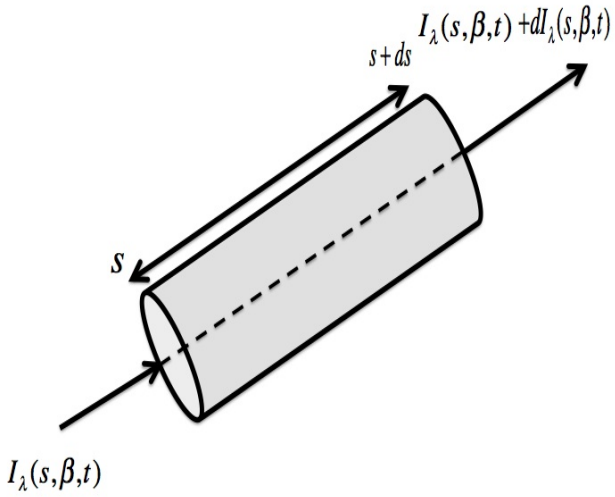


FIGURE 1.5 – Volume de contrôle d'un milieu semi-transparent

propagation du rayonnement pour le parcours ds au travers du volume de contrôle entraîne un changement de l'intensité du rayonnement et la luminance passe de la valeur I_λ représente la luminance monochromatique à la longueur d'onde λ, au point d'abscisse curviligne s, dans la direction β et à l'instant t. Cette variation de la luminance est due au phénomène d'atténuation et de renforcement du rayonnement et comporte quatre termes :

1. **Perte par absorption**, une partie du rayonnement est absorbée par le milieu et l'atténuation par absorption dans le volume est donnée par :

$$\kappa_\lambda I_\lambda(s,\beta,t)ds \tag{1.9}$$

où κ_λ est le coefficient monochromatique d'absorption.

2. **Perte par diffusion**, une partie du rayonnement provenant de la direction est diffusée par le milieu dans toutes les autres directions. L'atténuation due à la diffusion s'exprime :

$$\sigma_{s,\lambda} I_\lambda(s,\beta,t)ds \tag{1.10}$$

où $\sigma_{s,\lambda}$ est le coefficient monochromatique de diffusion.

3. **Gain par émission propre**, ce renforcement du rayonnement est lié à la température du milieu. Son expression est donnée par :

$$n_\lambda^2 \kappa_\lambda I_{\lambda,b}(T(s,t))ds \tag{1.11}$$

avec $T(s,t)$ représente la température du milieu à l'instant t et à la position s , n_λ est l'indice de réfraction optique monochromatique du milieu.

4. **Gain par diffusion**, il a pour expression :

$$\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} \sigma_{s,\lambda} P_\lambda(s,\beta^{'},\beta) I_\lambda(s,\beta^{'},t) d\beta^{'} ds \tag{1.12}$$

Il représente le rayonnement issu de toutes les autres directions de l'espace, redirigé dans la direction β par diffusion. $P_\lambda(s,\beta^{'},\beta)$ est la fonction de phase de diffusion monochromatique. Elle définit la probabilité pour que la diffusion du rayonnement provenant de la direction $\beta^{'}$ se fasse dans la direction β.

L'ETR s'obtient à partir d'un bilan d'énergie pour ces différentes contributions. Aussi, la variation de la luminance est exprimée par la relation :

$$I_\lambda(s,\beta,t) + dI_\lambda(s,\beta,t) = I_\lambda(s+ds,\beta,t+dt) \tag{1.13}$$

En introduisant les contributions par émission, absorption et diffusion, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} dI_\lambda(s,\beta,t) = &- \kappa_\lambda I_\lambda(s,\beta,t)ds - \sigma_{s,\lambda} I_\lambda(s,\beta,t)ds + n_\lambda^2 \kappa_\lambda I_{\lambda,b}(T(s,t))ds \\ &\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} \sigma_{s,\lambda} P_\lambda(s,\beta^{'},\beta) I_\lambda(s,\beta^{'},t) d\beta^{'} ds. \end{aligned} \tag{1.14}$$

La luminance spectrale dans la direction β est fonction de la position et du temps. Aussi, la différentielle totale de la luminance s'exprime par :

$$dI_\lambda(s,\beta,t) = \frac{\partial I_\lambda}{\partial s}(s,\beta,t)ds + \frac{\partial I_\lambda}{\partial t}(s,\beta,t)dt \tag{1.15}$$

Or, entre ds et dt nous avons la relation suivante, $ds = cdt$, car le rayonnement allant de s à $s+ds$ traverse la distance curviligne ds à la vitesse c ($c = 2.997930 \times 10^8 ms^{-1}$ dans le vide). D'où, il vient :

$$\frac{dI_\lambda(s,\beta,t)}{ds} = \frac{\partial I_\lambda}{\partial s}(s,\beta,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial I_\lambda}{\partial t}(s,\beta,t) \tag{1.16}$$

En divisant l'expression (1.14) par ds et en l'introduisant dans l'expression (1.16) nous obtenons l'équation du transfert radiatif qui s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_\lambda}{\partial s}(s,\beta,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial I_\lambda}{\partial t}(s,\beta,t) = &- \kappa_\lambda I_\lambda(s,\beta,t) - \sigma_{s,\lambda} I_\lambda(s,\beta,t) + n_\lambda^2 \kappa_\lambda I_{\lambda,b}(T(s,t)) \\ &\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} \sigma_{s,\lambda} P_\lambda(s,\beta^{'},\beta) I_\lambda(s,\beta^{'},t) d\beta^{'}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

L'équation de transfert radiatif est une équation intégro-différentielle, car la luminance apparaît dans la dérivée directionnelle et le terme intégral. La luminance dépend de sept variables :

nous avons trois variables spatiales, deux angulaires, une variable spectrale (la longueur d'onde λ) et une variable temporelle. L'ETR possède deux inconnues : la luminance $I_\lambda(s,\beta,t)$ et la température $T(s,t)$. La connaissance de la température est nécessaire pour résoudre l'ETR. Il faut prendre en compte le couplage avec l'équation de conservation de l'énergie ou bien l'équation de la chaleur non linéaire dont nous parlerons plus loin. Le vecteur de flux radiatif à l'instant t et en un point s a pour expression [134, 12] :

$$Q_{rad}(s,t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\lambda(s,\beta,t)\beta d\beta d\lambda \tag{1.18}$$

1.2.2 Équation du transfert radiatif pour un milieu gris non diffusant.

Nous considérons l'ETR en régime quasi stationnaire en dimension deux de l'espace, en tenant compte de la vitesse de propagation du rayonnement qui est très grande par rapport à la variation temporelle de la luminance dans toutes les applications. Le terme temporel de l'ETR est négligeable par rapport au terme spatial. Ainsi, nous négligeons l'évolution temporelle de la luminance dans l'ETR (1.17). L'ETR à résoudre dans le cas d'un milieu gris (indépendant de la longueur d'onde λ) non diffusant est alors la suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial s}(s,\beta,t) = \beta.\nabla I(s,\beta) = \kappa\{n^2 I_b(T(s)) - I(s,\beta)\}$$

alors, si nous écrivons le modèle mathématique décrivant le phénomène de rayonnement

$$\begin{cases} \beta.\nabla I(t,s,\beta) + \kappa I(t,s,\beta) = \kappa n^2 I_b(T(t,s)) & (t,s,\beta) \in [0,\tau]\times\Omega\times\mathcal{D} \\ I(t,s,\beta) = g(t,s,\beta) & (t,s,\beta) \in [0,\tau]\times\partial\Omega_- \end{cases} \tag{1.19}$$

avec

$$\partial\Omega_- = \{(s,\beta) \in \partial\Omega\times\mathcal{D}, \qquad \beta.\mathbf{n} < 0\} \tag{1.20}$$

où Ω est un domaine de $\mathbf{R^2}$, β représente la direction de propagation du rayonnement, ou bien une vitesse d'advection [46]. $\mathcal{D}$ est le disque unité. κ le coefficient d'absorption et n l'indice de réfraction du milieu. T est la température du milieu et $I(s,\beta,t)$ est la luminance qui dépend du temps de façon implicite à travers T où g est la condition aux limites radiatives. $I_b(T)$ la luminance du corps noir (un corps noir est un corps de référence qui absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit quelles que soient la direction et la longueur d'onde considérées. Il ne réfléchit ni ne transmet rien.) à une température T du milieu [13] ; elle est donnée par

$$I_b(T) = \frac{\sigma_B T^4}{\pi}$$

où σ_B est la constante de Stefan-Boltzmann :$\sigma_B = 5.669810^{-8} W m^{-2} K^{-4}$. On définit le vecteur densité de flux radiatif en un point s par :

$$Q_{rad}(s,t) = \int_{\mathcal{D}} I(s,\beta,t)\beta d\beta. \tag{1.21}$$

Le terme source radiatif est défini par :

$$S_{rad}(s,t) = \kappa\{G(s,t) - 4\pi n^2 I_b(T(s,t))\} \tag{1.22}$$

où $G(s)$ est l'intégration de la luminance sur toutes les directions de l'espace :

$$G(s,t) = \int_{\mathcal{D}} I(s,\beta,t)d\beta \tag{1.23}$$

Conditions aux limites Radiatives

Maintenant, nous donnons quelques propriétés de surface du milieu en introduisant les conditions aux limites radiatives. Nous présentons dans ce mémoire les surfaces noires, opaques et semi-transparentes.

Lorsque la surface est opaque, la luminance à la frontière est la somme de deux contributions [13] :

1. la luminance émise par la frontière ;
2. la luminance incidente en provenance du milieu et réfléchie par la paroi.

De plus, on peut être confronté à deux types de réflexion, d'une part une réflexion spéculaire (figure : 1.6(a)) et d'autre part, une réflexion diffuse (figure : 1.6(b)). Dans le cas de la réflexion spéculaire, la luminance en $\partial\Omega_-$ s'écrit :

$$g = \epsilon I_b(T_s) + (1-\epsilon) I(s, \beta_{inc}) \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega_- \tag{1.24}$$

où $\epsilon \in [0,1]$ est l'émissivité de la paroi (supposée constante dans cette étude), T_s est la température de surface. β et β_{inc} sont symétriques par rapport à la normale $\mathbf{n}$. $\beta_{inc} = \beta - 2(\beta.n_{int})n_{int}$ n_{int} le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'intérieur du milieu. Dans le cas de la réflexion diffuse et homogène, la luminance s'écrit :

$$g = \epsilon I_b(T_s) + \frac{1-\epsilon}{\pi} Q_{inc}(s) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_- \tag{1.25}$$

où Q_{inc} est le flux radiatif incident à la paroi défini par :

$$Q_{inc}(s) = \int_{\mathbf{n}_{int}.\beta'<0} I(s, \beta') |\mathbf{n}_{int}.\beta'| d\beta' \tag{1.26}$$

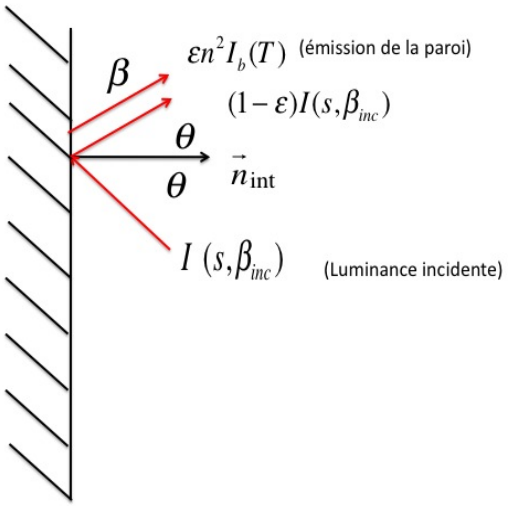
Notons que lorsque la surface est noire, $\epsilon = 1$ dans l'expression (1.24) où (1.25) alors on a des conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes linéaires. Dans le cas où $\epsilon \in [0,1[$ on aurait des conditions aux limites non linéaires.

1.2.3 Équation de conservation d'énergie

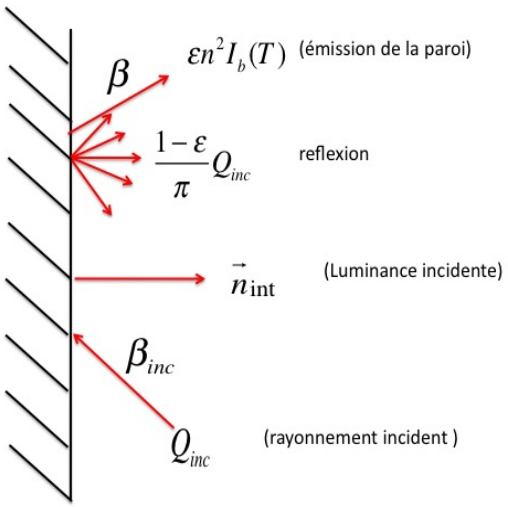
Dans notre milieu, la convection est négligée, par contre les transferts de chaleur et la distribution de la température sont la conséquence de la conduction et du rayonnement. En régime instationnaire, et sans source volumique, la température est régie par l'équation de conservation de l'énergie suivante :

$$c_p(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} - div(k_c(T)\nabla T) = S_{rad} \tag{1.27}$$

où $\rho(T)$, $c_p(T)$ et $k_c(T)$ représentent respectivement la masse volumique, la chaleur massique et la conductivité thermique du milieu à pression constante.T est la température du milieu (pour plus de détails voir [13]). Ces coefficients dépendent de la température. Le couplage de l'équation de conservation de l'énergie et de l'ETR apparait dans le terme source radiatif S_{rad} donné par (1.22). Pour résoudre l'ETR, il faut connaitre la température et, réciproquement, pour résoudre l'équation de conservation de l'énergie, il faut connaitre la luminance qui provient de l'ETR, donc le champ de température dépend du temps et de la luminance implicitement.



(a) Surface opaque à réflexion spéculaire.



(b) Surface opaque à réflexion diffuse.

FIGURE 1.6 – Caractéristique de rayonnement à la frontière.

1.3 Adimensionnement des équations

1.3.1 Équation de la chaleur non linéaire adimensionnée

L'équation de la chaleur non linéaire incluant un terme source radiatif s'écrit :

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} - k_c\triangle T = S_{rad} \tag{1.28}$$

ou k_c, ρ et c_p la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur massique respectivement (sont indépendantes de la température). La divergence du flux radiatif est donnée par :

$$div(Q_{rad})(s,t) = S_{rad}(s,t) = \kappa\{G(s,t) - 4\pi n^2 I_b(T(s,t))\}$$

Nous considérons les variables adimensionnées, ainsi que le nombre de Stark (sans dimension) $N_{\rm s}$ qui représente la contribution de la conduction par rapport à celle du rayonnement, et satisfait l'expression suivante :

$$N_s = \frac{k_c\kappa}{\sigma_B T_{ref}^3}. \tag{1.29}$$

avec T_{ref} la température de référence (correspondant ici à la température chaude). En introduisant le temps adimensionné $\xi = \dfrac{\alpha_d t}{L^2}$ ou α_d la diffusivité thermique et L est la longueur maximale du rectangle, alors on obtient finalement

$$\begin{aligned} &s^\star = \frac{s}{L},\ \tau\star = \frac{\alpha\tau}{L^2},\ \ T^\star = \frac{T}{T_{ref}},\\ &T_0^\star(s) = \frac{T_0(s)}{T_{ref}},\ G^\star = \frac{G}{\sigma_B T_{ref}^4}\ \text{ et }\ \Psi^\star = \frac{S_{rad}}{\sigma_B T_{ref}^4}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Ainsi, l'équation adimensionnée s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T^\star}{\partial \xi} - \triangle T^\star = \Psi^\star, \qquad (\xi, s^\star) \in [0,\tau]\times\Omega^\star, \tag{1.31a}$$

$$T(0,s^\star) = T_0^\star(s^\star), \qquad s\in\Omega^\star. \tag{1.31b}$$

où

$$\Psi^\star = \theta G^\star - 4\pi\theta T^{\star 4}, \tag{1.32}$$

$\Omega^\star$ le domaine adimensionné et $\theta = \dfrac{\kappa^2 L^2}{N_s}$ est un coefficient d'adimensionnement. Dans la suite du manuscrit, on suppose que l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption sont égaux à $n = 1$, $\kappa = 1m^{-1}$, respectivement. Afin de simplifier les notations dans la suite du manuscrit, on remplace $T^\star, s^\star, \tau^\star, G^\star, \Psi^\star$ et $\Omega^\star$ par T, s, τ, G, Ψ et Ω. Finalement, il reste à définir les conditions aux limites relatives à l'équation (1.31). Nous présentons dans ce mémoire des conditions aux limites thermiques de type

1.
$$\textbf{Dirichlet :}\ T(\xi,s) = f(\xi,s), \qquad (\xi,s)\in[0,\tau]\times\partial\Omega, \tag{1.33}$$

2.
$$\textbf{Robin :}\ \ T(\xi,s) = -\frac{\partial T}{\partial n} + f(\xi,s), \qquad (\xi,s)\in[0,\tau]\times\partial\Omega. \tag{1.34}$$

1.3.2 Équation de transfert radiatif adimensionnée

De même, nous introduisons l'équation de transfert radiatif sous la forme adimensionnée. En introduisant les notations suivantes

$$I_{ref} = \frac{\sigma_B}{\pi} T_{ref}^4, \quad I^\star = \frac{I}{I_{ref}}$$
$$\text{et} \quad g^\star = \frac{g}{I_{ref}}$$

De même que dans l'équation de la chaleur non linéaire, afin de simplifier les notations dans la suite du manuscrit, on remplace $I^\star, g^\star$ et $\Omega^\star$ par I, g, Ω respectivement. On obtient l'équation de transfert radiatif adimensionné suivante :

$$\begin{aligned} \beta.\nabla I(\xi,s,\beta) + I(\xi,s,\beta) &= T^4(\xi,s), && (\xi,s,\beta) \in [0,\tau] \times \Omega \times \mathcal{D}, \\ I(\xi,s,\beta) &= g(\xi,s,\beta), && (\xi,s,\beta) \in [0,\tau] \times \partial\Omega_- \times \mathcal{D}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

1.4 Conclusion

Dans l'objectif d'effectuer une analyse du système décrivant les transferts thermiques couplés par conduction et rayonnement, nous avons présenté les équations qui gouvernent ces deux modes de transfert de chaleur, à savoir l'équation du transfert radiatif et l'équation de la chaleur non linéaire. Dans ce travail de thèse, nous nous sommes limités à l'étude d'un milieu gris, semi-transparent non diffusant. Nous avons décrit les équations aux dérivées partielles décrivant le transfert de chaleur par rayonnement et conduction sous la forme adimensionnée. Nous avons présenté les différentes conditions aux limites radiatives et thermiques pour notre système couplé rayonnement-conduction dont l'analyse et le contrôle sont l'objectif de cette thèse.

Chapitre 2

Analyse mathématique du problème couplé rayonnement-conduction

Les résultats de ce chapitre ont été soumis pour publication, voir [71].

Sommaire

2.1 Résumé 27
2.2 Introduction 27
2.3 Résultats préliminaires 29
2.3.1 Existence et unicité de la solution pour une équation de transfert radiatif auxiliaire 29
2.3.2 Equation de la chaleur non linéaire auxiliaire 33
2.4 Existence et unicité locale de la solution du problème couplé . 34
2.4.1 Etude des applications $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$ 34
2.4.2 Etude de l'application $\mathbb{H}_3$. 36
2.4.3 Existence et unicité de la solution pour le système couplé 40
2.5 Conclusion 41

2.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats d'existence et d'unicité locale de la solution pour un système couplé des équations du rayonnement et de conduction en deux dimensions décrites dans le chapitre 1. Ce système décrit le transfert de chaleur dans un milieu gris, semi-transparent et non diffusant, avec les conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. Nous formulons le système couplé comme un problème de point fixe. La preuve de l'existence et de l'unicité repose sur le théorème du point fixe de Banach quand la donnée initiale T_0 est suffisamment petite.

2.2 Introduction

Soit Ω un domaine borné assez régulier (pour garantir quelques injections continues)de $\mathbb{R}^2$et $\mathcal{D}$ le disque unité, tel que $\beta \in \mathcal{D} = \{\beta \in \mathbb{R}^2 : |\beta| \leqslant 1\}$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ et $\xi \in [0, \tau]$, pour $\tau > 0$. $\mathbf{n}$ est la normale sortante à la frontière $\partial\Omega$. Le système d'équations décrivant le transfert

de chaleur couplé rayonnement-conduction est écrit sous la forme suivante :

$$I(\xi,x,\beta)+\beta.\nabla I(\xi,x,\beta)=T^4(\xi,x) \qquad (\xi,x,\beta)\in[0,\tau]\times\Omega\times\mathcal{D} \quad (2.1)$$

$$\partial_\xi T(\xi,x)-\triangle T(\xi,x)+4\pi\theta T^4(\xi,x)=\theta\int_{\mathcal{D}} I(\xi,x,\beta)d\beta \qquad (\xi,x)\in[0,\tau]\times\Omega \quad (2.2)$$

$$T(\xi,x)=0 \qquad (\xi,x)\in]0,\tau]\times\partial\Omega \quad (2.3)$$

$$I(\xi,x,\beta)=0 \qquad (\xi,x,\beta)\in[0,\tau]\times\partial\Omega_- \quad (2.4)$$

$$T(0,x)=T_0(x) \qquad x\in\Omega \quad (2.5)$$

où θ est une constante positive, $\partial_\xi T=\partial T/\partial\xi$. Dans le système ci-dessus, l'inconnue de l'équation de transfert radiatif (ETR) (2.1) correspond à l'intensité de luminance notée par $I(\xi,x,\beta)$ donnée au temps ξ, la position x et la direction β. L'inconnue de l'équation de la chaleur non linéaire (NHE) (2.2) est la température $T(\xi,x)$ au temps ξ et la position x. Dans ce chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité locale de la solution du système (2.1)-(2.5) pour une donnée initiale T_0 suffisamment petite.

Il existe une large étude mathématique du système décrivant simultanément le transfert de chaleur rayonnement-conduction, voir [6, 7, 8, 5, 140, 94]. Par exemple, le papier [5] est consacré à l'étude d'un problème aux limites non locales, non linéaires et non stationnaires représentant le système de transfert de chaleur rayonnement-conduction dans un milieu noir avec des surfaces dont les propriétés dépendent de la fréquence de rayonnement. Ce travail est une extension du papier [7], où les auteurs ont traité du problème stationnaire. Kovtanyuk et al. [93] ont traité le transfert de chaleur rayonnement-conduction dans un milieu diffusif, absorbant, délimité par deux surfaces planes réfléchissantes et rayonnantes. L'existence et l'unicité d'une solution de ce problème sont établies en utilisant une procédure itérative.

L'analyse mathématique pour les équations aux dérivées partielles non linéaires couplées est également étudiée. En effet Asllanaj et al. [16] ont prouvé l'existence et l'unicité dans une étude d'un système 1D couplé par rayonnement et conduction, en régime stationnaire et avec des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes pour des surfaces noires. Le milieu considéré par Asllanaj et al. [16] est supposé homogène avec symétrie axiale, non gris, anisotrope, absorbant, diffusant et émissif. Les auteurs se sont basés sur l'équation de conduction non linéaire, contrairement à Kelley [88] qui a traité le même problème, mais en supposant que l'équation de la conduction est linéaire. Cependant, l'approche développée par Asllanaj et al. [16] est applicable uniquement aux géométries unidimensionnelles.

Pour énoncer notre résultat principal, nous introduisons les notations suivantes :

– $L^p(Q_\tau)=L^p(0,\tau;L^p(\Omega))$ pour tout $p\in[1,\infty[$,

– $L^p(\Omega\times\mathcal{D})$, $p\in[1,\infty[$ l'espace des fonctions mesurables pour la mesure produit $dxd\beta$ telle que

$$\|f\|_{L^p(\Omega\times\mathcal{D})}=\left(\int_{\Omega\times\mathcal{D}}|f(x,\beta)|^p dxd\beta\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

La solution du problème (2.1)-(2.5) est le point fixe d'une application $\mathbb{H}: E_1\longrightarrow E_1$ bien défini dans l'ensemble

$$E_1=\{T\in\mathcal{V};\|T\|_{L^8(Q_\tau)}\leqslant M\},$$

où M est une constante postive, l'espace $\mathcal{V}$ est donné par

$$\mathcal{V}=L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))\cap L^{10}(Q_\tau)\cap L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))\cap H^1(0,\tau;H^{-1}(\Omega)). \quad (2.6)$$

Nous supposons que la donnée $T_0 \in L^5(\Omega)$ est fixée et qu'elle satisfait l'hypothèse suivante

$$\|T_0\|_{L^5(\Omega)} \leqslant \sqrt[5]{\frac{15\theta\pi M^8}{8}}. \tag{2.7}$$

Le résultat de ce chapitre peut être résumé dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. *(Existence et unicité locale dans E_1)*
Il existe $\tau^\star > 0$ tel que pour tout $\tau \leqslant \tau^\star$ l'application $\mathbb{H}$ est une contraction.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans le prochain paragraphe, nous rappelons quelques résultats sur l'existence et l'unicité de la solution pour une équation de transfert radiatif auxiliaire et une équation de la chaleur non linéaire. Nous donnons aussi des estimations a priori de la solution pour le deuxième problème aux limites auxiliaires. La section 4 est consacrée à la construction de l'application de contraction $\mathbb{H}$ de E_1 dans E_1 , dont le seul point fixe de cette application donne la solution du système non linéaire de transfert de chaleur couplé rayonnement-conduction (2.1)-(2.2).

2.3 Résultats préliminaires

Maintenant, nous donnons quelques résultats existants sur la solution de l'équation de transfert radiatif et l'équation de la chaleur non linéaire.

2.3.1 Existence et unicité de la solution pour une équation de transfert radiatif auxiliaire

Dans cette section, nous établissons un théorème d'existence et d'unicité de l'ETR auxiliaire définie par

$$\begin{cases} \beta.\nabla I(x,\beta) + I(x,\beta) = f(x) & (x,\beta) \in \Omega \times \mathcal{D} \\ I(x,\beta) = g & \partial\Omega_- \end{cases} \tag{2.8}$$

où f est une fonction indépendante de la direction β, et g est la condition aux limites radiatives associées. Conformément à la méthode introduite dans la résolution des équations de neutrons [46], nous utilisons par la suite l'espace $\mathcal{W}^p$

$$\mathcal{W}^p = \{T \in L^p(\Omega \times \mathcal{D}); \beta.\nabla T \in L^p(\Omega \times \mathcal{D})\},$$

ainsi que les espaces fonctionnels nécessaires à l'analyse du problème auxiliaire (2.8). Nous noterons

$$L^2 = L^2(\Omega \times \mathcal{D})$$

$$L^2_- = L^2(\Omega_-; |\beta.\mathbf{n}|dxd\beta)$$

$$L^2_+ = L^2(\Omega_+; |\beta.\mathbf{n}|dxd\beta)$$

les espaces des fonctions de carré intégrables respectivement sur $\Omega \times \mathcal{D}, \Omega_-$ et Ω_+ ;

$$\Omega_- = \{(x,\beta) \in \Omega \times \mathcal{D} \ \text{ et } \ \beta.\mathbf{n} < 0\}$$

et

$$\Omega_+ = \{(x,\beta) \in \Omega \times \mathcal{D} \ \text{ et } \ \beta.\mathbf{n} > 0\}$$

Dans la suite nous utiliserons aussi les espaces suivants

$$\mathcal{W}_0 = \{T \in \mathcal{W}^2;\ \ T_{|\Omega_-} = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{T \in \mathcal{W}^2;\ \ T_{|\Omega_-} \in L^2_-\}.$$

M.Cessenat [37] montre que l'espace $\mathcal{W}$ peut aussi être défini par

$$\mathcal{W} = \{T \in \mathcal{W}^2;\ \ T_{|\Omega_+} \in L^2_+\}.$$

On définit, alors, le produit scalaire sur $\mathcal{W}$ de la façon suivante :

$$(u,v)_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega\times\mathcal{D}} uv + \int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla u)(\beta.\nabla v) + \int_{\Omega_+} (\beta.\mathbf{n})uv.$$

La norme correspondante sur $\mathcal{W}$ est donnée par :

$$\|u\|^2_{\mathcal{W}} = \|u\|^2_{L^2} + \|\beta.\nabla u\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{L^2_+}.$$

L'espace $\mathcal{W}$ associé au produit scalaire correspondant $(.,.)_{\mathcal{W}}$ est un espace de Hilbert (voir [46]).

Remarque 2.3.1. *Pour tout $(u,v) \in \mathcal{W}\times\mathcal{W}$, nous avons la formule de Green suivante :*

$$\int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla u)v dx d\beta + \int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla v)u dx d\beta = \int_{\partial\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\mathbf{n})uv d\Gamma d\beta. \tag{2.9}$$

Nous allons à présent énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution pour (2.8) dans le cadre $\mathcal{W}$, nous donnons une estimation de la norme $\mathcal{W}$ de la solution. Cette estimation est un résultat très utilisé pour l'étude de la formulation variationnelle de l'équation du transport [46, 20].

Théorème 2.3.2. *Nous supposons que les données du problème (2.8) vérifient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2_-$. Alors, le problème (2.8) possède une solution unique dans $\mathcal{W}$. Nous avons les estimations suivantes :*

$$\|I\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|g\|_{L^2_-} \tag{2.10}$$

$$\|I\|_{\mathcal{W}} \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2_-}. \tag{2.11}$$

Démonstration. Pour la démonstration de l'existence et de l'unicité, voir [46]. Nous considérons donc le problème stationnaire non homogène suivant

$$\beta.\nabla I(x,\beta) + I(x,\beta) = f(x) \qquad (x,\beta) \in \Omega\times\mathcal{D} \tag{2.12}$$

$$I(x,\beta) = g \qquad (x,\beta) \in \Omega_-. \tag{2.13}$$

Nous pouvons décomposer la solution I du problème (2.12)-(2.13) comme la somme $I = I_0 + w$ de la solution I_0 du problème (2.12)-(2.13) pour $g \equiv 0$ et la solution w du problème (2.12)-(2.13) pour $f \equiv 0$ que nous pourrons étudier indépendamment.

Nous commençons par considérer le problème stationnaire homogène suivant

$$\beta.\nabla I_0(x,\beta) + I_0(x,\beta) = f(x) \quad \forall (x,\beta) \in \Omega\times\mathcal{D} \tag{2.14}$$

$$I_0(x,\beta) = 0 \quad (x,\beta) \in \Omega_-. \tag{2.15}$$

Multiplions (2.14) par I_0 et intégrons en espace, on obtient donc

$$\int_{\Omega\times\mathcal{D}} I_0^2 dxd\beta + \int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla I_0) I_0 dxd\beta = \int_{\Omega\times\mathcal{D}} f(x) I_0 dxd\beta. \tag{2.16}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous majorons le terme du second membre de (2.16).

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega\times\mathcal{D}} f(x) I_0 dxd\beta\right| &\leqslant \|f\|_{L^2}\|I_0\|_{L^2} \\ &\leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|I_0\|_{L^2},\end{aligned}$$

puisque f est indépendante de la direction β et $\text{mes}(\mathcal{D}) = \pi$. On utilise maintenant la formule de Green (2.9) dans le but de faire intervenir les termes du bord, soit

$$2\int_{\Omega\times\mathcal{D}} I_0(\beta.\nabla I_0) dxd\beta = \int_{\Omega_+} (\beta.\mathbf{n}) I_0^2 d\Gamma d\beta. \tag{2.17}$$

À partir de la définition de Ω_+, nous pouvons conclure que le terme à droite est positif. Au final, nous obtenons donc l'inégalité suivante :

$$\|I_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|I_0\|_{L_+^2}^2 \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|I_0\|_{L^2},$$

alors nous avons

$$\|I_0\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.18}$$

Maintenant, nous multiplions (2.14) par $I_0 + \beta.\nabla I_0$ et intégrons en espace, nous obtenons donc

$$\int_{\Omega\times\mathcal{D}} (I_0 + \beta.\nabla I_0) I_0 dxd\beta + \int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla I_0)(I_0 + \beta.\nabla I_0) dxd\beta = \int_{\Omega\times\mathcal{D}} f(I_0 + \beta.\nabla I_0) dxd\beta \tag{2.19}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous majorons le terme du second membre de (2.19).

$$\left|\int_{\Omega\times\mathcal{D}} f(x)\beta.\nabla I_0 dxd\beta\right| \leqslant \|f\|_{L^2}\|\beta.\nabla I_0\|_{L^2},$$

et nous avons

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\times\mathcal{D}} I_0^2 dxd\beta + 2\int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla I_0) I_0 dxd\beta + \int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla I_0)^2 dxd\beta \\ &= \|I_0\|_{L^2}^2 + \|\beta.\nabla I_0\|_{L^2}^2 + 2\int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla I_0) I_0 dxd\beta.\end{aligned}$$

nous utilisons maintenant (2.17), on obtient donc l'inégalité suivante :

$$\|I_0\|_{L^2}^2 + \|\beta.\nabla I_0\|_{L^2}^2 + \|I_0\|_{L_+^2}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\|I_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|\beta.\nabla I_0\|_{L^2},$$

donc

$$\|I_0\|_{\mathcal{W}}^2 = \|I_0\|_{L^2}^2 + \|\beta.\nabla I_0\|_{L^2}^2 + \|I_0\|_{L_+^2}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\|I_0\|_{\mathcal{W}}. \tag{2.20}$$

D'où nous obtenons l'estimation suivante en norme $\mathcal{W}$

$$\|I_0\|_{\mathcal{W}} \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.21}$$

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du problème stationnaire non homogène suivant :

$$\beta.\nabla w(x,\beta) + w(x,\beta) = 0 \quad (x,\beta) \in \Omega \times \mathcal{D} \tag{2.22}$$

$$w(x,\beta) = g \quad (x,\beta) \in \Gamma^{-}. \tag{2.23}$$

Multiplions (2.22) par w et intégrons en l'espace, nous trouvons

$$\int_{\Omega\times\mathcal{D}} w^2 dx d\beta + \int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla w) w dx d\beta = 0.$$

En utilisant la formule de Green (2.9), nous obtenons

$$\|w\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2_+} - \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2_-} = 0. \tag{2.24}$$

Nous avons l'estimation suivante

$$\|w\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|g\|_{L^2_-}. \tag{2.25}$$

Multiplions (2.22) par $\beta.\nabla w$ et intégrons en espace, nous trouvons

$$\int_{\Omega\times\mathcal{D}} w(\beta.\nabla w) dx d\beta + \int_{\Omega\times\mathcal{D}} (\beta.\nabla w)^2 dx d\beta = 0.$$

$$\|\beta.\nabla w\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2_+} = \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2_-}.$$

Par ailleurs, nous avons

$$\|w\|^2_{L^2} \leqslant \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2_-}$$

alors

$$\|w\|^2_{L^2} + \|\beta.\nabla w\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2_+} \leqslant \|g\|^2_{L^2_-}.$$

Nous obtenons donc l'estimation suivante

$$\|w\|_{\mathcal{W}} \leqslant \|g\|_{L^2_-}. \tag{2.26}$$

Nous combinons les estimations sur I_0 et w dans le cadre de L^2 données respectivement par (2.18)-(2.25), nous obtenons :

$$\|I\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|g\|_{L^2_-},$$

de la même façon, on combine les estimations sur I_0 et w données respectivement par (2.21)-(2.26) pour obtenir l'estimation suivante :

$$\|I\|_{\mathcal{W}} \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2_-}.$$

□

Remarque 2.3.3. *Nous avons le même résultat dans le cadre de $L^\infty(\Omega\times\mathcal{D})$. Si on suppose que $f \in L^\infty(\Omega\times\mathcal{D})$, avec $g \in L^\infty(\Omega_-)$. Alors, le problème (2.8) admet une solution unique dans $L^\infty(\Omega\times\mathcal{D})$ et elle vérifie*

$$\|I\|_{L^\infty(\Omega\times\mathcal{D})} \leqslant \sup(\|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathcal{D})}, \|g\|_{L^\infty(\Omega\times\mathcal{D})}).$$

Pour une preuve de ce résultat, voir [46].

2.3.2 Equation de la chaleur non linéaire auxiliaire

Les résultats que nous établissons maintenant sont des résultats fondamentaux pour l'étude de l'équation de la chaleur non autonome. Nous énonçons les théorèmes et considérons la régularité dont nous avons besoin pour notre travail, voir [36]. Soit F une fonction localement lipschitzienne telle que $F(0) = 0$. Pour $\tau > 0$, $T_0 \in L^5(\Omega)$ et $h : [0, \tau] \to L^2(\Omega)$ donnés, nous allons étudier la solution du problème suivant :

$$T \in C([0,\tau]; L^5(\Omega)) \cap L^2(0,\tau; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,\tau; H^{-1}(\Omega)) \tag{2.27}$$

$$T_\xi - \triangle T = F(T(\xi)) + h(\xi), \qquad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ p. p. sur } (0,\tau) \tag{2.28}$$

$$T(0) = 0 \qquad \Omega \tag{2.29}$$

Nous donnons maintenant quelques résultats préliminaires concernant le problème (2.27)-(2.29). Nous définissons l'opérateur $\mathbf{A}$ comme suit

$$D(\mathbf{A}) = \{T \in L^5(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \triangle T \in L^5(\Omega)\}, \tag{2.30}$$

et

$$\mathbf{A}T = \triangle T\ ,\quad \forall T \in D(\mathbf{A}). \tag{2.31}$$

Nous notons par $\mathbb{T}(t)$ le semi-groupe de contraction engendré par $\mathbf{A}$ dans $L^5(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Proposition 2.3.4 ([36]). *Soient $\tau > 0$, $h \in L^\infty(0,\tau, L^2(\Omega))$ et $T \in C([0,\tau]; L^5(\Omega))$: Alors, T est solution de* (2.27)-(2.29) *si et seulement si T est une solution de*

$$T(\xi) = \int_0^\xi \mathbb{T}(\xi - s)F(T(s))ds + \int_0^\xi \mathbb{T}(\xi - s)h(s)ds \quad \forall \xi \in [0,\tau]. \tag{2.32}$$

De plus, nous avons $T \in C([0,\tau]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,\tau; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,\tau; H^{-1}(\Omega))$

Nous rappelons maintenant le Lemme de Gronwall,

Lemme 2.3.5 (**Lemme de Gronwall** [36]). *Soit $\tau > 0$, $\lambda \in L^1(0,\tau)$, $\lambda \geqslant 0$ p.p. et $C_1, C_2 \geqslant 0$. Soit $\varphi \in L^1(0,\tau)$, $\varphi \geqslant 0$ p.p., tel que $\lambda\varphi \in L^1(0,\tau)$ et*

$$\varphi(\xi) \leqslant C_1 + C_2 \int_0^\xi \lambda(s)\varphi(s)ds, \quad \textit{pour presque tout} \quad \xi \in (0,\tau). \tag{2.33}$$

Alors,

$$\varphi(\xi) \leqslant C_1 exp(C_2 \int_0^\xi \lambda(s)ds), \quad \textit{pour presque tout}\ \ \xi \in (0,\tau). \tag{2.34}$$

On introduit maintenant l'estimation suivante :

Proposition 2.3.6 ([36]). *Soit $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Alors,*

$$\|\mathbb{T}(\xi)\phi\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{1}{(4\pi\xi)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}\|\phi\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall \xi > 0, \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.35}$$

En se basant sur ces derniers résultats, nous établissons dans le prochain paragraphe quelques propriétés sur la solution de l'équation (2.2).

2.4 Existence et unicité locale de la solution du problème couplé

Dans cette section, nous donnons le théorème d'existence et d'unicité pour la solution de l'ETR lorsque la température T est donnée. Nous montrons que l'existence d'une solution (T, I) du système couplé d'équations (2.1)-(2.5) est liée à l'existence d'une solution d'un problème de point fixe. Nous allons appliquer le théorème du point fixe sur une application $\mathbb{H}$ que l'on définira . Pour ce faire, nous devons montrer que l'application $\mathbb{H}$ est bien définie et continue. Dans un premier temps, nous introduisons les ensembles suivants :

$$E_2 = \{I \in L^2(0,\tau; L^2(\Omega \times \mathcal{D})); \|I\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega\times\mathcal{D}))} \leqslant N\},$$
$$E_3 = \{G \in L^2(Q_\tau); \|G\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant \sqrt{\pi}N\},$$

avec $N = \sqrt{\pi}M^4$ est une constante positive. On définit l'application point fixe $\mathbb{H} : E_1 \longrightarrow E_1$ comme la composition de trois applications

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_3 \circ \mathbb{H}_2 \circ \mathbb{H}_1.$$

L'application $\mathbb{H}_1 : E_1 \longrightarrow E_2$ est telle que pour tout $T \in E_1$, $\mathbb{H}_1(T) \in E_2$ est la solution de l'ETR (2.1). L'application $\mathbb{H}_2 : E_2 \longrightarrow E_3$ est telle que pour tout $I \in E_2$, $G = \mathbb{H}_2(I) \in E_3$ est la moyenne de I sur toutes les directions données par

$$G(\xi, x) = \int_{\mathcal{D}} I(\xi, x, \beta) d\beta. \tag{2.36}$$

Et enfin, nous définissons l'application $\mathbb{H}_3 : E_3 \longrightarrow E_1$ telle que pour tout $G \in E_3$, $\mathbb{H}_3(G) \in E_1$ est la solution de l'équation (2.2).

2.4.1 Etude des applications $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$

Maintenant, nous allons nous concentrer sur les applications $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$, nous donnons quelques propriétés de la solution de l'ETR (2.1).

Théorème 2.4.1. *Soit $T \in E_1$, le problème* (2.1)-(2.36) *admet une solution unique $\mathbb{H}_1(T) \in L^2(0,\tau; L^2(\mathcal{X}))$. $\mathbb{H}_1$ est une application bien définie et elle est continue de E_1 dans E_2.*

Démonstration. Soit $T \in E_1$ alors pour tout $\xi \in [0,\tau]$, on a $T^4(\xi) \in L^2(\Omega)$. D'après le théorème 2.3.2, le problème (2.1) admet une solution unique $I(\xi) \in L^2(\mathcal{X})$ et nous avons l'estimation suivante :

$$\|I(\xi)\|_{L^2(\mathcal{X})} \leqslant \sqrt{\pi}\|T^4(\xi)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On intègre en temps entre 0 et τ et on obtient :

$$\|I\|_{L^2(0,\tau;L^2(\mathcal{X}))} \leqslant \sqrt{\pi}\|T\|^4_{L^8(Q_\tau)},$$

alors,

$$\|I\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant \sqrt{\pi}M^4 = N.$$

Donc $I \in E_2$ et nous pouvons conclure que $\mathbb{H}_1$ est bien définie.

Maintenant, nous allons montrer la continuité de l'application $\mathbb{H}_1$.

Nous considérons I_1, I_2 deux solutions de (2.1) associées respectivement à T_1, T_2. Soit $\xi \in [0,\tau]$, d'après l'estimation (2.10) on obtient

$$\|I_1(\xi) - I_2(\xi)\|_{L^2(\Omega\times\mathcal{D})} \leqslant \sqrt{\pi}\|T_1^4(\xi) - T_2^4(\xi)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.37}$$

Nous rappelons l'inégalité de Holder généralisée

$$\left|\int_E f_1 f_2 f_3 dE\right| \leqslant \|f_1\|_{L^{r_1}(E)}\|f_2\|_{L^{r_2}(E)}\|f_3\|_{L^{r_3}(E)}. \tag{2.38}$$

avec E comme ensemble mesurable de dimension quelconque et dE la mesure associée. On a

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1. \tag{2.39}$$

Alors, nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\|T_1^4(\xi)-T_2^4(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (T_1(\xi)-T_2(\xi))^2(T_1(\xi)+T_2(\xi))^2(T_1^2(\xi)+T_2^2(\xi))^2 dx \\ &\leqslant \|T_1(\xi)-T_2(\xi)\|^2_{L^8(\Omega)}\|T_1(\xi)+T_2(\xi)\|^2_{L^8(\Omega)}\|T_1^2(\xi)+T_2^2(\xi)\|^2_{L^4(\Omega)}. \end{aligned}\tag{2.40}$$

avec $r_1=r_2=4$ et $r_3=2$. Nous intégrons en temps et nous obtenons

$$\|T_1^4-T_2^4\|^2_{L^2(Q_\tau)} \leqslant \|T_1-T_2\|^2_{L^8(Q_\tau)}\|T_1+T_2\|^2_{L^8(Q_\tau)}\|T_1^2+T_2^2\|^2_{L^4(Q_\tau)}. \tag{2.41}$$

Nous savons que

$$\begin{aligned}\|T_1^2(\xi)+T_2^2(\xi)\|^4_{L^4(\Omega)} \leqslant{}& \|T_1(\xi)\|^8_{L^8(\Omega)} + 4\|T_1(\xi)\|^6_{L^8(\Omega)}\|T_2(\xi)\|^2_{L^8(\Omega)} + 6\|T_1(\xi)\|^4_{L^8(\Omega)}\|T_2(\xi)\|^4_{L^8(\Omega)} \\ &+ 4\|T_1(\xi)\|^2_{L^8(\Omega)}\|T_2(\xi)\|^6_{L^8(\Omega)} + \|T_2(\xi)\|^8_{L^8(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|T_1^2+T_2^2\|^4_{L^4(Q_\tau)} \leqslant{}& \|T_1\|^8_{L^8(Q_\tau)} + 4\|T_1\|^6_{L^8(Q_\tau)}\|T_2\|^2_{L^8(Q_\tau)} + 6\|T_1\|^4_{L^8(Q_\tau)}\|T_2\|^4_{L^8(Q_\tau)} \\ &+ 4\|T_1\|^2_{L^8(Q_\tau)}\|T_2\|^6_{L^8(Q_\tau)} + \|T_2\|^8_{L^8(Q_\tau)}.\end{aligned}$$

Nous avons $T_1, T_2 \in E_1$, alors

$$\|T_1^2+T_2^2\|_{L^4(Q_\tau)} \leqslant 2M^2. \tag{2.42}$$

D'autre part

$$\|T_1+T_2\|_{L^8(Q_\tau)} \leqslant 2M, \tag{2.43}$$

ainsi, on obtient l'estimation suivante :

$$\|T_1^4-T_2^4\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant 4M^3\|T_1-T_2\|_{L^8(Q_\tau)},$$

alors d'après (2.37) nous avons

$$\|I_1-I_2\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega\times\mathcal{D}))} \leqslant 4\sqrt{\pi}M^3\|T_1-T_2\|_{L^8(Q_\tau)}. \tag{2.44}$$

D'où la continuité de l'application $\mathbb{H}_1$. □

Maintenant nous donnons un résultat de monotonie sur $\mathbb{H}_1$.

Théorème 2.4.2. *L' application $\mathbb{H}_1$ de E_1 dans E_2 est monotone, dans le sens que*

$$\textit{si}\quad (T_1-T_2,\phi)\leqslant 0 \qquad \textit{alors} \qquad (\mathbb{H}_1(T_1)-\mathbb{H}_1(T_2),\phi)\leqslant 0 \qquad \textit{pour tout}\quad \phi\in\mathcal{C}^0(0,\tau;\mathcal{C}^0(\Omega\times\mathcal{D}))$$

Démonstration. Soient $T_1, T_2 \in E_1$ tels que $(T_1 - T_2, \phi) \leqslant 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(0,\tau;\mathcal{C}^0(\Omega\times\mathcal{D}))$.

Soient I_1, I_2 données par

$$I_1 = \mathbb{H}_1(T_1), \qquad I_2 \ = \mathbb{H}_1(T_2), \tag{2.45}$$

alors nous avons

$$\begin{cases} (I_2 - I_1) + \beta.\nabla(I_2 - I_1) = (T_1^4 - T_2^4) & (\xi, x, \beta) \in [0,\tau]\times\Omega\times\mathcal{D} \\ I_2 - I_1 = 0 & (\xi, x, \beta) \in [0,\tau]\times\Omega_-. \end{cases}$$

Puisque $(T_2 - T_1, \phi) \geqslant 0$ alors on a $(T_2^4 - T_1^4, \phi) \geqslant 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(0,\tau;\mathcal{C}^0(\Omega\times\mathcal{D}))$, d'après le principe de maximum [2], nous obtenons $(I_2 - I_1, \phi) \geqslant 0$. Cela implique que

$$(I_2 - I_1, \phi) \geqslant 0 = (\mathbb{H}_1(T_2) - \mathbb{H}_1(T_1), \phi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad \phi \in \mathcal{C}^0(0,\tau;\mathcal{C}^0(\Omega\times\mathcal{D}))$$

D'où le résultat. □

Nous terminons ce paragraphe par introduire quelques propriétés sur l'application $\mathbb{H}_2$.

Proposition 2.4.3. *L'application $\mathbb{H}_2$ est une application bien définie, continue et monotone de E_2 dans E_3.*

Démonstration. Soit $I \in E_2$, $G = \mathbb{H}_2(I)$ est donnée par (2.36), la moyenne de I sur toutes les directions. Nous avons

$$\|G\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant \sqrt{\pi}\|I\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega\times\mathcal{D}))}. \tag{2.46}$$

D'où, pour tout $I \in E_2$ nous avons $G = \mathbb{H}_2(I) \in E_3$, alors $\mathbb{H}_2$ est bien définie.

L'application $\mathbb{H}_2$ est une application linéaire continue, la monotonie se déduit facilement de la définition de la moyenne. □

2.4.2 Etude de l'application $\mathbb{H}_3$.

On commence par introduire quelques propriétés sur la solution de l'équation de la chaleur non linéaire (2.2).

Théorème 2.4.4. *Soient $T_0 \in L^5(\Omega)$, $T_0 \geqslant 0$ p.p. sur Ω et $G \in E_3$ donnée par (2.36). Alors, (2.2) admet une solution positive $T = \mathbb{H}_3(G) \in E_1$. Il existe C qui dépend de θ telle que*

$$\|T\|^5_{L^{10}(Q_\tau)} \leqslant C(\|G\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \|T_0\|^5_{L^5(\Omega)}),$$

De plus, il existe C qui dépend de Ω, τ et θ telles que

$$\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|T(\xi)\|_{L^2(\Omega)} + \|T\|_{L^2(0,\tau;H^1_0(\Omega))} + \|T\|_{H^1(0,\tau;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C(\|T_0\|_{L^5(\Omega)} + \|G\|_{L^2(Q_\tau)})$$

Démonstration. Pour la démonstration de l'existence , voir [36]. Pour presque partout sur $[0,\tau]\times\Omega$, on a

$$T^- = \begin{cases} 0 \text{ si } T \geqslant 0 \\ T \text{ si } T \leqslant 0 \end{cases} \qquad T^+ = \begin{cases} T \text{ si } T \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } T \leqslant 0 \end{cases}$$

Si $\xi \in (0,\tau)$, on a

$$y(\xi) = \int_\Omega (T^-(\xi))^2.$$

Nous avons

$$\frac{d}{d\xi}\int_\Omega (T^-(\xi))^2 dx = 2 < T_\xi(\xi), T^-(\xi) > \leqslant 2\Big(\int_\Omega \nabla T \nabla T^- - \int_\Omega G T^-\Big)$$
$$\leqslant -2\int_\Omega |\nabla T^-(\xi)|^2 - 2\int_\Omega G(\xi)T^-(\xi).$$

alors ,

$$\frac{d}{d\xi}\int_\Omega (T^-(\xi))^2 dx \leqslant \int_\Omega G^-(\xi)T^-(\xi).$$

On a $G \geqslant 0$ sur $[0,\tau]\times\Omega$, alors il existe $C>0$ telle que

$$G^-(\xi,x) \leqslant C|T(\xi,x)| \tag{2.47}$$

et donc

$$y^{'}(\xi) \leqslant Cy(\xi).$$

On intégre la dernière inégalité pour tout $0 < s \leqslant \xi < \tau$ alors on obtient

$$y(\xi) \leqslant y(s)e^{C(\xi-s)}. \tag{2.48}$$

Si s tend vers 0^+

$$y(\xi) \leqslant y(0)e^{C(\xi)} \quad \forall \xi \in [0,\tau]. \tag{2.49}$$

D'ou la positivité de T.

Nous multiplions l'équation (2.2) par T^4 et nous intégrons

$$\frac{1}{5}\frac{d}{d\xi}\int_\Omega T^5(\xi)dx + 4\int_\Omega (\nabla T(\xi))^2 (T(\xi))^3 dx + 4\pi\theta\int_\Omega T^8(\xi)dx = \theta\int_\Omega GT^4(\xi)dx$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\frac{1}{5}\frac{d}{d\xi}\int_\Omega (T^{\frac{5}{2}}(\xi))^2 dx + \frac{16}{25}\int_\Omega (\nabla T^{\frac{5}{2}}(\xi))^2 dx + 4\pi\theta\int_\Omega T^8(\xi)dx \leqslant \frac{\theta}{2\epsilon}\int_\Omega G^2(\xi)dx + \theta\frac{\epsilon}{2}\int_\Omega T^8(\xi)dx.$$

Nous prenons $\epsilon = 2\pi$ et on l'intègre par rapport au temps, nous obtenons,

$$\frac{1}{5}\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|T^{\frac{5}{2}}(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\|T^{\frac{5}{2}}\|^2_{L^2(0,\tau;H^1_0(\Omega))} + 3\pi\theta\|T\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \frac{\theta}{4\pi}\|G\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{5}\|T_0^{\frac{5}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.50}$$

alors nous avons

$$\|T\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \frac{1}{12\pi^2}\|G\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{15\theta\pi}\|T_0\|^5_{L^5(\Omega)}, \tag{2.51}$$

Puisque $G \in E_1$, d'où

$$\|T\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \frac{M^8}{4} + \frac{1}{15\theta\pi}\|T_0\|^5_{L^5(\Omega)}. \tag{2.52}$$

alors en utilisant le fait que la donnée initiale vérifie (2.7), nous obtenons

$$\|T\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant M^8. \tag{2.53}$$

Donc nous pouvons conclure que $T \in L^8(Q_\tau)$.

Nous avons l'injection continue $L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega))\cap L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))\hookrightarrow L^4(Q_\tau)$, voir [97], alors il existe $C_1>0$

$$\|T^{\frac{5}{2}}\|^2_{L^4(Q_\tau)}\leqslant C_1\Big(\frac{1}{5}\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|T^{\frac{5}{2}}(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|T^{\frac{5}{2}}\|^2_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))}\Big).$$

donc il existe $C>0$

$$\|T\|^5_{L^{10}(Q_\tau)}\leqslant C\Big(\|G\|^2_{L^2(Q_\tau)}+\|T_0\|^5_{L^5(\Omega)}\Big).$$

D'où $T\in L^{10}(Q_T)$.

Soit $\xi\in[0,\tau]$, nous multiplions l' équation (2.2) par T et on utilise l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{\theta}{\epsilon}\|G(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+\theta\epsilon\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.54}$$

$$\frac{d}{d\xi}\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{2\theta}{\epsilon}\|G(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\theta\epsilon\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.55}$$

Nous prenons $\epsilon=\dfrac{1}{2\theta}$, alors

$$\frac{d}{d\xi}\|T(\xi)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant 4\theta^2\|G(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Soit $\eta(\xi)=\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}$ et $\nu(\xi)=\|G(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}$ pour tout $\xi\in[0,\tau]$ En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\eta(\xi)\leqslant e^{C_1\xi}(\eta(0)+C_2\int_0^\xi\nu(s)ds)$$

avec $\eta(0)=\|T_0\|^2_{L^2(\Omega)}$, $C_1=1$ et $C_2=4\theta^2$. Alors

$$\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|T(\xi)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant 2\theta e^\tau(\|T_0\|_{L^2(\Omega)}+\|G\|_{L^2(Q_\tau)}), \tag{2.56}$$

Nous prenons $\epsilon=\frac{1}{\theta}$ dans (2.54), nous obtenons

$$\frac{d}{d\xi}\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|\nabla T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant 2\theta^2\|G(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Nous intégrons l'équation entre 0 et τ

$$\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|T\|^2_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))}\leqslant 2\theta^2\|G\|^2_{L^2(Q_\tau)}+2\|T\|^2_{L^2(Q_\tau)}+\|T_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Alors, il existe une constante $C=C(\theta)$ telle que

$$\|T\|_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))}\leqslant C(\|G\|_{L^2(Q_\tau)}+\|T_0\|_{L^2(\Omega)}) \tag{2.57}$$

Soit $T(\xi)\in H_0^1(\Omega)$ pour tout $0\leqslant\xi\leqslant\tau$.

$$\begin{aligned}<T_\xi,T(\xi)>&=\int_\Omega(\nabla T(\xi))^2+\frac{1}{2}\int_\Omega G^2dx+\frac{1}{2}\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant\|T(\xi)\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\|G(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|T(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$| < T_\xi, T > | \leqslant \|T\|_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|G\|_{L^2(Q_\tau)} + \frac{\tau}{2}\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|T(\xi)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors il existe une constante $C = C(\tau, \Omega, \theta)$ telle que

$$\|T_\xi\|_{L^2(0,\tau;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C(\|G\|_{L^2(Q_\tau)} + \|T_0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.58}$$

D'après les estimations (2.56), (2.54), (2.57) et (2.58), il existe C qui dépend de Ω, τ et θ telles que

$$\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|T(\xi)\|_{L^2(\Omega)} + \|T\|_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))} + \|T\|_{H^1(0,\tau;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C(\|T_0\|_{L^5(\Omega)} + \|G\|_{L^2(Q_\tau)})$$

De plus, en utilisant (2.53), nous avons $T \in E_1$, alors nous pouvons dire que l'application $\mathbb{H}_3$ est bien définie de E_3 dans E_1. □

Théorème 2.4.5. *L'application $\mathbb{H}_3$ est une application continue de E_3 dans E_1.*

Démonstration. Soient $\tau > 0$, $\xi \in [0, \tau[$ et $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ solutions de (2.2) associées respectivement à $G_1, G_2 \in E_3$, telle que

$$\partial_\xi \bar{T}_1 - \triangle \bar{T}_1 = -4\pi\theta\bar{T}_1^4 + \theta G_1 \qquad \text{dans } H^{-1} \text{ p. p. sur } (0,\tau) \tag{2.59}$$

$$\partial_\xi \bar{T}_2 - \triangle \bar{T}_2 = -4\pi\theta\bar{T}_2^4 + \theta G_2 \qquad \text{dans } H^{-1} \text{ p. p. sur } (0,\tau) \tag{2.60}$$

où $\bar{T}_1(0,.) = \bar{T}_2(0,.) = T_0(.)$ dans H^{-1}.

La différence entre les deux équations (2.59)-(2.60), donne

$$\partial_\xi(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) - \triangle(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) = -4\pi\theta(\bar{T}_1^4 - \bar{T}_2^4) + \theta(G_1 - G_2) \qquad \text{dans } H^{-1} \text{ p. p. sur } (0,\tau).$$

Nous posons $w = \bar{T}_1 - \bar{T}_2$ où $w(0,.) = 0$, nous appliquons la proposition 2.3.4, alors nous avons

$$w(\xi) = -4\pi\theta\int_0^\xi \mathbb{T}(\xi - s)(\bar{T}_1^4 - \bar{T}_2^4)(s)ds + \theta\int_0^\xi \mathbb{T}(\xi - s)(G_1 - G_2)(s)ds. \tag{2.61}$$

Maintenant, en utilisant la proposition 2.3.6 avec $p = 8$ et $q = 2$ nous obtenons

$$\|w(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant 4\pi\theta\int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}\|\bar{T}_1^4(s) - \bar{T}_2^4(s)\|_{L^2(\Omega)}ds + \theta\int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}\|G_1(s) - G_2(s)\|_{L^2(\Omega)}ds \tag{2.62}$$

Dans le premier terme de l'expression à gauche, nous utilisons (2.40). Par contre, dans le deuxième terme, on applique Cauchy-Schwartz, alors (2.62) devient

$$\begin{aligned}\|w(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant & 4\pi\theta\int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}\|w(s)\|_{L^8(\Omega)}\|\bar{T}_1(s) + \bar{T}_2(s)\|_{L^8(\Omega)}\|(\bar{T}_1^2 + \bar{T}_2^2)(s)\|_{L^4(\Omega)}ds + \\ & + \theta\left(\int_0^\xi \frac{ds}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}\|G_1 - G_2\|_{L^2(Q_\tau)}.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Nous avons

$$\left(\int_0^\xi \frac{ds}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4\sqrt[4]{\xi}}{(4\pi)^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt[8]{\xi}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}. \tag{2.64}$$

Nous rappelons l'inégalité de Holder généralisée, avec $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 8$ et $r_4 = 4$.

$$\left|\int_E f_1 f_2 f_3 f_4 dE\right| \leqslant \|f_1\|_{L^{r_1}(E)}\|f_2\|_{L^{r_2}(E)}\|f_3\|_{L^{r_3}(E)}\|f_4\|_{L^{r_4}(E)}. \tag{2.65}$$

Avec E comme ensemble mesurable de dimension quelconque, nous avons $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=1$. En conséquence,

$$\int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}\|w(s)\|_{L^8(\Omega)}\|(\bar{T}_1+\bar{T}_2)(s)\|_{L^8(\Omega)}\|(\bar{T}_1^2+T_2^2)(s)\|_{L^4(\Omega)}ds$$
$$\leqslant \frac{2\sqrt[8]{t}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}\Big(\int_0^t \|w(s)\|_{L^8(\Omega)}^8\Big)^{\frac{1}{8}}\|\bar{T}_1+\bar{T}_2\|_{L^8(Q_\tau)}\|\bar{T}_1^2+\bar{T}_2^2\|_{L^4(Q_\tau)}. \tag{2.66}$$

En injectant (2.66) et (2.64) dans (2.63), nous avons

$$\|w(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant 4\pi\theta\frac{2\sqrt[8]{\xi}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}\Big(\int_0^\xi \|w(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds\Big)^{\frac{1}{8}}\|\bar{T}_1+\bar{T}_2\|_{L^8(Q_T)}\|\bar{T}_1^2+\bar{T}_2^2\|_{L^4(Q_\tau)}+\theta\frac{2\sqrt[8]{t}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}\|G_1-G_2\|_{L^2(Q_\tau)}.$$

Les estimations (2.42), (2.43) donnent

$$\|w(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant 4\pi\theta\frac{2\sqrt[8]{\xi}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}4M^3\Big(\int_0^\xi \|w(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds\Big)^{\frac{1}{8}}+\theta\frac{2\sqrt[8]{t}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}\|G_1-G_2\|_{L^2(Q_\tau)}$$
$$\leqslant 4\pi\theta\frac{2\sqrt[8]{\tau}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}4M^3\Big(\int_0^\xi \|w(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds\Big)^{\frac{1}{8}}+\theta\frac{2\sqrt[8]{\tau}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}}\|G_1-G_2\|_{L^2(Q_\tau)}. \tag{2.67}$$

Par ailleurs $(a+b)^8 \leqslant 128(a^8+b^8)$ pour tout $(a,b)\in\mathbf{R}_+^2$. Donc, on peut conclure que

$$\|w(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^8 \leqslant \frac{\theta^8}{\pi^3}2^{25}M^{24}\tau\int_0^\xi \|w(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds+\frac{\theta^8}{\pi^3}2^9\tau\|G_1-G_2\|_{L^2(Q_\tau)}^8.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall (2.34), nous déduisons

$$\|\bar{u}_1-\bar{u}_2\|_{L^8(Q_\tau)}^8 \leqslant \frac{\theta^8}{\pi^3}2^9\tau^2 e^{\frac{\theta^8}{\pi^3}2^{25}M^{24}\tau^2}\|G_1-G_2\|_{L^2(Q_\tau)}^8. \tag{2.68}$$

D'où la continuité de l'application $\mathbb{H}_3$. □

2.4.3 Existence et unicité de la solution pour le système couplé

Maintenant, nous allons utiliser le théorème du point fixe de Banach, voir [108, p. 117], pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du système couplé (2.1)-(2.5).

Théorème 2.4.6. *Il existe $\tau^\star>0$ telle que pour tout $\tau\leqslant\tau^\star$, $\mathbb{H}$ est une contraction.*

Démonstration. $\mathbb{H}=\mathbb{H}_3\circ\mathbb{H}_2\circ\mathbb{H}_1$ est bien définie car c'est la composée de trois applications bien définies. Nous essayons maintenant de montrer que l'application $\mathbb{H}$ est contractante de E_1 dans E_1.

De manière plus synthétique, nous avons

$$\begin{array}{ccccccc}(E_1,\|.\|_{L8(Q_\tau)}) & \xrightarrow{\mathbb{H}_1} & (E_2,\|.\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega\times\mathcal{D}))}) & \xrightarrow{\mathbb{H}_2} & (E_3,\|.\|_{L2(Q_\tau)}) & \xrightarrow{\mathbb{H}_3} & (E_1,\|.\|_{L8(Q_\tau)})\\ T\mapsto & & I\mapsto & & G\mapsto & & \bar{T}.\end{array}$$

Soient $T_1,T_2,\bar{T}_1,\bar{T}_2\in E_1$, $I_1,I_2\in E_2$ et $G_1,G_2\in E_3$, telles que

$$\begin{cases} I_1=\mathbb{H}_1(T_1), & I_2=\mathbb{H}_1(T_2)\\ G_1=\mathbb{H}_2(I_1), & G_2=\mathbb{H}_2(I_2)\\ \bar{T}_1=\mathbb{H}_3(G_1), & \bar{T}_2=\mathbb{H}_3(G_2)\\ \bar{T}_1=\mathbb{H}(T_1), & \bar{T}_2=\mathbb{H}(T_2).\end{cases}$$

En utilisant la continuité de trois applications $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ et $\mathbb{H}_3$, alors à partir (2.44), (2.46) et (2.68) nous obtenons

$$\begin{aligned}\|I_1 - I_2\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega\times\mathcal{D}))} &\leqslant 4\sqrt{\pi}M^3\|T_1 - T_2\|_{L^8(Q_\tau)},\\ \|G_1 - G_2\|_{L^2(Q_\tau)} &\leqslant \sqrt{\pi}\|I_1 - I_2\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Omega\times\mathcal{D}))},\\ \|\bar{T}_1 - \bar{T}_2\|^8_{L^8(Q_\tau)} &\leqslant \frac{\theta^8}{\pi^3}2^9\tau^2 e^{\frac{\theta^8}{\pi^3}2^{25}M^{24}\tau^2}\|G_1 - G_2\|^8_{L^2(Q_\tau)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit

$$\|\bar{T}_1 - \bar{T}_2\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \pi^8\gamma(\tau)e^{\gamma(\tau)}\|T_1 - T_2\|^8_{L^8(Q_\tau)}$$

où $\gamma(\tau) = \frac{\pi^8}{\pi^3}2^{25}M^{24}\tau^2$, il est clair qu'il existe $\tau^\star > 0$ tel que pour tout $\tau \leqslant \tau^\star$, nous avons

$$\pi^8\gamma(\tau)e^{\gamma(\tau)} < 1.$$

□

Maintenant, nous concluons en donnant l'unicité de la solution du système couplé (2.1)-(2.5).

Corollaire 2.4.7. *D'après les hypothèses du thèorème 2.4.6, le système d'équation (2.1)-(2.5) possède une unique solution (T, I) telle que $T \in E_1$ et $I \in E_2$.*

Démonstration. D'après les hypothèses du thèorème 2.4.6, il existe $\tau^\star > 0$ telle que pour tout $\tau \leqslant \tau^\star$, $\mathbb{H}$ est une contraction. E_1 est un borné fermé de l'espace de Banach $L^8(Q_\tau)$, alors en utilisant le théorème du point fixe de Banach [108, p. 117, Theorem 2.1], on déduit que $\mathbb{H}$ possède un unique point fixe $T \in E_1$ vérifiant l'équation (2.2). Par conséquent, $I = \mathbb{H}_1(T)$ est l'unique solution de l'équation (2.1) voir théorème 2.4.1. Donc, le couple (T, I) est l'unique solution du système (2.1)-(2.5). □

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité locale de la solution pour un système couplé des équations du rayonnement et de conduction en deux dimensions dans un milieu gris, semi-transparent et non diffusant, avec les conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. Nous avons formulé le système couplé comme un problème de point fixe. La preuve de l'existence et de l'unicité est basée sur le théorème du point fixe de Banach quand la donnée initiale T_0 est suffisamment petite.

Chapitre 3

Résolution numérique du système couplé rayonnement-conduction par la méthode de Galerkin

Sommaire

3.1 Résumé 43
3.2 Introduction 44
3.3 Équation de transfert radiatif. 45
3.3.1 Discrétisation angulaire, description, propriétés. 45
3.3.2 Estimation a priori d'erreur 47
3.3.3 Méthode Galerkin discontinue pour l'ETR. 47
3.3.4 Existence et unicité des solutions du problème homogène approché. 49
3.3.5 Estimation d'erreur, convergence. 51
3.4 Équation de la chaleur non linéaire. 55
3.4.1 Existence et unicité de la solution d'un schéma numérique pour l'équation de la chaleur linéaire homogène. 55
3.4.2 Convergence d'un schéma numérique pour l'équation de la chaleur semi-linéaire homogène 57
3.5 Convergence du schéma numérique pour le système couplé . . . 60
3.5.1 Étude des applications $\tilde{\mathbb{H}}_1$, $\tilde{\mathbb{H}}_2$ 61
3.5.2 Étude de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_3$ 63
3.5.3 Existence et unicité de la solution d'un schéma numérique pour le système couplé 65
3.5.4 Convergence du schéma numérique pour le système couplé. 67
3.6 Conclusion 70

Les résultats de ce chapitre ont été soumis pour publication, voir [62].

3.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous présenterons la solution approchée du système de transfert de chaleur couplé rayonnement-conduction dans un milieu gris, absorbant et non diffusant en deux dimensions. L'équation de transfert radiatif a été résolue en utilisant une méthode de Galerkin

discontinue avec un flux numérique décentré. L'équation de la chaleur non linéaire a été discrétisée en utilisant la méthode de Galerkin continue (méthode des éléments finis). Nous étudions la convergence du schéma numérique couplé décrit. La preuve de la convergence repose essentiellement sur l'argument d'un point fixe discret, portant uniquement sur le champ de température T_h.

3.2 Introduction

Historiquement, beaucoup de modèles simplifiés ont été utilisés pour effectuer les simulations numériques du phénomène de rayonnement-conduction. Généralement, deux classes de méthodes numériques ont été appliquées pour résoudre le problème de transfert radiatif, à savoir la méthode de Monte Carlo [81, 113] et les méthodes déterministes [14, 40, 60].

Dans cette étude, nous avons choisi la méthode de type Galerkin discontinue (DG), méthode déterministe, pour résoudre l'équation de transfert radiatif (ETR). La méthode DG est locale, conservatoire, stable avec une précision d'ordre élevé. On peut aussi facilement manipuler les géométries complexes, les maillages non structurés et les différents degrés d'approximations des différents éléments[42, 80]. La méthode DG est un schéma numérique particulièrement puissant pour la simulation de problèmes de transports hyperboliques.

La méthode de DG nodale peut être facilement combinée avec la méthode d'éléments finis (FEM) ou bien la méthode de volumes finis (FVM) pour résoudre le transfert thermique combiné rayonnement-conduction. La méthode DG appliquée aux ordonnées discrètes pour résoudre le transport de rayonnement a été mise au point par Reed and Hill [128] et Lesaint and Raviart [102]. Dans [43], la méthode DG a été étendue à la résolution de problèmes de rayonnement dans un milieu diffus, absorbant et émissif. Dans [43], les auteurs ont utilisé un flux centré et une parallélisation basée sur la formulation DG localisée. Le modèle 3D a été réduit en 2D en utilisant la symétrie et la méthode DG [44]. Dans [32, 34], les auteurs ont ajouté un terme de stabilisation pour pénaliser le saut de la solution sur les faces intérieures de la triangulation et obtenir des solutions numériques qui correspondent avec la physique.

De nombreux auteurs ont considéré le problème couplé rayonnement-conduction, voir [17, 111, 110]. Mishra et al. [110] ont appliqué la méthode de Lattice Boltzmann pour résoudre l'équation de conduction du problème couplé rayonnement-conduction en 2D dans une enceinte rectangulaire et ont utilisé la méthode "Collapsed-dimension" pour résoudre le ETR. Asllanaj et al. [17]. Ils ont simulé le transfert de chaleur couplé rayonnement et conduction en 2D pour des géométries complexes avec des maillages triangulaires structurés et non structurés dans un milieu gris, absorbant, émissif et non diffusant. Pour résoudre l'ETR, ces auteurs ont appliqué la méthode des volumes finis avec une formulation cell-vertex pour un maillage triangulaire structuré et non structuré en utilisant un schéma de fermeture exponentielle modifiée. Le code PHAML (Parallel Hierarchical Adaptive Multi Level) a été utilisé pour résoudre l'équation de conduction avec la méthode des éléments finis d'ordre élevé.

À propos de la stabilité des schémas numériques employés, nous trouvons quelques résultats de convergence pour la discrétisation angulaire (des ordonnées discrètes) pour résoudre l'équation du rayonnement [115, 114]. La convergence de la discrétisation spatiale a été étudiée par Lesaint et Raviart [103], Larsen et Nelson [99] indépendamment de l'approximation angulaire.

Les résultats de convergence et de stabilité pour une approximation combinée spatio-angulaire ont été obtenus pour la première fois par Pitkaranta et Scott [124] où le milieu est supposé homogène, gris et isotrope, avec un terme source isotrope. Une quadrature du type Gauss et les formules composées sont employées pour approcher le terme intégral de l'ETR. l'ETR a été

associée à des conditions aux limites radiatives homogènes. La méthode de Galerkin discontinue a été utilisée pour l'approximation spatiale de l'équation où des estimations d'erreur sont données en norme $L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Nous trouvons aussi les résultats du Asadzadeh [9, 11] sur la convergence des approximations angulaires-spatiales appliquées à l'équation de neutrons. Dans [75], les auteurs ont étudié la méthode de Galerkin discontinue et la méthode des ordonnées discrètes pour résoudre l'ETR. Nous mentionnons aussi quelques travaux sur l'étude de convergence et de stabilité de l'équation de la chaleur semi-linéaire [33, 39] en utilisant une régularité L^2.

En ce qui concerne le problème couplé rayonnement-conduction, Kelley [89] a utilisé un algorithme rapide pour résoudre l'ETR associée à des conditions aux limites uniquement émissives dans un milieu homogène, gris et isotrope.

Ensuite, nous trouvons le résultat de Banoczi et Kelley [23] : ils ont proposé un algorithme rapide pour résoudre le système couplé par rayonnement et conduction, associé à des conditions aux limites émissives, avec une réflexion spéculaire et diffuse. Nous mentionnerons aussi les travaux de Asllanaj et al.[15] où les auteurs ont étudié la convergence du schéma numérique couplé. Ils ont utilisé la transformation de Kirchhoff inverse pour donner une solution approchée à l'équation de conservation de l'énergie. La preuve de la convergence est basée sur le point fixe discret et des arguments de monotonie où les équations non linéaires sont résolues avec la méthode de Newton. D'après nos connaissances, il n'y a pas de résultats de convergence en 2D pour la discrétisation de l'ETR couplée à l'équation de chaleur non linéaire. C'est un problème ouvert.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la première section, une discrétisation angulaire et spatiale de l'ETR et une étude de convergence du schéma numérique seront proposées. Ensuite, la deuxième section sera consacrée à la discrétisation et à l'étude de convergence du schéma numérique pour l'approximation de l'équation de la chaleur semi-linéaire auxiliaire. Dans la section 3, nous formulerons le schéma numérique couplé comme un problème du point fixe discret et nous montrerons que celui-ci a une solution unique. Enfin, nous montrerons la convergence de la solution approchée vers la solution continue du système, ainsi que la stabilité de schéma numérique proposé pour la discrétisation temporelle.

3.3 Équation de transfert radiatif.

3.3.1 Discrétisation angulaire, description, propriétés.

La discrétisation angulaire est fondée sur l'utilisation de quadratures numériques pour calculer les intégrales suivant les angles solides qui apparaissent dans le calcul de G (1.23)et S_{rad} (1.22). Elle s'appuie pour cela sur une discrétisation de l'espace angulaire en un nombre fini de directions. C'est essentiellement Fiveland [57] qui a introduit la méthode des ordonnées discrètes pour la résolution de l'équation de transfert radiative. Il l'a développée initialement dans le cas de cavités planes rectangulaires ou cylindriques en travaillant sur un maillage structuré. L'idée de base de la méthode est de résoudre l'ETR sur un ensemble de directions discrètes réparties sur tout l'espace angulaire $4\pi Sr$ en approchant l' équation (1.19) par un système d'équations pour un nombre fini de directions ordonnées. Cela conduit à approcher l'ETR par un système d'équations aux dérivées partielles, avec une équation par direction. Chaque équation du système obtenu est alors résolue par une méthode numérique. La méthode des ordonnées discrètes consiste à résoudre l'ETR pour un nombre fini de directions β_m(de cosinus directeurs :μ_m et ν_m). Pour chacune d'entre elles, la

luminance est calculée sur l'ensemble du domaine en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{cases} \beta_l.\nabla I^l(\xi,s) + I^l(\xi,s) = T^4(\xi,s) & (\xi,s) \in [0,\tau] \times \Omega \\ I^l(\xi,s) = g(\xi,s,\beta_l) & (\xi,s) \in [0,\tau] \times \partial\Omega^l_-, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$\partial\Omega^l_- = \{s \in \partial\Omega \ \text{ tel que } \ \beta_l.\mathbf{n} < 0\}. \tag{3.2}$$

Quadratures S_N

Les quadratures S_N ont été construites en s'imposant des règles strictes de symétrie afin de ne privilégier aucun sens de propagation. Le choix de chaque direction, représentée par ses cosinus directeurs (μ et ν), est donc fait de telle sorte que :

1. Si la direction (μ,ν) appartient à la quadrature, alors les directions $(-\mu,\nu)$, $(\mu,-\nu)$, $(-\mu,-\nu)$, (μ,ν) ont toutes le même poids. La symétrie par rapport à tout plan de coordonnées est conservée. Ainsi, par exemple, le rayonnement venant de la direction x sera traité comme celui venant de $-x$. Une conséquence de cette condition est qu'il suffit de définir les directions discrètes dans un seul octant pour que l'ensemble des directions soit connu sur 4π stéradians.
2. L'ensemble des directions et des poids associés doit être invariant pour toute rotation de 90 degrés autour d'un axe coordonné. Cela assure, par exemple, que le rayonnement se propageant suivant x ne sera pas traité différemment que celui se propageant suivant z. Chaque cosinus directeur n'a que N valeurs possibles, cet ensemble étant le même pour μ et ν. N représente le nombre de latitudes sur lesquelles on rencontre, dans un octant, une direction de la quadrature. Par définition, l'ordre N de la quadrature S_N vaut $2N$ et il correspond à un nombre total de $M_1 = N(N+2)$ directions. Ainsi S_2 comprend 8 directions , S_4 en 24 directions, S_6, 48. Cependant, dans les configurations bidimensionnelles, les symétries du problème permettent de n'utiliser que la moitié des directions (en multipliant leur poids par 2).

En plus, ces poids doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} d\beta = 4\pi = \sum_{i=1}^{M_1} w_i \\ \int_{4\pi} \beta' d\beta = 0 = \sum_{i=1}^{M_1} w_i \beta'_i, \\ \int_{4\pi} \beta' \beta'' d\beta = \frac{4\pi}{3}\delta = \sum_{i=1}^{M_1} w_i \beta'_i \beta''_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec δ le tenseur unitaire, β' et β'' deux directions quelconques, voir [113].

Remarque 3.3.1. *La quadrature S_N utilisée dans ce mémoire est la projection sur le disque unité $\mathcal{D}$ de la quadrature donnée sur la sphère unitaire $\mathcal{S}^2$, alors, on a*

$$\int_{\mathcal{D}} d\beta = \pi = \sum_{i=1}^{N_\beta} w_i \tag{3.4}$$

où N_β est le nombre de directions.

Autres Quadratures

Lors de l'étude de problèmes à diffusions anisotropes, d'autres ensembles de directions doivent être utilisés pour simuler au mieux les phénomènes [58]. On peut ainsi former un ensemble de $N_\theta \times N_\phi$ directions en choisissant respectivement N_θ et N_ϕ, valeurs discrètes des angles polaires qui caractérisent β. On leur associe en général des poids uniformes [14], nous pouvons aussi utiliser une discrétisation angulaire à un pas variable. Pour plus d'information sur les quadratures (T_N; $SRAP_N$; ...) et leurs efficacité [92].

3.3.2 Estimation a priori d'erreur

On donnera maintenant un théorème d'estimation d'erreur de l'approximation angulaire. On notera n le degré de précision de la quadrature, c'est-à-dire que la quadrature est exacte pour tous les polynômes sphériques de degré inférieur ou égal à n [145, 87] .

Théorème 3.3.2. *Soient $\{\beta_l\}_{l=1}^{N_\beta}$ et $\{w_l\}_{l=1}^{N_\beta}$ l'ensemble des noeuds et des poids respectivement tel que $w_l > 0$ pour tout $1 \leqslant l \leqslant N_\beta$, si*

$$\int_{\mathcal{D}} g(\beta)d\beta = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l g(\beta_l), \tag{3.5}$$

n représente le degré de précision de la quadrature, si $g \in H^r(\mathcal{D})$,$r > 1$, alors

$$\Big| \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l g(\beta_l) - \int_{\mathcal{D}} g(\beta)d\beta \Big| \leqslant c_r n^{-r} \|g\|_{H^r(\mathcal{D})} \tag{3.6}$$

où c_r est une constante positive.

3.3.3 Méthode Galerkin discontinue pour l'ETR.

Cette partie est dédiée à la résolution de l'équation de transfert radiatif par la méthode de Galerkin discontinue (GD) basée sur une interpolation polynomiale nodale de degré p(base de Lagrange en simplexe)[50]. Nous décrivons tout d'abord la formulation globale de la méthode de Galerkin discontinue basée sur un flux numérique décentré. On rappelle l'ETR pour une direction β_l donnée

$$\begin{cases} \beta_l.\nabla I^l(\xi,s) + I^l(\xi,s) = T^4(\xi,s) & (\xi,s) \in [0,\tau] \times \Omega \\ I^l(\xi,s) = g(\xi,s,\beta_l) & (\xi,s) \in [0,\tau] \times \partial\Omega^l_-, \end{cases} \tag{3.7}$$

où

$$\partial\Omega^l_- = \{s \in \partial\Omega \ \text{ tel que } \ \beta_l.\mathbf{n} < 0\}. \tag{3.8}$$

On note par $F(\xi,.) = T^4(\xi,.)$ et on suppose que $F(\xi,.) \in H^1(\Omega)$ pour $\xi \in [0,\tau]$. Nous étendons la donnée g sur le bord $\partial\Omega$ par la mise à zéro à l'extérieur de $\partial\Omega^l_-$, et on suppose que

$$g(\xi,.,\beta_l) \in L^2(\partial\Omega) \qquad \text{pour tout } \ (\xi,l) \in [0,\tau] \times \{1,...,N_\beta\}.$$

Maintenant, procédons à la discrétisation spatiale de l'équation de transport (3.7) en utilisant la méthode de DG. On considère la triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω telle que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

– Chaque K est un triangle non vide ;
– $\overset{\circ}{K_1} \bigcap \overset{\circ}{K_2} = \emptyset$ pour tout $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, $K_1 \neq K_2$;
– $F = K_1 \bigcap K_2 \neq \emptyset$ alors F est la face commune à K_1 et K_2 ;
– Les interfaces sont rassemblées dans l'ensemble $\mathcal{F}_h^{in}$, et les faces au bord sont rassemblées dans l'ensemble $\mathcal{F}_h^b$. Désormais, on introduit

$$\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^{in} \bigcup \mathcal{F}_h^b.$$

En outre, pour n'importe quel élément du maillage $K \in \mathcal{T}_h$, On a

$$\mathcal{F}_K = \{F \in \mathcal{F}_h | F \in \partial K\},$$

qui regroupe les faces au bord de la maille K.
– $\text{diam}(K) = h$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ (maillage structuré).

Maintenant, on donne l'espace de l'approximation V_h défini par

$$V_h = \{I_h \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) / \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \ I_{h_{|_K}} \in \mathbb{P}^k(K)\}, \tag{3.9}$$

avec $\mathbb{P}^k(K)$ qui représente l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à k. Soit

$$\mathbb{V}_h = \{V_h\}_{l=1}^{N_\beta}, \tag{3.10}$$

nous désignons un élément générique de $\mathbb{V}_h$ par

$$\{I_h\}(\xi) = \left\{ I_h^1(\xi,.), I_h^2(\xi,.), ..., I_h^{N_\beta}(\xi,.) \right\} \quad \text{pour tout } \xi \in [0,\tau].$$

En raison de la discontinuité de l'approximation spatiale, les fonctions $I_h^l(\xi,.) \in V_h$ possèdent deux valeurs ; une valeur à gauche et une valeur à droite sur les interfaces. Soit $F \in \mathcal{F}_h^{in}$ séparant les deux mailles K_1 et K_2. On introduit la moyenne et le saut de la fonction $I_h^l(\xi,.) \in V_h$ défini par $\{\{I_h^l(\xi,.)\}\}$ et $[\![I_h^l(\xi,.)]\!]$ respectivement :

$$\{\{I_h^l(\xi,.)\}\} = \frac{1}{2}(I_{h1}^l(\xi,.) + I_{h2}^l(\xi,.)), \quad [\![I_h^l(\xi,.)]\!] = (I_{h1}^l(\xi,.) - I_{h2}^l(\xi,.)) \qquad \text{pour tout } \xi \in [0,\tau],$$

où $I_{h1}^l(\xi,.) = I_h^l(\xi,.)_{|_{K_1}}$ et $I_{h2}^l(\xi,.) = I_h^l(\xi,.)_{|_{K_2}}$ sont les restrictions de $I_h^l(\xi,.)$ sur les mailles K_1 et K_2, respectivement. La formulation DG est obtenue en multipliant la S_N équation pour la direction β_l avec la fonction test $w_h \in \mathbb{V}_h$ et en appliquant un flux numérique décentré $\hat{\mathcal{F}}(s)$ pour approcher la quantité $(\beta_l.\mathbf{n})I^l(\xi,.)$ sur le bord de K :

$$\int_K I_h^l(\xi,.)w_h - (\beta_l.\nabla_h w_h) I_h^l(\xi,.) + \int_{\partial K} \hat{\mathcal{F}}(s) w_h = \int_\Omega F(\xi,.) w_h, \ \ \forall \xi \in [0,\tau]. \tag{3.11}$$

Le flux décentré $\hat{\mathcal{F}}(s)$ sur l'interface F de K_1 à K_2 est donné par :

$$\hat{\mathcal{F}}(s) = \beta_l.\mathbf{n_F}\{\{I^l(\xi,s)\}\} + \frac{1}{2}|\beta_l.\mathbf{n_F}|[\![I^l(\xi,s)]\!], \ \ \forall \xi \in [0,\tau], \tag{3.12}$$

avec $\mathbf{n_F}$ comme normale unitaire sortante à F de s. Nous sommons sur toutes les mailles et nous

intégrons en séparant le volume et l'interface. Nous obtenons la forme bilinéaire suivante

$$\begin{aligned} a_h^{up}(\{I_h\}(\xi), w_h) = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left[\int_K I_h^l(\xi,s) w_h^l(s) ds - \int_K I_h^l(\xi,s)(\beta_l.\nabla w_h^l(s)) ds \right] \\ + \int_{\partial\Omega} (\beta_l.\mathbf{n})^{\oplus} I_h^l(\xi,s) w_h^l(s) d\Gamma(s) + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F (\beta_l.\mathbf{n_F}) [\![I_h^l(\xi,s)]\!] \{\{ w_h^l(s) \}\} d\Gamma(s) \\ + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2} |\beta_l.\mathbf{n_F}| [\![I_h^l(\xi,s)]\!] [\![w_h^l(s)]\!] d\Gamma(s) \ \forall (\xi, w_h) \in [0,\tau]\times\mathbb{V}_h, \end{aligned} \tag{3.13}$$

où, pour tout x, nous définissons ses parties positives et négatives respectivement par $x^{\oplus} := \frac{1}{2}(|x|+x)$, $x^{\ominus} := \frac{1}{2}(|x|-x)$, par définition, ces deux quantités sont non négatives. Soit la forme linéaire $l_h : \mathbb{V}_h \longrightarrow \mathbf{R}$ donnée par

$$l(w_h) = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \left[\int_\Omega \digamma(\xi,s) w_h^l(s) ds + \int_{\partial\Omega} (\beta_l.\mathbf{n})^{\ominus} g(\xi,s,\beta_l) w_h^l(s) d\Gamma(s) \right] \quad \forall (\xi, w_h) \in [0,\tau]\times\mathbb{V}_h. \tag{3.14}$$

La formulation globale du problème de DG discrète s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \ \{I_h\}(\xi) \in \mathbb{V}_h \ \text{ tel que} \\ &a_h^{up}(\{I_h\}(\xi), w_h) = l_h(w_h) \text{ pour tout } (\xi, w_h) \in [0,\tau]\times\mathbb{V}_h. \end{aligned} \tag{3.15}$$

On peut écrire (3.15) sous la forme matricielle suivante

$$\mathbb{M}_h^{DG} \mathbb{I}_h = \mathbb{A}_h^{DG} \mathbb{I}_h + \mathbb{F}_h^{DG}, \tag{3.16}$$

où $\mathbb{M}_h^{DG}$ et $\mathbb{A}_h^{DG}$ sont la matrice de masse globale et la matrice de rigidité globale respectivement, pour plus de détails sur l'assemblage de la matrice de la méthode DG, voir [122, 80]. L'inconnue $\mathbb{I}_h$ du système (3.16) est définie par $\mathbb{I}_h = (I_{h,1}^1, .., I_{h,N_d^K}^1, ..., I_{h,1}^{N_t}, .., I_{h,N_d^K}^{N_t})^T$ où $N^t := Card(\mathcal{T}_h)$ et N_d^K le degré de liberté de l'élément de maille K (nous avons supposé que tous les éléments ont le même degré de liberté locale N_d^K). Le second membre $\mathbb{F}_h^{DG}$ est donné par la forme linéaire (3.14).

3.3.4 Existence et unicité des solutions du problème homogène approché.

Dans ce paragraphe nous utilisons la forme bilinéaire donnée par (3.13) et on lui associe la forme linéaire homogène suivante

$$l_h(w_h) = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \int_\Omega \digamma(\xi,s) w_h^l(s) ds \ \text{ pour tout } \ (\xi, w_h) \in [0,\tau]\times\mathbb{V}_h, \tag{3.17}$$

alors nous avons la formulation globale du problème de DG discrète, elle s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \ \{I_h\}(\xi) \in \mathbb{V}_h \ \text{ tel que} \\ &a_h^{up}(\{I_h\}(\xi), w_h) = l_h(w_h) \text{ pour tout } (\xi, w_h) \in [0,\tau]\times\mathbb{V}_h. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous donnerons maintenant la norme $\|.\|_h$ définie sur $\mathbb{V}_h$ afin d'établir la stabilité du schéma de Galerkin discontinu (3.18).

$$\|\{I\}\|_h^2 = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \left[\|I^l\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}|\beta_l.\mathbf{n}| {I^l}^2 d\Gamma(s) + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2}|\beta_l.\mathbf{n_F}| [\![I^l]\!]^2 d\Gamma(s) \right] \tag{3.19}$$

pour tout $\{I\} \in \mathbb{V}_h$. De cette définition, on établit le lemme de stabilité suivant :

Lemme 3.3.3. *Soit* $\xi \in [0,\tau]$

$$a_h^{up}(\{I_h\}(\xi),\{I_h\}(\xi)) = \|\{I_h\}(\xi)\|_h^2 \quad \textit{pour tout } I\{I_h\}(\xi) \in \mathbb{V}_h. \tag{3.20}$$

Démonstration. Soit $\xi \in [0,\tau]$, $\{I_h\}(\xi) \in \mathbb{V}_h$, par définition de $a_h^{up}(.,.)$, nous avons

$$\begin{aligned} a_h^{up}(\{I_h\}(\xi),\{I_h\}(\xi)) = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \Bigg[& \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left[\int_K (I_h^l(\xi,s))^2 dx - \int_K I_h^l(\beta_l.\nabla I_h^l(\xi,s)) ds \right] \\ & + \int_{\partial\Omega} (\beta_l.\mathbf{n})^{\oplus} (I_h^l(\xi,s))^2 d\Gamma(s) + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2}|\beta_l.\mathbf{n_F}| ([\![I_h^l(\xi,s)]\!])^2 d\Gamma(s) \\ & + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F (\beta_l.\mathbf{n_F}) [\![I_h^l(\xi,s)]\!] \{\{I_h^l(\xi,s)\}\} d\Gamma(s). \end{aligned} \tag{3.21}$$

En utilisant une intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_h^{up}(\{I_h\}(\xi),\{I_h\}(\xi)) = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \Bigg[& \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left[\int_K (I_h^l(\xi,s))^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial K} (\beta_l.\mathbf{n_K}) (I_h^l(\xi,s))^2 ds \right] \\ & + \int_{\partial\Omega} (\beta_l.\mathbf{n})^{\oplus} (I_h^l(\xi,s))^2 d\Gamma(s) + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2}|\beta_l.\mathbf{n_F}| ([\![I_h^l(\xi,s)]\!])^2 d\Gamma(s) \\ & + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F (\beta_l.\mathbf{n_F}) [\![I_h^l(\xi,s)]\!] \{\{I_h^l(\xi,s)\}\} d\Gamma(s). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Le second terme du côté droit peut être reformulé. En effet, l'exploitation de la continuité de β_l à travers les interfaces conduit à

$$\sum_{K\in\mathcal{K}_h} \int_{\partial K} \frac{1}{2}(\beta_l.\mathbf{n}_K)(I_h^l(\xi,s))^2 = \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2}(\beta_l.\mathbf{n}_F) [\![I_h^l(\xi,s)^2]\!] + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{b}} \int_F \frac{1}{2}(\beta.\mathbf{n}_F) {I_h^l}^2(\xi,s).$$

pour tout $F \in \mathcal{F}_h^{in}$ avec $F = \partial K_1 \bigcap \partial K_2$, $I_i = I_{h_{|K_i}}^l, i \in \{1,2\}$ alors nous avons

$$\frac{1}{2}[\![{I_h^l}^2]\!] = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)(I_1 + I_2) = [\![I_h^l]\!]\{I_h^l\}.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} a_h^{up}(\{I_h\}(\xi),\{I_h\}(\xi)) = & \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \|I_h^l(\xi,.)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\beta_l.\mathbf{n}| (I_h^l(\xi,s))^2 d\Gamma(s) \\ & + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2}|\beta_l.\mathbf{n_F}| [\![I_h^l(\xi,s)]\!]^2 d\Gamma(s)). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Alors

$$a_h^{up}(\{I_h\}(\xi),\{I_h\}(\xi)) = \|\{I_h\}(\xi)\|_h^2 \qquad \text{pour tout } \xi \in [0,\tau]. \tag{3.24}$$

□

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme ci-dessus.

Corollaire 3.3.4. *Le problème (3.18) admet une solution unique dans* $\mathbb{V}_h$.

Démonstration. La forme l_h définie par (3.17) est une application linéaire continue de $\mathbb{V}_h$ dans $\mathbf{R}$. En utilisant le lemme 3.20, nous déduisons que (3.18) admet une solution unique. □

3.3.5 Estimation d'erreur, convergence.

Afin de donner des estimations d'erreur pour le schéma (3.18), nous introduisons une nouvelle notation, P_K est l'opérateur de la projection orthogonale de $L^2(K)$ sur $\mathbb{P}^k(K)$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, [19, 31]. Nous donnerons le lemme suivant, voir [41]

Lemme 3.3.5. *Pour tout* $v \in H^r(K)$ *avec* $r > 0$ *et* $K \in \mathcal{T}_h$

$$\|v - P_K v\|_{L^2(\partial K)} + h^{\frac{1}{2}}\|v - P_K v\|_{L^2(\partial K)} \leqslant h^{min\{r,k+1\}}\|\|_{H^r(K)} \tag{3.25}$$

Définition 3.3.6. *Soit* X *un espace de Hilbert, une forme bilinéaire* $a : X \times X \longrightarrow R$ *est dite coercive s'il existe* $C > 0$

$$a(x,x) \geqslant C\|x\|_X^2 \tag{3.26}$$

Nous donnons maintenant un lemme utile pour donner l'estimation d'erreur de la formulation de DG discrète, voir [41].

Lemme 3.3.7. *Soit* $\{W_h\}_{h\geqslant 0}$ *une famille d'espaces de dimensions finies munie d'* $\{\|.\|_h\}_{h>0}$. *Soit* $b_h(.,.)$ *une forme bilinéaire coercitive sur* W_h, *il existe une constante positive* δ *indépendante de* h *telle que*

$$\delta\|w_h\|_h^2 \leqslant b_h(w_h,w_h) \qquad \textit{for all } w_h \in W_h. \tag{3.27}$$

Supposons que v *telle que* $b_h(v,w_h)$ *est définie pour tout* $w_h \in W_h$ *et* v_h *est dans* W_h *qui satisfait*

$$b_h(v - v_h, w_h) = 0 \qquad \textit{for all } w_h \in W_h. \tag{3.28}$$

Alors

$$\|v - v_h\|_h \leqslant \inf_{w_h \in W_h}\left\{\|v - w_h\|_h + \frac{1}{\delta}\sup_{\bar{w_h}\in W_h}\frac{b_h(v - w_h, \bar{w_h})}{\|\bar{w_h}\|_h}\right\} \tag{3.29}$$

Théorème 3.3.8. *Soient* $\xi \in [0,\tau]$, $\{I^l\}$ *une solution de (3.18) et nous supposons que* $I^l(\xi) \in H^r(\Omega)$ *pour tout* $1 \leqslant l \leqslant N_\beta$. *Alors, la formulation de DG discrète admet l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|\{I\}(\xi) - \{I_h\}(\xi)\|_h \leqslant Ch^{\min\{r,k+1\}-\frac{1}{2}}\left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l\|I^l(\xi)\|_{H^r(\Omega)}^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.30}$$

avec C *une constante positive.*

Démonstration. A travers (3.18), on a

$$a_h^{up}(\{I\}(\xi), w_h) = l(w_h) \quad \text{pour tout } (\xi, w_h) \in [0,\tau] \times \mathbb{V}_h. \tag{3.31}$$

Ensuite, l'application de l'orthogonalité de Galerkin nous donne :

$$a_h^{up}(\{I\}(\xi) - \{I_h\}(\xi), w_h) = 0 \quad \text{pour tout } \ (\xi, w_h) \in [0,\tau] \times \mathbb{V}_h. \tag{3.32}$$

Par conséquent, il s'ensuit, du lemme 3.3.7 et de l'estimation de la stabilité (3.20), que

$$\|\{I\}(\xi) - \{I_h\}(\xi)\|_h \leqslant \|\{I\}(\xi) - \{P_h I\}(\xi)\|_h + \sup_{w_h \in W_h} \frac{b_h(\{I\}(\xi) - \{P_h I\}(\xi), w_h)}{\|w_h\|_h} \tag{3.33}$$

où P_h désigne l'opérateur de la projection orthogonale de L^2 sur V_h, i.e, pour $w \in L^2(\Omega), P_h w_{|_K} = P_K w$. Par la définition de la norme $\|.\|_h$, on a

$$\begin{aligned}
\|\{I\}(\xi) - \{I_h\}(\xi)\|_h^2 \leqslant & \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l (\|\{I^l\}(\xi) - \{P_h I^l\}(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\beta_l.\mathbf{n}| (I^l(\xi,x) - P_h I^l(\xi,x))^2 d\Gamma(x) \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2} |\beta_l.\mathbf{n_F}| (\llbracket I^l(\xi,x) - P_h I^l(\xi,x) \rrbracket)^2 d\Gamma(x)) \\
& \leqslant \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big[\|I^l(\xi,x) - P_K I^l(\xi,x)\|^2_{L^2(K)} \\
& + \frac{1}{2} |\beta_l.n| \|I^l(\xi,x) - P_K I^l(\xi,x)\|^2_{L^2(\partial K)} \\
& + \frac{1}{2} |\beta_l.n_K| \|I^l(\xi,.) - P_K I^l(\xi,.)\|^2_{L^2(\partial K)} \Big] \\
& \leqslant \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big[\|I^l(\xi,.) - P_K I^l(\xi,.)\|^2_{L^2(K)} + \|I^l(\xi,.) - P_K I^l(\xi,.)\|^2_{L^2(\partial K)} \Big] \\
& \leqslant 2h^{2\min\{r,k+1\}-1} \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \|I^l(\xi)\|^2_{H^r(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\{I\}(\xi) - \{P_h I\}(\xi)\|_h \leqslant \sqrt{2} h^{\min\{r,k+1\}-\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \|I^l(\xi)\|^2_{H^r(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.35}$$

Maintenant, avec la définition de $a_h^{up}(.,.)$, nous avons

$$\begin{aligned}\underbrace{a_h^{up}(\{I\}(\xi)-\{P_hI\}(\xi),w_h)}_{(H1)} =& \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \Big[\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big[\int_K (I^l(\xi,x)-P_KI^l(\xi,x))w_h^l(x)dx \\ &- \int_K (I^l(\xi,x)-P_KI^l(\xi,x))(\beta_l.\nabla w_h^l(x))dx\Big] \\ &+ \int_{\partial\Omega} (\beta_l.\mathbf{n})^{\oplus}(I^l(\xi,x)-P_hI^l(\xi,x))w_h^l(x)d\Gamma(x) \\ &+ \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F (\beta_l.\mathbf{n_F})[\![I^l(\xi,x)-P_hI^l(\xi,x)]\!]\{w_h^l(x)\}d\Gamma(x) \\ &+ \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F \frac{1}{2}|\beta_l.\mathbf{n_F}|[\![I^l(\xi,x)-P_hI^l(\xi,x)]\!][\![w_h^l(x)]\!]d\Gamma(x)\Big]\end{aligned}$$

puisque $\beta_l.\nabla w_h^l \in \mathbb{P}^k(K)$ alors

$$\int_K (I^l(\xi,x)-P_KI^l(\xi,x))(\beta_l.\nabla w_h^l(x))dx = 0$$

avec l'inégalité de Cauchy Schwarz et le lemme 3.3.5, nous avons

$$\begin{aligned}(H1) \leqslant & \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \int_\Omega |I^l(\xi,x)-P_hI^l(\xi,x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \int_\Omega (w_h^l)^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \left[\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} |I^l(\xi,x)-P_KI^l(\xi,x)|^2d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} ((\beta_l.n)^{\oplus})^2|w_h^l(x)|^2d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \left[\sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F |[\![I^l(\xi,x)-P_hI^l(\xi,x)]\!]|^2d\Gamma\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F |\beta_l.n_F|^2|\{w_h^l(x)\}|^2d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \left[\sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F |[\![I^l(\xi,x)-P_hI^l(\xi,x)]\!]|^2d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{F\in\mathcal{F}_h^{in}} \int_F |\beta_l.n_F|^2|[\![w_h^l]\!]|^2d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(H1) \leqslant & \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \int_\Omega |I^l(\xi,x) - P_h I^l(\xi,x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \int_\Omega (w_h^l)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
& + \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} |I^l(\xi,x) - P_K I^l(\xi,x)|^2 d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} ((\beta_l.n)^\oplus)^2 |w_h^l(x)|^2 d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\
& + \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} |[\![I^l(\xi,x) - P_h I^l(\xi,x)]\!]|^2 d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} |\beta_l.n_F|^2 |\{w_h^l(x)\}|^2 d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\
& + \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} |[\![I^l(\xi,x) - P_K I^l(\xi,x)]\!]|^2 d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\
& \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} |\beta_l.\mathbf{n_F}|^2 |[\![w_h^l(x)]\!]|^2 d\Gamma(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leqslant 4h^{\min\{r,k+1\}-\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=1}^{L} w_l \|I^l(\xi)\|^2_{H^r(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_h.
\end{aligned}
$$

□

Afin d'établir une estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution approchée après une approximation angulaire et spatiale, nous introduisons la norme suivante

$$
|||I(\xi,.) - I_h(\xi,.)||| = \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \|I(\xi,.,\beta_l) - I_h^l(\xi,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.36}
$$

définie sur $\mathbb{V}_h$. On munit l'espace $\mathcal{C}(0,\tau;\mathbb{V}_h)$ par la norme

$$
|||I|||_c = \sup_{\xi\in[0,\tau]} |||I(\xi)|||. \tag{3.37}
$$

Le corollaire ci-dessus donnera un résultat d'estimation d'erreur.

Corollaire 3.3.9. *On considère la quadrature numérique (3.4) est d'ordre de précision n. On suppose que $I \in \mathcal{C}(0,\tau;H^r(\Omega,H^s(\mathcal{D}))$ pour tout $s > 1$ et $r \geqslant 0$. Alors on a*

$$
|||I - I_h|||_c \leqslant Ch^{\min\{r,k+1\}-\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \sup_{\xi\in[0,\tau]} \|I^l(\xi,.)\|^2_{H^r(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} + C_s n^{-s} \sup_{\xi\in[0,\tau]} \|I(\xi,.,.)\|_{H^r(\Omega,H^s(\mathcal{D}))} \tag{3.38}
$$

avec C et C_s sont des constantes positives.

Démonstration. La preuve découle du théorème 3.3.2 et du théorème 3.3.8. □

3.4 Équation de la chaleur non linéaire.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la discrétisation de l'équation de la chaleur semi-linéaire auxiliaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_\xi T - \triangle T + 4\pi\theta T^4 = \theta G & \text{dans } (0,\tau)\times\Omega \\ T_{|_{(0,\tau)\times\partial\Omega}} = 0 & \\ T(0) = T_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.39}$$

La méthode de Galerkin continue (méthode des éléments finis) est employée pour la discrétisation spatiale. Afin d'établir des estimations a priori sur le problème (3.39), nous commençons par donner quelques résultats sur le problème linéaire.

3.4.1 Existence et unicité de la solution d'un schéma numérique pour l'équation de la chaleur linéaire homogène.

On considère l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \partial_\xi T - \triangle T = f_1 & \text{dans } (0,\tau)\times\Omega \\ T_{|_{(0,\tau)\times\partial\Omega}} = 0 & \\ T(0) = T_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.40}$$

On suppose que

$$f_1 \in \mathcal{C}(0,\tau;H^{-1}(\Omega)) \quad \text{et} \quad T_0 \in L^\infty(\Omega) \tag{3.41}$$

alors (3.40) admet une solution qui appartient à l'espace

$$X = \mathcal{C}(0,\tau;L^\infty(\Omega)) \cap \mathcal{C}(0,\tau;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,\tau;H^{-1}(\Omega)) \tag{3.42}$$

muni par la norme

$$\|v\|_X^2 = \sup_{\xi\in[0,\tau]} \|v(\xi)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(0,\tau;H^{-1}(\Omega))}^2. \tag{3.43}$$

On introduit la forme bilinéaire suivante

$$a_c(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.44}$$

On définit la forme variationelle associée à (3.40) : trouver $T \in X$ tel que

$$\begin{gathered} < \partial_\xi T(\xi), w > + a_c(T(\xi),w) = (f_1(\xi),w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad p.p. \quad \xi \in [0,\tau] \\ (T(0),w) = (T_0,w) \ \ \forall\ w \in H_0^1(\Omega). \end{gathered} \tag{3.45}$$

Une semi-discrétisation par éléments finis de la formulation variationnnelle (3.45) est définie par : trouver $T_h \in \mathcal{C}(0,\tau;V_h)$ tel que

$$\begin{gathered} < \partial_\xi T_h(\xi), w_h > + a_c(T_h(\xi),w_h) = (f_1(\xi),w_h) \quad \forall w_h \in V_h \quad p.p. \quad \xi \in [0,\tau] \\ T_h(0) = T_{0h} \end{gathered} \tag{3.46}$$

où V_h est donné par (3.9) et $T_{0h} \in V_h$ est une approximation de T_0. On rappellera quelques résultats qui seront utiles par la suite. Des résultats existent déjà, voir [53, 39].

Lemme 3.4.1. *Les deux résultats suivants sont valables dans X :*

1. $X \hookrightarrow \mathcal{C}(0,\tau;L^2(\Omega))$, en outre, pour $T \in X$, l'application $\xi \longmapsto \|T(\xi)\|$ est absolument continue dans $[0,\tau]$ avec

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\|T(\xi)\|^2 =< T^{'}(\xi), T(\xi) > \qquad \xi \in [0,\tau] \tag{3.47}$$

2. L'injection compacte de X dans $L^2(0,\tau;L^2(\Omega))$.

Démonstration. voir [53, 137] □

Théorème 3.4.2. *Soit $T \in X$ solution de (3.45) et $T_h \in \mathcal{C}(0,\tau;V_h)$ est une solution de (3.46). On suppose que*

$$\|T_0(\xi) - T_{0h}(\xi)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ quand } h \to 0 \quad \text{pour tout } \xi \in [0,\tau] \tag{3.48}$$

Alors, pour tout $\xi \in [0,\tau]$

$$\|T(\xi) - T_h(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^\tau \|T(s) - T_h(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \to 0 \text{ quand } h \to 0 \tag{3.49}$$

Alors, on a $T \in \mathcal{C}(0,\tau;H^{m+1}(\Omega)) \cap H^1(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))$ pour un entier $m \in [0,k]$, alors

$$\begin{aligned}\|T(\xi) - T_h(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} + &\int_0^\tau \|T(s) - T_h(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \\ &\leqslant Ch^{2m}(\sup_{\xi\in[0,\tau]} \|T(\xi)\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|\partial_\xi T\|^2_{L^2(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))}), \forall \xi \in [0,\tau].\end{aligned} \tag{3.50}$$

Démonstration. Voir [39] □

Théorème 3.4.3. *Soit $T \in X$ solution de (3.45) et $T_h \in \mathcal{C}(0,\tau;V_h)$ est une solution de (3.46). On suppose que*

$$\|T_0(\xi) - T_{0h}(\xi)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ quand } h \to 0 \quad \text{pour tout } \xi \in [0,\tau] \tag{3.51}$$

Alors, on a

$$\|\partial_\xi T - \partial_\xi T_h\|_{L^2(0,\tau,H^{-1}(\Omega))} \to 0 \text{ quand } h \to 0 \tag{3.52}$$

Si on a $T \in \mathcal{C}(0,\tau;H^{m+1}(\Omega)) \cap H^1(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))$ pour un entier $m \in [0,k]$ alors

$$\sup_{\xi\in[0,\tau]} \|\partial_\xi T(\xi) - \partial_\xi T_h(\xi)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant Ch^m(\sup_{\xi\in[0,\tau]} \|T(\xi)\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|\partial_\xi T\|_{H^1(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))}). \tag{3.53}$$

Démonstration. Voir [39] □

3.4.2 Convergence d'un schéma numérique pour l'équation de la chaleur semi-linéaire homogène

Dans ce paragraphe, nous donnerons une estimation d'erreur pour l'équation de la chaleur semi-linéaire (3.39). Ce type de problème parabolique a déjà été traité dans quelques travaux pour différents types de régularité sur les données initiales. Une large étude bibliographique est déjà disponible dans [39]. Les résultats existants prouvent que les estimations a priori sont fondamentalement les mêmes que celles du problème linéaire [33, 39].

On suppose que les données initiales vérifient la régularité suivante :

$$G \in \mathcal{C}(0,\tau;H^{-1}(\Omega)) \;\text{ et }\; T_0 \in L^\infty(\Omega). \tag{3.54}$$

On donnera maintenant la formulation de Brezzi-Rappaz-Raviart [33] introduite pour traiter les problèmes semi-linéaires. Nous chercherons un $\psi \in X$ tel que

$$\psi + \mathcal{T}\mathcal{G}(\psi) = 0 \tag{3.55}$$

où $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(Y;X)$, $\mathcal{G}$ est une application $\mathcal{C}^2$ de X dans Y. Y et X sont des espaces de Banach. ψ est une solution régulière si $I + \mathcal{T}\mathcal{G}(.)$ est un isomorphisme de X à X.

$\mathbf{D}\mathcal{G}$ et $\mathbf{D}^2\mathcal{G}$ désignent respectivement la dérivée et la dérivée seconde de Fréchet de $\mathcal{G}(.)$. Nous supposons qu'il existe un autre espace de Banach $Z \hookrightarrow Y$ injection continue, de telle sorte que

$$\mathbf{D}\mathcal{G}(\psi) \in \mathcal{L}(X;Z) \qquad \forall \psi \in X. \tag{3.56}$$

Soit $\mathcal{T}_h \in \mathcal{L}(Y;X_h)$ un opérateur approché de $\mathcal{T}$ où $X_h \subset X$. Nous cherchons $\psi_h \in X_h$ tel que

$$\psi_h + \mathcal{T}_h\mathcal{G}(\psi_h) = 0 \tag{3.57}$$

L'opérateur $\mathcal{T}_h$ possède les propriétés suivantes

$$\lim_{h\to 0} \|(\mathcal{T}_h - \mathcal{T})w\|_X = 0 \;\forall\;\; w \in Y \tag{3.58}$$

et

$$\lim_{h\to 0} \|(\mathcal{T}_h - \mathcal{T})\|_{\mathcal{L}(X;Z)} = 0 \tag{3.59}$$

On suppose que l'injection $Z \subset Y$ est compacte, ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{T}D\mathcal{G}(.) \in \mathcal{L}(X;X)$ soit compact. Nous énonçons un théorème de [39, 33] qui sera utile pour la suite.

Théorème 3.4.4. *Soient X et Y des espaces de Banach. $\mathcal{G}$ est une application $\mathcal{C}^2$ de X dans Y et que $D^2\mathcal{G}$ est borné dans tous les sous-espaces bornés de X. Supposons que* (3.56), (3.58) *et* (3.59) *sont déjà vérifiées et que ψ est une solution régulière de* (3.55)*. Alors il existe un voisinage $\mathcal{O}$ à l'origine de X tel que pour tout $h \leqslant h_0$, $\psi_h \in X_h$ est l'unique solution régulière de* (3.57) *et elle vérifie $\psi_h - \psi \in \mathcal{O}$. En outre, il existe une constante $C > 0$, indépendante de h, telle que*

$$\|\psi_h - \psi\|_X \leqslant C\|(\mathcal{T}_h - \mathcal{T})\mathcal{G}(\psi)\|_X. \tag{3.60}$$

La formulation faible de l'équation de la chaleur semi-linéaire (3.39) consiste à trouver

$$T \in X = \mathcal{C}(0,\tau,L^\infty(\Omega)) \cap L^{10}(Q_\tau) \cap \mathcal{C}(0,\tau,H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,\tau,H^{-1}(\Omega)) \tag{3.61}$$

telle que

$$< \partial_\xi T(\xi), v > +(\nabla T(\xi), \nabla v) + (4\pi\theta T^4(\xi), v) =< \theta G(\xi), v > \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.62}$$

et

$$(T(0), z) = (T_0, z) \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega). \tag{3.63}$$

Une semi-discrétisation par la méthode des éléments finis de la formulation faible (3.61)-(3.63) consiste à chercher

$$T_h \in \mathcal{C}(0, \tau; V_h) \tag{3.64}$$

$$< \partial_\xi T_h(\xi), v > +(\nabla T_h(\xi), \nabla v_h) + (4\pi\theta {T_h}^4(\xi), v_h) =< \theta G(\xi), v_h > \qquad \forall v_h \in V_h \tag{3.65}$$

et

$$(T_h(0), z_h) = (T_{h0}, z_h) \qquad \forall z_h \in V_h. \tag{3.66}$$

Afin de donner des estimations a priori pour le problème semi-linéaire, nous mettons d'abord le problème dans le cadre de Brezzi-Rappaz-Raviart décrit précédemment. On associe à X la norme suivante

$$\|w\|_X^2 = \sup_{\xi\in[0,\tau]} \|w(\xi)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\partial_\xi w\|_{L^2(0,\tau,H^{-1}(\Omega))}^2 \qquad \text{pour tout} \quad w \in X$$

et à

$$Y = \mathcal{C}(0, \tau; H^{-1}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$$

la norme

$$\|(y_1, y_2)\|_Y^2 = \sup_{\xi\in[0,\tau]} \|y_1(\xi)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|y_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ pour tout } y = (y_1, y_2) \in Y.$$

L'opérateur linéaire $\mathcal{T} : \ Y \longrightarrow X$ est un opérateur solution de l'équation de la chaleur linéaire, $\mathcal{T}(\widetilde{f_1}, \widetilde{T_0}) = \widetilde{T} \in X$ pour tout $(\widetilde{f_1}, \widetilde{T_0}) \in Y$ si et seulement si

$$< \partial_\xi \widetilde{T}, v > +(\nabla \widetilde{T}(\xi), \nabla v) =< \widetilde{f_1}(\xi), v > \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.67}$$

et

$$< \widetilde{T}(0), z >= (\widetilde{T_0}, z) \qquad \forall z \in L^2(\Omega). \tag{3.68}$$

On définit $\mathcal{G} : \ X \longrightarrow Y$ par $\mathcal{G}(v) = (-\theta G + 4\pi\theta v^4, -T_0)$ pour tout $v \in X$ Soit $X_h = \mathcal{C}(0, \tau; V_h)$. On désigne par $\mathcal{T}_h$ l'opérateur linéaire $\mathcal{T}_h : Y \longrightarrow X_h$ la semi-discrétisation de l'opérateur solution du problème linéaire, i.e. $\mathcal{T}_h(\widetilde{f_1}, \widetilde{T_0}) = \widetilde{T_h}$ pour $(\widetilde{f_1}, \widetilde{T_0}) \in \mathcal{Y}$ et $\widetilde{T_h} \in X_h$ si et seulement si

$$< \partial_\xi \widetilde{T_h}, v_h > +(\nabla \widetilde{T_h}(\xi), \nabla v_h) =< \widetilde{f_1}(\xi), v_h > \qquad \forall v_h \in V_h$$

et

$$(\widetilde{T_h}(0), z_h) = (\widetilde{T_0}, z_h) \qquad \forall z_h \in V_h$$

il est clair que (3.61)-(3.63) est équivalent à

$$\psi + \mathcal{T}\mathcal{G}(\psi) = 0$$

et que (3.67)-(3.68) est équivalent à

$$\psi_h + \mathcal{T}_h\mathcal{G}(\psi_h) = 0.$$

Toutes les hypothèses du théorème 3.4.4 sont vérifiées. Nous donnons maintenant une estimation d'erreur de la solution approchée T_h du problème (3.39).

Théorème 3.4.5. *Soit $T \in X$ une solution de (3.61)-(3.63). Alors il existe un $h_0 > 0$ assez petit, tel que, pour tout $h \in (0, h_0)$, (3.64)-(3.66) possède une solution unique $T_h \in \mathcal{C}(0,\tau;V_h)$ satisfait*

$$\begin{aligned}\|T(\xi)-T_h(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|T(\xi)-T_h(\xi)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|\partial_\xi T - \partial_\xi T_h\|^2_{L^2(0,\tau,H^{-1}(\Omega))} \\ \to 0 \text{ quand } h \to 0, \forall \xi \in [0,\tau].\end{aligned} \tag{3.69}$$

Si on a $T \in \mathcal{C}(0,\tau;H^{m+1}(\Omega)) \cap L^2(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))$ pour tout $m \in [0,k]$, alors

$$\begin{aligned}\|T(\xi)-T_h(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|T(\xi)-T_h(\xi)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|\partial_\xi T - \partial_\xi T_h\|^2_{L^2(0,\tau,H^{-1}(\Omega))} \\ \leqslant Ch^{2m}(\sup_{\xi\in[0,\tau]} \|T(\xi)\|^2_{H^{m+1}(\Omega)} + \|\partial_\xi T\|^2_{L^2(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))}), \forall \xi \in [0,\tau].\end{aligned} \tag{3.70}$$

Démonstration. Soient X et Y les espaces définis précédemment et soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}_h$ et $\mathcal{G}$ données précédemment. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on introduit

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon(12-2\epsilon)}$$

et

$$Z = \mathcal{C}(0,\tau;H^{-1-\epsilon_1}) \times H^{\epsilon_1}_0(\Omega)$$

La constante ϵ_1 est choisie de telle sorte qu'on a l'injection continue de $H^{-1-\epsilon_1}(\Omega) \subset L^{6-\epsilon}(\Omega)$ Les théorèmes 3.4.3 et 3.4.2 impliquent que

$$\|(\mathcal{T}-\mathcal{T}_h)(\widetilde{f},\widetilde{T}_0)\|_X \to 0 \text{ quand } \ h \to 0 \tag{3.71}$$

pour tout $(\widetilde{f},\widetilde{T}_0) \in Y$ on a $\widetilde{T} = \mathcal{T}(\widetilde{f},\widetilde{T}_0) \in \mathcal{C}(0,\tau;H^{1+\epsilon_1}) \cap H^1(0,\tau;H^{-1+\epsilon_1})$ et

$$\sup_{\xi\in[0,\tau]} \|\widetilde{T}(\xi)\|_{H^{1+\epsilon_1}} + \|\partial_\xi \widetilde{T}\|_{L^2(0,\tau,H^{-1+\epsilon_1}(\Omega))} \leqslant C(\sup_{\xi\in[0,\tau]} \widetilde{f}(\xi)\|_{H^{-1+\epsilon_1}(\Omega)} + \|\widetilde{T}_0\|_{H^{\epsilon_1}(\Omega))}) \tag{3.72}$$

Donc les théorèmes 3.4.3 et 3.4.2 pour $m = \epsilon_1$ donnent

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{T}-\mathcal{T}^h)(\widetilde{G},\widetilde{T}_0)\|_X &= \|\widetilde{T}-\widetilde{T}_h)\|_X \\ &\leqslant Ch^{\epsilon_1}(\sup_{\xi\in[0,\tau]} \|\widetilde{T}(\xi)\|_{H^{\epsilon_1+1}(\Omega)} + \|\partial_\xi \widetilde{T}\|^2_{L^2(0,\tau,H^{\epsilon_1-1}(\Omega))}) \\ &\leqslant Ch^{\epsilon_1}(\sup_{\xi\in[0,\tau]} \|\widetilde{f}(\xi)\|_{H^{-1+\epsilon_1}(\Omega)} + \|\widetilde{T}_0\|_{H^{\epsilon_1}(\Omega)}) = Ch^{\epsilon_1}\|(\widetilde{f},\widetilde{T}_0)\|_Z\end{aligned} \tag{3.73}$$

Alors on a

$$\|(\mathcal{T}-\mathcal{T}^h)\|_{\mathcal{L}(Z;X)} \leqslant Ch^{\epsilon_1} \to 0 \text{ quand } \ h \to 0. \tag{3.74}$$

Ensuite, nous vérifions (3.56). Soit $v, w \in X$, un simple calcul nous donne

$$[\mathbf{D}\mathcal{G}(v)](w) = (4v^3 w, 0) \tag{3.75}$$

Nous rappelons l'inégalité de Holder généralisée

$$\left|\int_E f_1 f_2 f_3 dE\right| \leqslant \|f_1\|_{L^{r_1}(E)}\|f_2\|_{L^{r_2}(E)}\|f_3\|_{L^{r_3}(E)}. \tag{3.76}$$

avec E considéré comme ensemble mesurable de dimension quelconque, et on a $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1$. En utilisant (3.76) et

$$\beta_\epsilon=\frac{6-\epsilon}{5-\epsilon} \quad r_1=\frac{4\beta_\epsilon}{3} \quad r_2=4\beta_\epsilon \quad r_3=6-\epsilon \tag{3.77}$$

alors on a

$$\int_\Omega |v(t)|^3|w(t)||y(t)|dx \leqslant \|v(t)\|^3_{L^{4\beta_\epsilon}(\Omega)}\|w(t)\|_{L^{4\beta_\epsilon}(\Omega)}\|y(t)\|_{L^{6-\epsilon}(\Omega)} \quad \forall y\in\mathcal{C}(0,\tau;H^{1-\epsilon_1}(\Omega)) \tag{3.78}$$

D'où

$$\int_\Omega |v(t)|^3|w(t)||y(t)|dx \leqslant \|v(t)\|^3_{L^{4\beta_\epsilon}(\Omega)}\|w(t)\|_{L^{4\beta_\epsilon}(\Omega)}\|y(t)\|_{L^{6-\epsilon}(\Omega)} \quad \forall y\in\mathcal{C}(0,\tau;H^{1-\epsilon_1}(\Omega)) \tag{3.79}$$

Alors on a

$$\sup_{\xi\in[0,\tau]}\||v(\xi)|^3w(\xi)\|_{H^{-1+\epsilon_1}(\Omega)} \leqslant C \sup_{\xi\in[0,\tau]}\|v(\xi)\|^3_{L^{4\beta_\epsilon}(\Omega)} \sup_{\xi\in[0,\tau]}\|w(\xi)\|_{L^{4\beta_\epsilon}(\Omega)} \tag{3.80}$$

En utilisant (3.80), alors on a $D\mathcal{G}(v)\in\mathcal{L}(X;Z)$ pour tout $v\in X$. De même, nous utilisons la condition de croissance pour $(T^4)''$ pour montrer que $D^2\mathcal{G}$ est localement borné.

Toutes les hypothèses du théorème 3.4.4 sont vérifiées et nous concluons de ce théorème que

$$\|T-T_h\|_X \leqslant \|(\mathcal{T}-\mathcal{T}_h)\mathcal{G}(T)\|_X \to 0 \text{ quand } \ h\to 0 \tag{3.81}$$

En plus, si $T\in\mathcal{C}(0,\tau;H^{m+1}(\Omega))\cap L^2(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))$ alors on a

$$\|T-T_h\|_X \leqslant Ch^{2m}(\sup_{\xi\in[0,\tau]}\|T(\xi)\|^2_{H^{m+1}(\Omega)}+\|\partial_\xi T\|^2_{L^2(0,\tau,H^{m-1}(\Omega))}) \tag{3.82}$$

Ainsi, les estimations (3.70) et (3.70) découlent de la définition de $\|.\|_X$, le lemme 3.4.1 et les deux dernières relations. □

3.5 Convergence du schéma numérique pour le système couplé

Dans ce paragraphe, nous montrons que le schéma numérique couplé donné par (3.65) et (3.18) admet une unique solution par analogie avec le problème continu vu au chapitre II, à l'aide d'un point fixe discret portant uniquement sur la température approchée T_h. On procède en définissant une application point fixe

$$\tilde{\mathbb{H}}:\tilde{E}_1\longrightarrow\tilde{E}_1$$

où T_h vérifiera le schéma discret (3.65). L'ensemble $\tilde{E}_1$ est donné par

$$\tilde{E}_1=\{T_h\in\mathcal{C}^0(0,\tau,V_h);\|T_h\|_{L^8(Q_\tau)}\leqslant M\}. \tag{3.83}$$

Notre objectif est de montrer que l'application $\tilde{\mathbb{H}}$ est bien définie, continue, et qu'elle admet un unique point fixe discret. Nous allons maintenant donner la formulation du point fixe. Nous exprimons l'application $\tilde{\mathbb{H}}$ comme la composition de trois applications non linéaires :

$$\tilde{\mathbb{H}}=\tilde{\mathbb{H}}_3\circ\tilde{\mathbb{H}}_2\circ\tilde{\mathbb{H}}_1.$$

Les applications $\tilde{\mathbb{H}}_1, \tilde{\mathbb{H}}_2$ et $\tilde{\mathbb{H}}_3$ sont les versions discrètes des applications $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ et $\mathbb{H}_3$ établies dans le cas continu. Au préalable, nous introduisons les espaces suivants

$$\tilde{E}_2 = \{I_h \in \mathcal{C}^0(0,\tau,\mathbb{V}_h); \|\{I_h\}\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant N\},$$
$$\tilde{E}_3 = \{G_h \in \mathcal{C}^0(0,\tau,V_h) \text{ où } ; \|G_h\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant \sqrt{\pi}N\}.$$

où $\mathrm{M}, N \in \mathbf{R}_+$ sont données dans le chapitre II. Nous définissons l'application $\tilde{\mathbb{H}}_1 : \tilde{E}_1 \longrightarrow \tilde{E}_2$ telle que pour tout $T_h \in \tilde{E}_1$, $\tilde{\mathbb{H}}_1(T_h) \in \tilde{E}_2$ est la solution de l'ETR (3.18).

L'application $\tilde{\mathbb{H}}_2 : \tilde{E}_2 \longrightarrow \tilde{E}_3$ telle que pour tout $I_h \in \tilde{E}_2$ on a

$$G_h = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l I_h^l = \tilde{\mathbb{H}}_2(I_h) \in \tilde{E}_3.$$

Enfin, nous définissons l'application $\tilde{\mathbb{H}}_3 : \tilde{E}_3 \longrightarrow \tilde{E}_1$ telle que pour tout $G_h \in \tilde{E}_3$, $\tilde{\mathbb{H}}_3(G_h) \in \tilde{E}_1$ est la solution de l'équation (3.65).

Dans ce travail, on suppose que la donnée initiale $T_{0h} \in V_h$ est fixée et elle vérifie l'hypothèse suivante

$$\|T_{0h}\|_{L^5(\Omega)} \leqslant \sqrt[5]{\frac{15\theta\pi M^8}{8}}. \tag{3.84}$$

On définit les normes suivantes

$$\|\{I_h\}(\xi)\|_d^2 = \sum_{l=1}^{N^\beta} w_l \|I_h^l(\xi)\|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ et } \|\{I_h\}\|_{\star,p} = \Big(\int_0^\tau \|\{I_h\}(\xi)\|_d^p d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}$$

sur $\mathbb{V}_h$ et $\mathcal{C}^0(0,\tau;\mathbb{V}_h)$ respectivement.

3.5.1 Étude des applications $\tilde{\mathbb{H}}_1$, $\tilde{\mathbb{H}}_2$

Comme dans le cas continu, nous allons maintenant nous intéresser aux applications $\tilde{\mathbb{H}}_1$ et $\tilde{\mathbb{H}}_2$ dont nous allons donner quelques propriétés qui portent sur la solution de l'ETR (3.18).

Théorème 3.5.1. *Soit $T_h \in \tilde{E}_1$, le problème* (3.18) *admet une solution unique $\mathcal{C}^0(0,\tau;\mathbb{V}_h)$. L'application $\tilde{\mathbb{H}}_1$ est une application bien définie et elle est continue de $\tilde{E}_1$ dans $\tilde{E}_2$.*

Démonstration. Soit $T_h \in \tilde{E}_1$, alors pour tout $\xi \in [0,\tau]$, on a $T_h^4(\xi) \in V_h$. D'après le corollaire 3.3.4, le problème (3.18) admet une solution unique $\{I_h\}(\xi) \in \mathbb{V}_h$ et on obtient l'estimation suivante :

$$\|I_h^l(\xi)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|T_h^4(\xi)\|_{L^2(\Omega)}.$$

alors nous avons

$$\|\{I_h\}(\xi)\|_d^2 \leqslant \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \|T_h^4(\xi)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\|\{I_h\}(\xi)\|_d^2 \leqslant \sqrt{\pi}\|T_h(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^8,$$

alors,

$$\begin{aligned}\|\{I_h\}\|_{\star,2} &\leqslant \sqrt{\pi}\|T_h\|_{L^8(Q_\tau)}^4 \\ &\leqslant \sqrt{\pi}M^4 = N.\end{aligned}$$

Donc $\{I_h\} \in \tilde{E}_2$, d'où on peut dire que l'application $\tilde{\mathbb{H}}_1$ est bien définie.

Maintenant, nous allons montrer la continuité de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_1$. Nous notons par $\{I_{1,h}\}, \{I_{2,h}\}$ deux solutions de (3.18) associées respectivement à $T_{1,h}, T_{2,h}$. Soit $\xi \in [0,\tau]$, nous avons

$$\|\{I_{1,h}\}(\xi) - \{I_{2,h}\}(\xi)\|_d^2 \leqslant \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l \|T_{1,h}^4(\xi) - T_{2,h}^4(\xi)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant l'inégalité de Holder généralisée, on obtient

$$\begin{aligned}\|T_{1,h}^4(\xi) - T_{2,h}^4(\xi)\|_{L^2(\Omega)}^2 =& \int_\Omega (T_{1,h}(\xi) - T_{2,h}(\xi))^2 (T_{1,h}(\xi) + T_{2,h}(\xi))^2 (T_{1,h}^2(\xi) + T_{2,h}^2(\xi))^2 dx \\ \leqslant& \|T_{1,h}(\xi) - T_{2,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^2 \|T_{1,h}(\xi) + T_{2,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^2 \\ & \|T_{1,h}^2(\xi) + T_{2,h}^2(\xi)\|_{L^4(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned}\|T_{1,h}^2(\xi) + T_{2,h}^2(\xi)\|_{L^4(\Omega)}^4 \leqslant& \|T_{1,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^8 + 4\|T_{1,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^6 \|T_{2,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^2 + \|T_{2,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^8 \\ & + 6\|T_{1,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^4 \|T_{2,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^4 + 4\|T_{1,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^2 \|T_{2,h}(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^6.\end{aligned}$$

Nous intégrons par rapport au temps entre 0 et τ

$$\begin{aligned}\|T_{1,h}^2 + T_{2,h}^2\|_{L^4(Q_\tau)}^4 \leqslant& \|T_{1,h}(\xi)\|_{L^8(Q_\tau)}^8 + 4\|T_{1,h}\|_{L^8(Q_\tau)}^6 \|T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)}^2 + \|T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)}^8 \\ & + 6\|T_{1,h}\|_{L^8(Q_\tau)}^4 \|T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)}^4 + 4\|T_{1,h}(\xi)\|_{L^8(Q_\tau)}^2 \|T_{2,h}(\xi)\|_{L^8(Q_\tau)}^6\end{aligned}$$

Nous avons $T_{1,h}, T_{2,h} \in \tilde{E}_1$, alors

$$\|T_{1,h}^2 + T_{2,h}^2\|_{L^4(Q_\tau)} \leqslant 2M^2. \tag{3.85}$$

D'autre part,

$$\|T_{1,h} + T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)} \leqslant 2M, \tag{3.86}$$

ainsi, nous obtenons l'estimation suivante :

$$\|T_{1,h}^4 - T_{2,h}^4\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant 4M^3 \|T_{1,h} - T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)},$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\{I_{1,h}\} - \{I_{2,h}\}\|_{\star,2}^2 \leqslant& 16 \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l M^3 \|T_{1,h} - T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)}^2 \\ \leqslant& 16\sqrt{\pi} M^6 \|T_{1,h} - T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)}^2\end{aligned} \tag{3.87}$$

alors

$$\|\{I_{1,h}\} - \{I_{2,h}\}\|_{\star,2} \leqslant 4\sqrt{\pi} M^3 \|T_{1,h} - T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)}. \tag{3.88}$$

D'où la continuité de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_1$. □

Maintenant nous donnons un résultat de monotonie sur $\tilde{\mathbb{H}}_1$.

Théorème 3.5.2. *L' application $\tilde{\mathbb{H}}_1$ de $\tilde{E}_1$ dans $\tilde{E}_2$ est monotone, dans le sens que si*

$$(T_{1,h} - T_{2,h}, \phi) \leqslant 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^0(0,\tau; V_h),$$

alors

$$(\tilde{\mathbb{H}}(T_{1,h}) - \tilde{\mathbb{H}}(T_{2,h}), \{\phi\}) \leqslant 0 \quad \forall \{\phi\} \in \mathcal{C}^0(0,\tau; \mathbb{V}_h)$$

Démonstration. Soient $T_{1,h}, T_{2,h} \in \tilde{E}_1$ tels que

$$(T_{1,h} - T_{2,h}, \phi) \leqslant 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^0(0,\tau; V_h)$$

Soient $\{I_{1,h}\}, \{I_{2,h}\}$ données par

$$\{I_{1,h}\} = \tilde{\mathbb{H}}_1(T_{1,h}), \qquad \{I_{2,h}\} \quad = \tilde{\mathbb{H}}_1(T_{2,h}), \tag{3.89}$$

alors nous avons

$$\begin{cases} (I^l_{2,h} - I^l_{1,h}) + \beta.\nabla(I^l_{2,h} - I^l_{1,h}) = (T^4_{1,h} - T^4_{2,h}) & (\xi, x, \beta_l) \in [0,\tau] \times \Omega \times \mathcal{D} \\ I^l_2 - I^l_1 = 0 & (\xi, x) \in [0,\tau] \times \Omega^l_-. \end{cases}$$

pour tout $l \in \{1, ..., N^\beta\}$.

On a $(T^4_{1,h} - T^4_{2,h}, \phi) \leqslant 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^0(0,\tau; V_h)$, nous appliquons le principe de maximum, voir [2], nous obtenons $(I^l_{1,h} - I^l_{2,h}, \phi) \leqslant 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^0(0,\tau; V_h)$ pour tout $l \in \{1, ..., N\beta\}$. Cela implique que

$$(\{I_{1,h}\} - \{I_{2,h}\}, \{\phi\}) = (\tilde{\mathbb{H}}(T_{1,h}) - \tilde{\mathbb{H}}(T_{2,h}), \{\phi\}) \leqslant 0 \quad \forall \{\phi\} \in \mathcal{C}^0(0,\tau; \mathbb{V}_h)$$

D'où le résultat. □

Nous terminons ce paragraphe par introduction de quelques propriétés sur l'application $\tilde{\mathbb{H}}_2$.

Proposition 3.5.3. *L'application $\tilde{\mathbb{H}}_2$ est une application bien définie, continue et monotone de $\tilde{E}_2$ dans $\tilde{E}_3$.*

Démonstration. Soit $\{I_h\} \in \tilde{E}_2$, $G_h = \sum_{l=1}^{N_\beta} w_l I^l = \tilde{\mathbb{H}}_2(\{I_h\})$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz discrète, nous obtenons

$$\|G_h\|^2_{L^2(Q_\tau)} \leqslant \sqrt{\pi} \int_0^\tau \sum_{l=0}^{N_\beta} w_l \|I^l_h(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$\|G_h\|_{L^2(Q_\tau)} \leqslant \sqrt{\pi} \|\{I_h\}\|_{\star,2}. \tag{3.90}$$

D'où, pour tout $\{I_h\} \in \tilde{E}_2$, on a $G_h = \tilde{\mathbb{H}}_2(\{I_h\}) \in \tilde{E}_3$, alors $\tilde{\mathbb{H}}_2$ est bien définie.

L'application $\tilde{\mathbb{H}}_2$ est une application linéaire, continue et croissante. □

En se basant sur ces derniers résultats, nous établissons dans le paragraphe suivant la continuité de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_3$.

3.5.2 Étude de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_3$

Théorème 3.5.4. *L'application $\tilde{\mathbb{H}}_3$ est une application continue de $\tilde{E}_3$ dans $\tilde{E}_1$.*

Démonstration. Soient $\tau > 0$, $\xi \in [0,\tau]$, $\bar{T}_h$ solution de (3.65) associée à $G_h \in \tilde{E}_3$ et la condition initiale T_{0h} telle que

$$< \partial_\xi \bar{T}_h(\xi), v_h > + (\nabla \bar{T}_h(\xi), \nabla v_h) + 4\pi\theta(\bar{T}^4_h(\xi), v_h) = \theta < G_h(\xi), v_h > \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{3.91}$$

En particulier si $v_h = \bar{T}_h^4$, alors nous avons

$$\frac{1}{5}\frac{d}{d\xi}\int_\Omega \bar{T}_h^5(\xi)dx + 4\int_\Omega (\nabla \bar{T}_h(\xi))^2(\bar{T}_h(\xi))^3 dx + 4\pi\theta\int_\Omega \bar{T}_h^8(\xi)dx = \theta\int_\Omega G_h\bar{T}_h^4(\xi)dx.$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\frac{1}{5}\frac{d}{d\xi}\int_\Omega (\bar{T}_h^{\frac{5}{2}}(\xi))^2 dx + \frac{16}{25}\int_\Omega (\nabla\bar{T}_h^{\frac{5}{2}}(\xi))^2 dx + 4\pi\theta\int_\Omega \bar{T}_h^8(\xi)dx \leqslant \frac{\theta}{2\epsilon}\int_\Omega G_h^2(\xi)dx + \theta\frac{\epsilon}{2}\int_\Omega \bar{T}_h^8(\xi)dx.$$

Nous prenons $\epsilon = 2\pi$ et nous intégrons par rapport au temps. Nous obtenons

$$\frac{1}{5}\sup_{0\leqslant\xi\leqslant\tau}\|\bar{T}_h^{\frac{5}{2}}(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\|\bar{T}_h^{\frac{5}{2}}\|^2_{L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega))} + 3\pi\theta\|\bar{T}_h\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \frac{\theta}{4\pi}\|G_h\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{5}\|\bar{T}_{0h}^{\frac{5}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.92}$$

d'où

$$\|\bar{T}_h\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \frac{1}{12\pi^2}\|G_h\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{15\theta\pi}\|\bar{T}_{0h}\|^5_{L^5(\Omega)}, \tag{3.93}$$

Puisque $G_h \in \tilde{E}_2$, alors

$$\|\bar{T}_h\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \frac{M^8}{4} + \frac{1}{15\theta\pi}\|\bar{T}_{0h}\|^5_{L^5(\Omega)}. \tag{3.94}$$

En utilisant le fait que la donnée initiale vérifie (3.84), nous obtenons

$$\|\bar{T}_h\|^8_{L^8(Q_\tau)} \leqslant M^8. \tag{3.95}$$

Alors $\bar{T}_h \in \tilde{E}_1$.

Maintenant, nous montrons la continuité de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_3$. Nous notons par $\bar{T}_{1,h}, \bar{T}_{2,h}$ les solutions de (3.65) associées respectivement à $G_{1,h}, G_{2,h} \in \tilde{E}_3$, telles que

$$< \partial_\xi \bar{T}_{1,h}(\xi), v_h > + (\nabla\bar{T}_{1,h}(\xi), \nabla v_h) + 4\pi\theta(\bar{T}^4_{1,h}(\xi), v_h) = \theta < G_{1,h}(\xi), v_h > \quad \forall v_h \in V_h \tag{3.96}$$

$$< \partial_\xi \bar{T}_{2,h}(\xi), v_h > + (\nabla\bar{T}_{2,h}(\xi), \nabla v_h) + 4\pi\theta(\bar{T}^4_{2,h}(\xi), v_h) = \theta < G_{2,h}(\xi), v_h > \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.97}$$

où $\bar{T}_{1,h}(0,.) = \bar{T}_{2,h}(0,.) = T_{0h}(.)$.

La différence entre les deux équations (3.96)-(3.97), donne

$$< \partial_\xi(\bar{T}_{1,h} - \bar{T}_{2,h})(\xi), v_h > + (\nabla(\bar{T}_{1,h} - \bar{T}_{2,h}), \nabla v_h) + 4\pi\theta((\bar{T}^4_{1,h} - \bar{T}^4_{2,h}), v_h) = \theta < (G_{1,h} - G_{2,h})(\xi), v_h > \tag{3.98}$$

pour tout $v_h \in V_h$. Nous posons $w_h = \bar{T}_{1,h} - \bar{T}_{2,h}$ où $w_h(0,.) = 0$, nous appliquons la proposition 2.3.4, alors nous avons

$$w_h(\xi) = -4\pi\theta\int_0^\xi \mathbb{T}(\xi - s)(\bar{T}^4_{1,h} - \bar{T}^4_{2,h})(s)ds + \theta\int_0^\xi \mathbb{T}(\xi - s)(G_{1,h} - G_{2,h})(s)ds. \tag{3.99}$$

Maintenant, en utilisant la proposition 2.3.6 avec $p = 8$ et $q = 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|w_h(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant & 4\pi\theta\int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi - s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}\|\bar{T}^4_{h,1}(s) - \bar{T}^4_{h,2}(s)\|_{L^2(\Omega)}ds \\ & + \theta\int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi - s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}}\|G_{h,1}(s) - G_{h,2}(s)\|_{L^2(\Omega)}ds\end{aligned} \tag{3.100}$$

Dans le premier terme de l'expression à gauche, nous utilisons (3.85), par contre, dans le deuxième terme, nous appliquons Cauchy-Schwartz, alors (3.100) devient

$$\begin{aligned}\|w_h(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant & 4\pi\theta \int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}} \|wh(s)\|_{L^8(\Omega)} \|\bar{T}_{h,1}(s)+\bar{T}_{h,2}(s)\|_{L^8(\Omega)} \|(\bar{T}_{h,1}^2+\bar{T}_{h,2}^2)(s)\|_{L^4(\Omega)} ds + \\ & + \theta \left(\int_0^\xi \frac{ds}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{3}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \|G_{h,1}-G_{h,2}\|_{L^2(Q_\tau)}.\end{aligned} \tag{3.101}$$

Nous appliquons l'inégalité de Holder généralisée, avec $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 8$ et $r_4 = 4$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^\xi \frac{1}{(4\pi(\xi-s))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}} & \|w_h(s)\|_{L^8(\Omega)} \|(\bar{T}_{h,1}+\bar{T}_{h,2})(s)\|_{L^8(\Omega)} \|(\bar{T}_{h,1}^2+T_{h,2}^2)(s)\|_{L^4(\Omega)} ds \\ & \leqslant \frac{2\sqrt[8]{t}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}} \Big(\int_0^t \|w_h(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 \Big)^{\frac{1}{8}} \|\bar{T}_{h,1}+\bar{T}_{h,2}\|_{L^8(Q_\tau)} \|\bar{T}_{h,1}^2+\bar{T}_{h,2}^2\|_{L^4(Q_\tau)}.\end{aligned} \tag{3.102}$$

En injectant (3.102) et (2.64) dans (3.101), on a

$$\begin{aligned}\|w_h(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant & 4\pi\theta \frac{2\sqrt[8]{\xi}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}} \Big(\int_0^\xi \|w_h(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds \Big)^{\frac{1}{8}} \|\bar{T}_{h,1}+\bar{T}_{h,2}\|_{L^8(Q_T)} \|\bar{T}_{h,1}^2+\bar{T}_{h,2}^2\|_{L^4(Q_\tau)} \\ & + \theta \frac{2\sqrt[8]{t}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}} \|G_{h,1}-G_{h,2}\|_{L^2(Q_\tau)}.\end{aligned}$$

Les estimations (3.85), (3.86) donnent

$$\begin{aligned}\|w_h(\xi)\|_{L^8(\Omega)} \leqslant & 4\pi\theta \frac{2\sqrt[8]{\xi}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}} 4M^3 \Big(\int_0^\xi \|w_h(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds \Big)^{\frac{1}{8}} + \theta \frac{2\sqrt[8]{t}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}} \|G_{h,1}-G_{h,2}\|_{L^2(Q_\tau)} \\ \leqslant & 4\pi\theta \frac{2\sqrt[8]{\tau}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}} 4M^3 \Big(\int_0^\xi \|w_h(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds \Big)^{\frac{1}{8}} + \theta \frac{2\sqrt[8]{\tau}}{(4\pi)^{\frac{3}{8}}} \|G_{h,1}-G_{h,2}\|_{L^2(Q_\tau)}.\end{aligned} \tag{3.103}$$

On a $(a+b)^8 \leqslant 128(a^8+b^8)$ pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}_+^2$. Alors nous avons

$$\|w_h(\xi)\|_{L^8(\Omega)}^8 \leqslant \frac{\theta^8}{\pi^3} 2^{25} M^{24} \tau \int_0^\xi \|w_h(s)\|_{L^8(\Omega)}^8 ds + \frac{\theta^8}{\pi^3} 2^9 \tau \|G_{h,1}-G_{h,2}\|_{L^2(Q_\tau)}^8.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall (2.34), nous déduisons que

$$\|w_h\|_{L^8(Q_\tau)}^8 \leqslant \frac{\theta^8}{\pi^3} 2^9 \tau^2 e^{\frac{\theta^8}{\pi^3} 2^{25} M^{24} \tau^2} \|G_{h,1}-G_{h,2}\|_{L^2(Q_\tau)}^8. \tag{3.104}$$

D'où la continuité de l'application $\tilde{\mathbb{H}}_3$. □

3.5.3 Existence et unicité de la solution d'un schéma numérique pour le système couplé

Dans ce paragraphe, nous démontrons l'existence et l'unicité locale de la solution $(T_h, \{I_h\})$ pour le système couplé (3.18) – (3.65). Nous souhaitons appliquer le théorème du point fixe de Banach, voir [108, p. 117, Theorem 2.1] sur l'application

$$\tilde{\mathbb{H}} = \tilde{\mathbb{H}}_3 \circ \tilde{\mathbb{H}}_2 \circ \tilde{\mathbb{H}}_1 : \tilde{E}_1 \longrightarrow \tilde{E}_1.$$

avec $\tilde{E}_1$ est un fermé borné d'un espace de Banach $L^8(Q_\tau)$ alors, afin d'appliquer le théorème du point fixe de Banach, il nous reste à montrer que l'application $\tilde{\mathbb{H}}$ est contractante.

Théorème 3.5.5. *Il existe $\tau^{\star\star} > 0$ telle que, pour tout $\tau \leqslant \tau^{\star\star}$, l'application $\tilde{\mathbb{H}}$ est une contraction.*

Démonstration. $\tilde{\mathbb{H}} = \tilde{\mathbb{H}}_3 \circ \tilde{\mathbb{H}}_2 \circ \tilde{\mathbb{H}}_1$ est bien définie car c'est la composée de trois applications bien définies.

On essaye maintenant de montrer que l'application $\tilde{\mathbb{H}}$ est contractante de $\tilde{E}_1$ dans $\tilde{E}_1$. De manière plus synthétique, nous avons

$$\begin{array}{ccccccc} (\tilde{E}_1, \|.\|_{\tilde{E}_1}) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{H}}_1} & (\tilde{E}_2, \|.\|_{\tilde{E}_2}) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{H}}_2} & (\tilde{E}_3, \|.\|_{\tilde{E}_3}) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{H}}_3} & (\tilde{E}_1, \|.\|_{\tilde{E}_1}) \\ T_h & \mapsto & \{I_h\} & \mapsto & G_h & \mapsto & \bar{T}_h. \end{array} \tag{3.105}$$

Soient $T_{1,h}, T_{2,h}, \bar{T}_{1,h}, \bar{T}_{2,h} \in \tilde{E}_1$, $\{I_{1,h}\}, \{I_{2,h}\} \in \tilde{E}_2$ et $G_{1,h}, G_{2,h} \in \tilde{E}_3$, telles que

$$\begin{cases} \{I_{1,h}\} = \tilde{\mathbb{H}}_1(T_{1,h}), & \{I_{2,h}\} = \tilde{\mathbb{H}}_1(T_{2,h}) \\ G_{1,h} = \tilde{\mathbb{H}}_2(\{I_{1,h}\}), & G_{2,h} = \tilde{\mathbb{H}}_2(\{I_{2,h}\}) \\ \bar{T}_{1,h} = \tilde{\mathbb{H}}_3(G_{1,h}), & \bar{T}_{2,h} = \tilde{\mathbb{H}}_3(G_{2,h}) \\ \bar{T}_{1,h} = \tilde{\mathbb{H}}(T_{1,h}), & \bar{T}_{2,h} = \tilde{\mathbb{H}}(T_{2,h}). \end{cases}$$

En utilisant la continuité de trois applications $\tilde{\mathbb{H}}_1, \tilde{\mathbb{H}}_2$ et $\tilde{\mathbb{H}}_3$, alors à partir de (3.88), (3.90) et (3.104), on obtient

$$\begin{aligned} \|\{I_{1,h}\} - \{I_{2,h}\}\|_{\star,2} &\leqslant 4\sqrt{\pi} M^3 \|T_{1,h} - T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)} \\ \|G_1 - G_2\|_{L^2(Q_\tau)} &\leqslant \sqrt{\pi} \|\{I_{1,h}\} - \{I_{2,h}\}\|_{\star,2} \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{T}_{1,h} - \bar{T}_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)} &\leqslant \frac{\theta^8}{\pi^3} 2^9 \tau^2 e^{\frac{\theta^8}{\pi^3} 2^{25} M^{24} \tau^2} \|G_{1,h} - G_{2,h}\|_{L^2(Q_\tau)} \\ \|\bar{T}_{1,h} - \bar{T}_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)} &\leqslant \pi B^{\star\star}(\tau) e^{B^{\star\star}(\tau)} \|T_{1,h} - T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)} \end{aligned} \tag{3.107}$$

où $B^{\star\star}(\tau) = \sqrt[8]{\frac{\theta^8}{\pi^3} 2^{25} M^{24} \tau^2}$, alors nous avons

$$\|\bar{T}_{1,h} - \bar{T}_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)} \leqslant \bar{\gamma}(\tau) \|T_{1,h} - T_{2,h}\|_{L^8(Q_\tau)} \tag{3.108}$$

avec $\bar{\gamma}(\tau) = \pi B^{\star\star}(\tau) e^{B^{\star\star}(\tau)}$. Il existe $\tau^\star(M) > 0$ telle que pour tout $\tau \leqslant \tau^\star(M)$, on a

$$\bar{\gamma}(\tau) < 1. \tag{3.109}$$

□

Maintenant, nous concluons en donnant l'existence et l'unicité locale de la solution pour le système couplé (3.18)-(3.65)

Corollaire 3.5.6. *D'après les hypothèses du théorème 3.5.5, le système d'équations (3.18)-(3.65) possède une unique solution* $(T_h, \{I_h\})$ *telle que* $T_h \in \tilde{E}_1$ *et* $\{I_h\} \in \tilde{E}_2$.

Démonstration. D'après les hypothèses du théorème 3.5.5, il existe $\tau^{\star\star} > 0$ telle que pour tout $\tau \leqslant \tau^{\star\star}$, $\tilde{\mathbb{H}}$ est une contraction. $\tilde{E}_1$ est un borné fermé de l'espace de Banach $L^8(Q_\tau)$, alors en utilisant le théorème du point fixe de Banach [108, p. 117, Theorem 2.1], on déduit que $\tilde{\mathbb{H}}$ possède un unique point fixe $T_h \in E_1$ vérifiant l'équation (2.2). Par conséquent, $\{I_h\} = \tilde{\mathbb{H}}_1(T_h)$ est l'unique solution de l'équation (3.18), le couple $(T_h, \{I_h\})$ est l'unique solution du système (3.18)-(3.65). □

3.5.4 Convergence du schéma numérique pour le système couplé.

Convergence de l'algorithme quand h tend vers zéro.

Dans ce paragraphe, nous montrons la convergence de la solution approchée $(T_h, \{I_h\})$ vers la solution continue (T, I) du système (2.1)–(2.2). Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème de convergence annoncé.

Théorème 3.5.7. *Considérons la quadrature (3.4), le schéma numérique donné par (3.65) et (3.18) est convergent : la solution approchée* $(T_h, \{I_h\})$ *converge vers la solution* (T, I) *du système (2.1)–(2.2), lorsque* N_β *est assez grand et le pas* $h \longrightarrow 0$

Démonstration. Les résultats se déduisent directement du théorème 3.4.5 et du corollaire 3.3.9. □

Discrétisation temporelle : Stabilité

Nous rappelons la formulation variationnelle de l'équation (2.2) avec la condition aux bords de Dirichlet homogènes :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver} \quad T \in X \quad \text{tel que} \\ &(\frac{dT}{d\xi}, \varphi)_\Omega + (\nabla T, \nabla\varphi)_\Omega + 4\pi\theta(T^4, \varphi)_\Omega = \theta(G, \varphi)_\Omega, \end{aligned} \tag{3.110}$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et satisfait la condition initiale :

$$(T(0, s), \varphi)_\Omega = (T_0, \varphi)_\Omega \qquad \forall\varphi \in L^2(\Omega). \tag{3.111}$$

Nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation (3.110), alors nous avons

$$< \partial_\xi T_h(\xi), v_h > + (\nabla T_h(\xi), \nabla v_h) + (4\pi\theta {T_h}^4(\xi), v_h) =< \theta G(\xi), v_h > \qquad \forall v_h \in V_h \tag{3.112}$$

où V_h est donnée par (3.9). Nous utilisons le schéma Crank-Nicolson pour la discrétisation temporelle, soit $\triangle\xi = \dfrac{\tau}{N}$, l'équation (3.112) peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (\frac{T_h^{n+1} - T_h^n}{\triangle\xi}, \phi)_\Omega + (\nabla(\frac{T_h^{n+1} + T_h^n}{2}), \nabla\phi)_\Omega + 4\pi\theta(\frac{{T_h^{n+1}}^4 + T_h^{n4}}{2}, \phi)_\Omega \\ = \theta({G_h}^n, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in V_h. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Le terme ${T_h^{n+1}}^4$ est linéarisé autour du T_h^n, alors nous avons

$$ {T_h^{n+1}}^4 \simeq {T_h^n}^4 + 4{T_h^n}^3(T_h^{n+1} - T_h^n), \tag{3.114} $$

On remplace (3.114) dans l'équation (3.113) et nous obtenons

$$ \begin{aligned} (\frac{T_h^{n+1} - T_h^n}{\triangle\xi}, \phi)_\Omega + (\nabla(\frac{T_h^{n+1} + T_h^n)}{2}), \nabla\phi)_\Omega + 4\pi\theta((-{T_h^n}^4 + 2{T_h^n}^3 T_h^{n+1}), \phi)_\Omega \\ = \theta(G^n, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in V_h. \end{aligned} \tag{3.115} $$

Nous introduisons la norme suivante sur V_h

$$ \|T_h\|_{h,p} = \Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|T_h^n\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall p \in [2, +\infty[. \tag{3.116} $$

Théorème 3.5.8. *Soit* $\left(T_h^n\right)_{n=0}^N$ *la solution approchée du problème (3.113) qui vérifie l'estimation suivante*

$$ \|T_h^{n+1} - T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2\theta^2\triangle\xi^2\|{G_h}^n\|^2_{L^2(\Omega)} + 288\pi^2\theta^2\triangle\xi^2\|T_h^n\|^8_{L^8(\Omega)} + 12\pi\theta\triangle\xi\|T_h^n\|^5_{L^5(\Omega)}. \tag{3.117} $$

Alors, pour tout $\delta > 0$*, il existe* $\Delta\xi_0 > 0$ *telle que pour tout* $\Delta\xi \leqslant \Delta\xi_0$*, nous avons*

$$ \|T_h^{n+1} - T_h^n\|_{L^2(\Omega)} < \delta. \tag{3.118} $$

De plus, nous avons

$$ \|T_h^N - T_{0h}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2\theta^2\triangle\xi^2\|G_h\|_{h,2} + 288\pi^2\theta^2\triangle\xi^2\|T_h\|_{h,8} + 12\pi\theta\triangle\xi\|T_h\|_{h,5}. \tag{3.119} $$

Démonstration. L'équation (3.115) est équivalente à

$$ \begin{aligned} (T_h^{n+1} - T_h^n, \phi)_\Omega + \triangle\xi(\nabla(\frac{T_h^{n+1} + T_h^n)}{2}), \nabla\phi)_\Omega + 4\pi\theta\triangle\xi((-{T_h^n}^4 + 2{T_h^n}^3 T_h^{n+1}), \phi)_\Omega \\ = \theta\triangle\xi(G^n, \phi)_\Omega \quad \forall\phi \in V_h. \end{aligned} \tag{3.120} $$

En particulier si $\phi = T_h^{n+1} - T_h^n$, alors on a

$$ \begin{aligned} \|T_h^{n+1} - T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\triangle\xi}{2}(\|\nabla T_h^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ +4\pi\theta\triangle\xi \int_\Omega (-{T_h^n}^4 + 2{T_h^n}^3 T_h^{n+1})(T_h^{n+1} - T_h^n)dx = \theta\triangle\xi \int_\Omega {G_h}^n(T_h^{n+1} - T_h^n)dx. \end{aligned} \tag{3.121} $$

En développant le troisième terme à droite en utilisant la positivité de la solution, nous obtenons

$$ \begin{aligned} \|T_h^{n+1} - T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\triangle\xi}{2}(\|\nabla T_h^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}) - 4\pi\theta\triangle\xi \int_\Omega (3{T_h^n}^4 T_h^{n+1})dx \\ \leqslant \theta\triangle\xi \int_\Omega {G_h}^n(T_h^{n+1} - T_h^n)dx \end{aligned} \tag{3.122} $$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned}\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\triangle\xi}{2}(\|\nabla T_h^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)})-4\pi\theta\triangle\xi\int_\Omega 3T_h^{n4}(T_h^{n+1}-T_h^n)dx\\ \leqslant\theta\triangle\xi\int_\Omega {G_h}^n(T_h^{n+1}-T_h^n)dx+12\pi\theta\triangle\xi\int_\Omega T_h^{n5}dx\end{aligned} \tag{3.123}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\theta\triangle\xi\int_\Omega {G_h}^n(T_h^{n+1}-T_h^n)dx\\ +12\pi\theta\triangle\xi\int_\Omega T_h^{n4}(T_h^{n+1}-T_h^n)dx+12\pi\theta\triangle\xi\|T_h^n\|^5_{L^5(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.124}$$

En appliquant l'inégalité de Young sur les deux premiers termes du second membre, alors nous avons pour tout $\epsilon,\epsilon_1>0$

$$\begin{aligned}\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\theta\triangle\xi\Big[\frac{1}{2\epsilon}\|{G_h}^n\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\epsilon}{2}\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}\Big]+12\pi\theta\triangle\xi\|T_h^n\|^5_{L^5(\Omega)}\\ +12\pi\theta\triangle\xi\Big[\frac{1}{2\epsilon_1}\|{T_h}^n\|^8_{L^8(\Omega)}+\frac{\epsilon_1}{2}\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}\Big]\end{aligned} \tag{3.125}$$

En particulier si $\epsilon=\dfrac{1}{2\theta\triangle\xi}$ et $\epsilon_1=\dfrac{1}{24\pi\theta\triangle\xi}$ alors nous avons

$$\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant 2\theta^2\triangle\xi^2\|{G_h}^n\|^2_{L^2(\Omega)}+288\pi^2\theta^2\triangle\xi^2\|T_h^n\|^8_{L^8(\Omega)}+12\pi\theta\triangle\xi\|T_h^n\|^5_{L^5(\Omega)}. \tag{3.126}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\|T_h^N-T_{0h}\|^2_{L^2(\Omega)}=\|T_h^N-T_h^0\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\sum_{n=0}^{N-1}T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant\sum_{n=0}^{N-1}\|T_h^{n+1}-T_h^n\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.127}$$

D'où

$$\|T_h^N-T_{0h}\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant 2\theta^2\triangle\xi^2\|G_h\|_{h,2}+288\pi^2\theta^2\triangle\xi^2\|T_h\|_{h,8}+12\pi\theta\triangle\xi\|T_h\|_{h,5}. \tag{3.128}$$

D'où le résultat □

La semi-discrétisation en espace du système non-linéaire couplé rayonnement conduction réalisée dans ce chapitre permet d'obtenir la forme matricielle suivante :

$$\mathbb{M}_h\dot{\widetilde{T}}_h=\mathbb{A}_h\widetilde{T}_h-4\pi\theta\mathbb{M}_h\widetilde{T}_h^4+\theta\widetilde{G}_h \tag{3.129}$$

où

$$\widetilde{G}_h=\sum_{l=1}^{N_\beta}\widetilde{I}_h^l w_l, \tag{3.130}$$

$\mathbb{M}_h\in\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ et $\mathbb{A}_h\in\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ sont les matrices des éléments finis ; la matrice de rigidité et la matrice de masse respectivement. $\mathbb{M}_h$ est une matrice symétrique définie positive et $\mathbb{A}_h$ est

une matrice symétrique définie négative. $\widetilde{T}_h \in \mathbf{R}^N$ et $\widetilde{I}_h^l \in \mathbf{R}^N$ sont respectivement le vecteur température et le vecteur luminance donnée pour une direction β_l. On déduit un système différentielle qui modèlise l'évolution de la temperature dans un milieu gris, semi-transparent non diffusif. Nos méthodes numériques nous permettent d'obtenir un modèle certes de grande taille mais de dimension finie écrit sous la forme de représentation d'état explicite permettant de faire une analyse structurelle de l'observabilité et de la commandabilité. Les études, en amont, de la stabilité des schémas de discrétisation sont fondamentale car nous permettant de s'assurer que les solutions obtenues sont convergentes.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la convergence et à la stabilité des schémas numériques employés pour la résolution numérique des équations couplées en régime transitoire. Plus précisément, nous avons considéré le schéma de Galerkin discontinu avec un flux décentré pour la discrétisation spatiale de l'ETR et une quadrature S_N pour la discrétisation angulaire. Un schéma de type éléments finis pour résoudre l'équation de la chaleur non linéaire a été produit. Nous avons montré que la solution approchée conserve les mêmes propriétés que la solution du système continu, établies au chapitre II. Nous avons réussi à montrer la convergence de la solution approchée vers la solution du problème continu pour N_β assez grand et le pas $h \longrightarrow 0$. Enfin, nous avons prouvé la stabilité de la discrétisation temporelle employée.

Chapitre 4

Résultats numériques

Les résultats de ce chapitre ont été soumis pour publication, voir [64].

Sommaire

4.1 Couplage : Description de l'algorithme 71
4.2 Équation de transfert radiatif dans un carré unitaire. 72
4.3 Transfert de chaleur couplé rayonnement-conduction dans un carré unitaire. 73
4.3.1 Conditions aux bords thermiques de type Dirichlet. 75
4.3.2 Conditions aux bords thermiques de type Robin. 79
4.4 Conclusion 81

Ce chapitre est consacré à la présentation des différentes simulations numériques réalisées avec le code numérique de rayonnement et de conduction, développé dans cette thèse. Toutes les simulations ont été effectuées pour un milieu gris, semi-transparent et non diffusant. Dans un premier temps, nous donnerons une description de notre algorithme. Ensuite, nous présenterons des résultats numériques assurant la validité du code et nous effectuerons une étude de sensibilité aux maillages angulaires et spatiaux de la solution obtenue par notre code de rayonnement-conduction. Puis, nous présenterons des résultats numériques à propos du problème couplé rayonnement-conduction avec des conditions aux bords thermiques du type Dirichlet pour un milieu avec des surfaces noires, opaques à réflexion diffuse et des surfaces opaques à réflexion spéculaire. Nous étudierons aussi la stabilité numérique de notre code rayonnement-conduction. Enfin, nous donnerons aussi les résultats des calculs quand on considère des conditions aux bords thermiques du type Robin pour un milieu avec des surfaces noires. Nos calculs ont été réalisés sur Mac OS X 10.6.6 2.22GHz Intel Core 2 Duo à l'aide du logiciel MATLAB.

4.1 Couplage : Description de l'algorithme

Dans cette section, nous présentons une description de l'algorithme numérique nous permettant le calcul d'une solution approchée du système couplé rayonnement-conduction.

1. Étant donné la condition initiale T_0 et les différents paramètres de simulation (h, $\Delta\xi$....).
2. Tout d'abord nous résolvons l'ETR ; ensuite, nous calculons la moyenne de la luminance G sur toutes les directions.
3. Nous résolvons l'équation de la chaleur non linéaire (3.65) : on introduit une linéarisation de premier ordre. On utilise le schéma de Cranck Nicholson pour la discrétisation en temps de l'équation de conduction résultante.

4. On calcule des itérations avec un pas de temps $\Delta\xi$ jusqu'à un temps τ_1 tel que la norme L^2 de la différence entre la solution de l'équation de la chaleur non linéaire entre deux temps τ_1 et $\tau_1 + \triangle\xi$, soit inférieure à 10^{-5}.

4.2 Équation de transfert radiatif dans un carré unitaire.

Pour montrer la performance de la méthode DG, nous allons d'abord présenter quelques cas tests. Le premier cas consiste à calculer la norme L^2 de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée de l'ETR résolue pour une direction donnée β dans une enceinte carrée. Cette équation possède la forme suivante :

$$\begin{cases} \beta.\nabla I + I = F & \text{dans } \Omega. \\ I = 0 & \text{dans } \partial\Omega_-, \end{cases} \tag{4.1}$$

où

$$\partial\Omega_- = \{s = (s_1, s_2) \in \partial\Omega \ \text{ tel que } \ \beta.\mathbf{n} < 0\}, \tag{4.2}$$

et

$$\begin{cases} \beta = (cos(\frac{\pi}{4}), sin(\frac{\pi}{4})) \\ F = cos(\frac{\pi}{4})\frac{\pi}{2} sin(\pi s_2) sin(\frac{\pi}{2}(1-s_1)) + sin(\frac{\pi}{4})\pi cos(\pi s_2) cos(\frac{\pi}{2}(1-s_1)) \\ \quad + sin(\pi s_2) cos(\frac{\pi}{2}(1-s_1)), \end{cases} \tag{4.3}$$

qui a une solution exacte assez régulière donnée par $sin(\pi s_2)cos(\frac{\pi}{2}(1-s_1)) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, voir figure 4.1. La figure 4.2 montre la norme L^2 de l' erreur pour différents ordres de polynômes

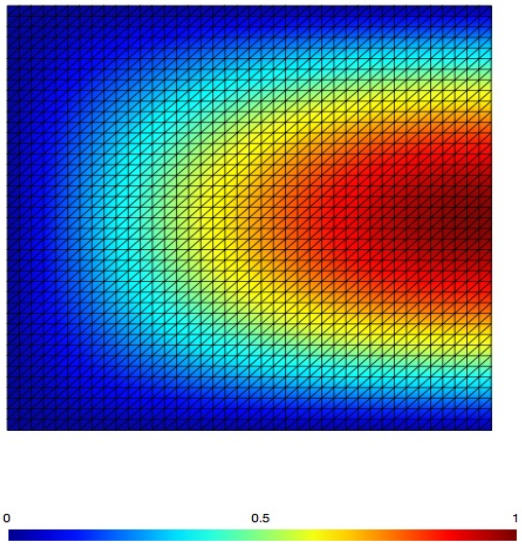


FIGURE 4.1 – La solution exacte dans un carré unitaire.

d'approximation de la méthode de DG en fonction de la finesse du maillage (représentée à l'aide de h), en représentation logarithimique. Nos résultats sont conformes aux résultats théoriques [122] : nous obtenons le comportement asymptotique prévu théoriquement lorsque $h \to 0$. Pour une solution exacte, I est assez régulière. Si on prend r suffisamment

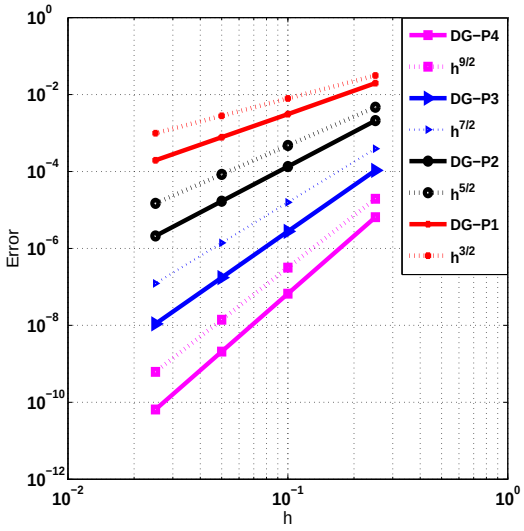


FIGURE 4.2 – La norme L^2 de l'erreur en utilisant un flux décentré.

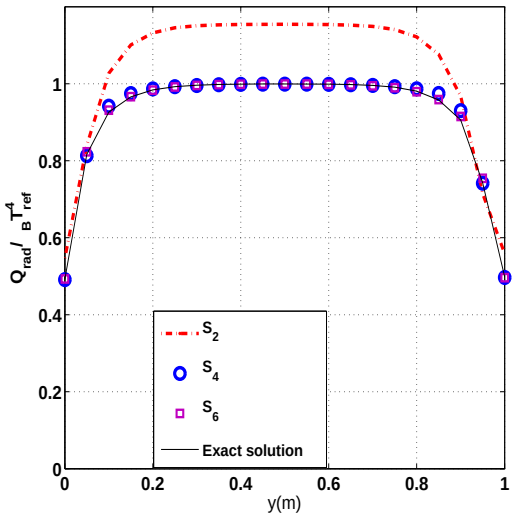
grand, la courbe de l'erreur avec l'approximation polynomiale P_k pour $k \in \{1, ..., 4\}$ est proportionnelle à $h^{k+\frac{1}{2}}$ quand nous utilisons un flux numérique décentré. Dans un second cas test, nous supposons que le milieu est gris, absorbant, à température constante, $T_m = 100K$ et que toutes les parois sont noires et à température $T_N = T_E = T_S = T_W = 0K$ où T_m est la température du milieu et T_N, T_E, T_S, T_W sont les températures sur les parois Nord, Est, Sud et Ouest, respectivement. Des simulations numériques ont été réalisées en utilisant les quadratures S_2, S_4 et S_6 avec un maillage structuré composé de 441 noeuds.

La figure 4.3 montre le flux radiatif adimensionné $\frac{Q_{rad}}{\sigma_B T_{ref}^4}$ pour trois valeurs de coefficient d'absorption ($\kappa = 10$, $\kappa = 1$ et $\kappa = 0.1\ m^{-1}$). Nous constatons que l'erreur diminue en passant de S_2 à S_4 et de S_4 à S_6, respectivement. Nos résultats sont en adéquation avec ceux présentés dans [131]. Lorsque le milieu est plus absorbant ($\kappa = 10\ m^{-1}$), le flux tend vers le flux du corps noir de la température du milieu. Lorsque κ diminue, le flux tend vers zéro, compte tenu des faces froides.

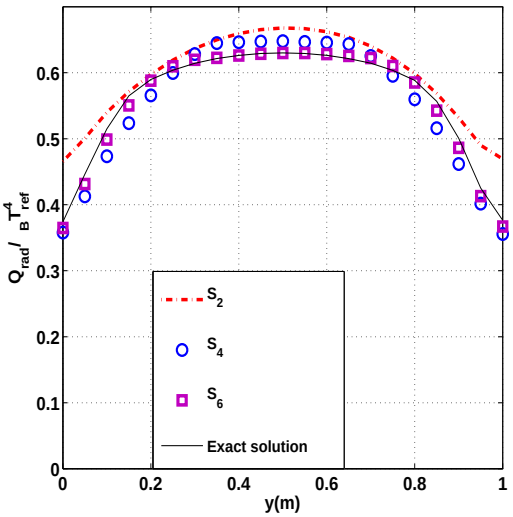
Nos résultats montrent que la quadrature S_6 donne une meilleure approximation, ce qui confirme les résultats présentés dans [57, 10]. Dans [10], l'auteur montre que l'estimation d'erreur est proportionnelle à l'inverse du nombre de directions discrètes N_β. La figure 4.4 montre le flux radiatif adimensionné en utilisant la quadrature S_4 et pour deux valeurs du coefficient d'absorption $\kappa = 2\ m^{-1}$ et $\kappa = 10\ m^{-1}$. Nous constatons que si nous augmentons le degré d'approximation polynomiale, nous obtenons des résultats qui sont proches de la solution exacte qui satisfait à nouveau les résultats théoriques.

4.3 Transfert de chaleur couplé rayonnement-conduction dans un carré unitaire.

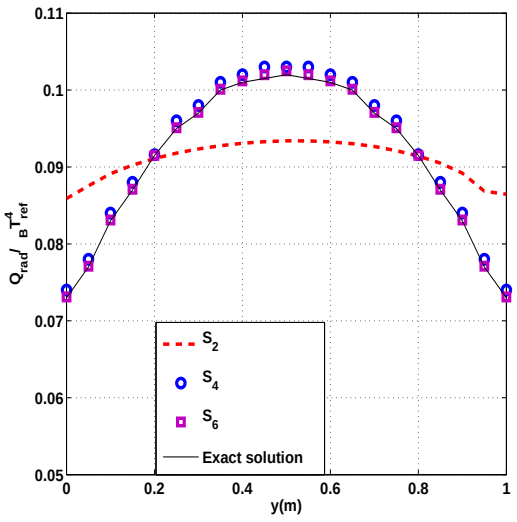
Dans cette section, nous allons présenter les résultats numériques pour le problème du transfert de chaleur par rayonnement-conducteur couplé. Dans ce cas, nous utilisons la



(a) $\kappa = 10\ m^{-1}$

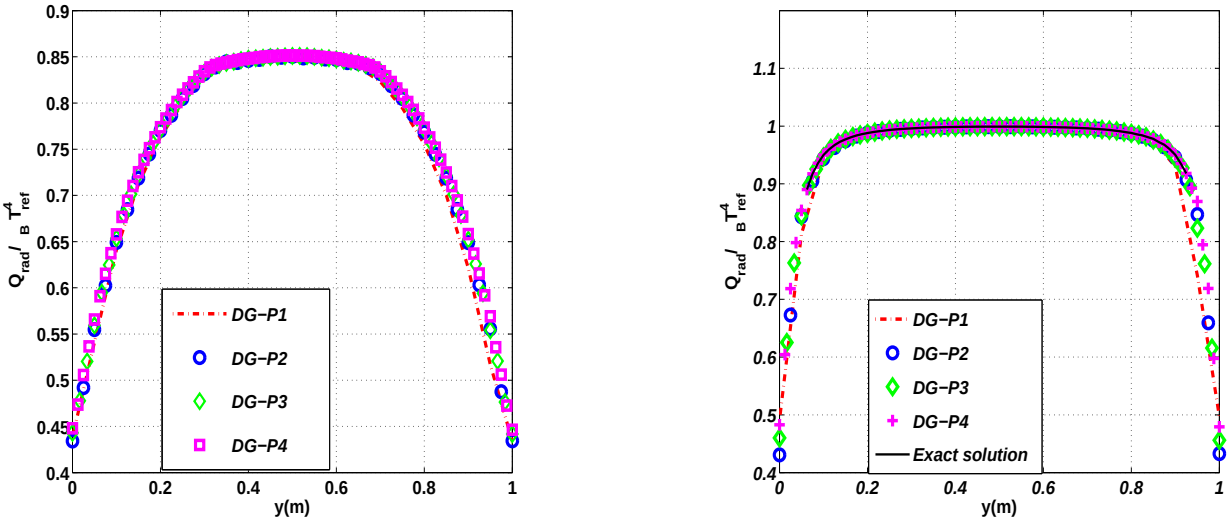


(b) $\kappa = 1\ m^{-1}$



(c) $\kappa = 0.1\ m^{-1}$

FIGURE 4.3 – Flux radiatif adimensionné le long de la ligne médiane de la face sud du carré, avec $DG - P^1$



(a) $\kappa = 2\ m^{-1}$ (b) $\kappa = 10\ m^{-1}$

FIGURE 4.4 – Flux radiatif adimensionné le long de la ligne médiane de la face sud du carré avec une quadrature S_4

quadrature S_4 pour discrétisation angulaire pour réduire le temps de calcul, tout en conservant un niveau de précision raisonnable. Les problèmes sont résolus avec un pas de temps adimensionné $\triangle\xi = 5.10^{-4}$. La température de référence T_{ref} est supposée être la température chaude $T_{ref} = 1000K$. Le milieu est supposé être à une température constante égale à $T_0 = 500K$. La surface sud (surface chaude) et les autres faces sont maintenues constantes au cours du temps égal $500K$. Les conditions aux limites thermiques prises en compte dans le premier cas de test étaient les conditions de Dirichlet non homogènes (1.33). Les conditions aux limites de Robin, (1.34), sont également considérées.

4.3.1 Conditions aux bords thermiques de type Dirichlet.

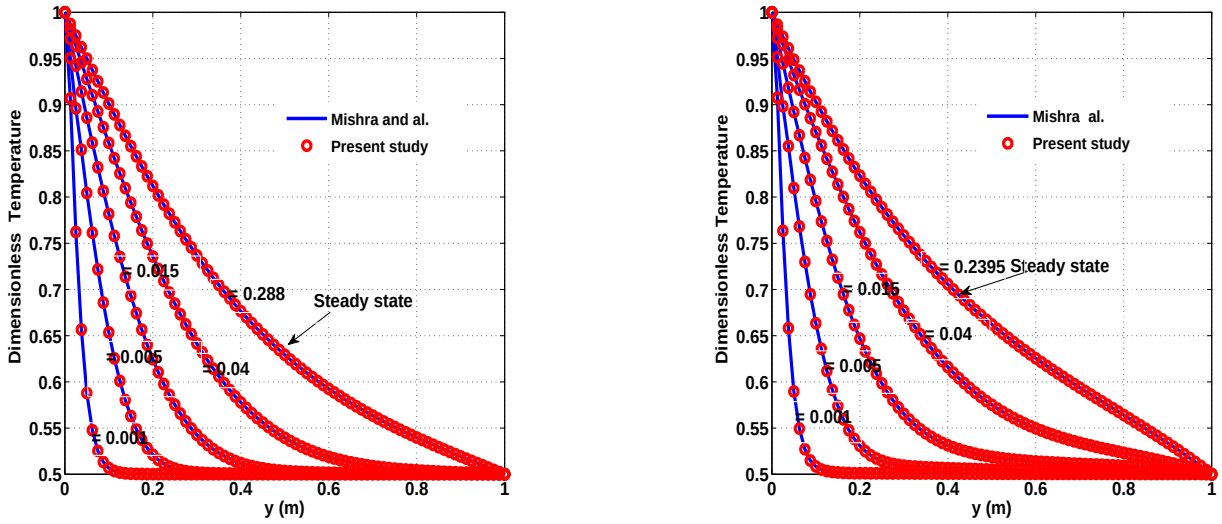
Dans cette section, nous avons utilisé la méthode des éléments finis avec un ordre d'approximation égal à 2 (EFP2) pour résoudre l'équation de la chaleur non lineaire et la méthode DG avec un ordre d'approximation égal à 2 (DGP2) a été utilisée pour résoudre l'ETR. Les simulations ont été réalisées avec une triangulation structurée composée de 1600 nœuds. Ces conditions sont choisies afin d'établir une comparaison avec ceux de Asllanaj et al. [17] et Mishra et al. [112]. Les temps de calcul requis par le programme de convergence vers l'état stationnaire est d'environ 2h quand $N_s = 1$ et $N_s = 0.1$.

Surfaces noires

Dans ce premier cas test, les parois du milieu ont été considérées comme des surfaces noires avec des températures imposées. Ce problème a été étudié par Mishra et al. [110]. Ces auteurs ont utilisé une méthode Lattice Boltzmann (LBM) pour résoudre l'équation de l'énergie et la méthode du type "Collapsed-dimension method CDM" a été utilisée pour calculer le terme source radiatif dans l'équation de l'énergie. Cette méthode a été développée pour la géométrie 2D simple basée sur un maillage structuré.

Notons que ce même problème transitoire est étudié par Asllanaj et al. [17]. Dans ce dernier travail, l'ETR a été résolue en utilisant un FVM basé sur une formulation cell-vertex pour des maillages structurés. Le code de PHAML a été utilisé pour résoudre l'équation de l'énergie en utilisant la méthode des éléments finis. Les solutions numériques de Mishra et al. [110] ont été utilisées comme références pour vérifier celles obtenues avec notre méthode numérique.

La figure 4.5 montre l'évolution de la température le long de la dimension mediane $s_1 = 0.5$ à des moments différents et pour un nombre différent $N_s = 0.1$ et $N_s = 1$. Il convient de noter que le temps de calcul nécessaire pour parvenir à une convergence de notre algorithme augmente avec N_s. Évidemment, plus la partie radiative est importante, plus rapidement l'état d'équilibre est établi. Nos résultats sont en accord avec ceux de Asllanaj et al. [17] et Mishra et al. [112], confirmant la validité de notre méthode numérique pour les surfaces noires. Le tableau 4.1 montre le temps de calcul pris par notre programme pour converger



(a) $N_s = 1$ (b) $N_s = 0.1$

FIGURE 4.5 – Température adimensionnée le long de la ligne médiane (en $x = 0.5$) pour deux valeurs du nombre de rayonnements-conductions N_s.

EF-DG				
h	P1	P2	P3	P4
0.1	167.77	282.92	789.65	1.492e3
0.05	662.349	1.108e3	3.219e3	6.879e3
0.025	2.5135e3	5.183e3	8.783e3	12.43e3

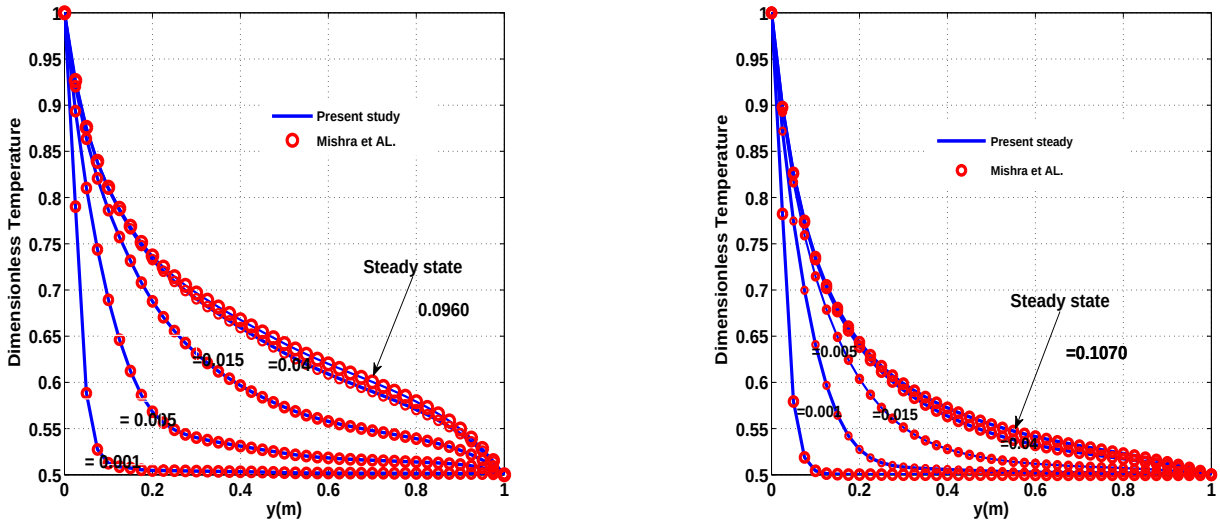
TABLE 4.1 – Le temps (s) de convergence de notre programme, $N_s = 1$

vers l'état d'équilibre. Nous avons même testé la stabilité numérique pour différents pas de

discrétisation temporelle et spatiale. Cela garantit la stabilité de notre schéma numérique combiné.

Surfaces combinées noires et opaques à réflexion diffuse

Dans ce second cas test, la surface chaude (sud) a été supposée opaque à réflexion diffuse et les trois autres parois sont noires. Le nombre N_s pris est égal à 0.01. Les figures 4.6 (a) et (b) montrent les distributions de température adimensionnée le long de la position médiane pour deux valeurs de l'émissivité ϵ égales à 0.5 et 0.1, respectivement. Celles-ci montrent également que le temps nécessaire pour obtenir une solution de convergence diminue avec ϵ. L'état d'équilibre est établi avec le temps adimensionné $\xi = 0,096$ pour $\epsilon = 0,5$ et $\xi = 0,1070$ pour $\epsilon = 0.1$. Nos résultats sont en adéquation avec ceux de [112].



(a) $\epsilon = 0.5$ (b) $\epsilon = 0.1$

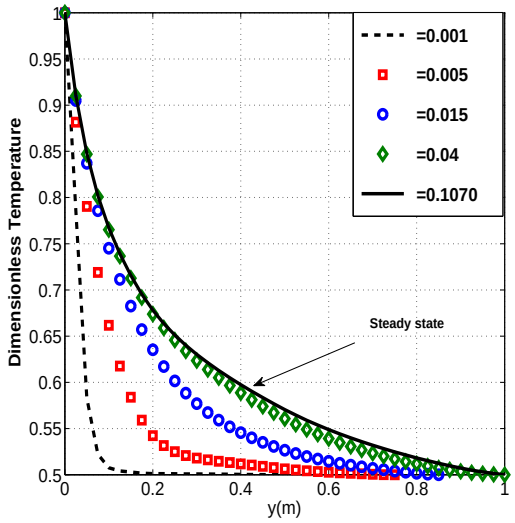
FIGURE 4.6 – Température adimensionnée le long de la ligne médiane (en $x = 0.5$) pour trois valeurs de coefficient d'émissitivité.

Surfaces opaques combinées à réflexion spéculaire et à réflexion diffuse

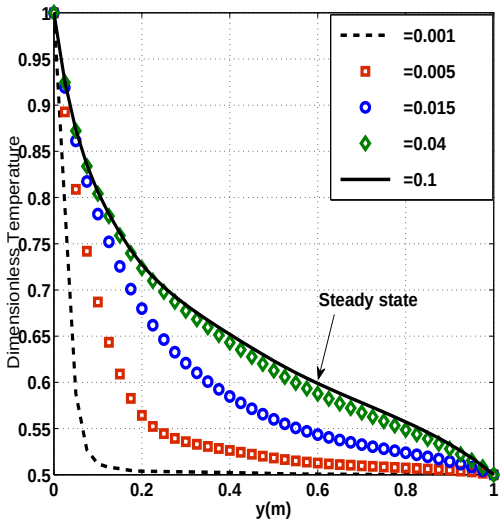
Cette fois-ci, la paroi chaude (sud) est supposée opaque à la réflexion spéculaire et les trois autres surfaces sont opaques à la réflexion diffuse. A notre connaissance, ce cas de test n'existe pas dans la littérature. Dans la figure 4.7 la température adimensionnée est présentée sur la position médiane pour trois valeurs d' émissivité ϵ $(0.3, 0.5$ et 0.9) pour un nombre de conductions-rayonnements N_s égal à 1. La diminution du coefficient d'émissivité a pour effet de retarder l'état d'équilibre. La convergence est obtenue à $\xi = 0.0865$ pour $\epsilon = 0.9$, $\xi = 0.1$ pour $\epsilon = 0.5$ et $\xi = 0.1070$ pour $\epsilon = 0.3$.

Stabilité numérique.

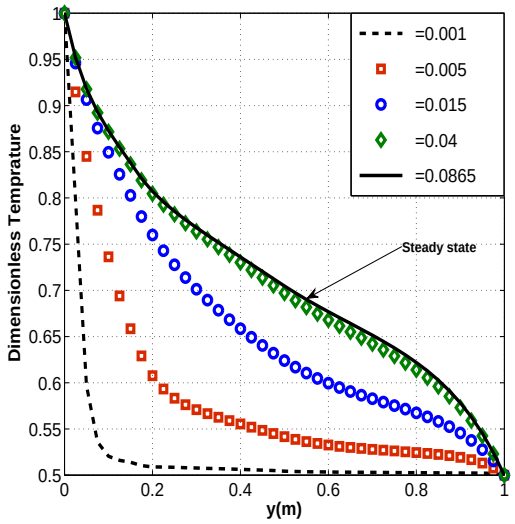
Dans ce paragraphe, nous présentons des résultats illustrant la stabilité numérique de notre code rayonnement-conduction. Dans le chapitre III, nous avons réussi à démontrer



(a) $\epsilon = 0.3$



(b) $\epsilon = 0.5$



(c) $\epsilon = 0.9$

FIGURE 4.7 – Température adimensionnée le long de la ligne médiane (en $x = 0.5$) pour trois valeurs de coefficient d'émissitivité.

la stabilité de notre schéma numérique spatio-temporel. Dans ce chapitre, nous essayons de prouver la stabilité numérique de notre code. Étant donné un temps final adimensionné $T_{final} = 3$, nous calculons l'erreur $\|T_h^{n+1} - T_h^n\|_{L^2(\Omega)}$ dans chaque itération pour trois pas de discrétisation $\Delta\xi$, $\frac{\Delta\xi}{2}$ et $\frac{\Delta\xi}{4}$. La figure (4.8) présente l'erreur $\|T_h^{n+1} - T_h^n\|_{L^2(\Omega)}$, ce qui confirme la stabilité numérique de notre algorithme.

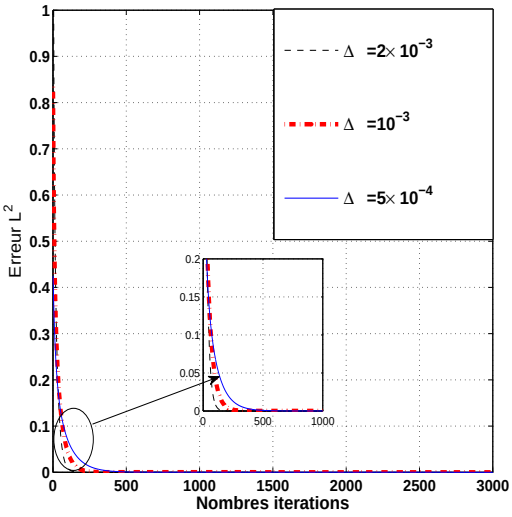


FIGURE 4.8 – La norme $\|T_h^{n+1} - T_h^n\|_{L^2(\Omega)}$ pour un temps final adimensionné $T_{final} = 3$.

4.3.2 Conditions aux bords thermiques de type Robin.

Dans cette section, nous avons examiné les conditions au bord de type Robin (1.34). Les parois du milieu ont été considérées comme des surfaces noires. À notre connaissance, c'est la première fois que ce cas de test a été simulé. La simulation a été effectuée sur le domaine suivant

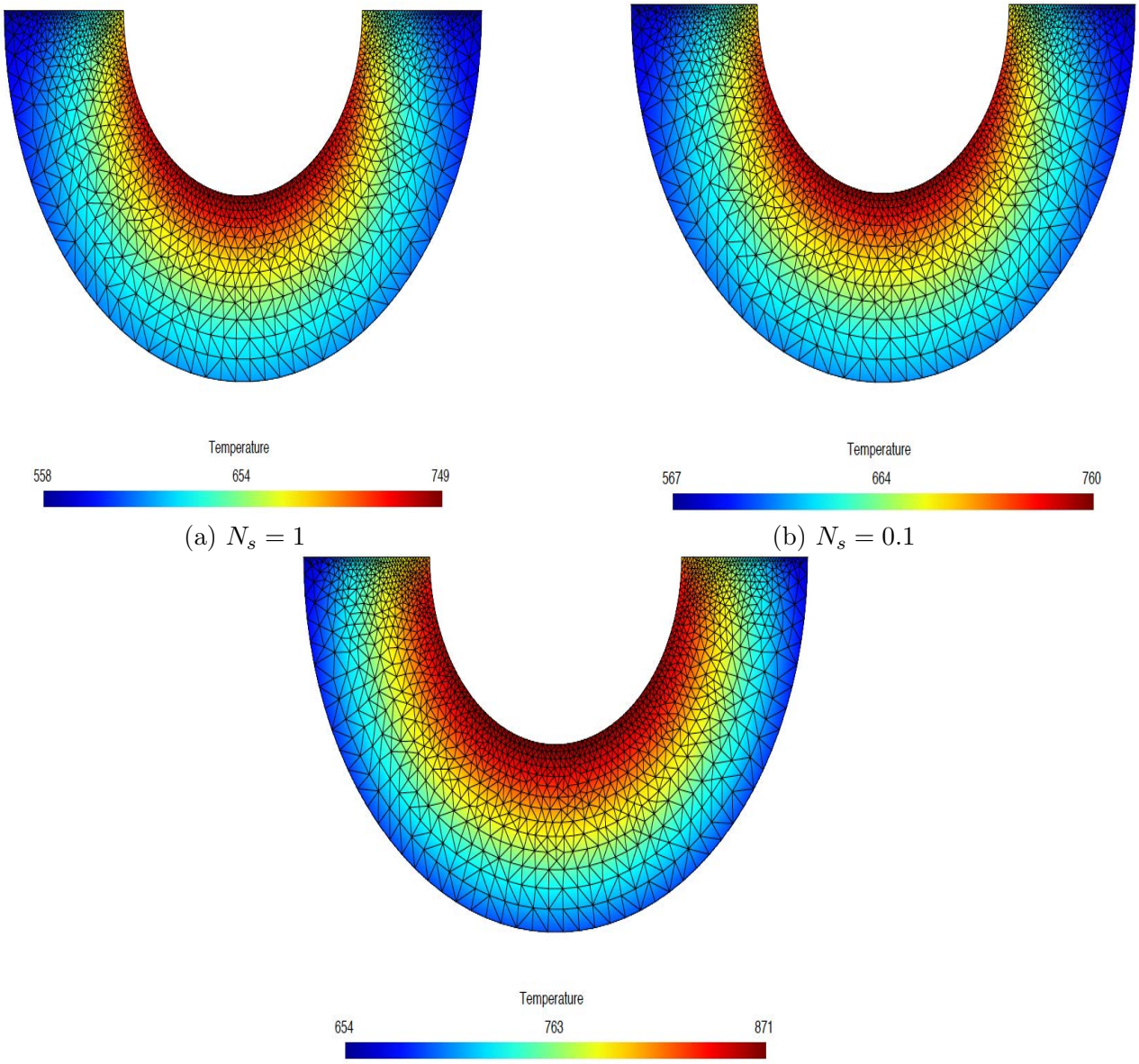
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 1 \leqslant |x| \leqslant 2 \text{ et } 1 \leqslant |y| \leqslant 2\}$$

en utilisant un maillage non structuré raffiné sur les régions de haute température composée par 1462 noeuds. La condition aux bord de type Robin est donnée par

$$\frac{\partial T}{\partial n} + T = f$$

avec$f$ est égale à 1000 sur $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1,\ y \leqslant 0\}$ et 500 sur le reste du bord.

La figure 4.9 montre le champ de la température adimensionnée lorsque le nombre de radiation-conduction N_s est égale à 1, 0.1 et 0.01. La diminution du nombre de radiations-conductions induit la réduction du temps de convergence vers l'état stationnaire. La convergence a été atteinte à un temps adimensionné $\xi = 1.9090$ pour $N_s = 1$, $\xi = 1.7225$ pour $N_s = 0,1$ et $\xi = 1.6955$ pour $N_s = 0.01$.



(a) $N_s = 1$ (b) $N_s = 0.1$

(c) $N_s = 0.01$

FIGURE 4.9 – La distribution de la température pour trois valeurs du nombre de rayonnements-conductions.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la présentation des différentes simulations numériques réalisées avec le code numérique de rayonnement et de conduction. Toutes les simulations ont été effectuées pour un milieu gris, semi-transparent et non diffusant. Nous avons donné une description de notre algorithme. Ensuite, nous avons présenté des résultats numériques assurant la validité du code. Puis, nous avons présenté des résultats numériques à propos du problème couplé rayonnement-conduction avec des conditions aux bords thermiques du type Dirichlet pour un milieu avec des surfaces noires, opaques à réflexion diffuse et des surfaces opaques à réflexion spéculaire. Nous avons étudié aussi la stabilité numérique de notre code rayonnement-conduction. Enfin, nous avons donné de résultats numériques sur les conditions aux bords thermiques du type Robin pour un milieu avec des surfaces noires.

Deuxième partie

Observation et Commande du système couplé rayonnement conduction.

Chapitre 5

Introduction à l'observation et à la commande des systèmes non linéaires.

Sommaire

5.1 Introduction 85

5.2 Généralités 86

5.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques 86

5.2.2 Stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov . . 87

5.3 Observateurs pour les systèmes non linéaires 87

5.3.1 Estimation de l'état des systèmes dynamiques 87

5.3.2 Observateurs pour une classe du système non linéaire de type Lipschitz 89

5.3.3 Observateurs pour les systèmes non linéaires de type "one sided Lipschitz" 90

5.3.4 Approche basée sur le théorème des accroissements finis . . 90

5.4 Stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires 94

5.5 Conclusion 95

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré d'une part à quelques rappels sur les concepts de stabilité selon Lyapunov, à l'observabilité et la formulation du principe d'estimation de l'état ; d'autre part, à la présentation des principales techniques d'estimation d'état pour les systèmes non linéaires. Enfin, une étude bibliographique sur la stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires sera présentée.

5.2 Généralités

5.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques

Nous commençons par un rappel sur l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques en particulier concernant le comportement des trajectoires de l'état au voisinage des points d'équilibre. La stabilité des systèmes dynamiques a été abordée dans de nombreuses références en particulier dans [78, 132]. Dans cette section, nous parlerons de la stabilité au sens de Lyapunov.

On considère la classe des systèmes non linéaires suivante :

$$\dot{x}(\xi) = \Psi(x(\xi), \xi), \quad x(\xi_0) = x_0 \tag{5.1}$$

où $x(\xi) \in \mathbf{R}^N$ et $\Psi : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}^N$ continue. Nous désignons par x_s le point d'équilibre de (5.1) tel que

$$\Psi(x_s, \xi) = 0, \forall \xi \geqslant \xi_0,$$

et par $x(\xi, \xi_0, x_0)$ la solution à l'instant $\xi \geqslant \xi_0$ du système (5.1) initialisée en x_0 et à l'instant ξ_0. Nous supposons que le système (5.1) possède un point d'équilibre $x_s = 0$ unique. Par la suite, nous donnerons différentes définitions de la stabilité du système (5.1) au voisinage de l'origine.

Définition 5.2.1. *Le point x_s est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour (5.1) si $\forall \epsilon > 0$, $\forall \xi_0 \geqslant 0$, il existe un $\delta(\epsilon, \xi_0) \geqslant 0$ tel que :*

$$\|\xi_0\| < \delta(\epsilon, \xi_0), \quad \Rightarrow \quad \|x(\xi, \xi_0, x_0)\| < \epsilon, \quad \xi \geqslant \xi_0.$$

Définition 5.2.2. *(***Stabilité uniforme***)* *Le point x_s est un point d'équilibre uniformément stable pour (5.1) si $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\delta(\epsilon) \geqslant 0$ tel que :*

$$\|\xi_0\| < \delta(\epsilon), \quad \Rightarrow \quad \|x(\xi, \xi_0, x_0)\| < \epsilon, \quad \xi \geqslant \xi_0.$$

Définition 5.2.3. (Attractivité) *L'origine est un point d'équilibre attractif pour (5.1) si $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\delta(\epsilon) \geqslant 0$ tel que :*

$$\|\xi_0\| < \delta(\xi_0), \quad \Rightarrow \quad \lim_{\xi \to \infty} x(\xi, \xi_0, x_0) = 0, \quad \xi \geqslant \xi_0.$$

Définition 5.2.4. *(***Stabilité asymptotique***)* *x_s est un point d'équilibre globalement asymptotiquement (resp. localement asymptotiquement) stable pour (5.1) s'il est globalement attractif et stable (resp. localement attractif et stable).*

Définition 5.2.5. *(***Stabilité exponentielle***)* *x_s est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (5.1) s'il existe α et β telles que :*

$$\|x(\xi, \xi_0, x_0\| < \alpha exp(-\beta(\xi - \xi_0)), \quad \xi \geqslant \xi_0, \forall x_0 \in B_r.$$

où B_r est un voisinage de x_s et si $B_r = \mathbf{R}^N$, on dit que le point x_s est globalement exponentiellement stable.

Pour démontrer la stabilité de (5.1) au voisinage d'un point d'équilibre x_s, il faut résoudre explicitement l'équation différentielle (5.1) qui reste souvent très difficile voire impossible dans la majorité des cas. La théorie de Lyapunov permet de contourner cet obstacle.

5.2.2 Stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov

L'utilisation de la méthode de Lyapunov permet d'analyser la stabilité d'un système dynamique à l'aide d'une fonction dite "fonction de Lyapunov".

Définition 5.2.6. *On considère la fonction* $V(x,\xi) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ *continue.* V *est dite propre définie positive si :*

(a) $\forall \xi \in \mathbf{R}_+, \quad \forall x \in \mathbf{R}^N, x \neq 0 \;\; V(x,\xi) > 0,$

(b) $\forall \xi \in \mathbf{R}_+, \quad V(x,\xi) = 0 \Rightarrow x = 0,$

(c) $\forall \xi \in \mathbf{R}_+, \quad \lim_{\|x\| \to \infty} V(x,\xi) = \infty.$

Définition 5.2.7. *(***Fonction de Lyapunov)** *Une fonction* $V(x,\xi)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *est une fonction de Lyapunov globale au sens large pour le système (5.1) si elle est propre définie positive et si pour tout* $x \in \mathbf{R}^N$ *:*

$$\dot{V}(x,\xi) = \frac{\partial V(x,\xi)}{\partial \xi} + (\frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x})\Psi(x(\xi),\xi) \leqslant 0. \tag{5.2}$$

Si $\dot{V}(x,\xi) < 0$*, alors* V *est appelée la fonction de Lyapunov au sens strict pour (5.1).*

Définition 5.2.8. *Si le système (5.1) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (resp. au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (resp. asymptotiquement stable). Le même résultat reste vrai globalement.*

Définition 5.2.9. *(***Stabilité exponentielle)**
Le point x_s *est globalement exponentiellement stable s'il existe des constantes* $\alpha, \beta, \gamma > 0, p \geqslant 0$ *et une fonction* $V(x,\xi) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telles que,* $\forall x \in \mathbf{R}^N$ *:*

(a) $\alpha\|x\|^p \leqslant V(x,\xi) \leqslant \beta\|x\|^p,$

(b) $\dot{V}(x,\xi) < -\gamma V(x,\xi)$

(c) Le même résultat reste valable localement exponentiellement stable, sur un voisinage V_0 *de* x_s

5.3 Observateurs pour les systèmes non linéaires

Dans cette section, nous introduisons le problème de l'observation de l'état des systèmes non linéaires. Puis, nous donnerons quelques définitions sur la notion d'observabilité et la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

5.3.1 Estimation de l'état des systèmes dynamiques

Un observateur est un système dynamique auxiliaire $(\mathcal{O})$ dont les entrées sont les entrées/ sorties mesurées d'un système $(\mathcal{S})$, et les sorties sont supposées donner une estimation de l'état, selon le schéma décrit par la figure 5.1. Le système dynamique $(\mathcal{S})$ est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \Psi(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases} \tag{5.3}$$

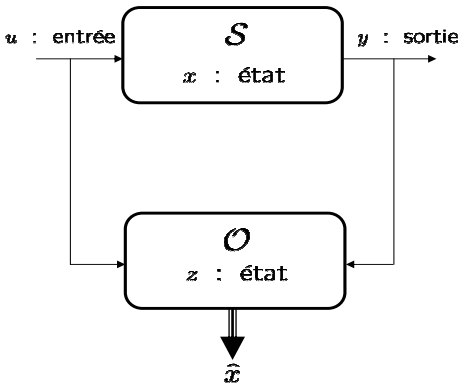


FIGURE 5.1 – Le principe d'observation.

Définition 5.3.1. *Nous supposons que le système* $(\mathcal{O})$ *est décrit par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{z} = \Phi(z, u, y) \\ \hat{x} = \psi(z, u, y) \end{cases} \tag{5.4}$$

$z \in \mathbf{R}^s$*, est un observateur asymptotique global pour le système* $(\mathcal{S})$ *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a)

$$x(0) = \hat{x}(0) \quad \Rightarrow \quad x(\xi) = \hat{x}(\xi) \quad \forall \xi \geqslant 0;$$

(b)

$$x(0) - \hat{x}(0) \in \mathbf{R}^N \quad \Rightarrow \quad \|x(\xi) - \hat{x}(\xi)\| \to 0 \text{ lorsque } \xi \to \infty;$$

Si $\|x(\xi) - \hat{x}(\xi)\|$ *tend exponentiellement vers zéro alors le système* $(\mathcal{O})$ *est dit observateur global de* $(\mathcal{S})$*. Lorsque nous avons un voisinage ouvert* V_1 *au lieu de* $\mathbf{R}^N$*, le système* $(\mathcal{O})$ *est dit observateur exponentiel local de* $(\mathcal{S})$*.*

Si notre état estimé $\hat{x}$ est égal à z, alors nous pouvons remplacer le système(5.4) par :

$$\dot{\hat{x}} = \Phi(\hat{x}, u, y) \tag{5.5}$$

Nous exprimons la condition (a) par

$$\hat{x} = x \quad \Rightarrow \quad \Phi(\hat{x}, u, y) = \Psi(\hat{x}, u). \tag{5.6}$$

nous réécrivons le système (5.5) sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = \Psi(\hat{x}, u) + \Lambda(\hat{x}, u, y) \tag{5.7}$$

avec

$$\hat{x} = x \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\hat{x}, u, y) = 0 \tag{5.8}$$

Afin de satisfaire (5.8) ; Λ est généralement choisie sous la forme suivante :

$$\Lambda(\hat{x}, u, y) = \mathbf{K}(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y}) \tag{5.9}$$

où $\hat{y} = h(\hat{x}, u)$. On exprime l'observateur par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \Psi(\hat{x}, u) + \mathbf{K}(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}, u). \end{cases} \tag{5.10}$$

La conception d'observateur pour un système dynamique consiste à estimer l'état en général à partir des informations sur l'entrée et la sortie. La définition de l'observabilité d'un système linéaire est la propriété qui permet de donner une information si l'état peut être déterminé uniquement à partir des signaux d'entrée et de sortie. Cependant dans le cas des systèmes non linéaires, l'observabilité dépend généralement des entrées et des conditions initiales.

Définition 5.3.2. (Indistinguabilité) *On considère $y_0^u(\xi), \quad \xi \geqslant 0$ et $y_1^u(\xi), \xi \geqslant 0$ deux signaux de sortie associés au signal d'entrée $u(\xi), \xi \geqslant 0$ du système (5.1) avec les conditions initiales x_0 et x_1, respectivement. Alors x_0 et x_1 sont indistinguables si*

$$y_0^u(\xi) = y_1^u(\xi) \quad \forall \xi \geqslant 0, \quad \textit{pour tout} \quad u. \tag{5.11}$$

Définition 5.3.3. .(Observabilité) *Le système (5.1) est observable en x_0 si x_0 est distinguable pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. En outre, le système (5.1) est observable si $\forall x \in \mathbf{R}^N$ nous avons x_0 distinguable.*

Dans le domaine non linéaire, il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indistinguabilité des états, une définition très fréquente a été établie dans [78]. Pour plus de détails sur les différents types de définitions sur l'observabilité des systèmes non linéaires, nous renvoyons le lecteur à [78, 132, 116, 26]..

Concernant les systèmes linéaires, on a les observateurs du type Luenberger pour les systèmes déterministes et le filtre de Kalman pour les systèmes linéaires stochastiques. Dans le cas des systèmes non linéaires, il n'y a pas de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs, cependant beaucoup de travaux ont été menés sur ce sujet, voir [146, 109], mais cela ne concerne que des classes restrictives d'une catégorie de systèmes non linéaires.

Dans la prochaine section, nous allons présenter quelques approches et algorithmes qui sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des approches spécifiques à une classe de systèmes non linéaires.

5.3.2 Observateurs pour une classe du système non linéaire de type Lipschitz

Dans ce paragraphe, un résumé des résultats existant dans la littérature sur la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires sera présenté. Les différentes études concernent en particulier la classe des systèmes non linéaires de type Lipschitz. tel que l'observateur à grand gain ; Ce type d'observateur est utilisé en général pour les systèmes de type Lipschitz. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système. Une méthode directe de conception d'observateur est d'utiliser un retour de sortie linéaire avec des applications intéressantes notamment aux systèmes biologiques [55, 27]. Cette approche est introduite initialement dans [139]. L'approche de Thau n'est pas une méthode de synthèse systématique. Raghavan a proposé une méthode constructive dans [125] où il a établi une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur. Cette distinction a été clarifiée après la nouvelle méthode proposée dans [126]. En effet, dans [126], Rajamani a établi un résultat qui corrige

le précédent. Ce résultat donne des conditions nécessaires et suffisantes pour montrer la convergence de l'observateur. On trouve aussi d'autres méthodes de synthèse d'observateurs appliquées pour une classe de systèmes non linéaires [61, 29, 28].

La conception des observateurs pour les systèmes non linéaires de type Lipschitz a été largement étudiée, voir par exemple les travaux Alessandri [4], Perla et Mukhopadhyay [118], Phanomchoeng et Rajamani[121], Rajamani [126], Zemouche et Boutayeb [152]. Cependant, la limitation de toutes ces approches réside dans le fait que les conditions de synthèse sont généralement irréalisables pour des systèmes avec de grandes constantes de Lipschitz. Différentes approches de synthèse sont proposées dans la littérature, voir par exemple les travaux de Ibrir [83], Phanomchoeng, Rajamani et Piyabongkarn [119] et Zemouche, Boutayeb et Bara [155].

5.3.3 Observateurs pour les systèmes non linéaires de type "one sided Lipschitz"

La condition de "one sided Lipschitz" a été introduite en [47] au lieu de la condition de Lipschitz. Les auteurs ont démontré que la condition de "one sided Lipschitz" est moins conservatrice que la condition de Lipschitz pour la synthèse d'observateurs [82]. Dans de nombreux problèmes, les constantes de "one sided Lipschitz" sont nettement plus petites que les constantes de Lipschitz classiques, voir [47]. Cela rend les constantes de "one sided Lipschitz" beaucoup plus adaptées pour estimer l'influence de la partie non linéaire [47]. Soit Ψ une fonction "one sided Lipschitz" selon la variable x, i.e

$$< \Psi(x,u) - \Psi(\hat{x},u), x - \hat{x} > \leqslant \rho \|x - \hat{x}\|^2 \quad \text{pour tout} \quad x, \hat{x} \in \mathbf{R}^N \tag{5.12}$$

avec ρ est la constante de "one sided Lipschitz" qui peut être positive ou bien négative, voir [47, 82].

Dans les récentes contributions [120, 155], les limites de cette approche ont été mises en évidence. En effet, les auteurs ont montré que la solution de l'équation de Riccati dépendait fortement de la constante de Lipschitz, plus celle-ci est grande, plus il est difficile de trouver une solution à l'équation de Riccati-like. Des travaux intéressants sur la conception d'observateurs de l'état pour ce type de systèmes ont été récemment mis au point, voir[82, 107, 149]. Cependant la condition de stabilité asymptotique conduit à un problème difficile qui est la résolution des inégalités matricielles bilinéaires. Récemment, Abbaszadeh et Marquez. [1] ont exploré la condition " one sided Lipschitz" pour déduire les conditions de stabilité sous la forme des LMIs. Ils montrent en particulier l'avantage de la condition " one sided Lipschitz" sur la condition de Lipschitz classique. Plus récemment, une extension de ces travaux dans le cas des systèmes non linéaires à temps discret [143] a été établie par Benallouch et al. [25]. Dans [156], les auteurs ont proposé un observateur d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires de type "one sided Lipschitz" avec des entrées inconnues.

5.3.4 Approche basée sur le théorème des accroissements finis

L'utilisation du théorème des accroissements finis consiste à écrire la dynamique de l'erreur sous la forme d'un système linéaire à paramètres variants (LPV) afin de déduire des conditions de stabilité moins restrictives, sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI),[30]. Il convient de mentionner que cette nouvelle formulation tient compte de la

non-linéarité du système. Dans ce qui suit, nous allons décrire de façon synthétique le principe de cette approche, car nous l'avons adapté au problème de l'estimation d'ordre réduit pour les systèmes de grandes dimensions.
Nous commençons par introduire un théorème qui découle du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis.

Théorème 5.3.4. *On considère* $\Psi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$. *Soit* $a, b \in \mathbf{R}^N$. *On suppose que* Ψ *est différentielle sur* $Co(a,b)$. *Alors, il existe une constante* $z \in Co(a,b), z \neq a, z \neq b$ *tel que :*

$$\Psi(a) - \Psi(b) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(z)(a-b) \tag{5.13}$$

Nous donnerons la version vectorielle du théorème 5.3.4, pour cela, on note par

$$e_N(i) = (\underbrace{0, ..., 0, \overbrace{1}^{\text{ième}}, 0, ..., 0}_{\text{s composantes}})^T, i \in \{1, ..., N\}$$

un vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^N$. On considère la fonction vectorielle

$$\Psi \ : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^q,$$

possède la forme suivante

$$\Psi(x) = [\Psi_1(x), ..., \Psi_q(x)]^T$$

où $\Psi_i \ : \ \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ représente la i^{me} composante de Ψ, pour tout $N, q \geq 1$. On peut écrire la fonction Ψ sous la forme suivante

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{q} e_q(i)\Psi_i(x).$$

En appliquant le théorème 5.3.4 sur toutes les fonctions Ψ_i et en utilisant

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}(.) = \sum_{j=1}^{N} e_N^T(j)\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(.)$$

Alors nous obtenons le théorème suivant, la version vectorielle du théorème 5.3.4 :

Théorème 5.3.5. *Soit* $\Psi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^q$. *Soit* $a, b \in \mathbf{R}^N$. *On suppose que* Ψ *est différentielle sur* $Co(a,b)$. *Alors il existe des constantes* $z_1, ..., z_q \in Co(a,b), z_i \neq a, z_i \neq b$ *pour tout* $i = \{1, ..., q\}$ *tel que :*

$$\Psi(a) - \Psi(b) = \left(\sum_{i,j=1}^{q,N} e_q(i) e_N^T(j) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(z_i) \right) (a-b) \tag{5.14}$$

Considérons le système non linéaire décrit par la forme suivante :

$$\dot{x}(\xi) = \mathbf{A}x(\xi) + \Psi(x(\xi), y(\xi), u(\xi)) \tag{5.15a}$$
$$y(\xi) = \mathbf{C}x(\xi) \tag{5.15b}$$

où $u \in \mathbf{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $x \in \mathbf{R}^N$ représente le vecteur d'état du système et $y \in \mathbf{R}^p$ le vecteur de sortie. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont des matrices constantes. La fonction $\Psi : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q$ est différentiable par rapport à x. Supposons de plus que la fonction Ψ vérifie :

$$\underline{\gamma}_{ij} \leq \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(x, y, u) \leq \overline{\gamma}_{ij}, \quad \forall\, x, y, u \tag{5.16}$$

pour tout $i \in \{1, ..., q\}$ et $j \in \{1, ..., N\}$, avec $\underline{\gamma}_{ij}$ et $\overline{\gamma}_{ij}$ des constantes réelles.

L'observateur d'état de type Luenberger associé est de la forme

$$\dot{\hat{x}}(\xi) = \mathbf{A}\hat{x}(\xi) + \Psi(\hat{x}(\xi), y(\xi), u(\xi)) + \mathbf{K}(y(\xi) - \mathbf{C}\hat{x}(\xi)) \tag{5.17}$$

avec $\hat{x}$ est l'état estimé de x.
L'objectif principal est de déterminer la matrice $\mathbf{K}$ telle que l'erreur d'estimation

$$E_r(\xi) = x(\xi) - \hat{x}(\xi) \tag{5.18}$$

converge vers zéro. Alors, la dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\dot{E}_r(\xi) = \Big(\mathbf{A} - \mathbf{KC}\Big) E_r(\xi) + \Delta\Psi(\xi) \tag{5.19}$$

avec

$$\Delta\Psi(\xi) = \Psi(x(\xi), y(\xi), u(\xi)) - \Psi(\hat{x}(\xi), y(\xi), u(\xi)). \tag{5.20}$$

Nous appliquons le théorème 5.3.5 sur la fonction Ψ, alors il existe $z_i(\xi) \in Co(x(\xi), \hat{x}(\xi))$ pour tout $i \in \{1, ..., q\}$ tel que :

$$\Delta\Psi(\xi) = \left(\sum_{i,j=1}^{q,N} e_q(i) e_N^T(j) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(z_i(\xi), y(\xi), u(\xi)) \right) E_r(\xi).$$

Pour des raisons de simplification, nous introduisons les notations suivantes :

$$\gamma_{ij}(\xi) = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(z_i(\xi), y(\xi), u(\xi)) \tag{5.21a}$$

$$H_{ij}^q = e_q(i) e_N^T(j) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq q \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq N \tag{5.21b}$$

$$\gamma = \Big(\gamma_{11}, ..., \gamma_{1N}, ..., \gamma_{qN}\Big) \tag{5.21c}$$

$$\mathbf{D}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{q,N} \gamma_{ij}(\xi) H_{ij}^q \tag{5.21d}$$

En utilisant les notations (5.21), la dynamique de l'erreur d'estimation peut être réécrite comme suit :

$$\dot{E}_r(\xi) = \Big(\mathbf{A} + \mathbf{D}(\xi) - \mathbf{KC}\Big) E_r(\xi). \tag{5.22}$$

alors l'équation (5.22) représente un système LPV. L'hypothèse (5.3.4) implique que $\gamma(\xi)$ appartient à un domaine borné $\mathcal{V}_{q,N}$ où les 2^{qN} éléments viennent dans l'ensemble suivant

$$\mathcal{V}_{q,N} = \Big\{ \gamma = (\gamma_{11}, ..., \gamma_{1N}, ..., \gamma_{qN}) \mid \gamma_{ij} \in \{\underline{\gamma}_{ij}, \overline{\gamma}_{ij}\} \Big\} \tag{5.23}$$

En se basant sur les techniques LPV, on obtient des conditions suffisantes de convergence de l'observateur proposé.

Ces conditions sont exprimées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMIs),[150, 155]. Le fait que les paramètres $\gamma_{ij}(\xi)$ soient inconnus à cause des $z_i(\xi)$ implique que l'observateur proposé est à gain constant.

Dans ce mémoire, nous utilisons un observateur avec un gain constant pour les systèmes LPV. Une étude plus large de ce type d'observateurs est détaillée dans la thèse de A. Zemouche [150]. Plusieurs extensions de la DMVT ont été développées. Par exemple, dans [138] les auteurs ont étendu l'approche présentée dans [155] pour le cas discret, voir aussi [154] où A. Zemouche et M. Boutayab ont montré que la condition de Lipschitz proposée dans Phanomchoeng et Rajamani [121] est incomplète et que l'introduction de la matrice de distribution de la non-linéarité dans le système joue un rôle important dans la faisabilité des LMIs.

Extension au filtrage de type $\mathcal{H}_\infty$.

Une extension des résultats présentés précédemment au cas des systèmes comportant des bruits dans la dynamique et la sortie du système sera illustrée dans cette section. Nous considérons le système suivant :

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \Psi(x, y, u) + \mathcal{W}_1 w \tag{5.24a}$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathcal{W}_2 w \tag{5.24b}$$

avec $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ comme matrices constantes de dimensions appropriées et $w \in L^2(\mathbf{R}^s)$ le vecteur des perturbations borné. Notre objectif est de reconstruire l'état du système (5.24) en gardant une certaine précision malgré la présence du bruit w. Nous cherchons à déterminer une précision optimale qui dépend en général des paramètres du système. Nous proposons l'observateur suivant :

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \Psi(\hat{x}, y, u) + \mathbf{K}(y - \mathbf{C}\hat{x}). \tag{5.25}$$

Étant donné le système (5.24) et l'observateur (5.25), le problème de conception d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ robuste revient à déterminer la matrice K telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\lim_{\xi \to \infty} E_r(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \omega(\xi) = 0 \tag{5.26}$$

$$\|E_r(\xi)\|_{L_2} \leq \mu \|\omega(\xi)\|_{L_2} \quad \text{pour} \quad \omega(\xi) \neq 0 \quad \text{et} \quad E_r(0) = 0. \tag{5.27}$$

où $E_r = x - \hat{x}$ représente l'erreur d'estimation et μ un scalaire positif à déterminer.
Afin de satisfaire aux conditions (5.26) et (5.27), cette fois en utilisant la théorie de Lyapunov, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov V telle que

$$\dot{V} + E_r^T E_r - \mu^2 \omega^T \omega < 0. \tag{5.28}$$

La dynamique de l'erreur se réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{E}_r = \Big(\mathbf{A} + \mathbf{D}(\xi) - \mathbf{KC}\Big) E_r + \Big(\mathcal{W}_1 - \mathbf{C}\mathcal{W}_2\Big)\omega. \tag{5.29}$$

où $\mathbf{D}$ a été définie dans (5.21). Une analyse de la stabilité a été établie, voir [150, 155]

5.4 Stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires

Durant les quatre dernières décennies, la commande des systèmes non linéaires a connu un essor considérable afin de pallier les limitations des approches linéaires. Cependant, dans la majorité des systèmes physiques, seule une partie de l'état est accessible. Il est donc nécessaire d'inclure un observateur d'état afin de réaliser la boucle de commande de façon à ce que le système soit stable. Les principales techniques de stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires sont : la stabilisation basée observateur par modes glissants [3], la stabilisation basée observateur par "backstepping" [95] , la stabilisation basée observateur grand gain [91] et la stabilisation basée observateur par la formulation LPV et la DMVT.

(a) La **stabilisation basée observateur par modes glissants** est une forme de commande à structure variable qui a été appliquée avec succès à de nombreux systèmes, notamment pour la stabilisation des drones, [48] ou bien en robotique [86, 144, 54]. Cette technique consiste à contraindre l'état d'un système non linéaire à atteindre en un temps une surface donnée et à y demeurer [35, 85]. Cette surface représente une relation entre les variables d'état décrivant la dynamique du système sous la forme d'une équation différentielle. Le système soumis à cette commande ne dépend que des propriétés de la surface choisie.

(b) La **stabilisation basée observateur par backstepping** a été développée par krctic et al [95, chapitre 7], elle est basée sur la théorie de la stabilité de Lyapunov. La technique de backstepping surmonte la difficulté de choix de la fonction de Lyapunov en construisant une fonction de Lyapunov adaptée au système étudié d'une manière itérative. Il existe plusieurs applications de cette technique pour plusieurs systèmes physiques, voir par exemple, [74, 98].

(c) La **stabilisation basée observateur grand gain** a commencé à apparaître vers la fin des années 1980 avec les travaux de Saberi [90, 129], Tornambe [142], et Khalil [52]. Ensuite, on trouve le travail de Esfandiari et Khalil [51] où les auteurs ont montré que le manque de conditions de croissance de l'observateur grand gain pourraient déstabiliser le système en boucle fermée lorsque le gain d'observateur est suffisamment grand. Ils ont proposé une solution simple pour ce type de problème. Ils suggèrent que la commande doit être construite comme une fonction globalement bornée de l'estimation d'état afin qu'elle soit saturée pendant la période de pic. Car l'observateur est plus rapide que la dynamique en boucle fermée par un retour d'état. Teel et Praly [135, 136], s'inspirant des idées de Esfandiari et Khalil [51] et du travail de Tornambe [141], ont prouvé le premier principe de séparation non linéaire et ils ont développé un ensemble d'outils pour la stabilisation semi-globale des systèmes non linéaires. Ensuite, Atassi et Khalil [18] ont prouvé le principe de séparation en ajoutant une nouvelle dimension aux résultats de Teel et Praly [135] ; à savoir : la combinaison d'observateur rapide avec la saturation de commande permet à la commande par un retour d'état de récupérer les trajectoires de la commande par un retour d'état quand le gain d'observateur est suffisamment grand.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la stabilisation basée observateur en utilisant la formulation LPV et la DMVT. En effet, l'introduction d'un observateur dans la structure de la commande en boucle fermée peut montrer différentes sources de conserva-

tisme comme la non-convexité de la formulation de l'inégalité matricielle bilinéaire (BMI). Cette non-convexité est généralement due au couplage entre les matrices de l'observateur et la loi de commande, et les matrices de Lyapunov. Les solutions disponibles pour résoudre ce problème impliquent généralement des conditions d'inégalités matricielles linéaires(LMI) itératives [147, 104, 77, 84]. Une solution différente a été récemment présentée dans [72], qui consistait à utiliser l'inégalité de Young d'une manière plus appropriée ; les matrices de gains ont été calculées simultanément en résolvant une seule inégalité matricielle linéaire. Un autre résultat intéressant a été présenté dans [106] pour les systèmes non linéaires incertains. Plus récemment, une généralisation de ce travail, pour les systèmes non linéaires discrets avec une non-linéarité de type "one sided Lipschitz" à entrées inconnues a été proposée par Benallouch et al. [24].

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par un rappel sur les concepts de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques. Ensuite, quelques définitions sur le principe d'estimation d'état et l'observabilité pour les systèmes non linéaires ont été présentées, puis nous avons donné quelques méthodes de synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires. Nous avons présenté l'utilisation de la DMVT dans la synthèse d'observateur. Enfin, une étude bibliographique sur la stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires a été présentée.

Chapitre 6

Observation et Commande du système combiné rayonnement-conduction

Une partie des résultats de ce chapitre a été publiée dans [66, 68, 69, 70] et l'autre partie a été soumise [65, 63, 67].

Sommaire

6.1 Résumé 97
6.2 Introduction 98
6.3 Réduction du système radiation-conduction 99
6.3.1 La bornitude de la trajectoire 100
6.3.2 La Formulation LPV du système radiation-conduction . . . 104
6.4 Synthèse d'observateur d'état 106
6.4.1 Observateur basé sur le théorème des accroissements finis. . 106
6.4.2 Extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ 109
6.4.3 Illustrations numériques 112
6.5 Commande basée observateur 113
6.5.1 Commande basée observateur d'ordre plein 116
6.5.2 Commande basée observateur d'ordre réduit 117
6.5.3 Extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ 119
6.5.4 Exemple numérique 122
6.6 Conclusion 125

6.1 Résumé

Ce chapitre traite de la synthèse d'observateur d'état et du problème de commande pour une classe des équations aux dérivées partielles (EDPs) non linéaires couplées décrivant le transfert de chaleur rayonnement-conduction en 2D. Une approximation stable de type Galerkin [partie I : Chapitres 2 et 3] a été employée pour obtenir un système de dimension finie.

Grâce à la structure particulière du système obtenu et au théorème des accroissements finis (DMVT), nous montrons qu'il existe un gain d'observation assurant la stabilité asymptotique. Le deuxième résultat consiste à proposer un estimateur d'état d'ordre réduit qui

garantit la stabilité asymptotique. D'autre part, afin d'éviter les exigences de calcul des systèmes de grandes dimensions, nous avons réussi à construire des matrices de gain d'observation pour que la condition de stabilité, écrite sous la forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI), soit satisfaite.

Une nouvelle condition pour la commande basée observateur a été établie où les gains de la commande et de l'observation sont calculés simultanément en résolvant une seule LMI. La stabilité globale de la commande basée observateur est assurée. Une analyse de performance $\mathcal{H}_\infty$ est également établie. Enfin, des exemples numériques sont proposés afin de valider nos approches.

6.2 Introduction

La majorité des phénomènes physiques sont décrits par des EDPs non linéaires. C'est le cas, par exemple, des systèmes de transfert thermique, des réacteurs nucléaires ou des systèmes biologiques. Cependant, il est intéressant de noter que la conception de lois de commande et d'estimation de l'état pour cette classe de systèmes est connue comme étant une tâche difficile et reste un problème ouvert à résoudre [100, 96]. En effet, très peu de résultats sont disponibles pour les systèmes d'EDPs non linéaires, et la plupart des résultats existants concernent les systèmes gouvernés par des EDPs linéaires.

Dans ce travail, nous considérons le problème d'estimation d'état et de commande des EDPs non linéaires couplées décrivant les phénomènes de rayonnement-conduction en deux dimensions [113]. Ce sujet est motivé par le fait que l'estimation d'état est indispensable pour la commande et le diagnostic. Tout d'abord, nous introduisons une technique stable d'approximation du système initial en dimension infinie, la méthode de Galerkin, pour obtenir une représentation d'état convenable non linéaire en dimension finie [56, 22, 73] qui sera ensuite utilisée pour la synthèse d'observateur et de loi de commande en appliquant des techniques non linéaires utilisées pour les équations différentielles ordinaires (EDOs).

La plupart des résultats existants sur la théorie du contrôle des systèmes présentés par des EDPs paraboliques en dimension finie consistent tout d'abord en l'application des techniques d'approximation spatiales (principalement la méthode de Galerkin) pour se ramener à un système des EDOs qui décrit la dynamique dominante du système des EDPs. Cette approche est motivée par le fait que le spectre des valeurs propres de l'opérateur parabolique "Laplacien" peut être partitionné en deux parties. Une partie qui est lente, de dimension finie et un complément rapide stable de dimension infinie. Ces systèmes des EDOs sont par la suite utilisés dans la synthèse des estimateurs d'état en dimension finie. Dans [21, 45, 22] les auteurs ont étudié le problème de commande en dimension finie de systèmes des EDPs paraboliques linéaires. Dans [127], Ray a aussi discuté la méthode de linéarisation pour le contrôle d'une classe de systèmes des EDPs paraboliques non linéaires. Récemment, Christofides et al. [38, 49] ont employé la théorie du contrôle géométrique pour fournir un cadre général sur la synthèse d'estimateur d'état d'ordre réduit pour des systèmes des EDPs paraboliques non linéaires.

Le calcul de l'action de la commande ainsi que l'observateur d'état deviennent plus expansifs avec l'augmentation de la dimension de l'espace. En outre, de nombreux problèmes de commande peuvent être formulés en termes de LMIs et donc résolus par des approches de programmation convexe [30].

L'idée de base est d'utiliser le théorème des accroissements finis (DMVT) pouvant écrire la dynamique de l'erreur d'estimation comme une classe de systèmes à paramètres invariants

"*Linear parameter-varying (LPV)*". En effet, la technique LPV a été développée pour contrôler les systèmes non linéaires multi-entrées multi-sorties (MIMO) en établissant des LMIs. De nombreux systèmes non linéaires dans la pratique peuvent être approximés par des systèmes LPV. Cependant, l'application de cette technique n'a pas encore été largement explorée dans le contrôle des EDPs. Hashemi et Werner [76] ont proposé l'approche LPV avec un observateur non linéaire pour contrôler l'équation de Burgers unidimensionnels.

Dans ce chapitre, nous utilisons un nombre fini de capteurs de température sur la surface supérieure du domaine et nous montrons l'existence d'un observateur d'état d'ordre plein et d'ordre réduit afin d'estimer le vecteur d'état qui représente la température dans tout le domaine. En effet, grâce à la théorie de la stabilité de Lyapunov et DMVT [153, 154, 72] nous montrons que les conditions suffisantes exprimées en termes de LMIs pour la convergence asymptotique du problème convexe. Nous introduisons l'approche " *ordre réduit*" qui veut dire que la dimension du gain de l'estimateur est égale à la dimension du premier bloc de la matrice de gain dans le cas d'ordre plein, mais en même temps, la convergence globale est garantie. Cela représente l'une des principales contributions de ce travail. Ceci a l'avantage de réduire de façon importante le temps de calcul, en particulier pour des applications en temps réel. Par dualité, nous montrons que les mêmes résultats restent vrais dans le cas de la commande basée observateur. En outre, la présence de bruit et/ou d'erreurs d'approximation mène à l'extension de l'estimation $\mathcal{H}_\infty$ dont nous établissons des conditions suffisantes de stabilité sous la forme des LMI's.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3, une formulation LPV du problème couplé sera présentée. Une application du DMVT pour la synthèse d'observateur du modèle approché en utilisant une approche d'ordre plein et réduit est détaillée dans la section 4. La section 5 présente le problème de la commande basée observateur d'ordre plein et réduit avec une extension au cas $\mathcal{H}_\infty$.

6.3 Réduction du système radiation-conduction

Dans ce chapitre nous considérons le système d'équations différentielles non linéaire obtenu dans la première partie de la thèse par semi-discrétisation du (2.1)-(2.2)-Partie I par la méthode de Galerkin, voir (3.129).

$$\begin{cases} \mathbb{M}_h \dot{\widetilde{T}}_h = \mathbb{A}_h \widetilde{T}_h + \mathbb{M}_h \Psi_h(\widetilde{T}_h) \\ Y_h = \mathbb{C}_h \widetilde{T}_h, \end{cases} \tag{6.1}$$

où le terme Ψ_h non linéaire est donné par

$$\Psi_h(\widetilde{T}_h) = -4\pi\theta \widetilde{T}_h^4 + \theta \mathbb{M}_h^{-1} \widetilde{G}_h. \tag{6.2}$$

avec

$$\widetilde{G}_h = \sum_{l=1}^{N_\beta} \widetilde{I}_h^l w_l \tag{6.3}$$

où $\mathbb{M}_h \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ et $\mathbb{A}_h \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ sont les matrices des éléments finis ; la matrice de rigidité et la matrice de masse respectivement. $\mathbb{M}_h$ est une matrice symétrique définie positive et

$\mathbb{A}_h$ est une matrice symétrique définie négative. $\mathbb{A}_h, \mathbb{M}_h$ possèdent la forme suivante :

$$\mathbb{A}_h = \begin{bmatrix} A_h^1 & A_h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_h^T & A_h^1 & A_h & \ddots & & \vdots \\ 0 & A_h^T & A_h^1 & A_h & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & A_h^T & A_h^1 & A_h \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_h^T & A_h^1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_h = \begin{bmatrix} M_h^1 & M_h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ M_h^T & M_h^1 & M_h & \ddots & & \vdots \\ 0 & M_h^T & M_h^1 & M_h & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & M_h^T & M_h^1 & M_h \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M_h^T & M_h^1 \end{bmatrix},$$

où θ est la constante d'adimentionnement, $M_h^1, A_h^1, M_h, A_h \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $N = n \times n_1$ où n_1 rprésente le nombre des blocs matrices. $\widetilde{T}_h \in \mathbf{R}^N$ est le vecteur d'état du système, $Y_h \in \mathbf{R}^p$ le vecteur de mesures représentant le nombre de capteurs placés sur une partie de la surface $\partial\Omega$. $\mathbb{C}_h \in \mathcal{M}_{p,N}(\mathbf{R})$ est la matrice de sortie, matrice de sélection composée par des 1 et 0, elle possède la forme suivante

$$\mathbb{C}_h = \begin{bmatrix} C_h^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

avec $C_h^1 \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. En effet, pour déterminer la température du système décrivant le transfert de chaleur combinée conduction-rayonnement, il est assez coûteux d'effectuer une observation directe. Il est donc nécessaire d'estimer la température du système en utilisant un système auxiliaire : c'est le rôle de l'observateur. Notre objectif est de construire la température à l'aide des capteurs placés sur la surface, voir figure 6.1.
Considérons l'estimateur d'état suivant :

$$\mathbb{M}_h \dot{\hat{\widetilde{T}}}_h = \mathbb{A}_h \hat{\widetilde{T}}_h + \mathbb{M}_h \Psi_h(\hat{\widetilde{T}}_h) + \mathbb{L}(Y_h - \mathbb{C}_h \hat{\widetilde{T}}_h), \tag{6.5}$$

où $\hat{\widetilde{T}}_h$ représente l'estimé de $\widetilde{T}_h$ et $\mathbb{L}$ doit être construite de telle sorte que l'erreur d'estimation $E_r = \widetilde{T}_h - \hat{\widetilde{T}}_h$ converge asymptotiquement vers zéro pour toutes conditions initiales $\hat{\widetilde{T}}_{0h}$ et $\widetilde{T}_{0h}$. La dynamique de l'erreur d'estimation peut être décrite par

$$\mathbb{M}_h \dot{E}_r = \mathbb{A}_h E_r + \mathbb{M}_h[\Psi_h(\widetilde{T}_h) - \Psi_h(\hat{\widetilde{T}}_h)] - \mathbb{L}\mathbb{C}_h E_r. \tag{6.6}$$

Dans le prochain paragraphe, nous montrons la bornitude de l'estimé, ce qui nous permet de garantir la stabilité de l'estimateur d'état proposé.

6.3.1 La bornitude de la trajectoire

On suppose que $\mathbf{R}^N$ est muni des normes suivantes :

$$\|\widetilde{T}_h\|^2_{\mathbb{M}_h} := \widetilde{T}_h^T \mathbb{M}_h \widetilde{T}_h \quad \text{et} \quad \|\widetilde{T}_h\|_2^2 := \widetilde{T}_h^T \widetilde{T}_h. \tag{6.7}$$

Ci-dessous, nous allons montrer quelques résultats préliminaires

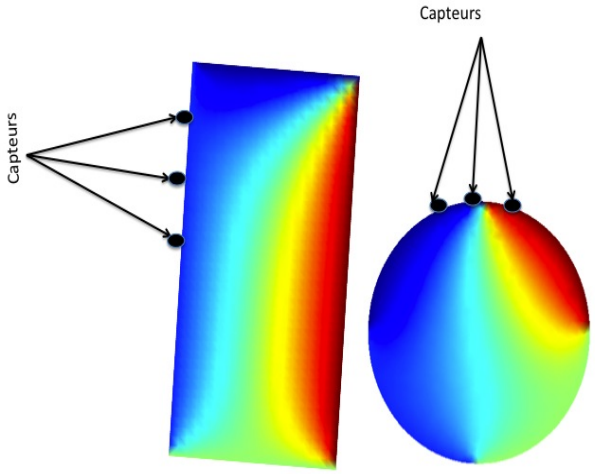


FIGURE 6.1 – Position des capteurs pour la construction du vecteur de l'état du système rayonnement-conduction pour différentes formes géométriques en 2D.

Lemme 6.3.1. *[36] Soient $\tau > 0$, $\mu > 0$ et $H(\xi) \geqslant 0$, $\forall \xi \in \mathbf{R}_+$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+)$, fonction continue, telle que*

$$f^{'}(\xi) + \mu f(\xi) \leqslant H(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}_+ \tag{6.8}$$

alors on a

$$f(\xi) \leqslant e^{-\mu\xi} f(0) + \frac{H(\xi)}{\mu}, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}_+. \tag{6.9}$$

Lemme 6.3.2. *[148] Soient Φ et Ψ deux matrices quelconques , Σ une matrice définie positive de dimension appropriée, alors on a*

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \Psi\Phi^T + \Psi^T\Phi \leqslant \epsilon\Psi\Sigma\Psi^T + \frac{1}{\epsilon}\Phi\Sigma^{-1}\Phi^T \tag{6.10}$$

Théorème 6.3.3. *Supposons que $T_{h,0} \geqslant 0$, $\widetilde{G}_h \in L^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^N)$ est donné par (6.3). Alors, l'équation (6.1) possède une solution positive et il existe $C > 0$ telle que*

$$\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant e^{-\lambda_h^1 \lambda_m \xi} \|\widetilde{T}_{0h}\|_2^2 + 4\theta \frac{C}{\lambda_m^2 {\lambda_h^1}^2} \|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}_+. \tag{6.11}$$

où $\lambda_{\mathbf{h}}^{\mathbf{1}} > 0$ et $\lambda_{\mathbf{m}} > 0$ représentent respectivement la plus petite valeur propre de la matrice $-\mathbb{A}_h$ et la plus grande valeur propre de la matrice $\mathbb{M}_h^{-1}$.

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbf{R}_+$, on introduit la notation suivante

$$T_\star = \begin{cases} \widetilde{T}_h & \text{si } \widetilde{T}_h \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.12}$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\|T_\star(\xi)\|^2_{\mathbb{M}_h} &= {T_\star}^T(\xi)\mathbb{M}_h\dot{T}_\star(\xi) + {\dot{T}_\star}^T(\xi)\mathbb{M}_h T_\star(\xi)\\ &\leqslant T_\star^T(\xi)\mathbb{A}_h T_\star(\xi) + \theta T_\star^T(\xi)\widetilde{G}_h(\xi)\\ &+ T_\star^T(\xi)\mathbb{A}_h^T T_\star(\xi) + \theta\widetilde{G}_h^T(\xi)T_\star(\xi).\end{aligned}$$

$\mathbb{A}_h$ est une matrice définie négative et on a $\widetilde{G}_h \geqslant 0$, Part I chapitre 3, alors on a

$$\frac{d}{d\xi}\|T_\star(\xi)\|^2_{\mathbb{M}_h} \leqslant 0. \tag{6.13}$$

Donc

$$\|T_\star(\xi)\|_{\mathbb{M}_h} \leqslant \|T_\star(0)\|_{\mathbb{M}_h} = 0. \tag{6.14}$$

D'où la positivité de $\widetilde{T}_h$.
On a

$$\frac{d}{d\xi}\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant \dot{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\widetilde{T}_h(\xi) + \widetilde{T}_h^T(\xi)\dot{\widetilde{T}}_h^T(\xi)$$

En utilisant la positivité de $\widetilde{T}_h$, on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant &- 2\lambda_h^1\lambda_m\widetilde{T}_h^T(\xi)\widetilde{T}_h(\xi) + \frac{2}{\epsilon_1}\widetilde{T}_h^T(\xi)\widetilde{T}_h(\xi)\\ &+ 2\epsilon_1\theta\widetilde{G}_h^T(\xi)\mathbb{M}_h^{-T}\mathbb{M}_h^{-1}\widetilde{G}_h(\xi)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant &- 2\lambda_h^1\lambda_m\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 + \frac{2}{\epsilon_1}\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2\\ &+ 2\epsilon_1 C_1\theta\|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2.\end{aligned} \tag{6.15}$$

avec $C_1 = \|\mathbb{M}_h^{-T}\mathbb{M}_h^{-1}\|_\infty$.
On prend $\epsilon_1 = \dfrac{2}{\lambda_h^1\lambda_m}$,alors on a

$$\frac{d}{d\xi}\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant -\lambda_h^1\lambda_m\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 + 4\theta\frac{C_1}{\lambda_m\lambda_h^1}\|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2. \tag{6.16}$$

En utilisant le lemme 6.3.1, on déduit que

$$\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant e^{-\lambda_h^1\lambda_m\xi}\|\widetilde{T}_{0h}\|_2^2 + 4\theta\frac{C_1}{\lambda_m^2{\lambda_h^1}^2}\|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2, \tag{6.17}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}_+$. □

Théorème 6.3.4. *Supposons que $\widetilde{T}_{h,0} \geqslant \hat{\widetilde{T}}_{h,0} \geqslant 0$, $\widetilde{G}_h \in L^\infty(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}^N)$ est donnée par (6.3). S'il existe $\epsilon > 0$ telle que la matrice gain $\mathbb{L}$ satisfait*

$$\forall\ \lambda \in S_p(\mathbb{L}\mathbb{C}_h) \qquad \lambda \leqslant \lambda_\epsilon \tag{6.18}$$

avec $\lambda_\epsilon = \lambda_m\lambda_h^1 - \lambda_m\epsilon$. Alors l'estimé $\hat{\widetilde{T}}_h$ vérifie

$$\hat{\widetilde{T}}_h \leqslant \widetilde{T}_h \tag{6.19}$$

et il existe $C_1, C_2 > 0$ *telle que*

$$\begin{aligned}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant e^{-\lambda_m \epsilon t}\|\hat{\widetilde{T}}_h(0)\|_2^2 + \frac{4}{\lambda_m^2\epsilon^2}C_1\theta\|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2 \\ + \frac{4}{\lambda_m^2\epsilon^2}C_2\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}_+\end{aligned} \tag{6.20}$$

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbf{R}_+$, on introduit

$$\Lambda = \begin{cases} \widetilde{T}_h - \hat{\widetilde{T}}_h & \text{si } \widetilde{T}_h \leqslant \hat{\widetilde{T}}_h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.21}$$

On a

$$\Xi(\xi) = \frac{d}{d\xi}\|\Lambda(\xi)\|_{\mathbb{M}_h}^2 = \dot{\Lambda}^T(\xi)\mathbb{M}_h\Lambda(\xi) + \Lambda^T(\xi)\mathbb{M}_h\dot{\Lambda}(\xi),$$

alors

$$\begin{aligned}\Xi(\xi) = 2\Lambda(\xi)^T\mathbb{A}_h^T\Lambda(\xi) - 8\pi\theta(\widetilde{T}_h^4 - \hat{\widetilde{T}}_h^4)^T(\xi)\Lambda(\xi) \\ + 2\theta\Lambda(\xi)^T\widetilde{G}_h(\xi) + 2\Lambda(\xi)^T(\mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T\Lambda(\xi).\end{aligned}$$

En utilisant

$$(\widetilde{T}_h^4 - \hat{\widetilde{T}}_h^4) = (\widetilde{T}_h^2 + \hat{\widetilde{T}}_h^2)(\widetilde{T}_h + \hat{\widetilde{T}}_h)(\widetilde{T}_h - \hat{\widetilde{T}}_h) \tag{6.22}$$

et le fait que la matrice $\mathbb{L}$ satisfait la condition (6.18), on déduit que

$$\frac{d}{d\xi}\|\Lambda(\xi)\|_{\mathbb{M}_h}^2 \leqslant 0. \tag{6.23}$$

Donc

$$\|\Lambda(\xi)\|_{\mathbb{M}_h} \leqslant \|\Lambda(0)\|_{\mathbb{M}_h} = 0. \tag{6.24}$$

Alors $\hat{\widetilde{T}}_h \leqslant \widetilde{T}_h$.
On a

$$\frac{d}{d\xi}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant \dot{\hat{\widetilde{T}}}_h^T(\xi)\hat{\widetilde{T}}_h(\xi) + \hat{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\dot{\hat{\widetilde{T}}}_h(\xi).$$

Le lemme 6.3.2 et $\hat{\widetilde{T}}_h \leqslant \widetilde{T}_h$ impliquent qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant & -2\lambda_h^1\lambda_m\hat{\widetilde{T}}_h^{\,T}(\xi)\hat{\widetilde{T}}_h(\xi) + \frac{1}{\epsilon_1}\hat{\widetilde{T}}_h^{\,T}(\xi)\hat{\widetilde{T}}_h(\xi) \\ & + \epsilon_1\theta\widetilde{G}_h^T(\xi)\mathbb{M}_h^{-T}\mathbb{M}_h^{-1}\widetilde{G}_h(\xi) \\ & + 2\hat{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\Upsilon\hat{\widetilde{T}}_h(\xi) - 2\hat{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\Upsilon\widetilde{T}_h(\xi).\end{aligned}$$

avec $\Upsilon = \mathbb{M}_h^{-1}\mathbb{L}\mathbb{C}_h$, en utilisant le lemme 6.3.2 on peut conclure qu'il existe $\epsilon_2 > 0$, telle que

$$\begin{aligned}\hat{\widetilde{T}}_h^{\,T}(\xi)\Upsilon\widetilde{T}_h(\xi) \leqslant \frac{\epsilon_2}{2}\widetilde{T}_h^T(\xi)\Upsilon^T\Upsilon\widetilde{T}_h(\xi) \\ + \frac{1}{2\epsilon_2}\hat{\widetilde{T}}_h^{\,T}(\xi)\hat{\widetilde{T}}_h(\xi).\end{aligned} \tag{6.25}$$

La matrice $\mathbb{L}$ satisfait la condition (6.18), alors on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant & -2\lambda_h^1\lambda_m\hat{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)+\frac{1}{\epsilon_1}\hat{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\\ &+2\epsilon_1C_1\theta\widetilde{G}_h^T(\xi)\widetilde{G}_h(\xi)+2\lambda_m\hat{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\mathbb{L}\mathbb{C}_h\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\\ &+\frac{1}{\epsilon_2}\hat{\widetilde{T}}_h^T(\xi)\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)+2\epsilon_2C_2\widetilde{T}_h^T(\xi)\widetilde{T}_h(\xi).\end{aligned}$$

avec

$$C_1=\|\mathbb{M}_h^{-T}\mathbb{M}_h^{-1}\|_\infty \text{ et } C_2=\|(\mathbb{M}_h^{-1}\mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T\mathbb{M}_h^{-1}\mathbb{L}\mathbb{C}_h\|_\infty.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\|\hat{\widetilde{T}}_h(t)\|_2^2 \leqslant & -2\lambda_h^1\lambda_m\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2+\frac{1}{\epsilon_1}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2\\ &+2\epsilon_1C_1\theta\|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2+\frac{1}{\epsilon_2}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2+2\lambda_m\lambda_\epsilon\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2\\ &+2\epsilon_2C_2\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2.\end{aligned}$$

On prend $\epsilon_1=\epsilon_2=\dfrac{2}{\lambda_m\epsilon}$, alors on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant & -\lambda_m\epsilon\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2\\ &+\frac{4}{\lambda_m\epsilon}C_1\theta\|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2+\frac{4}{\lambda_m\epsilon}C_2\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2\end{aligned}\tag{6.26}$$

En utilisant le lemme 6.3.1, on déduit que

$$\begin{aligned}\|\hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_2^2 \leqslant & \, e^{-\lambda_m\epsilon t}\|\hat{\widetilde{T}}_h(0)\|_2^2\\ &+\frac{4}{\lambda_m^2\epsilon^2}C_1\theta\|\widetilde{G}_h(\xi)\|_2^2+\frac{4}{\lambda_m^2\epsilon^2}C_2\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_2^2,\end{aligned}\tag{6.27}$$

pour tout $\xi\in\mathbf{R}_+$. □

Les théorèmes 6.3.3 et 6.3.4 permettent de prouver la bornitude de l'estimé, ce qui permet de garantir la stabilité globale de l'observateur.

6.3.2 La Formulation LPV du système radiation-conduction

La dynamique de l'erreur (6.6) peut être écrite sous la forme suivante

$$\dot{E}_r=\mathbb{M}_h^{-1}\mathbb{A}_hE_r+[\Psi_h(\widetilde{T}_h)-\Psi_h(\hat{\widetilde{T}}_h)]-\mathbb{M}_h^{-1}\mathbb{L}\mathbb{C}_hE_r.$$

De l'expression de la source radiative (6.2), nous avons

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\widetilde{T}_h}=-16\pi\theta\widetilde{T}_h^3.\tag{6.28}$$

D'après les hypothèses des théorèmes 6.3.3 et 6.3.4, la fonction Ψ_h satisfait

$$\begin{aligned}&\underline{\gamma_i}\leqslant\frac{\partial\Psi_h^i(x)}{\partial x_i}\leqslant\overline{\gamma_i} \quad\text{where}\quad \underline{\gamma_i}\leqslant\overline{\gamma_i}\leqslant 0\\ &\frac{\partial\Psi_h^i(x)}{\partial x_j}=0 \;\;\forall\, i,j\in\{1,...,N\} \;\text{ and } i\neq j.\end{aligned}$$

D'après (6.29), on peut dire qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\underline{\gamma_i} = -M,\ \overline{\gamma_i} = 0$$

En utilisant le théorème DMVT présenté dans [151], il existe $z \in Co(T_h, \hat{T}_h)$ telle que :

$$\Psi_h(\widetilde{T}_h) - \Psi_h(\hat{\widetilde{T}}_h) = D(\zeta)e \tag{6.29}$$

où

$$D(\zeta) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Psi_h^{ij} H_h^{ij}, \tag{6.30}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_h^{ij} &= \frac{\partial \Psi_h^i(z)}{\partial x_j} \quad \forall i,j \in \{1,...,N\} \\ H_h^{ij} &= e_N(i)e_N^T(j) \quad \forall i,j \in \{1,...,N\} \\ \zeta &= (\Psi_h^{11}, \Psi_h^{22}, ..., \Psi_h^{NN}), \end{aligned} \tag{6.31}$$

la matrice jacobienne D est semi-définie négative diagonale. De (6.28) peut être écrite sous la forme suivante

$$\mathbb{M}_h \dot{E}_r = \left[\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h\right] E_r.$$

De l'égalité (6.29), le paramètre ζ appartient à l'ensemble convexe $\mathcal{V}_N$ defini par

$$\mathcal{V}_N = \{(\Psi_h^{11}, ..., \Psi_h^{NN}),\ \Psi_h^{ii} \in \{\underline{\gamma_i}, \overline{\gamma_i}\}\ \forall\ i \in \{1,...,N\}\}.$$

La matrice jacobienne D possède la forme suivante

$$D(\zeta) = \mathrm{Diag}(D_1, ..., D_{n_1}),\ \text{avec}\ \ D_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \tag{6.32}$$

pour tout $i \in \{1, ..., n_1\}$ où n_1 rpésente le nombre des blocs matrices.

Maintenant, nous donnons quelques propriétés qui seront utiles dans la suite du chapitre pour démontrer la stabilté de l'observateur d'ordre réduit. Soit

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 2A_h^1 & 2A_h & \cdots & \cdots & 0 \\ 2A_h^T & 2A_h^1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2A_h \\ 0 & \cdots & 0 & 2A_h^T & 2A_h^1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2A_h & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.33}$$

$$\rho = \max\{\left|S_p(\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}\mathcal{Y}^T)\right|\} \tag{6.34}$$

$$\rho_1 = \max\{\left|S_p(\mathcal{Y}\tilde{\mathbb{Q}}^{-1}\mathcal{Y}^T)\right|\} \tag{6.35}$$

avec $\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + \mathbb{I}$.

6.4 Synthèse d'observateur d'état

6.4.1 Observateur basé sur le théorème des accroissements finis.

Observateur d'ordre plein

Dans la suite, nous établissons des conditions suffisantes sous la forme de LMI garantissant la stabilité de l'observateur proposé.

Théorème 6.4.1. *L'observateur (6.5) est asymptotiquement convergent s'il existe un gain d'observation* $\mathbb{L}$ *qui satisfait la condition* (6.18) *telle que la LMI suivante est vérifiée :*

$$(\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta))^T + (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta)) - \mathbb{C}_h^T \mathbb{L}^T - \mathbb{L}\mathbb{C}_h \prec 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}_N \tag{6.36}$$

Démonstration. Si la condition (6.18) est satisfaite alors on garantit la bornitude de l'estimé, voir théorème 6.3.4. Soit :
On considère la fonction de Lyapunov classique

$$V(E_r) = E_r^T \mathbb{M}_h E_r \succ 0.$$

En dérivant la fonction de Lyapunov le long des trajectoires de (6.28), nous obtenons

$$\dot{V} = E_r^T \Xi(\zeta) E_r$$

où

$$\Xi(\zeta) = (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h).$$

Par conséquent, $\dot{V} \prec 0$ pour tout $\zeta \neq 0$ ssi

$$\Xi(\zeta) \prec 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}_N. \tag{6.37}$$

D'après le principe de convexité [30], nous déduisons que l'inégalité (6.37) est vérifiée si et seulement si la LMI (6.36) est satisfaite pour tout $\zeta \in \mathcal{V}_N$, cela signifie qu'il existe un gain d'observation $\mathbb{L}$ tel que $\dot{V} \prec 0 \ \forall E_r \neq 0$. □

Proposition 6.4.2. *S'il existe une matrice* $\mathbb{L}$ *qui satisfait la condition* (6.18) *telle que la LMI suivante est vérifiée :*

$$\mathbb{A}_h^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{C}_h^T \mathbb{L}^T - \mathbb{L}\mathbb{C}_h \prec 0 \tag{6.38}$$

alors le gain d'observation $\mathbb{L}$ *satisfait (6.36).*

Démonstration. S' il existe une matrice gain $\mathbb{L}$ qui vérifie

$$\mathbb{A}_h^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{C}_h^T \mathbb{L}^T - \mathbb{L}\mathbb{C}_h \prec 0$$

et en utilisant le faite que la jacobienne D (6.32) est semi définie négative alors $\mathbb{M}_h D$ est semi définie négative donc nous concluons que le gain $\mathbb{L}$ satisfait (6.36). □

Observateur d'ordre réduit

Dans cette section, nous présentons un observateur d'ordre réduit où la dimension du gain d'observateur est conçue pour être égale à la dimension du premier bloc de la matrice d'état obtenu. Cela représente l'une des principales contributions de ce chapitre. En effet, cela permet de réduire considérablement les temps de calcul, en particulier pour des applications en temps réel. Nous considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \mathbb{M}_h^\star \dot{x} = (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}})x \\ y_h = \mathbb{C}_h^\star x, \end{cases} \tag{6.39}$$

où

$$\begin{aligned} &\mathbb{M}_h^\star = \begin{bmatrix} M_h^1 & M_h \\ (\star) & M_h^1 \end{bmatrix},\ \mathbb{A}_h^\star = \begin{bmatrix} A_h^1 & A_h \\ (\star) & A_h^1 \end{bmatrix},\ \mathbb{C}_h^\star = \begin{bmatrix} C_h^1 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\text{et } D_{\tilde{\gamma}} = \rho\mathbb{I} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

où les matrices $A_h^1, A_h, M_h^1, M_h \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont données par (6.4).

Théorème 6.4.3. *S'il existe une matrice de gain $\mathbb{L}_1$ qui satisfait la condition (6.18), telle que la LMI suivante est satisfaite :*

$$(\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}})^T + (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}}) - \mathbb{C}_h^{\star T}\mathbb{L}_1^T - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star \prec 0. \tag{6.40}$$

Alors, le gain d'observation

$$\mathbb{L} = [\mathbb{L}_1 \quad 0]^T \tag{6.41}$$

vérifie la LMI (6.36).

Démonstration. Si la condition (6.18) est satisfaite alors on garantit la bornitude de l'estimé, voir théorème 6.3.4. Soit

$$\begin{aligned} \Xi &= (\mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + (\mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h) \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{Y} \\ (\star) & \mathbb{Q} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{X} = (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)^T + (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)$$

et $\mathbb{Q}$ est donnée par (6.66). En utilisant le complément de Schur, on peut dire que $\Xi \prec 0$ est équivalent à

$$\mathbb{Q} \prec 0 \ \text{ et } \ \mathbb{W} = \mathcal{X} - \mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}\mathcal{Y}^T \prec 0. \tag{6.42}$$

Puisque $\mathbb{Q}$ est une matrice définie négative, alors il nous reste à montrer que $\mathbb{W} \prec 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{W} &= (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)^T + (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star) - \mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}\mathcal{Y}^T \\ &= (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)^T + ((\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star) - \rho\mathbb{I} - \mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}\mathcal{Y}^T. \end{aligned} \tag{6.43}$$

En utilisant (6.34), on peut conclure que $-\rho\mathbb{I} - \mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}\mathcal{Y}^T \prec 0$, alors on a $\Xi \prec 0$. Finalement on peut conclure en utilisant la proposition 6.4.2 que le gain (6.41) satisfait la LMI (6.36). □

Remarque 6.4.4. *On considère le gain d'observation suivant*

$$\mathbb{L} = \alpha \mathbb{C}_h^T \tag{6.44}$$

où α est une matrice qui vérifie la condition (6.18)*. On constate que ce choix de gain (6.44) vérifie les LMIs (6.36) et (6.38) respectivement, donc il garantit la stabilité asymptotique de l'observateur.*

Nous présentons la méthode de synthèse des gains de l'observateur assurant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro. L'analyse de la stabilité est étudiée en utilisant la théorie de Lyapunov. Nous montrons que la convergence de l'observateur en boucle fermée est rapide par rapport à celle en boucle ouverte.

Théorème 6.4.5. *L'observateur (6.5) est exponentiellement convergent et en plus il existe un gain $\mathbb{L} \neq 0$ qui satisfait la condition* (6.18) *et garantit une convergence plus rapide de l'observateur en boucle fermée par rapport à celui en boucle ouverte $\mathbb{L} = 0$.*

Démonstration. On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V(E_r) = E_r^T \mathbb{M}_h E_r.$$

Le dérivé de V satisfait

$$\dot{V}(E_r) \leqslant E_r^T [(\mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + (\mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)] E_r.$$

$$\dot{V}(E_r) \leqslant 2E_r^T [\mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h] E_r.$$

D'après les hypothèses de théorème 6.3.4 et en particulier si $\mathbb{L} = \gamma \mathbb{C}_h^T$, telle que $\gamma \in]0, \lambda_h^1[$ alors, d'une part, on a la bornitude de l'estimé et, d'autre part, il existe

$$\lambda_h^\star < -\lambda_h^1 \tag{6.45}$$

où $\lambda_h^\star$ est la valeur propre la plus grande de la matrice $\mathbb{A}_h - \gamma \mathbb{C}_h^T \mathbb{C}_h$.
En effet, on suppose que $E_r = [e_1 \ e_2]^T$, tel que $e_1 \neq 0$ alors on a

$$E_r^T \begin{bmatrix} \gamma \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} E_r = \gamma e_1^T \mathbb{I} e_1 > 0 \tag{6.46}$$

d'où

$$E_r^T [\mathbb{A}_h - \gamma \mathbb{C}_h^T \mathbb{C}_h] E_r < E_r^T \mathbb{A}_h E_r \tag{6.47}$$

alors il existe un gain $\mathbb{L} \neq 0$ tel que

$$\dot{V}(E_r) \leqslant \frac{\lambda_h^\star}{\lambda_m} V(E_r).$$

avec

$$\lambda_h^\star < -\lambda_h^1$$

Donc on peut dire que l'observateur en boucle fermée garantit une convergence plus rapide par rapport à celle en boucle ouverte. □

6.4.2 Extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette section, nous étendons les résultats de la section précédente pour la synthèse d'observateur basée sur le critère $\mathcal{H}_\infty$. Le système est décrit par

$$\begin{cases} \mathbb{M}_h\dot{\widetilde{T}}_h = \mathbb{A}_h\widetilde{T}_h + \mathbb{M}_h\Psi_h(\widetilde{T}_h) + \mathcal{W}_1 w(\xi) \\ Y_h = \mathbb{C}_h\widetilde{T}_h + \mathcal{W}_2 w(\xi). \end{cases} \tag{6.48}$$

où $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $w(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^s)$ est un vecteur de perturbations borné. La matrice $\mathcal{W}_1$ possède la forme suivante

$$\mathcal{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1^\star \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_1^\star \in \mathcal{M}_{2n,s}(\mathbf{R}) \tag{6.49}$$

Soit l'observateur suivant :

$$\mathbb{M}_h\dot{\hat{\widetilde{T}}}_h = \mathbb{A}_h\hat{\widetilde{T}}_h + \mathbb{M}_h\Psi_h(\hat{\widetilde{T}}_h) + \mathcal{W}_2 w(\xi) + \mathbb{L}(Y_h - \mathbb{C}_h\hat{T}_h). \tag{6.50}$$

La dynamique d'erreur $E_r = \widetilde{T}_h - \hat{\widetilde{T}}_h$ est donnée par

$$\mathbb{M}_h\dot{E}_r = (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)E_r + (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)w.$$

Le problème de la robustesse $\mathcal{H}_\infty$ du système (6.48) et de l'observateur (6.50) revient à trouver la matrice $\mathbb{L}$ telle que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro, c'est à dire,

$$\lim_{\xi\to\infty} E_r(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad w(\xi) = 0 \tag{6.51a}$$

$$\|E_r(\xi)\|_2 \leqslant \lambda\|\omega(\xi)\|_2 \quad \text{pour} \quad w(\xi) \neq 0 \text{ et } E_r(0) = 0. \tag{6.51b}$$

avec $\lambda > 0$ représente le niveau d'atténuation des perturbations. Toutefois, afin de satisfaire $(6.51a)$ et $(6.51b)$, il est suffisant de trouver la fonction de Lyapunov V telle que

$$\dot{V} + E_r^T E_r - \lambda^2\omega^T\omega < 0 \tag{6.52}$$

En fait, il est facile de montrer que (6.52) implique $(6.51a)$ et $(6.51b)$. Il faut noter que pour $\omega(\xi) = 0$, si (6.52) est vérifiée alors $\dot{V} < 0$. Ainsi, d'après la théorie de Lyapunov, nous déduisons que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro, ce qui implique $(6.51a)$. Si $\omega(\xi) \neq 0$ et $E_r(0) = 0$, alors (6.52) implique que

$$V(E_r(\xi)) + \int_0^\xi E_r(s)^T E_r(s)ds - \lambda^2\int_0^\xi \omega^T(s)\omega(s)ds < 0.$$

Puisque $V(E_r(\xi)) \geqslant 0$ pour tout $\xi \geqslant 0$, alors pour $\xi \to \infty$, on obtient :

$$\int_0^\infty E_r(s)^T E_r(s)ds \leqslant \lambda^2\int_0^\infty \omega^T(s)\omega(s)ds,$$

ce qui est équivalent à (6.51b).

Théorème 6.4.6. *Soit $\lambda > 0$, le problème de filtrage $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (6.48) et l'observateur (6.50) est solvable, s'il existe une matrice de gain d'observation $\mathbb{L}$ de dimensions appropriées, telle que la LMI suivante est satisfaite :*

$$\textit{Bloc-Diag}\ [\Theta(\zeta_1,\mu),..,\Theta(\zeta_{2^N},\mu)] \prec 0. \quad \zeta_i \in \mathcal{V}_N \quad \textit{pour tout} \quad i \in \{1,...,2^N\}. \tag{6.53}$$

où

$$\Theta(\zeta,\mu) = \begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + \mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h + \mathbb{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \tag{6.54}$$

avec $\mu = \lambda^2$

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(E_r) = E_r^T \mathbb{M}_h E_r,$$

d'où

$$\begin{aligned} &\dot{V}(E_r(\xi)) + E_r^T(\xi)E_r(\xi) - \lambda^2\omega^T(\xi)\omega(\xi) \\ &= \begin{bmatrix} E_r(\xi) \\ \omega(\xi) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbb{L},\zeta) & (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2) \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r(\xi) \\ \omega(\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{M}(\mathbb{L},\zeta) = (\mathbb{A}_h + D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + (\mathbb{A}_h + D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h) + \mathbb{I}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\dot{V}(E_r(\xi)) + E_r^T(\xi)E_r(\xi) - \lambda^2\omega^T(\xi)\omega(\xi) \\ &= \begin{bmatrix} E_r(\xi) \\ \omega(\xi) \end{bmatrix}^T \Theta(\zeta,\mu) \begin{bmatrix} E_r(\xi) \\ \omega(\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où $\Theta(\zeta,\mu)$ est donnée par (6.54). Par conséquent, (6.53) garantit la convergence asymptotiquement vers zéro de l'erreur d'estimation. □

Proposition 6.4.7. *S'il existe une matrice de gain d'observation $\mathbb{L}$ de dimension appropriée, telle que la LMI suivante est vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h^T - \mathbb{C}_h^T\mathbb{L}^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h + \mathbb{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6.55}$$

alors, la matrice de gain d'observation $\mathbb{L}$ vérifie (6.53).

Démonstration. D est une matrice définie négative. Si le gain $\mathbb{L}$ vérifie

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h^T - \mathbb{C}_h^T\mathbb{L}^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h + \mathbb{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0.$$

alors en utilisant le complément de Schur, la structure de la matrice jacobienne D et (6.29) on conclut que $\mathbb{L}$ satisfait (6.53). □

Dans la suite, nous allons étendre l'approche d'ordre réduit dans le cas de présence d'une perturbation w sur l'entrée et la sortie du système. Dans le prochain théorème, nous proposons des conditions suffisantes assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro.

Théorème 6.4.8. *Soit $\lambda_r > 0$, le problème de filtrage $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (6.48) et l'observateur (6.50) est solvable, s'il existe une matrice de gain d'observation $\mathbb{L}_1$ de dimensions appropriées, telle que la LMI suivante est satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}}^{\infty})^T + (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}}^{\infty}) - \mathbb{C}_h^{\star T}\mathbb{L}_1^T - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star + \mathbb{I} & \mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2 \\ (\star) & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6.56}$$

avec $D_{\tilde{\gamma}}^{\infty} = \rho_1\mathbb{I} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mu = \lambda_r^2$, alors le gain d'observation

$$\mathbb{L} = [\mathbb{L}_1 \quad 0]^T \tag{6.57}$$

satisfait (6.60).

Démonstration. Soit

$$\Pi = \begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h^T - \mathbb{C}_h^T\mathbb{L}^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h + \mathbb{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

En utilisant le complément de Schur, on déduit que $\Pi \prec 0$ est équivalent à

$$\mathbb{A}_h^T - \mathbb{C}_h^T\mathbb{L}^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h + \mathbb{I} + \frac{1}{\mu}(\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T(\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2) \prec 0.$$

Nous avons

$$\frac{1}{\mu}(\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T(\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2) = \frac{1}{\mu}\begin{bmatrix} (\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

alors

$$\Xi = \mathbb{A}_h^T - \mathbb{C}_h^T\mathbb{L}^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h + \mathbb{I} + \frac{1}{\mu}(\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T(\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2) = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{Y} \\ \mathcal{Y}^T & \mathbb{Q} + \mathbb{I} \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathcal{X} = (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)^T + (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star) + \mathbb{I} + \frac{1}{\mu}(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)$$

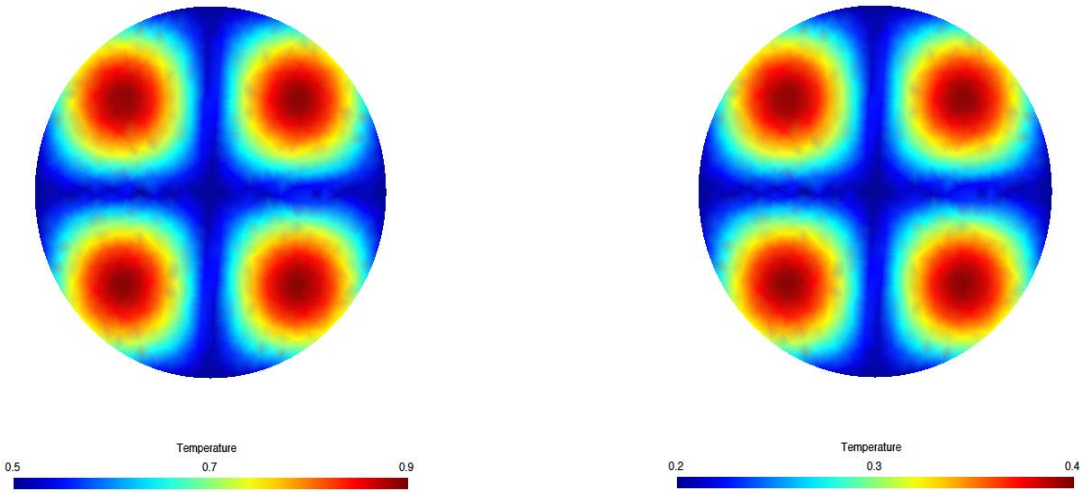
En utilisant le complément de Schur, $\Xi \prec 0$ est équivalent à

$$\tilde{\mathbb{Q}} \prec 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{W} = \mathcal{X} - \mathcal{Y}^T\tilde{\mathbb{Q}}^{-1}\mathcal{Y} \prec 0. \tag{6.59}$$

Puisque $\tilde{\mathbb{Q}}$ est une matrice définie négative, nous allons montrer que $\mathbb{W} \prec 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{W} =& (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)^T + (\mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star) + \frac{1}{\mu}(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2) - \mathcal{Y}^T\tilde{\mathbb{Q}}^{-1}\mathcal{Y} \\ =& (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}}^{\infty} - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)^T + (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}}^{\infty} - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star) - + \frac{1}{\mu}(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2) \\ & - \rho_1\mathbb{I} - \mathcal{Y}^T\tilde{\mathbb{Q}}^{-1}\mathcal{Y}. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant (6.35), on peut conclure que $-\rho_1\mathbb{I} - \mathcal{Y}^T\tilde{\mathbb{Q}}^{-1}\mathcal{Y} \prec 0$. Si $\mathbb{L}_1$ satisfait la LMI (6.56), alors on déduit que la matrice de gain 6.95) vérifie la LMI (6.60). □



(a) (b)

FIGURE 6.2 – A gauche (a) la condition initiale $\widetilde{T}_{0,h} = 0.5 + 0.4 \times |sin(\pi x) \times sin(\pi y)|$, et à droite (b) la condition initiale $\hat{\widetilde{T}}_{0,h} = 0.2 + 0.2 \times |sin(\pi x) \times sin(\pi y)|$.

Maintenant, on établit un résultat qui garantit une stabilité de l'observateur en utilisant la matrice de gain construite avec un vecteur de perturbation sur l'entrée et la sortie du système.

Remarque 6.4.9. *Considérons la matrice de gain suivante* $\mathbb{L} = \alpha \mathbb{C}_h^T$ *donnée par la remarque 6.4.4. Le problème de filtrage* $\mathcal{H}_\infty$ *correspondant au système (6.48) et l'observateur (6.50) est solvable, s'il existe* $\lambda_c(\alpha) > 0$ *telle que la LMI suivante est satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h^T - \mathbb{C}_h^T \mathbb{L}^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h + \mathbb{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2)^T & -\mu_\alpha \mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6.60}$$

avec $\mu_\alpha = \lambda_c^2(\alpha)$.

6.4.3 Illustrations numériques

Pour illustrer la synthèse d'observateur proposé, on considère un disque unité comme domaine avec des conditions de Dirichlet homogènes et une constante d'adimensionnement θ égale à 1 (on obtient les mêmes résultats si on prend une autre valeur de $\theta \in [0, 1[$). Le problème présenté a été résolu avec un pas de temps adimensionné donné par $\triangle\xi = 5.10^{-4}$. En outre, les itérations de l'algorithme sont arrêtées lorsque la condition d'équilibre a été réalisée avec une tolérance fixée à 10^{-5}. Tous les calculs ont été effectués sur un Mac OS X version 10.6.6 2.22GHz Intel Core 2 Duo et le logiciel MATLAB.

On considère deux types de conditions initiales : des conditions homogènes sur tout le domaine, $\widetilde{T}_{0,h} = 0.5$ et $\hat{\widetilde{T}}_{0,h} = 0.35$ et des conditions non homogènes, voir figure 2.2 qui vérifient les hypothèses du théorème 6.3.4. On place 3 capteurs sur la surface supérieure du domaine pour estimer la température. On utilise Yalmip pour résoudre numériquement les LMIs, voir [105].

La complexité de calcul joue un rôle important dans l'implémentation en temps réel. L'efficacité de l'observateur d'état proposé est due à l'utilisation de la formulation LPV (le

principe de la convexité). En effet, le DMVT est exploré pour écrire la dynamique de l'erreur sous une forme LPV. Dans le cas général, afin de donner un gain d'observation qui garantisse la stabilité, nous sommes dans l'obligation de résoudre 2^N LMIs où N est la dimension du vecteur d'état T_h. Par contre, dans notre cas, nous avons réussi à réduire la complexité du calcul en nous basant sur la structure de la matrice jacobienne D. D'autre part, la structure spécifique de la non-linéarité nous a permis de prouver que le gain d'observation, associé au système linéaire lorsque la sous-matrice d'état est donnée par le premier bloc de la matrice d'état du système non linéaire, garantit la convergence asymptotique de l'observateur.

Le tableau 6.1 montre la supériorité de l'approche réduite (ROB). La synthèse de l'approche d'ordre réduit donne une bonne précision par rapport à l'approche globale (FOB). L'approche ROB garantit un gain de temps de calcul pour résoudre les LMIs et pour la convergence de l'algorithme. L'utilisation de la DMVT permet de construire un gain qui garantit d'une part la bornitude de l'estimé et d'autre part un gain de temps pour la résolution des LMIs.

Dans la figure 6.3, on trace la norme euclidienne L_2 pondérée de l'erreur estimation $\|\widetilde{T}_h(\xi) - \hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_{\mathbb{M}_h}$ à l'instant ξ pour trois différents du gain. En effet, la matrice du gain donnée par l'approche globale, une matrice de gain donnée par l'approche d'ordre réduit et une matrice de gain égale à $\mathbb{L} = \lambda_h^1/2 \times \mathbb{C}_h^T$. Enfin, les résultats de simulation obtenus montrent l'efficacité de la synthèse de l'observateur d'ordre réduit proposé qui reste facile pour la mise en œuvre.

Nous montrons également l'efficacité du résultat dans le cas $\mathcal{H}_\infty$. Pour cela, nous reprenons l'exemple précédent avec présence d'une perturbation w. Nous supposons que $w = \pm 4\% \tilde{T}_h$ $(s = N)$ affecte à la fois la dynamique et la sortie du système avec les matrices

$$\mathcal{W}_1^\star = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbb{I} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}),$$

et

$$\mathcal{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,N}(\mathbf{R}), \qquad \text{où} \quad \mathbb{I} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R}).$$

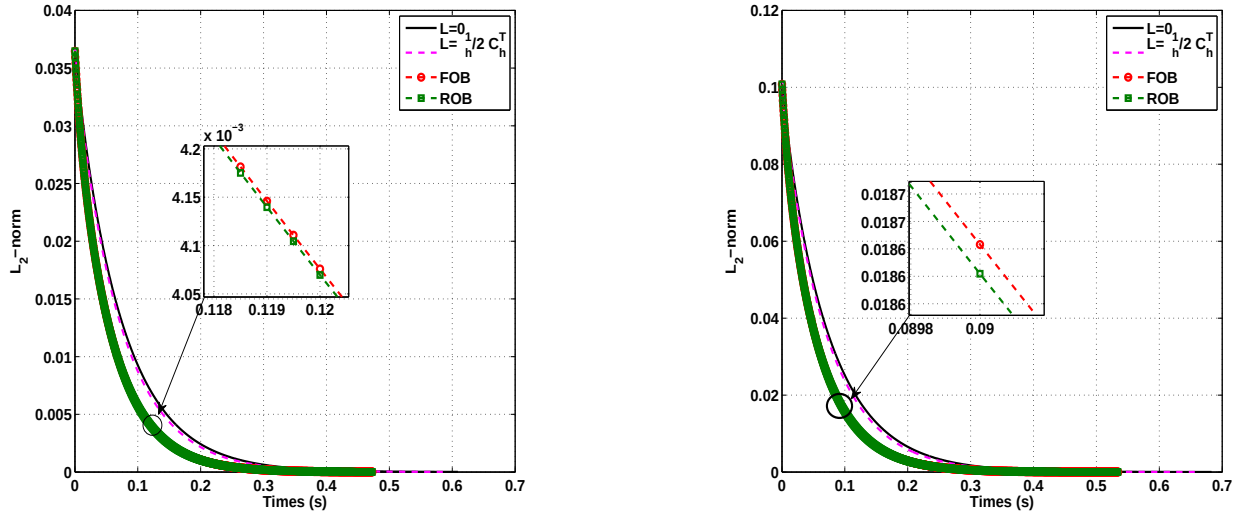
La valeur optimale du niveau d'atténuation des perturbations obtenue par les théorèmes 6.4.6, 6.4.8 et la remarque 6.5.9 sont $\lambda_F = 0.45$, $\lambda_r = 0.32$ and $\lambda_c = 0.35$, respectivement, ce qui confirme l'efficacité de l'approche de présence des perturbations.

La figure 6.4 montre la norme euclidienne L_2 pondérée de l'erreur entre l'état et son estimé $\|\widetilde{T}_h(\xi) - \hat{\widetilde{T}}_h(\xi)\|_{\mathbb{M}_h}$ à l'instant ξ ce qui confirme la supériorité de l'approche proposée. Le tableau 6.2 montre que l'approche d'ordre réduit garde la même efficacité même si le système est affecté par un bruit dans l'entrée et la sortie du système.

6.5 Commande basée observateur

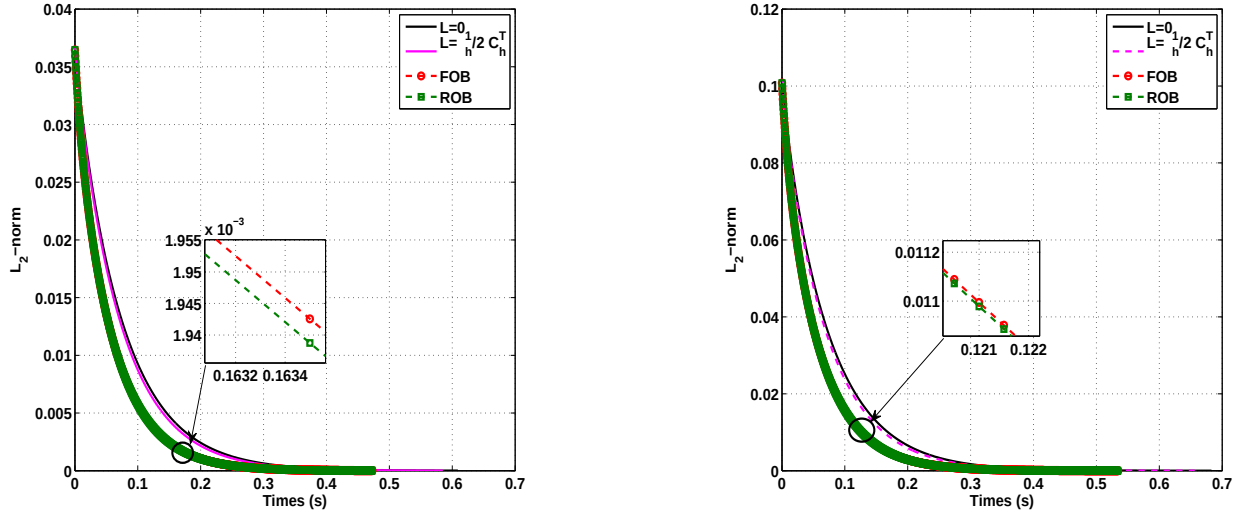
Dans ce paragraphe, nous développons une loi de commande basée observateur en utilisant la formulation LPV et la DMVT. Soit le système approchée suivant

$$\begin{cases} \mathbb{M}_h \dot{\widetilde{T}}_h = \mathbb{A}_h \widetilde{T}_h + \mathbb{B}_h \widetilde{u}_h + \mathbb{M}_h \Psi_h(\widetilde{T}_h) \\ Y_h = \mathbb{C}_h \widetilde{T}_h, \end{cases} \tag{6.61}$$



(a) (b)

FIGURE 6.3 – Le comportement de l'erreur d'estimation : A gauche, les conditions initiales homogènes $\widetilde{T}_{0,h} = 0.5$ et $\widehat{\widetilde{T}}_{0,h} = 0.35$. A droite, les conditions initiales non homogènes, voir figure 1.2.



(a) (b)

FIGURE 6.4 – Le comportement de l'erreur d'estimation cas $\mathcal{H}_\infty$: A gauche, les conditions initiales homogènes $\widetilde{T}_{0,h} = 0.5$ et $\widehat{\widetilde{T}}_{0,h} = 0.35$. A droite, les conditions initiales non homogènes, voir figure 1.2.

	FOB		ROB		L=$\lambda_h^1/2 \times \mathbb{C}_h^T$	
h	LMI(s)	CPU (s)	LMI (s)	CPU (s)	$\lambda_h^1/2$	CPU (s)
0.25	1.62	251.52	1.59	243.87	0.36	270.8
0.1	3.5	378.9	1.9	367.53	0.06	381.52
0.05	258.89	1586.4	2.28	1518.73	0.017	1604.32
0.025	7491.45	8.483e3	3.66	8.251e3	0.0043	8.633e3

TABLE 6.1 – Le temps, en secondes (s), mis pour résoudre la LMI et pour la convergence de l'algorithme.

	FOB		ROB		L=$\lambda_h^1/2 \times \mathbb{C}_h^T$	
h	LMI (s)	CPU (s)	LMI(s)	CPU (s)	$\lambda_h^1/2$	CPU (s)
0.25	1.73	263.76	1.64	261.73	0.36	281.8
0.1	5.8	412.56	2.7	379.73	0.06	413.52
0.05	318.63	1917.73	3.68	1748.73	0.017	2104.27
0.025	8013.32	8.738e3	4.47	8.467e3	0.0043	8.863e3

TABLE 6.2 – Le temps, en secondes (s), mis pour résoudre la LMI et pour la convergence de l'algorithme : Cas $\mathcal{H}_\infty$

La matrice $\mathbb{B}_h$ possède la forme suivante

$$\mathbb{B}_h = \begin{bmatrix} B_h^1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

avec $B_h^1 = -\mathbb{I} \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$ et $\widetilde{u}_h \in \mathbf{R}^m$

$$\widetilde{u}_h = \begin{bmatrix} u_{h1}, & u_{h2}, & \cdots, & u_{hm} \end{bmatrix}^T.$$

La commande choisie est sous la forme suivante :

$$\widetilde{u}_h = -\mathbb{K}\hat{\widetilde{T}}_h. \tag{6.63}$$

En remplaçant la commande (6.63) dans le système (6.1), nous obtenons

$$\mathbb{M}_h\dot{\hat{\widetilde{T}}}_h = \mathbb{A}_h\widetilde{T}_h - \mathbb{B}_h\mathbb{K}\hat{\widetilde{T}}_h + \mathbb{M}_h\Psi_h(\widetilde{T}_h)$$

par conséquent, nous avons

$$\mathbb{M}_h\dot{\hat{\widetilde{T}}}_h = \left[\mathbb{A}_h - \mathbb{B}_h\mathbb{K} + \mathbb{M}_h D(\nu)\right]\widetilde{T}_h + \mathbb{B}_h\mathbb{K}e \qquad \forall \nu \in \mathcal{V}_N.$$

Dans ce qui suit, nous considérons la forme augmentée contenant à la fois la dynamique du système et de l'erreur, afin de garantir la convergence de l'erreur d'observation et la stabilité du système en boucle fermée en même temps. Nous avons

$$\mathbb{M}\dot{\Gamma}(\xi) = \Xi(\zeta, \nu)\Gamma(\xi) \tag{6.64}$$

où

$$\Xi(\zeta,\nu)=\begin{bmatrix}\mathbb{A}_h+\mathbb{M}_hD(\nu)-\mathbb{B}_h\mathbb{K} & \mathbb{B}_h\mathbb{K}\\ 0 & \mathbb{A}_h+\mathbb{M}_hD(\zeta)-\mathbb{L}\mathbb{C}_h\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}\widetilde{T}_h\\ E_r\end{bmatrix},$$
$$\text{et}\qquad \mathbb{M}=\begin{bmatrix}\mathbb{M}_h & 0\\ 0 & \mathbb{M}_h\end{bmatrix}. \tag{6.65}$$

Ci-dessous, nous donnons quelques propriétés qui seront utiles par la suite pour pouvoir garantir la stabilisation du système par l'approche d'ordre réduit.
Soit

$$\mathbb{Q}=\begin{bmatrix}2A_h^1 & 2I & \cdots & \cdots & 0\\ 2I & 2A_h^1 & \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2I\\ 0 & \cdots & 0 & 2I & 2A_h^1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times(n_1-2)}(\mathbf{R}). \tag{6.66}$$

Considérons la matrice suivante

$$\mathbb{Z}=\begin{bmatrix}\mathbb{Q} & 0\\ 0 & \mathbb{Q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{Q} & 0\\ 0 & \mathbb{Q}\end{bmatrix}^T,\quad \mathbb{Y}=\begin{bmatrix}\mathcal{Y} & 0\\ 0 & \mathcal{Y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathcal{Y} & 0\\ 0 & \mathcal{Y}\end{bmatrix}^T \tag{6.67}$$
$$\tilde{\mathbb{Z}}=\mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}^T,$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}&=\max\{\left|S_p(\tilde{\mathbb{Z}})\right|\}\\ \tilde{\rho_1}&=\max\{\left|S_p(\tilde{\mathbb{W}})\right|\}\end{aligned} \tag{6.68}$$

avec $\tilde{\mathbb{W}}=\tilde{\mathbb{Z}}+\mathbb{I}$.

6.5.1 Commande basée observateur d'ordre plein

Le problème de stabilisation consiste donc à déterminer deux matrices $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ telles que le système (6.1) est stabilisé sous l'action d'un retour d'état dynamique (6.63).

Théorème 6.5.1. *Le système* (6.1) *est asymptotiquement stable sous l'action de la commande* (6.63) *s'il existe des matrices de gain* $\mathbb{L}$ *et* $\mathbb{K}$ *de dimensions appropriées telles que la condition* (6.18) *est satisfaite et la LMI suivante est satisfaite :*

$$\Xi(\zeta,\nu)+\Xi^T(\zeta,\nu)\prec 0\qquad\forall\zeta,\nu\in\mathcal{V}_N, \tag{6.69}$$

Démonstration. Si la condition (6.18) est satisfaite, alors on a la stabilité globale de l'estimateur d'état, voir théorème 6.3.4.
Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\Gamma)=\Gamma^T\mathbb{M}\Gamma.$$

La dérivée de V le long des trajectoires des systèmes (6.1) est donnée par :

$$\dot{V}(\Gamma)=\Gamma^T\left[\Xi^T(\zeta,\nu)+\Xi(\zeta,\nu)\right]\Gamma. \tag{6.70}$$

Ainsi, $\dot{V}\prec 0$ est vérifiée si et seulement si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\Xi(\zeta,\nu)+\Xi^T(\zeta,\nu)\prec 0\qquad\forall\zeta,\nu\in\mathcal{V}_{2N},$$

où Ξ est donnée par (6.65) □

Proposition 6.5.2. *S'il existe des matrices de gain de commande et d'observation* $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ *telles que la condition* (6.18) *est satisfaite et la LMI suivante est satisfaite :*

$$\Xi_{\gamma_1} + \Xi_{\gamma_1}^T \prec 0, \tag{6.71}$$

où

$$\Xi_{\gamma_1} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h - \mathbb{B}_h\mathbb{K} & \mathbb{B}_h\mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h \end{bmatrix} \tag{6.72}$$

alors les matrices de gain $\mathbb{K}$ *et* $\mathbb{L}$ *garantissent la stabilité asymptotique du système (6.1) sous l'action de la rétroaction* $\widetilde{u}_h = -\mathbb{K}\hat{\widetilde{T}}_h$.

Démonstration. Si la condition (6.18) est satisfaite alors on a la stabilité globale de l'observateur, voir théorème 6.3.4. S'il existe des matrices de gain de commande et d'observation $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ qui vérifient la LMI (6.72), alors en utilisant la structure de la matrice jacobienne D on conclut que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ satisfont (6.69). □

6.5.2 Commande basée observateur d'ordre réduit

Théorème 6.5.3. *S'il existe deux matrices* $\mathbb{L}_1, \mathbb{K}_1$ *de dimensions appropriées telles que la condition* (6.18) *est satisfaite et la LMI suivante est vérifiée :*

$$\Xi_{\tilde{\gamma}}^\star + \Xi_{\tilde{\gamma}}^{\star T} \prec 0, \tag{6.73}$$

où

$$\Xi_{\tilde{\gamma}}^\star = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{B}_h^\star\mathbb{K}_1 & \mathbb{B}_h^\star\mathbb{K}_1 \\ 0 & \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star \end{bmatrix}. \tag{6.74}$$

Alors, les matrices de gain $\mathbb{K}^\star = [\mathbb{K}_1 \quad 0]$ *et* $\mathbb{L}^\star = [\mathbb{L}_1 \quad 0]^T$ *garantissent la bornitude de l'estimé et la stabilité asymptotique du système (6.1) sous la rétroaction* $\widetilde{u}_h = -\mathbb{K}^\star\hat{\widetilde{T}}_h$.

Démonstration. Si la condition (6.18) est satisfaite alors on a la stabilité globale de l'observateur, voir théorème 6.3.4. Nous introduisons la matrice suivante

$$\mathbb{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\Pi = \Xi_{\gamma_1} + \Xi_{\gamma_1}^T$$

où

$$\Xi_{\gamma_1} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{B}_h^\star\mathbb{K}_1 & \mathcal{Y} & \mathbb{B}_h^\star\mathbb{K}_1 & 0 \\ \mathcal{Y}^T & \mathbb{Q} & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_1^T\mathbb{B}_h^{\star T} & 0 & \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star & \mathcal{Y} \\ 0 & 0 & \mathcal{Y}^T & \mathbb{Q} \end{bmatrix} \tag{6.75}$$

Pour montrer que $\Pi \prec 0$ il suffit de prouver que $\mathbb{R} = \mathbb{S}_1\Pi\mathbb{S}_1 \prec 0$ avec $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \mathbb{Y}^T & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \tag{6.76}$$

où

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 & \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 \\ 0 & \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1 \mathbb{C}_h^\star \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 & \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 \\ 0 & \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1 \mathbb{C}_h^\star \end{bmatrix}^T. \tag{6.77}$$

En utilisant le complément de schur, on conclut que

$$\mathbb{R} \prec 0, \iff \mathbb{Z} \prec 0 \text{ et } \mathbb{O} = \mathbb{Y} - \mathbb{X}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{X}^T \prec 0 \tag{6.78}$$

$\mathbb{Z}$ est une matrice définie négative, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{O} = &\begin{bmatrix} \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 & \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 \\ 0 & \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{L}_1 \mathbb{C}_h^\star \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 & \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 \\ 0 & \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{L}_1 \mathbb{C}_h^\star \end{bmatrix}^T - \tilde{\rho}\mathbb{I} - \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}^T, \end{aligned} \tag{6.79}$$

et on a

$$-\tilde{\rho}\mathbb{I} - \mathbb{Y}^T\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y} = -\tilde{\rho}\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{Z}} \tag{6.80}$$

En utilisant la condition (6.68) on peut dire que $-\tilde{\rho}\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{Z}} \prec 0$ les matrices de gain $\mathbb{K}^\star$ et $\mathbb{L}^\star$ garantissent la bornitude de l'estimé et la stabilité asymptotique du système (6.1) sous la commande $u_h = -\mathbb{K}^\star \hat{T}_h$. □

Remarque 6.5.4. *On considère les matrices de gain d'observation et de commande suivantes*

$$\mathbb{L} = \alpha \mathbb{C}_h^T, \quad \mathbb{K} = \gamma \mathbb{B}_h^T, \tag{6.81}$$

où γ est une matrice semi-définie positive, la matrice α satisfait la condition (6.18)*. Ce choix du gain garantit la bornitude de l'estimé et la stabilisation à zéro du système sous l'action d'un retour d'état statique $\tilde{u}_h = -\mathbb{K}\hat{\tilde{T}}_h$.*

Nous présentons la méthode de stabilisation exponentielle vers zéro. L'analyse de la stabilité est étudiée en utilisant la théorie de Lyapunov. Nous montrons qu'il existe une loi de commande dynamique qui garantit une convergence en boucle fermée plus rapide par rapport à celle en boucle ouverte.

Théorème 6.5.5. *Le système* (6.1) *est exponentiellement stabilisable sous l'action de la loi de commande dynamique* (6.63) *. De plus, il existe des matrices gain $\mathbb{L} \neq 0$ et $\mathbb{K} \neq 0$ telles que la condition* (6.18) *est satisfaite et que la commande en boucle fermée garantit une convergence plus rapide par rapport à celle en boucle ouverte.*

Démonstration. On considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\Gamma) = \Gamma^T \mathbb{M} \Gamma.$$

Le dérivé de V satisfait

$$\dot{V}(\Gamma) \leqslant \Gamma^T \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h - \mathbb{B}_h \mathbb{K} & \mathbb{B}_h \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h \end{bmatrix} \Gamma.$$

D'après les hypothèses de théorème 6.3.4 et en particulier si $\mathbb{L} = \gamma_1 \mathbb{C}_h^T$ et $\mathbb{K} = \gamma_2 \mathbb{B}_h^T$ tels que $\gamma_1 \in]0, \lambda_h^1[$ et $\gamma_2 \in \mathbb{R}_+^*$ alors d'une part, on a la bornitude l'estimé et, d'autre part, il existe

$$\lambda_1^\star < -\lambda_1 \tag{6.82}$$

où $\lambda_1^\star$ est la valeur propre la plus grande de la matrice $\begin{bmatrix} \mathbb{A}_h - \gamma_1 \mathbb{B}_h \mathbb{B}_h^T & \gamma_2 \mathbb{B}_h \mathbb{B}_h^T \\ 0 & \mathbb{A}_h - \gamma_1 \mathbb{C}_h^T \mathbb{C}_h \end{bmatrix}$ et $\lambda_1$est la valeur propre la plus petite de la matrice $-\begin{bmatrix} \mathbb{A}_h & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_h \end{bmatrix}$.

En effet, on suppose que $e = [e_1 \ e_2]^T$ et $\widetilde{T}_h = [\widetilde{T}_h^1 \ \widetilde{T}_h^2]^T$ tels que $e_1 \neq 0$ et $\widetilde{T}_h^1 \neq 0$ alors on a

$$\Gamma^T \begin{bmatrix} \gamma_2 \mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma = \gamma_1 e_1^T \mathbb{I} e_1 + \gamma_2 \widetilde{T}_h^{1T} \mathbb{I} \widetilde{T}_h^1 > 0 \tag{6.83}$$

d'où

$$\Gamma^T \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h - \gamma_2 \mathbb{B}_h \mathbb{B}_h^T & \gamma_2 \mathbb{B}_h \mathbb{B}_h^T \\ 0 & \mathbb{A}_h - \gamma_1 \mathbb{C}_h^T \mathbb{C}_h \end{bmatrix} \Gamma < \Gamma^T \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_h \end{bmatrix} \Gamma. \tag{6.84}$$

Alors il existe des matrices gain $\mathbb{L} \neq 0$, $\mathbb{K} \neq 0$ tels que

$$\dot{V}(\Gamma) \leqslant \frac{\lambda_1^\star}{\lambda_m} V(\Gamma).$$

avec

$$\lambda_1^\star < -\lambda_1$$

Donc on peut conclure qu'il existe une loi de commande en boucle fermée garantissant une stabilisation plus rapide par rapport à celle en boucle ouverte. □

6.5.3 Extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette section, nous étendons les résultats de la section précédente au cas $\mathcal{H}_\infty$. Nous calculons simultanément le gain de l'observateur $\mathbb{L}$ et le gain de la commande $\mathbb{K}$ tel que la boucle fermée est stable et satisfait le critère $\mathcal{H}_\infty$. Nous considérons le système décrit par

$$\begin{cases} \mathbb{M}_h \dot{\widetilde{T}}_h = \mathbb{A}_h \widetilde{T}_h + \mathbb{B}_h \widetilde{u}_h + \mathbb{M}_h \Psi_h(\widetilde{T}_h) + \mathcal{W}_1 w \\ Y_h = \mathbb{C}_h \widetilde{T}_h + \mathcal{W}_2 w. \end{cases} \tag{6.85}$$

$\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $\omega \in L^2(\mathbf{R}^s)$ est un vecteur de perturbations bornées. La matrice $\mathcal{W}_1$ possède la forme suivante

$$\mathcal{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1^\star \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_1^\star \in \mathcal{M}_{2n,s}(\mathbf{R}) \tag{6.86}$$

Soit l'estimateur d'état suivant :

$$\mathbb{M}_h \dot{\hat{\widetilde{T}}}_h = \mathbb{A}_h \hat{\widetilde{T}}_h + \mathbb{B}_h \widetilde{u}_h + \mathbb{M}_h \Psi_h(\hat{\widetilde{T}}_h) + \mathbb{L}(Y_h - \mathbb{C}_h \hat{\widetilde{T}}_h). \tag{6.87}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $E_r = \widetilde{T}_h - \hat{\widetilde{T}}_h$ est donnée par

$$\mathbb{M}_h \dot{E}_r = (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h) E_r + (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2) w. \tag{6.88}$$

En utilisant (6.87) et (6.88), nous obtenons

$$\mathbb{M}\dot{\Gamma} = \Xi(\zeta, \nu)\Gamma + \mathbb{W}w. \tag{6.89}$$

où

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \hat{T}_h \\ E_r \end{bmatrix}.$$

Le but est de trouver des conditions robustes qui garantissent la stabilité asymptotique du système sous l'action de la rétroaction linéaire. D'autre part, le problème consiste à chercher les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{K}$ telles que

$$\|\Gamma\| \leqslant \sqrt{\lambda^2 \|w\| + \sigma \|\Gamma(0)\|} \tag{6.90}$$

où σ est une constante positive à déterminer plus tard et $\lambda > 0$ est le niveau atténuation de perturbation. Il faut mentionner que le problème $\mathcal{H}_\infty$ (6.90) peut être réduit à trouver une fonction de Lyapunov $V = \Gamma^T \mathbb{M} \Gamma$ telle que

$$\Pi = \dot{V} + E_r^T E_r - \lambda^2 w^T w \prec 0 \tag{6.91}$$

Nous allons donner le résultat principal de cette section, à savoir la synthèse des gains de l'observation et de la commande par une seule condition sous la forme d'une LMI.

Théorème 6.5.6. *La stabilisation du système augmenté (6.89) est assurée s'il existe des matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{K}$ telles que le problème d'optimisation convexe suivant est satisfait :*

$$min(\mu) \tag{6.92}$$

où

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\nu) - \mathbb{B}_h \mathbb{K})^T + \mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\nu) - \mathbb{B}_h \mathbb{K} & 0 & \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + \mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6.92}$$

pour tout $\zeta, \nu \in \mathcal{V}_N$. Avec $\mu = \lambda^2$

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\Gamma) = \Gamma^T \mathbb{M} \Gamma.$$

La dérivée de V le long des trajectoires des systèmes (6.1) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\Gamma) &= \Gamma^T \left[\Xi^T(\zeta, \nu) + \Xi(\zeta, \nu) \right] \Gamma + \Gamma^T \mathbb{W} w + w^T \mathbb{W}^T \Gamma. \\ &= \delta^T \mathbb{E} \delta \end{aligned} \tag{6.93}$$

où

$$\mathbb{E}(\zeta, \nu) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{co}(\nu) & 0 & \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & \mathbb{A}_{ob}(\zeta) & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \hat{T}_h & E_r & w \end{bmatrix}^T.$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{co}(\nu) &= (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\nu) - \mathbb{B}_h \mathbb{K})^T + \mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\nu) - \mathbb{B}_h \mathbb{K}, \\ \mathbb{A}_{ob}(\zeta) &= (\mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + \mathbb{A}_h + \mathbb{M}_h D(\zeta) - \mathbb{L}\mathbb{C}_h. \end{aligned}$$

Alors, la condition $\dot{V}(\Gamma) \prec 0$ est vérifiée si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\mathbb{E}(\zeta, \nu) \prec 0 \qquad \forall \zeta, \nu \in \mathcal{V}_N.$$

□

Proposition 6.5.7. *Supposons qu'il existe les matrices gain* $\mathbb{L}$ *et* $\mathbb{K}$ *telles que les LMIs suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{A}_h - \mathbb{B}_h\mathbb{K})^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{B}_h\mathbb{K} & 0 & \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h)^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{L}\mathbb{C}_h & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Alors, le critère $\mathcal{H}_\infty$ *(6.90) est satisfait, sous l'action de la rétroaction (6.63).*

Démonstration. D est une matrice semi-définie négative. Si $\mathbb{L}$ et $\mathbb{K}$ vérifient

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_h^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{K}^T\mathbb{B}_h^T - \mathbb{B}_h\mathbb{K} \prec 0, \\ \mathbb{A}_h^T + \mathbb{A}_h - \mathbb{C}_h^T\mathbb{L}^T - \mathbb{L}\mathbb{C}_h \prec 0 \end{aligned}$$

alors en utilisant la structure de la matrice jacobienne D et (6.29), on peut conclure que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ garantissent la stabilité asymptotique du système (6.1) sous l'action de la rétroaction $\widetilde{u}_h = -\mathbb{K}^\star\hat{\widetilde{T}}_h$. □

Maintenant, nous étendons l'approche d'ordre réduit présenté dans la section précédente pour le cas avec un bruit sur l'entrée et la sortie.

Théorème 6.5.8. *Soit* $\lambda_r > 0$*, le problème de filtrage* $\mathcal{H}_\infty$ *correspondant au système (6.89) et l'observateur (6.50) est solvable, s'il existe des matrices de gain d'observation* $\mathbb{L}_1$ *et de commande* $\mathbb{K}_1$ *de dimensions appropriées, telle que la LMI suivante est satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{co}^\star & 0 & \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2 \\ (\star) & \mathbb{A}_{ob}^\star & \mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6.94}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{co}^\star &= (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{B}_h\mathbb{K}_1)^T + \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{B}_h\mathbb{K}_1, \\ \mathbb{A}_{ob}^\star &= (\mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star)^T + \mathbb{A}_h^\star + D_{\tilde{\gamma}} - \mathbb{L}_1\mathbb{C}_h^\star. \end{aligned}$$

telle que $\mu = \lambda_r^2$*. Alors, les matrices gain*

$$\mathbb{L} = [\mathbb{L}_1 \;\; 0]^T \qquad \textit{and} \;\; \mathbb{K} = [\mathbb{K}_1 \;\; 0] \tag{6.95}$$

garantissent la stabilisation à zéro du système (6.85) sous l'action d'une commande statique $\tilde{u}_h = -\mathbb{K}\hat{\tilde{T}}_h$.

Démonstration. Let

$$\Pi = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{co} & 0 & \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & \mathbb{A}_{ob} & \mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix}. \tag{6.96}$$

En utilisant le complément de Schur, on déduit que $\Pi \prec 0$ est équivalent à

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{co} & 0 \\ (\star) & \mathbb{A}_{ob} \end{bmatrix} + \frac{1}{\mu}\begin{bmatrix} \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbb{L}\mathcal{W}_2) \end{bmatrix}^T \prec 0 \\ \mathbb{R}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \mathbb{Y}^T & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned} \tag{6.97}$$

avec

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 & \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 \\ \mathbb{K}_1^T \mathbb{B}_h^{\star T} & \mathbb{A}_h^\star - \mathbb{L}_1 \mathbb{C}_h^\star \end{bmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2(\mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T & \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T \\ (\star) & (\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T \end{bmatrix}$$

alors on a

$$\mathbb{R} \prec 0, \iff \mathbb{Z} \prec 0 \text{ et } \mathbb{O} = \mathbb{X} - \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}^T \prec 0. \tag{6.98}$$

$\mathbb{Z}$ est une matrice définie négative alors on a

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{co}^\star & \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 \\ 0 & \mathbb{A}_{ob}^\star \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{co}^\star & \mathbb{B}_h^\star \mathbb{K}_1 \\ 0 & \mathbb{A}_{ob}^\star \end{bmatrix}^T + \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2(\mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T & \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T \\ (\star) & (\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)(\mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2)^T \end{bmatrix} - \tilde{\rho}_1\mathbb{I} - \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}^T,$$

on a

$$-\tilde{\rho}_1\mathbb{I} - \mathbb{Y}^T\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y} = -\tilde{\rho}_1\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{Z}} \tag{6.99}$$

alors, en utilisant le complément du schur, on peut dire que $\mathbb{O} \prec 0$ est équivalent à (6.94). □

Maintenant, on utilise le gain construit dans le cas déterministe au même système avec une perturbation sur l'entrée et la sortie. Ce qui permet d'obtenir un problème d'optimisation au niveau de l'atténuation des perturbations.

Remarque 6.5.9. *On considère les matrices de gain $\mathbb{L}_1 = \alpha\mathbb{C}_h^{\star T}$ et $\mathbb{K}_1 = \gamma\mathbb{B}_h^{\star T}$ données par la remarque 6.4.4. Le problème de filtrage $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (6.85) et l'observateur est solvable, s'il existe $\lambda_c(\alpha,\gamma) > 0$ telle que la LMI suivante est satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{co}^\star & 0 & \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2 \\ (\star) & \mathbb{A}_{ob}^\star & \mathcal{W}_1^\star - \mathbb{L}_1\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\mu_{\alpha,\gamma}\mathbb{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6.100}$$

avec $\mu_{\alpha,\gamma} = \lambda_c^2(\alpha,\gamma)$.

6.5.4 Exemple numérique

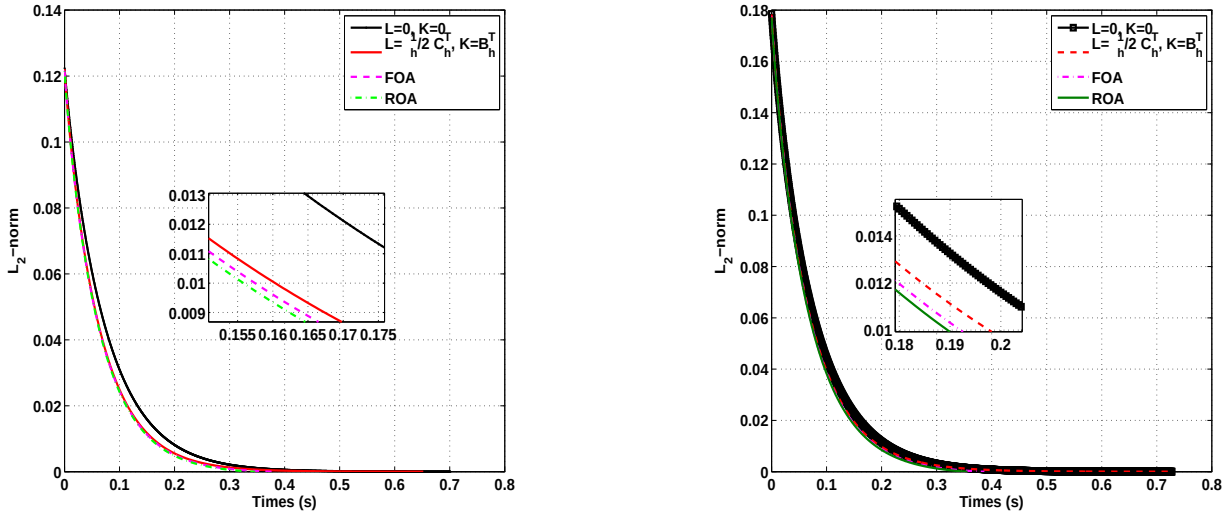
Dans cette section, on considère le même exemple numérique utilisé dans la section 6.4.3. La structure spécifique de la non-linéarité nous a permis de démontrer qu'une matrice de gain associée au système linéaire, lorsque la matrice d'état est donnée par le premier bloc de la matrice d'état du système non linéaire, assure la stabilisation du système sous l'action de la commande $\tilde{u}_h = -\mathbb{K}\hat{\tilde{T}}_h$.

Le tableau 6.3 montre la supériorité de l'approche d'ordre réduit (ROA). La conception de ROA donne une meilleure précision par rapport à l'approche globale (FOA) et garantit un gain de temps de calcul pour résoudre les LMIs. L'utilisation de la technique DMVT nous permet de construire une matrice de gain qui garantit une stabilisation plus rapide du système par rapport à celle en boucle ouverte. Cette construction réduit le temps de calcul pour résoudre les LMIs. La figure 6.5 montre la norme euclidienne L_2 pondérée de

l'état $\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_{\mathbb{M}_h}$ à l'instant ξ pour trois valeurs du gain : les matrices de gain de l'approche globale, les matrices de gain de l'approche d'ordre réduit et les matrices de gain données (CG) données par $\mathbb{L} = \lambda_h^1/2\mathbb{C}_h^T$, $\mathbb{K} = \mathbb{B}_h^T$.

Les résultats de simulation obtenus montrent l'efficacité de la méthode de conception proposée. Le contrôleur proposé est facilement mis en œuvre pour la stabilisation du notre système en se basant sur la méthode de Lyapunov.

Nous montrons également l'efficacité du résultat dans le cas $\mathcal{H}_\infty$. Pour cela, nous reprenons le même exemple numérique utilisé dans la section 6.4.3 La valeur optimale du niveau d'atténuation des perturbations obtenue avec la proposition 6.5.7, le théorème 6.5.8 et la remarque 6.5.9 sont respectivement $\lambda_F = 0.55$, $\lambda_r = 0.33$ et $\lambda_c = 0.42$, ce qui confirme l'efficacité de l'approche ROA avec la présence d'une perturbation par rapport à l'approche globale. Le tableau 6.4 montre que le ROA donne les mêmes résultats sous l'effet de la perturbation sur l'entrée et la sortie du système.

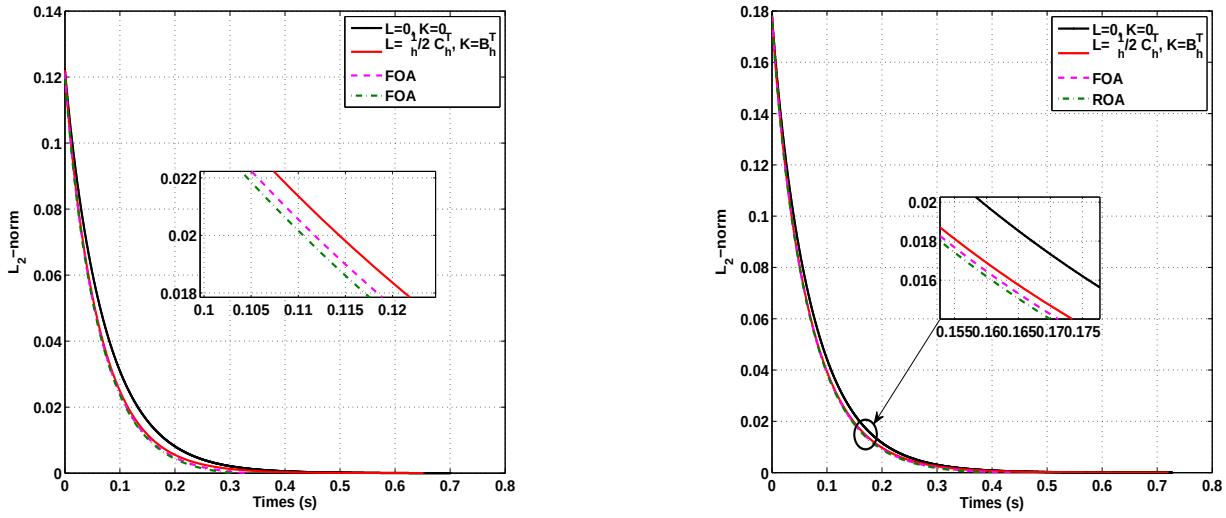


(a) (b)

FIGURE 6.5 – La norme L_2 de la solution $\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_{\mathbb{M}_h}$ sous l'action de la commande stabilisante $\tilde{u}_h = -\mathbb{K}\hat{\widetilde{T}}_h$: A gauche, les conditions initiales homogènes $\widetilde{T}_{0,h} = 0.5$ et $\hat{\widetilde{T}}_{0,h} = 0.35$. A droite, les conditions initiales non homogènes, voir figure 1.2.

	FOB		ROB		CG	
h	LMI (s)	CPU (s)	LMI(s)	CPU (s)	$\lambda_h^1/2$	CPU (s)
0.25	2.12	289.52	1.79	243.87	0.36	277.9
0.1	4.72	417.9	2.3	378.53	0.06	392.52
0.05	393.19	1704.4	3.18	1518.73	0.017	1674.32
0.025	8131.52	8.682e3	5.6	8.475e3	0.0043	8.93e3

TABLE 6.3 – Le temps en secondes (s) mis pour résoudre la LMI et pour la convergence de l'algorithme.



(a) (b)

FIGURE 6.6 – La norme L_2 de la solution $\|\widetilde{T}_h(\xi)\|_{\mathbb{M}_h}$ sous l'action de la commande stabilisante $\tilde{u}_h = -\mathbb{K}\hat{\widetilde{T}}_h$, cas $\mathcal{H}_\infty$: A gauche, les conditions initiales homogènes $\widetilde{T}_{0,h} = 0.5$ et $\hat{\widetilde{T}}_{0,h} = 0.35$. A droite, les conditions initiales non homogènes, voir figure 1.2.

	FOB		ROB		CG	
h	LMI(s)	CPU (s)	LMI(s)	CPU (s)	$\lambda_h^1/2$	CPU (s)
0.25	3.23	287.76	1.84	261.73	0.36	301.8
0.1	6.18	532.56	3.5	379.73	0.06	532.52
0.05	421.65	2089.73	4.68	1912.73	0.017	2304.27
0.025	8424.32	9.973e4	6.71	8.78e3	0.0043	9.831e3

TABLE 6.4 – Le temps en secondes (s) mis pour résoudre la LMI et pour la convergence de l'algorithme : Cas $\mathcal{H}_\infty$

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité la structure particulière du modèle approché des EDPs non linéaires décrivant les phénomènes de transfert de chaleur rayonnement-conduction et la DMVT pour montrer qu'il existe une matrice de gain de l'observation dans le cas d'une approche d'ordre plein et d'ordre réduit qui assure la stabilité exponentielle. Le deuxième résultat prouve la supériorité de la technique DMVT dans la construction du gain d'observation satisfaisant les conditions de stabilité et garantissant la bornutide de l'estimé. Enfin, nous avons étendu l'approche d'ordre réduit dans le cas de la commande basée observateur et nous avons montré la stabilité exponentielle sous l'action de la rétroaction. Une extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ est également proposée.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire nous a permis d'étudier d'un point de vue théorique et numérique les transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction à travers un milieu semi-transparent, gris et non diffusant, dans le cas d'une géométrie multidimensionnelle en 2D. Le sujet que nous avons traité fait l'objet d'un nombre important de recherches en raison de ses applications industrielles variées, notamment en ce qui concerne le thermoformage du verre. Il s'agissait d'étudier les transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction. Ces deux modes de transfert de chaleur sont décrits par un couplage non linéaire de l'équation de la chaleur non linéaire et de l'équation du transfert radiatif (ETR).

Nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité locale de la solution pour un système couplé des équations de rayonnement et de conduction avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes, en utilisant le théorème du point fixe de Banach comme principal argument de démonstration.

Par ailleurs, les travaux réalisés nous ont permis de mettre au point un code de calcul qui permet de simuler la température dans un milieu semi-transparent, gris et non diffusant. Nous avons utilisé la quadrature S_N pour la discrétisation angulaire de l'ETR. La discrétisation du domaine en espace est effectuée par la méthode de Galerkin discontinue (DG) pour l'ETR et la méthode des éléments finis pour l'équation de la chaleur non linéaire. Une linéarisation de type Newton du terme non linéaire nous a permis de découpler le système des équations.

Nous avons démontré la convergence du schéma numérique couplé en utilisant la méthode du point fixe discret et la formulation de Brezzi-Rappaz-Raviart employée afin d'établir la convergence de la méthode de Galerkin pour résoudre l'EDP parabolique semi-linéaire.

Le modèle discret sous la forme d'équations différentielles ordinaires non linéaires nous a permis de faire l'analyse et la synthèse d'estimateurs d'état et de lois de commande pour la stabilisation et la poursuite de trajectoires. La synthèse d'observateurs non linéaires est nécessaire, car il est difficile, voire impossible, de mesurer le grand nombre des variables d'état dans le système, de très grandes dimensions, obtenu. Grâce à la structure particulière du modèle et à l'aide du théorème des accroissements finis (DMVT), nous avons proposé un observateur d'ordre réduit. D'autre part, nous avons réussi à construire une matrice de gain qui assure la stabilité de l'observateur proposé. Une extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$, dans le cas d'un milieu perturbé, est également proposée. Une nouvelle inégalité matricielle (LMI) est donnée dans le cas d'une commande basée observateur, où les matrices des gains de l'observateur et de la commande sont calculées simultanément en résolvant une seule inégalité. Nous avons étendu l'approche réduite dans le cas de la commande basée observateur et nous avons montré la stabilité asymptotique sous l'action de la rétroaction. De même, une extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ est également proposée. Tous les résultats sont validés par des simulations numériques.

Enfin, concernant les perspectives d'étude apparaissant à l'issue de ce travail, celles-ci sont relativement nombreuses. Nous pouvons envisager les points suivants :

(a) Etendre la stabilisation par Backsteping, une approche développée par Krstic [96], ainsi que la synthèse d'observateur au système couplé rayonnement-conduction en dimension infinie en 1D (une collaboration avec M. Krstic est envisageable) ;

(b) Etendre les approches proposées pour l'analyse et la synthèse de lois de commande basées observateurs en 3D ;

(c) Exploiter les méthodes directes pour l'analyse de la contrôlabilité et de l'observabilité du système des EDP couplées rayonnement-conduction représentées en dimensions infinies ;

(d) Aborder le problème du contrôle optimal en utilisant l'algorithme d'optimisation non linéaire FAIPA [79]. Cet algorithme utilise la formulation Quasi-Newton qui permet d'éviter le stockage des matrices d'approximations. Nous pourrions même envisager une comparaison avec les résultats présentés dans [123, 59], si l'on considère le système ETR plus CT comme équation d'état.

(e) Etendre l'étude du problème, en considérant de manière générale des frontières semi-transparentes, ceci afin de pouvoir étudier différents types de matériaux semi-transparents, notamment les verres qui présentent un grand intérêt industriel ;

(f) Traiter le problème lorsque les coefficients radiatifs varient avec la température ou encore lorsqu'ils varient en fonction de la position dans le milieu, ce qui correspond à un milieu non homogène ;

(g) Généraliser le modèle au cas 3D, en considérant des géométries complexes. On préconise aussi d'utiliser une méthode de décomposition de domaine et de faire du calcul parallèle, MPI. En rayonnement s'ajoute la parallélisation suivant les longueurs d'onde dans un milieu non gris ;

(h) Faire une étude mathématique et une analyse de convergence des schémas numériques (existence , unicité, erreurs, précisions des schémas numériques) en 3D ;

(i) Nous pouvons envisager enfin l'extension de l'étude au problème du couplage avec la convection. Il est certain que la prise en compte de la convection rend l'étude plus complexe. Ce problème constitue un vaste champ de recherche. Au préalable, il faudra étudier le transfert de chaleur combiné rayonnement-convection.

Bibliographie

[1] M. Abbaszadeh and H. Marquez. Nonlinear observer design for one-sided lipschitz systems. IEEE American Contr. Conf., (Baltimore, USA), 2010.

[2] V. I. Agoshkov. *Boundary Value Problems for Transport Equations.* Springer, 1998.

[3] T. Ahmed-Ali and F. Lamnabhi-Lagarrigue. Sliding observer-controller design for uncertain triangular nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44 :1244–1249, 1999.

[4] A. Alessandri. Design of observers for lipschitz nonlinear systems using lmi. In NOLCOS, IFAC symposium on nonlinear control systems. Stuttgart, Germany, 2004.

[5] A. A. Amosov. Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency. *Journal of Mathematical Sciences*, 165(1) :1–41, 2010.

[6] A. A. Amosov. Nonstationary radiative-conductive heat transfer problem in a periodic system of grey heat shields. *Journal of Mathematical Sciences*, 169(1) :1–45, 2010.

[7] A. A. Amosov. Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency. *Journal of Mathematical Sciences*, 164(3) :309–344, 2010.

[8] A. A. Amosov. Semidiscrete and asymptotic approximations for the nonstationary radiative–conductive heat transfer problem in a periodic system of grey heat shields. *Journal of Mathematical Sciences*, 176(3) :361–408, 2011.

[9] M. Asadzadeh. Analysis of a fully discrete scheme for neutron transport in two-dimensional geometry. *SIAM J. Numer. Anal.*, 3 :543–561, 1986.

[10] M. Asadzadeh. Analysis of a Fully Discrete Scheme for Neutron Transport in Two-Dimensional Geometry. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23 :543–561, 1986.

[11] M. Asadzadeh. l^p and eigenvalue error estimates for the discrete ordinates method for two-dimensional neutron transport. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1 :66–87, 1986.

[12] F. Asllanaj. *Étude et analyse numérique des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction dans les milieux semi-transparents : application aux milieux fibreux.* Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré- Nancy 1, 2001.

[13] F. Asllanaj. Modélisation et simulation numérique du rayonnement et des transferts couplés dans les milieux semi-transparents complexes. application à l'isolation ther- mique et à la mise en forme du verre. *Mémoire d'HDR, Université Henri Poincaré*, Nancy, 2009.

[14] F. Asllanaj, V. Feldheim, and P. Lybaert. Solution of radiative heat transfer in 2-d geometries by a modified finite volume method based on a cell vertex scheme using unstructured triangular meshes. *Numer. Heat Transfer B*, 51(2) :97–119, 2007.

[15] F. Asllanaj, G. Jeandel, and J. Roche. Convergence of a numerical scheme for a nonlinear coupled system of radiative-conductive heat transfer equations. *Math. Models Methods Appl. Sci*, 7 :943–974, 2004.

[16] F. Asllanaj, G. Jeandel, J. R. Roche, and D. Schmitt. Existence and uniqueness of a steady state solution of a coupled radiative-conductive heat transfer problem for a non-grey anisotropically and participating medium. *Transport Theory and Statistical Physics*, 32(1) :1–35, 2003.

[17] F. Asllanaj, G. Parent, and G. Jeandel. Transient radiation and conduction heat transfer in a gray absorbing-emitting medium applied on two-dimensional complex-shaped domains. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 52(2) :179–200, 2007.

[18] A. Atassi and H. Khalil. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :1672–1687, 1999.

[19] K. Atkinson and W. Han. *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework*. Springer New York, third edition, 2009.

[20] G. Bal. *Couplage d' Equations et Homogénisation en Transport Neutronique*. 1997.

[21] M. Balas. Feedback control of linear diffusion processes. *International Journal of Control*, 29(3) :523–534, 1979.

[22] M. Balas. The galerkin method and feedback control of linear distributed parameter systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (2) :527–546, 1983.

[23] J. M. Banoczi and C. T. Kelley. A fast multilevel algorithm for the solution of nonlinear systems of conductive–radiative heat transfer equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19 :266–279, 1998.

[24] M. Benallouch, M. Boutayeb, and H. Trinh. $\mathcal{H}_\infty$ observer-based control for discrete-time one-sided lipschitz systems with unknown inputs. *SIAM J. Control Optim.*, 53(6) :3751–3775, 2014.

[25] M. Benallouch, M. Boutayeb, and M. Zasadzinski. Observers design for one-sided lipschitz discrete-time systems. *Systems Control Lett.*, 61 :879–886, 2012.

[26] O. Bernard and J. L. Gouze. State estimation for bioprocesses. In *lecture notes : Mathematical Control Theory*, Trieste, ICTP, 2002.

[27] O. Bernard, G. Sallet, and A. Sciandra. Nonlinear observers for a class of biological systems : Application to validation of a Phytoplanktonic growth model. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(8) :1056–1065, 1998.

[28] G. Bornard, F. Celle-Couenne, and G. Gilles. Observabilite et observateurs. chapitre 3. systemes non lineaires. tome 1 : Modelisation-estimation. *Masson*, 1993.

[29] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control , Brighton, England*, 1991.

[30] S. Boyd, L. E. Ghaoul, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.

[31] S. C. Brenner and R. L. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer New York, third edition, 2008.

[32] F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini, and E. Suli. Stabilization mechanisms in Discontinuous Galerkin finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 25-28 :3293–3310, 2006.

[33] F. Brezzi, J. Rappaz, and P. Raviart. Finite-dimensional approximation of nonlinear problems. part i :braches of nonsingular solutions. *Numer. Math.*, 36 :1–25, 1980.

[34] L. D. Brezzi, F. Marini and E. SuLi. Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14 :1893–1903, 2004.

[35] C. C. Edwards and S. K. Spurgeon. *Sliding Mode Control : Theory and Applications*. Taylor and Francis, 1998.

[36] T. Cazenave and A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Ellipses, Paris, 1990.

[37] M. Cessenat. Théorèmes de trace pour L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. *Comptes rendus des séances de l Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 299(16) :831–834, 1984.

[38] P. D. Christofides. *Nonlinear and robust control of PDE systems : methods and applications to transport-reaction processes*. Boston ; asel ; Berlin : Birkhauser, 2001.

[39] K. Chrysafinos and L. S. Hou. Error estimates for semi discrete finite element approximations of linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(1) :282–306, 2002.

[40] E. H. Chui and G. D. Raithby. Computation of Radiant Heat Transfer on a Nonorthogonal Mesh Using the Finite-Volume Method. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 23 :269–288, 1993.

[41] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[42] B. Cockburn and C.-W. Shu. Runge Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated problems. *J. Sci. Comput.*, 16(3) :173–261, 2002.

[43] X. Cui and B. Q. Li. A Discontinuous Finite Element Formulation for Multidimensional Radiative Transfer in Absorbing, Emitting, and Scattering Media. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 46 :399–428, 2004.

[44] X. Cui and B. Q. Li. A Discontinuous Finite-Element Formulation for Radiative Transfer in Axisymmetric Finite Cylindrical Enclosures and Coupling with Other Mode Heat Transfer. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 48 :317–344, 2005.

[45] R. Curtain. Finite-dimensional compensator design for parabolic distributed systems with point sensors and boundary input. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, (1) :98–104, 1982.

[46] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1988.

[47] K. Dekker and J. G. VVerwer. *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. Amsterdam : North-Holland, 1984.

[48] A. Drouot. *Stratégies de commande pour la navigation autonome d'un drone projectile miniature*. Ph.D. thesis, Université de Lorraine, 2013.

[49] N. El-Farra, A. Armaou, and P. D. Christofides. Analysis and control of parabolic PDE systems with input constraints. *Automatica*, 39(4) :715–725, 2003.

[50] A. Ern and J. Guermond. Discontinuous galerkin methods for friedrichs systems.i.general theory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(2) :753–778, 2006.

[51] F. Esfandiari and H. Khalil. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *International Journal of Control*, 56 :1007–1037, 1992.

[52] F. Esfandiari and H. Khalil. Observer-based design of uncertain systems : recovering state feedback robustness under matching conditions. pages 97–106, Proceedings of Allerton Conference, Monticello, IL, September 1987.

[53] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Jan. 1998.

[54] M. Farooq, P. R. China, and N. U. Daobo, W. ; Dar. Improved hybrid position/force controller design of a flexible robot manipulator using a sliding observer. *Systems Engineering and Electronics, Journal of*, 20(1) :146–158, 2012.

[55] M. Farza, K. Busawon, and H. Hammouri. Simple nonlinear observers for on-line estimation of Kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 34(3) :301–318, 1993.

[56] H. O. Fattorini. Boundary control systems. *SIAM Journal on Control*, 6(3) :349–385, 1968.

[57] W. Fiveland. Discrete ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular encolsures. *Journal of Heat Transfer*, 106 :699–706, 1984.

[58] W. Fiveland. The selection of discrete ordinate quadrature sets for anisotropic scarttering. *Fundamentals of Radiation Heat Transfer-ASME*, 160(89-96), 1991.

[59] A. Frank, M. Klar and R. Pinnau. Optimal control of glass cooling using simplified p_N theory. *Transport Theory and Statistical Physics*, 39 :282–311, 2011.

[60] P. Furmanski and J. Banaszek. Finite element analysis of concurrent radiation and conduction in participating media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 84 :563–573, 2004.

[61] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(6) :875–880, 1992.

[62] M. Ghattassi. Convergence of a galerkin scheme for a 2D nonlinear coupled system of radiative-conductive heat transfer equations. *Soumise à ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*.

[63] M. Ghattassi and M. Boutayeb. LMI condition for reduced order observer-based $\mathcal{H}_\infty$ stabilization of a radiative-conductive heat transfer systems. *Soumise à : Automatica*.

[64] M. Ghattassi and M. Boutayeb. Nonlinear controller design for class of parabolic-hyperbolic systems. *A paraitre dans : Journal of Nonlinear Systems and Applications*, 2015.

[65] M. Ghattassi, M. Boutayeb, and J. R. Roche. LMI condition for reduced order observer of a radiative-conductive heat transfer systems. *Soumise à :SIAM Journal(SICON)*.

[66] M. Ghattassi, M. Boutayeb, and J. R. Roche. On reduced order state estimators for radiative - conductive heat transfer systems. Proceeding (16 pages) East Asia Section of SIAM (EASIAM).

[67] M. Ghattassi, M. Boutayeb, and J. R. Roche. Lmi condition for observer-based $\mathcal{H}_\infty$ stabilization of a radiative-conductive heat transfer systems. Proceeding (6 pages) CDC Conference on Decision and Control- Osaka, Japan, 2015.

[68] M. Ghattassi, M. Boutayeb, and J. R. Roche. State observer design for non linear coupled partial differential equations with application to radiative-conductive heat transfer systems. Proceeding (6 pages) CDC Conference on Decision and Control, 2014.

[69] M. Ghattassi, M. Boutayeb, and J. R. Roche. Observer based control for a class of coupled parabolic hyperbolic systems. Proceeding (8 pages) SIAM CT15, Paris, France, on July 8-10, 2015.

[70] M. Ghattassi, M. Boutayeb, and J. R. Roche. On reduced order observer for radiative conductive heat transfer systems. Proceeding (8 pages) SIAM CT15, Paris, France, on July 8-10, 2015.

[71] M. Ghattassi, J. Roche, and D. Schmitt. $2d$-local existence and uniqueness of a transient state of a coupled radiative-conductive heat transfer problem. *Soumise à : Journal of mathematical analysis and application*, 2015.

[72] B. Grandvallet, A. Zemouche, H. Souley-Ali, and M. Boutayeb. New LMI condition for observer-based H_∞ stabilization of a class of nonlinear discrete-time systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(1) :784–800, 2013.

[73] G. Hagen and I. Mezic. Spillover Stabilization in Finite-Dimensional Control and Observer Design for Dissipative Evolution Equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(2) :746–768, 2003.

[74] M. Hamida, A. Glumineau, and J. De Leon. High order sliding mode observer and optimum integral backstepping control for sensorless ipmsm drive. American Control Conference (ACC), 2013.

[75] W. Han, J. Huang, and J. A. Eichholz. Discrete-Ordinate Discontinuous Galerkin Methods for Solving the Radiative Transfer Equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32 :477–497, 2010.

[76] S. M. Hashemi and H. Werner. LPV modelling and control of burgers' equation. 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, 2011.

[77] W. Heemels, J. Daafouz, and G. Millerioux. Observer-based control of discrete-time lpv systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. Automat. Control*, 55 :2130–2135, 2010.

[78] R. Herman and J. Krener. Nonlinear controlability and observability. *IEEE Trans. Automatic Control*, 22(5) :728–740, 1977.

[79] J. Herskovits, P. Mappa, E. Goulart, and C. Mota Soares. Mathematical programming models and algorithms for engineering design optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :3244–3268, 2005.

[80] J. S. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods : Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer, 2008.

[81] J. R. Howell. The Monte Carlo Method in Radiative Heat Transfer. *J. Heat Transfer*, 120 :547–560, 1998.

[82] G. Hu. Observers for one-sided lipschitz non-linear systems,. *IMA J. Math. Control Inform.*, 23 :395–401, 2006.

[83] S. Ibrir. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *Automatica*, 43, 2007.

[84] S. Ibrir and S. Diopt. Novel lmi conditions for observer-based stabilization of lipschitzian nonlinear systems and uncertain linear systems in discrete-time. *Appl. Math. Comput.*, 206 :579–588, 2008.

[85] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, Aug. 1995.

[86] S. Islam and P. Liu. Robust sliding mode control for robot manipulators. *Automatic Control, IEEE Transactions*, 58(6) :2444–2453, 2011.

[87] K. K. Hesse and I. H. Sloan. Cubature over the sphere S^2 in sobolev spaces of arbitrary order. *J. Approx. Theory*, 141 :118–133, 2006.

[88] C. T. Kelley. Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations. *Transport Theory and Statistical Physics*, 25(2) :249–260, 1996.

[89] C. T. Kelley. Multilevel source iteration accelerators for the linear transport equation in slab geometry. *Transport Theory Statist. Phys.*, 25 :249–260, 1996.

[90] H. Khalil and A. Saberi. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32 :1031–1035, 1987.

[91] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall PTR, 2002.

[92] R. Koch and R. Becker. Evaluation of quadrature schemes for the discrete ordinates method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 84(4) :423–435, 2004.

[93] A. E. Kovtanyuk and A. Y. Chebotarev. An iterative method for solving a complex heat transfer problem. *Applied Mathematics and Computation*, 219(17) :9356–9362, 2013.

[94] A. E. Kovtanyuk and A. Y. Chebotarev. Steady-state problem of complex heat transfer. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 54(4) :719–726, 2014.

[95] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, New York, NY,USA, 1995.

[96] M. Krstic and A. Smyshlyaev. *Boundary Control of PDEs : A Course on Backstepping Designs*. SIAM, 2008.

[97] O. A. Ladyzenskaja, S. Smith, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Types*. American Mathematical Soc., 1968.

[98] S. Laghrouche, F. Ahmed, and A. Mehmood. Pressure and friction observer-based backstepping control for a vgt pneumatic actuator. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 22(2) :456–467, 2014.

[99] E. W. Larsen and P. Nelson. Finite-difference approximations and super-convergence for the discrete-ordinate equations in slab geometry. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 :334–349, 1982.

[100] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Control Theory for Partial Differential Equations : Volume 1, Abstract Parabolic Systems : Continuous and Approximation Theories*. Cambridge University Press, 2000.

[101] B. Le Corre. *Thermoformage du verre Développement numérique d'un modèle thermomécanique*. Ph.D. thesis, Université Lorraine, 1984.

[102] P. Lesaint and P. Raviart. *On a Finite Element Method for Solving the Neutron Transport Equation*. Univ. Paris VI, Labo. Analyse Numérique, 1974.

[103] P. Lesaint and P. A. Raviart. *On a finite element method for solving the neutron transport equation, in Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*. C. de Boor, ed. Academic Press. New-York,p. 89-123, 1974.

[104] C. Lien. Robust observer-based control of systems with state perturbations via lmi approach. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 49 :1365–1370, 2004.

[105] J. Lofberg. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. in Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, IEEE Computer Society Press, Piscataway, NJ, 2004, pp. 284-289.

[106] M. M. Abbaszadeh and H. J. Marquez. Lmi optimization approach to robust $\mathcal{H}_\infty$ observer design and static output feedback stabilization for discrete-time nonlinear uncertain systems. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 1 :313–340, 2009.

[107] M. M. Xu, G. Hu, and Y. Zhao. Reduced-order observer design for one-sided lipschitz non-linear systems. *IMA J. Math. Control Inform.*, 26 :299–307, 2009.

[108] R. H. Martin. *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces.* New York : Wiley Interscienc, 1976.

[109] E. A. Misawa and J. K. Hedrick. Nonlinear observers-a state of the art survey. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 111 :344–352, 1989.

[110] S. C. Mishra and A. Lankadasu. Application of the lattice Boltzmann method for solving the energy equation of a 2-d transient conduction–radiation problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pages 3648–3659, 2005.

[111] S. C. Mishra and H. Sahai. Analysis of non-Fourier conduction and radiation in a cylindrical medium using lattice Boltzmann method and finite volume method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 61 :41–55, 2013.

[112] S. C. Mishra, P. Talukdar, D. Trimis, and F. Durst. Computational efficiency improvements of the radiative transfer problems with or without conduction a comparison of the collapsed dimension method and the discrete transfer method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46 :3083–3095, 2003.

[113] M. F. Modest. *Radiative Heat Transfer.* Academic Press, 2003.

[114] P. Nelson. Convergence of the discrete-ordinates method for anisotropically scattering multiplying particles in a subcritical slab. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 :175–181, 1973.

[115] P. Nelson and H. D. Victory. Theoretical properties of one–dimensional discreteordinates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 16 :270–283, 1979.

[116] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft. Nonlinear dynamical control systems. *Spring-Verlag*, 1990.

[117] M. N. Ozisik. *Radiative transfer and interactions with conduction and convection.* Wiley, 1973.

[118] M. S. Perla, R. Observer design for lipschitz nonlinear systems with state dependency and nonlinearity distribution. In IEEE INDICON 2005 conference. Chennai, India. June.

[119] A. Phanomchoeng, G. Rajamani and D. Piyabongkarn. Nonlinear observer for bounded jacobean systems, with applications to automotive slip angle estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(5) :18–27, 2011.

[120] G. Phanomchoeng and R. Rajamani. Observer design for lipschitz nonlinear systems using riccati equations. American Control Conference (ACC), 2010.

[121] R. R. Phanomchoeng, G. Observer design for lipschitz nonlinear systems using riccati equations. In IEEE American control conference ACC'10. Baltimore, MD, USA, 2010.

[122] D. A. Pietro and A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods.* Springer, 2011.

[123] R. Pinnau and G. Thommes. Optimal boundary control of glass cooling processes. *Math. Methods Appl. Sci.*, 27(11) :11261–1281, 2004.

[124] J. Pitkaranta and R. R. Scott. Error estimates for the combined spatial and angular approximations of the transport equation in slab geometry. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 :922–950, 1983.

[125] S. Raghavan and J. K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. of Control*, 59(2) :515–528, 1994.

[126] R. Rajamani. Observers for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3), 1998.

[127] W. H. Ray. *Advanced process control*. McGraw-Hill, 1981.

[128] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation.

[129] A. Saberi and P. Sannuti. Observer design for loop transfer recovery and for uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35 :878–897, 1990.

[130] J. F. Sacadura. *Initiation aux transferts thermiques. Technique et documentation*. 1980.

[131] N. Shah. *New method of computation of radiation heat transfer in combustion chambers*. Ph.D. dissertation, Departement of Mechanical Engineering, Imperial College of science and Technology, University of London, 1979.

[132] E. D. Sontag. A concept of local observability. *Systems and Control Letters*, 5(1) :41–47, 1984.

[133] L. Soudre. Etude numérique et expérimentale du thermoformage d'une plaque de verre. *Phd thesis Université Henri Poincaré Nancy I, France*, 2008.

[134] L. Soudre. *Numerical and experimental study of glass plate forming,*. Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré- Nancy 1, 2008.

[135] A. Teel and L. Praly. Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *Systems Control Lett.*, 22 :313–325, 1994.

[136] A. Teel and L. Praly. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM J. Control Optim.*, 33 :1443–1488, 1995.

[137] R. Temam. *Navier-Stokes Equations-Theory and Numerical Analysis*. Elsevier Science, Amsterdam, 1984.

[138] N. Thach, V. Andrieu, M. Nadri, and U. Serres. Continuous-discrete time observer design for lipschitz systems with sampled measurements. *Automatic Control, IEEE Transactions*, 60(3) :787–792, 2015.

[139] F. E. Thau. Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int. J. of Control*, 17(3) :471–479, 1973.

[140] M. Thompson, C. Segatto, and M. De Vilhena. Existence theory for the solution of a stationary nonlinear conductiveradiative heattransfer problem in three space dimensions. *Transport Theory and Statistical Physics*, 33(5-7) :55–67, 2004.

[141] A. Tornambe. Output feedback stabilization of a class of nonminimum-phase nonlinear systems. *Systems Control Lett.*, 19 :193–204, 1992.

[142] A. Tornambe. Use of asymptotic observers having high gains in the state and parameter estimation. pages 1791–1794, Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Austin, Texas, 1988.

[143] H. Trinh and T. Fernando. *Functional Observers for Dynamical Systems, in : Lecture Notes in Control and Information Sciences*. vol. 420, Springer-Verlag,Heidelberg, 2012.

[144] Y. Vinoth, V.and Singh, J. Mohanta, and M. Santhakumar. Robust disturbance observer based sliding mode control of a planar parallel (3-ppr) manipulator. Engineering and Systems (SCES), 2014 Students Conference on, 2014.

[145] F. W. W. Freeden, T. Gervens, and M. Schreiner. *Constructive Approximation on the Sphere with Applications to Geomathematics*. Oxford University Press, Oxford, 1998.

[146] B. L. Walcott, M. J. Corless, and S. H. Zak. Comparative study of nonlinear state observation techniques. *Int. J. of Control*, 45(6) :2109–2132, 1987.

[147] M. Wu, Y. He, and J. H. She. *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer, Berlin, 2010.

[148] L. Xie and C. De Souza. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertaintes. *IEEE Trans. Aut. Control*, 37 :1188–1191, 1992.

[149] Y. Y. Zhao, J. Tao, and N. Shi. A note on observer design for one-sided lipschitz nonlinear systems. *Systems Control Lett.*, 59 :66–71, 2010.

[150] A. Zemouche. *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linèaires*. Thèse de Doctorat, Université de Strasbourg, 2007.

[151] A. Zemouche and M. Boutayeb. Observers for a class of lipschitz systems with extension to H_∞ performance analysis. *Systems & Control Letters*, (1) :18–27, 2008.

[152] A. Zemouche and M. Boutayeb. Nonlinear observers-based h synchronization and unknown input recovery. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 56(8) :1720–1731, 2009.

[153] A. Zemouche and M. Boutayeb. A unified H_∞ adaptive observer synthesis method for a class of systems with both lipschitz and monotone nonlinearities. *Systems & Control Letters*, 58(4) :282–288, 2009.

[154] A. Zemouche and M. Boutayeb. On LMI conditions to design observers for lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49(2) :585–591, 2013.

[155] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. Observers for a class of lipschitz systems with extension toh performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57(1) :18–27, 2008.

[156] W. Zhang. Reduced-order observer design for one-sided lipschitz nonlinear systems with unknown inputs. 33rd Chinese Control Conference (CCC), 2014.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire nous a permis d'étudier d'un point de vue théorique et numérique le transfert de chaleur couplé par rayonnement et conduction à travers un milieu semi-transparent, gris et non diffusant dans une géométrie multidimensionnelle 2D. Ces deux modes de transfert de chaleur sont décrits par un couplage non linéaire de l'équation de la chaleur non linéaire (CT) et de l'équation du transfert radiatif (ETR). Nous avons présenté des résultats d'existence, d'unicité locale de la solution pour le système couplé avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes en utilisant le théorème du point fixe de Banach. Par ailleurs, les travaux réalisés nous ont permis de mettre au point un code de calcul qui permet de simuler la température. Nous avons utilisé la quadrature S_N pour la discrétisation angulaire de l'ETR. La discrétisation de l'ETR dans la variable spatiale est effectuée par la méthode de Galerkin discontinue (DG) et en éléments finis pour l'équation de la chaleur non linéaire. Nous avons démontré la convergence du schéma numérique couplé en utilisant la méthode du point fixe discret. Le modèle discret, sous la forme d'équations différentielles ordinaires non linéaires obtenu après une approximation nous a permis de faire l'analyse et la synthèse d'estimateurs d'état et de lois de commande pour la stabilisation. Grâce à la structure particulière du modèle et à l'aide du DMVT. Nous avons proposé un observateur d'ordre réduit. D'autre part nous avons réussi à construire une matrice de gain qui assure la stabilité de l'observateur proposé. Une extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ est également proposée. Une nouvelle inégalité matricielle (LMI) est donnée dans le cas d'une commande basée observateur. Nous avons étendu à l'approche d'ordre réduit dans le cas de la commande basée observateur et nous avons montré la stabilité sous l'action de la rétroaction. De même une extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ est également proposée. Tous les résultats sont validés par des simulations numériques.

Abstract

This thesis investigates the theoretical and numerical analysis of coupled radiative conductive heat transfer in a semi-transparent, gray and non-scattering 2D medium. This two heat transfer modes are described by the radiative transfer equation (RTE) and the nonlinear heat equation (NHE). We proved the existence and uniqueness of the solution of coupled systems with homogeneous Dirichlet boundary conditions using the fixed-point theorem. Moreover, we developed a useful algorithm to simulate the temperature in the medium. We used the quadrature S_N for the angular discretization of the RTE. The spatial discretization of RTE was made by the discontinuous Galerkin method (DG) and the finite element method for the non-linear heat equation. We have shown the convergence and the stability of the coupled numerical scheme using the discrete fixed point. The discrete model obtained after an approximation allowed us to do the analysis and synthesis of state estimators and feedback control design for stabilization of the system. Thanks to the special structure of the model and using the Differential Mean Value Theorem (DMVT), we proposed a reduced order observer and we construct a gain matrix, which ensures the exponential stability of the proposed observer and guarantees the boundedness of the estimate vector. An extension

to $\mathcal{H}_\infty$ filtering is also provided. We have extended the reduced order approach in the case of the observer-based controller and we proved the exponential stability under the control feedback law. Similarly, an extension to $\mathcal{H}_\infty$ filtering is also provided. The obtained results were validated through several numerical simulations.