AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Institut Elie Cartan de Lorraine

Thèse en cotutelle

Specialité : Mathématiques

Titre :

Caractérisations des familles exponentielles naturelles cubiques

Etude des lois Beta généralisées et de certaines lois de Kummer.

Présentée par :

Marwa Hamza

Soutenue le 18 mai 2015

devant le Jury :

Abdelhamid Hassairi	Co-directeur
Efoevi Angélo Koudou	Examinateur
Gérard Letac	Rapporteur
Afif Masmoudi	Examinateur
Pierre Vallois	Co-directeur
Vicent Vigon	Examinateur
Jacek Wesolowski	Rapporteur

Année Universitaire : 2014 - 2015

Table des matières

Introduction générale **5**

General introduction **9**

1 Characterizations of the real cubic natural exponential families using a Bayesian approach **11**

1.1 General facts on the natural exponential families 12

1.2 The Consonni and Veronese characterizations 16

1.3 A transformation on natural exponential families 17

1.4 Conjugate families of prior distributions 22

1.5 Bayesian characterizations of cubic natural exponential families 30

2 Etude des familles de distributions de Kummer de type 2 et Beta généralisées **47**

2.1 Introduction 47

2.1.1 Propriété d'indépendance de Matsumoto et Yor 48

2.1.2 L'extension de Koudou et Vallois de la propriété d'indépendance de Matsumoto et Yor 49

2.1.3 Présentation des résultats essentiels 53

2.2 Etude approfondie des lois de Kummer de type 2 59

2.2.1 Caractérisation des lois de Kummer de type 2 59
2.2.2 Réalisations presque sûres des lois de Kummer de type 2 68
2.3 Etude approfondie des lois Beta généralisées 81
2.3.1 Caractérisation des lois Beta généralisées 81
2.3.2 Réalisations presque sûres des lois Beta généralisées 94

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes directeurs de thèse Abdelhamid Hassairi et Pierre Vallois pour m'avoir encadrée tout au long de cette thèse et pour la disponibilité dont ils ont fait preuve pour moi afin de prodiguer leurs conseils et leur aide. Tout en restant à mon écoute, ils étaient deux encadreurs d'exception.

Je suis honorée que Gérard Letac et Jacek Wesołowski aient accepté de rapporter ma thèse.

Je remercie également Efoevi Angelo Koudou que j'aie le plaisir de travailler avec lui durant mes séjours à Nancy. Bien sûr, je n'oublie pas sa qualité humaine et sa gentillesse.

Je remercie les examinateurs de ma thèse: Afif Masmoudi et Vincent Vigon.

Je tiens à remercier aussi Bernard Roynette qui était à l'origine de la collaboration entre l'université de Sfax et l'université de Lorraine. Merci pour ses encouragements, son soutien, ses discussions et ses remarques au début de notre travail. Merci pour son bon cœur et son accueil. Merci à Elodie Cunat et Nathalie Benito pour leur aide concernant la réservation du logement pour mes visites à Nancy. Un merci spécial à Nathalie pour son grand service au niveau de la procédure de dépôt de la thèse.

Merci à mes frères et sœurs de recherche du laboratoire des probabilités et statistique de la faculté des sciences de Sfax. Je suis heureuse de faire partie de cette petite camaraderie.

Mes derniers mots sont pour ma famille, à qui je dois tout et sans qui rien de cela n'aurait été possible. Je saisis cette occasion pour vous dire combien je suis heureuse de vous avoir tous. Cette thèse est naturellement dédiée pour vous.

Acknowledgement

I express my deep gratitude and my sincere thanks to my supervisors Abdelhamid Hassairi and Pierre Vallois. I appreciate them for their patience, their valuable advices and their availability through the preparation of this thesis.

All my respect and appreciation to gentlemen Gérard Letac and Jacek Wesołowski. I thank them for agreeing to be the referees of my thesis and for their suggestions and comments that led to significant improvement in the thesis. I specially thank Gérard Letac for his suggestions that helped us to improve the statements of our main results in the first chapter.

I appreciate Afif Masmoudi, Efoevi Angelo Koudou and Vincent Vigon for agreeing to serve on the jury.

Introduction générale

Cette thèse contient deux parties différentes. Nous allons donner une brève introduction de chaque partie, le lecteur pourra trouver une introduction plus détaillée au début de chaque chapitre. Dans la première partie nous nous sommes intéressés aux familles exponentielles naturelles cubiques. Nous avons donné trois caractérisations de ces familles en se basant sur une approche bayésienne. Il s'agit en effet de l'extension des caractérisations de Consonni et Veronese [3] des familles exponentielles naturelles quadratiques à la classe des familles exponentielles naturelles cubiques. Rappelons que Consonni et Veronese [3] ont considéré la famille conjuguée standard de lois a priori sur le paramètre canonique et ont montré qu'une famille exponentielle naturelle est quadratique si et seulement si l'espérance a posteriori de la moyenne peut s'écrire comme combinaison linéaire de la moyenne empirique et la moyenne a priori. Dans notre approche, nous introduisons pour chaque famille exponentielle naturelle F et un réel β, deux nouvelles familles F^β et $\widetilde{F}^\beta$ telles que $F^0 = \widetilde{F}^0 = F$. Nous définissons ensuite deux familles de lois a priori conjuguées respectivement par rapport à F^β et $\widetilde{F}^\beta$ qui généralisent les familles de lois a priori standards. Nous caractérisons alors une famille exponentielle naturelle cubique par l'existence d'un réel β tel que la somme de l'espérance a posteriori de la moyenne d'un élément de F^β et de l'espérance a posteriori de la moyenne d'un élément de $\widetilde{F}^\beta$ est une sorte de combinaison convexe de la moyenne empirique et de la moyenne a priori. Nous donnons aussi une deuxième caractérisation des familles exponentielles naturelles cubiques basée sur la forme de la fonction variance. Celle-

ci a conduit à une équation différentielle vérifiée par la fonction cumulante (Théorème 2.5 dans [6]). Nous nous sommes ensuite servi de cette dernière caractérisation pour établir notre troisième caractérisation qui est réalisée par une relation entre les nouvelles familles de lois a priori que nous avons introduites (Thèorème 2.6 dans [6]). La restriction de notre travail au cas $\beta = 0$ recouvre les résultats de Consonni et Veronese [3] pour les familles exponentielles naturelles quadratiques.

Nous remercions Gérard Letac pour avoir attiré notre attention sur une erreur dans la formulation de la Proposition 2.3 et par suite du Theorem 2.4 dans [6]. Les résultats ont été énoncés et montrés correctement dans le Chapitre 1 de la thèse (cf Proposition 1.5.2 et Theorem 1.5.3).

La deuxième partie de notre travail est consacrée aux conséquences de la propriété de type "Matsumoto et Yor" qui a été développée par Koudou et Vallois [9]. En effet, Matsumoto et Yor ont mis en évidence une propriété d'indépendance impliquant des couples de variables aléatoires de lois inverses gaussiennes généralisées et gamma. Cette identité a été étudiée en profondeur par Letac et Wesołowski [15].

La généralisation de la propriété de Letac Wesołowski Matsumoto Yor proposé par Koudou et Vallois [9] porte sur la recherche de fonctions f positives, bijectives et décroissantes vérifiant la propriété d'indépendance suivante : il existe deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $f(X+Y)$ et $f(X) - f(X+Y)$ sont indépendantes. Koudou et Vallois [9] ont montré qu'il existe exactement 4 classes de telles fonctions et pour chaque classe ils ont caractérisé, sous des conditions supplémentaires, les différentes lois des variables aléatoires associées. Une première classe correspond à la focntion $f(x) = 1/x$ et à la propriété d'indépendance de Letac Wesołowski Matsumoto Yor. Les trois autres classes de fonctions ont conduit aux lois de Kummer de type 2 et aux lois Beta généralisées.

Nous avons voulu étudier d'une façon plus approfondie la famille de lois de Kummer de type 2 et de lois Beta généralisées. Ainsi, nous donnons des réalisations presque sûres de

la famille de lois de Kummer de type 2 et de lois Beta généralisées en utilisant la méthode de conditionnement et la méthode du rejet. Plus précisément, nous montrons que certaines lois de Kummer de type 2 (resp. Beta généralisées) peuvent être considérées comme lois conditionnelles d'une variable aléatoire de loi Gamma (resp. Beta). Une autre réalisation pour les lois de Kummer est donnée en examinant le temps du premier passage de certaines marches aléatoires dans un domaine du plan. Nous donnons également des exemples de variables aléatoires X et Y qui réalisent la propriété d'indépendance généralisée par Koudou et Vallois [9].

D'autre part, nous caractérisons les lois de Kummer de type 2 (resp. les lois Beta généralisée) comme l'unique solution d'une équation impliquant les lois Gamma (resp. les lois Beta).

General introduction

This thesis contains two different parts. We briefly give below an idea on each part. The reader can find a detailed introduction at the beginning of each chapter.

In the first part of our thesis we have been interested in the Letac - Mora class of cubic natural exponential families, that is the families such that the variance function is a polynomial of degree less than or equal to 3. We extend to this class the properties and characterization results related to the Bayesian theory established for the Morris class of real quadratic natural exponential families by Consonni and Veronese [3]. In fact, this authors have considered the standard conjugate family of prior distributions on the canonical parameter and they have shown that a natural exponential family is quadratic if and only if the posterior expectation is a linear combinaison of the empirical mean and the prior mean. In our approach, we first introduce, for a given natural exponential family F and a real β, two other families F^β and $\widetilde{F}^\beta$ such that $F^0 = \widetilde{F}^0 = F$. We then define two families of prior distributions Π^β and $\widetilde{\Pi}^\beta$ which are conjugate with respect to F^β and $\widetilde{F}^\beta$. We characterize then a real cubic natural exponential family by the fact that there exist a real β such that the sum of the posterior expectation of the mean of an element of F^β and of the mean of an element of $\widetilde{F}^\beta$ is expressed in terms of its prior expectation and of the sample mean. We also give another characterization based on the form of the variance function. This leads to a differential equation verified by the cumulant function (Theorem 2.5 in [6]). This last characterization serves in the proof of a third characterization realized by a relation bet-

ween the two new families of prior distributions (Theorem 2.5 and Theorem 2.6 in [6]). The restriction of our results for $\beta = 0$ recovers the Consonni and Veronese [3] characterizations of the real quadratic exponential families.

We thank Gérard Letac for attracting our attention to a mistake in the formulation of Proposition 2.3 and consequently of Theorem 2.4 in [6]. These results have been stated and proved in a correct way in Chapter 1 of the thesis (cf Proposition 1.5.2 and Theorem 1.5.3).

In a second part of our work we study in depth the independence property of the type "Matsumoto and Yor" which has been developped by Koudou and Vallois [9]. In fact, Matsumoto and Yor have shown a property of independence which involves couples of independent random variables whose distributions are the generalized inverse Gaussian and gamma distributions. This property has been completed by Letac and Wesołowski [15]. Koudou and Vallois [9] have generalized this property. They have shown that their exist exactly 4 classes of positive, decreasing and bijective functions for which there exist two independent random variables X and Y such that $f(X+Y)$ et $f(X) - f(X+Y)$ are independent. One class corresponds to $f(x) = 1/x$ and the Letac Wesołowski Matsumoto Yor property. For the three other ones, Koudou and Vallois have characterized, under some additional assumptions, the different laws of the associated random variables. The merging distributions are the Kummer distributions of type 2 and the generalized Beta distributions.

Here, we study in depth the family of Kummer's distributions of type 2 and the generalized Beta distributions. We give almost sure realizations of this distributions using the conditioning and the rejection methods. We prove that some Kummer (resp. generalized Beta) distributions can be considered as the conditional laws of random variables with gamma (resp. Beta) distribution. A third realization is given using the first hitting time of some random variables in a domain in $\mathbb{R}^2$.

We characterize certain Kummer distributions of type 2 (resp. generalized Beta distribution) with an equation involving the gamma ones (resp. Beta ones).

Chapitre 1

Characterizations of the real cubic natural exponential families using a Bayesian approach

In this chapter we give our main results concerning the characterizations based on a Baysian approach of the Letac-Mora class of real cubic natural exponential families. It consists in an extension to this class of the Consonni and Veronese characterizations of the Morris class of real quadratic families.

In Section 1.1, we recall some general facts concerning the natural exponential families and their variance functions. In Section 1.2, we give briefly the Consonni and Veronese [3] characterizations of the Morris class.

After introducing in Section 1.3 a transformation on exponential natural families which we need in our approach, we define in Section 1.4 some new conjugate families of prior distributions. Section 1.5 is devoted to the extension of Consonni and Veronese characterizations to the Letac-Mora class of real cubic natural exponential families.

1.1 General facts on the natural exponential families

In this section we recall some facts concerning natural exponential families (NEF) and their variance functions. We also recall some analytical properties and classifications of NEFs by the form of the variance function.

Let μ be a positive Radon measure on $\mathbb{R}$, and denote

$$L_\mu(\lambda) = \int \exp(\lambda x)\mu(dx) \tag{1.1}$$

its Laplace transform. Let $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ be the set of measures μ such that the set

$$\Theta(\mu) = \text{interior}\{\lambda \in \mathbb{R};\ L_\mu(\lambda) < +\infty\} \tag{1.2}$$

is nonempty and μ is not a Dirac measure. The cumulant function of an element μ of $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ is the function defined for $\lambda \in \Theta(\mu)$ by

$$k_\mu(\lambda) = \ln L_\mu(\lambda).$$

To each μ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ and λ in $\Theta(\mu)$, we associate the probability distribution on $\mathbb{R}$

$$P(\lambda,\, \mu)(dx) = e^{\lambda x - k_\mu(\lambda)}\ \mu(dx). \tag{1.3}$$

The set

$$F(\mu) = \{P(\lambda,\, \mu);\ \lambda \in \Theta(\mu)\}$$

is called the natural exponential family (NEF) generated by μ.

The function k_μ is strictly convex and analytic, its first derivative k'_μ defines a diffeomorphism between $\Theta(\mu)$ and its image $M_{F(\mu)} = k'_\mu(\Theta(\mu))$. Since $k'_\mu(\lambda) = \int x\ P(\lambda,\mu)(dx)$, $M_{F(\mu)}$ is called the domain of the means of $F(\mu)$. The inverse function of k'_μ is denoted by ψ_μ and setting

$$P(m,\, F(\mu)) = P(\psi_\mu(m),\, \mu) \tag{1.4}$$

the probability of $F(\mu)$ with mean m, we have

$$F(\mu) = \left\{P(m,\, F(\mu));\ m \in M_{F(\mu)}\right\},$$

which is the parametrization of $F(\mu)$ by the mean.

The variance of $P(m,F(\mu))$ is denoted by $V_{F(\mu)}(m)$ and we have

$$V_{F(\mu)}(m) = k''_\mu(\psi_\mu(m)) = (\psi'_\mu(m))^{-1}$$

and

$$m(V_{F(\mu)}(m))^{-1} = (k_\mu(\psi\mu(m)))'.$$

The variance function $m \mapsto V_F(m)$ of a given family F plays an important role in the study of the NEF. Indeed V_F characterizes the NEF F in the following way:

Let F_1 and F_2 be two NEFs and J a non empty open set of $M_{F_1} \bigcap M_{F_2}$. If $V_{F_1}(m) = V_{F_2}(m)\ \forall m \in J$, then $F_1 = F_2$.

Now let us examine the influence of some transformations on the set of natural exponential families on $\mathbb{R}$.

1. **Translations:** If $b \in \mathbb{R}$ consider the map $x \mapsto \tau_b = x - b$. If F is a NEF then $\tau_b(F)$ is a NEF with $M_{\tau_b(F)} = M_F - b$ and variance function

$$V_{\tau_b(F)}(m) = V_F(m + b)$$

2. **Dilations:** If $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ consider the map $x \mapsto D_a = ax$. If F is a NEF then $D_a(F)$ is a NEF with $M_{D_a(F)} = aM_F$ and variance function

$$V_{D_a(F)}(m) = a^2 V_F(m/a)$$

3. **Power of convolution:** For $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ the Jørgensen set of μ or of $F(\mu)$ is defined by

$$\Lambda(\mu) = \{\lambda > 0;\ \exists\ \mu_\lambda;\ \Theta(\mu_\lambda) = \Theta(\mu)\ and\ L_{\mu_\lambda}(\theta) = (L_\mu(\theta))^\lambda\}.$$

If $\lambda > 0$ is in the Jørgensen set of the NEF $F(\mu)$, denote by $J_\lambda(F(\mu))$ the NEF generated by μ_λ then we have

$$M_{J_\lambda(F(\mu))} = \lambda\ M_{F(\mu)}\ and\ V_{J_\lambda(F(\mu))}(m) = \lambda V_{F(\mu)}(m/\lambda).$$

4. **Reciprocity:** The notion of reciprocity of two NEFs has been introduced by Letac [11]. The NEF reciprocal family $R(F)$ of the NEF F is defined by its variance function

$$V_{R(F)}(m) = m^3 V_F(1/m)$$

with $M_{R(F)} \supset (]0, +\infty[\cap M_F)^{-1}$.

Several classifications of NEFs by the form of their variance functions have been realized. These classifications are done up to affine transformations and powers of convolution. For instance, Morris [18] has classified the real quadratic NEFs having polynomial variance functions of degree less than or equal to 2. He has proved that there exist exactly the six types of quadratic NEFs described in the following table:

name	$\mu(dx)$	$\Theta(\mu)$	$\Lambda(\mu)$	M_F	$V_F(m)$
Gaussian	N_{m,σ^2}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	σ^2
Poisson	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{n\ !}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	m
Gamma	$\mu_\lambda(dx) = \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(dx)$	$\mathbb{R}_-^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{m^2}{\lambda}$
Binomial	$\sum_{k=0}^{N} C_N^k\ \delta_k(dx)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}^*$	$]0\ ,\ N[$	$m - \frac{m^2}{N}$
Negative binomial	$\delta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda+1)\ ...\ (\lambda+k+1)}{k\ !}\ \delta_k$	$\mathbb{R}_-^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$m + \frac{m^2}{\lambda}$
Hyperbolic	$\frac{2^{\lambda-2}}{\pi\Gamma(\lambda)}\ \mid \Gamma(\frac{\lambda}{2} + \ \mathrm{i}\ \frac{x}{2}\ \mid^2 dx$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\lambda(1 + \frac{m^2}{\lambda^2})$

Table 1

After this, Letac and Mora [14] have classified the real cubic NEFs having polynomial variance functions of degree less than or equal to 3. They added to the Morris class the six

types of families given in the following table:

name	M_{F_p}	$V_{F_p}(m)$	$\mu_p(dx)$
Abel	$]0,+\infty[$	$m(1+\frac{m}{p})^2$	$\sum_{k=0}^{\infty} p(p+k)^{k-1}\frac{\delta_k}{k!}(dx)$
Takàcs,$a>0$	$]0,+\infty[$	$m(1+\frac{m}{p})(1+\frac{a+1}{a}\frac{m}{p})$	$\delta_0+\sum_{k=1}^{\infty} ap(\prod_{j=1}^{k-1} j+a(p+k))\frac{\delta_k}{k!}(dx)$
Strict arcsine	$]0,+\infty[$	$m(1+\frac{m^2}{p^2})$	$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(p)\frac{\delta_k}{k!}$
Large arcsine,$a>0$	$]0,+\infty[$	$m(1+\frac{2}{a}\frac{m}{p}+\frac{1+a^2}{a^2}\frac{m^2}{p^2})$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p}{p+k}p_k(a(p+k))\frac{\delta_k}{k!}(dx)$
Ressel	$]0,+\infty[$	$\frac{m^2}{p}(1+\frac{m}{p})$	$\frac{p\ x^{x+p-1}\ e^{-x}}{\Gamma(x+p+1)}1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)dx$
Inverse Gaussian	$]0,+\infty[$	$\frac{m^3}{p^2}$	$x^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{p^2}{2x})\frac{p}{\sqrt{2\pi}}1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)dx$

$$p_{2n}(a)=\prod_{k=0}^{n-1}(a^2+4k^2)\ ,\ p_{2n+1}(a)=a\ \prod_{k=0}^{n-1}(a^2+(2k+1)^2).$$

Table 2

Many characterizations of the Morris class have been realized. For instance, Feinsilver [5] has characterized the Morris class by a property of orthogonality of polynomials, and Consonni and Veronese [3] have established some characterizations based on a Bayesian approach. Concerning the Feinsilver characterization, we mention that Hassairi and Zarai [8] have introduced a notion of 2-orthogonality to extend it to the Letac and Mora class of cubic NEFs.

A natural question: can we extend the Consonni and Veronese characterizations established for the quadratic NEFs to the class of cubic NEFs? This is the aim of the first part of our work. We will give three characterizations of the class of cubic NEFs based on the Bayesian theory. In order to make our motivations clear, we first recall the Consonni and Veronese characterizations of real quadratic natural exponential families.

1.2 The Consonni and Veronese characterizations

Let μ be in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ and $F(\mu)$ be the NEF generated by μ. We denote by Π the family of prior distributions on $\Theta(\mu)$:

$$\pi_{t,m_0}\ (d\lambda) = C_{t,m_0}\ e^{tm_0\lambda - tk_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda)\ d\lambda, \tag{1.5}$$

where $t > 0$, $m_0 \in M_{F(\mu)}$ and C_{t,m_0} a normalizing constant, as considered by Diaconis and Ylvisaker [4]. The family Π is said to be conjugate if the posterior distributions of λ, given X when $(\lambda,\ X)$ is $\pi_{t,m_0}(d\lambda) \otimes P(\lambda,\mu)(dx)$ distributed, still belongs to Π.

Besides Π, Consonni and Veronese [3] consider (at least on $\mathbb{R}$) two other families of prior distributions on $M_{F(\mu)}$. The first one $\widetilde{\Pi}$ is defined by a similar construction as for Π, it is the set of prior distributions defined for suitable (t_1,m_1) by

$$\widetilde{\pi}_{t_1,m_1}(dm) = \widetilde{C}_{t_1,m_1}\ e^{t_1m_1\psi_\mu(m) - t_1k_\mu(\psi_\mu(m))}\ \mathbb{1}_{M_{F(\mu)}}(m)dm, \tag{1.6}$$

while the second one $k'_\mu(\Pi)$ is the set of the images $k'_\mu(\pi_{t,m_0})$ of π_{t,m_0} by k'_μ, that is

$$k'_\mu(\pi_{t,m_0})(dm) = C_{t,m_0}\ [V_{F(\mu)}(m)]^{-1}\ e^{tm_0\psi_\mu(m) - tk_\mu(\psi_\mu(m))}\ \mathbb{1}_{M_{F(\mu)}}(m)\ dm.$$

Consonni and Veronese have shown that, when the measure defined in (1.6) is finite, the fact that $\widetilde{\Pi}$ contains the set $k'_\mu(\Pi)$ characterizes the quadratic NEFs. Consonni and Veronese have also shown that if the prior on the mean parameter m is $\widetilde{\pi}_{t_1,m_1}$, then under some conditions on the support of μ, the NEF $F(\mu)$ is quadratic if and only if the posterior expectation of the mean of $P(\lambda,\mu)$ is a weighted average of the sample mean and the prior mean. We also mention that Diaconis and Yilvisaker [4] have shown that if the prior distribution on λ is given by π_{t,m_0} with $t > 0$ and m_0 in $M_{F(\mu)}$, then the expectation of $k'_\mu(\lambda)$ is equal to m_1, that is

$$C_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda)\ \exp\{tm_0\lambda - tk_\mu(\lambda)\}\ \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda)d\lambda = m_0 \tag{1.7}$$

A natural question: can we extend these interesting properties and characterization results concerning the quadratic NEFs and related to the Bayesian theory to the Letac-Mora class

of real cubic NEFs? In Sections 1.3, 1.4 and 1.5 below, we give an affirmative answer. Our main results are given in Theorems 1.5.1, 1.5.3, 1.5.4 and 1.5.5.

1.3 A transformation on natural exponential families

Our considerations will be restricted to steep NEFs. This property is satisfied by all the cubic NEFs. An important fact which will be crucial in our proofs is that up to affine transformations and powers of convolution, a cubic natural exponential family may be obtained from a quadratic one by the so-called action of the linear group $GL(\mathbb{R}^2)$ on the real NEFs. The action of the linear group includes the affine transformations and powers of convolution, these transformations preserve the class of quadratic NEFs and the class of cubic NEFs. We will focus on the facts which we need here.

Let $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ and $\beta \in \mathbb{R}$, we define

$$(M_\nu)^+_\beta = \{m \in M_{F(\nu)};\ 1+\beta m > 0\},\ (\Theta(\nu))^+_\beta = \psi_\nu((M_\nu)^+_\beta)$$

Definition 1.3.1. Let $\beta \in \mathbb{R}$, μ and ν in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ such that $(M_\nu)^+_\beta$ and $(M_\mu)^+_{-\beta}$ are non empty. We say that $\nu = T_\beta(\mu)$ is true if

1. the map $\theta \mapsto \lambda = \beta k_\nu(\theta) + \theta$ is an increasing bijection from $(\Theta(\nu))^+_\beta$ to $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}$
2. for all $\theta \in (\Theta(\nu))^+_\beta$ we have $k_\mu(\lambda) = k_\nu(\theta)$.

Definition 1.3.2. For two NEFs F_1 and F_2 and β in $\mathbb{R}$, we write $F_1 = T_\beta(F_2)$ if there exist ν and μ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ such that $F_1 = F(\nu)$, $F_2 = F(\mu)$ and $\nu = T_\beta(\mu)$.

Lemma 1.3.3. *Let ν and μ be in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ and β in $\mathbb{R}$ such that $\nu = T_\beta(\mu)$. Then*

$$m \in (M_\nu)^+_\beta \Rightarrow \frac{m}{1+\beta m} \in (M_\mu)^+_{-\beta}. \tag{1.8}$$

Proof Since $\nu = T_\beta(\mu)$ is true then for all $\theta \in (\Theta(\nu))^+_\beta$ and $\lambda \in (\Theta(\mu))^+_{-\beta}$, we have

$$\begin{cases} \lambda = \theta + \beta k_\nu(\theta) \\ k_\mu(\lambda) = k_\nu(\theta) \end{cases} \tag{1.9}$$

Thus $k'_\mu(\lambda)d\lambda = k'_\nu(\theta)d\theta$, which implies that $k'_\mu(\lambda) = \dfrac{k'_\nu(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)}$. Let

$$m = k'_\nu(\theta), \;\; m' = k'_\mu(\lambda).$$

Then $m' = \dfrac{m}{1+\beta m}$ and $1-\beta m' = \dfrac{1}{1+\beta m} > 0$. Thus $m' \in (M_\mu)^+_{-\beta}$. □

Proposition 1.3.4. *Let $\beta \in \mathbb{R}$, μ and ν in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ such that $(M_\nu)^+_\beta$ and $(M_\mu)^+_{-\beta}$ are non empty. Then*

1. $\nu = T_\beta(\mu) \Leftrightarrow \mu = T_{-\beta}(\nu)$.
2. $$F(\nu) = T_\beta(F(\mu)) \Leftrightarrow V_{F(\nu)}(m) = (1+\beta m)^3 \; V_{F(\mu)}\left(\frac{m}{1+\beta m}\right), \;\; \forall m \in (M_\nu)^+_\beta \quad (1.10)$$

Proof

1. $\nu = T_\beta(\mu)$

   $\Leftrightarrow$ $\theta \mapsto \lambda = \theta + \beta k_\nu(\theta)$ *is a bijection from* $(\Theta(\nu))^+_\beta$ *into* $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}$ *and* $k_\nu(\theta) = k_\mu(\lambda)$

   $\Leftrightarrow$ $\lambda \mapsto \theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ *is a bijection from* $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}$ *into* $(\Theta(\nu))^+_\beta$ *and* $k_\mu(\lambda) = k_\nu(\theta)$

   $\Leftrightarrow$ $\mu = T_{-\beta}(\nu)$.

2. ($\Rightarrow$) Suppose that $F(\nu) = T_\beta(F(\mu))$. Then for all $\theta \in (\Theta(\nu))^+_\beta$ and $\lambda \in (\Theta(\mu))^+_{-\beta}$ we have $k_\nu(\theta) = k_\mu(\lambda)$. Deriving twice we obtain

$$k''_\mu(\lambda)\; d\lambda = \frac{k''_\nu(\theta)}{(1+\beta k'_\nu(\theta))^2}\; d\theta.$$

Then

$$(1+\beta k'_\nu(\theta))^3 \; k''_\mu(\lambda) = k''_\nu(\theta). \quad (1.11)$$

If we set $m = k'_\nu(\theta)$ and $m' = k'_\mu(\lambda)$, then from Lemma 1.3.3 we have $m' = \dfrac{m}{1+\beta m} \in (M_\mu)^+_{-\beta}$. Replacing in (1.11) we get

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+\beta m)^3 \; V_{F(\mu)}\left(\frac{m}{1+\beta m}\right). \quad (1.12)$$

($\Leftarrow$) Suppose that (1.12) holds for all $m \in (M_\nu)^+_\beta$, and for all $m' \in (M_\mu)^+_{-\beta}$ we define $h_\beta(m') = \dfrac{m'}{1-\beta m'}$. We introduce

$$\theta(\lambda) = \psi_\nu \circ h_\beta \circ k'_\mu(\lambda).$$

Then

$$k'_\nu(\theta(\lambda)) = \frac{k'_\mu(\lambda)}{1-\beta k'_\mu(\lambda)} \tag{1.13}$$

Deriving we get

$$\theta'(\lambda)\ k''_\nu(\theta(\lambda)) = \frac{k''_\mu(\lambda)}{(1-\beta k'_\mu(\lambda))^2}. \tag{1.14}$$

If we set $m = k'_\nu(\theta(\lambda))$ and $m' = k'_\mu(\lambda)$ then we have $m = \dfrac{m'}{1-\beta m'}$ and $m' = \dfrac{m}{1+\beta m}$. Relation (1.12) implies that

$$\frac{1}{(1-\beta m')^3}\ k''_\mu(\psi_\mu(m')) = k''_\nu(\psi_\nu(m)).$$

Taking $\lambda = \psi_\mu(m')$ and $\theta(\lambda) = \psi_\nu(m)$, we get from (1.14)

$$\theta'(\lambda) = 1 - \beta k'_\mu(\lambda), \tag{1.15}$$

which implies that

$$\theta(\lambda) = \lambda - \beta k_\mu(\lambda) + \lambda_0. \tag{1.16}$$

Replacing $1-\beta k'_\mu(\lambda)$ by $\theta'(\lambda)$ in (1.13) we get

$$\theta'(\lambda)\ k'_\nu(\theta(\lambda)) = k'_\mu(\lambda),$$

that implies

$$k_\nu(\theta(\lambda)) = k_\mu(\lambda) + k_0. \tag{1.17}$$

Let $\mu' = e^{k_0}\mu$, then $k_{\mu'}(\lambda) = k_\mu(\lambda) + k_0$, and $F(\mu) = F(\mu')$. Thus $k_\nu(\theta(\lambda)) = k_{\mu'}(\lambda)$ and $F(\nu) = T_\beta(F(\mu') = T_\beta(F(\mu))$. □

Proposition 1.3.5. *Let β and β' be in $\mathbb{R}$. Suppose that μ, ν, $\nu' \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ are such that $\nu = T_{\beta'}(\nu')$ and $\nu' = T_\beta(\mu)$. If $(M_\mu)^+_{-\beta-\beta'}$ and $(M_\nu)^+_{\beta+\beta'}$ are non empty, then*

$$\nu = T_{\beta+\beta'}(\mu).$$

Proof Let $m \in (M_\nu)^+_{\beta'}$. Since $\nu = T_{\beta'}(\nu')$, then relation (1.12) gives

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+\beta' m)^3 \; V_{F(\nu')}\left(\frac{m}{1+\beta' m}\right). \tag{1.18}$$

Let $m' \in (M_{\nu'})^+_\beta$, using the fact that $\nu' = T_\beta(\mu)$ and relation (1.12) we get

$$V_{F(\nu')}(m') = (1+\beta m')^3 \; V_{F(\mu)}\left(\frac{m'}{1+\beta m'}\right). \tag{1.19}$$

Taking $m' = \dfrac{m}{1+\beta' m}$ in (1.18) and replacing in (1.19) we obtain

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+(\beta+\beta')m)^3 \; V_{F(\mu)}\left(\frac{m}{1+(\beta+\beta')m}\right).$$

Then $F(\nu) = T_{\beta+\beta'}(F(\mu))$. □

Note that when for $\beta \in \mathbb{R}^*$, $T_\beta(F(\mu))$ is well defined, it may be expressed in the following way:

$$T_\beta(F(\mu)) = J_{1/|\beta|}.D_{1/\beta}.\tau_{|\beta|}.R.D_{-sign(\beta)}.\tau_{1/\beta}(F(\mu)),$$

where $J_{1/|\beta|}$, $D_{1/\beta}$, $\tau_{|\beta|}$, R and $D_{-sign(\beta)}$ are the transformation defined in Section 1.1. In fact, the relation between the variance functions $V_{F(\nu)}$ and $V_{F(\mu)}$ is then expressed as follow

$$\begin{aligned}
V_{F(\mu)}(m) \quad &\overset{\tau_{1/\beta}}{\rightarrow} \quad V_1(m) = V_{F(\mu)}\left(\frac{1}{\beta}+m\right)\\
&\overset{D_{-signe(\beta)}}{\rightarrow} \quad V_2(m) = V_1(-sign(\beta)m) = V_{F(\mu)}\left(\frac{1}{\beta}-sign(\beta)m\right)\\
&\overset{R}{\rightarrow} \quad V_3(m) = m^3 V_2(1/m) = m^3 V_{F(\mu)}\left(\frac{1}{\beta}-sign(\beta)\frac{1}{m}\right)\\
&\overset{\tau_{|\beta|}}{\rightarrow} \quad V_4(m) = V_3(\mid\beta\mid+m) = (\mid\beta\mid+m)^3 V_{F(\mu)}\left(\frac{1}{\beta}-sign(\beta)\frac{1}{\mid\beta\mid+m}\right)\\
&\overset{D_{1/\beta}}{\rightarrow} \quad V_5(m) = \frac{1}{\beta^2}V_4(\beta m) = \frac{1}{\beta^2}(\mid\beta\mid+\beta m)^3 V_{F(\mu)}\left(\frac{1}{\beta}-sign(\beta)\frac{1}{\beta m+\mid\beta\mid}\right)\\
&\overset{J_{1/|\beta|}}{\rightarrow} \quad V_6(m) = \frac{1}{\mid\beta\mid}V_5(\mid\beta\mid m) = (1+\beta m)^3 V_{F(\mu)}\left(\frac{m}{1+\beta m}\right)
\end{aligned}$$

Besides $(\Theta(\nu))^+_\beta$, we define

$$(\Theta(\nu))^-_\beta = \{\theta \in \Theta(\nu);\ 1 + \beta k'_\nu(\theta) < 0\}$$

and

$$(M_\nu)^-_\beta = k'_\nu((\Theta(\nu))^-_\beta).$$

Definition 1.3.1 assumes that $(\Theta(\nu))^+_\beta$ and $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}$ are non empty, however $(\Theta(\nu))^-_\beta$ and $(\Theta(\mu))^-_{-\beta}$ may be empty. Now consider the map

$$\theta(\lambda) = \lambda - \beta k_\mu(\lambda),\ \ \lambda \in \Theta(\mu).$$

Then

$$\theta'(\lambda) = 1 - \beta k'_\mu(\lambda)$$

and

$$\theta''(\lambda) = -\beta k''_\mu(\lambda).$$

If $\beta \neq 0$, then as $k''_\mu(\lambda) > 0$, we have that $\theta''(\lambda)$ has the sign of $-\beta$ so that the map $\lambda \mapsto \theta'(\lambda) = 1 - \beta k'_\mu(\lambda)$ is either strictly increasing or strictly decreasing on $\Theta(\mu)$. It has at most one zero in $\Theta(\mu)$, and it changes of sign at most one time.

Now given $\theta \in (\Theta(\nu))^+_\beta$, then according to Definition 1.3.1 the equation

$$\theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda) \tag{1.20}$$

has $\lambda = h(\theta) = \theta + \beta k_\nu(\theta)$ as a unique solution in $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}$ and it may have at most one other solution $\widetilde{\lambda} = \widetilde{h}(\theta)$ which isn't in $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}$. It is easy to see that when a second solution $\widetilde{\lambda}$ exists it is in $(\Theta(\mu))^-_{-\beta}$. In fact, the derivative of the function $\theta(\lambda) = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ is $\theta'(\lambda) = 1 - \beta k'_\mu(\lambda)$, it is strictly increasing when $\beta < 0$ and strictly decreasing when $\beta > 0$ because $\theta''(\lambda) = -\beta k''_\mu(\lambda)$ and $k''_\mu(\lambda) > 0$.

To fix the ideas, we suppose that $\beta < 0$, an analog reasoning may be done for $\beta > 0$. In this case $\theta'(\lambda) = 1 - \beta k'_\mu(\lambda)$ is strictly increasing. It has at most one zero. If it has no zero,

then $1-\beta k'_\mu(\lambda)$ is either strictly positive or strictly negative. From the very definition (see Definition 1.3.1) we have that $(\Theta(\mu))^+_{-\beta} = \{\lambda \in \Theta(\mu);\ 1-\beta k'_\mu(\lambda) > 0\}$ is non empty. Then $\lambda \mapsto \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ is strictly increasing and $\forall \theta$, $\theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ can not have two solutions. Thus, if for θ_1 the equation $\theta_1 = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ has two solutions λ_1 and $\widetilde{\lambda}_1$, there exists a unique zero λ_0 of $1-\beta k'_\mu(\lambda)$. It follows that the function $\lambda \mapsto \theta(\lambda)$ has a minimum in λ_0 which we denote by θ_0. The equation $\theta_0 = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ has λ_0 as unique solution. Thus $\theta_0 \neq \theta_1$ and $\widetilde{\lambda}_1$ can not be λ_0. As $\widetilde{\lambda}_1$ is not in $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}$ it is in $(\Theta(\mu))^-_{-\beta}$.

Now we define

$$(\Theta(\nu))^*_\beta = \{\theta \in \Theta(\nu) \ \ \textit{such that (1.20) has 2 solutions, } \lambda \in (\Theta(\mu))^+_{-\beta} \textit{ and } \widetilde{\lambda} \in (\Theta(\mu))^-_{-\beta}\},$$

$$(M_\nu)^*_\beta = k'_\nu((\Theta(\nu))^*_\beta), \textit{ and } (\Theta(\mu))^*_{-\beta} = \widetilde{h}((\Theta(\nu))^*_\beta).$$

This reasoning above allows us to show that when $(\Theta(\nu))^*_\beta$ is non empty, its interior is non empty. With the notations used in the last reasoning, it is obvious that $(\Theta(\nu))^*_\beta$ is the interval $]\theta_0,\theta'[$ where $\theta' = sup\ (\Theta(\nu))^*_\beta$. It is such that $\theta_0 < \theta_1 \leq \theta'$.

1.4 Conjugate families of prior distributions

With the notations introduced in the last section, in particular we always suppose that $\nu = T_\beta(\mu)$, we also need to introduce some other notation:

For $\theta \in (\Theta(\nu))^*_\beta$, we have

$$\theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda) = \widetilde{\lambda} - \beta k_\mu(\widetilde{\lambda}).$$

As $k_\mu(\lambda) = k_\nu(\theta)$ (i.e it comes from the definition of $\nu = T_\beta(\mu)$), then

$$k_\mu(\widetilde{\lambda}) = k_\nu(\theta) + \frac{1}{\beta}(\widetilde{\lambda} - \lambda).$$

Denoting

$$\Delta(\theta) = \frac{1}{\beta}(\widetilde{\lambda} - \lambda) = \frac{1}{\beta}\ (\widetilde{h}(\theta) - h(\theta)),$$

we have

$$\widetilde{\lambda} = \theta + \beta(k_\nu(\theta) + \Delta(\theta)) \;\; \textit{and} \;\; k_\mu(\widetilde{\lambda}) = k_\nu(\theta) + \Delta(\theta).$$

The map $\theta \mapsto \Delta(\theta)$ is differentiable. In fact, the map $\theta \mapsto h(\theta) = \theta + \beta k_\nu(\theta)$ is $\mathcal{C}^\infty$ and bijective from $(\Theta(\nu))^+_\beta$ into $(\theta(\mu))^+_{-\beta}$ and its derivative $1 + \beta k'_\nu(\theta) > 0$.

On the other hand, $1 - \beta k'_\mu(\widetilde{\lambda}) < 0$ for all $\widetilde{\lambda} \in (\theta(\mu))^*_{-\beta}$. Thus the map $\widetilde{\lambda} \mapsto \widetilde{\lambda} - \beta k_\mu(\widetilde{\lambda})$ is a bijection from $(\theta(\mu))^*_{-\beta}$ into $(\theta(\nu))^*_\beta$. Its reciprocal function $\theta \mapsto \widetilde{h}(\theta)$ is differentiable on $(\theta(\nu))^*_\beta$. Hence $\theta \mapsto \Delta(\theta) = \frac{1}{\beta}(\widetilde{h}(\theta) - h(\theta))$ is differentiable.

Note that since $\widetilde{\lambda} \in (\Theta(\mu))^-_{-\beta}$, we have that $1 - \beta k'_\mu(\widetilde{\lambda}) < 0$. On the other hand, it is easy to see that

$$1 + \beta k'_\nu(\theta) + \beta \Delta'(\theta) = \frac{1}{1 - \beta k'_\mu(\widetilde{\lambda})},$$

so that it is also negative.

Now, we define two subfamilies of $F(\mu)$

$$F^\beta(\mu) = \{P(\lambda,\mu), \;\; \lambda \in (\Theta(\mu))^+_{-\beta}\}$$

and

$$\widetilde{F}^\beta(\mu) = \{P(\lambda,\mu), \;\; \lambda \in (\Theta(\mu))^*_{-\beta}\}.$$

For each one, we will give another parametrization by the natural parameter θ of $F(\nu)$. This parametrization is of course different of the usual one.

$$F^\beta(\mu) = \{e^{(\theta+\beta k_\nu(\theta))x - k_\nu(\theta)} \; \mu(dx); \;\; \theta \in (\Theta(\nu))^+_\beta\},$$

and

$$\widetilde{F}^\beta(\mu) = \{e^{(\theta+\beta(k_\nu(\theta)+\Delta(\theta)))x - (k_\nu(\theta)+\Delta(\theta))} \; \mu(dx), \;\; \theta \in (\Theta(\nu))^*_\beta\}.$$

We introduce two conjugate families of prior distribution with respect to $F^\beta(\mu)$ and with respect to $\widetilde{F}^\beta(\mu)$. Let us first recall the following general principle.

Principle: *Let $\mu \in \mathcal{M}(I\!R)$, and let $\alpha(d\lambda)$ be a positive measure on $\Theta(\mu)$ such that for all*

$m_1 \in M_{F(\mu)}$ and all $t > 0$ we have

$$\frac{1}{C_{t,m_1}} = \int_{\Theta(\mu)} e^{tm_1\lambda - tk_\mu(\lambda)}\alpha(d\lambda) < \infty \tag{1.21}$$

and consider the probability $\pi_{t,m_1}(d\lambda) = C_{t,m_1}\ e^{tm_1\lambda - tk_\mu(\lambda)}\alpha(d\lambda)$. Then $\{\pi_{t,m}; t > 0,\ m \in M_{F(\mu)}\}$ is a conjugate family to $F(\mu)$

More specifically, if for a given λ the random variables X_1,...,X_n are iid with distribution $P(\lambda,\ \mu)$ and if the prior on λ is π_{t,m_1} then the conditional distribution of $\lambda \mid X_1$,...,X_n is

$$\pi_{t+n,\frac{tm_1+X_1+\ldots+X_n}{t+n}}.$$

In the classical case, when $\alpha(d\lambda) = d\lambda$ ('standard conjugate family'), Diaconis and Ylvisaker have shown that (1.21) is correct when $F(\mu)$ is regular.

Now, for fixed $t > 0$ and $m_0 \in (M_\nu)^+_\beta$, we define two positive measures on $(\Theta(\nu))^+_\beta$ and $(M_\nu)^+_\beta$

$$(1 + \beta k'_\nu(\theta))\ e^{tm_0\theta - tk_\nu(\theta)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^+_\beta}(\theta)\ d\theta, \tag{1.22}$$

$$(1 + \beta m)^{-2}\ e^{tm_0\psi_\nu(m) - tk_\nu(\psi_\nu(m))}\ \mathbb{1}_{(M_\nu)^+_\beta}(m)\ dm. \tag{1.23}$$

The measure in (1.22) is the image of the measure $e^{t_1m_1\lambda - t_1k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^+_{-\beta}}(\lambda)$ by the map $\lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$, where $t_1 = t(1 + \beta m_0) > 0$ and $m_1 = \dfrac{m_0}{1 + \beta m_0} \in (M_\mu)^+_{-\beta}$. The fact that it is finite is a consequence of a result of Diaconis and Ylvisaker [4]. Thus, for $t > 0$ and $m_0 \in (M_\nu)^+_\beta$, we define the probability distribution

$$\pi^\beta_{t,m_0}(d\theta) = C^\beta_{t,m_0}\ (1 + \beta k'_\nu(\theta))\ \exp\{tm_0\theta - tk_\nu(\theta)\}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^+_\beta}(\theta)d\theta, \tag{1.24}$$

and we set

$$\Pi^\beta = \{\pi^\beta_{t,m_0};\ t > 0 \text{ and } m_0 \in (M_\nu)^+_\beta\}. \tag{1.25}$$

When the integral

$$I = \int (1 + \beta m)^{-2}\ \exp\{tm_0\psi_\nu(m) - tk_\nu(\psi_\nu(m))\}\ \mathbb{1}_{(M_\nu)^+_\beta}(m)dm.$$

converges, we define a probability distribution on the mean parameter m, always for $t > 0$ and $m_0 \in (M_\nu)^+_\beta$, by

$$\sigma^\beta_{t,m_0}(dm) = \rho^\beta_{t,m_0}\ (1+\beta m)^{-2}\ e^{tm_0\psi_\nu(m) - tk_\nu(\psi_\nu(m))}\ \mathbb{1}_{(M_\nu)^+_\beta}(m)\, dm.$$

The probability distribution $\sigma^\beta_{t,m_0}(dm)$ is in fact the image by the map $m \mapsto \frac{m}{1-\beta m}$ of the probability distribution $\widetilde{\pi}_{t_1,m_1}(dm)$ considered by Consonni and Veronese and defined in (1.6). For suitable (t_1,m_1) in $]0, +\infty[\times(M_\mu)^+_{-\beta}$, we have $t = t_1(1-\beta m_1) > 0$ and $m_0 = \frac{m_1}{1-\beta m_1} \in (M_\nu)^+_\beta$. We obtain then the family of priors on m

$$\Sigma^\beta = \{\sigma^\beta_{t,m_0};\ t > 0 \text{ and } m_0 \in (M_\nu)^+_\beta\}. \tag{1.26}$$

When $(\Theta(\nu))^*_\beta$ is non empty, we are able to define another family of prior distributions with respect to $\widetilde{F}^\beta(\nu)$. In fact, for $t > 0$ and $m_0 \in (M_\nu)^+_\beta$ we define the following measure concentrated on $(\Theta(\nu))^*_\beta$

$$(-1 - \beta(k'_\nu(\theta) + \Delta'(\theta)))\ e^{tm_0\theta - t(k_\nu(\theta)+\Delta(\theta))}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^*_\beta}(\theta). \tag{1.27}$$

This measure is in fact the image of $e^{t_1m_1\lambda - t_1k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^*_{-\beta}}(\lambda)$ by the map $\lambda \mapsto \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ from $(\Theta(\mu))^*_{-\beta}$ into $(\Theta(\nu))^*_\beta$. Thus according to Diaconis and Ylvisaker [4], it is finite. We then obtain the probability distribution

$$\widetilde{\pi}^\beta_{t,m_0}(d\theta) = \ \widetilde{C}^\beta_{t,m_0}\ (-1 - \beta(k'_\nu(\theta) + \Delta'(\theta)))\ e^{tm_0\theta - t(k_\nu(\theta)+\Delta(\theta))}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^*_\beta}(\theta)\ d\theta \tag{1.28}$$

and we set

$$\widetilde{\Pi}^\beta = \{\widetilde{\pi}^\beta_{t,m_0};\ t > 0,\ m_0 \in (M_\nu)^+_\beta\}. \tag{1.29}$$

From the Principle, we have that the family Π^β (resp. $\widetilde{\Pi}^\beta$ and Σ^β) is a conjugate family of prior distributions with respect to $F^\beta(\mu)$ (resp. $F^\beta(\mu)$ and $\widetilde{F}^\beta(\mu)$). In fact, for a given θ in $(\Theta(\nu))^+_\beta$, if $X_1,...,X_n$ are iid random variables with distribution

$$e^{(\theta+\beta k_\nu(\theta))x - k_\nu(\theta)}\ \mu(dx)$$

and if the prior distribution on θ is π^{β}_{t,m_0}, then it is easy to see that the posterior distribution of θ given X_1,...,X_n is

$$\pi^{\beta}_{t+n-\beta n\overline{X},(tm_0+n\overline{X})/(t+n-\beta n\overline{X})}, \tag{1.30}$$

where $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Similarly, for a given θ in $(\Theta(\nu))^{*}_{\beta}$, if Y_1,...,Y_n are iid random variables with distribution

$$e^{(\theta+\beta(k_\nu(\theta)+\Delta(\theta)))x-k_\nu(\theta)}\ \mu(dx)$$

and if the prior distribution on θ is $\widetilde{\pi}^{\beta}_{t,m_0}$, then the posterior distribution of θ given Y_1,...,Y_n is given by

$$\widetilde{\pi}^{\beta}_{t+n-\beta n\overline{Y},(tm_0+n\overline{Y})/(t+n-\beta n\overline{Y})}. \tag{1.31}$$

We now use the two priors π^{β}_{t,m_0} and $\widetilde{\pi}^{\beta}_{t,m_0}$ on θ to construct a prior on $\lambda \in (\Theta(\mu))^{+}_{-\beta} \bigcup (\Theta(\mu))^{*}_{-\beta}$. In what follow we will denote by

$$\alpha = \frac{\widetilde{C}^{\beta}_{t,m_0}}{\widetilde{C}^{\beta}_{t,m_0} + C^{\beta}_{t,m_0}}. \tag{1.32}$$

It is clear that $\alpha\ C^{\beta}_{t,m_0} = (1-\alpha)\ \widetilde{C}^{\beta}_{t,m_0}$. Since π^{β}_{t,m_0} and $\widetilde{\pi}^{\beta}_{t,m_0}$ are two probability distributions then

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha\ C^{\beta}_{t,m_0} \int (1+\beta k'_\nu(\theta))\ e^{tm_0\ \theta - tk_\nu(\theta)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^{+}_{\beta}}(\theta)\ d\theta \\ &+ (1-\alpha)\ \widetilde{C}^{\beta}_{t,m_0} \int (-1-\beta(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta)))\ e^{tm_0\theta - t(k_\nu(\theta)+\Delta(\theta))}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^{*}_{\beta}}(\theta)\ d\theta. \end{aligned}$$

Then using the change of variable $\theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ as an increasing bijection from $(\Theta(\mu))^{+}_{-\beta}$ into $(\Theta(\nu))^{+}_{\beta}$ for the first integral and as a decreasing bijection from $(\Theta(\mu))^{*}_{-\beta}$ into $(\Theta(\nu))^{*}_{\beta}$ for the second integral, and taking into account the effect of the change on the bounds of the integration interval, we get

$$1 = \alpha\ C^{\beta}_{t,m_0} \int e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)} \left(\mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^{+}_{-\beta}}(\lambda) + \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^{*}_{-\beta}}(\lambda)\right)\ d\lambda.$$

Thus

$$\alpha\ C_{t,m_0}^{\beta}\ e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^+_{-\beta}\bigcup(\Theta(\mu))^*_{-\beta}}(\lambda) \tag{1.33}$$

defines a prior distribution on $(\Theta(\mu))^+_{-\beta}\bigcup(\Theta(\mu))^*_{-\beta}$.

We illustrate this section by an example due to Letac:

Let μ such that

$$k_\mu(\lambda) = 1 - \sqrt{1-\lambda^2},\ \ \Theta(\mu) =]-1,1[$$

and

$$V_{F(\mu)}(m) = (1+m^2)^{3/2},\quad M_{F(\mu)} = \mathbb{R}.$$

It is clear that $F(\mu)$ is not a quadratic NEF.

We have $k'_\mu(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ and $\psi_\mu(m) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$. The representation of the function $\lambda \mapsto k_\mu(\lambda)$ is the lower part of the circle centered on (0, 1) with radius 1.

Let $\beta = -1$ and consider $\nu = T_{-1}(\mu)$. The existence of $F(\nu)$ is due to Letac and we have

$$V_{F(\nu)}(m) = (2m^2 - 2m + 1)^{3/2},\ \ M_{F(\nu)} = \mathbb{R}.$$

The family $F(\nu)$ is not a cubic NEF since its variance function is not a polynomial of degree less than or equal to 3. Since $k_\mu(\lambda) = k_\nu(\theta)$ for all $\theta = \lambda + k_\mu(\lambda) = \lambda + (1 - \sqrt{1-\lambda^2})$ a careful calculation shows that

$$k_\nu(\theta) = \frac{\theta-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{(\theta-1)^2}{2}}\Big),\ \ \Theta(\nu) =]1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}[.$$

In this example we have

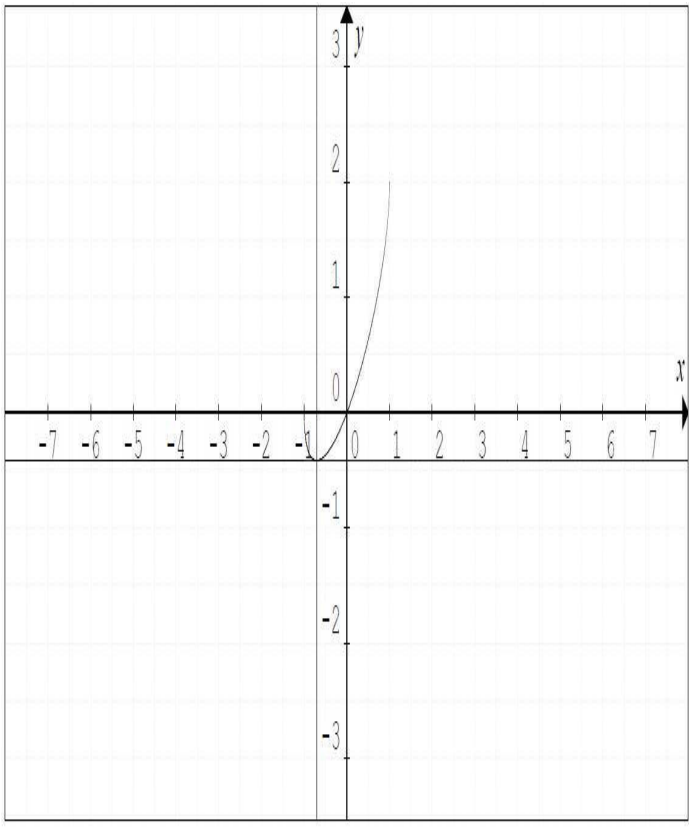
$$(M_\nu)^+_{-1} =]-\infty,1[,\ \ (\Theta(\nu))^+_{-1} =]1-\sqrt{2},\ 2[$$

and

$$(M_\mu)^+_1 =]-1,+\infty[,\ \ (\Theta(\mu))^+_1 =]-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1[,\ \ (\Theta(\mu))^-_1 =]-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}[.$$

The function $\lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda + 1 - \sqrt{1-\lambda^2}$ is a decreasing bijection from $(\Theta(\mu))^-_1 =]-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[$ to $]1-\sqrt{2},\ 0[$ and it is an increasing bijection from $(\Theta(\mu))^+_1 =]-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1[$ into $]1-\sqrt{2},\ 2[$.

Furthermore, the equation $\theta = \lambda + 1 - \sqrt{1-\lambda^2}$ has two solutions $(\lambda, \widetilde{\lambda})$ if $\theta \in]1-\sqrt{2}, 0[$ and one solution if $\theta \in]0, 2[$ as shows the following graph:



Thus

$$(\Theta(\nu))^*_{-1} =]1-\sqrt{2}, 0[.$$

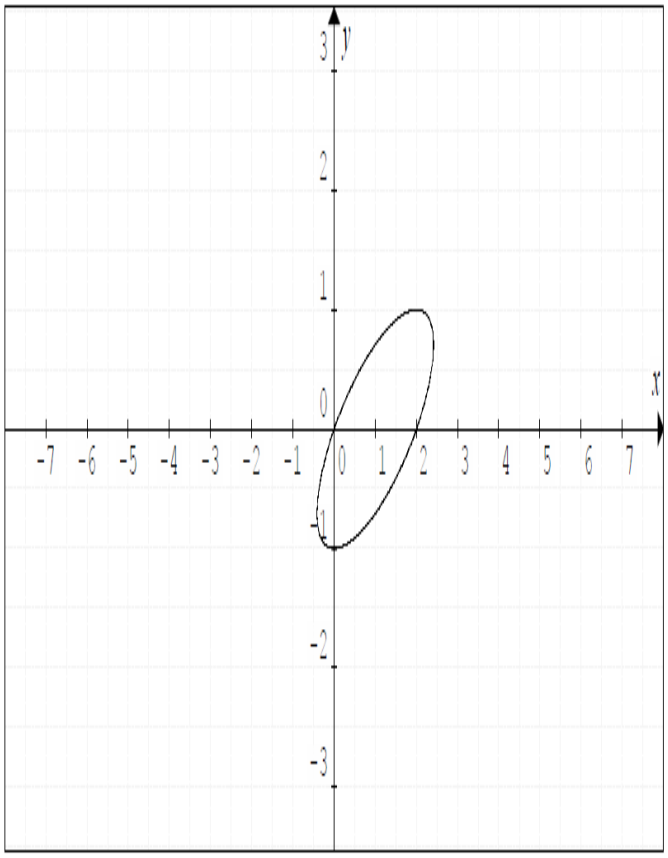
The solution of the equation $\theta = \lambda + k_\mu(\lambda)$ can be described by the two curves

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\theta - 1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{1 - \frac{(\theta-1)^2}{2}} \right).$$

More specifically

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\theta - 1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1 - \frac{(\theta-1)^2}{2}} \right), \quad \widetilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\theta - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 - \frac{(\theta-1)^2}{2}} \right).$$

We give the representation of these curves



As a consequence

$$\Delta(\theta) = \frac{1}{\beta}(\widetilde{\lambda} - \lambda) = \lambda - \widetilde{\lambda} = -\sqrt{2}\,\sqrt{1 - \frac{(\theta-1)^2}{2}}.$$

For the classical Diaconis and Ylvisaker normalization constant applied to μ, we have

$$\frac{1}{C_{t,m_0}} = \int_{-1}^{1} e^{tm_0\lambda - t(1-\sqrt{1-\lambda^2})}\, d\lambda.$$

The constant C_{t,m_0}^{-1} appearing in (1.24) is

$$\frac{1}{C_{t,m_0}^{-1}} = \int_{-\sqrt{2}/2}^{1} e^{tm_0\lambda - t(1-\sqrt{1-\lambda^2})}\, d\lambda$$

and Π^{-1} defined in (1.25) is a family of probabilities in $\theta \in]1-\sqrt{2},\, 2[$. The constant $\widetilde{C}^{-1}_{t,m_0}$ appearing in (1.28) is

$$\frac{1}{\widetilde{C}^{-1}_{t,m_0}} = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} e^{tm_0\lambda - t(1-\sqrt{1-\lambda^2})}\, d\lambda$$

and the family $\widetilde{\Pi}^{-1}$ defined in (1.29) is a family of probabilities in $\theta \in]1-\sqrt{2},\, 0[$.

Finally, the prior distribution on λ described in (1.33) is

$$C\, e^{tm_0\lambda - t(1-\sqrt{1-\lambda^2})} \left(\mathbb{1}_{]-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2[}(\lambda) + \mathbb{1}_{]\sqrt{2}/2,\ 1[}(\lambda) \right) d\lambda = C\, e^{tm_0\lambda - t(1-\sqrt{1-\lambda^2})}\, \mathbb{1}_{]-\sqrt{2}/2,\ 1[}(\lambda)\, d\lambda.$$

1.5 Bayesian characterizations of cubic natural exponential families

In this section we state and prove our characterization results concerning the Letac-Mora class of cubic NEFs based on a Bayesian approach.

When we write $F(\nu) = T_\beta(F(\mu))$, we always assume that ν and μ are chosen so that $\nu = T_\beta(\mu)$. The following theorem is stated for any cubic NEF, when the NEF is quadratic, we take $\beta = 0$.

Theorem 1.5.1. *Let $F(\nu)$ be a cubic NEF. Then*

1. *Up to affine transformations and powers of convolution, there exists $\beta \in \mathbb{R}$ and a quadratic NEF $F(\mu)$ such that $(\Theta(\nu))^+_\beta = \Theta(\nu)$ and $F(\nu) = T_\beta(F(\mu))$.*
2. *If $(\Theta(\nu))^*_\beta$ is non empty then it is equal to $\Theta(\nu)$ and the map $\widetilde{h}$ defines a bijection from $\Theta(\nu)$ into $(\Theta(\mu))^-_{-\beta}$.*

Proof As mentioned, if $F(\nu)$ is quadratic, we take $\beta = 0$ and the results are obvious.

When $F(\nu)$ has a polynomial variance function of degree 3, we give a proof for each one of the six classes represented in Table 2. Our notations are the ones used in Mora [17].

a) The Inverse Gaussian family:

Let $\nu(dx) = \dfrac{(1+x)^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2(1+x)}\right) \mathbb{1}_{]-1,+\infty[}(x)\,dx$ be the Inverse Gaussian distribution shifted by -1. Then

$$\Theta(\nu) =]-\infty,0[,\ k_\nu(\theta) = -\theta - \sqrt{-2\theta},\ M_{F(\nu)} =]-1,+\infty[,\ \ V_{F(\nu)}(m) = (1+m)^3.$$

Taking $\beta = 1$ we have

$$(M_\nu)_1^+ =]-1,+\infty[= M_{F(\nu)}$$

and

$$(\Theta(\nu))_1^+ =]-\infty,0[= \Theta(\nu).$$

Let $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(1-x)^2}{2}\right) dx$, which is the image of the standard Gaussian distribution with the affine transformation $\varphi : x \mapsto 1-x$. Then

$$\Theta(\mu) = \mathbb{R},\ k_\mu(\lambda) = \lambda + \frac{\lambda^2}{2},\ M_{F(\mu)} = \mathbb{R},\ \psi_\mu(m) = m-1,\ V_{F(\mu)}(m) = 1.$$

We have

$$F(\nu) = T_1(F(\mu)).$$

The map $\theta : \lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda - k_\mu(\lambda) = -\lambda^2/2$ is a bijection from $(\Theta(\mu))_{-1}^+ =]-\infty,0[$ into $\Theta(\nu)$ and from $(\Theta(\mu))_{-1}^- =]0,+\infty[$ into $\Theta(\nu)$:

λ	$-\infty$		0		$+\infty$
$\theta'(\lambda)$	$+$		0		$-$
$\theta(\lambda)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

It is clear that

$$(\Theta(\nu))_1^* = \Theta(\nu).$$

b) The Abel family:

Consider the Abel family generated by the measure ν defined by

$$\nu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n)^{n-1}}{n!}\ \delta_n(dx). \tag{1.34}$$

Then

$$k_\nu(\theta) = \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\theta}\ \frac{(1+n)^{n-1}}{n!}\right) \quad \textit{and} \quad \Theta(\nu) =]-\infty, -1[. \tag{1.35}$$

For all m in $M_{F(\nu)} =]0, +\infty[$, we have

$$V_{F(\nu)}(m) = m(1+m)^2, \tag{1.36}$$

$$(M_\nu)_1^+ =]0, +\infty[, \ \ (\Theta(\nu))_1^+ =]-\infty, -1[= \Theta(\nu).$$

Let

$$\mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n(dx)}{n!},$$

it generates the Poisson family which is quadratic. We have

$$k_\mu(\lambda) = e^\lambda, \ \ \Theta(\mu) = \mathbb{R}$$

and

$$F(\nu) = T_1(F(\mu).$$

The map $\theta : \lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda - k_\mu(\lambda) = \lambda - e^\lambda$ is a bijection from $(\Theta(\mu))_{-1}^+ =]-\infty,0[$ into $\Theta(\nu)$ and from $(\Theta(\mu))_{-1}^- =]0, +\infty[$ into $\Theta(\nu)$:

λ	$-\infty$		0		$+\infty$
$\theta'(\lambda)$	$+$		0		$-$
$\theta(\lambda)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

It is clear that

$$(\Theta(\nu))_1^* = \Theta(\nu) =]-\infty, -1[$$

c) The Ressel family:

Let ν be the measure given in Table 2 generating the Ressel family. We have that

$$M_{F(\nu)} =]0, +\infty[, \ \ V_{F(\nu)}(m) = m^2(1+m)$$

and

$$\Theta(\nu) =]-\infty,0[.$$

Taking $\beta = 1$ we have that

$$(M_\nu)_1^+ =]0,+\infty[= M_{F(\nu)}$$

and

$$(\Theta(\nu))_1^+ =]-\infty,0[= \Theta(\nu).$$

If μ is the Gamma distribution such that

$$\Theta(\mu) =]-\infty,1[, \;\; k_\mu(\lambda) = -\ln(1-\lambda)$$

and

$$V_{F(\mu)} = m^2,$$

then

$$F(\nu) = T_1(F(\mu))$$

and the map $\theta : \lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda - k_\mu(\lambda) = \lambda + \ln(1-\lambda)$ is a bijection from $(\Theta(\mu))_{-1}^+ =]-\infty,0[$ into $\Theta(\nu)$ and from $(\Theta(\mu))_{-1}^- =]0,1[$ into $\Theta(\nu)$:

λ	$-\infty$		0		1
$\theta'(\lambda)$	$+$		0		$-$
$\theta(\lambda)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

We also have

$$(\Theta(\nu))_1^* =]-\infty,0[= \Theta(\nu).$$

d) The strict-arcsin family:

If ν is the image of the strict-arcsin measure given in Table 2 by the translation $\tau_1(x) = x-1$, then

$$M_{F(\nu)} =]-1,+\infty[, \;\; V_{F(\nu)}(m) = (m+1)(m^2+2m+2)$$

and

$$\Theta(\nu) =]-\infty,0[.$$

Taking $\beta = 1$ we have

$$(M_\nu)_1^+ =]-1,+\infty[= M_{F(\nu)},$$

Let μ be the image of the Hyperbolic measure by the translation $\tau_{-1}(x) = x+1$. Then

$$\Theta(\mu) =]-\pi/2,\pi/2[, \quad k_\mu(\lambda) = \lambda - \ln(\cos(\lambda)),$$

$$M_{F(\mu)} = \mathbb{R}, \;\; V_{F(\mu)} = (m-1)^2 + 1$$

We have $F(\nu) = T_1(F(\mu))$ and $\theta : \lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda - k_\mu(\lambda) = \ln(\cos(\lambda))$ is a bijection from $(\Theta(\mu))_{-1}^+ =]-\pi/2,0[$ into $\Theta(\nu)$ and from $(\Theta(\mu))_{-1}^- =]0,\pi/2[$ into $\Theta(\nu)$:

λ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\theta'(\lambda)$	$+$		0		$-$
$\theta(\lambda)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

It is clear that

$$(\Theta(\nu))_1^* =]-\infty,0[= \Theta(\nu).$$

e) <u>The large-arcsin family</u>:

Let ν be the image of the large-arcsin measure by the translation $\tau_1(x) = x-1$. Then the variance function of $F(\nu)$ is defined on $M_{F(\nu)} =]-1,+\infty[$ by

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+m)\;\left(1 + \frac{2}{a}(1+m) + \frac{1+a^2}{a^2}(1+m)^2\right), \quad a > 0.$$

We have that

$$\Theta(\nu) =]-\infty,\; -\frac{1}{2}\ln(1+a^2) - \frac{\pi}{2a}[.$$

Now, let $k_0 = \dfrac{\pi}{2a} + \dfrac{1}{a}\;\arctan\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln(a)$ and μ such that

$$k_\mu(\lambda) = \frac{a+1}{a}\lambda - \ln(\cos(\lambda)) + k_0, \;\; \textit{and}\; \Theta(\mu) =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

The measure μ generates the Hyperbolic natural exponential family with variance function

$$V_{F(\mu)}(m) = 1 + \left(m - \frac{a+1}{a}\right)^2.$$

For $\beta = 1$, we have $F(\nu) = T_1(F(\mu))$ and $(M_\nu)_1^+ = M_{F(\nu)}$.

Moreover, the map $\theta : \lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda - k_\mu(\lambda) = -\frac{1}{a}\ \lambda + \ln(\cos(\lambda)) - k_0$ is a bijection from $(\Theta(\mu))_{-1}^+ =]-\frac{\pi}{2}, \arctan(-1/a)[$ into $\Theta(\nu)$ and from $(\Theta(\mu))_{-1}^- =]\arctan(-1/a), \frac{\pi}{2}[$ into $\Theta(\nu)$

λ	$-\frac{\pi}{2}$		$\arctan(-1/a)$		$\frac{\pi}{2}$
$\theta'(\lambda)$	$+$		0		$-$
$\theta(\lambda)$	$-\infty$	$\nearrow$	ρ	$\searrow$	$-\infty$

where $\rho = -\dfrac{\pi}{2a} + \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$. We also have that

$$(\Theta(\nu))_1^* = \Theta(\nu) =]-\infty, \rho[.$$

f) The Takàcs family:

Let $a > 0$, $\beta = -1$, $\varphi(x) = 1 - x$, and $J_{1/a}$ the power of convolution associated to $1/a$. We consider ν the image of the Takàcs measure (see Table 2) by the transformation $\varphi \circ J_{1/a}$, so that

$$M_{F(\nu)} =]-\infty, 1[, \ \ V_{F(\nu)}(m) = (1-m)[1 + a(1-m)][1 + (a+1)(1-m)]$$

and

$$\Theta(\nu) =]c, +\infty[,$$

where $c = (1+a)\ln(1+a) - a\ln(a)$. Now consider μ the image of the Negative Binomial measure with the translation $\tau_{1+a}(x) = x - 1 - a$. Then

$$\Theta(\mu) =]-\infty, 0[, \ \ k_\mu(\lambda) = (-1-a)\lambda - \ln(1 - e^\lambda).$$

For $\beta = -1$ we have

$$F(\nu) = T_{-1}(F(\mu))$$

and

$$(M_\nu)^+_{-1} = M_{F(\nu)}, \quad (\Theta(\nu))^+_{-1} = \Theta(\nu).$$

Furthermore, the map $\theta : \lambda \mapsto \theta(\lambda) = \lambda - \beta k_\mu(\lambda) = -a\lambda - \ln(1 - e^\lambda)$ is a bijection from $(\Theta(\mu))^-_1 =]-\infty, \ln(\frac{a}{1+a})[$ into $\Theta(\nu)$ and from $(\Theta(\mu))^+_1 =]\ln(\frac{a}{1+a}), 0[$ into $\Theta(\nu)$.

λ	$-\infty$		$\ln(\frac{a}{1+a})$		0
$\theta'(\lambda)$	$-$		0		$+$
$\theta(\lambda)$	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

It is clear here that

$$(\Theta(\nu))^*_{-1} = \Theta(\nu).$$

□

As corollary of Theorem 1.5.1, we have in all the cases that $(\Theta(\mu))^*_{-\beta} = (\Theta(\mu))^-_{-\beta}$.

Then taking probability distribution

$$\alpha\ C^\beta_{t,m_0}\ e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^+_{-\beta} \bigcup (\Theta(\mu))^*_{-\beta}}(\lambda)\ d\lambda$$

we have

$$1 = \int\ \alpha\ C^\beta_{t,m_0}\ e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^+_{-\beta} \bigcup (\Theta(\mu))^*_{-\beta}}(\lambda)\ d\lambda,$$

which is equivalent to

$$1 = \int\ \alpha\ C^\beta_{t,m_0}\ e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda)\ d\lambda.$$

Then we can take the prior distribution on λ the standard one

$$\pi_{t(1+\beta m_0), \frac{m_0}{1+\beta m_0}}(d\lambda).$$

Proposition 1.5.2. *Let $F(\nu)$ be a cubic NEF. Then, with a suitable β and the notations above,*

$$E_{\pi^\beta_{t,m_0}}\left(\frac{\alpha\ k'_\nu(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)}\right) + E_{\widetilde{\pi}^\beta_{t,m_0}}\left(\frac{(1-\alpha)\ k'_\nu(\theta) + \Delta'(\theta)}{1+\beta(k'_\nu(\theta) + \Delta'(\theta))}\right) = \frac{m_0}{1+\beta m_0}.$$

Proof If $F(\nu)$ is quadratic, we take $\beta = 0$ and we get $E(k'_\nu(\theta)) = m_0$ which is already proved by Diaconis and Ylvisaker [4].

If $F(\nu)$ is cubic with polynomial variance function of degree three, we take $\beta \in \mathbb{R}^*$ and μ as in Theorem 1.5.1, then we can write

$$I = \alpha \; E_{\pi^\beta_{t,m_0}} \left(\frac{k'_\nu(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)} \right) + (1-\alpha) \; E_{\widetilde{\pi}^\beta_{t,m_0}} \left(\frac{k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta)}{1+\beta(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta))} \right)$$

as $I = I_1 + I_2$, with

$$I_1 = \alpha \int C^\beta_{t,m_0} \; k'_\nu(\theta) \; e^{tm_0\theta - tk_\nu(\theta)} \; \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^+_\beta}(\theta) d\theta$$

and

$$I_2 = (1-\alpha) \int \widetilde{C}^\beta_{t,m_0} \; (-k'_\nu(\theta) - \Delta'(\theta)) \; e^{tm_0(\theta+\beta(k_\nu(\theta)+\Delta(\theta))) - t(1+\beta m_0)(k_\nu(\theta)+\Delta(\theta))} \; \mathbb{1}_{(\Theta(\nu))^*_\beta}(\theta) d\theta$$

According to Theorem 1.5.1 we have $(\Theta(\nu))^+_\beta = (\Theta(\nu))^*_\beta = \Theta(\nu)$. Then using the change of variable $\theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ we get

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha \; C^\beta_{t,m_0} \int k'_\nu(\theta) \; e^{tm_0\theta - tk_\nu(\theta)} \; \mathbb{1}_{\Theta(\nu)}(\theta) d\theta \\ &= \alpha \; C^\beta_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda) \; e^{tm_0(\lambda - \beta k_\mu(\lambda)) - tk_\mu(\lambda)} \; \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^+_{-\beta}}(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

For I_2, we use the fact that $\lambda \mapsto \theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ is a decreasing bijection from $(\Theta(\mu))^-_{-\beta}$ into $\Theta(\nu)$, taking into account the effect of this change of variables on the bounds of the interval of integration, we get

$$I_2 = \alpha \; C^\beta_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda) \; e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)} \; \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^-_{-\beta}}(\lambda) d\lambda.$$

Thus

$$\begin{aligned} I &= \alpha \; C^\beta_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda) \; e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)} \; \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda) d\lambda \\ &= \alpha \; C^\beta_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda) \; e^{tm_0\lambda - t(1+\beta m_0)k_\mu(\lambda)} \; \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda) \; d\lambda \\ &= \alpha \; C^\beta_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda) \; e^{t_1 m_1 \lambda - t_1 k_\mu(\lambda)} \; \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda) \; d\lambda, \end{aligned}$$

where $t_1 = t(1+\beta m_0)$ and $m_1 = \dfrac{m_0}{1+\beta m_0}$. Since the NEF $F(\nu)$ is cubic and $\mu = T_\beta(\nu)$ then $F(\mu)$ is a quadratic NEF and according to Diaconis and Ylvisaker the last integral is equal to m_1. That is

$$E_{\pi^\beta_{t,m_0}}\left(\frac{\alpha\ k'_\nu(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)}\right) + E_{\widetilde{\pi}^\beta_{t,m_0}}\left(\frac{(1-\alpha)\ k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta)}{1+\beta(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta))}\right) = \frac{m_0}{1+\beta m_0}.$$

□

Next, we give a characterization result which represents the extension to the cubic NEFs of the characterization of the quadratic NEFs by the fact that the posterior expectation is a weighted average of the sample mean and the prior mean.

Consider $\theta \in (\Theta(\nu))^*_\beta$ and $X_1,...,X_n$ a sequence of iid random variables with distribution $P(\lambda,\mu)$. Since the equation $\theta = \lambda - \beta k_\mu(\lambda)$ has two solutions $\lambda = h(\theta) \in (\Theta(\mu))^+_{-\beta}$ and $\widetilde{\lambda} = \widetilde{h}(\theta) \in (\Theta(\mu))^-_{-\beta}$, then the distribution of $X_1,...,X_n$ is either $P(h(\theta),\mu)$ or $P(\widetilde{h}(\theta),\mu)$. Accordingly, the prior on θ is either π^β_{t,m_0} and the posterior distribution is given by (1.30), or $\widetilde{\pi}^\beta_{t,m_0}$ and the posterior distribution is given by (1.31).

Theorem 1.5.3. *Let ν be in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.*

1. *Suppose that $F(\nu)$ is a cubic NEF, fix β as in Theorem 1.5.1. With the notations above we have*

$$\begin{aligned} & E_{\pi^\beta_{t,m_0}}\left(\frac{\alpha k'_\nu(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)} \mid X_1,...,X_n\right) \\ + \quad & E_{\widetilde{\pi}^\beta_{t,m_0}}\left(\frac{(1-\alpha)(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta))}{(1+\beta(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta)))} \mid X_1,...,X_n\right) = \frac{tm_0+n\overline{X}}{t(1+\beta m_0)+n} \end{aligned} \tag{1.37}$$

2. *Conversely, suppose that there exist $\beta \in \mathbb{R}$ and $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ such that $\nu = T_\beta(\mu)$ and*

   (a) supp(μ) contains an open interval in $\mathbb{R}$ or is a finite or denumerably infinite subset of $]-\infty,0[$, alternatively $]0,+\infty[$, with $\mu\{0\} > 0$.

   (b) $(\Theta(\mu))^*_{-\beta} = (\Theta(\mu))^-_{-\beta}$.

   (c) (1.37) holds.

Then $F(\nu)$ is a cubic NEF.

Before embarking in the proof of the theorem, it is worth to mention that although it is likely that examples of non cubic exponential families such that one can find a β such that $(\Theta(\mu))^*_{-\beta} = (\Theta(\mu))^-_{-\beta}$ do exist, the building of such an example is a long task that we have not undertaken.

Proof of Theorem 1.5.3

1. If the NEF $F(\nu)$ is quadratic, we take $\beta = 0$ and the result follows from Consonni and Veronese [3]. If $F(\nu)$ has a polynomial variance function with degree 3, we use β and μ as in Theorem 1.5.1. Let

$$I' = E_{\pi^{\beta}_{t,m_0}}\left(\frac{\alpha k'_\nu(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)} \mid X_1,...,X_n\right) + E_{\widetilde{\pi}^{\beta}_{t,m_0}}\left(\frac{(1-\alpha)(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta))}{(1+\beta(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta)))} \mid X_1,...,X_n\right).$$

Then denoting

$$I'_1 = E_{\pi^{\beta}_{t,m_0}}\left(\frac{\alpha k'_\nu(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)} \mid X_1,...,X_n\right)$$

and

$$I'_2 = E_{\widetilde{\pi}^{\beta}_{t,m_0}}\left(\frac{(1-\alpha)(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta))}{(1+\beta(k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta)))} \mid X_1,...,X_n\right),$$

we have $I' = I'_1 + I'_2$.

Using the change of variable as in the proof of Proposition 1.5.2, we get

$$I'_1 = \alpha\ C^{\beta}_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda)\ e^{(tm_0+n\overline{X})\lambda-(t(1+\beta m_0)+n)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^+_{-\beta}}(\lambda)d\lambda$$

and

$$I'_2 = (1-\alpha)\ \widetilde{C}^{\beta}_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda)\ e^{(tm_0+n\overline{X})\lambda-(t(1+\beta m_0)+n)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{(\Theta(\mu))^-_{-\beta}}(\lambda)d\lambda.$$

Then

$$I' = \alpha\ C^{\beta}_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda)\ e^{(tm_0+n\overline{X})\lambda-(t(1+\beta m_0)+n)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda)d\lambda. \tag{1.38}$$

Since $F(\mu)$ is quadratic, then taking $t' = t(1+\beta m_0)+n$ and $m' = \frac{tm_0+n\overline{X}}{t(1+\beta m_0)+n}$ gives

$$I' = C_{t',m'} \int k'_\mu(\lambda)\ e^{t'm'\lambda-t'k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda)\ d\lambda.$$

According to Diaconis and Ylvisaker [4], the last integral is equal to m'. Thus

$$I' = \frac{tm_0 + n\overline{X}}{t(1+\beta m_0)+n},$$

which is nothing but (1.37).

2. Conversely, suppose that there exist β in $\mathbb{R}$ and μ in $M(\mathbb{R})$ such that $\nu = T_\beta(\mu)$, $(\Theta(\mu))^*_{-\beta} = (\Theta(\mu))^-_{-\beta}$ and (1.37) holds. The assumptions above and the calculations show that the left side of (1.37) is equal to

$$\alpha\ C^\beta_{t,m_0} \int k'_\mu(\lambda)\ e^{(tm_0+n\overline{X})\lambda-(t(1+\beta m_0)+n)k_\mu(\lambda)}\ \mathbb{1}_{\Theta(\mu)}(\lambda)d\lambda.$$

Thus (1.37) is equivalent to

$$E\left(k'_\mu(\lambda) \mid X_1,...,X_n\right) = \frac{tm_0 + n\overline{X}}{t(1+\beta m_0)+n\overline{X}},$$

where $X_1,...,X_n$ are iid random variable with distribution $P(\lambda,\mu)$ and the prior on λ is the standard $\pi_{t(1+\beta m_0),m_0/1+\beta m_0}$. Taking $t_1 = t(1+\beta m_0)$ and $m_1 = \frac{m_0}{1+\beta m_0}$ we get

$$E\left(k'_\mu(\lambda) \mid X_1,...,X_n\right) = \frac{t_1 m_1 + n\overline{X}}{t_1+n}, \tag{1.39}$$

which is a weighted average of the sample mean and the prior mean of $P(\lambda,\mu)$. This with the assumptions on $supp(\mu)$, and according to Theorem 1.1 of Consonni and Veronese [3], imply that the NEF $F(\mu)$ is quadratic. Therefore $F(\nu) = T_\beta(F(\mu))$ is a cubic NEF.

□

In the following theorem we give a second characterization of the Letac-Mora class of real cubic NEFs based on the form of the variance function. This will serve to give our third Bayesian characterization.

Theorem 1.5.4. *Let ν be in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Then $F(\nu)$ is cubic if and only if there exist $\beta \in \mathbb{R}$ and $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ such that, $(M_\nu)^+_\beta \neq \emptyset$ and for all m in $(M_\nu)^+_\beta$,*

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+\beta m)^3\ \exp\{a\psi_\nu(m) + bk_\nu\left(\psi_\nu(m)\right) + c\}. \tag{1.40}$$

This statement may be expressed in terms of the cumulant function as $F(\nu)$ is cubic if and only if there exist β and $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ such that, $(\Theta(\nu))^+_\beta \neq \emptyset$ and for all θ in $(\Theta(\nu))^+_\beta$

$$k''_\nu(\theta) = (1 + \beta k'_\nu(\theta))^3 \ \exp\{a\theta + bk_\nu(\theta) + c\}.$$

Proof " $\Rightarrow$ " If $F(\nu)$ is quadratic, then we take $\beta = 0$ and we have that $V_{F(\nu)}(m) = e^{a\psi_\nu(m)+bk_\nu(\psi_\nu(m))+c}$, it is a result due to (Casalis [1]).

If $F(\nu)$ has a polynomial variance function of degree three, then up to affine transformations and powers of convolution, there exist $\beta \in \mathbb{R}^*$ and a quadratic NEF $F(\mu)$ such that $F(\nu) = T_\beta(F(\mu))$ or equivalently $F(\mu) = T_{-\beta}(F(\nu))$. It follows from (1.12) that for $m \in (M_\nu)^+_\beta$

$$V_{F(\nu)}(m) = (1 + \beta m)^3 \ V_{F(\mu)}\left(\frac{m}{1 + \beta m}\right).$$

It is known (see Casalis [1]) that for the quadratic NEF $F(\mu)$ there exists $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$ such that for all m' in $M_{F(\mu)}$

$$V_{F(\mu)}(m') = \exp\{a'\psi_\mu(m') + b'k_\mu(\psi_\mu(m')) + c'\}. \tag{1.41}$$

This is in particular true for the element $m' = \dfrac{m}{1 + \beta m}$ of $(M_\mu)^+_{-\beta}$. Thus writing (1.9) in terms of the mean parameters we get

$$\begin{cases} k_\mu\left(\psi_\mu(m')\right) &= k_\nu\left(\psi_\nu(m)\right) \\ \psi_\mu(m') &= \beta k_\nu\left(\psi_\nu(m)\right) + \psi_\nu(m) \end{cases} \tag{1.42}$$

Therefore

$$V_{F(\nu)}(m) = (1 + \beta m)^3 \ \exp\{a\psi_\nu(m) + bk_\nu\left(\psi_\nu(m)\right) + c\},$$

with $a = a'$, $b = b' + \beta a'$ *and* $c = c'$.

" $\Leftarrow$ " Suppose that (1.40) holds, then

$$\ln V_{F(\nu)}(m) = 3\ln(1 + \beta m) + a\psi_\nu(m) + bk_\nu(\psi_\nu(m)) + c.$$

Taking the derivative, we deduce that the variance function satisfies the differential equation

$$(1+\beta m)V'_{F(\nu)}(m) - 3\beta V_{F(\nu)}(m) = (a+bm)(1+\beta m).$$

Solving this equation by standard methods gives

$$V_{F(\nu)}(m) \;\; = \;\; d\,(1+\beta m)^3 + \frac{b}{\beta^2}(1+\beta m)^2 - \frac{b-\beta a}{2\beta^2}(1+\beta m),$$

which is a polynomial of degree less than or equal to 3. □

Now consider the image of the distribution π^{β}_{t,m_0} by the map k'_ν

$$k'_\nu(\pi^{\beta}_{t,m_0})(dm) = C^{\beta}_{t,m_0}\;\frac{(1+\beta m)}{V_{F(\nu)}(m)}\;\exp\{tm_0\psi_\nu(m) - tk_\nu\left(\psi_\nu(m)\right)\}\;\mathbb{1}_{(M_\nu)^+_\beta}(m)\,dm. \qquad (1.43)$$

The following characterization of the cubic NEFs is based on an inclusion relation between Σ^β and the set

$$k'_\nu(\Pi^\beta) = \{k'_\nu(\pi^{\beta}_{t,m_0});\; t>0,\, m_0 \in (M_\nu)^+_\beta\}.$$

Theorem 1.5.5. *Let ν be in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Then $F(\nu)$ is cubic if and only if there exists $\beta \in \mathbb{R}$ such that*

$$k'_\nu(\Pi^\beta) \subset \Sigma^\beta.$$

Proof If the NEF is quadratic we take as usual $\beta = 0$ and the result is proved by Consonni and Veronese [3]. If $F(\nu)$ has a polynomial variance function of degree three, then from Theorem 1.5.4, there exist $\beta \in \mathbb{R}^*$ and (a,b,c) in $\mathbb{R}^3$ such that $(M_\nu)^+_\beta \neq \emptyset$ and for $m \in (M_\nu)^+_\beta$,

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+\beta m)^3\;\exp\{a\psi_\nu(m) + bk_\nu(\psi_\nu(m)) + c\}.$$

Consider the set

$$\Omega = \{(t_1,m_1) \in \mathbb{R}^*_+ \times\;\; (M_\nu)^+_\beta\;;\; t_1 - b > 0 \;\textit{and}\; \frac{t_1m_1+a}{t_1-b} \in\;\; (M_\nu)^+_\beta\}.$$

We will show that $k'_\nu(\Pi^\beta) = \{\sigma^{\beta}_{t_1,m_1};\;\; (t_1,m_1) \in \Omega\}$ which is a part of Σ^β.

In fact, using (1.40), the distribution $k'_\nu(\pi^{\beta}_{t,m_0})$ defined in (1.43) for $t>0$ and m_0 in $(M_\nu)^+_\beta$

becomes

$$k'_\nu(\pi^\beta_{t,m_0})(dm) = \rho^\beta_{t_1,m_1}\ (1+\beta m)^{-2} \exp\{t_1 m_1 \psi_\nu(m) - t_1 k_\mu\left(\psi_\nu(m)\right)\}\ \mathbb{1}_{(M_\nu)^+_\beta}(m) dm,$$

with $t_1 = t + b$, $m_1 = \dfrac{tm_0 - a}{t+b}$ and $\rho^\beta_{t_1,m_1} = C^\beta_{t_1-b,(t_1m_1+a)/(t_1-b)}$.
We have that $t_1 - b = t > 0$ and $\dfrac{t_1 m_1 + a}{t_1 - b} = m_0 \in (M_\nu)^+_\beta$, that is $(t_1,m_1) \in \Omega$. Hence

$$k'_\nu(\Pi^\beta) \subset \{\sigma^\beta_{t_1,m_1};\ (t_1,m_1) \in \Omega\}.$$

Similarly, we verify that

$$\{\sigma^\beta_{t_1,m_1};\ (t_1,m_1) \in \Omega\} \subset k'_\nu(\Pi^\beta).$$

Thus, we obtain that

$$k'_\nu(\Pi^\beta) = \{\sigma^\beta_{t_1,m_1};\ (t_1,m_1) \in \Omega\} \subset \Sigma^\beta$$

Conversely, suppose that $k'_\nu(\Pi^\beta) \subset \Sigma^\beta$. Then for $t > 0$ and $m_0 \in (M_\nu)^+_\beta$, the element $k'_\nu(\pi^\beta_{t,m_0})$ of $k'_\nu(\Pi^\beta)$ is in $\widetilde{\Pi}^\beta$. It follows that there exists (t_1,m_1) in $\mathbb{R}^*_+ \times (M_\nu)^+_\beta$ such that

$$k'_\nu(\pi^\beta_{t,m_0})(dm) = \rho^\beta_{t_1,m_1}\ (1+\beta m)^{-2}\ \exp\{t_1 m_1 \psi_\nu(m) - t_1 k_\nu(\psi_\nu(m))\}\ \mathbb{1}_{(M_\nu)^+_\beta}(m) dm.$$

Comparing this expression of $k'_\nu(\pi^\beta_{t,m_0})$ with the one given in (1.43) gives, for $m \in (M_\nu)^+_\beta$

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+\beta m)^3\ \exp\{a\psi_\nu(m) + bk_\nu(\psi_\nu(m)) + c\},$$

where

$$a = tm_0 - t_1 m_1,\ b = t_1 - t,\ \textit{and}\ c = \ln\left(\frac{C^\beta_{t,m_0}}{\rho^\beta_{t_1,m_1}}\right),$$

According to Theorem 1.5.4, we get the desired result. □

We now illustrate our characterization results by an example.

Fundamental example:

Consider the distribution

$$\nu(dx) = \frac{(1+x)^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{1}{2(1+x)}\right)\ \mathbb{1}_{\{1+x>0\}}(x) dx,$$

which is the image of the standard inverse Gaussian distribution by the translation $x \mapsto x-1$.

We have that

$$\Theta(\nu) =]-\infty,0[, \;\; k_\nu(\theta) = -\theta - \sqrt{-2\theta}.$$

For all $m \in M_{F(\nu)} =]-1, +\infty[$ the variance function is given by

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+m)^3. \tag{1.44}$$

The NEF generated by ν is given by

$$F(\nu) = \{\exp(\theta x + \theta + \sqrt{-2\theta})\ \nu(dx);\ \theta < 0\}, \tag{1.45}$$

and its mean parametrization is given by

$$F(\nu) = \left\{\exp\left(-\frac{1+x}{2(1+m)^2} + \frac{1}{1+m}\right)\ \nu(dx);\ m > -1\right\}. \tag{1.46}$$

Let

$$\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{(1-x)^2}{2}\right)\ dx,$$

which is the image of the standard Gaussian distribution by $x \mapsto 1-x$. Then

$$\Theta(\mu) = \mathbb{R}, \;\; k_\mu(\lambda) = \lambda + \frac{\lambda^2}{2}$$

and

$$M_{F(\mu)} = \mathbb{R}, \;\; V_{F(\mu)}(m') = 1.$$

We have

$$F(\nu) = T_1(F(\mu)),$$

and

$$(M_\nu)_1^+ = M_{F(\nu)}, \;\; (\Theta(\nu))_1^+ = \Theta(\nu).$$

The map $\theta(\lambda) = \lambda - k_\mu(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2}$ is a bijection from $(\Theta(\mu))_{-1}^+ =]-\infty,0[$ into $\Theta(\nu) =]-\infty,0[$ and from $(\Theta(\mu))_{-1}^- =]0, +\infty[$ into $\Theta(\nu)$.

Furthermore,

$$\Delta(\theta) = 2\sqrt{-2\theta},$$

$$\lambda = h(\theta) = -\sqrt{-2\theta},\ \ \widetilde{\lambda} = \widetilde{h}(\theta) = \sqrt{-2\theta}.$$

The prior distributions π^1_{t,m_0} and $\widetilde{\pi}^1_{t,m_0}$ are given by

$$\pi^1_{t,m_0}(d\theta) = C^1_{t,m_0}\ \left(\frac{1}{\sqrt{-2\theta}}\right)\ \exp\{tm_0\theta + t(\theta+\sqrt{-2\theta})\}\ \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\theta)d\theta$$

$$\widetilde{\pi}^1_{t,m_0}(d\theta) = \widetilde{C}^1_{t,m_0}\ \left(\frac{1}{\sqrt{-2\theta}}\right)\ \exp\{tm_0\sqrt{-2\theta} - t(1+m_0)(\sqrt{-2\theta}-\theta)\}\ \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\theta)d\theta.$$

Concerning Theorem 1.5.3, we have only to verify that Proposition 1.5.2 holds. In fact,

$$I'_1 = E_{\pi^1_{t,m_0}}\left(\alpha\ \frac{k'_\nu(\theta)}{1+k'_\nu(\theta)}\right)\ =\ \alpha\ C^1_{t,m_0}\ \int_{-\infty}^{0}\ \left(-1+\frac{1}{\sqrt{-2\theta}}\right)\ e^{tm_0\theta+t(\theta+\sqrt{-2\theta})}\ d\theta$$

Using the change of variable $\lambda = -\sqrt{-2\theta}$ we get

$$\begin{aligned} I'_1 &= \alpha\ C^1_{t,m_0}\ \int_{-\infty}^{0}(1+\lambda)\ e^{-tm_0\frac{\lambda^2}{2}-t(\lambda+\frac{\lambda^2}{2})}\ d\lambda \\ &= \alpha\ C^1_{t,m_0}\ \int_{-\infty}^{0}(1+\lambda)\ e^{-t\lambda-t(1+m_0)\frac{\lambda^2}{2}}\ d\lambda \end{aligned}$$

On the other hand, we have that

$$I'_2 := E_{\widetilde{\pi}^1_{t,m_0}}\left((1-\alpha)\ \frac{k'_\nu(\theta)+\Delta'(\theta)}{1+\beta k'_\nu(\theta)+\beta\Delta'(\theta)}\right),$$

that is

$$I'_2 = \alpha\ C^1_{t,m_0}\ \int_{-\infty}^{0}\left(1+\frac{1}{\sqrt{-2\theta}}\right)\ e^{tm_0\sqrt{-2\theta}-t(1+m_0)(\sqrt{-2\theta}-\theta)}\ d\theta$$

Using the change of variable $\lambda = \sqrt{-2\theta}$ we get

$$I'_2 = \alpha\ C^1_{t,m_0}\ \int_{0}^{+\infty}(1+\lambda)\ e^{-t\lambda-t(1+m_0)\frac{\lambda^2}{2}}\ d\lambda.$$

Thus

$$\begin{aligned} I'_1+I'_2 &= \alpha\ C^1_{t,m_0}\ \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\lambda)\ e^{-t\lambda-t(1+m_0)\frac{\lambda^2}{2}}\ d\lambda \\ &= \alpha\ C^1_{t,m_0}\ \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\lambda)\ e^{tm_0\lambda-t(1+m_0)(\lambda+\frac{\lambda^2}{2})}\ d\lambda. \end{aligned}$$

Since m_0 is in $(M_\nu)^+_1$ then $m_1 = \dfrac{m_0}{1+m_0}$ is in $(M_\mu)^+_{-1} \subset M_{F(\mu)}$. Thus according to Diaconis and Ylvisaker, the last integral is equal to $\dfrac{m_0}{1+m_0}$.

Now we will verify that Theorem 1.5.4 and 1.5.5 hold. In fact, since $V_{F(\nu)}(m) = (1+m)^3$ then it is clear that

$$V_{F(\nu)}(m) = (1+m)^3 \ \exp(a\psi_\nu(m) + bk_\nu(\psi_\nu(m)) + c),$$

with $a = b = c = 0$.

Concerning Theorem 1.5.5, we have that

$$\sigma^1_{t_1,m_1}(dm) = \rho^1_{t_1,m_1} \ (1+m)^{-2} \ \exp\left(-\frac{t_1(m_1+1)}{2(1+m)^2} + \frac{t_1}{1+m}\right) \ \mathbb{1}_{]-1,+\infty[}(m)dm.$$

In this case we are even able to prove that

$$I = \int (1+m)^{-2} \ \exp\left(-\frac{t_1(m_1+1)}{2(1+m)^2} + \frac{t_1}{1+m}\right) \ \mathbb{1}_{]-1,+\infty[}(m)dm$$

is finite. In fact, using the change of variable $x = \frac{1}{1+m}$ we get

$$I = e^{\frac{t_1}{2(1+m_1)}} \ \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1(1+m_1)}\ x + \frac{t_1}{\sqrt{t_1(1+m_1)}}\right)^2\right) \ dx$$

using the change of variable $y = \sqrt{t_1(1+m_1)}\ x + \frac{t_1}{\sqrt{t_1(1+m_1)}}$ we obtain

$$I = \frac{\sqrt{2\pi}\ e^{\frac{t_1}{2(1+m_1)}}}{\sqrt{t_1(1+m_1)}} \ \left(1 - \phi\left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1(1+m_1)}}\right)\right) = \frac{1}{\rho^1_{t,m_0}},$$

where ϕ is the distribution function on the standard Gaussian distribution $N(0,1)$.

Moreover, when π^1_{t,m_0} is the prior on the canonical parameter θ and $\sigma^1_{t_1,m_1}$ is the prior on the mean parameter m, we have that

$$\begin{aligned} t_1 &= t + b = t > 0 \\ m_1 &= \frac{tm_0 - a}{t+b} = m_0 \in \ (M_\nu)^+_1 =]-1, +\infty[. \end{aligned}$$

Also in this example we have

$$\rho^1_{t,m_0} = C^1_{t-b,(tm_0+a)/(t-b)} = C^1_{t,m_0},$$

so that

$$\sigma^1_{t,m_0}(dm) = C^1_{t,m_0} \ (1+m)^{-2} \ \exp\{-\frac{tm_0}{2(1+m)^2} - t(\frac{1}{2(1+m)^2} - \frac{1}{1+m})\} \ \mathbb{1}_{]-1,+\infty[}(m)dm,$$

which is equal to $k'_\nu(\pi^1_{t,m_0})$.

Chapitre 2

Etude des familles de distributions de Kummer de type 2 et Beta généralisées

Cette deuxième partie a pour point de départ l'article de Koudou et Vallois [9]. Ces deux auteurs ont caractérisé les fonctions liées à la propriété d'indépendance de Letac Wesołowski Matsumoto et Yor qui a conduit notamment aux lois de Kummer de type 2 et aux lois Beta généralisées.

Dans ce chapitre, nous rapelons tout d'abord dans la Section 2.1 la propriété d'indépendance de Letac Wesołowski Matsumoto et Yor et puis nous donnons nos résultats essentiels dans la Section 2.2.

Tout au long de ce chapitre, on désigne par $\mathcal{L}(X)$ la loi de la variable aléatoire X.

2.1 Introduction

Nous commençons par rappeler la propriété d'indépendance de Matsumoto et Yor dans la Section 2.1.1. Puis nous donnons l'extension de Koudou et Vallois [9] de cette propriété dans la Section 2.1.2 et nous terminons par poser la problématique dans la Section 2.1.3.

2.1.1 Propriété d'indépendance de Matsumoto et Yor

La propriété d'indépendance de Matsumoto et Yor fait intervenir les lois inverses gaussiennes généralisées et les lois Gamma. Afin d'énoncer les résultats, il convient de rappeler la définition des différentes lois.

La loi inverse gaussienne généralisée de paramètres μ, a, b est définie par

$$GIG(\mu,a,b)(x) := \frac{(a/b)^{\mu/2}}{2K_\mu(\sqrt{ab})}\ x^{\mu-1}\ e^{(-ax-\frac{b}{x})/2},\ \ x>0,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, a, $b > 0$ et K_μ est la fonction de Bessel modifiée de troisième espéce. La loi Gamma est donnée par

$$\gamma(a,c)(dx) = \frac{c^a}{\Gamma(a)}\ x^{a-1}\ e^{-cx}\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)dx,\ \ a,c>0$$

on note par $\gamma(a) := \gamma(a,1)$. Alors la loi $GIG(\mu,a,0)$ pour $\mu > 0$ est la loi $\gamma(\mu,a/2)$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $GIG(-\mu,a,b)$ et $\gamma(\mu,a/2)$ avec μ, a, $b > 0$. Matsumoto et Yor [19] ont remarqué que les variables

$$U = \frac{1}{X+Y}\ \ et\ \ V = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+Y} \tag{2.1}$$

sont indépendantes lorsque $a = b$. Cette propriété a été généralisée par Letac et Wesołowski [16] pour $a \neq b$. Plus précisement, ils ont montré que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois non dégénérées alors on a l'équivalence suivante: les variables aléatoires U et V définies dans (2.1) sont indépendantes si et seulement s'il existe a, b, $\mu > 0$ tels que $\mathcal{L}(X) = GIG(-\mu,a,b)$ et $\mathcal{L}(Y) = \gamma(\mu,b/2)$.

Dans ce cas, les lois associées de U et V sont données par

$$\mathcal{L}(U) = GIG(-\mu,b,a),\ \ \mathcal{L}(V) = \gamma(\mu,a/2).$$

En particulier, ils récupèrent la propriété de convolution suivante

$$GIG(-\mu,a,b) * \gamma(\mu,b/2) = GIG(\mu,a,b),\quad \mu,a,b>0. \tag{2.2}$$

Koudou et Vallois [9] ont donné une généralisation de la propriété de Letac et Wesłowski. Nous présentons dans la Section suivante cette généralisation.

2.1.2 L'extension de Koudou et Vallois de la propriété d'indépendance de Matsumoto et Yor

L'extension de Koudou et Vallois de la propriété de Letac et Wesołowski porte sur la recherche des fonctions f bijectives et décroissantes de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ ayant la propriété suivante: il existe des variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $f(X+Y)$ et $f(X) - f(X+Y)$ soient indépendantes. Une telle fonction f est dite fonction de Letac Wesołowski Matsumoto et Yor ou en abrégé fonction de LWMY. On note par T_f

$$T_f(x,y) = (f(x+y),\, f(x) - f(x+y))\,; \quad x > 0,\, y > 0 \tag{2.3}$$

la transformation associée à la fonction f.

Koudou et Vallois ont montré que, sous certaines hypothèses de régularité sur f, il existe exactement 4 classes de telles fonctions.

La première classe est engendrée par la fonction $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$, ce qui conduit à la propriété d'indépendance de Letac Wesołowski Matsumoto et Yor et notamment aux lois inverses gaussiennes généralisées. En effet, $T_{f_0}(X,Y) = \left(\dfrac{1}{X+Y},\, \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+Y}\right)$.

Les trois autres classes de fonctions de LWMY sont respectivement engendrées par les fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad x > 0, \tag{2.4}$$

$$g_1(x) = f_1^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right), \quad x > 0 \tag{2.5}$$

et pour $\delta > 0$

$$f_\delta^*(x) = ln\left(\frac{e^x + \delta - 1}{e^x - 1}\right), \quad x > 0. \tag{2.6}$$

Koudou et Vallois [9] ont montré que les cas $f = f_1$, $f = g_1$ (resp. $f = f_\delta^*$) conduisent naturellement aux lois de Kummer de type 2, aux lois Gamma (resp. lois Beta et aux lois Beta généralisées). Il convient donc de rappeler au préalable ces lois. La loi de Kummer de type 2 de paramètres a, b et c est définie par

$$K^{(2)}(a,b,c)(dx) = \frac{1}{\Gamma(a)\ \Psi(a,1-b,c)}\ x^{a-1}\ (1+x)^{-a-b}\ e^{-cx}\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)dx,$$

où $\Psi(a,b,c)$ est la fonction hyper géométrique confluante de deuxième espèce définie pour $a > 0$, $c > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ par:

$$\Psi(a,b,c) = \frac{1}{\Gamma(a)}\ \int_0^\infty t^{a-1}\ (1+t)^{b-a-1}\ e^{-ct}\ dt.$$

La loi Beta généralisée de paramètres a, b et c est donnée par

$$\beta_\delta(a,b,c)(dx) = \overline{k}_\delta(a,b,c)\ x^{a-1}\ (1-x)^{b-1}\ (1+(\delta-1)x)^c\ \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\ dx, \tag{2.7}$$

avec a, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ et $\overline{k}_\delta(a,b,c)$ désigne la constante de normalisation. De plus, la loi Beta est définie par

$$\beta(a,b)(dx) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ x^{a-1}\ (1-x)^{b-1}\ \mathbb{1}_{]0,1[}(x)dx.$$

Considérons maintenant deux variables aléatoires positives et indépendantes X et Y, nous associons le couple

$$(U,V) = T_{f_1}(X,Y) = \left(\frac{1}{e^{X+Y}-1},\ \frac{1}{e^X-1} - \frac{1}{e^{X+Y}-1}\right), \tag{2.8}$$

alors Koudou et Vallois[9] ont déterminé, sous une hypothèse supplémentaire, les lois de X et Y pour que la proriété de Letac Wesołowski Matsumoto et Yor a lieu (voir Theorem 2.4, [9]).

Remarque 2.1.1. *Soit f une fonction donnée, positive décroissante et bijective sur $]0,+\infty[$. Supposons que f est une fonction de LWMY, alors il existe deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que*

$$U = f(X+Y),\ \ V = f(X) - f(X+Y)$$

soient indépendantes. Puisque $(T_f)^{-1} = T_{f^{-1}}$, *avec* T_f *est la transformation définie dans (2.3), alors en posant*

$$(X', Y') := (U, V) = T_f(X, Y)$$

on aura

$$(U', V') = T_{f^{-1}}(X', Y') = (X, Y).$$

Par conséquent, les variables aléatoires X' *et* Y' *(resp.* U' *et* V'*) sont indépendantes (resp. indépendantes). Alors*

$$f \text{ est une fonction de } LWMY \Leftrightarrow f^{-1} \text{ est une fonction de } LWMY.$$

Les deux cas $f = f_1$ *et* $f = g_1$ *sont "équivalents" puisque* $g_1 = f_1^{-1}$. *Koudou et Vallois [10] ont donné, dans ce cas, les conditions nécessaires pour que la propriété de LWMY a lieu .*

Théorème 2.1.2. ***(Remark 2.2, [10])*** *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes et positives de densités de* P_X *et* P_Y. *Supposons que* $\ln(P_X)$ *et* $\ln(P_Y)$ *sont localement intégrables sur* $]0, +\infty[$. *On définit*

$$U = \frac{1+X+Y}{1+X}\ \frac{X}{X+Y}, \quad V = X + Y. \tag{2.9}$$

Alors U *et* V *sont indépendantes si et seulement s'il existe* a, b, $c > 0$ *telles que*

$$\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c) \ \ et \ \ \mathcal{L}(Y) = \gamma(b,c). \tag{2.10}$$

Sous la condition (2.10) on a

$$\mathcal{L}(U) = \beta(a,b) \ \ et \ \ \mathcal{L}(V) = K^{(2)}(a+b, -b, c). \tag{2.11}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, de lois données par (2.10), alors $\mathcal{L}(V) = K^{(2)}(a+b, -b, c)$. Cette propriété est équivalente à la propriété de convolution suivante:

$$K^{(2)}(a,b,c) * \gamma(b,c) = K^{(2)}(a+b, -b, c). \tag{2.12}$$

Remarque 2.1.3. *Koudou et Vallois [9] n'ont été pas en mesure de déterminer les lois des variables aléatoires qui vérifient la propriété d'indépendance de LWMY sans restriction. Nous avons cherché à affaiblir les conditions du Théorème 2.1.2. Il s'agit de déterminer les lois de X et Y telles que U et V définies dans (2.8) sont indépendantes avec la seule condition que $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(Y)$ soient non dégénérées. Nous n'avons pas réussi dans cette tentative, la question reste donc ouverte.*

Rappelons à présent les résultats relatifs à la fonction de LWMY f_δ^*. Koudou et Vallois [9] ont considéré la fonction f_δ définie par

$$f_\delta(x) = \exp(-f_\delta^*(-\ln x)) = \frac{1-x}{1+(\delta-1)x}, \ \ 0 < x < 1. \tag{2.13}$$

Notons que la fonction f_δ est une fonction involutive et décroissante de [0,1] dans [0,1]. Avec ce changement, l'aspect additif de la propriété de Letac Wesołowski Matsumoto et Yor devient un aspect multiplicatif. En effet, avec ce changement de variable, on peut montrer que le problème se ramène à chercher deux variables aléatoires X et Y indépendantes à valeurs dans [0,1] telles que $f_\delta(XY)$ et $\dfrac{f_\delta(X)}{f_\delta(XY)}$ sont indépendantes.

Théorème 2.1.4. ***(Theorem 2.4, [10])*** *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives P_X et P_Y. Supposons que $\ln(P_X)$ et $\ln(P_Y)$ sont localement intégrables sur $]0,1[$. Pour $\delta > 0$ fixé, soient*

$$U_\delta := f_\delta(XY) \ \ V_\delta := \frac{f_\delta(X)}{f_\delta(XY)}. \tag{2.14}$$

Alors U_δ et V_δ sont indépendantes si et seulement s'il existe a, b, $\lambda > 0$ telles que

$$\mathcal{L}(X) = \beta_\delta(a+b,\lambda,-\lambda-b) \ \ et \ \ \mathcal{L}(Y) = \beta(a,b). \tag{2.15}$$

Dans ce cas nous avons

$$\mathcal{L}(U_\delta) = \beta_\delta(\lambda+b,a,-a-b) \ \ \mathcal{L}(V_\delta) = \beta(\lambda,b). \tag{2.16}$$

2.1.3 Présentation des résultats essentiels

A) Résultats liés aux lois de Kummer de type 2:

Une première motivition de notre travail est de bien comprendre la relation entre les lois $K^{(2)}(a,b,c)$ et $\gamma(a,c)$. Nous observons que la distribution de Kummer $K^{(2)}(a,b,c)$ de paramètres positifs s'exprime à l'aide de celle de $\gamma(a,c)$ comme l'indique la relation suivante

$$K^{(2)}(a,b,c)(x) = \left(\frac{1}{\Psi(a,1-b,c)\ c^a}\right)\ (1+x)^{-a-b}\ \gamma(a,c)(x), \quad x>0. \tag{2.17}$$

Cette identité permet d'obtenir une première réalisation en montrant que la loi $K^{(2)}(a,b,c)$ peut être considérée comme la loi conditionnelle d'une variable aléatoire de loi $\gamma(a,c)$ (voir la Proposition 2.2.8 dans la Section 2.2).

Il est clair que si $a,\ c>0$ et $b>-a$ alors la relation (2.17) implique

$$K^{(2)}(a,b,c)(x) \leq \left(\frac{1}{\Psi(a,1-b,c)\ c^a}\right)\ \gamma(a,c)(x),\ \ x>0. \tag{2.18}$$

Nous pouvons alors appliquer la méthode du rejet pour donner une deuxième réalisation presque sûre des lois de Kummer de type 2 (voir la Proposition 2.2.12 dans la Section 2).

D'autre part, nous considérons deux suites de variables aléatoires X_n et Y_n et nous nous intéressons au cas où $(X_n,\ Y_n)$ entre dans le domaine $\{(x,\ y)\in \mathbb{R}_+^*;\ y>1+f_1(-\ln x)\}$ avec f_1 est la fonction de LWMY définie dans (2.4). Cette observation permet de donner des exemples de variables aléatoires qui vérifient le Théorème 2.1.2. Ceci fournit une troisième réalisation presque sûre des lois de Kummer de type 2 (voir Théorème 2.2.14 dans la Section 2.2.2).

Notons que la loi de Kummer $K^{(2)}(a+b,-b,c)$ n'est jamais égale à $K^{(2)}(a,b,c)$ et alors la relation (2.12) ne donne pas une caractérisation de la loi $K^{(2)}(a,b,c)$. Nous allons donc considérer une nouvelle transformation (voir la Proposition 2.2.1 dans la Section 2.2) pour donner une intéressante caractérisation des lois de Kummer de type 2 comme l'unique

solution d'une équation impliquant les lois Gamma.

Théorème 2.1.5. *Soient X, Y_1 et Y_2 des variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(Y_1) = \gamma(a,c) \quad et \quad \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(a+b,c), \tag{2.19}$$

où a, $c > 0$ et $b > -a$.

1. *Alors*

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\left(\frac{Y_1}{1+\dfrac{Y_2}{1+X}}\right) \text{ si et seulement si } \mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c). \tag{2.20}$$

2. *Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1) = \gamma(a,c), \quad \mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(a+b,c); \quad i \geq 1. \tag{2.21}$$

Alors

$$\mathcal{L}\left(\cfrac{Y_1}{1+\cfrac{Y_2}{1+\cfrac{Y_3}{1+\ddots}}}\right) = K^{(2)}(a,b,c) \tag{2.22}$$

Le Théorème 2.1.5 repose de manière essentielle sur la proposition suivante:

Proposition 2.1.6. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On définit*

$$U := \frac{Y}{1+X} \quad et \quad V := X\left(1+\frac{Y}{1+X}\right).$$

Soient a, $c > 0$ et $b > -a$.

1. *Supposons que $\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c)$ et $\mathcal{L}(Y) = \gamma(a+b,c)$. Alors U et V sont indépendantes, $\mathcal{L}(U) = K^{(2)}(a+b,-b,c)$ et $\mathcal{L}(V) = \gamma(a,c)$.*
2. *Supposons que $\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a+b,-b,c)$ et $\mathcal{L}(Y) = \gamma(a,c)$. Alors U et V sont indépendantes, $\mathcal{L}(U) = K^{(2)}(a,b,c)$ et $\mathcal{L}(V) = \gamma(a+b,c)$.*

Remarque 2.1.7. *La preuve de la Proposition 2.1.6 est valable pour $a,\ c > 0$ et $b > -a$. Nous avons donc une caractérisation des lois de Kummer appartenant à $\mathcal{F} := \{K^{(2)}(a,b,c);\ a,\ c > 0,\ b > -a\}$. Ce qui étend ce que nous avons obtenu.*

La proposition 2.1.6 fait aussi intervenir $\mathcal{F}' := \{K^{(2)}(a+b,-b,c);\ a+b > 0,\ c > 0,\ a > 0\}$. Posons $a' = a+b$, $b' = -b$ et $c' = c$. Alors $a = a'+b'$, $b = -b'$ et $c = c'$. On vérifie bien que

$$a+b > 0 \Leftrightarrow a' > 0,\ c > 0 \Leftrightarrow c' > 0,\ a > 0 \Leftrightarrow a'+b' > 0 \Leftrightarrow b' > -a'.$$

On en déduit:

$$\mathcal{F}' = \{K^{(2)}(a',b',c');\ a',\ c' > 0,\ b' > -a'\}.$$

Donc $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

La preuve du Théorème 2.1.5 et de la Proposition 2.1.6 est donnée dans la Section 2.2.1

Chamayou et Letac ont montré dans [2] un résultat qui ressemble au Théorème 2.1.5 et qui fait intervenir les lois Beta de type 2. Rappelons la définition de la loi Beta de type 2 de paramètres $a,\ b > 0$:

$$\beta^{(2)}(a,b)(dx) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ x^{a-1}\ (1+x)^{-a-b}\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)dx.$$

Chamayou et Letac [2] ont montré le résultat suivant

Théorème 2.1.8. *(Exemple 11, [2])*

1. *Soient X, Y_1 et Y_2 des variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(X) = \beta^{(2)}(a,\ b),\ \mathcal{L}(Y_1) = \beta^{(2)}(a+b,\ a),\ \mathcal{L}(Y_2) = \beta^{(2)}(a+b,\ b).$$

Alors

$$\mathcal{L}\left(\frac{Y_1}{1+\dfrac{Y_2}{1+X}}\right) = \mathcal{L}(X). \tag{2.23}$$

2. *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(Y_{2n-1}) = \mathcal{L}(Y_1),\ \mathcal{L}(Y_{2n}) = \mathcal{L}(Y_2); \quad \forall n \geq 1.$$

Alors $\beta^{(2)}(a,\, b)$ est l'unique loi stationnaire de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$W_n = \frac{Y_{2n-1}}{1+\dfrac{Y_{2n}}{1+W_{n-1}}},\ \ \forall\ n \geq 1$$

et

$$Z = \lim_{n\to\infty}\ \frac{Y_1}{1+\dfrac{Y_2}{1+...\dfrac{Y_{2n-1}}{1+\dfrac{Y_{2n}}{1+x}}}}$$

existe (p.s), ne dépend pas de x et $\mathcal{L}(Z) = \beta^{(2)}(a,b)$.

Remarque 2.1.9.

1. *Concentrons nous sur les deux identités (2.20) et (2.23). Pour bien mettre en évidence l'analogie "formelle" entre ces deux relations, introduisons, comme il est fait dans [2], les deux applications aléatoires:*

$$F_1(y) := Y_1\ f(y), \quad F_2(y) := Y_2\ f(y),$$

avec

$$f(y) = \frac{1}{1+y}.$$

Il est alors clair que (2.20) et (2.23) se mettent sous la forme

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(F_1 \circ F_2(X)).$$

La différence réside dans le fait que pour les lois de Kummer

$$\mathcal{L}\Big((Y_1,\, Y_2)\Big) = \gamma(a,\, c) \otimes \gamma(a+b,\, c),$$

alors que pour les lois Beta de type 2,

$$\mathcal{L}\Big((Y_1,\, Y_2)\Big) = \beta^{(2)}(a+b,\, a) \otimes \beta^{(2)}(a+b,\, b).$$

Les deux Théorèmes 2.1.5 et 2.1.8 sont donc différents.

2. *L'identité (2.20) permet de montrer une partie de l'item 1 de l'Exemple 9 dans [2]. En effet, considérons deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 telles que $\mathcal{L}(Y_1) = \gamma(a)$ et $\mathcal{L}(Y_2) = \gamma(a+b)$. On introduit, pour $c > 0$,*

$$Y_i^{(c)} := \frac{Y_i}{c}, \;\; i = 1,\, 2.$$

Il est clair que $\mathcal{L}(Y_1^{(c)}) = \gamma(a,\, c)$ et $\mathcal{L}(Y_2^{(c)}) = \gamma(a+b,\, c)$. On considère une collection de variables aléatoires $(X^{(c)})_{c>0}$ telle que pour tout $c > 0$, $X^{(c)}$ est indépendante du couple $(Y_1,\, Y_2)$ et de loi $K^{(2)}(a,b,c)$. Puisque $K^{(2)}(a,\, b,\, c)$ converge vers $\beta^{(2)}(a,\, b)$, lorsque $c \to 0$, alors $X^{(c)}$ converge en loi, quand $c \to 0$, vers une variable aléatoire X de loi $\beta^{(2)}(a,\, b)$. Il est clair que l'on a

$$\frac{Y_1^{(c)}}{1 + \dfrac{Y_2^{(c)}}{1 + X^{(c)}}} = \frac{Y_1}{c + \dfrac{Y_2}{1 + X^{(c)}}}$$

On déduit alors du Théorème 2.1.5 que

$$\mathcal{L}(X^{(c)}) = \mathcal{L}\left(\frac{Y_1}{c + \frac{Y_2}{1+X^{(c)}}}\right).$$

On fait tendre $c \to 0$, il vient

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\widehat{Y}(1+X)), \tag{2.24}$$

$\widehat{Y}$ est une variable aléatoire indépendante de X et $\mathcal{L}(\widehat{Y}) = \mathcal{L}\left(\dfrac{Y_1}{Y_2}\right) = \beta^{(2)}(a,\, a+b)$. Cette identité figure dans l'item 1 de l'Exemple 11 de Chamayou et Letac [2].

B) <u>Résultats liés aux lois Beta généralisées:</u>

Nous nous sommes aussi intéressés aux lois Beta généralisées. Nous donnons, d'une façon similaire aux lois de Kummer, des réalisations presque sûres. En effet, remarquons que la loi $\beta_\delta\ (a,\, b,\, c)$ peut être comparée à la loi $\beta(a,\, b)$

$$\beta_\delta\ (a,\, b,\, c)(x) = \overline{k}_\delta\ (a,b,c)\ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ (1 + (\delta - 1)x)^c\ \beta(a,\, b)(x), \tag{2.25}$$

ce qui fournit une première réalisation presque sûre par la méthode de conditionnement et une deuxième réalisation par la méthode du rejet (voir les Propositions 2.3.13 et 2.3.17 dans la Section 2.3).

D'autre part, en se basant sur les identités (2.15) et (2.16), nous montrons que les loi Beta généralisées vérifient une équation impliquant la fonction f_δ (cf (2.13)), et les lois Beta:

Proposition 2.1.10. *Soient X, Y_1 et Y_2 des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(X) = \beta_\delta\ (a+b,\ \lambda, -\lambda-b)$, $\mathcal{L}(Y_1) = \beta(\lambda,\ b)$ et $\mathcal{L}(Y_2) = \beta(a,\ b)$, où $a,\ b,\ \lambda > 0$. Alors*

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\Big(f_\delta(Y_1\ f_\delta(XY_2))\Big). \tag{2.26}$$

On peut aller plus loin dans le Théorème 2.1.11 suivant et montrer que la relation (2.26) caractérise en fait les loi Beta généralisées.

Théorème 2.1.11. *Soient X, Y_1 et Y_2 des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(Y_1) = \beta(\lambda,\ b)$ et $\mathcal{L}(Y_2) = \beta(a,\ b)$ avec $a,\ b,\ \lambda > 0$. Alors*

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\Big(f_\delta\left(Y_1 f_\delta(XY_2)\right)\Big) \text{ si et seulement si } \mathcal{L}(X) = \beta_\delta\ (a+b,\ \lambda, -\lambda-b). \tag{2.27}$$

Les preuves de la Proposition 2.1.10 et du Théorème 2.1.11 sont données dans la Section 2.3.

Le Théorème 2.1.11 a été énoncé sous une forme légèrement différente par Chamayou et Letac (cf Exemple 12, [2]). En effet, on commence par remarquer que

$$\mathcal{L}(X) = \beta_\delta\ (a+b,\ \lambda, -\lambda-b) \Rightarrow \mathcal{L}\Big(f_\delta(X)\Big) = \beta_\delta\ (\lambda,\ a+b, -a). \tag{2.28}$$

Par conséquent, en prenant l'image par f_δ qui est une involution, il est aisé de montrer que (2.27) est équivalent à

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\Big(Y_1\ f_\delta(X\ Y_2)\Big) \Leftrightarrow \mathcal{L}(X) = \beta_\delta\ (\lambda,\ a+b, -a). \tag{2.29}$$

Pour préciser l'identification avec l'Exemple 12 de [2], il convient de rappeler la définition de la loi Hyper-géometrique $H(a,\ b;\ c;\ z)$ de paramètres $a > 0$, $0 < b < c$ et $z < 1$:

$$H(a,\ b;\ c;\ z)(dx) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)F(a,\ b;\ c;\ z)}\ x^{b-1}\ (1-x)^{c-b-1}\ (1-zx)^{-a}\ \mathbb{1}_{]0,1[}(x)dx,$$

où

$$F(a,\, b;\; c;\; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1}\, (1-u)^{c-b-1}\, (1-zu)^{-a}\, du.$$

Il est clair d'après la définition que

$$\beta_\delta\, (a,\, b,\, c) = H(-c,\, a;\; a+b;\; 1-\delta)$$

ou d'une façon équivalente

$$H(a,\, b;\; c;\; z) = \beta_{1-z}\, (b,\, c-b,\, -a).$$

Par conséquent, on peut reformuler (2.29), sous la forme suivante:

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\Big(Y_1\; f_\delta(X\; Y_2)\Big) \Leftrightarrow \mathcal{L}(X) = H(a,\, \lambda;\; a+b+\lambda;\; 1-\delta). \tag{2.30}$$

Dans [2], les auteurs montrent le sens direct (i.e $\Leftarrow$ de (2.30)) mais ne démontrent pas le sens réciproque. Il nous a paru intéressent d'en donner une preuve. Signalons de plus qu'elle est assez longue et technique (cf Propositions 2.3.4, 2.3.5 et Lemmes 2.3.6, 2.3.7).

2.2 Etude approfondie des lois de Kummer de type 2

Dans cette section nous donnons les résultats essentiels concernant la caractérisation et les réalisations presque sûres des lois de Kummer de type 2. Nous commençons par la partie caractérisation (Section 2.2.1) et puis nous mettons en valeur les différentes réalisations presque sûres (Section 2.2.2).

2.2.1 Caractérisation des lois de Kummer de type 2

Le but de cette partie est de montrer que les lois de Kummer $K^{(2)}(a,b,c)$ sont caractérisées comme l'unique solution d'une équation de convolution. Comme déjà noté dans l'Introduction, la relation (2.12) ne donne pas en général une caractérisation de ces lois vue que la loi

$K^{(2)}(a+b,-b,c)$ qui apparait dans (2.12) est différente de $K^{(2)}(a,b,c)$.

Considérons alors la transformation

$$T(x,y) = \left(\frac{y}{1+x},\, x\left(1+\frac{y}{1+x}\right)\right),$$

définie de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ dans lui même. Nous remarquons que T est involutive. Ceci va jouer un rôle très important dans notre approche. Dans la Proposition 2.2.1 qui suit, nous obtenons de nouvelles identités vérifiées par les loi de Kummer de type 2 et qui seront le point de départ de notre caractérisation. Pour rappeler les résultats de base de la Proposition 2.1.6, nous avons choisi de les reprendre dans l'item 2 de la Proposition 2.2.1.

Proposition 2.2.1.

1. *La transformation* $T :]0,+\infty[^2 \to]0,+\infty[^2$: $(x,y) \mapsto \left(\frac{y}{1+x},\, x\left(1+\frac{y}{1+x}\right)\right)$ *est involutive.*

2. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes. Nous définissons* $(U,V) = T(X,Y)$, *i.e.*

$$U := \frac{Y}{1+X} \quad et \quad V := X\left(1+\frac{Y}{1+X}\right). \tag{2.31}$$

Soient $a,\, c > 0$ *et* $b > -a$. *Alors*

   (a) *Supposons que* $\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c)$ *et* $\mathcal{L}(Y) = \gamma(a+b,c)$. *Alors* U *et* V *sont indépendantes et*

$$\mathcal{L}(U) = K^{(2)}(a+b,-b,c) \quad et \quad \mathcal{L}(V) = \gamma(a,c). \tag{2.32}$$

   (b) *Supposons que* $\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a+b,-b,c)$ *et* $\mathcal{L}(Y) = \gamma(a,c)$ *alors* U *et* V *sont indépendantes et*

$$\mathcal{L}(U) = K^{(2)}(a,b,c), \qquad \mathcal{L}(V) = \gamma(a+b,c). \tag{2.33}$$

Remarque 2.2.2. *1) Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de lois indiquées dans 2. (b) de la Proposition 2.2.1. Alors Letac a remarqué dans [13] que* $\mathcal{L}\left(\frac{Y}{1+X}\right) =$

$K^{(2)}(a,b,c)$ et la preuve utilise les tranformés de Mellin. Notre approche est complétement différente.

2) Les relations (2.32) et (2.33) permettent d'obtenir une relation qui ne fait intervenir que les lois Gamma et les lois de Kummer. En effet, soient Y_1, Y_2 et X des variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathcal{L}(Y_1) = \gamma(a,c),\ \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(a+b,c),\ \mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c), \quad a,\ c > 0,\ b > -a.$$

La partie 2 (a) de la Proposition 2.2.1 implique que $\dfrac{Y_2}{1+X} \sim K^{(2)}(a+b,-b,c)$. En utilisant la partie 2 (b) avec (X,Y) remplacé par $\left(\dfrac{Y_2}{1+X}, Y_1\right)$ nous obtenons que $\dfrac{Y_1}{1+\dfrac{Y_2}{1+X}}$ a la même loi que X qui est égale à $K^{(2)}(a,b,c)$. Par conséquent, nous obtenons l'identité en loi suivante

$$\mathcal{L}\left(\frac{Y_1}{1+\dfrac{Y_2}{1+X}}\right) = \mathcal{L}(X). \tag{2.34}$$

Ceci donne la preuve du sens "facile" de l'Item 1 du Théorème 2.1.5 (i.e. Item 1 " $\Leftarrow$ ").

D'après les relations (2.34) et (2.22), il est naturel d'introduire d'une façon récursive la suite suivante associée à une suite donnée des nombres positifs $(y_n)_{n\geq 1}$

$$[y_1] = y_1 \tag{2.35}$$

et

$$[y_1,y_2,...,y_n] = \frac{y_1}{1+[y_2,...,y_n]} \quad \forall n \geq 2. \tag{2.36}$$

Il est clair que pour $n = 2$ dans (2.36) nous avons $[y_1,y_2,x] = \dfrac{y_1}{1+\dfrac{y_2}{1+x}}$.

La relation (2.34) peut donc se ré-écrire sous la forme

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\Big([Y_1,Y_2,X]\Big).$$

De plus nous pouvons reformuler la relation (2.22) comme suit:

$[Y_1,...,Y_n]$ converge quand $n \to +\infty$ vers une v.a de loi $K^{(2)}(a,b,c)$.

Donc il est naturel d'étudier la convergence de la suite $[Y_1,...,Y_n]$ presque sûrement. La preuve du Théorème 2.1.5 est basée sur la proposition suivante

Proposition 2.2.3. *Soient Y_1, Y_2,..., Y_n,... une collection des variables aléatoires positives telles que*

$$\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1), \quad \mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) \quad \forall i \geq 1. \tag{2.37}$$

Alors

1. *$[Y_1,...,Y_n]$ converge presque sûrement, quand $n \to \infty$, vers une variable aléatoire Y^*.*
2. *Pour toute variable aléatoire positive X_0, la suite $[Y_1,...,Y_n,X_0]$ converge presque sûrement vers Y^* quand $n \to \infty$.*

Nous commençons tout d'abord par étudier la convergence de la suite $[y_1,...,y_n]$ avec $(y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de nombres positifs. Nous donnons quelques résultats préliminaires (Lemme 2.2.4, Lemme 2.2.5 et Lemme 2.2.6). Le cas stochastique (Proposition 2.2.3 et Théorèmes 2.1.5) sera une application directe.

En tenant compte de la définition de la suite (2.36), nous introduisons les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ suivantes:

$$p_0 = 0, \;\; p_1 = y_1, \;\; p_n = p_{n-1} + y_n p_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \tag{2.38}$$

$$q_0 = 1, \;\; q_1 = 1, \;\; q_n = q_{n-1} + y_n q_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \tag{2.39}$$

Le but est de montrer que $[y_1,...,y_n,x]$ s'exprime en fonction de x à l'aide d'une fraction rationnelle.

Lemme 2.2.4. *Soit $x \geq 0$. Alors pour tout $n \geq 1$:*

$$[y_1,...,y_n,x] = \frac{p_n + x\ p_{n-1}}{q_n + x\ q_{n-1}}. \tag{2.40}$$

En particulier pour $x = 0$, nous avons $[y_1,...,y_n,0] = \dfrac{p_n}{q_n}$. De plus,

$$p_n\ q_{n-1} - p_{n-1}\ q_n = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} y_i. \tag{2.41}$$

$$p_{n+2}\ q_n - p_n\ q_{n+2} = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n+1} y_i. \tag{2.42}$$

Preuve du Lemme 2.2.4 1)Nous montrons (2.40) par récurrence sur n. Il est clair que (2.40) est vérifiée pour $n = 1$, et

$$[y_1,...,y_n,x] = \left[y_1,...,y_{n-1},\frac{y_n}{1+x}\right] \tag{2.43}$$

Supposons que (2.40) est vérifiée. En utilisant (2.43) nous déduisons que:

$$\begin{aligned}
[y_1,...,y_{n+1},x] &= \left[y_1,...,y_n,\frac{y_{n+1}}{1+x}\right] \\
&= \frac{p_n + \frac{y_{n+1}}{1+x}\ p_{n-1}}{q_n + \frac{y_{n+1}}{1+x}\ q_{n-1}} \\
&= \frac{p_{n+1} + x\ p_n}{q_{n+1} + x\ q_n}.
\end{aligned}$$

2) Nous avons $p_1q_0 - p_0q_1 = y_1$. Supposons que (2.41) est vérifiée. Nous avons

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (p_n + y_{n+1}p_{n-1})q_n - p_n(q_n + y_{n+1}q_{n-1}) = -y_{n+1}(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n).$$

Nous montrons (2.42) de la même façon. □

Ayant exprimé $[y_1,...,y_n]$ sous forme de fraction rationnelle, nous étudions la convergence de $\frac{p_n}{q_n}$. Pour ce faire, nous nous intéressons à la monotonie de $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ et $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$.

Lemme 2.2.5. *Soient* $u_n = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ *et* $v_n = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$, *avec* $(p_n)_{n\geq 0}$ *et* $(q_n)_{n\geq 0}$ *sont définies dans (2.38) et (2.39). Alors*

1. $(u_n)_{n\geq 0}$ *(resp.* $(v_n)_{n\geq 0}$*) est croissante (resp. décroissante) et* $u_n < v_n$.
2. *Si* y_n *ne converge pas vers* ∞ *alors* u_n, v_n, $\frac{p_n}{q_n}$ *et* $[y_1,...,y_n,x]$ *convergent vers la même limite, quand* $n \to \infty$.

Preuve du Lemme 2.2.5 D'après la définition de $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ et (2.42), nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{p_{2n+2}\ q_{2n} - p_{2n}\ q_{2n+2}}{q_{2n+2}\ q_{2n}} = \frac{p_{2n+1}\ q_{2n} - p_{2n}\ q_{2n+1}}{q_{2n+2}\ q_{2n}} = \frac{\prod_{i=1}^{2n+1} y_i}{q_{2n+2}\ q_{2n}} > 0,$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{\prod_{i=1}^{2n+2} y_i}{q_{2n+3}\ q_{2n+1}} < 0$$

et

$$w_n = v_n - u_n = \frac{p_{2n+1}\ q_{2n} - p_{2n}\ q_{2n+1}}{q_{2n}\ q_{2n+1}} = \frac{\prod_{i=1}^{2n+1} y_i}{q_{2n}\ q_{2n+1}} > 0. \tag{2.44}$$

Nous montrons maintenant l'item 2. En changeant n par $n+1$ et en utilisant (2.38) et (2.39) nous obtenons

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{\prod_{i=1}^{2n+3} y_i}{q_{2n+3}\ q_{2n+2}} = \frac{y_{2n+3}}{q_{2n+2} + y_{2n+3}\ q_{2n+1}}\ \frac{y_{2n+2}}{q_{2n+1} + y_{2n+2}\ q_{2n}}\ \prod_{i=1}^{2n+1} y_i. \\ &= \frac{y_{2n+3}}{\frac{q_{2n+2}}{q_{2n+1}} + y_{2n+3}}\ \frac{y_{2n+2}}{\frac{q_{2n+1}}{q_{2n}} + y_{2n+2}}\ w_n \end{aligned} \tag{2.45}$$

Le fait que $\frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\ y_{n+1} > 1$, nous donne:

$$w_{n+1} < \frac{y_{2n+3}}{1 + y_{2n+3}}\ \frac{y_{2n+2}}{1 + y_{2n+2}}\ w_n.$$

D'une façon récursive nous obtenons

$$w_{n+1} < w_1\ \left(\prod_{i=4}^{2n+3} \frac{y_i}{1 + y_i} \right). \tag{2.46}$$

Puisque y_n ne converge pas vers ∞, alors il existe $k_1 > 0$, et une suite (n_k) telle que $y_{n_k} < k_1$. Par conséquent:

$$\varphi_n := \sum_{4 \le i \le 2n+3} \mathbb{1}_{\{n_i \le 2n+3\}} \to +\infty, \textit{ quand } n \to +\infty.$$

Il est clair que $y_{n_k} \le k_1$ implique que $\frac{y_{n_k}}{1 + y_{n_k}} \le \lambda$ avec $\lambda = \frac{k_1}{1 + k_1} < 1$. L'indentité (2.46) implique que

$$w_{n+1} < w_1\ \lambda^{\varphi_n}.$$

Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$. D'où $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont des suites adjacentes et donc convergent vers la même limite.

Soit

$$\psi(x) := [y_1,...,y_n,x] = \frac{p_n + x\ p_{n-1}}{q_n + x\ q_{n-1}}, \quad x \geq 0.$$

Alors

$$\psi'(x) = \frac{q_n\ q_{n-1}}{(q_n + x\ q_{n-1})^2}\ \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right).$$

Supposons que n est pair, d'après la partie 1, ψ' est croissante. Par conséquent

$$\psi(0) = \frac{p_n}{q_n} \leq \psi(x) \leq \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \psi(+\infty).$$

Si n est impair, nous avons

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \leq \psi(x) \leq \frac{p_n}{q_n}.$$

Finallement, nous avons montré que $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n>0}$ est une suite convergente, alors $[y_1,...,y_n,x]$ converge vers la même limite. □

Afin de pouvoir appliquer le schéma de preuve précédent au cadre stochastique nous avons besoin du résultat suivant:

Lemme 2.2.6. *Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et positives telles que*

$$\lim_{K\to\infty}\ \sup_{m\geq 1}\ P\left(Y_m \geq K\right) = 0. \tag{2.47}$$

Alors, $P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = +\infty\right) = 0$.

Preuve du Lemme 2.2.6 Nous commençons par l'identité

$$\{\lim_{n\to\infty} Y_n = +\infty\} = \bigcap_{K\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n}\{Y_m \geq K\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = +\infty\right) &= \lim_{K\to\infty}\ \lim_{n\to\infty}\ P\left(\bigcap_{m\geq n}\{Y_m \geq K\}\right) \\ &= \lim_{K\to\infty}\ \lim_{n\to\infty}\ \prod_{m\geq n} P\left(Y_m \geq K\right). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit de (2.47). □

Remarque 2.2.7. *1) Letac et Seshadri [16] ont donné une caractérisation similaire des lois inverses gaussiennes généralisées en utilisant les fractions continues. En effet, ces deux auteurs ont montré que si X, Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(Y_1) = \gamma(\lambda,b/2) \quad et \quad \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(\lambda,a/2),$$

avec λ, a, $b > 0$ alors

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{Y_1 + \dfrac{1}{Y_2 + X}}\right) \quad si\ et\ seulement\ si\ \mathcal{L}(X) = GIG(-\lambda,a,b).$$

Ils ont montré aussi que si $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1) = \gamma(\lambda,b/2) \quad et \quad \mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(\lambda,a/2), \quad \forall i \geq 1,$$

alors

$$\mathcal{L}\left(\cfrac{1}{Y_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Y_3 + \ddots}}}\right) = GIG(-\lambda,a,b).$$

2) Dans leur schéma de preuve, Letac et Seshadri ont établi la convergence quelque soit la suite $(y_n)_{n\geq 1}$. En effet, ils ont utilisé la forme réduite d'une fraction continue en introduisant les suites $\widehat{p}_n$ et $\widehat{q}_n$:

$$\widehat{p}_1 = 1,\ \widehat{p}_2 = y_1y_2 + 1,\ \widehat{p}_n = y_n\widehat{p}_{n-1} + \widehat{p}_{n-2} \quad pour \quad n > 2$$

$$\widehat{q}_1 = 1,\ \widehat{q}_2 = y_2,\ \widehat{q}_n = y_n\widehat{q}_{n-1} + \widehat{q}_{n-2}, \quad pour \quad n > 2,$$

où $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs. Il est bien connu que la fraction continue $y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{\ddots + y_n}}$ est égale à $\dfrac{\widehat{p}_n}{\widehat{q}_n}$ et converge.

3) Dans notre cas nous n'avons pas pu démontrer la convergence de $\frac{p_n}{q_n}$ *sans restriction (i.e. nous supposons que la suite* y_n *ne tend pas vers* ∞ *à l'infinie). Ce qui n'est pas gênant car nous considérons la convergence de* $[Y_1,...,Y_n,X]$ *où* $(Y_i)_i$ *sont des variables aléatoires. Le Lemme 2.2.6 est suffisant pour nous donner la convergence.*

Grâce aux Lemmes 2.2.4, 2.2.5 et 2.2.6, nous sommes à présent en mesure de démontrer les Propositions 2.2.1, 2.2.3 et le Théorème 2.1.5.

Preuve de la Proposition 2.2.1 Nous montrons seulement le deuxième point puisque le premier point est évident.

Nous commençons par 2) (a). Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées et

$$\Delta := E\left[f\left(\frac{Y}{1+X}\right)\ g\left(X\left(1+\frac{Y}{1+X}\right)\right)\right].$$

Alors

$$\Delta = \widetilde{c}\int f\left(\frac{y}{1+x}\right)\ g\left(x\left(1+\frac{y}{1+x}\right)\right)\ \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\ e^{-cx}\ y^{a+b-1}\ e^{-cy}\ \mathbb{1}_{\{x>0,\ y>0\}}\ dx\ dy,$$

où $\widetilde{c}$ est le produit des constantes de normalisation provenant des fonctions densités de $K^{(2)}(a,b,c)$ et $\gamma(a+b,c)$. Pour x fixé, nous effectuons le changement de variable $u := \frac{y}{1+x}$, nous obtenons

$$\Delta = \widetilde{c}\ \int f(u)\ g\left(x(1+u)\right)\ x^{a-1}\ e^{-cx(1+u)}\ u^{a+b-1}\ e^{-cu}\ \mathbb{1}_{\{x>0,\ y>0\}}\ dx\ du.$$

Pour u fixé, nous effectuons le changement de variable $v := x(1+u)$, alors

$$\Delta = \widetilde{c}\ \int f(u)\ g(v)\ u^{a+b-1}\ (1+u)^{-a}\ e^{-cu}\ v^{a-1}\ e^{-cv}\ \mathbb{1}_{\{u>0,\ v>0\}}\ du\ dv.$$

Puisque T est bijective et $T^{-1} = T$, alors la partie 2 (b) est une conséquence directe. □

Preuve de la Proposition 2.2.3 Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui vérifient (2.37). Il est clair que (2.47) est vérifiée alors Y_n ne converge pas vers $+\infty$

presque sûrement quand $n \to \infty$. La Proposition 2.2.3 est une conséquence directe du Lemme 2.2.5 appliqué pour $y_n = Y_n$ et $x = X_0$. □

Preuve du Théorème 2.1.5 Nous commençons par la première partie (*i.e.* $\Leftarrow$).

Supposons que $\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c)$ et les lois de Y_1 et Y_2 sont données par (2.19). Alors le résultat est obtenu directement d'après la Proposition 2.2.1.

Inversement, montrons que si X, Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(Y_1) = \gamma(a,c)$, $\mathcal{L}(Y_2) = \gamma(a+b,c)$ et

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\left(\frac{Y_1}{1+\frac{Y_2}{1+X}}\right) \tag{2.48}$$

alors $\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c)$, où $a,b,c > 0$.

Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par (2.21). La partie 1 de la Proposition 2.2.3 implique que $[Y_1,...,Y_n,X]$ et $[Y_1,...,Y_n]$ convergent presque sûrement vers la même variable aléatoire Y^*.

Puisque la loi de X satisfait (2.48), alors il est clair que $[Y_1,...,Y_n,X]$ a la même loi que X pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y^*)$. Nous déduisons donc que la relation (2.48) posséde une unique solution. Evidement $\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,b,c)$ est cette solution. □

2.2.2 Réalisations presque sûres des lois de Kummer de type 2

Dans cette section nous présentons les différentes réalisations presque sûres des lois de Kummer de type 2. Nos résultats essentiels figurent dans les Propositions 2.2.8, 2.2.9, 2.2.12 et le Théorème 2.2.14. Dans chaque partie, nous commençons par énoncer les résultats et ensuite nous donnons les preuves.

A) Méthode de conditionnement Notre observation repose sur le fait que les lois de Kummer $K^{(2)}(a,b,c)$ avec des paramètres positifs sont proches des lois $\gamma(a,c)$. En effet,

d'aprés la définition des lois de Kummer nous avons

$$K^{(2)}(a,b,c)(x) = \frac{1}{\Psi(a,1-b,c)\ c^a}\ (1+x)^{-a-b}\ \gamma(a,c)(x), \quad x>0$$

où a, b, $c>0$. Cette dernière relation nous permet d'exprimer la loi $K^{(2)}(a,b,c)$ comme une loi conditionnelle d'une variable aléatoire X_0 de loi $\gamma(a,c)$.

Proposition 2.2.8. *Soit (X_0,ξ) un couple de variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(X_0) = \gamma(a,c), \ \ \mathcal{L}(\xi) = \mathcal{U}([0,1]). \tag{2.49}$$

Alors, pour tout $b>-a$, conditionnellement à $\{\xi\ (1+X_0)^{a+b}<1\}$,

$$\mathcal{L}(X_0) = K^{(2)}(a,b,c). \tag{2.50}$$

Preuve de la Proposition 2.2.8 Soit $\varphi : [0,+\infty[\to[0,+\infty[$ une fonction borélienne et

$$\delta := E\left[\varphi(X_0) \mid \xi < \frac{1}{(1+X_0)^{a+b}}\right].$$

Alors

$$\delta = \frac{1}{\lambda}\ E\left[\varphi(X_0)\ \mathbb{1}_{\{\xi<\frac{1}{(1+X_0)^{a+b}}\}}\right],$$

où $\lambda = P\left(\xi < \frac{1}{(1+X_0)^{a+b}}\right)$. Puisque $\frac{1}{(1+X_0)^{a+b}}>0$, $\xi\sim\mathcal{U}([0,1])$ et ξ indépendante de X_0 alors

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\lambda}\ E\left[\varphi(X_0)\ \frac{1}{(1+X_0)^{a+b}}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\ \frac{c^a}{\Gamma(a)}\ \int_0^\infty \varphi(x)\ x^{a-1}\ (1+x)^{-a-b}\ e^{-cx}\ dx.\end{aligned}$$

□

Nous allons examiner la loi du couple (U,V) définie dans (2.9), conditionnellement à $\{\xi(1+X_0)^{a+b}<1\}$, où X_0 et ξ sont des variables aléatoires indépendantes de lois données par (2.49).

Proposition 2.2.9. *Soient X_0 et ξ deux variables aléatoires indépendantes de lois données par (2.49). Soient a, b, $c > 0$ et Y une variable aléatoire indépendante de (X_0, ξ) telles que $\mathcal{L}(Y) = \gamma(b,c)$. Alors conditionnellement à $\{\xi(1+X_0)^{a+b} < 1\}$, les variables aléatoires*

$$U = \frac{1+X_0+Y}{1+X_0}\ \frac{X_0}{X_0+Y},\ \ V = X_0 + Y \tag{2.51}$$

sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(U) = \beta(a,b), \quad \mathcal{L}(V) = K^{(2)}(a+b, -b, c). \tag{2.52}$$

Soient X_0 et Y définies comme dans la Proposition 2.2.9. La forme de U et V nous conduit à introduire

$$Z = \frac{X_0}{X_0+Y},\ \ V = X_0 + Y. \tag{2.53}$$

Sans condionnement, la loi de (Z,V) est bien connue comme indiquée dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.10. *Soient X_0 et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(X_0) = \gamma(a,c)$ et $\mathcal{L}(Y) = \gamma(b,c)$. Alors*

$$Z = \frac{X_0}{X_0+Y}, \quad V = X_0 + Y \tag{2.54}$$

sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(Z) = \beta(a,b), \quad \mathcal{L}(V) = \gamma(a+b,c). \tag{2.55}$$

Il est évident que la variable U définie par (2.51) et la variable X_0 peuvent être exprimées en fonction de Z et V:

$$U = \frac{(1+V)Z}{1+VZ}, \quad X_0 = ZV.$$

La Proposition 2.2.9 nous suggère d'étudier la loi de $\left(\frac{(1+V)Z}{1+VZ}, V\right)$ conditionnellement à $\{\xi(1+VZ)^{a+b} < 1\}$. La preuve de la Proposition 2.2.9 se base de manière essentiel sur le résultat suivant:

Proposition 2.2.11. *Soient Z et ξ deux variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(Z) = \beta(a,b), \;\; \mathcal{L}(\xi) = \mathcal{U}([0,1]), \quad a,\, b > 0. \tag{2.56}$$

1. *Pour tout $s \geq 0$, conditionnellement à $\{\xi(1+sZ)^{a+b} < 1\}$, le couple aléatoire*

$$\left(\frac{(1+s)Z}{1+sZ},\, \xi(1+sZ)^{a+b}\right)$$

a la même loi que (Z,ξ).

2. *Soit V' une variable aléatoire non-négative indépendante de (Z,ξ). Alors, conditionnellement à $\{\xi(1+V'Z)^{a+b} < 1\}$, $\left(\frac{(1+V')Z}{1+V'Z},\, \xi(1+V'Z)^{a+b},\, V'\right)$ a la même loi que $(Z,\, \xi,\, V')$ conditionnellement à $\{\xi'(1+V')^{a} < 1\}$, avec ξ' est indépendante de Z,ξ,V' tel que $\mathcal{L}(\xi') = \mathcal{L}(\xi)$.*

Preuve de la Proposition 2.2.11

1. Soient $s > 0$ et

$$\Delta := E\left[\varphi_1\left(\frac{(1+s)Z}{1+sZ}\right)\; \varphi_2\left(\xi(1+sZ)^{a+b}\right)\; \mathbb{1}_{\{\xi(1+sZ)^{a+b}<1\}}\right].$$

Alors

$$\Delta = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int \;\; \varphi_1 \;\; \left(\frac{(1+s)x}{1+sx}\right)\; \varphi_2\left(u(1+sx)^{a+b}\right)\; x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{\{0<x<1,\; u(1+sx)^{a+b}<1,\; 0<u<1\}} du\, dx.$$

Pour u fixé, nous effectuons le changement de variable $y = \dfrac{x(1+s)}{1+sx}$, nous obtenons

$$\Delta = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, (1+s)^b \int \;\; \varphi_1(y) \;\; \varphi_2\left(\frac{u(1+s)^{a+b}}{(1+s-sy)^{a+b}}\right)\; y^{a-1}\, (1-y)^{b-1}\, \frac{1}{(1+s-sy)^{a+b}} \mathbb{1}_{\{0<y<1,\; 0<\frac{u(1+s)^{a+b}}{(1+s-sy)^{a+b}}<1\}}\; du\, dy.$$

Pour y fixé, le changement de variable $t = \dfrac{u(1+s)^{a+b}}{(1+s-sy)^{a+b}}$ conduit à

$$\Delta = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, \frac{1}{(1+s)^a} \int \varphi_1(y)\; \varphi_2(t)\; y^{a-1}\, (1-y)^{b-1} \mathbb{1}_{\{0<y<1,\; 0<t<1\}}\; dt\, dy. \tag{2.57}$$

2. Soit V' une variable aléatoire indépendante de (Z,ξ). Nous définissons

$$\Delta := E\left[\varphi\left(\frac{(1+V')Z}{1+V'Z},\, \xi(1+V'Z)^{a+b},\, V'\right)\ \mathbb{1}_{\{\xi(1+V'Z)^{a+b}<1\}}\right].$$

Puisque V' et Z sont indépendantes alors

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^{+\infty} \mu_{V'}(ds)\ E\left[\varphi\left(\frac{(1+s)Z}{1+sZ},\, \xi(1+sZ)^{a+b},\, s\right)\ \mathbb{1}_{\{\xi(1+sZ)^{a+b}<1\}}\right]\\ &= \int_0^{+\infty} \mu_{V'}(ds)\ E\left[\varphi\left(Z,\, \xi,\, s\right)\right]\ P\left(\xi(1+sZ)^{a+b}<1\right).\end{aligned}$$

En prenant $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ dans (2.57), nous obtenons

$$P\left(\xi(1+sZ)^{a+b}<1\right) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ \frac{1}{(1+s)^a}\ \int_{[0,1]^2} y^{a-1}\ (1-y)^{b-1}\ dy\ dx = \frac{1}{(1+s)^a}.$$

Alors

$$\Delta = \int_0^{+\infty} \mu_{V'}(ds)\ E\left[\varphi\left(Z,\, \xi,\, s\right)\ \right]\frac{1}{(1+s)^a} = E\left[\varphi\left(Z,\, \xi,\, V'\right)\ \mathbb{1}_{\{\xi'(1+V')^a<1\}}\right].$$

□

Preuve de la Proposition 2.2.9

Nous introduisons $Z = \frac{X_0}{X_0+Y} = \frac{X_0}{V}$. Alors, d'après la Proposition 2.2.10, nous avons V et Z sont indépendantes, $\mathcal{L}(V) = \gamma(a+b,c)$ et $\mathcal{L}(Z) = \beta(a,b)$.
En exprimant U en fonction de Z et V nous obtenons $U = \dfrac{(1+V)Z}{1+VZ}$. Par conséquent,

$$\left(U,\, V,\, \xi(1+X_0)^{a+b}\right) = \left(\frac{(1+V)Z}{1+VZ},\, V,\, \xi(1+VZ)^{a+b}\right).$$

En appliquant la Proposition 2.2.11 avec $V' = V$ nous obtenons alors que conditionnellement à $\{\xi(1+X_0)^{a+b}<1\}$, (U,V) a la même loi que $(Z,\, V)$ conditionnellement à $\{\xi(1+V)^a<1\}$. D'où conditionnellement à $\{\xi(1+X_0)^{a+b}<1\}$, U et V sont indépendantes, $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(Z) = \beta(a,b)$ et d'après la Proposition 2.2.8 nous avons $\mathcal{L}(V) = K^{(2)}(a+b,-b,c)$. □

B) Méthode du rejet

En suivant la méthode de conditionnement, nous donnons une autre conséquence de la relation (2.17) qui réalise presque sûrement les lois de Kummer de type 2.

Il est clair que la relation (2.17) implique que

$$K^{(2)}(a,b,c)(x) \leq \left(\frac{1}{\Psi(a,1-b,c)\ c^a}\right)\ \gamma(a,c)(x),\ \ x>0.$$

Par conséquent, nous pouvons appliquer la méthode du rejet pour donner une autre réalisation presque sûre.

Proposition 2.2.12. *Soit $(X_i,\ Y_i,\ \xi_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(X_i)=\gamma(a,c),\ \ \mathcal{L}(Y_i)=\gamma(b,c)$ et $\mathcal{L}(\xi_i)=\mathcal{U}(]0,1[)$ avec $a,\ b,\ c>0$. Soit*

$$T = inf\ \{i\geq 1;\ \xi_i\ (1+X_i)^{a+b}<1\}. \tag{2.58}$$

Alors T est finie presque sûrement et

1. *X_T et Y_T sont indépendantes*

$$\mathcal{L}(X_T)=K^{(2)}(a,b,c),\ \ \mathcal{L}(Y_T)=\gamma(b,c). \tag{2.59}$$

2. *Les variables aléatoires $U=\dfrac{1+X_T+Y_T}{1+X_T}\ \dfrac{X_T}{X_T+Y_T}$ et $V=X_T+Y_T$ sont indépendantes et*

$$\mathcal{L}(U)=\beta(a,b),\qquad \mathcal{L}(V)=K^{(2)}(a+b,-b,c).$$

Remarque 2.2.13. *La deuxième partie de la Proposition 2.2.12 est une conséquence directe de (2.59) et du Théorème 2.1.2. Cependant, nous donnerons une preuve directe de l'item 2 en utilisant la Proposition 2.2.9.*

Preuve de la Proposition 2.2.12

1. Soient f et g deux fonctions boreliennes. Alors

$$E\left(f(X_T)\ g(Y_T)\ 1\!\!1_{\{T<\infty\}}\right)=\sum_{k\geq 1} E\left(f(X_k)\ g(Y_k)\ 1\!\!1_{\{T=k\}}\right).$$

Puisque les variables aléatoires (Y_i) sont indépendantes de T et de $(X_1,\, \xi_1,\, X_2,\, \xi_2,...)$ alors

$$E\left(f(X_T)\ g(Y_T)\ \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right) = \sum_{k\geq 1}\ p^{k-1}\ E\left(g(Y_k)\right)\ E\left(f(X_k)\ \mathbb{1}_{\{\xi_k(1+X_k)^{a+b}\leq 1\}}\right),$$

où $p = P\left(\xi_1(1+X_1)^{a+b} > 1\right)$ est la probabilité du rejet. Les variables X_k, Y_k, ξ_k sont indépendantes de même loi, alors

$$\begin{aligned} E\left[f(X_T)\ g(Y_T)\ \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right] &= \left(\sum_{k\geq 1}\ p^{k-1}\right)\ E\left[g(Y_1)\right]\ E\left[f(X_1)\ \mathbb{1}_{\{\xi_1(1+X_1)^{a+b}\leq 1\}}\right] \\ &= E\left[g(Y_1)\right]\ E\left[f(X_1)\mid\ \xi_1(1+X_1)^{a+b}\leq 1\}\right]. \end{aligned}$$

D'où, la partie 1 de la Proposition 2.2.12 suit de la Proposition 2.2.8.

2. Il est clair que la loi de (U,V) conditionnellement à $\{T=k\}$ et égale à celle de $\left(\dfrac{1+X_k+Y_k}{1+X_k}.\dfrac{X_k}{X_k+Y_k},\ X_k+Y_k\right)$ conditionnellement à $\{\xi_k(1+X_k)^{a+b}<1\}$.
Par conséquent, la partie 2 est une conséquence directe de la Proposition 2.2.9.

□

C) Une troisième réalisation presque sûre

La variable aléatoire T définie dans (2.58) peut être considérée comme un premier temps de passage. Vallois [20] a donné une réalisation presque sûre de l'identité (2.2), impliquant les lois inverses gaussiennes généralisées et les lois Gamma. Il a considéré la fonction $x \mapsto f_0(x) = 1/x$ qui est la première fonction de LWMY associée aux lois inverses gaussiennes généralisées et gamma. Vallois [20] a étudié le premier temps de passage de certaines marches aléatoires au dessus de l'hyperbole équilatère $\mathcal{C}_{f_0}$.

Il est possible d'adapter cette approche et d'obtenir une réalisation presque sûre des lois de Kummer de type 2. En effet, on commence par définir deux suites de variables aléatoires indépendantes $X_1(n)$ et $X_2(n)$ à valeurs dans $]0,+\infty[$. Supposons de plus que $\forall n > 0$

$X_2(n) - X_2(n-1)$ et $X_2(n)$ sont indépendantes. Le "bon" temps d'arrêt à considéré est

$$\tau = inf\ \{n \geq 1;\ X_2(n) > 1 + f_1(-\ln X_1(n))\},$$

où f_1 est la fonction de LWMY définie par (2.4). Notons que si on se réfère au schéma introduit par Vallois [20], on se serait attendu à

$$\tau' = inf\ \{n \geq 1;\ X_2(n) > f_1(X_1(n))\}.$$

Donnons quelques notations. Soient $a > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 des variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathcal{L}(Z_0) = \gamma(a),\ \mathcal{L}(Z_1) = \gamma(\alpha_1),\ \mathcal{L}(Z_2) = \gamma(\alpha_2),\ \mathcal{L}(Z_3) = \gamma(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{2.60}$$

On considère deux suites $(Y_i)_{i\geq 1}$ et $(Y_i')_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de lois $\gamma(1)$. Supposons que Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, $(Y_i)_{i\geq 1}$, $(Y_i')_{i\geq 1}$ sont indépendantes. Alors on introduit

$$X_1(n) = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1 + Y_1 + ... + Y_n},\ \ X_2(n) = Z_2 + Y_1' + ... + Y_n'.$$

Il est clair que $(X_2(n))_{n\geq 1}$ et $(X_2(n))_{n\geq 1}$ sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(X_1(n)) = \beta(a,\, n + \alpha_1), \quad \mathcal{L}(X_2(n)) = \gamma(n + \alpha_2).$$

Compte tenu de la forme de f_1, on est conduit naturellement à considérer la fonction $g(x) = 1 + f_1(\ln(-x))$. Alors,

$$\tau = inf\{n \geq ,\ X_2(n) \geq g(X_1(n))\}$$

et τ est le premier instant où $(X_1(n),\, X_2(n))$ entre dans le domaine $\{(x,y);\ y > g(x)\}$.

Notons que

$$g(x) = \frac{e^{-\ln x}}{e^{-\ln x} - 1} = \frac{1}{1-x}.$$

D'où

$$\tau = inf\{n \geq 1,\, X_2(n)(1 - X_1(n)) > 1\},$$

avec la convention $inf\ \emptyset = +\infty$. Lorsque $\tau < \infty$, on distingue deux cas:

$$C^{\uparrow} = \{X_2(\tau-1)(1-X_1(\tau)) < 1\}, \quad C^{\rightarrow} = \{X_2(\tau-1)(1-X_1(\tau)) > 1\}.$$

On peut donner des variables aléatoires X et Y qui réalisent le Théorème 2.1.2 de Koudou et Vallois.

Théorème 2.2.14. *Supposons que $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ et soit $c > 0$. Alors conditionnellement à*

$$C^{\uparrow} := \{\tau < +\infty,\ X_2(\tau-1)(1-X_1(\tau)) < 1\} \tag{2.61}$$

1. *Les variables aléatoires X et Y définies par*

$$X := \frac{X_1(\tau)}{1-X_1(\tau)}, \quad Y := \frac{1}{c}\ (X_2(\tau)+Z_3) - \frac{1}{1-X_1(\tau)} \tag{2.62}$$

sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(X) = K^{(2)}(a,\alpha_1-\alpha_2+1,c), \ \ \mathcal{L}(Y) = \gamma(\alpha_1-\alpha_2+1,c). \tag{2.63}$$

2. *Les variables aléatoires U et V suivantes*

$$U = \frac{X_2(\tau)+Z_3}{X_2(\tau)+Z_3-c}\ X_1(\tau), \ \ V = \frac{1}{c}\ (X_2(\tau)+Z_3) - 1 \tag{2.64}$$

sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(U) = \beta(a,\alpha_1-\alpha_2+1), \ \ \mathcal{L}(V) = K^{(2)}(a+\alpha_1-\alpha_2+1,-\alpha_1+\alpha_2-1,c). \tag{2.65}$$

Remarque 2.2.15. *1) Dans le cas $C^{\rightarrow} = \{X_2(\tau-1)(1-X_1(\tau)) > 1\}$ nous n'avons pas été capables de déterminer les variables aléatoires d'interêt. En revanche, pour l'étude du cas $f = f_0$, Vallois [20] a pu donner une interpretation géométrique des deux cas $C^{\uparrow}$ et $C^{\rightarrow}$; ce qui peut s'expliquer par le fait que la fonction f_0 est involutive alors que dans f_1 ne l'est pas.*

2) Nous pouvons facilement montrer que les variables aléatoires U et V définies dans (2.64) satisfont:

$$U = \frac{1+X+Y}{1+X}\ \frac{X}{X+Y}, \ \ V = X+Y.$$

Par conséquent, la partie 2 du Théorème 2.2.14 provient directement du Théorème 2.1.2.

3) Donnons une interprétation géométrique des variables aléatoires X, Y, U et V. Nous introduisons les points suivants:

$$M\left(\frac{X_2(\tau)+Z_3-c}{X_2(\tau)+Z_3},\ \frac{1}{1-X_1(\tau)}\right)$$

$$M_1\left(\frac{X_2(\tau)+Z_3-c}{X_2(\tau)+Z_3},\ \frac{1}{c}(X_2(\tau)+Z_3)\right)$$

$$M'\left(\frac{X_2(\tau)+Z_3-c}{X_2(\tau)+Z_3},\ \frac{X_1(\tau)(X_2(\tau)+Z_3)}{c}+1\right).$$

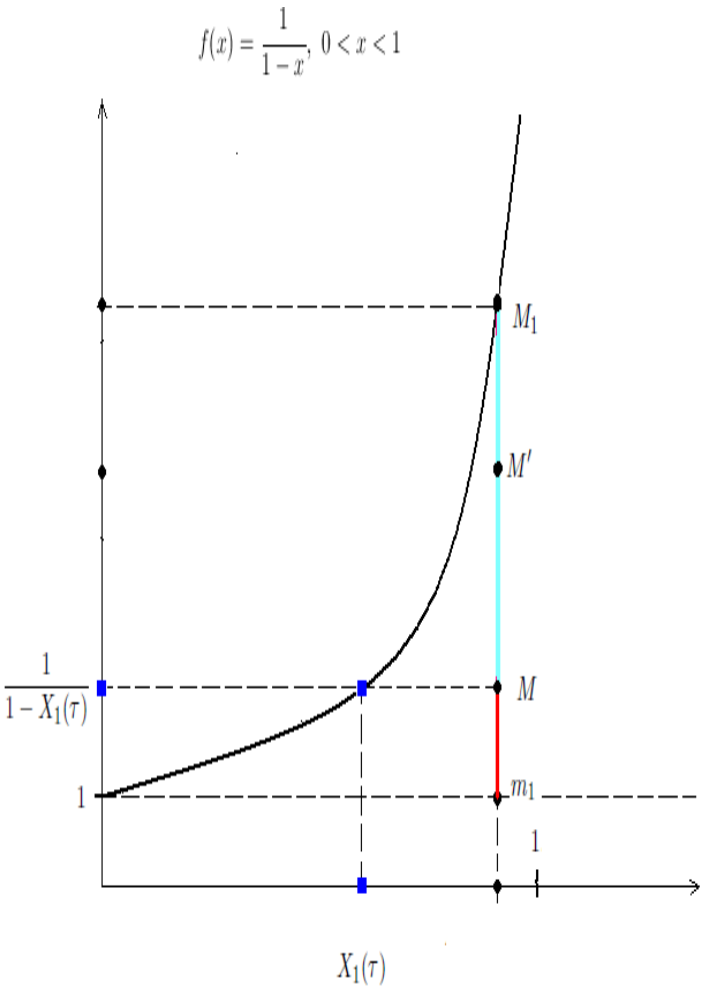
Soit m_1 la projection orthogonale de M sur la ligne horizontale $y=1$.

Alors $m_1M = X$, $MM_1 = Y$, $\dfrac{m_1M'}{m_1M_1} = U$ et $m_1M_1 = V$. Alors nous pouvons écrire le Théorème 2.2.14 comme suit.

a) Les deux parties m_1M et MM_1 du segment m_1M_1 sont indépendantes et leurs lois sont données par (2.63).

b) La fraction $\dfrac{m_1M'}{m_1M_1}$ et la longueur totale de m_1M_1 sont indépendantes de lois données par (2.65).

On peut illustrer l'interprétation géométrique par la représentation graphique suivante:



La preuve du Théorème 2.2.14 se base sur le résultat analytique suivant.

Lemme 2.2.16. *Soient W et W' deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(W) = \gamma(a,c)$ et $\mathcal{L}(W') = \gamma(1,c)$ avec a, $c > 0$.*

Soit W'' une variable aléatoire positive indépendante de (W,W') et $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction borelienne. Alors, conditionnellement à $A := \{W \leq f(W'') \leq W + W'\}$, les variables aléatoires $W + W' - f(W'')$ et W'' sont indépendantes, la loi de $W + W' - f(W'')$ est $\gamma(1,c)$ et

$$P(W'' \in dw \mid A) = c_a^* \ (f(w))^a \ \exp(-cf(w)) \ P(W'' \in dw),$$

où c_a^* est une constante de normalisation.

Preuve du Lemme 2.2.16 Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions boréliennes. Soit

$$\Delta = E\left[\varphi_1(W'')\ \varphi_2\left(W + W' - f(W'')\right)\ \mathbb{1}_{\{W<f(W'')<W+W'\}}\right].$$

Alors

$$\Delta = \lambda^* \int \varphi_1(x)\ \varphi_2(y+y'-f(x))\ y^{a-1}\ e^{-c(y+y')}\ \mathbb{1}_{\{y<f(x)<y+y'\}}\ P(W''\in dx)\ dydy'.$$

Pour x et y fixés, nous effectuons le changement de variable $u = y + y'$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta &= \lambda^* \int \varphi_1(x)\ \varphi_2(u-f(x))\ e^{-cu}\ y^{a-1}\ \mathbb{1}_{\{y<f(x)<u\}}\ P(W''\in dx)\ dydu \\ &= \frac{\lambda^*}{a} \int \varphi_1(x)\ \varphi_2(u-f(x))\ e^{-cu}\ (f(x))^a\ \mathbb{1}_{\{f(x)<u\}}\ P(W''\in dx)\ du.\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $z = u - f(x)$ pour x fixé, nous obtenons

$$\Delta = \frac{\lambda^*}{a} \int \varphi_1(x)\ \varphi_2(z)\ e^{-cz}\ e^{-cf(x)}\ (f(x))^a\ \mathbb{1}_{\{z>0\}}\ P(W''\in dx)\ dz.$$

Cela nous donne le résultat souhaité. □

Nous sommes maintenant capables de donner la preuve du Théorème 2.2.14.

Preuve du Théorème 2.2.14 Soient φ_1, $\varphi_2 : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes et

$$\Delta = E\left[\varphi_1(X)\ \varphi_2(Y)\ \mathbb{1}_{C^\uparrow}\right]$$

En utilisant (2.61), nous pouvons écrire Δ comme suit $\Delta = \sum_{n\geq 1} \Delta_n$ où

$$\Delta_n = E\left[\varphi_1\left(\frac{X_1(n)}{1-X_1(n)}\right)\ \varphi_2\left(\frac{1}{c}[X_2(n)+Z_3] - \frac{1}{1-X_1(n)}\right)\ \mathbb{1}_{C_n}\right]$$

et $C_n = C^\uparrow \cap \{\tau = n\}$, i.e.

$$C_n = \{X_2(n-1)(1-X_1(n-1)) \leq 1,\ X_2(n)(1-X_1(n)) > 1,\ X_2(n-1)(1-X_1(n)) < 1\}.$$

Puisque $n \mapsto 1 - X_1(n)$ est croissante, C_n peut être réduit à:

$$\begin{aligned}C_n &= \{X_2(n-1)\,(1-X_1(n)) \leq 1 < X_2(n)\,(1-X_1(n))\} \\ &= \left\{X_2(n-1) \leq \frac{1}{1-X_1(n)} < X_2(n)\right\}.\end{aligned}$$

Soient

$$W = \frac{1}{c}\ X_2(n-1),\ W' = \frac{1}{c}\ (X_2(n) - X_2(n-1)),\ W'' = X_1(n)$$

et

$$f(x) = \frac{1}{c}\ g(x) = \frac{1}{c}\ \frac{1}{1-x},\ \ 0 < x < 1.$$

Les variables aléatoire $X_1(n)$ et $X_2(n)$ sont indépendantes de plus $X_2(n)$ et $X_2(n)-X_2(n-1)$ sont indépendantes pour tout $n > 0$. Alors W, W' et W'' sont indépendantes. De plus,

$$\mathcal{L}(W) = \gamma(\alpha_2 + n - 1,c),\ \mathcal{L}(W') = \gamma(1,c),\ \mathcal{L}(W'') = \beta(a,\alpha_1 + n).$$

On a

$$X_2(n-1) = c\ W,\ \ X_2(n) = c\ (W + W').$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{c}\ [X_2(n) + Z_3] - \frac{1}{1 - X_1(n)} = \frac{1}{c}\ Z_3 + (W + W' - f(W''))$$

$$\{X_2(n-1) \leq \frac{1}{1-X_1(n)} \leq X_2(n)\} = \{c\,W \leq g(W'') \leq c\,(W+W')\} = \{W \leq f(W'') \leq W+W'\}.$$

On peut donc appliquer le Lemme 2.2.16 et on a $W+W'+f(W'')$ et W'' sont indépendantes.

La loi de $W + W' + f(W'')$ est $\gamma(1,c)$ et

$$P\,(W'' \in dw \mid C_n) = c^*\ \left(\frac{1}{1-w}\right)^{\alpha_2+n-1}\ \exp(-c\frac{1}{1-x})\ w^{a-1}\ (1-w)^{\alpha_1+n-1}\ \mathbb{1}_{\{0<w<1\}}\ dw.$$

De plus $\frac{1}{c}\ Z_3 + \Big(W+W'-f(W'')\Big)$ et W'' sont indépendantes et $\mathcal{L}\left(\frac{1}{c}\ Z_3 + W + W' - f(W'')\right) = \gamma(\alpha_1 - \alpha_2 + 1,c)$. D'où

$$\Delta_n = c^*\ \int_{]0,1[\times]0,+\infty[} \varphi_1\left(\frac{w}{1-w}\right)\ \varphi_2(u)\ w^{a-1}\ (1-w)^{\alpha_1+n-1}\ \left(\frac{1}{1-w}\right)^{\alpha_2+n-1} u^{\alpha_1-\alpha_2}\ \exp\{-c\ (u + \frac{1}{1-w})\}\ dw\ du,$$

où c^* est une constante. Il est clair que

$$\Delta_n = c^*\ \left(\int_0^{+\infty}\ \varphi_2(u)\ u^{\alpha_1-\alpha_2}\ e^{-cu}\ du\right)\ \Delta'_n$$

avec

$$\Delta'_n = \int_0^1 \varphi_1\left(\frac{w}{1-w}\right)\ w^{a-1}\ (1-w)^{\alpha_1-\alpha_2}\ \exp\{\frac{-cw}{1-w}\}\ dw.$$

En prenant $x = \dfrac{w}{1-w}$, nous obtenons

$$\Delta'_n = \int_0^{+\infty} \varphi_1(x)\ x^{a-1}\ \frac{1}{(1+x)^{a+\alpha_1-\alpha_2+1}}\ e^{-cx}\ dx.$$

□

2.3 Etude approfondie des lois Beta généralisées

D'une façon similaire aux loi de Kummer, nous caractérisons dans cette section les lois Beta généralisées comme l'unique solution d'une équation impliquant les lois Beta (Section 2.3.1) et nous donnons des réalisations presque sûres en suivant la méthode de conditionnement et la méthode du rejet (Section 2.3.2).

2.3.1 Caractérisation des lois Beta généralisées

Dans cette partie nous démontrons la Proposition 2.1.10 et le Théorème 2.1.11. Pour ce faire on va utiliser des résultats préliminaires (Théorème 2.3.2, Propositions 2.3.4 et 2.3.5) et des lemmes techniques (Lemmes 2.3.6 et 2.3.7).

Nous commençons par rappeler le résultat de Koudou et Vallois [10] suivant (i.e. Theorem 2.4, [10]). On rappelle que $f_\delta(x) = \dfrac{1-x}{1+(\delta-1)x}$ définie pour $0 < x < 1$.

Théorème 2.3.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* [0,1]. *On définit*

$$(U_\delta,V_\delta) = \left(f_\delta(XY),\ \frac{f_\delta(X)}{f_\delta(XY)}\right) = \left(\frac{1-XY}{1+(\delta-1)XY},\ \frac{1-X}{1+(\delta-1)X}\ \frac{1+(\delta-1)XY}{1-XY}\right). \tag{2.66}$$

1. *Supposons que X et Y sont indépendantes et*

$$\mathcal{L}(X) = \beta_\delta(a+b,\lambda, -\lambda - b), \;\; \mathcal{L}(Y) = \beta(a,b); \quad a,\, b,\, \lambda > 0. \tag{2.67}$$

Alors U_δ et V_δ sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(U_\delta) = \beta_\delta(\lambda+b,a, -a - b), \;\; \mathcal{L}(V_\delta) = \beta(\lambda,b). \tag{2.68}$$

2. *Inversement, si U_δ and V_δ sont indépendantes de lois données par (2.68) alors X et Y sont indépendantes de lois données par (2.67).*

Les relations (2.66) et (2.68) nous permettent d'obtenir une relation ne faisant intervenir que la loi $\beta_\delta(a+b,\lambda, -\lambda - b)$. En effet, si nous prenons X, Y_1 et Y_2 des variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathcal{L}(X) = \beta_\delta(a+b,\lambda, -\lambda - b),\, \mathcal{L}(Y_1) = \beta(\lambda,b),\, \mathcal{L}(Y_2) = \beta(a,b), \quad a,b,\lambda > 0, \tag{2.69}$$

alors (2.68) implique que $\mathcal{L}\Big(f_\delta(XY_2)\Big) = \beta_\delta(\lambda+b,a, -a - b)$.

Le fait que Y_1 et $f_\delta(XY_2)$ sont indépendantes et $\mathcal{L}(Y_1) = \beta(\lambda,b)$, nous permet d'utiliser la partie 2 du Théorème 2.3.1: $\mathcal{L}\Big(f_\delta(Y_1\ f_\delta(XY_2))\Big) = \beta(a+b,\lambda, -\lambda - b)$. Ce qui prouve la Proposition 2.1.10.

Comme déjà mentionné dans l'Introduction, nous avons pour but de montrer que l'identité

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\Big(f_\delta(Y_1\ f_\delta(XY_2))\Big) \tag{2.70}$$

caractérise les lois Beta généralisées (i.e. Théorème 2.1.11).

Remarquons qu'en itérant la relation (2.70) nous obtenons

$$\mathcal{L}\Big(f_\delta(Y_1\ f_\delta(Y_2\ f_\delta(Y_3\ f_\delta(...Y_{n-1}\ f_\delta(Y_nX)\Big) = \beta_\delta(a+b,\lambda, -\lambda - b), \tag{2.71}$$

où $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1) = \beta(\lambda,b), \quad i \geq 1 \tag{2.72}$$

$$\mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) = \beta(a,b), \quad i \geq 1. \tag{2.73}$$

D'après la relation (2.71), il est naturel d'introduire la suite

$$[y_1] = y_1 \tag{2.74}$$

$$[y_1,...,y_n] = f_\delta\Big(y_1[y_2,...,y_n]\Big) \quad \forall\ n \geq 1, \tag{2.75}$$

où $(y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de réels à valeurs dans [0,1]. Il est clair que

$$[y_1,y_2] = f_\delta(y_1 y_2)$$

et

$$[y_1,y_2,x] = f_\delta\Big(y_1[y_2,x]\Big) = f_\delta\Big(y_1 f_\delta(xy_2)\Big) \ \ \forall\ x \in]0,1[.$$

Par conséquent la relation (2.71) est reformulée comme suit:

$$\mathcal{L}\Big([Y_1,...,Y_n,X]\Big) = \mathcal{L}(X) = \beta_\delta(a+b,\lambda,-\lambda-b), \quad n \geq 1.$$

Dans la suite nous montrons que $[Y_1,...,Y_n,X]$ converge et que la limite ne dépend pas de X. La preuve du Théorème 2.1.11 est une conséquence directe du Théorème 2.3.2 suivant:

Théorème 2.3.2. *Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(Y_{2i+1}) = \mathcal{L}(Y_1) = \beta(\lambda,b) \quad \forall\ i \geq 0$$

$$\mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) = \beta(a,b) \quad \forall\ i \geq 1.$$

Alors,

1. *$[Y_1,...,Y_n,X]$ converge p.s vers une variable aléatoire Y^* de loi $\beta_\delta(a+b,\lambda,-\lambda-b)$.*
2. *Pour tout variable aléatoire X, $[Y_1,...,Y_n,X]$ converge p.s vers Y^*.*

Remarque 2.3.3. *1)Le Théorème 2.1.11 est une conséquence directe du Théorème 2.3.2. En effet, la partie 1 (i.e. " $\Leftarrow$ ") provient de la Proposition 2.1.10.*

Concernant la deuxiéme partie (i.e. " $\Rightarrow$ "), supposons que (2.26) a lieu. Alors Théorème

2.3.2 donne l'unicité de la solution de l'équation (2.26). D'où $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y^*) = \beta_\delta(a+b,\lambda,-\lambda-b)$, *avec* $Y^* = \lim_{n\to\infty} [Y_1,...,Y_n,X]$ $(p.s)$.

2) La méthode considérée dans la preuve du Théorème 2.3.2 est totalement différente de celle utilisée pour démontrer la Proposition 2.2.3.

Il parait naturel, pour montrer que la loi Beta généralisée est caractérisée par l'équation (2.71), d'étudier la convergence de la suite $[Y_1,...,Y_n,X]$. Nous choisissons d'étudier d'abord la convergence de $[y_1,...,y_n,x]$ pour $(y_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels dans [0,1]. Nous donnons quelques résultats préliminaires (Proposition 2.3.4, Proposition 2.3.5 et Lemme 2.3.7). Le cas stochastique (i.e. Théorème 2.3.2) sera une conséquence directe.

A) Etude analytique:

Soit $\delta > 0$. Nous commençons par rappeler qu'à une suite $(y_i)_{i\geq 1}$ de nombres réels dans [0,1] est associée la suite $([y_1,...,y_n])_{n\geq 1}$ définie dans (2.74) et (2.75) par

$$[y_1] = y_1, \ \ et \ \ [y_1,...,y_n] = f_\delta(y_1[y_2,...,y_n]) \quad \forall\ n \geq 1$$

Le but est de montrer que la suite $[y_1,...,y_n,x]$ converge vers une limite qui ne dépend pas de x. Malheureusement nous n'avons pas été capables d'établir la convergence pour tout suite $(y_n)_{n\geq 1}$ mais seulement pour certaines suites (Proposition 2.3.4 et Proposition 2.3.5). Toutefois, cette restriction n'est pas gênante car dans notre cadre stochastique ces conditions sont vérifiées.

Nous introduisons

$$\overline{Y}_n(x) := [y_1,...,y_n,x], \quad n \geq 1, \ \ x \in [0,1].$$

Alors nous donnons les conditions nécessaires pour assurer la convergence de $\overline{Y}_n(x)$.

Proposition 2.3.4. *Soit* $(y_i)_{i\geq 1}$ *une suite de nombres réels dans* $]0,1]$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{y_{2i}}{y_{2i-1}} = 0 \tag{2.76}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{y_{2i+1}}{y_{2i}} = 0. \tag{2.77}$$

Alors, pour tout $x \in [0,1]$, $\overline{Y}_n(x)$ *converge vers une limite qui ne dépend pas de* x.

Afin de pouvoir traiter un cas singulier, nous nous intéressons aux cas suivants:

Proposition 2.3.5. *Soit* $(y_i)_{i\geq 1}$ *une suite de nombres réels à valeurs dans* $[0,1]$

1. *Si* $\delta \geq 1$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} y_{2i} \, \frac{\delta^2 y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)y_{2i-1})^2} = 0 \tag{2.78}$$

alors $\overline{Y}_n(x)$ *converge vers une limite qui ne dépend pas de* x.

2. *Si* $0 < \delta < 1$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\delta^2 y_{2i} y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)(y_{2i-1}+(1-y_{2i-1})y_{2i}))^2} = 0 \tag{2.79}$$

alors $\overline{Y}_n(x)$ *converge vers une limite qui ne dépend pas de* x.

Dans la suite, nous donnons des lemmes techniques qui assurent les preuves des Propositions 2.3.4 et 2.3.5.

Pour λ_1, $\lambda_2 \in [0,1]$, nous introduisons

$$g_{\lambda_1,\lambda_2}(z) := f_\delta(\lambda_1 f_\delta(\lambda_2 z)), \quad z \in [0,1]. \tag{2.80}$$

La fonction g_{λ_1,λ_2} est croissante.

D'après la définition de la suite $\overline{Y}_n(x)$, il est clair que

$$\overline{Y}_2(x) = [y_1,y_2,x] = f_\delta(y_1 f_\delta(y_2 x)) = g_{y_1,y_2}(x).$$

Plus généralement

$$\overline{Y}_{2n}(x) = g_{y_1,y_2}([y_3,...,y_{2n},x]).$$

Alors il est facile de voir par récurrence que

$$\overline{Y}_{2n}(x) = g_{y_1,y_2} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}}(x). \tag{2.81}$$

Nous nous intéressons maintenant à la monotonie des suites $\overline{Y}_{2n}(0)$ et $\overline{Y}_{2n}(1)$ et au comportement assymptotique de $\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0)$.

Lemme 2.3.6.

1. *$(\overline{Y}_{2n}(0))_{n\geq 1}$ est croissante et $(\overline{Y}_{2n}(1))_{n\geq 1}$ décroissante.*
2. *On a*

$$\overline{Y}_{2n}(0) \leq \overline{Y}_{2n}(x) \leq \overline{Y}_{2n}(1) \tag{2.82}$$

et

$$\overline{Y}_{2n}(0) \leq \overline{Y}_{2n+1}(x) \leq \overline{Y}_{2n}(1) \tag{2.83}$$

Preuve du Lemme 2.3.6

1. Démontrons que $(\overline{Y}_{2n}(0))_{n\geq 1}$ est croissante:

$$\begin{aligned} \overline{Y}_{2n+2}(0) &= g_{y_1,y_2} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}} \left(g_{y_{2n+1},y_{2n+2}}(0)\right) \\ &\geq g_{y_1,y_2} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}}(0) = \overline{Y}_{2n}(0) \end{aligned}$$

car $g_{y_{2n+1},y_{2n+2}}(0) \geq 0$.

Démontrons que $(Y_{2n}(1))_{n\geq 1}$ est décroissante:

$$\overline{Y}_{2n+2}(1) = g_{y_1,y_2} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}} \left(g_{y_{2n+1},y_{2n+2}}(1)\right).$$

Puisque $g_{y_{2n+1},y_{2n+2}}(1) \leq 1$ alors

$$\overline{Y}_{2n+2}(1) \leq g_{y_1,y_2} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}}(1) = \overline{Y}_{2n}(1).$$

2. D'après (2.81) nous avons

$$\overline{Y}_{2n}(x) = g_{y_1,y_2} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}}(x).$$

Or $0 \leq g_{y_{2n-1},y_{2n}}(x) \leq 1$. Donc (2.82) s'en déduit directement.

D'autre part,

$$\overline{Y}_{2n+1}(x) = g_{y_1,y_2} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}}(y_{2n+1} f_\delta(x)).$$

Puisque $0 \leq y_{2n+1} f_\delta(x) \leq 1$, il ne reste qu'utiliser de nouveau le fait que g_{λ_1,λ_2} est croissante pour établir (2.83).

□

Lemme 2.3.7. *Soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels à valeurs dans* [0,1] *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0)) = 0. \tag{2.84}$$

Alors, pour tout réel x dans [0,1], *la suite $\overline{Y}_n(x)$ converge vers une limite qui ne dépend pas de x.*

Preuve du Lemme 2.3.7 D'après le Lemme 2.3.6 et la relation (2.84) nous déduisons que les suites $(\overline{Y}_{2n}(0))_{n\geq 1}$ et $(\overline{Y}_{2n}(1))_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Alors elles convergent vers la même limite a. En utilisant les inégalités (2.82) et (2.83) nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \overline{Y}_{2n}(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{Y}_{2n+1}(x) = a.$$

Alors $\overline{Y}_n(x)$ converge vers la même limite a. □

D'après le Lemme 2.3.7 nous allons nous attacher à montrer sous quelle condition (2.84) a lieu. Ceci nous a conduit à l'étude de la fonction g_λ définie dans (2.80) pour $\lambda = (y_1,y_2)$.

Lemme 2.3.8. *Soient y_1, $y_2 \in]0,1[$ et $\lambda = (y_1,y_2)$.*

1. *Si $\delta \geq 1$ alors*

$$0 \leq g'_\lambda(x) \leq \frac{y_1 y_2 \delta^2}{(1+(\delta-1)y_1)^2}. \tag{2.85}$$

2. *Si $0 < \delta < 1$ alors*

$$0 \leq g'_\lambda(x) \leq \frac{y_1 y_2 \delta^2}{(1+(\delta-1)(y_1+(1-y_1)y_2))^2}. \tag{2.86}$$

Preuve du Lemme 2.3.8 Nous avons

$$f'_\delta(x) = \frac{-\delta}{(1+(\delta-1)x)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} g'_\lambda(x) &= \frac{d}{dx}\left(f_\delta(y_1 f_\delta(y_2 x))\right) \\ &= f'_\delta(y_1 f_\delta(y_2 x)) f'_\delta(y_2 x) y_1 y_2 \\ &= \frac{y_1 y_2 \delta^2}{N(x)^2}, \end{aligned}$$

avec

$$N(x) = (1 + (\delta - 1)y_1 f_\delta(y_2 x))(1 + (\delta - 1)y_2 x).$$

Mais

$$\begin{aligned} 1 + (\delta - 1)y_1 f_\delta(y_2 x) &= 1 + (\delta - 1)y_1 \left[\frac{1 - y_2 x}{1 + (\delta - 1)y_2 x}\right] \\ &= \frac{1 + (\delta - 1)y_2 x + (\delta - 1)y_1(1 - y_2 x)}{1 + (\delta - 1)y_2 x} \\ &= \frac{1 + (\delta - 1)y_1 + (\delta - 1)(1 - y_1)y_2 x}{1 + (\delta - 1)y_2 x}. \end{aligned}$$

D'où

$$N(x) = 1 + (\delta - 1)y_1 + (\delta - 1)(1 - y_1)y_2 x.$$

Il est clair que si $\delta \geq 1$ alors $x \mapsto N(x)$ est croissante et

$$N(x) \geq N(0) = 1 + (\delta - 1)y_1, \ \ \forall x \in [0,1].$$

D'où l'inégalité (2.85).

Supposons que $0 < \delta < 1$ alors $x \mapsto N(x)$ est décroissante et

$$N(x) \geq N(1) = 1 + (\delta - 1)(y_1 + (1 - y_1)y_2).$$

On en déduit la relation (2.86). □

Nous pouvons majorer $g'_\lambda(x)$ par une constante qui ne dépend pas de δ.

Lemme 2.3.9. *Soient* $y_1,\ y_2 \in]0,1[$ *et* $\lambda = (y_1,y_2)$ *alors*

$$0 \leq g'_\lambda(x) \leq \frac{y_2}{y_1}, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{2.87}$$

Preuve du Lemma 2.3.9 Pour $0 \leq c < 1$, nous introduisons la fonction

$$\psi_c(u) := \frac{u}{1+(u-1)c}, \quad \forall\ u \geq 0. \tag{2.88}$$

Alors

$$\psi_c'(u) = \frac{1-c}{(1+(u-1)c)^2}.$$

D'où

$$\psi_c(u) < \psi_c(1) < \frac{1}{c}, \ \ \forall u \in [0,1[. \tag{2.89}$$

Notons que

$$\psi_c(u) \leq 1, \ \ \forall u \in [0,1], \ \ \forall c \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$\frac{y_1 y_2 \delta^2}{(1+(\delta-1)y_1)^2} = y_1 y_2\ (\psi_{y_1}(\delta))^2 \leq \frac{y_2}{y_1}.$$

On déduit de (2.85), l'inégalité (2.87) pour $\delta \geq 1$.

D'autre part, si $0 < \delta < 1$, alors

$$y_1 y_2\ \frac{\delta^2}{(1+(\delta-1)(y_1+(1-y_1)y_2))^2} = y_1 y_2\ (\psi_z(\delta))^2 \leq \frac{y_1 y_2}{z^2},$$

où $z := y_1 + (1-y_1)y_2$. Observons de plus que $z \geq y_1$, d'où

$$y_1 y_2\ \frac{\delta^2}{(1+(\delta-1)(y_1+(1-y_1)y_2))^2} \leq \frac{y_2}{y_1}.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les Propositions 2.3.4 et 2.3.5.

Preuve de la Proposition 2.3.4 Soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels dans [0,1] qui vérifie (2.76). D'après le Lemme 2.3.7, il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) = 0$.

La relation (2.81) implique que

$$\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) = g_{y_1,y_2}(b) - g_{y_1,y_2}(a),$$

avec

$$b = g_{y_3,y_4} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}}(1), \;\; a = g_{y_3,y_4} \circ ... \circ g_{y_{2n-1},y_{2n}}(0). \tag{2.90}$$

Prenons $\lambda = (y_1,y_2)$ alors

$$\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) = g'_\lambda(c)(b-a), \;\; a < c < b. \tag{2.91}$$

D'après le Lemme 2.3.9 nous déduisons que

$$\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) \leq \frac{y_2}{y_1}(b-a).$$

Par récurrence, on montre facilement que

$$0 \leq \overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{y_{2i}}{y_{2i-1}}.$$

D'où, si $(y_n)_{n\geq 1}$ vérifie (2.76) alors nous obtenons le résultat souhaité.

Supposons maintenant que $(y_n)_{n\geq 1}$ vérifie (2.77). D'après (2.75) nous déduisons que

$$\overline{Y}_{n+1}(x) = f_\delta \left(y_1 \; \widehat{Y}_n(x) \right), \tag{2.92}$$

avec

$$\widehat{Y}_n(x) := [y_2,...,y_{n+1},x].$$

Il est clair que si $(y_n)_{n\geq 1}$ vérifie (2.77) alors $(\widehat{y}_n)_{n\geq 1}$ vérifie (2.76) et nous n'avons qu'à appliquer l'étape précédente pour obtenir la convergence de $\widehat{Y}_n(x)$ vers a qui ne dépend pas de x. On déduit de (2.92) que $\lim_{n\to\infty} \overline{Y}_{n+1}(x) = f_\delta(y_1 \; a)$. □

Preuve de la Proposition 2.3.5 Montrons que $\lim_{n\to\infty} \overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) = 0$.

Supposons que $\delta \geq 1$. Appliquant l'inégalité (2.91) et la partie 1 du Lemme 2.3.8:

$$\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) \leq (b-a) \; \frac{y_1 y_2 \delta^2}{(1+(\delta-1)y_1)^2},$$

où a et b sont définies par (2.90). Avec itération, nous obtenons

$$\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) \leq \prod_{i=1}^{n} \; y_{2i} \; \frac{\delta^2 y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)y_{2i-1})^2}.$$

La relation (2.78) donne le résultat souhaité.

Si $0 < \delta < 1$, alors la partie 2 du Lemme 2.3.8 implique que

$$\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) \leq (b-a)\ \frac{y_1 y_2 \delta^2}{(1+(\delta-1)(y_1+(1-y_1)y_2))^2}.$$

Donc

$$\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0) \leq \prod_{i=1}^{n}\ \frac{y_{2i-1} y_{2i} \delta^2}{(1+(\delta-1)(y_{2i-1}+(1-y_{2i-1})y_{2i}))^2}.$$

Nous n'avons qu'utiliser (2.79) pour déduire que $\overline{Y}_{2n}(1) - \overline{Y}_{2n}(0)$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. □

B) Application au cadre stochastique:

On considère $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans [0,1] et qui vérifient

$$\mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2),\ \ \forall\ i \geq 1 \tag{2.93}$$

$$\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1),\ \ \forall\ i \geq 1 \tag{2.94}$$

$$E\left(\mid \ln Y_i \mid\right) < \infty,\ \ \forall\ i \geq 1. \tag{2.95}$$

Le Théorème 2.3.2 est alors une conséquence directe de la Proposition 2.3.10 suivante:

Proposition 2.3.10. *1. Si $E(\ln Y_2) < E(\ln Y_1)$ (resp. $E(\ln Y_2) > E(\ln Y_1)$) alors $(Y_i)_{i\geq 1}$ vérifie la relation (2.76) (resp. (2.77)).*

2. Si $E(\ln Y_2) = E(\ln Y_1)$ alors $(Y_n)_{n\geq 1}$ vérifie (2.78) (resp. (2.79)) lorsque $\delta \geq 1$ (resp. $0 < \delta < 1$).

Preuve de la Proposition 2.3.10

1. On introduit

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n}\ \frac{Y_{2i}}{Y_{2i-1}}.$$

Alors

$$\ln Z_n = n\left(\frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i} - \frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i-1}\right).$$

D'après la loi forte des grands nombres, nous obtenons que presque sûrement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i} = E(\ln Y_2), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i-1} = E(\ln Y_1).$$

Par conséquent, si $E(\ln Y_2) < E(\ln Y_1)$ alors $\lim_{n\to\infty} \ln Z_n = -\infty$. D'où la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition (2.76).

Si $E(\ln Y_2) > E(\ln Y_1)$, on introduit

$$Z'_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{Y_{2i+1}}{Y_{2i}}.$$

On a

$$\ln Z'_n = n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i+1} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i} \right).$$

Alors d'après la loi des grands nombres nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i+1} = E(\ln Y_1) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i} = E(\ln Y_2), \ (p.s).$$

D'où $\lim_{n\to\infty} \ln Z'_n = -\infty$, donc la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition (2.77).

2. Nous nous intéressons maintenant au cas $E(\ln Y_2) = E(\ln Y_1)$. Nous allons suivre la méthode précédente mais nous distinguons deux cas $\delta \geq 1$ et $0 < \delta < 1$.

   (a) Si $\delta \geq 1$. Nous définissons

   $$\widetilde{Z}_n = \prod_{i=1}^{n} \left(Y_{2i} \frac{\delta^2 Y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)Y_{2i-1})^2} \right).$$

   Alors

   $$\ln(\widetilde{Z}_n) = n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\delta^2 Y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)Y_{2i-1})^2} \right) \right).$$

   D'après la loi des grands nombres nous avons

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_{2i} = E(\ln Y_2) = E(\ln Y_1) \quad (p.s)$$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\delta^2 Y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)Y_{2i-1})^2} \right) = E \left(\ln \left(\frac{\delta^2 Y_1}{(1+(\delta-1)Y_1)^2} \right) \right) \quad (p.s).$$

D'autre part,

$$\frac{\delta^2 Y_1}{(1+(\delta-1)Y_1)^2} = Y_1 \ \left(\psi_{Y_1}(\delta)\right)^2,$$

où ψ_c est la fonction définie dans (2.88). D'après (2.89) nous déduisons que

$$\frac{\delta^2 Y_1}{(1+(\delta-1)Y_1)^2} < \frac{1}{Y_1}.$$

Donc

$$E\left(\ln Y_1\right) + E\left(\ln\left(\frac{\delta^2 Y_1}{(1+(\delta-1)Y_1)^2}\right)\right) < 0,$$

ce qui implique que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\widetilde{Z}_n) = -\infty$. D'où la relation (2.78) est vérifiée et nous n'avons qu'appliquer la Proposition 2.3.5.

(b) Si $0 < \delta < 1$. Nous introduisons

$$\overline{Z}_n = \prod_{i=1}^{n} \ Y_{2i} \ \frac{\delta^2 \ Y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)(Y_{2i-1}+(1-Y_{2i-1})Y_{2i}))^2}.$$

Alors,

$$\ln(\overline{Z}_n) = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln Y_{2i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\delta^2 \ Y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)(Y_{2i-1}+(1-Y_{2i-1})Y_{2i}))^2}\right)\right).$$

D'après la loi des grands nombres nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n}\ln Y_{2i} = E\left(\ln Y_2\right) = E\left(\ln Y_1\right) \quad (p.s).$$

De plus notons $\xi_i = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\delta^2 \ Y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)(Y_{2i-1}+(1-Y_{2i-1})Y_{2i}))^2}\right)$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i = E\left(\ln\left(\frac{\delta^2 \ Y_1}{(1+(\delta-1)(Y_1+(1-Y_1)Y_2))^2}\right)\right) \quad (p.s).$$

Puisque

$$\frac{\delta^2 \ Y_1}{(1+(\delta-1)(Y_1+(1-Y_1)Y_2))^2} = Y_1 \ (\psi_\tau(\delta))^2 \leq Y_1 \ \frac{1}{\tau^2},$$

où $\tau = Y_1 + (1-Y_1)Y_2$. Mais $\tau > Y_1$. Alors

$$\frac{\delta^2 \ Y_1}{(1+(\delta-1)(Y_1+(1-Y_1)Y_2))^2} < \frac{1}{Y_1}.$$

Ceci implique que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\delta^2\ Y_{2i-1}}{(1+(\delta-1)(Y_{2i-1}+(1-Y_{2i-1})Y_{2i}))^2}\right)<E\left(\ln\frac{1}{Y_1}\right)=-E\left(\ln Y_1\right).$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\overline{Z}_n\right)=-\infty$ et par conséquent nous avons $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{Z}_n=0$.

Il ne reste qu'appliquer la Proposition 2.3.5. □

Remarque 2.3.11. *Il est clair que dans notre cas les variables Y_i de lois définies par (2.72) et (2.73) vérifient la Proposition 2.3.10. En effet si Z est une variable aléatoire de loi $\beta(a,b)$ alors*

$$E\left(\mid\ln Z\mid\right)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1\ \mid\ln z\mid\ \ z^{a-1}\ (1-z)^{b-1}\ dz<\infty,$$

car, $\forall\ \varepsilon>0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ z^{\varepsilon}\ \mid\ln z\mid=0$.

La preuve du Théorème 2.3.2 est maintenant immédiate.

Preuve du Théorème 2.3.2 Puisque les conditions (2.93), (2.94) et (2.95) sont vérifiées, nous n'avons qu'appliquer la Proposition 2.3.10. Alors, il vient que $[Y_1,...,Y_n,X]$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y^*. D'après (2.71), nous déduisons que $\mathcal{L}(Y^*)=\beta_\delta(a+b,\lambda,-\lambda-b)$. □

2.3.2 Réalisations presque sûres des lois Beta généralisées

Les résultats que nous avons obtenus reposent sur le fait que la densité la loi $\beta_\delta(a,b,c)$ peut être exprimée en fonction de celle de la loi $\beta(a,b)$:

$$\beta_\delta(a,b,c)(x)=\overline{k}_\delta(a,b,c)\ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ (1+(\delta-1)x)^c\ \beta(a,b)(x). \tag{2.96}$$

La relation (2.96) nous permet d'utiliser le schéma de conditionnement pour donner une première réalisation presque sûre des lois Beta généralisées et obtenir des exemples de variables aléatoires qui réalisent le Théorème 2.1.4 de Koudou et Vallois [9]. Ces résultats figurent dans les Propositions 2.3.13 et 2.3.15.

D'autre part nous utilisons la méthode du rejet pour donner une deuxième réalisation (voir Proposition 2.3.17).

Dans la suite nous allons présenter les résultats principaux et ensuite nous donnons les preuves.

Notons que pour $\delta = 1$, $f_\delta(x) = 1 - x$ et $\beta_\delta(a,b,c) = \beta(a,b)$. Le Théorème 2.1.4 se réduit alors au résultat classique suivant.

Proposition 2.3.12. *Soient X_0 et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathcal{L}(X_0) = \beta(a+b,\lambda), \quad \mathcal{L}(Y) = \beta(a,b). \tag{2.97}$$

Alors

$$U_1 = 1 - X_0 Y, \quad V_1 = \frac{1 - X_0}{1 - X_0 Y} \tag{2.98}$$

sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(U_1) = \beta(\lambda+b,a), \quad \mathcal{L}(V_1) = \beta(\lambda,b). \tag{2.99}$$

A) **Méthode de conditionnement:**

La relation (2.96) nous permet d'exprimer la loi $\beta_\delta(a,b,c)$ avec $a,b > 0$ et $c < 0$ comme la loi conditionnelle d'une variable aléatoire X_0 telle que $\mathcal{L}(X_0) = \beta(a,b)$.

Proposition 2.3.13. *Soient X_0 et ξ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(X_0) = \beta(a,b)$ et $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{U}$ ([0,1]). Soient $\delta > 1$ et $c < 0$. Alors conditionnellement à $\{\xi(1 + (\delta - 1)X_0)^{-c} < 1\}$,*

$$\mathcal{L}(X_0) = \beta_\delta(a,b,c). \tag{2.100}$$

Soient X_0 et Y deux variables aléatoires comme dans la Proposition 2.3.12 et ξ une variable aléatoire indépendante de (X_0,Y) de loi uniforme sur [0,1]. Nous considérons U_1 et V_1 définies comme dans (2.98). Alors les variables aléatoires U_δ, V_δ définies dans (2.66) peuvent être exprimées en fonctions de U_1 et V_1 comme suit

$$U_\delta = \frac{U_1}{1 + (\delta - 1)(1 - U_1)}, \quad V_\delta = \frac{V_1[1 + (\delta - 1)(1 - U_1)]}{1 + (\delta - 1)(1 - U_1 V_1)}.$$

Nous nous sommes intéressés maintenant aux lois de U_δ et V_δ conditionnellement à $\{\xi(1+(\delta-1)X_0)^{\lambda+b}<1\}$.

Proposition 2.3.14. *Soient V et ξ deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(V)=\beta(\lambda,b)$ et ξ de loi uniforme sur* [0,1].

1. Pour tout $0<s<1$ et $\delta>1$, conditionnellement à $\{\xi(1+(\delta-1)(1-sV))^{\lambda+b}<1\}$, le couple aléatoire

$$\left(\frac{(1+(\delta-1)(1-s))V}{1+(\delta-1)(1-sV)},\ \xi(1+(\delta-1)(1-sV))^{\lambda+b}\right)$$

a la même loi que (V,ξ).

2. Soit U une variable aléatoire indépendante de (V,ξ). Alors conditionnellement à $\{\xi(1+(\delta-1)(1-UV))^{\lambda+b}<1\}$, $\left(\frac{(1+(\delta-1)(1-U))V}{1+(\delta-1)(1-UV)},\ \xi(1+(\delta-1)(1-UV))^{\lambda+b},\ U\right)$ a la même loi que (V,ξ',U) conditionnellement à $\{\xi'(1+(\delta-1)(1-U))^{\lambda}<1\}$, avec ξ' est indépendante de (V,U) et $\mathcal{L}(\xi')=\mathcal{L}(\xi)$.

La Proposition 2.3.14 permet de réaliser une partie du Théorème 2.1.4:

Proposition 2.3.15. *Soient X_0,Y et ξ des v.a indépendantes telles que X_0 et Y de loi données par (2.97) et ξ est de loi uniforme sur* [0,1]. *Alors, conditionnellement à $\{\xi(1+(\delta-1)X_0)^{\lambda+b}<1\}$, les variables aléatoires*

$$U_\delta=f_\delta(X_0Y)\quad et\quad V_\delta=\frac{f_\delta(X_0)}{f_\delta(X_0Y)} \tag{2.101}$$

sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(U_\delta)=\beta_\delta(\lambda+b,a,-a-b),\quad \mathcal{L}(V_\delta)=\beta(\lambda,b). \tag{2.102}$$

Remarque 2.3.16. *Soient X_0 et Y comme dans la Proposition 2.3.15. Il est clair que conditionnellement à $A:=\{\xi(1+(\delta-1)X_0)^{\lambda+b}<1\}$, X_0 et Y sont indépendantes et $\mathcal{L}(Y)=\beta(a,b)$. Nous avons montré dans la Proposition 2.3.13 que conditionnellement à A, la loi de X_0 est $\beta_\delta(a,b,c)$. Ce qui fournit une preuve partielle de l'item 1 du Théorème 2.1.4.*

Dans la suite nous donnons les preuves des Propositions 2.3.13 et 2.3.14.

Preuve de la Proposition 2.3.13 Soit $\psi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction borélienne et

$$\delta := E\left[\psi(X_0) \mid \xi(1+(\delta-1)X_0)^{-c} < 1\right].$$

Alors

$$\delta = \frac{1}{\lambda}\, E\left[\psi(X_0)\ \mathbb{1}_{\{\xi(1+(\delta-1)X_0)^{-c}<1\}}\right],$$

où $\lambda = P\left(\xi(1+(\delta-1)X_0)^{-c}\right)$. Puisque $(1+(\delta-1)X_0)^{-c} > 0$ et ξ de loi uniforme sur [0,1] et indépendante de X_0 alors

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\lambda}\, E\left[\psi(X_0)\ (1+(\delta-1)X_0)^{-c}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\,\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 \psi(x)\ (1+(\delta-1)x)^{-c}\ x^{a-1}\ (1-x)^{b-1}\ dx.\end{aligned}$$

□

Preuve de la Proposition 2.3.14 Tout au long de la preuve, ρ désignera une constante générique.

1) Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions boréliennes. Soit

$$\Delta := E\left[\varphi_1\left(\frac{(1+(\delta-1)(1-s))V}{1+(\delta-1)(1-sV)}\right)\ \varphi_2\left(\xi(1+(\delta-1)(1-sV))^{\lambda+b}\right)\ \mathbb{1}_{\{\xi(1+(\delta-1)(1-sV))^{\lambda+b}<1\}}\right].$$

Alors

$$\Delta = \rho\int \varphi_1\left(\frac{[1+(\delta-1)(1-s)]x}{1+(\delta-1)(1-sx)}\right)\varphi_2\left(t[1+(\delta-1)(1-sx)]^{\lambda+b}\right)\ x^{\lambda-1}\ (1-x)^{b-1}$$
$$\mathbb{1}_{\{0<x<1,\ 0<t<1,\ t(1+(\delta-1)(1-sx))^{\lambda+b}<1\}}\ dx\ dt.$$

Pour t fixé, nous effectuons le changement de variable $v := \dfrac{[1+(\delta-1)(1-s)]x}{1+(\delta-1)(1-sx)}$. Alors

$x = \dfrac{\delta v}{1+(\delta-1)(1-s+sv)}$, $1-x = \dfrac{1+(\delta-1)(1-s+sv)-\delta v}{1+(\delta-1)(1-s+sv)}$,

$1+(\delta-1)(1-sx) = \dfrac{\delta(1+(\delta-1)(1-s))}{1+(\delta-1)(1-s+sv)}$ et $dx = \dfrac{\delta(1+(\delta-1)(1-s))}{(1+(\delta-1)(1-s+sv))^2}\ ds.$

D'où

$$\Delta = \rho\int \varphi_1(v)\ \varphi_2\left(t\left[\frac{\delta(1+(\delta-1)(1-s))}{1+(\delta-1)(1-s+sv)}\right]^{\lambda+b}\right)\ \frac{v^{\lambda-1}}{[1+(\delta-1)(1-s+sv)]^{\lambda+b}}$$
$$\times\ [1+(\delta-1)(1-s+sv)-\delta v]^{b-1}\ \mathbb{1}_{\left\{0<\frac{\delta v}{1+(\delta-1)(1-s+sv)}<1,\ t\left[\frac{\delta(1+(\delta-1)(1-s))}{1+(\delta-1)(1-s+sv)}\right]^{\lambda+b}<1\right\}}\ dv\ dt.$$

Pour v fixé, nous effectuons le changement de variable $u := t\left[\dfrac{\delta(1+(\delta-1)(1-s))}{1+(\delta-1)(1-s+sv)}\right]^{\lambda+b}$.

Alors

$$\begin{aligned}\Delta &= \rho \int \varphi_1(v)\ \varphi_2(u)\ v^{\lambda-1}\ [1+(\delta-1)(1-s+sv)-\delta v]^{b-1}\ \mathbb{1}_{\{0<v<1,\ 0<u<1\}}\ dv\ du \\ &= \rho \int \varphi_1(v)\ \varphi_2(u)\ v^{\lambda-1}\ (1-v)^{b-1}\ \mathbb{1}_{\{0<v<1,\ 0<u<1\}}\ dv\ du.\end{aligned}$$

2) Soit f une fonction borélienne et

$\Delta = E\left[f\left(\frac{(1+(\delta-1)(1-U))V}{1+(\delta-1)(1-UV)},\ \xi(1+(\delta-1)(1-UV))^{\lambda+b},\ U\right)\ \mathbb{1}_{\{\xi(1+(\delta-1)(1-UV))^{\lambda+b}<1\}}\right]$. D'où

$$\begin{aligned}\Delta = \int_0^1 \quad & E\quad \left[f\left(\frac{(1+(\delta-1)(1-s))V}{1+(\delta-1)(1-sV)},\ \xi(1+(\delta-1)(1-sV))^{\lambda+b},\ s\right)\mathbb{1}_{\{\xi(1+(\delta-1)(1-sV))^{\lambda+b}<1\}}\right] \\ & \times\quad \mu_U(ds).\end{aligned}$$

D'après la première partie nous obtenons

$$\Delta = \int_0^1 E\left[f\left(V,\xi',s\right)\right]\ \rho(s)\ \mu_U(ds),$$

avec $\rho(s) = P\left[\xi'\left(1+(\delta-1)(1-sV)\right)^{\lambda+b}<1\right]$. On prétend que $\rho(s)$ peut se calculer explicitement. On introduit $V^* := 1-V$. Alors on a

$$\rho(s) = E\Big([1+(\delta-1)(1-s(1-V^*))]^{-\lambda-b}\Big) = \Big[1+(\delta-1)(1-s)\Big]^{-\lambda-b}\ E\Big([1+xV^*]^{-\lambda-b}\Big),$$

où $x := \dfrac{(\delta-1)s}{1+(\delta-1)(1-s)}$. Puisque $\mathcal{L}(V) = \beta(\lambda,b)$, alors $\mathcal{L}(V^*) = \beta(b,\lambda)$ et

$$E\Big([1+xV^*]^{-\lambda-b}\Big) = \frac{\Gamma(\lambda+b)}{\Gamma(b)\Gamma(\lambda)}\ \int_0^1\ s^{b-1}\ (1-s)^{\lambda-1}\ (1+xs)^{-\lambda-b}\ ds.$$

Posons $t := \dfrac{s(1+x)}{1+xs}$ nous obtenons:

$$E\Big([1+xV^*]^{-\lambda-b}\Big) = \frac{\Gamma(\lambda+b)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(b)}\ (1+x)^{-b}\ \int_0^1\ t^{b-1}\ (1-t)^{\lambda-1}\ dt = (1+x)^{-b}. \qquad (2.103)$$

Par conséquent

$$\rho(s) = \delta^{-b}\ \Big(1+(\delta-1)(1-s)\Big)^{-\lambda} = \delta^{-b}\ P\Big(\xi'(1+(\delta-1)(1-s))^{\lambda}<1\Big).$$

□

Preuve de la Proposition 2.3.15 Nous introduisons

$$U_1 := 1 - X_0 Y = f_1(X_0 Y) \;\; et \;\; V_1 := \frac{1 - X_0}{1 - X_0 Y} = \frac{f_1(X_0)}{f_1(X_0 Y)}.$$

D'après la Proposition 2.3.12, nous avons U_1 et V_1 sont indépendantes et

$$\mathcal{L}(U_1) = \beta(\lambda + b, a), \;\; \mathcal{L}(V_1) = \beta(\lambda, b).$$

Nous exprimant U_δ et V_δ définies dans (2.101) en fonction de U_1 et V_1 nous obtenons

$$U_\delta = \frac{U_1}{1 + (\delta - 1)(1 - U_1)} \;\; et \;\; V_\delta = \frac{[1 + (\delta - 1)(1 - U_1)]V_1}{1 + (\delta - 1)(1 - U_1 V_1)}.$$

D'autre part, $\{\xi\,[1 + (\delta - 1)X_0]^{\lambda+b} < 1\} = \{\xi\,[1 + (\delta - 1)(1 - U_1 V_1)]^{\lambda+b} < 1\}$. Nous appliquons la partie 2 de la Proposition 2.3.14 avec $V = V_1$ et $U = U_1$ qui est indépendante de (V_1, ξ), nous aurons que conditionnellement à $\{\xi\,[1 + (\delta - 1)X_0]^{\lambda+b} < 1\}$, $(V_\delta,\, 1 - U_1)$ a même loi que $(V_1,\, 1 - U_1)$ conditionnellement à $\{\xi'\,[1 + (\delta - 1)(1 - U_1)]^{\lambda} < 1\}$.

Or $\mathcal{L}(1 - U_1) = \beta(a,\, \lambda + b)$, alors Proposition 2.3.13 implique que

$$\mathcal{L}\Big(1 - U_1 \mid \xi'\,[1 + (\delta - 1)(1 - U_1)]^{\lambda} < 1\Big) = \beta_\delta(a,\, \lambda + b, -\lambda).$$

Finalement, il suffit de signaler que $U_\delta = f_\delta(1 - U_1)$, alors

$$\mathcal{L}(U_\delta) = \beta_\delta(\lambda + b,\, a, -a - b).$$

□

La méthode du rejet qui est une conséquence de la méthode de conditionnement nous permet de donner des exemples de variables aléatoires indépendantes qui réalisent l'identité en loi du Théorème 2.1.4.

B) Méthode du rejet:

Nous donnons une autre conséquence de la relation (2.96). Commençons par remarquer que pour $\delta > 1$ et $c < 0$ nous avons

$$(1 + (\delta - 1)x)^c < 1, \quad 0 < x < 1.$$

D'après la relation (2.96) nous obtenons l'inégalité

$$\beta_\delta(a,b,c)(x) \leq \overline{k}_\delta(a,b,c)\ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ \beta(a,b)(x),\ \ 0<x<1. \tag{2.104}$$

La relation (2.104) nous permet d'utiliser la méthode du rejet pour obtenir une réalisation presque sûre des lois $\beta_\delta(a,b,c)$.

Proposition 2.3.17. *Soit $(X_i,Y_i,\xi_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{L}(X_i)=\beta(a+b,\lambda)$, $\mathcal{L}(Y_i)=\beta(a,b)$ et $\mathcal{L}(\xi_i)=\mathcal{U}$ $(]0,1[)$, a, b, $\lambda>0$.*

Pour tout $\delta>1$, nous définissons

$$T=\inf\{i\geq 1;\ \xi_i(1+(\delta-1)X_i)^{\lambda+b}<1\}. \tag{2.105}$$

Alors T est finie presque sûrement et

1. *X_T et Y_T sont indépendantes, $\mathcal{L}(X_T)=\beta_\delta(a+b,\lambda,-\lambda-b)$ et $\mathcal{L}(Y_T)=\beta(a,b)$.*
2. *Les variables aléatoires $U_\delta=f_\delta(X_TY_T)$ et $V_\delta=\dfrac{f_\delta(X_T)}{f_\delta(X_TY_T)}$ sont indépendantes de lois données par (2.16).*

Remarque 2.3.18. *Pour les lois Beta généralisées nous nous sommes pas arrivés à donner une interpretation géométrique analogue au Théorème 2.2.14 relatif aux lois de Kummer.*

Preuve de la Proposition 2.3.17 Rappelons que (X_i,Y_i,ξ_i) est une collection de variables aléatoires indépendentes telles que $\mathcal{L}(X_i)=\beta(a+b,\lambda)$, $\mathcal{L}(Y_i)=\beta(a,b)$ et $\mathcal{L}(\xi)=\mathcal{U}([0,1])$.

$$T:=inf\{i\geq 1;\ \xi_i(1+(\delta-1)X_i)^{\lambda+b}<1\}.$$

1. Soient φ et ψ deux fonctions boréliennes. Alors

$$\begin{aligned}
E\ \ [\varphi(X_T)\ \ \psi(Y_T)] &= \sum_{k\geq 1} E\left[\varphi(X_k)\ \ \psi(Y_k)\ \ \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right]\\
&= \sum_{k\geq 1} E\left[\varphi(X_k)\ \ \psi(Y_k)\ \ \mathbb{1}_{\{\xi_k(1+(\delta-1)X_k)^{\lambda+b}<1\}}\ \prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{1}_{\{\xi_i(1+(\delta-1)X_i)^{\lambda+b}>1\}}\right]\\
&= \sum_{k\geq 1} p^{k-1}\ E\left[\psi(Y_k)\right]\ E\left[\varphi(X_k)\ \ \mathbb{1}_{\{\xi_k(1+(\delta-1)X_k)^{\lambda+b}<1\}}\right],
\end{aligned}$$

où $p := P\left[\xi_1(1+(\delta-1)X_1)^{\lambda+b} > 1\right]$. Alors

$$E\ \ [\varphi(X_T)\ \ \psi(Y_T)] = \left(\sum_{k\geq 1} p^{k-1}\right)\ E[\psi(Y_1)]\ \ E\left[\varphi(X_1)\ \ \mathbb{1}_{\{\xi_1(1+(\delta-1)X_1)^{\lambda+b}<1\}}\right]$$

$$= \left(\sum_{k\geq 1} p^{k-1}\right)\ (1-p)\ E[\psi(Y_1)]\ \ E\left[\varphi(X_1) \mid \xi_1(1+(\delta-1)X_1)^{\lambda+b} < 1\right].$$

Le résultat est une conséquence de la Proposition 2.3.13.

2. Il est clair que la loi de (U,V) conditionnellement à $\{T=k\}$ est celle de $\left(\frac{1-X_kY_k}{1+(\delta-1)X_kY_k}, \frac{1-X_k}{1-X_kY_k}\ \frac{1+(\delta-1)X_kY_k}{1+(\delta-1)X_k}\right)$ conditionnellement à $\{\xi_k(1+(\delta-1)X_k)^{\lambda+b}<1\}$. Donc la partie 2 est une conséquence directe de la Proposition 2.3.14.

   En effet, nous introduisons

$$U_k := 1-X_kY_k \ \ et\ \ V_k := \frac{1-X_k}{1-X_kY_k},$$

   alors U_k et V_k sont indépendentes et $\mathcal{L}(U_k) = \beta(\lambda+b,a)$, $\mathcal{L}(V_k) = \beta(\lambda,b)$.

   En écrivant U et V en fonction de U_k et V_k nous obtenons

$$U = \frac{U_k}{1+(\delta-1)(1-U_k)} \ \ et\ \ V = \frac{[1+(\delta-1)(1-U_k)]V_k}{1+(\delta-1)(1-U_kV_k)}.$$

   Alors conditionnellement à $\{T=k\}$, (U,V) a la même loi que $\left(\frac{U_k}{1+(\delta-1)(1-U_k)}, \frac{[1+(\delta-1)(1-U_k)]V_k}{1+(\delta-1)(1-U_kV_k)}\right)$ conditionnellement à $\{\xi_k[1+(\delta-1)(1-U_kV_k)]^{\lambda+b}<1\}$.

   Nous appliquons maintenant la partie 2 de la Proposition 2.3.14 pour $U=U_k$, nous obtenons conditionnellement à $\{\xi_k[1+(\delta-1)(1-U_kV_k)]^{\lambda+b}<1\}$,

$$\left(\frac{[1+(\delta-1)(1-U_k)]V_k}{1+(\delta-1)(1-U_kV_k)}, U_k\right)$$

   a la même loi que (V_k, U_k) conditionnellement à $\{\xi_k[1+(\delta-1)(1-U_k)]^{\lambda}<1\}$. Alors $\mathcal{L}(V) = \beta(\lambda,b)$ et U a la même loi que $f_\delta(1-U_{T'})$, où

$$T' := inf\{k\geq 1;\ \xi_k[1+(\delta-1)(1-U_k)]^{\lambda}<1\}.$$

   D'après la première partie nous déduisons que $\mathcal{L}(U) = \beta_\delta(\lambda+b,a,-a-b)$.

□

Bibliographie

[1] Casalis, M., (1996). The 2d+4 simple natural exponential families on $\mathbb{R}^d$. *Ann. Statist.* **24**, 1828-1854.

[2] Chamayou, J.F. and Letac, G., (1991). Explicit stationary distributions for compositions of random functions and products of random matrices. *J. Theoret. Probab.* **4**, 3-36.

[3] Consonni, G. and Veronese, P., (1992). Conjugate priors for exponential families having quadratic variance functions. *J. Amer. Statist. Assoc.*. **87**, 1123-1127.

[4] Diaconis, P. and Ylvisaker, D., (1979). Conjugate priors for exponential families. *Ann. Statist.* **7**, 269-281.

[5] Feinsilver, P., (1986). Some classes of orthogonal polynomials associated with martingales. *Proc. Amer. Math. Soc.* **98**, 298-302.

[6] Hamza, M. and Hassairi, A., (2013). Bayesian approach to cubic natural exponential families. *Statist. Probab. Lett.* **83**, 1946-1955."

[7] Hassairi, A., (1992). La classification des familles exponentielles naturelles sur $\mathbb{R}^d$ par l'action du groupe linéaire de $\mathbb{R}^{d+1}$. *C. R. Acad. Sci. Paris.* **315**, Série 1, 207-210.

[8] Hassairi, A. and Zarai, M., (2004). Characterization of the cubic exponential families by orthogonality of polynomials. *Ann. Probab.* **32**, 2463-2476.

[9] Koudou, E. and Vallois, P., (2012). Independence properties of the Matsumoto-Yor type. *Bernoulli.* **18** (1), 119-136.

[10] Koudou, E. and Vallois, P., (2011). Which distributions have the Matsumoto-Yor property?. *Elect. Comm. in Proba.* **16**, 556-566.

[11] Letac, G., (1986). La réciprocité des familles exponentielles sur $\mathbb{R}$. *C. R. Acad. Sci. Paris* **303**, Série I, 61-64.

[12] Letac, G., (1992). Lectures on natural exponential families and their variance functions. *Monografias de Matemática, Vol 50, Instituto de Matemática pure e aplicada, Rio de Janerio.*

[13] Letac, G., (2006). Working on Kummer distributions. March 30th.

[14] Letac, G. and Mora, M., (1990). Natural real exponential families with cubic variance functions. *Ann. Statist.* **18**, 1-37.

[15] Letac,G. and Wesołowski,J., (2000). An independence property for the product of GIG and Gamma laws. *Ann. Probab.* **28**, 1371-1383.

[16] Letac, G. and Seshadri, V., (1983). A characterization of the generalized inverse gaussian distribution by continued fractions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete.* **62**, 485-489.

[17] Mora, M., (1986). Familles exponentielles naturelles et fonctions variances. *Th. 3ème cycle: Probabilités et Statistique: Toulouse III.* 3302, p-73.

[18] Morris, C. N., (1982). Natural exponential families with quadratic variance functions. *Ann. Statist.* **10**, 65-80.

[19] Matsumoto, H. and Yor, M., (2001). An analogue of Pitman's 2M-X Theorem for exponential Wiener fonctionals. Part II: The role of the generalized inverse gaussianlaws. *Nagoya Math. J.* Vol. **162**, 65-86.

[20] Vallois, P., (1989). Sur le passage de certaines marches aleatoires au dessus d'une hyperbole équilatère. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25**, 443-456. MR1045245