AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

École doctorale IAEM Lorraine

Logiques de Ressources Dynamiques : Modèles, Propriétés et Preuves

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 avril 2015

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention informatique)

par

Jean-René Courtault

Composition du jury

Rapporteurs :	Nicola Olivetti	Professeur Université Aix-Marseille, LSIS, Marseille
	Philippe Balbiani	Directeur de recherche CNRS, IRIT, Toulouse
Examinateurs :	David Pym	Professeur University College London, Londres
	Hans van Ditmarsch	Directeur de recherche CNRS, LORIA, Nancy
	Didier Galmiche	Professeur Université de Lorraine, LORIA, Nancy
	Dominique Larchey-Wendling	Chargé de recherche CNRS, LORIA, Nancy

Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications — UMR 7503

Loria
Laboratoire lorrain de recherche en informatique et ses applications

Mis en page avec la classe thesul.

Résumé

En informatique, la notion de ressource, entité pouvant être composée ou décomposée en sous-entités, est une notion centrale. Plusieurs logiques ont été proposées en vue de modéliser et d'exprimer des propriétés sur celles-ci, comme par exemple la logique BI permettant d'exprimer des propriétés de partage et de séparation. Puisque les systèmes informatiques manipulent des ressources, la proposition de nouveaux modèles capturant la dynamique de ces ressources, ainsi que des méthodes permettant la vérification et la preuve de propriétés sur ces modèles, sont des enjeux cruciaux. Dans ce contexte, nous nous intéressons à la modélisation logique de la dynamique des ressources, avec pour objectif la proposition de nouveaux modèles et de nouveaux langages permettant l'expression de nouvelles propriétés sur la dynamique des ressources. De plus, pour les logiques que nous proposons, nous étudions la recherche de preuves en proposant des méthodes des tableaux et d'extraction de contre-modèles.

Dans un premier temps, nous définissons de nouveaux réseaux de Petri, nommés β-PN, et nous proposons une nouvelle sémantique à base de β-PN pour BI qui capture ainsi une forme de dynamique des ressources. Après avoir analysé la nécessité d'introduire de nouvelles modalités dans BI, nous étudions successivement différentes extensions modales de BI. Nous proposons alors une première extension, nommée DBI, permettant la modélisation de ressources ayant des propriétés dynamiques, c'est-à-dire évoluant en fonction de l'état courant d'un système. Puis, nous proposons une logique, nommée DMBI, permettant la modélisation de systèmes manipulant/produisant/consommant des ressources. Par ailleurs, nous proposons une nouvelle logique modale, nommée LSM, possédant de nouvelles modalités multiplicatives, exprimant des propriétés dynamique en lien avec les ressources. Pour finir, nous introduisons la séparation au sein des logiques épistémiques, obtenant alors une nouvelle logique, nommée ESL, en vue d'exprimer de nouvelles propriétés en lien avec la connaissance.

Mots-clés: modélisation, vérification et preuve, logiques de ressources, logiques de séparation, dynamique, méthodes des tableaux, recherche de preuves, méthodes formelles, extraction de contre-modèles

Abstract

In computer science, the notion of resource is a central concern. We consider as a resource, any entity that can be composed or decomposed into sub-entities. Many logics were proposed to model and express properties on these resources, like BI logic, a logic about sharing and separation of resources. As the computer systems manipulate resources, a crucial issue consists in providing new models that capture the dynamics of resources, and also in verifying and proving properties on these models. In this context, we define new logics with new models and new languages allowing to respectively capture and express new properties on the dynamics of resources. Moreover, for all these logics, we also study the foundations of proof search and provide tableau methods and counter-model extraction methods.

After defining new Petri nets, called β-PN, we propose a new semantics based on β-PN for BI logic, that allows us to show that BI is able to capture a kind of dynamics of resources. After observing that it is necessary to introduce new modalities in BI logic, we study successively different modal extensions of BI. We define a logic, called DBI, that allows us to model resources having dynamic properties, meaning that they evolve during the iterations of a system. Then, we define a logic, called DMBI, that allows us to model systems that manipulate/produce/consume resources. Moreover, we define a new modal logic, called LSM, having new multiplicative modalities, that deals with resources. Finally, we introduce the notion of separation in Epistemic Logic, obtaining a new logic, called ESL, that models and expresses new properties on agent knowledge.

Keywords: modelling, verification and proof, resource logics, separation logics, dynamics, tableau methods, proof search, formal methods, countermodel extraction

Remerciements

Je tiens à remercier les membres du jury pour avoir accepté de participer à la soutenance de ma thèse :

- M. Philippe Balbiani, directeur de recherche CNRS à Toulouse, qui a accepté d'être rapporteur de ma thèse et que je tiens particulièrement à remercier pour les remarques dont il m'a fait part lors de la lecture approfondie du document
- M. Nicola Olivetti, professeur à l'université Aix-Marseille, qui a accepté d'être rapporteur de ma thèse et qui m'a fait l'honneur de présider le jury
- M. David Pym, professeur à University College London, qui a accepté de faire partie du jury, et avec qui j'ai eu des contacts très enrichissants au cours de ces dernières années
- M. Hans van Ditmarsch, directeur de recherche CNRS à Nancy, qui a accepté d'être membre du jury, et avec qui nous avons eu des échanges très intéressants concernant les logiques épistémiques
- M. Dominique Larchey-Wendling, chargé de recherche CNRS à Nancy, qui a accepté de faire partie de mon jury, et que je remercie particulièrement pour le temps consacré concernant certaines techniques de preuves utilisées dans ces travaux
- M. Didier Galmiche, professeur à l'université de Lorraine, qui a été mon directeur de thèse et qui a su, grâce à ses nombreux conseils, me guider tout au long de ces années. Je tiens aussi à remercier M Galmiche pour la patience et le soutien dont il m'a témoigné.

J'aimerais également remercier Daniel Méry pour avoir répondu à mes très nombreuses questions lors de mon arrivée dans l'équipe Types. Je tiens aussi à remercier tous les membres du projets DynRes, avec qui j'ai eu des conversations très enrichissantes. Je remercie aussi mes collègues : Yakoub (un grand merci à toi Yakoub), ainsi que Vincent et Pierre. Je tiens aussi dire merci à tous mes proches : Maminette, Polo, Méloche, Toto et Antho, sans oublier Maxou et Lulu. Pour finir, je tiens à remercier tous les "Bruley" que je n'ai pas beaucoup vu ces dernières années, mais sur qui j'ai toujours pu compter.

Je dédie cette thèse
à Maximilien et à la petite Lucy.

Table des matières

Introduction **1**

1 Logiques de séparation et ressources **7**

1.1 Langage et sémantique des logiques BI et BBI 7

1.2 Illustration des logiques BI et BBI 11

1.2.1 Un exemple de modélisation avec BBI 11

1.2.2 Exemple de modélisation revisité avec BI 13

1.2.3 Partage et séparation 14

2 Dynamique des ressources dans la logique BI **17**

2.1 Réseaux de Petri à inconsistance 18

2.2 Une nouvelle sémantique à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI . . . 21

2.3 Extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI . 25

2.3.1 La méthode d'extraction de contre-modèles 25

2.3.2 Un exemple d'extraction de contre-modèles 32

2.4 Adéquation de la sémantique à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI . 34

2.4.1 Transformation des β-PN en monoïde de ressources 34

2.4.2 Adéquation de la nouvelle sémantique de BI 37

2.5 Liens entre accessibilité et satisfaisabilité dans les réseaux de Petri à inconsistance 38

3 Ressources aux propriétés dynamiques **43**

3.1 Langage et sémantique de la logique DBI 43

3.2 Expressivité de la logique DBI 47

3.3 Une méthode des tableaux pour DBI 49

3.3.1 Labels de ressources et d'états 50

3.3.2 Une méthode des tableaux avec labels pour DBI 52

3.3.3 Un exemple de preuve 55

3.4 Correction de la méthode des tableaux 57

3.5 Extraction de contre-modèles et complétude 61

3.5.1 Méthode d'extraction de contre-modèles et complétude 61
3.5.2 Un exemple d'extraction de contre-modèles 67

4 Processus, actions et manipulation de ressources 71
4.1 Langage et sémantique de la logique DMBI 72
4.2 Expressivité de la logique DMBI 75
4.3 Modélisation de processus concurrents 79
4.3.1 Modélisation de processus concurrents 79
4.3.2 Un exemple d'exclusion mutuelle 82
4.3.3 Un exemple de producteur / consommateur 83
4.4 Une méthode des tableaux pour DMBI 84
4.4.1 Labels de ressources, d'actions et d'états 84
4.4.2 Une méthode des tableaux pour DMBI 88
4.4.3 Un exemple de preuve 90
4.5 Correction de la méthode des tableaux pour DMBI 92
4.6 Extraction de contre-modèles 97
4.6.1 Une méthode d'extraction de contre-modèles 97
4.6.2 Un exemple d'extraction de contre-modèles 103
4.7 Complétude de la méthode des tableaux pour DMBI 105

5 De nouvelles modalités de séparation 113
5.1 Langage et sémantique de la logique LSM 114
5.2 Expressivité de la logique LSM 116
5.2.1 LSM et les réseaux de Petri temporisés 116
5.2.2 De nouvelles modalités multiplicatives 120
5.3 Une méthode des tableaux pour LSM 121
5.3.1 Labels de mondes et de ressources et contraintes 121
5.3.2 Méthode des tableaux - Correction et Complétude 124
5.3.3 Une méthode d'extraction de contre-modèles 128

6 Ressources et connaissances dynamiques 133
6.1 Langage et sémantique de la logique ESL 134
6.2 Expressivité de la logique ESL 136
6.3 Une méthode des tableaux pour ESL 143
6.3.1 Labels et contraintes de ressources et d'agents 143
6.3.2 Méthode des tableaux - Correction et Complétude 144
6.3.3 Un exemple de preuve 147
6.3.4 Un méthode d'extraction de contre-modèles 148

Conclusion et perspectives **153**

Bibliographie **157**

A Preuves de la Section 4.3 **163**

B Preuve du Lemme 4.7.5 **165**

Index **179**

Table des figures

1 Illustration de propriétés de partage et de séparation 15

2 Exemple de réseau de Petri à inconsistance (β-PN) 20
3 Règles de BI-clôture 26

4 Exemple de propriété dynamique : évolution de prix 47
5 Règles d'expansion des tableaux pour DBI 53
6 Preuve de la formule $(\Box(P \to \Diamond Q) \wedge \Diamond P) \mathrel{-\!\!*} \Diamond Q$ 56
7 DBI-tableau pour $\Diamond((A \to B) \wedge (A * A)) \to \Diamond B$ 67

8 Exemple d'évolution de prix d'objets 75
9 Règles de clôture d'un ensemble de contraintes pour DMBI 86
10 Règles d'expansion des tableaux pour DMBI 90
11 Preuve de la formule $((P \mathrel{-\!\!*} \langle a\rangle\langle b\rangle Q) * P) \to \Diamond Q$ 91
12 DMBI-tableau pour la formule $(\langle a\rangle P * \langle b\rangle P) \to \Diamond(P * P)$ 103

13 Exemple de réseau de Petri temporisé (Time Petri net) 118
14 Règles de clôture d'un ensemble de contraintes pour LSM 123
15 Règles d'expansions des tableaux pour LSM 125
16 Preuve de la formule $((\Box_\bullet Q * P) \wedge \Diamond R) \to \Diamond(Q \wedge \Box_e R)$ 127
17 LSM-tableau pour la formule $\Diamond_r(P * Q) \to (\Diamond P * \Diamond Q)$ 131

18 Connaissance des logiciens à leur entrée dans la librairie 138
19 Mise à jour du modèle suite à la première annonce publique : $K_{A_1}\neg\mathrm{I}$ 140
20 Mises à jour du modèle suite aux annonces publiques : $(\mathcal{M}|\Upsilon_1|\Upsilon_2|\Upsilon_3|\Upsilon_4|\Upsilon_5)$ . . 142
21 Règles de clôture d'un ensemble de contraintes, pour tout $u \in A$ 144
22 Règles d'expansion des tableaux pour ESL 145
23 Preuve de la formule $K_a((P \mathrel{-\!\!*} Q) * K_b(P \wedge R)) \to K_a\widetilde{K}_b Q$ 147
24 ESL-Tableau pour la formule $(K_a P * K_a Q) \to K_a(P * Q)$ 150

Introduction

Contexte

En informatique, la notion de *ressource* est une notion centrale. Nous désignons par ressource toute entité pouvant être composée ou décomposée en sous-entités. À titre d'exemple, un ensemble de droits d'accès, une zone mémoire, les jetons d'un réseau de Petri, un intervalle de temps, des processus pouvant se décomposer en sous-processus concurrents ou des messages circulant dans un réseau sont des ressources. Dans un contexte général, les systèmes informatiques, contenant et manipulant des ressources, sont de plus en plus complexes. Un défi majeur porte sur la preuve et la vérification de propriétés non seulement sur ces systèmes, mais aussi sur les ressources qu'ils manipulent. Pour cela, il est nécessaire de proposer des modèles capables de représenter ces systèmes et ces ressources, de proposer des langages permettant d'exprimer des propriétés pertinentes sur ces modèles et surtout de fournir des outils aussi bien théoriques (des calculs) que concrets (des logiciels) permettant de prouver ou vérifier ces propriétés sur ces modèles.

Concernant la modélisation de ces ressources, une première difficulté que nous pouvons rencontrer est leur grande diversité, rendant ainsi difficile la proposition d'un modèle générique. En effet, modéliser des zones mémoires imposera par exemple de représenter une pile et un tas, obtenant ainsi des modèles très différents du cas où nous souhaiterions modéliser des jetons dans un réseau de Petri. Par ailleurs, la modélisation de ces ressources dépend aussi de l'environnement dans lequel elles évoluent. Par exemple, imaginons que nous souhaitons modéliser des informations situées au sein d'un fichier XML, il pourrait alors convenir de représenter les informations (les ressources) ainsi que le fichier lui-même et sa structure arborescente (l'environnement), puis de localiser les ressources au sein de la représentation choisie pour le fichier, obtenant alors des modèles plus complexes.

L'étape qui suit la modélisation est l'expression de propriétés sur les modèles. Différentes propriétés, notamment sur les ressources, peuvent alors être exprimées, comme des propriétés spatiales, temporelles ou quantitatives. Nous remarquerons alors que le choix du type de propriétés que nous choisirons d'exprimer influencera particulièrement le choix du langage et de la modélisation. Par exemple, pour pouvoir exprimer une propriété temporelle sur une ressource, comme "la ressource r vérifie *toujours* la propriété P", il conviendra alors de choisir un langage capable d'exprimer cette propriété temporelle (toujours), mais aussi un modèle tenant compte de la dimension temporelle.

Finalement, une fois le cadre théorique choisi et défini, nous pouvons alors passer à l'étape de preuve et de vérification. Deux approches sont alors possibles : la vérification de modèles (*model checking*) [20] consistant à vérifier qu'un modèle donné satisfait une propriété particulière, ou alors la preuve de théorèmes (*theorem proving*) [36] s'intéressant à prouver qu'une propriété est satisfaite par tous les modèles, c'est-à-dire que la propriété est un théorème. Nous noterons que dans le cadre de la preuve de théorèmes, il peut être intéressant de fournir une méthode

d'extraction de contre-modèles consistant, lorsqu'une propriété ne serait pas satisfaite par tous les modèles, à exhiber un modèle (appelé alors contre-modèle) ne satisfaisant pas la propriété.

Dans le contexte de modélisation de ressources, d'expression de propriétés sur celles-ci et de preuves, différentes logiques, appelées *logiques de ressources*, ont été proposées. Nous pouvons citer la logique linéaire [43], permettant d'exprimer des propriétés de production et de consommation de ressources, la logique des Ambiants [19] se focalisant sur la configuration spatiale et la mobilité de ressources, la logique BI (Bunched Implications Logic) et ses variantes [72, 75], comme la logique Boolean BI (BBI), exprimant des propriétés de partage et de séparation sur des ressources. Parallèlement, nous pouvons aussi citer la logique PRSPDL [8, 14], une extension de la logique PDL [35, 44, 45], permettant d'exprimer des propriétés sur des programmes pouvant être décomposés en sous-programmes parallèles.

Parmi ces logiques de ressources, la logique BI [72], pouvant être vue comme un noyau logique permettant d'exprimer des propriétés de partage et séparation, c'est-à-dire permettant de décomposer une ressource et d'exprimer des propriétés sur les sous-ressources obtenues (séparation) et permettant aussi d'exprimer plusieurs propriétés sur une même ressource (partage), a donné naissance, par variante et par extension, aux *logiques de séparation*. De nombreuses logiques de séparation ont été proposées, comme les logiques des pointeurs [39, 53, 70, 81] exprimant des propriétés sur des programmes manipulant des pointeurs, la logique BI-Loc [17] modélisant des arbres de ressources, la logique MBI [23, 24, 76, 77] capturant des processus manipulant des ressources, la logique LGL [21] modélisant des "layered graphs" qui sont des graphes pouvant être composés ou décomposés en couches, ainsi qu'une logique de séparation simple (simple separation logic) [47] permettant la composition et la décomposition de valuations de variables propositionnelles.

Problématique

Dans ce contexte, nous nous intéressons à la modélisation logique, à l'expression de propriétés et à la preuve de propriétés sur la dynamique des ressources, et plus précisément en choisissant BI et BBI comme point de départ pour notre étude.

Cette notion de dynamique des ressources est un vaste domaine. En effet, il existe de nombreuses formes de dynamique. Parmi celles-ci, nous avons la dynamique portant sur les propriétés des ressources, signifiant que le système que nous considérons modifie uniquement les propriétés des ressources. Par exemple, nous pouvons citer les automates cellulaires où la quantité de cellules (de ressources) ne varie pas au fur et à mesure des itérations du système, mais seulement les valeurs de ces cellules (les propriétés des ressources) changent. Parallèlement, il existe une autre forme de dynamique, dans laquelle les ressources sont transformées, produites et consommées. À titre d'exemple, nous pouvons citer le problème du producteur/consommateur, où des ressources apparaissent lorsqu'elles sont produites par le producteur et disparaissent lorsqu'elles sont consommées par le consommateur. Par ailleurs, nous pouvons aussi trouver une autre forme de dynamique portant la manière dont un système manipule ses ressources. Par exemple, nous retrouvons une telle forme de dynamique dans la mise à jour de systèmes : après mise à jour, la manière dont un système manipule ses ressources est modifiée.

Dans le contexte de BI, de ses variantes et de ses extensions, nous pouvons observer que la dimension de la dynamique a été très peu étudiée. Tout d'abord, la logique BI semble, à première vue, incapable de capturer une quelconque forme de dynamique des ressources, puisque ses modèles décrivent uniquement des ressources mais ne contiennent pas de dimension liée au comportement d'un système qui manipulerait les ressources. Concernant la logique des pointeurs,

une forme de dynamique peut être trouvée dans son calcul à la Hoare [50], mais les modèles de la logique, étant à base de pile et de tas (de mémoire), ne nous semblent pas assez génériques pour pouvoir être appliqués à d'autres domaines. Par contre, la logique MBI capture quant à elle une forme de dynamique. En effet, ses modèles sont des systèmes de transition, décrits par des jugements de la forme $R, E \xrightarrow{a} R', E'$ et générés par une sémantique opérationnelle, où un tel jugement signifie : "le processus E exécute l'action a sur la ressource R, obtenant ainsi la nouvelle ressource R' et devenant alors le processus E'". Malheureusement, il n'existe pas de calcul complet ni de méthode d'extraction de contre-modèles pour cette logique. Globalement, la critique principale que nous pourrions faire aux logiques de séparation capturant une forme de dynamique, à l'exception de MBI, est que les modèles de ces logiques sont souvent très spécifiques à un type de système considéré (modèles à base de mémoire, d'arbres, de programmes, etc...).

Nous proposons alors d'étudier plus en profondeur la notion de dynamique des ressources au sein des logiques de séparation. Tout d'abord, se pose une première question : est-ce-que la logique BI, malgré notre première intuition, est capable de modéliser et d'exprimer des propriétés sur une certaine forme de dynamique des ressources ? Si oui, sur quel type de dynamique ? Et quelles sont les limites que nous pouvons observer ? Plus précisément, quelles sont les propriétés pouvant être ou ne pas être exprimées sur la dynamique des ressources par cette logique ? Ensuite, dans un contexte plus large, se pose la question d'introduire dans les logiques de séparation les différentes formes de dynamique que nous avons évoqué, avec comme objectifs de proposer de nouveaux modèles, de permettre d'exprimer de nouvelles propriétés et d'étudier la recherche de preuves en proposant des calculs corrects et complets et des méthodes d'extraction de contre-modèles.

Bien entendu, se pose aussi la problématique d'une approche duale, à savoir l'introduction de la séparation (notion de ressource) au sein de logiques capturant déjà la dynamique, comme par exemple des logiques modales. Cela, avec toujours les mêmes objectifs concernant les modèles, l'expression de nouvelles propriétés et la recherche de preuves.

Approche, Contributions et Perspectives

Dans le Chapitre 1, nous présentons le langage et la sémantique des logiques BI et BBI, puis nous illustrons ces deux logiques sur un exemple simple à base d'objets vendus dans un magasin. Par ailleurs, sur ce même exemple, nous illustrons les différences entre les deux logiques au niveau de leur expressivité. Pour finir, nous nous attardons sur les concepts de propriétés de partage et de séparation. En effet, ces concepts étant centraux dans BI et BBI, leur compréhension est une étape importante. Finalement, au travers de ces notions de partage et de séparation, nous concluons que parmi les logiques de ressources ayant été proposées à ce jour, BI et BBI offrent le cadre logique le plus adapté pour notre étude de la dynamique des ressources, justifiant ainsi notre choix d'appuyer nos travaux sur ces deux logiques.

Dans le Chapitre 2, nous nous intéressons aux formes de dynamique pouvant être exprimées par la logique BI. En effet, les exemples présentés dans le chapitre précédent, ainsi que l'étude des modèles de BI, laissent supposer que la logique ne permet pas, à première vue, de modéliser une quelconque forme de dynamique, autrement dit de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant/consommant/produisant des ressources. Pour répondre à cette question, nous introduisons de nouveaux réseaux de Petri, nommés réseaux de Petri à inconsistance (β-PN), ayant la particularité de posséder un marquage inconsistant. Puis nous définissons une nouvelle sémantique à base de β-PN pour BI que nous démontrons adéquate. C'est-à-dire que nous prouvons qu'une formule est valide dans notre nouvelle sémantique si et seulement si elle

est valide dans BI (dans sa sémantique à base de monoïdes de ressources). Par ailleurs, la preuve de cette adéquation, reposant sur une technique de transformation de contre-modèles, aboutit à la proposition d'une nouvelle méthode d'extraction de contre-modèles à base de β-PN pour la méthode des tableaux de BI [40, 68]. Pour finir, nous faisons le lien entre l'accessibilité de deux marquages dans un réseau de Petri à inconsistance et la satisfaisabilité d'une formule par ce même réseau.

L'intérêt des travaux de ce chapitre est de nous apporter la connaissance que la logique BI est capable de capturer une certaine forme de dynamique des ressources, en particulier l'accessibilité entre deux marquages dans un réseau de Petri à inconsistance, donc une production et consommation de ressources (jetons). L'autre intérêt de ces travaux est de fournir à la méthode des tableaux de BI une nouvelle méthode d'extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri. Parallèlement, nous concluons ce chapitre en mettant en avant certaines propriétés dynamiques ne pouvant pas être exprimées par BI, impliquant la nécessité de proposer des extensions modales de BI. Des travaux futurs porteront sur l'implantation de notre méthode d'extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri dans le démonstrateur pour la logique BI, nommé BILL [41].

Dans le Chapitre 3, nous proposons une première extension modale de la logique BI, dans laquelle nous introduisons deux nouvelles modalités $\Diamond$ et $\Box$. Pour cela, nous étendons les modèles de BI en y ajoutant un automate (ensemble préordonné d'états). L'idée principale derrière cette logique est de permettre la modélisation de ressources ayant des propriétés évoluant en fonction de l'état courant de notre automate, autrement dit ayant des propriétés dynamiques. Nous obtenons ainsi une nouvelle logique, nommée DBI (Dynamic BI) [27], permettant de modéliser et d'exprimer des *propriétés dynamiques* de ressources.

Après avoir défini le langage et la sémantique de DBI, nous illustrons notre logique en revisitant l'exemple présenté dans le Chapitre 1. Dans cet exemple, nous montrons que DBI permet de modéliser des produits dont les prix (les propriétés), cette fois-ci, ont la particularité de pouvoir évoluer (d'être dynamiques) en fonction de l'état courant du marché (de l'automate). Par ailleurs, nous proposons un calcul des tableaux avec labels pour la logique DBI. Pour cela, nous étendons le calcul de BI en y introduisant de nouveaux labels et de nouvelles contraintes en lien avec la dimension dynamique de DBI. L'originalité de notre calcul est qu'il dispose et traite non plus un unique type de contraintes, mais différents types de contraintes : des contraintes pour les ressources et des contraintes pour l'automate. Par ailleurs, nous montrons la correction et la complétude de notre calcul. La difficulté de ces preuves réside dans la compréhension et la réadaptation des techniques de preuves de complétude introduites pour BI et BBI [57]. De plus, nous proposons une méthode d'extraction de contre-modèles pour notre logique.

Pour finir, nous étudions les limites en termes de modélisation et d'expressivité des modèles que nous avons proposé. Cette étude, nous faisant remarquer que DBI ne permet pas de modéliser des mécanismes tels que la production et la consommation de ressources, nous amène à conclure à la nécessité d'étendre cette logique.

Dans le Chapitre 4, nous étendons les modèles de DBI dans le but de permettre à la logique de modéliser des mécanismes de transformation de ressources, tels que la production ou la consommation de celles-ci. Pour cela, nous considérons que l'automate constituant les modèles de DBI peut à présent exécuter une action à chaque transition, cela ayant pour effet de produire et consommer des ressources. Par ailleurs, nous étendons le langage de la logique par l'ajout de modalités à la Hennessy-Milner [46] ($[a]$ et $\langle a \rangle$) permettant d'exprimer des propriétés sur l'état et la ressource obtenus après l'exécution d'une action a. Nous conservons aussi les modalités de

DBI, à savoir $\Diamond$ et $\Box$, exprimant des propriétés sur les états et les ressources accessibles après exécution d'une succession quelconque d'actions. Nous obtenons ainsi une nouvelle logique que nous nommons DMBI.

Après avoir présenté le langage et la sémantique de DMBI, nous illustrons l'expressivité de la logique en revisitant l'exemple que nous avons présenté dans les chapitres précédents. Ainsi, nous montrons que notre logique est capable de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des clients achetant et revendant des produits dont les prix fluctuent en fonction du marché. Par ailleurs nous montrons aussi que, bien que les modèles de DMBI ne soient constitués d'un unique automate, ceux-ci sont capables de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des processus concurrents synchrones ou asynchrones manipulant des ressources.

Par la suite, nous présentons un calcul des tableaux avec labels et contraintes pour notre logique DMBI. Comme nous le verrons, notre calcul dispose lui aussi de différents types de contraintes, à savoir des contraintes encodant les ressources et leur composition/décomposition, des contraintes encodant les transitions de notre automate, et pour finir des contraintes encodant l'effet des actions sur les ressources. Mais l'une des difficulté pour ce nouveau calcul est qu'il n'a pas été possible de traiter ces différentes contraintes de manière isolée, contrairement à la logique DBI. Par ailleurs, ayant réussi à encoder dans le calcul toute l'information sémantique nécessaire (les ressources, l'automate et l'effet de l'exécution des actions sur les ressources), nous sommes parvenus à proposer une méthode d'extraction de contre-modèle pour DMBI. Ainsi, l'un des intérêts de notre calcul est l'extraction d'automate manipulant des ressources à partir de formules non valides. Pour finir, nous avons montré la correction et la complétude de notre calcul. Comme travaux futurs, nous envisageons d'introduire la notion de place [17, 22] dans les modèles de DMBI, permettant alors de localiser les ressources. De plus, nous nous intéresserons à l'implantation d'un démonstrateur pour DMBI, permettant alors la modélisation et la vérification de propriétés dans des domaines tels que les protocoles, les services web ou les systèmes multi-agents.

Dans le Chapitre 5, après avoir remarqué que les logiques dynamiques de ressources que nous avons proposé s'appuient sur des modèles multi-dimensionnels, c'est-à-dire reposant sur des couples mondes/ressources, nous proposons une nouvelle logique offrant un cadre logique pour la dynamique des ressources. De plus, nous étudions de toutes nouvelles modalités en lien avec la notion de ressource.

La logique que nous proposons dans ce chapitre, nommée LSM, est une logique modale de ressources multi-dimensionnelle. En la comparant à la logique S4 [18, 83], notre logique considère une relation (d'accessibilité) non pas sur de simples mondes modaux, mais sur des paires mondes/ressources. La particularité des modèles de notre logique est d'offrir ainsi un noyau permettant efficacement la modélisation de systèmes dynamiques, comme nous le montrons en illustrant la logique sur des réseaux de Petri temporisés (time Petri nets) [65, 16].

Par ailleurs, LSM propose de nouvelles modalités en lien avec la notion de ressource, comme par exemple $\Diamond_r \phi$ signifiant que l'ajout de la ressource r permet au système que nous considérons d'atteindre un couple monde/ressource satisfaisant la propriété ϕ. Nous montrons par la suite que ces nouvelles modalités généralisent les modalités de la logique S4, au sens où $\Diamond_e \phi$ est équivalant en termes d'expressivité à la modalité $\Diamond \phi$ de la logique S4 : en d'autres termes la formule $\Diamond \phi$ de la logique S4 exprime en réalité que ϕ est *possible*, cela sans avoir besoin d'ajouter de ressources (e) dans le système considéré.

Pour finir, nous nous intéressons à la théorie de la preuve dans notre nouvelle logique, en proposant un calcul des tableaux correcte et complète, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles. Les preuves de correction et de complétude reprennent le même schéma de

preuve des preuves pour la logique DMBI.

Dans le Chapitre 6, nous ouvrons notre champ de recherches en nous intéressant à la notion d'*agent* apparaissant dans beaucoup de domaines en informatique, tels que la vérification de protocoles ou les systèmes multi-agents [25, 69, 63, 29, 56, 2, 91]. Parmi tous ces domaines, les *logiques dynamiques épistémiques* [11, 90, 88, 87, 48, 55, 89, 9], se focalisant sur l'évolution de la connaissance possédée par des agents, ont attiré notre attention. L'étude des exemples illustrant ces logiques, nous amène à remarquer que les *mondes possibles* constituant les modèles de ces logiques, sont bien souvent des distributions d'éléments, pouvant être vues comme des ressources. Malheureusement, ces logiques ne capturent pas cette dimension "ressource", ni dans leur modèles (puisque ne disposant pas de la séparation), ni dans les propriétés qu'elles expriment (puisque disposant uniquement de connecteurs classiques). Notre objectif est donc d'introduire la séparation de BI au sein de ces logiques, dans le but d'exprimer de toutes nouvelles propriétés épistémiques.

Dans un premier temps, nous présentons le langage et la sémantique de notre logique. Dans un second temps, nous étudions et présentons l'expressivité de notre logique. La difficulté s'est retrouvée dans la compréhension de l'interaction, du point de vue de l'expressivité, entre les modalités épistémiques et les connecteurs issus de la logique BBI. Cette étude a abouti à la mise en avant de nouvelles propriétés sur la connaissance pouvant être exprimées par notre logique. Pour finir, nous proposons un calcul correct et complet, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles, pour notre logique, à savoir BBI étendu avec les modalités provenant de la logique épistémique [6, 78, 49, 61, 54] (EL), qui est le noyau logique des logiques dynamiques épistémiques. Des travaux futurs porteront sur l'étude d'un calcul pour ESL étendu avec les modalités dynamiques épistémiques (annonces publiques).

La force de ces travaux est d'avoir permis de poser les bases concernant l'introduction de la séparation au sein des logiques épistémiques et surtout d'avoir permis la compréhension, en termes d'expressivité, de l'interaction entre les modalités épistémiques et les connecteurs de la logique BBI.

En conclusion, différentes perspectives s'offrent à nous suite aux travaux que nous avons présenté dans cette thèse. Parmi celles-ci, l'étude d'extensions de la logique LSM semble pour nous la plus intéressante. Nous envisageons d'entreprendre ces travaux suivant deux axes. Le premier axe repose sur une extension de notre logique LSM intégrant la notion de *zones de confiance* (Trust Domain) [4, 5]. Les travaux réalisés sur ces zones de confiance ont permis d'introduire des modèles de systèmes dont le comportement évoluait en fonction du contexte dans lequel ils se situaient et dont chaque transition effectuée par ces systèmes avait un coût. Malheureusement, à ce jour aucun calcul n'a été fourni pour les logiques proposées dans ce domaine. Nous pensons que notre approche permettrait de proposer le première calcul des tableaux. Par ailleurs, nous pensons également que les modalités de LSM permettraient d'exprimer de nouvelles propriétés intéressantes sur ces modèles, notamment en termes d'accessibilité.

Le second axe nous intéressant concerne les *bigraphs* [66, 67], graphes à deux dimensions (une pour les places et une autre pour les liens entre ces places). Nous pensons que l'introduction de ces bigraphs dans les modèles de LSM permettrait d'aboutir à de nouveaux modèles permettant de localisation des ressources à des places, ne pouvant être manipulées par le système sous certaines conditions de liens entre les places dans lesquelles se situent les ressources. Concrètement, de tels modèles permettraient de capturer des systèmes où, par exemple, l'action "uploader fichier f vers m", consistant à copier le fichier f vers une machine distante m ne pourrait être effectuée uniquement s'il existe un lien entre notre machine et m. Par ailleurs, l'aspect dynamique de LSM

permettrait aussi de capturer des liens dynamiques entre les places, c'est-à-dire des liens pouvant être rompus ou pouvant apparaître. Nous remarquons alors qu'une telle logique permettrait d'aboutir à des résultats pertinents dans le domaine de la sécurité, du contrôle d'accès, etc...

Chapitre 1

Logiques de séparation et ressources

Introduction

La notion de *ressource* est une notion centrale en informatique, où le terme ressource désigne toute entité pouvant être composée ou décomposée en sous-entités. Par exemple, des zones mémoires, des intervalles de temps, des droits d'accès, des messages circulant sur un réseau sont des ressources. Diverses logiques ont été proposées afin de modéliser et d'exprimer des propriétés sur ces ressources. A titre d'exemple, la logique linéaire intuitionniste [43] permet d'exprimer des propriétés de production et consommation de ressources, la logique des Ambiants [19] s'intéresse à des configurations spatiales avec mobilité, la logique BI et ses variantes [72, 75] s'intéressent quant à elles au partage et à la séparation de ressources.

Cette notion de partage et de séparation de ressources, que nous illustrerons en détail dans ce chapitre, a fait de BI un noyau logique, qui a été étendu, donnant ainsi naissance aux logiques dites de séparation, qui ont trouvé des applications dans différents domaines centraux en informatique, tels que la vérification de programmes avec pointeurs [53, 70, 81], la sécurité [4, 5, 21], etc...

Pour ces raisons, nous avons choisi BI comme départ pour notre étude logique de la dynamique des ressources. Pour cela, nous consacrons ce chapitre à la présentation de BI, et aussi d'une de ses variantes, nommée BI Booléen (BBI) [75]. Dans un premier temps, nous présentons ces deux logiques au travers de leur sémantique à base de monoïdes de ressources partiels déterministes. Puis, nous illustrons leurs modèles et leur expressivité au travers d'un exemple simple, permettant au lecteur de se familiariser avec la notion de ressources. Pour finir, nous nous attardons sur les concepts de partage et de séparation, qui se trouvent être au cœur de BI et BBI.

1.1 Langage et sémantique des logiques BI et BBI

Les logiques BI (Bunched Implications) et BBI (Boolean Bunched Implications) [75, 72], ainsi que leurs variantes [75], sont des logiques exprimant des propriétés de partage et de séparation de ressources, notions que nous illustrerons en détail dans la section suivante. Nous appelons *ressource* toute entité pouvant être composée ou décomposée en sous-entités. De nombreuses sémantiques ont été proposées pour ces deux logiques, offrant ainsi toute une gamme de variantes non nécessairement équivalentes en terme de validité [75, 40, 68, 59, 60]. Parmi toutes ces variantes, nous nous intéressons particulièrement aux sémantiques à base de monoïdes de ressources, et plus spécifiquement aux monoïdes de ressources partiels déterministes que nous allons présenter dans ce chapitre, offrant une structure simple et efficace pour la modélisation de ressources, comme nous le verrons tout au long des exemples que nous fournirons dans ce

manuscrit.

Le langage de la logique BI est constitué des connecteurs de la logique intuitionniste IL, appelés connecteurs *additifs*, et des connecteurs de MILL, le fragment multiplicatif de la logique linéaire intuitionniste (ILL) [43, 15], appelés connecteurs *multiplicatifs*. Parallèlement, la logique BBI est, quant à elle, constituée de connecteurs additifs provenant de la logique classique CL et, tout comme BI, des connecteurs multiplicatifs provenant de MILL. Les connecteurs de IL et de CL étant identiques du point de vue syntaxique, mais bien sûr différents du point de vue sémantique, nous pouvons alors dire que les langages de BI et BBI sont identiques. Nous noterons, en guise de première comparaison, que la logique BI est une extension conservative de la logique intuitionniste, tandis que la logique BBI est logique classique.

Soit Prop un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. Le langage $\mathcal{L}$ des logiques BI et BBI est l'ensemble de toutes les formules générées par la grammaire suivante, pour tout $p \in \text{Prop}$:

X	::=	p	variable propositionnelle
		$\mid \bot$	unité de la disjonction additive
		$\mid \top$	unité de la conjonction additive
		$\mid X \wedge X$	conjonction additive
		$\mid X \vee X$	disjonction additive
		$\mid X \to X$	implication additive
		$\mid \mathrm{I}$	unité de la conjonction multiplicative
		$\mid X * X$	conjonction multiplicative
		$\mid X \mathrel{-\!\!*} X$	implication multiplicative

De plus, la négation (additive) est définie par $\neg\phi \equiv \phi \to \bot$.

Comme nous pouvons l'observer, BI et BBI se composent d'une part d'opérateurs additifs. Ceux-ci permettent d'exprimer des propriétés de *partage*. Par exemple, une ressource satisfaisant la propriété $\phi \wedge \psi$ est une ressource qui partage les propriétés ϕ et ψ, autrement dit qui satisfait à la fois ϕ et ψ. D'autre part, BI et BBI contiennent des connecteurs multiplicatifs permettant d'exprimer des propriétés de *séparation*. Ainsi, la propriété $\phi * \psi$ indique que la ressource que nous considérons peut être séparée (décomposée) en deux sous-ressources, la première satisfaisant ϕ et la seconde satisfaisant ψ.

Nous présentons maintenant les modèles des logiques BI et BBI à base de monoïdes de ressources (partiels).

Définition 1.1.1 (Monoïde partiel)**.** Un *monoïde partiel* (commutatif) est une structure $\mathcal{M} = (R, \bullet, e)$ telle que :

- R est un ensemble
- $e \in R$
- $\bullet : R \times R \rightharpoonup R$ est une fonction partielle telle que, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Élément neutre : $r_1 \bullet e \downarrow$ et $r_1 \bullet e = r_1$
  - Commutativité : si $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ alors $r_2 \bullet r_1 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_2 = r_2 \bullet r_1$
  - Associativité : si $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) \downarrow$ alors $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$ et $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) = (r_1 \bullet r_2) \bullet r_3$

Dans cette définition, et dans tout le manuscrit, $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ est défini" et $r_1 \bullet r_2 \uparrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ n'est pas défini". Par ailleurs, nous pouvons remarquer que si $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$ alors $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) \downarrow$. En effet, si $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$, alors $r_3 \bullet (r_1 \bullet r_2) \downarrow$ par commutativité, d'où $(r_3 \bullet r_1) \bullet r_2 \downarrow$ par associativité, d'où $r_2 \bullet (r_3 \bullet r_1) \downarrow$, donc $(r_2 \bullet r_3) \bullet r_1 \downarrow$ et par conséquent $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$

Définition 1.1.2 (Préordre)**.** Soit R un ensemble. Une relation $\sqsubseteq \subseteq R \times R$ est un *préodre* si et seulement si, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:

- Réflexivité : $r_1 \sqsubseteq r_1$
- Transitivité : si $r_1 \sqsubseteq r_2$ et $r_2 \sqsubseteq r_3$ alors $r_1 \sqsubseteq r_3$

Définition 1.1.3 (Relation d'équivalence)**.** Soit R un ensemble. Une relation $\sim \subseteq R \times R$ est une *relation d'équivalence* si et seulement si, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:

- Réflexivité : $r_1 \sim r_1$
- Transitivité : si $r_1 \sim r_2$ et $r_2 \sim r_3$ alors $r_1 \sim r_3$
- Symétrie : si $r_1 \sim r_2$ alors $r_2 \sim r_1$

Dans le cas de BI, nous appelons *monoïde de ressources* un monoïde partiel étendu par un préordre. Dans le cas de BBI, nous désignons par *monoïde de ressources* un monoïde partiel étendu par une relation d'équivalence.

Définition 1.1.4 (Monoïde de ressources)**.** Un *monoïde de ressources* est une structure $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \lhd)$ telle que :

- $(R, \bullet, e)$ est un monoïde partiel
- $\lhd \subseteq R \times R$ est une relation qui est :
  - un préordre dans le cas où la logique considérée est BI
  - une relation d'équivalence dans le cas où la logique considérée est BBI
- Compatibilité : $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$, si $r_1 \lhd r_2$ et $r_2 \bullet r_3 \downarrow$ alors $r_1 \bullet r_3 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_3 \lhd r_2 \bullet r_3$

Nous appelons *ressource* tout élément de l'ensemble R, e la *ressource unitaire* et $\bullet$ la *composition*. Nous notons $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Nous insistons sur le fait que la relation $\lhd$ est soit un préordre dans le cas de BI, soit une relation d'équivalence dans le cas de BBI. En observant les définitions suivantes, nous remarquerons alors les liens étroits entre BI et BBI, c'est-à-dire l'équivalence des deux sémantiques à l'exception d'une propriété de symétrie concernant la relation $(\lhd)$ qu'elles considèrent.

Dans la suite de cette section, la relation $\lhd$ sera considérée comme un préordre (resp. une relation d'équivalence) dans le cas où nous considérons la logique BI (resp. BBI).

Les monoïdes de ressources que nous considérons sont parfois dits *partiels* afin d'expliciter le fait que la composition est une fonction partielle, cela en opposition à d'autres variantes des logiques où la composition est totale. De plus, ces monoïdes de ressources peuvent aussi être qualifiés de *déterministes* en opposition à d'autres variantes où la composition est une fonction de la forme $\bullet : R \times R \to \mathbb{P}(R)$. Nous invitons le lecteur à se référer à [59, 60] pour plus de détails.

Définition 1.1.5 (Interprétation)**.** Une *interprétation* est une fonction $[\![\cdot]\!] : \text{Prop} \to \mathbb{P}(R)$, satisfaisant la propriété de monotonie suivante : $\forall p \in \text{Prop}, \forall r, r' \in R$, si $r \lhd r'$ et $r \in [\![p]\!]$ alors $r' \in [\![p]\!]$.

Une interprétation peut ainsi être vue comme un moyen d'associer à une variable propositionnelle l'ensemble des ressources la satisfaisant.

Définition 1.1.6 (Modèle)**.** Un *modèle* est un triplet $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ tel que $\mathcal{R}$ est un monoïde de ressources, $[\![\cdot]\!]$ est une interprétation et $\vDash_{\mathcal{K}} \subseteq R \times \mathcal{L}$ est une *relation de forcing* définie par :

- $r \vDash_{\mathcal{K}} p$ ssi $r \in [\![p]\!]$
- $r \vDash_{\mathcal{K}} \text{I}$ ssi $e \lhd r$
- $r \vDash_{\mathcal{K}} \top$ toujours
- $r \vDash_{\mathcal{K}} \bot$ jamais
- $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi \wedge \psi$ ssi $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r \vDash_{\mathcal{K}} \psi$

- $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi \vee \psi$ ssi $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $r \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi \rightarrow \psi$ ssi $\forall r' \in R \cdot (r \sqsubset r'$ et $r' \vDash_{\mathcal{K}} \phi) \Rightarrow r' \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$ ssi $\exists r', r'' \in R \cdot r' \bullet r'' \downarrow$, $r' \bullet r'' \sqsubset r$, $r' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r'' \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$ ssi $\forall r' \in R \cdot (r \bullet r' \downarrow$ et $r' \vDash_{\mathcal{K}} \phi) \Rightarrow r \bullet r' \vDash_{\mathcal{K}} \psi$

Nous dirons qu'une ressource r *satisfait* une formule ϕ (dans un modèle $\mathcal{K}$) si et seulement si $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. De plus, nous écrirons $r \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ lorsque r ne satisfait pas ϕ dans le modèle $\mathcal{K}$. Nous terminons cette section en donnant la définition de la validité dans les deux logiques, ainsi qu'en énonçant un lemme de monotonie.

Définition 1.1.7 (Validité)**.** Un formule ϕ est *valide* dans la logique BI, noté $\vDash \phi$, si et seulement si $e \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ pour tout modèle $\mathcal{K}$.
Un formule ϕ est *valide* dans la logique BBI, aussi noté $\vDash \phi$, si et seulement si $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ pour toute ressource r de tout modèle $\mathcal{K}$.
Dans les logiques BI et BBI, la notation $\phi \vDash \psi$ signifie que pour toute ressource r de tout modèle $\mathcal{K}$, $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ implique $r \vDash_{\mathcal{K}} \psi$.

En d'autres termes, une formule est considérée comme valide dans BI si elle est satisfaite dans tout modèle par la ressource unitaire, ce que l'on pourrait vulgariser par "une formule valide est un énoncé qui est vérifié sans besoin de ressource". À l'opposé, une formule valide dans BBI est une formule qui est satisfaite par toute ressource de tout modèle.
Pour terminer cette section, nous citons un lemme de monotonie que nous illustrerons par la suite.

Lemme 1.1.8 (Monotonie)**.** Pour tout modèle $\mathcal{K}$, toutes ressources r et r', et toute formule ϕ si $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r \sqsubset r'$ alors $r' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$.

Nous concluons en indiquant que le problème de la validité dans BBI est indécidable [60] pour les modèles non déterministes, ainsi que déterministes partiels ou totaux. Concernant BI, la décidabilité et la propriété des modèles finis ont été démontrées [40].
Par ailleurs, différents systèmes de preuve ont été proposés pour ces logiques. Nous pouvons citer en particulier, un calcul des séquents et une déduction naturelle avec "bunch" [75], un calcul des séquents avec labels [51] et une méthode des tableaux avec labels [38, 40, 68, 58, 57]. Parmi ces systèmes, la méthode des tableaux avec labels semble la plus intéressante puisque d'une part la structure de bunch rend difficile l'automatisation du calcul des séquents et de la déduction naturelle, et d'autre part elle est le seul système de preuves à posséder une méthode d'extraction de contre-modèles. Nous rappelons qu'une méthode d'extraction de contre-modèles a un fort intérêt dans le domaine de la spécification et de la vérification de propriétés. En effet, fournir un contre-modèles d'une formule non-valide à un utilisateur lui permet d'obtenir de précieuses informations sur les raisons de la non-validité de la formule. Nous présenterons différentes extensions de cette méthode des tableaux dans les chapitres suivants et nous nous intéressons directement, dans la section suivante, à illustrer les modèles et l'expressivité des logiques BI et BBI.

Pour terminer, les calculs des séquents des logiques BI et BBI mettent en avant des liens avec les logiques de relevance [79, 80, 31], notamment de part l'absence de règles structurelles pour les connecteurs multiplicatifs. Ces logiques ont été proposées notamment afin de supprimer certains "paradoxes" qu'il est possible de rencontrer dans la logique classique. Par exemple, la formule $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ est valide dans la logique classique, alors qu'il est possible d'observer qu'il n'y a aucun lien entre Q et P. Par contre, cette formule n'est pas valide en logique de relevance. Les logiques BI et BBI se distinguent de ces logiques de part la présence des deux implications, une

implication disposant de règles de contraction et d'affaiblissement ($\rightarrow$) et d'une implication ne disposant pas de ces règles ($-\!\!*$).

1.2 Illustration des logiques BI et BBI

Nous illustrons à présent les sémantiques à base de monoïdes de ressources de BI et BBI, ainsi que la notion de partage et de séparation au travers différents exemples. Ces exemples se veulent simples et ont pour unique objectif de familiariser le lecteur avec l'expressivité des logiques. Le chapitre 2 présentera une sémantique à base de réseaux de Petri pour BI et pourra ainsi être vu comme une illustration plus intéressante du point de vue informatique de BI. Par ailleurs, nous insisterons aussi dans cette section sur les points communs et les différences entre les logiques BI et BBI d'une part, et ceux concernant BI et ILL d'autre part.

1.2.1 Un exemple de modélisation avec BBI

Dans cette sous-section, nous illustrons BBI sur un exemple basé sur des objets vendus dans un magasin. Nous revisiterons cet exemple du point de vue de BI dans la sous-section suivante, permettant ainsi de comparer l'expressivité des deux logiques.

Considérons un magasin vendant uniquement six types d'objets (Obj_1, Obj'_1, Obj_2, Obj'_2, Obj_3, Obj'_3). Supposons que les objets Obj_i et Obj'_i soient vendus i euros. La première étape consiste à construire un modèle sur lequel nous pourrons, grâce à BBI, exprimer différentes propriétés. Ici, nous considérons comme ressource la monnaie dont pourrait disposer un acheteur. Soit $E = \{P_{0,01}, P_{0,02}, P_{0,05}, P_{0,10}, P_{0,20}, P_{0,50}, P_1, P_2, B_5, B_{10}, B_{20}, B_{50}, B_{100}, B_{200}, B_{500}\}$, l'ensemble des pièces et billets qui constituent la monnaie Euro, où P_i (resp. B_i) représente une pièce (resp. un billet) de i euros. Nous encodons la monnaie dont dispose un acheteur par un multi-ensemble construit sur E, c'est-à-dire une fonction $M : E \rightarrow \mathbb{N}$ et nous notons $\mathfrak{M}(E)$ l'ensemble des multi-ensembles sur E. Par exemple, supposons que notre acheteur dispose d'un billet de 20 euros et de deux pièces de 2 euros, alors cela se traduit par le multi-ensemble M tel que $M(B_{20}) = 1$, $M(P_2) = 2$ et $M(\mathfrak{e}) = 0$ pour tout $\mathfrak{e} \in E \setminus \{B_{20}, P_2\}$. Par ailleurs, par souci de lisibilité, nous noterons $\{\!\{B_{20}, P_2, P_2\}\!\}$ ce multi-ensemble et nous noterons aussi $\{\!\{\}\!\}$ le multi-ensemble vide, c'est-à-dire le multi-ensemble tel que $\{\!\{\}\!\}(\mathfrak{e}) = 0$ pour tout $\mathfrak{e} \in E$.

Afin de pourvoir construire un monoïde de ressources, nous devons définir une composition et une relation d'équivalence satisfaisant la propriété de compatibilité de la Définition 1.1.4. Nous choisissons de la composition suivante :

$$(M_1 + M_2)(\mathfrak{e}) = M_1(\mathfrak{e}) + M_2(\mathfrak{e})$$

Ainsi, nous avons par exemple $\{\!\{B_{20}, P_2, P_2\}\!\} + \{\!\{B_{10}, P_2\}\!\} = \{\!\{B_{20}, B_{10}, P_2, P_2, P_2\}\!\}$, capturant que l'ajout d'un billet de 10 euros et d'une pièce de 2 euros à un multi-ensemble contenant un billet de 20 euros et deux pièce de 2 euros nous permet d'obtenir un billet de 20 euros, un autre de 10 euros et trois pièces de 2 euros.
Nous définissons une fonction $val : \mathfrak{M}(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ nous permettant d'obtenir la valeur en euros d'un multi-ensemble de pièces et de billets :

$$val(M) = \sum_{P_i \in E} i \times M(P_i) + \sum_{B_i \in E} i \times M(B_i)$$

Par exemple, $val(\{\!\{B_{20}, P_2, P_2, P_{0,02}\}\!\}) = 24,02$.
Pour finir, nous définissons la relation d'équivalence suivante, permettant de considérer comme

équivalents deux multi-ensembles de même valeurs :

$$M_1 \sim M_2 \text{ ssi } val(M_1) = val(M_2)$$

A titre d'exemple, nous avons $\{\!\{B_{20}, P_2\}\!\} \sim \{\!\{B_{10}, B_{10}, P_1, P_1\}\!\}$, représentant le fait qu'avoir un billet de 20 euros et une pièce de 2 euros est équivalent en terme de valeur à posséder deux billets de 10 euros et deux pièces de 1 euro.
Maintenant, il nous est possible de remarquer que nous avons bien obtenu un monoïde de ressources $\mathcal{R} = (\mathfrak{M}(E), +, \{\!\{\}\!\}, \sim)$ au sens de la Définition 1.1.4, vérifiant en particulier la propriété de compatibilité : si $M_1 \sim M_2$ et $M_2 + M_3 \downarrow$ alors $M_1 + M_3 \downarrow$ et $M_1 + M_3 \sim M_2 + M_3$.

La dernière étape dans la construction de notre modèle consiste à définir une interprétation. Nous choisissons de définir tout d'abord l'ensemble de variables propositionnelles Prop $= \{O_1, O_1', O_2, O_2', O_3, O_3'\}$, notre idée étant que O_i (resp. O_i') signifie "le multi-ensemble de pièces et billets que nous considérons a une valeur correspondant exactement [1] à la valeur de l'objet Obj_i (resp. Obj_i')". Nous définissons alors l'interprétation suivante :

$$[\![O_i]\!] = [\![O_i']\!] = \{M \in \mathfrak{M}(E) \mid val(M) = i\}$$

Ainsi, nous avons $\{\!\{P_1, P_1\}\!\} \in [\![O_2]\!]$ et $\{\!\{P_1, P_1, P_{0,10}\}\!\} \notin [\![O_2]\!]$ puisque deux pièces de 1 euro correspondent exactement à la valeur de l'objet Obj_2 (vendu 2 euros) alors que deux pièces de 1 euro et une pièce de 10 cents ne correspondent pas exactement à la valeur de Obj_2. Nous remarquons que l'interprétation que nous venons de définir satisfait la Définition 1.1.5, en particulier la propriété de monotonie.

Ayant défini un monoïde de ressources $\mathcal{R} = (\mathfrak{M}(E), +, \{\!\{\}\!\}, \sim)$ et une interprétation $[\![\cdot]\!]$, nous obtenons un modèle $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, sur lequel il est maintenant possible d'exprimer différentes propriétés à l'aide de la logique BBI.
Faisons l'hypothèse que nous disposons d'une pièce de 1 euro et de deux de 50 cents. Puisque $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \in [\![O_2]\!]$ et $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \notin [\![O_1]\!]$, alors nous avons $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2$ et $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \nvDash_{\mathcal{K}} O_1$, exprimant ainsi qu'une pièce de 1 euro et deux de 50 cents correspondent exactement à la valeur de l'objet Obj_2, mais ne correspondent pas exactement à la valeur de l'objet Obj_1.
Concernant la formule atomique I, nous avons $M \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$ ssi $\{\!\{\}\!\} \sim M$. Autrement dit, cette formule exprime que l'acheteur ne dispose pas de monnaie.
La compréhension des constantes additives $\top$ et $\bot$ ne posant pas de difficulté, nous illustrons à présent les deux conjonctions. Comme $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2$ et $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2'$ alors $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2 \wedge O_2'$. Ainsi, $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2 \wedge O_2'$ exprime qu'avec une pièce de 1 euro et deux de 50 cents, nous avons exactement la somme d'argent nécessaire pour acheter l'objet Obj_2 et ces pièces correspondent aussi exactement à la valeur de l'objet Obj_2' (coûtant aussi 2 euros). Comme nous pouvons le remarquer, le connecteur $\wedge$ exprime une propriété de *partage* : la ressource $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\}$ partage la propriété O_2 et la propriété O_2'. Nous insistons sur le fait que $O_2 \wedge O_2'$ n'exprime pas que la monnaie considérée correspond exactement à la valeur d'achat des deux objets "en même temps". Pour exprimer une telle propriété il nous faut alors considérer l'autre conjonction, à savoir $*$. Dans ce cas, comme $\{\!\{P_2\}\!\} + \{\!\{P_2\}\!\} \sim \{\!\{P_2, P_2\}\!\}$ et $\{\!\{P_2\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2$ et $\{\!\{P_2\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2'$, alors nous avons, par définition, $\{\!\{P_2, P_2\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2 * O_2'$ capturant ainsi que deux pièces de 2 euros correspondent exactement à la valeur d'achat simultané des objets Obj_2 et Obj_2'. Cette fois, nous avons exprimé une propriété de *séparation* puisqu'il nous a

1. Le mot *exactement* a ici toute son importance et marque la différence d'expressivité entre BI et BBI, comme nous le verrons.

fallu séparer une ressource ($\{\!\{P_2, P_2\}\!\}$) en sous-ressources ($\{\!\{P_2\}\!\} + \{\!\{P_2\}\!\}$).
Nous présentons maintenant les deux implications. L'implication additive $\rightarrow$ exprime l'idée suivante : $M \vDash_{\mathcal{K}} \phi \rightarrow \psi$ indique que n'importe quel multi-ensemble de pièces et billets, équivalent en termes de valeur à M et satisfaisant ϕ, satisfait ψ. Remarquant que Obj_3 et Obj'_3 ont le même prix, nous avons alors par exemple, pour tout $M \in \mathfrak{M}(E)$, $M \vDash_{\mathcal{K}} O_3 \rightarrow O'_3$, capturant ainsi que si nous avons exactement la quantité de monnaie pour acheter Obj_3, alors nous disposons d'exactement de la quantité de monnaie pour acheter Obj'_3. Concernant l'implication multiplicative, la notion capturée est la suivante : $M \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$ indique que si nous rajoutons à M n'importe quelle ressource (monnaie) satisfaisant ϕ alors nous obtenons une ressource satisfaisant ψ. Par exemple, $\{\!\{P_1\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2 \mathrel{-\!\!*} O_3$. En effet, en ayant 1 euro et en nous donnant exactement la somme d'argent pour acheter Obj_2, alors nous obtenons au total exactement la somme d'argent pour acheter Obj_3.
Nous n'avons pas présenté la disjonction additive : $M \vDash_{\mathcal{K}} O_2 \vee O_3$ indique que la monnaie M correspond exactement à la valeur de l'objet Obj_2 ($M \vDash_{\mathcal{K}} O_2$) ou exactement à la valeur de l'objet Obj_3 ($M \vDash_{\mathcal{K}} O_3$). Ainsi, $\{\!\{P_2\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2 \vee O_3$ puisque $\{\!\{P_2\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2$, mais $\{\!\{P_1\}\!\} \nvDash_{\mathcal{K}} O_2 \vee O_3$ parce que $\{\!\{P_1\}\!\} \nvDash_{\mathcal{K}} O_2$ et $\{\!\{P_1\}\!\} \nvDash_{\mathcal{K}} O_3$.
Nous noterons qu'il est possible d'exprimer des propriétés plus complexes en mélangeant les différents connecteurs. Ainsi, nous pouvons exprimer que sans monnaie, si nous rajoutons exactement la somme d'argent correspondant à la valeur d'achat de l'objet Obj_3, alors nous obtenons exactement la monnaie permettant d'acheter à la fois Obj_1 et Obj_2, et de plus cette quantité de monnaie correspond aussi exactement à la valeur d'achat de Obj_1 en trois exemplaires :

$$\{\!\{\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_3 \mathrel{-\!\!*} ((O_1 * O_2) \wedge (O_1 * O_1 * O_1))$$

Pour conclure, nous pouvons remarquer que le Lemme 1.1.8 de monotonie prend tout son sens sur cet exemple : comme $\{\!\{P_2\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_1 * O'_1$ et $\{\!\{P_2\}\!\} \sim \{\!\{P_1, P_1\}\!\}$ alors $\{\!\{P_1, P_1\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_1 * O'_1$. Autrement dit : "comme une pièce de 2 euros correspond exactement à la valeur d'achat simultané de Obj_1 et Obj'_1 et comme une pièce de 2 euros est équivalente à deux pièces de 1 euro, alors ces deux pièces de 1 euro correspondent aussi exactement à la valeur d'achat simultané de Obj_1 et Obj'_1".

1.2.2 Exemple de modélisation revisité avec BI

Dans cette sous-section, nous revisitons l'exemple précédent, mais cette fois du point de vue de la logique BI. Comme nous l'avons vu, la différence entre BI et BBI se situe dans la définition de la relation de validité, mais aussi et surtout au niveau des relations sur les ressources. Concernant BI, cette relation est seulement un préordre, ne vérifiant alors pas nécessairement la propriété de symétrie.

Nous proposons alors de construire un modèle en considérant maintenant le préordre suivant :

$$M_1 \sqsubseteq M_2 \text{ ssi } val(M_1) \leqslant val(M_2)$$

Ainsi, $M_1 \sqsubseteq M_2$ signifie que la monnaie M_2 est supérieure ou égale, en terme de valeur, à la monnaie M_1.
Nous pouvons remarquer que nous devons aussi redéfinir l'interprétation de l'exemple précédent puisque, lorsque nous considérons cette nouvelle relation, celle-ci ne satisfait plus la propriété de monotonie de la Définition 1.1.5 : en effet, $\{\!\{P_1\}\!\} \sqsubseteq \{\!\{P_2\}\!\}$ et $\{\!\{P_1\}\!\} \in [\![O_1]\!]$, or $\{\!\{P_2\}\!\} \notin [\![O_1]\!]$. Il nous faut donc choisir une interprétation telle que si une certaine quantité de monnaie satisfait

une variable propositionnelle, alors une quantité de monnaie plus grande doit aussi satisfaire cette même variable propositionnelle. Nous choisissons alors la définition suivante :

$$[\![O_i]\!] = [\![O'_i]\!] = \{M \in \mathfrak{M}(E) \mid val(M) \geqslant i\}$$

permettant ainsi à O_i (resp. O'_i) d'exprimer : "le multi-ensemble de pièces et billets que nous considérons a une valeur supérieure ou égale à la valeur de l'objet Obj_i (resp. Obj'_i)". Ainsi, dans le cadre de BI, $\mathcal{R} = (\mathfrak{M}(E), +, \{\!\{\}\!\}, \sqsubseteq)$ est un monoïde de ressources, nous permettant ainsi d'obtenir, en tenant compte de la nouvelle définition de l'interprétation et du préordre, un modèle $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$.

Nous nous intéressons maintenant à l'expressivité de BI sur le modèle que nous venons de construire. Comme $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \in [\![O_1]\!]$ et $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \notin [\![O_3]\!]$, alors nous avons $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_1$ et $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \nvDash_{\mathcal{K}} O_3$. Ceci exprime qu'une pièce de 1 euro et deux pièces de 50 cents sont suffisantes pour acheter l'objet Obj_1, mais pas suffisantes pour acheter Obj_3.
Pour finir, nous présentons la conjonction multiplicative. Un multi-ensemble de monnaie M satisfait $\phi * \psi$ si et seulement si il existe deux multi-ensembles M' et M'' tel que $M' + M''$ est défini et $M' + M'' \sqsubseteq M$ et $M' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $M'' \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Ainsi, comme $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_1$, $\{\!\{P_2\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_2$ et $\{\!\{P_1, P_{0,50}, P_{0,50}\}\!\} + \{\!\{P_2\}\!\} \sqsubseteq \{\!\{B_{10}\}\!\}$, alors $\{\!\{B_{10}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} O_1 * O_2$, capturant ainsi l'idée qu'un billet de 10 euros est suffisant pour acheter en même temps les objets Obj_1 et Obj_2.

Du point de vue de BI, le Lemme 1.1.8 de monotonie capture que si un multi-ensemble de monnaie M est suffisant pour acheter différents objets ($M \vDash_{\mathcal{K}} \phi$) alors plus de monnaie ($M \sqsubseteq M'$) permet aussi d'acheter ces mêmes objets ($M' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$).

En conclusion, nous pouvons observer sur nos exemples la différence d'expressivité entre BI et BBI. Du point de vue de BBI, $M \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ capture une propriété ϕ pouvant être réalisée avec exactement (la totalité) de la ressource M. De l'autre côté, pour BI, $M \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ exprime que la ressource M est suffisante pour réaliser la propriété ϕ.

1.2.3 Partage et séparation

Comme nous l'avons vu dans les précédents exemples, BI et BBI permettent de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des ressources, tout comme le permet aussi ILL [43, 15]. Cette particularité, héritée par BI et BBI de ILL, provient en particulier des connecteurs multiplicatifs. La capacité de ces connecteurs multiplicatifs à capturer la notion de ressource est la conséquence d'absence de règle de contraction et d'affaiblissement [82] les concernant, ayant pour effet : $A \nvdash A * A$ et $A * B \nvdash A$. Ceci pourrait être traduit respectivement par "avoir une ressource A n'a pas pour conséquence logique d'avoir deux ressources A" et par "avoir une ressource A et une ressource B n'a pas pour conséquence logique d'avoir uniquement une seule ressource A". Cela permet en particulier au connecteur $*$ d'avoir la capacité de "compter" les ressources, puisque A (une ressource A) n'est pas équivalent à $A * A$ (deux ressources A). Nous noterons que le connecteur $\wedge$ ne dispose pas de cette propriété, en effet A est équivalent à $A \wedge A$. En conséquence, nous noterons qu'il y a, à première vue, des liens étroits entre BI, ainsi que BBI, et ILL.

Malgré cela, cette comparaison s'arrête ici. Dans la logique linéaire, les variables propositionnelles sont vues comme étant des ressources, tandis que dans BI et BBI les variables propositionnelles sont vues comme des propriétés que l'on exprime sur des ressources. Gardant à l'esprit qu'une ressource est une entité pouvant être composée ou décomposée, BI et BBI permettent donc d'exprimer des propriétés locales (c'est-à-dire sur une sous-entité) ou globales (sur l'entité

entière). Ceci nous amène à la notion de partage et de séparation, qui est le cœur de ces deux logiques. Nous illustrons cette notion au travers des deux conjonctions de BBI.

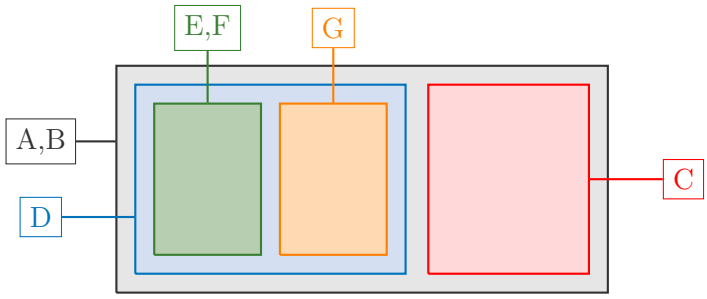


FIGURE 1 – Illustration de propriétés de partage et de séparation

Sur la Figure 1, nous pouvons observer différentes zones de couleurs. Nous avons une zone noire qui contient une zone bleue et une autre rouge. La zone bleue contient, quant à elle, une zone verte et une orange. Puisque les zones de couleurs peuvent être décomposées, comme par exemple la zone noire qui peut se décomposer en une zone bleue et une zone rouge, alors ces zones sont des ressources, tel que nous l'avons défini. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que chacune de ces ressources possèdent une étiquette (A, B, C, D, E, F ou G). Considérons ces étiquettes comme des propriétés vérifiées par les différentes zones. Il nous est alors possible d'illustrer plus en détail ce que nous appelons partage et séparation.

Concernant la notion de partage, nous pouvons observer, par exemple, que la ressource noire a la propriété A et a aussi la propriété B : autrement dit, la ressource noire partage la propriété A et la propriété B, ce qui s'exprime par $A \wedge B$. Concernant la notion de séparation, comme la ressource noire se décompose en une ressource bleue ayant la propriété D et une ressource rouge ayant la propriété C, alors nous obtenons une illustration d'une propriété de séparation : la ressource noire se sépare en une ressource satisfaisant D et une autre satisfaisant C, ce qui s'exprime par $D * C$. Nous pouvons remarquer qu'en réalité la ressource noire partage trois propriétés, à savoir A et B, mais aussi le fait de pouvoir se décomposer en une ressource satisfaisant D et une autre satisfaisant C. Cela s'exprime par la formule $A \wedge B \wedge (D * C)$. En appliquant les mêmes principes à la ressource bleue, nous obtenons ainsi la formule suivante, décrivant l'organisation des ressources de la Figure 1 : $A \wedge B \wedge ((D \wedge ((E \wedge F) * G)) * C)$.

Nous comprenons alors bien que cette notion de partage et de séparation est une notion très générique, puisque ces zones de couleur peuvent en réalité être des zones de n'importe quel modèle. Cette généricité a alors permis à BI et BBI d'être vus comme des noyaux logiques, qui, par extension, ont donné naissance aux logiques dites de séparation, où les propriétés de partage et de séparation sont exprimées sur : des zones mémoires [53, 70, 81, 39], des zones de confiance [4, 5], des arbres de ressources [17], des "layered graphs" [21], des processus manipulant des ressources [76, 24, 23, 77], etc... Ce point illustre alors la différence fondamentale entre BI, d'une part, et ILL d'autre part : ILL est une logique focalisée sur la consommation et la production de ressources, alors que BI et BBI sont des logiques axées sur le partage et la séparation de ressources.

Pour finir, nous pouvons citer une dernière différence entre ces deux familles de logiques, à savoir que dans BI et BBI la conjonction est distributive sur la disjonction, c'est-à-dire que $A \wedge (B \vee C)$ est équivalent sémantiquement à $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, alors que ceci n'est pas le cas dans ILL. Ce dernier point semble tout à fait cohérent avec la philosophie de BI et BBI. En effet, considérant leurs variables propositionnelles comme des propriétés de ressources, il devient alors nécessaire que pour une ressource satisfaire A et satisfaire aussi B ou bien C, soit équivalent au

fait de satisfaire A et B, ou bien satisfaire A et C.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les logiques BI et BBI au travers de leur sémantique à base de monoïdes de ressources (partiels). Nous avons illustré ces logiques et leur expressivité en donnant différents exemples et nous avons insisté sur la notion de ressource que permettent de capturer ces logiques. Nous avons aussi illustré le partage et de séparation qui est le cœur de BI et BBI.

Ayant présenté le fort intérêt en termes de modélisation et d'expressivité de ces deux logiques, nous proposons maintenant d'aborder notre sujet d'étude, à savoir l'étude logique de la dynamique des ressources. Pour cela, nous proposons, dans le chapitre suivant, d'étudier les formes de dynamiques de ressources pouvant être capturées par la logique BI. Nous discuterons aussi des limites atteintes, nous amenant alors à proposer diverses extensions modales dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Dynamique des ressources dans la logique BI

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les formes de dynamique pouvant être capturées et exprimées par la logique BI. En effet, comme nous avons pu l'observer dans les exemples présentés dans le chapitre précédent, BI semble ne pas permettre à première vue de capturer une forme de dynamique, c'est-à-dire de modéliser et exprimer des propriétés sur un système manipulant des ressources.

Parmi les modèles proposés à ce jour et capturant une forme de dynamique, nous pouvons citer les réseaux de Petri qui offrent l'intérêt de permettre de modéliser des systèmes complexes, tout en étant des modèles simples à étudier, pédagogiques et répandus. Ces particularités ont abouti à la proposition de diverses sémantiques à base de réseaux de Petri dans différents domaines, comme par exemple BPEL (Business Process Execution Language) pour les Web Services [84, 62] ou le π-calculus [30]. Ainsi, en remarquant que les places d'un réseau de Petri capturent la notion de *ressource* et que les transitions capturent la notion de *consommation* et *production* de ressources, la recherche d'une sémantique à base de réseaux de Petri pour BI est alors centrale pour notre étude de la dynamique des ressources au sein des logiques des séparation. Plus précisément, une telle étude nous permettrait de répondre à la question de savoir si BI est capable de capturer une forme de dynamique de ressources, mais aussi et surtout d'en détecter les limites et de nous guider vers la proposition de nouvelles extensions de BI.

La proposition de sémantique à base de réseaux de Petri pour une logique de ressources n'est pas une idée nouvelle. Nous pouvons citer des travaux similaires concernant la Logique Linéaire Intuitionniste (ILL) [43] dans laquelle des liens entre satisfaisabilité d'une formule et accessibilité entre deux marquages (donc dynamique) dans de tels réseaux ont été montrés [33, 34]. Plus précisément, les places d'un réseau de Petri ont été encodés comme des formules atomiques, les marquages comme un produit tenseur ($\otimes$) de formule atomiques (noté $\widehat{M}$) et l'accessibilité d'un marquage M_1 vers un marquage M_2 est capturée comme la satisfaisabilité de la formule $\widehat{M_1} \multimap \widehat{M_2}$. Mais, les modèles que les réseaux de Petri décrivent sont incomplets. Une des raisons à cela est la non distributivité de la conjonction ($\&$) sur la disjonction ($\oplus$) dans ILL, alors que les réseaux de Petri possèdent naturellement cette propriété de distributivité. Dans le but d'obtenir un résultat de complétude sur le langage entier de ILL, d'autres sémantiques ont été proposées [52, 37], utilisant des définitions de clôture différentes de celle proposée pour la construction des quantales, qui sont au cœur de la sémantique de ILL. Nous noterons que ces nouvelles constructions ont

eût pour effet de changer l'interprétation de certains connecteurs, notamment de la disjonction [52, 37].

Comme nous avons pu le remarquer dans le chapitre précédent, BI possède la propriété de distributivité de la conjonction ($\wedge$) sur la disjonction ($\vee$). Cela fait donc de BI un candidat, ainsi qu'un substitut à ILL, idéal en vue de proposer une sémantique à base de réseaux de Petri. Une étude a d'ailleurs été menée [71], mais n'a pu aboutir à un résultat de complétude. Ceci a été montré par le fait que la formule $((p \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot \wedge (q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot) \mathrel{-\!\!*} ((p * q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot)$, qui n'est pas valide dans BI, est valide dans la sémantique proposée.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche en introduisant de nouveaux réseaux de Petri, nommés *réseaux de Petri à inconsistance* et notés β-PN. Comme nous le verrons, ceux-ci vont nous permettre d'obtenir une méthode d'extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri pour BI, ce qui n'était pas possible en s'appuyant sur la sémantique proposée précédemment pour BI. De plus, ces réseaux vont aussi nous permettre d'obtenir une sémantique à base de réseaux de Petri équivalente, en termes de relation de validité, à la sémantique de BI.

Après avoir défini ces nouveaux réseaux de Petri, nous présentons une nouvelle sémantique à base de β-PN pour BI. Ensuite, nous définissons une méthode d'extraction de contre-modèles à base de β-PN pour BI, nous montrons l'adéquation de notre nouvelle sémantique par une approche différente de celle réalisée précédemment sur BI [71], c'est-à-dire purement sémantique et basée sur une technique de transformation de contre-modèles. Pour finir nous montrons des liens entre accessibilité et satisfaisabilité dans ces réseaux de Petri et nous discuterons des limites dans la dynamique capturée par BI.

2.1 Réseaux de Petri à inconsistance

Les réseaux de Petri sont des modèles où les ressources sont représentées par des *places* et leur consommation et production sont capturées par des *transitions*. La quantité de ressources disponibles est encodée par des multi-ensembles. Nous rappelons qu'un multi-ensemble sur un ensemble P est une fonction $M : P \to \mathbb{N}$. Nous notons aussi $\mathfrak{M}(P)$ l'ensemble des multi-ensembles sur P. Nous appelons *marquage* un élément de $\mathfrak{M}(P)$, autrement dit un multi-ensemble de places. Nous dirons qu'un marquage M_1 est un *sous-marquage* de M_2 (noté $M_1 \leq M_2$) si et seulement si $M_1(p) \leqslant M_2(p)$ pour tout $p \in P$. Par ailleurs, nous utilisons la notation $\{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\}$, pour expliciter les marquages. Par exemple, $M = \{\!\{a, a, b\}\!\}$ est le marquage tel que $M(a) = 2$, $M(b) = 1$ et $M(p) = 0$ pour tout $p \in P \setminus \{a, b\}$. Pour finir $\{\!\{\}\!\}$ est le marquage vide, c'est-à-dire le marquage tel que $\{\!\{\}\!\}(p) = 0$ pour tout $p \in P$.

Un définissions des réseaux de Petri est donnée à la Sous-Section 5.2.1. Nous focalisons à présent directement sur ces nouveaux réseaux de Petri, nommée *réseaux de Petri à inconsistance* et notés β-PN.

Définition 2.1.1 (Réseau de Petri à inconsistance)**.** Un *réseau de Petri à inconsistance* (β-PN) est un 6-uplet $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ où P est un ensemble de *places*, T est un ensemble de *transitions*, $\mathbb{M}^c(P) \subseteq \mathfrak{M}(P)$ est un ensemble de marquages appelés *marquages consistants*, satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\forall M \in \mathbb{M}^c(P) \cdot \forall N \in \mathfrak{M}(P) \cdot N \leq M \Rightarrow N \in \mathbb{M}^c(P) \quad (ML)$$
$$\{\!\{\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P) \quad (ZM)$$

De plus, $\beta \notin \mathfrak{M}(P)$ est un élément particulier appelé *marquage inconsistant* et *pre* et *post* sont deux fonctions $T \to \mathbb{M}^c(P)$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que malgré que β soit appelé marquage (inconsistant), ce n'est pas une fonction $P \to \mathbb{N}$ ($\beta \notin \mathfrak{M}(P)$). La propriété (ML) représente ce que nous appelons la *linéarité de la mémoire*, signifiant que si un marquage est consistant alors tout ses sous-marquages le sont aussi. Comme nous le verrons, la propriété (ML) a pour conséquence de rendre l'addition de marquages d'un β-PN associative. Par ailleurs, la propriété (ZM), appelée *mémoire zéro*, capture le fait que le marquage vide est toujours consistant.
Dans ce chapitre, lorsque nous noterons un marquage M en utilisant les notations $\{\!\{...\}\!\}$, il sera supposé que M est un marquage consistant ($M \in \mathbb{M}^c(P)$) et donc que $M \neq \beta$. Pour finir, nous notons l'ensemble de tous les marquages d'un β-PN $\mathbb{M}(P) = \mathbb{M}^c(P) \cup \{\beta\}$ et nous définissons l'addition de marquages ainsi :

$$M + N = \begin{cases} O & \text{tel que } O \in \mathbb{M}^c(P) \text{ et } M(p) + N(p) = O(p) \text{ pour tout } p \in P \\ \beta & \text{si un tel } O \text{ n'existe pas} \end{cases}$$

Nous noterons que cette définition implique que si $M + N \neq \beta$ alors $M \neq \beta$ et $N \neq \beta$. De plus, pour tout marquage M, $\beta + M = \beta$ (nous rappelons que $\beta(p)$ n'est pas défini).

Définition 2.1.2 (Relation de transition)**.** La *relation de transition* $\to \subseteq \mathbb{M}(P) \times \mathbb{M}(P)$ est définie par : $M \to N$ ssi $M = \beta$ ou $(\exists t \in T \cdot \exists M' \in \mathbb{M}^c(P) \cdot M = pre(t) + M'$ et $N = post(t) + M')$.

Nous remarquons que la relation de transition dans un β-PN est identique à celle d'un réseau de Petri, à l'exception que pour tout marquage M, nous avons $\beta \to M$. Cette propriété est appelée *perte de contrôle de l'exécution* et signifie que si le marquage courant d'un β-PN est inconsistant (autrement dit, est le marquage β), alors tout marquage devient accessible. Pour finir, nous définissons la relation $\twoheadrightarrow$ comme étant la clôture réflexive et transitive de la relation $\to$. Par abus de langage, nous appellerons *transition* aussi bien les éléments de T que les paires $M \to N$ puisque que ces paires représentent des transitions du système modélisé par le β-PN.

Proposition 2.1.3. Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Pour tous marquages M_1, M_2, $M_3 \in \mathbb{M}(P)$, si $M_1 \to M_2$ alors $M_1 + M_3 \to M_2 + M_3$.

Preuve. Supposons que $M_1 \to M_2$. Il y a deux cas :
- Cas $M_1 + M_3 = \beta$:
  Par définition, nous avons $\beta \to M_2 + M_3$ et donc $M_1 + M_3 \to M_2 + M_3$.
- Cas $M_1 + M_3 \neq \beta$:
  Comme $M_1 \to M_2$ alors il existe $t \in T$ et $M' \in \mathbb{M}^c(P)$ tels que $M_1 = pre(t) + M'$ et $M_2 = post(t) + M'$. Par conséquent, $M_1 + M_3 = pre(t) + M' + M_3$ et $M_2 + M_3 = post(t) + M' + M_3$. Posons $M'' = M' + M_3$. Nous remarquons que $M'' \neq \beta$ et donc $M'' \in \mathbb{M}^c(P)$, sinon nous aurions $M_1 + M_3 = pre(t) + M' + M_3 = pre(t) + M'' = pre(t) + \beta = \beta$, ce qui serait incompatible avec $M_1 + M_3 \neq \beta$. Donc, il existe $t \in T$ et $M'' \in \mathbb{M}^c(P)$ tels que $M_1 + M_3 = pre(t) + M''$ et $M_2 + M_3 = post(t) + M''$. En conclusion, nous avons par définition $M_1 + M_3 \to M_2 + M_3$.

□

Corollaire 2.1.4. Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Pour tous marquages M_1, M_2, $M_3 \in \mathbb{M}(P)$, si $M_1 \twoheadrightarrow M_2$ alors $M_1 + M_3 \twoheadrightarrow M_2 + M_3$.

Preuve. Comme $M_1 \twoheadrightarrow M_2$ alors, par définition, il y a deux cas :
- Cas $M_1 = M_2$:
  Dans ce cas, nous avons alors $M_1 + M_3 = M_2 + M_3$. Donc $M_1 + M_3 \twoheadrightarrow M_2 + M_3$, par clôture réflexive.

- Cas où il existe des marquages $N_1, ..., N_i \in \mathbb{M}(P)$ tels que $M_1 \to N_1 \to ... \to N_i \to M_2$. Par la Proposition 2.1.3, nous avons alors $M_1 + M_3 \to N_1 + M_3 \to ... \to N_n + M_3 \to M_2 + M_3$. Finalement, par clôture transitive, nous avons $M_1 + M_3 \twoheadrightarrow M_2 + M_3$.

□

Proposition 2.1.5. Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Pour tout marquage $M \in \mathbb{M}(P)$, nous avons $\beta \twoheadrightarrow M$.

Preuve. Par définition, nous avons $\beta \to M$. Ainsi, toujours par définition, $\beta \twoheadrightarrow M$. □

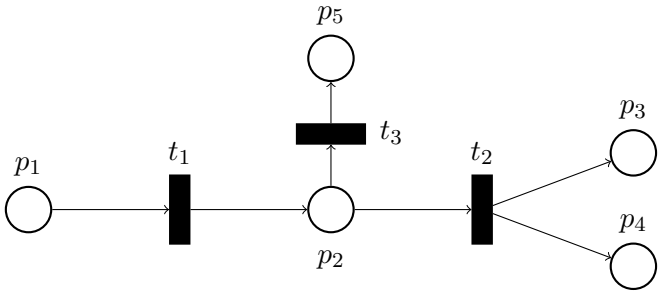


FIGURE 2 – Exemple de réseau de Petri à inconsistance (β-PN)

La Figure 2 présente un exemple de réseau de Petri à inconsistance. Dans cet exemple, nous pouvons observer que ce réseau possède cinq places ($P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$) et trois transitions ($T = \{t_1, t_2, t_3\}$). Nous supposons que $\mathbb{M}^c(P) = \{M \mid M(p_5) \leqslant 2\}$. Habituellement, la multiplicité des places d'un marquage est représentée par des *jetons*. Ainsi, le marquage $\{\!\{p_1, p_1, p_5\}\!\}$ peut être représenté par deux jetons à la place p_1 et un jeton à la place p_5. De ce fait, comme nous avons choisi $\mathbb{M}^c(P) = \{M \mid M(p_5) \leqslant 2\}$ alors nous pouvons dire qu'un marquage est consistant si et seulement s'il contient au plus deux jetons à la place p_5. Par conséquent, nous ne sommes pas autorisés dans cet exemple à écrire $\{\!\{p_1, p_2, p_5, p_5, p_5\}\!\}$, parce que ce marquage n'est pas consistant : celui-ci, ainsi que tous les marquages inconsistants sont notés β. Pour finir, nous pouvons facilement vérifier que $\mathbb{M}^c(P)$ satisfait les propriétés (ML) et (ZM) de la Définition 2.1.1.
Concernant l'addition de marquage, nous avons $\{\!\{p_1, p_2\}\!\} + \{\!\{p_1, p_3, p_5\}\!\} = \{\!\{p_1, p_1, p_2, p_3, p_5\}\!\}$, $\{\!\{p_1, p_5\}\!\} + \{\!\{p_5, p_5\}\!\} = \beta$ et $\beta + \{\!\{p_1\}\!\} = \beta$. Du point de vue des transitions, nous avons par exemple $pre(t_2) = \{\!\{p_2\}\!\}$ et $post(t_2) = \{\!\{p_3, p_4\}\!\}$. Comme $\{\!\{p_1\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$, $\{\!\{p_1, p_2\}\!\} = pre(t_2) + \{\!\{p_1\}\!\}$ et $\{\!\{p_1, p_3, p_4\}\!\} = post(t_2) + \{\!\{p_1\}\!\}$, nous avons alors $\{\!\{p_1, p_2\}\!\} \to \{\!\{p_1, p_3, p_4\}\!\}$, ce qui pourrait se traduire par : partant du marquage $\{\!\{p_1, p_2\}\!\}$ et en activant une transition (ici t_2) nous pouvons atteindre le marquage $\{\!\{p_1, p_3, p_4\}\!\}$. Afin d'illustrer le marquage inconsistant, nous pouvons observer qu'en activant uniquement la transition t_3, nous avons $\{\!\{p_2, p_2, p_2\}\!\} \to \{\!\{p_2, p_2, p_5\}\!\} \to \{\!\{p_2, p_5, p_5\}\!\} \to \beta$. En effet, $\{\!\{p_5, p_5, p_5\}\!\}$ n'est pas un marquage consistant et nous n'autorisons alors pas cette notation. De plus, comme β peut atteindre n'importe quel marquage, nous avons alors par exemple $\beta \to \{\!\{\}\!\}$. Finalement, comme $\{\!\{p_2, p_2, p_2\}\!\} \to \{\!\{p_2, p_2, p_5\}\!\} \to \{\!\{p_2, p_5, p_5\}\!\} \to \beta \to \{\!\{\}\!\}$ alors nous avons $\{\!\{p_2, p_2, p_2\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$, qui exprime qu'il est possible à partir du marquage $\{\!\{p_2, p_2, p_2\}\!\}$ d'exécuter une succession de transitions permettant d'atteindre le marquage vide $\{\!\{\}\!\}$.

2.2 Une nouvelle sémantique à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI

Nous présentons à présent une nouvelle sémantique à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI. Comme nous le verrons, les β-PN vont nous permettre d'obtenir un résultat de correction et de complétude, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles à base de β-PN pour BI. Nous rappelons que nous notons $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, autrement dit l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Définition 2.2.1 (β-interprétation)**.** Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Une *β-interprétation* est une fonction $i : Prop \to \mathbb{P}(\mathbb{M}(P))$, telle que, pour tout $p \in Prop$:
- Monotonie : Si $M \in i(p)$ et $N \twoheadrightarrow M$ alors $N \in i(p)$
- Inconsistance : $\beta \in i(p)$

Définition 2.2.2 (β-modèle)**.** Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Soit i une β-interprétation. Un *β-modèle* est un triplet $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ où $\Vdash_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathbb{M}(P) \times \mathcal{L}$ est la relation de forcing définie par :
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} p$ ssi $M \in i(p)$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \top$ toujours
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$ ssi $M \twoheadrightarrow \beta$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$ ssi $M \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \wedge \psi$ ssi $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$ et $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \vee \psi$ ssi $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$ ou $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \to \psi$ ssi $\forall M' \in \mathbb{M}(P) \cdot (M' \twoheadrightarrow M$ et $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi) \Rightarrow M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi * \psi$ ssi $\exists M', M'' \in \mathbb{M}(P) \cdot M \twoheadrightarrow M' + M''$, $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$ et $M'' \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$ ssi $\forall M' \in \mathbb{M}(P) \cdot M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \Rightarrow M + M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$

Définition 2.2.3 (Validité)**.** Un formule ϕ est *valide* (noté $\Vdash \phi$) ssi $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$ pour tout β-modèle $\mathfrak{P}$.

Avant de présenter un exemple, nous donnons quelques propriétés sur les réseaux de Petri à inconsistance.

Lemme 2.2.4 (Monotonie)**.** Si $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$ et $N \twoheadrightarrow M$ alors $N \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$.

Preuve. Par induction structurelle sur la formule ϕ.
- Cas de base :
  - Cas $\phi = p$ ($p \in Prop$) :
    Par définition, $M \in i(p)$. Par la monotonie des β-interprétations, comme $N \twoheadrightarrow M$ alors nous avons $N \in i(p)$. Donc $N \Vdash_{\mathfrak{P}} p$.
  - Cas $\phi = \top$:
    Par définition, $N \Vdash_{\mathfrak{P}} \top$.
  - Cas $\phi = \bot$:
    Par définition, $M \twoheadrightarrow \beta$. Donc, par transitivité, $N \twoheadrightarrow \beta$. Par conséquent, $N \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$.
  - Cas $\phi = \mathrm{I}$:
    Par définition, $M \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. Donc, par transitivité, $N \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. D'où $N \Vdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$.
- Cas inductifs : nous supposons que le lemme est vérifié pour toutes formules A et B (HI).
  - Cas $\phi = A \wedge B$:
    Par définition, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par (HI), $N \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $N \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Donc $N \Vdash_{\mathfrak{P}} A \wedge B$.

- Cas $\phi = A \vee B$:
  Par définition, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ ou $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par (HI), $N \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ ou $N \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Donc $N \Vdash_{\mathfrak{P}} A \vee B$.
- Cas $\phi = A \to B$:
  Comme $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$ alors pour tout marquage M' tel que $M' \twoheadrightarrow M$ et $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$, nous avons $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Considérons un marquage N' tel que $N' \twoheadrightarrow N$ et $N' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Par transitivité, $N' \twoheadrightarrow M$. Comme $N' \twoheadrightarrow M$ et $N' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$, alors $N' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par conséquent, nous avons $N \Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$.
- Cas $\phi = A * B$:
  Par définition, il existe deux marquages M_1 et M_2 tels que $M \twoheadrightarrow M_1 + M_2$ et $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $M_2 \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par transitivité, nous avons $N \twoheadrightarrow M_1 + M_2$. Ainsi, nous avons bien $N \Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$.
- Cas $\phi = A \mathrel{-\!\!*} B$:
  Par définition, pour tout marquage M' tel que $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$, nous avons $M + M' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Considérons un marquage N' tel que $N' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Alors $M + N' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. De plus, comme $N \twoheadrightarrow M$ alors, par le Corollaire 2.1.4, $N + N' \twoheadrightarrow M + N'$. Donc, par (HI), nous avons $N + N' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par conséquent, nous avons bien $N \Vdash_{\mathfrak{P}} A \mathrel{-\!\!*} B$.

□

Lemme 2.2.5 (Inconsistance)**.** Pour toute formule ϕ, nous avons $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$.

Preuve. Par induction structurelle sur la formule ϕ.

- Cas de base :
  - Cas $\phi = p$ ($p \in Prop$) :
    Par la propriété d'inconsistance des β-interprétations, $\beta \in i(p)$. Donc, nous avons $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} p$.
  - Cas $\phi = \top$:
    Par définition, $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \top$.
  - Cas $\phi = \bot$:
    Par réflexivité, $\beta \twoheadrightarrow \beta$. Donc, par définition, $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$.
  - Cas $\phi = \mathrm{I}$:
    Par la Proposition 2.1.5, nous avons $\beta \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. Ainsi, nous avons $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$.
- Cas inductifs : nous supposons que le lemme est vérifié pour toutes formules A et B (HI).
  - Cas $\phi = A \wedge B$:
    Par (HI), $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Donc $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A \wedge B$.
  - Cas $\phi = A \vee B$:
    Par (HI), $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Donc $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ ou $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Alors $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A \vee B$.
  - Cas $\phi = A \to B$:
    Considérons un marquage quelconque M tel que $M \twoheadrightarrow \beta$. Par (HI), $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par le Lemme 2.2.4, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Donc $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$.
  - Cas $\phi = A * B$:
    Comme $\beta + \beta = \beta$ et par réflexivité, alors $\beta \twoheadrightarrow \beta + \beta$. De plus, par (HI) nous avons aussi $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par conséquent $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$.
  - Cas $\phi = A \mathrel{-\!\!*} B$:
    Considérons un marquage quelconque M tel que $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Par (HI), $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Comme $\beta + M = \beta$ alors $\beta + M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En conclusion, $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} A \mathrel{-\!\!*} B$.

□

Corollaire 2.2.6. Pour toute formule ϕ, si $M \twoheadrightarrow \beta$ alors $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$.

Preuve. Par le Lemme 2.2.5, $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$. Comme $M \twoheadrightarrow \beta$ alors, par le Lemme 2.2.4, nous avons $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$. □

Reconsidérons l'exemple de la Figure 2. Nous choisissons tout d'abord Prop = P. Puis, nous choisissons une β-interprétation i telle que, pour toute place $p \in P$, $i(p) = \{M \mid M \twoheadrightarrow \{\!\{p\}\!\}\}$. Ainsi, un marquage M force par exemple p_2 ($M \Vdash_{\mathfrak{P}} p_2$) si et seulement si $M \in i(p_2)$, donc si et seulement si M peut accéder au marquage $\{\!\{p_2\}\!\}$ ($M \twoheadrightarrow \{\!\{p_2\}\!\}$). Par exemple, comme nous avons $\{\!\{p_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_2$ puisque $\{\!\{p_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_2\}\!\}$.

Intéressons nous maintenant au deux conjonctions de BI. Par définition, nous avons $\{\!\{p_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_3 * p_4$, parce que $\{\!\{p_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_3, p_4\}\!\}$ et $\{\!\{p_3, p_4\}\!\} = \{\!\{p_3\}\!\} + \{\!\{p_4\}\!\}$ et $\{\!\{p_3\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_3$ et $\{\!\{p_4\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_4$. Comme nous l'avions présenté dans le chapitre précédent, $*$ exprime encore ici une propriété de *séparation* : $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi * \psi$ signifie que la marquage M peut atteindre un marquage qu'il est possible de séparer en deux sous-marquages tels que le premier satisfasse ϕ et le second satisfasse ψ. L'autre conjonction exprime une propriété de *partage*. En effet, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \wedge \psi$ si et seulement si M partage les propriétés ϕ et ψ. Autrement dit, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$ et $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$. Par exemple, puisque $\{\!\{p_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_2$ et $\{\!\{p_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_5$, alors $\{\!\{p_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_2 \wedge p_5$, ce qui exprime que $\{\!\{p_1\}\!\}$ partage la propriété de pouvoir accéder à $\{\!\{p_2\}\!\}$ ($\{\!\{p_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_2\}\!\}$) et aussi la propriété de pouvoir accéder à $\{\!\{p_5\}\!\}$ ($\{\!\{p_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_5\}\!\}$). Une illustration de mélange des deux conjonctions pourrait être $\{\!\{p_1, p_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} ((p_5 \wedge p_1) * p_3 * p_4) \wedge (p_2 * p_2)$, puisque $\{\!\{p_1, p_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_1, p_3, p_4\}\!\}$ et le jeton à la place p_1 peut aussi accéder à la place p_5, et aussi $\{\!\{p_1, p_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_2, p_2\}\!\}$.

Nous présentons à présent les deux implications $\rightarrow$ et $-\!\!*$. $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi -\!\!* \psi$ signifie qu'en ajoutant un marquage N satisfaisant ϕ à notre marquage M, nous obtenons un marquage $(M + N)$ qui satisfait ψ. Ainsi, nous avons $\{\!\{p_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_2 -\!\!* (p_5 * p_5)$. En effet, les seuls marquages satisfaisant p_2 (pouvant atteindre le marquage $\{\!\{p_2\}\!\}$), sont $\{\!\{p_1\}\!\}$, $\{\!\{p_2\}\!\}$ et β. Or, nous pouvons remarquer que $\{\!\{p_1\}\!\} + \{\!\{p_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_5, p_5\}\!\}$, $\{\!\{p_1\}\!\} + \{\!\{p_2\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_5, p_5\}\!\}$ et $\{\!\{p_1\}\!\} + \beta \twoheadrightarrow \{\!\{p_5, p_5\}\!\}$, et donc que ces marquages satisfont $p_5 * p_5$.
Concernant l'autre implication $\rightarrow$, il est très important de remarquer que cette implication est intuitionniste dans BI. Par conséquent, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \rightarrow \psi$ ne signifie pas que si M satisfait ϕ alors M satisfait ψ, mais signifie que pour tout marquage N pouvant accéder à M, si $N \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$ alors $N \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$. Par exemple, $\{\!\{p_2\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_1 \rightarrow (p_3 * p_4)$ puisque seulement $\{\!\{p_1\}\!\}$ et β peuvent accéder au marquage $\{\!\{p_2\}\!\}$ et satisfont p_1, et nous remarquons que ces deux marquages satisfont bien $p_3 * p_4$ (en particulier par le Lemme 2.2.5).

Pour terminer cette illustration, nous présentons la constante $\bot$. Un marquage satisfait $\bot$ si et seulement si celui-ci peut accéder au marquage inconsistant. En particulier, nous avons $\{\!\{p_1, p_5, p_5\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$, puisque $\{\!\{p_1, p_5, p_5\}\!\} \rightarrow \{\!\{p_2, p_5, p_5\}\!\} \rightarrow \beta$ (nous rappelons que $\{\!\{p_5, p_5, p_5\}\!\} \notin \mathbb{M}^c(P)$), et nous avons donc $\{\!\{p_1, p_5, p_5\}\!\} \twoheadrightarrow \beta$.

Pour terminer cette section, nous rappelons que la formule $\phi \equiv (p -\!\!* \bot) \rightarrow \bot \wedge (q -\!\!* \bot) \rightarrow \bot \vDash (p * q -\!\!* \bot) \rightarrow \bot$ n'est pas valide dans BI. Cette formule a eu la particularité de montrer que les travaux précédents sur la recherche d'une sémantique à base de réseaux de Petri pour BI ne sont pas complets [71], au sens où cette formule est valide dans la sémantique à base de réseaux de Petri proposée. Cela est dû en particulier au fait que dans BI, une sémantique à base de monoïdes de ressources avec composition totale ne permet pas un traitement complet de $\bot$ [75, 38]. Or, dans ces précédents travaux, la sémantique proposée repose sur des réseaux de Petri

"standards" où la composition de ressources (l'addition de marquages) est une fonction totale. Cela explique d'où provient l'échec de la tentative.

À l'opposé, nos monoïdes de ressources sont construits sur des β-PN, dont le rôle du marquage inconsistant peut être vu comme une manière d'encoder une addition de marquages partielle, au sens où $M_1 + M_2 = \beta$ peut être vue comme signifiant "$M_1 + M_2$ n'est pas défini". En conséquence, comme nous le démontrerons nous obtenons une sémantique permettant, en particulier, d'obtenir un traitement complet de $\bot$. Nous proposons d'illustrer nos propos en montrant que, grâce au marquage inconsistant, la formule $(p \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot \wedge (q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot \vDash (p * q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot$ n'est pas valide dans notre nouvelle sémantique de BI. Pour cela, nous proposons d'étudier le contre-modèle $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, tel que :

- $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$, avec :
  - $P = \{p, q, m\}$
  - $T = \emptyset$
  - $\mathcal{M}^c(P) = \{\{\!\{\}\!\}, \{\!\{p\}\!\}, \{\!\{q\}\!\}, \{\!\{m\}\!\}, \{\!\{m, p\}\!\}, \{\!\{m, q\}\!\}\}$
- $i(p) = \{\beta, \{\!\{p\}\!\}\}$, $i(q) = \{\beta, \{\!\{q\}\!\}\}$ et $i(m) = \{\beta, \{\!\{m\}\!\}\}$.

Nous donnons ci-dessous une représentation graphique du β-PN considéré :

Nous remarquons que ce réseau de Petri à inconsistance ne possède aucune transition. Pourtant des transitions peuvent bien avoir lieu dans le cas où des jetons sont ajoutés de tel sorte que nous obtenions un marquage inconsistant. Dans un tel cas, nous rappelons que ce marquage inconsistant peut accéder à n'importe quel marquage. Il devient alors facile de vérifier que ce β-PN vérifie la propriété suivante, que nous noterons **(P)** : si $M \twoheadrightarrow M'$ alors $M = \beta$ ou $M = M'$. Nous montrons maintenant que nous avons bien un contre-modèle de la formule $((p \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot \wedge (q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot) \mathrel{-\!\!*} ((p * q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot)$.

1. Tout d'abord, comme $\{\!\{m\}\!\} \in i(m)$, $\{\!\{p\}\!\} \in i(p)$ et $\{\!\{q\}\!\} \in i(q)$, alors nous avons $\{\!\{m\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} m$, $\{\!\{p\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p$ et $\{\!\{q\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} q$.
2. Comme $\{\!\{m, p\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$ (donc $\{\!\{m, p\}\!\} \neq \beta$) alors, par **(P)**, $\{\!\{m, p\}\!\} \not\twoheadrightarrow \beta$.
3. Par (2), $\{\!\{m, p\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} \bot$.
4. Comme $\{\!\{p\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p$ et $\{\!\{m\}\!\} + \{\!\{p\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} \bot$ (par (3)), alors $\{\!\{m\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} p \mathrel{-\!\!*} \bot$
5. Par le Lemme 2.2.5, $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$.
6. Par (4), (5) et **(P)**, nous avons alors $\{\!\{m\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} (p \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot$.
7. Par le même raisonnement, nous avons $\{\!\{m\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} (q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot$.
8. Par (6) et (7), $\{\!\{m\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} (p \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot \wedge (q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot$.
9. Comme $\{\!\{m, p, q\}\!\} \notin \mathcal{M}^c(P)$, alors $\{\!\{m\}\!\} + \{\!\{p, q\}\!\} = \beta$ et donc $\{\!\{m\}\!\} + \{\!\{p, q\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$.
10. Nous pouvons remarquer que $\{\!\{p, q\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p * q$ puisque $\{\!\{p, q\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p\}\!\} + \{\!\{q\}\!\}$ et $\{\!\{p\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p$ et $\{\!\{q\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} q$.
11. Nous pouvons aussi remarquer que hormis $\{\!\{p, q\}\!\}$, seul β satisfait $p * q$ et que $\{\!\{m\}\!\} + \beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$.

12. Donc par (9), (10) et (11), nous avons alors $\{\!\{m\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p * q \mathrel{-\!\!*} \bot$.
13. Par **(P)**, $\{\!\{m\}\!\} \not\rightarrowtail \beta$, alors $\{\!\{m\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} \bot$.
14. Alors par (12) et (13), $\{\!\{m\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} (p * q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot$.
15. En conclusion, par (8) et (14), nous avons alors $\{\!\{\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} ((p \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot \wedge (q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot) \mathrel{-\!\!*} ((p * q \mathrel{-\!\!*} \bot) \to \bot)$.

Nous pouvons alors conclure que la formule que nous avons considérée et qui est non valide dans BI, est bien non valide dans notre sémantique. Cela semble montrer que les β-PN semblent être mieux adaptés que les réseaux de Petri standards pour la proposition d'une sémantique pour BI. Dans les sections suivantes, nous étudions l'adéquation de notre sémantique en nous appuyant en partie sur une méthode d'extraction de contre-modèles à base de β-PN pour BI.

2.3 Extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI

Dans cette section, nous présentons une méthode indirecte d'extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri à inconsistance pour la logique BI. Pour cela, nous transformons les contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI [40, 68] en contre-modèles à base de réseaux de Petri à inconsistance.

2.3.1 La méthode d'extraction de contre-modèles

Nous rappelons que les contre-modèles de BI sont des monoïdes de ressources ayant certaines propriétés [68] que nous énumérons ci-dessous. Mais avant, concernant les modèles à base de monoïdes de ressources, nous redonnons au lecteur la définition de monoïde de ressources et d'interprétation afin de faciliter la lecture.

Définition 2.3.1 (Monoïde de ressources)**.** Un *monoïde de ressources* est une structure $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$ telle que :
- $(R, \bullet, e)$ est un monoïde partiel
- $\sqsubseteq \subseteq R \times R$ est un préordre (une relation réflexive et transitive)
- Compatibilité : $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$, si $r_1 \sqsubseteq r_2$ et $r_2 \bullet r_3 \downarrow$ alors $r_1 \bullet r_3 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_3 \sqsubseteq r_2 \bullet r_3$

Nous rappelons que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ est défini" et $r_1 \bullet r_2 \uparrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ n'est pas défini".

Définition 2.3.2 (Interprétation)**.** Une *interprétation* est une fonction $[\![\cdot]\!] : \text{Prop} \to \mathbb{P}(R)$, satisfaisant la propriété de monotonie suivante : $\forall p \in \text{Prop}, \forall r, r' \in R$, si $r \sqsubseteq r'$ et $r \in [\![p]\!]$ alors $r' \in [\![p]\!]$.

La méthode des tableaux de BI construit, à partir d'une formule dont nous souhaitons connaître si elle est valide ou non, un *tableau*, qui est un arbre dont les nœuds sont des formules possédant un *signe* ($\mathbb{T}$ ou $\mathbb{F}$) et un *label*. De plus, à chaque branche du tableau est associé un graphe, dont les nœuds sont aussi des labels. Lorsqu'une formule n'est pas valide, il est possible, sous certaines conditions, d'extraire un contre-modèle à base de monoïdes de ressources de cette formule. Tous les contre-modèles extraits par cette méthode des tableaux possèdent certaines propriétés sur lesquelles nous nous appuyons pour transformer ces contre-modèles en contre-modèles à base de β-PN.

Parmi ces propriétés, la première est que les ressources du contre-modèle à base de monoïdes de ressources extrait (les éléments de R) sont en réalité des labels, c'est-à-dire des mots construits sur un alphabet $\gamma_r = \{c_1, c_2, ...\}$ dont l'ordre des lettres n'a pas d'importance. Autrement dit, la ressource $c_1c_4c_5$ et la ressource $c_5c_1c_4$ sont la même ressource. De plus, pour toute ressource, tout sous-mot est aussi une ressource. Par exemple, si $c_5c_1c_4c_3 \in R$ alors $c_5c_3 \in R$. Une autre propriété est que la composition de deux ressources est définie comme étant la concaténation de ces deux mots, à condition que le mot obtenu appartienne à R. Dans le cas contraire, la composition n'est pas définie. Par exemple, si $c_1c_2c_3 \in R$ alors $c_1c_2 \bullet c_3 \downarrow$ et $c_1c_2 \bullet c_3 = c_1c_2c_3$. Mais aussi, si $c_1c_2 \bullet c_3 \downarrow$ alors $c_1c_2c_3 \in R$ et $c_1c_2 \bullet c_3 = c_1c_2c_3$. Par contre, si $c_1c_2c_3 \notin R$, alors $c_1c_2 \bullet c_3 \uparrow$. Par ailleurs, la ressource unitaire e est alors vue comme le mot vide. Pour finir, pour toute branche finie à partir de laquelle un contre-modèle à base de monoïdes de ressources a été extrait, l'ensemble R et la relation $\sqsubseteq$ sont finis.

Afin de ne pas insérer de transitions inutiles dans le β-modèle que nous allons extraire, nous introduisant une notion de *BI-clôture* : en considérant une relation $\sqsubseteq$ obtenue par la méthode d'extraction de contre-modèles à base de monoïdes de ressources de BI et choisissons une relation $\sqsubset$, nous dirons alors que la *BI-clôture* de $\sqsubset$ est égale à $\sqsubseteq$ si et seulement si la clôture de $\sqsubset$ par les règles de la Figure 3 est égale à $\sqsubseteq$.

$$\frac{x \sqsubset y \qquad y \sqsubset z}{x \sqsubset z}\ \langle t_r \rangle \qquad \frac{xy \sqsubset xy}{x \sqsubset x}\ \langle d_r \rangle \qquad \frac{ky \sqsubset ky \qquad x \sqsubset y}{kx \sqsubset ky}\ \langle c_r \rangle \qquad \frac{x \sqsubset y}{x \sqsubset x}\ \langle l_r \rangle \qquad \frac{x \sqsubset y}{y \sqsubset y}\ \langle r_r \rangle$$

FIGURE 3 – Règles de BI-clôture

Nous définissons les deux fonctions ext_P et ext_M, permettant à partir d'une ressource d'extraire respectivement un ensemble de places et un marquage, ainsi :

$$ext_P(c_{i_1}...c_{i_n}) = \{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}$$

$$ext_M(c_{i_1}...c_{i_n}) = \{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\}$$

et nous donnons à présent une fonction Ω permettant de transformer un contre-modèle extrait par la méthode des tableaux de BI, en un β-PN.

Définition 2.3.3 (Fonction Ω)**.** Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. La fonction Ω associe à $\mathcal{K}$ le triplet $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, avec $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$, tel que :

- $P = \bigcup_{r \in R} ext_P(r)$
- $T = \{t_{r_1 \to r_2} \mid r_2 \sqsubset r_1\}$
- $pre(t_{r_1 \to r_2}) = ext_M(r_1)$
- $post(t_{r_1 \to r_2}) = ext_M(r_2)$
- $\mathbb{M}^c(P) = \bigcup_{r \in R} ext_M(r)$
- β est un nouvel élément tel que $\beta \notin \mathbb{M}^c(P)$
- Pour tout $p \in$ Prop, $i(p) = \{\beta\} \cup \bigcup_{r \in [\![p]\!]} ext_M(r)$

Nous noterons que le choix d'une relation $\sqsubset$ peut nous permettre de supprimer par exemple la réflexivité et la transitivité de la relation $\sqsubseteq$, permettant alors de ne pas avoir de transitions réflexives et transitives inutiles dans les β-PN extraits. Nous illustrerons cela en détail à la fin de cette section sur un exemple d'extraction de contre-modèle.

Proposition 2.3.4. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. $\mathcal{P}$ est un β-PN.

Preuve. Tout d'abord, il est évident que l'ensemble des marquages consistants sont des multi-ensembles construits sur P ($\mathbb{M}^c(P) \subseteq \mathfrak{M}(P)$). Nous montrons que les propriétés (ML) et (ZM) sont vérifiées :

- Propriété (ML) :
  Soit $M \in \mathbb{M}^c(P)$ et soit $N \in \mathfrak{M}(P)$ tel que $N \leq M$. Par définition de Ω et par les propriétés des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI, M est de la forme $M = \{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_1}\}\!\}$ et $c_{i_1}...c_{i_n} \in R$. Considérons le mot r tel que $ext_M(r) = N$. Comme N est un sous-marquage de M ($N \leq M$), alors r est un sous-mot de $c_{i_1}...c_{i_n}$. Par les propriétés des contre-modèles, $r \in R$. En conséquence, par définition de Ω, $N \in \mathbb{M}^c(P)$.
- Propriété (ZM) :
  Comme $e \in R$ et comme e est vu comme le mot vide, nous avons $ext_M(e) = \{\!\{\}\!\}$, et donc $\{\!\{\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$, par définition de Ω.

Nous pouvons aussi remarquer que *pre* et *post* sont bien deux fonctions $T \to \mathbb{M}^c(P)$. □

Proposition 2.3.5. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. Si $M \in \mathbb{M}^c(P)$ et $M \to N$ alors $N \in \mathbb{M}^c(P)$.

Preuve. Soit $M \in \mathbb{M}^c(P)$ et $N \in \mathbb{M}(P)$. Supposons que $M \to N$. Comme $M \to N$ et $M \in \mathbb{M}^c(P)$ alors il existe $t \in T$ et $M' \in \mathbb{M}^c(P)$ tels que $M = pre(t) + M'$ et $N = post(t) + M'$. M' étant un marquage consistant, il est de la forme $M' = \{\!\{c_{i'_1}, ..., c_{i'_{n'}}\}\!\}$. De plus, la transition t est de la forme $t = t_{c_{j_1}...c_{j_m} \to c_{k_1}...c_{k_l}}$, par définition de Ω. Donc, toujours par définition de Ω, nous avons alors $c_{k_1}...c_{k_l} \sqsubset c_{j_1}...c_{j_m}$, et donc $c_{k_1}...c_{k_l} \sqsubseteq c_{j_1}...c_{j_m}$ par BI-clôture. Par ailleurs, comme $M \in \mathbb{M}^c(P)$ et comme $M = pre(t) + M' = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} + \{\!\{c_{i'_1}, ..., c_{i'_{n'}}\}\!\} = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}, c_{i'_1}, ..., c_{i'_{n'}}\}\!\}$, alors $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}, c_{i'_1}, ..., c_{i'_{n'}}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$. Donc nous avons $c_{j_1}...c_{j_m}c_{i'_1}...c_{i'_{n'}} \in R$ et donc $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{i'_1}...c_{i'_{n'}} \downarrow$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{i'_1}...c_{i'_{n'}} = c_{j_1}...c_{j_m}c_{i'_1}...c_{i'_{n'}}$ par les propriétés des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI. Ainsi, par compatibilité, comme $c_{k_1}...c_{k_l} \sqsubseteq c_{j_1}...c_{j_m}$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{i'_1}...c_{i'_{n'}} \downarrow$, nous avons alors $c_{k_1}...c_{k_l} \bullet c_{i'_1}...c_{i'_{n'}} \downarrow$. Par conséquent, $c_{k_1}...c_{k_l}c_{i'_1}...c_{i'_{n'}} \in R$. Donc, par définition de Ω, $\{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_l}, c_{i'_1}, ..., c_{i'_{n'}}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$. Nous pouvons remarquer que $N = post(t) + M' = \{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_l}\}\!\} + \{\!\{c_{i'_1}, ..., c_{i'_{n'}}\}\!\} = \{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_l}, c_{i'_1}, ..., c_{i'_{n'}}\}\!\}$. En conclusion, $N \in \mathbb{M}^c(P)$. □

Corollaire 2.3.6. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. Si $M \in \mathbb{M}^c(P)$ et $M \twoheadrightarrow N$ alors $N \in \mathbb{M}^c(P)$.

Preuve. Soit $M \in \mathbb{M}^c(P)$ et $N \in \mathbb{M}(P)$. Nous supposons que $M \twoheadrightarrow N$. Il y a alors deux cas :

- Cas $M = N$:
  Dans ce cas, nous avons $N \in \mathbb{M}^c(P)$.
- Cas où il existe une succession de transitions $M \to M_1 \to ... \to M_n \to N$:
  Dans ce cas, nous avons $N \in \mathbb{M}^c(P)$ par induction sur n et par la Proposition 2.3.5.

□

Proposition 2.3.7. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$ si et seulement si $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$.

Preuve. Nous montrons l'implication dans les deux sens.
Nous supposons que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$. Il y a alors deux cas :

- Cas où $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$:
  Dans ce cas, les ressources $c_{i_1}...c_{i_n}$ et $c_{j_1}...c_{j_m}$ sont égales (nous rappelons qu'une ressource d'un contre-modèle extrait par la méthode des tableaux de BI est un mot dont l'ordre des lettres n'a pas d'importance). Donc $c_{i_1}...c_{i_n} = c_{j_1}...c_{j_m}$. Et alors, $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$, par réflexivité de la relation.
- Cas où il existe une succession de transitions $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \to M_1 \to ... \to M_n \to \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$:
  Nous prouvons par induction sur n.
  - Cas de base ($n = 0$) :
    Dans ce cas, la transition est de la forme $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \to \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$. Donc il existe une transition $t_{x \to y} \in T$, ainsi qu'un marquage $M' = \{\!\{c_{m_1}, ..., c_{m_l}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$ tels que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} = pre(t_{x \to y}) + M'$ et $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} = post(t_{x \to y}) + M'$. Par définition de Ω et par les propriétés des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits, nous avons $y \sqsubset x$ (d'où $y \sqsubseteq x$ par BI-clôture), $x \bullet c_{m_1}...c_{m_l} \downarrow$, $x \bullet c_{m_1}...c_{m_l} = c_{i_1}...c_{i_n}$, $y \bullet c_{m_1}...c_{m_l} \downarrow$ et $y \bullet c_{m_1}...c_{m_l} = c_{j_1}...c_{j_m}$. Par compatibilité, $y \bullet c_{m_1}...c_{m_l} \sqsubseteq x \bullet c_{m_1}...c_{m_l}$, d'où $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$.
  - Cas inductif :
    Nous supposons que la propriété est vérifiée pour tout $n \leqslant t$ (HI). Nous démontrons que la Proposition est vérifiée pour une succession de transitions de la forme $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \to M_1 \to ... \to M_{t+1} \to \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$.
    Par le Corollaire 2.3.6, $M_1 \in \mathbb{M}^c(P)$. Nous notons $M_1 = \{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_l}\}\!\}$. Par (HI), nous avons alors $c_{k_1}...c_{k_l} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{k_1}...c_{k_l}$. Donc $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$, par transitivité de la relation $\sqsubseteq$.

Nous supposons à présent que $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$. Nous rappelons que la BI-clôture de la relation $\sqsubset$ est égale à $\sqsubseteq$. Nous démontrons alors que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$ par induction sur la hauteur de l'arbre de dérivation de $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$ obtenu par les règles de BI-clôture de la Figure 3.

- Cas de base ($n = 0$) :
  Dans ce cas, nous avons $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubset c_{i_1}...c_{i_n}$. Par définition de Ω, $t_{c_{i_1}...c_{i_n} \to c_{j_1}...c_{j_m}} \in T$. Nous rappelons, par la Proposition 2.3.4 que $\mathcal{P}$ est un β-PN et donc $\{\!\{\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$ par la propriété (ZM). De plus, comme $\sqsubset$ est définie sur $R \times R$, alors $c_{j_1}...c_{j_m}, c_{i_1}...c_{i_n} \in R$ et donc, par définition de Ω, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\}, \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$. Comme $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} = pre(t_{c_{i_1} \circ ... \circ c_{i_n} \to c_{j_1} \circ ... \circ c_{j_m}}) + \{\!\{\}\!\}$ et $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} = post(t_{c_{i_1} \circ ... \circ c_{i_n} \to c_{j_1} \circ ... \circ c_{j_m}}) + \{\!\{\}\!\}$ alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \to \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$. Par conséquent, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$.
- Cas inductifs
  Nous supposons que la propriété est vérifiée pour toute paire $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$ pouvant être obtenue par un arbre de dérivation de hauteur n (HI). Nous montrons que la propriété est vérifiée pour les paires pouvant être obtenues par un arbre de dérivation de hauteur $n + 1$.

- Cas $\langle t_r \rangle$:
  L'arbre de dérivation est de la forme :
  $$\dfrac{\dfrac{\overset{\cdots}{}}{c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubset y} \quad \dfrac{\overset{\cdots}{}}{y \sqsubset c_{i_1}...c_{i_n}}}{c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubset c_{i_1}...c_{i_n}} \langle t_r \rangle$$
  Ici, y étant une ressource, alors par la définition de Ω, $ext_M(y) \in \mathbb{M}^c(P)$. Par (HI), nous avons alors $ext_M(y) \twoheadrightarrow \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$ et $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow ext_M(y)$. Par clôture transitive, nous avons alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$.
- Cas $\langle d_r \rangle$:
  L'arbre de dérivation est de la forme :
  $$\dfrac{\dfrac{\overset{\cdots}{}}{c_{i_1}...c_{i_n}y \sqsubset c_{i_1}...c_{i_n}y}}{c_{i_1}...c_{i_n} \sqsubset c_{i_1}...c_{i_n}} \langle d_r \rangle$$
  Nous pouvons remarquer que $c_{i_1}...c_{i_n}$ est un sous-mot de $c_{i_1}...c_{i_n}y$. Donc, par la propriété des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI, $c_{i_1}...c_{i_n} \in R$. Ainsi, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$, par définition de Ω. Nous pouvons alors conclure que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\}$ par la clôture réflexive de la relation.
- Cas $\langle c_r \rangle$:
  L'arbre de dérivation est de la forme :
  $$\dfrac{\dfrac{\overset{\cdots}{}}{ky \sqsubset ky} \quad \dfrac{\overset{\cdots}{}}{x \sqsubset y}}{kx \sqsubset ky} \langle c_r \rangle$$
  Dans ce cas, x, y et k sont de la forme $x = c_{x_1}...c_{x_a}$, $y = c_{y_1}...c_{y_b}$ et $k = c_{k_1}...c_{k_c}$, et nous avons alors $kx = c_{k_1}...c_{k_c}c_{x_1}...c_{x_a} = c_{k_1}...c_{k_c} \bullet c_{x_1}...c_{x_a}$ et $ky = c_{k_1}...c_{k_c}c_{y_1}...c_{y_b} = c_{k_1}...c_{k_c} \bullet c_{y_1}...c_{y_b}$, par la propriété des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI. De plus, par Ω, $\{\!\{c_{x_1}, ..., c_{x_a}\}\!\}$, $\{\!\{c_{y_1}, ..., c_{y_b}\}\!\}$, $\{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_c}\}\!\}$, $\{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_c}, c_{x_1}, ..., c_{x_a}\}\!\}$ et $\{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_c}, c_{y_1}, ..., c_{y_b}\}\!\}$ sont tous des marquages consistants. Par (HI), nous avons $\{\!\{c_{y_1}, ..., c_{y_b}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{x_1}, ..., c_{x_a}\}\!\}$. Par le Corollaire 2.1.4, $\{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_c}\}\!\} + \{\!\{c_{y_1}, ..., c_{y_b}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_c}\}\!\} + \{\!\{c_{x_1}, ..., c_{x_a}\}\!\}$. En conclusion, nous avons $\{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_c}, c_{y_1}, ..., c_{y_b}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_c}, c_{x_1}, ..., c_{x_a}\}\!\}$.
- Les deux derniers cas sont similaires au cas $\langle d_r \rangle$

□

Proposition 2.3.8. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. i est une β-interprétation.

Preuve. Nous vérifions que i est une β-interprétation au sens de la Définition 2.2.1. Nous pouvons remarquer dans un premier temps que la propriété d'inconsistance est vérifiée, par définition de Ω : pour toute proposition $p \in \text{Prop}$, $\beta \in i(p)$. Concernant la monotonie, considérons deux marquages $M, N \in \mathbb{M}(P)$ tels que $M \in i(p)$ et $N \twoheadrightarrow M$. Il y a alors deux cas :

- Cas $N = \beta$:
  Dans ce cas, $N \in i(p)$, par définition de Ω.
- Cas où N est un marquage consistant :
  Par le Corollaire 2.3.6, M est aussi un marquage consistant. Nous pouvons alors les noter $N = \{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\}$ et $M = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$. Par définition de Ω et par la Proposition 2.3.7, $c_{j_1}...c_{j_m} \in [\![p]\!]$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$. Par la monotonie de $[\![\cdot]\!]$, nous avons alors $c_{i_1}...c_{i_n} \in [\![p]\!]$. Finalement, par définition de Ω, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \in i(p)$, d'où $N \in i(p)$.

En conclusion, i est une β-interprétation. □

Lemme 2.3.9. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. $(\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ est un β-modèle.

Preuve. Par la Proposition 2.3.4 et la Proposition 2.3.8. □

Lemme 2.3.10. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. Les propriétés suivantes sont vérifiées pour toute formule φ et toute ressource $c_{i_1}...c_{i_n} \in R$:

(a) $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \varphi$
(b) Si $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} \varphi$ alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} \varphi$
(c) Si $c_{i_1}...c_{i_n} \vDash_{\mathcal{K}} \varphi$ alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \varphi$

Preuve. Par le Lemme 2.3.9, $(\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ est un β-modèle. Par le Lemme 2.2.5, la propriété (a) est vérifiée. Nous rappelons que comme $c_{i_1}...c_{i_n} \in R$ alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$ (par définition de Ω) et donc $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \neq \beta$. Nous prouvons les deux autres propriétés par induction structurelle simultanée sur φ.

- Cas de base :
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} p$, avec $p \in Prop$:
    Par définition, $c_{i_1}...c_{i_n} \notin [\![p]\!]$. De plus, comme $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \neq \beta$, alors par définition de Ω, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \notin i(p)$. Nous pouvons alors conclure que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} p$.
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \vDash_{\mathcal{K}} p$, avec $p \in Prop$:
    Par définition, $c_{i_1}...c_{i_n} \in [\![p]\!]$. Donc, par définition de Ω, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \in i(p)$. Nous pouvons alors conclure que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p$.
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} \top$:
    Ce cas ne peut pas se produire.
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \vDash_{\mathcal{K}} \top$:
    Par la définition de la relation de forcing dans notre sémantique à base de β-PN, nous avons $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \top$.
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} \bot$:
    Supposons que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$. Donc, par définition, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \beta$. Or, par le Corollaire 2.3.6, ceci est absurde puisque $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$ et β est inconsistant. Donc $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} \bot$.
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \vDash_{\mathcal{K}} \bot$:
    Ce cas ne peut pas se produire.
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$:
    Par définition, $e \not\sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$. Par la Proposition 2.3.7, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. Donc, nous avons $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$.
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$:
    Par définition, $e \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$. Par la Proposition 2.3.7, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$ et donc $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$.
- Cas inductifs : nous supposons que les propriétés (b) et (c) sont vérifiées par les formules A et B (HI).
  - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} A \wedge B$:
    Par définition, nous avons $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} A$ ou $c_{i_1}...c_{i_n} \nVdash_{\mathcal{K}} B$. Donc, par (HI), nous avons

alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} A$ ou $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En conséquence, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} A \wedge B$.

- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \models_{\mathcal{K}} A \wedge B$:
  Par définition, nous avons $c_{i_1}...c_{i_n} \models_{\mathcal{K}} A$ et $c_{i_1}...c_{i_n} \models_{\mathcal{K}} B$. Donc, par (HI), nous avons alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En conséquence, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A \wedge B$.
- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \not\models_{\mathcal{K}} A \vee B$:
  Ce cas est similaire au précédent.
- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \models_{\mathcal{K}} A \vee B$:
  Ce cas est similaire au précédent.
- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \not\models_{\mathcal{K}} A \to B$:
  Par définition, il existe une ressource $c_{j_1}...c_{j_m} \in R$ telle que $c_{i_1}...c_{i_n} \sqsubseteq c_{j_1}...c_{j_m}$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \models_{\mathcal{K}} A$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \not\models_{\mathcal{K}} B$. Par définition de Ω, $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$. Par la Proposition 2.3.7, $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\}$. Par (HI), $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En conclusion $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$.
- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \models_{\mathcal{K}} A \to B$:
  Soit $M \in \mathbb{M}(P)$ tel que $M \twoheadrightarrow \{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\}$ et $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Il y a alors deux cas :
  - Cas $M = \beta$:
    Dans ce cas, par la propriété (a), $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.
  - Cas $M \in \mathbb{M}^c(P)$:
    Le marquage M est alors de la forme $M = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$. Par la Proposition 2.3.7, nous avons alors $c_{i_1}...c_{i_n} \sqsubseteq c_{j_1}...c_{j_m}$. Si $c_{j_1}...c_{j_m} \not\models_{\mathcal{K}} A$, alors par (HI), $M \not\Vdash_{\mathfrak{P}} A$, ce qui est absurde. Donc $c_{j_1}...c_{j_m} \models_{\mathcal{K}} A$. Comme $c_{i_1}...c_{i_n} \models_{\mathcal{K}} A \to B$, $c_{i_1}...c_{i_n} \sqsubseteq c_{j_1}...c_{j_m}$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \models_{\mathcal{K}} A$, alors $c_{j_1}...c_{j_m} \models_{\mathcal{K}} B$. Par (HI), nous avons alors $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.

  Nous avons alors pour tout $M \in \mathbb{M}(P)$, si $M \twoheadrightarrow \{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\}$ et $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ alors $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En conclusion, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$.
- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \not\models_{\mathcal{K}} A * B$:
  Soit M_1 et M_2 deux marquages tels que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow M_1 + M_2$. Par le Corollaire 2.3.6, $M_1 + M_2 \in \mathbb{M}^c(P)$. Donc $M_1 \in \mathbb{M}^c(P)$ et $M_2 \in \mathbb{M}^c(P)$ (puisque $\beta + M = \beta$, pour tout marquage M). Donc M_1 et M_2 sont deux marquages de la forme $M_1 = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$ et $M_2 = \{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_l}\}\!\}$. Alors $M_1 + M_2 = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}, c_{k_1}, ..., c_{k_l}\}\!\}$. Par définition de Ω et par les propriétés des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI, nous avons $c_{j_1}...c_{j_m} \in R$, $c_{k_1}...c_{k_l} \in R$ et $c_{j_1}...c_{j_m}c_{k_1}...c_{k_l} \in R$, $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{k_1}...c_{k_l} \downarrow$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{k_1}...c_{k_l} = c_{j_1}...c_{j_m}c_{k_1}...c_{k_l}$. De plus, par la Proposition 2.3.7, $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{k_1}...c_{k_l} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$. Comme $c_{i_1}...c_{i_n} \not\models_{\mathcal{K}} A * B$, alors $c_{j_1}...c_{j_m} \not\models_{\mathcal{K}} A$ ou $c_{k_1}...c_{k_l} \not\models_{\mathcal{K}} B$. Donc par (HI), $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} A$ ou $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En résumé, pour tous marquages M_1 et M_2 tels que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow M_1 + M_2$, nous avons $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} A$ ou $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Nous pouvons donc conclure que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$.
- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \models_{\mathcal{K}} A * B$:
  Par définition, il existe deux ressources $c_{j_1}...c_{j_m} \in R$ et $c_{k_1}...c_{k_l} \in R$ telles que $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{k_1}...c_{k_l} \downarrow$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{k_1}...c_{k_l} \sqsubseteq c_{i_1}...c_{i_n}$ et $c_{j_1}...c_{j_m} \models_{\mathcal{K}} A$ et $c_{k_1}...c_{k_l} \models_{\mathcal{K}} B$. Par les propriétés des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI, nous avons $c_{j_1}...c_{j_m} \bullet c_{k_1}...c_{k_l} = c_{j_1}...c_{j_m}c_{k_1}...c_{k_l}$. Par (HI) et par le Corollaire 2.3.6, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}, c_{k_1}, ..., c_{k_l}\}\!\}$ et $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\{\!\{c_{k_1}, ..., c_{k_l}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Nous pouvons alors conclure que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$.
- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \not\models_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$:
  Par définition, il existe une ressource $c_{j_1}...c_{j_m} \in R$ telle que $c_{i_1}...c_{i_n} \bullet c_{j_1}...c_{j_m} \downarrow$,

$c_{j_1}...c_{j_m} \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $c_{i_1}...c_{i_n} \bullet c_{j_1}...c_{j_m} \nvDash_{\mathcal{K}} B$. Par les propriétés des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI, nous avons $c_{i_1}...c_{i_n} \bullet c_{j_1}...c_{j_m} = c_{i_1}...c_{i_n}c_{j_1}...c_{j_m}$. De plus, par (HI), $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}, c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} B$. Ainsi, nous avons $\{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} + \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} B$. Nous pouvons alors conclure que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} A \mathrel{-\!\!*} B$.

- Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \vDash_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$:
  Soit $M \in \mathbb{M}(P)$ tel que $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Il y a deux cas :
  - Cas $M = \beta$:
    Dans ce cas, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} + M = \beta$ et alors, par la propriété (a), $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} + M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.
  - Cas $M \in \mathbb{M}^c(P)$:
    Donc M est un marquage de la forme $M = \{\!\{c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\}$. Par définition de Ω, $c_{j_1}...c_{j_m} \in R$. Il y a alors deux cas :
    - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \bullet c_{j_1}...c_{j_m}$ où est non défini :
      Par définition de Ω, $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}, c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \notin \mathbb{M}^c(P)$. Donc $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} + M = \beta$. Alors, par la propriété (a), $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} + M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.
    - Cas $c_{i_1}...c_{i_n} \bullet c_{j_1}...c_{j_m}$ est défini :
      Dans ce cas, par les propriétés des contre-modèles à base de monoïdes de ressources extraits par la méthode des tableaux de BI, nous avons $c_{i_1}...c_{i_n} \bullet c_{j_1}...c_{j_m} = c_{i_1}...c_{i_n}c_{j_1}...c_{j_m}$ et $c_{i_1}...c_{i_n}c_{j_1}...c_{j_m} \in R$. Si $c_{j_1}...c_{j_m} \nvDash_{\mathcal{K}} A$, alors par (HI), $M \nVdash_{\mathfrak{P}} A$, ce qui est absurde. Donc $c_{j_1}...c_{j_m} \vDash_{\mathcal{K}} A$. Ainsi, comme $c_{i_1}...c_{i_n} \vDash_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$, alors $c_{i_1}...c_{i_n} \bullet c_{j_1}...c_{j_m} \vDash_{\mathcal{K}} B$. D'où $c_{i_1}...c_{i_n}c_{j_1}...c_{j_m} \vDash_{\mathcal{K}} B$. Donc, par (HI), $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}, c_{j_1}, ..., c_{j_m}\}\!\} \vDash_{\mathcal{K}} B$. Par conséquent $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} + M \vDash_{\mathcal{K}} B$.

  En résumé, si $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ alors $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} + M \vDash_{\mathcal{K}} B$. Nous pouvons alors conclure que $\{\!\{c_{i_1}, ..., c_{i_n}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A \mathrel{-\!\!*} B$.

□

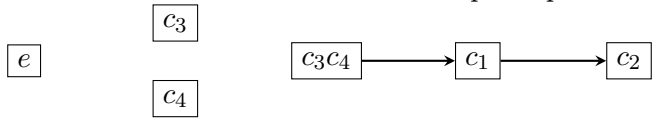
Théorème 2.3.11. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, un contre-modèle d'une formule ϕ extrait par la méthode des tableaux de BI. Soit $\sqsubset \subseteq R \times R$ une relation quelconque telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Soit $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. $(\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ est un contre-modèle de ϕ.

Preuve. Comme $\mathcal{K}$ est un contre-modèle de ϕ, alors $e \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par le Lemma 2.3.9, $(\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ est un β-modèle. De plus, par le Lemme 2.3.10, $\{\!\{\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} \phi$. En conclusion, $(\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ est un contre-modèle de la formule ϕ. □

2.3.2 Un exemple d'extraction de contre-modèles

Nous présentons à présent un exemple d'extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri à inconsistance.
Pour cet exemple, nous considérons la formule $\phi = ((A * B) \wedge A) \mathrel{-\!\!*} (A \to B)$. En appliquant la méthode des tableaux de BI, puis la méthode d'extraction de contre-modèles à base de monoïde de ressources, nous obtenons le contre-modèle $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, tel que :

- $R = \{e, c_1, c_2, c_3, c_4, c_3c_4\}$
- La relation $\sqsubseteq$ où la réflexivité et la transitivité ne sont pas représentées :



- La composition des ressources :

$\bullet$	e	c_1	c_2	c_3	c_4	c_3c_4
e	e	c_1	c_2	c_3	c_4	c_3c_4
c_1	c_1	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
c_2	c_2	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
c_3	c_3	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	c_3c_4	$\uparrow$
c_4	c_4	$\uparrow$	$\uparrow$	c_3c_4	$\uparrow$	$\uparrow$
c_3c_4	c_3c_4	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

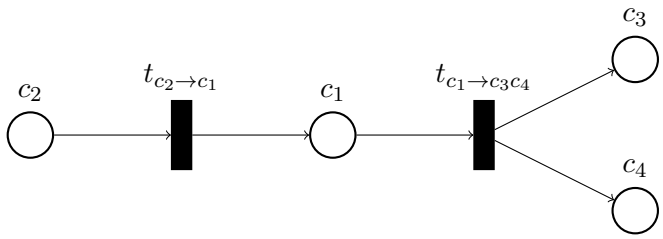
- L'interprétation :
  - $[\![A]\!] = \{c_1, c_2, c_3\}$
  - $[\![B]\!] = \{c_4\}$

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer sur ce contre-modèle que nous retrouvons les propriétés que nous avions énoncés sur les contre-modèles extraits par la méthode des tableaux de BI. Par exemple, si un mot appartient à R alors tout sous-mot appartient aussi à R, et nous pouvons remarquer que $c_3c_4 \in R$ et que $c_3 \in R$ et $c_4 \in R$. Nous remarquons aussi que la composition des ressources (dans le cas où elle est définie) est définie comme la concaténation de mots : $c_3 \bullet c_4 = c_3c_4$.

Pour transformer ce contre-modèle à base de monoïdes de ressources en un contre-modèle à base de β-PN, il nous faut choisir une relation $\sqsubset$ telle que sa BI-clôture soit égale à $\sqsubseteq$. Nous choisissons alors la relation $\sqsubset = \{(c_3c_4, c_1), (c_1, c_2)\}$, autrement dit la plus petite relation telle que $c_3c_4 \sqsubset c_1$ et $c_1 \sqsubset c_2$. Ainsi, nous pouvons transformer notre contre-modèle par la fonction Ω, obtenant alors $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, avec $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$, tel que :

- $P = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$
- $T = \{t_{c_1 \to c_3c_4}, t_{c_2 \to c_1}\}$
- $pre(t_{c_1 \to c_3c_4}) = \{\!\{c_1\}\!\}$ et $pre(t_{c_2 \to c_1}) = \{\!\{c_2\}\!\}$
- $post(t_{c_1 \to c_3c_4}) = \{\!\{c_3c_4\}\!\}$ et $post(t_{c_2 \to c_1}) = \{\!\{c_1\}\!\}$
- $\mathbb{M}^c(P) = \{\{\!\}\!\}, \{\!\{c_1\}\!\}, \{\!\{c_2\}\!\}, \{\!\{c_3\}\!\}, \{\!\{c_4\}\!\}, \{\!\{c_3, c_4\}\!\}\}$
- β est un nouvel élément tel que $\beta \notin \mathbb{M}^c(P)$
- $i(A) = \{\beta, \{\!\{c_1\}\!\}, \{\!\{c_2\}\!\}, \{\!\{c_3\}\!\}\}$ et $i(B) = \{\beta, \{\!\{c_4\}\!\}\}$

Par la Proposition 2.3.4, $\mathcal{P}$ est un β-PN. Nous donnons alors ci-dessous une représentation plus usuelle de ce β-PN :



Pour finir, par le Théorème 2.3.11, $(\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ est un contre-modèle de la formule $\phi = ((A * B) \wedge A) \mathrel{-\!\!*} (A \to B)$. Vérifions alors que $\{\!\{\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} ((A * B) \wedge A) \mathrel{-\!\!*} (A \to B)$:

1. Nous avons $\{\!\{c_3\}\!\} \in i(A)$ et $\{\!\{c_4\}\!\} \in i(B)$. Donc $\{\!\{c_3\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\{\!\{c_4\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.
2. Comme $\{\!\{c_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_3, c_4\}\!\}$ et $\{\!\{c_3\}\!\} + \{\!\{c_4\}\!\} = \{\!\{c_3, c_4\}\!\}$, alors $\{\!\{c_1\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_3\}\!\} + \{\!\{c_4\}\!\}$.
3. Par (1) et (2), nous avons $\{\!\{c_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$.
4. Nous avons $\{\!\{c_2\}\!\} \in i(A)$ et $\{\!\{c_2\}\!\} \notin i(B)$. Donc $\{\!\{c_2\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $\{\!\{c_2\}\!\} \nVdash_{\mathfrak{P}} B$.
5. Nous pouvons remarquer que $\{\!\{c_2\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{c_1\}\!\}$.

6. Par (4) et (5), nous avons alors $\{\!\{c_1\}\!\} \Vdash\!\!\!\!/_{\mathfrak{P}} A \to B$.
7. Comme $\{\!\{c_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$ et $\{\!\{c_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} A$, alors $\{\!\{c_1\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} (A * B) \wedge A$.
8. Comme $\{\!\{\}\!\} + \{\!\{c_1\}\!\} = \{\!\{c_1\}\!\}$ et $\{\!\{c_1\}\!\} \Vdash\!\!\!\!/_{\mathfrak{P}} A \to B$, nous avons alors $\{\!\{\}\!\} + \{\!\{c_1\}\!\} \Vdash\!\!\!\!/_{\mathfrak{P}} A \to B$.
9. par (7) et par (8), nous pouvons conclure que $\{\!\{\}\!\} \Vdash\!\!\!\!/_{\mathfrak{P}} ((A * B) \wedge A) \mathrel{-\!\!*} (A \to B)$.

Pour terminer, nous pouvons remarquer que le choix de construire notre contre-modèle, non pas à partir de la relation $\sqsubseteq$, mais plutôt à partir d'une sous-relation, nous a permis dans notre exemple d'éviter d'ajouter des transitions inutiles, comme par exemple une transition $t_{c_1 \to c_1}$ qui aurait consommé un jeton à la place c_1 pour en produire un à la même place c_1.

Nous conclurons cette section en ajoutant que comme nous l'avons présenté, pour toute branche finie à partir de laquelle un contre-modèle à base de monoïdes de ressources a été extrait, l'ensemble R et la relation $\sqsubseteq$ sont finis. Donc, par définition de Ω, les ensembles P, T et $\mathbb{M}^c(P)$ sont alors finis. En conclusion, pour toute branche finie à partir de laquelle un contre-modèle à base de monoïdes de ressources peut être extrait, nous obtenons par notre méthode une contre-modèle à base de β-PN fini.

2.4 Adéquation de la sémantique à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI

Dans la section précédente, nous avons présenté une nouvelle méthode d'extraction de contre-modèles à base de réseaux de Petri à inconsistance pour BI. Dans cette section, nous nous intéressons à étudier l'équivalence entre notre nouvelle sémantique à base de β-PN et la sémantique à base de monoïdes de ressources de BI.

2.4.1 Transformation des β-PN en monoïde de ressources

Dans cette sous-section, nous montrons que si une formule est valide dans la sémantique à base de monoïdes de ressources de BI [68, 40], alors elle est valide dans notre sémantique à base de β-PN. Pour cela, nous allons transformer les contre-modèles à base de β-PN en contre-modèles à base de monoïdes de ressources.

Définition 2.4.1 (Fonction $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$)**.** Soit $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$, un β-modèle. La fonction $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$ associe à $\mathfrak{P}$ le triplet $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}(\mathfrak{P}) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$, tel que :

- $R = \{M \in \mathbb{M}^c(P) \mid M \not\twoheadrightarrow \beta\}$
- $e = \{\!\{\}\!\}$
- $\forall r_1, r_2 \in R, r_1 \bullet r_2 = \begin{cases} \uparrow & \text{si } r_1 + r_2 \twoheadrightarrow \beta \\ r_1 + r_2 & \text{sinon} \end{cases}$
- Pour tout $r_1, r_2 \in R$, $r_1 \sqsubseteq r_2$ ssi $r_2 \twoheadrightarrow r_1$
- Pour tout $p \in Prop$ et $r \in R$, $r \in [\![p]\!]$ ssi $r \in i(p)$

Lemme 2.4.2. Soit $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$, un β-modèle tel que $\{\!\{\}\!\} \not\twoheadrightarrow \beta$. Soit $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}(\mathfrak{P}) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$. $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}(\mathfrak{P})$ est un modèle à base de monoïdes de ressources.

Preuve. Nous devons montrer que $\mathcal{R}$ est un monoïde de ressources au sens de la Définition 2.3.1 et que $[\![\cdot]\!]$ est une interprétation au sens de la Définition 2.3.2.
Nous montrons tout d'abord que $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$ est un monoïde de ressources :

- $(R, \bullet, e)$ est un monoïde partiel. En effet :
  - $e \in R$:
    Par hypothèse, $\{\!\{\}\!\} \not\twoheadrightarrow \beta$. De plus, par la propriété (ZM) des β-PN, $\{\!\{\}\!\} \in \mathbb{M}^c(P)$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, nous avons $e = \{\!\{\}\!\}$ et $R = \{M \in \mathbb{M}^c(P) \mid M \not\twoheadrightarrow \beta\}$. Alors, nous pouvons conclure que $e \in R$.
  - Nous montrons que $\bullet$ est associative, commutative et e est son élément neutre :
    - Élément neutre :
      Soit $r \in R$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, r est un marquage consistant tel que $r \not\twoheadrightarrow \beta$. Nous pouvons alors remarquer que comme $r + \{\!\{\}\!\} = r$, nous avons $r + \{\!\{\}\!\} \not\twoheadrightarrow \beta$. Toujours par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, nous avons alors $e = \{\!\{\}\!\}$, et donc $r \bullet e \downarrow$ et $r \bullet e = r + \{\!\{\}\!\} = r$.
    - Commutativité :
      Soit $r_1, r_2 \in R$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, r_1 et r_2 sont deux marquages consistants tels que $r_1 \not\twoheadrightarrow \beta$ et $r_2 \not\twoheadrightarrow \beta$. Supposons que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$. Donc, par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, nous avons $r_1 + r_2 \not\twoheadrightarrow \beta$. Donc, $r_2 + r_1 \not\twoheadrightarrow \beta$. Nous pouvons aussi remarquer que $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$. En conclusion, $r_2 \bullet r_1 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_2 = r_1 + r_2 = r_2 + r_1 = r_2 \bullet r_1$.
    - Associativité :
      La preuve d'associativité est identique. L'argument est que $r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$ (ceci étant vrai grâce à la propriété (ML) des β-PN) et si $r_1 + (r_2 + r_3) \not\twoheadrightarrow \beta$ alors $(r_1 + r_2) + r_3 \not\twoheadrightarrow \beta$.
- La relation $\sqsubseteq$ est un préordre puisque $\twoheadrightarrow$ est réflexive et transitive.
- Compatibilité :
  Soit $r_1, r_2, r_3 \in R$. Supposons que $r_1 \sqsubseteq r_2$ et $r_2 \bullet r_3 \downarrow$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $r_2 \twoheadrightarrow r_1$ et $r_2 + r_3 \not\twoheadrightarrow \beta$. Par le Corollaire 2.1.4, $r_2 + r_3 \twoheadrightarrow r_1 + r_3$. Supposons que $r_1 + r_3 \twoheadrightarrow \beta$, alors comme $r_2 + r_3 \twoheadrightarrow r_1 + r_3$, nous aurions par transitivité $r_2 + r_3 \twoheadrightarrow \beta$, ce qui est absurde. Donc $r_1 + r_3 \not\twoheadrightarrow \beta$. En conclusion $r_1 \bullet r_3 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_3 \sqsubseteq r_2 \bullet r_3$.

Nous montrons maintenant que $[\![\cdot]\!]$ est une interprétation. Supposons que $r \sqsubseteq r'$ et $r \in [\![p]\!]$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $r' \twoheadrightarrow r$ et $r \in i(p)$. Par la monotonie des β-interprétation, nous avons alors $r' \in i(p)$. Ainsi, par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $r' \in [\![p]\!]$.
En conclusion, $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}(\mathfrak{P})$ est un modèle à base de monoïdes de ressources. □

Lemme 2.4.3. Soit $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$, un β-modèle tel que $\{\!\{\}\!\} \not\twoheadrightarrow \beta$. Soit $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}(\mathfrak{P}) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$. Pour toute formule ϕ et toute ressource $r \in R$, $r \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ ssi $r \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$.

Preuve. Comme $r \in R$ alors $r \in \mathbb{M}^c(P)$ et $r \not\twoheadrightarrow \beta$. Nous prouvons le lemme par induction structurelle sur la formule ϕ.

- Cas de base :
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} p$ $(p \in Prop)$:
    Par définition, $r \in i(p)$. Alors, par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $r \in [\![p]\!]$. D'où $r \vDash_{\mathcal{K}} p$.
  - Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} p$ $(p \in Prop)$:
    Par définition, $r \in [\![p]\!]$. Alors, par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $r \in i(p)$. D'où $r \Vdash_{\mathfrak{P}} p$.
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} \top$:
    $r \vDash_{\mathcal{K}} \top$, par définition de $\vDash_{\mathcal{K}}$.
  - Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} \top$:
    $r \Vdash_{\mathfrak{P}} \top$, par définition de $\Vdash_{\mathfrak{P}}$.
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$:
    Dans ce cas, $r \twoheadrightarrow \beta$, or ceci est absurde.

- Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} \bot$:
  Ce cas est absurde, par définition de $\vDash_{\mathcal{K}}$.
- Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$:
  Par définition, $r \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. Par le Lemme 2.4.2, $e \in R$. Donc par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $e \sqsubseteq r$. D'où $r \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$.
- Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$:
  Par définition, $e \sqsubseteq r$. Donc par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $r \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. D'où $r \Vdash_{\mathfrak{P}} \{\!\{\}\!\}$.

- Cas inductif : Nous supposons que le lemme est vérifié par toutes formules A et B (HI).
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A \wedge B$:
    Par définition, $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $r \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par (HI), $r \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r \vDash_{\mathcal{K}} B$. D'où $r \vDash_{\mathcal{K}} A \wedge B$.
  - Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} A \wedge B$:
    Ce cas est similaire au précédent.
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A \vee B$:
    Ce cas est similaire au précédent.
  - Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} A \vee B$:
    Ce cas est similaire au précédent.
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$:
    Par définition, pour tout marquage $M \in \mathbb{M}(P)$ tel que $M \twoheadrightarrow r$ et $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$, nous avons $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Soit $r' \in R$ tel que $r \sqsubseteq r'$ et $r' \vDash_{\mathcal{K}} A$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$ et par (HI), $r' \twoheadrightarrow r$ et $r' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Donc $r' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Par (HI), nous avons alors $r' \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion, $r \vDash_{\mathcal{K}} A \to B$.
  - Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} A \to B$:
    Par définition, pour tout $r' \in R$ tel que $r \sqsubseteq r'$ et $r' \vDash_{\mathcal{K}} A$, nous avons $r' \vDash_{\mathcal{K}} B$. Soit $M \in \mathbb{M}(P)$ un marquage tel que $M \twoheadrightarrow r$ et $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Il y a alors deux cas :
    - Cas $M \twoheadrightarrow \beta$:
      Dans ce cas, par le Corollaire 2.2.6, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.
    - Cas $M \not\twoheadrightarrow \beta$:
      Dans ce cas, nous avons alors $M \in R$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$ et par (HI), nous avons $r \sqsubseteq M$ et $M \vDash_{\mathcal{K}} A$. Donc $M \vDash_{\mathcal{K}} B$. Par conséquent, par (HI), $M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.

    En conclusion, $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$.
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$:
    Par définition, il existe deux marquages $M_1, M_2 \in \mathbb{M}(P)$ tels que $r \twoheadrightarrow M_1 + M_2$ et $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $M_2 \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Si $M_1 \twoheadrightarrow \beta$ ou $M_2 \twoheadrightarrow \beta$ alors par la Proposition 2.1.3, $M_1 + M_2 \twoheadrightarrow \beta$, d'où $r \twoheadrightarrow \beta$ ce qui serait absurde. Donc $M_1 \not\twoheadrightarrow \beta$ et $M_2 \not\twoheadrightarrow \beta$ (et aussi $M_1 + M_2 \not\twoheadrightarrow \beta$). Alors, par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $M_1, M_2 \in R$, $M_1 \bullet M_2 = M_1 + M_2$ (et est défini) et $M_1 \bullet M_2 \sqsubseteq r$. Par ailleurs, par (HI), $M_1 \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $M_2 \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion, $r \vDash_{\mathcal{K}} A * B$.
  - Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} A * B$:
    Par définition, il existe $r', r'' \in R$ tels que $r' \bullet r'' \downarrow$ et $r' \bullet r'' \sqsubseteq r$ et $r' \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r'' \vDash_{\mathcal{K}} B$. Par définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, r' et r' sont deux marquages consistants, $r' \bullet r'' = r' + r''$ (puisque $r' \bullet r'' \downarrow$) et $r \twoheadrightarrow r' + r''$. Par (HI), $r' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ et $r'' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En conclusion, $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A * B$.
  - Cas $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A \mathrel{-\!\!*} B$:
    Par définition, pour tout marquage $M \in \mathbb{M}(P)$ tel que $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$, nous avons $r + M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Soit $r' \in R$ tel que $r' \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r \bullet r' \downarrow$. Par (HI), $r' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Donc $r + r' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. Comme $r \bullet r' \downarrow$ alors $r \bullet r' = r + r'$. Donc, par (HI), $r \bullet r' \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion, $r \vDash_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$.
  - Cas $r \vDash_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$:
    Par définition, pour tout $r' \in R$ tel que $r' \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r \bullet r' \downarrow$, nous avons $r \bullet r' \vDash_{\mathcal{K}} B$

(nous notons cette propriété **(P)**). Soit $M \in \mathbb{M}(P)$ tel que $M \Vdash_{\mathfrak{P}} A$. Il y a deux cas :
- Cas $M \twoheadrightarrow \beta$:
  Dans ce cas, par la Proposition 2.1.3, $r + M \twoheadrightarrow \beta$. Alors, par le Corollaire 2.2.6, $r + M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.
- Cas $M \not\twoheadrightarrow \beta$:
  Donc, $M \in R$. Alors, par (HI), $M \vDash_{\mathcal{K}} A$. Il y a alors deux cas :
  - Cas $r + M \twoheadrightarrow \beta$:
    Dans ce cas, par le Corollaire 2.2.6, $r + M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.
  - Cas $r + M \not\twoheadrightarrow \beta$:
    Alors, par la définition de $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}$, $r + M \in R$ et $r \bullet M = r + M$ (et est donc défini). Alors, par **(P)**, $r \bullet M \vDash_{\mathcal{K}} B$. D'où, par (HI), $r + M \Vdash_{\mathfrak{P}} B$.

Dans tous les cas, nous avons si $r' \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ alors $r + r' \Vdash_{\mathfrak{P}} B$. En conclusion $r \Vdash_{\mathfrak{P}} A \mathrel{-\!\!*} B$. □

Lemme 2.4.4. Soit ϕ une formule. Si ϕ est valide dans la sémantique à base de monoïdes de ressource, alors ϕ est valide dans la sémantique à base de β-PN.

Preuve. Supposons que ϕ ne soit pas valide dans la sémantique à base de β-PN. Donc il existe un contre-modèle $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ tel que $\{\!\{\}\!\} \not\Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$. Supposons que $\{\!\{\}\!\} \twoheadrightarrow \beta$, alors par le Corollaire 2.2.6, $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi$, ce qui est absurde. Donc $\{\!\{\}\!\} \not\twoheadrightarrow \beta$. Soit $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}(\mathfrak{P}) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$. Par le Lemme 2.4.2, $T_{\beta\text{-PN}\to\text{MR}}(\mathfrak{P})$ est un modèle à base de monoïdes de ressources. Par le Lemme 2.4.3 $e \not\vDash_{\mathcal{K}} \phi$ dans ce modèle. En conséquence, nous avons obtenu un contre-modèle à base de monoïdes de ressource de la formule ϕ. Nous pouvons alors conclure que ϕ n'est pas valide dans la sémantique à base de monoïdes de ressource. □

2.4.2 Adéquation de la nouvelle sémantique de BI

Nous étudions à présent l'adéquation de notre nouvelle sémantique à base de réseaux de Petri à inconsistance.

Dans un premier temps, nous montrons que si une formule est valide dans notre sémantique à base de β-PN, alors elle est valide dans la sémantique à base de monoïdes de ressources de BI.

Lemme 2.4.5. Soit ϕ une formule. Si ϕ est valide dans la sémantique à base de β-PN, alors ϕ est valide dans la sémantique à base de monoïdes de ressources de BI.

Preuve. Supposons que ϕ ne soit pas valide dans la sémantique à base de monoïdes de ressources. La méthode des tableaux de BI nous permet alors d'obtenir une branche à partir de laquelle il est possible d'extraire un contre-modèle de ϕ $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$ [40, 68]. En choisissant $\sqsubset = \sqsubseteq$, alors par le Théorème 2.3.11, $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, où $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ est un contre-modèle à base de β-PN de ϕ. En conclusion, ϕ n'est pas valide dans la sémantique à base de β-PN. □

Théorème 2.4.6. La sémantique à base de β-PN pour BI est adéquate.

Preuve. Soit ϕ une formule. Par le Lemme 2.4.4 et le Lemme 2.4.5, ϕ est valide dans la sémantique à base de monoïdes de ressources si et seulement si ϕ est valide dans la sémantique à base de β-PN. □

Théorème 2.4.7. Soit ϕ une formule non valide. Si la méthode des tableaux de BI, appliquée à ϕ, termine alors le contre-modèle à base de β-PN extrait est fini.

Preuve. Soit ϕ une formule. Supposons que la méthode des tableaux de BI, appliquée à ϕ, termine. Alors dans ce cas, le calcul étant correct et complet, nécessairement la tableau contient une branche à partir de laquelle un contre-modèle à base de monoïdes de ressources peut être extrait, noté $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \sqsubseteq)$. Par la propriété de la méthode des tableaux de BI, R et $\sqsubseteq$ sont finis [40, 68]. Considérons alors $\sqsubset = \sqsubseteq$ et $\Omega(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}, i, \Vdash_{\mathfrak{P}})$, avec $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$. Par définition de Ω, comme R et $\sqsubseteq$ sont finis, alors P, T et $\mathbb{M}^c(P)$ sont finis. En conséquence, et par la Proposition 2.3.4, $\mathcal{P}$ est un β-PN fini. Par le Théorème 2.3.11, nous pouvons alors conclure que $\Omega(\mathcal{K})$ est un contre-modèle à base de β-PN de ϕ qui est fini. □

2.5 Liens entre accessibilité et satisfaisabilité dans les réseaux de Petri à inconsistance

Dans cette dernière section, nous étendant les travaux [33, 34] sur l'étude d'une sémantique à base de réseaux de Petri pour la logique linéaire intuitionniste, en montrant que l'accessibilité ($\twoheadrightarrow$) entre deux marquages dans un β-PN est équivalant à la satisfaisabilité ($\Vdash_{\mathfrak{P}}$) d'une formule dans ce même β-PN.

Dans cette section, nous supposerons une bijection entre les places et les variables propositionnelles de l'ensemble Prop. Nous proposons alors de considérer la β-interprétation suivante :

$$i_{\lhd}(p) = \{M \mid M \twoheadrightarrow \{\!\{p\}\!\}\}$$

Il devient alors facile de vérifier que $i_{\lhd}$ est bien une β-interprétation au sens de la Définition 2.2.1. Nous donnons à présent une définition d'une fonction $\widehat{\cdot}$ permettant de transformer un marquage en une formule et une définition d'une clôture capturant l'accessibilité vers un marquage :

$$\widehat{M} = \begin{cases} \bot & \text{si } M = \beta \\ \mathrm{I} & \text{si } M = \{\!\{\}\!\} \\ p_1 * ... * p_m & \text{si } M = \{\!\{p_1, ..., p_m\}\!\} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \vec{M} = \{N \in \mathbb{M}(P) \mid N \twoheadrightarrow M\}$$

Proposition 2.5.1. Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Soit $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i_{\lhd}, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ le β-modèle associé. Pour tout marquage $M \in \mathbb{M}(P)$, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M}$.

Preuve. Il y a trois cas :

- Cas $M = \beta$:
  Par définition, nous avons $\beta \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$. Comme $\widehat{\beta} = \bot$, nous avons alors bien $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M}$.
- Cas $M = \{\!\{\}\!\}$:
  Dans ce cas, $\widehat{M} = \widehat{\{\!\{\}\!\}} = \mathrm{I}$. Par définition, nous avons $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$, puisque $\{\!\{\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. En conséquence, nous avons bien $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M}$.
- Cas $M \in \mathbb{M}^c(P) \setminus \{\{\!\{\}\!\}\}$:
  Nous prouvons ce cas par induction sur le nombre n de jetons contenus dans le marquage M.
  - Cas de base ($n = 1$) :
    Si $n = 1$ alors il existe une place $p \in P$ telle que $M = \{\!\{p\}\!\}$. Donc $\widehat{M} = p$. Par définition, $\{\!\{p\}\!\} \in i_{\lhd}(p)$. D'où $M \Vdash_{\mathfrak{P}} p$. Nous avons alors bien $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M}$.
  - Cas inductif :
    Nous supposons que cette proposition est vérifiée pour tout marquage consistant ayant au plus n jetons (HI).

Considérons un marquage M contenant $n+1$ jetons. Donc, M est de la forme, $M = \{\!\{p_1, ..., p_{n+1}\}\!\}$. Par (HI) et par définition, nous avons $\{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_1 * ... * p_n$ et $\{\!\{p_{n+1}\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} p_{n+1}$. Comme $M = \{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\} + \{\!\{p_{n+1}\}\!\}$ et donc $M \twoheadrightarrow \{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\} + \{\!\{p_{n+1}\}\!\}$, nous avons alors $M \Vdash_{\mathfrak{P}} p_1 * ... * p_{n+1}$.

□

Proposition 2.5.2. Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Soit $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i_{\lhd}, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ le β-modèle associé. Pour tous marquages $M_1, M_2 \in \mathbb{M}(P)$, Si $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$ alors $M_1 \twoheadrightarrow M_2$.

Preuve. Par cas sur M_2 :

- Cas $M_2 = \beta$:
  Dans ce cas, $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} \bot$. Donc, par définition $M_1 \twoheadrightarrow \beta$. Comme $M_2 = \beta$, nous avons alors $M_1 \twoheadrightarrow M_2$.
- Cas $M_2 = \{\!\{\}\!\}$:
  Comme $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$, nous avons $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} \mathrm{I}$ et donc $M_1 \twoheadrightarrow \{\!\{\}\!\}$. Par conséquent, $M_1 \twoheadrightarrow M_2$.
- Cas $M_2 \in \mathbb{M}^c(P) \setminus \{\{\!\{\}\!\}\}$:
  Nous prouvons ce cas par induction sur le nombre de jetons n contenu dans le marquage M_2.
  - Cas de base ($n = 1$) :
    Si $n = 1$ alors il existe une place $p \in P$ telle que $M_2 = \{\!\{p\}\!\}$. Comme $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$ alors nous avons $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} p$, donc $M_1 \in i_{\lhd}(p)$ et donc $M_1 \twoheadrightarrow \{\!\{p\}\!\}$. En conséquence, $M_1 \twoheadrightarrow M_2$.
  - Cas inductif :
    Nous suppons que la proposition est vérifiée pour tout marquage consistant contenant au plus n jetons (HI).
    Considérons le marquage M_2 contenant $n+1$ jetons. Donc M_2 est de la forme $M_2 = \{\!\{p_1, ..., p_{n+1}\}\!\}$. De plus, par hypothèse, $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. donc $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} p_1 * ... * p_n * p_{n+1}$. Par définition, il existe deux marquages M et M', tels que $M_1 \twoheadrightarrow M' + M''$ et $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} p_1 * ... * p_n$ et $M'' \Vdash_{\mathfrak{P}} p_{n+1}$. Par (HI) et par définition, nous avons $M' \twoheadrightarrow \{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\}$ et $M'' \twoheadrightarrow \{\!\{p_{n+1}\}\!\}$. Par le corollaire 2.1.4, $M' + M'' \twoheadrightarrow \{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\} + M''$ et $M'' + \{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\} \twoheadrightarrow \{\!\{p_{n+1}\}\!\} + \{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\}$. D'où, par transitivité, $M_1 \twoheadrightarrow \{\!\{p_{n+1}\}\!\} + \{\!\{p_1, ..., p_n\}\!\}$. En conclusion, $M_1 \twoheadrightarrow M_2$.

□

Pour finir nous montrons que accessibilité dans un β-PN est équivalent à satisfaisabilité dans ce même β-PN.

Théorème 2.5.3. Soit $\mathcal{P} = (P, T, pre, post, \mathbb{M}^c(P), \beta)$ un β-PN. Soit $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, i_{\lhd}, \Vdash_{\mathfrak{P}})$ le β-modèle associé. Pour tous marquages $M_1, M_2 \in \mathbb{M}(P)$, nous avons $M_1 \twoheadrightarrow M_2$ ssi $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1} \mathrel{-\!\!*} \widehat{M_2}$.

Preuve. Nous montrons que :

$$M_1 \twoheadrightarrow M_2 \text{ ssi } \overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2} \text{ ssi } \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}\} \subseteq \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}\} \text{ ssi } \{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1} \mathrel{-\!\!*} \widehat{M_2}$$

- Montrons que $M_1 \twoheadrightarrow M_2$ ssi $\overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2}$:
  - Supposons que $M_1 \twoheadrightarrow M_2$. Soit $M \in \overrightarrow{M_1}$. Par définition $M \twoheadrightarrow M_1$. Par transitivité, nous avons $M \twoheadrightarrow M_2$ et donc $M \in \overrightarrow{M_2}$. Par conséquent, $\overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2}$.

- Supposons que $\overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2}$. Comme $M_1 \in \overrightarrow{M_1}$, alors $M_1 \in \overrightarrow{M_2}$. Par conséquent $M_1 \twoheadrightarrow M_2$.

- Montrons que $\overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2}$ ssi $\{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}\} \subseteq \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}\}$:
  - Supposons que $\overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2}$. Soit M tel que $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}$. Par la Proposition 2.5.2, nous avons $M \twoheadrightarrow M_1$. Comme $\overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2}$ alors $M \twoheadrightarrow M_2$. Par la Proposition 2.5.1, $M_2 \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. Donc, par le Lemme 2.2.4, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. Par conséquent $\{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}\} \subseteq \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}\}$.
  - Supposons que $\{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}\} \subseteq \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}\}$. Soit $M \in \overrightarrow{M_1}$. Donc $M \twoheadrightarrow M_1$. Par la Proposition 2.5.1, $M_1 \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}$. Donc, par le Lemme 2.2.4, nous avons $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}$. Donc, par hypothèse, $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. Par la Proposition 2.5.2, nous avons alors $M \twoheadrightarrow M_2$. En conséquence $M \in \overrightarrow{M_2}$ et nous pouvons affirmer que $\overrightarrow{M_1} \subseteq \overrightarrow{M_2}$.

- Montrons que $\{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}\} \subseteq \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}\}$ ssi $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1} \mathrel{-\!\!*} \widehat{M_2}$:
  - Supposons que $\{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}\} \subseteq \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}\}$. Soit M' tel que $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}$. Par hypothèse, $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. Donc $\{\!\{\}\!\} + M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. Par conséquent, $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1} \mathrel{-\!\!*} \widehat{M_2}$.
  - Supposons que $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1} \mathrel{-\!\!*} \widehat{M_2}$. Soit M' tel que $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}$. Par hypothèse, $\{\!\{\}\!\} + M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. Donc $M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}$. Par conséquent $\{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1}\} \subseteq \{M \mid M \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_2}\}$.

En conclusion, nous avons $M_1 \twoheadrightarrow M_2$ ssi $\{\!\{\}\!\} \Vdash_{\mathfrak{P}} \widehat{M_1} \mathrel{-\!\!*} \widehat{M_2}$. □

Nous pouvons remarquer que le Théorème 2.5.3 nous permet de répondre à la question que nous nous posions au départ de notre étude : "la logique BI peut-elle modéliser et exprimer des propriétés dynamiques de ressources ?". En effet, ce théorème met en avant la capacité de BI à modéliser et exprimer des propriétés sur l'accessibilité entre deux marquages d'un β-PN. Les marquages pouvant être vus comme des ressources et l'accessibilité de ceux-ci encodant alors une manipulation de ressources, nous pouvons par conséquent répondre oui à notre question. Mais, observons de plus prêt la sémantique de l'implication additive $\rightarrow$ et de la négation $\neg$ définie par $\neg\phi \equiv \phi \rightarrow \bot$, que nous redonnons ci-dessous :

- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \rightarrow \psi$ ssi $\forall M' \in \mathbb{M}(P) \cdot (M' \twoheadrightarrow M \text{ et } M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi) \Rightarrow M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \neg\phi$ ssi $\forall M' \in \mathbb{M}(P) \cdot (M' \twoheadrightarrow M \text{ et } M' \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi) \Rightarrow M' \twoheadrightarrow \beta$

Nous remarquons que ces deux connecteurs sont intuitionnistes, alors que nous pourrions souhaiter une définition classique comme :

- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \rightarrow \psi$ ssi $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \phi \Rightarrow M \Vdash_{\mathfrak{P}} \psi$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \neg\phi$ ssi $M \nVdash_{\mathfrak{P}} \phi$

Nous faisons aussi observer que, par une telle approche, lorsque $M \Vdash_{\mathfrak{P}} p$, il nous est impossible de déterminer si cela est dû au fait que le marquage M possède uniquement un jeton à la place p, ou au fait que ce marquage peut accéder, après avoir activé plusieurs transitions, au marquage $\{\!\{p\}\!\}$. Pour pouvoir distinguer ces deux cas, nous avons besoin de modalités, nous permettant alors de distinguer ces cas de la manière suivante :

- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} \Diamond p$: le marquage M peut accéder au marquage $\{\!\{p\}\!\}$
- $M \Vdash_{\mathfrak{P}} p$: le marquage M est le marquage $\{\!\{p\}\!\}$ $(M = \{\!\{p\}\!\})$

Pour ces raisons, il nous semble nécessaire d'étudier des extensions modales de BI, mais aussi d'étudier des extensions modales de BBI, une variante de BI où les connecteurs additives sont issus de la logique classique.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté de nouveaux réseaux de Petri, nommés β-PN, ayant la particularité de posséder des marquages inconsistants. Nous avons alors proposé une sémantique à base de β-PN pour BI, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles à base de β-PN pour BI. Nous avons montré l'adéquation de notre nouvelle sémantique. Pour finir, nous avons fait le lien entre accessibilité de deux marquages dans un β-PN et satisfaisabilité d'une formule dans ce même réseau.

En guise de travaux futurs, nous souhaiterions implanter notre méthode d'extraction de contre-modèles à base de β-PN dans le démonstrateur BILL de la logique BI [41]. Cela aura pour effet de permettre à l'utilisateur d'avoir le choix, dans le cas où une formule ϕ ne serait pas valide, entre extraire un contre-modèle de ϕ à base de monoïdes de ressources et extraire un contre-modèle à base de β-PN.

Comme nous l'avons mis en avant en conclusion de la section précédente, l'étude d'extensions modales nous semble nécessaire. Dans le chapitre suivant, nous présenterons une nouvelle extension modale de BI, nommée DBI, permettant de capturer des propriétés dynamiques de ressources. En particulier, nous revisiterons l'exemple que nous avons présenté dans le chapitre 1, montrant alors que notre nouvelle logique est capable de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des produits dont les prix fluctuent en fonction de l'état du marché. De plus, cette extension nous permettra de poser les bases en termes de modélisation et de la théorie de la preuve sur lesquelles nous nous appuierons pour l'ensemble de nos travaux sur la dynamique des ressources.

Chapitre 3

Ressources aux propriétés dynamiques

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une nouvelle sémantique à base de réseaux de Petri à inconsistance (β-PN) pour la logique BI. Nous avons aussi montré grâce à cette sémantique que la logique BI était capable de capturer une certaine forme de dynamique des ressources, à savoir de la production et consommation de ressources (de jetons dans un β-PN). Par ailleurs, nous avons montré les limites dans l'expressivité de propriétés dynamiques de ressources en concluant à la nécessité de nous tourner vers une extension modale de la logique BI.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étendre BI par de nouvelles modalités $\Diamond$ et $\Box$, et d'ajouter aux modèles de BI un automate (ensemble préordonné d'états) permettant de capturer une nouvelle forme de dynamique des ressources. Comme nous le verrons, cette extension, nommée DBI (Dynamic BI) [27], permet de capturer des propriétés dynamiques de ressources, c'est-à-dire de modéliser des ressources ayant des propriétés évoluant au cours des itérations d'un système. Par ailleurs, cette première extension nous permet de poser les bases de la modélisation logique de la dynamique des ressources et de la recherche de preuves pour l'ensemble de notre étude.

Après avoir défini le langage et la sémantique de DBI, nous illustrons la sémantique de notre logique en revisitant l'exemple présenté dans le Chapitre 1 : nous montrons par exemple que les modèles que nous proposons permettent en particulier de modéliser des prix (propriétés) de produits évoluant (dynamiques) en fonction de l'état courant du marché. Par ailleurs, nous proposons une méthode des tableaux avec labels, nous montrons sa correction et sa complétude, et nous proposons aussi une méthode d'extraction de contre-modèles.

3.1 Langage et sémantique de la logique DBI

Pour notre étude logique de la dynamique des ressources, nous proposons une première extension modale de BI, nommée DBI (Dynamic BI) [27], permettant de modéliser et d'exprimer des propriétés dynamiques de ressources, c'est-à-dire modélisant des ressources dont les propriétés évoluent au cours des itérations d'un système.

Le langage de DBI est obtenu en étendant le langage de BI par deux modalités $\Diamond$ et $\Box$. Soit Prop un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. Le langage $\mathcal{L}_{\mathsf{DBI}}$ de DBI est défini par la grammaire suivante, pour tout $p \in \text{Prop}$:

$$X ::= p \mid \top \mid \bot \mid \mathrm{I} \mid X \wedge X \mid X \vee X \mid X \to X \mid X * X \mid X \mathrel{-\!\!*} X \mid \Diamond X \mid \Box X$$

Tout comme dans BI, la négation est aussi définie par : $\neg X \equiv X \to \bot$. Comme nous le verrons, ces nouvelles modalités vont nous permettre d'exprimer des propriétés dynamiques sur des ressources. Ainsi $\Diamond\phi$ exprime que la ressource que nous considérons satisfait la propriété ϕ dans un état accessible du système et $\Box\phi$ exprime que la propriété ϕ est satisfaite dans tous les états accessibles.

Afin de permettre aux modèles de BI de capturer cette première forme de dynamique, nous proposons d'associer aux monoïdes de ressources un automate encodé par un ensemble d'états et un préordre sur ces états capturant l'accessibilité entre les états de l'automate. Concernant les modèles de BI, il existe une autre sémantique à base de monoïdes de ressources [40, 68] qui est équivalente (du point de vue de la validité) à celle présentée dans le Chapitre 1. Cette autre sémantique considère une composition totale et une ressource inconsistante [68]. Nous faisons le choix de nous appuyer sur cette sémantique, en particulier parce qu'elle offre l'intérêt de faciliter certaines preuves. Nous faisons remarquer que notre choix dans le Chapitre 1 de présenter BI au travers de sa sémantique à base de monoïdes de ressources partiels a été de pouvoir comparer la sémantique de BI avec celle de BBI, ne se distinguant dans ce cas que par leur relation sur les ressources.

Définition 3.1.1 (Monoïde de ressources dynamique)**.** Un *monoïde de ressources dynamique* (MRD) est une structure $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$ telle que :

- R est un ensemble d'éléments appelés *ressources*
- S est un ensemble d'éléments appelés *états*
- $e \in R$ et $\pi \in R$.
- $\bullet : R \times R \to R$ tel que, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Élément neutre : $r_1 \bullet e = r_1$
  - Élément absorbant : $r_1 \bullet \pi = \pi$
  - Commutativité : $r_1 \bullet r_2 = r_2 \bullet r_1$
  - Associativité : $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) = (r_1 \bullet r_2) \bullet r_3$
- $\sqsubseteq \subseteq R \times R$ est un préordre tel que, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Réflexivité : $r_1 \sqsubseteq r_1$
  - Transitivité : si $r_1 \sqsubseteq r_2$ et $r_2 \sqsubseteq r_3$ alors $r_1 \sqsubseteq r_3$
  - Plus grand élément : $r_1 \sqsubseteq \pi$
- Compatibilité : pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$, si $r_1 \sqsubseteq r_2$ alors $r_1 \bullet r_3 \sqsubseteq r_2 \bullet r_3$
- $\preceq \subseteq S \times S$ est un préordre tel que, pour tous $s_1, s_2, s_3 \in S$:
  - Réflexivité : $s_1 \preceq s_1$
  - Transitivité : si $s_1 \preceq s_2$ et $s_2 \preceq s_3$ alors $s_1 \preceq s_3$

Nous pouvons observer la ressource inconsistante π qui est absorbante et est aussi le plus grand élément de R. L'argument de preuve de l'équivalence des deux sémantiques de BI, celle à base de monoïdes de ressources partiels et celle à base de monoïdes de ressources, repose sur des transformations de contre-modèles telles que $r_1 \bullet r_2$ est indéfini dans la première sémantique si et seulement si $r_1 \bullet r_2 = \pi$ dans la seconde sémantique. Autrement dit, cette ressource inconsistante peut être vue comme une ressource encodant une composition non définie de deux ressources.
Le point central, qui nous intéresse ici, est l'introduction dans les modèles de BI d'un ensemble d'états S et d'un préordre $\preceq$ sur ces états, permettant ainsi d'introduire une première forme de dynamique dans les modèles.

Nous redéfinissons l'interprétation afin de la rendre dynamique.

Définition 3.1.2 (Interprétation dynamique)**.** Une *interprétation dynamique* est une fonction $[\![\cdot]\!] : \text{Prop} \to \mathbb{P}(R \times S)$, vérifiant les propriétés suivantes, pour tous $s \in S$ et $p \in \text{Prop}$:

- Monotonie (K) : $\forall r, r' \in R$ tels que $r \sqsubseteq r'$, si $(r, s) \in [\![p]\!]$ alors $(r', s) \in [\![p]\!]$
- Inconsistance (BC) : $\forall r \in R$ tel que $\pi \sqsubseteq r$, $(r, s) \in [\![p]\!]$

Par la suite, nous écrirons *interprétation*, au lieu d'*interprétation dynamique*. Nous pouvons observer deux points importants. Le premier, provenant de BI, concerne le fait que la ressource inconsistante π appartient à l'interprétation de toute variable propositionnelle. Le second est que l'interprétation est étendue afin de lui permettre de capturer des propriétés dynamiques de ressources au sens où l'interprétation d'une variable propositionnelle ne dépend plus uniquement d'une ressource, mais dorénavant d'une ressource à un état donné (de couples ressource/état).

Définition 3.1.3 (Modèle dynamique)**.** Un *modèle dynamique* est un triplet $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ tel que $\mathcal{R}$ est un MRD, $[\![\cdot]\!]$ est une interprétation et $\vDash_{\mathcal{K}} \subseteq R \times S \times \mathcal{L}_{\mathsf{DBI}}$ est une *relation de forcing* définie par :

- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} p$ ssi $(r, s) \in [\![p]\!]$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$ ssi $e \sqsubseteq r$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \top$ toujours
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$ ssi $\pi \sqsubseteq r$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \wedge \psi$ ssi $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \vee \psi$ ssi $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$ ssi $\forall r' \in R \cdot (r \sqsubseteq r'$ et $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi) \Rightarrow r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$ ssi $\exists r', r'' \in R \cdot r' \bullet r'' \sqsubseteq r$ et $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r'', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$ ssi $\forall r' \in R \cdot r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \Rightarrow r \bullet r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$ ssi $\exists s' \in S \cdot s \preceq s'$ et $r, s' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Box\phi$ ssi $\forall s' \in S \cdot s \preceq s' \Rightarrow r, s' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$

Par la suite, nous parlerons de *modèle*, au lieu de *modèle dynamique*. La définition de la relation de forcing de BI a été étendue avec les cas pour les modalités $\Diamond$ et $\Box$, permettant à DBI d'exprimer, par exemple, qu'à l'état s la ressource r satisfera dans un état accessible s' ($s \preceq s'$) la formule ϕ : $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$.

Définition 3.1.4 (Validité)**.** Un formule ϕ est *valide*, noté $\vDash \phi$, si et seulement si $e, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ pour tout état s de tout modèle $\mathcal{K}$.

Pour terminer cette section, nous démontrons un lemme de monotonie et un lemme d'inconsistance.

Lemme 3.1.5 (Monotonie)**.** Pour tout modèle $\mathcal{K}$, toutes ressources r et r', tout état s et toute formule ϕ si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r \sqsubseteq r'$ alors $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$.

Preuve. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$, un modèle. Soit $r, r' \in R$ et soit $s \in S$ tels que $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r \sqsubseteq r'$. Nous prouvons le lemme par induction structurelle sur la formule ϕ.

Cas de base :

- Cas $\phi = p$ ($p \in$ Prop) :
  Si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} p$ alors $(r, s) \in [\![p]\!]$. Comme $r \sqsubseteq r'$ alors, par (K), d'où $r', s \in [\![p]\!]$. En conclusion $r', s \vDash_{\mathcal{K}} p$.
- Cas $\phi = \mathrm{I}$:
  Si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$ alors $e \sqsubseteq r$. Comme $r \sqsubseteq r'$ alors, par transitivité, $e \sqsubseteq r'$. D'où $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$.
- Cas $\phi = \top$:
  $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \top$ est toujours vrai, par définition.

- Cas $\phi = \bot$:
  Si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$ alors $\pi \sqsubseteq r$. Donc, comme $r \sqsubseteq r'$ alors, par transitivité, $\pi \sqsubseteq r'$. En conclusion $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$.

Cas inductifs : Nous supposons que le lemme est vérifié pour les formules A et B (HI).

- Cas $\phi = A \wedge B$:
  Si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} A \wedge B$ alors $r, s \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. Comme $r \sqsubseteq r'$ alors, par (HI), $r', s \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r', s \vDash_{\mathcal{K}} B$. Donc, nous avons $r', s \vDash_{\mathcal{K}} A \wedge B$.
- Cas $\phi = A \vee B$:
  Ce cas est similaire au cas précédent.
- Cas $\phi = A \to B$:
  Si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} A \to B$ alors, par définition, pour tout $x \in R$ tel que $r \sqsubseteq x$ et $x, s \vDash_{\mathcal{K}} A$, nous avons $x, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. Soit $r'' \in R$ tel que $r' \sqsubseteq r''$ et $r'', s \vDash_{\mathcal{K}} A$. Par transitivité, $r \sqsubseteq r''$. Donc $r'', s \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion, nous avons $r', s \vDash_{\mathcal{K}} A \to B$.
- Cas $\phi = A * B$:
  Comme $r, s \vDash_{\mathcal{K}} A * B$, alors il existe $r_1, r_2 \in R$ tel que $r_1 \bullet r_2 \sqsubseteq r$ et $r_1, s \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r_2, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. Par transitivité, $r_1 \bullet r_2 \sqsubseteq r'$. En conclusion, comme $r_1 \bullet r_2 \sqsubseteq r'$ et $r_1, s \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $r_2, s \vDash_{\mathcal{K}} B$, nous avons alors $r', s \vDash_{\mathcal{K}} A * B$.
- Cas $\phi = A \mathrel{-\!\!*} B$:
  Soit $r'' \in R$ tel que $r'', s \vDash_{\mathcal{K}} A$. Comme $r \sqsubseteq r'$ alors, par compatibilité, $r \bullet r'' \sqsubseteq r' \bullet r''$. De plus, comme $r, s \vDash_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$, alors $r \bullet r'', s \vDash_{\mathcal{K}} B$. Donc, par (HI), $r' \bullet r'', s \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion, nous avons montré que $r', s \vDash_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$.
- Cas $\phi = \Diamond A$:
  Si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond A$ alors il existe $s' \in S$ tel que $s \preceq s'$ et $r, s' \vDash_{\mathcal{K}} A$. Par (HI), $r', s' \vDash_{\mathcal{K}} A$. En conclusion $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond A$.
- Cas $\phi = \Box A$:
  Dans ce cas $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Box A$. Soit $s' \in S$ tel que $s \preceq s'$. Par définition $r, s' \vDash_{\mathcal{K}} A$. Par (HI), nous avons donc $r', s' \vDash_{\mathcal{K}} A$. En conclusion, nous avons $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \Box A$.

□

Lemme 3.1.6 (Inconsistance)**.** Pour tout modèle $\mathcal{K}$, tout état s et toute formule ϕ, nous avons $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$.

Preuve. Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, avec $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$, un modèle. Nous démontrons le lemme par induction structurelle sur la formule ϕ.

Cas de base : Soit $s \in S$.

- Cas $\phi = p$ ($p \in \mathrm{Prop}$) :
  Par réflexivité $\pi \sqsubseteq \pi$. Alors, par la propriété (BC) de l'interprétation, $(\pi, s) \in [\![p]\!]$. En conclusions $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} p$.
- Cas $\phi = \mathrm{I}$:
  Comme π est le plus grand élément, alors $e \sqsubseteq \pi$. Ainsi, nous avons $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$.
- Cas $\phi = \top$:
  Par définition, nous avons $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} \top$.
- Cas $\phi = \bot$:
  Par réflexivité, $\pi \sqsubseteq \pi$. D'où $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$.

Cas inductifs : Nous supposons que pour tout état $s \in S$, $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} B$ (HI). Soit $s \in S$ un état quelconque.

- Cas $\phi = A \wedge B$:
  Par (HI), $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. Donc, $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A \wedge B$.

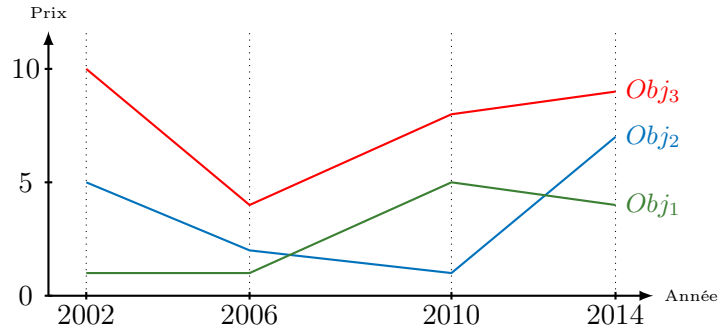
- Cas $\phi = A \vee B$:
  Ce cas est similaire au cas précédent.
- Cas $\phi = A \to B$:
  Par (HI), $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. Soit $r \in R$ tel que $\pi \sqsubseteq r$. Par le Lemme 3.1.5, $r, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A \to B$.
- Cas $\phi = A * B$:
  Comme π est absorbant et par réflexivité, nous avons $\pi \bullet \pi \sqsubseteq \pi$. De plus, par (HI), $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion, $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A * B$.
- Cas $\phi = A \mathrel{-\!\!*} B$:
  Soit $r \in R$ tel que $r, s \vDash_{\mathcal{K}} A$. Comme π est absorbant et par (HI), alors $\pi \bullet r, s \vDash_{\mathcal{K}} B$. En conclusion, $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A \mathrel{-\!\!*} B$.
- Cas $\phi = \Diamond A$:
  Par (HI), $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} A$. Par réflexivité, $s \preceq s$. En conclusion, $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond A$.
- Cas $\phi = \Box A$:
  L'hypothèse d'induction (HI) étant supposée pour tout état de S, elle est donc supposée vraie en particulier pour tout s' tel que $s \preceq s'$. Ainsi, par (HI), pour tout $s' \in S$ tel que $s \preceq s'$, nous avons $\pi, s' \vDash_{\mathcal{K}} A$. En conclusion $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} \Box A$.

□

Nous venons de présenter la sémantique de DBI. Dans la section suivante, nous illustrons les modèles et l'expressivité de DBI, en particulier par rapport aux propriétés dynamiques de ressources.

3.2 Expressivité de la logique DBI

Nous revisitons l'exemple que nous avons présenté dans le Chapitre 1, en y introduisant la notion de propriété dynamique, à savoir que le prix de produits évoluent dans le temps. Nous profiterons aussi de cette section pour illustrer la notion de ressource inconsistante.



	2002	2006	2010	2014
Obj_1	1€	1€	5€	4€
Obj_2	5€	2€	1€	8€
Obj_3	10€	4€	7€	9€

FIGURE 4 – Exemple de propriété dynamique : évolution de prix

Nous supposons que le magasin que nous considérons vende maintenant trois types d'objets Obj_1, Obj_2 et Obj_3, et que l'évolution du prix de ces objets est représentée par la Figure 4.
Afin de construire notre modèle dynamique, nous considérons toujours la monnaie comme étant les ressources, mais cette fois, non pas des multi-ensembles de pièces et de billets, mais la valeur totale de monnaie dont dispose un acheteur. Afin d'illustrer la ressource inconsistante, nous tenons compte de la masse (quantité) totale de monnaie en circulation. Nous noterons qu'il existe plusieurs types d'agrégats monétaires [1], mais nous ne rentrons pas ici dans de telles

considérations. Ainsi, une ressource est une valeur monétaire comprise entre 0 et $\mathbf{M}$, où $\mathbf{M}$ est la masse totale de monnaie en circulation. Par ailleurs, par souci de simplicité de notation, nous ne considérerons que des valeurs entières de monnaie (pas de cents). Nous proposons alors de considérer la structure suivante $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$, telle que :

- $R = \{r \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant r \leqslant \mathbf{M}\} \cup \{\pi\}$
- $r_1 \bullet r_2 = \begin{cases} \pi & \text{si } r_1 = \pi \text{ ou } r_2 = \pi \text{ ou } r_1 + r_2 > M \\ r_1 + r_2 & \text{sinon} \end{cases}$
- $e = 0$
- $r_1 \sqsubseteq r_2$ ssi $r_2 = \pi$ ou $r_1 \leqslant r_2$
- $S = \{s \in \mathbb{N} \mid 2002 \leqslant s \leqslant 2014\}$
- $s_1 \preceq s_2$ ssi $s_1 \leqslant s_2$

Observons notre structure de plus près. R représente l'ensemble des ressources, c'est-à-dire toutes les quantités de monnaie pouvant être possédées par un acheteur, autrement dit toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $\mathbf{M}$, ainsi que la ressource inconsistante π représentant une valeur monétaire strictement supérieure à $\mathbf{M}$ (en effet, nul ne pourrait avoir plus de monnaie qu'il n'en existe). La composition $\bullet$ est définie comme l'addition, par exemple $1 \bullet 2 = 3$, mais cela à condition que le résultat ne dépasse pas $\mathbf{M}$. Dans le cas contraire, la composition est égale à π, signifiant que nous avons obtenu une quantité de monnaie inconsistante. Ainsi, nous avons par exemple $1 \bullet \mathbf{M} = \pi$ et nous remarquons aussi que 0 euro (noté alors e) est bien l'élément neutre de cette composition. La relation $\sqsubseteq$ sur les valeurs monétaires est définie comme la relation $\leqslant$ sur les nombres entiers, par exemple $1 \sqsubseteq 3$. De plus π est naturellement considérée comme plus grande que toute valeur monétaire puisque cette ressource représente une quantité de monnaie plus grande que la masse totale de monnaie en circulation. Ainsi, nous avons par exemple $2 \sqsubseteq \pi$. Nous avons choisi S comme l'ensemble des années comprises entre 2002 et 2014 et $\preceq$ est défini par $s_1 \preceq s_2$ ssi $s_1 \leqslant s_2$, encodant ainsi bien l'accessibilité entre les années. Par exemple, nous avons $2002 \preceq 2006$, $2014 \not\preceq 2010$ et $2011 \preceq 2011$: en 2002 il est possible d'accéder à l'année 2006 (en laissant le temps s'écouler), en 2014 il n'est plus possible d'accéder à l'année 2010 et en 2011 il est possible d'accéder à l'année 2011 puisque nous y sommes déjà. Pour finir, nous faisons remarquer que $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$ est bien un MRD au sens de la Définition 3.1.1.

Nous proposons de définir maintenant une interprétation dynamique permettant de capturer l'évolution du prix des trois objets. Nous considérons l'ensemble de variables propositionnelles $\text{Prop} = \{O_1, O_2, O_3\}$, où O_i exprime comme dans le Chapitre 1 : "au moins assez d'argent est à disposition pour acheter l'objet Obj_i". Nous considérons aussi les trois fonctions $prix_1$, $prix_2$ et $prix_3$, de signature $S \to R$, telles que $prix_i(s)$ retourne le prix de l'objet Obj_i durant l'année s. Nous définissons alors l'interprétation suivante :

$$[\![O_i]\!] = \{(r, s) \mid s \in S \text{ et } prix_i(s) \sqsubseteq r\}$$

Autrement dit, nous avons $(4, 2006) \in [\![O_2]\!]$ puisque 4 euros permettaient d'acheter l'objet Obj_2 en 2006 (coûtant 2 euros à cette époque), mais $(1, 2006) \notin [\![O_2]\!]$ puisque 1 euro n'était pas suffisant pour acheter cet objet. Par ailleurs, nous remarquons que pour toute date s, (π, s) appartient aussi à l'interprétation de O_2, en effet supposons que nous possédions une somme d'argent inconsistante, ceci étant absurde, nous considérons alors que toute action devient possible, en particulier de pouvoir acheter l'objet Obj_2. Pour finir, nous remarquons que l'interprétation que nous venons de définir satisfait bien la Définition 3.1.2.

Finalement, nous avons obtenu un modèle dynamique $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$. Dans un premier temps nous pouvons remarquer que DBI est capable d'exprimer les mêmes propriétés que BI. Par exemple, supposons que nous soyons en 2002, alors il nous est possible d'exprimer que 8 euros nous permettent d'acheter d'une part uniquement l'objet l'objet Obj_1 en un seul exemplaire (puisque coûtant 1 euro à cette époque), nous permettent aussi d'acheter Obj_1 en deux exemplaires ainsi que Obj_2 en un seul exemplaire (soit un total de 7 euros), et nous permettent aussi, en ajoutant au moins suffisamment de ressources pour acheter Obj_2 (soit plus de 5 euros), d'acheter Obj_3 :

$$8, 2002 \vDash_{\mathcal{K}} O_1 \wedge (O_1 * O_1 * O_2) \wedge (O_2 \mathrel{-\!\!*} O_3)$$

Parallèlement, il nous est possible, grâce aux modalités de DBI, d'exprimer des propriétés dynamiques sur les ressources. Nous allons illustrer ces diverses propriétés en supposons que nous sommes en 2002.
La première question que nous nous posons est de savoir si, avec 1 euro, il nous est possible, ou sera un jour possible, de pouvoir acheter un exemplaire de Obj_2. Cette question revient à déterminer si $1, 2002 \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond O_2$. Nous avons $prix_2(2010) = 1$ et $1 \sqsubseteq 1$, donc $(1, 2010) \in [\![O_2]\!]$ et donc $1, 2010 \vDash_{\mathcal{K}} O_2$. De plus comme $2002 \preceq 2010$, alors nous avons par définition $1, 2002 \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond O_2$, ce qui exprime qu'avec 1 euro en 2002 il sera possible dans un état futur (2010) d'acheter un exemplaire de Obj_2.
Concernant la modalité $\Box$, une ressource r à un état s satisfait $\Box\phi$ si et seulement si dans tout état accessible à partir s la ressource r satisfait ϕ. Remarquant qu'en 2002, 11 euros nous permettent toujours d'acheter Obj_3, c'est-à-dire sur toute la période de 2002 à 2014, alors nous avons $11, 2002 \vDash_{\mathcal{K}} \Box O_3$: "en 2012, 11 euros permettrons toujours d'acheter Obj_3".
Finalement, nous faisons remarquer qu'il est possible d'exprimer des propriétés plus complexes, comme par exemple :

$$5, 2002 \vDash_{\mathcal{K}} O_2 \wedge (O_1 * \Diamond((O_2 * O_2) \wedge \Diamond(O_2 \mathrel{-\!\!*} O_3)))$$

En effet, 5 euros en 2002 sont suffisant pour acheter Obj_2. De plus, cette somme d'argent peut être séparée en deux $(5 = 1 \bullet 4)$, de telle sorte que la première partie (1 euro) permette d'acheter Obj_1 (valant 1 euro en 2002) et l'autre partie (les 4 euros) permette dans une année accessible (ici 2006) de satisfaire la propriété $(O_2 * O_2) \wedge \Diamond(O_2 \mathrel{-\!\!*} O_3)$. Il nous reste alors à vérifier que nous avons bien $4, 2006 \vDash_{\mathcal{K}} (O_2 * O_2) \wedge \Diamond(O_2 \mathrel{-\!\!*} O_3)$. Et effectivement, 4 euros en 2006 permettent bien d'acheter deux exemplaires de Obj_2 et, dans un état futur (qui sera alors 2014), en ajoutant à ces 4 euros suffisamment de monnaie pour acheter Obj_2 (c'est-à-dire en ajoutant au moins 8 euros), nous aurons la possibilité acheter Obj_3 (qui vaudra alors 9 euros).

Dans cette section, nous avons illustré l'expressivité de la logique DBI et la notion de propriétés dynamiques de ressources qu'elle permettait de capturer. Dans la section suivante, nous nous intéressons à la recherche de preuves dans DBI et plus particulièrement, nous proposons une méthode des tableaux avec labels et contraintes, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles.

3.3 Une méthode des tableaux pour DBI

Dans cette section, nous proposons une méthode des tableaux [7, 36] pour DBI à base de labels et de graphes de ressources. Cette méthode reprend les principes de la méthode des tableaux pour BI [40], étendue par des labels et contraintes d'états en vue de capturer les aspects dynamiques de nos modèles.

3.3.1 Labels de ressources et d'états

Des *labels* et *contraintes* ont été introduits dans la méthode des tableaux de BI [40] afin de capturer de l'information sémantique dans le calcul, permettant en particulier l'extraction d'un contre-modèle en cas de non validité d'une formule. Plus particulièrement, ces labels ont pour rôle d'encoder l'ensemble de ressources (R), une composition de labels permet d'encoder la composition de ressources ($\bullet$) et les contraintes de labels ont pour objectif de capturer le préordre sur les ressources ($\sqsubseteq$). Dans DBI, les monoïdes de ressources sont dynamiques, nous obligeant alors à introduire de nouveaux labels et de nouvelles contraintes pour capturer les ensembles d'états (S) ainsi que le préordre sur ces états ($\preceq$).

Définition 3.3.1 (Label et contrainte de ressources)**.** Soit $\gamma_r = \{c_1, c_2, ...\}$ un ensemble dénombrable infini de constantes. Un *label de ressources* est un élément appartenant au langage généré par la grammaire suivante :

$$X ::= 1_r \mid c_i \mid X \circ X$$

où $c_i \in \gamma_r$ et $1_r \notin \gamma_r$. Les termes seront considérés modulo l'associativité et la commutativité de $\circ$ et la neutralité de 1_r. Nous notons L_r l'ensemble de tous les labels de ressources.
Une *contrainte de ressources* est une expression de la forme $x \leq y$ où x et y sont des labels de ressources.

Par exemple, $c_1 \circ 1_r \circ c_2 \circ c_1$ est un label de ressources et est égal au label de ressources $c_1 \circ c_1 \circ c_2$. Nous noterons xy le label de ressources $x \circ y$. Ainsi, $c_1 \circ c_1 \circ c_2$ et $c_1c_1c_2$ sont deux notations du même label. De plus, nous dirons que x est un *sous-label* de y si et seulement si il existe z tel que $x \circ z = y$. Nous noterons $\mathcal{E}(x)$ l'ensemble de tous les sous-labels de x.

Définition 3.3.2 (Label et contrainte d'états)**.** Un *label d'états* est un élément appartenant à l'ensemble dénombrable infini $L_s = \{l_1, l_2, ...\}$.
Une *contrainte d'états* est une expression de la forme $u \lhd v$ où u et v sont des labels d'états.

Nous remarquons que les labels d'états sont simplement des constantes de la forme l_i.

Définition 3.3.3 (Domaine)**.** Soit $\mathcal{C}_r$ un ensemble de contraintes de ressources. Le *domaine* de $\mathcal{C}_r$, noté $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_r)$, est l'ensemble de tous les sous-labels de ressources qui apparaissent dans $\mathcal{C}_r$.
Plus spécifiquement : $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}_r) = \bigcup_{x \leq y \in \mathcal{C}_r} (\mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y))$.

Définition 3.3.4 (Alphabet)**.** Soit $\mathcal{C}_r$ (resp. $\mathcal{C}_s$) un ensemble de contraintes de ressources (resp. d'états). L'*alphabet* de $\mathcal{C}_r$ (resp. $\mathcal{C}_s$) est l'ensemble des constantes (resp. des labels d'état) apparaissant dans $\mathcal{C}_r$ (resp. $\mathcal{C}_s$).
Plus spécifiquement : $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r) = \gamma_r \cap \mathcal{D}_r(\mathcal{C}_r)$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s) = \bigcup_{u \lhd v \in \mathcal{C}_s} \{u, v\}$.

Les labels et contraintes de ressources et d'états permettent d'encoder dans la méthode des tableaux de l'information sémantique. Pour cela, nous avons besoin que $\leq$ capture les propriétés de $\sqsubseteq$ (réflexivité, transitivité et compatibilité) et que $\lhd$ capture les propriétés de $\preceq$ (réflexivité et transitivité). Dans cet objectif, des mécanismes de clôture d'ensemble de contraintes sont utilisés. Nous étendons les règles de clôture proposées pour BI et BBI [58].

Définition 3.3.5 (Clôture d'un ensemble de contraintes de ressources)**.** Soit $\mathcal{C}_r$ un ensemble de contraintes de ressources. La clôture de $\mathcal{C}_r$ (noté $\overline{\mathcal{C}_r}$) est le plus petit ensemble tel que $\mathcal{C}_r \subseteq \overline{\mathcal{C}_r}$ et clos par les règles suivantes :

$$\frac{x \leq y \qquad y \leq z}{x \leq z}\ \langle t_r \rangle \qquad \frac{xy \leq xy}{x \leq x}\ \langle d_r \rangle \qquad \frac{ky \leq ky \qquad x \leq y}{kx \leq ky}\ \langle c_r \rangle \qquad \frac{x \leq y}{x \leq x}\ \langle l_r \rangle \qquad \frac{x \leq y}{y \leq y}\ \langle r_r \rangle$$

Nous pouvons remarquer que ces précédentes règles n'introduisent pas de nouvelle constante (élément appartenant à γ_r) et seule la règle $\langle c_r \rangle$ introduit un nouveau label, ici kx (attention, kx est un nouveau label de ressources, mais toutes les constantes le constituant apparaissaient déjà dans les prémisses de la règle).

Définition 3.3.6 (Clôture d'un ensemble de contraintes d'états)**.** Soit $\mathcal{C}_s$ un ensemble de contraintes d'états. La clôture de $\mathcal{C}_s$ (noté $\overline{\mathcal{C}_s}$) est le plus petit ensemble tel que $\mathcal{C}_s \subseteq \overline{\mathcal{C}_s}$ et clos par les règles suivantes :

$$\frac{u \lhd v}{u \lhd u}\ \langle l_s \rangle \qquad \frac{u \lhd v}{v \lhd v}\ \langle r_s \rangle \qquad \frac{u \lhd v \qquad v \lhd w}{u \lhd w}\ \langle t_s \rangle$$

En guise d'exemple, considérons l'ensemble de contraintes d'états $\mathcal{C}_s = \{l_1 \lhd l_2, l_2 \lhd l_3, l_2 \lhd l_4, l_4 \lhd l_5\}$. Nous avons alors $l_1 \lhd l_2 \in \overline{\mathcal{C}_s}$ parce que $\mathcal{C}_s \subseteq \overline{\mathcal{C}_s}$ et nous avons aussi $l_1 \lhd l_5 \in \overline{\mathcal{C}_s}$ parce que :

$$\dfrac{\dfrac{l_1 \lhd l_2 \qquad l_2 \lhd l_4}{l_1 \lhd l_4}\ \langle t_s \rangle \qquad l_4 \lhd l_5}{l_1 \lhd l_5}\ \langle t_s \rangle$$

Nous terminons cette sous-section en présentant quelques propriétés sur la clôture d'un ensemble de contraintes de ressources ou d'états, qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 3.3.7. Soient $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}'_r$ deux ensembles de contraintes de ressources. Soient $\mathcal{C}_s$ et $\mathcal{C}'_s$ deux ensembles de contraintes d'états.

1. Si $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}'_r$ alors $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}'_r}$
2. Si $u \leq v \in \overline{\mathcal{C}_s}$ et $\mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{C}'_s$ alors $u \leq v \in \overline{\mathcal{C}'_s}$

Preuve. Par induction sur la hauteur des arbres de dérivation des contraintes de $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_s$. L'idée centrale est que toutes les contraintes appartenant à $\mathcal{C}_r$ et permettant, par les règles de la Définition 3.3.5, de déduire que $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$, appartiennent aussi à $\mathcal{C}'_r$, puisque $\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}'_r$. En conséquence $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}'_r}$. □

Proposition 3.3.8. Soit $\mathcal{C}_r$ un ensemble de contraintes de ressources :

1. Si $kx \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ alors $x \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$
2. Si $x \leq ky \in \overline{\mathcal{C}_r}$ alors $y \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$

Preuve. Nous donnons les arbres de dérivation suivants :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{kx \leq y}{kx \leq kx}\ \langle l_r \rangle}{xk \leq xk}\ k \circ x = x \circ k}{x \leq x}\ \langle d_r \rangle \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x \leq ky}{ky \leq ky}\ \langle r_r \rangle}{yk \leq yk}\ k \circ y = y \circ k}{y \leq y}\ \langle d_r \rangle$$

□

Corollaire 3.3.9. Soit $\mathcal{C}_r$ un ensemble de contraintes de ressources. Nous avons : $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ ssi $x \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$.

Preuve. Soit $\mathcal{C}_r$ un ensemble de contraintes de ressources. Supposons que $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$. Alors $x \in \bigcup_{y \leq z \in \overline{\mathcal{C}_r}} (\mathcal{E}(y) \cup \mathcal{E}(z))$. Donc, il existe une contrainte $y \leq z \in \overline{\mathcal{C}_r}$ telle que $x \in \mathcal{E}(y) \cup \mathcal{E}(z)$. Donc il existe un label de ressources x' tel que $xx' \leq z \in \overline{\mathcal{C}_r}$ ou $y \leq xx' \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Finalement, par la Proposition 3.3.8, $x \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$.
Supposons maintenant que $x \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Nous avons alors, par définition, $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$. □

Proposition 3.3.10. Soit $\mathcal{C}_r$ un ensemble de contraintes de ressources et soit $\mathcal{C}_s$ un ensemble de contraintes d'états. Nous avons $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r) = \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s) = \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}_s})$.

Preuve. Comme $\mathcal{C}_r \subseteq \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathcal{C}_s \subseteq \overline{\mathcal{C}_s}$, alors nous avons $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r) \subseteq \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s) \subseteq \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}_s})$. Pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit d'observer que les règles de la Définition 3.3.5 et de la Définition 3.3.6 n'introduisent pas de nouvelles constantes. En conséquence, nous avons $\mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}_r}) \subseteq \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r)$ et $\mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}_s}) \subseteq \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s)$. En conclusion, nous avons bien $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r) = \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s) = \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}_s})$. □

Lemme 3.3.11 (Compacité)**.** Soit $\mathcal{C}_r$ (resp. $\mathcal{C}_s$) un ensemble de contraintes de ressources (resp. d'état) pouvant être infini. Si $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ (resp. $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}$) alors il existe un ensemble fini $\mathcal{C}_f$ tel que $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}_r$ (resp. $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}_s$) et $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_f}$ (resp. $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_f}$).

Preuve. Nous prouvons le lemme pour les ensembles de contraintes de ressources, la preuve est identique pour les ensembles de contraintes d'états. Soit $\mathcal{C}_r$ un ensemble de contraintes de ressources. Le lemme se démontre par induction sur la hauteur h des arbres de dérivation des contraintes.
Cas de base : $h = 0$
Soit $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ une contrainte ayant un arbre de dérivation de hauteur nulle. Dans ce cas, $x \leq y \in \mathcal{C}_r$. Choisissons alors $\mathcal{C}_f = \{x \leq y\}$, nous pouvons alors remarquer que $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}_r$, que $\mathcal{C}_f$ est fini et que $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_f}$.
Cas inductifs :
Nous supposons que le lemme est vérifié pour toute contrainte de ressources ayant un arbre de dérivation de hauteur $h \leqslant n$ (HI). Nous montrons le lemme pour les contraintes ayant un arbre de dérivation de hauteur $h = n + 1$. Soit $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ une contrainte ayant un arbre de dérivation de hauteur $n + 1$.

- Cas $\langle t_r \rangle$:
  Dans ce cas, l'arbre de dérivation est de la forme :
  $$\dfrac{\dfrac{\overset{\cdots}{x \leq z} \quad \dfrac{\overset{\cdots}{z \leq y}}{}}{x \leq y}\ \langle t_r \rangle}{}$$
  Par hypothèse, la hauteur de cet arbre est égal à $n + 1$. En observant cet arbre, nous pouvons remarquer que $x \leq z$ et $z \leq y$ ont un arbre de dérivation. Donc $x \leq z \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $z \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$. La hauteur de leurs arbres de dérivation étant au plus égal à n alors, par (HI), il existe $\mathcal{C}_{f_1} \subseteq \mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}_r$, deux ensembles finis, tels que $x \leq z \in \overline{\mathcal{C}_{f_1}}$ et $z \leq y \in \overline{\mathcal{C}_{f_2}}$. Posons alors $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2}$. Comme $\mathcal{C}_{f_1} \subseteq \mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}_f$, alors par la Propriété 3.3.7, $x \leq z \in \overline{\mathcal{C}_f}$ et $z \leq y \in \overline{\mathcal{C}_f}$. Par la règle $\langle t_r \rangle$, nous avons alors $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_f}$. En conclusion, $\mathcal{C}_f$ est fini puisque défini comme l'union de deux ensembles finis, $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}_r$ puisque défini comme l'union de deux ensembles inclus dans $\mathcal{C}_r$ et $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_f}$.
- Les autres cas se démontrent de manière identique.

□

3.3.2 Une méthode des tableaux avec labels pour DBI

Nous présentons maintenant la méthode des tableaux avec labels de DBI. Nous utilisons des notations issues de [57], à savoir la représentation des branches sous forme de CSS.

Définition 3.3.12 (Formule signée / CSS)**.** Une *formule signée* est un 4-uplet $(S, \phi, x, u) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \times \mathcal{L}_{\mathsf{DBI}} \times L_r \times L_s$ écrit $\mathbb{S}\phi : (x, u)$.
Un *CSS* (constrained set of statements) est un triplet $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$, où $\mathcal{F}$ est un ensemble de

formules signées, $\mathcal{C}_r$ est un ensemble de contraintes de ressources et $\mathcal{C}_s$ est un ensemble de contraintes d'états, vérifiant la propriété suivante, appelée (P_{css}) :

$$\text{Si } \mathbb{S}\phi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ alors } x \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r} \text{ et } u \lhd u \in \overline{\mathcal{C}_s}$$

Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ est *fini* ssi $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_s$ sont finis.
La relation $\preccurlyeq$ est définie par : $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'_r, \mathcal{C}'_s \rangle$ ssi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ et $\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}'_r$ et $\mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{C}'_s$.
La relation $\preccurlyeq_f$ est définie par : $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_{r_f}, \mathcal{C}_{s_f} \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ ssi $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_{r_f}, \mathcal{C}_{s_f} \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_{r_f}, \mathcal{C}_{s_f} \rangle$ est fini.

Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ est une branche dont les formules signées sont décorées par des labels ($\mathcal{F}$) et à laquelle sont associés un ensemble de contraintes de ressources ($\mathcal{C}_r$) et d'états ($\mathcal{C}_s$).

Définition 3.3.13 (Label inconsistant)**.** Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS et soit x un label de ressources. Nous dirons que x est un label *inconsistant* s'il existe deux labels de ressources y et z tels que $yz \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\bot : (y,u) \in \mathcal{F}$.
Un label est dit *consistant* s'il n'est pas inconsistant.

$$\frac{\mathbb{T}\phi \wedge \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{T}\wedge \rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \wedge \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle \mid \langle \{\mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{F}\wedge \rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \vee \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (x,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle \mid \langle \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{T}\vee \rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \vee \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{F}\vee \rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \emptyset, \{1_r \leq x\}, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{T}\mathrm{I} \rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle \mid \langle \{\mathbb{T}\psi : (y,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{T}\to \rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{F}\psi : (c_i,u)\}, \{x \leq c_i\}, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{F}\to \rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \{c_i c_j \leq x\}, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{T}* \rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } yz \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle \mid \langle \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{F}* \rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } xy \leq xy \in \overline{\mathcal{C}_r}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle \mid \langle \{\mathbb{T}\psi : (xy,u)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{T}\mathrel{-\!\!*} \rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{F}\psi : (xc_i,u)\}, \{xc_i \leq xc_i\}, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{F}\mathrel{-\!\!*} \rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (x,l_i)\}, \emptyset, \{u \lhd l_i\} \rangle} \langle \mathbb{T}\Diamond \rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (x,v)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{F}\Diamond \rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Box\phi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (x,v)\}, \emptyset, \emptyset \rangle} \langle \mathbb{T}\Box \rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Box\phi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (x,l_i)\}, \emptyset, \{u \lhd l_i\} \rangle} \langle \mathbb{F}\Box \rangle$$

Note : c_i, c_j et l_i sont des nouvelles constantes.

FIGURE 5 – Règles d'expansion des tableaux pour DBI

La Figure 5 présente les règles de la méthode des tableaux de DBI, où "c_i et c_j sont des nouvelles constantes" signifie $c_i \neq c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r)$ et "l_i est une nouvelle constante" signifie $l_i \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s)$. Dans la suite de ce manuscrit, nous notons $\oplus$ la concaténation de listes. Par exemple $[e_1; e_2; e_4] \oplus [e_4; e_3] = [e_1; e_2; e_4; e_4; e_3]$.

Définition 3.3.14 (DBI-tableau)**.** Soit $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_{r_0}, \mathcal{C}_{s_0} \rangle$ un CSS fini. Un *DBI-tableau* pour le CSS $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_{r_0}, \mathcal{C}_{s_0} \rangle$ est une liste de CSS, construite inductivement par les règles suivantes :

1. La liste $[\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_{r_0}, \mathcal{C}_{s_0} \rangle]$ est un DBI-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_{r_0}, \mathcal{C}_{s_0} \rangle$
2. Si la liste $\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle] \oplus \mathcal{T}_n$ est un DBI-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_{r_0}, \mathcal{C}_{s_0} \rangle$ et
$$\frac{cond(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle)}{\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_{r_1}, \mathcal{C}_{s_1} \rangle \mid \ldots \mid \langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_{r_k}, \mathcal{C}_{s_k} \rangle}$$
est une instance d'une des règles de la Figure 5 pour laquelle la condition $cond(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle)$ est vérifiée, alors la liste
$$\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_{r_1}, \mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_{s_1} \rangle; \ldots; \langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_{r_k}, \mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_{s_k} \rangle] \oplus \mathcal{T}_n$$
est un DBI-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_{r_0}, \mathcal{C}_{s_0} \rangle$.

Un DBI-tableau pour une formule ϕ est un DBI-tableau pour $\langle \{\mathbb{F}\phi : (1_r, l_1)\}, \{1_r \leq 1_r\}, \{l_1 \lhd l_1\} \rangle$.

Nous faisons remarquer au lecteur que $\langle \{\mathbb{F}\phi : (1_r, l_1)\}, \{1_r \leq 1_r\}, \{l_1 \lhd l_1\} \rangle$ est bien un CSS, c'est-à-dire satisfait la condition (P_{css}) de la Définition 3.3.12. De plus, nous pouvons aussi remarquer qu'en observant les règles de la Figure 5, par la Proposition 3.3.8, toute branche d'un DBI-tableau obtenue après application d'une règle de la méthode des tableaux satisfait la condition (P_{css}).

En observant ces règles de plus près, nous pouvons remarquer deux types de règles très particulières. Un premier type concerne les règles $\langle \mathbb{T}\mathrm{I} \rangle$, $\langle \mathbb{F} \rightarrow \rangle$, $\langle \mathbb{T} * \rangle$, $\langle \mathbb{F} \mathrel{-\!\!*} \rangle$, $\langle \mathbb{T}\Diamond \rangle$ et $\langle \mathbb{F}\Box \rangle$. Ces règles introduisent de nouvelles contraintes et de nouvelles constantes de label (c_i, c_j et l_i), à l'exception de la règle $\langle \mathbb{T}\mathrm{I} \rangle$, qui n'introduit qu'une contrainte. Illustrons la règle $\langle \mathbb{T}\Diamond \rangle$. Pour appliquer cette règle sur la formule signée $\mathbb{T}\Diamond\phi : (c_1, l_3)$ appartenant à un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$, nous devons choisir une nouvelle constante qui n'apparaît pas dans $\mathcal{C}_s$. Supposons que $l_{10} \notin \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s)$. Alors, en choisissant ce label d'états l_{10}, nous pouvons appliquer la règle, obtenant alors le CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_1, l_{10})\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \cup \{l_3 \lhd l_{10}\} \rangle$. Nous remarquons la nouvelle contrainte d'états $l_3 \lhd l_{10}$ introduite dans la branche.
Le second type de règles concerne $\langle \mathbb{T} \rightarrow \rangle$, $\langle \mathbb{F} * \rangle$, $\langle \mathbb{T} \mathrel{-\!\!*} \rangle$, $\langle \mathbb{F}\Diamond \rangle$ et $\langle \mathbb{T}\Box \rangle$. La particularité de ces règles est la présence d'une condition. Afin de pouvoir appliquer une de ces règles, nous devons choisir un label tel que la condition est vérifiée et nous pouvons appliquer la règle en utilisant le label choisi. Dans le cas contraire, l'application de la règle n'est pas autorisée. Nous illustrons la règle $\langle \mathbb{T}\Box \rangle$: soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS tel que $\mathbb{T}\Box\phi : (c_1, l_1) \in \mathcal{F}$. Pour appliquer la règle, nous devons choisir un label d'états l tel que $l_1 \lhd l \in \overline{\mathcal{C}_s}$. Supposons que $l_1 \leq l_2 \in \overline{\mathcal{C}_s}$. Alors, en choisissant ce label l_2 et en appliquant la règle, nous obtenons le nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_1, l_2)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$.

Définition 3.3.15 (Conditions de clôture)**.** Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ est dit *clos* s'il vérifie au moins une des conditions suivantes :

1. $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ et $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : (x, u) \in \mathcal{F}$ et $1_r \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$
3. $\mathbb{F}\top : (x, u) \in \mathcal{F}$
4. $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ et x est un label inconsistant

Un CSS est dit *ouvert* s'il n'est pas clos. Un DBI-tableau est clos si tous ses CSS sont clos.

Définition 3.3.16 (Preuve)**.** Une *preuve* d'une formule ϕ est un DBI-tableau pour ϕ qui est clos.

Nous terminons cette sous-section en énonçant deux propositions sur les CSS.

Proposition 3.3.17. Soit $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS tel que $\mathcal{F}_f$ est fini. Il existe $\mathcal{C}_{rf} \subseteq \mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_{sf} \subseteq \mathcal{C}_s$ tel que $\mathcal{C}_{rf}$ et $\mathcal{C}_{sf}$ sont finis et $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_{rf}, \mathcal{C}_{sf} \rangle$ est un CSS.

Preuve. Le point central consiste à montrer qu'il existe un CSS $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_{rf}, \mathcal{C}_{sf} \rangle$ satisfaisant la propriété (P_{css}) de la Définition 3.3.12, tel que $\mathcal{C}_{rf} \subseteq \mathcal{C}_r$, $\mathcal{C}_{sf} \subseteq \mathcal{C}_s$ et $\mathcal{C}_{rf}$ et $\mathcal{C}_{sf}$ sont finis. L'argument de preuve est le suivant : soit une formule signée $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_f$, nous avons, par la propriété (P_{css}), $x \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $u \lhd u \in \overline{\mathcal{C}_s}$. Par le Lemme 3.3.11, il existe deux ensembles finis $\mathcal{C}'_r$ et $\mathcal{C}'_s$ tel que $\mathcal{C}'_r \subseteq \mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}'_s \subseteq \mathcal{C}_s$ et $x \leq x \in \overline{\mathcal{C}'_r}$ et $u \lhd u \in \overline{\mathcal{C}'_s}$. Considérons maintenant toutes les formules signées de $\mathcal{F}_f$. Nous remarquons qu'il n'y en a qu'un nombre fini, puisque $\mathcal{F}_f$ est fini par hypothèse. Définissons $\mathcal{C}_{rf}$ (resp. $\mathcal{C}_{sf}$) comme l'union de tous ces ensembles $\mathcal{C}'_r$ (resp. $\mathcal{C}'_s$) construits comme précédemment. Nous pouvons remarquer que ces deux ensembles $\mathcal{C}_{rf}$ et $\mathcal{C}_{sf}$ sont finis, que $\mathcal{C}_{rf} \subseteq \mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_{sf} \subseteq \mathcal{C}_s$ et que $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_{rf}, \mathcal{C}_{sf} \rangle$ satisfait la propriété (P_{css}) par la Proposition 3.3.7. □

Proposition 3.3.18. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Si $y \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et x est un label consistant alors y est un label consistant.
2. Si $x \circ y \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ est un label consistant, alors x et y sont des labels consistants.

Preuve. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS.

1. Supposons que $y \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et que x soit un label consistant. Par l'absurde : supposons que y soit un label inconsistant. Alors, par définition, il existe deux labels de ressources y_1 et y_2 tels que $y_1 y_2 \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\bot : (y_1, u) \in \mathcal{F}$. Par la règle $\langle t_r \rangle$, nous avons $y_1 y_2 \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$. En résumé, nous avons $y_1 y_2 \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\bot : (y_1, u) \in \mathcal{F}$. Donc x est inconsistant. Ceci étant absurde, nous déduisons que y est consistant.
2. Supposons que $x \circ y \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ soit un label consistant. Par l'absurde : nous supposons que x est un label inconsistant. Par définition, il existe x_1 et x_2 tels que $x_1 x_2 \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\bot : (x_1, u) \in \mathcal{F}$. De plus, par le Corollaire 3.3.9, nous avons $xy \leq xy \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Par la règle $\langle c_r \rangle$, $x_1 x_2 y \leq xy \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Donc, par définition, $x \circ y$ est un label inconsistant, ce qui est absurde. En conclusion x est un label consistant. La preuve pour le label y est identique.

□

3.3.3 Un exemple de preuve

Dans cette sous-section, nous présentons un exemple d'application de la méthode des tableaux de DBI en construisant une preuve de la formule :

$$\phi \equiv (\Box(P \to \Diamond Q) \wedge \Diamond P) \mathrel{-\!\!*} \Diamond Q$$

Par la Définition 3.3.14, le DBI-tableau suivant est un DBI-tableau pour la formule ϕ :

$$[\langle \{\mathbb{F}(\Box(P \to \Diamond Q) \wedge \Diamond P) \mathrel{-\!\!*} \Diamond Q : (1_r, l_1)\}, \{1_r \leq 1_r\}, \{l_1 \lhd l_1\} \rangle]$$

Nous proposons de présenter notre DBI-tableau de la manière suivante :

$[\mathcal{F}]$	$[\mathcal{C}_r]$	$[\mathcal{C}_s]$
$\mathbb{F}(\Box(P \to \Diamond Q) \wedge \Diamond P) \twoheadrightarrow \Diamond Q : (1_r, l_1)$	$1_r \leq 1_r$	$l_1 \lhd l_1$

Nous pouvons observer qu'il y a trois colonnes, une pour l'ensemble de formules signées de l'unique CSS du DBI-tableau ($[\mathcal{F}]$), une pour l'ensemble de contraintes de ressources ($[\mathcal{C}_r]$) et une pour l'ensemble de contraintes d'états ($[\mathcal{C}_s]$). En appliquant différentes règles de la Figure 5, nous obtenons le DBI-tableau de la Figure 6. Nous avons marqué les formules signées par

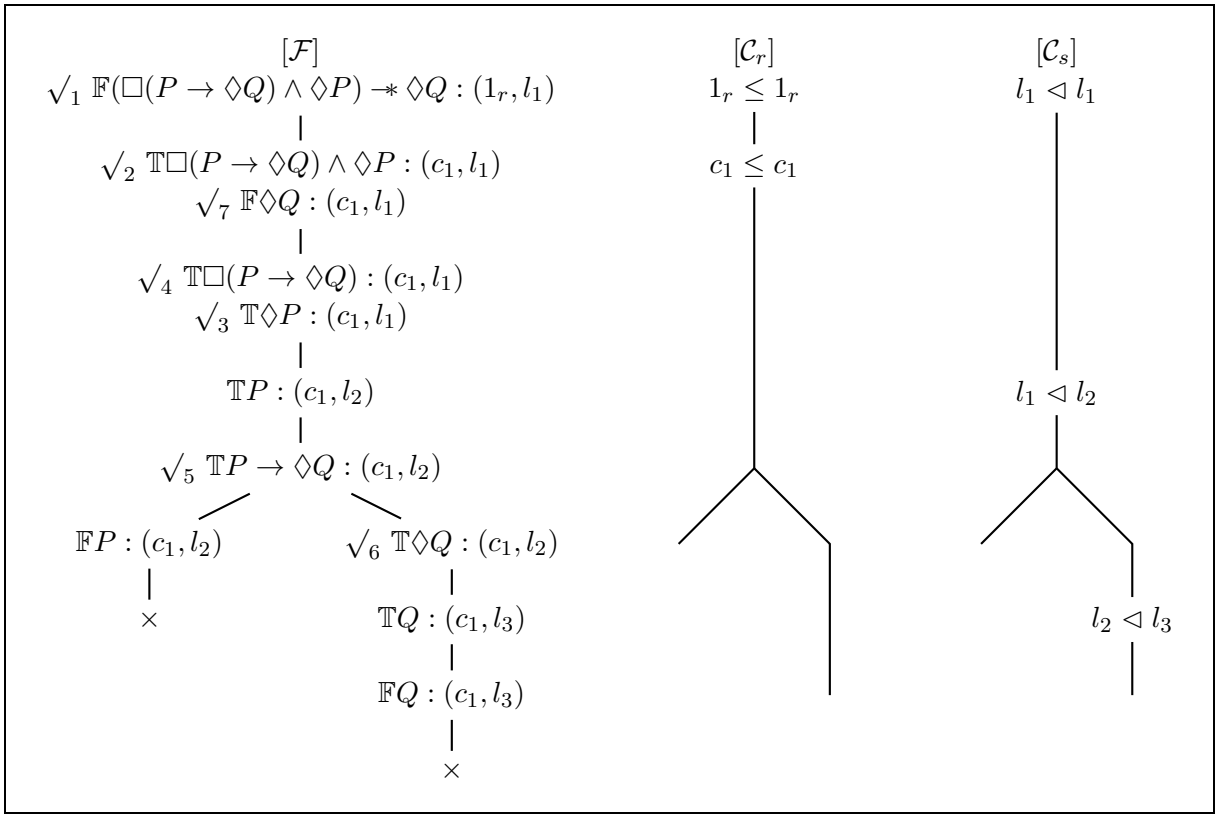


FIGURE 6 – Preuve de la formule $(\Box(P \to \Diamond Q) \wedge \Diamond P) \twoheadrightarrow \Diamond Q$

le symbole $\surd_i$ afin d'indiquer qu'une règle a été appliquée sur cette formule à l'étape i. Nous pouvons remarquer que les colonnes ($[\mathcal{F}]$, $[\mathcal{C}_r]$ et $[\mathcal{C}_s]$) sont des arbres contenant deux branches. Il y a deux branches parce que le DBI-tableau obtenu contient deux CSS. Les branches de gauche (resp. droite) contiennent les éléments des différents ensembles constituant le premier (resp. second) CSS du DBI-tableau.

Illustrons l'étape 3 et l'étape 5. À l'étape 3, la règle $\langle \mathbb{T}\Diamond \rangle$ est appliquée sur la formule signée $\mathbb{T}\Diamond P : (c_1, l_1)$. Pour appliquer cette règle, il nous a fallu choisir un label d'états nouveau (ici l_2). Finalement, l'application de la règle a introduit dans la branche la formule signée $\mathbb{T}P : (c_1, l_2)$ ainsi que la contrainte $l_1 \lhd l_2$.
À l'étape 5, la règle $\langle \mathbb{T} \to \rangle$ est appliquée sur la formule signée $\mathbb{T}P \to \Diamond Q : (c_1, l_2)$. Pour appliquer cette règle, il nous faut choisir un label de ressources x tel que $c_1 \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et scinder le CSS en deux, introduisant alors dans le premier CSS la formule signée $\mathbb{F}P : (x, l_2)$ et dans le second la formule signée $\mathbb{T}\Diamond Q : (x, l_2)$. Remarquant que $c_1 \leq c_1 \in \overline{\mathcal{C}_r}$, nous avons alors choisi le label c_1 et introduit, où il convenait, les formules signées $\mathbb{F}P : (c_1, l_2)$ et $\mathbb{T}\Diamond Q : (c_1, l_2)$.

Finalement, nous pouvons remarquer que les deux branches sont closes, indiqué par le symbole $\times$. En particulier, le CSS de gauche est clos parce que $\mathbb{T}P : (c_1, l_2) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}P : (c_1, l_2) \in \mathcal{F}$ et $c_1 \leq c_1 \in \overline{\mathcal{C}_r}$. En conclusion, nous avons, par définition, obtenu une preuve de la formule $(\Box(P \to \Diamond Q) \wedge \Diamond P) \mathrel{-\!\!*} \Diamond Q$.

Dans la section suivante, nous nous intéresserons à démontrer la correction de notre système de preuves, ce qui nous permettra alors de conclure à la validité de la formule à laquelle nous venons de nous intéresser.

3.4 Correction de la méthode des tableaux

Dans cette section, nous montrons la correction de la méthode des tableaux pour DBI. Cette preuve est une adaptation de celle utilisée pour la méthode des tableaux de BI [40]. Cette technique de preuve repose sur une notion de *réalisation* d'un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$, signifiant qu'il existe un modèle $\mathcal{K}$ et un plongement des labels de ressources dans l'ensemble de ressources $(\lfloor \cdot \rfloor_r)$ et des labels d'états dans l'ensemble d'états $(\lfloor \cdot \rfloor_s)$ tel que si $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et si $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Pour cela nous considérerons deux fonctions $\lfloor . \rfloor_r : \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r) \to R$ et $\lfloor . \rfloor_s : \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s) \to S$. Nous pouvons remarquer que par la Proposition 3.3.10, $\lfloor . \rfloor_s$ est définie sur $\mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}_s})$.
Parallèlement, la fonction $\lfloor . \rfloor_r$ sera toujours implicitement étendue sur $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r}) \to R$ de la manière suivante : pour tout $c_{i_1} \circ \ldots \circ c_{i_n} \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$, $\lfloor c_{i_1} \circ \ldots \circ c_{i_n} \rfloor_r = \lfloor c_{i_1} \rfloor_r \bullet \ldots \bullet \lfloor c_{i_n} \rfloor_r$ et $\lfloor 1_r \rfloor_r = e$. Nous remarquons que $\lfloor x \rfloor_r$ est toujours définie, puisque la composition de ressources est une fonction totale. Nous pouvons aussi remarquer que pour tous labels $x, y \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$, $\lfloor x \circ y \rfloor_r = \lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor y \rfloor_r$.

Définition 3.4.1 (Réalisation)**.** Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS. Une *réalisation* de ce CSS est un triplet $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_s)$ où $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ est modèle dynamique, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$, $\lfloor . \rfloor_r : \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r}) \to R$ et $\lfloor . \rfloor_s : \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s) \to S$, tel que :

- Si $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$
- Si $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$
- Si $x \leq y \in \mathcal{C}_r$ alors $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$
- Si $u \lhd v \in \mathcal{C}_s$ alors $\lfloor u \rfloor_s \preceq \lfloor v \rfloor_s$

Nous rappelons que dans la définition précédente, la fonction $\lfloor . \rfloor_r$ est d'abord définie sur $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r)$ puis implicitement étendue sur $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$, comme nous l'avons vu.
Nous dirons qu'un CSS est *réalisable* s'il existe une réalisation de celui-ci. Nous dirons qu'un DBI-tableau est *réalisable* s'il contient au moins un CSS réalisable.

Lemme 3.4.2. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS et soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_s)$ une réalisation de ce CSS. Pour tout $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$, $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$ et pour tout $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}$, $\lfloor u \rfloor_s \preceq \lfloor v \rfloor_s$.

Preuve. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS et soit $(\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_s)$ une réalisation de celui-ci. Nous prouvons le lemme pour les contraintes de ressources, la preuve pour les contraintes d'états est similaire. Nous montrons que pour tout $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$, nous avons $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$, par induction sur la hauteur h de l'arbre de dérivation des contraintes $x \leq y$.
Cas de base : $h = 0$.
Dans ce cas, $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ parce que $x \leq y \in \mathcal{C}_r$. Par définition de la réalisation, nous avons alors $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$.
Cas inductifs :
Nous supposons que le lemme est vrai pour toute contrainte ayant un arbre de dérivation de hauteur $h \leqslant n$ (HI). Nous démontrons pour les contraintes ayant un arbre de dérivation de hauteur $h = n + 1$.

- Cas $\langle t_r \rangle$:
  Dans ce cas, l'arbre de dérivation est de la forme :
  $$\dfrac{\dfrac{\overset{\cdots}{x \leq y} \quad \dfrac{\overset{\cdots}{y \leq z}}{}}{x \leq z}\ \langle t_r \rangle}{}$$
  Par (HI), nous avons $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$ et $\lfloor y \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor z \rfloor_r$. Par transitivité de la relation $\sqsubseteq$, nous pouvons conclure que $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor z \rfloor_r$.
- Cas $\langle d_r \rangle$: Dans ce cas, l'arbre de dérivation est de la forme :
  $$\dfrac{\dfrac{\overset{\cdots}{xy \leq xy}}{x \leq x}\ \langle d_r \rangle}{}$$
  Nous pouvons remarquer que $x \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et donc, par le Corollaire 3.3.9, $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$. Comme $\lfloor . \rfloor_r$ est implicitement étendue sur $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ alors $\lfloor x \rfloor_r$ est défini. En conséquence, $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$, par réflexivité de la relation $\sqsubseteq$.
- Cas $\langle d_r \rangle$: Dans ce cas, l'arbre de dérivation est de la forme :
  $$\dfrac{\dfrac{\overset{\cdots}{ky \leq ky} \quad \dfrac{\overset{\cdots}{x \leq y}}{}}{kx \leq ky}\ \langle c_r \rangle}{}$$
  Par (HI), $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$. Comme $kx \leq ky \in \overline{\mathcal{C}_r}$ alors $k, kx, ky \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ et donc $\lfloor k \rfloor_r$, $\lfloor kx \rfloor_r$ et $\lfloor ky \rfloor_r$ sont définis. Par compatibilité, $\lfloor k \rfloor_r \bullet \lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor k \rfloor_r \bullet \lfloor y \rfloor_r$. Par extension implicite de la fonction $\lfloor \cdot \rfloor_r$, nous avons $\lfloor kx \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor ky \rfloor_r$.
- Les autres cas se démontrent de la même manière.

□

Lemme 3.4.3. Les CSS clos ne sont pas réalisables.

Preuve. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un CSS clos. Supposons qu'il existe une réalisation de ce CSS. Notons $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_s)$ cette réalisation. Comme le CSS est clos, il y a quatre cas :

- $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ et $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Alors par définition de la réalisation, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. De plus, par le Lemme 3.4.2, $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$. Donc, par monotonie (Lemme 3.1.5), $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$, ce qui est absurde.
- $\mathbb{F}\mathrm{I} : (x, u) \in \mathcal{F}$ et $1_r \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Donc, par définition de la réalisation, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$. Par définition de la relation de forcing, nous avons $e \not\sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$. Par le Lemme 3.4.2, comme $1_r \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ alors $e \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$, ce qui est absurde.
- $\mathbb{F}\top : (x, u) \in \mathcal{F}$. Dans ce cas, nous avons $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \top$ ce qui est absurde.
- $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ et x est inconsistant. Alors, par définition, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ et il existe deux labels de ressources y et z tels que $yz \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\bot : (y, v) \in \mathcal{F}$. Par le Lemme 3.4.2, $\lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor z \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$ et, par définition, $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$. Donc $\pi \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$. Par compatibilité et comme π est absorbant, nous avons $\pi \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor z \rfloor_r$. Donc, par transitivité, nous avons $\pi \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$. En conséquence, par le Lemme 3.1.6 et par le Lemme 3.1.5, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$, or ceci est absurde.

En conséquence, le CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ n'est pas clos. Ceci étant absurde, nous concluons qu'il ne peut pas exister de réalisation du CSS clos. □

Lemme 3.4.4. Les règles de la méthode des tableaux de DBI préservent la réalisabilité.

Preuve. Soit $\mathcal{T}$ un DBI-tableau réalisable. Par définition, $\mathcal{T}$ contient alors un CSS réalisable $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$. Nous montrons que l'application d'une quelconque règle de la Figure 5 retourne toujours un DBI-tableau réalisable. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ est réalisable, alors il existe une réalisation $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_s)$, avec $\mathcal{K} = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ et $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S)$, de ce CSS. Nous notons aussi $\mathbb{S}\phi : (x, u)$ la formule signée sur laquelle est appliquée la règle. Il y a deux cas. Soit $\mathbb{S}\phi : (x, u) \notin \mathcal{F}$ et dans ce cas le CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ n'est pas modifié. En conséquence, le CSS (et donc $\mathcal{T}$) reste

réalisable. Dans le cas contraire, nous prouvons que le nouveau DBI-tableau obtenu est réalisable, par cas sur la formule ϕ :

- Cas $\mathbb{T}p : (x, u)$ ($p \in \text{Prop}$) :
  Aucune règle ne peut être appliquée sur cette formule signée.
- Cas $\mathbb{F}p : (x, u)$ ($p \in \text{Prop}$) :
  Aucune règle ne peut être appliquée sur cette formule signée.
- Cas $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x, u)$:
  Comme $(\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_s)$ est une réalisation de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$, alors nous avons $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$. Donc, par définition, $e \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$. En conclusion, nous pouvons observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r \cup \{1_r \leq x\}, \mathcal{C}_s \rangle$ obtenu après application de la règle.
- Cas $\mathbb{F}\mathrm{I} : (x, u)$:
  Aucune règle ne peut être appliquée sur cette formule signée.
- Cas $\mathbb{T}\top : (x, u)$:
  Aucune règle ne peut être appliquée sur cette formule signée.
- Cas $\mathbb{F}\top : (x, u)$:
  Aucune règle ne peut être appliquée sur cette formule signée.
- Cas $\mathbb{T}\bot : (x, u)$:
  Aucune règle ne peut être appliquée sur cette formule signée.
- Cas $\mathbb{F}\bot : (x, u)$:
  Aucune règle ne peut être appliquée sur cette formule signée.
- Cas $\mathbb{T}\phi \wedge \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \wedge \psi$. Donc $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x, u), \mathbb{T}\psi : (x, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$.
- Cas $\mathbb{F}\phi \wedge \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \wedge \psi$. Donc $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation d'au moins un des deux nouveaux CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (x, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$.
- Cas $\mathbb{T}\phi \vee \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \vee \psi$. Donc $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation d'au moins un des deux nouveaux CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$.
- Cas $\mathbb{F}\phi \vee \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \vee \psi$. Donc $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x, u), \mathbb{F}\psi : (x, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$.
- Cas $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$. Par définition, pour tout $r \in R$, si $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq r$ et $r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ alors $r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. De plus, par la condition de la règle, $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Par le Lemme 3.4.2, $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor y \rfloor_r$. Donc $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation d'au moins un des deux nouveaux CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (y, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$.
- Cas $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$. Par définition, il existe $r \in R$ tel que $\lfloor x \rfloor_r \sqsubseteq r$ et $r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Comme c_i est une nouvelle constante ($c_i \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_r)$) et comme les règles de clôture n'introduisent pas de nouvelle constante, alors $\lfloor c_i \rfloor_r$ n'est pas défini. Posons alors $\lfloor c_i \rfloor_r = r$ et étendons implicitement la fonction $\lfloor \cdot \rfloor_r$. Nous pouvons remarquer que nous avons obtenu une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i, u), \mathbb{F}\psi :$

$(c_i, u)\}, \mathcal{C}_r \cup \{x \leq c_i\}, \mathcal{C}_s\rangle$.

- Cas $\mathbb{T}\phi * \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$. Par définition, il existe $r', r'' \in R$ tels que $r' \bullet r'' \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$ et $r', \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r'', \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Comme c_i et c_j sont des nouvelles constantes, alors $\lfloor c_i \rfloor_r$ et $\lfloor c_j \rfloor_r$ ne sont pas définis. Il est alors possible d'étendre la réalisation en posant $\lfloor c_i \rfloor_r = r'$ et $\lfloor c_j \rfloor_r = r''$. Nous pouvons alors remarquer que nous avons obtenu une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i, u), \mathbb{T}\psi : (c_j, u)\}, \mathcal{C}_r\{c_i c_j \leq x\}, \mathcal{C}_s\rangle$.
- Cas $\mathbb{F}\phi * \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$. Par définition, pour tous $r', r'' \in R$ tel que $r' \bullet r'' \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$, nous avons $r', \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $r'', \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par la condition de la règle, $yz \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Par le Lemme 3.4.2, $\lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor z \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r$. Donc $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $\lfloor z \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors remarquer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation d'au moins un des deux nouveaux CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$.
- Cas $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$. Par définition, pour tout $r \in R$ tel que $r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$, nous avons $\lfloor x \rfloor_r \bullet r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par la condition de la règle, $xy \leq xy \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Donc $\lfloor y \rfloor_r$ et $\lfloor xy \rfloor_r$ sont définis et nous avons, par définition, $\lfloor xy \rfloor_r = \lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor y \rfloor_r$. Il y a alors deux cas :
  - $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$:
    Dans ce cas, nous pouvons remarquer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du premier CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$.
  - $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$:
    Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$ et nous remarquons que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du deuxième CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (xy, u)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$.

  En conclusion, $\mathfrak{R}$ est une réalisation d'au moins un des deux nouveaux CSS.
- Cas $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$. Alors, il existe $r' \in R$ tel que $r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $\lfloor x \rfloor_r \bullet r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Comme c_i est une nouvelle constante, $\lfloor c_i \rfloor_r$ n'est pas défini. Nous pouvons alors étendre la réalisation $\mathfrak{R}$ en posant $\lfloor c_i \rfloor_r = r$. De plus, par réflexivité, $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor c_i \rfloor_r \sqsubseteq \lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor c_i \rfloor_r$. Nous pouvons alors observer que nous avons obtenu une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i, u), \mathbb{F}\psi : (xc_i, u)\}, \mathcal{C}_r \cup \{xc_i \leq xc_i\}, \mathcal{C}_s\rangle$.
- Cas $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$. Il existe alors $s \in S$ tel que $\lfloor u \rfloor_s \preceq s$ et $\lfloor x \rfloor_r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Comme l_i est un nouveau label d'états, $\lfloor l_i \rfloor_s$ est indéfini. Nous pouvons alors étendre la réalisation $\mathfrak{R}$ en posant $\lfloor l_i \rfloor_s = s$ et nous pouvons alors remarquer que nous avons obtenu une nouvelle réalisation du CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x, l_i)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \cup \{u \lhd l_i\}\rangle$.
- Cas $\mathbb{F}\Diamond\phi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$. Par définition, pour tout $s \in S$ tel que $\lfloor u \rfloor_s \preceq s$, nous avons $\lfloor x \rfloor_r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par la condition de la règle, $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}$. Par le Lemme 3.4.2, $\lfloor u \rfloor_s \preceq \lfloor v \rfloor_s$. Donc $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Nous pouvons alors observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x, v)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$.
- Cas $\mathbb{T}\Box\phi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \Box\phi$. Par définition, pour tout $s \in S$ tel que $\lfloor u \rfloor_s \preceq s$, nous avons $\lfloor x \rfloor_r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par la condition de la règle, $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}$. Par le Lemme 3.4.2, $\lfloor u \rfloor_s \preceq \lfloor v \rfloor_s$. Donc $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Nous pouvons alors observer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x, v)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$.
- Cas $\mathbb{F}\Box\phi : (x, u)$:
  Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \Box\phi$. Il existe alors $s \in S$ tel que $\lfloor u \rfloor_s \preceq s$ et $\lfloor x \rfloor_r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Comme l_i est un nouveau label d'états, $\lfloor l_i \rfloor_s$ est indéfini. Nous pouvons alors étendre la

réalisation $\mathfrak{R}$ en posant $\lfloor l_i \rfloor_s = s$ et nous pouvons alors remarquer que nous avons obtenu une nouvelle réalisation du CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x, l_i)\}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \cup \{u \lhd l_i\}\rangle$.

□

Théorème 3.4.5 (Correction)**.** Soit ϕ une formule. S'il existe une preuve de ϕ alors la formule ϕ est valide.

Preuve. Soit $\mathcal{T}$ une preuve de ϕ. Supposons que ϕ ne soit pas valide. Alors, il existe un modèle $\mathcal{K}$ tel que $e, s \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$. En considérant $\lfloor 1_r \rfloor_r = e$ et $\lfloor l_1 \rfloor_s = s$ nous obtenons une réalisation $(\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_s)$ triviale du CSS initial $\langle \{\mathbb{F}\phi : (1_r, l_1)\}, \{1_r \leq 1_r\}, \{l_1 \lhd l_1\}\rangle$. Par le Lemme 3.4.4, un des CSS de $\mathcal{T}$ est réalisable. Par le Lemme 3.4.3 cela est contradictoire parce que comme $\mathcal{T}$ est une preuve, alors tous ses CSS sont clos. En conclusion ϕ est valide. □

Grâce à ce théorème, il nous est alors possible de conclure que la formule $(\Box(P \to \Diamond Q) \wedge \Diamond P) \mathrel{-\!\!*} \Diamond Q$ de l'exemple de la sous-section 3.3.3 est valide, puisque nous en avons construit une preuve par la méthode des tableaux de DBI.

3.5 Extraction de contre-modèles et complétude

Dans cette section, nous présentons une méthode d'extraction de contre-modèles pour DBI sur laquelle nous nous appuyons pour démontrer la complétude de la méthode des tableaux. Cette méthode étend les principes introduits pour BI [40]. Nous présenterons aussi un exemple d'extraction de contre-modèles.

3.5.1 Méthode d'extraction de contre-modèles et complétude

Le principe de la méthode d'extraction de contre-modèles consiste à transformer les ensembles de contraintes de ressources et d'états d'un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$ non clos en un modèle dynamique ne satisfaisant pas la formule sur laquelle nous avons initialisé la méthode des tableaux. Pour que le modèle $\mathcal{K}$ extrait soit un contre-modèle, il nous est nécessaire que la transformation vérifie deux propriétés : si $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $x, u \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et si $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $x, u \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$. Afin que ces deux propriétés soient vérifiées, les formules du CSS doivent être saturées, autrement dit : le CSS doit être un *Hintikka CSS*.

Définition 3.5.1 (Hintikka CSS)**.** Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s\rangle$ est un *Hintikka CSS* si et seulement si pour toutes formules $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{DBI}}$ et tous labels $x, y \in L_r$ et $u \in L_s$:

1. $\mathbb{T}\phi : (x, u) \notin \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\phi : (y, u) \notin \mathcal{F}$ ou $x \leq y \notin \overline{\mathcal{C}_r}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : (x, u) \notin \mathcal{F}$ ou $1_r \leq x \notin \overline{\mathcal{C}_r}$
3. $\mathbb{F}\top : (x, u) \notin \mathcal{F}$
4. $\mathbb{F}\phi : (x, u) \notin \mathcal{F}$ ou x est consistant
5. Si $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $1_r \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$
6. Si $\mathbb{T}\phi \wedge \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : (x, u) \in \mathcal{F}$
7. Si $\mathbb{F}\phi \wedge \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (x, u) \in \mathcal{F}$
8. Si $\mathbb{T}\phi \vee \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (x, u) \in \mathcal{F}$
9. Si $\mathbb{F}\phi \vee \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (x, u) \in \mathcal{F}$
10. Si $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (y, u) \in \mathcal{F}$

11. Si $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $x \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (y,u) \in \mathcal{F}$
12. Si $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y,z \in L_r$, $y \circ z \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : (z,u) \in \mathcal{F}$
13. Si $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y,z \in L_r$, $y \circ z \leq x \in \overline{\mathcal{C}_r} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (z,u) \in \mathcal{F}$
14. Si $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r}) \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (xy,u) \in \mathcal{F}$
15. Si $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ et $\mathbb{T}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (xy,u) \in \mathcal{F}$
16. Si $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_s$, $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}$ et $\mathbb{T}\phi : (x,v) \in \mathcal{F}$
17. Si $\mathbb{F}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_s$, $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (x,v) \in \mathcal{F}$
18. Si $\mathbb{T}\Box\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_s$, $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s} \Rightarrow \mathbb{T}\phi : (x,v) \in \mathcal{F}$
19. Si $\mathbb{F}\Box\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_s$, $u \lhd v \in \overline{\mathcal{C}_s}$ et $\mathbb{F}\phi : (x,v) \in \mathcal{F}$

Les conditions (1), (2), (3) et (4) de la définition garantissent que le CSS considéré n'est pas clos. Les autres conditions certifient que toutes les formules signées du CSS sont saturées. Maintenant, nous présentons une fonction Ω qui transforme les Hintikka CSS en contre-modèles.

Définition 3.5.2 (Fonction Ω)**.** Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un Hintikka CSS. Soit $\overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$ la restriction de $\overline{\mathcal{C}_r}$ à un ensemble de contraintes ne contenant que des labels consistants. La fonction Ω associe au CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ le triplet $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$, tel que :

- $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}}) \cup \{\pi\}$, avec $\pi \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$
- $S = \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s)$
- $e = 1_r$
- La composition $\bullet$ est définie par

$$\forall r_1, r_2 \in R \begin{cases} r_1 \bullet r_2 = r_1 \circ r_2 & \text{si } r_1 \circ r_2 \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}}) \\ r_1 \bullet r_2 = \pi & \text{sinon} \end{cases}$$

- $r_1 \sqsubseteq r_2$ ssi $r_1 \leq r_2 \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$ ou $r_2 = \pi$
- $s_1 \preceq s_2$ ssi $s_1 \lhd s_2 \in \overline{\mathcal{C}_s}$
- $\forall p \in \text{Prop}$, $\forall r \in R$, $\forall s \in S$, $(r,s) \in [\![p]\!]$ ssi $(r = \pi)$ ou $(\exists r' \in R, r' \sqsubseteq r$ et $\mathbb{T}p : (r',s) \in \mathcal{F})$

Nous démontrons maintenant que le triplet obtenu par la fonction Ω est un modèle dynamique au sens de la Définition 3.1.3.

Lemme 3.5.3. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un Hintikka CSS tel que $1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ et 1_r est un label consistant. Soit $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$. $(\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ est un modèle dynamique.

Preuve. Nous devons vérifier que $\mathcal{R}$ est un MRD (Définition 3.1.1) et que $[\![\cdot]\!]$ est une interprétation dynamique (Définition 3.1.2).

Nous montrons que $\mathcal{R}$ est un MRD :

- R et S sont des ensembles tels que $e \in R$ et $\pi \in R$. En effet, $\pi \in R$ par construction. De plus, comme $1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ alors, par le Corollaire 3.3.9, $1_r \leq 1_r \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Comme 1_r est consistant, alors $1_r \leq 1_r \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$, d'où $1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$. Finalement, comme $e = 1_r$ et comme $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}}) \cup \{\pi\}$, alors $e \in R$.
- Concernant la composition $\bullet$:
  - Nous pouvons observer que cette fonction est bien totale et interne : pour tous $r_1, r_2 \in R$, $r_1 \bullet r_2$ est défini et appartient à R.
  - Élément absorbant :
    Soit $r \in R$. Comme $\pi \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$, alors $r \circ \pi \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$, d'où $r \bullet \pi = \pi$.

- Élément neutre :
  Soit $r \in R$. Il y a deux cas :
  - Si $r \neq \pi$ alors $r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$. Comme $1_r \circ r = r$ alors $1_r \circ r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$. Donc $e \bullet r = 1_r \circ r = r$.
  - Si $r = \pi$ alors $e \bullet \pi = \pi$, parce que π est absorbant comme nous venons de le montrer.
- Commutativité :
  Soit $r_1, r_2 \in R$. Il y a deux cas :
  - Si $r_1 \circ r_2 \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$ alors $r_1 \bullet r_2 = r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1 = r_2 \bullet r_1$.
  - Si $r_1 \circ r_2 \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$ alors $r_2 \circ r_1 \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$ et donc $r_1 \bullet r_2 = r_2 \bullet r_1 = \pi$.
- Associativité :
  Soit $r_1, r_2, r_3 \in R$. Si $r_1 \circ r_2 \circ r_3 \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$ alors, par la Proposition 3.3.18, tout sous-label de $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est consistant (appartient à $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$), et donc, par associativité de $\circ$, $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 = (r_1 \circ r_2) \circ r_3 = r_1 \circ (r_2 \circ r_3) = r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3)$. Dans le cas contraire, $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 = \pi = r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3)$.

- Nous montrons que $\sqsubseteq$ est un préordre tel que π est le plus grand élément :
  - Plus grand élément :
    Par définition de Ω, nous avons bien, pour tout $r \in R$, $r \sqsubseteq \pi$.
  - Réflexivité :
    Soit $r \in R$. Il y a deux cas :
    - $r = \pi$: Comme nous venons de le vérifier, π est le plus grand élément, donc nous avons $\pi \sqsubseteq \pi$.
    - $r \neq \pi$: Dans ce cas, $r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$. Donc, il existe deux labels x et y tels que $xr \leq y \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$ ou $x \leq yr \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Comme $\overline{\mathcal{C}_{r\pi}} \subseteq \overline{\mathcal{C}_r}$, donc $xr \leq y \in \overline{\mathcal{C}_r}$ ou $x \leq yr \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Par la Proposition 3.3.8, $r \leq r \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Comme $r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$, alors $r \leq r \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Donc $r \sqsubseteq r$.
  - Transitivité :
    Soit $r_1 \sqsubseteq r_2$ et $r_2 \sqsubseteq r_3$. Il y a deux cas :
    - Cas $r_2 = \pi$: Comme $\pi \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$, alors $\pi \leq r_3 \notin \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Mais comme $\pi \sqsubseteq r_3$ alors nécessairement $r_3 = \pi$. Donc $r_1 \sqsubseteq r_3$, puisque π est le plus grand élément.
    - Cas $r_2 \neq \pi$: Comme $r_1 \sqsubseteq r_2$ et $r_2 \neq \pi$ alors $r_1 \leq r_2 \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Si $r_3 = \pi$ alors $r_1 \sqsubseteq r_3$. Si $r_3 \neq \pi$ alors $r_2 \leq r_3 \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Par la règle $\langle t_r \rangle$, $r_1 \leq r_3 \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Comme $r_1 \neq \pi$ et $r_3 \neq \pi$ alors ces labels sont consistants et donc $r_1 \leq r_3 \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. En conclusion $r_1 \sqsubseteq r_3$.
- Compatibilité :
  Soit $r_1, r_2, r_3 \in R$. Supposons que $r_1 \sqsubseteq r_2$. Nous montrons que $r_1 \bullet r_3 \sqsubseteq r_2 \bullet r_3$. Comme $r_1 \sqsubseteq r_2$ alors il y a deux cas :
  - Cas $r_2 = \pi$: Dans ce cas, $r_2 \bullet r_3 = \pi$ et donc $r_1 \bullet r_3 \sqsubseteq r_2 \bullet r_3$, puisque π est le plus grand élément.
  - Cas $r_2 \neq \pi$: Dans ce cas $r_1 \leq r_2 \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Il y a encore deux cas :
    - $r_2 \circ r_3 \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$:
      Par le Corollaire 3.3.9 et la règle $\langle c_r \rangle$, nous avons $r_1 \circ r_3 \leq r_2 \circ r_3 \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Par la Proposition 3.3.18, $r_1 \circ r_3$ est un label consistant, donc $r_1 \circ r_3 \leq r_2 \circ r_3 \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. En conclusion, $r_1 \bullet r_3 \sqsubseteq r_2 \bullet r_3$.
    - $r_2 \circ r_3 \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$:
      Dans ce cas $r_2 \bullet r_3 = \pi$ et donc $r_1 \bullet r_3 \sqsubseteq r_2 \bullet r_3$.
- $\preceq$ est réflexif et transitif, par les règles $\langle l_s \rangle$, $\langle r_s \rangle$ et $\langle t_s \rangle$.

Nous montrons maintenant que $[\![\cdot]\!]$ est bien une interprétation dynamique :

- Monotonie (K) :
  Soient $r, r' \in R$ tels que $r \sqsubseteq r'$ et $(r, s) \in [\![p]\!]$. Par définition, comme $(r, s) \in [\![p]\!]$, il y a deux cas :
  - Cas où il existe $r'' \in R$ tel que $r'' \sqsubseteq r$ et $\mathbb{T}p : (r'', s) \in \mathcal{F}$:
    Comme $r'' \sqsubseteq r$ et $r \sqsubseteq r'$ alors $r'' \sqsubseteq r'$, par transitivité. Donc, comme il existe $r'' \in R$ tel que $r'' \sqsubseteq r'$ et $\mathbb{T}p : (r'', s) \in \mathcal{F}$, alors nous avons bien $(r', s) \in [\![p]\!]$.
  - Cas $r = \pi$:
    Dans ce cas $\pi \sqsubseteq r'$. Comme nous l'avons déjà vu, dans ce cas $r' = \pi$. Donc $(r', s) \in [\![p]\!]$.
- Inconsistance (BC) :
  Soit $r \in R$ tel que $\pi \sqsubseteq r$. Soit $p \in$ Prop et soit $s \in S$, nous avons par définition de Ω, $(\pi, s) \in [\![P]\!]$. Par (K), que nous venons de démontrer, nous avons alors $(r, s) \in [\![P]\!]$. En conclusion, la propriété (BC) est vérifiée.

□

Lemme 3.5.4. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un Hintikka CSS tel que $1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$ et 1_r est un label consistant. Soit $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$. Les propriétés suivantes sont vérifiées pour toute formule ϕ :

(a) $\pi, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$
(b) Si $\mathbb{F}\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant alors $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$
(c) Si $\mathbb{T}\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant alors $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$

Preuve. Par le Lemme 3.5.3, $(\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ est un modèle dynamique, donc la propriété (a) est vérifiée par le Lemme 3.1.6. Nous démontrons les deux autres propriétés par induction simultanée sur la structure de la formule ϕ. Nous faisons remarquer que si $\mathbb{S}\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ alors, par la propriété (P_{css}) de la Définition 3.3.12, $r \leq r \in \overline{\mathcal{C}_r}$. De plus, comme r est consistant alors $r \leq r \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$, d'où $r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$. Donc $r \neq \pi$, par définition de Ω.

- Cas de base
  - Cas $\mathbb{F}p : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant, avec $p \in$ Prop :
    Supposons que $r, s \vDash_{\mathcal{K}} p$. Donc $(r, s) \in [\![p]\!]$. Par la Définition 3.5.2, il existe $r' \in R$ tel que $r' \sqsubseteq r$ et $\mathbb{T}p : (r', s) \in \mathcal{F}$. Comme $r' \sqsubseteq r$ et $r \neq \pi$ alors $r' \leq r \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Comme $\overline{\mathcal{C}_{r\pi}} \subseteq \overline{\mathcal{C}_r}$ alors $r' \leq r \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Donc $\mathbb{T}p : (r', s) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}p : (r, s) \in \mathcal{F}$ et $r' \leq r \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Or, ceci est absurde parce que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ est un Hintikka CSS (condition (1) de la Définition 3.5.1). Donc $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} p$.
  - Cas $\mathbb{T}p : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant, avec $p \in$ Prop :
    Comme $r \sqsubseteq r$ par réflexivité, alors, par définition de Ω, $(r, s) \in [\![p]\!]$. Donc $r, s \vDash_{\mathcal{K}} p$.
  - Cas $\mathbb{F}\top : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Dans ce cas, $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ n'est pas un Hintikka CSS par la condition (3) de la Définition 3.5.1. Ceci est absurde, donc ce cas ne peut pas se produire.
  - Cas $\mathbb{T}\top : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Par la définition de la relation de forcing, nous avons $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \top$.
  - Cas $\mathbb{F}\bot : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Supposons que $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$. Par définition, $\pi \sqsubseteq r$. Comme $r \neq \pi$ alors par définition de Ω, $\pi \leq r \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Or ceci est absurde car $\pi \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$. Donc $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \bot$.
  - Cas $\mathbb{T}\bot : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Dans ce cas, r est inconsistant, or ceci est absurde. Donc ce cas ne peut pas se produire.
  - Cas $\mathbb{F}\mathrm{I} : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Par le condition (2) de la Définition 3.5.1, $1_r \leq r \notin \overline{\mathcal{C}_r}$. Comme $\overline{\mathcal{C}_{r\pi}} \subseteq \overline{\mathcal{C}_r}$ alors $1_r \leq r \notin \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. Par définition de Ω et comme $r \neq \pi$ alors $e \not\sqsubseteq r$. Donc $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$.

- Cas $\mathbb{T}\mathrm{I} : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
  Par la condition (5) de la Définition 3.5.1, $1_r \leq r \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Comme r est consistant alors, par la Proposition 3.3.18, 1_r est consistant. Donc $1_r \leq r \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$. En conséquence, $e \sqsubseteq r$ et nous pouvons conclure que $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$.

- Cas inductifs : nous supposons que les propriétés (b) et (c) sont vérifiées pour les formules ϕ et ψ (HI).
  - Cas $\mathbb{F}\phi \wedge \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Par la condition (7) de la Définition 3.5.1, $\mathbb{F}\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (r, s) \in \mathcal{F}$. Donc par (HI) $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. En conclusion, nous avons donc $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \wedge \psi$.
  - Cas $\mathbb{T}\phi \wedge \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Ce cas est similaire au précédent.
  - Cas $\mathbb{F}\phi \vee \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Ce cas est similaire au précédent.
  - Cas $\mathbb{T}\phi \vee \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Ce cas est similaire au précédent.
  - Cas $\mathbb{F}\phi \to \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Par la condition (11) de la Définition 3.5.1, il existe $r' \in L_r$, tel que $r \leq r' \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\phi : (r', s) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (r', s) \in \mathcal{F}$. Il y a alors deux cas :
    - r' est consistant :
      Dans ce cas, par Ω, la Proposition 3.3.18 et (HI), il existe $r' \in R$ tel que $r \sqsubseteq r'$ et $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r', s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Donc $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$.
    - r' est inconsistant :
      Comme $\mathbb{F}\psi : (r', s) \in \mathcal{F}$ et r' est inconsistant, alors ce cas ne peut pas ce produire par la condition (4) de la Définition 3.5.1.

    En conclusion $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$.
  - Cas $\mathbb{T}\phi \to \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Soit $r' \in R$ tel que $r \sqsubseteq r'$. Supposons que $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Il y a deux cas :
    - $r' = \pi$:
      Donc $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$, par le Lemme 3.1.6.
    - $r' \neq \pi$:
      Donc r' est un label consistant. Comme $r \sqsubseteq r'$ alors, par définition de Ω, $r \leq r' \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Donc, par la condition (10) de la Définition 3.5.1 et par (HI), $r', s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Comme nous avons supposé que $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$, alors $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$.

    En conclusion $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$.
  - Cas $\mathbb{F}\phi * \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Soit y et z tels que $y \bullet z \sqsubseteq r$. Comme $r \neq \pi$ alors $y \bullet z \neq \pi$, sinon nous aurions $\pi \leq r \in \overline{\mathcal{C}_{r\pi}}$ ce qui serait absurde. Donc, comme $y \bullet z \neq \pi$ alors $y \neq \pi$ et $z \neq \pi$. En conséquence, y et z sont des labels consistants et nous avons, par définition de Ω, $yz \leq r \in \overline{\mathcal{C}_r}$. Donc, par la condition (13) de la Définition 3.5.1, $\mathbb{F}\phi : (y, s) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (z, s) \in \mathcal{F}$. Donc, par (HI), $y, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $z, s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors conclure que $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$.
  - Cas $\mathbb{T}\phi * \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Par la condition (12) de la Définition 3.5.1, il existe $r_1, r_2 \in L_r$ tels que $r_1 \circ r_2 \leq r \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et $\mathbb{T}\phi : (r_1, s) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : (r_2, s) \in \mathcal{F}$. Comme r est consistant alors, par la Proposition 3.3.18, $r_1 \circ r_2$ est consistant et donc r_1 et r_2 sont consistants. Par (HI), nous avons alors $r_1, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r_2, s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. En conclusion $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$.
  - Cas $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
    Par la condition (15) de la Définition 3.5.1, il existe $r' \in L_r$ tel que $r \circ r' \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$,

$\mathbb{T}\phi : (r', s) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (r \circ r', s) \in \mathcal{F}$. Il y a deux cas :
  - $r \circ r'$ est consistant :
    Par la Proposition 3.3.18, r' est alors consistant. Donc, par (HI), $r' \in R$ et $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r \bullet r', s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. En conséquence, nous avons bien $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$.
  - $r \circ r'$ est inconsistant :
    Comme $\mathbb{F}\psi : (r \circ r', s) \in \mathcal{F}$, alors ce cas ne peut pas se produire, par la condition (4) de la Définition 3.5.1.

- Cas $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
  Soit $r' \in R$ tel que $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Il y a deux cas :
  - $r \circ r'$ est inconsistant :
    Dans ce cas, $r \bullet r' = \pi$ et donc, par le Lemme 3.1.6, $r \bullet r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$.
  - $r \circ r'$ est consistant :
    Dans ce cas, $r \circ r' \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_{r\pi}})$. Comme $\overline{\mathcal{C}_{r\pi}} \subseteq \overline{\mathcal{C}_r}$ alors $r \circ r' \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$. De plus, par la Proposition 3.3.18, r' est consistant. Par la condition (14) de la Définition 3.5.1, $\mathbb{F}\phi : (r', s)$ ou $\mathbb{T}\psi : (r \circ r', s)$. Par (HI), nous avons alors $r', s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $r \bullet r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Comme $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$, par hypothèse, alors nous avons $r \bullet r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$.

  En conclusion, nous avons bien $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$.
- Cas $\mathbb{F}\Diamond\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
  Soit $s' \in S$ tel que $s \preceq s'$. Par Ω, $s' \in \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s)$ et $s \lhd s' \in \overline{\mathcal{C}_s}$. Par la condition (17) de la Définition 3.5.1, $\mathbb{F}\phi : (r, s') \in \mathcal{F}$. Donc, par (HI), $r, s' \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. En conclusion $r, s \nvDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$.
- Cas $\mathbb{T}\Diamond\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
  Par la condition (16) de la Définition 3.5.1, il existe $s' \in \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_s)$ tel que $s \lhd s' \in \overline{\mathcal{C}_s}$ et $\mathbb{T}\phi : (r, s') \in \mathcal{F}$. Par Ω et (HI), $s' \in S$, $s \preceq s'$ et $r, s' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Donc nous avons $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$.
- Cas $\mathbb{F}\Box\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
  Ce cas est similaire au cas $\mathbb{T}\Diamond\phi : (r, s)$.
- Cas $\mathbb{T}\Box\phi : (r, s) \in \mathcal{F}$ et r est consistant :
  Ce cas est similaire au cas $\mathbb{F}\Diamond\phi : (r, s)$.

□

Lemme 3.5.5. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un Hintika CSS tel que $\mathbb{F}\phi : (1_r, s) \in \mathcal{F}$. La formule ϕ n'est pas valide et $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle)$ est un contre-modèle de ϕ.

Preuve. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle$ un Hintika CSS tel que $\mathbb{F}\phi : (1_r, s) \in \mathcal{F}$. Par la propriété (P_{css}) de la Définition 3.3.12, $1_r \leq 1_r \in \overline{\mathcal{C}_r}$ et donc $1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}_r})$. De plus, comme $\mathbb{F}\phi : (1_r, s) \in \mathcal{F}$, alors 1_r est consistant par la condition (4) de la Définition 3.5.1. Par le Lemme 3.5.3, $\mathcal{K} = \Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_s \rangle)$ est un modèle dynamique. Par le Lemme 3.5.4, nous avons $e, s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. En conclusion, ϕ n'est pas valide et $\mathcal{K}$ est un contre-modèle de la formule. □

Pour terminer cette sous-section, nous énonçons un théorème de complétude pour la méthode des tableaux de DBI [27], s'appuyant sur la méthode d'extraction de contre-modèles que nous venons de présenter.

Théorème 3.5.6 (Complétude)**.** Soit ϕ un formule. Si ϕ est valide, alors il existe une preuve pour ϕ.

Preuve. La démonstration de ce théorème consiste à montrer que s'il est impossible de construire une preuve pour une formule ϕ, alors il est possible à partir de ϕ de construire un Hintikka CSS permettant, par le Lemme 3.5.5, de conclure que la formule ϕ n'est pas valide. Cet Hintikka CSS est construit grâce à l'utilisation d'une stratégie équitable et d'un oracle contenant tous les CSS

finis pour lesquels il n'existe pas de DBI-tableau clos. La preuve détaillée peut être développée comme une variante de la preuve de complétude proposée Section 4.7 du Chapitre 4. □

3.5.2 Un exemple d'extraction de contre-modèles

Dans cette sous-section, nous présentons un exemple d'extraction de contre-modèles pour la formule

$$\Diamond((A \to B) \wedge (A * A)) \to \Diamond B$$

En appliquant la méthode des tableaux pour DBI, il est possible d'obtenir le DBI-tableau de la Figure 7.

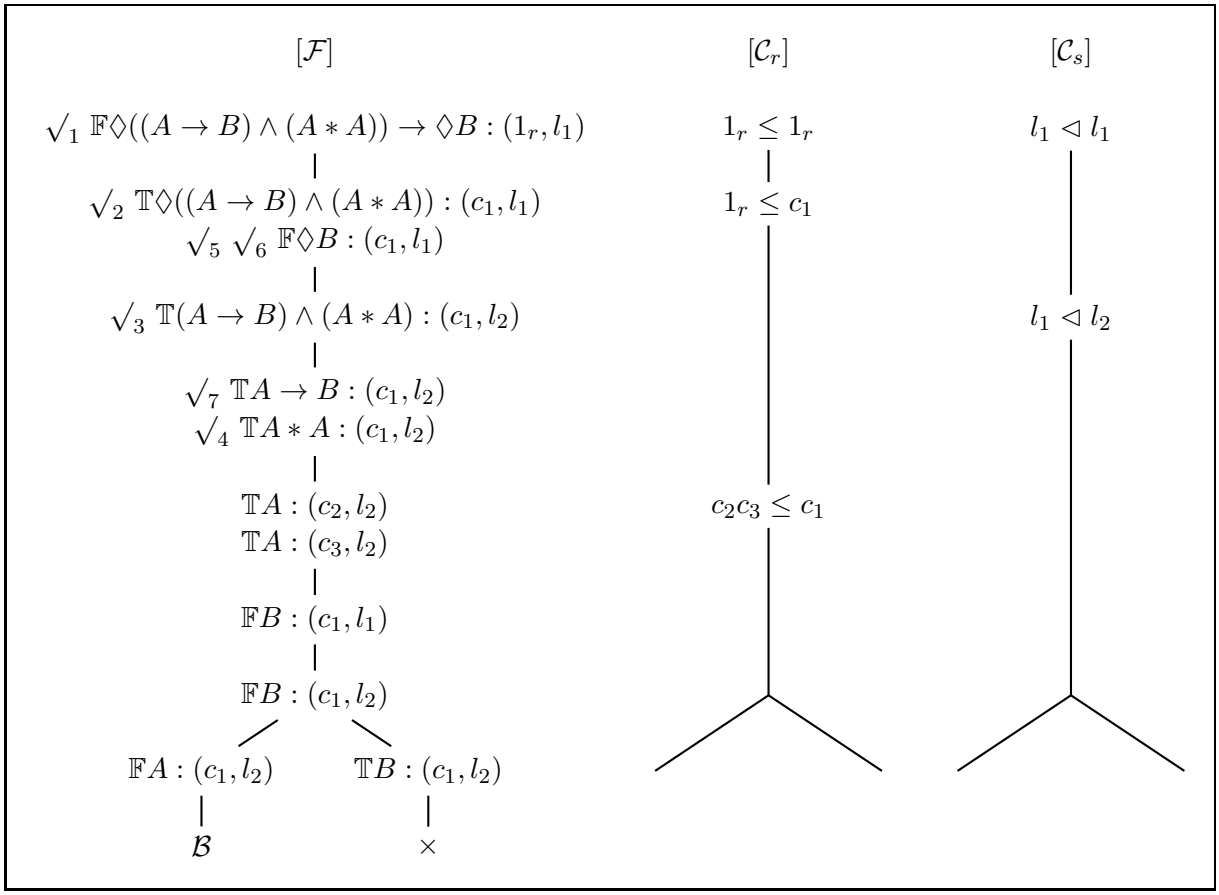
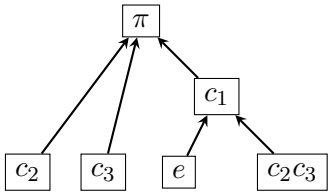


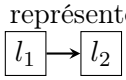
FIGURE 7 – DBI-tableau pour $\Diamond((A \to B) \wedge (A * A)) \to \Diamond B$

Ce DBI-tableau contient un CSS clos (celui de droite) et un autre, notée $\mathcal{B}$, qui possède la propriété d'être un Hintikka CSS. Donc, par le Lemme 3.5.5, nous pouvons conclure que $\Diamond((A \to B) \wedge (A * A)) \to \Diamond B$ n'est pas valide et que $\Omega(\mathcal{B})$ est un contre-modèle de la formule. Nous extrayons ce contre-modèle $\Omega(\mathcal{B}) = (\mathcal{R}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e, \pi, \sqsubseteq, S, \preceq)$, tel que :

- $R = \{e, c_1, c_2, c_3, c_2c_3, \pi\}$
- $S = \{l_1, l_2\}$
- La relation $\sqsubseteq$ où la réflexivité et la transitivité ne sont pas représentées :



- La relation $\preceq$ où la réflexivité n'est pas représentée :



- La composition des ressources :

$\bullet$	e	c_1	c_2	c_3	c_2c_3	π
e	e	c_1	c_2	c_3	c_2c_3	π
c_1	c_1	π	π	π	π	π
c_2	c_2	π	π	c_2c_3	π	π
c_3	c_3	π	c_2c_3	π	π	π
c_2c_3	c_2c_3	π	π	π	π	π
π	π	π	π	π	π	π

- L'interprétation dynamique :
  - $[\![A]\!] = \{(\pi, l_1), (\pi, l_2), (c_2, l_2), (c_3, l_2)\}$
  - $[\![B]\!] = \{(\pi, l_1), (\pi, l_2)\}$

Nous pouvons alors vérifier que nous avons bien obtenu un contre-modèle de la formule, c'est à dire que $e, l_1 \not\Vdash_{\mathcal{K}} \Diamond((A \to B) \wedge (A * A)) \to \Diamond B$:

1. Comme $(c_1, l_2) \notin [\![A]\!]$ alors $c_1, l_2 \not\Vdash_{\mathcal{K}} A$.
2. Par le même argument, nous avons $c_1, l_1 \not\Vdash_{\mathcal{K}} B$ et $c_1, l_2 \not\Vdash_{\mathcal{K}} B$.
3. Comme $(c_2, l_2) \in [\![A]\!]$ et $(c_3, l_2) \in [\![A]\!]$ alors $c_2, l_2 \vDash_{\mathcal{K}} A$ et $c_3, l_2 \vDash_{\mathcal{K}} A$.
4. Nous remarquons aussi que $\pi, l_2 \vDash_{\mathcal{K}} B$.
5. Comme $c_2c_3 \sqsubseteq c_1$ et par (3.) alors $c_1, l_2 \vDash_{\mathcal{K}} A * A$.
6. Nous pouvons remarquer que les ressources r telles que $c_1 \sqsubseteq r$ sont $r = c_1$ et $r = \pi$. Par (1.) et (4.), nous avons alors $c_1, l_2 \vDash_{\mathcal{K}} A \to B$.
7. Par (5.) et (6.), nous avons $c_1, l_2 \vDash_{\mathcal{K}} (A \to B) \wedge (A * A)$.
8. Par (2.), nous pouvons observer que pour tout état $s \in S$ tel que $l_1 \preceq s$, nous avons $c_1, s \not\Vdash_{\mathcal{K}} B$. Donc $c_1, l_1 \not\Vdash_{\mathcal{K}} \Diamond B$.
9. Par (7.) et comme $l_1 \preceq l_2$ alors $c_1, l_1 \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond((A \to B) \wedge (A * A))$.
10. Par (8.) et (9.) et comme $e \sqsubseteq c_1$, nous pouvons conclure que $e, l_1 \not\Vdash_{\mathcal{K}} \Diamond((A \to B) \wedge (A * A)) \to \Diamond B$ et donc que nous avons bien obtenu un contre-modèle de la formule.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouvelle extension modale de BI, nommée DBI, permettant de modéliser et d'exprimer des propriétés dynamiques de ressources, c'est-à-dire des propriétés de ressources évoluant au fur et à mesure des itérations d'un système, et nous avons illustré sur un exemple l'expressivité de notre logique. Nous avons aussi proposé une méthode des tableaux avec labels correcte et complète, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles.

Nous pouvons remarquer que la dynamique capturée par DBI rencontre quelques limites. En effet, si nous observons la modalité $\Diamond$ de plus près, nous remarquons que $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$ exprime

que la ressource r satisfera la propriété ϕ dans un état accessible à partir de s. Dans ce cas, la propriété ϕ est exprimée sur la même ressource r. Pour capturer une forme de transformation de ressources, il nous semble impératif pour $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$ d'exprimer que dans un état accessible à partir de s la ressource r sera transformée en une nouvelle ressource r', qui satisfera ϕ dans cet état s'. Ainsi, avec une telle sémantique, nous capturerions bien la transformation de ressources : la ressource r est transformée en une ressource r'.

Dans le chapitre suivant, nous proposerons une extension de DBI, nommée DMBI, permettant de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes transformant / produisant / consommant des ressources, nous permettant alors d'effectuer notre étude logique de la dynamique des ressources plus en profondeur. Nous étendrons notre exemple afin de montrer que cette nouvelle logique est capable de modéliser par exemple des achats et des ventes d'objets ayant un prix évoluant en fonction du marché, et aussi d'exprimer des propriétés intéressantes sur de tels modèles. De plus, nous nous intéresserons à des problématiques liées à la modélisation de systèmes concurrents.

Chapitre 4

Processus, actions et manipulation de ressources

Introduction

Dans le Chapitre 3, nous avons présenté une extension de la logique BI, nommée DBI, permettant de modéliser des propriétés dynamiques de ressources. En particulier, $r, s \vDash_{\mathcal{K}} P * \Diamond Q$ exprime que la ressource r à l'état s peut être décomposée en deux sous-ressources telles que la première satisfait P et la seconde satisfera Q dans un état accessible à partir de s.

Malheureusement, les modalités de DBI ne permettent pas de capturer des mécanismes de transformation de ressources, tels que la production ou la consommation de ressources. En effet, $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond Q$ exprime que la ressource r satisfera Q dans un état accessible à partir de s. Or, si nous voulons modéliser et exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant des ressources, il est impératif pour la logique non pas d'exprimer Q sur la ressource r dans un état futur, mais sur la nouvelle ressource obtenue après transformation de r. Nous noterons que dans la littérature, des mécanismes de transformation de ressources sont capturés par les preuves elles-mêmes, dans le cas de la Logique Linéaire [43], ou par un calcul à la Hoare [50], dans le cas de la logique des pointeurs [53]. En opposition à ces travaux, nous souhaitons en guise de nouvelle approche proposer une logique dont la manipulation de ressources est capturée dans les modèles de la logique, offrant alors la possibilité d'exprimer des propriétés sur la manière dont le système manipule les ressources.

Des travaux récents ont proposé une nouvelle logique, nommée MBI [76, 24, 77, 23], dont les modèles sont des systèmes de transition qui sont décrits par des jugements de la forme $R, E \xrightarrow{a} R', E'$ signifiant : "le processus E exécute l'action a sur la ressource R, obtenant ainsi la nouvelle ressource R' et devenant alors le processus E'". De plus, ces jugements sont générés par une sémantique opérationnelle. En nous inspirant de ces jugements, nous proposons d'étendre DBI en permettant à l'automate, constituant ses modèles, d'exécuter des actions ayant pour conséquence de transformer les ressources dont il dispose. Cette extension, nommée DMBI [26], se voit alors enrichie de modalités à la Hennessy-Milner [46] ($[a]$ et $\langle a \rangle$) permettant d'exprimer des propriétés sur l'état et la ressource obtenus après l'exécution de l'action a et conserve aussi les modalités de DBI, à savoir $\Diamond$ et $\Box$, permettant d'exprimer des propriétés sur les états et les ressources accessibles après exécutions d'une succession d'actions.

Après avoir présenté le langage et la sémantique de DMBI, nous revisitons l'exemple que

nous avions présenté dans le chapitre précédent en y intégrant la possibilité à un client d'acheter et revendre des produits. Par la suite, nous nous intéressons à la modélisation de processus concurrents par les modèles de DMBI. Notre objectif est de montrer que malgré que les modèles de la logique ne soient constitués que d'un seul automate, ceux-ci sont tout à fait capables de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes concurrents. Finalement, nous présentons une méthode des tableaux avec labels pour la logique, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles et nous montrons sa correction et sa complétude.

4.1 Langage et sémantique de la logique DMBI

Nous proposons de poursuivre notre étude de la dynamique des ressources en étendant les modèles de DBI, cela par l'introduction d'*actions* exécutées par l'automate (l'ensemble d'états et la relation sur ces états) composant les modèles dynamiques de DBI. De plus, nous proposons que l'exécution de ces actions ne puisse être réalisée uniquement si le système dispose d'assez de ressources et que cette exécution d'actions ait pour effet de produire et consommer des ressources. Par ailleurs, nous étendons le langage de DBI par l'ajout de modalités à la Hennessy-Milner [46], $\langle a \rangle$ et $[a]$, permettant d'exprimer des propriétés sur les ressources et l'état du système considéré après que celui-ci ait exécuté l'action a. Nous obtenons alors une nouvelle logique, nommée DMBI [26], que nous présentons dans cette section.

Soit Σ_{Act} un ensemble dénombrable de symboles d'actions. Soit Prop un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. Le langage $\mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}}$ de DMBI est défini par la grammaire suivante, pour tout $p \in \text{Prop}$ et $a \in \Sigma_{Act}$:

$$X ::= p \mid \bot \mid \mathrm{I} \mid X \to X \mid X * X \mid X \mathrel{-\!\!*} X \mid \langle a \rangle X \mid \Diamond X$$

De plus, nous définissons les connecteurs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \neg\phi \equiv \phi \to \bot & \top \equiv \neg\bot & \phi \vee \psi \equiv \neg\phi \to \psi \\ \phi \wedge \psi \equiv \neg(\phi \to \neg\psi) & [a]\phi \equiv \neg\langle a \rangle \neg\phi & \Box\phi \equiv \neg\Diamond\neg\phi \end{array}$$

Comme nous le verrons, la notion d'actions exécutées sur des ressources est centrale dans DMBI. Les modalités de notre logique permettent d'exprimer des propriétés sur les ressources disponibles après l'exécution d'une action a, dans le cas de la modalité à la Hennessy-Milner $\langle a \rangle$, ou d'une succession d'actions, dans le cas de la modalité $\Diamond$. Par exemple, lorsqu'une ressource r et un état s satisfont $\langle a \rangle \phi$, l'idée capturée est la suivante : "en considérant que le système soit à l'état s et que les ressources disponibles soient r, alors le système dispose de suffisamment de ressources pour exécuter l'action a, et après avoir exécuté cette action, le système peut atteindre un état et disposer de ressources satisfaisant ϕ". Concernant la modalité $\Diamond$, si une ressource r et un état s satisfont $\Diamond\phi$, alors cela signifie : "étant à l'état s et disposant des ressources r, il existe une succession d'actions que le système peut exécuter, lui permettant finalement d'atteindre un état et de disposer de ressources satisfaisant ϕ".

Nous définissons maintenant la sémantique de DMBI. Dans un premier temps, nous faisons le choix de BBI comme noyau logique pour notre nouvelle logique, car nous souhaitons que les connecteurs additifs, et plus particulièrement la négation ($\neg$) et l'implication ($\to$), soient classiques. Par ailleurs, il existe une autre sémantique de BBI qui est équivalente en terme de validité à la sémantique que nous avons présenté dans le Chapitre 1, dans laquelle la relation d'équivalence sur les ressources est remplacée par une égalité. Souhaitant nous concentrer sur la notion de

ressource dynamique, nous ne présenterons pas la preuve d'équivalence de ces deux sémantiques dans ce manuscrit. Nous donnons uniquement l'argument de preuve qui est le suivant :

- L'égalité est une relation d'équivalence. Donc si une formule est valide dans la sémantique présentée dans le Chapitre 1, alors elle est satisfaite par toute ressource de tout modèle de BBI, quelque soit la relation d'équivalence choisie. Donc cette formule est satisfaite en particulier dans tout modèle défini avec une égalité.
- Si une formule n'est pas valide, alors il est possible par la méthode des tableaux de BBI d'extraire un contre-modèle [57]. En passant par des classes d'équivalences, il est alors possible d'obtenir un contre-modèle où la relation d'équivalence est une égalité. Donc cette formule n'est pas valide dans la sémantique de BBI définie par une égalité sur les ressources. Nous ne donnerons pour l'instant pas plus de détails sur cette technique à base de classes d'équivalence : nous la verrons en détail dans la Section 4.6.

Si nous reprenons la Définition 1.1.4 et que nous remplaçons la relation $\lhd$ par une égalité, nous pouvons observer que la compatibilité devient trivialement vérifiée et ainsi que la définition de monoïde de ressources (Définition 1.1.4) coïncide avec la définition de monoïde partiel commutatif (Définition 1.1.1).

Définition 4.1.1 (Monoïde de ressources)**.** Un *monoïde de ressources* est une structure $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ telle que :

- R est un ensemble dont les éléments sont appelés *ressources*
- $e \in R$
- $\bullet : R \times R \rightharpoonup R$ est une fonction partielle telle que, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Élément neutre : $r_1 \bullet e \downarrow$ et $r_1 \bullet e = r_1$
  - Commutativité : si $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ alors $r_2 \bullet r_1 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_2 = r_2 \bullet r_1$
  - Associativité : si $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) \downarrow$ alors $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$ et $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) = (r_1 \bullet r_2) \bullet r_3$

Nous rappelons que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ est défini" et $r_1 \bullet r_2 \uparrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ n'est pas défini". Nous appelons toujours e la *ressource unitaire* et $\bullet$ la *composition de ressources*. Par ailleurs, nous pouvons rappelons aussi que si $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$ alors $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) \downarrow$.

Définition 4.1.2 (Monoïde d'actions)**.** Un *monoïde d'actions* est une structure $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$ telle que :

- Act est un ensemble dont les éléments sont appelés *actions*
- $1 \in Act$
- $\odot : Act \times Act \to Act$ est une fonction totale telle que, pour tout $a_1, a_2, a_3 \in Act$:
  - Élément neutre : $a_1 \odot 1 = 1 \odot a_1 = a_1$
  - Associativité : $a_1 \odot (a_2 \odot a_3) = (a_1 \odot a_2) \odot a_3$

L'action 1 est appelée *action unitaire* et la fonction $\odot$ est appelée *composition d'actions*. Le rôle de la composition d'actions est de modéliser des successions d'actions. Par exemple, $a_1 \odot a_2$ est l'action consistant à exécuter l'action a_1 puis l'action a_2. De ce fait, nous considérons la composition d'actions comme étant totale, mais non commutative, puisque de manière générale exécuter a_1 puis a_2 ne produit pas toujours le même résultat qu'exécuter a_2 puis a_1. En guise d'exemple, rédiger un mail puis l'envoyer ne produira pas le même résultat qu'envoyer un mail et le rédiger seulement après ($rediger Mail \odot envoyer Mail \neq envoyer Mail \odot rediger Mail$).

Définition 4.1.3 (μ-MRD)**.** Un *μ-monoïde de ressources dynamique* (μ-MRD) est une structure $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \|\cdot\rangle, \mu)$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ est un monoïde de ressources et $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$ est un monoïde d'actions, telle que :

- S est un ensemble donc les éléments sont appelés *états*

- $\|\cdot\rangle\!\rangle \subseteq S \times Act \times S$ est une relation sur les états et les actions telle que, pour tous états $s_1, s_2, s_3 \in S$ et toutes actions $a_1, a_2 \in Act$:
  - $\|\cdot\rangle\!\rangle$-unité : $s_1 \, \|1\rangle\!\rangle \, s_1$
  - $\|\cdot\rangle\!\rangle$-composition : si $s_1 \, \|a_1\rangle\!\rangle \, s_2$ et $s_2 \, \|a_2\rangle\!\rangle \, s_3$ alors $s_1 \, \|a_1 \odot a_2\rangle\!\rangle \, s_3$
- $\mu : Act \times R \rightharpoonup R$ est une fonction partielle telle que, pour tout $r \in R$ et tous $a_1, a_2 \in Act$:
  - μ-unité : $\mu(1, r) \downarrow$ et $\mu(1, r) = r$
  - μ-composition : si $\mu(a_1, r) \downarrow$ et $\mu(a_2, \mu(a_1, r)) \downarrow$ alors $\mu(a_1 \odot a_2, r) \downarrow$ et $\mu(a_1 \odot a_2, r) = \mu(a_2, \mu(a_1, r))$

Dans cette définition, nous retrouvons les concepts introduits dans DBI, à savoir la notion d'états (S) et une relation sur les états ($\|\cdot\rangle\!\rangle$) dépendant maintenant aussi d'actions. Ainsi, $s_1 \|a\rangle\!\rangle s_2$ capture que notre système (automate) à l'état s_1 peut atteindre l'état s_2 en exécutant l'action a. Par ailleurs afin de capturer l'effet de l'exécution d'une action sur les ressources dont dispose le système, nous considérons une fonction μ, dans l'esprit de la logique MBI [76, 24, 77], à laquelle nous avons ajouté la propriété de μ-composition (MBI ne considère pas de composition d'actions). Ainsi, $\mu(a, r)$ est la ressource obtenue après l'exécution de l'action a sur la ressource r. Bien-entendu, cette fonction est partielle puisque de manière générale pour pouvoir effectuer une action, le système doit disposer de suffisamment de ressources. Nous faisons remarquer que la propriété de μ-composition capture l'idée qu'exécuter $a_1 \odot a_2$ sur la ressource r nous permet d'obtenir la même ressource que si nous avions exécuté l'action a_1 puis l'action a_2 sur r.
Afin de représenter les transitions et leurs effets sur les ressources, nous introduisons les notations suivantes :

- $r, s \xrightarrow{a} r', s'$ ssi $\mu(a, r) \downarrow$, $\mu(a, r) = r'$ et $s \, \|a\rangle\!\rangle \, s'$
- $r, s \rightsquigarrow r', s'$ ssi il existe $a_0, ..., a_n \in Act$, $r_1, ..., r_n \in R$ et $s_1, ..., s_n \in S$ tels que $r, s \xrightarrow{a_0} r_1, s_1 \xrightarrow{a_1} ... \xrightarrow{a_{n-1}} r_n, s_n \xrightarrow{a_n} r', s'$

Nous pouvons remarquer que, pour tous $r \in R$ et $s \in S$, nous avons $r, s \xrightarrow{1} r, s$ par la $\|\cdot\rangle\!\rangle$-unité et la μ-unité. En conséquence, pour tous $r \in R$ et $s \in S$, nous avons aussi $r, s \rightsquigarrow r, s$.

De plus, nous considérons de manière implicite une interprétation $[\![\cdot]\!]_{\Sigma_{Act}} : \Sigma_{Act} \rightharpoonup Act$, permettant d'associer une action à un symbole d'actions. Dans le cas où $1 \in \Sigma_{Act}$, nous considérons que $[\![1]\!]_{\Sigma_{Act}} = 1$. Pour finir, par abus de notation, nous noterons a au lieu $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}$ et nous ne ferons plus de distinction entre le symbole d'actions a et l'action $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}$ associée.

Définition 4.1.4 (Modèle)**.** Un *modèle* est un triplet $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ où $\mathcal{M}$ est un μ-MRD, $[\![\cdot]\!] : \text{Prop} \to \mathbb{P}(R \times S)$ et $\vDash_{\mathcal{K}} \subseteq R \times S \times \mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}}$ est une relation de forcing définie par :

- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} p$ ssi $(r, s) \in [\![p]\!]$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$ jamais
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$ ssi $r = e$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$ ssi $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \Rightarrow r, s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$ ssi $\exists r_1, r_2 \in R \cdot r_1 \bullet r_2 \downarrow$ et $r = r_1 \bullet r_2$ et $r_1, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r_2, s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$ ssi $\forall r' \in R \cdot (r \bullet r' \downarrow$ et $r', s \vDash_{\mathcal{K}} \phi) \Rightarrow r \bullet r', s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \langle a \rangle \phi$ ssi $\exists r' \in R \cdot \exists s' \in S \cdot r, s \xrightarrow{a} r', s'$ et $r', s' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$
- $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond \phi$ ssi $\exists r' \in R \cdot \exists s' \in S \cdot r, s \rightsquigarrow r', s'$ et $r', s' \vDash_{\mathcal{K}} \phi$

Nous pouvons remarquer que, dans cette définition, il n'est pas imposé à l'interprétation des variables propositionelles $[\![\cdot]\!]$ de satisfaire de propriétés particulières. Nous insistons sur le fait que nous n'avons pas défini l'interprétation des symboles d'actions comme une fonction totale. Mais nous remarquons que malgré cela, notre sémantique reste correctement définie. En effet, sans abus de notation, nous avons $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \langle a \rangle \phi$ seulement s'il existe $r' \in R$ et $s' \in S$ tels que

$r, s \xrightarrow{[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}} r', s'$, donc seulement si $\mu([\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}, r) \downarrow$, donc seulement si $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}} \in Act$ et donc seulement si $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}$ est défini. En d'autres termes, avec abus de notation, $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \langle a \rangle \phi$ signifie : "a est une action ($[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}$ est défini) et si le système considéré est à l'état s et dispose des ressources r alors celui-ci peut exécuter l'action a lui permettant d'accéder à un état s' et à une ressource r' satisfaisant ϕ".

Définition 4.1.5 (Validité)**.** Une formule ϕ est *valide*, noté $\vDash \phi$, si et seulement si $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ pour toute ressource r et tout état s de tout modèle $\mathcal{K}$.

Nous terminons cette section en donnant deux propositions.

Proposition 4.1.6. Pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$, tous $a, a' \in Act$ et tous $s_1, s_2, s_3 \in S$, la propriété suivante est vérifiée : si $r_1, s_1 \xrightarrow{a} r_2, s_2$ et $r_2, s_2 \xrightarrow{a'} r_3, s_3$ alors $r_1, s_1 \xrightarrow{a \odot a'} r_3, s_3$.

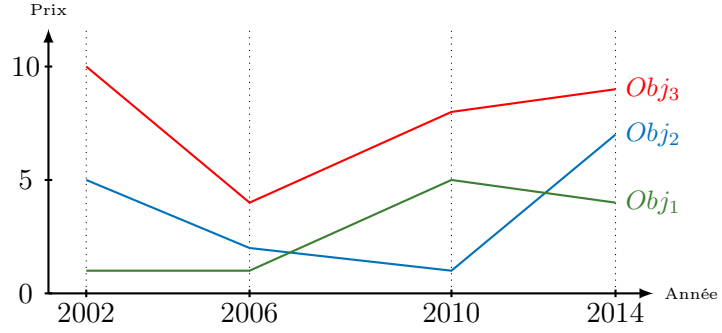
Preuve. Par définition, $\mu(a, r_1) \downarrow$, $\mu(a, r_1) = r_2$ et $s_1 \| a \rangle\!\rangle s_2$. De plus, nous avons aussi $\mu(a', r_2) \downarrow$, $\mu(a', r_2) = r_3$ et $s_2 \| a' \rangle\!\rangle s_3$. Donc $\mu(a', \mu(a, r_1)) \downarrow$ et $\mu(a', \mu(a, r_1)) = r_3$. Par la μ-composition, $\mu(a \odot a', r_1) \downarrow$ et $\mu(a \odot a', r_1) = \mu(a', \mu(a, r_1)) = r_3$. Par la $\|\cdot\rangle\!\rangle$-composition, $s_1 \| a \odot a' \rangle\!\rangle s_3$. En conclusion $r_1, s_1 \xrightarrow{a \odot a'} r_3, s_3$. □

Proposition 4.1.7. Pour tous $r, r' \in R$ et $s, s' \in S$, nous avons $r, s \rightsquigarrow r', s'$ ssi il existe $a \in Act$ tel que $r, s \xrightarrow{a} r', s'$.

Preuve. Supposons qu'il existe $a \in Act$ tel que $r, s \xrightarrow{a} r', s'$. Alors, par définition, $r, s \rightsquigarrow r', s'$. Maintenant supposons que $r, s \rightsquigarrow r', s'$. Par définition, il existe $a_0, ..., a_n \in Act$, $r_1, ..., r_n \in R$ et $s_1, ..., s_n \in S$ tels que $r, s \xrightarrow{a_0} r_1, s_1 \xrightarrow{a_1} ... \xrightarrow{a_{n-1}} r_n, s_n \xrightarrow{a_n} r', s'$. Par induction sur n et par la Proposition 4.1.6, nous pouvons alors montrer que $r, s \xrightarrow{a_0 \odot a_1 \odot ... \odot a_{n-1} \odot a_n} r', s'$. □

4.2 Expressivité de la logique DMBI

Dans cette section nous revisitons l'exemple que nous avons présenté dans le Chapitre 3 en montrant que DMBI est capable de modéliser des achats et reventes de produits dont les prix évoluent.



	2002	2006	2010	2014
Obj_1	1€	1€	5€	4€
Obj_2	5€	2€	1€	8€
Obj_3	10€	4€	7€	9€

FIGURE 8 – Exemple d'évolution de prix d'objets

Nous considérons toujours trois objets (Obj_1, Obj_2 et Obj_3) et nous redonnons l'évolution de leur prix à la Figure 8. L'objectif de cet exemple est de montrer que DMBI est capable d'exprimer qu'il nous est possible en 2002 avec uniquement 1 euro de réussir à nous procurer un exemplaire

de l'objet Obj_3, alors que sur la période 2002-2014, le prix de cet objet n'est jamais inférieur à 4 euros.

Contrairement aux exemples des chapitres précédents, nous considérons comme ressources tout ce que nous possédons en termes de monnaie et d'objets, c'est-à-dire un couple (m, O) où m est la quantité de monnaie et O est le multi-ensemble des objets en notre possession. Nous rappelons que nous considérons uniquement des valeurs entières de monnaie. De plus, nous ne tenons plus compte de la quantité totale de monnaie en circulation, par soucis de simplicité. Nous rappelons aussi que nous notons $\mathfrak{M}(E)$ l'ensemble des multi-ensembles construits sur l'ensemble E et $\{\!\{\}\!\}$ est le multi-ensemble vide. Nous proposons de considérer la structure suivante : $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ telle que :

- $R = \{(m, O) \mid m \in \mathbb{N} \text{ et } O \in \mathfrak{M}(\{Obj_1, Obj_2, Obj_3\})\}$
- $(m_1, O_1) \bullet (m_2, O_2) = (m_1 + m_2, O_1 + O_2)$
- $e = (0, \{\!\{\}\!\})$

Ainsi, $(15, \{\!\{Obj_1, Obj_1, Obj_3\}\!\})$ est la ressource représentant la possession de 15 euros, de deux objets Obj_1 et d'un objet Obj_3. La ressource unitaire $(0, \{\!\{\}\!\})$ représente la possession de zéro euro et d'aucun objet. Pour finir, nous pouvons illustrer la composition de ressources par : $(15, \{\!\{Obj_1, Obj_1, Obj_3\}\!\}) \bullet (3, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}) = (18, \{\!\{Obj_1, Obj_1, Obj_2, Obj_3, Obj_3\}\!\})$. On remarque que notre structure est bien un monoïde de ressources au sens de la Définition 4.1.1.

Intéressons-nous maintenant aux actions que nous pouvons réaliser. Dans cet exemple, nous considérons uniquement trois actions atomiques (ou actions de base) : l'achat et la vente d'objets, ainsi que laisser écouler le temps. Nous noterons $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des listes dont les éléments appartiennent à l'ensemble E, $[]$ la liste vide et $\oplus$ est la concaténation de listes. Considérons alors la structure $\mathcal{A} = (Act, \oplus, [])$ telle que $Act = \mathcal{L}(\{ac_i^j \mid 1 \leqslant i \leqslant 3 \text{ et } j \in \mathbb{N}\} \cup \{ve_i^j \mid 1 \leqslant i \leqslant 3 \text{ et } j \in \mathbb{N}\} \cup \{w\})$. Ainsi, ac_i^j est l'action atomique représentant l'achat de l'objet Obj_i au prix de j euros, ve_i^j est l'action atomique encodant la vente de Obj_i au prix de j euros et w est l'action atomique encodant le fait de laisser s'écouler 4 années. De ce fait, nous considérons comme action toute liste (ou succession) d'actions atomiques. Par exemple, $[ac_1^5, w, ve_2^3, ve_2^3]$ est l'action consistant à acheter un objet Obj_1 au prix de 5 euros, puis à laisser écouler 4 années et enfin à vendre successivement deux objets Obj_2 à 3 euros, tandis que l'action $[]$ est l'action consistant à effectuer aucune action atomique. Nous pouvons remarquer que notre structure est bien un monoïde d'actions au sens de la Définition 4.1.2.

La dernière étape de la construction de notre modèle consiste à considérer la structure $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \|\cdot\rangle\!\rangle, \mu)$, telle que :

- $S = \{2002, 2006, 2010, 2014\}$
- $\|\cdot\rangle\!\rangle \subseteq S \times Act \times S$ est la plus petite relation telle que :
  - $s \,\|[]\rangle\!\rangle\, s$
  - $s \,\|[ac_i^j]\rangle\!\rangle\, s$ et $s \,\|[ve_i^j]\rangle\!\rangle\, s$ si Obj_i a un prix de j euros à la date s
  - $s \,\|[w]\rangle\!\rangle\, s'$ si $s' = s + 4$ et $s \in \{2002, 2006, 2010\}$
  - $s \|[A_1; ...; A_n]\rangle\!\rangle\, s'$ si $\exists s_1, ..., s_{n-1} \in S \cdot s \|[A_1]\rangle\!\rangle\, s_1$ et $s_1 \|[A_2]\rangle\!\rangle\, s_2$ et ... et $s_{n-2} \|[A_{n-1}]\rangle\!\rangle\, s_{n-1}$ et $s_{n-1} \,\|[A_n]\rangle\!\rangle\, s'$
- $\mu : Act \times R \rightharpoonup R$ est définie inductivement par :

$$\mu(l,(m,O)) = \begin{cases} (m,O) & \text{si } l = [] \\ \uparrow & \text{si } l = [ac_i^j] \text{ et } m < j \\ (m-j, O + \{\!\{Obj_i\}\!\}) & \text{si } l = [ac_i^j] \text{ et } m \geqslant j \\ \uparrow & \text{si } l = [ve_i^j] \text{ et } O(Obj_i) = 0 \\ (m+j, O - \{\!\{Obj_i\}\!\}) & \text{si } l = [ve_i^j] \text{ et } O(Obj_i) > 0 \\ (m,O) & \text{si } l = [w] \\ \mu([A_2;...;A_k], \mu([A_1],(m,O))) & \text{si } l = [A_1;...;A_k] \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer, dans la définition de la fonction μ, une soustraction de multi-ensemble : $O - \{\!\{Obj_i\}\!\}$. Celle-ci est définie simplement par : $O_1 - O_2 = O_3$ tel que $O_3(o) = O_1(o) - O_2(o)$ pour tout $o \in \{Obj_1, Obj_2, Obj_3\}$ et est bien entendu définie uniquement si $O_1(o) \geqslant O_2(o)$ pour tout $o \in \{Obj_1, Obj_2, Obj_3\}$. Nous illustrons tout d'abord la structure que nous venons de définir. Les états de notre système sont les quatre dates de l'ensemble S. Concernant la fonction de transition $\|\cdot\rangle\!\rangle$, nous avons par exemple 2006 $\|[]\rangle\!\rangle$ 2006, puisque [] est l'action consistant à n'effectuer aucune action atomique, donc en particulier à ne pas laisser passer de temps (w), ainsi si nous sommes en 2006 et que nous ne faisons rien (pas même laisser passer du temps) alors nous restons en 2006. Nous avons aussi 2006 $\|[ac_2^2]\rangle\!\rangle$ 2006 et 2006 $\|[ve_3^4]\rangle\!\rangle$ 2006 puisqu'en 2006, Obj_2 valait 2 euros et Obj_3 valait 4 euros. Mais nous n'avons pas 2006$\|[ac_1^5]\rangle\!\rangle$2006 puisque le prix de Obj_1 n'est pas de 5 euros en 2006 et nous n'avons pas non plus 2006$\|[ac_2^2]\rangle\!\rangle$2010 puisque que l'achat et la vente d'objet ne permettent pas de changer la date courante. Seule l'action atomique w permet de laisser passer du temps (4 années). Ainsi, nous avons par exemple 2006$\|[w]\rangle\!\rangle$2010. Finalement, comme nous avons 2006$\|[ac_2^2]\rangle\!\rangle$2006, 2006$\|[ve_3^4]\rangle\!\rangle$2006, 2006$\|[w]\rangle\!\rangle$2010 et 2010 $\|[ac_1^5]\rangle\!\rangle$ 2010 alors nous avons 2006 $\|[ac_2^2; ve_3^4; w; ac_1^5]\rangle\!\rangle$ 2010 qui capture qu'en 2006, il est possible d'acheter Obj_2 pour 2 euros, puis vendre Obj_3 pour 4 euros, puis laisser passer 4 années et enfin acheter Obj_1 pour 5 euros et finalement être à l'année 2010. Concernant la fonction μ, nous avons par exemple $\mu([],(10,\{\!\{Obj_1\}\!\})) = (10,\{\!\{Obj_1\}\!\})$ puisque si nous avons 10 euros et un objet Obj_1 et si nous ne faisons rien ([]), alors nous aurons toujours les mêmes ressources. Nous avons aussi $\mu([ac_1^4],(2,\{\!\{\}\!\})) \uparrow$ parce qu'avec 2 euros nous n'avons pas suffisamment de ressources pour acheter Obj_1 à 4 euros. Nous avons aussi $\mu([ve_1^4,(2,\{\!\{Obj_2,Obj_2\}\!\})) \uparrow$ puisque si nous avons uniquement deux objets Obj_2 alors il ne nous est pas possible de vendre un exemplaire de l'objet Obj_1. De plus, nous avons $\mu([ac_3^4],(6,\{\!\{Obj_2\}\!\})) = (2,\{\!\{Obj_2,Obj_3\}\!\})$ et $\mu([ve_3^4],(6,\{\!\{Obj_2,Obj_3,Obj_3\}\!\})) = (10,\{\!\{Obj_2,Obj_3\}\!\})$, qui capturent respectivement l'achat et la vente d'un objet ayant pour conséquence le gain ou la perte de monnaie et le gain ou la perte de l'objet en question. Nous pouvons remarquer que l'action atomique w ne consomme et ne produit pas de ressource : $\mu([w],(7,\{\!\{Obj_1\}\!\})) = (7,\{\!\{Obj_1\}\!\})$. Finalement, nous pouvons donner l'exemple plus complexe suivant (liste d'actions atomiques de plus d'un élément) :

$$\begin{array}{rcl} \mu([ac_3^2,ac_3^2,w,ve_2^5],(6,\{\!\{Obj_2\}\!\})) & = & \mu([ac_3^2,w,ve_2^5],(4,\{\!\{Obj_2,Obj_3\}\!\})) \\ & = & \mu([w,ve_2^5],(2,\{\!\{Obj_2,Obj_3,Obj_3\}\!\})) \\ & = & \mu([ve_2^5],(2,\{\!\{Obj_2,Obj_3,Obj_3\}\!\})) \\ & = & (7,\{\!\{Obj_3,Obj_3\}\!\}) \end{array}$$

Pour finir, en observant que notre structure vérifie les propriétés de $\|\cdot\rangle\!\rangle$-unité, de $\|\cdot\rangle\!\rangle$-composition, de μ-unité et de μ-composition, nous pouvons alors remarquer que notre structure est bien un μ-MRD au sens de la Définition 4.1.3.

Ainsi, il nous est alors possible d'utiliser les notations que nous avons introduit dans la Section 4.1. Comme 2002 $\|[ac_1^1]\rangle\!\rangle$ 2002 et comme $\mu([ac_1^1],(1,\{\!\{\}\!\})) \downarrow$ et $\mu([ac_1^1],(1,\{\!\{\}\!\})) = (0,\{\!\{Obj_1\}\!\})$, alors nous avons $(1,\{\!\{\}\!\}),2002 \xrightarrow{[ac_1^1]} (0,\{\!\{Obj_1\}\!\}),2002$ ce qui illustre qu'en 2002, avec 1 euro

et aucun objet et en achetant Obj_1 à 1 euro (ac_1^1), nous restons alors toujours en 2002, nous obtenons Obj_1 et nous n'avons plus de monnaie. Nous illustrons aussi l'autre notation : comme $(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \xrightarrow{[ac_1^1]} (0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2002$ et $(0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2002 \xrightarrow{[w]} (0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2006$ alors nous avons $(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \rightsquigarrow (0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2006$ ce qui illustre qu'en 2002, avec 1 euro et aucun objet, il est possible d'effectuer une succession d'actions nous permettant d'être en 2006 avec aucun euro et avec l'objet Obj_1.

Avant d'illustrer l'expressivité de la logique, nous montrons que les structures de DMBI permettent d'exprimer que sur la période 2002-2014, avec 1 seul euro et sans objet, il nous est possible d'obtenir plusieurs objets dont au moins un exemplaire de Obj_3, alors que le prix de cet objet n'est jamais inférieur à 4 euros. Nous avons :

$$(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \xrightarrow{[ac_1^1]} (0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2002$$

$$(0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2002 \xrightarrow{[w]} (0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2006$$

$$(0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2006 \xrightarrow{[w]} (0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2010$$

$$(0, \{\!\{Obj_1\}\!\}), 2010 \xrightarrow{[ve_1^5]} (5, \{\!\{\}\!\}), 2010$$

$$(5, \{\!\{\}\!\}), 2010 \xrightarrow{[ac_2^1]} (4, \{\!\{Obj_2\}\!\}), 2010$$

$$(4, \{\!\{Obj_2\}\!\}), 2010 \xrightarrow{[ac_2^1]} (3, \{\!\{Obj_2, Obj_2\}\!\}), 2010$$

$$(3, \{\!\{Obj_2, Obj_2\}\!\}), 2010 \xrightarrow{[w]} (3, \{\!\{Obj_2, Obj_2\}\!\}), 2014$$

$$(3, \{\!\{Obj_2, Obj_2\}\!\}), 2014 \xrightarrow{[ve_2^8]} (11, \{\!\{Obj_2\}\!\}), 2014$$

$$(11, \{\!\{Obj_2\}\!\}), 2014 \xrightarrow{[ac_3^9]} (2, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}), 2014$$

En conclusion nous avons, par définition :

$$(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \rightsquigarrow (2, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}), 2014$$

qui montre qu'il est possible en 2002 avec uniquement 1 euro de finalement posséder en 2014, 2 euros ainsi que les objets Obj_2 et Obj_3. Nous avons aussi, par la Proposition 4.1.6 :

$$(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \xrightarrow{[ac_1^1;w;w;ve_1^5;ac_2^1;ac_2^1;w;ve_2^8;ac_3^9]} (2, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}), 2014$$

qui explicite la succession d'actions atomiques nous permettant d'y parvenir.

Nous illustrons maintenant l'expressivité des connecteurs de la logique DMBI. Nous considérons simplement l'ensemble de symboles d'actions $\Sigma_{Act} = Act$ et l'ensemble de variables propositionnelles $\text{Prop} = \{O_1, O_2, O_3\} \cup \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, où O_i exprime, contrairement aux chapitres précédents : "nous possèdons exactement un objet, qui est l'objet Obj_i" et M_i qui exprime "nous possèdons i euros". Pour cela, nous définissons l'interprétation suivante :

$$[\![O_i]\!] = \{((0, O), s) \mid O(Obj_i) = 1 \text{ et } O(Obj_j) = 0 \text{ pour tout } j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}\}$$

$$[\![M_i]\!] = \{((m, \{\!\{\}\!\}), s) \mid m = i\}$$

Ainsi, nous obtenons une structure $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, qui est un modèle au sens de la Définition 4.1.4.

Concernant les variables propositionnelles, nous avons $(0, \{\!\{Obj_2\}\!\}), 2002 \vDash_{\mathcal{K}} O_2$ exprimant que nous possédons uniquement un objet Obj_2. Nous avons aussi $(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \vDash_{\mathcal{K}} M_1$, indiquant que nous avons uniquement un euro. Concernant la constante I, nous avons $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$ ssi $r = e = (0, \{\!\{\}\!\})$, donc si et seulement si nous ne possédons rien (pas de monnaie et pas d'objet). Concernant les autres connecteurs, à l'exception des modalités, nous retrouvons la même expressivité que BBI. Par exemple, $(2, \{\!\{Obj_1, Obj_2, Obj_2\}\!\}), 2002 \vDash_{\mathcal{K}} (M_2 \wedge (M_1 * M_1)) * O_1 * O_2 * O_2$.

Nous ne donnerons pas plus de détails sur ces connecteurs déjà présentés dans les chapitres précédents et nous nous intéressons directement aux modalités de DMBI. La première modalité est $\langle a \rangle$. Comme nous l'avons vu, nous avons $(11, \{\!\{Obj_2\}\!\}), 2014 \xrightarrow{[ac_3^9]} (2, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}), 2014$. De plus comme $(2, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}), 2014 \vDash_{\mathcal{K}} M_2 * O_2 * O_3$ alors, par définition, nous avons $(11, \{\!\{Obj_2\}\!\}), 2014 \vDash_{\mathcal{K}} \langle [ac_3^9] \rangle (M_2 * O_2 * O_3)$, qui exprime qu'avec 11 euros et un objet Obj_2 en 2014, nous pouvons acheter un objet Obj_3 pour 9 euros, et après l'avoir acheté, nous aurons 2 euros (M_2) et un objet Obj_2 ainsi qu'un objet Obj_3. Ceci illustre cette première modalité $\langle [ac_3^9] \rangle$, nous permettant d'exprimer des propriétés sur les ressources disponibles après l'exécution de l'action $[ac_3^9]$. Concernant la seconde modalité ($\Diamond$), celle-ci permet d'exprimer une propriété sur un couple ressource/état accessible. Par exemple, comme nous l'avons vu, nous avons $(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \rightsquigarrow (2, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}), 2014$. De plus, comme $(2, \{\!\{Obj_2, Obj_3\}\!\}), 2014 \vDash_{\mathcal{K}} O_3 * \top$, alors nous avons $(1, \{\!\{\}\!\}), 2002 \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond(O_3 * \top)$, qui exprime qu'avec un unique euro en 2002, il est possible d'effectuer une succession d'actions nous permettant d'acquérir au moins un exemplaire de l'objet Obj_3, ce qui permet d'exprimer et de répondre à la question que nous nous sommes posés en début de section.

4.3 Modélisation de processus concurrents

Comme nous l'avons présenté dans les sections précédentes, DMBI est une logique permettant de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant des ressources. En observant les modèles de la logique, nous pouvons remarquer que ceux-ci sont constitués d'un unique automate. Or dans la pratique les systèmes, devenant toujours de plus en plus complexes, sont souvent composés de plusieurs sous-systèmes réalisant des actions de manière concurrente. À titre d'exemple, nous pouvons citer les webservices, les systèmes multi-agents, les systèmes répartis, etc...
Nous proposons alors, dans cette section, de montrer comment modéliser avec DMBI plusieurs processus concurrents exécutant des actions concurrentes sur des ressources. Pour finir, nous illustrons nos résultats sur un exemple d'exclusion mutuelle, puis un exemple de producteur / consommateur.

4.3.1 Modélisation de processus concurrents

Nous considérons un système composé de n processus concurrents (P_1, ..., P_n) manipulant des ressources. L'objectif de cette sous-section est de construire un modèle de DMBI capturant le comportement de ce système. Pour cela, nous considérons que le comportement du système soit décrit par une structure $\mathfrak{D} = (R_{atom}, Act_{atom}, \mu_{pre}, \mu_{post}, \{P_1, ..., P_n\})$, telle que :

- R_{atom} est un ensemble fini de *ressources atomiques*
- Act_{atom} est un ensemble fini d'*actions atomiques*
- $\mu_{pre} : Act_{atom} \to \mathfrak{M}(R_{atom})$

- $\mu_{post} : Act_{atom} \to \mathfrak{M}(R_{atom})$
- $P_i = (S_i, \twoheadrightarrow_{P_i})$, tel que
  - S_i est l'ensemble des états du processus P_i
  - $\twoheadrightarrow_{P_i} \subseteq S_i \times Act_{atom} \times S_i$ est la relation de transition du processus P_i

Concernant ce système, les processus exécutent des *actions atomiques* ayant pour effet de produire et consommer des *ressources atomiques*. Une ressource atomique est une ressource qui ne peut pas être décomposée en sous-ressources plus petites et une action atomique est une action qui ne peut pas être décomposée en une succession d'actions plus simples. Dans cette section, nous appelons alors *ressource* tout multi-ensemble de ressources atomiques. Nous rappelons que $\mathfrak{M}(R_{atom})$ est l'ensemble des multi-ensembles sur R_{atom}, pouvant être vus comme des fonctions $R_{atom} \to \mathbb{N}$.
Les processus exécutent des actions atomiques. L'effet de ces actions atomiques est déterminé par la fonction μ_{pre}, où $\mu_{pre}(a)$ est la ressource (le multi-ensemble de ressources atomiques) consommée lors de l'exécution de l'action atomique a, ainsi que la fonction μ_{post}, où $\mu_{post}(a)$ est la ressource produite suite à l'exécution de l'action atomique a. Concernant la notation $(S_i, \twoheadrightarrow_{P_i})$ de l'automate P_i, S_i est l'ensemble de ses états et $\twoheadrightarrow_{P_i}$ est sa relation de transition. Nous soulignons qu'il n'est pas supposé que les automates P_i soient égaux.

Notre objectif est la construction d'un modèle à partir de $\mathfrak{D}$. Dans un premier temps, nous rappelons les notations sur les multi-ensembles. Nous notons $R = \{\!\{r_1, r_1, r_2\}\!\}$ le multi-ensemble tel que $R(r_1) = 2$, $R(r_2) = 1$ et $R(r) = 0$ pour tout $r \in R_{atom} \setminus \{r_1, r_2\}$. Dans cette section, nous notons indifféremment e ou $\{\!\}$ le multi-ensemble vide, tel que $e(r) = 0$ pour tout $r \in R_{atom}$. R_1 est dit *sous-ressource* de R_2 (noté $R_1 \leq R_2$) ssi $R_1(r) \leqslant R_2(r)$ pour tout $r \in R_{atom}$. La composition de ressources est définie par $R_1 + R_2 = R_3$ tel que $R_3(r) = R_1(r) + R_2(r)$ pour tout $r \in R_{atom}$. Nous définissons aussi $R_1 - R_2 = R_3$ tel que $R_3(r) = R_1(r) - R_2(r)$ pour tout $r \in R_{atom}$ et nous remarquons que $R_1 - R_2$ est défini si et seulement si $R_2 \leq R_1$.

Proposition 4.3.1. $\mathcal{R} = (\mathfrak{M}(R_{atom}), +, e)$ est un monoïde de ressources.

Preuve. Il suffit de vérifier que $\mathcal{R}$ est bien un monoïde de ressources au sens de la Définition 4.1.1. □

Concernant les actions, nous construisons dans un premier temps l'ensemble des actions atomiques concurrentes $Act^{\#}_{atom} = \{a_1\#...\#a_n \mid a_1, ..., a_n \in Act_{atom}\}$. Par exemple, si $n = 2$ (nous considérons deux processus), alors l'action atomique concurrente $a_1\#a_2$ est l'action concurrente où P_1 exécute l'action atomique a_1 et P_2 exécute l'action atomique a_2. Ensuite, nous considérons l'ensemble des listes d'actions atomiques concurrentes $\mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom})$. Nous rappelons que [] est la liste vide, $\oplus$ est la concaténation de liste et nous notons aussi $|L|$ la taille de la liste L. Ainsi, $[A_1; A_2]$, où $A_1, A_2 \in Act^{\#}_{atom}$, est l'action consistant à exécuter l'action atomique concurrente A_1 suivie de l'action atomique concurrente A_2.

Proposition 4.3.2. $\mathcal{A} = (\mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}), \oplus, [])$ est un monoïde d'actions.

Preuve. Il suffit de vérifier que $\mathcal{A}$ est bien un monoïde d'actions au sens de la Définition 4.1.2. □

Maintenant, à partir des deux fonctions μ_{pre} et μ_{post}, nous construisons une fonction permettant de déterminer l'effet de l'exécution d'une liste d'actions atomiques concurrentes sur une ressource. Pour cela, nous définissons dans un premier temps la fonction $\mu^{\#} : Act^{\#}_{atom} \times \mathfrak{M}(R_{atom}) \rightharpoonup$

$\mathfrak{M}(R_{atom})$ capturant l'effet de l'exécution d'actions atomiques concurrentes sur les ressources :

$$\mu^{\#}(a_1\#...\#a_n, R) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \mu_{pre}(a_1) + ... + \mu_{pre}(a_n) \not\leq R \\ R - \mu_{pre}(a_1) - ... - \mu_{pre}(a_n) + \mu_{post}(a_1) + ... + \mu_{post}(a_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que dans le cas où le système dispose des ressources R, les processus peuvent effectuer l'action concurrente $a_1\#...\#a_n$ si et seulement si R contient suffisamment de ressources atomiques permettant l'exécution de toutes les actions atomiques a_i : $\mu_{pre}(a_1) + ... + \mu_{pre}(a_n) \leq R$. De plus, après l'exécutions de ces actions atomiques, la nouvelle ressource disponible sera $R - \mu_{pre}(a_1) - ... - \mu_{pre}(a_n) + \mu_{post}(a_1) + ... + \mu_{post}(a_n)$. En effet, la nouvelle ressource disponible est la ressource R moins les ressources atomiques consommées par l'exécution des actions a_i ($\mu_{pre}(a_i)$) plus les ressources atomiques produites par les actions a_i ($\mu_{post}(a_i)$).
Maintenant, nous étendons cette fonction sur les listes d'actions atomiques concurrentes, obtenant alors la fonction $\mu_{list} : \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}) \times \mathfrak{M}(R_{atom}) \rightharpoonup \mathfrak{M}(R_{atom})$:

$$\mu_{list}(L, R) = \begin{cases} R & \text{si } L = [] \\ \uparrow & \text{si } L = [A_1; ...; A_k] \text{ et } \mu^{\#}(A_1, R) \uparrow \\ \mu_{list}([A_2; ...; A_k], \mu^{\#}(A_1, R)) & \text{où } L = [A_1; ...; A_k] \end{cases}$$

Dans cette définition, nous avons $\mu_{list}([], R) = R$ parce que si le système n'exécute aucune action atomique concurrente sur R, alors R ne sera pas modifiée. En guise d'illustration, $\mu_{list}([A_1; A_2], R)$ est égal à la ressource obtenue après l'exécution des actions atomiques concurrentes A_1 sur R, puis A_2 sur la ressource précédemment obtenue.

Proposition 4.3.3. La fonction $\mu_{list} : \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}) \times \mathfrak{M}(R_{atom}) \rightharpoonup \mathfrak{M}(R_{atom})$ satisfait les propriété de μ-unité et de μ-composition.

Preuve. La preuve est donnée en Annexe A. □

La dernière étape consiste à capturer les transitions concurrentes des processus. Pour cela, nous définissons l'ensemble $S^{\#} = \{s_1\#...\#s_n \mid s_i \in S_i \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ des état concurrents. Par exemple, $s_1\#s_2$ est l'état concurrent tel que le processus P_1 est à l'état s_1 et le processus P_2 est à l'état s_2.
Nous définissons alors la relation $|\cdot\rangle^{\#} : S^{\#} \times Act^{\#}_{atom} \times S^{\#}$, telle que :

$$s_1\#...\#s_n \,|a_1\#...\#a_n\rangle^{\#}\, s'_1\#...\#s'_n \text{ ssi } s_i \xrightarrow{a_i}_{P_i} s'_i \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Ainsi, $s_1\#s_2 \,|a_1\#a_2\rangle^{\#}\, s'_1\#s'_2$ signifie que lorsque P_1 est à l'état s_1 et P_2 est à l'état s_2 alors ces deux processus peuvent effectuer une transition consistant à exécuter l'action atomique concurrente $a_1\#a_2$ et atteindre respectivement les états s'_1 et s'_2.
Finalement, nous étendons la précédente relation sur les listes d'actions atomiques concurrentes, obtenant alors la relation $|\cdot\rangle_{list} : S^{\#} \times \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}) \times S^{\#}$, telle que :

$$S \,|[A_1; ...; A_k]\rangle_{list}\, S' \text{ ssi } \exists S_1, ..., S_{k-1} \in S^{\#} \cdot S \,|A_1\rangle^{\#}\, S_1 \,|A_2\rangle^{\#} ... \,|A_{k-1}\rangle^{\#}\, S_{k-1} \,|A_k\rangle^{\#}\, S'$$

Nous faisons remarquer que dans cette définition, nous avons implicitement $S \,|[]\rangle_{list}\, S$.

Proposition 4.3.4. La relation $|\cdot\rangle_{list} : S^{\#} \times \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}) \times S^{\#}$ satisfait les propriétés de $\|\cdot\rangle$-unité et de $\|\cdot\rangle$-composition.

Preuve. La preuve est donnée en Annexe A. □

Nous pouvons remarquer que notre modèle modélise en réalité des processus synchrones, c'est-à-dire que les processus exécutent simultanément une action atomique à chaque transition. Nous indiquons alors qu'il est possible de modéliser un système asynchrone en considérant une nouvelle action atomique *skip* et en étendant $\mathfrak{D}$ tel que $\mu_{pre}(skip) = \mu_{post}(skip) = e$ et $s_i \overset{skip}{\rightarrow}_{P_i} s_i$ pour tous les processus P_i et tous les états $s_i \in S_i$. Ainsi, en remarquant qu'exécuter l'action *skip* produit le même effet que de ne pas exécuter d'action atomique, nous permettons au modèle de capturer un comportement asynchrone.

Lemme 4.3.5. Soit $\mathfrak{D} = (R_{atom}, Act_{atom}, \mu_{pre}, \mu_{post}, \{P_1, ..., P_n\})$, où $P_i = (S_i, \rightarrow_{P_i})$, un système composé de n processus concurrents. Le 5-uplet $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S^{\#}, |\cdot\rangle_{list}, \mu_{list})$, où $\mathcal{R} = (\mathfrak{M}(R_{atom}), +, e)$ et $\mathcal{A} = (\mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}), \oplus, [])$ est un μ-MRD.

Preuve. Par la Proposition 4.3.1, $\mathcal{R}$ est un monoïde de ressources. Par la Proposition 4.3.2, $\mathcal{A}$ est un monoïde d'actions. $|\cdot\rangle_{list}$ satisfait les propriétés de $\|\cdot\|$-unité et de $\|\cdot\|$-composition par la Proposition 4.3.4 et μ_{list} satisfait les propriétés de μ-unité et de μ-composition par la Proposition 4.3.3. En conclusion, $\mathcal{M}$ est un μ-MRD. □

Nous avons démarrer cette sous-section en considérant un système $\mathfrak{S} = (R_{atom}, Act_{atom}, \mu_{pre}, \mu_{post}, \{P_1, ..., P_n\})$ composé de n processus concurrents qui manipulent des ressources. Nous avons présenté comment construire un μ-MRD $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S^{\#}, |\cdot\rangle_{list}, \mu_{list})$. L'étape final consiste à considérer le modèle $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où :

- Prop $= R_{atom}$
- $[\![r]\!] = \{(\{\!\{r\}\!\}, s) \mid \in S^{\#}\}$
- $\Sigma_{Act} = Act^{\#}_{atom}$
- $[\![A]\!]_{\Sigma_{Act}} = [A]$

4.3.2 Un exemple d'exclusion mutuelle

Dans cette sous-section, nous appliquons la construction que nous venons de présenter sur un exemple d'exclusion mutuelle. Cet exemple a servi à motiver la logique MBI [77], une logique dont DMBI tire la philosophie. Nous profiterons de cette sous-section pour comparer l'expressivité des deux logiques.

Nous considérons le système $\mathfrak{D} = (R_{atom}, Act_{atom}, \mu_{pre}, \mu_{post}, \{P_1, P_2\})$, tel que :

- $R_{atom} = \{J\}$
- $Act_{atom} = \{a_{nc}, a_c, a_p, a_v\}$
- μ_{pre} est défini par :
  - $\mu_{pre}(a_{nc}) = \mu_{pre}(a_c) = \mu_{pre}(a_v) = \{\!\{\}\!\}$
  - $\mu_{pre}(a_p) = \{\!\{J\}\!\}$
- μ_{post} est défini par :
  - $\mu_{post}(a_{nc}) = \mu_{post}(a_c) = \mu_{post}(a_p) = \{\!\{\}\!\}$
  - $\mu_{post}(a_v) = \{\!\{J\}\!\}$
- $P_1 = (S_1, \rightarrow_{P_1})$ et $P_2 = (S_2, \rightarrow_{P_2})$ tels que :
  - $S_1 = S_2 = \{s_{nc}, s_c\}$
  - Pour tout $i \in \{1, 2\}$, nous avons :

$$s_{nc} \overset{a_{nc}}{\rightarrow}_{P_i} s_{nc} \qquad s_{nc} \overset{a_p}{\rightarrow}_{P_i} s_c \qquad s_c \overset{a_c}{\rightarrow}_{P_i} s_c \qquad s_c \overset{a_v}{\rightarrow}_{P_i} s_{nc}$$

Comme nous pouvons l'observer, une seule ressource atomique est considérée, à savoir un jeton (J). Le système est constitué de deux processus, P_1 et P_2. Pour pouvoir entrer en section critique et ainsi effectuer une action critique, un processus doit prendre le jeton. En retournant en section

non critique, le processus rend le jeton. Quatre actions atomiques sont alors considérées : a_{nc} (une action non critique), a_c (une action critique), a_p (action consistant à prendre un jeton) et a_v (action consistant à rendre le jeton). Les fonctions $\mu_{pre}(a)$ et $\mu_{post}(a)$ capturent respectivement les ressources consommées et produites lors de l'exécution de l'action a. Nous pouvons alors remarquer que lorsqu'un processus prend un jeton, un jeton est consommé ($\mu_{pre}(a_p) = \{\!\{J\}\!\}$) et lorsqu'un processus rend un jeton, un jeton est produit ($\mu_{post}(a_v) = \{\!\{J\}\!\}$). Les autres actions atomiques ne produisent pas et ne consomment pas de jetons. Pour finir, les processus ont deux états : s_{nc} (processus en section non critique) et s_c (processus en section critique).

Ainsi, en utilisant la méthode vue dans la sous-section précédente, nous pouvons construire un modèle $\mathcal{K}$ capturant le comportement de ces deux processus. Considérons alors ce modèle. Tout comme MBI, DMBI est capable d'exprimer que l'action $a_{nc}\#a_{nc}$ ne peut pas être exécutée lorsque le système dispose d'un unique jeton et lorsque les deux processus sont en section non critique :

$$\{\!\{J\}\!\}, s_{nc}\#s_{nc} \vDash_{\mathcal{K}} [a_c\#a_c]\bot$$

Mais observons cette formule de plus près. Nous pouvons remarquer que la modalité à la Hennessy-Milner $[a_c\#a_c]$ exprime en réalité que les deux processus ne peuvent pas exécuter simultanément une action critique, cela à partir de la configuration initiale ($\{\!\{J\}\!\}, s_{nc}\#s_{nc}$) du système. Cette formule n'exprime pas que les deux processus ne pourront pas exécuter en même temps un action critique, cela après avoir exécuté un nombre quelconque d'actions auparavant. Pour exprimer une telle propriété, nous avons besoin d'utiliser la modalité $\Box$, présente uniquement dans le langage de DMBI :

$$\{\!\{J\}\!\}, s_{nc}\#s_{nc} \vDash_{\mathcal{K}} \Box[a_c\#a_c]\bot$$

De cette manière, nous exprimons qu'en supposant que les processus soient en section non critique et qu'ils ne disposent que d'un unique jeton, alors quelque soit les actions qu'ils exécuteront, ils ne pourront jamais exécuter deux actions critiques simultanément.

Pour finir, DMBI possède bien entendu les connecteurs provenant de BBI. En conséquence, il est alors possible d'exprimer des propriétés sur les ressources dont dispose (disposera) le système. Par exemple, nous pouvons exprimer simplement qu'il n'y aura jamais plus d'un jeton disponible :

$$\{\!\{J\}\!\}, s_{nc}\#s_{nc} \vDash_{\mathcal{K}} \neg\Diamond(J * J * \top)$$

4.3.3 Un exemple de producteur / consommateur

Dans ce deuxième exemple, nous modélisons et exprimons des propriétés sur un exemple de producteur / consommateur.

Nous considérons le système $\mathfrak{S} = (R_{atom}, Act_{atom}, \mu_{pre}, \mu_{post}, \{P_p, P_c\})$:

- $R_{atom} = \{r\}$
- $Act_{atom} = \{a_p, a_c, a_w\}$
- μ_{pre} est défini par :
  - $\mu_{pre}(a_p) = \mu_{pre}(a_w) = \{\!\{\}\!\}$
  - $\mu_{pre}(a_c) = \{\!\{r\}\!\}$
- μ_{post} est défini par :
  - $\mu_{post}(a_c) = \mu_{post}(a_w) = \{\!\{\}\!\}$
  - $\mu_{post}(a_p) = \{\!\{r\}\!\}$

- $P_p = (S_p, \twoheadrightarrow_{P_p})$ et $P_c = (S_c, \twoheadrightarrow_{P_c})$ tels que :
  - $S_p = S_c = \{s\}$
  - Les transitions de P_p sont $s \overset{a_p}{\twoheadrightarrow}_{P_p} s$ et $s \overset{a_w}{\twoheadrightarrow}_{P_p} s$
  - Les transitions de P_c sont $s \overset{a_c}{\twoheadrightarrow}_{P_c} s$ et $s \overset{a_w}{\twoheadrightarrow}_{P_c} s$

Le système que nous considérons est composé d'un producteur P_p et d'un consommateur P_c. Ces processus possèdent un seul état s. Par ailleurs, nous considérons une seule ressource atomique (r), qui est la ressource produite et consommée par les deux processus. Le producteur peut exécuter seulement deux actions : produire une ressource (a_p) ou ne rien faire (a_w). Concernant le consommateur, celui-ci peut : consommer une ressource (a_c) ou ne rien faire (a_w).

Nous considérons le modèle construit tel que décrit dans la sous-section 4.3.1. Il nous est alors possible, grâce à DMBI, d'exprimer qu'à partir d'une ressource initial quelconque (notée R), quelque soit la liste d'actions atomiques concurrentes exécutée par les processus ($\Box$), si le système ne dispose plus de ressource (I) alors le consommateur ne peut pas consommer pendant que le producteur ne produit pas :

$$R, s\#s \vDash_{\mathcal{K}} \Box(\mathrm{I} \rightarrow [a_w \# a_c]\bot)$$

Nous pouvons aussi exprimer, sur notre exemple, la propriété suivante :

$$\{\!\{\}\!\}, s\#s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond(r * \top) \rightarrow \Diamond\langle a_p \# a_w\rangle\top$$

Cette propriété signifie : en considérant qu'il n'y ait pas de ressource de disponible ($\{\!\{\}\!\}$), si après avoir exécuté une quelconque liste d'actions atomiques concurrentes au moins une ressource est disponible ($r * \top$), alors le producteur produira une ressource pendant que le consommateur n'en consommera pas.

4.4 Une méthode des tableaux pour DMBI

Dans cette section nous présentons une méthode des tableaux pour DMBI. Pour cela, nous étendons nos précédents travaux en introduisant de nouvelles contraintes permettant de capturer dans le calcul des informations sémantiques concernant la fonction de transformation de ressources (μ) et les transitions de l'automate ($\|.\rangle\!\rangle$).

4.4.1 Labels de ressources, d'actions et d'états

Tout comme la méthode des tableaux pour DBI, des labels sont introduits afin de capturer de l'information sémantique. La méthode des tableaux pour DMBI contient alors des labels de ressources, des labels d'actions et des labels d'états permettant d'encoder, respectivement, le monoïde de ressources, le monoïde d'actions et l'ensemble des états des modèles.

Définition 4.4.1 (Label de ressources)**.** Soit $\gamma_r = \{c_1, c_2, ...\}$ un ensemble dénombrable infini de constantes. Un *label de ressources* est un élément appartenant au langage généré par la grammaire suivante :

$$X ::= 1_r \mid c_i \mid X \circ X$$

où $c_i \in \gamma_r$ et $1_r \notin \gamma_r$. Les termes seront considérés modulo l'associativité et la commutativité de $\circ$ et la neutralité de 1_r. Nous notons L_r l'ensemble de tous les labels de ressource.

Nous rappelons que nous notons xy le label de ressources $x \circ y$. Nous rappelons aussi que x est un *sous-label de ressources* de y ssi il existe z tel que $x \circ z = y$. L'ensemble des sous-labels de ressources de x est noté $\mathcal{E}_r(x)$. Un label de ressources peut alors être vu comme un mot construit sur γ_r où l'ordre des lettres n'est pas tenu en compte.

Définition 4.4.2 (Labels d'actions)**.** Soit $\gamma_a = \{d_1, d_2, ...\}$ un ensemble dénombrable infini de constantes. Un *label d'actions* est un élément appartenant au langage généré par la grammaire suivante :

$$X ::= 1_a \mid a_i \mid d_i \mid X \centerdot X$$

où $a_i \in \Sigma_{Act} \setminus \{1\}$, $d_i \in \gamma_a$, $1_a \notin \Sigma_{Act} \cup \gamma_a$ et $\Sigma_{Act} \cap \gamma_a = \emptyset$. Les termes seront considérés modulo l'associativité (mais pas la commutativité) de $\centerdot$ et la neutralité de 1_a. Nous notons L_a l'ensemble de tous les labels de d'action.

Nous attirons l'intention sur le fait que 1 n'est pas considéré comme un label d'actions ($a_i \in \Sigma_{Act} \setminus \{1\}$). Nous noterons fg le label d'actions $f \centerdot g$. Nous dirons que f est un *sous-label d'actions* de g ssi il existe h et h' tels que $h \centerdot f \centerdot h' = g$. L'ensemble des sous-labels d'actions de f est noté $\mathcal{E}_a(f)$. Un label d'actions peut alors être vu comme un mot construit sur $\gamma_a \cup \Sigma_{Act} \setminus \{1\}$ où l'ordre des lettres est pris en compte.

Définition 4.4.3 (Labels d'états)**.** Un *label d'états* est un élément appartenant à l'ensemble dénombrable infini $L_s = \{l_1, l_2, ...\}$.

Nous introduisons dans la méthode des tableaux de DMBI trois types de contraintes permettant de capturer l'égalité sur les ressources, la fonction μ et la relation de transition $\|\cdot\rangle$.

Définition 4.4.4 (Contraintes)**.** Une *contrainte de ressources* est une expression de la forme $x \sim y$ où x et y sont des labels de ressources. Une *μ-contrainte* est une expression de la forme $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y$ où x et y sont des labels de ressources et f est un label d'actions. Une *contrainte de transitions* est une expression de la forme $u \overset{f}{\rightarrowtail} v$ où u et v sont des labels d'états et f est un label d'actions.

Un *ensemble de contraintes* $\mathcal{C}$ est un ensemble contenant des contraintes de ressources, des μ-contraintes et des contraintes de transitions. Par exemple, $\mathcal{C} = \{c_1 \sim c_2, c_3 \sim c_2, c_1 \overset{a_1}{\twoheadrightarrow} c_2, c_3 \overset{d_1}{\twoheadrightarrow} c_3 c_3, l_1 \overset{d_2}{\rightarrowtail} l_2\}$ est un ensemble de contraintes. Nous définissons maintenant les domaines et alphabets d'ensemble de contraintes.

Définition 4.4.5 (Domaine)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Le *domaine* de ressources / actions de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des sous-labels de ressources / actions apparaissant dans $\mathcal{C}$. En particulier :

- $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}) = \left[\bigcup_{x \sim y \in \mathcal{C}} (\mathcal{E}_r(x) \cup \mathcal{E}_r(y))\right] \cup \left[\bigcup_{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}} (\mathcal{E}_r(x) \cup \mathcal{E}_r(y))\right]$
- $\mathcal{D}_a(\mathcal{C}) = \left[\bigcup_{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}} \mathcal{E}_a(f)\right] \cup \left[\bigcup_{u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \mathcal{C}} \mathcal{E}_a(f)\right]$

Définition 4.4.6 (Alphabet)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. L'*alphabet* de ressources / actions / états de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des constantes de ressources / actions / états, ainsi que des symboles d'actions, apparaissant dans $\mathcal{C}$. En particulier :

- $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) = \gamma_r \cap \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$

Règles produisant des contraintes de ressources :

$$\frac{}{1_r \sim 1_r}\ \langle 1_r \rangle \qquad \frac{x \sim y}{y \sim x}\ \langle s_r \rangle \qquad \frac{xy \sim xy}{x \sim x}\ \langle d_r \rangle \qquad \frac{x \sim y \qquad y \sim z}{x \sim z}\ \langle t_r \rangle$$

$$\frac{x \sim y \qquad yk \sim yk}{xk \sim yk}\ \langle c_r \rangle \qquad \frac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \qquad x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z}{y \sim z}\ \langle k_r \rangle \qquad \frac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}{x \sim x}\ \langle a_{r_1} \rangle$$

Règles produisant des μ-contraintes :

$$\frac{x \sim x}{x \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} x}\ \langle 1_\mu \rangle \qquad \frac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \qquad y \overset{g}{\twoheadrightarrow} z}{x \overset{fg}{\twoheadrightarrow} z}\ \langle t_\mu \rangle \qquad \frac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \qquad x \sim x'}{x' \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}\ \langle k_{\mu_1} \rangle \qquad \frac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \qquad y \sim y'}{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y'}\ \langle k_{\mu_2} \rangle$$

Règles produisant des contraintes de transitions :

$$\frac{u \overset{f}{\rightarrowtail} v}{u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u}\ \langle 1_{t_1} \rangle \qquad \frac{u \overset{f}{\rightarrowtail} v}{v \overset{1_a}{\rightarrowtail} v}\ \langle 1_{t_2} \rangle \qquad \frac{u \overset{f}{\rightarrowtail} v \qquad v \overset{g}{\rightarrowtail} w}{u \overset{fg}{\rightarrowtail} w}\ \langle t_t \rangle$$

FIGURE 9 – Règles de clôture d'un ensemble de contraintes pour DMBI

- $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}) = (\Sigma_{Act} \cup \gamma_a) \cap \mathcal{D}_a(\mathcal{C})$
- $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}) = \bigcup_{u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \mathcal{C}} \{u, v\}$

Définition 4.4.7 (Clôture d'un ensemble de contraintes)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. La clôture de $\mathcal{C}$, noté $\overline{\mathcal{C}}$, est le plus petit ensemble clos par les règle de la Figure 9 tel que $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$.

Nous pouvons remarquer que, contrairement à DBI, il est impossible de clore séparément les contraintes de ressources et les μ-contraintes, à cause des règles $\langle k_r \rangle$, $\langle a_{r_1} \rangle$, $\langle 1_\mu \rangle$, $\langle k_{\mu_1} \rangle$ et $\langle k_{\mu_2} \rangle$. En effet, observons par exemple la règle $\langle k_r \rangle$. Nous pouvons remarquer que celle-ci prend en prémisse deux μ-contraintes ($x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y$ et $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z$) et pourtant retourne une contrainte de ressources. À l'opposé, pour appliquer la règle $\langle 1_\mu \rangle$ retournant une μ-contrainte, nous devons choisir une contrainte de ressources ($x \sim x$) : les clôtures des contraintes de ressources et des μ-contraintes sont interdépendantes.
Concernant les règles de clôture, nous pouvons observer sept règles ($\langle 1_r \rangle$, $\langle s_r \rangle$, $\langle d_r \rangle$, $\langle t_r \rangle$, $\langle c_r \rangle$, $\langle k_r \rangle$ et $\langle a_{r_1} \rangle$) produisant des contraintes de ressources, quatre règles ($\langle 1_\mu \rangle$, $\langle t_\mu \rangle$, $\langle k_{\mu_1} \rangle$ et $\langle k_{\mu_2} \rangle$) produisant des μ-contraintes et trois règles ($\langle 1_{t_1} \rangle$, $\langle 1_{t_2} \rangle$ et $\langle t_t \rangle$) produisant des contraintes de transitions.
Nous donnons un exemple d'utilisation de ces règles. Soit $\mathcal{C} = \{c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3, c_1 \overset{a_1}{\twoheadrightarrow} c_2, c_4 \sim c_5\}$. Nous avons alors $c_3 \overset{a_1}{\twoheadrightarrow} c_2 \in \overline{\mathcal{C}}$. En effet :

$$\frac{c_1 \overset{a_1}{\twoheadrightarrow} c_2 \qquad \dfrac{c_1 \sim c_2 \qquad c_2 \sim c_3}{c_1 \sim c_3}\ \langle t_r \rangle}{c_3 \overset{a_1}{\twoheadrightarrow} c_2}\ \langle k_{\mu_1} \rangle$$

Pour terminer cette sous-section, nous donnons quelques propriétés satisfaites par la clôture d'ensembles de contraintes.

Proposition 4.4.8. Les règles suivantes peuvent être dérivées des règles de clôture d'un ensemble de contraintes :

$$\frac{xk \sim y}{x \sim x}\,\langle p_l\rangle \qquad \frac{x \sim yk}{y \sim y}\,\langle p_r\rangle \qquad \frac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}{y \sim y}\,\langle a_{r_2}\rangle \qquad \frac{xk \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}{x \sim x}\,\langle q_l\rangle \qquad \frac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} yk}{y \sim y}\,\langle q_r\rangle$$

Preuve. Nous donnons les arbres de dérivation suivants :

$$\dfrac{xk \sim y \qquad \dfrac{xk \sim y}{y \sim xk}\,\langle s_r\rangle}{\dfrac{xk \sim xk}{x \sim x}\,\langle d_r\rangle}\,\langle t_r\rangle \qquad \dfrac{\dfrac{x \sim yk}{yk \sim x}\,\langle s_r\rangle}{y \sim y}\,\langle p_l\rangle \qquad \dfrac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \qquad x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}{y \sim y}\,\langle k_r\rangle \qquad \dfrac{\dfrac{xk \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}{xk \sim xk}\,\langle a_{r_1}\rangle}{x \sim x}\,\langle d_r\rangle$$

$$\dfrac{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} yk}{\dfrac{yk \sim yk}{y \sim y}\,\langle d_r\rangle}\,\langle a_{r_2}\rangle$$

□

Corollaire 4.4.9. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes, $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ ssi $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$.

Preuve. Supposons que $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Par la Définition 4.4.5, $x \in \bigcup_{y \sim z \in \overline{\mathcal{C}}}(\mathcal{E}_r(y) \cup \mathcal{E}_r(z))$ ou $x \in \bigcup_{y \overset{f}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}}}(\mathcal{E}_r(y) \cup \mathcal{E}_r(z))$. Il y a alors deux cas :

- Il existe $y \sim z \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $x \in \mathcal{E}_r(y) \cup \mathcal{E}_r(z)$. Donc, il existe un label de ressources x' tel que $xx' \sim z \in \overline{\mathcal{C}}$ ou $y \sim xx' \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors, par la Proposition 4.4.8, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$.
- Il existe $y \overset{f}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $x \in \mathcal{E}_r(y) \cup \mathcal{E}_r(z)$. Donc, il existe un label de ressources x' tel que $xx' \overset{f}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}}$ ou $y \overset{f}{\twoheadrightarrow} xx' \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors, par la Proposition 4.4.8, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$.

Maintenant, supposons que $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$, alors, par définition, $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. □

Corollaire 4.4.10. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes, $u \in \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$ ssi $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}}$.

Preuve. Supposons que $u \in \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$. Par la Définition 4.4.6, $u \in \bigcup_{v \overset{f}{\rightarrowtail} w \in \overline{\mathcal{C}}}\{v, w\}$. Donc, il existe $v \overset{f}{\rightarrowtail} w \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $u = v$ ou $u = w$. Alors, par les règles $\langle 1_{t_1}\rangle$ et $\langle 1_{t_2}\rangle$ de la Figure 9, $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}}$. Maintenant, supposons que $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors, par définition, $u \in \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$. □

Corollaire 4.4.11. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Si $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $x \sim x' \in \overline{\mathcal{C}}$ et $y \sim y' \in \overline{\mathcal{C}}$ alors $xy \sim x'y' \in \overline{\mathcal{C}}$.

Preuve. Par le Corollaire 4.4.9, $xy \sim xy \in \overline{\mathcal{C}}$. Finalement, nous donnons l'arbre de dérivation suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{y \sim y'}}{y' \sim y}\,\langle s_r\rangle \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{x \sim x'}}{x' \sim x}\,\langle s_r\rangle \qquad \dfrac{\vdots}{xy \sim xy}}{\dfrac{x'y \sim xy}{x'y \sim x'y'}\,\langle p_l\rangle}\,\langle c_r\rangle}{x'y' \sim x'y}\,\langle c_r\rangle \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{x \sim x'}}{x' \sim x}\,\langle s_r\rangle \qquad \dfrac{\vdots}{xy \sim xy}}{x'y \sim xy}\,\langle c_r\rangle}{\dfrac{x'y' \sim xy}{xy \sim x'y'}\,\langle s_r\rangle}\,\langle t_r\rangle$$

□

Proposition 4.4.12. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Nous avons $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_a(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$.

Preuve. Comme $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$, alors nous avons $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_a(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$. Pour la réciproque, il suffit d'observer que les règles de la Figure 9 ne produisent pas de nouvelles constantes de ressources / actions / états. D'où $\mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\mathcal{A}_a(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. En conclusion $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_a(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$.

□

Lemme 4.4.13 (Compacité)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes pouvant être infini :

1. Si $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$ alors il existe un ensemble fini $\mathcal{C}_f$ tel que $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}_f}$
2. Si $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ alors il existe un ensemble fini $\mathcal{C}_f$ tel que $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ et $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}_f}$
3. Si $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$ alors il existe un ensemble fini $\mathcal{C}_f$ tel que $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}_f}$

Preuve. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Soit $c \in \overline{\mathcal{C}}$ une contrainte. Si $c \in \overline{\mathcal{C}}$ parce que $c \in \mathcal{C}$ alors en considérant $\mathcal{C}_f = \{c\}$, nous avons $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ et $c \in \overline{\mathcal{C}_f}$. Dans les autres cas, la contrainte c est obtenue par des règles de la Figure 9. Nous prouvons le lemme par induction sur la taille n de l'arbre de dérivation de c.

- Cas de base ($n = 0$) :
  - Cas $\langle 1_r \rangle$. Dans ce cas, l'arbre de dérivation est de la forme :

$$\frac{}{1_r \sim 1_r}\ \langle 1_r \rangle$$

    Alors c est la contrainte $1_r \sim 1_r$. En considérant $\mathcal{C}_f = \emptyset$, nous avons $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ et $c \in \overline{\mathcal{C}_f}$, par la règle $\langle 1_r \rangle$.
- Cas inductif :
  Nous supposons que les propriétés (1), (2) et (3) sont vérifiées pour les contraintes ayant un arbre de dérivation de taille au plus n (HI). Nous prouvons le lemme pour les contraintes ayant un arbre de dérivation de taille égale à $n + 1$.
  - Cas $\langle k_r \rangle$. Dans ce cas, l'arbre de dérivation est de la forme :

$$\frac{\dfrac{\vdots}{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y} \quad \dfrac{\vdots}{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z}}{y \sim z}\ \langle k_r \rangle$$

    Alors c est la contrainte $y \sim z$. Cet arbre de dérivation ayant une taille égale à $n + 1$, alors il existe un arbre de dérivation de taille au plus n pour $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y$ et aussi un autre pour $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z$. Alors, par (HI), il existe $\mathcal{C}_{f_1} \subseteq \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}$ finis tels que $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}_{f_1}}$ et $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}_{f_2}}$. Soit $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2}$. Alors $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}_f}$ et $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}_f}$. Donc, par la règle $\langle k_r \rangle$, $y \sim z \in \overline{\mathcal{C}_f}$. De plus, $\mathcal{C}_f$ est fini comme union de deux ensembles finis et $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ comme union de deux ensembles inclus dans $\mathcal{C}$.
  - Les autres cas se démontrent de manière identique.

□

4.4.2 Une méthode des tableaux pour DMBI

Nous présentons à présent la méthode des tableaux pour DMBI, qui possède des similitudes mais aussi des différences avec celle de DBI. Dans cette sous-section, nous nous attarderons sur ces différences.

Un point particulièrement important est que le label d'actions 1_a a pour rôle de capturer le comportement de l'action unitaire 1. Or, la particularité des modalités à la Hennessy-Milner est

que celles-ci vont introduire des symboles d'actions (Σ_{Act}) dans les contraintes. En conséquence, si l'action 1 doit être introduite dans les contraintes, nous devons non pas introduire cette action, mais le label 1_a. Pour permettre cela, nous introduisons une fonction $\|.\|$ définie ci-dessous.

Définition 4.4.14. La fonction $\|.\| : \Sigma_{Act} \to L_a$ est définie par : $\|a\| = \begin{cases} 1_a & \text{si } a = 1 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$

Définition 4.4.15 (Formule signée / CSS)**.** Une *formule signée* est un 4-uplet $(S, \phi, x, u) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \times \mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}} \times L_r \times L_s$ noté $\mathbb{S}\phi : (x, u)$.
Un *CSS* (constrained set of statements) est une paire $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, où $\mathcal{F}$ est un ensemble de formules signées et $\mathcal{C}$ est un ensemble de contraintes, vérifiant la propriété (P_{css}) suivante :

$$\text{Si } \mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F} \text{ alors } x \sim x \in \overline{\mathcal{C}} \text{ et } u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}}$$

Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est *fini* ssi $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ sont finis.
La relation $\preccurlyeq$ est définie par : $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$ ssi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.
La relation $\preccurlyeq_f$ est définie par : $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ ssi $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle$ est fini.

Nous pouvons, dans cette définition, observer que les CSS ne contiennent plus qu'un unique ensemble de contraintes. Par ailleurs, nous pouvons observer la propriété (P_{css}) qui se distingue de celle de DBI, puisqu'il n'y a plus de contrainte d'états.

Proposition 4.4.16. Pour tout CSS $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C} \rangle$ tel que $\mathcal{F}_f$ est fini, il existe $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ fini tel que $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle$ est un CSS, c'est-à-dire vérifie la propriété (P_{css}).

Preuve. Par induction sur le nombre de formules signées de l'ensemble $\mathcal{F}_f$ et par le Lemme 4.4.13. □

La Figure 10 présente les règles de la méthode des tableaux pour DMBI. Nous signalons que "c_i et c_j sont des nouvelles constantes" signifie $c_i \neq c_j$ et $c_i, c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, "$d_i$ est une nouvelle constante" signifie $d_i \in \gamma_a \setminus \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$ et "l_i est une nouvelle constante" signifie $l_i \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. Nous rappelons que $\oplus$ est la concaténation de listes.

Définition 4.4.17 (DMBI-tableau)**.** Soit $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$ un CSS fini. Un *DMBI-tableau* pour ce CSS est une liste de CSS, construite inductivement par les règles suivantes :

1. La liste $[\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle]$ est un DMBI-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$
2. Si la liste $\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle] \oplus \mathcal{T}_n$ est un DMBI-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$ et

$$\frac{\text{cond}\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle}{\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \mid ... \mid \langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \rangle}$$

est une instance d'une des règles de la Figure 10 pour laquelle $\text{cond}\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est vérifiée, alors la liste

$$\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_1, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1 \rangle; ...; \langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_k, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_k \rangle] \oplus \mathcal{T}_n$$

est un DMBI-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$.

Un DMBI-tableau pour la formule ϕ est un DMBI-tableau pour $\langle \{\mathbb{F}\phi : (c_1, l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\} \rangle$.

$$\frac{\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \emptyset, \{1_r \sim x\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\mathrm{I}\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T} \to\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F} \to\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \{c_i c_j \sim x\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}*\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}*\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } xy \sim xy \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{T}\psi : (xy,u)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\mathrel{-\!\!*}\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{F}\psi : (xc_i,u)\}, \{xc_i \sim xc_i\}\rangle}\ \langle \mathbb{F}\mathrel{-\!\!*}\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\langle a\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (c_i,l_i)\}, \{x \overset{\|a\|}{\twoheadrightarrow} c_i, u \overset{\|a\|}{\rightarrowtail} l_i\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\langle -\rangle\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\langle a\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } x \overset{\|a\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}} \text{ et } u \overset{\|a\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \mathbb{F}\phi : (y,v), \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\langle -\rangle\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (c_i,l_i)\}, \{x \overset{d_i}{\twoheadrightarrow} c_i, u \overset{d_i}{\rightarrowtail} l_i\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\Diamond\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F} \text{ et } x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}} \text{ et } u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\Diamond\rangle$$

Note : c_i, c_j, d_i et l_i sont des nouvelles constantes et $\|a\| = \begin{cases} 1_a & \text{si } a = 1 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$

FIGURE 10 – Règles d'expansion des tableaux pour DMBI

Nous pouvons remarquer que le CSS initial $\langle \{\mathbb{F}\phi : (c_1,l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle$ vérifie la propriété (P_{css}) de la Définition 4.4.15. De plus, en observant les règles de la méthode des tableaux pour DMBI, nous remarquons qu'un CSS, obtenu après application d'une règle de la Figure 10, vérifie aussi la propriété (P_{css}) (par les Corollaires 4.4.9 et 4.4.10).

En observant la règle $\langle \mathbb{T}\Diamond\rangle$, nous pouvons remarquer que le rôle de la fonction $\|.\|$ est d'introduire le label d'action 1_a plutôt que l'action action 1, cela lors de l'application de la règle.

Définition 4.4.18 (Conditions de clôture)**.** Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est *clos* s'il satisfait au moins une des conditions suivantes :

1. $\mathbb{T}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}$ et $1_r \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$
3. $\mathbb{T}\bot : (x,u) \in \mathcal{F}$

Un CSS est dit *ouvert* s'il n'est pas clos. Un DMBI-tableau est clos si tous ses CSS sont clos.

Définition 4.4.19 (Preuve)**.** Une *preuve* d'une formule ϕ est un DMBI-tableau clos pour ϕ.

4.4.3 Un exemple de preuve

Dans cette sous-section, nous donnons un exemple de preuve. Considérons la formule $\phi \equiv ((P \mathrel{-\!\!*} \langle a\rangle\langle b\rangle Q) * P) \to \Diamond Q$ et construisons une preuve de ϕ. Par la Définition 4.4.17, le DMBI-tableau $[\langle \{\mathbb{F}\phi : (c_1,l_1)\}, \{1 \sim 1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle]$ est un DMBI-tableau pour ϕ. Nous présentons les DMBI-tableaux de manière similaire à la présentation introduite pour DBI. Ce DMBI-tableau est alors présenté ainsi :

$$\begin{array}{c} [\mathcal{F}] \\ \mathbb{F}((P \mathrel{-\!\!*} \langle a\rangle\langle b\rangle Q) * P) \to \Diamond Q : (c_1, l_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\mathcal{C}] \\ c_1 \sim c_1 \quad l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1 \end{array}$$

Nous pouvons alors observer qu'il y a deux colonnes, une pour l'ensemble des formules signées de l'unique CSS du DMBI-tableau (notée $[\mathcal{F}]$) et une pour l'ensemble des contraintes du CSS du DMBI-tableau (notée $[\mathcal{C}]$). En appliquant différentes règles de la Figure 10, nous obtenons le DMBI-tableau de la Figure 11.

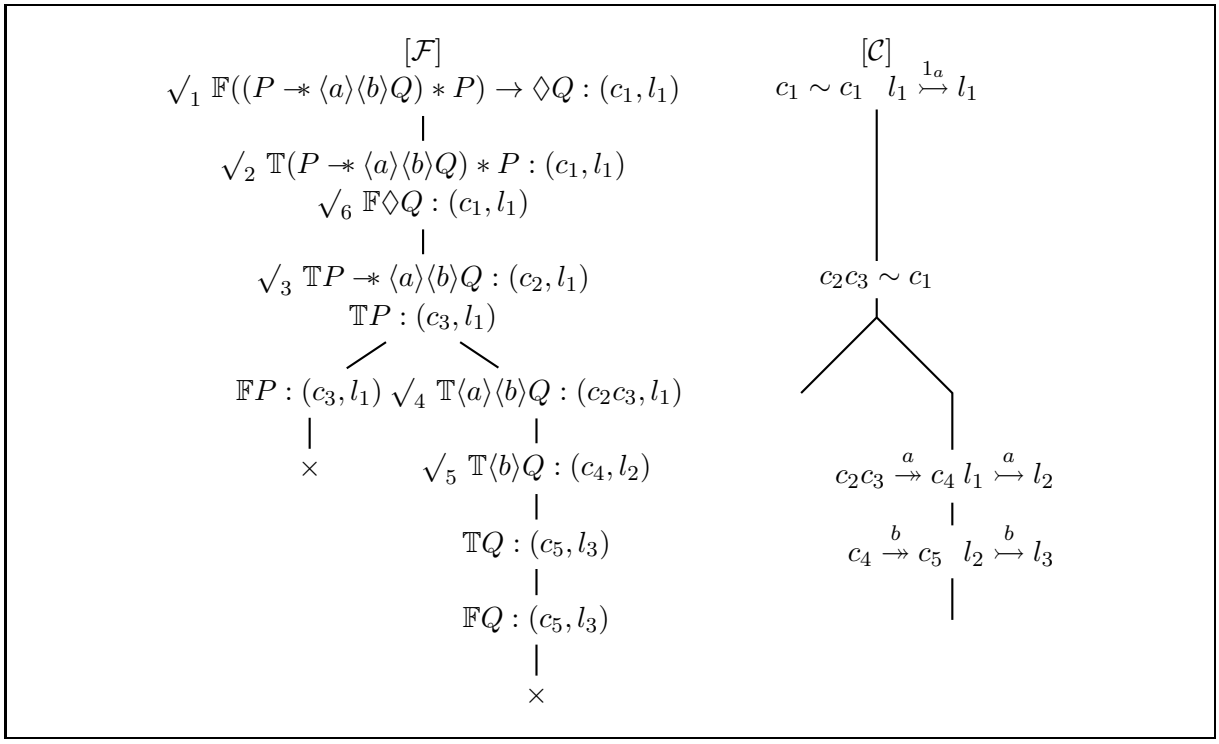


FIGURE 11 – Preuve de la formule $((P \mathrel{-\!\!*} \langle a\rangle\langle b\rangle Q) * P) \to \Diamond Q$

Dans cet exemple de preuve (Figure 11), le symbole $\surd_i$ indique qu'une règle a été appliquée sur la formule signée à l'étape i. Dans les colonnes $[\mathcal{F}]$ et $[\mathcal{C}]$, nous remarquons deux branches : le DMBI-tableau contient deux CSS, le premier étant les branches de gauche des deux colonnes, et le second étant les branches de droite. Les deux branches (CSS) sont closes, indiqué par le symbole $\times$. En particulier, le CSS de gauche est clos parce que $\mathbb{T}P : (c_3, l_1) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}P : (c_3, l_1) \in \mathcal{F}$ et $c_3 \sim c_3 \in \overline{\mathcal{C}}$.

Nous donnons plus de détails concernant les étapes 5 et 6. À l'étape 5, la règle $\langle \mathbb{T}\langle - \rangle\rangle$ est appliquée sur la formule signée $\mathbb{T}\langle b\rangle Q : (c_4, l_2)$. Pour cela, une nouvelle constante de label de ressources est choisie (c_5) ainsi que d'états (l_3). Lors de l'application de la règle, la formule signée $\mathbb{T}Q : (c_5, l_3)$, la μ-contrainte $c_4 \overset{\|b\|}{\twoheadrightarrow} c_5$ et la contrainte de transitions $l_2 \overset{\|b\|}{\rightarrowtail} l_3$ sont alors introduites dans le CSS. Nous noterons que $b \neq 1$, donc $\|b\| = b$ et alors $c_4 \overset{\|b\|}{\twoheadrightarrow} c_5$ est équivalent à $c_4 \overset{b}{\twoheadrightarrow} c_5$ et $l_2 \overset{\|b\|}{\rightarrowtail} l_3$ est équivalent à $l_2 \overset{b}{\rightarrowtail} l_3$.
À l'étape 6, la règle $\langle \mathbb{F}\Diamond\rangle$ est appliquée à la formule signée $\mathbb{F}\Diamond Q : (c_1, l_1)$. Pour cela, nous avons dû choisir un label de ressources y, un label d'actions f et un label d'états v tel que $c_1 \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$

et $l_1 \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Comme $l_1 \overset{a}{\rightarrowtail} l_2$ et $l_2 \overset{b}{\rightarrowtail} l_3$ appartiennent à $\mathcal{C}$ nous avons alors $l_1 \overset{ab}{\rightarrowtail} l_3 \in \overline{\mathcal{C}}$, par la règle $\langle t_t \rangle$. Comme $c_2c_3 \overset{a}{\twoheadrightarrow} c_4$, $c_4 \overset{b}{\twoheadrightarrow} c_5$ et $c_2c_3 \sim c_1$ appartiennent à $\mathcal{C}$, alors nous avons $c_1 \overset{ab}{\twoheadrightarrow} c_5 \in \overline{\mathcal{C}}$. En effet :

$$\dfrac{\dfrac{c_2c_3 \overset{a}{\twoheadrightarrow} c_4 \qquad c_4 \overset{b}{\twoheadrightarrow} c_5}{c_2c_3 \overset{ab}{\twoheadrightarrow} c_5}\langle t_\mu \rangle \qquad c_2c_3 \sim c_1}{c_1 \overset{ab}{\twoheadrightarrow} c_5}\langle k_{\mu_1} \rangle$$

Alors, en choisissant $y = c_5$, $f = ab$ et $v = l_3$, nous sommes autorisés à appliquer la règle, qui introduit alors la formule signée $\mathbb{F}Q : (c_5, l_3)$ dans le CSS.
En conclusion, nous obtenons un DMBI-tableau clos qui est alors, par définition, une preuve de $((P \mathrel{-\!\!*} \langle a \rangle \langle b \rangle Q) * P) \rightarrow \Diamond Q$.

4.5 Correction de la méthode des tableaux pour DMBI

Dans cette section, nous prouvons la correction de la méthode des tableaux de DMBI. Bien que le sketch de la preuve soit identique à celui de DBI, la preuve de correction de DMBI se distingue par l'apparition de certaines difficultés, notamment à cause du fait que de la composition de ressources est partielle dans DMBI, contrairement à celle de DBI.

La preuve de correction repose toujours sur le principe de réalisation d'un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ dans un modèle $\mathcal{K}$. Pour cela, nous définissons trois fonctions permettant de plonger les labels de ressources dans un ensemble de ressources ($\lfloor . \rfloor_r$), les labels d'actions dans un ensemble d'actions ($\lfloor . \rfloor_a$) et les labels d'états dans un ensemble d'états ($\lfloor . \rfloor_s$), telles que si $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et si $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Nous définissons alors dans un premier temps ces fonctions sur les alphabets de $\mathcal{C}$: $\lfloor . \rfloor_r : \mathcal{A}_r(\mathcal{C}) \rightarrow R$, $\lfloor . \rfloor_a : \mathcal{A}_a(\mathcal{C}) \rightarrow Act$ et $\lfloor . \rfloor_s : \mathcal{A}_s(\mathcal{C}) \rightarrow S$.
Par la Proposition 4.4.12, la fonction $\lfloor . \rfloor_s$ est définie sur $\mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$.
Par ailleurs, nous étendrons implicitement la fonction $\lfloor . \rfloor_a$ sur $\mathcal{D}_a(\mathcal{C}) \rightarrow Act$ ainsi : pour tout $a_{i_1} \centerdot \ldots \centerdot a_{i_n} \in \mathcal{D}_a(\mathcal{C})$, $\lfloor a_{i_1} \centerdot \ldots \centerdot a_{i_n} \rfloor_a = \lfloor a_{i_1} \rfloor_a \odot \ldots \odot \lfloor a_{i_n} \rfloor_a$ et $\lfloor 1_a \rfloor_a = 1$. Une telle extension est toujours bien définie, puisque la composition d'actions est une fonction totale.
Finalement, les difficultés interviennent pour la fonction $\lfloor . \rfloor_r$. En effet, la composition de ressources est une fonction partielle. Malgré cela, nous étendrons implicitement $\lfloor . \rfloor_r$ sur $\mathcal{D}_r(\mathcal{C}) \rightarrow R$ ainsi : pour tout $c_{i_1} \circ \ldots \circ c_{i_n} \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$, $\lfloor c_{i_1} \circ \ldots \circ c_{i_n} \rfloor_r = \lfloor c_{i_1} \rfloor_r \bullet \ldots \bullet \lfloor c_{i_n} \rfloor_r$ et $\lfloor 1_r \rfloor_r = e$. Pour cela, nous devrons toujours vérifier qu'une telle extension est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $c_{i_1} \circ \ldots \circ c_{i_n} \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$, $\lfloor c_{i_1} \rfloor_r \bullet \ldots \bullet \lfloor c_{i_n} \rfloor_r \downarrow$.

Définition 4.5.1 (Réalisation)**.** Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un CSS. Une *réalisation* de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est un 4-uplet $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_a, \lfloor . \rfloor_s)$ où $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ est un modèle, où $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \| \cdot \rangle, \mu)$ est un μ-MRD, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ est un monoïde de ressources, $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$ est un monoïde d'actions, $\lfloor . \rfloor_r : \mathcal{D}_r(\mathcal{C}) \rightarrow R$, $\lfloor . \rfloor_a : \mathcal{D}_a(\mathcal{C}) \rightarrow Act$ et $\lfloor . \rfloor_s : \mathcal{A}_s(\mathcal{C}) \rightarrow S$, tel que :

- $\lfloor 1_r \rfloor_r = e$
- $\lfloor 1_a \rfloor_a = 1$
- $\lfloor . \rfloor_r$ est une fonction totale, c'est-à-dire $\forall x \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C}) \cdot \lfloor x \rfloor_r \downarrow$
- Si $f \in \Sigma_{Act} \cap \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$ alors $\lfloor f \rfloor_a = f$
- Si $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$
- Si $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$

- Si $x \sim y \in \mathcal{C}$ alors $\lfloor x \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r$
- Si $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}$ alors $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor y \rfloor_r$
- Si $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \mathcal{C}$ alors $\lfloor u \rfloor_s \, \| \lfloor f \rfloor_a \rangle\!\rangle \, \lfloor v \rfloor_s$

Nous dirons qu'un CSS est *réalisable* s'il existe une réalisation de celui-ci. Nous dirons qu'un DMBI-tableau est *réalisable* si au moins une de ses branches (CSS) est réalisable.

Proposition 4.5.2. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un CSS et $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_a, \lfloor . \rfloor_s)$ une réalisation de ce CSS. $\mathfrak{R}$ est une réalisation de $\langle \mathcal{F}, \overline{\mathcal{C}} \rangle$. Autrement dit :

1. Pour tout $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $\lfloor x \rfloor_r$ est défini
2. Si $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$ alors $\lfloor x \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r$
3. Si $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ alors $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor y \rfloor_r$
4. Si $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$ alors $\lfloor u \rfloor_s \, \| \lfloor f \rfloor_a \rangle\!\rangle \, \lfloor v \rfloor_s$

Preuve. Les fonctions $\lfloor . \rfloor_r$ et $\lfloor . \rfloor_a$ sont implicitement étendues sur $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}}) \to R$ et $\mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \to Act$. Soit $c \in \overline{\mathcal{C}}$ une contrainte. Si $c \in \overline{\mathcal{C}}$ parce que $c \in \mathcal{C}$ alors il y a trois cas :

- c est une contrainte de la forme $x \sim y$. Dans ce cas, $x \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$, $y \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$ et $x \sim y \in \mathcal{C}$. Donc $\lfloor x \rfloor_r$ et $\lfloor y \rfloor_r$ sont définis et nous avons $\lfloor x \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r$, par définition.
- c est une contrainte de la forme $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y$. Dans ce cas, $x \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$, $y \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$ et $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}$. Donc $\lfloor x \rfloor_r$ et $\lfloor y \rfloor_r$ sont définis et nous $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor y \rfloor_r$, par définition.
- c est une contrainte de la forme $u \overset{f}{\rightarrowtail} v$. Dans ce cas, $\lfloor u \rfloor_s \, \| \lfloor f \rfloor_a \rangle\!\rangle \, \lfloor v \rfloor_s$, par définition.

Sinon, cette contrainte est obtenue par applications de règles de la Figure 9. Nous prouvons la proprosition par induction mutuelle sur la taille n de l'arbre de dérivation de la contrainte.

- Cas de base ($n = 0$) :
  - Cas $\langle 1_r \rangle$: l'arbre de dérivation est de la forme :
    $$\frac{}{1_r \sim 1_r} \langle 1_r \rangle$$
    Dans ce cas, c est la contrainte $1_r \sim 1_r$. Nous pouvons alors remarquer que $\lfloor 1_r \rfloor_r = \lfloor 1_r \rfloor_r$.
- Cas inductifs :
  Nous supposons que la proposition est vérifiée pour les contraintes ayant un arbre de dérivation de hauteur au plus n (HI). Nous prouvons pour les contraintes ayant un arbre de dérivation de hauteur $n + 1$.
  - Case $\langle c_r \rangle$: l'arbre de dérivation est de la forme :
    $$\frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ x \sim y & yk \sim yk\end{array}}{xk \sim yk} \langle c_r \rangle$$
    Par (HI), $\lfloor x \rfloor_r$, $\lfloor y \rfloor_r$ et $\lfloor yk \rfloor_r$ sont définis. De plus, toujours par (HI), $\lfloor x \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r$. Nous avons aussi, par définition de la réalisation, $\lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor k \rfloor_r \downarrow$ et $\lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor k \rfloor_r = \lfloor yk \rfloor_r$. Donc $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor k \rfloor_r \downarrow$ et $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor k \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor k \rfloor_r$. Par conséquent $\lfloor xk \rfloor_r = \lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor k \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor k \rfloor_r = \lfloor yk \rfloor_r$.
  - Cas $\langle k_r \rangle$: l'arbre de dérivation est de la forme :
    $$\frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \overset{f}{x \twoheadrightarrow y} & \overset{f}{x \twoheadrightarrow z}\end{array}}{y \sim z} \langle k_r \rangle$$

Par (HI), $\lfloor x \rfloor_r$, $\lfloor y \rfloor_r$ et $\lfloor z \rfloor_r$ sont définis. Par (HI), $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$, $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor y \rfloor_r$ et $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor z \rfloor_r$. Donc $\lfloor y \rfloor_r = \lfloor z \rfloor_r$.

- Cas $\langle 1_\mu \rangle$: l'arbre de dérivation est de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{x \sim x}}{\underset{x \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} x}{}} \langle 1_\mu \rangle$$

Par définition, $\lfloor x \rfloor_r$ est défini. De plus, par μ-unité et comme $\lfloor 1_a \rfloor_a = 1$, nous avons $\mu(\lfloor 1_a \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor 1_a \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor x \rfloor_r$.

- Cas $\langle t_\mu \rangle$: l'arbre de dérivation est de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y} \quad \dfrac{\vdots}{y \overset{g}{\twoheadrightarrow} z}}{x \overset{fg}{\twoheadrightarrow} z} \langle t_\mu \rangle$$

Par (HI), $\lfloor x \rfloor_r$, $\lfloor y \rfloor_r$ et $\lfloor z \rfloor_r$ sont définis. Toujours par (HI), nous avons $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$, $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor y \rfloor_r$, $\mu(\lfloor g \rfloor_a, \lfloor y \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor g \rfloor_a, \lfloor y \rfloor_r) = \lfloor z \rfloor_r$. Donc $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor g \rfloor_a, \mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r)) \downarrow$. En conséquence, par μ-composition, $\mu(\lfloor f \rfloor_a \odot \lfloor g \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor f \rfloor_a \odot \lfloor g \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \mu(\lfloor g \rfloor_a, \mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r)) = \lfloor z \rfloor_r$. Par définition de $\lfloor . \rfloor_a$, $\lfloor f \cdot g \rfloor_a = \lfloor f \rfloor_a \odot \lfloor g \rfloor_a$. En conclusion $\mu(\lfloor fg \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$ et $\mu(\lfloor fg \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor z \rfloor_r$.

- Les autres cas se démontrent de la même manière.

□

Corollaire 4.5.3. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un CSS et $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_a, \lfloor . \rfloor_s)$ une réalisation de $\langle \mathcal{F}, \overline{\mathcal{C}} \rangle$. Si $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \xrightarrow{\lfloor f \rfloor_a} \lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s$.

Preuve. Par la Proposition 4.5.2, $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$, $\mu(\lfloor f \rfloor_a, \lfloor x \rfloor_r) = \lfloor y \rfloor_r$ et $\lfloor u \rfloor_s \, \| \lfloor f \rfloor_a \| \, \lfloor v \rfloor_s$. Donc, par définition, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \xrightarrow{\lfloor f \rfloor_a} \lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s$. □

Lemme 4.5.4. Les règles de la méthode des tableaux de DMBI préservent la réalisabilité.

Preuve. Soit $\mathcal{T}$ un DMBI-tableau réalisable. Par définition, $\mathcal{T}$ contient un CSS réalisable $\mathcal{B} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_a, \lfloor . \rfloor_s)$ une réalisation de $\mathcal{B}$, où $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \| \cdot \rangle, \mu)$, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ et $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$. Si nous appliquons une règle sur une formule signée d'un CSS autre que $\mathcal{B}$ alors ce CSS n'est pas modifié, donc $\mathcal{T}$ reste réalisable. Sinon, nous montrons que $\mathcal{T}$ est réalisable par cas sur la formule signée sur laquelle est appliquée la règle.

- $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$. Donc $\lfloor x \rfloor_r = e$, par définition. Comme $\lfloor 1_r \rfloor_r = e$ alors $\lfloor 1_r \rfloor_r = \lfloor x \rfloor_r$ et nous pouvons remarquer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\} \rangle$.
- $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$. Donc si $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Il y a deux cas :
  - Cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$:
    Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$ et nous pouvons remarquer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x, u)\}, \mathcal{C} \rangle$.
  - Cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$:
    Dans ce cas, $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C} \rangle$.

- $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$. Donc $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Alors $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle$.
- $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$. Par définition, il existe $r_1, r_2 \in R$ tels que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$, $\lfloor x \rfloor_r = r_1 \bullet r_2$, $r_1, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $r_2, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Comme c_i et c_j sont des nouvelles constantes, $\lfloor c_i \rfloor_r$ et $\lfloor c_j \rfloor_r$ ne sont pas définis. De plus, comme $c_i \neq c_j$, nous pouvons étendre $\mathfrak{R}$ en posant $\lfloor c_i \rfloor_r = r_1$ et $\lfloor c_j \rfloor_r = r_2$. En remarquant que $\lfloor c_i \rfloor_r \bullet \lfloor c_j \rfloor_r \downarrow$ et, par extension implicite, $\lfloor c_i c_j \rfloor_r = \lfloor c_i \rfloor_r \bullet \lfloor c_j \rfloor_r = \lfloor x \rfloor_r$, nous obtenons une réalisation de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle$. De plus, nous pouvons observer que cette réalisation est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle$.
- $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$. Par définition, pour tout $r_1, r_2 \in R$ tels que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ et $\lfloor x \rfloor_r = r_1 \bullet r_2$, nous avons $r_1, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $r_2, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Lors de l'application de la règle, ce CSS est étendu en deux CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle$. De plus, par la condition de la règle, $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. Par la Proposition 4.5.2, $\lfloor x \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r \bullet \lfloor z \rfloor_r$. Donc $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $\lfloor z \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Alors $\mathfrak{R}$ est une réalisation d'au moins un des deux nouveaux CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle$.
- $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$. Par définition, pour tout $r \in R$ tel que $\lfloor x \rfloor_r \bullet r \downarrow$ et $r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$, nous avons $\lfloor x \rfloor_r \bullet r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Lors de l'application de la règle, ce CSS est étendu en deux CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (xy,u)\}, \mathcal{C}\rangle$. De plus, par la condition de la règle, $xy \sim xy \in \overline{\mathcal{C}}$. Par la Proposition 4.5.2 et par définition de la réalisation, $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor y \rfloor_r \downarrow$ et $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor y \rfloor_r = \lfloor xy \rfloor_r$. Il y a deux cas :
  - Cas $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$:
    Nous pouvons remarquer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du premier CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle$
  - Cas $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$:
    Alors $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Donc $\lfloor xy \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Nous pouvons alors remarquer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du second CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (xy,u)\}, \mathcal{C}\rangle$.
- $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$. Donc, il existe $r \in R$ tel que $\lfloor x \rfloor_r \bullet r \downarrow$ et $r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $\lfloor x \rfloor_r \bullet r, \lfloor u \rfloor_s \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Comme c_i est une nouvelle constante, alors $\lfloor c_i \rfloor_r$ n'est pas défini. Donc nous pouvons étendre $\mathfrak{R}$ en posant $\lfloor c_i \rfloor_r = r$. En remarquant que $\lfloor x \rfloor_r \bullet \lfloor c_i \rfloor_r \downarrow$, nous obtenons alors une réalisation de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{x c_i \sim x c_i\}\rangle$. De plus, cette extension est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{F}\psi : (x c_i,u)\}, \mathcal{C} \cup \{x c_i \sim x c_i\}\rangle$.
- $\mathbb{T}\langle a \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \langle a \rangle \phi$. Par définition, il existe $r \in R$ et $s \in S$ tel que $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \xrightarrow{a} r, s$ et $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Donc, $\mu(a, \lfloor x \rfloor_r) \downarrow$, $\mu(a, \lfloor x \rfloor_r) = r$ et $\lfloor u \rfloor_s \, \| a \| \, s$. Comme c_i et l_i sont des nouvelles constantes, alors $\lfloor c_i \rfloor_r$ et $\lfloor l_i \rfloor_s$ ne sont pas définis. Donc nous pouvons étendre $\mathfrak{R}$ en posant $\lfloor c_i \rfloor_r = r$ et $\lfloor l_i \rfloor_s = s$. Nous pouvons aussi remarquer que cette règle introduit le label d'état $\|a\|$. Il y a trois cas :
  - Si $a = 1$ alors $\|a\| = 1_a$ et donc $\lfloor \|a\| \rfloor_a = \lfloor 1_a \rfloor_a = 1 = a$.
  - Si $a \neq 1$ et $a \in \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$ alors $\|a\| = a$ et donc $\lfloor \|a\| \rfloor_a = \lfloor a \rfloor_a = a$.
  - Si $a \neq 1$ et $a \notin \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$ alors nous pouvons étendre la réalisation en posant $\lfloor \|a\| \rfloor_a = a$.

  En conséquence, dans tous les cas, nous pouvons obtenir une extension de $\mathfrak{R}$ telle que $\lfloor c_i \rfloor_r = r$, $\lfloor l_i \rfloor_s = s$ et $\lfloor \|a\| \rfloor_a = a$. Cette extension est une réalisation de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|a\|}{\twoheadrightarrow}$

$c_i\} \cup \{u \overset{\|a\|}{\rightarrowtail} l_i\}\rangle$. En conclusion, nous pouvons remarquer que nous avons obtenu une réalisation de $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i, l_i)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|a\|}{\twoheadrightarrow} c_i, u \overset{\|a\|}{\rightarrowtail} l_i\}\rangle$.

- $\mathbb{F}\langle a\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nVdash_{\mathcal{K}} \langle a\rangle\phi$. Donc, pour tout $r \in R$ et $s \in S$ tel que $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \overset{a}{\rightarrow} r, s$, nous avons $r, s \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$. Par la condition de la règle, $x \overset{\|a\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|a\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Par le Corollaire 4.5.3, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \xrightarrow{\|a\|} \lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s$. Il y a deux cas
  - Si $a = 1$ alors $\|a\| = 1_a$ et donc $\lfloor \|a\| \rfloor_a = \lfloor 1_a \rfloor_a = 1 = a$.
  - Si $a \neq 1$ alors $\|a\| = a$ et donc $\lfloor \|a\| \rfloor_a = \lfloor a \rfloor_a = a$.

  Donc $\lfloor \|a\| \rfloor_a = a$ et alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \overset{a}{\rightarrow} \lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s$. En conséquence $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$ et nous pouvons conclure que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle$.
- $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$. Donc il existe $r \in R$ et $s \in S$ tels que $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \rightsquigarrow r, s$ et $r, s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par la Proposition 4.1.7, il existe $a \in Act$ tel que $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \overset{a}{\rightarrow} r, s$. Donc, par définition, $\mu(a, \lfloor x \rfloor_r)\downarrow$, $\mu(a, \lfloor x \rfloor_r) = r$, et $\lfloor u \rfloor_s \, \|a\rangle\!\rangle \, s$. Comme c_i, d_i et l_i sont des nouvelles contantes, nous pouvons étendre $\mathfrak{R}$ en posant $\lfloor c_i \rfloor_r = r$, $\lfloor d_i \rfloor_a = a$ et $\lfloor l_i \rfloor_s = s$. Alors, nous obtenons une réalisation de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{d_i}{\twoheadrightarrow} c_i\} \cup \{u \overset{d_i}{\rightarrowtail} l_i\}\rangle$. En conclusion, nous avons obtenu une réalisation de $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i, l_i)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{d_i}{\twoheadrightarrow} c_i, u \overset{d_i}{\rightarrowtail} l_i\}\rangle$.
- $\mathbb{F}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Dans ce cas $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nVdash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$. Donc pour tout $r \in R$ et $s \in S$ tels que $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \rightsquigarrow r, s$, nous avons $r, s \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$. Par la condition de la règle, $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par le Corollaire 4.5.3, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \xrightarrow{\lfloor f \rfloor_a} \lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s$. Par définition, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \rightsquigarrow \lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s$. En conséquence $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor v \rfloor_s \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$, et nous pouvons conclure que $\mathfrak{R}$ est une réalisation du nouveau CSS $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle$.

□

Lemme 4.5.5. Les CSS clos ne sont pas réalisables.

Preuve. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ un CSS clos. Supposons que ce CSS soit réalisable. Considérons alors $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_a, \lfloor . \rfloor_s)$ une réalisation. Il y a trois cas :

- $\mathbb{T}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$:
  Par définition de la réalisation et par la Proposition 4.5.2, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \phi$, $\lfloor y \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$ et $\lfloor x \rfloor_r = \lfloor y \rfloor_r$, ce qui est absurde.
- $\mathbb{FI} : (x,u) \in \mathcal{F}$ et $1_r \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$:
  Par définition de la réalisation et par la Proposition 4.5.2, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \nVdash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$ et $e = \lfloor x \rfloor_r$. Comme $\lfloor x \rfloor_r = e$ alors $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \mathrm{I}$, ce qui est absurde.
- $\mathbb{T}\bot : (x,u) \in \mathcal{F}$:
  Par définition de la réalisation, $\lfloor x \rfloor_r, \lfloor u \rfloor_s \vDash_{\mathcal{K}} \bot$, ce qui est absurde.

Comme tous les cas sont absurdes, alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ ne peut pas être réalisable. □

Théorème 4.5.6 (Correction)**.** S'il existe une preuve d'une formule ϕ alors ϕ est valide.

Preuve. Supposons qu'il existe une preuve d'une formule ϕ. Donc il existe un DMBI-tableau clos $\mathcal{T}_\phi$ pour le CSS $\mathfrak{C} = \langle \{\mathbb{F}\phi : (c_1, l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle$. Par l'absurde, supposons que ϕ ne soit pas valide. Donc il existe un contre-modèle $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, une ressource $r \in R$ et un état $s \in S$ tels que $r, s \nVdash_{\mathcal{K}} \phi$. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}, \lfloor . \rfloor_r, \lfloor . \rfloor_a, \lfloor . \rfloor_s)$ tel que $\lfloor c_1 \rfloor_r = r$ et $\lfloor l_1 \rfloor_s = s$. Nous pouvons remarquer que $\mathfrak{R}$ est une réalisation de $\mathfrak{C}$. Par le Lemme 4.5.4, $\mathcal{T}_\phi$ est réalisable. Par le

Lemme 4.5.5, $\mathcal{T}_\phi$ n'est pas clos. Or, ceci est absurde parce que $\mathcal{T}_\phi$ est une preuve (donc est clos). En conclusion ϕ est valide. □

En conclusion, si nous reconsidérons l'exemple de la sous-section 4.4.3 alors, par le Théoreme 4.5.6, la formule $((P \mathrel{-\!\!*} \langle a\rangle\langle b\rangle Q) * P) \to \Diamond Q$ est valide.

4.6 Extraction de contre-modèles

Dans cette section nous présentons une méthode d'extraction de contre-modèle pour DMBI et nous donnons aussi un exemple.

4.6.1 Une méthode d'extraction de contre-modèles

Nous présentons la méthode d'extraction de contre-modèles pour DMBI. Comme nous le verrons, les contre-modèles extraits ont la particularité de posséder une action α ne pouvant jamais être exécutée.

Définition 4.6.1 (Hintikka CSS)**.** Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est un *Hintikka CSS* ssi pour toutes formules $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}}$, toute action $f \in \Sigma_{Act}$ et tous labels $x \in L_r$ et $u \in L_s$:

1. $\mathbb{T}\phi : (x,u) \notin \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\phi : (y,u) \notin \mathcal{F}$ ou $x \sim y \notin \overline{\mathcal{C}}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : (x,u) \notin \mathcal{F}$ ou $1_r \sim x \notin \overline{\mathcal{C}}$
3. $\mathbb{T}\bot : (x,u) \notin \mathcal{F}$
4. Si $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $1_r \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$
5. Si $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (x,u) \in \mathcal{F}$
6. Si $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (x,u) \in \mathcal{F}$
7. Si $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y, z \in L_r$, $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : (z,u) \in \mathcal{F}$
8. Si $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y, z \in L_r$, $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (z,u) \in \mathcal{F}$
9. Si $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (xy,u) \in \mathcal{F}$
10. Si $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathbb{T}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (xy,u) \in \mathcal{F}$
11. Si $\mathbb{T}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $\exists v \in L_s$, $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (y,v) \in \mathcal{F}$
12. Si $\mathbb{F}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r, \forall v \in L_s$, $(x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (y,v) \in \mathcal{F}$
13. Si $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $\exists f \in L_a$, $\exists v \in L_s$, $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (y,v) \in \mathcal{F}$
14. Si $\mathbb{F}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $\forall f \in L_a$, $\forall v \in L_s$, $(x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (y,v) \in \mathcal{F}$

Les conditions (1), (2) et (3) de la Définition 4.6.1 garantissent qu'un Hintikka CSS n'est pas clos.
Nous donnons maintenant une fonction Ω permettant d'extraire un contre-modèle à partir d'un Hintikka CSS. Nous notons $[x] = \{y \in L_r \mid x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}\}$ et $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim = \{[x] \mid x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})\}$. Nous pouvons remarquer que la relation $\sim$ sur la clôture d'un ensemble de contraintes ($\overline{\mathcal{C}}$) est réflexive (par le Corollaire 4.4.9), symétrique (par la règle $\langle s_r\rangle$) et transitive (par le règle $\langle t_r\rangle$). En conséquence, $\sim$ est une relation d'équivalence et alors $[x]$ est une classe d'équivalence.

Définition 4.6.2 (Fonction Ω)**.** Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS. La fonction Ω associe à $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un triplet $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle) = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \|\cdot\rangle, \mu)$, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ et $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$, tel que :

- $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim$
- $Act = \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \cup \{\alpha\}$ (avec $\alpha \notin \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \cup \Sigma_{Act}$)
- $S = \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$
- $e = [1_r]$
- $1 = 1_a$
- $[x] \bullet [y] = \begin{cases} \uparrow & \text{si } xy \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}}) \\ [x \circ y] & \text{sinon} \end{cases}$
- Pour tout $a \in Act$ et $[x] \in R$, $\mu(a, [x]) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} = \emptyset \\ \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} & \text{sinon} \end{cases}$
- $s_1 \, \|f\rangle \, s_2$ ssi $s_1 \overset{f}{\rightarrowtail} s_2 \in \overline{\mathcal{C}}$
- Pour tout $a_1, a_2 \in Act$, $a_1 \odot a_2 = \begin{cases} a_1 \centerdot a_2 & \text{si } a_1 \centerdot a_2 \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}$
- $([x], s) \in [\![p]\!]$ ssi $\exists y \in [x]$ tel que $\mathbb{T}p : (y, s) \in \mathcal{F}$

Concernant la construction de μ, si $\{y \mid x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} \neq \emptyset$ alors nous devrons montrer que $\{y \mid x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$ est une classe d'équivalence, c'est-à-dire que $\{y \mid x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim$.

Concernant l'interprétation des symboles d'actions : pour tout symbole d'actions $a \in \Sigma_{Act}$ tel que $\|a\| \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$, nous considérons que $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}} = \|a\|$. Par ailleurs, pour tout $a \in \Sigma_{Act}$ tel que $\|a\| \notin \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$, nous considérons que $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}$ n'est pas défini. Nous remarquons qu'une telle considération est bien formée en particulier dans le cas où $1 \in \Sigma_{Act}$. En effet, comme $\|1\| = 1_a$ et comme $1_a \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$ par les règles $\langle 1_r \rangle$ et $\langle 1_\mu \rangle$, alors nous avons $[\![1]\!]_{\Sigma_{Act}} = \|1\| = 1_a = 1$.

Proposition 4.6.3. Les définitions de la composition $\bullet$, de la fonction μ et de l'interprétation $[\![\cdot]\!]$ ne dépendent pas du choix du représentant de la classe d'équivalence.

Preuve.

- Nous montrons que $\bullet$ est bien défini :
  Supposons qu'il existe $x, y, x', y' \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ tels que $[x] = [x']$ et $[y] = [y']$. Alors $x \sim x' \in \overline{\mathcal{C}}$ et $y \sim y' \in \overline{\mathcal{C}}$. Il y a deux cas :
  - $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$: dans ce cas, $[xy] \in R$ et $[x] \bullet [y] = [xy]$. Par le Corollaire 4.4.11, $xy \sim x'y' \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Donc $[x] \bullet [y] = [xy] = [x'y'] = [x'] \bullet [y']$.
  - $xy \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$: dans ce cas $[x] \bullet [y] \uparrow$. Par le Corollaire 4.4.11, $x'y' \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Donc $[x'] \bullet [y'] \uparrow$.

  Par conséquence $[x] \bullet [y] = [x'] \bullet [y']$ ou bien $[x] \bullet [y]$ et $[x'] \bullet [y']$ ne sont pas définis. En conclusion $\bullet$ est bien défini.
- Nous montrons que μ est bien défini :
  - Nous montrons que si $\mu(a, [x]) = \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$ et $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} \neq \emptyset$ alors $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$ est une classe d'équivalence telle que $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim$.
    Soit $z \in \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. Alors $x \overset{a}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}}$. Nous montrons que $[z] = \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$.
    Soit $z' \in [z]$. Alors $z \sim z' \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par la règle $\langle k_{\mu_2} \rangle$, $x \overset{a}{\twoheadrightarrow} z' \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc $z' \in \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. En conséquence, nous avons $[z] \subseteq \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$.
    Soit $z' \in \{z \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. alors $x \overset{a}{\twoheadrightarrow} z' \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par la règle $\langle k_r \rangle$, $z \sim z' \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc $z' \in [z]$. En conséquence, nous avons $[z] \supseteq \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$.

Nous pouvons alors conclure que $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$ est une classe d'équivalence et que $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim$.

- Nous montrons que pour tout $x \sim x' \in \overline{\mathcal{C}}$ et tout $a \in Act$, $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} = \{y \mid x' \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. Soit $y \in \{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. Alors $x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$. Par la règle $\langle k_{\mu_1} \rangle$, $x' \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc $y \in \{y \mid x' \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. Par conséquent, $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} \subseteq \{y \mid x' \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. De la même manière, il est possible de montrer que $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} \supseteq \{y \mid x' \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. En conclusion, $\{y \mid x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} = \{y \mid x' \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\}$.
- Finalement, il est aussi possible de montrer que la définition de $[\![\cdot]\!]$ ne dépend pas du choix du représentant dans $[x]$. Supposons que $x \sim x' \in \overline{\mathcal{C}}$. Si $([x], s) \in [\![p]\!]$ alors il existe $y \in [x]$ tel que $\mathbb{T}p : (y, s) \in \mathcal{F}$. Donc $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc $x' \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$ par la règle $\langle s_r \rangle$ et $\langle t_r \rangle$. Par conséquent $y \in [x']$ et $\mathbb{T}p : (y, s) \in \mathcal{F}$. D'où $([x'], s) \in [\![p]\!]$

□

Proposition 4.6.4. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $a \in Act$, $a \odot \alpha = \alpha \odot a = \alpha$
2. Pour tout $r \in R$, $\mu(\alpha, r) \uparrow$
3. Pour tout $a \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \cap \Sigma_{Act}$, $\|a\| = a$

Preuve. Nous prouvons une à une les propriétés :

1. Soit $a \in Act$. Nous pouvons remarquer que $a \centerdot \alpha \notin \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$ puisque $\alpha \notin \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \cup \Sigma_{Act}$. Donc, par définition de Ω, nous avons $a \odot \alpha = \alpha \odot a = \alpha$.
2. Soit $r \in R$. Alors il existe $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ tel que $r = [x]$. Comme $\alpha \notin \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$, alors il n'existe pas de $y \in L_r$ tel que $x \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc $\{y \mid x \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}\} = \emptyset$. En conséquence, $\mu(a, r)$ n'est pas défini.
3. Soit $a \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \cap \Sigma_{Act}$. Il y a deux cas :
   - Cas $a = 1$: dans ce cas, nous avons $\|1\| = 1_a = 1$, par définition de Ω
   - Cas $a \neq 1$: dans ce cas, nous avons $\|a\| = a$

   En conséquence $\|a\| = a$.

□

Lemme 4.6.5. Soit $\mathfrak{C} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS. Soit $\Omega(\mathfrak{C}) = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ où $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \|\cdot\!\rangle, \mu)$, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ et $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$. $(\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ est un modèle.

Preuve. Nous montrons que $\mathcal{R}$ est un monoïde de ressources, que $\mathcal{A}$ est un monoïde d'actions et que $\mathcal{M}$ est un μ-MRD :

- Nous montrons que $\mathcal{R}$ est un monoïde de ressources :
  - $1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ par la règle $\langle 1_r \rangle$. Comme $e = [1_r]$ et $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim$, alors $e \in R$.
  - Nous montrons que $\bullet : R \times R \rightharpoonup R$ est bien associatif, commutatif et e est son élément neutre :
    - Élément neutre :
      Soit $r \in R$. Alors il existe $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ tel que $r = [x]$. Comme 1_r est l'élément neutre de $\circ$, alors $x \circ 1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, donc $r \bullet e \downarrow$. En conséquence, par définition de Ω, $r \bullet e = [x] \bullet [1_r] = [x \circ 1_r] = [x] = r$.

- Commutativité :
  Soit $r_1, r_2 \in R$. Alors il existe $x, y \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ tels que $r_1 = [x]$ et $r_2 = [y]$. Supposons que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$. Donc $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Comme $\circ$ est commutatif alors $x \circ y = y \circ x$. En conclusion, nous avons $r_1 \bullet r_2 = [x] \bullet [y] = [x \circ y] = [y \circ x] = [y] \bullet [x] = r_2 \bullet r_1$.
- La preuve pour l'associativité est similaire ($\circ$ est associatif).

- Nous montrons que $\mathcal{A}$ est un monoïde d'actions :
  - $1_a \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$ parce que $1_r \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} 1_r \in \overline{\mathcal{C}}$ par les règles $\langle 1_r \rangle$ et $\langle 1_\mu \rangle$. Comme $1 = 1_a$ et $Act = \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}}) \cup \{\alpha\}$ alors $1 \in Act$.
  - Nous montrons que $\odot : Act \times Act \to Act$ est associatif et que 1 est son élément neutre :
    - Élément neutre :
      Soit $a \in Act$. Il y a deux cas :
      - Cas $a \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$:
        $a \odot 1 = a \centerdot 1_a = a = 1_a \centerdot a = 1 \odot a$, parce que 1_a est l'élément neutre de $\centerdot$.
      - Cas $a \notin \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$:
        Comme $a \in Act \setminus \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$ alors $a = \alpha$. Donc $1_a \odot \alpha = \alpha \odot 1_a = \alpha$, par la Proposition 4.6.4.

      En conclusion, pour tout $a \in Act$, $a \odot 1 = 1 \odot a = a$.
    - Associativité :
      Soit $a_1, a_2, a_3 \in Act$. Il y a deux cas :
      - $(a_1 \odot a_2) \odot a_3 \neq \alpha$:
        Puisque α est absorbant (Proposition 4.6.4) alors $a_1 \odot a_2 \neq \alpha$. Donc $(a_1 \centerdot a_2) \centerdot a_3 \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$ et $(a_1 \odot a_2) \odot a_3 = (a_1 \centerdot a_2) \centerdot a_3$. Comme $\centerdot$ est associatif, alors $(a_1 \centerdot a_2) \centerdot a_3 = a_1 \centerdot (a_2 \centerdot a_3)$. Donc $a_1 \centerdot (a_2 \centerdot a_3) \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$. En conséquence $(a_1 \odot a_2) \odot a_3 = (a_1 \centerdot a_2) \centerdot a_3 = a_1 \centerdot (a_2 \centerdot a_3) = a_1 \odot (a_2 \odot a_3)$.
      - $(a_1 \odot a_2) \odot a_3 = \alpha$:
        Supposons que $a_1 \odot (a_2 \odot a_3) \neq \alpha$. Par le même argument que le cas précédent, $a_1 \odot (a_2 \odot a_3) = (a_1 \odot a_2) \odot a_3$, mais ceci est absurde. Donc $a_1 \odot (a_2 \odot a_3) = \alpha$ et par conséquent $(a_1 \odot a_2) \odot a_3 = a_1 \odot (a_2 \odot a_3)$.

  Pour finir, nous remarquerons que la composition d'actions est bien totale, cela ayant été rendu possible grâce à l'introduction de l'action α. En conclusion $\mathcal{A}$ est un monoïde d'actions.

- Nous montrons que $\mathcal{M}$ est un μ-MRD :
  - Nous montrons que $\|\cdot\rangle$ satisfait les propriétés de $\|\cdot\rangle$-unité et de $\|\cdot\rangle$-composition :
    - $\|\cdot\rangle$-unité :
      Soit $s \in S$. Alors $s \in \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. Donc il existe un label d'états u et un label d'actions f tels que $s \overset{f}{\rightarrowtail} u \in \mathcal{C}$ ou $u \overset{f}{\rightarrowtail} s \in \mathcal{C}$. Alors, par les règles $\langle 1_{t_1} \rangle$ et $\langle 1_{t_2} \rangle$, $s \overset{1_a}{\rightarrowtail} s \in \overline{\mathcal{C}}$. En conséquence, nous avons $s \,\|1\rangle\, s$.
    - $\|\cdot\rangle$-composition :
      Soit $s_1, s_2, s_3 \in S$ et $a_1, a_2 \in Act$ tels que $s_1 \,\|a_1\rangle\, s_2$ et $s_2 \,\|a_2\rangle\, s_3$. Par définition de Ω, $s_1 \overset{a_1}{\rightarrowtail} s_2 \in \overline{\mathcal{C}}$ et $s_2 \overset{a_2}{\rightarrowtail} s_3 \in \overline{\mathcal{C}}$. Par la règle $\langle t_t \rangle$, $s_1 \overset{a_1 \centerdot a_2}{\rightarrowtail} s_3 \in \overline{\mathcal{C}}$. Nous pouvons alors remarquer que $a_1 \centerdot a_2 \in \mathcal{D}_a(\overline{\mathcal{C}})$. Donc $a_1 \odot a_2 = a_1 \centerdot a_2$ et nous pouvons conclure que $s_1 \,\|a_1 \odot a_2\rangle\, s_3$, par définition de Ω.
  - Nous montrons que $\mu : Act \times R \rightharpoonup R$ satisfait les propriétés de μ-unité et de μ-composition :
    - μ-unité :

Soit $r \in R$. Alors il existe $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ tel que $r = [x]$. Par le Corollaire 4.4.9, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. Par le règle $\langle 1_\mu \rangle$, $x \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} x \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par définition de Ω, $\mu(1, r) \downarrow$ et $\mu(1, r) = \mu(1, [x]) = [x] = r$.

- μ-composition :
  Soit $r \in R$ et $a_1, a_2 \in Act$ tels que $\mu(a_1, r) \downarrow$ et $\mu(a_2, \mu(a_1, r)) \downarrow$. Comme $r \in R$ alors il existe $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ tel que $r = [x]$. Comme $\mu(a_1, r) \downarrow$ alors il existe un label de ressources y tel que $x \overset{a_1}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc $\mu(a_1, r) = [y]$. Par conséquente $\mu(a_2, [y]) \downarrow$ et il existe un label de ressources z tel que $y \overset{a_2}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, nous avons $\mu(a_2, [y]) = [z]$ et donc $\mu(a_2, \mu(a_1, r)) = [z]$. Par la règle $\langle t_\mu \rangle$, $x \overset{a_1 a_2}{\twoheadrightarrow} z \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par définition de Ω, $\mu(a_1 \odot a_2, [x]) \downarrow$ et $\mu(a_1 \odot a_2, [x]) = [z]$. En conclusion, $\mu(a_1 \odot a_2, r) \downarrow$ et $\mu(a_1 \odot a_2, r) = \mu(a_2, \mu(a_1, r))$.

□

Lemme 4.6.6. Soit $\mathfrak{C} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS et $\Omega(\mathfrak{C}) = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_\mathcal{K})$ où $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \|\cdot\rangle, \mu)$, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ et $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$. Pour toute formule ϕ, tout $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ et tout $u \in \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Si $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $[x], u \nvDash_\mathcal{K} \phi$
2. Si $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $[x], u \vDash_\mathcal{K} \phi$

Preuve. Les propriétés (1) et (2) sont prouvées par induction mutuelle sur la structure de ϕ.

- Cas de base
  - Cas $\mathbb{F}p : (x, u) \in \mathcal{F}$ où $p \in \text{Prop}$:
    Supposons que $[x], u \vDash_\mathcal{K} p$. Donc $([x], u) \in [\![p]\!]$. Par définition de Ω, il existe un label de ressources y tel que $y \in [x]$ et $\mathbb{T}P : (y, u) \in \mathcal{F}$. Donc $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}p : (y, u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathfrak{C}$ n'est pas un Hintikka CSS par la condition (1) de la Définition 4.6.1. Or, ceci est absurde, donc $[x], u \nvDash_\mathcal{K} p$.
  - Cas $\mathbb{T}p : (x, u) \in \mathcal{F}$ où $p \in \text{Prop}$:
    Comme $x \in [x]$ alors, par définition de Ω, $([x], u) \in [\![p]\!]$. Donc $[x], u \vDash_\mathcal{K} p$.
  - Cas $\mathbb{F}\bot : (x, u) \in \mathcal{F}$:
    Nous avons toujours $[x], u \nvDash_\mathcal{K} \bot$, par définition.
  - Cas $\mathbb{T}\bot : (x, u) \in \mathcal{F}$:
    Comme $\mathfrak{C}$ est un Hintikka CSS alors, par la condition (3) de la Définition 4.6.1, ce cas est absurde.
  - Cas $\mathbb{F}\text{I} : (x, u) \in \mathcal{F}$:
    Supposons que $[x], u \vDash_\mathcal{K} \text{I}$. Donc $[x] = e$ et, par définition de Ω, nous avons $[x] = [1_r]$. Donc $x \sim 1_r \in \overline{\mathcal{C}}$. En conséquence $\mathfrak{C}$ n'est pas un Hintikka CSS, par la condition (2) de la Définition 4.6.1. Ceci étant absurde, nous avons alors $[x], u \nvDash_\mathcal{K} \text{I}$.
  - Cas $\mathbb{T}\text{I} : (x, u) \in \mathcal{F}$:
    Par la condition (4) de la Définition 4.6.1, $1_r \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par définition de Ω, $[x] = [1_r] = e$. Par conséquent $[x], u \vDash_\mathcal{K} \text{I}$.
- Cas inductifs : nous supposons que les propriétés (1) et (2) sont vérifiées pour les formules ϕ et ψ (HI)
  - Cas $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
    Par la condition (6) de la Définition 4.6.1, $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (x, u) \in \mathcal{F}$. Donc, par (HI), $[x], u \vDash_\mathcal{K} \phi$ et $[x], u \nvDash_\mathcal{K} \psi$. Par conséquent $[x], u \nvDash_\mathcal{K} \phi \to \psi$.
  - Cas $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
    Par la condition (5) de la Définition 4.6.1, $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (x, u) \in \mathcal{F}$. Donc,

par (HI), $[x], u \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $[x], u \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par conséquent $[x], u \vDash_{\mathcal{K}} \phi \to \psi$.

- Cas $\mathbb{F}\phi * \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Soit $[y], [z] \in R$ tels que $[y] \bullet [z] \downarrow$ et $[x] = [y] \bullet [z]$. Par définition de Ω, $[x] = [yz]$. Donc $x \sim yz \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors, par la condition (8) de la Définition 4.6.1, $\mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (z, u) \in \mathcal{F}$. Donc, par (HI), $[y], u \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ ou $[z], u \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par conséquent $[x], u \nvDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$.
- Cas $\mathbb{T}\phi * \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Par la condition (7) de la Définition 4.6.1, il existe deux labels de ressources y et z tels que $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$, $\mathbb{T}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : (z, u) \in \mathcal{F}$. Par définition de Ω et par (HI), nous avons $[x] = [yz] = [y] \bullet [z]$, $[y], u \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $[z], u \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par conséquent $[x], u \vDash_{\mathcal{K}} \phi * \psi$.
- Cas $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Par la condition (10) de la Définition 4.6.1, il existe un label de ressources y tel que $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $\mathbb{T}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (xy, u) \in \mathcal{F}$. Par le Corollaire 4.4.9 et la règle $\langle d_r \rangle$, nous avons $y \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Donc, par (HI) et par définition de Ω, il existe une ressource $[y]$ telle que $[y], u \vDash_{\mathcal{K}} \phi$ et $[x] \bullet [y], u \nvDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par conséquent $[x], u \nvDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$.
- Cas $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Soit $[y] \in R$ tel que $[x] \bullet [y] \downarrow$ et $[y], u \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Nous montrons que $[x] \bullet [y], u \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par définition de Ω, nous avons $[x] \bullet [y] = [xy]$ et $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Donc, par la condition (9) de la Définition 4.6.1, $\mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (xy, u) \in \mathcal{F}$. Alors, par (HI) et par définition de Ω, $[y], u \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$ (qui est absurde) ou $[x] \bullet [y], u \vDash_{\mathcal{K}} \psi$. Par conséquent $[x], u \vDash_{\mathcal{K}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$.
- Cas $\mathbb{F}\langle a \rangle \phi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Soit $[y] \in R$ et $v \in S$ tels que $[x], u \xrightarrow{a} [y], v$. Par définition, $\mu(a, [x]) \downarrow$, $\mu(a, [x]) = [y]$ et $u \,\|a\rangle\!\rangle\, v$. Nous rappelons que par les abus de notation que nous avons fait, nous supposons en réalité que $\mu([\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}, [x]) \downarrow$, $\mu([\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}, [x]) = [y]$ et $u \,\|[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}\rangle\!\rangle\, v$. Nous remarquons que $a \in \Sigma_{Act}$. De plus, comme $\mu([\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}, [x])$ est défini, alors $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}$ est défini. Donc $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}} = \|a\|$. Ainsi, par définition de Ω, $x \overset{\|a\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|a\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par la condition (12) de la Définition 4.6.1, $\mathbb{F}\phi : (y, v) \in \mathcal{F}$. Alors, par (HI), $[y], v \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par conséquent $[x], u \nvDash_{\mathcal{K}} \langle a \rangle \phi$.
- Cas $\mathbb{T}\langle a \rangle \phi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Par la condition (11) de la Définition 4.6.1, il existe un label de ressources y et un label d'états v tels que $x \overset{\|a\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$, $u \overset{\|a\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (y, v) \in \mathcal{F}$. Remarquant que $\|a\| \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ alors $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}} = \|a\|$. Par la définition de Ω et par (HI), nous avons $\mu([\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}, [x]) = [y]$, $u \|[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}\rangle\!\rangle v$ et $[y], v \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Donc $[x], u \xrightarrow{[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}} [y], v$ et $[y], v \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par conséquent $[x], u \vDash_{\mathcal{K}} \langle a \rangle \phi$.
- Cas $\mathbb{F}\Diamond\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Soit $[y] \in R$ et $v \in S$ tels que $[x], u \rightsquigarrow [y], v$. Par la Proposition 4.1.7, il existe une action $a \in Act$ telle que $[x], u \xrightarrow{a} [y], v$. Donc, par définition, $\mu(a, [x]) \downarrow$, $\mu(a, [x]) = [y]$ et $u \,\|a\rangle\!\rangle\, v$. Alors, par définition de Ω, $x \overset{a}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{a}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par la condition (14) de la Définition 4.6.1, nous avons $\mathbb{F}\phi : (y, v) \in \mathcal{F}$. Donc, par (HI), $[y], v \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par conséquent $[x], u \nvDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$.
- Cas $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$:
  Par la condition (13) de la Définition 4.6.1, il existe un label de ressources y, un label d'actions f et un label d'états v tels que $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (y, v) \in \mathcal{F}$. Par définition de Ω et par (HI), $\mu(f, [x]) \downarrow$, $\mu(f, [x]) = [y]$, $u \,\|f\rangle\!\rangle\, v$ et $[y], v \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Donc,

par définition, $[x], u \rightsquigarrow [y], v$ et $[y], v \vDash_{\mathcal{K}} \phi$. Par conséquent $[x], u \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\phi$.

□

Lemme 4.6.7. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS tel que $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$. La formule ϕ n'est pas valide et $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle)$ est un contre-modèle de ϕ.

Preuve. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS tel que $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$. Considérons $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle) = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ où $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \|\cdot\rangle, \mu)$, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ et $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$. Par le Lemme 4.6.5, $(\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$ est un modèle. Par (P_{css}), comme $\mathbb{F}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ alors $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ et $u \in \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$. Nous rappelons que $\mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}}) = \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$ (Proposition 4.4.12). Par le Lemme 4.6.6, $[x], u \nvDash_{\mathcal{K}} \phi$. Donc $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle)$ est un contre-modèle de ϕ et ϕ n'est pas valide. □

4.6.2 Un exemple d'extraction de contre-modèles

Nous illustrons, dans cette sous-section, la méthode d'extraction de contre-modèles que nous venons de présenter sur la formule $(\langle a \rangle P * \langle b \rangle P) \rightarrow \Diamond(P * P)$. En appliquant la méthode des tableaux de DMBI, nous pouvons obtenir le DMBI-tableau de la Figure 12.

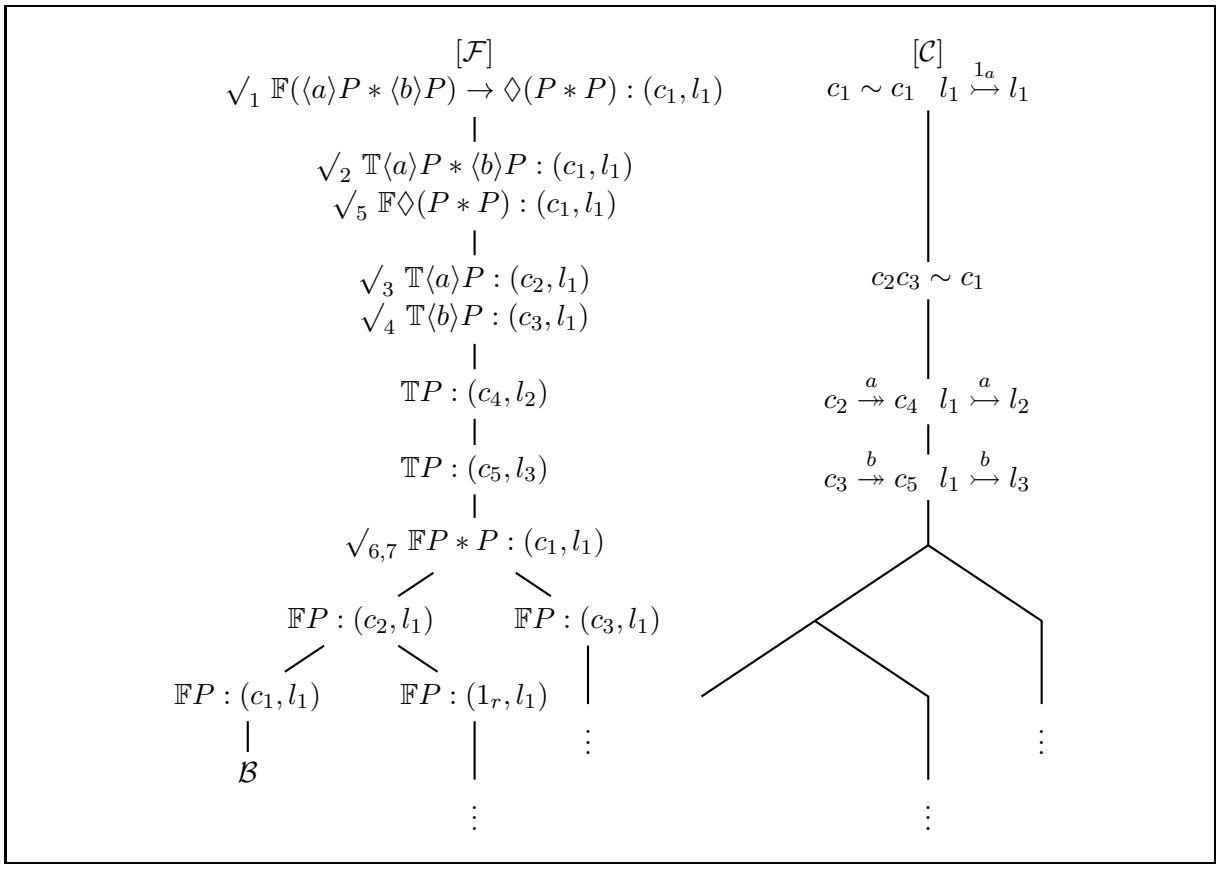


FIGURE 12 – DMBI-tableau pour la formule $(\langle a \rangle P * \langle b \rangle P) \rightarrow \Diamond(P * P)$

Nous pouvons remarquer que la branche (CSS) notée $\mathcal{B}$ est un Hintikka CSS. Ainsi, la fonction Ω nous permet d'extraire un contre-modèle de la formule que nous avons considérée, qui est $\Omega(\mathcal{B}) = (\mathcal{M}, [\![\cdot]\!], \vDash_{\mathcal{K}})$, où $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, S, \|\cdot\rangle, \mu)$, $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ et $\mathcal{A} = (Act, \odot, 1)$, tel que :

- $R = \{e, [c_1], [c_2], [c_3], [c_4], [c_5]\}$, avec $[c_1] = [c_2 c_3]$ et $e = [1_r]$.

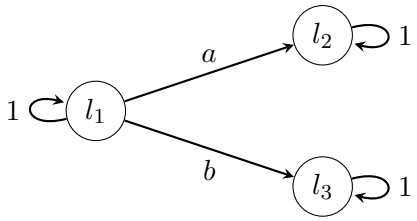
- $Act = \{1, a, b, \alpha\}$, avec $1 = 1_a$, $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}} = \|a\| = a$, $[\![b]\!]_{\Sigma_{Act}} = \|b\| = b$. Nous rappelons que par abus de notation, nous notons a au lieu de $[\![a]\!]_{\Sigma_{Act}}$ et b au lieu de $[\![b]\!]_{\Sigma_{Act}}$.
- $S = \{l_1, l_2, l_3\}$
- La composition de ressources $\bullet$, la fonction μ et la composition d'actions $\odot$:

$\bullet$	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$	$[c_5]$
e	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$	$[c_5]$
$[c_1]$	$[c_1]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_2]$	$[c_2]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$[c_1]$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_3]$	$[c_3]$	$\uparrow$	$[c_1]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_4]$	$[c_4]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_5]$	$[c_5]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

μ	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$	$[c_5]$
1	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$	$[c_5]$
a	$\uparrow$	$\uparrow$	$[c_4]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
b	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$[c_5]$	$\uparrow$	$\uparrow$
α	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

$\odot$	1	a	b	α
1	1	a	b	α
a	a	α	α	α
b	b	α	α	α
α	α	α	α	α

- La relation $\|\cdot\rangle\!\rangle$:



- L'interprétation : $[\![P]\!] = \{([c_4], l_2), ([c_5], l_3)\}$

Nous pouvons alors vérifier que nous avons alors bien obtenu un contre-modèle de la formule $(\langle a\rangle P * \langle b\rangle P) \to \Diamond(P * P)$:

1. Nous avons $([c_1], l_1) \notin [\![P]\!]$ et $([c_2], l_1) \notin [\![P]\!]$. Donc $[c_1], l_1 \nVdash_{\mathcal{K}} P$ et $[c_2], l_1 \nVdash_{\mathcal{K}} P$.
2. Nous pouvons remarquer que $r \bullet r' = [c_1]$ ssi ($r = e$ et $r' = [c_1]$) ou ($r = [c_1]$ et $r' = e$) ou ($r = [c_2]$ et $r' = [c_3]$) ou ($r = [c_3]$ et $r' = [c_2]$).
3. Par (1) et (2), nous avons $[c_1], l_1 \nVdash_{\mathcal{K}} P * P$.
4. Comme $([c_4], l_2) \in [\![P]\!]$ et $([c_5], l_3) \in [\![P]\!]$ alors $[c_4], l_2 \vDash_{\mathcal{K}} P$ et $[c_5], l_3 \vDash_{\mathcal{K}} P$.
5. Comme $\mu(a, [c_2]) = [c_4]$ et $l_1 \|a\rangle\!\rangle l_2$ alors $[c_2], l_1 \xrightarrow{a} [c_4], l_2$.
6. Comme $\mu(b, [c_3]) = [c_5]$ et $l_1 \|b\rangle\!\rangle l_3$ alors $[c_3], l_1 \xrightarrow{b} [c_5], l_3$.
7. Par (4) et (5) nous avons $[c_2], l_1 \vDash_{\mathcal{K}} \langle a\rangle P$ et par (4) et (6) nous avons $[c_3], l_1 \vDash_{\mathcal{K}} \langle b\rangle P$.
8. Comme $[c_2] \bullet [c_3] = [c_1]$ et par (7), alors $[c_1], l_1 \vDash_{\mathcal{K}} \langle a\rangle P * \langle b\rangle P$.
9. Nous avons $[c_1], l_1 \rightsquigarrow r, s$ ssi $r = [c_1]$ et $s = l_1$.

10. Par (3) et (9) nous pouvons déduire que $[c_1], l_1 \nVdash_{\mathcal{K}} \Diamond(P * P)$
11. Par (8) et (10) nous pouvons conclure que $[c_1], l_1 \nVdash_{\mathcal{K}} (\langle a \rangle P * \langle b \rangle P) \rightarrow \Diamond(P * P)$

4.7 Complétude de la méthode des tableaux pour DMBI

Nous démontrons à présent la complétude de la méthode des tableaux pour DMBI. Notre preuve de complétude reprend les techniques de la preuve de complétude de BBI [57], qui est une adaptation de la preuve de complétude pour la méthode des tableaux pour la logique du premier ordre [36]. Cette preuve consiste à montrer qu'il est possible de construire un Hintikka CSS à partir d'une formule pour laquelle il est impossible de construire une preuve. Pour obtenir un tel résultat, une stratégie équitable et un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de DMBI-tableau clos sont requis.

Définition 4.7.1 (Stratégie équitable)**.** Une *stratégie équitable* est une séquence de formules signées $(\mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i))_{i \in \mathbb{N}}$ appartenant à $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \times \mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}} \times L_r \times L_s$ telle que toute formule signée apparaît infini souvent. En d'autres termes : pour toute formule signée $\mathbb{S}F : (x, u) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \times \mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}} \times L_r \times L_s$, l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i) \equiv \mathbb{S}F : (x, u)\}$ est infini.

Proposition 4.7.2. Il existe une stratégie équitable.

Preuve. Soit $X = \{F, T\} \times \mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}} \times L_r \times L_s$ l'ensemble de toutes les formules signées. Comme Prop et Σ_{Act} sont dénombrables, alors $\mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}}$ est dénombrable. De plus, L_r et L_s sont aussi dénombrables (nous rappelons que γ_r est dénombrable). Par conséquent X est un ensemble dénombrable. Alors l'ensemble $\mathbb{N} \times X$ est dénombrable et donc il existe une fonction surjective $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times X$. Soit la projection $p : \mathbb{N} \times X \longrightarrow X$ définie par $p(i, x) = x$ et soit $u = p \circ \varphi$. Nous montrons que u est une stratégie équitable, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, $u^{-1}(\{x\})$ est infini. Soit $x \in X$. $u^{-1}(\{x\}) = \varphi^{-1}(p^{-1}(\{x\}))$. Or $p^{-1}(\{x\}) = \{(i, x) \mid i \in \mathbb{N}\}$ donc $p^{-1}(x)$ est infini. Comme φ est une surjection alors $\varphi^{-1}(p^{-1}(\{x\}))$ est aussi infini. □

Définition 4.7.3. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de CSS.

1. $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-*clos* si $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$ lorsque $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$ et $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle \in \mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P}$ est à *caractère fini* si $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$ lorsque, pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \in \mathcal{P}$.
3. $\mathcal{P}$ est *saturé* si pour tout $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$ et pour toute instance

$$\frac{cond(\mathcal{F}, \mathcal{C})}{\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \ \mid \ ... \ \mid \ \langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \rangle}$$

d'une des règles de la Figure 10 telle que la condition $cond(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ est vérifiée, nous avons $\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_i, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_i \rangle \in \mathcal{P}$ pour au moins un $i \in \{1, ..., k\}$.

Définition 4.7.4 (Oracle)**.** Un *oracle* est un ensemble de CSS non clos, $\preccurlyeq$-clos, à caractère fini et saturé.

Lemme 4.7.5. Il existe un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de DMBI-tableau clos.

Preuve. La preuve est donnée en Annexe B. □

Pour démontrer la complétude de la méthode des tableaux de DMBI, nous devons montrer que si une formule est valide, alors il est possible d'en construire une preuve. De manière équivalente, nous considérons dans cette section une formule φ pour laquelle il est impossible de construire une preuve et nous montrons que cette formule n'est pas valide. Soit $\mathcal{T}_0$ le DMBI-tableau initial pour φ. Par les hypothèses que nous venons de faire :

1. $\mathcal{T}_0 = [\langle\{\mathbb{F}\varphi : (c_1, l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle]$
2. $\mathcal{T}_0$ ne peut pas être clos, sinon il existerai une preuve de φ

Par le Lemme 4.7.5, il existe un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de DMBI-tableau clos. Nous considérons alors $\mathcal{P}$ un tel oracle. Alors par hypothèse, $\langle\{\mathbb{F}\varphi : (c_1, l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle \in \mathcal{P}$. Par ailleurs, par la Proposition 4.7.2, il existe une stratégie équitable. Nous considérons alors $\mathcal{S}$ une telle stratégie. Nous noterons $\mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i)$ la $i^{\text{ième}}$ formule de $\mathcal{S}$.

Nous construisons maintenant la séquence $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i\rangle_{0 \leqslant i}$ de la manière suivante :

- $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle = \langle\{\mathbb{F}\varphi : (c_1, l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle$
- Si $\langle \mathcal{F}_i \cup \{\mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i)\}, \mathcal{C}_i\rangle \notin \mathcal{P}$ alors $\langle \mathcal{F}_{i+1}, \mathcal{C}_{i+1}\rangle = \langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i\rangle$
- Si $\langle \mathcal{F}_i \cup \{\mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i)\}, \mathcal{C}_i\rangle \in \mathcal{P}$ alors $\langle \mathcal{F}_{i+1}, \mathcal{C}_{i+1}\rangle = \langle \mathcal{F}_i \cup \{\mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i)\} \cup F_e, \mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_e\rangle$ tel que F_e et $\mathcal{C}_e$ sont déterminés par la table suivante :

$\mathbb{S}_i$	F_i	F_e	$\mathcal{C}_e$
$\mathbb{T}$	I	$\emptyset$	$\{1_r \sim x_i\}$
$\mathbb{T}$	$\phi * \psi$	$\{\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a}, u_i), \mathbb{T}\psi : (\mathfrak{b}, u_i)\}$	$\{\mathfrak{a}\mathfrak{b} \sim x_i\}$
$\mathbb{F}$	$\phi \mathrel{-\!\!*} \psi$	$\{\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a}, u_i), \mathbb{F}\psi : (x_i\mathfrak{a}, u_i)\}$	$\{x_i\mathfrak{a} \sim x_i\mathfrak{a}\}$
$\mathbb{T}$	$\langle f\rangle\phi$	$\{\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a}, \mathfrak{d})\}$	$\{x_i \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{a}, u_i \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} \mathfrak{d}\}$
$\mathbb{T}$	$\Diamond\phi$	$\{\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a}, \mathfrak{d})\}$	$\{x_i \overset{\mathfrak{c}}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{a}, u_i \overset{\mathfrak{c}}{\rightarrowtail} \mathfrak{d}\}$
Autrement		$\emptyset$	$\emptyset$

où $\mathfrak{a} = c_{2i+2}$, $\mathfrak{b} = c_{2i+3}$, $\mathfrak{c} = d_{i+2}$ et $\mathfrak{d} = l_{i+2}$.

Proposition 4.7.6. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\mathbb{F}\varphi : (c_1, l_1) \in \mathcal{F}_i$, $c_1 \sim c_1 \in \mathcal{C}_i$ et $l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1 \in \mathcal{C}_i$
2. $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1}$ et $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_{i+1}$
3. $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i\rangle_{0 \leqslant i} \in \mathcal{P}$
4. $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_i) \subseteq \{c_1, c_2, ..., c_{2i+1}\}$
5. $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}_i) \subseteq \{d_1, d_2, ..., d_{i+1}\} \cup \Sigma_{Act}$
6. $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_i) \subseteq \{l_1, l_2, ..., l_{i+1}\}$

Preuve. Nous démontrons les propriétés (1) et (2) indépendamment et les propriétés (3), (4), (5) et (6) simultanément.

1. Cette propriété est vérifié pour $i = 0$, puisque $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle = \langle\{\mathbb{F}\varphi : (c_1, l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle$. Comme $\langle \mathcal{F}_{i+1}, \mathcal{C}_{i+1}\rangle$ est obtenu par extension ($\cup$) de $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i\rangle$ alors cette propriété est vérifiée pour tout $i \geqslant 0$.
2. Cette propriété est vérifiée parce que $\langle \mathcal{F}_{i+1}, \mathcal{C}_{i+1}\rangle$ est obtenue par ($\cup$) extension de $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i\rangle$.

3, 4, 5, 6. Nous prouvons les propriétés (3), (4), (5) et (6) simultanément par induction sur i. Concernant le cas de base ($i = 0$), la propriété (3) est vérifiée parce que $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle = \langle\{\mathbb{F}\varphi :$

$(c_1, l_1)\}, \{c_1 \sim c_1, l_1 \overset{1_a}{\rightarrowtail} l_1\}\rangle \in \mathcal{P}$ par hypothèse. De plus, les propriétés (4), (5) et (6) sont aussi trivialement vérifiées, comme nous pouvons le remarquer sur ce CSS.
Nous supposons que les propriétés (3), (4), (5) et (6) sont vérifiées pour $i = n$ (HI). Nous démontrons pour $i = n + 1$:

- Si $\langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\}, \mathcal{C}_n\rangle \notin \mathcal{P}$ alors $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle = \langle \mathcal{F}_n, \mathcal{C}_n\rangle$. Les propriétés sont alors vérifiées par (HI).
- Si $\langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\}, \mathcal{C}_n\rangle \in \mathcal{P}$, alors comme $\mathcal{P}$ est un ensemble de CSS, nous avons $x_n \sim x_n \in \overline{\mathcal{C}_n}$ et $u_n \overset{1a}{\rightarrowtail} u_n \in \overline{\mathcal{C}_n}$, par (P_{css}). Donc $\gamma_r \cap \mathcal{E}_r(x_n) \in \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}_n})$ et $u_n \in \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}_n})$. Par la Proposition 4.4.12, la propriété suivante, que nous noterons **(P)**, est vérifiée : $\gamma_r \cap \mathcal{E}_r(x_n) \in \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n)$ (les constantes de label de ressources formant x_n apparaissent dans l'alphabet de $\mathcal{C}_n$) et $u_n \in \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_n)$. Il y a six cas :
  - Cas $\mathbb{S}_n = \mathbb{T}$ et $F_n = \mathrm{I}$:
    Dans ce cas, $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle = \langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\}, \mathcal{C}_n \cup \{1_r \sim x_n\}\rangle$. Comme $\mathcal{P}$ est saturé, alors en appliquant la règle $\langle \mathbb{T}I\rangle$, nous avons $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle \in \mathcal{P}$. Par **(P)**, $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n)$, $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n)$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_n)$. En conclusion, par (HI), les propriétés (3), (4), (5) et (6) sont vérifiées.
  - Cas $\mathbb{S}_n = \mathbb{T}$ et $F_n = \phi * \psi$:
    Dans ce cas $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle = \langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_{2n+2}, u_n),\ \mathbb{T}\psi : (c_{2n+3}, u_n)\}, \mathcal{C}_n \cup \{c_{2n+2}c_{2n+3} \sim x_n\}\rangle$. Par (HI), $c_{2n+2} \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n)$ et $c_{2n+3} \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n)$, donc ce sont des nouvelles constantes. De plus, comme $\langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\}, \mathcal{C}_n\rangle \in \mathcal{P}$, et comme $\mathcal{P}$ est saturé, alors en appliquant la règle $\langle \mathbb{T}*\rangle$ et en utilisant les labels c_{2n+2} et c_{2n+3}, nous avons $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle \in \mathcal{P}$. Donc la propriété (3) est vérifiée. Par ailleurs, par **(P)**, $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n) \cup \{c_{2n+2}, c_{2n+3}\}$, $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n)$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_n)$. En conséquence, par (HI), les propriétés (4), (5) et (6) sont vérifiées.
  - Cas $\mathbb{S}_n = \mathbb{F}$ et $F_n = \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$:
    Ce cas est similaire au précédent.
  - Cas $\mathbb{S}_n = \mathbb{T}$ et $F_n = \langle f\rangle\phi$:
    Dans ce cas $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle = \langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_{2n+2}, l_{n+2})\}, \mathcal{C}_n \cup \{x_n \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c_{2n+2}, u_n \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l_{n+2}\}\rangle$. Par (HI), $c_{2n+2} \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n)$ et $l_{n+2} \notin \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_n)$, donc ce sont des nouvelles constantes. Comme $\langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\}, \mathcal{C}_n\rangle \in \mathcal{P}$ et comme $\mathcal{P}$ est saturé, alors en appliquant la règle $\langle \mathbb{T}\langle -\rangle\rangle$ et en utilisant les labels c_{2n+2} et l_{n+2}, nous avons $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle \in \mathcal{P}$. Donc la propriété (3) est vérifiée. Par ailleurs, par **(P)**, $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n) \cup \{c_{2n+2}\}$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_n) \cup \{l_{n+2}\}$. Si $f = 1$ alors $\|f\| = 1_a$. En se rappelant que $1_a \notin \gamma_a$, nous avons alors $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n)$. Si $f \neq 1$ alors $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n) \cup \{\|f\|\} = \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n) \cup \{f\} \subseteq \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n) \cup \Sigma_{Act}$. En conséquence, par (HI), les propriétés (4), (5) et (6) sont vérifiées.
  - Cas $\mathbb{S}_n = \mathbb{T}$ et $F_n = \Diamond\phi$:
    Dans ce cas $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle = \langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_{2n+2}, l_{n+2})\}, \mathcal{C}_n \cup \{x_n \overset{d_{n+2}}{\twoheadrightarrow} c_{2n+2}, u_n \overset{d_{n+2}}{\rightarrowtail} l_{n+2}\}\rangle$. Par (HI), $c_{2n+2} \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n)$, $d_{n+2} \notin \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n)$ et $l_{n+2} \notin \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_n)$, donc ce sont trois nouvelles constantes. Comme $\langle \mathcal{F}_n \cup \{\mathbb{S}_n F_n : (x_n, u_n)\}, \mathcal{C}_n\rangle \in \mathcal{P}$, et comme $\mathcal{P}$ est saturé, alors en appliquant la règle $\langle \mathbb{T}\Diamond\rangle$ et en utilisant les labels c_{2n+2}, d_{n+2} et l_{n+2}, nous avons $\langle \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{C}_{n+1}\rangle \in \mathcal{P}$. Donc la propriété (3) est vérifiée. Par ailleurs, par **(P)**, $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_r(\mathcal{C}_n) \cup \{c_{2n+2}\}$, $\mathcal{A}_a(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_a(\mathcal{C}_n) \cup \{d_{n+2}\}$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}_{n+1}) = \mathcal{A}_s(\mathcal{C}_n) \cup \{l_{n+2}\}$. En conséquence, par (HI), les propriétés (4), (5) et (6) sont vérifiées.

- Dans le dernier cas, $\langle \mathcal{F}_{i+1}, \mathcal{C}_{i+1} \rangle = \langle \mathcal{F}_i \cup \{\mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i)\}, \mathcal{C}_i \rangle$. Or, par hypothèse $\langle \mathcal{F}_i \cup \{\mathbb{S}_i F_i : (x_i, u_i)\}, \mathcal{C}_i \rangle \in \mathcal{P}$, donc la propriété (3) est vérifiée. Les propriétés (4), (5) et (6) sont vérifiées par (HI).

□

La dernière étape de notre construction consiste à considérer le CSS limite $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle$ de la séquence $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i \rangle_{0 \leqslant i}$ définie par :

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{i \geqslant 0} \mathcal{F}_i \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_\infty = \bigcup_{i \geqslant 0} \mathcal{C}_i$$

Proposition 4.7.7. Les deux propriétés suivantes sont vérifiées par le CSS limite :

1. $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$
2. Pour toute formule signée $\mathbb{S}\phi : (x, u)$, si $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{S}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$ alors $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_\infty$

Preuve. Nous démontrons tout d'abord que $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle$ est un CSS au sens de la Définition 4.4.15, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété (P_{css}). Soit $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_\infty$. Par construction du CSS limite, il existe i tel que $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_i$. Par la propriété (3) de la Proposition 4.7.6, $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i \rangle \in \mathcal{P}$. Donc $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i \rangle$ est un CSS, puisque $\mathcal{P}$ est par définition un ensemble de CSS, et donc $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_i}$ et $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}_i}$. Ainsi, par construction du CSS limite, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$ et $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$. Nous prouvons maintenant les deux propriétés de la proposition :

1. Soit $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle$. Comme $\mathcal{F}_f$ et $\mathcal{C}_f$ sont finis et comme la séquence $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i \rangle_{0 \leqslant i}$ est croissante par la propriété (2) de la Proposition 4.7.6, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}_j, \mathcal{C}_j \rangle$. Par la propriété (3) de la Proposition 4.7.6, $\langle \mathcal{F}_j, \mathcal{C}_j \rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors nous avons $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \in \mathcal{P}$. Donc pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle$, $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \in \mathcal{P}$. En conséquence, comme $\mathcal{P}$ est à caractère fini alors $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$.
2. Soit $\mathbb{S}\phi : (x, u)$ tel que $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{S}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$. Par la propriété ($P_{css}$), $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$ et $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$. Par compacité (Lemme 4.4.13), il existe $\mathcal{C}_{f_1} \subseteq \mathcal{C}_\infty$ et $\mathcal{C}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}_\infty$ tels que $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ sont finis et $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_{f_1}}$ et $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}_{f_2}}$. Comme la séquence est croissante par la propriété (2) de la Proposition 4.7.6, il existe $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}_{f_1} \subseteq \mathcal{C}_{j_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}_{j_2}$. Soit $j = max(j_1, j_2)$. Comme la séquence est croissante, nous avons $\mathcal{C}_{f_1} \subseteq \mathcal{C}_j$ et $\mathcal{C}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}_j$. Comme $\mathbb{S}\phi : (x, u)$ apparaît infiniment souvent dans la stratégie équitable, alors il existe $k \geqslant j$ tel que $\mathbb{S}_k F_k : (x_k, u_k) = \mathbb{S}\phi : (x, u)$. De plus $\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{C}_k$. Donc $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_k}$ et $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\mathcal{C}_k}$. Alors $\langle \mathcal{F}_k \cup \{\mathbb{S}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_k \rangle$ est un CSS (satisfait la propriété (P_{css})) et $\langle \mathcal{F}_k \cup \{\mathbb{S}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_k \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{S}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle$, par définition de CSS limite. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors $\langle \mathcal{F}_k \cup \{\mathbb{S}\phi : (x, u)\}, \mathcal{C}_k \rangle \in \mathcal{P}$. Par construction de $\langle \mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{C}_{k+1} \rangle$, $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_{k+1}$. En conclusion $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_\infty$.

□

Lemme 4.7.8. Le CSS limite $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle$ est un Hintikka CSS.

Preuve. Nous vérifions que $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle$ satisfait les conditions 1, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13 et 14 de la Définition 4.6.1. La preuve des autres conditions est similaire.

1. Supposons que $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_\infty$ et $\mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}_\infty$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$. Alors $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle$ est clos. Donc, par la définition d'oracle, $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle \notin \mathcal{P}$. Or, par la propriété (1) de la Proposition 4.7.7, $\langle \mathcal{F}_\infty, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$. Ceci étant absurde, la condition 1 de la Définition 4.6.1 est donc vérifiée.

4. Supposons que $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}_j$. De plus, il existe $k \geqslant j$ tel que la k^{ieme} formule de notre stratégie équitable est $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u)$. Comme la séquence $\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_i \rangle_{0 \leqslant i}$ est croissante (propriété (2) de la Proposition 4.7.6), alors $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}_k$. Par la propriété (3) de la Proposition 4.7.6, $\langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \rangle \in \mathcal{P}$. Alors $\langle \mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{C}_{k+1} \rangle = \langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \cup \{1_r \sim x\} \rangle$. Donc $1_r \sim x \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$. En conséquence, la condition 4 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

5. Supposons que $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Comme $\mathcal{P}$ est saturée alors $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$, par la règle $\langle \mathbb{F} \to \rangle$. Par la propriété (2) de la Proposition 4.7.7, $\mathbb{F}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$ ou $\mathbb{T}\psi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 5 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

6. Supposons que $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Comme $\mathcal{P}$ est saturée alors $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$, par la règle $\langle \mathbb{T} \to \rangle$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$ et $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$. Par la propriété (2) de la Proposition 4.7.7, $\mathbb{T}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$ et $\mathbb{F}\psi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 6 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

7. Supposons que $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Par les mêmes arguments que ceux utilisés pour la condition 4, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :
   - la k^{ieme} formule de notre stratégie équitable est $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u)$
   - $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}_k$
   - $\langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \rangle \in \mathcal{P}$.

   Donc, par construction du CSS limite, $\langle \mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{C}_{k+1} \rangle = \langle \mathcal{F}_k \cup \{\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a},u), \mathbb{T}\psi : (\mathfrak{b},u)\}, \mathcal{C}_k \cup \{\mathfrak{a}\mathfrak{b} \sim x\} \rangle$, où $\mathfrak{a} = c_{2k+2}$ et $\mathfrak{b} = c_{2k+3}$. Alors $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \sim x \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$, $\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a},u) \in \mathcal{F}_\infty$ et $\mathbb{T}\psi : (\mathfrak{b},u) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 7 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

8. Supposons que $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Soit $c,d \in L_r$ tels que $cd \sim x \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$. Comme $\mathcal{P}$ est saturé, alors nous avons $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{F}\phi : (c,u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{F}\psi : (d,u)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$, par la règle $\langle \mathbb{F} * \rangle$. Par propriété (2) de la Proposition 4.7.7, $\mathbb{F}\phi : (c,u) \in \mathcal{F}_\infty$ ou $\mathbb{F}\psi : (d,u) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 8 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

11. Supposons que $\mathbb{T}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Par les mêmes arguments que ceux utilisés pour la condition 4, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :
   - la k^{ieme} formule de notre stratégie équitable est $\mathbb{T}\langle f \rangle \phi : (x,u)$
   - $\mathbb{T}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}_k$
   - $\langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \rangle \in \mathcal{P}$.

   Donc, par construction du CSS limite, $\langle \mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{C}_{k+1} \rangle = \langle \mathcal{F}_k \cup \{\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a},\mathfrak{d})\}, \mathcal{C}_k \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{a}, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} \mathfrak{d}\} \rangle$, où $\mathfrak{a} = c_{2k+2}$ et $\mathfrak{d} = l_{k+2}$. Alors $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{a} \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$, $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} \mathfrak{d} \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$ et $\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a},\mathfrak{d}) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 11 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

12. Supposons que $\mathbb{F}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Soit $c \in L_r$ et $l \in L_s$ tels que $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$ et $u \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} l \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$. Comme $\mathcal{P}$ est saturé, alors nous avons $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{F}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$, par la règle $\langle \mathbb{F}\langle - \rangle \rangle$. Par propriété (2) de la Proposition 4.7.7, $\mathbb{F}\phi : (c,l) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 12 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

13. Supposons que $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}_\infty$. Par les mêmes arguments que ceux utilisés pour la condition 4, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :
   - la k^{ieme} formule de notre stratégie équitable est $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u)$
   - $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}_k$
   - $\langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \rangle \in \mathcal{P}$.

Donc, par construction du CSS limite, $\langle \mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{C}_{k+1} \rangle = \langle \mathcal{F}_k \cup \{\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a}, \mathfrak{d})\}, \mathcal{C}_k \cup \{x \overset{\mathfrak{c}}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{a}, u \overset{\mathfrak{c}}{\rightarrowtail} \mathfrak{d}\} \rangle$, où $\mathfrak{a} = c_{2k+2}$, $\mathfrak{c} = d_{k+2}$ et $\mathfrak{d} = l_{k+2}$. Alors $x \overset{\mathfrak{c}}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{a} \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$, $u \overset{\mathfrak{c}}{\rightarrowtail} \mathfrak{d} \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$ et $\mathbb{T}\phi : (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 13 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

14. Supposons que $\mathbb{F}\Diamond\phi : (x, u) \in \mathcal{F}_\infty$. Soit $c \in L_r$, $d \in L_a$ et $l \in L_s$ tels que $x \overset{d}{\twoheadrightarrow} c \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$ et $u \overset{d}{\twoheadrightarrow} l \in \overline{\mathcal{C}_\infty}$. Comme $\mathcal{P}$ est saturé, alors nous avons $\langle \mathcal{F}_\infty \cup \{\mathbb{F}\phi : (c, l)\}, \mathcal{C}_\infty \rangle \in \mathcal{P}$, par la règle $\langle \mathbb{F}\Diamond \rangle$. Par propriété (2) de la Proposition 4.7.7, $\mathbb{F}\phi : (c, l) \in \mathcal{F}_\infty$. En conséquence, la condition 14 de la Définition 4.6.1 est vérifiée.

□

Théorème 4.7.9 (Complétude)**.** Soit φ une formule. Si φ est valide, alors il existe une preuve pour φ.

Preuve. Supposons qu'il soit impossible de construire une preuve pour φ. La méthode, que nous avons présenté dans cette section, construit alors un CSS limite qui, par le Lemme 4.7.8, est un Hintikka CSS. Par la propriété (1) de la Proposition 4.7.6, $\mathbb{F}\varphi : (c_1, l_1) \in \mathcal{F}_i$. Par le Lemme 4.6.7, φ n'est pas valide. □

Après avoir présenté la preuve de complétude en détail, nous revenons sur la preuve de complétude de la méthode des tableaux de DBI (Théorème 3.5.6) et donnons des détails complémentaires sur la manière de reconstruire la démonstration de complétude pour DBI.
Dans un premier temps, il convient de définir la notion de stratégie équitable non plus sur le langage de DMBI, mais bien sûr sur le langage de DBI. La preuve d'existence d'une stratégie équitable est similaire à celle de la Proposition 4.7.2, l'argument central étant que l'ensemble des formules signées dans DBI est un ensemble dénombrable, car construit comme le produit cartésien d'ensembles dénombrables.
Ensuite, nous devons de montrer l'existence d'un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de DBI-tableau clos. Cette preuve est une adaptation de celle du Lemme 4.7.5, pour laquelle il convient de tenir compte du fait qu'il existe une quatrième condition de clôture de CSS (cas d'une formule signée $\mathbb{F}\phi : (x, u)$ où x est un label inconsistant) et que les connecteurs additifs (notamment l'implication) sont intuitionnistes dans DBI, contrairement à DMBI. La démonstration des cas se rapportant à ces distinctions impliquent une adaptation de la démonstration des cas de DMBI, mais les arguments de preuve centraux restent identiques. De plus, nous pouvons observer que la gestion des contraintes et de leur clôture est différente entre les deux logiques. Mais remarquant que les contraintes d'états de DBI pouvant être vues comme des contraintes de transitions sans label d'action dans DMBI et remarquant aussi que les règles de clôture de ces contraintes sont similaires dans les deux logiques, les arguments de preuve concernant le cas des modalités et des contraintes d'états de DBI sont alors une simplification de ceux avancés pour DMBI.
Pour finir, lors de l'étape de construction du CSS de Hintikka, nous remarquons que l'introduction dans le CSS d'une formule signée, ayant la particularité d'introduire une nouvelle contrainte si nous appliquons sur celle-ci une règle de la méthode des tableaux, a pour effet l'application immédiate de la règle. Bien entendu, il convient alors d'adapter cette particularité à DBI, en tenant compte des règles de la méthode des tableaux de DBI. De cette manière, le reste de la preuve de complétude de la méthode des tableaux de DBI découle de cette bonne construction et des remarques que nous venons de faire.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une extension de DBI, nommée DMBI, permettant de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant des ressources en exécutant des actions sur celles-ci. Nous avons montré que malgré que les modèles de DMBI ne contiennent qu'un unique automate, ceux-ci pouvaient modéliser des systèmes concurrents synchrones et aussi asynchrones. Pour finir, nous avons proposé une méthode des tableaux, montré sa correction et sa complétude et nous avons aussi proposé une méthode d'extraction de contre-modèles.

Concernant DMBI, nos travaux futurs concernont l'étude d'extensions, en particulier en introduisant la notion de place [17, 22] permettant de localiser les ressources, et à la proposition d'un outil permettant la modélisation et la vérification de propriétés dans des domaines tels que les protocoles, les webservices, systèmes multi-agents... En effet, de tels systèmes sont composés d'agents ou processus échangeant de l'information, pouvant être vue comme une ressource, et interagissant ensemble, c'est-à-dire exécutant des actions.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à la recherche d'une abstraction des modèles de DMBI afin de proposer un noyau logique pour la modélisation et l'expression de propriétés sur des ressources dynamiques. De plus, nous nous intéressons à l'étude de nouvelles modalités multiplicatives, c'est-à-dire en lien avec la séparation.

Chapitre 5

De nouvelles modalités de séparation

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une logique, nommée DMBI, dont les modèles sont à base d'automates exécutant des actions ayant pour effet de transformer/manipuler des ressources. Nous nous intéressons à généraliser les concepts introduits précédemment en étudiant un noyau logique permettant de capturer et d'exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant des ressources.

L'étude, la modélisation et la vérification des systèmes dynamiques est une préoccupation centrale en informatique. De nombreuses logiques ont été proposées en vue de modéliser et de vérifier des propriétés sur le comportement de ces systèmes. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, les logiques modales S4 ou S5 [18, 83], ainsi que leurs variantes intuitionnistes, et les logiques temporelles, comme LTL [74] ou CTL [32]. Malheureusement, de notre point de vue, les modèles de ces logiques tiennent uniquement compte de la dimension "monde", mais pas de la dimension "ressource". Nous allons, ci-dessous, expliciter nos propos plus en détails. Si nous reprenons les travaux sur la logique MBI [76, 24, 77, 23], les modèles de la logique sont des systèmes de transition, décrits par des jugements de la forme $R, E \xrightarrow{a} R', E'$ qui sont générés par une sémantique opérationnelle et signifient : "le processus E exécute l'action a sur la ressource R, obtenant ainsi la nouvelle ressource R' et devenant alors le processus E'". Parallèlement, la logique DMBI, que nous avons présenté dans le chapitre précédant, est une logique dont les modèles sont des automates exécutant des actions ayant pour effet de transformer des ressources et dont le comportement du système peut aussi être représenté par une notation de la forme $R, E \xrightarrow{a} R', E'$. En observant cette notation de plus près, nous comprenons alors que ces deux logiques introduisent l'idée de modèles multi-dimensionnels ressource/état. Ainsi, souhaitant proposer un noyau logique en vue de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant des ressources, nous proposons d'introduire et d'étudier une logique modale dont les modèles ne sont plus uniquement une relation sur des mondes modaux (modèles unidimensionnels), mais une relation sur des couples monde/ressource, introduisant alors une nouvelle dimension "ressource". Par ailleurs, tout comme BBI qui possède des connecteurs additifs d'une part et multiplicatifs d'autre part, nous nous interrogeons sur ce que pourrait-être des modalités multiplicatives, c'est-à-dire en lien avec la notion de ressource, ainsi que sur l'intérêt de telles modalités.

Après avoir présenté le langage et la sémantique de notre nouvelle logique, nous illustrerons l'expressivité de celle-ci sur des réseaux de Petri temporisés (time Petri nets) [65, 16]. Puis nous discuterons de l'intérêt des modalités multiplicatives que nous avons introduit. Enfin, nous proposerons une méthode des tableaux avec labels que nous prouverons correcte et complète,

ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles.

5.1 Langage et sémantique de la logique LSM

Dans cette section, nous présentons le langage et la sémantique de la logique LSM (Logic with Separating Modalities) [28], une logique modale multi-dimensionnelle dont les modèles sont à base de couples monde/ressource, permettant ainsi d'abstraire la notion de manipulation de ressources, comme nous le verrons par la suite.

Soit Σ_r un ensemble dénombrable de symboles de ressources. Soit Prop un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. Le langage $\mathcal{L}_{\mathsf{LSM}}$ de LSM [28] est défini par la grammaire suivante, pour tout $p \in \text{Prop}$ et $r \in \Sigma_r$:

$$\begin{aligned} X ::= \quad & p \mid \top \mid \bot \mid \mathrm{I} \mid \neg X \mid X \wedge X \mid X \vee X \mid X \to X \mid X * X \mid X \mathrel{-\!\!*} X \\ & \mid \Diamond X \mid \Box X \mid \Diamond_\bullet X \mid \Box_\bullet X \mid \Diamond_r X \mid \Box_r X \end{aligned}$$

Comme nous pouvons l'observer, notre logique contient le langage de BBI et possède deux types de modalités, à savoir :

- Les modalités *additives* $\Diamond$ et $\Box$. Ces modalités, se voulant être des modalités à la S4 [18, 83], permettent d'exprimer des propriétés sur des états accessibles d'un système considéré, où *état* désigne un couple monde/ressource, comme nous le verrons.
- Les modalités *multiplicatives* $\Diamond_\bullet$, $\Box_\bullet$, $\Diamond_r$ et $\Box_r$. Ces nouvelles modalités permettent d'exprimer des propriétés sur des états accessibles, après avoir fourni des ressources supplémentaires au système. Nous insisterons sur ces modalités, dans la section suivante.

LSM est une logique modale dont les modèles sont constitués de couples monde/ressource. Concernant la dimension "ressource", nous choisissons de continuer de modéliser ces éléments par un monoïde de ressources, dont nous redonnons la définition ci-dessous.

Définition 5.1.1 (Monoïde de ressources)**.** Un *monoïde de ressources* est une structure $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ telle que :

- R est un ensemble dont les éléments sont appelés *ressources*
- $e \in R$
- $\bullet : R \times R \rightharpoonup R$ est une fonction partielle telle que, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Élément neutre : $r_1 \bullet e \downarrow$ et $r_1 \bullet e = r_1$
  - Commutativité : si $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ alors $r_2 \bullet r_1 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_2 = r_2 \bullet r_1$
  - Associativité : si $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) \downarrow$ alors $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$ et $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) = (r_1 \bullet r_2) \bullet r_3$

Nous rappelons que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ est défini" et $r_1 \bullet r_2 \uparrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ n'est pas défini". Nous rappelons que si $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$ alors $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) \downarrow$. Nous présentons à présent les modèles de notre logique.

Définition 5.1.2 (Modèle)**.** Un *modèle* est un quadruplet $\mathcal{M} = (W, \mathcal{R}, \mathbf{R}, V)$ tel que :

- W est un ensemble de *mondes*
- $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ est un monoïde de ressources
- $\mathbf{R} \subseteq (W \times R) \times (W \times R)$ tel que pour tous $w_1, w_2, w_3 \in W$ et tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Réflexivité : $(w_1, r_1)\mathbf{R}(w_1, r_1)$
  - Transitivité : si $(w_1, r_1)\mathbf{R}(w_2, r_2)$ et $(w_2, r_2)\mathbf{R}(w_3, r_3)$ alors $(w_1, r_1)\mathbf{R}(w_3, r_3)$
- $V : \mathit{Prop} \to \mathbb{P}(W \times R)$

$\mathbf{R}$ est appelé *relation d'accessibilité* et V est appelé *valuation*. Par ailleurs, nous appellerons *état*, tout couple monde/ressource, c'est-à-dire tout élément de l'ensemble $W \times R$. Pour

finir, en considérant un état (w_1, r_1), nous appelons *état accessible* tout état (w_2, r_2) tel que $(w_1, r_1)\mathbf{R}(w_2, r_2)$.

Par ailleurs, nous considérons de manière implicite une interprétation $[\![\cdot]\!]_{\Sigma_r} : \Sigma_r \rightharpoonup R$, permettant d'associer une ressource à un symbole de ressources. Dans le cas où $e \in \Sigma_r$, nous considérons que $[\![e]\!]_{\Sigma_r} = e$. Pour finir, par abus de notation, nous noterons r au lieu $[\![r]\!]_{\Sigma_r}$ et nous ne ferons plus de distinction entre un symbole de ressources r et la ressource $[\![r]\!]_{\Sigma_r}$ associée.

Définition 5.1.3 (Relation de forcing et validité)**.** Soit $\mathcal{M} = (W, \mathcal{R}, \mathbf{R}, V)$ un modèle. La relation de forcing $\vDash_{\mathcal{M}} \subseteq W \times R \times \mathcal{L}_{\mathsf{LSM}}$ est définie par induction structurelle sur les formules, pour tout $w \in W$ et tout $r \in R$, ainsi :

- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} p$ ssi $(w, r) \in V(p)$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \bot$ jamais
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \top$ toujours
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \mathrm{I}$ ssi $r = e$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \neg\phi$ ssi $w, r \nvDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \wedge \psi$ ssi $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ et $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \vee \psi$ ssi $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ ou $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \to \psi$ ssi $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \Rightarrow w, r \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi * \psi$ ssi $\exists r_1, r_2 \in R \cdot r_1 \bullet r_2 \downarrow$ et $r = r_1 \bullet r_2$ et $w, r_1 \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ et $w, r_2 \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$ ssi $\forall r' \in R \cdot (r \bullet r' \downarrow$ et $w, r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi) \Rightarrow w, r \bullet r' \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond\phi$ ssi $\exists w' \in W \cdot \exists r' \in R \cdot (w, r)\mathbf{R}(w', r')$ et $w', r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Box\phi$ ssi $\forall w' \in W \cdot \forall r' \in R \cdot (w, r)\mathbf{R}(w', r') \Rightarrow w', r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond_\bullet\phi$ ssi $\exists w' \in W \cdot \exists s, r' \in R \cdot r \bullet s \downarrow$ et $(w, r \bullet s)\mathbf{R}(w', r')$ et $w', r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Box_\bullet\phi$ ssi $\forall w' \in W \cdot \forall s, r' \in R \cdot (r \bullet s \downarrow$ et $(w, r \bullet s)\mathbf{R}(w', r')) \Rightarrow w', r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond_s\phi$ ssi $\exists w' \in W \cdot \exists r' \in R \cdot r \bullet s \downarrow$ et $(w, r \bullet s)\mathbf{R}(w', r')$ et $w', r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Box_s\phi$ ssi $\forall w' \in W \cdot \forall r' \in R \cdot (r \bullet s \downarrow$ et $(w, r \bullet s)\mathbf{R}(w', r')) \Rightarrow w', r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$

Une formule ϕ est dite *valide*, noté $\vDash \phi$, si et seulement si $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ pour tout monde w et toute ressource r de tout modèle $\mathcal{M}$.

Nous pouvons remarquer les équivalences suivantes :

$$\Diamond\phi \equiv \Diamond_e\phi \qquad \Box\phi \equiv \Box_e\phi \qquad \Diamond_\bullet\phi \equiv \neg(\top \mathrel{-\!\!*} \neg\Diamond_e\phi) \qquad \Box_\bullet\phi \equiv \top \mathrel{-\!\!*} \Box_e\phi$$

L'intérêt de ces équivalences est de montrer que les modalités $\Diamond_r$ et $\Box_r$ généralisent d'une part les modalités à la S4 ($\Diamond$ et $\Box$). D'autre part, ces équivalences nous montrent aussi que les modalités $\Diamond_\bullet$ et $\Box_\bullet$ peuvent être vues comme un simple "sucre syntaxique". Malgré cela, nous tenons à faire apparaître dans le langage toutes ces modalités, car elles ont toutes un rôle intéressant au niveau de l'expressivité de LSM : elles permettent d'exprimer différentes nuances sur l'accessibilité, comme nous le verrons dans la section suivante.

Pour finir, nous rappelons que nous n'avons pas défini l'interprétation des symboles de ressources comme une fonction totale. Mais nous remarquons que malgré cela, notre sémantique reste correctement définie. En effet, sans abus de notation, nous avons $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond_s\phi$ seulement si $r \bullet [\![s]\!]_{\Sigma_r} \downarrow$ et donc seulement si l'interprétation $[\![s]\!]_{\Sigma_r}$ est définie (autrement dit seulement si $[\![s]\!]_{\Sigma_r}$ est une ressource). Par conséquent, nous considérons alors que la signification de $w, r \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond_s\phi$ est, avec abus de notation : "s est une ressource ($[\![s]\!]_{\Sigma_r}$ est défini) qui peut être composée avec r ($r \bullet [\![s]\!]_{\Sigma_r} \downarrow$) et, supposons que notre système soit à l'état (w, r), alors en fournissant la ressource s au système, celui-ci peut atteindre un état (w', r'), plus précisément $(w, r \bullet [\![s]\!]_{\Sigma_r})\mathbf{R}(w', r')$, satisfaisant ϕ $(w', r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi)$".

5.2 Expressivité de la logique LSM

Dans cette section, nous présentons l'expressivité de notre logique sur un exemple à base de réseaux de Petri temporisés, puis nous discutons des modalités introduites dans la logique.

5.2.1 LSM et les réseaux de Petri temporisés

Rappels sur les réseaux de Petri

Avant de présenter les réseaux de Petri temporisés sur lesquels nous choisissons d'illustrer notre logique, nous rappelons tout d'abord les définitions concernant les réseaux de Petri (non temporisés). Un *réseau de Petri* est un modèle permettant de décrire un système dynamique produisant et consommant des ressources. Dans ces modèles, les ressources sont représentées par des *places* et leur consommation est capturée par des *transitions*.

Définition 5.2.1 (Réseau de Petri)**.** Un *réseau de Petri* est un quadruplet $\mathcal{P} = (P, T, pre, post)$ tel que :

- P est un ensemble fini de *places*
- T est un ensemble fini de *transitions*
- pre et $post$ sont deux fonctions $T \to \mathfrak{M}(P)$

Nous rappelons que nous notons $\mathfrak{M}(P)$ l'ensemble des multi-ensembles sur P, c'est-à-dire des fonctions $P \to \mathbb{N}$. Ainsi, le multi-ensemble $M = \{\!\{p_1, p_1, p_2\}\!\}$ est la fonction telle que $M(p_1) = 1$, $M(p_2) = 2$ et $M(p_i) = 0$ pour tout $p_i \in P \setminus \{p_1, p_2\}$. Ces multi-ensembles, appelés aussi *marquages*, permettent d'encoder les ressources disponibles pour le système. Par exemple, $M = \{\!\{p_1, p_1, p_2\}\!\}$ représente deux ressources p_1 et une ressource p_2. Dans ce même exemple, nous dirons aussi qu'il y a deux *jetons* à la place p_1 et un *jeton* à la place p_2. Nous notons $\{\!\{\}\!\}$ le *marquage vide*, plus précisément le marquage tel que : $\{\!\{\}\!\}(p_i) = 0$ pour tout $p_i \in P$. Nous dirons que M est un *sous-marquage* de N, noté $M \leq N$, si et seulement si $M(p_i) \leqslant N(p_i)$ pour tout $p_i \in P$. Pour finir, l'addition et la soustraction de marquage sont définies ainsi :

- $M + N$ est le marquage tel que $(M + N)(p_i) = M(p_i) + N(p_i)$ pour tout $p_i \in P$
- $M - N$ est le marquage tel que $(M - N)(p_i) = M(p_i) - N(p_i)$ pour tout $p_i \in P$

et nous remarquons que $M - N$ est défini si et seulement si $N \leq M$.
Lorsqu'une transition t_i est activée, des ressources sont consommées, ceci étant donné par $pre(t_i)$, et aussi produites, ceci étant donné par $post(t_i)$. Nous notons $M \xrightarrow{t_i} N$ lorsque le marquage M, après l'activation de la transition t_i, devient le marquage N. Plus précisément, nous avons :

$$M \xrightarrow{t_i} N \text{ ssi } pre(t_i) \leq M \text{ et } N = M - pre(t_i) + post(t_i)$$

Pour finir, nous dirons que la transition t_i est *activable* à partir du marquage M ssi $pre(t_i) \leq M$ et nous notons $T_{/M}$ l'ensemble de toutes les transitions activables à partir de M.

Réseaux de Petri temporisés (Time Petri nets)

Dans la littérature, différentes extensions temporelles des réseaux de Petri ont été proposés. D'une part, nous avons les "Time Petri Nets" (TPN) [65, 16], où chaque transition possède une horloge et ne peut être activée seulement si des contraintes temporelles sur son horloge sont respectées, comme nous le verrons par la suite. Parallèlement, les "Timed Petri nets" (TPdN) [85, 3] possèdent des jetons ayant un âge et ne pouvant être consommés uniquement s'il satisfont certaines contraintes temporelles. Ayant fait le choix d'illustrer l'expressivité de notre logique sur les TPN, nous présentons ces réseaux ci-dessous.

Définition 5.2.2 (Réseau de Petri temporisé)**.** Un *réseau de Petri temporisé* (TPN) est un quintuplet $\mathcal{T} = (P, T, pre, post, \alpha, \beta)$, tel que :
- $(P, T, pre, post)$ est un réseau de Petri
- $\alpha : T \to \mathbb{R}^+$
- $\beta : T \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

Les TPN sont des réseaux de Petri particuliers, où à chaque transition t_i est associé un intervalle de temps $[\alpha(t_i), \beta(t_i)]$. Cet intervalle de temps capture le délai d'exécution d'une transition. Par exemple, l'intervalle de temps $[2, 5]$ associé à la transition t_i signifie que si t_i est activable au temps θ et si t_i reste activable de manière "continue" (nous reviendrons sur ce terme) alors t_i peut être activée après le temps $\theta + 2$ et doit être activée avant le temps $\theta + 5$. De plus, pour mesurer la quantité de temps durant laquelle une transition est restée activable, une horloge implicite $\nu : T \to \mathbb{R}^+$ est considérée pour chaque transition. Par exemple, au temps courant θ, $\nu(t_i) = 2$ nous indique que t_i était devenue activable au temps $\theta - 2$ et est restée activable de manière continue jusqu'à maintenant. De plus, lorsqu'une transition n'est pas activable, n'est plus activable, ou est activée, son horloge est remise à zéro et reste à zéro jusqu'à ce que la transition redevienne activable. En d'autres termes, $\nu(t_i)$ peut être simplement vu comme un chronomètre mesurant le temps écoulé depuis que la transition t_i est devenue activable, et ce chronomètre est remis à zéro chaque fois que la transition est activée ou n'est pas (plus) activable. Ainsi, l'écoulement d'une quantité de temps $d \in \mathbb{R}^+$ dans un TPN dont le marquage courant est M et dont les horloges des transitions sont données par ν, noté $\nu + d$, est défini ainsi :

$$(\nu + d)(t_i) = \begin{cases} \nu(t_i) + d & \text{si } t_i \in T_{/M} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour finir, deux relations sont définies pour les TPN, une pour le temps qui s'écoule et une autre pour l'activation des transitions :
- Écoulement du temps d : $(\nu, M) \xrightarrow{d} (\nu + d, M)$ ssi $\forall t_i \in T_{/M} \cdot \nu(t_i) + d \leqslant \beta(t_i)$
- Activation de la transition t_i : $(\nu, M) \xrightarrow{t_i} (\nu', N)$ ssi

$$M \xrightarrow{t_i} N \text{ et } \nu(t_i) \geqslant \alpha(t_i) \text{ et } \forall t_j \in T \cdot \nu'(t_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_j \notin T_{/N} \text{ ou } t_i = t_j \text{ ou} \\ & t_j \notin T_{/(M - pre(t_i))} \\ \nu(t_j) & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous commentons ces relations. Tout d'abord concernant la relation liée à l'écoulement de temps, nous observons qu'il n'est pas possible de laisser le temps s'écouler de telle manière qu'une horloge d'une transition t_i (activable pour le marquage courant M) dépasse la borne supérieure de son intervalle temps. Dans un tel cas, l'activation de la transition est obligatoire avant de pouvoir laisser de nouveau le temps s'écouler. Cela est capturé par la condition $\forall t_i \in T_{/M} \cdot \nu(t_i) + d \leqslant \beta(t_i)$. Maintenant, concernant les relations liées à l'activation des transitions, en observant la définition de $(\nu, M) \xrightarrow{t_i} (\nu', N)$, nous remarquons que l'activation d'une transition t_i ne peut pas avoir lieu avant que l'horloge de t_i ne dépasse la borne inférieure de son intervalle de temps, cela étant capturé par la condition $\nu(t_i) \geqslant \alpha(t_i)$. De plus, après l'activation de la transition t_i, toutes les horloges sont mises à jour ainsi :
- L'horloge de la transition t_j est remise à zéro si t_j n'est pas activable pour le nouveau marquage N. Ceci est capturé par le cas : $t_j \notin T_{/N}$
- L'horloge de la transition t_j est remise à zéro si t_j est la transition qui a été activée. Ceci est capturé par le cas : $t_i = t_j$

- L'horloge de la transition t_j est remise à zéro si t_j n'est pas restée activable de manière "continue". Autrement dit, si t_j n'est plus activable lors de la consommation des jetons. Ceci est capturé par le cas : $t_j \notin T_{/(M-pre(t_i))}$
- Dans les autres cas, l'horloge de la transition t_j n'est pas modifiée

Nous terminons cette partie en introduisant une nouvelle notation, qui nous permettra de capturer l'accessibilité dans les TPN :

$$(\nu, M) \rightsquigarrow (\nu', N) \text{ ssi } (\nu, M) \xrightarrow{a_1} (\nu_1, M_1) \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} (\nu_{n-1}, M_{n-1}) \xrightarrow{a_n} (\nu', N)$$

où les a_i sont des quantités de temps ou des transitions ($a_i \in \mathbb{R}^+ \cup T$). Nous soulignons que cette relation étant réflexive (cas où $n = 0$) : nous avons $(\nu, M) \rightsquigarrow (\nu, M)$.

Exemple de réseau de Petri temporisé

Avant de montrer l'expressivité de notre logique sur un réseau de Petri temporisé, nous donnons un exemple de TPN.

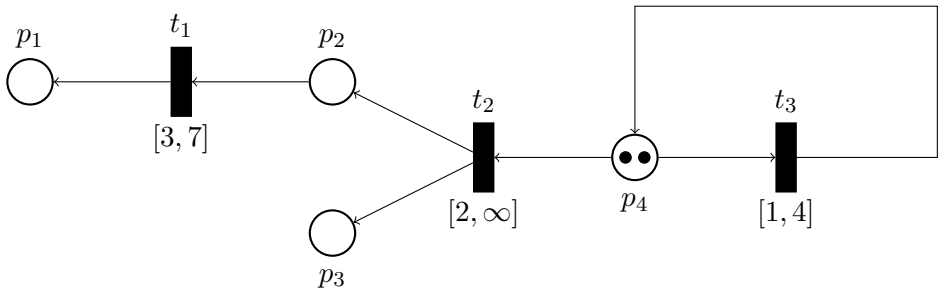


FIGURE 13 – Exemple de réseau de Petri temporisé (Time Petri net)

Considérons le TPN de la Figure 13. Nous pouvons remarquer que ce réseau de Petri temporisé contient quatre places ($P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$) et trois transitions ($T = \{t_1, t_2, t_3\}$). Les fonction *pre* et *post* sont représentées respectivement par les arcs entrant et les arcs sortant des transitions. Par exemple, $pre(t_2) = \{\!\{p_4\}\!\}$ et $post(t_2) = \{\!\{p_2, p_3\}\!\}$. De plus, un intervalle de temps est associé à chaque transition. Par exemple, concernant la transition t_3, nous avons $\alpha(t_3) = 1$ et $\beta(t_3) = 4$, signifiant que si t_3 devient activable au temps θ et reste activable de manière continue, alors cette transition peut être activée au temps $\theta + 1$ et doit être activée au plus tard au temps $\theta + 4$. Nous pouvons aussi remarquer que $\alpha(t_2) = 2$ et $\beta(t_2) = \infty$, signifiant que la transition t_2 peut être activée au temps $\theta + 2$ et qu'il n'y a pas de contrainte de temps au plus tard avant lequel la transition doit être activée.
Nous considérons que le marquage initial est $\{\!\{p_4, p_4\}\!\}$, représenté par deux jetons à la place p_4 sur la Figure 13. De plus, toutes les horloges implicites sont initialisées à 0, donnant alors $\nu(t_1) = \nu(t_2) = \nu(t_3) = 0$. Nous utilisons la notation suivante pour représenter les valeurs des horloges : $\langle 0, 0, 0\rangle$. Comme $0 \not\geqslant 2$ et $0 \not\geqslant 1$, il n'est pas possible d'activer ni la transition t_2, ni la transition t_3, malgré qu'il y ait suffisamment de jeton dans le TPN. Par contre, il est possible le laisser le temps s'écouler. Supposons que l'on laisse s'écouler une quantité de temps $d = 1.5$, alors, en considérant toujours le marquage $\{\!\{p_4, p_4\}\!\}$, la nouvelle valeur des horloges des transitions sera $\langle 0, 0, 0\rangle + 1.5 = \langle 0, 1.5, 1.5\rangle$. Nous remarquons alors que l'horloge de la transition t_1 est restée à zéro parce que cette transition n'est pas activable pour le marquage $\{\!\{p_4, p_4\}\!\}$. Finalement, nous pouvons représenter cet écoulement de temps de la manière suivante :

$(\langle 0,0,0\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\}) \xrightarrow{1.5} (\langle 0,1.5,1.5\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\})$.
Nous notons que maintenant l'horloge de la transition t_3 nous permet d'activer la transition, puisque $\nu(t_3) \geqslant \alpha(t_3)$ (plus précisément $1.5 \geqslant 1$), mais qu'il n'est toujours pas possible d'activer la transition t_2. Supposons qu'une quantité de temps $d = 2$ s'écoule de nouveau, nous avons alors $(\langle 0,1.5,1.5\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\}) \xrightarrow{2} (\langle 0,3.5,3.5\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\})$. Nous notons qu'il est encore possible de laisser du temps s'écouler, mais à condition que $\nu(t_3) + d \leqslant \beta(t_3)$. Étant à l'état $(\langle 0,3.5,3.5\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\})$, les transitions t_2 et t_3 peuvent être activées. En activant la transition t_2, nous obtenons $(\langle 0,3.5,3.5\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\}) \xrightarrow{t_2} (\langle 0,0,3.5\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\})$. Nous pouvons observer que l'horloge de t_2 a été réinitialisée à zéro puisque la transition a été activée et que l'horloge de t_3 n'a pas été modifiée puisque t_3 est restée activable de manière continue. Comme la transition t_1 devient activable pour le nouveau marquage $\{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\}$, alors dorénavant son horloge ne restera plus à zéro lorsque le temps s'écoulera. Par exemple, nous avons $(\langle 0,0,3.5\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\}) \xrightarrow{0.2} (\langle 0.2,0.2,3.7\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\})$. Pour finir cette illustration, l'activation de la transition t_3 nous permet d'obtenir $(\langle 0.2,0.2,3.7\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\}) \xrightarrow{t_3} (\langle 0.2,0,0\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\})$. Nous remarquons que l'horloge de t_2 a été réinitialisée à 0 puisque la transition n'est pas restée activable de manière continue : t_2 n'était plus activable pour le marquage $\{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\} - pre(t_3) = \{\!\{p_2,p_3\}\!\}$.

Nous conclurons cette partie en illustrant la relation que nous avons introduite. Des transitions successives que nous avons observé, nous obtenons :

$$(\langle 0,0,0\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\}) \rightsquigarrow (\langle 0.2,0,0\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\})$$

Expressivité de la logique LSM

Nous illustrons à présent l'expressivité de LSM sur le TPN de la Figure 13. Pour cela, nous nous focaliserons en grande partie sur les modalités de LSM. Le Chapitre 2 a été consacré à la présentation de l'expressivité des connecteurs multiplicatifs $*$ et $-\!\!*$ sur des réseaux de Petri.

Dans un premier temps, nous allons construire un modèle à partir du TPN de la Figure 13. Soit E un ensemble, nous notons $card(E)$ la *cardinalité* de E, c'est à dire le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Nous considérons dans la suite de cette partie, Prop $= P$.

Lemme 5.2.3. Soit $\mathcal{T} = (P, T, pre, post, \alpha, \beta)$ un TPN. Soit $\mathcal{M} = ((\mathbb{R}^+)^{card(T)}, \mathcal{R}, \rightsquigarrow, V)$ tel que :
- $\mathcal{R} = (\mathfrak{M}(P), +, \{\!\{\}\!\})$
- $V(p_i) = \{(\nu, \{\!\{p_i\}\!\}) \mid \nu \in (\mathbb{R}^+)^{card(T)} \text{ et } p_i \in P\}$

$\mathcal{M}$ est un modèle.

Preuve. La preuve est évidente. Il suffit de vérifier que $\mathcal{M}$ satisfait la Définition 5.1.2. □

Le Lemme 5.2.3 nous indique comment obtenir un modèle à partir d'un TPN. Considérons alors le modèle $\mathcal{M} = ((\mathbb{R}^+)^{card(T)}, \mathcal{R}, \rightsquigarrow, V)$ obtenu à partir du TPN de la Figure 13. Dans ce modèle, l'ensemble des mondes (noté habituellement W) est l'ensemble des valeurs des horloges et l'ensemble des ressources (noté habituellement R) est l'ensemble des marquages du TPN. Pour finir, nous choisissons Prop $= P$ et $\Sigma_r = R$. Ainsi, nous avons par exemple $\nu, M \vDash_{\mathcal{M}} p_2$ si et seulement si $M = \{\!\{p_2\}\!\}$. Par ailleurs, nous pouvons observer que $\nu, M \vDash_{\mathcal{M}} p_{i_1} * ... * p_{i_n}$ si est seulement si $M = \{\!\{p_{i_1}, ..., p_{i_n}\}\!\}$.

Nous nous focalisons à présent sur les modalités de LSM qui sont le cœur de notre logique, les autres connecteurs ayant été illustrés dans les chapitres précédents. Nous rappelons que, comme

nous l'avons vu sur notre exemple, nous avons $(\langle 0,0,0\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\}) \rightsquigarrow (\langle 0.2,0,0\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\})$. En conséquence :

$$\langle 0,0,0\rangle, \{\!\{p_4,p_4\}\!\} \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond(p_2 * p_3 * p_4)$$

Ceci exprime qu'à partir du marquage initial $\{\!\{p_4,p_4\}\!\}$ le TPN peut accéder à un état (un couple horloge/marquage) dont le marquage est $\{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\}$. Nous remarquons alors que la modalité $\Diamond$ permet de capturer l'accessibilité entre deux marquages en tenant compte des aspects temporels des TPN.
Concernant la modalité $\Diamond_\bullet$, comme $(\langle 0,0,0\rangle, \{\!\{\}\!\} + \{\!\{p_4,p_4\}\!\}) \rightsquigarrow (\langle 0.2,0,0\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\})$ et comme $\langle 0.2,0,0\rangle, \{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\} \vDash_{\mathcal{M}} p_2 * p_3 * p_4$, nous avons alors :

$$\langle 0,0,0\rangle, \{\!\{\}\!\} \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond_\bullet(p_2 * p_3 * p_4)$$

Cette fois, nous exprimons qu'à partir du marquage initial vide, il est possible au TPN d'accéder au marquage $\{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\}$ à condition que nous lui fournissions des ressources (jetons) supplémentaires. Nous pouvons observer que la modalité $\Diamond_\bullet$ permet d'exprimer l'accessibilité entre deux marquages, sous condition de fournir au système suffisamment de ressources. Mais nous remarquons que la modalité $\Diamond_\bullet$ n'explicite pas quelles ressources supplémentaires le réseau à besoin pour y parvenir.
Pour pouvoir expliciter les ressources supplémentaires devant être fournies au réseau, la dernière modalité $\Diamond_r$ devient alors utile :

$$\langle 0,0,0\rangle, \{\!\{\}\!\} \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond_{\{\!\{p_4,p_4\}\!\}}(p_2 * p_3 * p_4)$$

Ainsi, nous exprimons finalement qu'à partir du marquage vide, il est possible au réseau de Petri temporisé d'accéder au marquage $\{\!\{p_2,p_3,p_4\}\!\}$ à condition de lui fournir deux jetons supplémentaires à la place p_4.

5.2.2 De nouvelles modalités multiplicatives

Dans cette sous-section, nous insistons sur l'intérêt et les nuances apportées par les modalités de LSM. En particulier, comme nous allons le voir, ces modalités permettent de lever une ambiguïté que nous rencontrons dans la langue naturelle concernant l'expression "être capable de...".

Considérons trois agents A_1, A_2 et A_3. Supposons que ces agents souhaitent atteindre un objectif G ne pouvant être atteint uniquement en exécutant l'action *act*. Pour pouvoir effectuer cette action, chaque agent a besoin d'une certaine quantité de ressources. Nous ne considérons qu'une seule ressource, que nous noterons R. Nous notons R^n la ressource R possédée en n exemplaires par un agent. Concernant les compétences des agents :

- A_1 n'a pas besoin de ressource pour exécuter l'action *act*
- A_2 a besoin d'au moins deux occurrences de la ressource R pour exécuter l'action *act*
- A_3 n'a pas appris à (ne peut pas) exécuter l'action *act*

Nous souhaitons, dans cet exemple, répondre à la question : "quel agent est capable d'atteindre l'objectif G ?"

Nous proposons alors, pour chaque agent A_i, de considérer le modèle $\mathcal{M}_i = (W, \mathcal{R}, \mathbf{R}, V)$, tel que :

- $W = \{W_0, W_1\}$, où W_0 est l'état initial et W_1 est l'état dans lequel A_i a atteint l'objectif
- $\mathcal{R} = (\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\}, +, R^0)$, où $R^m + R^n = R^{m+n}$
- La relation $\mathbf{R}$ est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  - $(W_0, R^n)\mathbf{R}(W_0, R^n)$ et $(W_1, R^n)\mathbf{R}(W_1, R^n)$

- $(W_0, R^n)\mathbf{R}(W_1, R^n)$ si $i = 1$
- $(W_0, R^{n+2})\mathbf{R}(W_1, R^n)$ si $i = 2$

- $V(G) = \{(W_1, R^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Nous remarquons alors que dans le modèle $\mathcal{M}_1$, nous avons $(W_0, R^0)\mathbf{R}(W_1, R^0)$, capturant alors que l'agent A_1 peut atteindre l'objectif G sans avoir besoin de ressource. Nous avons aussi, dans le modèle $\mathcal{M}_2$, $(W_0, R^3)\mathbf{R}(W_1, R^1)$, capturant alors que l'agent A_1 peut atteindre l'objectif G en consommant deux ressources. Finalement, dans le modèle $\mathcal{M}_3$, nous remarquons qu'il n'est pas possible à l'agent d'atteindre l'objectif.

Nous considérons $\Sigma_r = \{R^n \mid n \geq 0\}$.

Intéressons-nous maintenant à notre question : "quel agent est capable d'atteindre l'objectif G ?". Dans un premier, il est possible d'exprimer que sans ressource, seul l'agent A_1 est capable d'atteindre l'objectif :

- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_1} \Diamond G$
- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_2} \neg\Diamond G$
- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_3} \neg\Diamond G$

Mais nous pouvons remarquer que notre question est ambiguë. En effet, A_2 est capable d'atteindre l'objectif G, au sens où il a l'aptitude d'exécuter l'action act, contrairement à l'agent A_3. Mais pour y parvenir, A_2 a besoin de ressources supplémentaires. Dans ce cas, il devient alors possible d'exprimer qu'un agent est capable (a les compétences) d'atteindre l'objectif, mais a potentiellement besoin que nous lui fournissions les ressources nécessaires :

- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_1} \Diamond_\bullet G$
- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_2} \Diamond_\bullet G$
- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_3} \neg\Diamond_\bullet G$

Dans ce cas, nous remarquons que seul A_3 n'est pas capable d'atteindre l'objectif. Finalement, nous pouvons encore être plus précis en explicitant les ressources dont l'agent a besoin pour atteindre l'objectif :

- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_1} \Diamond_{R^0} G$
- $W_0, R^0 \vDash_{\mathcal{M}_2} \Diamond_{R^2} G$

En conclusion de cette section, nous avons montré que notre logique LSM était un noyau logique capable d'exprimer en toute simplicité des propriétés de ressources dynamiques sur des systèmes tels que les réseaux de Petri temporisés (TPN). Nous avons ensuite illustré l'intérêt et l'expressivité des modalités de LSM, en particulier sur les TPN, et aussi montré que ces modalités permettaient de lever une ambiguïté que nous rencontrons dans le langage naturel concernant l'expression "être capable de...". Dans la section suivante, nous nous intéressons à la recherche de preuve dans la logique LSM.

5.3 Une méthode des tableaux pour LSM

Dans cette section, nous adaptons la méthode des tableaux proposée pour DMBI à notre logique.

5.3.1 Labels de mondes et de ressources et contraintes

La méthode des tableaux de LSM possède un ensemble de contraintes de labels associées à chaque branche, ayant pour but de capturer de l'information sémantique. Il existe deux types de labels, à savoir des labels de mondes et des labels de ressources, liés respectivement aux ensembles W et R. Par ailleurs, nous pourrons observer deux types de contraintes sur ces labels, à savoir

des contraintes de ressources, ayant pour rôle de capturer les liens entre les ressources et leur composition, et des contraintes d'accessibilité, capturant la relation **R**.

Définition 5.3.1 (Labels de mondes)**.** Un *label de mondes* est un élément appartenant à l'ensemble dénombrable infini $L_w = \{s_1, s_2, ...\}$.

Définition 5.3.2 (Labels de ressources)**.** Soit $\gamma_r = \{c_1, c_2, ...\}$ un ensemble dénombrable infini de constantes. Un *label de ressources* est un élément appartenant au langage généré par la grammaire suivante :

$$X ::= 1_r \mid r_i \mid c_i \mid X \circ X$$

où $r_i \in \Sigma_r \setminus \{e\}$, $c_i \in \gamma_r$, $1_r \notin \Sigma_r \cup \gamma_r$ et $\Sigma_r \cap \gamma_r = \emptyset$. Les termes seront considérés modulo l'associativité et la commutativité de $\circ$ et la neutralité de 1_r. Nous notons L_r l'ensemble de tous les labels de ressources.

Nous rappelons que nous notons xy le label de ressources $x \circ y$. Nous rappelons aussi que x est dit *sous-label de ressources* de y ssi il existe z tel que $x \circ z = y$. Nous notons $\mathcal{E}_r(x)$ l'ensemble des sous-labels de ressources de x.

Définition 5.3.3 (Contrainte)**.** Une *contrainte de ressources* est une expression de la forme $x \sim y$ où x et y sont des labels de ressources. Une *contrainte d'accessibilité* est une expression de la forme $(u, x) \rightsquigarrow (v, y)$ où u et v sont des labels de mondes et où x et y sont des labels de ressources.

Un *ensemble de contraintes* $\mathcal{C}$ est un ensemble contenant des contraintes de ressources et des contraintes d'accessibilité. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{C} = \{c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3, (s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_2, c_1c_3)\}$ est un ensemble de contraintes. Tout comme la méthode des tableaux de DMBI, nous définissons aussi le domaine et l'alphabet d'un ensemble de contraintes.

Définition 5.3.4 (Domaine)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Le *domaine* (de ressources) de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des labels et sous-labels de ressources apparaissant dans $\mathcal{C}$. Plus précisément :

$$\mathcal{D}_r(\mathcal{C}) = \left[\bigcup_{x \sim y \in \mathcal{C}} (\mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y))\right] \cup \left[\bigcup_{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \in \mathcal{C}} (\mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y))\right]$$

Définition 5.3.5 (Alphabet)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Nous appelons *alphabet* de mondes/ressources de $\mathcal{C}$ l'ensemble des constantes de mondes/ressources apparaissant dans $\mathcal{C}$. Plus précisément :

— $\mathcal{A}_w(\mathcal{C}) = \bigcup_{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \in \mathcal{C}} \{u, v\}$
— $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) = (\Sigma_r \cup \gamma_r) \cap \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$

Nous soulignons que, pour toute contrainte de $\mathcal{C}$, comme $1_r \notin \Sigma_r \cup \gamma_r$ alors $1_r \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$. Mais $1_r \in \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$, pour tout $\mathcal{C} \neq \emptyset$, puisque 1_r est sous-label de tout label de ressources ($1_r \in \mathcal{E}(x)$ pour tout $x \in L_r$).

Définition 5.3.6 (Clôture d'un ensemble de contraintes)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. La clôture de $\mathcal{C}$, noté $\overline{\mathcal{C}}$, est le plus petit ensemble clos par les règles de la Figure 14, tel que $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$.

Nous donnons un exemple d'application de ces règles de clôture de contraintes. Soit $\mathcal{C} = \{c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3, (s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_2, c_4)\}$, nous avons alors $(s_1, c_3) \rightsquigarrow (s_2, c_4) \in \overline{\mathcal{C}}$:

Règles produisant des contraintes de ressources :

$$\frac{}{1_r \sim 1_r}\ \langle 1_r\rangle \qquad \frac{x \sim y}{y \sim x}\ \langle s_r\rangle \qquad \frac{xy \sim xy}{x \sim x}\ \langle d_r\rangle \qquad \frac{x \sim y \qquad y \sim z}{x \sim z}\ \langle t_r\rangle$$

$$\frac{x \sim y \qquad yk \sim yk}{xk \sim yk}\ \langle c_r\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y)}{x \sim x}\ \langle k_{r_1}\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y)}{y \sim y}\ \langle k_{r_2}\rangle$$

Règles produisant des contraintes d'accessibilité :

$$\frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \qquad z \sim z}{(u,z) \rightsquigarrow (u,z)}\ \langle r_{a_1}\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \qquad z \sim z}{(v,z) \rightsquigarrow (v,z)}\ \langle r_{a_2}\rangle$$

$$\frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \qquad (v,y) \rightsquigarrow (w,z)}{(u,x) \rightsquigarrow (w,z)}\ \langle t_a\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \qquad x \sim x' \qquad y \sim y'}{(u,x') \rightsquigarrow (v,y')}\ \langle k_a\rangle$$

FIGURE 14 – Règles de clôture d'un ensemble de contraintes pour LSM

$$\frac{(s_1,c_1) \rightsquigarrow (s_2,c_4) \qquad \dfrac{c_1 \sim c_2 \qquad c_2 \sim c_3}{c_1 \sim c_3}\ \langle t_r\rangle \qquad \dfrac{(s_1,c_1) \rightsquigarrow (s_2,c_4)}{c_4 \sim c_4}\ \langle k_{r_2}\rangle}{(s_1,c_3) \rightsquigarrow (s_2,c_4)}\ \langle k_a\rangle$$

Nous terminons par énoncer quelques propriétés sur les clôtures d'ensemble de contraintes.

Proposition 5.3.7. Les règles suivantes peuvent être dérivées des règles de clôture d'un ensemble de contraintes :

$$\frac{xk \sim y}{x \sim x}\ \langle p_l\rangle \qquad \frac{x \sim yk}{y \sim y}\ \langle p_r\rangle \qquad \frac{(u,xk) \rightsquigarrow (v,y)}{x \sim x}\ \langle q_l\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,yk)}{y \sim y}\ \langle q_r\rangle$$

$$\frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y)}{(u,1_r) \rightsquigarrow (u,1_r)}\ \langle 1_{a_l}\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y)}{(v,1_r) \rightsquigarrow (v,1_r)}\ \langle 1_{a_r}\rangle$$

Preuve. Nous donnons les arbres de dérivation suivants :

$$\frac{xk \sim y \qquad \dfrac{xk \sim y}{y \sim xk}\ \langle s_r\rangle}{\dfrac{xk \sim xk}{x \sim x}\ \langle d_r\rangle}\ \langle t_r\rangle \qquad \frac{x \sim yk}{\dfrac{yk \sim x}{y \sim y}\ \langle p_l\rangle}\ \langle s_r\rangle \qquad \frac{(u,xk) \rightsquigarrow (v,y)}{\dfrac{xk \sim xk}{x \sim x}\ \langle d_r\rangle}\ \langle k_{r_1}\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,yk)}{\dfrac{yk \sim yk}{y \sim y}\ \langle d_r\rangle}\ \langle k_{r_2}\rangle$$

$$\frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \qquad \dfrac{}{1_r \sim 1_r}\ \langle 1_r\rangle}{(u,1_r) \rightsquigarrow (u,1_r)}\ \langle r_{a_1}\rangle \qquad \frac{(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \qquad \dfrac{}{1_r \sim 1_r}\ \langle 1_r\rangle}{(v,1_r) \rightsquigarrow (v,1_r)}\ \langle r_{a_2}\rangle$$

□

Corollaire 5.3.8. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes, $u \in \mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}})$ ssi $(u,1_r) \rightsquigarrow (u,1_r) \in \overline{\mathcal{C}}$.

Preuve. Supposons que $u \in \mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}})$. Par la définition 5.3.5, $u \in \bigcup_{(v,x) \rightsquigarrow (w,y) \in \overline{\mathcal{C}}} \{v,w\}$. Donc, il existe $(v,x) \rightsquigarrow (w,y) \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $u = v$ ou $u = w$. Alors, par la Proposition 5.3.7, $(u,1_r) \rightsquigarrow (u,1_r) \in \overline{\mathcal{C}}$. Supposons maintenant que $(u,1_r) \rightsquigarrow (u,1_r) \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors, par définition, $u \in \mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}})$. En conclusion, nous avons $u \in \mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}})$ ssi $(u,1_r) \rightsquigarrow (u,1_r) \in \overline{\mathcal{C}}$. □

Corollaire 5.3.9. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes, $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ ssi $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$.

Preuve. Supposons que $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Par la Définition 5.3.4, nous avons $x \in \bigcup_{y \sim z \in \overline{\mathcal{C}}} (\mathcal{E}(y) \cup \mathcal{E}(z))$ ou $x \in \bigcup_{(u,y) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}} (\mathcal{E}(y) \cup \mathcal{E}(z))$. Il y a alors deux cas :

- Il existe $y \sim z \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $x \in \mathcal{E}(y) \cup \mathcal{E}(z)$. Donc, il existe un label de ressources k tel que $xk \sim z \in \overline{\mathcal{C}}$ ou $y \sim xk \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors, par la Proposition 5.3.7, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$.
- Il existe $(u, y) \rightsquigarrow (v, z) \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $x \in \mathcal{E}(y) \cup \mathcal{E}(z)$. Donc, il existe un label de ressources k tel que $(u, xk) \rightsquigarrow (v, z) \in \overline{\mathcal{C}}$ ou $(u, y) \rightsquigarrow (v, xk) \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors, par la Proposition 5.3.7, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$.

Maintenant, supposons que $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. alors, par définition, $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$.
En conclusion, nous avons $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ ssi $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. □

Proposition 5.3.10. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Nous avons $\mathcal{A}_w(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$.

Preuve. Comme $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$, alors $\mathcal{A}_w(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Pour la réciproque, il suffit d'observer que les règles de la Figure 14 ne produisent pas de nouvelles constantes de mondes ou de ressources. D'où $\mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \mathcal{A}_w(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$. En conclusion $\mathcal{A}_w(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_w(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$. □

5.3.2 Méthode des tableaux - Correction et Complétude

Dans cette section, nous présentons la méthode des tableaux pour LSM et donnons un exemple de preuve.

Dans un premier temps, nous remarquons que les modalités $\Diamond_r$ et $\Box_r$ introduisent la même difficulté que nous avions rencontré avec les modalités à la Hennessy-Milner dans la logique DMBI, à savoir que si la ressource r est la ressource unitaire (e), celle-ci devra être convertie en le label de ressources unitaire 1_r pour pouvoir être introduit dans les contraintes. Pour cela, nous introduisons une fonction $\|.\|$.

Définition 5.3.11. La fonction $\|.\| : \Sigma_r \to L_r$ est définie par : $\|r\| = \begin{cases} 1_r & \text{si } r = e \\ r & \text{sinon} \end{cases}$

Nous donnons à présent la définition de *formule signée*, de *CSS* (branche) et de *preuve*, et nous présentons aussi les règles de la méthode des tableaux de LSM, ainsi que les conditions de clôture des CSS.

Définition 5.3.12 (Formule signée / CSS)**.** Une *formule signée* est un 4-uplet $(S, \phi, u, x) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \times \mathcal{L}_{\mathsf{LSM}} \times L_w \times L_r$ noté $\mathbb{S}\phi : (u, x)$. Un *CSS* (constrained set of statements) est une paire $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, où $\mathcal{F}$ est un ensemble de formules signées et $\mathcal{C}$ est un ensemble de contraintes, vérifiant la propriété (P_{css}) suivante :

$$\text{si } \mathbb{S}\phi : (u, x) \in \mathcal{F} \text{ alors } (u, 1_r) \rightsquigarrow (u, 1_r) \in \overline{\mathcal{C}} \text{ et } x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$$

Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est *fini* ssi $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ sont finis.
La relation $\preccurlyeq$ est définie par : $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$ ssi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.
La relation $\preccurlyeq_f$ est définie par : $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ ssi $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle$ est fini.

La Figure 15 présente les règle de la méthode des tableaux de LSM. Nous soulignons que "s_i est une nouvelle constante" signifie $s_i \in L_w \setminus \mathcal{A}_w(\mathcal{C})$ et "c_i et c_j sont des nouvelles constantes" signifie $c_i \neq c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$. Nous rappelons que nous notons $\oplus$ la concaténation de listes.

Définition 5.3.13 (LSM-tableau)**.** Soit $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$ un CSS fini. Un *LSM-tableau* pour ce CSS est une liste de CSS, construite inductivement par les règles suivantes :

$$\frac{\mathbb{T}\mathrm{I} : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \emptyset, \{x \sim 1_r\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\mathrm{I}\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\neg\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\neg\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\neg\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\neg\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \wedge \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (u,x), \mathbb{T}\psi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\wedge\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \wedge \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (u,x)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{F}\psi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\wedge\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \vee \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (u,x)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{T}\psi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\vee\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \vee \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (u,x), \mathbb{F}\psi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\vee\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \to \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (u,x)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{T}\psi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\to\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \to \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (u,x), \mathbb{F}\psi : (u,x)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\to\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi * \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (u,c_i), \mathbb{T}\psi : (u,c_j)\}, \{x \sim c_i c_j\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}*\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi * \psi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } x \sim yz \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (u,y)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{F}\psi : (u,z)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}*\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } xy \sim xy \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (u,y)\}, \emptyset\rangle \ \mid\ \langle \{\mathbb{T}\psi : (u,xy)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\mathrel{-\!\!*}\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (u,c_i), \mathbb{F}\psi : (u,xc_i)\}, \{xc_i \sim xc_i\}\rangle}\ \langle \mathbb{F}\mathrel{-\!\!*}\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Diamond\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (s_i,c_i)\}, \{(u,x) \rightsquigarrow (s_i,c_i)\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\Diamond\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Diamond\phi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } (u,x) \rightsquigarrow (v,y) \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (v,y)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\Diamond\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Box\phi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } (u,x) \rightsquigarrow (v,y) \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (v,y)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\Box\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Box\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (s_i,c_i)\}, \{(u,x) \rightsquigarrow (s_i,c_i)\}\rangle}\ \langle \mathbb{F}\Box\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Diamond_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (s_i,c_j)\}, \{(u,xc_i) \rightsquigarrow (s_i,c_j)\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\Diamond_\bullet\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Diamond_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } (u,xy) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (v,z)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\Diamond_\bullet\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Box_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } (u,xy) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (v,z)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\Box_\bullet\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Box_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (s_i,c_j)\}, \{(u,xc_i) \rightsquigarrow (s_i,c_j)\}\rangle}\ \langle \mathbb{F}\Box_\bullet\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Diamond_y\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (s_i,c_i)\}, \{(u,x \circ \|y\|) \rightsquigarrow (s_i,c_i)\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\Diamond_y\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\Diamond_y\phi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } (u,x \circ \|y\|) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (v,z)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\Diamond_y\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\Box_y\phi : (u,x) \in \mathcal{F} \text{ et } (u,x \circ \|y\|) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : (v,z)\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\Box_y\rangle$$

$$\frac{\mathbb{F}\Box_y\phi : (u,x) \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : (s_i,c_i)\}, \{(u,x \circ \|y\|) \rightsquigarrow (s_i,c_i)\}\rangle}\ \langle \mathbb{F}\Box_y\rangle$$

Note : s_i, c_i et c_j sont des nouvelles constantes et $\|r\| = \begin{cases} 1_r & \text{si } r = e \\ r & \text{sinon} \end{cases}$

FIGURE 15 – Règles d'expansions des tableaux pour LSM

1. La liste $[\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle]$ est un LSM-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$
2. Si la liste $\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle] \oplus \mathcal{T}_n$ est un LSM-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$ et
$$\frac{\text{cond}\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle}{\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \mid ... \mid \langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k \rangle}$$
est une instance d'une des règles de la Figure 15 pour laquelle $\text{cond}\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est vérifiée, alors la liste
$$\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_1, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1 \rangle; \ldots; \langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_k, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_k \rangle] \oplus \mathcal{T}_n$$
est un LSM-tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0 \rangle$.

Un LSM-tableau pour la formule ϕ est un LSM-tableau pour $\langle \{\mathbb{F}\phi : (s_1, c_1)\}, \{(s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_1, c_1)\} \rangle$.

Définition 5.3.14 (Conditions de clôture)**.** Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est *clos* s'il satisfait au moins une des conditions suivantes :

1. $\mathbb{T}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}\phi : (u, y) \in \mathcal{F}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : (u, x) \in \mathcal{F}$ et $x \sim 1_r \in \overline{\mathcal{C}}$
3. $\mathbb{F}\top : (u, x) \in \mathcal{F}$
4. $\mathbb{T}\bot : (u, x) \in \mathcal{F}$

Un CSS est dit *ouvert* s'il n'est pas clos. Un LSM-tableau est clos si tous ses CSS sont clos.

Définition 5.3.15 (Preuve)**.** Une *preuve* d'une formule ϕ est un LSM-tableau clos pour ϕ.

Nous terminerons la présentation de notre calcul par un théorème de correction et de complétude. Les techniques de preuve utilisées pour démontrer ces théorèmes sont des adaptations de celles utilisées pour DMBI.

Théorème 5.3.16 (Correction)**.** S'il existe une preuve d'une formule ϕ alors ϕ est valide.

Preuve. La preuve de correction repose sur des techniques similaires à celles utilisées pour la preuve de correction de DMBI (Théorème 4.5.6). Le point central de cette preuve est la notion de réalisation d'un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ signifiant qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ et deux réalisations $\lfloor . \rfloor_w$ et $\lfloor . \rfloor_r$ plongeant respectivement les labels de mondes et de ressources dans l'ensemble de mondes et de ressources de $\mathcal{M}$, tels que si $\mathbb{T}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor u \rfloor_w, \lfloor x \rfloor_r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ et si $\mathbb{F}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor u \rfloor_w, \lfloor x \rfloor_r \nvDash_{\mathcal{M}} \phi$. Par contre, contrairement à la logique DMBI, il convient de définir la fonction $\lfloor . \rfloor_r$ de telle sorte que si $x \in \Sigma_r \cap \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ alors $\lfloor x \rfloor_r = x$. Après avoir montré que les règles de la méthode des tableaux de LSM préservent la réalisabilité d'un CSS (possible uniquement si $\lfloor . \rfloor_r$ possède la propriété que nous venons de citer, dans le cas contraire il deviendrait impossible de démontrer les cas liés aux modalités $\Diamond_r$ et $\Box_r$) et que tout CSS clos n'est pas réalisable, il devient alors possible de conclure à la correction de la méthode des tableaux de LSM. □

Théorème 5.3.17 (Complétude)**.** Si une formule ϕ est valide alors il existe une preuve de ϕ.

Preuve. La démonstration de ce théorème repose sur une méthode d'extraction de contre-modèles que nous présenterons dans la sous-section suivante. Elle consiste à montrer que si une formule ϕ ne peut avoir de preuve, alors il est possible à partir de cette formule de construire un CSS permettant, par le Lemme 5.3.23 que nous démontrerons par la suite, de conclure que ϕ n'est pas valide. Tout comme la preuve de complétude de la méthode des tableaux de DMBI (Théorème 4.7.9), la construction de ce CSS se réalise grâce à l'utilisation d'une stratégie équitable et d'un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de LSM-tableau clos. □

Pour terminer cette sous-section, nous présentons un exemple de preuve pour la formule $\phi \equiv ((\Box_\bullet Q * P) \wedge \Diamond R) \rightarrow \Diamond(Q \wedge \Box_e R)$. Par la Définition 5.3.13, l'étape d'initialisation nous permet d'obtenir le LSM-tableau $[\langle\{\mathbb{F}\phi : (s_1, c_1)\}, \{(s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_1, c_1)\}\rangle]$ que nous représenterons de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} [\mathcal{F}] & [\mathcal{C}] \\ \mathbb{F}((\Box_\bullet Q * P) \wedge \Diamond R) \rightarrow \Diamond(Q \wedge \Box_e R) : (s_1, c_1) & (s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_1, c_1) \end{array}$$

La colonne de gauche représente l'ensemble des formules signées ($[\mathcal{F}]$) de l'unique CSS du LSM-tableau et la colonne de droite contient l'ensemble des contraintes ($[\mathcal{C}]$) du CSS de notre LSM-tableau. En appliquant des règles de la méthodes des tableaux, nous pouvons obtenir le LSM-tableau de la Figure 16. Nous décorons les formules signées par le symbole $\surd_i$ pour indiquer

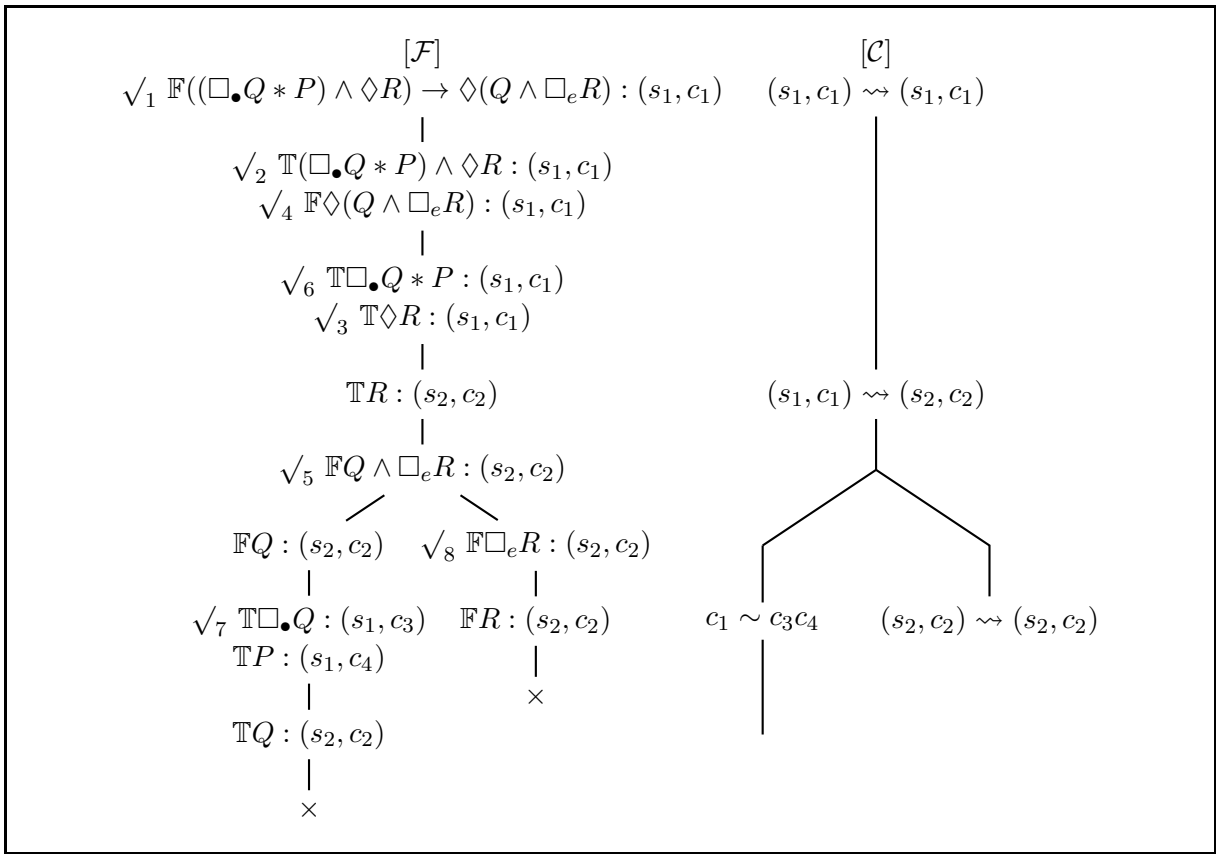


FIGURE 16 – Preuve de la formule $((\Box_\bullet Q * P) \wedge \Diamond R) \rightarrow \Diamond(Q \wedge \Box_e R)$

qu'une règle a été appliquée sur cette formule à l'étape i. Nous donnons quelques détails concernant les étapes 3, 7 et 8.
À l'étape 3, la règle $\langle \mathbb{T}\Diamond \rangle$ est appliquée sur la formule $\mathbb{T}\Diamond R : (s_1, c_1)$. Pour cela, nous avons choisi un nouveau label de mondes (s_2) et un nouveau label de ressources (c_2). Enfin, lors de l'application de la règle, la formule signée $\mathbb{T}R : (s_2, c_2)$ et la contrainte $(s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_2, c_2)$ ont été insérées dans le CSS.
Concernant l'étape 7, la règle $\langle \mathbb{T}\Box_\bullet \rangle$ est appliquée sur la formule signée $\mathbb{T}\Box_\bullet Q : (s_1, c_3)$. Pour pouvoir appliquer la règle, nous avons dû choisir v, y et z tels que $(s_1, c_3 y) \rightsquigarrow (v, z) \in \overline{\mathcal{C}}$. Or, nous pouvons remarquer que $(s_1, c_3 c_4) \rightsquigarrow (s_2, c_2) \in \overline{\mathcal{C}}$, en effet :

$$\dfrac{(s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_2, c_2) \qquad c_1 \sim c_3 c_4 \qquad \dfrac{(s_1, c_1) \rightsquigarrow (s_2, c_2)}{c_2 \sim c_2}\,\langle k_{r_2}\rangle}{(s_1, c_3 c_4) \rightsquigarrow (s_2, c_2)}\,\langle k_a\rangle$$

Ainsi, ayant choisi $v = s_2$, $y = c_4$ et $z = c_2$, il fut alors possible d'appliquer la règle, ajoutant ainsi la formule signée $\mathbb{T}Q : (s_2, c_2)$ dans le CSS.
Concernant l'étape 8, la règle $\langle \mathbb{F}\Box_y \rangle$ a été appliquée à la formule $\mathbb{F}\Box_e R : (s_2, c_2)$. Cette règle a introduit la formule signée $\mathbb{F}R : (s_2, c_2)$ et la contrainte $(s_2, c_2 \circ \|e\|) \rightsquigarrow (s_2, c_2)$, qui est équivalente à $(s_2, c_2) \rightsquigarrow (s_2, c_2)$ puisque $\|e\| = 1_r$ et parce que 1_r est l'élément neutre de $\circ$.
Finalement, nous pouvons observer que tous les CSS du LSM-tableau sont clos (noté $\times$). Donc le LSM-tableau est une preuve de la formule $((\Box_\bullet Q * P) \wedge \Diamond R) \to \Diamond(Q \wedge \Box_e R)$. En conclusion, par le Théorème 5.3.16, nous pouvons conclure que la formule est valide.

5.3.3 Une méthode d'extraction de contre-modèles

Dans cette sous-section, après avoir donné la définition de Hintikka CSS, nous présentons la méthode d'extraction de contre-modèles de LSM, qui possède une particularité concernant l'extraction de l'ensemble de ressources, liée aux modalités $\Diamond_r$ et $\Box_r$. Puis nous illustrons cette méthode sur un exemple.

Définition 5.3.18 (Hintikka CSS)**.** Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est un *Hintikka CSS* si et seulement si pour toutes formules $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{LSM}}$, tout label de mondes $u \in L_w$, tous labels de ressources $x, y \in L_r$ et tout symbole de ressources $r \in \Sigma_r$:

1. $\mathbb{T}\phi : (u, x) \notin \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\phi : (u, y) \notin \mathcal{F}$ ou $x \sim y \notin \overline{\mathcal{C}}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : (u, x) \notin \mathcal{F}$ ou $x \sim 1_r \notin \overline{\mathcal{C}}$
3. $\mathbb{F}\top : (u, x) \notin \mathcal{F}$
4. $\mathbb{T}\bot : (u, x) \notin \mathcal{F}$
5. Si $\mathbb{T}\mathrm{I} : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $x \sim 1_r \in \overline{\mathcal{C}}$
6. Si $\mathbb{T}\neg\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$
7. Si $\mathbb{F}\neg\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$
8. Si $\mathbb{T}\phi \wedge \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : (u, x) \in \mathcal{F}$
9. Si $\mathbb{F}\phi \wedge \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (u, x) \in \mathcal{F}$
10. Si $\mathbb{T}\phi \vee \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (u, x) \in \mathcal{F}$
11. Si $\mathbb{F}\phi \vee \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (u, x) \in \mathcal{F}$
12. Si $\mathbb{T}\phi \to \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (u, x) \in \mathcal{F}$
13. Si $\mathbb{F}\phi \to \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (u, x) \in \mathcal{F}$
14. Si $\mathbb{T}\phi * \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y, z \in L_r$, $x \sim yz \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (u, y) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : (u, z) \in \mathcal{F}$
15. Si $\mathbb{F}\phi * \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y, z \in L_r$, $x \sim yz \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (u, y) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : (u, z) \in \mathcal{F}$
16. Si $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (u, y) \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : (u, xy) \in \mathcal{F}$
17. Si $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathbb{T}\phi : (u, y) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : (u, xy) \in \mathcal{F}$
18. Si $\mathbb{T}\Diamond\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_w$, $\exists y \in L_r$, $(u, x) \rightsquigarrow (v, y) \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (v, y) \in \mathcal{F}$
19. Si $\mathbb{F}\Diamond\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_w$, $\forall y \in L_r$, $(u, x) \rightsquigarrow (v, y) \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (v, y) \in \mathcal{F}$
20. Si $\mathbb{T}\Box\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_w$, $\forall y \in L_r$, $(u, x) \rightsquigarrow (v, y) \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{T}\phi : (v, y) \in \mathcal{F}$
21. Si $\mathbb{F}\Box\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_w$, $\exists y \in L_r$, $(u, x) \rightsquigarrow (v, y) \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{F}\phi : (v, y) \in \mathcal{F}$

22. Si $\mathbb{T}\Diamond_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_w$, $\exists y,z \in L_r$, $(u,xy) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$
23. Si $\mathbb{F}\Diamond_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_w$, $\forall y,z \in L_r$, $(u,xy) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$
24. Si $\mathbb{T}\Box_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_w$, $\forall y,z \in L_r$, $(u,xy) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{T}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$
25. Si $\mathbb{F}\Box_\bullet\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_w$, $\exists y,z \in L_r$, $(u,xy) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{F}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$
26. Si $\mathbb{T}\Diamond_r\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_w$, $\exists z \in L_r$, $(u,x \circ \|r\|) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$
27. Si $\mathbb{F}\Diamond_r\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_w$, $\forall z \in L_r$, $(u,x \circ \|r\|) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$
28. Si $\mathbb{T}\Box_r\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\forall v \in L_w$, $\forall z \in L_r$, $(u,x \circ \|r\|) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{T}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$
29. Si $\mathbb{F}\Box_r\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $\exists v \in L_w$, $\exists z \in L_r$, $(u,x \circ \|r\|) \rightsquigarrow (v,z) \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{F}\phi : (v,z) \in \mathcal{F}$

Nous rappelons les notations concernant les classes d'équivalence. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes et soit $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Nous notons $[x]$ l'ensemble $[x] = \{y \in L_r \mid x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. En remarquant que $\sim$ est réflexif (par le Corollaire 5.3.9), symétrique (par la règle $\langle s_r \rangle$) et transitif (par la règle $\langle t_r \rangle$), alors $\sim$ est une relation d'équivalence et donc $[x]$ est bien une classe d'équivalence. Pour finir, nous notons $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim = \{[x] \mid x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})\}$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalences de $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$.

À présent, nous donnons la définition de la fonction Ω permettant d'extraire un contre-modèle à partir d'un Hintikka CSS.

Définition 5.3.19 (Fonction Ω)**.** Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS. La fonction Ω associe à $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un 4-uplet $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle) = (W, \mathcal{R}, \mathbf{R}, V)$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$, tel que :

- $W = \mathcal{A}_w(\mathcal{C})$
- $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim$
- $e = [1_r]$
- $[x] \bullet [y] = \begin{cases} \uparrow & \text{si } xy \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}}) \\ [x \circ y] & \text{sinon} \end{cases}$
- $(u,[x])\mathbf{R}(v,[y])$ ssi $(u,x) \rightsquigarrow (v,y) \in \overline{\mathcal{C}}$
- $(u,[x]) \in V(p)$ ssi $\exists y \in L_r$ tel que $y \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}p : (u,y) \in \mathcal{F}$

Concernant l'interprétation des symboles de ressources : pour tout symbole de ressource $r \in \Sigma_r$ tel que $\|r\| \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, nous considérons que $[\![r]\!]_{\Sigma_r} = [\|r\|]$. Par ailleurs, pour tout $r \in \Sigma_r$ tel que $\|r\| \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, nous considérons que $[\![r]\!]_{\Sigma_r}$ n'est pas défini. Nous remarquons qu'une telle considération est raisonnable en particulier dans le cas où $e \in \Sigma_r$. En effet, comme $\|e\| = 1_r$ et comme $1_r \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ par la règle $\langle 1_r \rangle$, alors nous avons $[\![e]\!]_{\Sigma_r} = [\|e\|] = [1_r] = e$.

Proposition 5.3.20. Les définitions de la composition $\bullet$, de la relation $\mathbf{R}$ et de la valuation V ne dépendent pas du choix du représentant de la classe d'équivalence.

Preuve. La preuve est similaire à celle de la Proposition 4.6.3. □

Lemme 5.3.21. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS. $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle)$ est un modèle.

Preuve. La preuve de ce lemme reprend les arguments utilisées dans la preuve du Lemme 4.6.5. □

Lemme 5.3.22. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS et soit $\mathcal{M} = \Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle) = (W, \mathcal{R}, \mathbf{R}, V)$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$. Pour toute formule $\phi \in \mathcal{L}_{\mathsf{LSM}}$, tout $u \in \mathcal{A}_w(\mathcal{C})$ et tout $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, nous avons :

1. Si $\mathbb{F}\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $u,[x] \nvDash_{\mathcal{M}} \phi$
2. Si $\mathbb{T}\phi : (u,x) \in \mathcal{F}$ alors $u,[x] \vDash_{\mathcal{M}} \phi$

Preuve. Les propriétés (1) et (2) sont prouvées par induction mutuelle sur la structure de ϕ. Nous ne donnons que les cas de la modalité $\Diamond_r$.

- Cas inductifs : nous supposons que les propriétés (1) et (2) sont vérifiées pour les formules ϕ et ψ (HI)
  - Cas $\mathbb{F}\Diamond_r\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$:
    Soit $w \in W$ et $s \in R$ tels que $[x] \bullet r \downarrow$ et $(u, [x] \bullet r)\mathbf{R}(w, s)$. Nous rappelons que par les abus de notation que nous avons fait, nous supposons en réalité que $[x] \bullet [\![r]\!]_{\Sigma_r} \downarrow$ et $(u, [x] \bullet [\![r]\!]_{\Sigma_r})\mathbf{R}(w, s)$. Nous remarquons que $r \in \Sigma_r$. Comme $[x] \bullet [\![r]\!]_{\Sigma_r} \downarrow$ alors $[\![r]\!]_{\Sigma_r}$ est défini et donc $[\![r]\!]_{\Sigma_r} = [\|r\|]$. Alors, par définition de Ω, il existe un label de ressource y tel que $y \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $s = [y]$ et $(u, x \circ \|r\|) \rightsquigarrow (w, y) \in \overline{\mathcal{C}}$. Donc, par la condition (27) de la Définition 5.3.18, $\mathbb{F}\phi : (w, y) \in \mathcal{F}$. Donc, par (HI), $w, s \nVdash_{\mathcal{M}} \phi$. Par conséquent $u, [x] \nVdash_{\mathcal{M}} \Diamond_r\phi$.
  - Cas $\mathbb{T}\Diamond_r\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$:
    Par la condition (26) de la Définition 5.3.18, il existe un label de monde v et un label de ressource z tels que $(u, x \circ \|r\|) \rightsquigarrow (v, z) \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : (v, z) \in \mathcal{F}$. Remarquant que $\|r\| \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ alors $[\![r]\!]_{\Sigma_r} = [\|r\|]$. Donc, par (HI) et par définition de Ω, $[x] \bullet [\![r]\!]_{\Sigma_r} \downarrow$, $(u, [x] \bullet [\![r]\!]_{\Sigma_r})\mathbf{R}(v, [z])$ et $v, [z] \vDash_{\mathcal{M}} \phi$. Par conséquent $u, [x] \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond_r\phi$.

□

Lemme 5.3.23. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS tel que $\mathbb{F}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$. La formule ϕ n'est pas valide et $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle)$ est un contre-modèle de ϕ.

Preuve. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS tel que $\mathbb{F}\phi : (u, x) \in \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{M} = \Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle)$. Par le Lemme 5.3.21, $\mathcal{M}$ est un modèle. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est un CSS, alors par la propriété (P_{css}) et par la Proposition 5.3.10, $u \in \mathcal{A}_w(\mathcal{C})$ et $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Donc, par le Lemme 5.3.22, nous avons $u, [x] \nVdash_{\mathcal{M}} \phi$. En conclusion $\mathcal{M}$ est un contre-modèle de la formule ϕ et alors ϕ n'est pas valide. □

À présent, nous donnons un exemple d'extraction de contre-modèles. Considérons la formule $\Diamond_r(P * Q) \to (\Diamond P * \Diamond Q)$. En appliquant des règles de la méthodes des tableaux, il est possible d'obtenir le LSM-tableau de la Figure 17.
Ce LSM-tableau contient un Hintikka CSS noté $\mathcal{B}$. Par le Lemme 5.3.23, $\Diamond_r(P * Q) \to (\Diamond P * \Diamond Q)$ n'est pas valide et $\Omega(\mathcal{B})$ est un contre-modèle de la formule. Nous extrayons alors de contre-modèle, tel qu'indiqué par la Définition 5.3.19. Nous obtenons ainsi $\mathcal{M} = \Omega(\mathcal{B}) = (W, \mathcal{R}, \mathbf{R}, V)$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$, tel que :

- $W = \mathcal{A}_w(\mathcal{C}) = \{s_1, s_2\}$
- $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\sim = \{e, [c_1], [c_2], [c_3], [c_4], r, [c_1 r]\}$, où $e = [1_r]$, $[c_2] = [c_3 c_4]$ et $[\![r]\!]_{\Sigma_r} = [\|r\|] = [r]$. Nous rappelons que par abus de notation, nous notons r au lieu de $[\![r]\!]_{\Sigma_r}$.
- La composition de ressources :

$\bullet$	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$	r	$[c_1 r]$
e	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$	r	$[c_1 r]$
$[c_1]$	$[c_1]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$[c_1 r]$	$\uparrow$
$[c_2]$	$[c_2]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_3]$	$[c_3]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$[c_2]$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_4]$	$[c_4]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$[c_2]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
r	r	$[c_1 r]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_1 r]$	$[c_1 r]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

- Concernant la relation d'accessibilité, nous avons $(s_1, [c_1 r])\mathbf{R}(s_2, [c_2])$ et $(w_1, r_1)\mathbf{R}(w_1, r_1)$ pour tout $w_1 \in W$ et $r_1 \in R$

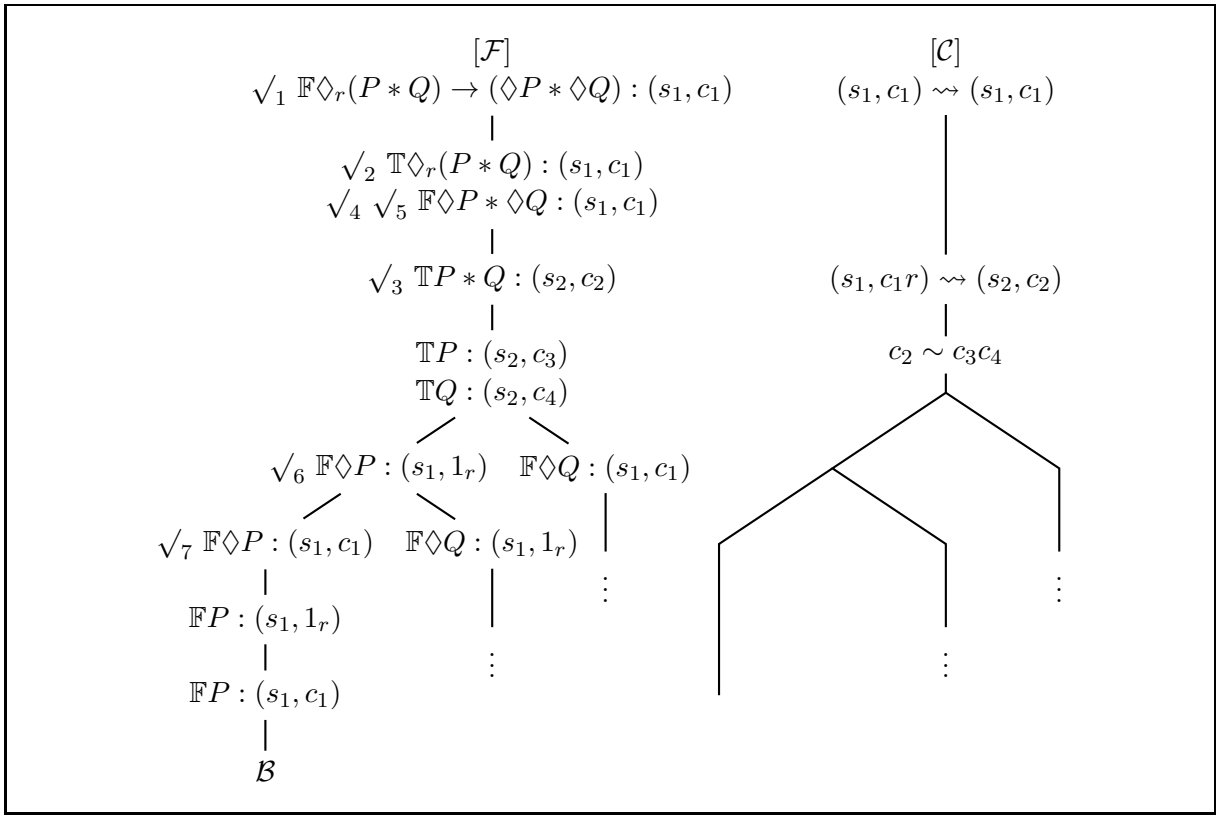


FIGURE 17 – LSM-tableau pour la formule $\Diamond_r(P*Q)\to(\Diamond P*\Diamond Q)$

- Concernant la valuation, nous avons $V(P)=\{(s_2,[c_3])\}$ et $V(Q)=\{(s_2,[c_4])\}$

Pour terminer, nous pouvons vérifier que nous avons bien obtenu un contre-modèle de la formule $\Diamond_r(P*Q)\to(\Diamond P*\Diamond Q)$:

1. Comme $(s_2,[c_3])\in V(P)$ et $(s_2,[c_4])\in V(Q)$ alors $s_2,[c_3]\vDash_{\mathcal{M}} P$ et $s_2,[c_4]\vDash_{\mathcal{M}} Q$.
2. Comme $[c_3]\bullet[c_4]\downarrow$ et $[c_2]=[c_3]\bullet[c_4]$ alors, par (1.), nous avons $s_2,[c_2]\vDash_{\mathcal{M}} P*Q$
3. Comme $(s_1,[c_1]\bullet r)\mathbf{R}(s_2,[c_2])$ et $s_2,[c_2]\vDash_{\mathcal{M}} P*Q$, alors $s_1,[c_1]\vDash_{\mathcal{M}}\Diamond_r(P*Q)$.
4. Nous pouvons remarquer que $s_1,e\nvDash_{\mathcal{M}}\Diamond P$ et $s_1,[c_1]\nvDash_{\mathcal{M}}\Diamond P$, parce que toutes les paires monde/ressource accessibles à partir de (s_1,e) et $(s_1,[c_1])$ sont $(s_1,e)\mathbf{R}(s_1,e)$ et $(s_1,[c_1])\mathbf{R}(s_1,[c_1])$ et nous avons $s_1,e\nvDash_{\mathcal{M}} P$ et $s_1,[c_1]\nvDash_{\mathcal{M}} P$.
5. Nous pouvons remarquer que $[c_1]=r_1\bullet r_2$ ssi ($r_1=e$ et $r_2=[c_1]$) ou ($r_1=[c_1]$ et $r_2=e$).
6. De (4.) et (5.) nous pouvons déduire que $s_1,[c_1]\nvDash_{\mathcal{M}}\Diamond P*\Diamond Q$.
7. De (3.) et (6.), nous pouvons conclure que $s_1,[c_1]\nvDash_{\mathcal{M}}\Diamond_r(P*Q)\to(\Diamond P*\Diamond Q)$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un noyau logique permettant de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant des ressources. Nous avons aussi proposé de nouvelles modalités de séparation ($\Diamond_\bullet$, $\Box_\bullet$, $\Diamond_r$ et $\Box_r$). Nous avons montré que nos modèles permettaient en toute simplicité de modéliser des réseaux de Petri temporisés (Time Petri Net). Nous avons aussi illustré l'intérêt de nos nouvelles modalités sur un exemple. Pour

finir, nous avons étudié la recherche de preuves dans notre logique, en proposant une méthode des tableaux correcte et complète, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles.

Dans le cadre de notre étude, nous souhaitons introduire dans nos modèles la notion d'agent permettent d'étudier la dynamique sous un nouvel axe de recherche. De plus, une telle approche nous permettrait en termes de modélisation et d'expressivité, d'aborder le mélange entre le concept de séparation et celui d'agent. Nous proposons alors, dans le chapitre suivant, d'introduire la séparation dans une logique capturant à la fois la notion d'agent et celle de dynamique. En particulier, nous nous intéresserons aux *logiques dynamiques épistémiques*, se focalisant sur l'évolution de la connaissances possédées par des agents [11, 90, 88, 87, 48, 55, 89, 9], et plus précisément sur leur noyau logique, à savoir la logique Épistémique [6, 78, 49, 61, 54]. En particulier, notre étude va permettre d'introduire une toute nouvelle dimension au seins des logiques de la connaissance, à savoir que la connaissance est construite sur des ressources.

Chapitre 6

Ressources et connaissances dynamiques

Introduction

Après avoir étudié la dynamique des ressources, dans un premier temps au sein de la logique BI au travers des réseaux de Petri, puis en étendant les modèles et le langage de BI et BBI, permettant ainsi de modéliser et d'exprimer des propriétés dynamiques de ressources (logique DBI), ensuite en modélisant un automate exécutant des actions ayant pour effet de produire et de consommer des ressources (logique DMBI), et enfin en proposant une abstraction de cette dernière logique donnant ainsi naissance à de nouvelles modalités multiplicatives (logique LSM), nous proposons dans ce dernier chapitre d'ouvrir notre champ de recherche en nous intéressons au concept *d'agent*.

Les agents, parfois appelés dans certains contextes "utilisateurs" ou "rôles", apparaissent dans beaucoup de domaines en informatique, tels que la vérification de protocoles [25, 69, 63, 29], les systèmes multi-agents [56, 2, 91], etc... Parmi les logiques capturant cette notion d'agent, une famille de logiques a attiré notre attention, de par la simplicité de leur modèle et leur fort pouvoir expressif ainsi que par l'originalité des propriétés qu'elles permettent d'exprimer, comme nous le verrons. Ces logiques, appelées *logiques dynamiques épistémiques*, se focalisent sur l'évolution de la connaissance possédée par des agents [11, 90, 88, 87, 48, 55, 89, 9]. Ces logiques sont construites sur un noyau logique commun, appelé *logique épistémique* (EL) [6, 78, 49, 61, 54] qui est aussi connue sous le nom de *logique de la connaissance*. L'originalité de la logique épistémique est de posséder une modalité particulière $K_a\phi$, signifiant "l'agent a sait que ϕ". En étudiant EL de plus près, nous pouvons remarquer que ses modèles sont construits sur des *mondes possibles* ayant pour rôle d'encoder tous les états ou toutes les configurations possibles d'un système considéré. Par exemple, dans le cas d'un jeu de cartes ou du problème des "muddy children" [78], les mondes possibles modélisent toutes les distributions de cartes ou de taches de boue sur le front d'enfants. Faisant alors le constat que ces mondes possibles encodent des distributions d'éléments (par exemple des cartes) et qu'une distribution d'éléments est une ressource au sens d'entité pouvant être composée ou décomposée en sous-entité, nous sommes amenés à soulever les questions suivantes : est-il possible d'introduire cette notion de ressources (séparation) dans les modèles des logiques (dynamiques) épistémiques ? Qu'apporterait une telle extension du point de vue de la modélisation et de l'expressivité ?

Dans ce chapitre, nous proposons de nous intéresser à l'étude de l'introduction de la séparation

au sein des logiques dynamiques épistémiques. Nous pouvons citer des travaux liant la logique épistémique avec la notion de ressources consistant à fusionner la logique linéaire [64, 13] et EL, avec proposition d'une sémantique algébrique et d'un calcul des séquents, ayant pour objectif de capturer les évolutions de la connaissance possédée par des agents suite à l'exécution d'*actions épistémiques* [12]. Mais ces travaux considèrent les actions épistémiques comme des ressources et sont basés sur une variante non-commutative de la logique linéaire intuitionniste [92]. En opposition à ces travaux, nous proposons de considérer les mondes possibles eux-mêmes comme des ressources en intégrant dans les modèles de la logique épistémique la séparation provenant de BBI, permettant ainsi de pouvoir composer et décomposer ces mondes possibles.

Par conséquent, dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle logique, nommée Epistemic Separation Logic (ESL). Après avoir défini le langage et la sémantique de notre logique, nous illustrerons son expressivité sur un exemple, en mettant en avant les nouvelles propriétés pouvant être exprimées par notre extension. Ensuite, nous proposons un calcul des tableaux pour notre logique, que nous prouverons correcte et complète, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles pour la logique.

6.1 Langage et sémantique de la logique ESL

Dans cette section, nous présentons le langage et la sémantique de la logique ESL (Epistemic Separation Logic).
Considérons un ensemble fini d'agents A et un ensemble dénombrables de variables propositionnelles Prop. Le langage $\mathcal{L}_{\mathsf{ESL}}$ de ESL est défini par la grammaire suivante, pour tout $a \in A$ et $p \in \mathsf{Prop}$:

$$X ::= p \mid \bot \mid \mathrm{I} \mid X \to X \mid X * X \mid X \mathrel{-\!\!*} X \mid K_a X$$

Par ailleurs, nous définissons les connecteurs suivants :

$$\neg\phi \equiv \phi \to \bot \qquad \top \equiv \neg\bot \qquad \phi \vee \psi \equiv \neg\phi \to \psi$$
$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\phi \to \neg\psi) \qquad \widetilde{K}_a\phi \equiv \neg K_a \neg\phi$$

Nous pouvons observer que le langage de notre logique contient les deux modalités de la logique épistémique, à avoir $K_a\phi$ signifiant "l'agent a sait que ϕ" et la modalité $\widetilde{K}_a\phi$ définie par $\widetilde{K}_a\phi \equiv \neg K_a \neg\phi$ et signifiant "l'agent a considère que ϕ est possible".

En opposition aux travaux ayant consisté à étendre EL avec la logique linéaire [64, 13, 12], notre logique possède la propriété de distributivité de la conjonction sur la disjonction : $A \wedge (B \vee C)$ est équivalent sémantiquement à $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Nous rappelons que cette propriété est pour nous importante, puisque qu'elle est présente naturellement dans les systèmes nous intéressant. Par exemple, dans un réseau, un message possède la propriété A et la propriété B ou C, si et seulement si, ce message possède les propriétés A et B ou bien les propriétés A et C. Par ailleurs, l'autre intérêt de ESL est de mixer les connecteurs multiplicatifs ($*$ et $\mathrel{-\!\!*}$) provenant de BBI avec les modalités de la logique épistémique, permettant alors d'exprimer des propriétés intéressantes, telles que $\phi \mathrel{-\!\!*} K_a\psi$ signifiant que tout ajout d'une ressource satisfaisant ϕ apporte à l'agent a la connaissance de ψ. Nous insisterons sur cela dans la section suivante.

Nous présentons maintenant la sémantique de notre logique et donnons quelques rappels, notamment la définition de monoïde (partiel) de ressources.

Définition 6.1.1 (Monoïde de ressources)**.** Un *monoïde de ressources* est une structure $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ telle que :

- R est un ensemble dont les éléments sont appelés *ressources*
- $e \in R$
- $\bullet : R \times R \rightharpoonup R$ est une fonction partielle telle que, pour tous $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Élément neutre : $r_1 \bullet e \downarrow$ et $r_1 \bullet e = r_1$
  - Commutativité : si $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ alors $r_2 \bullet r_1 \downarrow$ et $r_1 \bullet r_2 = r_2 \bullet r_1$
  - Associativité : si $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) \downarrow$ alors $(r_1 \bullet r_2) \bullet r_3 \downarrow$ et $r_1 \bullet (r_2 \bullet r_3) = (r_1 \bullet r_2) \bullet r_3$

Nous rappelons que $r_1 \bullet r_2 \downarrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ est défini" et $r_1 \bullet r_2 \uparrow$ signifie "$r_1 \bullet r_2$ est indéfini". Nous rappelons aussi que nous notons $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition 6.1.2 (Modèle)**.** Un *modèle* est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \{\sim_a\}_{a \in A}, V)$ tel que :
- $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$ est un monoïde de ressources
- Pour tout $a \in A$, $\sim_a \subseteq R \times R$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que pour tout $r_1, r_2, r_3 \in R$:
  - Réflexivité : $r_1 \sim_a r_1$
  - Symétrie : si $r_1 \sim_a r_2$ alors $r_2 \sim_a r_1$
  - Transitivité : si $r_1 \sim_a r_2$ et $r_2 \sim_a r_3$ alors $r_1 \sim_a r_3$
- $V : \mathsf{Prop} \to \mathbb{P}(R)$ est une *valuation*

En comparaison avec les modèles de la logique épistémique, nous remarquons que l'ensemble des mondes possibles est remplacé par un monoïde de ressources, nous permettant alors de considérer ces mondes possibles comme des ressources, c'est-à-dire de pouvoir les composer et les décomposer. Par ailleurs, en comparaison aux modèles de BBI, nous pouvons observer que ces modèles sont étendus par des relations d'équivalence sur les ressources. Dans ce chapitre, la notion de mondes possibles et celle de ressources étant confondues, nous utiliserons alors indifféremment les mots "mondes possibles" et "ressources" pour désigner les éléments de l'ensemble R.

Définition 6.1.3 (Relation de forcing, validité)**.** Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \{\sim_a\}_{a \in A}, V)$ un modèle. La relation de forcing $\vDash_{\mathcal{M}} \subseteq R \times \mathcal{L}_{\mathsf{ESL}}$ est définie par, pour tout $r \in R$:
- $r \vDash_{\mathcal{M}} p$ ssi $r \in V(p)$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \top$ toujours
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \bot$ jamais
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \mathrm{I}$ ssi $r = e$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \neg\phi$ ssi $r \nvDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \wedge \psi$ ssi $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ et $r \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \vee \psi$ ssi $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ ou $r \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \to \psi$ ssi $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \Rightarrow r \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi * \psi$ ssi $\exists r_1, r_2 \in R \cdot r_1 \bullet r_2 \downarrow$ et $r = r_1 \bullet r_2$ et $r_1 \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ et $r_2 \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \mathrel{-\!\!*} \psi$ ssi $\forall r' \in R \cdot (r \bullet r' \downarrow$ et $r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi) \Rightarrow r \bullet r' \vDash_{\mathcal{M}} \psi$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} K_a\phi$ ssi $\forall r' \in R \cdot r \sim_a r' \Rightarrow r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$
- $r \vDash_{\mathcal{M}} \widetilde{K}_a\phi$ ssi $\exists r' \in R \cdot r \sim_a r'$ et $r' \vDash_{\mathcal{M}} \phi$

Une formule ϕ est *valide*, noté $\vDash \phi$, ssi $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ pour toute ressource r de tout modèle $\mathcal{M}$.

Afin de capturer l'évolution de la connaissance possédée par des agents, une logique d'annonce publique [73] a été proposée. Cette logique possède, en plus de la modalité $K_a\phi$, une autre modalité $[\phi]\psi$ signifiant "après l'annonce publique ϕ, sous condition que ϕ soit vrai, ψ devient vrai". La particularité de cette modalité $[\phi]\psi$ est qu'elle restreint le modèle considéré aux mondes satisfaisant ϕ. Plus particulièrement, nous avons $w \vDash_{\mathcal{M}} [\phi]\psi$ ssi $w \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ implique $w \vDash_{\mathcal{M}|\phi} \psi$ où $\mathcal{M}|\phi = (W', \{\sim'_a\}_{a \in A}, V')$ tel que $W' = \{w \in W \mid w \vDash_{\mathcal{M}} \phi\}$, pour tout $a \in A$: $\sim'_a = \sim_a \cap (W' \times W')$, et pour tout $p \in \mathsf{Prop}$: $V'(p) = V(p) \cap W'$. Nous indiquons que les modèles

de cette logique disposent uniquement d'un ensemble de mondes W, par opposition à notre extension ESL où nous considérons un monoïde de mondes (ou ressources). Le point important nous intéressant ici est la restriction sur l'ensemble des mondes possibles ($W' = \{w \in W \mid w \vDash_{\mathcal{M}} \phi\}$) qu'effectue la logique suite à une annonce.

Notre objectif étant l'introduction de cette modalité au sein de la logique ESL, nous pouvons observer quelques difficultés dans le cas où nous effectuerions une telle restriction de modèle. Par exemple, l'annonce publique ¬I aurait pour conséquence de restreindre notre monoïde de ressources de telle sorte que $e \notin R$. Par conséquent, nous perdrions notre structure de monoïde de ressources. De plus, la restriction de l'ensemble de ressources R pourrait avoir pour conséquence, dans certain cas, la perte de la propriété d'associativité. En conclusion, nous ne pouvons alors pas nous appuyer sur une telle approche.

Deux autres alternatives s'offrent alors à nous. La première [42] où, suite à une annonce ϕ, l'ensembles des mondes n'est pas restreint mais où la relation $\sim'_a$ est restreinte ainsi : $w \sim'_a w'$ ssi $w \sim_a w'$ et w' satisfait ϕ (pour tout $a \in A$). Nous pouvons alors remarquer dans ce cas que la relation $\sim_a$ perd sa propriété de symétrie. Pour finir, il existe une autre approche consistant à séparer les mondes satisfaisant l'annonce, des mondes ne satisfaisant pas l'annonce [86]. L'intérêt de cette dernière approche est de ne pas restreindre l'ensemble des mondes possibles et aussi de conserver la symétrie de la relation. Nous nous appuyons alors sur cette dernière sémantique.

Définition 6.1.4 (Annonce publique)**.** Le langage de ESL est étendu par la clause $[X]X$. La relation de forcing est étendue par la clause

$$r \vDash_{\mathcal{M}} [\phi]\psi \text{ ssi } r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \Rightarrow r \vDash_{\mathcal{M}|\phi} \psi$$

où $\mathcal{M}|\phi = (\mathcal{R}', \{\sim'_a\}_{a\in A}, V')$, tel que :
- $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$
- $\sim'_a = \sim_a \cap \{(r, s) \mid r \vDash_{\mathcal{M}} \phi \text{ ssi } s \vDash_{\mathcal{M}} \phi\}$
- $V' = V$

Par ailleurs, nous définissons le connecteur $\langle\phi\rangle\psi \equiv \neg[\phi]\neg\psi$, et nous remarquerons que la sémantique de ce connecteur est la suivante : $r \vDash_{\mathcal{M}} \langle\phi\rangle\psi$ ssi $r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ et $r \vDash_{\mathcal{M}|\phi} \psi$.

6.2 Expressivité de la logique ESL

Dans cette section, nous illustrons par un exemple l'intérêt de considérer les mondes possibles de la logique épistémique comme des ressources.

Considérons trois logiciens entrant dans une libraire et désirant y emprunter des livres. Nous supposons que cette librairie possède un règlement interdisant à une personne d'emprunter strictement plus de deux livres. Pour pouvoir obtenir un livre, il est demandé aux logiciens d'annoncer la référence des ouvrages qu'ils souhaitent obtenir au libraire, qui ira les chercher dans sa réserve. Nous supposons que quels que soient les livres désirés par les logiciens, le libraire pourra toujours les fournir. Par ailleurs, nous supposons aussi qu'à leur entrée dans la librairie, aucun logicien n'a connaissance des livres désirés par les autres logiciens.
En s'approchant du libraire, celui-ci leur dit : "Avant de me dire la référence des livres que vous désirez, j'aimerais dire que si vous souhaitez prendre à vous trois cinq livres ou plus, je vais devoir utiliser un chariot pour vous les apporter. Pourriez-vous me dire si j'aurai besoin d'utiliser un chariot ?"

Dans un premier temps, nous proposons de construire un modèle de la situation que nous venons de décrire. Nous définissons tout d'abord l'ensemble d'agents $A = \{A_1, A_2, A_3\}$, où A_i

est le i^{eme} logicien. Nous construisons aussi un monoïde de ressources $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$, tel que :

$$R = \{{B_1}^i {B_2}^j {B_3}^k \mid i, j, k \in \{0, 1, 2\}\}$$

$${B_1}^{i_1} {B_2}^{j_1} {B_3}^{k_1} \bullet {B_1}^{i_2} {B_2}^{j_2} {B_3}^{k_2} = \begin{cases} \uparrow & \text{si} \quad i_1 + i_2 > 2 \text{ ou } j_1 + j_2 > 2 \text{ ou } k_1 + k_2 > 2 \\ {B_1}^{i_1+i_2} {B_2}^{j_1+j_2} {B_3}^{k_1+k_2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$e = {B_1}^0 {B_2}^0 {B_3}^0$$

Ainsi, la ressource (ou monde possible) ${B_1}^i {B_2}^j {B_3}^k$ représente le logicien A_1 désirant i livres, A_2 souhaitant j livres et A_3 voulant k livres. Nous remarquons que i, j, et k ne peuvent être strictement plus grands que deux puisqu'il n'est pas autorisé d'emprunter plus de deux livres. Par conséquent, en supposant que A_1 veuille un livre et que les autres logiciens ne souhaitent pas de livre, il est possible de représenter cela par la ressource ${B_1}^1 {B_2}^0 {B_3}^0$. Concernant la composition de ressources, supposons que A_3 change d'avis et désire deux livres de plus (${B_1}^0 {B_2}^0 {B_3}^2$), alors nous obtenons ${B_1}^1 {B_2}^0 {B_3}^0 \bullet {B_1}^0 {B_2}^0 {B_3}^2 = {B_1}^1 {B_2}^0 {B_3}^2$: un livre par A_1, deux pour A_3 et aucun pour A_2. Nous pouvons remarquer que la composition de ressources n'est définie uniquement si le résultat n'aboutit pas à un souhait tel qu'un logicien veuille plus de deux livres. Par exemple, si A_3 désire encore un livre de plus, nous obtenons ${B_1}^1 {B_2}^0 {B_3}^2 \bullet {B_1}^0 {B_2}^0 {B_3}^1 \uparrow$: ceci n'est pas permis puisqu'il qu'il est interdit de demander trois livres. Finalement, nous pouvons remarquer que ${B_1}^0 {B_2}^0 {B_3}^0$ est bien l'élément neutre de la composition que nous avons défini.

À présent, nous construisons notre modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{R}, \{\sim_a\}_{a \in A}, V)$. Concernant les trois relations d'équivalences ($\sim_{A_1}$, $\sim_{A_2}$ et $\sim_{A_3}$), nous souhaitons par exemple que ${B_1}^1 {B_2}^0 {B_3}^2 \sim_{A_2} {B_1}^2 {B_2}^0 {B_3}^0$. En effet si A_2 ne souhaite avoir aucun livre, alors comme ce logicien ne possède aucune information sur le nombre de livres désirés par les autres logiciens, il doit alors, de son point de vue, considérer la possibilité que A_1 souhaite un livre et A_3 en souhaite deux, et aussi la possibilité que A_1 souhaite deux livres et A_3 n'en désire aucun. Par contre, nous souhaitons que ${B_1}^1 {B_2}^0 {B_3}^2 \not\sim_{A_2} {B_1}^1 {B_2}^1 {B_3}^2$, parce que, toujours du point de vue de A_2, il est tout à fait incohérent que celui considère possible que lui-même ne veuille aucun livre et aussi qu'il en veuille un. Nous définissons alors ces relations de la manière suivante, pour tous $i_1, i_2, j_1, j_2, k_1, k_2 \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{array}{lll} {B_1}^{i_1} {B_2}^{j_1} {B_3}^{k_1} \sim_{A_1} {B_1}^{i_2} {B_2}^{j_2} {B_3}^{k_2} & \text{ssi} & i_1 = i_2 \\ {B_1}^{i_1} {B_2}^{j_1} {B_3}^{k_1} \sim_{A_2} {B_1}^{i_2} {B_2}^{j_2} {B_3}^{k_2} & \text{ssi} & j_1 = j_2 \\ {B_1}^{i_1} {B_2}^{j_1} {B_3}^{k_1} \sim_{A_3} {B_1}^{i_2} {B_2}^{j_2} {B_3}^{k_2} & \text{ssi} & k_1 = k_2 \end{array}$$

Pour terminer, nous considérons l'ensemble de variables propositionnelles $\mathsf{Prop} = \{P_1, P_2, P_3, C\}$ et la valuation V dont la définition est la suivante : $V(P_1) = \{{B_1}^1 {B_2}^0 {B_3}^0\}$, $V(P_2) = \{{B_1}^0 {B_2}^1 {B_3}^0\}$, $V(P_3) = \{{B_1}^0 {B_2}^0 {B_3}^1\}$ et $V(C) = \{{B_1}^i {B_2}^j {B_3}^k \mid i + j + k \leqslant 4\}$. Ainsi, nous avons $r \in V(P_i)$ si et seulement si r est une commande telle que le logicien A_i veuille un et un seul livre et les autres logiciens n'en désirent aucun. Par ailleurs, $r \in V(C)$ signifie que le libraire pourra apporter les livres souhaités par les logiciens, sans utiliser de chariot (les logiciens désirent au maximum quatre livres). La Figure 18 donne une représentation graphique de notre modèle où les ressources (mondes possibles) coloriées en gris correspondent aux souhaits de livres ne satisfaisant pas C.

Nous illustrons à présent les connecteurs de la logique ESL sur le modèle que nous venons de construire.

Concernant les variables propositionnelles, nous avons par exemple ${B_1}^0 {B_2}^1 {B_3}^0 \vDash_{\mathcal{M}} P_2$, puisque ${B_1}^0 {B_2}^1 {B_3}^0 \in V(P_2)$. Ainsi, nous exprimons qu'un seul livre est désiré et que celui-ci est désiré par le logicien A_2. A l'opposé, nous avons ${B_1}^0 {B_2}^2 {B_3}^0 \nvDash_{\mathcal{M}} P_2$ et ${B_1}^0 {B_2}^1 {B_3}^1 \nvDash_{\mathcal{M}} P_2$, puisque

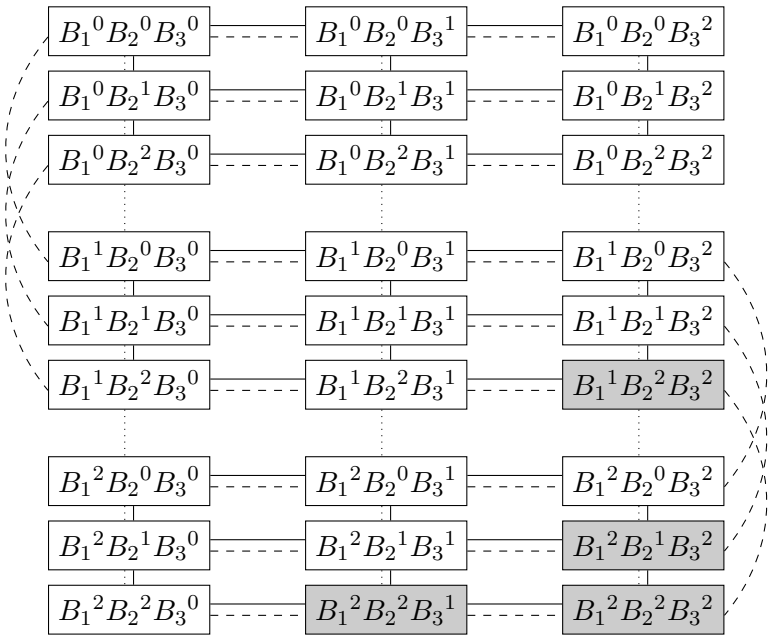


FIGURE 18 – Connaissance des logiciens à leur entrée dans la librairie

$B_1{}^0B_2{}^2B_3{}^0 \notin V(P_2)$ et $B_1{}^0B_2{}^1B_3{}^1 \notin V(P_2)$. Concernant la variable propositionnelle C, nous avons $B_1{}^1B_2{}^2B_3{}^1 \vDash_{\mathcal{M}} C$. Cela exprime que dans le cas où les logiciens A_1 et A_3 désirent un livre et dans le cas où A_2 en souhaite deux, le libraire pourra apporter les livres sans utiliser de chariot. Par contre, $B_1{}^2B_2{}^2B_3{}^1 \nvDash_{\mathcal{M}} C$, en effet une commande $B_1{}^2B_2{}^2B_3{}^1$, contenant cinq livres, obligera le libraire à utiliser un chariot pour apporter les livres.

La logique ESL, étant une extension de la logique épistémique, permet alors d'exprimer des propriétés sur la connaissance des agents (des logiciens). Par exemple, $B_1{}^0B_2{}^1B_3{}^2 \vDash_{\mathcal{M}} K_{A_1}C$, parce que pour tout $r \in R$ tel que $B_1{}^0B_2{}^1B_3{}^2 \sim_{A_1} r$, nous avons $r \vDash_{\mathcal{M}} C$. Cette formule capture que si A_1 ne veut pas de livre, A_2 souhaite un livre et A_3 en désire deux, alors le logicien A_1 sait que le libraire pourra apporter tous les livres sans utiliser de chariot. Concernant l'autre modalité provenant de la logique épistémique, à savoir $\widetilde{K}_a$, nous avons $B_1{}^1B_2{}^2B_3{}^2 \vDash_{\mathcal{M}} \widetilde{K}_{A_1}C$, parce que $B_1{}^1B_2{}^2B_3{}^2 \sim_{A_1} B_1{}^1B_2{}^0B_3{}^0$ et $B_1{}^1B_2{}^0B_3{}^0 \vDash_{\mathcal{M}} C$. Cette modalité nous permet d'exprimer que si A_1 désire un livre et si les logiciens A_2 et A_3 en souhaitent deux, alors le logicien A_1 considère qu'il est possible que le libraire puisse porter les livres sans utiliser de chariot.
D'un autre côté, étant une extension de BBI, notre logique ESL est une logique de ressources permettant d'exprimer des propriétés de partage et de séparation. Nous illustrons à présent les propriétés pouvant être exprimées par les connecteurs multiplicatifs et nous renvoyons le lecteur aux exemples du Chapitre 1 pour plus de détails.
Tout d'abord, par définition, une ressource r satisfait I ($r \vDash_{\mathcal{M}}$ I) ssi $r = e = B_1{}^0B_2{}^0B_3{}^0$. Autrement dit, cette formule I exprime que les logiciens ne veulent aucun livre. Concernant la conjonction multiplicative ($*$), comme $B_1{}^2B_2{}^0B_3{}^0 = B_1{}^1B_2{}^0B_3{}^0 \bullet B_1{}^1B_2{}^0B_3{}^0$ et $B_1{}^1B_2{}^0B_3{}^0 \vDash_{\mathcal{M}}$

P_1 et ${B_1}^1{B_2}^0{B_3}^0 \vDash_{\mathcal{M}} P_1$ alors ${B_1}^2{B_2}^0{B_3}^0 \vDash_{\mathcal{M}} P_1 * P_1$. La formule $P_1 * P_1$ exprime alors qu'il est possible de séparer la commande des logiciens, de telle sorte que d'un côté un et un seul livre soit voulu (par A_1) et de l'autre un et un seul livre soit aussi désiré (toujours par A_1). En d'autre terme, la formule $P_1 * P_1$ exprime que deux livres sont désirés par A_1 et aucun par les autres logiciens : le connecteur $*$, à l'opposé de $\wedge$, permet d'exprimer un propriété de séparation au sens où la ressource ${B_1}^2{B_2}^0{B_3}^0$ a été séparée en deux sous-ressources.
Pour finir, concernant l'implication multiplicative $-\!\!*$, ce connecteur nous permet d'exprimer une propriété sur une ressource après ajout (composition) d'une autre ressource. Par exemple, nous avons ${B_1}^1{B_2}^1{B_3}^2 \vDash_{\mathcal{M}} P_1 -\!\!* \neg C$, puisque tout ajout d'une ressource satisfaisant P_1 à la ressource ${B_1}^1{B_2}^1{B_3}^2$ (à condition que la composition de ces ressources soit définie) permet d'obtenir une ressource satisfaisant $\neg C$. Et en effet, nous pouvons remarquer que seul ${B_1}^1{B_2}^0{B_3}^0$ satisfait P_1 et nous observons que ${B_1}^1{B_2}^1{B_3}^2 \bullet {B_1}^1{B_2}^0{B_3}^0 \vDash_{\mathcal{M}} \neg C$. En conclusion, ${B_1}^1{B_2}^1{B_3}^2 \vDash_{\mathcal{M}} P_1 -\!\!* \neg C$ exprime que dans le cas où A_1 et A_2 désirent un livre et A_3 en souhaite deux, alors si A_1 commande un livre de plus, le libraire serait alors incapable d'apporter les livres sans utiliser de chariot.

Nous avons présenté d'une part les connecteurs provenant de la logique épistémique et d'autre part les connecteurs issus de la logique BBI. Maintenant, nous nous intéressons à leur interaction en terme d'expressivité.
Nous rappelons que le libraire souhaite savoir s'il aura besoin d'utiliser un chariot pour apporter les livres désirés par le logiciens et nous rappelons aussi que les logiciens n'ont aucune connaissance sur le nombre de livres que souhaite avoir les autres logiciens. Nous supposons alors qu'en essayant de trouver la réponse à la question du libraire, la discussion suivante ait lieu entre les logiciens :

1. Le libraire : "Pourriez-vous me dire si j'aurai besoin d'utiliser un chariot ?"
2. A_1 : "Je sais que nous ne voulons pas aucun livre."
3. A_2 : "Je ne sais pas si vous pourrez porter nos livre sans utiliser le chariot."
4. A_3 : "Je sais que je veux au moins un livre."
5. A_1 : "Je sais que je ne suis pas autorisé à prendre un livre de plus."
6. A_2 : "Je sais que je suis autorisé à prendre un livre de plus et en le faisant cela m'aurait apporté la connaissance que vous seriez incapable d'apporter nos livres sans utiliser de chariot."
7. A_3 : "Je sais maintenant que vous pouvez apporter nos livre sans utiliser de chariot. De plus, je sais aussi que A_1 souhaite avoir deux livres, A_2 en désire un et moi-même souhaiterai en avoir aussi un seul."

Les phrases de 2 à 6 sont des annonces publiques, que nous noterons par la suite Υ_i. Nous proposons de montrer l'évolution du modèle de la Figure 18 au fur et à mesure de cette discussion, c'est-à-dire au fur et à mesure des annonces effectuées par les agents. Dans un premier temps, A_1 annonce qu'il sait que les logiciens ne désirent pas aucun livre, ce qui est exprimé par la formule $\Upsilon_1 = K_{A_1}\neg\mathrm{I}$. Nous pouvons alors observer que ${B_1}^i{B_2}^j{B_3}^k \vDash_{\mathcal{M}} K_{A_1}\neg\mathrm{I}$ si et seulement si ${B_1}^i{B_2}^j{B_3}^k \not\sim_{A_1} {B_1}^0{B_2}^0{B_3}^0$. Alors, la mise à jour de notre modèle suite à l'annonce publique $K_{A_1}\neg\mathrm{I}$ nous retourne le modèle $\mathcal{M}|K_{A_1}\neg\mathrm{I}$ de la Figure 19.

En supposant que les logiciens ne mentent jamais, les mondes ${B_1}^0{B_2}^j{B_3}^k$, tels que $j, k \in \{0, 1, 2\}$, ne peuvent pas être solutions de notre problème parce que ces mondes ne satisfont pas l'annonce publique Υ_1. Autrement dit, comme les logiciens ne mentent pas, ces mondes ne

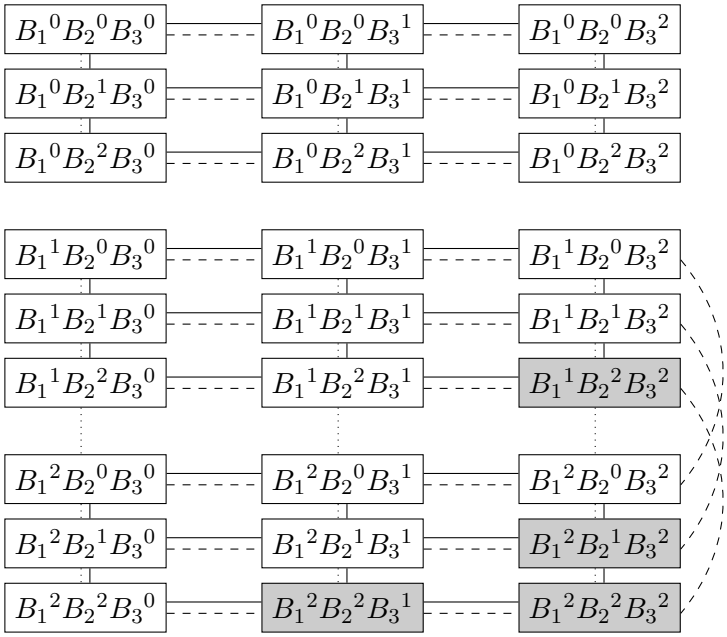
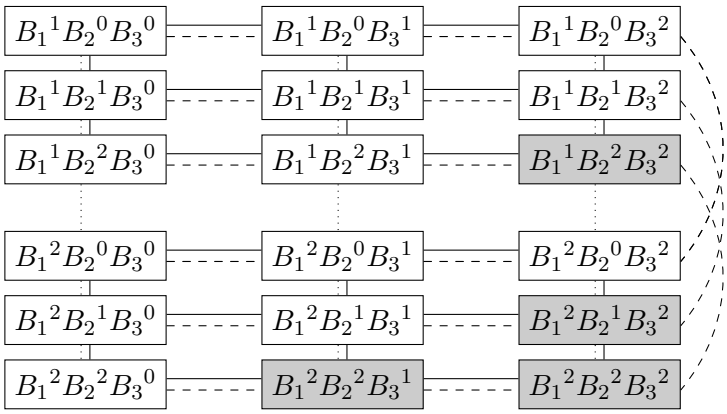
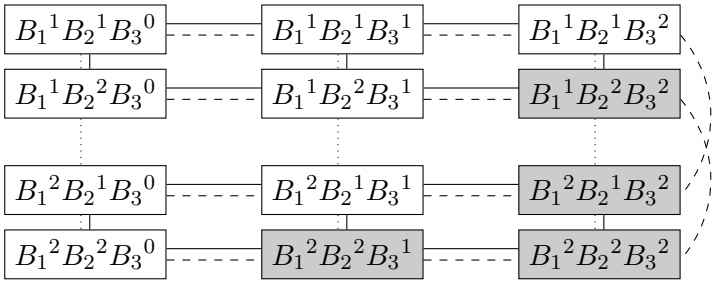


FIGURE 19 – Mise à jour du modèle suite à la première annonce publique : $K_{A_1}\neg \mathrm{I}$

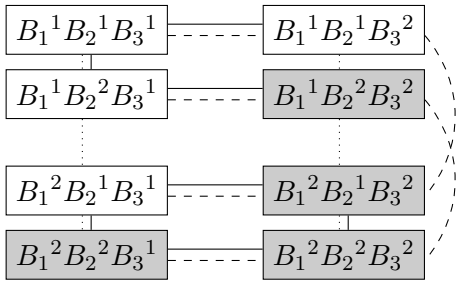
permettent pas à l'agent A_1 d'effectuer l'annonce Υ_1. Par conséquent, une solution de notre problème est donc un des mondes possibles suivants :



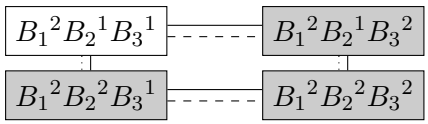
Par la suite, A_2 annonce qu'il ne sait pas si le libraire pourra porter les livres sans utiliser le chariot, ce qui s'exprime par la formule $\Upsilon_2 = \neg K_{A_2}C \wedge \neg K_{A_2}\neg C$. Nous pouvons alors remarquer que $B_1{}^iB_2{}^jB_3{}^k \vDash_{\mathcal{M}|\Upsilon_1} \neg K_{A_2}C \wedge \neg K_{A_2}\neg C$ si et seulement si $j \neq 0$. Ainsi, en ignorant toutes les ressources $B_1{}^iB_2{}^jB_3{}^k$ telles que $j \neq 0$, nous pouvons affirmer que la solution est un des mondes possibles suivants :



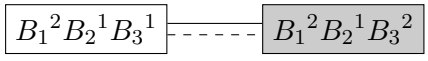
A_3 annonce alors qu'il sait qu'il veut au moins un livre, ce qui est exprimé par la formule $\Upsilon_3 = K_{A_3}(P_3 * \top)$. En ignorant toutes les ressources ne satisfaisant pas cette formule, nous obtenons :



Par la suite A_1 annonce qu'il sait qu'il n'est pas autorisé à prendre un livre de plus. Cela s'exprime par la formule $\Upsilon_4 = K_{A_1}(P_1 \twoheadrightarrow \bot)$. En effet, par définition, ${B_1}^i{B_2}^j{B_3}^k \vDash_{\mathcal{M}|\Upsilon_1|\Upsilon_2|\Upsilon_3} P_1 \twoheadrightarrow \bot$ si et seulement si, pour tout $r \in R$ tel que ${B_1}^i{B_2}^j{B_3}^k \bullet r \downarrow$ et $r \vDash_{\mathcal{M}|\Upsilon_1|\Upsilon_2|\Upsilon_3} P_1$, nous avons ${B_1}^i{B_2}^j{B_3}^k \bullet r \vDash_{\mathcal{M}|\Upsilon_1|\Upsilon_2|\Upsilon_3} \bot$. Comme r ne peut être uniquement ${B_1}^1{B_2}^0{B_3}^0$, puisque $r \vDash_{\mathcal{M}|\Upsilon_1|\Upsilon_2|\Upsilon_3} P_1$, et comme aucune ressource ne satisfait $\bot$, nous avons alors nécessairement ${B_1}^i{B_2}^j{B_3}^k \bullet {B_1}^1{B_2}^0{B_3}^0 \uparrow$, ce qui signifie bien que A_1 ne peut pas prendre un livre de plus. En ignorant alors tous les mondes possibles ne satisfaisant pas la formule $K_{A_1}(P_1 \twoheadrightarrow \bot)$, nous obtenons :



Puis, A_2 annonce qu'il sait qu'il est autorisé à prendre un livre de plus et en le faisant cela lui apporterait la connaissance que le libraire serait incapable d'apporter les livres des logiciens sans utiliser de chariot. La formule correspondant à cette phrase est $\Upsilon_5 = K_{A_2}(\neg(P_2 \twoheadrightarrow \bot) \wedge (P_2 \twoheadrightarrow K_{A_2}\neg C))$. Toujours en supprimant les mondes ne satisfaisant pas cette formule, la solution est une des ressources suivantes :



Finalement, A_3 dit qu'il sait que le libraire pourra porter les livres sans utiliser de chariot : $K_{A_3}C$. Nous remarquons que seul le monde possible ${B_1}^2{B_2}^1{B_3}^1$ satisfait cette formule. En conséquence, la solution ne peut être que ce monde : A_1 souhaite obtenir deux livres, et A_2 et A_3 n'en désire seulement un. Et nous remarquons aussi que ce monde satisfait la formule $K_{A_3}(P_1 * P_1 * P_2 * P_3)$, nous permettons de conclure que A_3 connaît la réponse au problème.
La Figure 20 nous montre le modèle obtenu après les mises à jour suite à l'ensemble des annonces publiques, cela en représentant tous les mondes du modèle $(\mathcal{M}|\Upsilon_1|\Upsilon_2|\Upsilon_3|\Upsilon_4|\Upsilon_5)$

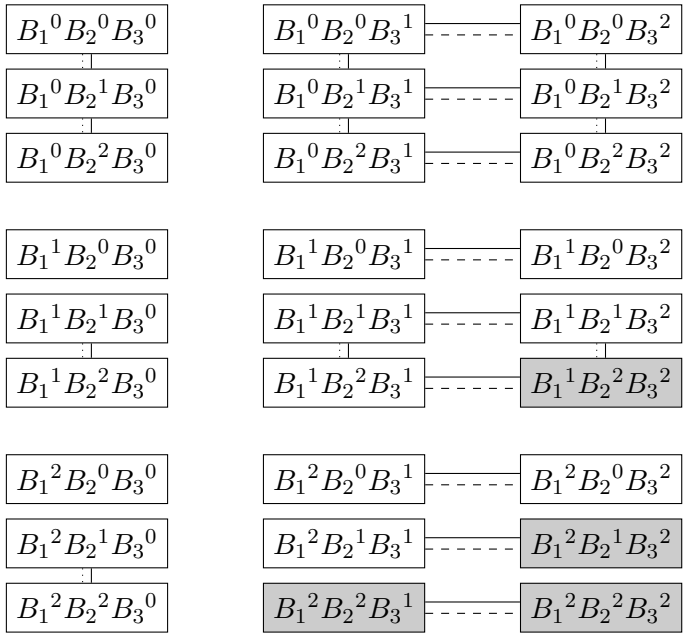


FIGURE 20 – Mises à jour du modèle suite aux annonces publiques : $(\mathcal{M}|\Upsilon_1|\Upsilon_2|\Upsilon_3|\Upsilon_4|\Upsilon_5)$

Nous pouvons aussi écrire $B_1{}^2B_2{}^1B_3{}^1 \vDash_{\mathcal{M}} \langle\Upsilon_1\rangle\langle\Upsilon_2\rangle\langle\Upsilon_3\rangle\langle\Upsilon_4\rangle\langle\Upsilon_5\rangle(K_{A_3}C \wedge K_{A_3}(P_1 * P_1 * P_2 * P_3))$, qui exprime qu'après l'ensemble des annonces publiques, A_3 sait que le libraire peut porter les livres et aussi connaît la quantité de livre désirée par chaque logicien. Pour finir, nous soulignons que nous exprimons les annonces publiques par la modalité $\langle\Upsilon_i\rangle$ plutôt que $[\Upsilon_i]$, parce que nous avons supposé que les logiciens ne mentent jamais. Donc par conséquent, nous exprimons que l'information contenu dans les annonces est vraie.

Dans cet exemple, nous avons montré l'intérêt de notre logique ESL, consistant à considérer les mondes possibles comme des ressources. Nous souhaitons, pour terminer cette section mettre l'accent sur la combinaison des modalités épistémiques et des connecteurs multiplicatifs, ce qui pourrait donner naissance à de nouvelles modalités épistémiques multiplicatives intéressantes.

- $K_a(\phi * \psi)$, qui signifie que l'agent a sait que la ressource (le monde possible) peut être décomposé en deux sous-ressources satisfaisant respectivement les propriétés ϕ et ψ.
  De retour sur notre exemple, $K_{A_1}(P_1 * P_1 * P_2)$ exprime que A_1 sait qu'il veut deux livres, que A_2 n'en veut qu'un et que A_3 n'en veut aucun.
- $K_a(\phi \mathrel{-\!\!*} \psi)$, qui signifie que l'agent a sait que l'ajout d'une ressource satisfaisant ϕ permet d'obtenir une ressource satisfaisant ψ.
  Toujours dans notre exemple, $K_{A_1}((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \mathrel{-\!\!*} C)$ exprime que A_1 sait que si exactement un des logiciens commandait un livre de plus, alors le libraire pourrait porter les livres sans utiliser de chariot.
- $\phi * K_a\psi$, qui exprime qu'en enlevant une ressource satisfaisant ϕ permettrait à l'agent a d'obtenir la connaissance de ψ.
  Par exemple, $P_2 * K_{A_2}C$ exprime que désirant un livre de moins, l'agent A_2 obtiendrait la connaissance que le libraire pourrait porter les livres sans chariot.
- $\phi \mathrel{-\!\!*} K_a\psi$, qui exprime que l'ajout d'une ressource satisfaisant ϕ permettrait à l'agent a d'obtenir la connaissance de ψ.

Toujours sur notre exemple, $P_1 \twoheadrightarrow K_{A_1}\neg C$ exprime qu'en choisissant un livre de plus (à condition que cela soit possible), l'agent A_1 obtient la connaissance que le libraire ne peut pas apporter les livres sans utiliser de chariot.

Nous concluons en faisant remarquer que les deux dernières formules permettent d'exprimer une propriété en cas de changement d'avis : "si l'agent désirait un livre de moins" et "en choisissant un livre de plus".

6.3 Une méthode des tableaux pour ESL

À présent, nous présentons un calcul des tableaux avec labels pour notre logique ESL, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles. Nous consacrerons nos travaux futurs à l'étude d'un calcul pour ESL étendu avec les annonces publiques.

6.3.1 Labels et contraintes de ressources et d'agents

Notre méthode des tableaux possède des labels et des contraintes permettant de capturer de l'information sémantique ayant une grande utilité, notamment en cas d'extraction de contre-modèles.

Définition 6.3.1 (Label de ressources)**.** Soit $\gamma_r = \{c_1, c_2, ...\}$ un ensemble dénombrable infini de constantes. Un *label de ressources* est un élément appartenant au langage généré par la grammaire suivante :

$$X ::= 1_r \mid c_i \mid X \circ X$$

où $c_i \in \gamma_r$ et $1_r \notin \gamma_r$. Les termes seront considérés modulo l'associativité et la commutativité de $\circ$ et la neutralité de 1_r. Nous notons L_r l'ensemble de tous les labels de ressources.

Nous rappelons que nous notons xy le label de ressources $x \circ y$. Nous dirons que x est un *sous-label de ressources* de y si et seulement si il existe un label de ressources z tel que $x \circ z = y$. Pour finir, nous notons $\mathcal{E}(x)$ l'ensemble des sous-labels de ressources de x.

Définition 6.3.2 (Contrainte de ressources et d'agents)**.** Une *contrainte de ressources* est une expression de la forme $x \simeq y$ où x et y sont de labels de ressources. Une *contrainte d'agents* est une expression de la forme $x \eqsim_u y$ où x et y sont de labels de ressources et u est un élément de l'ensemble A.

Nous appellerons *ensemble de contraintes* tout ensemble $\mathcal{C}$ contenant des contraintes de ressources et des contraintes d'agents. Par exemple $\mathcal{C} = \{c_1 \simeq c_2, c_2 \simeq c_3, c_4 \eqsim_b c_1\}$ est un ensemble de contraintes.

Définition 6.3.3 (Domaine)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Le *domaine* de $\mathcal{C}$ est l'ensemble de tous les sous-labels de ressources apparaissant dans $\mathcal{C}$. Plus concrètement :

$$\mathcal{D}_r(\mathcal{C}) = \left[\bigcup_{x \simeq y \in \mathcal{C}} (\mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y))\right] \cup \left[\bigcup_{x \eqsim_u y \in \mathcal{C}} (\mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y))\right]$$

Définition 6.3.4 (Alphabet)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. L'*alphabet* de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des constantes de ressources apparaissant dans $\mathcal{C}$. En particulier, $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) = \gamma_r \cap \mathcal{D}_r(\mathcal{C})$.

Règles produisant des contraintes de ressources :

$$\frac{}{1_r \simeq 1_r}\,\langle 1_r\rangle \qquad \frac{x \simeq y}{y \simeq x}\,\langle s_r\rangle \qquad \frac{xy \simeq xy}{x \simeq x}\,\langle d_r\rangle \qquad \frac{x \simeq y \qquad y \simeq z}{x \simeq z}\,\langle t_r\rangle$$

$$\frac{x \simeq y \qquad yk \simeq yk}{xk \simeq yk}\,\langle c_r\rangle \qquad \frac{x \eqsim_u y}{x \simeq x}\,\langle k_r\rangle$$

Règles produisant des contraintes d'agents :

$$\frac{x \simeq x}{x \eqsim_u x}\,\langle r_a\rangle \qquad \frac{x \eqsim_u y}{y \eqsim_u x}\,\langle s_a\rangle \qquad \frac{x \eqsim_u y \qquad y \eqsim_u z}{x \eqsim_u z}\,\langle t_a\rangle \qquad \frac{x \eqsim_u y \qquad x \simeq k}{k \eqsim_u y}\,\langle k_a\rangle$$

FIGURE 21 – Règles de clôture d'un ensemble de contraintes, pour tout $u \in A$

À présent, nous présentons les règles de clôture d'un ensemble de contraintes.

Définition 6.3.5 (Clôture d'un ensemble de contraintes)**.** Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. La clôture de $\mathcal{C}$, noté $\overline{\mathcal{C}}$, est le plus petit ensemble clos par les règle de la Figure 21, tel que $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$.

Nous faisons remarquer que u, introduit par la règle $\langle r_a\rangle$, doit appartenir à l'ensemble A. Nous donnons un exemple d'application de ces règles. Considérons l'ensemble $\mathcal{C} = \{c_1 \simeq c_2, c_2 \simeq c_3, c_1 \eqsim_b c_4\}$, nous avons alors $c_3 \eqsim_b c_4 \in \overline{\mathcal{C}}$, par la dérivation suivante :

$$\dfrac{\dfrac{c_1 \eqsim_b c_4 \qquad \dfrac{c_1 \simeq c_2 \qquad c_2 \simeq c_3}{c_1 \simeq c_3}\,\langle t_r\rangle}{c_3 \eqsim_b c_4}\,\langle k_a\rangle}{}$$

Proposition 6.3.6. Les règles suivantes peuvent être dérivées des règles de clôture d'un ensemble de contraintes :

$$\frac{xk \simeq y}{x \simeq x}\,\langle p_l\rangle \quad \frac{x \simeq yk}{y \simeq y}\,\langle p_r\rangle \quad \frac{xk \eqsim_u y}{x \simeq x}\,\langle q_l\rangle \quad \frac{x \eqsim_u yk}{y \eqsim_u y}\,\langle q_r\rangle \quad \frac{x \eqsim_u y \qquad x \simeq x' \qquad y \simeq y'}{x' \eqsim_u y'}\,\langle w_a\rangle$$

Corollaire 6.3.7. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes et $u \in A$ un agent. Nous avons $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ ssi $x \simeq x \in \overline{\mathcal{C}}$.

6.3.2 Méthode des tableaux - Correction et Complétude

Après avoir présenté les labels et les contraintes utilisés par notre méthode des tableaux, nous présentons à présent le calcul lui-même.

Définition 6.3.8 (Formule signée / CSS)**.** Une *formule signée* est un triplet $(S, \phi, x) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \times \mathcal{L}_{\mathsf{ESL}} \times L_r$, noté $\mathbb{S}\phi : x$. Un *CSS* (constrained set of statements) est une paire $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$, où $\mathcal{F}$ est un ensemble de formules signées et $\mathcal{C}$ est un ensemble de contraintes, vérifiant la propriété (P_{css}) suivante :

$$(P_{css}) : \text{ si } \mathbb{S}\phi : x \in \mathcal{F} \text{ alors } x \simeq x \in \overline{\mathcal{C}}$$

Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est *fini* ssi $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ sont finis.
La relation $\preccurlyeq$ est définie par : $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ ssi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.
La relation $\preccurlyeq_f$ est définie par : $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ ssi $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle$ est fini.

$$\frac{\mathbb{T}\mathrm{I} : x \in \mathcal{F}}{\langle \emptyset, \{x \simeq 1_r\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\mathrm{I}\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\neg\phi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\neg\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\neg\phi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\neg\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \wedge \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : x, \mathbb{T}\psi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\wedge\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \wedge \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : x\}, \emptyset\rangle \mid \langle \{\mathbb{F}\psi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\wedge\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \vee \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : x\}, \emptyset\rangle \mid \langle \{\mathbb{T}\psi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\vee\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \vee \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : x, \mathbb{F}\psi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\vee\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \to \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : x\}, \emptyset\rangle \mid \langle \{\mathbb{T}\psi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\to\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi \to \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : x, \mathbb{F}\psi : x\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\to\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi * \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : c_i, \mathbb{T}\psi : c_j\}, \{x \simeq c_i c_j\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}*\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\phi * \psi : x \in \mathcal{F} \text{ et } x \simeq yz \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : y\}, \emptyset\rangle \mid \langle \{\mathbb{F}\psi : z\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}*\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : x \in \mathcal{F} \text{ et } xy \simeq xy \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : y\}, \emptyset\rangle \mid \langle \{\mathbb{T}\psi : xy\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}\mathrel{-\!\!*}\rangle$$

$$\frac{\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : c_i, \mathbb{F}\psi : xc_i\}, \{xc_i \simeq xc_i\}\rangle}\ \langle \mathbb{F}\mathrel{-\!\!*}\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}K_u\phi : x \in \mathcal{F} \text{ et } x =_u y \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : y\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{T}K\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}K_u\phi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : c_i\}, \{x =_u c_i\}\rangle}\ \langle \mathbb{F}K\rangle$$

$$\frac{\mathbb{T}\widetilde{K}_u\phi : x \in \mathcal{F}}{\langle \{\mathbb{T}\phi : c_i\}, \{x =_u c_i\}\rangle}\ \langle \mathbb{T}\widetilde{K}\rangle \qquad \frac{\mathbb{F}\widetilde{K}_u\phi : x \in \mathcal{F} \text{ et } x =_u y \in \overline{\mathcal{C}}}{\langle \{\mathbb{F}\phi : y\}, \emptyset\rangle}\ \langle \mathbb{F}\widetilde{K}\rangle$$

Note : c_i et c_j sont des nouvelles constantes de ressources.

FIGURE 22 – Règles d'expansion des tableaux pour ESL

La Figure 22 présente les règles de notre méthode des tableaux pour ESL. Nous soulignons que "c_i et c_j sont des nouvelles constantes de ressources" signifie que $c_i \neq c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$. Nous rappelons que nous notons $\oplus$ la concaténation de listes.

Définition 6.3.9 (ESL-Tableau)**.** Soit $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle$ un CSS fini. Un *ESL-Tableau* pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle$ est une liste de CSS, construite inductivement par les règles suivantes :

- La liste $[\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle]$ est un ESL-Tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle$
- Si la liste $\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle] \oplus \mathcal{T}_n$ est un ESL-Tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle$ et

$$\frac{\mathrm{cond}\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle}{\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_1\rangle \mid \ldots \mid \langle \mathcal{F}_k, \mathcal{C}_k\rangle}$$

est une instance d'une des règles de la Figure 22 pour laquelle $\mathrm{cond}\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est vérifiée, alors la liste

$$\mathcal{T}_m \oplus [\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_1, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1\rangle; \ldots; \langle \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_k, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_k\rangle] \oplus \mathcal{T}_n$$

est un ESL-Tableau pour $\langle \mathcal{F}_0, \mathcal{C}_0\rangle$.

Un ESL-Tableau pour la formule ϕ est un ESL-Tableau pour le CSS $\langle\{\mathbb{F}\phi : c_1\}, \{c_1 \simeq c_1\}\rangle$.

Dans la Figure 22, nous pouvons observer des règles pour les modalités épistémiques. Nous avons d'une part les règles $\langle\mathbb{F}K\rangle$ et $\langle\mathbb{T}\widetilde{K}\rangle$ qui introduisent une nouvelle constante c_i ainsi qu'une contrainte d'agent. Par exemple, en appliquant la règle $\langle\mathbb{F}K\rangle$ sur la formule signée $\mathbb{F}K_a\phi : c_3$ appartenant à un CSS $\langle\mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$, nous sommes amenés à devoir choisir une nouvelle constante de ressources. Supposons que $c_5 \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ alors nous pouvons appliquer la règle en utilisant ce label, obtenant le nouveau CSS $\langle\mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : c_5\}, \mathcal{C} \cup \{c_3 \eqsim_a c_5\}\rangle$. Nous pouvons alors remarquer la nouvelle contrainte d'agents $c_3 \eqsim_a c_5$ ajoutée à l'ensemble de contraintes.
D'autre part, nous avons les règles $\langle\mathbb{T}K\rangle$, $\langle\mathbb{F}\widetilde{K}\rangle$. Ces règles disposent d'une condition sur la clôture des contraintes. Pour pouvoir appliquer une telle règle, nous devons choisir un label satisfaisant la condition, dans le cas contraire l'application de la règle n'est pas autorisée. Par exemple, supposons que nous souhaitons appliquer la règle $\langle\mathbb{T}K\rangle$ sur la formule signée $\mathbb{T}K_b\phi : c_2 \in \mathcal{F}$ appartenant à un CSS $\langle\mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$, nous devons alors choisir un label y tel que $c_2 \eqsim_b y \in \overline{\mathcal{C}}$. En supposons que $c_2 \eqsim_b c_3 \in \overline{\mathcal{C}}$, nous pouvons alors appliquer la règle en utilisant ce label c_3, obtenant ainsi le nouveau CSS $\langle\mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : c_3\}, \mathcal{C}\rangle$.

Définition 6.3.10 (Conditions de clôture)**.** Un CSS $\langle\mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est *clos* s'il satisfait au moins une de ces conditions :

1. $\mathbb{T}\phi : x \in \mathcal{F}$, $\mathbb{F}\phi : y \in \mathcal{F}$ et $x \simeq y \in \overline{\mathcal{C}}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : x \in \mathcal{F}$ et $x \simeq 1_r \in \overline{\mathcal{C}}$
3. $\mathbb{F}\top : x \in \mathcal{F}$
4. $\mathbb{T}\bot : x \in \mathcal{F}$

Un CSS est dit *ouvert* s'il n'est pas clos. Un ESL-Tableau est clos si tous ses CSS sont clos.

Définition 6.3.11 (Preuve)**.** Une *preuve* d'une formule ϕ est un ESL-Tableau clos pour ϕ.

Nous terminerons cette sous-section en énonçant un théorème de correction et un théorème de complétude pour notre méthode des tableaux. Nous ne présentons pas les preuves de ces théorèmes qui reprennent des techniques similaires aux chapitres précédents.

Théorème 6.3.12 (Correction)**.** S'il existe une preuve d'une formule ϕ alors ϕ est valide.

Preuve. La preuve de correction repose sur des techniques similaires à celles utilisées pour la preuve de correction de DMBI (Théorème 4.5.6), à savoir la notion de réalisation d'un CSS $\langle\mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ signifiant qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ et une réalisation $\lfloor . \rfloor_r$ plongeant les labels de ressources dans l'ensemble de ressources de $\mathcal{M}$, tels que si $\mathbb{T}\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r \vDash_{\mathcal{M}} \phi$ et si $\mathbb{F}\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\lfloor x \rfloor_r \nvDash_{\mathcal{M}} \phi$. Après avoir montré que les règles de la méthode des tableaux de ESL préservent la réalisabilité d'un CSS et que tout CSS clos n'est pas réalisable, il est alors possible de conclure à la correction de la méthode des tableaux de ESL. □

Théorème 6.3.13 (Complétude)**.** Si une formule ϕ est valide alors il existe une preuve de ϕ.

Preuve. La démonstration de ce théorème repose sur une méthode d'extraction de contre-modèles que nous présenterons par la suite. Elle consiste, pour une formule à partir de laquelle il n'existe pas de preuve, à construire un CSS à partir duquel, par le Lemme 6.3.17 que nous démontrerons par la suite, nous pouvons conclure à la non validité de ϕ. Cette preuve repose sur l'existence d'une stratégie équitable et d'un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de ESL-tableau clos. Cette démonstration suit le schéma de preuve la démonstration de la complétude pour DMBI (Théorème 4.7.9). □

6.3.3 Un exemple de preuve

Nous présentons à présent un exemple de preuve pour la formule :

$$\phi \equiv K_a((P \multimap Q) * K_b(P \wedge R)) \rightarrow K_a\widetilde{K}_bQ$$

Lors de l'étape d'initialisation, nous obtenons l'ESL-Tableau $[\langle\{\mathbb{F}\phi : c_1\}, \{c_1 \simeq c_1\}\rangle]$ que nous représenterons de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} [\mathcal{F}] & [\mathcal{C}] \\ \mathbb{F}K_a((P \multimap Q) * K_b(P \wedge R)) \rightarrow K_a\widetilde{K}_bQ : c_1 & c_1 \simeq c_1 \end{array}$$

Comme dans les chapitres précédents, la colonne de gauche contient les formules signées des ensembles de formules signées ($[\mathcal{F}]$) et la colonne de droite contient les contraintes des ensemble de contraintes de notre ESL-Tableau ($[\mathcal{C}]$). En appliquant des règles de notre méthode des tableaux, nous obtenons l'ESL-Tableau de la Figure 23. Nous décorons les formules signées par le symbole

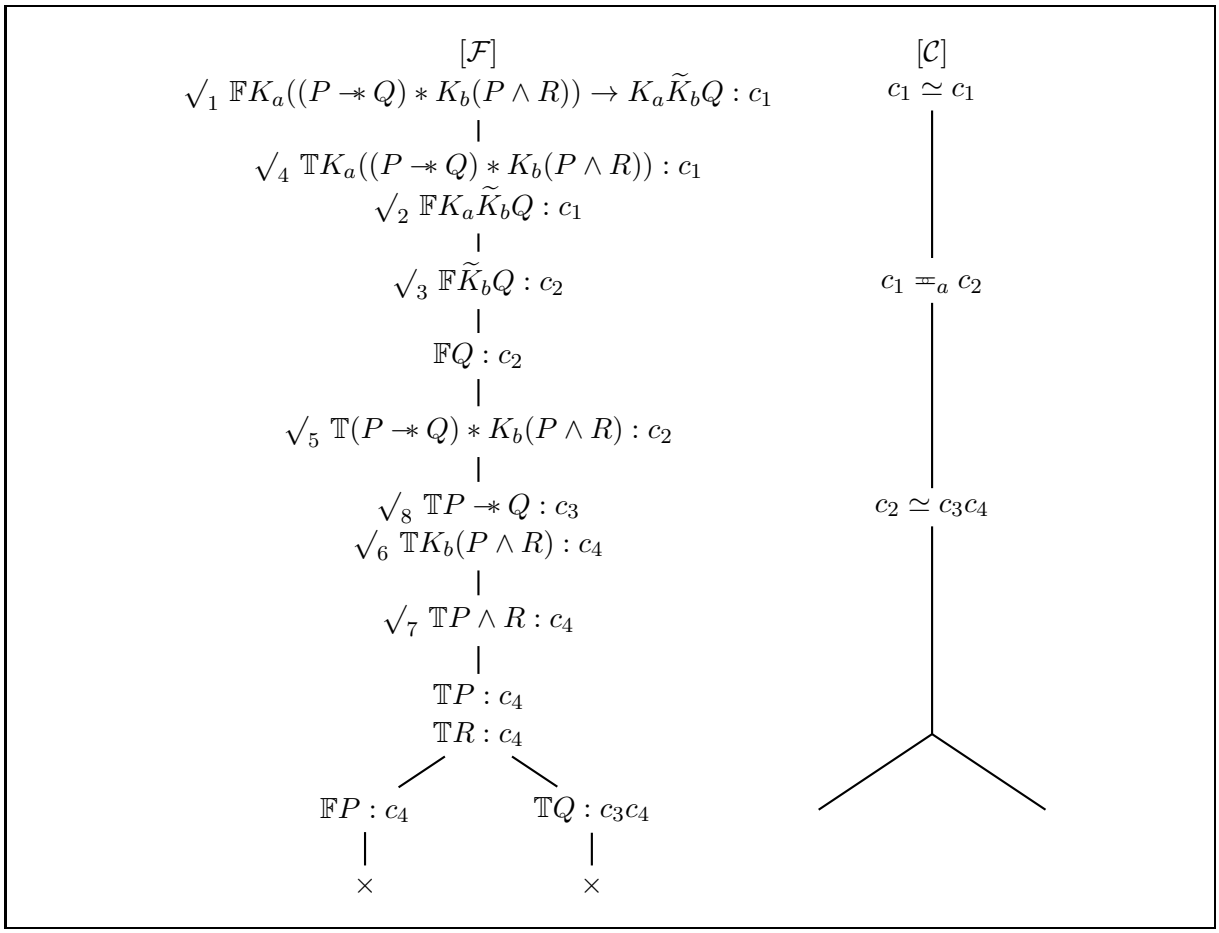


FIGURE 23 – Preuve de la formule $K_a((P \multimap Q) * K_b(P \wedge R)) \rightarrow K_a\widetilde{K}_bQ$

$\surd_i$ pour indiquer qu'une règle a été appliquée sur cette formule à l'étape i. Nous donnons maintenant des détails concernant les étapes 2 et 6.
À l'étape 2, la règle $\langle\mathbb{F}K_a\rangle$ est appliquée sur la formule signée $\mathbb{F}K_a\widetilde{K}_bQ : c_1$. Nous avons donc dû choisir une nouvelle constante de ressources, ici c_2. Ensuite, nous avons appliqué la règle en

utilisant ce label, introduisant alors dans le CSS la formule signée $\mathbb{F}\widetilde{K}_bQ : c_2$ et la contrainte d'agents $c_1 =_a c_2$.
Concernant l'étape 6, nous avons appliqué la règle $\langle \mathbb{T}K_b \rangle$ sur la formule signée $\mathbb{T}K_b(P \wedge R) : c_4$. Pour cela, il nous a fallu choisir un label de ressources y tel que $c_4 =_b y \in \overline{\mathcal{C}}$. Nous pouvons remarquer que $c_4 =_b c_4 \in \overline{\mathcal{C}}$. En effet :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{c_2 \simeq c_3c_4}{c_3c_4 \simeq c_2}\langle s_r\rangle \qquad c_2 \simeq c_3c_4}{c_3c_4 \simeq c_3c_4}\langle t_r\rangle}{c_4 \simeq c_4}\langle d_r\rangle}{c_4 =_b c_4}\langle r_a\rangle$$

Ainsi, en appliquant la règle en utilisant ce label c_4, nous avons introduit la formule signée $\mathbb{T}P \wedge R : c_4$ dans le CSS.

En guise de conclusion, nous pouvons observer que les CSS de notre ESL-Tableau sont clos (noté $\times$). En particulier, le CSS de droite est clos parce que $\mathbb{T}Q : c_3c_4$, $\mathbb{F}Q : c_2$ et $c_3c_4 \simeq c_2 \in \overline{\mathcal{C}}$. Nous pouvons alors conclure que nous avons obtenu une preuve pour la formule $K_a((P \mathrel{-\!\!*} Q) * K_b(P \wedge R)) \rightarrow K_a\widetilde{K}_bQ$ et donc que cette formule est valide par le Théorème 6.3.12.

6.3.4 Un méthode d'extraction de contre-modèles

Dans cette dernière sous-section, nous présentons une méthode d'extraction de contre-modèles.

Définition 6.3.14 (Hintikka CSS)**.** Un CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est un *Hintikka CSS* si et seulement si pour toutes formules $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{ESL}}$, tous labels de ressources $x, y \in L_r$ et tout agent $u \in A$:

1. $\mathbb{T}\phi : x \notin \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\phi : y \notin \mathcal{F}$ ou $x \simeq y \notin \overline{\mathcal{C}}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : x \notin \mathcal{F}$ ou $x \simeq 1_r \notin \overline{\mathcal{C}}$
3. $\mathbb{F}\top : x \notin \mathcal{F}$
4. $\mathbb{T}\bot : x \notin \mathcal{F}$
5. Si $\mathbb{T}\mathrm{I} : x \in \mathcal{F}$ alors $x \simeq 1_r \in \overline{\mathcal{C}}$
6. Si $\mathbb{T}\neg\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : x \in \mathcal{F}$
7. Si $\mathbb{F}\neg\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : x \in \mathcal{F}$
8. Si $\mathbb{T}\phi \wedge \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : x \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : x \in \mathcal{F}$
9. Si $\mathbb{F}\phi \wedge \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : x \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : x \in \mathcal{F}$
10. Si $\mathbb{T}\phi \vee \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : x \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : x \in \mathcal{F}$
11. Si $\mathbb{F}\phi \vee \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : x \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : x \in \mathcal{F}$
12. Si $\mathbb{T}\phi \rightarrow \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{F}\phi : x \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : x \in \mathcal{F}$
13. Si $\mathbb{F}\phi \rightarrow \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{T}\phi : x \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : x \in \mathcal{F}$
14. Si $\mathbb{T}\phi * \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\exists y, z \in L_r$, $x \simeq yz \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : y \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{T}\psi : z \in \mathcal{F}$
15. Si $\mathbb{F}\phi * \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\forall y, z \in L_r$, $x \simeq yz \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : y \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\psi : z \in \mathcal{F}$
16. Si $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathbb{F}\phi : y \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{T}\psi : xy \in \mathcal{F}$
17. Si $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : x \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $xy \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$ et $\mathbb{T}\phi : y \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\psi : xy \in \mathcal{F}$
18. Si $\mathbb{T}K_u\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $x =_u y \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{T}\phi : y \in \mathcal{F}$
19. Si $\mathbb{F}K_u\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $x =_u y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{F}\phi : y \in \mathcal{F}$
20. Si $\mathbb{T}\widetilde{K}_u\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\exists y \in L_r$, $x =_u y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}\phi : y \in \mathcal{F}$

21. Si $\mathbb{F}\widetilde{K}_u\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $x =_u y \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{F}\phi : y \in \mathcal{F}$

Nous rappelons les notations que nous utilisons concernant les classes d'équivalence. Pour tout élément $x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$, $[x]$ est l'ensemble défini par $[x] = \{y \in L_r \mid x \simeq y \in \overline{\mathcal{C}}\}$. Nous pouvons remarquer que sur un ensemble de contraintes clos, $\simeq$ est une relation d'équivalence, puisque réflexive (par le Corollaire 6.3.7), symétrique (par la règle $\langle s_r \rangle$) et transitive (par la règle $\langle t_r \rangle$). Par conséquent, $[x]$ est une classe d'équivalence. Pour finir, nous notons $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\simeq = \{[x] \mid x \in \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})\}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})$.

Nous présentons à présent une fonction Ω permettant d'extraire un contre-modèle d'un Hintikka CSS.

Définition 6.3.15 (Fonction Ω)**.** Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS. La fonction Ω associe à $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un triplet $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle) = (\mathcal{R}, \{\sim_a\}_{a \in A}, V)$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$, tel que :

- $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\simeq$
- $e = [1_r]$
- $[x] \bullet [y] = \begin{cases} \uparrow & \text{si } xy \notin \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}}) \\ [x \circ y] & \text{sinon} \end{cases}$
- Pour tout $a \in A$, $[x] \sim_a [y]$ ssi $x =_a y \in \overline{\mathcal{C}}$
- $[x] \in V(p)$ ssi $\exists y \in L_r$ tel que $y \simeq x \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{T}p : y \in \mathcal{F}$

Proposition 6.3.16. Les définitions de la composition $\bullet$, des relations $\sim_a$ et de la valuation V ne dépendent pas du choix du représentant de la classe d'équivalence.

Preuve. La preuve est similaire à celle de la Proposition 4.6.3. □

Lemme 6.3.17. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ un Hintikka CSS tel que $\mathbb{F}\phi : x \in \mathcal{F}$. La formule ϕ n'est pas valide et $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle)$ est un contre-modèle de ϕ.

Preuve. Pour cela, il convient de démontrer dans un premier temps que $\Omega(\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle)$ est un modèle au sens de la Définition 6.1.2. Puis, dans un second temps, nous démontrons que si $\mathbb{F}\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $[x] \nVdash_{\mathcal{M}} \phi$ et si $\mathbb{T}\phi : x \in \mathcal{F}$ alors $[x] \vDash_{\mathcal{M}} \phi$. La preuve de ces propriétés est similaire aux preuves présentées dans les chapitres précédents. □

Nous illustrons à présent notre méthode d'extraction de contre-modèles. Pour cela, considérons l'ensemble d'agent $A = \{a, b\}$, ainsi que la formule $(K_aP * K_aQ) \rightarrow K_a(P * Q)$. En appliquant les règles de notre méthode des tableaux, nous obtenons l'ESL-Tableau de la Figure 24.

Ce ESL-Tableau contient un CSS (noté $\mathcal{B}$) qui est un Hintikka CSS. Par le Lemme 6.3.17, $(K_aP * K_aQ) \rightarrow K_a(P * Q)$ n'est pas valide et $\Omega(\mathcal{B})$ est un contre-modèle de cette formule. Nous extrayons alors ce contre-modèle, en nous appuyant sur la Définition 6.3.15. Nous obtenons alors le contre-modèle $\mathcal{M} = \Omega(\mathcal{B}) = (\mathcal{R}, \{\sim_a\}_{a \in A}, V)$, où $\mathcal{R} = (R, \bullet, e)$, tel que :

- $R = \mathcal{D}_r(\overline{\mathcal{C}})/\simeq = \{e, [c_1], [c_2], [c_3], [c_4]\}$, où $e = [1_r]$ et $[c_1] = [c_2c_3]$.
- La composition de ressource :

$\bullet$	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$
e	e	$[c_1]$	$[c_2]$	$[c_3]$	$[c_4]$
$[c_1]$	$[c_1]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_2]$	$[c_2]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$[c_1]$	$\uparrow$
$[c_3]$	$[c_3]$	$\uparrow$	$[c_1]$	$\uparrow$	$\uparrow$
$[c_4]$	$[c_4]$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

- Les relations épistémiques, où la réflexivité n'est pas représentée :

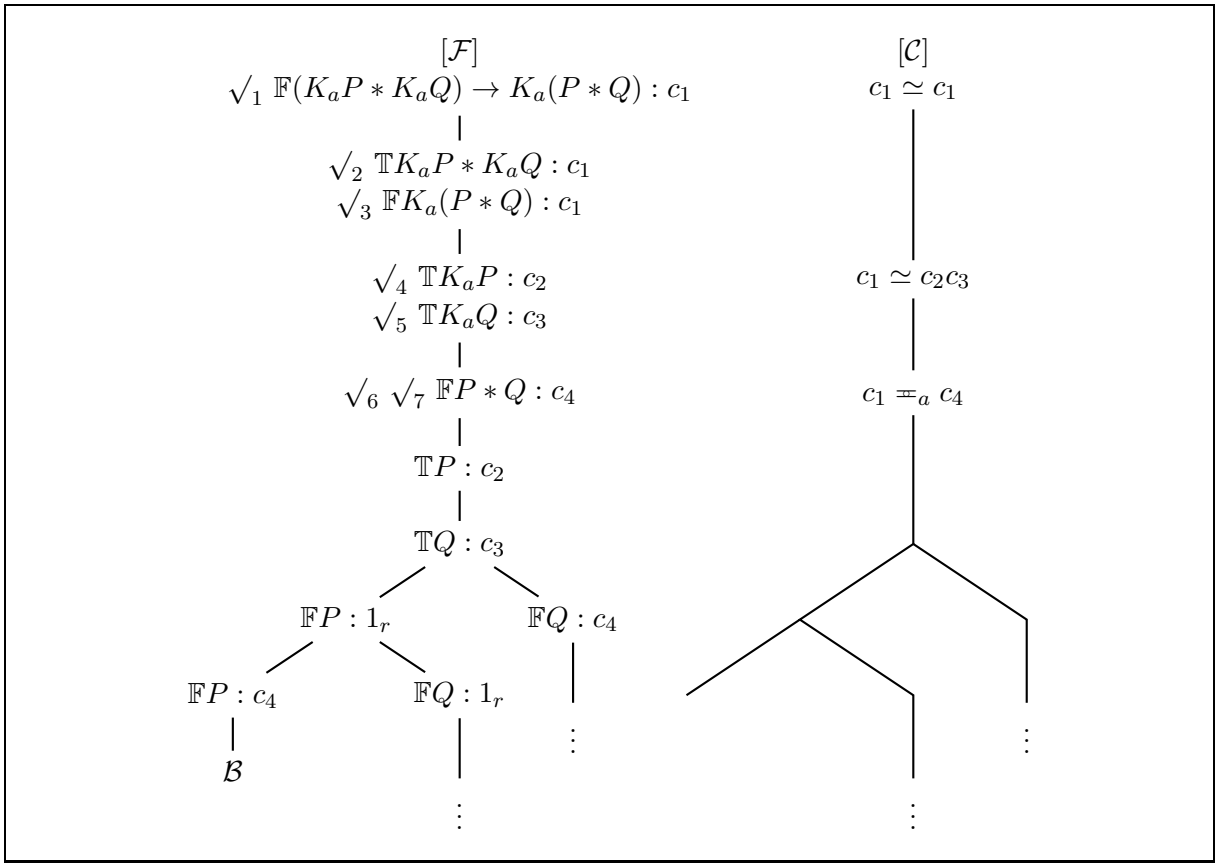
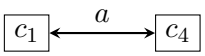


FIGURE 24 – ESL-Tableau pour la formule $(K_aP * K_aQ) \to K_a(P * Q)$



$\boxed{e}$ $\boxed{c_2}$ $\boxed{c_3}$

- $V(P) = \{[c_2]\}$ et $V(Q) = \{[c_3]\}$

Nous vérifions alors que nous avons bien obtenu un contre-modèle de la formule $(K_aP * K_aQ) \to K_a(P * Q)$:

1. Comme $[c_2] \in V(P)$ et $[c_3] \in V(Q)$ alors $[c_2] \vDash_{\mathcal{M}} P$ et $[c_3] \vDash_{\mathcal{M}} Q$.
2. Nous remarquons que $[c_2] \sim_a r$ ssi $r = [c_2]$ et $[c_3] \sim_a r$ ssi $r = [c_3]$.
3. Par (1.) et (2.) nous avons $[c_2] \vDash_{\mathcal{M}} K_aP$ et $[c_3] \vDash_{\mathcal{M}} K_aQ$.
4. Comme $[c_2] \bullet [c_3] \downarrow$ et $[c_1] = [c_2] \bullet [c_3]$ et par (3.), nous avons alors $[c_1] \vDash_{\mathcal{M}} K_aP * K_aQ$.
5. Comme $e \notin V(P)$ et $[c_4] \notin V(P)$ alors $e \nvDash_{\mathcal{M}} P$ et $[c_4] \nvDash_{\mathcal{M}} P$.
6. Nous avons $[c_4] = r_1 \bullet r_2$ ssi ($r_1 = e$ et $r_2 = [c_4]$) ou ($r_1 = [c_4]$ et $r_2 = e$).
7. De (5.) et (6.) nous déduisons que $[c_4] \nvDash_{\mathcal{M}} P * Q$.
8. Comme $[c_1] \sim_a [c_4]$ et par (7.), nous avons $[c_1] \nvDash_{\mathcal{M}} K_a(P * Q)$.
9. Comme (4.) et (8.), nous pouvons conclure que $[c_1] \nvDash_{\mathcal{M}} (K_aP * K_aQ) \to K_a(P * Q)$.

Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude d'une logique mélangeant à la fois la séparation provenant de BBI et la connaissance provenant de la logique épistémique. Cette logique a la particularité de considérer les mondes possibles comme des ressources Ceci a pour effet, comme nous l'avons vu, de permettre d'exprimer de nouvelles propriétés, comme par exemple des propriétés sur la connaissance en cas de "changement d'avis". Nous avons aussi proposé un calcul des tableaux correcte et complète, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles, dans la lignée de nos travaux précédents.

En guise de travaux futurs, nous intéresserons à la proposition d'un calcul pour ESL étendu avec les annonces publiques. Une telle étude aurait un intérêt en terme de techniques de recherche de preuves, puisque nous pouvons percevoir par avance plusieurs difficultés auxquelles nous serons confrontés. Parmi celles-ci, les techniques utilisées dans la méthode des tableaux pour PAL [10] semblent difficilement applicables à notre logique. En effet, cette méthode construisant des piles d'annonces semble, à première vue, ne pas pouvoir être étendue aux connecteurs multiplicatifs.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude logique de la dynamique des ressources en introduisant différentes formes de dynamique au sein des logiques de séparation. Après avoir présenté et comparé l'expressivité des logiques BI et BBI, nous nous sommes intéressés à l'étude des différentes formes de dynamiques de ressources pouvant être capturées par ces logiques. Pour cela, nous avons introduit de nouveaux réseaux de Petri à inconsistance et nous avons proposé une sémantique à base de ces réseaux pour BI. Il ressort de cette étude que la logique BI est capable de capturer une forme de dynamique, à savoir l'accessibilité entre des marquages dans de tels réseaux. Par ailleurs, nous avons aussi montré les limites de la dynamique capturée par cette approche en concluant à la nécessité de proposer des extensions modales de BI et BBI.

Cela nous a conduit à la proposition d'une première extension modale de BI, nommée DBI, permettant de modéliser et d'exprimer des propriétés dynamiques de ressources, c'est-à-dire des ressources dont les propriétés évoluent au fur et à mesure des itérations d'un système. Plus précisément, cela a été rendu possible par l'introduction d'un automate au sein des modèles de BI. Après avoir montré l'intérêt en termes d'expressivité de cette extension de BI sur un exemple à base de prix de produits évoluant en fonction du marché, nous nous sommes intéressés à la recherche de preuve en proposant un calcul des tableaux correcte et complète, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles. Pour finir, nous avons montré les limites de nos modèles sur notre exemple en concluant à la nécessité d'étendre ceux-ci dans le but de leur permettre de capturer des mécanismes de transformation de ressources.

Nous avons alors étendu DBI en proposant une nouvelle extension, nommée DMBI. Celle-ci nous a permis de modéliser des mécanismes de transformation de ressources, tels que la production ou la consommation. Pour cela, nous avons étendu les modèles de DBI, en permettant à l'automate constituant les modèles de la logique d'exécuter une action à chaque transition, ayant pour effet de produire et consommer des ressources. De retour sur notre exemple, notre logique nous a permis de modéliser des mécanismes d'achat et de vente de produits dont les prix fluctuent en fonction du marché, montrant alors que notre logique permettait de modéliser et d'exprimer des propriétés sur des systèmes manipulant (produisant et consommant) des ressources. Par ailleurs, nous avons aussi montré que malgré que les modèles de la logiques ne soient constitués que d'un unique automate, ces modèles étaient capables de capturer le comportement de processus concurrents synchrones et asynchrones, à condition que le nombre de processus reste constant. Pour finir, nous avons aussi proposé un calcul des tableaux correcte et complète avec extraction de contre-modèles.

Par la suite, nous avons réalisé une abstraction des modèles de la logique DMBI, en proposant une nouvelle logique, nommée LSM, pouvant être vue comme un noyau logique modale focalisé

sur la dynamique des ressources. Les modèles multi-dimensionnels (couples monde/ressource) de cette logique nous ont permis d'introduire de nouvelles modalités multiplicatives (en lien avec les ressources). Par ailleurs, nous avons montré que cette logique pouvait exprimer des propriétés d'accessibilité entre deux marquages dans un réseau de Petri temporisé (Time Petri net). Pour finir, nous avons aussi proposé un calcul des tableaux dont nous avons montré la correction et la complétude, et nous avons aussi fourni une méthode d'extraction de contre-modèles.

Pour terminer, nous avons étendu notre champ de recherche en nous intéressant à la logique dynamique épistémique, ayant pour objectif de modéliser et d'exprimer des propriétés sur la connaissance possédée par des agents. Pour cela, après avoir fait remarquer que les mondes possibles constituant les modèles de la logique épistémique pouvaient être vus comme des ressources, nous avons étendu la logique en intégrant la séparation provenant de BBI, permettant alors de pouvoir composer et décomposer ces mondes épistémiques. De plus, nous avons motivé notre extension par un exemple, montrant ainsi que notre nouvelle logique, nommée ESL, permettait d'exprimer de toutes nouvelles propriétés sur la connaissance, particulièrement en nous focalisant sur l'interaction entre les connecteurs multiplicatifs de la logique et les modalités épistémiques. Finalement, nous avons proposé un calcul des tableaux correctes et complets, ainsi qu'une méthode d'extraction de contre-modèles.

Concernant les travaux futurs, plusieurs voies s'offrent à nous. Dans un premier temps, nous souhaiterions nous intéresser à l'implantation d'un démonstrateur semi-automatique pour nos logiques, en nous appuyant sur les démonstrateurs réalisés pour BI [41] et pour BBI [51]. Contrairement aux travaux précédents, nous souhaiterions obtenir un outil pouvant être facilement étendu aux logiques que nous pourrions proposer dans le futur. Plus précisément, cet outil devra être capable de gérer différents types d'ensembles de contraintes et différents types de règles de clôtures.
Concernant les travaux sur la logique épistémique, nous souhaiterions étudier un calcul pour ESL étendu avec les annonces publiques.

Dans un contexte plus général, notre logique LSM apportent de nombreuses perspectives dans le domaine logique de la dynamique multidimensionnelle des ressources. En effet, nous souhaiterions étudier différentes extensions de cette logique, notamment en y intégrant d'une part la notion de *Trust Domain* [4, 5] (zone de confiance). Une telle extension permettrait d'introduire dans les modèles une notion de contexte et de coût : le comportement du système modélisé changerait en fonction du contexte dans lequel il se situe et chaque transition aurait un coût. D'autre part, les *bigraphs* [66, 67], graphes à deux dimensions (une pour les places et une autre pour les liens entre ces places), pourraient permettre d'introduire une extension intéressante de LSM, permettant de localiser les ressources à des places. De plus les ressources ne pourraient être manipulées par le système uniquement sous certaines conditions de liens entre les places où elles se situent. Concrètement, de tels modèles permettraient de capturer des systèmes où, par exemple, l'action "uploader fichier f vers m", consistant à copier le fichier f vers une machine distante m, ne pourrait être effectuée uniquement s'il existe un lien entre notre machine et m. Pour finir, une telle approche amènerait à considérer des liens dynamiques entre les places, c'est-à-dire des liens pouvant être rompus ou pouvant apparaître.

Pour finir, nos travaux nous ont amené à introduire la séparation au sein de la logique IS4 [83], une variante intuitionniste de la logique S4. Cette logique, encore à l'étude, nous permet de proposer des modèles capturant une troisième forme de dynamique de ressources nous intéres-

sant dans la problématique de cette thèse, à savoir la mise-à-jour de systèmes manipulant des ressources. Plus précisément, cette logique est capable de modéliser la mise-à-jour de réseaux de Petri à inconsistance, où "mise-à-jour" signifie ajout de places et de transitions dans les réseaux. Nous avons proposé un calcul correct et complet pour notre logique et nous souhaiterions étudier plus en profondeur l'expressivité de cette logique.

Bibliographie

[1] The european central bank's definition of euro area monetary aggregates. http ://www.ecb.europa.eu/stats/money/aggregates/aggr/html/hist.en.html.

[2] *Multiagent Systems : A Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1999.

[3] P.A. Abdulla and A. Nylén. Timed Petri Nets and BQOs. In *Applications and Theory of Petri Nets 2001*, volume 2075 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 53–70. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[4] G. Anderson, M. Collinson, and D. Pym. Trust Domains : An Algebraic, Logical, and Utility-theoretic Approach. In *6th International Conference on Trust & Trustworthy Computing*, 2013.

[5] G. Anderson and D. Pym. Combinators for Trust Domains in Security Modelling. In *Workshop on Logics for Resources, Processes, and Programs (satellite workshop of Tableaux 2013)*, 2013.

[6] R. Aumman and A. Brandenburger. Epistemic Conditions for Nash Equilibrium. *Econometrica*, 63(5) :1161–1180, 1995.

[7] A. Avron. Gentzen-type systems, resolution and tableaux. *Journal of Automated Reasoning*, 10(2) :265–281, 1993.

[8] P. Balbiani and J. Boudou. Decidability of Iteration-free PDL with Parallel Composition. In *Int Workshop on Automated Deduction : Decidability, Complexity, Tractability, ADDCT'14*, Vienna, Austria, July 2014.

[9] P. Balbiani, O. Gasquet, and F. Schwarzentruber. Agents that look at one another. *Logic Journal of the IGPL*, 21(3) :438–467, 2013.

[10] P. Balbiani, H. van Ditmarsch, A. Herzig, and T. De Lima. Tableaux for public announcement logic. *Journal of Logic and Computation*, 20(1) :55–76, 2010.

[11] A. Baltag. A Logic for Suspicious Players : Epistemic Actions and Belief-Updates in Games. *Bulletin of Economic Research*, 54(1) :1–45, 2002.

[12] A. Baltag, B. Coecke, and M. Sadrzadeh. Algebra and sequent calculus for epistemic actions. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 126 :27–52, 2005.

[13] A. Baltag, B. Coecke, and M. Sadrzadeh. Epistemic actions as resources. *Journal of Logic and Computation*, 17(3) :555–585, 2006.

[14] M.R.F. Benevides, R.P. de Freitas, and J.P. Viana. Propositional dynamic logic with storing, recovering and parallel composition. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 269(0) :95–107, 2011.

[15] N. Benton, G. Bierman, V. de Paiva, and M. Hyland. A term calculus for intuitionistic linear logic. In *Int. Conference on Typed Lambda Calculi and Applications, LNCS 664*, pages 75–90. Utrecht, The Netherlands, March 1993.

[16] B. Berthomieu and M. Diaz. Modeling and verification of time dependent systems using time petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 17(3) :259–273, 1991.

[17] N. Biri and D. Galmiche. A Separation Logic for Resource Distribution. In *23rd Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, FSTTCS'03, LNCS 2914*, pages 23–37, December 2003. Mumbai, India.

[18] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal logic*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2001.

[19] L. Cardelli and A.D. Gordon. Anytime, anywhere - modal logics for mobile ambients. In *27th ACM Symposium on Principles of Programming Languages, POPL 2000*, pages 1–13, Boston, USA, 2000.

[20] E. Clarke, O. Grumberg, and D. Peled. *Model Checking*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1999.

[21] M. Collinson, K. McDonald, and D. Pym. A substructural logic for layered graphs. *Journal of Logic and Computation*, 24(4) :953–988, 2014.

[22] M. Collinson, B. Monahan, and D. Pym. A Logical and Computational Theory of Located Resource. *Journal of Logic and Computation*, 19(6) :1207–1244, 2009.

[23] M. Collinson and D. Pym. Algebra and logic for resource-based systems modelling. *Mathematical Structures in Computer Science*, 19(5) :959–1027, 2009.

[24] M. Collinson, D. Pym, and C. Tofts. Erratum : Errata for Formal Aspects of Computing (2006) 18 :495–517 and their consequences. *Formal Aspects of Computing*, 19 :551–554, 2007.

[25] H. Comon-Lundh and V. Cortier. Security properties : two agents are sufficient. *Science of Computer Programming*, 50(1–3) :51–71, 2004.

[26] J.R. Courtault and D. Galmiche. A modal extension of Boolean BI for resource transformations. In *Int. Workshop on Logics for Resources, Processes, and Programs, LRPP'13*, Nancy, France, 2013.

[27] J.R. Courtault and D. Galmiche. A Modal BI Logic for Dynamic Resource Properties. In *Logical Foundations of Computer Science, LFCS 2013, LNCS 7734*, pages 134–148, 2013. San Diego, CA.

[28] J.R. Courtault, D. Galmiche, and D. Pym. A logic of separating modalities. http ://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/D.Pym/CGP15.pdf, submitted to a journal, 2015.

[29] D.E. Denning and G.M. Sacco. Timestamps in key distribution protocols. *Commun. ACM*, 24(8) :533–536, August 1981.

[30] R. Devillers, H. Klaudel, and M. Koutny. Petri Net Semantics of the Finite π-Calculus. In *Formal Techniques for Networked and Distributed Systems, FORTE 2004, LNCS 3235*, pages 309–325. 2004.

[31] J.Michael Dunn. Relevance logic and entailment. In *Handbook of Philosophical Logic*, volume 166, pages 117–224. Springer Netherlands, 1986.

[32] E.A. Emerson and E.M. Clarke. Using branching time temporal logic to synthesize synchronization skeletons. *Sci. Comput. Program.*, 2(3) :241–266, 1982.

[33] U. Engberg and G. Winskel. Petri Nets as Models of Linear Logic. In *CAAP 90, LNCS 431*, pages 144–161, Copenhagen, Denmark, May 1990.

[34] U. Engberg and G. Winskel. Completeness results for Linear Logic on Petri nets. *Annals of Pure and Applied Logic*, 86 :101–135, 1997.

[35] M.J. Fischer and R.E. Ladner. Propositional dynamic logic of regular programs. *Journal of Computer and System Sciences*, 18(2) :194–211, 1979.

[36] M. Fitting. *First-order Logic and Automated Theorem Proving (2Nd Ed.)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1996.

[37] D. Galmiche and D. Larchey-Wendling. Resource models and proof-search in Intuitionistic Linear Logic. Technical Report A00-R-341, 2000.

[38] D. Galmiche and D. Méry. Semantic Labelled Tableaux for Propositional BI without bottom. *Journal of Logic and Computation*, 13(5) :707–753, 2003.

[39] D. Galmiche and D. Mery. Characterizing Provability in BI's Pointer Logic through Resource Graphs. In *Int. Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, LPAR 2005*, pages 459–473, Montego Bay, Jamaica, 2005. Springer Verlag, LNAI 3835.

[40] D. Galmiche, D. Méry, and D. Pym. The Semantics of BI and Resource Tableaux. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(6) :1033–1088, 2005.

[41] D. Galmiche and D. Méry. BILL : A theorem prover for propositional BI logic. http ://webloria.loria.fr/∼dmery/tools/BILL/.

[42] J.D. Gerbrandy. *Bisimulations on Planet Kripke*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1999. ILLC Dissertation Series DS-1999-01.

[43] J.Y. Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1) :1–102, 1987.

[44] R. Goldblatt. *Logics of Time and Computation*. Logics of Time and Computation, 1987.

[45] D. Harel, J. Tiuryn, and D. Kozen. *Dynamic Logic*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2000.

[46] M. Hennessy and R. Milner. Algebraic laws for nondeterminism and concurrency. *Journal of the ACM*, 32(1) :137–161, January 1985.

[47] A. Herzig. A simple separation logic. In *Workshop on Logic, Language, Information and Computation, WoLLIC 13, LNCS 8071*, pages 168–178, 2013.

[48] A. Herzig and T. De Lima. Epistemic Actions and Ontic Actions : A Unified Logical Framework. In *Advances in Artificial Intelligence, LNCS 4140*, pages 409–418. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[49] J. Hintikka. *Knowledge and Belief*. Ithaca, N.Y.,Cornell University Press, 1962.

[50] C. A. R. Hoare. An axiomatic basis for computer programming. *Commun. ACM*, 12(10) :576–580, 1969.

[51] Z. Hóu, A. Tiu, and R. Goré. A Labelled Sequent Calculus for BBI : Proof Theory and Proof Search. In *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods, LNCS 8123*, pages 172–187. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[52] K. Ishihara and K. Hiraishi. The completeness of linear logic for petri net models. *Logic Journal of the IGPL*, 9(4) :549–567, 2001.

[53] S. Ishtiaq and P. O'Hearn. BI as an Assertion Language for Mutable Data Structures. In *28th ACM Symposium on Principles of Programming Languages, POPL 2001*, pages 14–26, London, UK, 2001.

[54] J.-J.Meyer and W. Van Der Hoek. *Epistemic Logic for AI and Computer Science*. Tracts in Theoretical Computer Science 41. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1995.

[55] B. Kooi. Expressivity and completeness for public update logics via reduction axioms. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2) :231–253, 2007.

[56] D. Lange, M. Oshima, G. Karjoth, and K. Kosaka. Aglets : Programming mobile agents in java. In *Worldwide Computing and Its Applications, LNCS 1274*, pages 253–266. Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[57] D. Larchey-Wendling. The formal strong completeness of partial monoidal Boolean BI. *To appear in Journal of Logic and Computation*, 2014.

[58] D. Larchey-Wendling and D. Galmiche. Exploring the Relation between Intuitionistic BI and Boolean BI : An unexpected embedding. *Mathematical Structures in Computer Science*, 19 :1–66, 2009.

[59] D. Larchey-Wendling and D. Galmiche. The Undecidability of Boolean BI through Phase Semantics. In *25th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science - LICS 2010*, pages 140–149, Edinburgh, United Kingdom, 2010. IEEE.

[60] D. Larchey-Wendling and D. Galmiche. Nondeterministic Phase Semantics and the Undecidability of Boolean BI. *ACM Transactions on Computational Logic*, 14(1) :1–41, February 2013.

[61] W. Lenzen. Recent work in epistemic logic. *Acta Philosophia Fennica*, 30 :1–219, 1978.

[62] N. Lohmann. A feature-complete Petri net semantics for WS-BPEL 2.0 and its compiler BPEL2oWFN. Technical report, Humboldt-Universität zu Berlin, 2007. Technical Report.

[63] G. Lowe. Breaking and fixing the needham-schroeder public-key protocol using fdr. In *Tools and Algorithms for Construction and Analysis of Systems, Second International Workshop, TACAS '96, LNCS 1055*, pages 147–166. Springer, 1996. Passau, Germany.

[64] M. Mathieu and S. Mehrnoosh. Reasoning about Knowledge in Linear Logic : Modalities and Complexity. In *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, pages 327–350. Kluwer Academic Publishers, 2003.

[65] P.M. Merlin. *A study of the recoverability of computing systems*. PhD thesis, University of California, Irvine, 1974.

[66] Robin Milner. Bigraphs and their algebra. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 209(0) :5–19, 2008. Proceedings of the {LIX} Colloquium on Emerging Trends in Concurrency Theory (LIX 2006).

[67] Robin Milner. *The Space and Motion of Communicating Agents*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1st edition, 2009.

[68] D. Méry. *Preuves et Sémantiques dans des Logiques de Ressources*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, 2004.

[69] R.M. Needham and M.D. Schroeder. Using encryption for authentication in large networks of computers. *Commun. ACM*, 21(12) :993–999, December 1978.

[70] P. O'Hearn, J. Reynolds, and S. Ishtiaq. Local Reasoning about Programs that Alter Data Structures. In *Computer Science Logic, LNCS 2142*, pages 1–19. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[71] Peter O'Hearn and Hongseok Yang. Petri net semantics of bunched implications. 1999, Unpublished draft.

[72] P.W. O'Hearn and D. Pym. The Logic of Bunched Implications. *Bulletin of Symbolic Logic*, 5(2) :215–244, 1999.

[73] J.A. Plaza. Logics of public communications. In *Proc. of the 4th ISMIS*, pages 201–216. Oak Ridge National Laboratory, 1989.

[74] A. Pnueli. The temporal logic of programs. In *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, SFCS '77, pages 46–57, Washington, DC, USA, 1977. IEEE Computer Society.

[75] D. Pym. *The Semantics and Proof Theory of the Logic of Bunched Implications*, volume 26 of *Applied Logic Series*. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[76] D. Pym and C. Tofts. A Calculus and logic of resources and processes. *Formal Aspects of Computing*, 18(4) :495–517, 2006.

[77] D. Pym and C. Tofts. Systems Modelling via Resources and Processes : Philosophy, Calculus, Semantics, and Logic. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 172 :545–587, 2007.

[78] Y. Moses R. Fagin, J. Halpern and M. Vardi. *Reasoning About Knowledge*. MIT Press, Cambridge MA, 1995.

[79] S. Read. *Relevant Logic : A Philosophical Examination of Inference*. B. Blackwell, 1988.

[80] G. Restall. *An Introduction to Substructural Logics*. Routledge, 2000.

[81] J. Reynolds. Separation Logic : A Logic for Shared Mutable Data Structures. In *IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 55–74, Copenhagen, Danemark, July 2002.

[82] P. Schroeder-Heister and K. Dosen. *Substructural Logics*. Oxford University Press, 1993.

[83] A. Simpson. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*. PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.

[84] C. Stahl. A Petri Net Semantics for BPEL. Informatik-Berichte 188, Humboldt-Universität zu Berlin, July 2005. Technical Report.

[85] V. Valero, D. Frutos-Escrig, and F. R. F. Cuartero. On non-decidability of reachability for timed-arc Petri nets. In *Petri Nets and Performance Models, 1999. Proceedings. The 8th International Workshop on*, pages 188–196, 1999.

[86] J. van Benthem and F. Liu. Dynamic logic of preference upgrade. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2) :157–182, 2007.

[87] J. van Benthem, J. van Eijck, and B. Kooi. Logics of communication and change. *Information and Computation*, 204(11) :1620–1662, 2006.

[88] H. van Ditmarsch. The Logic of Pit. *Synthese*, 149(2) :343–374, 2006.

[89] H. van Ditmarsch. *Dynamic Epistemic Logic*. Springer Publishing Company, 2007.

[90] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, and B. Kooi. Dynamic Epistemic Logic with Assignment. In *Proceedings of the Fourth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, AAMAS '05, pages 141–148, New York, NY, USA, 2005. ACM.

[91] M. Woolridge. *Introduction to Multiagent Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 2001.

[92] D.N. Yetter. Quantales and (noncommutative) linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 55(1) :41–64, 1990.

Annexe A

Preuves de la Section 4.3

Proposition 4.3.3. La fonction $\mu_{list} : \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}) \times \mathfrak{M}(R_{atom}) \rightharpoonup \mathfrak{M}(R_{atom})$ satisfait les propriétés de μ-unité et de μ-composition.

Preuve. De manière évidente, la propriété de μ-unité est satisfaite puisque $\mu_{list}([], R) = R$, par définition. Nous montrons la propriété de μ-composition. Soit $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom})$ et $R \in \mathfrak{M}(R_{atom})$. Supposons que $\mu_{list}(L_1, R) \downarrow$ et $\mu_{list}(L_2, \mu_{list}(L_1, R)) \downarrow$. Nous montrons que la propriété de μ-composition est vérifiée par induction sur la taille l de L_1 ($l = |L_1|$) :

- Cas de base ($l = 0$) :
  Dans ce cas $L_1 = []$. Donc nous avons $L_1 \oplus L_2 = L_2$ et $\mu_{list}(L_1, R) = R$. En conséquence $\mu_{list}(L_2, \mu_{list}(L_1, R)) = \mu_{list}(L_2, R) = \mu_{list}(L_1 \oplus L_2, R)$ et $\mu_{list}(L_1 \oplus L_2, R)$ est alors défini.
- Cas inductif :
  Nous supposons que la propriété de μ-composition est vérifiée pour tous L_1 et L_2 tels que $|L_1| \leqslant l$ (HI). Nous prouvons la propriété pour les listes L_1 et L_2 telles que $|L_1| = l + 1$. Nous notons $L_1 = [A_1; ...; A_{l+1}]$. Comme $\mu_{list}(L_1, R) \downarrow$ alors, par définition, nous avons $\mu^{\#}(A_1, R) \downarrow$ et $\mu_{list}([A_2; ...; A_{l+1}], \mu^{\#}(A_1, R)) \downarrow$ et alors $\mu_{list}(L_2, \mu_{list}(L_1, R)) = \mu_{list}(L_2, \mu_{list}([A_1; ...; A_{l+1}], R)) = \mu_{list}(L_2, \mu_{list}([A_2; ...; A_{l+1}], \mu^{\#}(A_1, R)))$. Par (HI), nous avons donc $\mu_{list}([A_2; ...; A_{l+1}] \oplus L_2, \mu^{\#}(A_1, R)) \downarrow$ et $\mu_{list}([A_2; ...; A_{l+1}] \oplus L_2, \mu^{\#}(A_1, R)) = \mu_{list}(L_2, \mu_{list}([A_2; ...; A_{l+1}], \mu^{\#}(A_1, R)))$. Comme nous avons $\mu^{\#}(A_1, R) \downarrow$ et aussi comme $\mu_{list}([A_2; ...; A_{l+1}] \oplus L_2, \mu^{\#}(A_1, R)) \downarrow$ alors $\mu_{list}(L_1 \oplus L_2, R) = \mu_{list}([A_1; ...; A_{l+1}] \oplus L_2, R) = \mu_{list}([A_2; ...; A_{l+1}] \oplus L_2, \mu^{\#}(A_1, R))$. En conclusion, nous avons $\mu_{list}(L_1 \oplus L_2, R) \downarrow$ et $\mu_{list}(L_1 \oplus L_2, R) = \mu_{list}(L_2, \mu_{list}(L_1, R))$.

□

Proposition 4.3.4. La relation $|\cdot\rangle_{list} : S^{\#} \times \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom}) \times S^{\#}$ satisfait les propriétés de $\|\cdot\rangle$-unité et de $\|\cdot\rangle$-composition.

Preuve. La propriété de $\|\cdot\rangle$-unité est satisfaite, par définition. Soit $S_1, S_2, S_3 \in S^{\#}$ et $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}(Act^{\#}_{atom})$ tels que $S_1 \,|L_1\rangle_{list}\, S_2$ et $S_2 \,|L_2\rangle_{list}\, S_3$. Si $L_1 = []$ alors $S_1 = S_2$, donc $S_1 \,|L_2\rangle_{list}\, S_3$, en conséquence $S_1 \,|L_1 \oplus L_2\rangle_{list}\, S_3$. Le cas $L_2 = []$ est similaire. Nous considérons maintenant le cas où L_1 et L_2 ne sont pas des listes vides. Donc, il existe $A_1, ..., A_k, A'_1, ..., A'_l \in Act^{\#}_{atom}$ tels que $L_1 = [A_1; ...; A_k]$ et $L_2 = [A'_1; ...; A'_l]$. Par définition, il existe $U_1, ..., U_{k-1}, V_1, ..., V_{l-1} \in S^{\#}$ tels que $S_1 \,|A_1\rangle \,\#\, U_1 \,|A_2\rangle \,\#\, ... \,|A_{k-1}\rangle \,\#\, U_{k-1} \,|A_k\rangle \,\#\, S_2$ et $S_2 \,|A'_1\rangle \,\#\, V_1 \,|A'_2\rangle \,\#\, ... \,|A'_{l-1}\rangle \,\#\, V_{l-1} \,|A'_l\rangle \,\#\, S_3$. Donc $S_1 \,|A_1\rangle \,\#\, U_1 \,|A_2\rangle \,\#\, ... \,|A_{k-1}\rangle \,\#\, U_{k-1} \,|A_k\rangle \,\#\, S_2 \,|A'_1\rangle \,\#\, V_1 \,|A'_2\rangle \,\#\, ... \,|A'_{l-1}\rangle \,\#\, V_{l-1} \,|A'_l\rangle \,\#\, S_3$. En conclusion, nous avons $S_1 \,|L_1 \oplus L_2\rangle_{list}\, S_3$. □

Annexe B

Preuve du Lemme 4.7.5

Dans cette annexe, nous prouvons le Lemme 4.7.5, à savoir qu'il existe un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de μ-tableau clos. Nous rappelons qu'un oracle est ensemble de CSS non clos, $\preccurlyeq$-clos, à caractère fini et saturé.

Définition B.1 (Propriété de consistance)**.** Une *propriété de consistance* est un ensemble de CSS $\mathcal{P}$ satisfaisant les conditions suivantes, pour tout CSS $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$, pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{DMBI}}$, pour tout $f \in \Sigma_{Act}$, pour tout $x, y \in L_r$ et tout $u \in L_s$:

1. $\mathbb{T}\phi : (x,u) \notin \mathcal{F}$ ou $\mathbb{F}\phi : (y,u) \notin \mathcal{F}$ ou $x \sim y \notin \overline{\mathcal{C}}$
2. $\mathbb{F}\mathrm{I} : (x,u) \notin \mathcal{F}$ ou $1_r \sim x \notin \overline{\mathcal{C}}$
3. $\mathbb{T}\bot : (x,u) \notin \mathcal{F}$
4. Si $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\} \rangle \in \mathcal{P}$
5. Si $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$
6. Si $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$
7. Si $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists c_i, c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $c_i \neq c_j$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\} \rangle \in \mathcal{P}$
8. Si $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y, z \in L_r$, $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$
9. Si $\mathbb{T}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $xy \sim xy \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (xy,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$
10. Si $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,u), \mathbb{F}\psi : (xc,u)\}, \mathcal{C} \cup \{xc \sim xc\} \rangle \in \mathcal{P}$
11. Si $\mathbb{T}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\exists l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \rangle \in \mathcal{P}$
12. Si $\mathbb{F}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $\forall v \in L_s$, $(x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}) \Rightarrow \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$
13. Si $\mathbb{T}\Diamond \phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\exists c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\exists d \in \gamma_a \setminus \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$, $\exists l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{d}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{d}{\rightarrowtail} l\} \rangle \in \mathcal{P}$
14. Si $\mathbb{F}\Diamond \phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall y \in L_r$, $\forall f \in L_a$, $\forall v \in L_s$, $(x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}) \Rightarrow \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}$

Définition B.2 (Propriété de consistance alternative)**.** Une *propriété de consistance alternative* est un ensemble de CSS $\mathcal{P}$ satisfaisant les conditions de propriété de consistance, à l'exception des conditions 7, 10, 11 et 13, qui sont remplacées respectivement par les conditions 7', 10', 11' et 13' suivantes :

7'. Si $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall c_i \neq c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}$

10'. Si $\mathbb{F}\phi \mathrel{-\!\!*} \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,u), \mathbb{F}\psi : (xc,u)\}, \mathcal{C} \cup \{xc \sim xc\}\rangle \in \mathcal{P}$

11'. Si $\mathbb{T}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\forall l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle \in \mathcal{P}$

13'. Si $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ alors $\forall c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\forall d \in \gamma_a \setminus \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$, $\forall l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{d}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{d}{\rightarrowtail} l\}\rangle \in \mathcal{P}$

Les conditions 1, 2 et 3 assurent que les CSS ne sont pas clos. Les autres conditions assurent que si nous appliquons une règle de la Figure 10 sur un CSS de $\mathcal{P}$, alors un des nouveaux CSS obtenus appartient à $\mathcal{P}$. En d'autres termes, un ensemble de CSS non clos et saturé est une propriété de consistence alternative.

Proposition B.3. L'ensemble de tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de μ-tableau clos est une propriété de consistance.

Preuve. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de tableau clos. Nous montrons que $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$:

1. Si $\mathbb{T}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$ alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est clos, ce qui est contradictoire puisque $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$ (il n'existe pas de μ-tableau clos pour ce CSS).
2. Similaire au cas 1.
3. Similaire au cas 1.
4. Supposons que $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}$. Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle \notin \mathcal{P}$ (il existe un μ-tableau clos pour ce CSS). Par la règle $\langle \mathbb{T}\mathrm{I}\rangle$, $[\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}$.
5. Supposons que $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{T} \to\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle; \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$.
6. Supposons que $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{F} \to\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$.
7. Supposons que $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Choisissons $c_i \neq c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ (ces constantes existent car γ_r est infini et $\mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ est fini parce que $\mathcal{C}$ est fini). Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{T} *\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}$.

8. Supposons que $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $y,z \in L_r$ tels que $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{F}*\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle; \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$.
9. Similaire au cas 8.
10. Similaire au cas 7.
11. Supposons que $\mathbb{T}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Choisissons $c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$ (ces constantes existent car γ_r et L_s sont infinis et $\mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C})$ sont finis car $\mathcal{C}$ est fini). Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{T}\langle f\rangle\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle \in \mathcal{P}$.
12. Supposons que $\mathbb{F}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $y \in L_r$ et $v \in L_s$ tels que $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{F}\langle f\rangle\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$.
13. Supposons que $\mathbb{T}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Choisissons $c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $d \in \gamma_a \setminus \mathcal{A}_a(\mathcal{C})$ et $l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$ (ces constantes existent car γ_r, γ_a et L_s sont infinis et $\mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $\mathcal{A}_a(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C})$ sont finis car $\mathcal{C}$ est fini). Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{d}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{d}{\rightarrowtail} l\}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{T}\Diamond\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{d}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{d}{\rightarrowtail} l\}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{d}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{d}{\rightarrowtail} l\}\rangle \in \mathcal{P}$.
14. Supposons que $\mathbb{F}\Diamond\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $y \in L_r$, $f \in L_a$ et $v \in L_s$ tels que $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Supposons maintenant que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}$. Par la règle $\langle \mathbb{F}\Diamond\rangle$, $[\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle]$ est un μ-tableau pour $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ a un μ-tableau clos, ce qui est contradictoire. En conséquence $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$.

En conclusion, $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance. □

Proposition B.4. Toute propriété de consistance peut être étendue en une propriété de consistance $\preccurlyeq$-close.

Preuve. Soit $\mathcal{P}$ une propriété de consistance. Soit $\mathcal{P}^{\preccurlyeq}$ sa $\preccurlyeq$-clôture définie par :

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq} \text{ ssi } \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle \text{ pour un } \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$$

$\mathcal{P}^{\preccurlyeq}$ est bien une extension de $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$) par réflexivité de $\preccurlyeq$ et $\mathcal{P}^{\preccurlyeq}$ est $\preccurlyeq$-close par transitivité de $\preccurlyeq$.
Nous montrons maintenant que $\mathcal{P}^{\preccurlyeq}$ est une propriété de consistance. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$. Alors il existe $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$ tel que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$.

1. Supposons que $\mathbb{T}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors $\mathbb{T}\phi : (x,u) \in \mathcal{F}'$ et $\mathbb{F}\phi : (y,u) \in \mathcal{F}'$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}'}$ parce que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$. Mais ceci est contradictoire parce que $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ satisfait la condition 1 de la Définition B.1.

2. Similaire au cas 1.
3. Similaire au cas 1.
4. Supposons que $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ alors $\mathbb{T}\mathrm{I} : (x,u) \in \mathcal{F}'$. Donc $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \cup \{1_r \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ et $\mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\} \subseteq \mathcal{C}' \cup \{1_r \sim x\}$ alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$.
5. Supposons que $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ alors $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'$. Donc $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$. Mais $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}'\rangle$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'\rangle$. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$.
6. Supposons que $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ alors $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'$. donc $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$. Mais $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'\rangle$. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$.
7. Supposons que $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ alors $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'$. Donc il existe $c_i, c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}')$ tels que $c_i \neq c_j$, $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C}' \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ alors $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_r(\mathcal{C}')$. Donc $\gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}') \subseteq \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$. De plus, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C}' \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle$. Par conséquent $c_i, c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $c_i \neq c_j$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$.
8. Supposons que $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $y, z \in L_r$ tels que $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ alors $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'$ et $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}'}$. Donc $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$. De plus, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}'\rangle$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}'\rangle$. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$.
9. Similaire au cas 8.
10. Similaire au cas 7.
11. Supposons que $\mathbb{T}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ alors $\mathbb{T}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}'$. Donc il existe $c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}')$ et $l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C}')$ tels que $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C}' \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ alors $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_r(\mathcal{C}')$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_s(\mathcal{C}')$. Donc $\gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}') \subseteq \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C}') \subseteq L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. Alors $c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. De plus, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C}' \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle$. Par conséquent $c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, $l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$.
12. Supposons que $\mathbb{F}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $y \in L_r$ et $v \in L_s$ tels que $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$ alors $\mathbb{F}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}'$, $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}'}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}'}$. Donc $\langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}$. De plus, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}' \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}'\rangle$. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{\preccurlyeq}$.
13. Similaire au cas 11.
14. Similaire au cas 12.

□

Définition B.5 (Substitution)**.** Une *substitution* est une fonction $\sigma : \gamma_r \cup \{1_r\} \cup \Sigma_{Act} \cup \gamma_a \cup \{1_a\} \cup L_s \longrightarrow \gamma_r \cup \{1_r\} \cup \Sigma_{Act} \cup \gamma_a \cup \{1_a\} \cup L_s$, telle que :
- $\forall c_i \in \gamma_r \cdot \sigma(c_i) \in \gamma_r$

- $\forall d_i \in \gamma_a \cdot \sigma(d_i) \in \gamma_a$
- $\forall l_i \in L_s \cdot \sigma(l_i) \in L_s$
- $\forall f \in \Sigma_{Act} \cdot \sigma(f) = f$
- $\sigma(1_r) = 1_r$
- $\sigma(1_a) = 1_a$

Nous étendons cette définition aux labels de ressources et d'actions ainsi :
- Si $c_{i_1}, ..., c_{i_k} \in \gamma_r$ alors $\sigma(c_{i_1} \circ ... \circ c_{i_k}) = \sigma(c_{i_1}) \circ ... \circ \sigma(c_{i_k})$
- Si $f_{i_1}, ..., f_{i_k} \in \Sigma_{Act} \cup \gamma_a$ alors $\sigma(f_{i_1} \centerdot ... \centerdot f_{i_k}) = \sigma(f_{i_1}) \centerdot ... \centerdot \sigma(f_{i_k})$

Nous étendons cette définition aux formules signées et aux contraintes ainsi :
- Pour toute formule signée $\mathbb{S}\phi : (x, u)$, $\sigma(\mathbb{S}\phi : (x, u)) = \mathbb{S}\phi : (\sigma(x), \sigma(u))$
- Pour toute contrainte de ressources $x \sim y$, $\sigma(x \sim y) = \sigma(x) \sim \sigma(y)$
- Pour toute μ-contrainte $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y$, $\sigma(x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y) = \sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y)$
- Pour toute contrainte de transitions $u \overset{f}{\rightarrowtail} v$, $\sigma(u \overset{f}{\rightarrowtail} v) = \sigma(u) \overset{\sigma(f)}{\rightarrowtail} \sigma(v)$

Finalement, nous étendons cette définition aux ensembles de formules signées et de contraintes ainsi :
- Pour tout ensemble de formules signées $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{F}) = \{\mathbb{S}\phi : (\sigma(x), \sigma(u)) \mid \mathbb{S}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}\}$
- Pour tout ensemble de contraintes $\mathcal{C}$, $\sigma(\mathcal{C}) = \{\sigma(x) \sim \sigma(y) \mid x \sim y \in \mathcal{C}\} \cup \{\sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y) \mid x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}\} \cup \{\sigma(u) \overset{\sigma(f)}{\rightarrowtail} \sigma(v) \mid u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \mathcal{C}\}$

Lemme B.6. Soit σ une substitution. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Nous avons $\sigma(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \overline{\sigma(\mathcal{C})}$.

Preuve. Soit $\mathcal{C}^\dagger$ l'ensemble de contraintes défini par :
- $x \sim y \in \mathcal{C}^\dagger$ ssi $\sigma(x) \sim \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$
- $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}^\dagger$ ssi $\sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$
- $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \mathcal{C}^\dagger$ ssi $\sigma(u) \overset{\sigma(f)}{\rightarrowtail} \sigma(v) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$

Nous montrons dans un premier temps que $\overline{\mathcal{C}^\dagger} \subseteq \mathcal{C}^\dagger$. Soit $c \in \overline{\mathcal{C}^\dagger}$ une constrainte. Nous montrons alors que $c \in \mathcal{C}^\dagger$. Il y a alors deux cas.
Le premier cas est : $c \in \overline{\mathcal{C}^\dagger}$ parce que $c \in \mathcal{C}^\dagger$, alors la propriété est trivialement vérifiée.
Le second cas est : c est obtenu par des règles de la Figure 9. Nous montrons alors que $c \in \mathcal{C}^\dagger$ par induction sur la taille n de l'arbre de dérivation de c.
- Cas de base ($n = 0$) :
  Dans ce cas, l'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{}{1_r \sim 1_r}\,\langle 1_r \rangle$ et c est la contrainte $1_r \sim 1_r$. Par la règle $\langle 1_r \rangle$, $1_r \sim 1_r \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Comme $\sigma(1_r) = 1_r$ alors $\sigma(1_r) \sim \sigma(1_r) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par définition de $\mathcal{C}^\dagger$, $1_r \sim 1_r \in \mathcal{C}^\dagger$. Donc $c \in \mathcal{C}^\dagger$.
- Cas inductif :
  Nous supposons que toute contrainte de $\overline{\mathcal{C}^\dagger}$ ayant un arbre de dérivation dont la taille est au plus n appartient à $\mathcal{C}^\dagger$ (HI). Nous montrons que toute contrainte de $\overline{\mathcal{C}^\dagger}$ ayant un arbre de dérivation de taille $n + 1$ appartient à $\mathcal{C}^\dagger$.
  - Cas $\langle t_r \rangle$:
    L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\overset{...}{x \sim y} \quad \overset{...}{y \sim z}}{x \sim z}\,\langle t_r \rangle$ et c est la contrainte $x \sim z$.
    Par (HI), nous avons $x \sim y \in \mathcal{C}^\dagger$ et $y \sim z \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(x) \sim \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(y) \sim \sigma(z) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle t_r \rangle$, $\sigma(x) \sim \sigma(z) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $x \sim z \in \mathcal{C}^\dagger$.

- Cas $\langle c_r \rangle$:

  L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\overset{\dots}{\overline{x \sim y}} \quad \overset{\dots}{\overline{yk \sim yk}}}{xk \sim yk}\,\langle c_r \rangle$ et c est la contrainte $xk \sim yk$. Par (HI), nous avons $x \sim y \in \mathcal{C}^\dagger$ et $yk \sim yk \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(x) \sim \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(yk) \sim \sigma(yk) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par définition de la substitution, $\sigma(x) \sim \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(y) \circ \sigma(k) \sim \sigma(y) \circ \sigma(k) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle c_r \rangle$, $\sigma(x) \circ \sigma(k) \sim \sigma(y) \circ \sigma(k) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $\sigma(xk) \sim \sigma(yk) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par conséquent $xk \sim yk \in \mathcal{C}^\dagger$.
- Cas $\langle k_r \rangle$:

  L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\overset{\dots}{\overline{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}} \quad \overset{\dots}{\overline{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z}}}{y \sim z}\,\langle k_r \rangle$ et c est la contrainte $y \sim z$. Par (HI), nous avons $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}^\dagger$ et $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} z \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(z) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle k_r \rangle$, $\sigma(y) \sim \sigma(z) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $y \sim z \in \mathcal{C}^\dagger$.
- Les cas $\langle s_r \rangle$, $\langle d_r \rangle$ et $\langle a_{r_1} \rangle$ sont similaires.
- Cas $\langle 1_\mu \rangle$:

  L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\overset{\dots}{\overline{x \sim x}}}{x \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} x}\,\langle 1_\mu \rangle$ et c est la contrainte $x \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} x$. Par (HI), nous avons $x \sim x \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(x) \sim \sigma(x) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle 1_\mu \rangle$, $\sigma(x) \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} \sigma(x) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Comme $\sigma(1_a) = 1_a$ alors $\sigma(x) \overset{\sigma(1_a)}{\twoheadrightarrow} \sigma(x) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $x \overset{1_a}{\twoheadrightarrow} x \in \mathcal{C}^\dagger$.
- Cas $\langle t_\mu \rangle$:

  L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\overset{\dots}{\overline{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}} \quad \overset{\dots}{\overline{y \overset{g}{\twoheadrightarrow} z}}}{x \overset{fg}{\twoheadrightarrow} z}\,\langle t_\mu \rangle$ et c est la contrainte $x \overset{fg}{\twoheadrightarrow} z$. Par (HI), nous avons $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}^\dagger$ et $y \overset{g}{\twoheadrightarrow} z \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(y) \overset{\sigma(g)}{\twoheadrightarrow} \sigma(z) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle t_\mu \rangle$, $\sigma(x) \overset{\sigma(f)\bullet\sigma(g)}{\twoheadrightarrow} \sigma(z) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $\sigma(x) \overset{\sigma(fg)}{\twoheadrightarrow} \sigma(z) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par conséquent $x \overset{fg}{\twoheadrightarrow} z \in \mathcal{C}^\dagger$.
- Cas $\langle k_{\mu_1} \rangle$:

  L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\overset{\dots}{\overline{x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}} \quad \overset{\dots}{\overline{x \sim x'}}}{x' \overset{f}{\twoheadrightarrow} y}\,\langle k_{\mu_1} \rangle$ et c est la contrainte $x' \overset{f}{\twoheadrightarrow} y$. Par (HI), nous avons $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}^\dagger$ et $x \sim x' \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(x) \sim \sigma(x') \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle k_{\mu_1} \rangle$, $\sigma(x') \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $x' \overset{f}{\twoheadrightarrow} y \in \mathcal{C}^\dagger$.
- Le cas pour $\langle k_{\mu_2} \rangle$ est similaire.
- Cas $\langle 1_{t_1} \rangle$:

  L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\overset{\dots}{\overline{u \overset{f}{\rightarrowtail} v}}}{u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u}\,\langle 1_{t_1} \rangle$ et c est la contrainte $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u$. Par (HI), nous avons $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(u) \overset{\sigma(f)}{\rightarrowtail} \sigma(v) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle 1_{t_1} \rangle$, $\sigma(u) \overset{1_a}{\rightarrowtail} \sigma(u) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Comme $\sigma(1_a) = 1_a$ alors $\sigma(u) \overset{\sigma(1_a)}{\rightarrowtail} \sigma(u) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc

$u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \mathcal{C}^\dagger$.

- Le cas pour $\langle 1_{t_2} \rangle$ est similaire.
- Cas $\langle t_t \rangle$:

  L'arbre de dérivation est de la forme $\dfrac{\dfrac{\dots}{u \overset{f}{\rightarrowtail} v} \quad \dfrac{\dots}{v \overset{g}{\rightarrowtail} w}}{u \overset{fg}{\rightarrowtail} w}\langle t_t \rangle$ et c est la contrainte $u \overset{fg}{\rightarrowtail} w$. Par (HI), nous avons $u \overset{f}{\rightarrowtail} v \in \mathcal{C}^\dagger$ et $v \overset{g}{\rightarrowtail} w \in \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(u) \overset{\sigma(f)}{\rightarrowtail} \sigma(v) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(v) \overset{\sigma(g)}{\rightarrowtail} \sigma(w) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la règle $\langle t_t \rangle$, $\sigma(u) \overset{\sigma(f)\bullet\sigma(g)}{\rightarrowtail} \sigma(w) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $\sigma(u) \overset{\sigma(fg)}{\rightarrowtail} \sigma(w) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par conséquent $u \overset{fg}{\rightarrowtail} w \in \mathcal{C}^\dagger$.

Donc $\overline{\mathcal{C}^\dagger} \subseteq \mathcal{C}^\dagger$. Par définition, $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Soit $c \in \mathcal{C}$. Nous avons $\sigma(c) \in \sigma(\mathcal{C})$. Donc $\sigma(c) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Alors $c \in \mathcal{C}^\dagger$. Par conséquent $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^\dagger$ et nous avons aussi $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \overline{\mathcal{C}^\dagger}$. Donc $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^\dagger$. Maintenant, soit $c' \in \sigma(\overline{\mathcal{C}})$. Il y a trois cas :

- c' est de la forme $x \sim y$:
  Il existe alors $m \sim n \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $x = \sigma(m)$ et $y = \sigma(n)$. Comme $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^\dagger$ Alors $m \sim n \in \mathcal{C}^\dagger$. Donc $\sigma(m) \sim \sigma(n) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et nous avons $c' \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$.
- c' est de la forme $x \overset{f}{\twoheadrightarrow} y$:
  Il existe alors $m \overset{o}{\twoheadrightarrow} n \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $x = \sigma(m)$, $f = \sigma(o)$ et $y = \sigma(n)$. Comme $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^\dagger$ Alors $m \overset{o}{\twoheadrightarrow} n \in \mathcal{C}^\dagger$. Donc $\sigma(m) \overset{\sigma(o)}{\twoheadrightarrow} \sigma(n) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et nous avons $c' \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$.
- c' est de la forme $u \overset{f}{\rightarrowtail} v$:
  Il existe alors $m \overset{o}{\rightarrowtail} n \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $u = \sigma(m)$, $f = \sigma(o)$ et $v = \sigma(n)$. Comme $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^\dagger$ Alors $m \overset{o}{\rightarrowtail} n \in \mathcal{C}^\dagger$. Donc $\sigma(m) \overset{\sigma(o)}{\rightarrowtail} \sigma(n) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et nous avons $c' \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$.

En conclusion $\sigma(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. □

Corollaire B.7. Soit σ une substitution et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes. Si $c \in \overline{\mathcal{C}}$ alors $\sigma(c) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$.

Preuve. Soit $c \in \overline{\mathcal{C}}$. Par définition, $\sigma(c) \in \sigma(\overline{\mathcal{C}})$. Par le Lemme B.6, nous avons $\sigma(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $\sigma(c) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. □

Proposition B.8. Soit σ une substitution. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Si $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est un CSS alors $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle$ est un CSS
2. Si $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle$ est un CSS fini alors $\langle \sigma(\mathcal{F}_f), \sigma(\mathcal{C}_f) \rangle$ est un CSS fini.
3. Si $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$ alors $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle \preccurlyeq \langle \sigma(\mathcal{F}'), \sigma(\mathcal{C}') \rangle$.

Preuve. Soit σ une substitution.

1. Supposons que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ soit un CSS. Nous devons montrer que $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle$ satisfait la propriété (P_{css}) de la Définition 4.4.15. Soit $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \sigma(\mathcal{F})$. Par définition, il existe $\mathbb{S}\phi : (x', u') \in \mathcal{F}$ tel que $x = \sigma(x')$ et $u = \sigma(u')$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est un CSS alors, par (P_{css}), $x' \sim x' \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u' \overset{1_a}{\rightarrowtail} u' \in \overline{\mathcal{C}}$. Par le Corollaire B.7, $\sigma(x') \sim \sigma(x') \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(u') \overset{\sigma(1_a)}{\rightarrowtail} \sigma(u') \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Donc $x \sim x \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $u \overset{1_a}{\rightarrowtail} u \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par conséquent, (P_{css}) est vérifiée et alors $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle$ est un CSS.
2. Soit $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle$ un CSS fini. Par la propriété précédente, $\langle \sigma(\mathcal{F}_f), \sigma(\mathcal{C}_f) \rangle$ est un CSS. Nous montrons que $\langle \sigma(\mathcal{F}_f), \sigma(\mathcal{C}_f) \rangle$ est fini. Comme σ est surjective et comme $\mathcal{F}_f$ et $\mathcal{C}_f$ sont finis, alors $\sigma(\mathcal{F}_f)$ et $\sigma(\mathcal{C}_f)$ sont finis. Donc $\langle \sigma(\mathcal{F}_f), \sigma(\mathcal{C}_f) \rangle$ est un CSS fini.

3. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ et $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$ deux CSS finis tels que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$. Soit $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \sigma(\mathcal{F})$. Alors il existe $m \in L_r$ et $n \in L_s$ tels que $x = \sigma(m)$, $u = \sigma(n)$ et $\mathbb{S}\phi : (m, n) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle$ alors $\mathbb{S}\phi : (m, n) \in \mathcal{F}'$. Donc $\mathbb{S}\phi : (x, u) \in \sigma(\mathcal{F}')$. D'où $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}')$. La preuve pour $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}')$ est similaire. Nous pouvons alors conclure que $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle \preccurlyeq \langle \sigma(\mathcal{F}'), \sigma(\mathcal{C}') \rangle$.

□

Proposition B.9. Soit σ une substitution, les propriétés suivantes sont vérifiées :
- $\sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{S}\phi : (\sigma(x), \sigma(u))\} = \sigma(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{S}\phi : (x, u)\})$
- $\sigma(\mathcal{C}) \cup \{\sigma(x) \sim \sigma(y)\} = \sigma(\mathcal{C} \cup \{x \sim y\})$
- $\sigma(\mathcal{C}) \cup \{\sigma(x) \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} \sigma(y)\} = \sigma(\mathcal{C} \cup \{x \overset{\sigma(f)}{\twoheadrightarrow} y\})$
- $\sigma(\mathcal{C}) \cup \{\sigma(u) \overset{\sigma(f)}{\rightarrowtail} \sigma(v)\} = \sigma(\mathcal{C} \cup \{u \overset{\sigma(f)}{\rightarrowtail} v\})$

Preuve. Les preuves se réalisent en montrant l'inclusion dans les deux sens, cela en faisant une étude par cas. □

Proposition B.10. Pour tout $a \in \Sigma_{Act}$ et toute substitution σ, $\sigma(\|a\|) = \|a\|$.

Preuve. Il y a deux cas :
- Cas $a = 1$:
  Nous rappelons que, par définition, $\sigma(1_a) = 1_a$ et $\|1\| = 1_a$. Donc $\sigma(\|1\|) = \sigma(1_a) = 1_a = \|1\|$.
- Cas $a \neq 1$:
  Par définition, comme $a \in \Sigma_{Act}$ alors $\sigma(a) = a$ et comme $a \neq 1$ alors $\|a\| = a$. Donc $\sigma(\|a\|) = \sigma(a) = a = \|a\|$.

□

Proposition B.11. Toute propriété de consistance $\preccurlyeq$-close peut être étendue en une propriété de consistance alternative $\preccurlyeq$-close.

Preuve. Soit $\mathcal{P}$ une propriété de consistance $\preccurlyeq$-close. Soit $\mathcal{P}^+$ défini par :

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}^+ \text{ ssi } \langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle \in \mathcal{P}$$

pour une substitution $\sigma : \gamma_r \cup \{1_r\} \cup \Sigma_{Act} \cup \gamma_a \cup \{1_a\} \cup L_s \longrightarrow \gamma_r \cup \{1_r\} \cup \Sigma_{Act} \cup \gamma_a \cup \{1_a\} \cup L_s$. $\mathcal{P}^+$ est une extension $\mathcal{P}$, pour cela il suffit d'observer que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^+$ en considérant l'identité comme substitution.
Nous montrons que $\mathcal{P}^+$ est $\preccurlyeq$-clos. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}^+$ et $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}^+$, alors il existe une substitution σ telle que $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.8, $\langle \sigma(\mathcal{F}')$, $\sigma(\mathcal{C}') \rangle \preccurlyeq \langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors $\langle \sigma(\mathcal{F}')$, $\sigma(\mathcal{C}') \rangle \in \mathcal{P}$. Donc $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}' \rangle \in \mathcal{P}^+$.
Nous montrons que $\mathcal{P}^+$ est une propriété de consistance alternative. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}^+$. Par définition, il existe une substitution σ telle que $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \rangle \in \mathcal{P}$:

1. Supposons que $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$. Par définition et par le Corollaire B.7, $\mathbb{T}\phi : (\sigma(x), \sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$ et $\mathbb{F}\phi : (\sigma(y), \sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$ et $\sigma(x) \sim \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Or, ceci est absurde parce que $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance.
2. Similaire au cas 1.
3. Similaire au cas 1.

4. Supposons que $\mathbb{TI} : (x,u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{TI} : (\sigma(x),\sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alors $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \cup \{1_r \sim \sigma(x)\}\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\sigma(1_r) = 1_r$ alors $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C}) \cup \{\sigma(1_r) \sim \sigma(x)\}\rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.9, $\langle \sigma(\mathcal{F}), \sigma(\mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\})\rangle \in \mathcal{P}$. Donc $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^+$.
5. Supposons que $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{T}\phi \to \psi : (\sigma(x),\sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alors $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{F}\phi : (\sigma(x),\sigma(u))\}, \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{T}\psi : (\sigma(x),\sigma(u))\}, \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.9, $\langle \sigma(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}), \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \sigma(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}), \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Donc $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^+$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^+$.
6. Supposons que $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{F}\phi \to \psi : (\sigma(x),\sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alors $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{T}\phi : (\sigma(x),\sigma(u)), \mathbb{F}\psi : (\sigma(x),\sigma(u))\}, \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.9, $\langle \sigma(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}), \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Donc $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^+$.

7'. Supposons que $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{T}\phi * \psi : (\sigma(x),\sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$. Soit $c_i, c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$, tels que $c_i \neq c_j$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alors il existe $c'_i, c'_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\sigma(\mathcal{C}))$ tels que $c'_i \neq c'_j$, $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{T}\phi : (c'_i,\sigma(u)), \mathbb{T}\psi : (c'_j,\sigma(u))\}, \sigma(\mathcal{C}) \cup \{c'_i c'_j \sim \sigma(x)\}\rangle \in \mathcal{P}$. Soit $\sigma' = \sigma[c_i \mapsto c'_i, c_j \mapsto c'_j]$. Comme $c_i \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $c_j \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ alors $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma'(\mathcal{C})$. De plus, par la Proposition 4.4.12, $c_i \notin \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$ et $c_j \notin \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$. Donc, par la propriété (P_{css}), c_i et c_j d'apparaissent pas dans $\mathcal{F}$. Donc $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma'(\mathcal{F})$, $\sigma(x) = \sigma'(x)$ et $\sigma(u) = \sigma'(u)$. Alors $\langle \sigma'(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{T}\phi : (\sigma'(c_i),\sigma'(u)), \mathbb{T}\psi : (\sigma'(c_j),\sigma'(u))\}, \sigma'(\mathcal{C}) \cup \{\sigma'(c_i)\sigma'(c_j) \sim \sigma'(x)\}\rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.9, $\langle \sigma'(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}), \sigma'(\mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\})\rangle \in \mathcal{P}$. Par conséquent, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_i c_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^+$.

8. Supposons que $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{F}\phi * \psi : (\sigma(x),\sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$. Soit $y, z \in L_r$ tels que $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. Par le Corollaire B.7, $\sigma(yz \sim x) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par la définition de substitution, $\sigma(y)\sigma(z) \sim \sigma(x) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. De plus, comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alors $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{F}\phi : (\sigma(y),\sigma(u))\}, \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{F}\psi : (\sigma(z),\sigma(u))\}, \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.9, $\langle \sigma(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}), \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \sigma(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}), \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Par conséquent, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^+$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^+$.
9. Similaire au cas 8.

10'. Similaire au cas 7'.

11'. Supposons que $\mathbb{T}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{T}\langle f\rangle\phi : (\sigma(x),\sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$. Soit $c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alors il existe $c' \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\sigma(\mathcal{C}))$ et $l' \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\sigma(\mathcal{C}))$ tels que $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{T}\phi : (c',l')\}, \sigma(\mathcal{C}) \cup \{\sigma(x) \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c', \sigma(u) \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l'\}\rangle \in \mathcal{P}$. Soit $\sigma' = \sigma[c \mapsto c', l \mapsto l']$. Comme $c \notin \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $l \notin \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$ alors $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma'(\mathcal{C})$. De plus, par la Proposition 4.4.12, $c \notin \mathcal{A}_r(\overline{\mathcal{C}})$ et $l \notin \mathcal{A}_s(\overline{\mathcal{C}})$. Donc, par la propriété (P_{css}), c et l n'apparaissent pas dans $\mathcal{F}$. Donc $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma'(\mathcal{F})$, $\sigma(x) = \sigma'(x)$ et $\sigma(u) = \sigma'(u)$. Par la Proposition B.10, $\sigma'(\|f\|) = \|f\|$. Alors $\langle \sigma'(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{T}\phi : (\sigma'(c),\sigma'(l))\}, \sigma'(\mathcal{C}) \cup \{\sigma'(x) \overset{\sigma'(\|f\|)}{\twoheadrightarrow} \sigma'(c), \sigma'(u) \overset{\sigma'(\|f\|)}{\rightarrowtail} \sigma'(l)\}\rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.9, $\langle \sigma'(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}), \sigma'(\mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\})\rangle \in \mathcal{P}$. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\}\rangle \in \mathcal{P}^+$.

12. Supposons que $\mathbb{F}\langle f\rangle\phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Alors $\mathbb{F}\langle f\rangle\phi : (\sigma(x),\sigma(u)) \in \sigma(\mathcal{F})$. Soit $y \in L_r$ et $v \in L_s$ tels que $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Par le Corollaire B.7, $\sigma(x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. Par définition de substitution et par la Proposition B.10, $\sigma(x) \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} \sigma(y) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$ et $\sigma(u) \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} \sigma(v) \in \overline{\sigma(\mathcal{C})}$. De plus, comme $\mathcal{P}$ est une propriété

de consistance alors $\langle \sigma(\mathcal{F}) \cup \{\mathbb{F}\phi : (\sigma(y), \sigma(v))\}, \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Par la Proposition B.9, $\langle \sigma(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y, v)\}), \sigma(\mathcal{C})\rangle \in \mathcal{P}$. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y, v)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^+$.

13'. Similaire au cas 11'.

14. Similaire au cas 12.

□

Proposition B.12. Toute propriété de consistance alternative $\preccurlyeq$-close peut être étendue en une propriété de consistance alternative $\preccurlyeq$-close à caractère fini.

Preuve. Soit $\mathcal{P}$ une propriété de consistance alternative $\preccurlyeq$-close. Soit $\mathcal{P}^{fc}$ défini par :

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc} \text{ ssi } \langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \in \mathcal{P} \text{ pour tout } \langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$$

Nous montrons que $\mathcal{P}$ est inclus dans $\mathcal{P}^{fc}$. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq_f$-clos. Donc, pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$, nous avons $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \in \mathcal{P}$. Alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$ par définition.
Nous montrons que $\mathcal{P}^{fc}$ est $\preccurlyeq$-clos. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Soit $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Nous montrons que $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Soit $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$, par définition. Ainsi, pour tout $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle$, nous avons $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Donc $\langle \mathcal{F}', \mathcal{C}'\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Par conséquent, $\mathcal{P}^{fc}$ est $\preccurlyeq$-clos.
Nous montrons que $\mathcal{P}^{fc}$ est à caractère fini. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ un CSS. Nous supposons que pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$, nous avons $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Par définition, pour tout $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle$, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. En particulier, comme $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle$, alors $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \in \mathcal{P}$. Ceci étant vrai pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$, nous en déduisons que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$, par définition.
Nous montrons que $\mathcal{P}^{fc}$ est une propriété de consistance alternative. Soit $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

1. Supposons que $\mathbb{T}\phi : (x, u) \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{F}\phi : (y, u) \in \mathcal{F}$ et $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}}$. Par (P_{css}), $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}}$. Par compacité (Lemme 4.4.13), il existe $\mathcal{C}_{f_1} \subseteq \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{f_2} \subseteq \mathcal{C}$ tels que $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ sont finis, $x \sim y \in \overline{\mathcal{C}_{f_1}}$ et $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}_{f_2}}$. Alors $\langle \{\mathbb{T}\phi : (x, u), \mathbb{F}\phi : (y, u)\}, \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2}\rangle$ est un CSS (satisfait la propriété (P_{css})) et nous remarquons que $\langle \{\mathbb{T}\phi : (x, u), \mathbb{F}\phi : (y, u)\}, \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2}\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Par définition $\langle \{\mathbb{T}\phi : (x, u), \mathbb{F}\phi : (y, u)\}, \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2}\rangle \in \mathcal{P}$. Or, ceci est absurde parce que $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative.
2. Similaire au cas 1.
3. Similaire au cas 1.
4. Supposons que $\mathbb{TI} : (x, u) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est un CSS alors $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}}$. Par compacité (Lemme 4.4.13), il existe $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$ tels que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont finis, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_1}$ et $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}_2}$. Nous montrons que $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Soit $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est un CSS et $\mathcal{F}_f \subseteq \mathcal{F}$ alors $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}\rangle$ est un CSS. Par la Proposition 4.4.16, il existe $\mathcal{C}_3 \subseteq \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C}_3$ est fini et $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_3\rangle$ est un CSS. Soit $\mathcal{F}'_f = \mathcal{F}_f \cup \{\mathbb{TI} : (x, u)\}$, $\mathcal{C}'_f = \mathcal{C}_f \setminus \{1_r \sim x\} \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle$ est un CSS fini (remarque : par la règle $\langle 1_r\rangle$, $1_r \sim 1_r \in \overline{\mathcal{C}'_f}$) et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Par définition, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative et comme $\mathbb{TI} : (x, u) \in \mathcal{F}'_f$ alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \cup \{1_r \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos et comme $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \cup \{1_r \sim x\}\rangle$ alors $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \in \mathcal{P}$. Ceci étant vrai pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle$, alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \cup \{1_r \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

5. Supposons que $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Par l'absurde, nous supposons que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}^{fc}$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}^{fc}$. Alors, par définition de $\mathcal{P}^{fc}$, il existe $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle$ tels que $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A\rangle \notin \mathcal{P}$ et $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B\rangle \notin \mathcal{P}$. Par compacité (Lemme 4.4.13) et par (P_{css}) il existe $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ fini tel que $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_1}$ et $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$ fini tel que $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}_2}$. Soit $\mathcal{F}'_f = \mathcal{F}_f^A \setminus \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\} \cup \mathcal{F}_f^B \setminus \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\} \cup \{\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u)\}$. Soit $\mathcal{C}'_f = \mathcal{C}_f^A \cup \mathcal{C}_f^B \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle$ est un CSS fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc, par définition de $\mathcal{P}^{fc}$, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathbb{T}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'_f$ et comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative alors $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Nous pouvons remarquer que $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B\rangle \in \mathcal{P}$. Or, ceci est contradictoire. Par conséquent, $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

6. Supposons que $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est un CSS alors, par (P_{css}), $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}}$. Par compacité (Lemme 4.4.13), il existe $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$ tels que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont finis, $x \sim x \in \overline{\mathcal{C}_1}$ et $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}_2}$. Nous montrons que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Soit $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle$. Soit $\mathcal{F}'_f = \mathcal{F}_f \setminus \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\} \cup \{\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u)\}$ et $\mathcal{C}'_f = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle$ est un CSS fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Par définition, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative et comme $\mathbb{F}\phi \to \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'_f$ alors $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos et comme $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle$ alors $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \in \mathcal{P}$. Ceci étant vrai pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle$, alors $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (x,u), \mathbb{F}\psi : (x,u)\}, \mathcal{C}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

7'. Supposons que $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $c_i, c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ tel que $c_i \neq c_j$. Nous montrons que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_ic_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Soit $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_ic_j \sim x\}\rangle$. Soit $\mathcal{F}'_f = \mathcal{F}_f \setminus \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\} \cup \{\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u)\}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$ est un CSS et $\mathcal{F}'_f \subseteq \mathcal{F}$ alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}\rangle$ est un CSS. Par la Proposition 4.4.16, il existe $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C}_1$ est fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}_1\rangle$ est un CSS. Soit $\mathcal{C}'_f = \mathcal{C}_f \setminus \{c_ic_j \sim x\} \cup \mathcal{C}_1$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle$ est un CSS fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Par définition, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Aussi, comme $\mathcal{C}'_f \subseteq \mathcal{C}$ alors $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}'_f) \subseteq \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative, comme $\mathbb{T}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'_f$, comme $c_i, c_j \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}'_f)$ et comme $c_i \neq c_j$ alors $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C}'_f \cup \{c_ic_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos est comme $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C}'_f \cup \{c_ic_j \sim x\}\rangle$ alors $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \in \mathcal{P}$. Ceci étant vrai pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_ic_j \sim x\}\rangle$, alors $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c_i,u), \mathbb{T}\psi : (c_j,u)\}, \mathcal{C} \cup \{c_ic_j \sim x\}\rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

8. Supposons que $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $y, z \in L_r$ tels que $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}}$. Supposons que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}^{fc}$ et $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle \notin \mathcal{P}^{fc}$. Donc, par définition de $\mathcal{P}^{fc}$, il existe $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}\rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}\rangle$ tels que $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A\rangle \notin \mathcal{P}$ et $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B\rangle \notin \mathcal{P}$. Par compacité il existe $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ fini tel que $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}_1}$ et $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$ fini tel que $u \overset{1_a}{\mapsto} u \in \overline{\mathcal{C}_2}$. Soit $\mathcal{F}'_f = \mathcal{F}_f^A \setminus \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\} \cup \mathcal{F}_f^B \setminus \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\} \cup \{\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u)\}$. Soit $\mathcal{C}'_f = \mathcal{C}_f^A \cup \mathcal{C}_f^B \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle$ est un CSS fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}\rangle$. Donc, par définition de $\mathcal{P}^{fc}$, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathbb{F}\phi * \psi : (x,u) \in \mathcal{F}'_f$, $yz \sim x \in \overline{\mathcal{C}'_f}$ et comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative alors $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle \in \mathcal{P}$. Nous pouvons remarquer que $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle$ et $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B\rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C}'_f\rangle$. Comme

$\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors $\langle \mathcal{F}_f^A, \mathcal{C}_f^A \rangle \in \mathcal{P}$ ou $\langle \mathcal{F}_f^B, \mathcal{C}_f^B \rangle \in \mathcal{P}$. Or, ceci est absurde. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}^{fc}$ ou $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\psi : (z,u)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

9. Similaire au cas 8.

10'. Similaire au cas 7'.

11'. Supposons que $\mathbb{T}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $c \in \gamma_r \backslash \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $l \in L_s \backslash \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. Nous montrons que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \rangle \in \mathcal{P}^{fc}$. Soit $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \rangle$. Soit $\mathcal{F}'_f = \mathcal{F}_f \setminus \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\} \cup \{\mathbb{T}\langle f \rangle \phi : (x,u)\}$. Comme $\langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ est un CSS et $\mathcal{F}'_f \subseteq \mathcal{F}$ alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C} \rangle$ est un CSS. Par la Proposition 4.4.16, il existe $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C}_1$ est fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}_1 \rangle$ est un CSS. Soit $\mathcal{C}'_f = \mathcal{C}_f \setminus \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \cup \mathcal{C}_1$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \rangle$ est un CSS fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$. Par définition, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \rangle \in \mathcal{P}$. Aussi, comme $\mathcal{C}'_f \subseteq \mathcal{C}$ alors $\mathcal{A}_r(\mathcal{C}'_f) \subseteq \mathcal{A}_r(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}_s(\mathcal{C}'_f) \subseteq \mathcal{A}_s(\mathcal{C})$. Comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative, comme $\mathbb{T}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}'_f$, comme $c \in \gamma_r \setminus \mathcal{A}_r(\mathcal{C}'_f)$ et comme $l \in L_s \setminus \mathcal{A}_s(\mathcal{C}'_f)$ alors $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C}'_f \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos et comme $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C}'_f \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \rangle$ alors $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \in \mathcal{P}$. Ceci étant vrai pour tout $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \rangle$, alors $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{T}\phi : (c,l)\}, \mathcal{C} \cup \{x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} c, u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} l\} \rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

12. Supposons que $\mathbb{F}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}$. Soit $y \in L_r$ et $v \in L_s$ tels que $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}}$. Supposons que $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C} \rangle \notin \mathcal{P}^{fc}$. Donc, par définition de $\mathcal{P}^{fc}$, il existe $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C} \rangle$ tel que $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \notin \mathcal{P}$. Par compacité, il existe $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ fini tel que $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}_1}$ et $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$ fini tel que $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}_2}$. Soit $\mathcal{F}'_f = \mathcal{F}_f \setminus \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\} \cup \{\mathbb{F}\langle f \rangle \phi : (x,u)\}$. Soit $\mathcal{C}'_f = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Alors $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \rangle$ est un CSS fini et $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \rangle \preccurlyeq_f \langle \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$. Donc, par définition de $\mathcal{P}^{fc}$, $\langle \mathcal{F}'_f, \mathcal{C}'_f \rangle \in \mathcal{P}$. Comme $\mathbb{F}\langle f \rangle \phi : (x,u) \in \mathcal{F}'_f$, $x \overset{\|f\|}{\twoheadrightarrow} y \in \overline{\mathcal{C}'_f}$ et $u \overset{\|f\|}{\rightarrowtail} v \in \overline{\mathcal{C}'_f}$ et comme $\mathcal{P}$ est une propriété de consistance alternative alors $\langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}'_f \rangle \in \mathcal{P}$. Nous pouvons remarquer que $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \preccurlyeq \langle \mathcal{F}'_f \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C}'_f \rangle$. Comme $\mathcal{P}$ est $\preccurlyeq$-clos alors $\langle \mathcal{F}_f, \mathcal{C}_f \rangle \in \mathcal{P}$. Or, ceci est absurde. Par conséquent $\langle \mathcal{F} \cup \{\mathbb{F}\phi : (y,v)\}, \mathcal{C} \rangle \in \mathcal{P}^{fc}$.

13'. Similaire au cas 11'.

14. Similaire au cas 12.

□

Lemme 4.7.5. Il existe un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de μ-tableau clos.

Preuve. Considérons l'ensemble de tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de μ-tableau clos. Par la Proposition B.3, cet ensemble est une propriété de consistance. Par la Proposition B.4, nous pouvons l'étendre en une propriété de consistance $\preccurlyeq$-close. Par la Proposition B.11, nous pouvons l'étendre en une propriété de consistance alternative $\preccurlyeq$-close. Finalement, par la Proposition B.12, nous pouvons l'étendre en une propriété de consistance alternative $\preccurlyeq$-close à caractère fini. Par les conditions 4 à 14 de la Définition B.2, cet ensemble est saturé. Par les conditions 1 à 3 de cette même définition, cet ensemble est un ensemble de CSS non clos. Alors,

par définition, cet ensemble est un oracle. Comme cet ensemble est construit par extensions successives de l'ensemble de tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de μ-tableau clos, alors nous pouvons conclure qu'il existe bien un oracle contenant tous les CSS finis pour lesquels il n'existe pas de μ-tableau clos. □

Index

β-interprétation, 21
β-modèle, 21
μ-MRD, 73
μ-monoïde de ressources dynamique, 73
$\preccurlyeq$-clos, 105

Alphabet, 50, 85, 122, 143

Caractère fini, 105
Clôture d'un ensemble de contraintes, 50, 51, 86, 122, 144
Contrainte, 50, 85, 122, 143
CSS, 52, 89, 124, 144
CSS limite, 107

DBI-tableau, 53
DMBI-tableau, 89
Domaine, 50, 85, 122, 143

ESL-Tableau, 145

Formule signée, 52, 89, 124, 144

Hintikka CSS, 61, 97, 128, 148

Interprétation (BI), 9
Interprétation dynamique (DBI), 44

Label, 50, 84, 85, 122, 143
Label inconsistant, 53
Logique BBI, 7
Logique BI, 7
LSM-tableau, 124

Marquage consistant, 18
Marquage inconsistant, 18
Modèle (BI, BBI), 9
Modèle (DMBI), 74
Modèle (ESL), 135
Modèle (LSM), 114
Modèle dynamique (DBI), 45
Monoïde d'actions, 73
Monoïde de ressources, 9, 73, 114, 134
Monoïde de ressources dynamique (DBI), 44
Monoïde partiel, 8

Oracle, 105

Préordre, 8

Réalisation, 57, 92
Réseau de Petri, 18, 116
Réseau de Petri à inconsistance (β-PN), 18
Réseau de Petri temporisé, 116
Relation d'équivalence, 9

Saturé, 105
Stratégie équitable, 105