



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Utilisation de mesures de champs thermique et cinématique pour la reconstruction de sources de chaleur thermomécaniques par inversion de l'équation d'advection-diffusion 1D

THÈSE

soutenue le 12 Janvier 2015

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention Mécanique et Énergétique)

par

Jing YE

Composition du jury

- Président :* Yvon Jarny, Professeur émérite, LTN, Université de Nantes
- Rapporteurs :* Andrei Constantinescu, LMS, Directeur de Recherche CNRS
François Hild, LMT, Directeur de Recherche CNRS
- Examineurs :* Alain Neveu, LME, Professeur, Université d'Evry
Fabrice Rigollet, IUSTI, MCF, Aix-Marseille université
- Encadrants :* Stéphane André, LEMTA, Professeur, Université de Lorraine
Laurent Farge, LEMTA, MCF, Université de Lorraine

Remerciements

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincu que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité et la bonne humeur.

Je tiens à remercier Monsieur Stéphane André, Professeur à l'Université de Lorraine, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

Je remercie Monsieur Laurent Farge, MCF à l'Université de Lorraine, qui est aussi le co-directeur de ma thèse. Il m'a aidé beaucoup en aspect expérimental et de régler les problèmes des dispositifs. C'est à ses côtés que j'ai compris ce que rigueur et précision voulaient dire.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres de mon jury : Messieurs Yvon Jarny, Andrei Constantinescu, François Hild, Alain Neveu et Fabrice Rigollet.

J'adresse toute ma gratitude à tous mes ami(e)s et à toutes les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail. Je remercie Madames Edith Lang et Irène Leonard pour m'avoir accueilli dans l'unité de recherche LEMTA et de m'avoir permis de travailler dans d'aussi bonnes conditions.

Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées par le biais du LEMTA. Merci pour votre support et vos encouragements. Je pense particulièrement à mes collègues Zakariya Boufaïda, Sofyane Abbou, Thomas Gaumont, Waseem Al Hadad, Yao Agbessi... Nous sommes comme les « frères ». Je ne saurais terminer sans remercier toutes ces personnes dans l'ombre dont la contribution à mon travail est non négligeable, les personnels de la service scolaire et les techniciens de surface.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier à ma mère qui m'a supporté toute seule en Chine. Malgré mon éloignement depuis de nombreuses années, leur intelligence, leur confiance, leur tendresse, leur amour me portent et me guident tous les jours. Un grand merci à tous.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | ii |
| Introduction générale | 1 |
| 1 ETAT DE L'ART | 5 |
| 1.1 Imagerie thermique et caractérisation thermomécanique | 5 |
| 1.2 Méthodes de reconstruction inverse de sources de chaleur | 12 |
| 1.2.1 Régression linéaire | 15 |
| 1.2.2 Régression non linéaire | 18 |
| 2 PRODUCTION D'OBSERVABLES THERMOMECHANIQUES : Matériel et Méthodes | 23 |
| 2.1 Matériau | 23 |
| 2.2 Dispositifs expérimentaux et production d'observables | 26 |
| 2.2.1 Dispositif général : plateforme de métrologie en rhéologie solide | 26 |
| 2.2.2 Production d'observables par stéréocorrélation d'images | 29 |
| 2.2.2.1 Matériel : | 29 |
| 2.2.2.2 Etalonnage : | 29 |
| 2.2.2.3 Production des observables cinématiques : | 30 |
| 2.2.2.4 Validations/Performances : | 34 |
| 2.2.3 Production d'observables par imagerie infrarouge | 40 |
| 2.2.3.1 Description du matériel | 40 |
| 2.2.3.2 Principe de mesure | 41 |
| 2.2.3.3 Champ de température typique observé | 42 |
| 2.2.4 Principe de recalage des films IR sur les films DIC | 43 |
| 2.3 Résultats bruts emblématiques | 44 |
| 3 MODELISATION | 47 |
| 3.1 Equation locale de la chaleur | 48 |
| 3.1.1 Les hypothèses | 48 |
| 3.1.2 Les lois de conservation | 48 |
| 3.1.2.1 Bilan d'une grandeur quelconque | 48 |
| 3.1.2.2 Bilan de masse | 50 |
| 3.1.2.3 Bilan d'énergie interne | 52 |
| 3.1.3 Approche Thermodynamique en rhéologie | 53 |
| 3.2 Réduction de modèle | 58 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2.1 | Modélisation 2D | 59 |
| 3.2.2 | Modélisation 1D | 59 |
| 3.3 | Cas tests étudiés pour les simulations d'inversion | 60 |
| 4 | TECHNIQUES DE RECONSTRUCTION INVERSE DEVELOPPEES | 63 |
| 4.1 | Approche par modes de branche | 64 |
| 4.1.1 | Problème de branche | 64 |
| 4.1.1.1 | Modes Diffusifs (MD) | 65 |
| 4.1.1.2 | Modes Advectifs-Diffusifs (MAD) | 66 |
| 4.1.2 | Méthode inverse | 68 |
| 4.1.3 | Résultats numériques | 71 |
| 4.2 | Tentative d'approche inverse par SVD | 76 |
| 4.2.1 | Principe de la décomposition SVD ou KLD | 77 |
| 4.2.2 | Implémentation pratique | 81 |
| 4.2.3 | Reconstruction de sources spatio-temporelles par SVD | 81 |
| 4.2.3.1 | Sans Bruit | 83 |
| 4.2.3.2 | Cas Bruité | 84 |
| 4.3 | Méthode itérative de reconstruction | 87 |
| 4.3.1 | Principe de la formulation adjointe | 88 |
| 4.3.2 | Formulation adjointe appliquée à notre problème | 90 |
| 4.3.3 | Gradient conjugué | 92 |
| 4.3.3.1 | Principe de la méthode | 92 |
| 4.3.3.2 | Algorithme utilisé | 94 |
| 4.3.3.3 | Conditions d'arrêt | 95 |
| 4.3.3.4 | Résultats numériques | 96 |
| 4.3.4 | CGM stabilisée | 99 |
| 4.3.4.1 | Analyse de sensibilité | 99 |
| 4.3.4.2 | Résultats numériques pour l'algorithme stabilisé | 102 |
| 4.4 | Comparaison des performances entre algorithmes | 105 |
| 4.5 | Remarques de conclusion | 108 |
| 5 | RESULTATS DE THESE | 109 |
| 5.1 | Cinématique de la striction (localisation) | 110 |
| 5.1.1 | Contexte scientifique-Etat de l'art-Apport de nos travaux | 110 |
| 5.1.2 | Mesures cinématiques | 114 |
| 5.1.2.1 | Mesures de champs 2D | 114 |
| 5.1.2.2 | Champs de vitesse | 117 |
| 5.1.2.3 | Mesures 1D (dans la direction de traction) | 120 |
| 5.1.3 | Analyse du concept de Natural Draw Ratio | 129 |
| 5.1.4 | Considérations liées à l'estimation inverse des THS | 136 |
| 5.2 | Sources thermiques reconstruites à partir des données expérimentales | 138 |
| 5.2.1 | Approche diffusive versus advecto-diffusive | 138 |
| 5.2.2 | Performances de reconstruction | 140 |
| 5.2.2.1 | Reproductibilité | 140 |
| 5.2.2.2 | Influence de la condition initiale | 141 |

| | | |
|---|---|------------|
| 5.2.2.3 | Gestion des Conditions aux limites | 142 |
| 5.2.2.4 | Comparaison des deux algorithmes inverses | 146 |
| 5.2.3 | Analyse thermomécanique | 149 |
| 5.2.3.1 | Analyse eulérienne/lagrangienne | 149 |
| 5.2.3.2 | Profils de source (THS) versus taux de déformation | 154 |
| 5.2.3.3 | Faibles niveaux de déformation : thermoélasticité | 155 |
| Conclusion et perspectives | | 163 |
| ANNEXES | | 167 |
| A Eléments mathématiques | | 169 |
| A.1 | Théorème de Hilbert-Schmidt | 169 |
| A.1.1 | Opérateur de Hilbert-Schmidt | 169 |
| A.1.2 | Théorème spectral (de décomposabilité ou de Hilbert-Schmidt) | 170 |
| A.1.3 | Théorème de Mercer (ou de diagonalisation) | 170 |
| A.2 | Existence et unicité de la solution d'un problème inverse général | 172 |
| A.3 | Décomposition de Fourier mixte | 173 |
| B Application de SVD en estimation de paramètres | | 175 |
| C Comparaison entre les modes de Fourier et les modes de branche | | 177 |
| Bibliographie | | 181 |

Introduction

Notre intention ici est d'expliciter au lecteur le titre de cette thèse en rappelant tout d'abord la problématique scientifique à l'origine de ce sujet, en justifiant ensuite la nature des travaux qui ont été entrepris dans le présent travail de recherche, les attendus initiaux qui ont motivé les choix faits pour sa réalisation et qui aboutissent à la construction du manuscrit à laquelle nous sommes arrivés.

En rhéologie, la problématique s'énonce simplement : être capable de saisir la nature des phénomènes physiques qui anime la matière lorsqu'elle est soumise à un système de contraintes internes qui initient la modification de sa géométrie, pour être capable ensuite de les décrire de manière précise au sein d'un modèle prédictif. Ce modèle s'appelle la loi "constitutive" ou "rhéologique" ou encore "de comportement" du matériau. On devrait peut-être parler plus précisément de loi rhéo-physique puisque les enjeux dont nous venons de parler se démultiplient dans la compréhension globale des mécanismes de déformation intervenant à toutes les échelles spatiales (du mm au nm). Ils positionnent naturellement cette activité du côté de la recherche fondamentale plutôt qu'appliquée. Cette dernière relèverait plus de l'utilisation des lois ainsi établies pour simuler le comportement de structures mécaniques dans diverses applications technologiques. Pour aller à l'essentiel et parce que l'évidence commune qui s'impose à tous ceux qui ont pu observer des phénomènes de déformation, est qu'ils peuvent par nature être irréversibles, le cadre théorique logique pour élaborer ces lois rhéologiques est celui de la thermodynamique irréversible. Dans ce cadre, il convient bien sûr d'intégrer des éléments que nous qualifierons de mécano-chimiques qui peuvent rendre compte des modifications de microstructure au cours d'un processus global continu de déformation, mais aussi de prendre en compte les phénomènes de couplages thermomécaniques au sens fort : même en conditions d'essai mécanique dit "isotherme", les mécanismes de déformation induisent des effets thermiques (couplage thermo-élastique classique de type gaz parfait, effets de frictions internes, de changements de phases ou réarrangements moléculaires qui se font au prix d'une énergie de chaleur latente...) qui, en retour, en modifiant l'agitation thermique environnante, modifie la cinétique de ses phénomènes. Cela est particulièrement vrai pour les matériaux polymères semi-cristallins tel que celui que nous avons étudié (PolyEthylène Haute Densité=PEHD) qui à température ambiante par exemple sont dans une structure vitreuse (intermédiaire solide-fluide) dans laquelle la sensibilité des propriétés à la température est particulièrement forte. "Démêler" ces couplages thermomécaniques est donc d'un enjeu réel pour formuler des lois constitutives qui soient dites "consistantes" c'est-à-dire complètement cohérentes avec le cadre de leur modélisation. C'est un enjeu qui intéresse les scientifiques depuis très longtemps, essentiellement par l'approche expérimentale. Une vingtaine de publications avant les années 70-80 se sont intéressées à ce sujet, pour certains par des mesures de

la température au sein de matériaux sollicités mécaniquement, pour d'autres par la réalisation de calorimètres spécialement dédiés à la mesure des flux "emis" par la matière. Suivant l'histoire du développement des matériaux au cours du dernier siècle, les premiers travaux s'intéressaient aux matériaux métalliques puis aux caoutchoucs et polymères de synthèse. Cette problématique a été complètement reconsidérée à partir des années 80 avec l'apparition des premiers imageurs thermiques et donc la mesure de températures à distance.

Dans ce contexte, un premier travail de thèse a précédé le mien au LEMTA [1] (N.Renault, 2007). Dans ce travail, il s'agissait de solliciter mécaniquement des éprouvettes du matériau étudié et d'enregistrer pendant l'opération le champ de température surfacique généré par les sources thermomécaniques (homogènes à des puissances volumiques) à l'œuvre dans la matière (le "bulk"). Ce sont ces sources thermomécaniques qui renferment l'information intrinsèque au matériau sur les couplages thermomécaniques et dont on vient d'évoquer l'importance pour caractériser le matériau. Ces sources ne sont pas mesurables directement mais elles le sont, a priori, indirectement, dans le cadre d'une procédure mathématique qualifiée d'*inverse* puisque l'observable disponible n'est pas la source elle-même mais le champ de température produit par elle. Il s'agit donc plutôt de variables de champ (spatio-temporel) que l'on peut prétendre reconstruire à partir de la connaissance de leurs effets. Ces problèmes sont réputés difficiles à résoudre et ce fut l'objet de la thèse de N.Renault que de proposer des techniques pour reconstruire ces données. En plus de cela, N.Renault a clairement légitimé l'ensemble de la démarche puisqu'il a montré en quoi ce signal thermomécanique apporte des éclairages sur la dynamique des phénomènes microstructuraux. Une technique in-situ pour sonder les évolutions microstructurales à la méso-échelle (diffusion de lumière) était venu confirmer que tous les régimes thermiques observés trouvaient une signature correspondante dans le signal microstructural.

Le travail de N.Renault était difficile en ceci qu'il s'agissait d'une caractérisation thermomécanique dans le cadre d'essais quasi-statiques pour lesquels les effets thermiques sont bien plus faibles que ce que l'on peut avoir lorsque l'on étudie la fatigue cyclique ou les dynamiques de chocs par exemple. Dans ces conditions, l'opérateur mathématique du transfert de chaleur considéré pour l'inversion des données était l'opérateur de diffusion, avec une hypothèse implicite sur le fait que le transport d'advection était sans doute très limité. Ce faisant, et considérant les effets très importants d'instabilité plastique (striction) qui interviennent dans le matériau étudié, on pouvait légitimement se poser la question de la prise en compte d'un transfert de chaleur additionnel par advection. A la classique image du transport de chaleur par marche aléatoire, pas très efficace, surtout pour les matériaux peu conducteurs thermiques comme les plastiques, vient donc se rajouter un transport direct par déplacement macroscopique des volumes élémentaires de matière qui entraînent avec eux la chaleur interne de ces volumes. C'était **le premier objectif** principal de ma thèse : proposer de nouvelles méthodes de traitement inverse des champs de température pour prendre en compte ce phénomène. Evidemment cet objectif suppose de disposer de moyens expérimentaux pour mesurer les vitesses locales. Il ne s'était pas posé dans la thèse de N.Renault (2e raison ayant conduit à retenir le seul opérateur de diffusion) puisque le LEMTA ne disposait pas à ce moment de système d'imagerie par corrélation d'images permettant l'acquisition des champs de déplacements en surface de l'éprouvette et permettant de remonter à ces vitesses locales de matière. La bonne maîtrise de cet outil, suite notamment à des campagnes de mesures sur du PEHD visant à caractériser la déformation volumique du matériau pour des trajets de

chargement imposant de fortes déformations, faisait que ma thèse pouvait aussi comporter une importante étude expérimentale, **second objectif principal**, combinant donc à la fois des mesures cinématiques et thermiques. Ces deux observables devaient ensuite alimenter les méthodes d'inversion que je devais développer.

Trois corollaires au premier objectif sont ensuite venus préciser un peu plus les tâches que je devais faire :

- Je devais reprendre les travaux initiés par A.Neveu dans le cadre d'une collaboration qui n'avait commencé qu'en fin de thèse de N.Renault, consistant à utiliser une modélisation directe du problème par décomposition sur une base de fonctions dite des "modes de branche", plus générale que les bases classiques de Fourier. Il s'agissait donc de voir si ces bases permettaient, dans le cadre de l'advection-diffusion, d'obtenir un gain substantiel sur la qualité de la reconstruction et le fonctionnement de l'algorithme d'inversion.
- Je devais également développer une méthode d'inversion alternative à celle employée par N.Renault (approche séquentielle reconnue comme la méthode de Beck chez les thermiciens) et basée sur un principe d'obtention itérative de la reconstruction.
- Je devais explorer le potentiel d'une approche qui ces dernières années, a connu un intérêt très fort dans la communauté thermicienne, le recours aux décompositions spectrales de type SVD (Singular Value Decomposition), avec l'idée de pouvoir obtenir in fine des estimations très convenables pour une robustesse d'estimation et un temps de calcul ultra-limité, offrant ainsi la possibilité de concevoir un outil software facile pour être proposé à la communauté des chercheurs du domaine.

Le cadre étant posé, le plan de mon manuscrit est le suivant.

J'aborderai tout d'abord un état de l'art, à la fois sur les aspects thermomécaniques (quelles sont les démarches récentes qui ont été entreprises sur ce même sujet et qu'est-ce qui les distinguent ?) et sur les aspects liés aux méthodes mathématiques d'inversion (quelles sont les grandes classes de méthodes, telles que nous les concevons, et comment ce qui a été fait au LEMTA s'insère-t-il dans ce panorama ?).

Je présenterai ensuite les dispositifs expérimentaux utilisés pendant la thèse et principalement celui qui nous a permis d'obtenir les mesures cinématiques et qui a mobilisé beaucoup de notre temps de thèse.

Dans un court chapitre, je présente ensuite les éléments théoriques de rhéologie vue sous l'angle de la Thermodynamique des Processus Irréversibles pour que le lecteur intéressé puisse appréhender le travail du rhéologue qui commence lorsque l'on dispose d'une estimation des sources thermomécaniques. J'y présenterai également les équations de bilan/conservation classiques de la thermodynamique des milieux continus qui interviennent dans la résolution du problème inverse.

Le chapitre 4 concerne les méthodes d'inversion proprement dites mises au point au cours de ce travail selon les 3 objectifs listés ci-dessus. Elles sont validées à la fois par des simulations numériques et "qualifiées" par inter-comparaison.

Dans le chapitre 5, je présenterai l'intégralité des résultats obtenus en deux volets :

- Les résultats cinématiques obtenus qui ont été l'occasion d'une étude très approfondie de la cinématique de la striction et de nouvelles considérations sur le concept de Natural Draw Ratio;

-
- L'ensemble des résultats thermomécaniques obtenus et l'analyse critique que l'on peut en faire.

La conclusion abordera la question des perspectives que l'on peut dégager à l'issu de ce travail.

Chapitre 1

ETAT DE L'ART

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| 1.1 Imagerie thermique et caractérisation thermomécanique | 5 |
| 1.2 Méthodes de reconstruction inverse de sources de chaleur . . . | 12 |
| 1.2.1 Régression linéaire | 15 |
| 1.2.2 Régression non linéaire | 18 |

Dans ce chapitre, nous procédons à une revue commentée des travaux publiés sur les problématiques de caractérisation thermomécanique des matériaux à partir de l'imagerie infrarouge (et de ce fait, remontant au maximum aux années 90) puis sur celles liées au problème inverse d'estimation ou de reconstruction de sources de chaleur.

1.1 Imagerie thermique et caractérisation thermomécanique

Nous avons vu en introduction, que dès le milieu du siècle dernier, les premières études apparaissent qui s'intéressent à l'exploitation d'un signal thermique produit par la pure excitation mécanique d'un matériau, pour mieux identifier les couplages thermomécaniques. Cependant, il s'agissait plus de mieux comprendre l'activité thermique produite par un phénomène particulier, comme la plasticité, plutôt qu'une compréhension thermodynamique globale de la matière, selon ses différents régimes rhéologiques. Les travaux publiés sur le sujet sont alors principalement dus à des chercheurs étrangers. Avec l'arrivée des imageurs thermiques dans les années 90 (mono-détecteurs d'abord, puis à matrices de détecteurs), ce champ a connu un regain d'intérêt et des progrès très conséquents, principalement issus d'une communauté très active de chercheurs français en mécanique avec comme laboratoires "phares" le LMGC à Montpellier et le LMT à Cachan, rejoint dans les années 2000 par le LEMTA à Nancy, le LBMS à Brest et récemment par l'Institut Pascal-IFMA de Clermont-Ferrand.

Comme toute irruption d'innovation dans un champ disciplinaire, cette révolution technique a donné lieu à de nombreux travaux dans toutes les directions, qu'avec le recul on peut tenter d'organiser autour de différents critères :

- Typologie des essais mécaniques considérés : essais en fatigue, essais dynamiques rapides, essais quasi-statiques ;

- Analyse purement qualitative des champs de température associés à différents comportements thermomécaniques versus analyse plus quantitative basée sur l'estimation de sources pour "corriger" les observables de la contribution "transfert thermique" ;
- Types de matériaux considérés qui focalisent diversement les études : effets de localisation extrêmes dans les métaux, alliages à mémoire de forme et transformations structurales, polymères et effets de striction et grandes transformations, matériaux composites et endommagement...

Ces différents critères se retrouvent évidemment combinés dans les études publiées si bien qu'il est difficile de n'en considérer qu'un comme grille d'analyse de l'état de l'art. Cependant l'ordre énoncé ici nous semble intéressant à suivre pour présenter les études qui ont attiré notre attention.

Les problèmes posés par le traitement consécutif à l'acquisition de champs de température pour l'investigation thermomécanique sont très différents en effet selon les régimes de transfert thermique considérés.

Régime stationnaire (périodique établi) :

La majorité des études publiées en thermomécanique des matériaux (au sens ou nous l'entendons dans cette thèse) porte en effet sur l'étude en fatigue cyclique. La raison majeure n'est d'ailleurs pas liée à l'usage de l'imagerie infrarouge - des études récentes procédaient encore par thermocouples fixés sur l'éprouvette - mais plutôt à l'idée que le relevé de l'évolution de la température stabilisée de l'échantillon à différents niveaux de contrainte de "cyclage", pouvait mettre en évidence un changement de régime thermique, précoce révélateur de l'endommagement conduisant à la rupture. Les travaux de Luong [2, 3, 4] sont sans doute ceux ayant le plus contribué à diffuser cette idée. Il y avait là une alternative potentielle aux très longs essais de fatigue classiquement menés pour formaliser la courbe de Wöhler et déterminer une contrainte limite de chargement en fatigue des matériaux. Le principe de la méthode est donc fondé sur une mesure de la dissipation interne produite par le matériau dans ces différentes phases d'endommagement (en élevant progressivement la contrainte nominale de cycle). Cette mesure est supposée être reflétée par le niveau de température atteint en régime périodique établi, toutes choses étant égales par ailleurs. Cette méthode est qualifiée de méthode de l'auto-échauffement (self-heating). Elle est illustrée par la figure (1.1) qui représente l'évolution de la température stabilisée en fonction du carré de l'amplitude du signal d'excitation périodique en contrainte A_σ^2 . Beaucoup de matériaux ont été testés par cette méthode jusque dans les années 2000 [5] (La Rosa & Risitano, 2000). Les résultats montrent tous en général que la contrainte limite en fatigue déterminée par cette technique et qui correspond à la contrainte $\sigma_R^{fatigue}$ de la figure (1.1) à partir de laquelle on observe une vraie rupture du régime dissipatif correspond grosso-modo à celle mesurée par la courbe de Wöhler. La figure (1.1) montre néanmoins que l'ajustement de deux comportements linéaires sur les phases 1 et 2 des régimes dissipatifs observés pour en déterminer le point d'intersection et la limite en fatigue $\sigma_R^{fatigue}$ peut être délicat. Tous les résultats ne confirment pas le potentiel de cette méthode et il convient en particulier de vérifier ce qu'il en advient lorsque l'on considère différentes fréquences d'excitation et différents rapports de charge $R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max}$. Krapez et al. [6] (2000) proposent une méthode de démodulation synchrone (lock-in thermography) pour raffiner la méthode. Les amplitudes de température

à la fréquence d'excitation et au double de cette fréquence (deux premières harmoniques) viennent enrichir l'information et confirment qu'une rupture nette du régime dissipatif intervient pour une même contrainte seuil, souvent très proche de la limite en fatigue connue. Cette rupture est plus ou moins marquée pour certains matériaux. Boulanger et al. [7] (2004) font une analyse plus fine de la méthode en essayant d'identifier séparément les composantes thermoélastiques et purement dissipatives présentes dans le signal cyclique en phase stabilisée à partir d'une modélisation 0D du bilan d'énergie (Equation différentielle pure). Ils montrent que la partie dissipative est sujette à fluctuations fortes avec le temps montrant par là que le transfert conductif doit être pris en compte. Cugy et al. [8] (2002) suggèrent alors de s'intéresser à la sortie du premier régime d'auto-échauffement (Phase 1 - Fig.1.1) pour avoir un indicateur intrinsèque révélateur de l'activation de mécanismes nouveaux. Ces mécanismes sont associés, sur les aciers étudiés, à l'apparition de bandes de cisaillement persistantes. En 2007, Meshaka et al. [9] reprennent l'idée de s'intéresser à ce point de fonctionnement en l'associant simplement à la sortie d'un régime visco-élastique. Il est alors possible de modéliser la partie auto-échauffement aux faibles niveaux de contrainte nominale d'excitation (Phase 1 de la Fig.1.1) par une approche thermodynamique générique du comportement visco-élastique. Il est supposé que le changement de régime dissipatif au-delà de ce point est lié à l'activation de mécanismes dits d'endommagement. Avec une modélisation 0D de l'équation de bilan d'énergie là encore, il est possible d'obtenir directement l'expression formelle de la température stabilisée en fonction de la source et d'appliquer une procédure de calage du modèle sur les données expérimentales. La fig.1 montre qu'il est ainsi possible de repérer le changement de régime (pour une amplitude notée σ_{VE}^{lim}) et que celui-ci dépendra des paramètres du modèle que l'on s'est donné (et que l'on peut éventuellement tous mesurer par ailleurs).

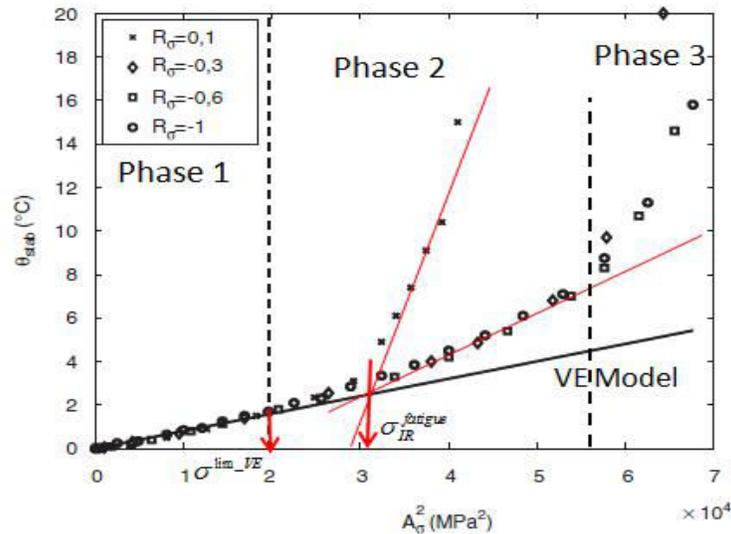


FIGURE 1.1 – Evolution typique de la température cyclique stabilisée en fonction du carré de l'amplitude de contrainte imposée pour la fatigue cyclique. R_σ désigne le rapport de charge ($\sigma_{min}/\sigma_{max}$). (In Meshaka et al., 2007 [9])

Poncelet et al. [10] (2007) cherchent à vérifier la validité plus profonde de la méthode en s'intéressant aux chargements cycliques multiaxiaux et non proportionnels (traction-torsion). Là encore, une modélisation 0D du bilan d'énergie et une modélisation externe (par la mécanique) de la source à l'origine de l'auto-échauffement permet d'obtenir une relation analytique directe donnant le niveau de température atteint en régime stationnaire en fonction de la contrainte mécanique équivalente de Von-Mises et de facteurs correctifs liés à la non-proportionnalité du chargement et à l'hétérogénéité des contraintes. Les courbes d'auto-échauffement peuvent alors être ramenées sur une même courbe maîtresse. Dans les travaux de Doudard et al. [11] (2009), la même logique est suivie mais le problème de base est reconsidéré. Dans ces travaux, les courbes d'auto-échauffement expérimentales sont analysées avec un modèle 1D du transfert thermique, et le modèle de source mécanique basé sur une approche de microplasticité est lui aussi rendu spatialement dépendant en prenant en compte l'évolution géométrique de la forme de l'éprouvette (Dog-bone). L'approche repose sur une décomposition modale du profil de température (sur 3-4 modes) qui permet de calculer directement les coefficients de décomposition de la source sur cette même base. La source est donc reconstruite et son maximum d'intensité est utilisé pour établir une courbe d'auto-échauffement exprimée cette fois-ci en puissance dissipée (et non plus en température). Toutes les études référencées ici s'intéressaient aux matériaux métalliques (nouveaux aciers, ou super alliages) en raison des forts enjeux industriels liés aux études en fatigue de structures mécaniques (pour lesquelles sont précisément développés ces nouveaux matériaux). Ces enjeux s'étendant désormais aux matériaux composites, les premières études s'intéressant à la caractérisation de l'endommagement dans ces matériaux par la méthode d'auto-échauffement discutée dans ce paragraphe commencent à paraître [12] (Jegou et al., 2013).

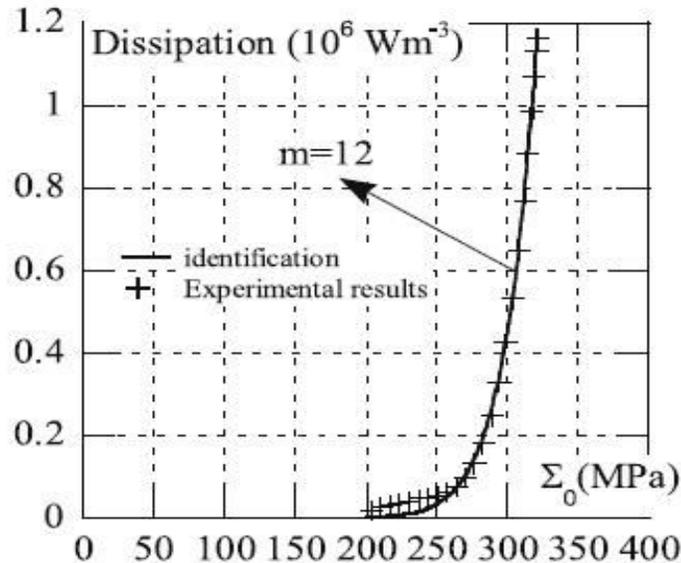


FIGURE 1.2 – Courbe d'auto-échauffement exprimée en puissance dissipée versus contrainte représentant l'amplitude de l'excitation cyclique (In Doudard et al., 2009 [11])

Régime dynamique rapide :

Dans cette classe de sollicitation, on considère les essais à très fortes vitesses de type barre de Hopkinson (ou barre de Kolsky en torsion) mais aussi les études qui s'intéressent aux effets de localisation ou de propagation d'instabilités plastiques extrêmement rapides en comparaison aux temps caractéristiques de diffusion. Sur le plan thermique, ces problèmes peuvent être considérés comme adiabatiques (en supposant toujours implicitement des temps de thermalisation de l'activité dissipative quasi instantanés) et une modélisation 0D est là encore utilisée. On citera les travaux initiateurs dus à Hartley et al. [13] (1987) qui ont porté sur l'étude du développement des bandes de cisaillement à très forts taux de déformation (de l'ordre de $10^3 s^{-1}$). Ces bandes de cisaillement peuvent apparaître en l'espace de quelques microsecondes et sur des zones extrêmement localisées (quelques micromètres) puis se propager. Dans cette étude, les auteurs ont utilisé une barrette de 10 détecteurs IR de type InSb (Judson) observant la zone de l'échantillon où vont précisément se localiser les instabilités (essai de torsion par barre de Kolsky). L'essai est considéré comme adiabatique mais seuls les signaux en température mesurés servent à analyser le phénomène thermomécanique. Zehnder et al. [14, 15] profitent également du développement de mono-détecteurs IR pour effectuer des mesures de températures locales au droit des ouvertures de fissures (qui se propagent dynamiquement). Plus tard, Hodowany et al. [16] (2000) considèrent des essais allant de vitesses de déformation imposées de 1 à $1000 s^{-1}$. Ils montrent que l'élévation de température est sensiblement la même en fonction de la déformation plastique donnant en quelque sorte une limite basse permettant de considérer un essai comme adiabatique. L'étude est intéressante en ce que, considérant la source thermique comme directement égale à $\rho c \dot{\theta}$ (terme d'accumulation d'énergie interne), les auteurs établissent une évaluation expérimentale du facteur de partition des énergies thermique et de déformation plastique : $\beta = \rho c \dot{\theta} / \sigma \dot{\epsilon}_p$ souvent référencé comme le facteur de Taylor-Quinney. Cet objectif de partition des énergies mises en jeu dans la déformation mécanique des matériaux (énergie stockée, dissipée, de déformation plastique, thermoélastique) est un enjeu qui motive par ailleurs l'essentiel de ces études thermomécaniques. Guduru et al. [17] (2001) exploitent réellement l'imagerie infrarouge rapide (1MHz) avec un système développé au Caltech pour les besoins de leur étude. Il utilise une matrice de 8×8 détecteurs HgCdTe. Dans cette "catégorie" des essais rapides, on notera que ce travail inaugure également le couplage in-situ de techniques d'imagerie infrarouge et de mesures de champs de déformations locales (en utilisant ici une technique optique interférométrique dite CGS pour Coherent Gradient Sensing). Là encore toutes ces études se rapportent à des matériaux métalliques et il est intéressant de noter qu'elle est quasiment l'exclusivité de la même équipe de chercheurs depuis les origines.

Régime transitoire des essais quasi-statiques :

Dans cette catégorie, qui concerne presque exclusivement des essais de traction (et quelques études sur les chargements cycliques à faibles vitesses), on trouve des applications concernant les matériaux métalliques mais aussi les matériaux polymères (semi-cristallins, amorphes et élastomères). L'extension des études thermomécaniques à ces derniers matériaux et pour ce type d'essais s'explique aisément. Les matériaux polymères sont peu intéressants à étudier en fatigue, ne conduisant pas à des ruptures fragiles après montée progressive d'endommagements à bas niveau de déformation et d'autre part, ils sont très sensibles aux effets de température auto-induits puisque l'essentiel de ces matériaux sont dans leur phase de

transition vitreuse autour de l’ambiante. Sur du PMMA par exemple, la dépendance de la phase d’adoucissement et de durcissement de la courbe de contrainte-déformation en fonction de la vitesse de sollicitation est liée à la température prise par le matériau en raison des effets de dissipation interne et de transfert de chaleur (Arruda & Boyce, 1995 [18] dans une étude basée sur des essais en compression à des vitesses de $0.1 - 0.001s^{-1}$). Les effets d’auto-échauffement, bien que moins spectaculaires que pour les métaux, sont suffisamment importants pour être bien mesurés par caméra infrarouge. Cela en fait de bons matériaux “modèle” pour la compréhension thermomécanique de phénomènes couplés complexes. Contre partie moins encourageante, leur faible conductivité thermique favorise l’existence de gradients qu’il convient de prendre en compte pour estimer les sources thermiques.

Dans cette catégorie d’essais, on trouve essentiellement des travaux de recherche français dont une grande partie assurée par l’équipe d’A.Chrysochoos au LMGC (Montpellier). Les premières études thermographiques in-situ ont lieu dès le début des années 90 et portent avant tout sur le développement du dispositif en lui-même. A l’époque la caméra offre une résolution spatiale de $270 \times 180\mu m$ avec 256×180 mesures locales. Les élévations de température observées sont de l’ordre de $5^{\circ}C$ pour des essais de charge-décharge à $30MPa/s$ sur du Duralumin. Les élévations de température sont converties en source en “calibrant” globalement l’ensemble des échanges thermiques dans une approximation 0D du bilan d’énergie. Les objectifs scientifiques sur le plan thermomécanique concernent la quantification/partition des différentes énergies mises en jeu au cours de la déformation. Viennent ensuite de nombreux travaux sur :

- les alliages à mémoire de forme [19] (Chrysochoos et al., 1993),
- l’analyse des effets thermiques associés à la localisation des déformations dans des aciers [20] (Chrysochoos & Louche, 2000), [21] (Chrysochoos et al., 2009) , [22] (Louche et al., 2012). On notera dans ces travaux l’amélioration constante des dispositifs et le couplage avec les méthodes d’analyse des champs cinématiques par corrélation d’images numériques, en particulier pour l’effort de synchronisation spatio-temporelle des champs cinématiques et de sources estimées dans les référentiels matériels (lagrangiens) ou déformés (eulériens) [22].
- l’analyse thermomécanique des élastomères [23] (Honorat, 2006) et polymères semi-cristallins [24] (Watrissse et al., 2002).

La figure (1.3) montre les résultats typiquement obtenus pour la puissance thermique estimée, notée \dot{w}_{ch} (terme source de l’équation de la chaleur) en fonction de la déformation nominale. La courbe de traction en variables nominales y est superposée. Elle montre l’occurrence du plateau de contrainte pour une déformation nominale de 0.4, coïncidant avec l’apparition de la striction, qui est accompagnée d’effets thermiques de l’ordre de $0.06W/cm^3$. L’évolution de la striction (zone de localisation) se fait à puissance constante et se déplace selon l’axe fixe Ox du laboratoire. A partir de cette information, il peut être tenté de décomposer cette source dans ces différentes contributions avec une modélisation thermodynamique ad hoc.

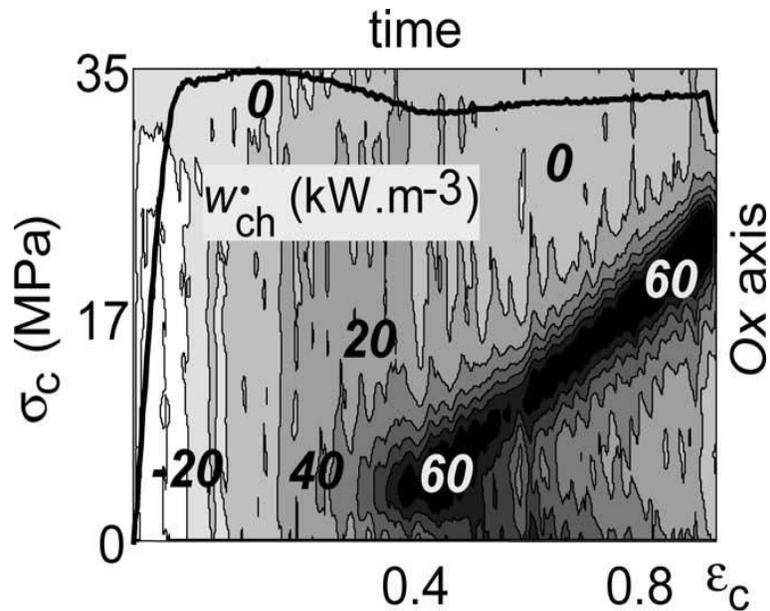


FIGURE 1.3 – Evolution de la source de chaleur estimée au cours d'un essai de traction sur un polymère semi-cristallin (In Watrisse et al., 2002 [24]).

Concernant l'estimation quantitative des sources de chaleur d'origine thermomécanique, tous ces travaux sont basés (avec des degrés d'application divers) sur les techniques dites de mollification, telles qu'elles ont été popularisées par Murio [25] (1993). Concrètement (et pour faire simple au risque d'être trop approximatif), il s'agit d'opérer un échange entre les données expérimentales réelles et leurs substituts filtrés (mollifiés) pour ensuite approximer tous les termes différentiels de l'opérateur de chaleur (ordre 2 avec le laplacien en espace, ordre 1 en temps). La mollification peut être appliquée en temps et en espace par convolution avec une fonction noyau définie sur un support limité et Murio donne dans une série d'articles les moyens de juger des limites de la méthode dans la résolution du problème inverse de transfert conductif (IHCP). Dans une application thermomécanique, l'article de Chrysochoos [26] (1995) expose clairement le traitement qui est opéré. Le champ de température est d'abord projeté sur une base naturelle associée à l'opérateur de diffusion (base de Fourier) et reconstruit en supprimant les modes hautes fréquences pour filtrer le signal. Ensuite le terme source est estimé directement en calculant les opérateurs différentiels (moyennant mollification c'est-à-dire la composition par un filtre convolutif gaussien en espace pour le calcul du Laplacien). Les évolutions de la méthode ne peuvent porter que sur la qualité du filtrage (qui régularise le calcul mais biaise le résultat). Ces approches se sont exportées à Clermont-Ferrand et des études récentes s'intéressent à valider l'approche sur des dispositifs expérimentaux maîtrisés [27] (Delpueyo et al., 2013) pour l'appliquer ensuite à des études thermomécaniques [28] (Delpueyo et al., 2012) incluant également l'analyse simultanée des champs cinématiques.

Au LEMTA, les travaux de thèse de N.Renault se sont concentrés sur l'application d'une méthode inverse pour reconstruire les champs de source en 2D ou 1D, en appliquant deux méthodes d'inversion relevant, pour l'une, de la catégorie des méthodes inverses par recherche

de quasi-solution et optimisation d'une fonction coût [29] (Renault et al., 2010), pour l'autre, de la catégorie des méthodes de régularisation par optimisation [30] (Renault et al., 2008). Ce dernier type d'approche avait été auparavant abordé par des chercheurs étrangers dans des versions très sommaires [31] (Wong & Kirby, 1990), [32] (Rajic, 2001). Les essais étaient pilotés par vidéoextensométrie et ont permis de considérer les grandes déformations avec localisation des déformations. L'application concernait un polymère semi-cristallin. La démarche a ensuite été poussée jusqu'à exploiter les sources ainsi reconstruites comme un observable intrinsèque du comportement du matériau et participer à l'identification des paramètres d'une modélisation thermodynamique complète (mais réduite) de la loi constitutive du matériau [33] (Fig.1.4).

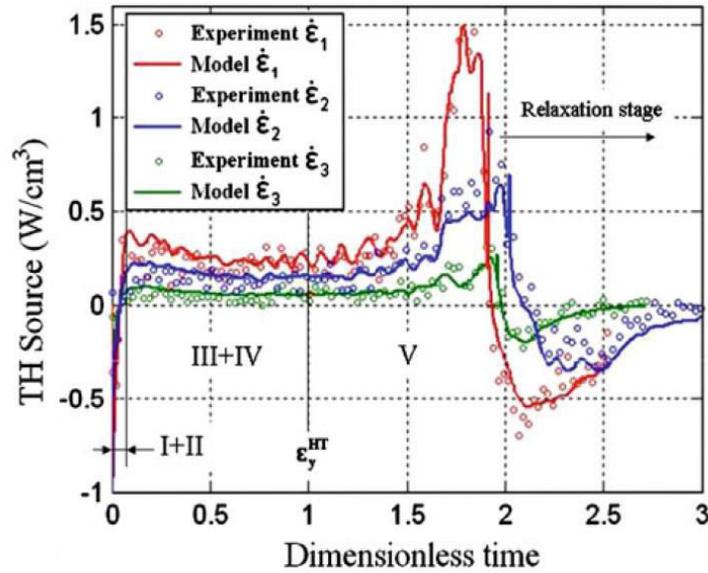


FIGURE 1.4 – Sources de chaleur expérimentales reconstruites (THS) et modélisation à partir d'une loi de comportement thermodynamique intégrant les couplages. Trois vitesses de chargement, Essai de traction-Relaxation (In Andre et al., 2012 [33]).

1.2 Méthodes de reconstruction inverse de sources de chaleur

On se concentre ici sur une revue ciblée des méthodes¹ en repartant d'une classification faite par N. Renault dans son travail de thèse [1] en la corrigeant et en la développant quelque peu.

Une présentation ordonnée des résultats de recherche publiés dans le domaine des méthodes inverses est extrêmement difficile, tout d'abord en raison de l'extrême diversité des objec-

1. Même si la plupart des travaux consultés portent bien sur l'identification de sources thermiques (puissance volumique), il est clair que les études traitant de sources de matière (débit massique) relèvent exactement de la même problématique inverse.

tifs poursuivis (reconstruction de sources, de conditions aux limites, identification de domaines, application en contrôle optimal, identification de propriétés...) mais aussi de la nature (structure) des problèmes mathématiques directs traités (systèmes d'EDO, EDP, Equations intégral-différentielles, intégrales...), des multiples manières de formuler le problème inverse, de le résoudre, de le régulariser pour conjurer son caractère "mal-posé", et enfin des propriétés spécifiques aux capteurs qui ont été utilisés pour alimenter le problème en données. Ces obstacles se retrouvent naturellement à propos de la reconstruction de sources de chaleur en thermique. A titre d'exemple et sur le nombre pourtant limité de travaux que nous citerons (liste non exhaustive : [34, 35, 36, 37, 38, 39]), on peut déjà dégager des méthodologies très différentes selon :

- les objectifs de reconstruction recherchés (dépendance temporelle, localisation spatiale, les deux)
- la métrologie utilisée pour produire les signaux utilisés pour l'inversion (nature du processus physique de mesure et donc de "création" du bruit, mesures de champ ou ponctuelles...)
- la dimensionnalité du problème et la géométrie de la source : point, ligne, sources 2D
- la technique mathématique utilisée pour résoudre le modèle direct en particulier autour de l'option classique résolution analytique versus numérique ou de toutes leurs combinaisons imaginables, sans oublier bien sûr les multiples approches numériques possibles.

Nous illustrerons ceci en fin de chapitre en montrant que notre problème très spécifique fournit lui aussi son lot d'approches hétérogènes selon les choix opérés sur les différentes options qui viennent d'être listées.

Il convient auparavant de redonner quelques précisions générales sur les méthodes inverses. Posons d'abord qu'il s'agit d'évaluer une certaine grandeur physique \mathbf{x} inaccessible à l'expérience (de manière directe, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'instrumentation dédiée qui en permette la lecture), à partir de la mesure d'une autre grandeur \mathbf{b} directement accessible à l'expérience (un capteur existe pour cette grandeur), connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement \mathbf{b} à partir de \mathbf{x} . Ceci est noté symboliquement

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \tag{1.1}$$

où A , représente l'opérateur du système avec une structure qui peut varier selon les choix mathématiques faits pour la mise en forme du problème sous (1.1). La recherche de \mathbf{x} passe par la formulation d'un critère, typiquement celui dit des moindres carrés, soit $\|\tilde{\mathbf{b}} - A\mathbf{x}\|^2$ où $\tilde{\mathbf{b}}$ représente une réalisation particulière des mesures de \mathbf{b} . L'estimation de la solution inverse du problème sera obtenue en considérant

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{arg\,min} \|\tilde{\mathbf{b}} - A(\mathbf{x})\|^2 \tag{1.2}$$

Si l'on qualifie ce problème d'inverse, c'est avant tout parce qu'il est mal posé au sens où l'existence, l'unicité, et/ou la continuité de la solution par rapport aux mesures ne sont pas toutes vérifiées. En d'autres termes, compte-tenu de la plage d'incertitude qui accompagne la mesure de \mathbf{b} , un grand nombre de valeurs possibles pour \mathbf{x} peuvent être trouvées qui

soient très éloignées les unes des autres. La solution du problème inverse pour un modèle physique et une mesure donnée doit être considérée comme obtenue (valable) lorsqu'elle l'est à "ε près".

Nous proposons trois catégories principales d'approches pour la résolution des problèmes inverses qui nous concernent².

- A) La première classe d'approches est issue d'une stratégie que l'on pourrait qualifier "d'évitement" du problème mal-posé. Puisque c'est le bruit sur les données qui est à l'origine de tous les soucis, on essaie de supprimer son influence en adoptant des stratégies qui peu ou prou reviennent à effectuer un pré-filtrage passbas du signal, pour "étouffer" les composantes hautes fréquences des mesures, à l'origine de l'explosion de l'inversion du problème (1.1). On peut par cette voie éviter complètement l'inversion du problème et se contenter d'appliquer les formes discrètes des opérateurs de dérivées partielles (Laplacien) sur ces substituts filtrés des mesures pour exprimer directement la source à partir de leurs combinaisons linéaires. Il n'y a pas ici de méthode d'inversion à proprement parler puisqu'il n'est pas nécessaire de faire appel à un critère de minimisation (1.2). C'est le sens des travaux déjà cités précédemment de Murio [41, 37, 25] à l'origine de la technique dite de Mollification. Le filtrage est effectué par convolution du signal expérimental avec un noyau gaussien d'écart-type ajustable et Murio a étudié la convergence et stabilité des opérateurs de différences finies centrées ainsi "mollifiés". On retrouve la même approche pour une application thermomécanique déjà citée [27]. Ces approches conduisent à des calculs simples, peuvent fonctionner lorsque le niveau de bruit reste faible et lorsque la fonction recherchée ne présente pas de fortes discontinuités. On peut leur reprocher de ne pas s'appuyer sur la physique du problème ce qui empêche tout contrôle du biais introduit sur l'identification et pose le problème du choix de l'écart-type de "mollification" pour produire la solution. Elles ne permettent pas non plus à l'expérimentateur-inverseur de lui renvoyer un questionnement sur la pertinence du modèle considéré. Ces méthodes ne sont de fait pas exploitées dans la communauté des inverseurs et la littérature est peu fournie.
- B) La seconde classe d'approches est issue d'une stratégie que l'on pourrait qualifier "d'acceptation" du problème mal-posé. Elle correspond à l'inversion dite stochastique. Le principe en est de considérer toutes les variables comme aléatoires afin de représenter toutes les incertitudes. La solution du problème inverse est une fonction densité de probabilité associée à l'inconnue \mathbf{x} à partir de laquelle on peut chercher des grandeurs caractéristiques : valeur moyenne, valeur de plus grande probabilité, dispersion, corrélations... La stratégie idéale du problème inverse qui serait celle d'inventorier l'ensemble complet des solutions à "ε près" de \mathbf{x} est donc presque atteinte puisqu'on peut produire une image objective de l'ensemble des solutions les plus vraisemblables compte-tenu de toutes les informations a priori sur les mesures. Ces approches bayésiennes permettent ainsi d'avoir une idée très claire de ce qu'il est possible de faire en inversion avec un modèle donné et de dégager des pistes pour faire de la réduction

2. Ces trois catégories ne suivent pas celles proposées par M.Bonnet [40] mais, profitant du recul des années, consacrent celles qui se sont (plus ou moins) imposées en pratique. Des stratégies existent également qui empruntent des éléments à deux différentes catégories. Il s'agit donc d'une simple proposition de présentation de cet état de l'art.

de modèle. Elles ont donné lieu à des travaux de reconstruction de sources mais dans des champs disciplinaires éloignés des problématiques de transferts thermiques : Problèmes de reconstruction de sources en ElectroEncéphaloGraphie (EEG comme technique d'imagerie médicale), en géophysique (localisation de sources sismiques), en géoenvironnement (détection de sources de contaminants ou de feux). Pour cette raison, nous ne citerons pas de travaux en particuliers qui pour la majorité d'entre eux, s'intéressent à localiser des sources ponctuelles et rendre compte de leur activité temporelle. Nous citerons néanmoins Tarantola [42] et Kaipio [43] comme les principales figures de la théorie d'inversion statistique.

- C) La troisième classe d'approches est issue d'une stratégie que l'on pourrait qualifier "de contournement" du problème mal-posé. Elle correspond à ce qu'on appelle la régularisation du problème mal posé, concept bien vulgarisé maintenant et dû initialement à Tikhonov et Arsenin [44]. Cette stratégie consiste à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée...) de façon que la "solution régularisée" obtenue par "inversion régularisée" dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte [40]. On remplace un problème initial mal posé par un autre, proche du premier, et bien posé. Ces méthodes se sont indubitablement imposées dans la communauté des inverseurs au vu de la littérature abondante produite dans tous les domaines, et pour tous types de problèmes inverses. Ce sont les méthodes standards actuellement et leur succès est sans doute lié à un fort substrat de mathématiques appliquées, bien établi, largement enseigné, qui va des méthodes numériques aux méthodes d'optimisation. Dans cette classe d'approches, différentes méthodes peuvent être mises en œuvre que nous évoquons succinctement en opérant une distinction selon la nature linéaire ou non-linéaire du problème inverse à résoudre.

1.2.1 Régression linéaire

Considérant un problème inverse linéaire mis en forme discrète par un procédé numérique quelconque, on dispose d'un vecteur de données, \mathbf{b} , comportant m mesures, et du vecteur, \mathbf{x} , des n paramètres inconnus. Le problème (1.1) est réécrit sous l'hypothèse de linéarité

$$A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1.3)$$

où la matrice A de taille $m \times n$ apparaît donc comme donnant directement la sensibilité du modèle vis-à-vis des paramètres recherchés. Une grande sensibilité se manifesterait si une faible variation sur un ou des paramètres inconnus \mathbf{x} , est amplifiée par A de sorte d'engendrer de grosses variations sur les données \mathbf{b} .

Considérant que le nombre de données m est supérieur au nombre d'inconnues x , une solution approchée de ce système algébrique est souvent identifiée en minimisant les résidus entre les données réelles $\tilde{\mathbf{b}}$ et le modèle $A\mathbf{x}$ (1.2). Compte tenu de l'utilisation de la norme l^2 sur les résidus, nous obtenons une solution (un estimateur) au sens des moindres carrés ordinaires (MCO) reconnue comme non biaisée dans le cas du modèle linéaire. Son expression explicite peut-être obtenue formellement par

$$\hat{\mathbf{x}}_{MCO} = (A^t A)^{-1} A^t \mathbf{b} \quad (1.4)$$

C'est le plus ou moins bon conditionnement de la matrice A (i.e $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$), qui détermine la gravité de la pathologie "mal-posée" du problème inverse et impose donc des remèdes. Il en existe plusieurs types que l'on peut tenter de répertorier suivant Maillet et al. [45] :

- Le premier remède consiste à réduire le nombre de degrés de liberté du problème soit le nombre effectif d'inconnues permettant de calculer la solution $\hat{\mathbf{x}}$. Les composantes du vecteur \mathbf{x} correspondent aux projections de la fonction recherchée $x(\cdot)$ sur une base de \tilde{n} fonctions, \tilde{n} étant inférieur ou égal au nombre de mesures. Il s'agit donc de choisir volontairement un sous-paramétrage ($\tilde{n} < n$) dans la décomposition de cette fonction. Ce type de remède n'agit donc pas sur le critère à minimiser (quel qu'il soit). La technique de décomposition en valeurs singulières de la matrice A (technique dite SVD) et de troncature de spectre (technique dite TSVD) est l'outil fondamental de cette classe de remèdes. Dans ce cas, le sous-ensemble de solutions admissibles \mathbf{x}_{admis} se construit à partir de l'analyse spectrale de la matrice A et la contrainte sur les solutions admissibles est introduite en choisissant l'ordre de troncature. Ce choix dépend du conditionnement initial de A . A défaut de l'utilisation de la TSVD, toutes les techniques qui vont modifier A pour diminuer $\text{cond}(A)$ (en changeant ou non sa taille) vont contribuer à régulariser les solutions. On peut ainsi changer A de différentes façons :

- (a) par réduction physique du modèle. Au lieu d'utiliser un modèle fin pour inverser les mesures, il est parfois possible d'utiliser un modèle de structure plus simple pour l'inversion (mais donc plus ou moins biaisé), sachant que le conditionnement de l'inversion et donc son caractère mieux posé s'en trouvera renforcé. Le thermicien dispose ainsi, dans sa boîte à outil d'un large "spectre" de modèles pertinents pour un même problème thermique. Par exemple, il est toujours possible de prendre un modèle d'ailette 1D au lieu d'un modèle 2D. C'est ce que nous utilisons déjà dans cette thèse puisque N.Renault a clairement montré que les algorithmes inverses 2D ne sont absolument pas stables lorsqu'on les applique aux données obtenues sur des éprouvettes de traction.
- (b) par la méthode des temps futurs, dite aussi la méthode séquentielle de spécification de fonction [46]. Elle consiste à minimiser le critère $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2$ sur un horizon temporel glissant, en spécifiant que la variable \mathbf{x} est constante sur cet horizon, la contrainte étant introduite en choisissant la durée, c'est-à-dire le pas de temps et le nombre de pas de temps futurs de cet horizon. Le fait de supposer \mathbf{x} constante est par ailleurs le moyen de linéariser le problème de régression.
- (c) par réduction mathématique du modèle. On peut citer par exemple la méthode d'Identification Modale (MIME) [47] qui est basée sur une réduction de la taille du vecteur d'état découlant de l'identification (estimation paramétrique) d'un faible nombre de modes de la matrice d'évolution, en partant de simulations effectuées avec un modèle détaillé de grande taille. Cette réduction mène à un vecteur d'état de faible dimension qui conduit à une inversion plus facile des mesures. Toutes les méthodes décompositionnelles (approches spectrales ou de paramétrisations de fonctions) relèvent également de cette approche et procèdent d'une demi-mesure

intéressante entre une analyse TSVD “aveugle” et une décomposition sur base des opérateurs propres caractérisant le système physique à inverser.

A ce titre, les méthodes basées sur les décompositions de Fourier de l’opérateur de diffusion sont bien connues et font parties des recettes classiques. La variable dépendante (température ou source) est décomposée sur une base de fonctions sinus-cosinus (modes), pour différentes fréquences spatiales, rangées par ordre croissant. Les modes haute fréquence sont éliminés pour rendre mieux posée l’approche inverse. Un critère de troncature des modes est ainsi indispensable à définir. Une autre décomposition sur modes de branche assez similaire à la méthode de Fourier est développée au LME d’Evry par A. Neveu et ses collaborateurs [48] depuis de nombreuses années. Cette base considère des conditions limites généralisées de Steklov et offre la possibilité de prendre en compte n’importe quel type de condition limite non linéaire. Contrairement à la décomposition de Fourier, les modes de branche préservent un contenu physique facilement identifiable pour l’utilisateur. De plus, Neveu propose aussi une stratégie d’amalgame pour fabriquer les modes plus performants à partir de la base modale originale. C’est l’approche que nous avons tentée d’appliquer au chapitre 4. Ces décompositions rendent difficile la reconstruction de fonctions présentant des points de non dérivabilité. C’est un phénomène classique, dit phénomène de Gibbs, car les fonctions modales obtenues (modes de Fourier) possèdent une propriété “smooth” globale. Par contre, les méthodes de décomposition en ondelettes connaissent la faveur des mathématiciens travaillant sur la résolution d’EDP [49, 50] et leur application aux problèmes inverses [51, 52]. Ces décompositions peuvent apporter des améliorations substantielles pour le cas de discontinuité par rapport aux décompositions classiques de Fourier car elles permettent de localiser dans le temps la présence d’une fréquence particulière. Le support d’une ondelette donnée est en effet compact et d’étendue inversement proportionnelle à sa fréquence. Parallèlement, la décomposition en ondelettes peut se faire sur une base orthogonale et permet des transformées inverses rapides.

- Le second remède procède d’une régularisation par technique dite de “pénalisation”, consistant à chercher une “solution” \mathbf{x} qui minimise une fonction coût J_α de la forme

$$J_\alpha(\mathbf{x}) = \|\tilde{\mathbf{b}} - A\mathbf{x}\|^2 + \alpha\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{a priori}}\|^2 \quad (1.5)$$

Ces remèdes cherchent donc à réduire l’espace des solutions admissibles sans toucher à priori au modèle (à la matrice des sensibilités), mais en modifiant le critère de sortie. Les solutions dépendent ainsi à la fois de la valeur de ce paramètre α et des estimations $\mathbf{x}_{\text{a priori}}$ choisies *a priori* pour la solution. En général, la physique peut fournir des éléments pertinents pour contraindre la solution à se trouver dans un voisinage de $\mathbf{x}_{\text{a priori}}$. On peut mentionner la technique de **pénalisation de Tikhonov**, qui utilise, comme terme pénalisant, le carré de la norme de la fonction \mathbf{x} recherchée, ou de sa dérivée première ou seconde, pour éviter l’explosion de l’inversion. Reste à trouver les valeurs acceptables de α c-à-d de régler le niveau de confiance que l’on souhaite associer à l’information $\mathbf{x}_{\text{a priori}}$, le risque étant de biaiser la solution approchée. Dans les applications pratiques, la stratégie de la “L curve” fournit le meilleur α de compromis en cherchant le point minimisant les “deux” composantes du critère. La détermination de α selon le principe de différenciation (discrepancy principle) produit toujours des

approches inverses acceptables et sont hautement légitimes : il s’agit là de ne pas accepter que les résidus “descendent” en dessous de l’ordre de grandeur du bruit de mesure, ce qui est de bon sens. On choisit donc typiquement la valeur de α minimale qui garantit $\|\tilde{\mathbf{b}} - A\mathbf{x}\|^2 \geq m\sigma^2$ ou m est le nombre de mesures et σ^2 la variance du bruit de mesure. Notons que formellement, la condition de minimisation de ce nouveau critère par annulation de son gradient conduit à une solution régularisée $\hat{\mathbf{x}}_\alpha$ qui est obtenue à partir de l’équation (1.4) mais où la matrice $(A^t A)^{-1}$ est substituée par $(A^t A + \alpha I)^{-1}$, I étant la matrice identité. On voit donc bien qu’au final, cette technique permet de venir alourdir la diagonale principale de $A^t A$ ce qui classiquement dans les méthodes numériques est reconnu comme un facteur permettant de mieux “inverser” la matrice.

- Enfin le troisième remède consiste à adopter une approche itérative pour résoudre l’inversion $(A^t A)^{-1}$, la production d’une nouvelle itérée du vecteur des paramètres inconnus étant stoppée dès que le principe de différenciation est atteint. Il fixe le nombre maximal d’itérations. Sur les problèmes linéaires, cette approche est surtout recommandée pour les systèmes de très grande taille (très grand nombre de paramètres à identifier) car pour les techniques précédentes, des temps de calculs prohibitifs et des exigences en mémoire disponible trop importantes en limitent fortement l’intérêt. Dans les applications de tomographie par exemple, l’algorithme de *Kaczmarz* originalement développé pour ce type de problèmes offre une convergence très rapide (plus de détails dans [53]). D’autres mises en œuvre classiques sont basées sur l’utilisation de la méthode des sous-espaces de Krylov, par exemple la méthode d’Arnoldi-Lanczos, appliquée aux procédures de minimisation du critère quadratique par une approche de type “descente” ou de minimisation par les “gradients conjugués”. Dans le chapitre 4, nous développons une stratégie basée sur ces techniques et nous aurons l’occasion d’en détailler le fonctionnement.

Dans le cas non-linéaire, ces techniques itératives sont quasiment incontournables, c’est pourquoi nous abordons leur description succincte dans le prochain paragraphe.

La combinaison de ces différentes techniques est possible. Soulignons que, dans tous les cas, la régularisation conduit à l’introduction d’un biais (erreur systématique) entre la solution exacte (inconnue) et la solution calculée. La difficulté réside dans la réalisation du compromis nécessaire entre les exigences de stabilité de l’algorithme et de précision recherchée.

1.2.2 Régression non linéaire

Dans le cas du problème non linéaire $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ pour lequel la matrice des sensibilités n’est plus constante, on peut toujours chercher à minimiser les résidus \mathbf{r} (écart modèle-données) mais le critère n’est plus quadratique. On peut le réécrire

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m r_i^2 = \mathbf{r}^t \mathbf{r} = [\tilde{\mathbf{b}} - A(\mathbf{x})]^t [\tilde{\mathbf{b}} - A(\mathbf{x})] \quad (1.6)$$

et le principe de la méthode est de faire baisser la valeur de ce critère au fur et à mesure des itérations et des nouvelles estimations de x qui les accompagnent. Ce principe suppose l’initialisation du vecteur des inconnues \mathbf{x}^0 , et un procédé algorithmique $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}$

permettant de générer une succession d'itérés pour le vecteur \mathbf{x}^k de sorte que $J(\mathbf{x}^{k+1}) < J(\mathbf{x}^k)$ afin de garantir la convergence finale. Les trois procédés les plus populaires relèvent des méthodes dites de “descente” et nous distinguerons sans trop les détailler puisqu'elles sont très bien expliquées dans tous les ouvrages numériques de base (cf [54]) :

- les méthodes d'ordre 0 qui ne travaillent que sur les valeurs successives du critère à minimiser. Elles sont particulièrement utiles quand on ne peut calculer un gradient du critère pour connaître les directions à privilégier pour gagner à tous les coups dans la minimisation ou lorsque le critère est discontinu. La méthode du simplex en fait partie.
- les méthodes d'ordre 1 qui utilisent les valeurs de la fonction critère J ainsi que la valeur de son gradient ∇J à chaque itération. Le principe fort logique consiste à “descendre”, à chaque boucle, selon la plus forte pente du critère. Les algorithmes s'écrivent donc formellement sous la forme :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^k - \gamma^k \nabla J(\mathbf{x}^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

où γ^k est un paramètre positif donné pouvant être ajusté à chaque itération (amplitude du pas fait dans la direction de plus grande descente). L'inconvénient majeur de ce type de méthodes réside dans le fait qu'elles convergent lentement au voisinage du minimum, puisque le gradient devient de plus en plus faible. On préférera donc utiliser la méthode des Gradients Conjugués qui récupère simultanément l'information du gradient et de la direction de descente utilisée lors de l'itération précédente.

- les méthodes d'ordre 2 qui utilisent, en plus des méthodes d'ordre 1, des informations sur les valeurs des dérivées secondes du critère J par l'intermédiaire de sa matrice Hessienne $H(J) = J''(\mathbf{x})$. C'est l'algorithme de Newton basé sur l'écriture du développement en série à l'ordre 1 du gradient qui donne $J'(\hat{x}) = J'(x) + J''(x)(\hat{x} - x)$. Pour une estimation remplissant la condition d'optimalité $J'(\hat{x}) = 0$, on obtient donc $\hat{x} = x - [J''(x)]^{-1} J'(x)$ qui permet d'aboutir à un procédé analogue au précédent

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^k - \gamma^k [J''(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla J(\mathbf{x}^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Malheureusement, cette matrice Hessienne n'est pas souvent simple à calculer explicitement et des approches numériques sont nécessaires. La technique offre l'intérêt de converger très rapidement au voisinage du minimum. Cependant, elle peut ne pas converger en cas de mauvaise initialisation qui ne rendrait pas $H(J)$ définie positive.

Les méthodes de Gauss Newton et de Levenberg-Marquardt qui palient les inconvénients des méthodes d'ordre 1 et 2 en cumulant leurs avantages sont maintenant très répandues et sont bien sûr à privilégier.

- Une technique itérative très efficace pour minimiser le critère (1.6) repose sur l'algorithme du gradient conjugué combiné à une méthode de l'état adjoint. Les méthodes de descente basées sur le gradient du critère font intervenir nécessairement le calcul de la matrice de sensibilité A . La technique des gradients conjugués (ordre 1) permet de converger en un nombre fini d'itérations, égal à la taille du vecteur \mathbf{x} dans le cas du problème linéaire et du critère quadratique.

Dans le cas non linéaire, une stratégie permet d'éviter de calculer la matrice $A(\mathbf{x})$ à chaque itération en lui substituant la résolution d'une équation adjointe au problème

physique (de même structure mathématique que le problème direct). Pour les systèmes de grande taille, cette alternative est payante en termes d'économie de temps de calculs. C'est la méthode de l'état adjoint, ou des multiplicateurs de Lagrange, beaucoup utilisée dans les problèmes de thermique [55] que nous développerons au chapitre 4. La régularisation est ici assurée par le critère d'arrêt des itérations qui en détermine donc le nombre maximum.

Pour conclure cet état de l'art et donner une vision claire du positionnement des travaux du LEMTA par rapport à celui-ci, nous revenons sur les différents traitements et diverses stratégies de résolution mises en œuvre dans la thèse de N.Renault, et auxquelles le présent travail en ajoute de nouvelles, selon que l'on considère le modèle direct utilisé, les observables utilisés, les stratégies d'inversion utilisées.

- **Modèle direct** : Dans les précédents travaux du LEMTA [30, 29], les auteurs ont effectué la reconstruction de source par deux stratégies différentes sous l'hypothèse de diffusion pure de la chaleur. Le terme source $f(\mathbf{r}, t)$ est reconstruit en considérant l'opérateur suivant :

$$u_{,t} - k\nabla^2 u = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.9)$$

pour les géométries 1D et 2D. Les performances des méthodes mentionnées ont été évaluées sur la base de simulations d'inversion théoriques (inversion à partir d'un observable produit synthétiquement) et également par inter-comparaison lors de l'inversion de données réelles. Ici nous reconsidérons le problème pour l'opérateur d'advection-diffusion

$$u_{,t} + v \cdot \nabla u - k\nabla^2 u = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.10)$$

en nous limitant à une géométrie 1D.

- **Observables utilisés** : De fait, dans le présent travail nous impliquerons dans le processus d'inversion un nouvel observable, de nature différente : la mesure du champ cinématique v . Celui-ci introduit dans le problème d'inversion de nouvelles incertitudes propres et le perturbe aussi par la nécessaire interpolation qu'il faudra pratiquer sur les données (cf chapitre 2) pour recaler champs thermiques u et cinématiques v .
- **Stratégie d'inversion** : Dans les travaux précédents, les stratégies d'inversion avaient été plus ou moins "commandées" par le choix fait pour la résolution du modèle :
 - (a) résolution numérique par différences finies qui avait conduit à formuler le problème inverse comme un problème de régression linéaire sur la base d'un critère de minimisation globale avec contrainte.
 - (b) approche spectrale produisant une résolution approchée du modèle par troncature sur les modes et qui avait conduit à formuler le problème inverse comme un problème de régression linéaire sur la base d'un critère de minimisation vérifié de manière glissante sur quelques points : approche séquentielle de type "pas de temps futurs".

Dans le présent travail, nous avons voulu pousser l'investigation sur les stratégies de résolution du modèle par méthode spectrale (avec l'idée d'améliorer le caractère approché des solutions, en s'affranchissant éventuellement de conditions aux limites mal connues) et exploiter la formulation du problème direct en termes d'états (coefficients de la décomposition modale)

pilotés par un système d'EDO qui rapprochent ainsi ce problème de ceux communément rencontrés en contrôle optimal et pour lequel, nous avons donc ajouté aux stratégies d'inversion précédente, une méthode itérative (gradient conjugué) appliquée à une formulation par l'état adjoint du critère de minimisation.

Chapitre 2

PRODUCTION D'OBSERVABLES THERMOMECHANIQUES : Matériel et Méthodes

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.1 | Matériau | 23 |
| 2.2 | Dispositifs expérimentaux et production d'observables | 26 |
| 2.2.1 | Dispositif général : plateforme de métrologie en rhéologie solide | 26 |
| 2.2.2 | Production d'observables par stéréocorrélation d'images | 29 |
| 2.2.3 | Production d'observables par imagerie infrarouge | 40 |
| 2.2.4 | Principe de recalage des films IR sur les films DIC | 43 |
| 2.3 | Résultats bruts emblématiques | 44 |

Nous donnons dans ce chapitre toutes les informations nécessaires à la bonne compréhension des différents aspects de notre travail expérimental : échantillon matériau, dispositifs utilisés, techniques de mesure et méthodes de post-traitement des données. Nota : Toutes les valeurs de déformations auxquelles il est fait référence dans le texte sont les déformations vraies ou de Hencky selon la formule

$$\varepsilon = \ln(l/l_0) = \ln(\lambda) \tag{2.1}$$

où λ est le taux d'étirement (extension ratio) $\lambda = \frac{l}{l_0} = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} = 1 + \varepsilon_{nom}$.

2.1 Matériau

Le matériau semi-cristallin étudié est un PolyEthylene Haute Densité (PEHD) produit par la firme Röchling (Röchling Engineering Plastics KG) et référencé sous le grade "500 Natural". Ce matériau (sous cette même référence) est étudié depuis plus de 10 ans au laboratoire, a fait l'objet de 5 thèses et des caractérisations multiples :

- à la nano-échelle (SAXS/WAXS),

- à la micro-échelle (microtomographie X, diffusion de lumière polarisée, microscopie électronique, microscopie optique à polariseurs croisés) et
- à la macro-échelle (caractérisations mécaniques essentiellement sous chargement de traction/relaxation, mesures de modules d'élasticité par essai de traction, techniques ultrasons de type pulse-écho, CSM en nanoindentation, mesures de variation volumique par corrélation d'images, caractérisation thermomécanique par mesure de champs thermiques sous sollicitation et reconstruction a posteriori de sources de chaleur, caractérisations thermiques : mesures de chaleur spécifique et diffusivité/conductivité thermique).

Le tableau 2.1 récapitule les valeurs des paramètres caractérisant le matériau à l'état non déformé. Les specimens sont prélevés au sein d'une plaque de grande dimension, produite par processus d'extrusion. Sauf étude particulière, ils sont toujours prélevés dans le sens d'extrusion. Les informations du fabricant donnent un poids moléculaire de 500000 g/mol et une densité de 0.95 g/cm^3 .

Des expériences synchrotron de type SAXS [56] ont permis la caractérisation morphologique du matériau non déformé. Une expérience de fusion du matériau a été réalisée jusque 140°C sous rayonnement. Les profils d'intensité SAXS ont été calculés à partir des patterns de diffraction pendant les étapes de chauffage/refroidissement. Précédemment, l'image de diffusion du matériau à l'état liquide (dispersion du matériau désordonné) avait été soustraite des patterns. Les paramètres morphologiques moyens de lamelles cristallines, extraits à partir de ces informations, ont donné une longue période de stack de 26.8 nm , une épaisseur de phase cristalline de 18.5 nm et une épaisseur de couche amorphe d'environ 8.2 nm . La fraction volumique de phase cristalline qui en est déduite est de l'ordre de 69% (confirmant des mesures faites par calorimétrie différentielle à balayage ayant donné 68%). La morphologie du PEHD non déformé telle que perçue sous microscope à polariseurs croisés ne révèle aucune structure sphérolitique marquée mais plutôt une structure homogène d'amas cristallins dispersés).

La contrainte seuil (yield stress) est de l'ordre de 33 MPa (valeur correspondant à une déformation vraie de seuil (yield strain) de 0.1).

Les propriétés thermiques mesurées à l'occasion de la thèse de N.Renault sur les équipements du LEMTA (mini plaque chaude, diffusivimètre flash et microcalorimètre DSC3 evo Setaram) sont reportées dans le tableau 2.1.

| | |
|---|--|
| Density | $\rho = 0.95 \text{ g/cm}^3$ |
| Cristallinity (DSC+SAXS) | 67-70% |
| Long period (SAXS) | 26.8 nm |
| Molecular mass | 500000 g/mol |
| Instantaneous Elastic Modulus (DLR Model Tensile test) | $E = 2900^{+50}_{-150} \text{ MPa}$ |
| Yield stress (DLR Model Tensile test) | $\sigma_{\text{Yield}} = 33 \text{ MPa}$ |
| Thermal conductivity (Mini Hot Plate) | $k = 0.473 \text{ W/m/K}$ |
| Specific heat (μDSC Setaram) | $C_p = 1780 \text{ J/kg/K}$ |
| Thermal diffusivity (Flash method) | $\alpha = 0.275 \text{ mm}^2/\text{s}$ |

TABLE 2.1 – Paramètres du matériau HDPE utilisé (en gras, mesures faites au LEMTA)

A noter que des mesures très précises de C_p (capacité calorifique) ont été faites sur le matériau non déformé et très déformé (déformation vraie de 2) et n'ont révélé aucune différence dans l'intervalle de confiance des mesures (à $\pm 2\%$ près).

L'essentiel des autres caractérisations réalisées sur ce matériau in situ, pendant les essais de traction, l'ont été en prenant soin d'être toujours faites dans un VER sondé correspondant à la zone centrale des éprouvettes où se déclenchait la striction : zone de déformation maximale. Elles sont toutes indexées sur l'état de déformation du matériau par la déformation vraie longitudinale $\varepsilon_Y = \ln(l/l_0)$. Pour les expériences qui nous concernent, à l'échelle macroscopique, les éprouvettes considérées correspondent à la géométrie et aux dimensions du schéma de la Figure (2.1)

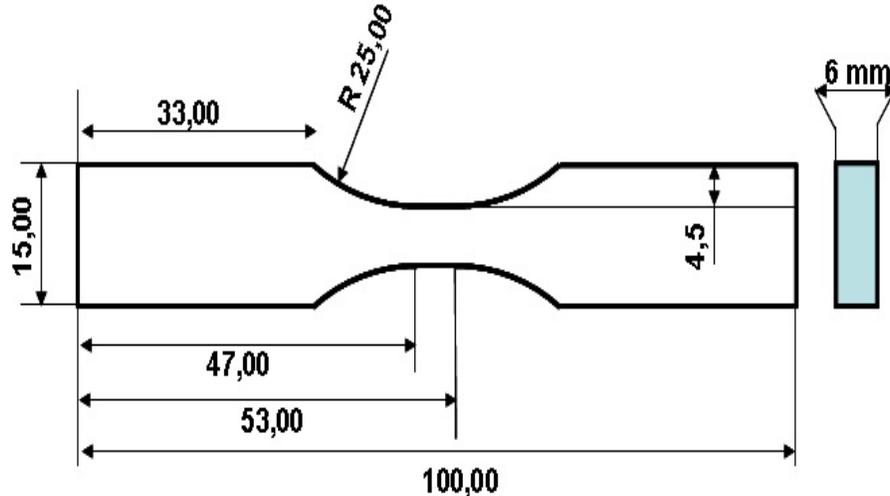


FIGURE 2.1 – Schéma et dimensions de l'éprouvette “type” utilisée pour les tests mécaniques

Les éprouvettes présentent une section initiale de $6 \times 6 \text{ mm}^2$ pour avoir un volume sondé conséquent de $6 \times 6 \times 6 \text{ mm}^3$ et de bonnes mesures mécaniques, compte-tenu des dispositifs. Tous les tests relevant de cette thèse ont été menés sur la plateforme “Rhéologie Solide” du LEMTA qui sera décrite dans la prochaine section. Dans toute la thèse, l'axe référencé Y correspond à l'axe de traction. Les axes X et Z correspondent respectivement aux directions transverses et dans l'épaisseur.

2.2 Dispositifs expérimentaux et production d'observables

2.2.1 Dispositif général : plateforme de métrologie en rhéologie solide

Cette plateforme s'est développée autour d'une machine hydraulique MTS (modèle 312.21, capacité ± 10000 daN ; course 150 mm) équipée d'une cellule de force 5 kN. Le contrôleur de la machine est une électronique Flextest SE (module E/S MTS493.40) avec conditionneurs 19bits pour les signaux d'entrée analogiques.

Le premier outil implémenté sur la machine est un vidéoextensomètre (Vidéotraction) par suivi de marqueurs initialement conçu par G'sell et Hiver [57]. Il permet une mesure en temps réel de la déformation longitudinale vraie $\varepsilon_Y = \ln(l/l_0)$ par suivi du déplacement des barycentres de 5 taches disposées le long de l'axe central de l'éprouvette mais concentrées dans le VER (cf insert de la Fig. 2.2). Le dispositif est constitué d'une caméra CCD visible, embarquée sur un pied motorisé qui est lui-même asservi à la mesure de déformation : dans les faits, le dispositif est conçu pour que le centre de l'éprouvette reste toujours au centre de l'image ce qui permet pour une distance focale fixe, de maximiser les déformations ultimes jusqu'où l'essai peut être conduit, ce qui est un avantage de taille pour étudier les matériaux à grands taux de déformation. Cette mesure locale de déformation constitue un signal analogique d'entrée du contrôleur flextest qui est capable alors d'asservir le vérin (déplacement du mors) de manière à réaliser n'importe quel trajet de commande en déformation (moyennant un réglage convenable des paramètres PID de la boucle de rétroaction basée sur la voie de mesure). Cette commande systématique des essais en termes de variables intrinsèques vraies (déformation ou contrainte) est un choix fait au laboratoire pour travailler toujours avec les observables mécaniques intervenant directement dans l'écriture d'une loi de comportement. C'est également crucial dans des études de développement d'instabilités de striction comme celle que nous avons menées ou pour appréhender de manière directe les effets de non-linéarité de "strain-rate". L'écart-type sur le bruit de mesure de cette déformation est toujours de l'ordre de ou inférieur à $s.t.d(\varepsilon_Y^{VE}) = 0.0005$.

Ce dispositif, finalement classique de nos jours, devient plateforme métrologique à partir du moment où un second pied motorisé est couplé au premier et le suit dans son mouvement. Il permet alors d'embarquer un second, voire un troisième dispositif de mesure à distance permettant d'assurer des mesures de manière simultanée sur le même VER (en visant en général la surface "arrière" de l'éprouvette). Il a d'abord permis de réaliser les premières expériences de caractérisation thermomécanique et d'évolution microstructurale in-situ [1, 58] en associant sur ce second pied une caméra infrarouge et un dispositif de diffusion de lumière (ISLT) pour la mesure de l'évolution de turbidité (blanchiment) de l'éprouvette.

Dans la thèse d'A.Blaise [59], c'est une nouvelle version du dispositif de diffusion de lumière, incluant le transport de polarisation (technique IPSLT), qui a permis d'obtenir des caractérisations in-situ à l'échelle microscopique de l'évolution de la turbidité, de l'anisotropie de la microstructure, et de la taille des diffuseurs [60, 61, 62].

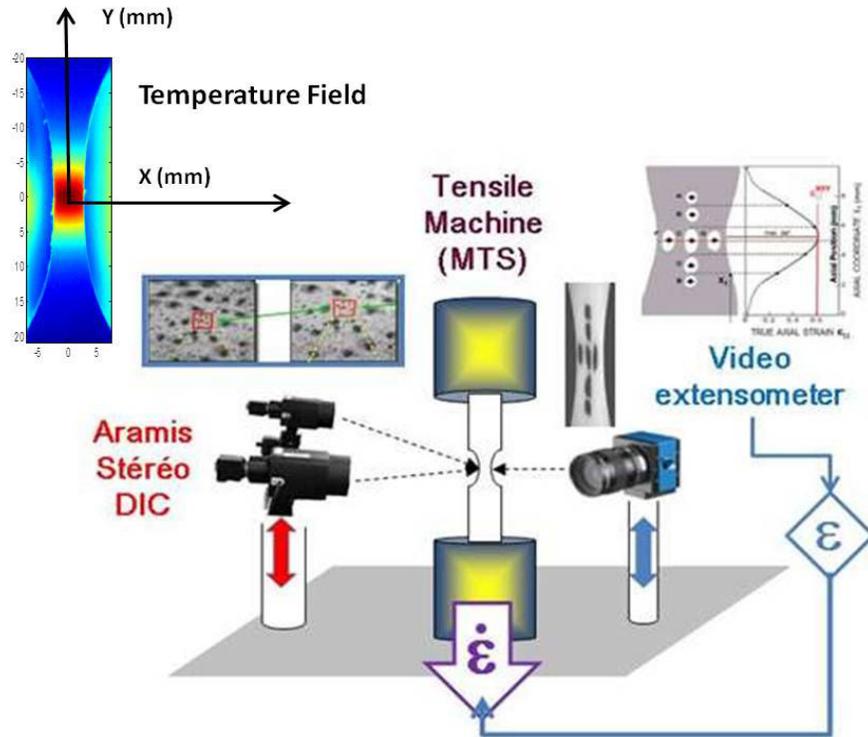


FIGURE 2.2 – dispositif général de la plateforme métrologique de l'équipe Rhéologie Solide.

Plus récemment, c'est le dispositif de stéréocorrélation d'images Aramis (3D-DIC) qui a permis de réaliser des mesures de déformation volumique in-situ, tout en montrant clairement les erreurs importantes qui sont commises sur cette mesure lorsqu'elle est envisagée avec un dispositif de suivi de marqueurs tel que Vidéotraction [56].

Dans le cadre de cette thèse, ce sont tour à tour une caméra infrarouge et le dispositif de stéréocorrélation qui ont donc été utilisés pour collecter les champs de température et de déplacement produits par une sollicitation des éprouvettes de PEHD en déformation contrôlée. Les détails techniques et méthodologiques relatifs à ces deux équipements font l'objet des deux sections suivantes.

Le premier observable produit par ce dispositif (en se limitant au seul essai de traction considéré dans ce travail) est la courbe de traction "contrainte vraie-déformation vraie". Un exemple de résultats est donné en figure (2.3) où plusieurs courbes de traction expérimentales obtenues avec notre dispositif sont représentées pour les 4 valeurs de taux de déformation principales considérées dans ce travail :

$$\dot{\epsilon}^{(1)} = \dot{\epsilon}_Y = 0.01s^{-1}, \dot{\epsilon}^{(2)} = \dot{\epsilon}_Y = 0.02s^{-1}, \dot{\epsilon}^{(3)} = \dot{\epsilon}_Y = 0.03s^{-1}, \dot{\epsilon}^{(4)} = \dot{\epsilon}_Y = 0.04s^{-1}$$

Ces vitesses imposées ont été sélectionnées uniquement sur la base des mesures thermomécaniques que nous souhaitons faire, la borne inférieure étant fixée pour obtenir un niveau d'échauffement suffisant et des vitesses absolues supposées suffisantes pour générer un effet advectif, et la borne supérieure étant une limite de fonctionnement de la machine. Le

bruit typique sur une telle courbe est de ± 0.25 MPa ($3 \times$ écart-type). La contrainte vraie est ici calculée avec un certain biais :

1. puisque la section déformée de l'éprouvette n'est tout d'abord pas forcément évaluée exactement à l'endroit où à lieu la valeur maximale (effet inhérent au principe de fonctionnement du traitement logiciel des images par Vidéotraction)
2. parce que les déformations dans le sens transverse étant très mal mesurées par ce dispositif, nous faisons la double hypothèse (que nous savons ne pas être tout à fait vraie) d'isotropie transverse et d'incompressibilité ($\varepsilon_X = \varepsilon_Z = -\nu\varepsilon_Y = -0.5\varepsilon_Y$). La section actualisée est donc calculée par $S = S_0 \exp(\varepsilon_X + \varepsilon_Z) = S_0 \exp(-2\nu\varepsilon_Y)$. Ceci implique une contrainte vraie calculée uniquement à partir de la déformation longitudinale $\sigma_Y = \frac{F}{S(t)} = \frac{F}{S_0} \exp(\varepsilon_Y)$

S'agissant uniquement d'avoir des courbes de traction de référence pour analyser les résultats obtenus pour la reconstruction de sources en termes de régimes thermomécaniques, ce biais dans les courbes de traction ne porte pas à conséquence.

Ce biais se confond aussi partiellement dans l'observable final avec les imperfections expérimentales liées en particulier à la réalisation de la commande par la machine. Elle réagit par une boucle de rétroaction à la mesure en temps réel de la déformation et induit ainsi de nouvelles imperfections. La reproductibilité est estimée simplement en quantifiant la différence maximale existant entre deux courbes d'un même essai supposé. Elle est de l'ordre de 2MPa soit environ 10 fois le niveau de bruit.

Un signal de force a été également reporté à titre indicatif pour appréhender le niveau de bruit donné sur cette mesure pour nos essais.

Une courbe de traction obtenue à une vitesse de $\dot{\varepsilon} = 0.0025s^{-1}$ a également été ajoutée.

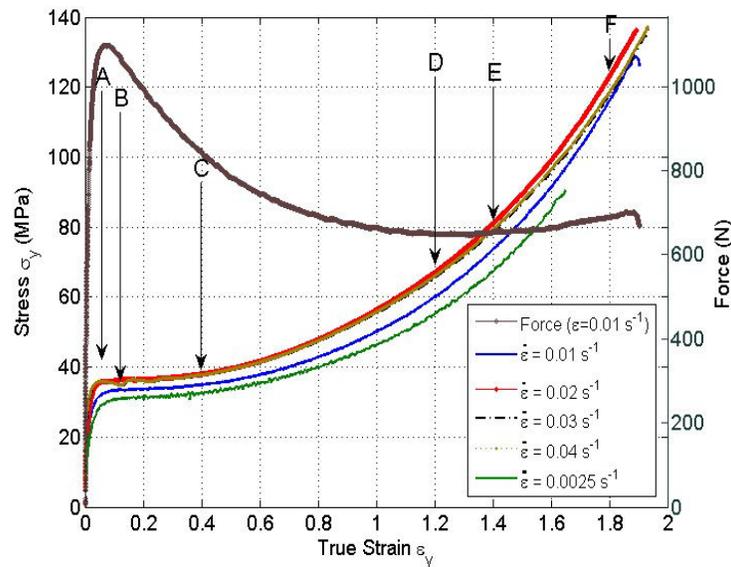


FIGURE 2.3 – Courbes de traction pour les 4 taux de déformation retenus (+ expérience à $\dot{\varepsilon} = 0.0025s^{-1}$ + signal de force pour un essai à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$).

2.2.2 Production d'observables par stéréocorrélation d'images

2.2.2.1 Matériel :

L'appareillage utilisé pour la thèse a été acquis au laboratoire en 2009. Il s'agit du dispositif ARAMIS 5M de GOM Instruments. Il est constitué de 2 Caméras BAUMER TXG50 équipées d'objectifs GOM-TITANAR 50 mm. Les caractéristiques du dispositif sont détaillées ci-dessous :

1. Caméras à 5 Millions de pixels (Capteur SONY ICX625 : 2448×2050 px)
2. Taille physique de pixel de $3.45 \times 3.45 \mu m$, ce qui représente environ $17 \times 17 \mu m$ sur l'éprouvette (plan image des caméras).
3. Fréquence d'acquisition maximale : 15 images/sec.

Comme nous le verrons, la mesure sur des éprouvettes aussi élancées n'est pas simple et nous avons dû rechercher avec soin l'éclairage approprié. Nous avons finalement opté pour les éclairages pour photographie professionnelle récemment développés en technologie LED (Mecalight LED-320, Metz), qui présentent également l'avantage de préserver l'échantillon de tout rayonnement radiatif dans le cas des applications couplées avec la thermographie IR.

2.2.2.2 Etalonnage :

Avant chaque mesure, il est impératif de procéder à une phase d'étalonnage du dispositif (cf Photo de la Fig.2.4), à une distance focale donnée, et pour une profondeur de champ donnée. La procédure est fixée par le dispositif logiciel Aramis et nécessite l'usage de cubes de calibrage sur lesquels sont dessinés des motifs caractéristiques correspondant à des points de référence. Au cours de la procédure, le logiciel reconnaît la position de ces points de référence pour 13 positions différentes du cube à l'intérieur du volume de mesure. Pour ces 13 mesures, la distance en pixels entre les points de référence est enregistrée. Il est alors possible de faire un étalonnage des distances qui seront mesurées ensuite par le dispositif. La qualité de l'étalonnage est principalement contrôlée à partir de d'une grandeur appelée : écart de calibrage. L'écart d'étalonnage, exprimé en pixel, est calculé à partir de l'écart moyen des 13 mesures de distances entre les points de référence. Pour que l'étalonnage soit correcte, l'écart de calibrage doit être inférieur à 0.04 pixel.

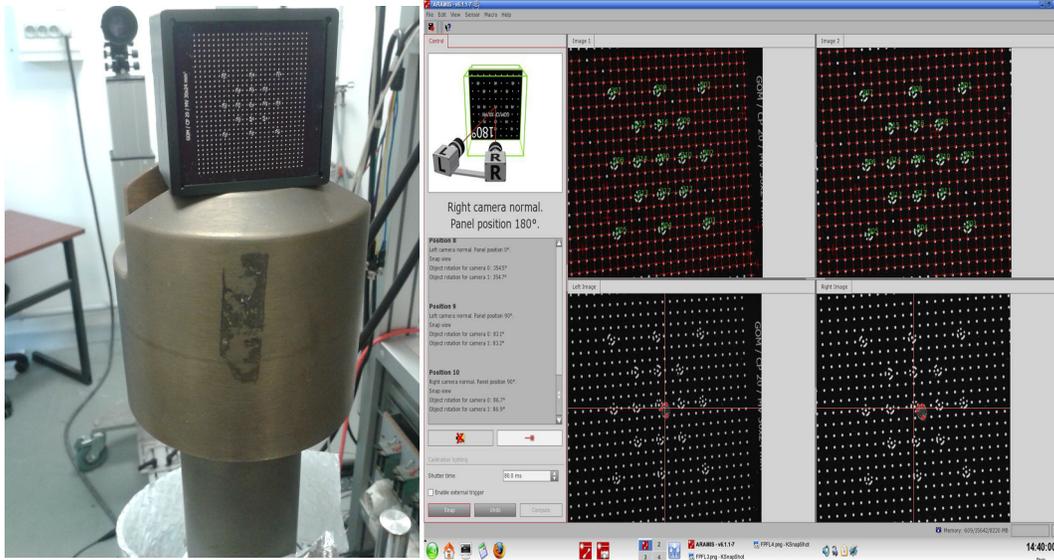


FIGURE 2.4 – Photographie d'une phase de calibration du système ARAMIS

2.2.2.3 Production des observables cinématiques :

Dans le cadre de l'objectif principal qui est le nôtre, à savoir l'étude thermomécanique du matériau (effets thermiques induits par l'élasto-visco-plasticité), il était fondamental d'obtenir des mesures cinématiques jusqu'à de très forts taux de déformation, de l'ordre de $\varepsilon_Y = 2$. Il est important en effet de suivre l'initiation de la localisation et sa propagation au cours de l'essai, et tout particulièrement lorsque survient la dissociation de la striction en deux foyers de plasticité localisés aux "épaules de striction" pour une déformation d'environ $\varepsilon_Y = 1.4$. Il est à noter que peu d'études basées sur la technique DIC rapportent des résultats obtenus à ces hauts niveaux de déformation. Pour tous nos essais, une fréquence de travail de 6 images/sec a été retenue.

La Figure (2.5) montre des photographies à une échelle proche de 1 : 1 d'un échantillon non déformé (au centre) et du même échantillon déformé cette fois jusqu'à un niveau de 2 dans la partie centrale (VER) qui a donc subi un allongement d'environ $\Delta l = 6.34l_0$ (A gauche : face avant telle que suivie par Vidéotraction, A droite : face arrière avec mouchetis telle qu'observée par DIC). Pour fixer les ordres de grandeur, les mesures de champs de déplacement doivent donc se faire au départ sur une zone rectangulaire d'environ $8mm \times 6mm$ qui évolue en un rectangle d'approximativement $56mm \times 2mm$. Un objet aussi élancé (1D) rend réellement difficile une mesure 2D avec une bonne précision. A cela s'ajoute le fait que nous voulons procéder à des mesures aux taux de déformation les plus élevés possibles pour obtenir des effets liés aux transferts thermiques suffisamment sensibles pour pouvoir tester nos méthodes de reconstruction de sources. A cela s'ajoute encore le fait bien connu que les matériaux polymères tels que le PEHD présentent la fâcheuse tendance à blanchir lorsqu'ils rentrent en plasticité, signe de transformations microstructurales. Le contraste noir/blanc des images observées évolue donc au cours de l'essai. Nous avons donc essayé de limiter l'impact de cet effet en nous dotant d'un pistolet à peinture permettant les atomisations de spray les plus fines possibles pour un meilleur contrôle des mouchetis de peinture noire déposés en surface. Les surfaces des échantillons étaient préalablement poncées avec un papier abrasif

très fin pour les débarrasser de toutes les imperfections (type rayures essentiellement) qui viennent perturber les traitements.

Malgré toutes ces précautions et comme on peut le voir en figure (2.3) sur l'échantillon très déformé (vue de droite), le mouchetis devient très flou aux très fortes déformations, ce qui explique le soin apporté au choix du matériel pour l'éclairage.

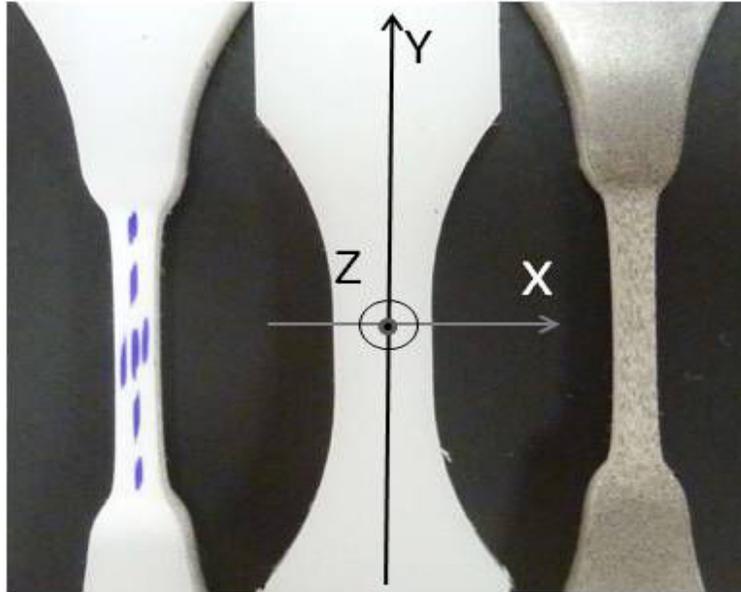


FIGURE 2.5 – Echantillon original (centre) et échantillon déformé avec marqueurs pour la vidéoextensométrie (Gauche) et le mouchetis déformé exploité par DIC (Droite).

En ce qui concerne le traitement des données, nous avons logiquement opté pour un choix de facettes de forme initialement rectangulaire (40×30 pixels) avec la plus grande dimension orientée selon la direction transverse (perpendiculaire à l'axe de traction). Cela permet d'anticiper la géométrie de la déformation. A faibles déformations, le caractère rectangulaire ne pose pas de problème pour la corrélation, mais nous permet d'obtenir des facettes carrées lorsque l'on a déjà atteint une déformation d'environ 0.3. Ensuite le domaine matériel s'allongera en rectangles de plus en plus élancés dans la direction de traction. Nous avons considéré par ailleurs des pas de décalage entre facettes adjacentes de 8 pixels.

Malgré toutes ces précautions, beaucoup d'expériences se révèlent malgré tout peu exploitables en raison d'une évolution défavorable du mouchetis de départ pendant l'essai. Lorsque tout s'est bien passé sur le plan expérimental et que les films DIC semblent de bonne qualité, l'algorithme de dépouillement ARAMIS est toujours systématiquement mis en défaut à partir de déformations d'environ typiquement $\varepsilon_Y = 1$. Du fait de la seule altération du mouchetis, le logiciel n'arrive plus corrélérer deux images successives du film. Au prix d'un travail assez conséquent et très chronophage vu les temps de dépouillement d'expérience (environ 4h pour chaque film), le seul moyen trouvé pour contourner cette difficulté fut de faire un traitement en deux étapes. Le logiciel permet en effet de redémarrer une séquence de dépouillement à partir de n'importe quelle image du film en redéfinissant une zone de

facettes initiales pour lesquelles on redéfinit donc une géométrie permettant de ré-établir des corrélations successives. La figure (2.7) donne une représentation 3D du profil de déformation longitudinale mesurée selon une section verticale d'éprouvette au cours du temps (et fonction de la variable position Y eulérienne) et pour les deux phases de dépouillement. On voit que de bonnes corrélations sont obtenues jusqu'aux fortes déformations sans perdre trop de facettes, même si le mouchetis de départ devient très "flou", beaucoup moins contrasté et très anisotrope (Fig.2.6).

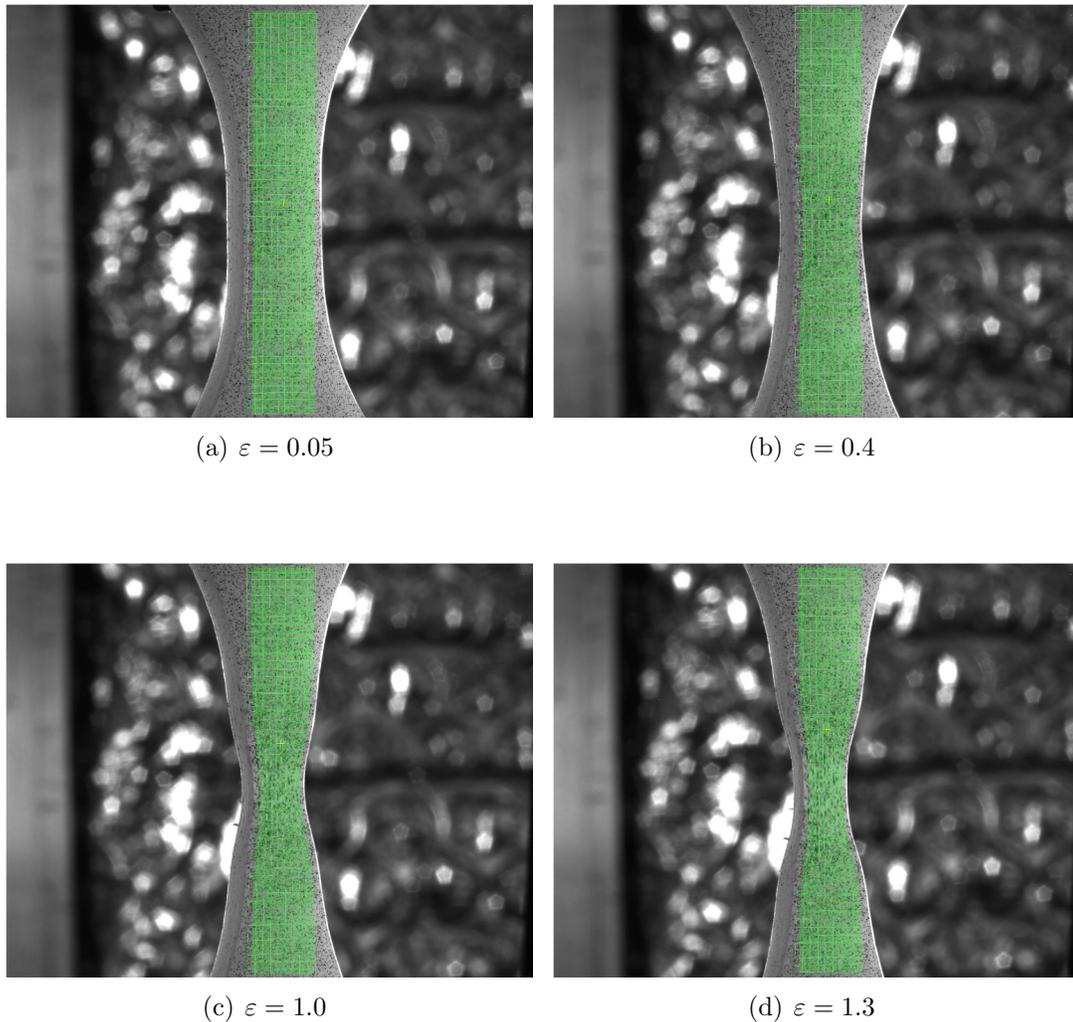


FIGURE 2.6 – Évolution temporelle des facettes d'observation suivies par ARAMIS

L'inconvénient majeur à procéder de cette façon est que l'opération effectue une réinitialisation complète du champ de facettes donc la perte complète des points matériels de la grille utilisée pour l'étape 1 du traitement. Il est donc indispensable de se donner une stratégie pour ré-identifier au moins un même point matériel sur chacune des deux séquences d'images.

Parce que notre dispositif expérimental préserve la symétrie physique du phénomène observé (Champ d'observation toujours centré sur le point de déformation \approx maximum), cette stratégie est assez évidente et très instructive quand on observe la Figure (2.7). Dans

la première étape, le point caractéristique évident est celui du maximum de déformation (Point A sur la Fig.2.7). Ce point matériel est retenu comme origine d'un nouveau système de coordonnées et doit donc être reconnu sur la seconde séquence d'images. Nous avons envisagé deux candidats possibles :

1. Le point de déformation minimum (B_{min}). En réinitialisant complètement le champ de déformation, les points situés au voisinage du point matériel A enregistrant les plus grandes valeurs de déformation cumulée dans la séquence 1, apparaissent maintenant comme des points ne présentant plus de déformation marquée. C'est dans les épaules de striction que se sont localisées les plus fortes variations locales de déplacement.
2. Le point (C_{sym}) qui occupe une position symétrique par rapport aux deux maximums indiquant une concentration de déformation dans les épaules de striction.

Grâce à des comparaisons croisées avec d'autres observables (en particulier la composante de déplacement hors plan U_z) et au fait que dans certaines circonstances aléatoires, le test a bien été piloté exactement sur le point de déformation maximum (la striction s'est développée précisément à l'endroit où les 3 taches transversales étaient alignées dans le suivi Vidéotraction), il nous a été possible de vérifier que c'est bien le point matériel B_{min} (simplement noté B dans la suite) qui doit être reconnu comme étant le même point matériel A de la première séquence. Tous les calculs (interpolation sur une grille eulérienne fixe et commune aux deux séquences) ont donc été faits en supposant que cette condition d'association était valide dans tous les cas de figure. Tous les observables peuvent donc être recalculés comme si le processus de dépouillement avait pu se faire de manière continue. Le fait de travailler avec les déformations vraies facilite l'association des deux blocs de données puisqu'elles sont additives (les déplacements aussi évidemment). La Figure (2.8) donne un exemple type de ce que l'on obtient pour la fonction "reconstruite" $\varepsilon_Y(Y, t)$ sur l'ensemble du test.

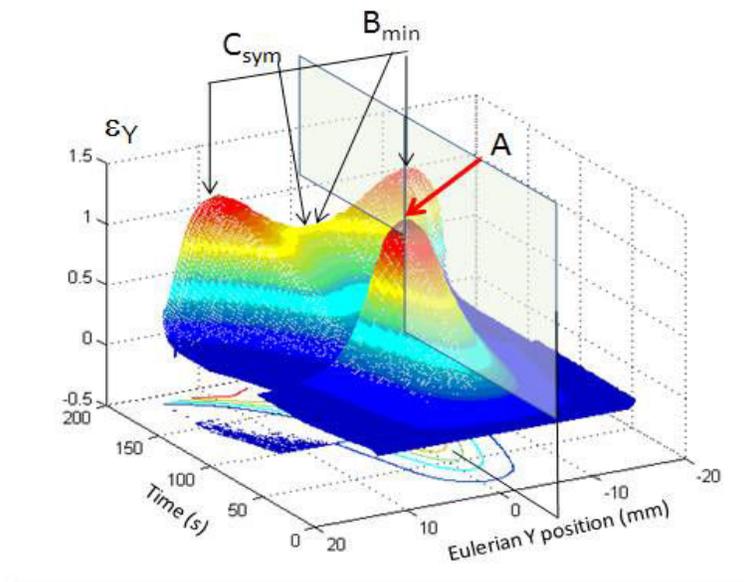
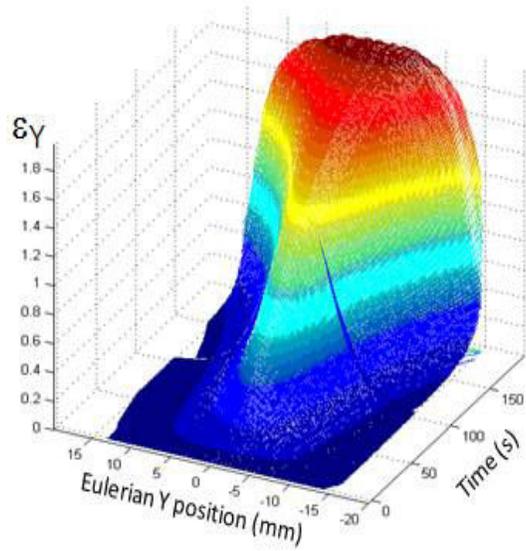


FIGURE 2.7 – $\varepsilon_Y(Y, t)$ calculé par Aramis pour deux séquences de données.

FIGURE 2.8 – $\varepsilon_Y(Y, t)$ reconstruit sur une grille fixe en supposant $A = B$

La figure (2.8) montre qu’aux très fortes déformations, la déformation maximale (cumulée) reste bien celle obtenue au centre de l’éprouvette mais le profil de déformation devient sérieusement aplati. Comme on le voit sur la Fig.2.5 (Droite), les taches servant à la mesure Vidéotraction et au pilotage en déformation de la machine sont toutes affectées par la propagation de l’instabilité qui se fait alors de manière uniforme. On comprend donc qu’un biais de mesure et de pilotage de la machine puisse exister aux fortes déformations.

2.2.2.4 Validations/Performances :

Bruit de mesure :

Nous donnons tout d’abord le niveau de bruit de mesure obtenu par DIC sur les mesures de déformations. Il a été estimé à partir des images plein champ enregistrées avant de lancer le test. L’écart-type sur ce bruit est de l’ordre de $\text{s.t.d.}(\varepsilon_Y^{DIC}) = 0.0005$ et correspond à la moyenne des écart-type de bruit sur les mesures de déformations longitudinales, transverses et en cisaillement. Ce bruit est donc exactement de même intensité que le bruit relevé par VidéeExtensométrie. Il est prouvé d’être de nature gaussienne.

Biais de mesure :

Disposer deux systèmes distincts de vidéo-extensométrie associés à une même expérience asservie sur l’un des deux signaux nous donne des possibilités de contrôler la qualité des mesures en termes cette fois-ci de biais de mesure. Nous avons regardé de près toutes les sources d’erreur possibles et donnons ici quelques exemples des nombreuses vérifications auxquelles nous nous sommes livrés et qui placent toutes ces sources individuellement dans une gamme d’erreur relative inférieure à 4%, quelle que soit la nature de l’observable et/ou de la technique considérée.

L’intention est de signifier au lecteur que les plus grandes précautions ont été prises pour nous assurer de la qualité de nos mesures ou à tout le moins en prendre la “mesure”.

Pour que les commentaires ne deviennent pas trop lourds, nous limitons donc ici l'analyse à quelques points qu'il nous a paru intéressant de communiquer au lecteur mais qui ne sont pas limitatifs de notre travail.

Effet du "raccordement"

L'une des sources d'erreurs vient du fait que dans le cas de la corrélation d'images, on est soumis à une reconstruction en 2 temps qui nécessite de se recalculer sur un point matériel (erreur d'identification) puis de réinterpoler toutes les valeurs sur une grille fixe.

La Figure (2.9) montre précisément un zoom sur le raccordement qui se fait dans le traitement entre les deux séquences d'images. Une vingtaine d'images minimum sont communes aux deux séquences de films, c'est-à-dire qu'on conserve une zone de recouvrement des données entre les deux séquences. Sur la Figure (2.9), on voit le changement de maillage qui s'opère entre les deux dépouillements.

En s'intéressant aux valeurs du déplacement hors plan U_z , la figure (2.10) montre que pour un même pas de temps et alors que les valeurs de cet observable devraient être identiques, le fait de recalculer ces valeurs par changement de point matériel de référence et interpolation sur une nouvelle grille engendre inévitablement une erreur qui reste ici limitée à moins de 2%.

La figure (2.11) montre le profil longitudinal des valeurs de déplacement longitudinal U_y à l'instant retenu pour l'association des deux séquences d'images et à deux instants précédents et suivant cet instant de raccordement. A l'instant retenu pour faire cette comparaison, le matériau est déjà très déformé ($\varepsilon_Y \approx 1$), la striction bien établie, et le déplacement évolue principalement au niveau des épaules de striction constituées. On voit donc bien que dans la partie centrale de l'éprouvette, les profils de déplacement se superposent bien pour les données prises à la fois dans la séquence d'images $n^{\circ}1$ et $n^{\circ}2$, avec les données considérées pour l'instant de raccordement.

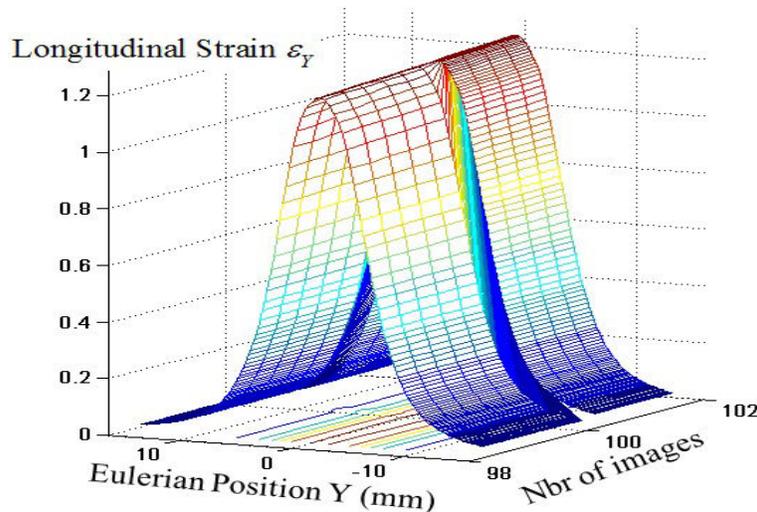


FIGURE 2.9 – Zoom sur la zone de changement de maillage et l'interpolation faite sur les valeurs de déformation

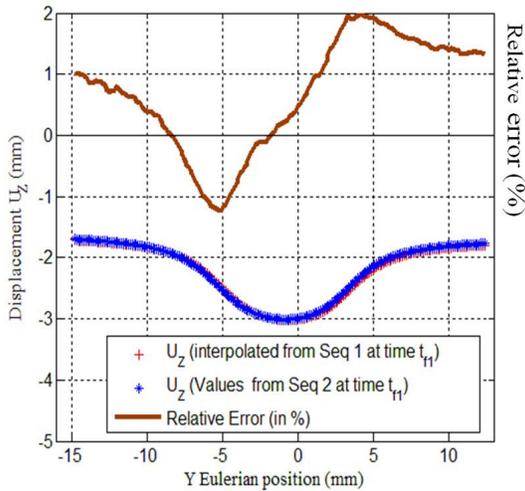


FIGURE 2.10 – Influence du raccordement sur l'observable U_z (Déformation $\varepsilon_Y \approx 1$)

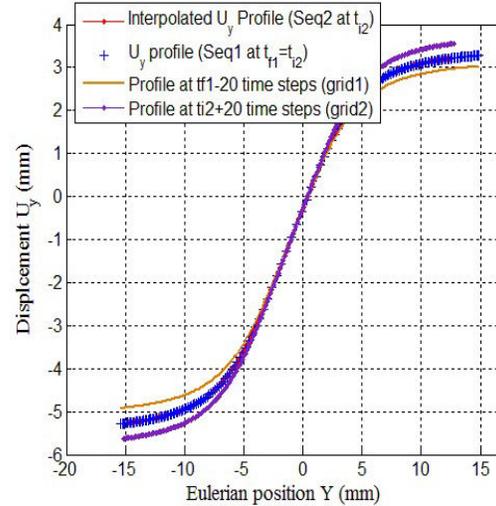


FIGURE 2.11 – Profil du Déplacement longitudinal “recalé” sur un même maillage matériel aux instants du raccordement (Déformation $\varepsilon_Y \approx 1$), et 20 pas de temps avant et après.

Effet 2D/3D sur les mesures de déformation

L'autre source de différences entre les deux mesures vient du fait que dans le cas de la vidéoextensométrie par suivi de marqueurs (à une caméra), une erreur est forcément faite dans la mesure partout où la surface de l'éprouvette s'incurve, lorsque se localise et se propage la striction. Avec la vision stéréoscopique, le système de corrélation d'images permet de conserver une mesure correcte même lorsque la surface de mesure est courbe (moyennant de rester dans la profondeur de champ admissible).

La figure (2.12) compare les mesures de déformation longitudinales dites planes (2D-DIC mais recalculées à partir des déplacements plans mesurés par Aramis donc les mesures telles qu'elles sont effectuées par Vidéotraction, bien qu'en mode suivi de marqueurs) et mesurées par Aramis (3D-DIC avec prise en compte du déplacement hors plan.)

Il est clair que la différence entre les deux types de mesure se localisent exactement à l'endroit où la surface se courbe (lieu de la striction) comme le montre son évolution temporelle dans la figure ci-dessous qui dessine la “trajectoire” des deux épaules de striction (propagation en s'éloignant du centre). A une déformation de $\varepsilon_Y = 2$ (temps final), l'erreur commise reste inférieure à $0.06/2 = 3\%$.

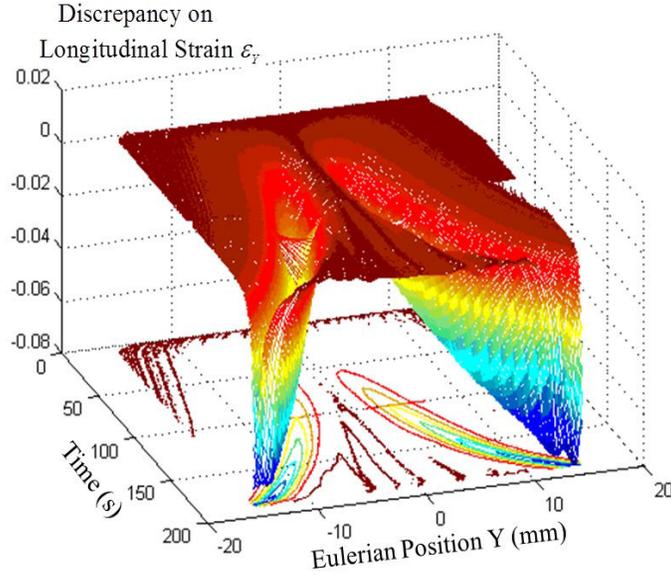


FIGURE 2.12 – Ecart entre déformations mesurées par Aramis (3D-DIC) et déformations recalculées sur la base de déplacements plans (2D-DIC ou Vidéotraction).

En relation avec l'analyse 1D des champs de vitesse que nous serons amenée à faire par la suite, nous comparons dans les figures (2.13) et (2.14) les déplacements transversaux $U_X(X)$ tels que mesurés par Aramis et recalculés à partir des déformations transversales $\varepsilon_X(X)$ mesurées également par Aramis et ce pour quelques valeurs de temps (ou déformations) d'un même test sélectionnées parmi les deux séquences de films avant (Fig.2.13) et après (Fig.2.14) raccordement.

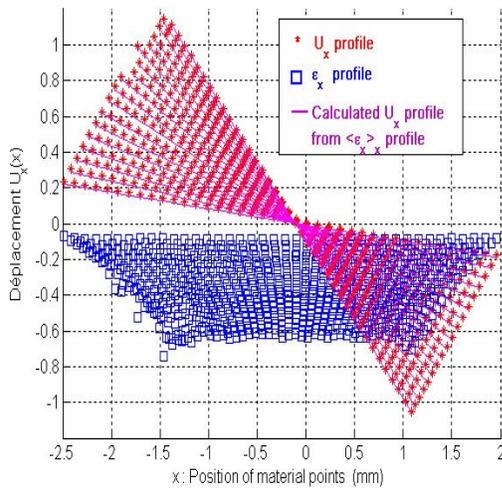


FIGURE 2.13 – Comparaison des profils de déplacements transversaux mesurés et recalculés (Séquence d'images n°1)

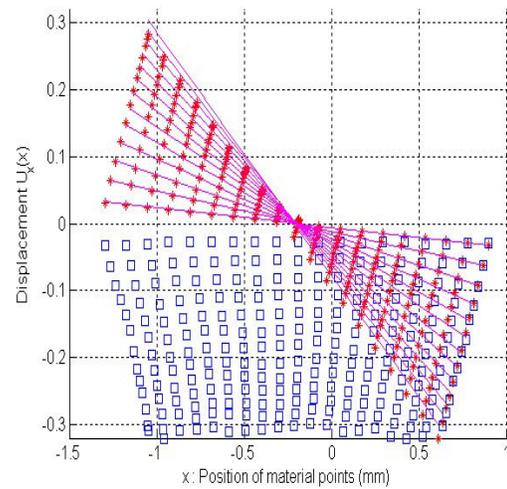


FIGURE 2.14 – Comparaison des profils de déplacements transversaux mesurés et recalculés (Séquence d'images n°2)

On représente donc en fonction des positions courantes des points matériels (abscisse), l'évolution temporelle des profils de $U_X(X)$ (points *), de $\varepsilon_X(X)$ (points □) et de $U_X(X)$ recalculé selon la formule $U_X(X, Y_{max}, t) = (X^0 - X_c^0)(e^{(\varepsilon_X(Y_{max}, t))X}) - 1$ (courbe en trait continu)

Les courbes de la déformation $\varepsilon_X(X)$ calculées par ARAMIS montrent une allure presque constante (moins dans la seconde phase Fig.2.14 pour laquelle un léger gradient apparaît symétriquement à l'axe principal longitudinal). On en prend la moyenne spatiale selon X pour recalculer le déplacement selon X en le centrant par rapport à un point matériel de référence (position X_c^0) identifié soit sur l'éprouvette non déformée et à l'état initial comme étant le milieu de la section, soit en cherchant pour chaque temps d'expérience considéré, les points matériels respectant le mieux la condition $U_X(X_m) = 0$. (On a pu vérifier d'ailleurs que l'on retrouvait toujours exactement le même point matériel que celui identifié sur l'écran ARAMIS comme étant le milieu de l'éprouvette à $t = 0$).

Les profils recalculés reproduisent assez fidèlement ceux issus des mesures avec pourtant un cumul d'erreurs (prise de moyenne, recherche du point à déplacement transversal nul, raccordement des deux séquences de données).

Sur le plan physique, ces courbes justifient l'analyse 1D des champs de vitesse qui sera considérée pour la reconstruction de sources, point sur lequel on reviendra en section 5.1.

Écart à la consigne idéalisée de commande

Enfin, le dispositif nous a permis de valider le traitement fait par VidéoTraction pour piloter la machine. Nous avons dans un premier temps programmé un traitement des informations identiques à celui effectué par le logiciel VidéoTraction mais à partir des champs de déplacement mesurés par DIC.

La Figure (2.15) montre les mesures de déformation produites par ARAMIS 3D (donc vraies i.e. non entachées d'une erreur liée à une observation plane) en fonction de la position courante des points matériels. Pour simuler le fonctionnement des marqueurs, 5 points matériels ont été choisis pour identifier les barycentres de taches virtuelles. A partir des déplacements de ces points, on affecte une mesure de déformation aux 4 points intermédiaires des taches (Gros cercles pleins). Une interpolation par polynôme de Lagrange permet d'en déduire la déformation maximale que l'on peut suivre sur la figure dans sa trajectoire au cours du temps (trait rouge). Le trait noir montre l'évolution de la déformation pour le point matériel qui suivrait au mieux la consigne appliquée (autrement dit la rampe en déformation attendue de la machine). Le logiciel Vidéotraction ne suit pas réellement la déformation maximale (donc la machine n'est pas pilotée sur la déformation maximale) et ce type de simulation répétée sur de nombreuses expériences nous montre bien que la régulation se fait toujours sur un point très voisin.

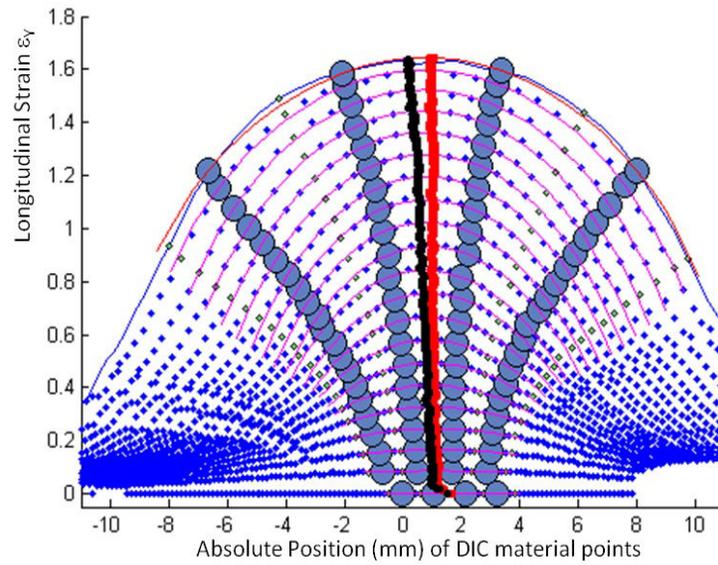


FIGURE 2.15 – Simulation du fonctionnement de Vidéotraction à partir des données plein champ mesurées par ARAMIS

Enfin la figure (2.16) ci-dessous donne l'évolution de la déformation longitudinale relevée pour le point matériel identifié comme respectant au mieux la consigne imposée par la machine. L'écart est limité à $\pm 5\%$ avec un défaut initial bien sûr lié au transitoire de la boucle de rétroaction de la machine. Ceci donne une indication sur la qualité du trajet de chargement imposé.

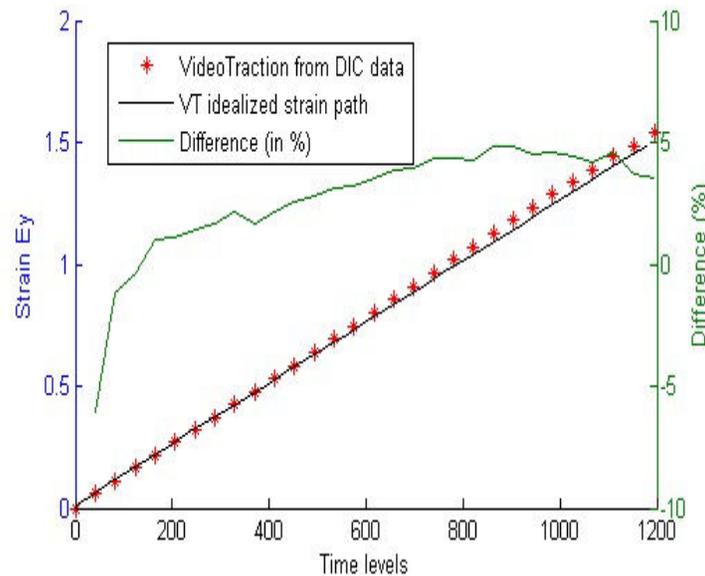


FIGURE 2.16 – Erreur obtenue sur la commande de la machine par rapport au point matériel identifié comme la respectant au mieux

2.2.3 Production d'observables par imagerie infrarouge

2.2.3.1 Description du matériel

La caméra utilisée est une caméra infrarouge SC7000 de la marque FLIR (cf. Fig.2.17). Elle est constituée d'une matrice de 320×256 détecteurs (semi-conducteur In-Sb) qui sont sensibles aux photons localisés pour l'essentiel dans la bande de longueurs d'onde $1.5-5.1\mu m$. Le flux photonique constitue le signal de puissance rayonnée. Le détecteur convertit cette information en signal analogique qui est ensuite codé sur 14 bits. L'information est exprimée en niveaux numériques : Digital Level (DL). Si les caméras matricielles ont révolutionné l'imagerie infrarouge en augmentant notamment les fréquences d'acquisition, elles nécessitent néanmoins une opération d'étalonnage face à un "corps noir" et une procédure ayant vocation à uniformiser les niveaux produits par les détecteurs constituant la matrice lors d'une exposition à une surface uniforme de référence. Cette procédure est automatisée au sein du logiciel constructeur (procédure de Non Uniformity Correction ou NUC). Cette opération doit être répétée à chaque utilisation de la caméra.



FIGURE 2.17 – Caméra FLIR SC7000

Les performances en détectivité ont été optimisées et le constructeur donne un niveau de bruit inférieur à 20mK (NETD). La distance entre la caméra et l'échantillon est fixée à environ 30cm, et la distance focale peut être modifiée grâce à des bagues allonges intercalées entre l'objectif (50mm) et le boîtier. La meilleure résolution spatiale atteinte est de l'ordre de $30\mu m$.

La mesure s'effectue à l'aide du logiciel Altair qui permet :

- de gérer l'interface de communication entre le dispositif informatique et la caméra

- de visualiser les images observées par la caméra, les enregistrer (formation des films thermiques) et éventuellement mettre à disposition quelques outils pour le post-traitement

2.2.3.2 Principe de mesure

La composante de l'information acquise par la caméra est un flux de photons émis par l'éprouvette du fait de sa température de surface, mais aussi par l'environnement de la caméra (interne et externe). Pour limiter l'effet de l'environnement, l'essai est effectué en espace climatisé. De plus, nous avons réalisé une enceinte de "confinement radiatif" à partir de matériaux d'isolation sandwich de type Aluminium-isolant-aluminium qui vient recouvrir les parois d'une boîte s'adaptant sur la machine d'essai, autour de l'éprouvette.



FIGURE 2.18 – Instrument d'étalonnage thermique

La conversion des niveaux numériques en températures nécessite de passer par une courbe d'étalonnage. L'opération d'étalonnage se fait en plaçant la caméra devant un corps noir étalon à large surface (Polytech®) modèle SR-80 4A, surface $4'' \times 4''$ réglable de $5^{\circ}C$ à $100^{\circ}C$) et dont la température de surface est mesurée par ailleurs et réglée (Fig.2.18). Par mesure de précaution et malgré le choix d'une éclairage froid à LED nécessaire pour le fonctionnement du dispositif vidéo-extensométrique, l'étalonnage par corps noir est faite dans l'enceinte, dans les conditions d'éclairage des essais. A partir d'une dizaine de points d'étalonnage, le logiciel "CF Manager" (Fig.2.19) réalise une interpolation des mesures par l'équation thermographique standard. Dans les travaux réalisés antérieurement au LEMTA [1], il a été observé que les variations de températures de boîtier et d'environnement extérieur avec nos conditions d'essai, n'avaient pas d'influence nette sur les courbes d'étalonnage.

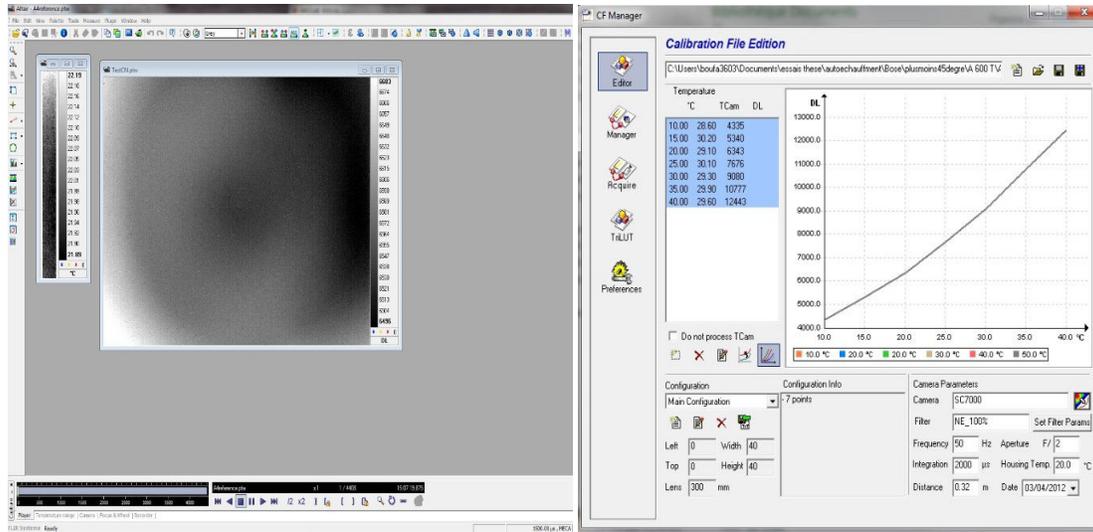


FIGURE 2.19 – Interface d'étalonnage d'Altair

2.2.3.3 Champ de température typique observé

Dans cette section, nous donnons un exemple des champs de température observés au cours de l'essai thermomécanique. Pour un essai de traction à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$, quelques profils temporels de température longitudinale sont superposés sur la courbe donnant l'évolution de la température en quelques pixels situés dans la zone centrale de l'éprouvette le long de l'axe longitudinal Y . En pratique, chaque courbe représente l'évolution de la température en 1 pixel "longitudinal", moyennée sur 15 pixels dans la direction transverse X (Fig.2.20). A l'instant initial (profil $\varepsilon = 0$), on peut apprécier le bruit de mesure et l'écart à l'uniformité de la distribution symétrique de température (Moyenne située à $23.95^{\circ}C$ avec un écart-type du bruit de mesure évalué à $0.01^{\circ}C$). Au début de la déformation, on voit très bien l'effet thermoélastique manifesté par le refroidissement de l'éprouvette vers 5s après le lancement d'un essai. Dans ce régime élastique, la température de la section droite de l'éprouvette est sensiblement uniforme. Puis un point chaud se localise logiquement dans la zone de striction. Sur la courbe temporelle, cela se traduit par un premier point d'inflexion. Dans la phase d'écoulement plastique ou de propagation de la striction, la température augmente graduellement et peut atteindre environ $+5^{\circ}C$ pour une déformation de $\varepsilon = 1.2-1.3$, typique du début de la phase de durcissement hyperélastique. On peut noter que la courbe présente alors un second point d'inflexion. Une double localisation de point chaud apparaît alors dans les épaules de striction qui conduit à faire évoluer le profil "à un pic" vers un profil en plateau à un niveau de $+11.5^{\circ}C$ par rapport à la température de début d'essai. Comme on peut s'y attendre, on observe des profils de températures globalement symétriques. La "qualité" de symétrie des profils a été un critère qui nous a conduit parfois à sélectionner des expériences parmi d'autres pour l'identification des sources.

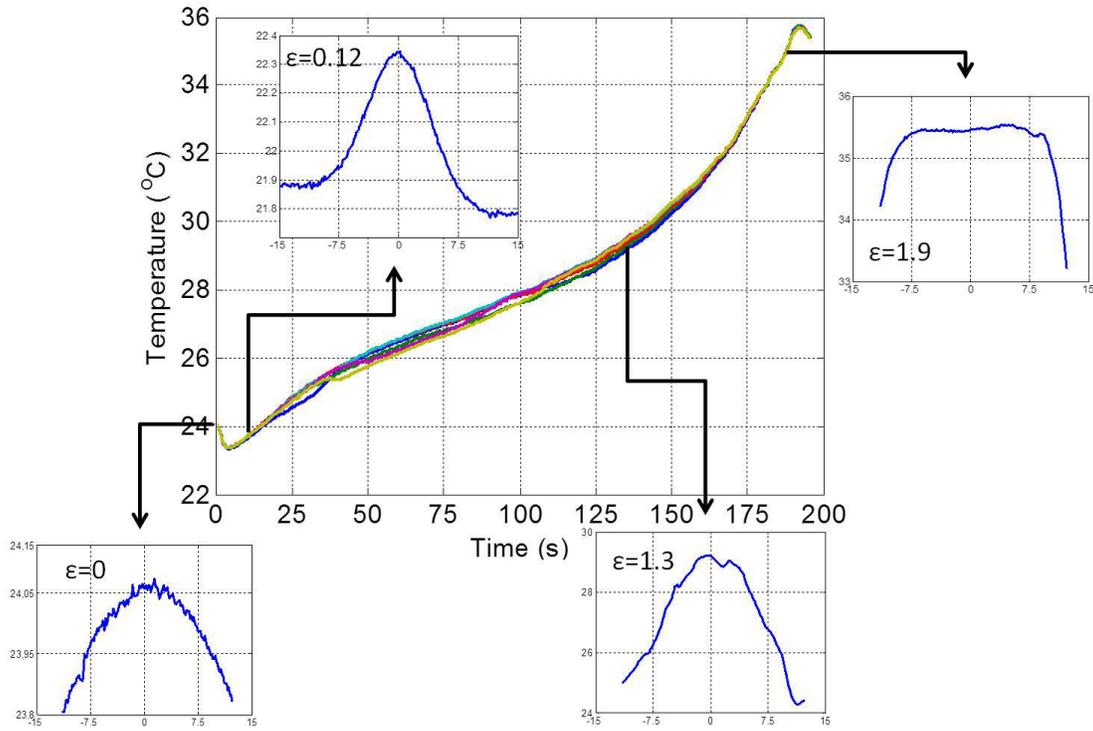


FIGURE 2.20 – Évolution temporelle de la température centrale de l'éprouvette et profils longitudinaux à 4 niveaux de déformations - Essai de traction à $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$

2.2.4 Principe de recalage des films IR sur les films DIC

Une procédure de recalage des films obtenus par nos deux techniques expérimentales est en effet indispensable en raison (i) d'une acquisition non simultanée des mesures thermiques et cinématiques et (ii) de résolutions spatiales différentes. Elle a pour objet de mettre les deux champs dans une même grille eulérienne de points de mesure en vue de la reconstruction. Pour cela, il est nécessaire de construire le repère sur un point "origine" qui soit identifiable à un point matériel dans les deux films. Ce point origine correspond au point de plus grande intensité en température pour le film IR et au point de plus grande intensité en déformation (point A) identifié dans la figure (2.13) au chapitre 2.2.2.3. Ensuite, nous interpolons le champ de vitesse par une méthode "spline" sur la grille des points de mesure thermiques. Un schéma de principe illustrant cette procédure de recalage est donné ci-dessous (Fig.2.21) pour un essai à vitesse de commande $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$. Les profils de vitesse symétriques par rapport au point A sont ici recalés sur l'"origine" des profils thermiques. Ce travail de conditionnement préliminaire des données est spécifique à notre travail de thèse puisqu'il s'agit d'utiliser ces deux observables conjointement comme entrées du problème inverse.

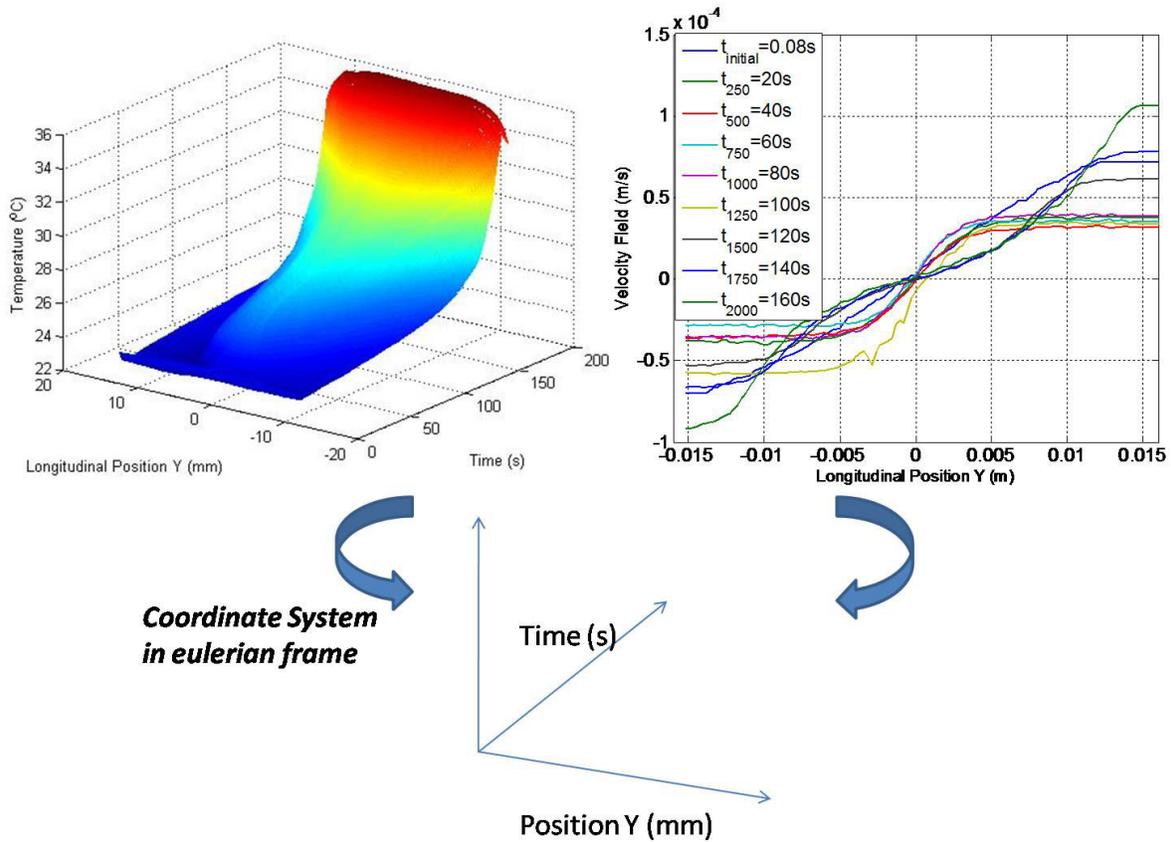


FIGURE 2.21 – Schéma pour le recalage des données lors d'un essai de traction à $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$

2.3 Résultats bruts emblématiques

Cette section ne rapporte que quelques résultats de champs 2D mesurés par les 2 techniques DIC et IR. Ils sont donnés ici à titre purement illustratif et seront commentés et exploités au chapitre 5. Ils nous permettent cependant de conclure ce chapitre sur deux points :

1. Le problème rencontré pour les expériences de corrélation d'images (traitement des données séparé sur 2 séquences d'images et raccordement sur un même maillage) se renouvelle pour associer champs thermiques et champs cinématiques. D'une part, nous n'avons pas les mêmes résolutions spatiales avec les deux systèmes de vision et il est donc nécessaire de ré-interpoler les données de l'un (DIC, sur un maillage fin) sur le maillage de l'autre (champs thermiques, moins résolu).

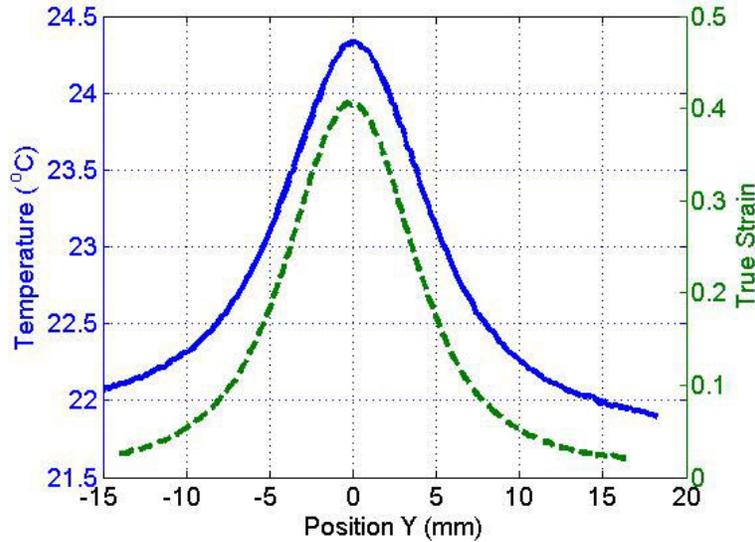


FIGURE 2.22 – Représentation des profils de température (à gauche) et de déformation (à droite) selon l’axe longitudinal à l’instant correspondant à $\varepsilon_{\text{true}} = 0.4$ pour un essai à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$

D’autre part, on pourrait penser que le dispositif utilisé comportant un double pied motorisé pour le suivi du même VER nous évite une telle opération. L’avantage premier est de garder un champ visuel centré qui exploite les grandes déformations mais il peut y avoir des décalages dans les déplacements respectifs des deux pieds au cours de l’expérimentation, qui bien que faibles, nous ont incité à identifier sur chaque champ le même point matériel et à recalibrer les deux champs en conséquence. Le point de référence est le point de déformation maximale $\varepsilon_{Y,max}$ repéré en particulier au déclenchement de la striction (profil en $\varepsilon_Y(Y)$ très “piqué”) sur le film DIC que l’on associera au maximum de température $T_{max}(Y)$ (cf Fig.2.22). On joue donc sur la symétrie du problème physique (respectée au moins à ce moment là de l’essai).

2. Nous avons essayé dans ce chapitre de décrire de la manière la plus précise possible les dispositifs techniques et métrologiques utilisés en faisant ressortir à chaque fois le plus clairement possible, tous les aspects qui jouent un rôle direct dans la qualité des observables produits (bruit et biais). Réussir pour un test de traction donné (vitesse de déformation imposée) à obtenir des observables qui soient le plus satisfaisant possible sur le plan des biais expérimentaux relevait donc d’un triple succès :

- sur le plan mécanique pour obtenir la courbe de traction (pilotage parfait, déclenchement de la striction à la position la plus centrale des marqueurs),
- sur le plan DIC pour obtenir les champs cinématiques (mouchetis/éclairage réussi, traitement des données possibles pour tout l’essai, conditions de raccordement des deux séquences de datas parfaites)
- sur le plan IR pour obtenir les champs de température (répétition avec différents étalonnages, bonne stabilisation initiale, effets parasites...)

Nous nous appuyons dans cette thèse sur environ 25 “triplets” de données correspondant à des tests qualifiés de réussis (pour 6 vitesses de traction, soit environ 4 jeu de données par vitesse testée). Pour obtenir ces 25 essais réussis, ce sont près de 400 tests qui ont été faits

(démarrés, avortés, rejetés).

Pour un essai à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$, la figure (2.23) présente les champs cinématiques en 2D sur la surface de l'éprouvette pour 4 états de déformation différents et la figure (2.24) présente le champ de température aux mêmes instants que la figure (2.23). On voit bien que les champs de vitesse sont fortement 1D. On peut aussi remarquer l'amplitude de vitesse très forte et même maximale pour toute la phase visco-élastique avant le point *A* et qu'elle décroît significativement au début de la striction (état *B*). Plus de détails et d'explications seront donnés au chapitre 5.

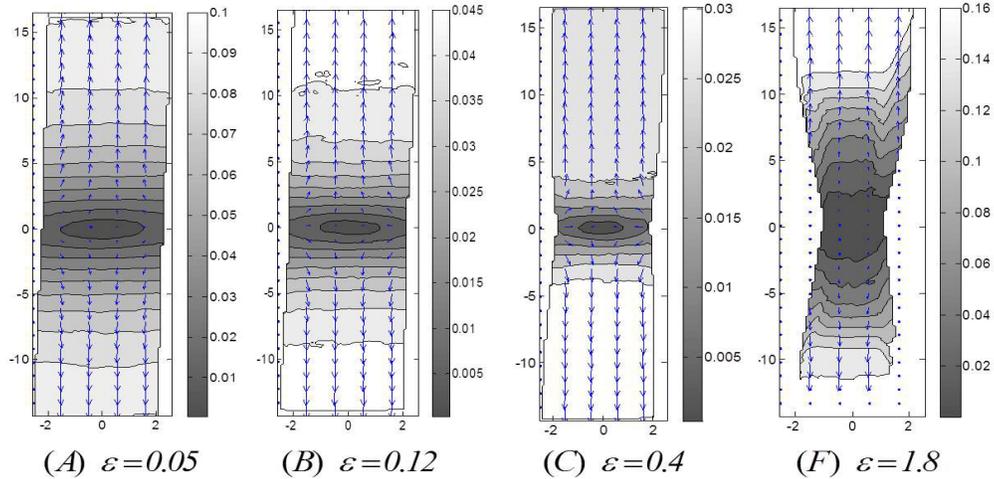


FIGURE 2.23 – Contour de vitesse $\|\mathbf{V}\|(mm/s)$ et le champ de vitesse \mathbf{V} (flèche) lors d'un essai de traction à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$

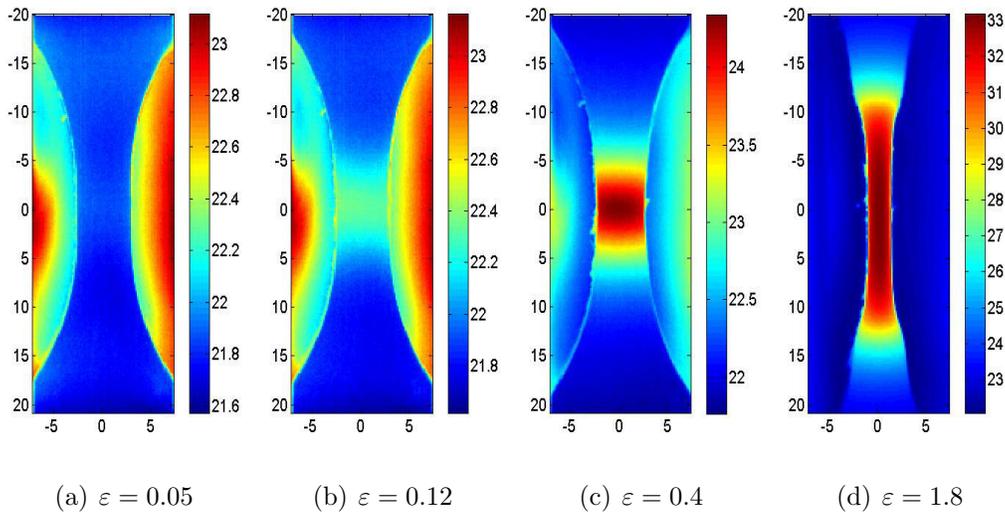


FIGURE 2.24 – Champ de température 2D lors d'un essai de traction à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$

Chapitre 3

MODELISATION

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.1 | Equation locale de la chaleur | 48 |
| 3.1.1 | Les hypothèses | 48 |
| 3.1.2 | Les lois de conservation | 48 |
| 3.1.3 | Approche Thermodynamique en rhéologie | 53 |
| 3.2 | Réduction de modèle | 58 |
| 3.2.1 | Modélisation 2D | 59 |
| 3.2.2 | Modélisation 1D | 59 |
| 3.3 | Cas tests étudiés pour les simulations d'inversion | 60 |

Les équations qui fournissent la modélisation directe de notre problème de transfert thermique avec sources sont classiquement issues de la Thermodynamique des Milieux Continus (ou de la MMC si l'on préfère bien que la nuance nous semble importante). Le lecteur bien au fait des lois de conservation peut donc se dispenser de lire ce chapitre. Compte-tenu de l'obligation dans ce travail de faire intervenir variables lagrangiennes (coordonnées matérielles) et eulériennes (coordonnées fixes dans le repère du laboratoire), comme le chapitre 2 l'a mis en évidence, nous avons jugé utile de rappeler d'abord les éléments théoriques constitutifs d'une approche des bilans locaux de grandeurs scalaires quelconques. Pour faire comprendre les motivations de notre travail, nous aborderons ensuite les éléments théoriques de la Thermodynamique des Processus Irréversibles pour formuler une approche possible des phénomènes thermodynamiques en rhéologie. Ceci nous permettra d'obtenir l'équation locale en température en explicitant le contenu thermomécanique du terme source (**T**hermomechanical **H**eat **S**ource). Nous concluons ce chapitre en revenant rapidement sur la réduction dimensionnelle de cette équation 3D→2D→1D (par opérations de moyennes spatiales), la version 1D étant celle mise en œuvre au cours de cette thèse pour développer les algorithmes d'inversion.

3.1 Equation locale de la chaleur

3.1.1 Les hypothèses

La Thermodynamique des Milieux Continus (dans le cadre de l'irréversibilité ou non) est avant tout une théorie de champs, ce qui revient à dire que toutes les grandeurs d'état sont conçues comme des fonctions continues des coordonnées d'espace et de temps. Par ailleurs, le postulat de l'état local pour les systèmes homogènes est considéré :

L'état d'un système homogène en évolution quelconque peut être caractérisé par les mêmes variables qu'à l'équilibre. Les gradients des grandeurs d'état restent suffisamment faibles pour pouvoir considérer l'équilibre interne à l'échelle d'un élément de masse macroscopique.

La construction d'une théorie rendant compte des changements locaux et temporels de ces champs répond donc aux méthodes de la théorie générale des champs classiques. La première étape consiste en l'établissement des *lois de conservation* sous une forme locale. Etant donné que l'élément de volume ou l'élément de masse est considéré comme un système ouvert, il s'agit plutôt de *bilans* que de lois de conservation au sens propre du mot.

3.1.2 Les lois de conservation

3.1.2.1 Bilan d'une grandeur quelconque

Cette section est dédiée à évaluer le bilan de masse et le bilan d'entropie. Pour commencer, nous allons donner la forme générale d'un bilan. Considérons à l'intérieur d'un système matériel un volume Ω_t , fixé dans l'espace, et associé à un élément de masse (au sens d'un élément différentiel à l'échelle macroscopique). Soit \mathcal{J} une grandeur extensive quelconque. En désignant la densité volumique d'une certaine grandeur physique par $g(\mathbf{x}, t)$ dans la configuration actuelle, nous avons

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega_t} g(\mathbf{x}, t) d\Omega_t \quad (3.1)$$

En toute généralité, la variation du paramètre \mathcal{J} au cours du temps dans le volume Ω_t est provoquée par deux causes et deux seulement. D'abord il y aura un transport de \mathcal{J} à travers la surface du volume. Cette contribution a pour expression

$$- \int_S \Phi_g \cdot d\mathbf{S} \quad (3.2)$$

où Φ_g désigne le vecteur *flux* correspondant au paramètre extensif \mathcal{J} et $d\mathbf{S}$ le vecteur élément de surface orienté (convention classique d'orientation vers l'extérieur). La composante de Φ_g normale à la surface est donc la quantité de \mathcal{J} qui pénètre dans le volume par unité de temps et de surface. A ce phénomène s'ajoute encore, en général, une autre cause de la variation de \mathcal{J} au cours du temps. Elle provient du fait que le volume considéré peut être le siège de processus qui produisent ou détruisent \mathcal{J} . La quantité de \mathcal{J} produite par unité de temps et de volume est appelée *source* de \mathcal{J} . En désignant cette grandeur par π_g on obtient comme seconde contribution à la variation temporelle de \mathcal{J}

$$\int_{\Omega_t} \pi_g d\Omega_t \quad (3.3)$$

Des expressions (3.1),(3.2) et (3.3) on tire le bilan (sous forme intégrale) :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} g(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = - \int_S \Phi_g d\mathbf{S} + \int_{\Omega_t} \pi_g d\Omega_t \quad (3.4)$$

dont à partir du théorème de Green (flux-divergence) on obtient une version locale

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -div\Phi_g + \pi_g \quad (3.5)$$

Il s'agit du bilan sur un volume fixé dans l'espace. S'il existe un champ de vitesses locales hétérogènes dans l'ensemble du système étudié, alors un flux de transport convectif de la grandeur g doit être pris en compte. Deux alternatives sont possibles. Au vecteur Φ_g précédent doit être substitué le vecteur $\Phi_g + g\mathbf{v}$ où Φ_g devient tout flux de transport à l'exception du convectif et où \mathbf{v} désigne la vitesse locale *barycentrique* [63, 64]. On obtient alors le bilan

$$\frac{\partial g}{\partial t} + div(g\mathbf{v}) = -div\Phi_g + \pi_g \quad (3.6)$$

La contribution $g\mathbf{v}$ au flux échangé n'intervient pas dans le bilan si le volume considéré participe du mouvement *barycentrique*. On peut donc alternativement établir ce bilan en considérant cette fois un volume matériel qui participe au mouvement. Il faut alors repartir de l'analyse purement cinématique [65] : Un volume matériel déterminé (constitué toujours des mêmes particules de matière) est noté Ω . A un instant initial donné il occupe un espace Ω_0 , à un autre instant t , il occupe l'espace Ω_t dans un repère donné. Un point P appartenant à ce volume aura pour coordonnées (X_1, X_2, X_3) à l'instant initial (coordonnées dites matérielles ou lagrangiennes) et (x_1, x_2, x_3) à l'instant t (coordonnées spatiales ou eulériennes), de sorte que $x_i(X_j, t)$ traduit le fait que la position de la particule P dépendra de sa trajectoire dans le mouvement (transformation mathématique dont on supposera qu'elle est inversible : un "arc" continu de particules ne se casse pas dans le mouvement). Toute grandeur ou variable d'état pourra être exprimée indifféremment avec l'un ou l'autre des systèmes de coordonnées, de sorte qu'à un instant donné, on peut écrire $g(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$ qui exprime que la concentration volumique de la grandeur g à une position donnée correspond à la concentration volumique affectée à la particule *qui se trouve* en \mathbf{x} à l'instant t . Ceci posé, nous rappelons les résultats classiques suivants :

- Dérivées temporelles :

Un taux de variation dans le temps pourra être évalué soit en un point donné de l'espace, soit pour une particule donnée. On notera

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} \equiv \text{dérivée / temps à } \mathbf{x} \text{ constant}$$

et

$$\frac{d}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} \equiv \text{dérivée / temps à } \mathbf{X} \text{ constant, dérivée matérielle.}$$

- Dilatation/contraction volumique :

La variation volumique d'un élément de volume, rapport du volume matériel élémentaire à l'instant t sur son volume initial correspond au Jacobien du changement de variables :

$$J = d\Omega_t/d\Omega_0 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}$$

L'évolution au cours du temps de ce taux est donnée par sa dérivée matérielle (puisqu'il s'agit d'un même volume). Elle correspond à

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div}(\mathbf{v}) = J \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Si la transformation est isovolume, on a $J = 0 = \nabla \cdot \mathbf{v}$, condition correspondant à un champ de vecteurs vitesses dit solénoïdal :

$$\int \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

- Théorème de transport de Reynolds :

Soit $\mathcal{J}(t) = \int_{\Omega_t} g(\mathbf{x}, t) d\Omega_t$, on souhaite calculer sa dérivée matérielle $d\mathcal{J}/dt$. L'intégrale opère sur un volume Ω qui varie dans le temps donc nécessiterait d'en tenir compte. On fait intervenir alors le changement de variable pour se ramener à une intégrale sur le volume matériel initial. On montre alors qu'on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} g(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} + \nabla \cdot (g\mathbf{v}) \right\} d\Omega_t \quad (3.7)$$

Dans ces conditions, le théorème de Gauss appliqué à la seconde intégrale implique que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} g(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_{S_t} (g\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}_t \quad (3.8)$$

où S_t est la surface fermant Ω_t . Le taux de variation de l'intégrale de la grandeur g sur le volume matériel en mouvement fait donc apparaître rigoureusement le flux net de g à travers la surface et conduit à retrouver le bilan local donné par (3.6).

3.1.2.2 Bilan de masse

Un polymère semi-cristallin pourrait être considéré comme un matériau à plusieurs constituants (phase cristalline et rigide, phase amorphe et "fluide", cavités générées par l'endommagement). Ces phases évoluent au cours du temps avec les réorganisations microstructurales accompagnant les phénomènes irréversibles de relaxations internes, et il conviendrait éventuellement d'écrire des bilans par constituants en considérant l'élément de masse comme ouvert vis-à-vis de ces réorganisations massiques (flux diffusifs et sources d'origine chimique). Rien n'empêche néanmoins de considérer la masse d'un volume élémentaire quelconque Ω comme

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (3.9)$$

où ρ est la concentration massique par unité de volume. Par principe de conservation de la masse totale (pas d'apport ou de destruction globale du polymère : $\Phi_\rho = \pi_\rho = 0$), on peut appliquer les équations ci-dessus directement en considérant $g = \rho$. Compte-tenu de (3.4), on aura :

$$\frac{dm}{dt} = \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) \right\} d\Omega_t = 0 \quad (3.10)$$

soit l'équation de continuité (conservation locale de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.11)$$

Remarque importante utile : Pour toute grandeur scalaire volumique g écrite à partir de la grandeur spécifique (massique), on aura $g = \rho G$ et ainsi le théorème de transport de Reynolds combiné avec l'équation de continuité imposera systématiquement

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho G d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{dG}{dt} d\Omega_t \quad (3.12)$$

Dans le cas du bilan par constituant chimique (phase si l'on veut ici), il faut introduire la vitesse barycentrique (vitesse locale du VER matériel) par l'équation

$$\rho \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\sigma} \rho_i \mathbf{v}_i, \quad (3.13)$$

où ρ_i est la densité du constituant i et $\sum_{i=1}^{\sigma} \rho_i = \rho$. Les vitesses des constituants pouvant différer entre elles à cause de la diffusion, l'introduction de cette vitesse barycentrique pour le bilan global, conduit naturellement aux vecteurs flux diffusifs définis par

$$\mathbf{J}_i = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad \left(\sum_{i=1}^{\sigma} \mathbf{J}_i = 0 \right) \quad (3.14)$$

où σ désigne le nombre de constituants considérés. Il faut également introduire un terme source volumique qui traduit le fait que le matériau, pendant sa déformation, sera le siège de réactions chimiques (réorganisations microstructurales) qui peuvent produire ou détruire de la masse des constituants (tout en préservant la conservation de la masse totale d'où la deuxième relation de l'équation ci-dessous). Si $\nu_{ij} \dot{z}_j$ désigne la masse du constituant i produite dans la réaction j , par unité de volume et de temps (\dot{z} désigne l'avancement ou *vitesse réactionnelle* de la réaction j et ν_{ij} les *coefficients stoechiométriques*), la source volumique s'écrira :

$$\pi_{m_i} = \sum_{j=1}^r \nu_{ij} \dot{z}_j \quad \text{avec} \quad \left(\sum_{i=1}^{\sigma} \pi_{m_i} = 0 \right) \quad (3.15)$$

où r est le nombre des réactions chimiques. Le bilan barycentrique local sur un VER s'écrit alors

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho_i \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{J}_i + \sum_j \nu_{ij} \dot{z}_j \quad (3.16)$$

ou encore avec c_i pour désigner les fractions massiques ($\rho_i = \rho c_i$)

$$\rho \frac{dc_i}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_i + \sum_j \nu_{ij} \dot{z}_j \quad (3.17)$$

(C'est l'équation (4.56) que l'on retrouve p.111 dans [64]).

3.1.2.3 Bilan d'énergie interne

On renvoie pour les démonstrations complètes incluant la prise en compte de la thermodynamique d'un système multi-composants avec réactions chimiques à l'excellent corpus d'A.Münster (p31-39 [63]) ou de Kuiken (p 99-139 [64]). Le bilan d'énergie interne peut être écrit formellement compte-tenu du caractère générique d'une équation de bilan

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -div(\rho u \mathbf{v} + \mathbf{J}_u) + \pi_u \quad (3.18)$$

Le problème est de savoir ce qui constitue alors u , \mathbf{J}_u et π_u .

Dans les ouvrages de mécanique classique, une partie de la réponse est donnée en invoquant le principe de conservation de l'énergie mécanique totale, somme des contributions de l'énergie cinétique, énergies potentielles, et énergie interne qui peuvent évoluer mais en se compensant globalement (modes d'interconversion des énergies). En unité de masse, on posera $e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \phi + u$. Dans la perspective d'un bilan (conservatif) sur cette grandeur, il faut alors poser les contributions de flux (autres que le flux convectif) soit

- ◆ le flux lié au travail mécanique (puissance des forces internes $\tilde{\Sigma} \cdot \mathbf{v}$) où $\tilde{\Sigma}$ est le tenseur des contraintes internes,
- ◆ le flux d'énergie potentielle ($\sum_i \phi_i \mathbf{J}_i$ lié à la diffusion et impliquant le potentiel scalaire ϕ_i dont sont supposées dériver les forces potentielles, par exemple l'action sur les constituants chimiques d'un champ électrostatique ou plus classiquement celui du champ de pesanteur),
- ◆ et enfin le flux d'énergie interne noté Φ_u , qui à ce stade ne peut être rigoureusement confondu avec le flux de chaleur global (exemple, en présence de milieux multiconstituants, différence liée aux transferts des enthalpies partielles par un flux diffusif)

En invoquant le bilan de quantité de mouvement (2^e loi de Newton), permettant d'obtenir le bilan d'énergie cinétique, puis le bilan de masse par constituant permettant d'obtenir le bilan d'énergie potentielle ($\rho \phi = \sum_{i=1}^{\sigma} \rho_i \phi_i$ où seul ρ_i dépend du temps), on peut alors soustraire ces deux derniers bilans à l'énergie mécanique totale pour obtenir le bilan d'énergie interne suivant

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -div(\rho u \mathbf{v} + \phi_u) - \tilde{\Sigma} : Grad \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{F}_i \quad (3.19)$$

où $\mathbf{F}_i = -Grad(\phi_i)$ désigne les forces extérieures potentielles. Dans notre application, on supposera ce terme négligeable. En vertu des deux jeux d'écritures possibles pour les dérivées temporelles, cette équation équivaut strictement à

$$\rho \frac{du}{dt} = -div(\phi_u) - \tilde{\Sigma} : \mathbf{D} \quad (3.20)$$

Sous cette forme, le bilan a déjà le mérite d'explicitier en partie les termes sources en faisant notamment apparaître le produit tensoriel $\tilde{\Sigma} : Grad(\mathbf{v}) = \tilde{\Sigma} : \mathbf{D}$ représentant l'énergie mécanique dégradée sous forme de chaleur et dont l'expression dépend de la loi d'état reliant $\tilde{\Sigma}$ au tenseur des taux de déformation \mathbf{D} .

Remarque1 : Cette forme de bilan est à l'évidence celle *posée* classiquement comme le premier principe.

Remarque2 : Kuiken [64] établit cette équation (p124-eq.4.123) mais en partant de l'écriture par constituant, montrant ainsi par le jeu de l'écart vitesse barycentrique/vitesse du constituant que l'énergie interne "est faite" d'une part d'énergie cinétique $\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{1}{2} c_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})^2$.

3.1.3 Approche Thermodynamique en rhéologie

A ce stade, c'est l'axiomatique issue de la thermodynamique des processus irréversibles qui permet d'explicitier complètement ce bilan en permettant à la fois d'introduire la température comme variable de champ (en vue du problème pratique de mesure et d'inversion) et de détailler les différents termes thermomécaniques qui constitueront notre source. La thèse de N.Renault [1] en a proposé une description très détaillée issue d'un bilan local d'entropie couplé à une approche T.P.I. spécifique que nous ne reprendrons donc pas ici. N'étant pas spécialiste du domaine, nous nous contenterons de donner une version condensée des approches standards de T.P.I. pour marquer principalement les grandes étapes permettant d'explicitier l'équation dite de la chaleur (équation en température) utilisée pour traiter les données de champs de température. Elle suit en cela, avec des notations beaucoup moins lourdes (et qui sacrifient sans doute un peu à la rigueur des développements), la présentation faite au chapitre 7. Rheology de l'ouvrage de Kuiken ??.

1. 1^{ère} étape

Le système étant ouvert, homogène et multi-constituants, on a recours à l'équation fondamentale de Gibbs. Celle-ci établit la différentielle première de l'énergie interne, écrite ici en grandeur spécifique (propriété d'homogénéité du premier degré attribuée à l'énergie interne), comme

$$du = Tds - pdv + \sum_i \mu_i d\rho_i \quad (3.21)$$

où s, v, ρ_i sont les entropies, volume et masse du constituant i rapportées à l'unité de masse. μ_i est le potentiel chimique associé au constituant i (grandeur intensive dont les gradients sont à l'origine d'un flux diffusif).

La prise en compte des évolutions de la microstructure passe par l'analyse des déplacements qui, à l'échelle atomique, modifient les liaisons chimiques locales. Elle touche au terme chimique $\sum_i \mu_i d\rho_i$ qui doit être précisé. Le physico-chimiste introduit l'idée de la "réaction" locale qui reflète l'évolution de la liaison de paire. Il assure les conservations simultanées des charges et des masses, via les coefficients de stoechiométrie ν_i^j affectés aux constituants i présents dans la réaction j , avec la relation $dm_i = \nu_i^j dz^j$, où m_i est la masse du constituant i et où z^j est le degré d'avancement de la réaction j . Le produit $-\mu_i \nu_i^j$ définit l'affinité chimique A_j de de Donder : c'est la mesure de l'énergie mise en jeu par le processus j .

Puisque ces réorganisations internes affectent les longueurs des liaisons, la contre-partie à ces "déplacements chimiques" δl_{ch} , donc aux déformations des liaisons atomiques de paire ε_{ch} , est une sorte de force (de contrainte) chimique, qui, tout comme la force

(la contrainte) mécanique, mesure l'écart à la position d'équilibre de départ. Il est donc bien naturel de recourir à une formulation tensorielle des réorganisations micro-structurales. Toutefois, en chimie on préfère, historiquement et culturellement, travailler avec le degré d'avancement de la réaction, en lieu et place des "déformations chimiques" qui s'y rattachent. Ainsi, le vecteur des affinités \mathbf{A} est le vecteur des forces de non-équilibres chimiques, et les avancements \mathbf{z} du processus pourront être formulés à partir d'une base vectorielle, étendue et complète.

Bien entendu la nature tensorielle de la représentation (base complète) autorise divers changements de bases. Ces possibles changements de base, s'ils modifient les écritures, décrivent rigoureusement la même phénoménologie physique.

Dès lors, il est loisible de procéder à une re-formulation tensorielle de ces processus de réorganisations internes, selon la base de représentation de son choix. Parmi ces bases, il en existe une privilégiée, celle de l'analyse modale, pour laquelle les processus chimiques se trouvent découplés les uns des autres (tenseurs diagonaux). La stratégie retenue dans la thèse de N. Renault était d'utiliser cette base diagonale pour l'ensemble des tenseurs chimiques produisant ainsi une description dans laquelle les modes chimiques sont à chaque instant découplés les uns des autres (stratégie DNLR - Distribution of Non-Linear Relaxations). La contre-partie à cette simplification radicale du traitement des lois d'évolution qui en découle, est bien sûr la difficulté de rattacher chaque mode de déplacement chimique à quelque mécanisme réactionnel particulier que l'on pourrait suivre par une observation directe.

Ci-dessous on va évoquer une autre décomposition tensorielle possible, celle suggérée dans Kuiken. Pour cela on part d'une base de représentation chimique qui restera à préciser (à définir en termes de mécanismes réactionnels), mais qui soit non diagonale a priori. On procède alors à des regroupements selon les symétries 3D que présentent ces divers tenseurs chimiques et, conformément aux notations de Kuiken, on peut par exemple regrouper d'une part (i) les tenseurs à symétrie sphérique entre eux, dont le produit $A_j z_j$ livre l'énergie associée (on accède ainsi directement aux contributions scalaires pour cette base) et d'autre part on regroupe (ii) les tenseurs restants, dont le produit scalaire doublement contracté $P_k : Z_k$ livre la part d'énergie correspondante. Cette démarche s'apparente aux décompositions hydrostatique et déviatorique qu'affectionne le mécanicien lorsqu'il focalise son attention sur les processus irréversibles non-élastiques (dissipatifs).

Dans une application rhéologique, Kuiken écrit la relation de Gibbs comme

$$\rho du = \rho T ds + \Sigma : d\epsilon - \sum_j \mathbf{A}_j dz_j - \sum_k \mathbf{P}_k : d\mathbf{Z}_k \quad (3.22)$$

où l'on doit préciser les éléments suivants

- ◆ l'énergie mécanique correspondant au travail des forces internes et exprimée dans (3.21) comme le travail des forces de pression hydrostatiques doit être généralisée (elle le fut par Gibbs lui-même) par le produit contracté des deux tenseurs contrainte Σ et déformation $d\epsilon$. On notera que Σ correspond a priori aux contraintes internes d'un état quasi-statique et ne doit pas être confondu avec $\tilde{\Sigma}$. De plus, avec l'angle d'approche des mécaniciens ϵ ne doit correspondre qu'aux déformations élastiques

et anélastiques (recouvrables) autorisées à apparaître dans le potentiel thermodynamique mais pas les déformations plastiques (ou visqueuses).

- ◆ l'énergie chimique $\sum_j \mathbf{A}_j dz_j$ exprimée très classiquement en termes de produit de grandeurs scalaires (affinités A et vitesse d'avancement de réaction z) que l'on somme sur les r réactions envisagées. Ce terme rendrait compte de la contribution à l'énergie interne des réactions modifiant les phases cristallines et amorphes, créant les phases de vide (cavitation) ou modifiant les phases cristallines (changements de phase).
- ◆ l'énergie chimique $\sum_k \mathbf{P}_k : d\mathbf{Z}_k$ mise en jeu dans des processus tensoriels cette fois, liés aux réorganisations internes et que l'on peut tout à fait décrire comme précédemment avec une approche de "mécano-chimiste", en termes d'affinités (contraintes internes de non équilibre) et de vitesses d'avancement des processus réactionnels (qui seraient dès lors homogènes à des vitesses de déformations non élastiques). Ce terme va permettre d'explicitier l'évolution des déformations anélastiques.

Pour aller plus loin, il est impératif d'explicitier totalement les équations d'état reliant grandeurs extensives et intensives via les dérivées partielles d'un potentiel thermodynamique choisi ad hoc.

2. 2^e étape

On effectue le changement classique de potentiel en privilégiant l'enthalpie soit $h = H/M = u + pv$ (classique en mécanique des fluides) ou l'énergie libre de Helmholtz $f = u - Ts$ qui serait plus adaptée au problème de rhéologie tel qu'il est posé. Les variables indépendantes de l'énergie de Helmholtz peuvent donc être identifiées comme

$$f = f(T, I_\epsilon, \epsilon_d^e, z_j, \mathbf{Z}_k = \epsilon_{d_k}^a) \quad (3.23)$$

ou l'on a dissocié le tenseur de déformation (et son tenseur de contrainte associé) en partie sphérique et déviatorique (indice d). Pour la partie sphérique, la variable $I_\epsilon = \text{tr}(\epsilon) = \frac{V-V_0}{V_0}$ contient des composantes élastiques et anélastiques (recouvrables parfaitement), comme vu précédemment. La partie anélastique représente de fait les processus tensoriels microstructuraux qui font donc correspondre $\epsilon_{d_k}^a = \mathbf{Z}_k$. Par un développement de ce potentiel autour d'un point d'équilibre de référence (notation \circ) on peut alors formuler les équations d'état

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{T_\circ} c_{v^\circ} (T - T_\circ) + \frac{1}{\rho_\circ} \left(\frac{\alpha}{\kappa} I_\epsilon + \sum_j b_j z_j \right) \quad (3.24a)$$

$$-p = \rho \frac{\partial f}{\partial I_\epsilon} = \frac{\rho}{\rho_\circ} \left[\frac{1}{\kappa} I_\epsilon - \frac{\alpha}{\kappa} (T - T_\circ) + \sum_j k_j z_j \right] \quad (3.24b)$$

$$-A_j = \rho \frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{\rho}{\rho_\circ} \left[\frac{1}{\kappa_j} I_\epsilon - b_j (T - T_\circ) + \sum_\ell k_{j\ell} z_\ell \right] \quad (3.24c)$$

$$\Sigma_d = \rho \frac{\partial f}{\partial \epsilon_d^e} = \frac{\rho}{\rho_\circ} \mathbf{E} \epsilon_d^e \quad (3.24d)$$

$$-(\mathbf{P}_k - \Sigma_d) = \rho \frac{\partial f}{\partial \epsilon_d^a} = \frac{\rho}{\rho_\circ} \sum_\ell \tilde{\mathbf{E}}_{k\ell} \epsilon_{d_\ell}^a \quad (3.24e)$$

Dans les équations d'état ci-dessus, à l'évidence un certain nombre de couplages ont été omis qu'il est facile de repérer (par exemple, il n'y a pas de couplage entre ϵ_d^e et ϵ_d^a puisque la partie élastique disparaît à contrainte nulle). Par ailleurs un certain nombre de coefficients thermodynamiques ont été introduits (dérivées secondes du potentiel par rapport à chacune des variables considérées). Nous avons ainsi

- $\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$, coefficient de dilatation
- $\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$, coefficient de compressibilité isotherme
- $c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v$, chaleur spécifique à volume constant
- \mathbf{E} tenseur associé aux coefficients de rigidité élastiques (modules), pour la partie déviatorique
- $\kappa_j, b_j, k_j, k_{j\ell}, \tilde{\mathbf{E}}_{kl}$ coefficients ou tenseurs (mal connus) mis en jeu dans les couplages avec les processus internes scalaires ou tensoriels (vus sous un angle de chimie réactionnelle)

3. 3^e étape

Grâce au potentiel f , on a une expression de l'entropie en fonction de la température. On peut procéder à l'écriture du bilan entropique. L'équation fondamentale de Gibbs se réécrit en vertu du principe de l'état local

$$\rho \dot{u} = \rho T \dot{s} - p \dot{I}_\epsilon + \Sigma_d : \dot{\epsilon}_d^e - \sum_j \mathbf{A}_j \dot{z}_j - \sum_k (\mathbf{P}_k - \Sigma_d) : \dot{\epsilon}_{dk}^a \quad (3.25)$$

En combinant cette équation avec (3.20) (pour laquelle on dissocie le tenseur des taux de déformation COMPLET $\mathbf{D} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^a + \dot{\epsilon}^v$) en incluant donc la partie plastique (ou visqueuse ou irréversible), on obtient

$$\rho T \dot{s} = -\text{div}(\phi_u) + \tilde{\Sigma} : (\dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^a + \dot{\epsilon}^v) + p \dot{I}_\epsilon - \Sigma_d : \dot{\epsilon}_d^e + \sum_j \mathbf{A}_j \dot{z}_j + \sum_k (\mathbf{P}_k - \Sigma_d) : \dot{\epsilon}_{dk}^a \quad (3.26)$$

En rappelant la formule d'analyse vectorielle

$$\text{div}\left(\frac{\phi_u}{T}\right) = \frac{1}{T} \text{div}(\phi_u) - \frac{1}{T^2} \phi_u \cdot \nabla T \quad (3.27)$$

on peut réécrire ce bilan

$$\rho \dot{s} = -\text{div}\left(\frac{\phi_u}{T}\right) + \pi_s \quad (3.28)$$

où l'on est capable d'identifier $\phi_s = \frac{\phi_u}{T}$, flux d'entropie et le terme source ou plutôt la dissipation $\mathcal{D} = T \pi_s$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = T \pi_s = & -\frac{1}{T} \phi_u \cdot \nabla T - (\tilde{p} - p) \left(\dot{I}_{\epsilon^e} + \dot{I}_{\epsilon^a} \right) + \left(\tilde{\Sigma}_d - \Sigma_d \right) : \dot{\epsilon}_d^e - \tilde{p} \dot{I}_\epsilon^v \\ & + \tilde{\Sigma}_d : \dot{\epsilon}_d^v + \sum_j \mathbf{A}_j \dot{z}_j + \sum_k \left(\mathbf{P}_k + \tilde{\Sigma}_d - \Sigma_d \right) : \dot{\epsilon}_{dk}^a \end{aligned} \quad (3.29)$$

Les second et troisième termes du membre de droite sont à éliminer puisque les déformations élastiques ne peuvent contribuer à une production d'entropie. Il ne reste plus qu'à rappeler l'équation d'état (3.24-a) dans (3.28) pour remplacer \dot{s} et obtenir l'équation de la chaleur

$$\rho c_{v^{\circ}} \dot{T} = -\text{div}(\phi_u) + -T \left[\frac{\alpha}{\kappa} \dot{I}_{\epsilon^e} + \sum_j b_j \dot{z}_j \right] + \mathcal{D}^+ \quad (3.30)$$

avec

$$\mathcal{D}^+ = T\pi_s + \frac{1}{T}\phi_u \cdot \nabla T = -\tilde{p}\dot{I}_{\epsilon^v} + \tilde{\Sigma}_d : \dot{\epsilon}_d^v + \sum_j \mathbf{A}_j \dot{z}_j + \sum_k (\mathbf{P}_k + \tilde{\Sigma}_d - \Sigma_d) : \dot{\epsilon}_{d_k}^a \geq 0 \quad (3.31)$$

Dans cette équation, on peut identifier ϕ_u à ϕ_q . Cela revient à considérer les effets de transport de chaleur liés aux constituants comme négligeables. Le flux de chaleur échangé par le volume élémentaire local est décrit par la loi de Fourier $\phi_q = -\lambda \nabla T$ où λ , conductivité thermique, sera considérée constante. De la même manière, il a déjà été vérifié dans la thèse de N.Renault que la chaleur spécifique du matériau est constante (pas de différence mesurable au micro-calorimètre entre matériau initial et très déformé). On notera $c_{v^{\circ}} = c$. Le postulat de l'équilibre local instantané nous a fait considérer une dérivée matérielle pour l'équation fondamentale (les variables décrivant le potentiel thermodynamique sont celles prises par le volume matériel dans son déplacement barycentrique) donc il convient de se rappeler que $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T$. Cela induit notamment l'égalité $\dot{I}_{\epsilon^e} + \dot{I}_{\epsilon^a} = \text{div}(\mathbf{v})$. Pour ce qui est des variables internes, la pratique voudra qu'on ne considère que des dérivées locales en temps (en négligeant tout transport barycentrique moyen).

Au final, l'équation qui va nous servir à inverser le champ de température sera :

$$\rho c \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(T) \right] = \lambda \nabla^2(T) + \pi \quad (3.32)$$

avec un terme source π dont on peut expliciter le "contenu" thermomécanique soit

$$\pi = -T \frac{\alpha}{\kappa} \dot{I}_{\epsilon^e} - T \sum_j b_j \dot{z}_j + \mathcal{D}^+ \quad (3.33)$$

Ce terme source a la même structure que celui obtenu par N.Renault (eq. X-9 p 157) mais apparaît ici plus développé. On y reconnaît le terme correspondant à la thermoélasticité, $-T \frac{\alpha}{\kappa} \dot{I}_{\epsilon^e}$, le terme lié aux couplages entropie-variables internes $-T \sum_j b_j \dot{z}_j$ destinés à rendre compte des évolutions microstructurales, et un terme de dissipation \mathcal{D}^+ (eq. 3.31) irréversible (positif hors de l'équilibre) qui est lié aux déformations inélastiques (plastiques-non recouvrables-visqueuses) mises en jeu dans les processus internes.

On comprend alors la motivation de ce travail de thèse : exploiter les mesures sur les variables de température (et cinématiques) pour reconstruire l'évolution de la source thermomécanique (THS) π tout au long d'un essai mécanique qui est l'observable

nécessaire pour valider la modélisation thermodynamique. On comprend aussi qu'il faut que cette reconstruction soit précise si l'on espère distinguer les différentes contributions entre elles (ce qui paraît d'emblée un challenge difficile).

3.2 Réduction de modèle

Pour pouvoir faire appel à des méthodes de résolution quasi-analytiques, plus adaptées aux problèmes inverses, nous choisissons de résoudre l'équation locale de transport de chaleur donnée ci-dessus sur un domaine matériel parallélépipédique circonscrit à l'intérieur de l'éprouvette (voir Fig.3.1). Parce que les données expérimentales sont essentiellement 2D (mesures de surface sur les faces dites avant ou arrière), il est clair que nous devons faire un premier passage 3D \rightarrow 2D. Ensuite, dans un souci à la fois de réduction de modèle (phénomènes de transfert essentiellement 1D sur une géométrie très élancée) et d'amélioration du rapport signal/bruit des observables qui garantiront les meilleures conditions d'inversion, nous présenterons le passage 2D \rightarrow 1D de cette modélisation. Ceci impose un certain nombre de manipulations mathématiques et de précautions liées essentiellement à la prise en compte des conditions aux limites existant dans les directions de l'espace abandonnées (terme d'accommodation de type ailette). La variable T que nous utilisons correspond à $T - T_\infty$ ou T_∞ est la température de l'ambiance dans laquelle est plongée l'éprouvette que nous considérerons également comme la température des mors très massifs de la machine.

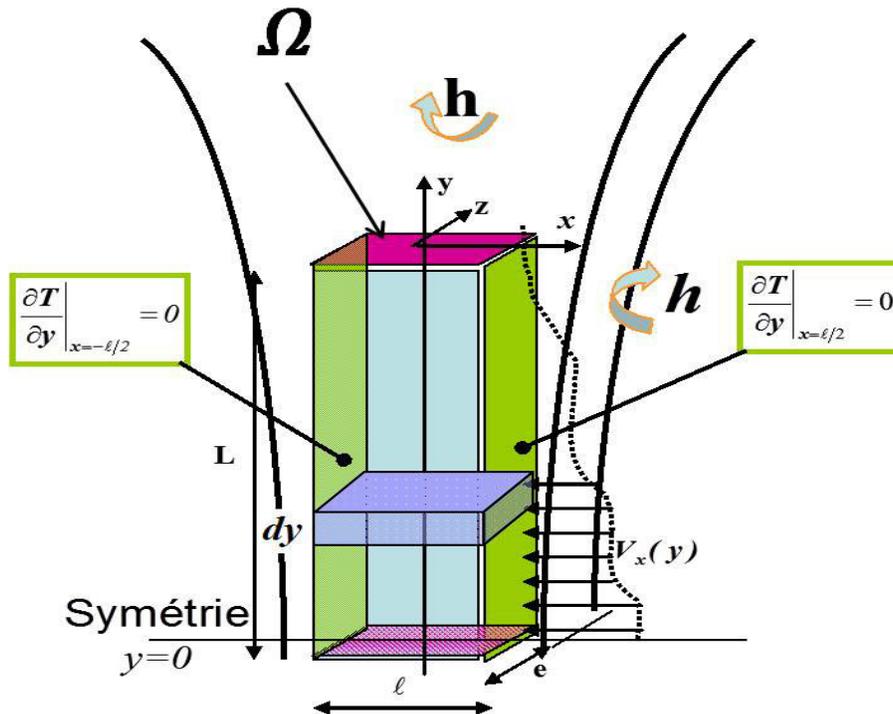


FIGURE 3.1 – Bilan du problème et régions de mesures sur l'éprouvette

3.2.1 Modélisation 2D

Dans la réduction 3D→2D, nous effectuons une moyenne du champ de température selon z , sur l'épaisseur réelle de l'éprouvette.

$$\bar{T}(x, y, t) = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{+e/2} T(x, y, z, t) dz \quad (3.34)$$

Rappelons que ce bilan se fait en variables eulériennes, donc sur un volume local fixé dans l'espace. L'épaisseur considérée dans cette prise de moyenne est $e < e_0$, épaisseur initiale de l'éprouvette. En effet l'épaisseur de l'éprouvette est amenée à évoluer du fait du coefficient de Poisson du matériau et de l'effet de striction selon $e(y, t) = e_0 \exp(\varepsilon_z(y, t))$. L'épaisseur e considérée ici est la longueur fixe du parallélépipède dans la direction \vec{z} isolé initialement dans le volume total de l'éprouvette. Elle peut virtuellement correspondre à l'épaisseur finale atteinte pour l'étirement maximum de l'essai. Les faces latérales avant et arrière situées en $z = \pm e/2$ ne coïncident donc éventuellement avec celles de l'éprouvette qu'en fin d'essai. On considère qu'elles respectent toujours une condition de symétrie sur les densités de flux et les températures :

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{x,y,e/2} = -\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{x,y,-e/2}; T(x, y, e/2) = T(x, y, -e/2) \quad (3.35)$$

On divise par e et on intègre l'équation locale selon z soit :

$$\frac{\rho C_p}{e} \left(\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{\partial T}{\partial t} dz + \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \mathbf{V} \cdot \nabla T dz \right) = \frac{\lambda}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \Delta T dz + \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \pi dz \quad (3.36)$$

ce qui donne, en supposant $V_x(z), V_y(z)$, en considérant que $V_z = \dot{\varepsilon}_z z$ avec $\dot{\varepsilon}_z(z)$, et en faisant une I.P.P. :

$$\rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho c \left[V_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \rho c \dot{\varepsilon}_z (T(\pm e/2) - \bar{T}) = \lambda \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right] + \pi - \pi^h \quad (3.37)$$

La composante moyenne du Laplacien en z produit par la condition de symétrie (3.35) un terme d'échange surfacique classique dans les hypothèses d'ailette. Il correspond à une source négative (un puits de chaleur) que l'on a choisi de noter : $\pi^h = (2h/e)T(\pm e/2)$. Le terme de source volumique thermomécanique reste inchangé dans la mesure ou il est considéré homogène dans l'épaisseur de l'éprouvette.

Pratiquement, nous pouvons supposer que $\bar{T} = T(\pm e/2)$ et donc l'équation 2D du transfert de chaleur devient :

$$\rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho c V_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho c V_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) + \pi - \pi^h \quad (3.38)$$

3.2.2 Modélisation 1D

Partant du modèle 2D de l'éprouvette, le passage vers le modèle 1D est obtenu simplement sous condition de négliger les gradients de température selon la direction x , ce que suggère

les profils de température très “plats” obtenus en toutes circonstances au cours d’un essai de traction. Dans sa version unidimensionnelle, l’équation en température du bilan d’énergie est donc :

$$\rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho c V_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \pi - \pi^h \quad (3.39)$$

Si la réduction de modèle opérée ici est légitime et se fonde sur des hypothèses largement vérifiées par l’expérience (cf chapitre 5), il n’en reste pas moins que la variable température de cette équation ne peut prétendre être représentée qu’imparfaitement par l’observable mesuré qui se situe sur la face réelle de l’éprouvette. Il faut donc confondre \bar{T} et $\bar{T}(e_0)$. La qualité de cette approximation est dépendante des conditions d’échange au niveau de la surface réelle et des constantes de temps mises en jeu dans cet échange. Nous nous sommes placés dans les conditions les plus favorables en prenant soin expérimentalement de limiter ces échanges (enceinte de confinement) et en considérant des essais quasi-statiques mais rapides. Nous considérerons donc dans toute la suite que $\pi^h \approx 0$. Il est clair que tout écart aux hypothèses formulées ici se répercutent directement par un biais expérimental sur la source identifiée ce qui est bien le caractère fortement limitant de la calorimétrie quantitative par imagerie IR appliquée à la thermomécanique des matériaux.

3.3 Cas tests étudiés pour les simulations d’inversion

Dans ce paragraphe, nous présentons les deux cas de source que nous avons distingués pour tester nos algorithmes d’inversion des données et de reconstruction de la fonction recherchée. Afin de juger des performances de nos méthodes (précision, robustesse), nous avons voulu en effet appliquer ces algorithmes sur des données synthétiques obtenues par des simulations numériques basées sur un code éléments finis (Flex PDE®). La fonction spatio-temporelle de source est donc choisie à travers un modèle mathématique. Pour prendre en compte l’effet d’advection, un champ cinématique variant en temps et espace est également introduit dans le calcul. On simule le champ de température en résolvant le modèle direct. Sur le plan expérimental, ces deux champs correspondent à des mesures donc, pour les simulations d’inversion, des bruits artificiels de moyenne nulle et à distribution Gaussienne leur sont ajoutés. Finalement, nous comparons le résultat obtenu avec la donnée de départ. Notons que le “crime inverse” évoqué dans l’article de Kaipio et Somersalo [66] consistant à utiliser la même structure de modèle pour le sens direct et le sens inverse est évité dans ce travail. Un code d’éléments finis est utilisé pour les simulations directes et, dans le chapitre 4, une approche spectrale sur support global a été appliquée à l’équation d’advection-diffusion pour générer l’algorithme d’inversion. Pour ces différents tests, la robustesse de l’inversion vis à vis du bruit a notamment été étudiée en variant son amplitude (sa variance ou son écart-type). Concernant les conditions aux limites du problème thermique 1D direct, toutes les conditions aux limites peuvent être envisagées. Pour le modèle d’inversion, nous avons considéré des conditions de Neumann ou des conditions mixtes (Fourier), avec des valeurs de coefficients d’échange faibles, pour refléter au mieux la réalité des flux en frontières. Les flux aux bords peuvent être estimés à partir du champ de température comme une fonction variable dans le temps ou considérés comme “indexés” sur les températures de frontière via un coefficient h d’échange.

Concernant les modèles de source, le cas d'une source uniforme spatialement et dépendant seulement du temps n'est pas considéré ici. Ce problème a été traité précédemment par Wong & Kirby [31] et ne pose pas de problème d'inversion. En particulier, il n'y a pas de régularisation pour obtenir la solution uniforme.

Pour la présentation des modèles et des résultats d'inversion du chapitre 4, l'équation du problème thermique 1D est réécrite ici :

$$c \frac{\partial T(X, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(X, t)}{\partial X^2} - cv(X, t) \frac{\partial T(X, t)}{\partial X} + q(X, t) \quad (3.40)$$

avec pour principal changement de notation : $q \leftarrow \pi$ pour le terme source $k \leftarrow \lambda$ pour la conductivité thermique et $X \leftarrow y$) pour la variable d'espace. Les simulations sont produites avec les données des autres paramètres récapitulées dans le tableau 3.3

| | |
|----------------------------------|---|
| Coefficient de diffusion | $\lambda = 0.03 \quad W \cdot cm^{-1} \cdot K^{-1}$ |
| Coefficient de capacité | $c = 1 \quad J \cdot cm^{-3} \cdot K^{-1}$ |
| Longueur d'intervalle observable | $L = 1.5 \quad cm$ |
| Durée de simulation | $t_f = 40 \quad s$ |

TABLE 3.1 – Données utilisées dans les simulations directes

Cas-Test 1 La source est invariante en temps $q(X)$, continue mais de classe C^0 (figure 3.2). Ce problème est issu de [67] et nous sert à valider la méthode bien que les données numériques ne reflètent pas spécifiquement le cas d'une application thermomécanique. Les points de discontinuité de la source sont localisés en $X = 0.6cm$ m et $X = 0.8cm$. Ce type de source est classique pour tester l'aptitude des algorithmes à reproduire précisément le comportement souhaité au voisinage des points singuliers. Il nous servira aussi à contrôler que notre algorithme reconstruit bien la même source en temps stationnaire à tous les pas de temps de notre modèle de reconstruction instationnaire.

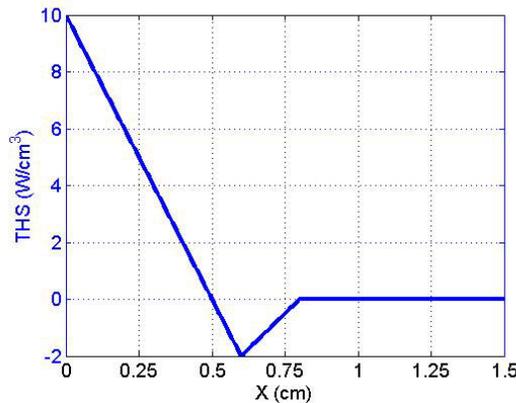


FIGURE 3.2 – Cas test 1 : Modèle de source stationnaire (Classe C^0)

Cas-test 2 La source est le produit d'une fonction temporelle et d'une fonction spatiale de classe C^∞ . La fonction temporelle est la superposition de deux composantes : l'une croissant linéairement, l'autre de fluctuation sinusoïdale. La fonction spatiale est de forme

gaussienne, respectant une espérance de $L/2$ et une variance de $\sqrt{0.05}$. La source du cas-test 2 est ainsi décrite mathématiquement par :

$$q(X, t) = (t/30 + \sin(t/10)) \cdot \exp\left(-\frac{(X - \frac{L}{2})^2}{0.1}\right) \quad (3.41)$$

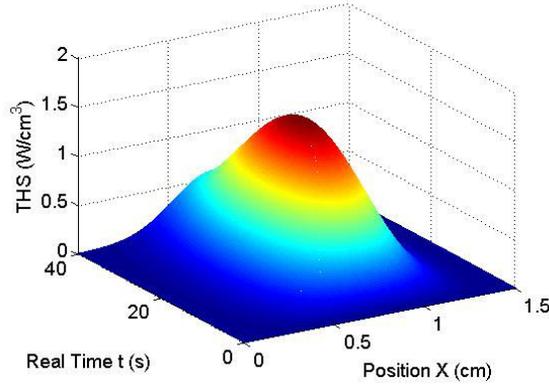


FIGURE 3.3 – Cas test 2 : Modèle de source continue de classe C^∞

Le cas-test 2 correspond à un cas plus proche de la réalité. L'intensité maximale de la source intervient au centre de l'éprouvette, là où la striction se développe, puis elle se distribue progressivement en fonction de temps vers les deux bords du domaine.

Ces deux cas-tests n'ont aucune prétention à reproduire le cas de sources thermomécaniques réelles mais d'en intégrer les caractéristiques potentielles en termes de localisation spatiale et/ou d'évolution temporelle. Insistons encore sur le fait que ces tests impliquent des sources dont les dépendances spatiales et temporelles sont très brutales et donc très pénalisantes vis-à-vis du processus d'inversion.

Chapitre 4

TECHNIQUES DE RECONSTRUCTION INVERSE DEVELOPPEES

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.1 | Approche par modes de branche | 64 |
| 4.1.1 | Problème de branche | 64 |
| 4.1.2 | Méthode inverse | 68 |
| 4.1.3 | Résultats numériques | 71 |
| 4.2 | Tentative d'approche inverse par SVD | 76 |
| 4.2.1 | Principe de la décomposition SVD ou KLD | 77 |
| 4.2.2 | Implémentation pratique | 81 |
| 4.2.3 | Reconstruction de sources spatio-temporelles par SVD | 81 |
| 4.3 | Méthode itérative de reconstruction | 87 |
| 4.3.1 | Principe de la formulation adjointe | 88 |
| 4.3.2 | Formulation adjointe appliquée à notre problème | 90 |
| 4.3.3 | Gradient conjugué | 92 |
| 4.3.4 | CGM stabilisée | 99 |
| 4.4 | Comparaison des performances entre algorithmes | 105 |
| 4.5 | Remarques de conclusion | 108 |

Dans le chapitre précédent, on a introduit le problème direct de transfert de la chaleur et on l'a réduit à une géométrie 1D dans le cadre de notre étude sur des éprouvettes de géométrie très élancée. L'objectif de ce chapitre vise à présenter les différentes variantes des méthodes d'inversion utilisées qui, dans notre travail, se conditionnent toujours l'une l'autre. Concernant la modélisation directe, l'objectif initial était de reprendre une collaboration avec Alain Neveu, du Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry, qui a développé l'approche dite des "Modes de Branche" et l'a fortement promu dans le domaine de la thermique. Il s'agit d'une méthode spectrale que nous allons présenter plus loin, dont le potentiel s'est vite inscrit dans les problématiques inverses de réduction de modèle (ou d'optimisation

de modèle en vue de l'inversion). Nous avons décidé de baser les travaux de cette thèse sur leur application à notre problématique inverse.

4.1 Approche par modes de branche

Dans le cadre d'une reconstruction de source volumique pour un problème de transfert 1D avec diffusion et advection, nous considérons ici l'équation locale vue précédemment avec des conditions aux limites de type mixte (Robin ou Fourier) :

$$\begin{aligned}
 \forall X \in \Omega = [0, L] \quad & c \frac{\partial T(X, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(X, t)}{\partial X^2} - cv(X, t) \frac{\partial T(X, t)}{\partial X} + q(X, t) \\
 \forall t > 0 \quad & -k \frac{\partial T}{\partial X}(0, t) = -h_1 T \\
 & -k \frac{\partial T}{\partial X}(L, t) = h_2 T \\
 & T(X, 0) = T_0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où les paramètres h_1, h_2, v, T_0 sont connus. Le champ de vitesse v peut être décomposé en une composante constante v_0 et une fluctuation v_1 , soit $v(X, t) = v_0 + v_1(X, t)$. La prise en compte des échanges convectifs sur les surfaces libres de l'éprouvette n'est pas explicitée ici (cf discussion 3.2.2).

4.1.1 Problème de branche

Notre objectif est d'identifier la source avec une méthode spectrale comme dans des travaux antérieurs [29] avec une base d'approximation différente et la prise en compte de l'advection. L'idée est ici de tester l'approche par modes de branche qui peuvent permettre d'éliminer les incompatibilités aux limites (à l'aide de la *Condition de Steklov*) et sont susceptibles de fournir une base correcte de décomposition en présence d'un transfert par advection [68, 69]. Deux bases de branche, calculées respectivement pour un opérateur purement diffusif et advectif-diffusif, seront comparées. Compte-tenu de l'application envisagée, la reconstruction de la source thermique par un modèle d'advection-diffusion sera testée pour des nombres de Péclet de l'ordre de l'unité ou inférieur. A ce sujet, notons qu'il a été montré [69] qu'une base de branche calculée en situation de Péclet faible ou nul (opérateur diffusif pur) est relativement performante pour décomposer la solution d'un problème d'advection-diffusion pour des nombres de Péclet modérés. Il s'agira donc de voir s'il en est de même dans un objectif de reconstruction de source. Dans les paragraphes suivants, nous présentons les bases de branche obtenues numériquement dans les deux cas de figure : Modes Diffusifs purs et Modes Advectifs-Diffusifs.

MD : Modes Diffusifs

MAD : Modes Advectifs-Diffusifs

CGM : Conjugate Gradient Method

KLD : Karhunen-Loève Decomposition

SVD : Singular Value Decomposition

SNR : Signal Noise Ratio

4.1.1.1 Modes Diffusifs (MD)

Cette base est déterminée par l'équation caractéristique suivante :

$$\forall X \in \Omega \quad k \frac{\partial^2 V_i(X)}{\partial X^2} = \lambda_i c V_i \quad (4.2)$$

$$-k \frac{\partial V_i(X)}{\partial X} \Big|_{X=0} = -\lambda_i \zeta V_i \quad (4.3)$$

$$-k \frac{\partial V_i(X)}{\partial X} \Big|_{X=L} = \lambda_i \zeta V_i \quad (4.4)$$

où les V_i désignent les modes de branche et λ_i les valeurs propres associées. Par rapport à un problème modal "classique" on remarque immédiatement que les conditions limites (4.3,4.4) ne sont plus homogènes, mais au contraire qu'elles font intervenir la valeur propre. Nous appellerons (4.3,4.4) *les conditions de Steklov*. C'est une caractéristique essentielle du problème de branche. Grâce à cela, les modes de branche forment une base pour l'espace des fonctions $H^1([0, L])$. Ainsi tous les champs sont décomposables sur la base de branche. Le paramètre ζ apparaissant dans les conditions aux limites est indispensable pour assurer l'homogénéité dimensionnelle des valeurs propres λ_i . Il est directement lié à l'introduction de ces valeurs propres dans les conditions aux limites, à l'origine de la spécificité de la base de branche. Dans le système des grandeurs fondamentales (distance $[L]$, masse $[M]$, temps $[T]$ et température $[\Theta]$), ce coefficient est en $[M][L][T^{-2}][\Theta^{-1}]$. Dans le système SI, ces unités sont en $Jm^{-1}K^{-1}$ et traduisent le fait qu'un effet "capacitif" est introduit au niveau des frontières du domaine. Son expression analytique est donnée dans [48] pour les 3 espaces dimensionnels (de dimension $d = \{1, 2, 3\}$) :

$$\zeta = c_r l_r \quad (4.5)$$

avec

$$l_r = (d) \frac{\int_{\Omega} dv}{\int_{\partial\Omega} da} \quad c_r = \frac{\int_{\Omega} c_0(M) dv}{\int_{\Omega} dv}$$

Pour le cas 1D, il est possible de montrer que ce paramètre appelé "Nombre de Steklov" correspond à $\zeta = c * L / 2$. Comme l'opérateur est auto-adjoint, les valeurs propres sont réelles. Les modes sont réels et ils vérifient la condition d'orthogonalité suivante :

$$\mathcal{C}_{\Omega}(V_i, V_j) = \int_{\Omega} c V_i V_j dX + \zeta (V_i(L) V_j(L) + V_i(0) V_j(0)) = \delta_{ij} \quad (4.6)$$

avec δ_{ij} symbole de Kronecker. Cette orthogonalité est vérifiée numériquement au niveau de 10^{-15} avec un maillage de 400 points par Volumes Finis. Puis on obtient aussi une relation associée à l'opérateur du problème de MD :

$$\mathcal{A}(V_i, V_j) = \int_{\Omega} k \frac{\partial V_i}{\partial X} \frac{\partial V_j}{\partial X} dX = -\lambda_i \delta_{ij} \quad (4.7)$$

4.1.1.2 Modes Advectifs-Diffusifs (MAD)

La seconde base de branche considérée sera celle produite en prenant en compte un terme advectif dans l'opérateur. Les modes sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} \forall X \in \Omega \quad k \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} - cv_0 \frac{\partial V_i}{\partial X} &= c\lambda_i V_i \\ e : \quad -k \frac{\partial V_i}{\partial X} \Big|_{X=0} &= -(\lambda_i \zeta + cv_0) V_i \\ s : \quad -k \frac{\partial V_i}{\partial X} \Big|_{X=L} &= \lambda_i \zeta V_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

où v_0 est défini en section 4.1. Pour un problème non auto-adjoint, deux spécificités sont à considérer pour calculer la base spectrale de branche :

- Seule une condition de flux advectif "entrant" est à considérer dans la condition aux limites de Steklov
- Les modes propres n'établissent pas une famille orthogonale et il est nécessaire de définir des modes de branche adjoints (exposant '*') pour lesquels un flux advectif est considéré cette fois dans la condition aux limites de Steklov "sortante".

$$\begin{aligned} \forall X \in \Omega \quad k \frac{\partial^2 V_i^*}{\partial X^2} + cv_0 \frac{\partial V_i^*}{\partial X} &= c\lambda_i^* V_i^* \\ e : \quad -k \frac{\partial V_i^*}{\partial X} \Big|_{X=0} &= -\lambda_i^* \zeta V_i^* \\ s : \quad -k \frac{\partial V_i^*}{\partial X} \Big|_{X=L} &= (\lambda_i^* \zeta + cv_0) V_i^* \end{aligned} \quad (4.9)$$

Notons aussi que si V^* est complexe, alors il faut systématiquement considérer que les modes conjugués \bar{V}^* sont en fait \bar{V}^* . La famille de fonctions (V_i, V_j^*) forme alors un système biorthogonal, la condition de bi-orthogonalité s'écrivant :

$$\mathcal{C}_{\bar{\Omega}}(V_i, V_j^*) = \int_{\Omega} c V_i \bar{V}_j^* dX + \zeta (V_i(L) \bar{V}_j^*(L) + V_i(0) \bar{V}_j^*(0)) = \delta_{ij}$$

Grâce à un changement de variable, l'équation (4.8) se met sous la forme adimensionnelle

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - Pe \frac{\partial V}{\partial x} = \tilde{\lambda} V \\ -\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(\tilde{\lambda} \tilde{\zeta} + Pe) V \\ -\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=1} = \tilde{\lambda} \tilde{\zeta} V \end{cases} \quad (4.10)$$

avec $x = X/L$, $Pe = \frac{cv_0 L}{k}$, $\tilde{\lambda} = \frac{cL^2}{k} \lambda$, $\tilde{\zeta} = 1/2$ et $x \in [0, 1]$. L'équation caractéristique de (4.10)

$$r^2 - Pe \cdot r - \tilde{\lambda} = 0 \quad (4.11)$$

produit les racines

$$r_1 = \frac{Pe + \sqrt{Pe^2 + 4\tilde{\lambda}}}{2}, \quad r_2 = \frac{Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\tilde{\lambda}}}{2}$$

Soit $\alpha = Pe/2, \beta = \sqrt{Pe^2 + 4\tilde{\lambda}}/2$, alors $\tilde{\lambda} = \beta^2 - Pe^2/4$.

Si $\beta \neq 0$, il convient d'écrire les fonctions propres sous la forme suivante :

$$V(x) = e^{\alpha x}(A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x)) \quad (4.12)$$

Les coefficients seront déterminés par les conditions aux limites.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x}(A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x)) + e^{\alpha x}(A \beta \sinh(\beta x) + B \beta \cosh(\beta x)) \quad (4.13)$$

Les conditions limites se traduisent alors par

$$\left(\frac{\tilde{\lambda}}{2} + \alpha\right)A = \beta B \quad (4.14)$$

$$\left(\alpha + \frac{\tilde{\lambda}}{2} + \beta \tanh(\beta)\right)A = -\left(\left(\alpha + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\right)\tanh(\beta) + \beta\right)B \quad (4.15)$$

De l'équation (4.14), on déduit $B = \frac{\tilde{\lambda} + \alpha}{\beta}A$, car $\beta \neq 0$. Alors

$$\left(\alpha + \frac{\tilde{\lambda}}{2} + \beta \tanh(\beta)\right)A = -\frac{\tilde{\lambda} + \alpha}{\beta}\left(\left(\alpha + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\right)\tanh(\beta) + \beta\right)A \quad (4.16)$$

d'où l'équation transcendante :

$$\tanh(\beta) = \frac{(Pe + \tilde{\lambda})\beta}{-\beta^2 - (\tilde{\lambda}/2 + Pe/2)^2} \quad (4.17)$$

ou

$$\tanh(\beta) = \frac{(Pe - Pe^2/4 + \beta^2)\beta}{-\beta^2 - (\beta^2 - Pe^2/4 + Pe)^2/4}. \quad (4.18)$$

On remarque que l'équation est impaire ce qui permet de limiter la zone de recherche des racines β . Il est possible de montrer que les solutions sont soit réelles ou imaginaires.

Pour le cas imaginaire

$$\beta = jq \quad \tilde{\lambda} = -q^2 - Pe^2/4 \quad (4.19)$$

$$\tan(q) = \frac{(Pe - Pe^2/4 - q^2)q}{q^2 - (Pe - Pe^2/4 - q^2)^2/4} \quad (4.20)$$

Ce cas va donner naissance à une infinité de racines propres q puisque la fonction tangente est périodique. Dans chaque intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ où $n \in \mathbb{N}^+$ il existera une solution unique, sauf si l'asymptote verticale de la fonction de second membre dans l'équation (4.20) coupe l'intervalle. Dans ce dernier cas il y aura deux solutions dans cet intervalle.

Pour le cas réel, l'équation (4.18) ne possède pas de solutions si $Pe \leq 4$. En revanche si $Pe > 4$ il peut exister une solution unique ou non en fonction de la pente à l'origine des fonctions.

A chaque valeur propre, qui résulte de ces calculs, est associée une fonction propre (ou plusieurs si la valeur propre est multiple). Rappelons que les fonctions propres sont définies à une constante multiplicative près, qui peut être fixée en normalisant les modes.

Soit β réel, il n'y a que deux fonctions propres associées de type "exponentielle" ou "combinaison de \sinh et \cosh ". On ne donne pas les formes explicites ici.

Soit β imaginaire pur, notons alors $\beta = jq$, les fonctions propres sont :

$$V(x) = e^{\alpha x} \left(\cos(qx) + \frac{(-q^2 - \alpha^2)/2 + \alpha}{q} \sin(qx) \right),$$

et celles adjointes :

$$V^*(x) = e^{-\alpha x} \left(\cos(qx) + \frac{(-q^2 - \alpha^2)/2 + \alpha}{q} \sin(qx) \right).$$

Dans ce cas, on voit que V et V^* sont identiques sauf le terme exponentiel à gauche. Bien entendu, quand $v_0 = 0$, les modes diffusifs peuvent être ré-obtenus. Les modes vérifient également une propriété de bi-orthogonalité [48] :

$$\mathcal{C}_{\bar{\Omega}}(V_i, V_j^*) = \int_{\Omega} c V_i \bar{V}_j^* dX + \zeta(V_i(L) \bar{V}_j(L) + V_i(0) \bar{V}_j(0)) = \delta_{ij}, \quad (4.21)$$

puis on obtient aussi

$$\mathcal{A}(V_i, V_j^*) = \int_{\Omega} k \frac{\partial V_i}{\partial X} \frac{\partial \bar{V}_j^*}{\partial X} dX + \int_{\Omega} c v_0 \frac{\partial V_i}{\partial X} \bar{V}_j^* dX = -\lambda_i \delta_{ij} \quad (4.22)$$

4.1.2 Méthode inverse

Le champ T peut s'écrire comme une décomposition modale :

$$T(X, t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) V_i(X) \quad (4.23)$$

Si le champ de température est connu à un instant t_0 donné, il est possible de déterminer les états à cet instant à l'aide de la formule de projection (4.21) :

$$\forall i \quad z_i(t_0) = \mathcal{C}_{\bar{\Omega}}(T(\cdot, t_0), V_j^*) \quad (4.24)$$

Pour V_i^* , on pourra considérer indifféremment les modes diffusifs ou les modes advectifs-diffusifs (propres ou adjoints). Introduite dans la formulation variationnelle faible du problème initial (avec les conditions aux limites réelles), cette décomposition conduit à un système d'équations permettant de calculer les états $z(t)$:

1. *Base de branche diffusive :*

$$\sum_{i=1}^N \dot{z}_i(t) \gamma_{im} = \lambda_m z_m(t) - \sum_{i=1}^N z_i(t) (Q_{im} + P_{im}(t)) + \int_{\Omega} q V_m dX \quad \forall m \in 1, \dots, N \quad (4.25)$$

avec

$$\gamma_{im} = \delta_{im} - \zeta \left(V_i(L) V_m(L) + V_i(0) V_m(0) \right)$$

$$Q_{im} = h_2 V_i(L) V_m(L) + h_1 V_i(0) V_m(0)$$

$$P_{im}(t) = \int_{\Omega} cv(X, t) \frac{\partial V_i}{\partial X} V_m dX$$

2. Base de branche advective[•] :

$$\sum_{i=1}^N \dot{z}_i(t) \gamma_{im} = \lambda_m z_m(t) - \sum_{i=1}^N z_i(t) (Q_{im} + P_{im}(t)) + \int_{\Omega} q \bar{V}_m^* dX \quad \forall m \in 1, \dots, N \quad (4.26)$$

avec

$$\gamma_{im} = \delta_{im} - \zeta \left(V_i(L) \bar{V}_m^*(L) + V_i(0) \bar{V}_m^*(0) \right)$$

$$Q_{im} = h_2 V_i(L) \bar{V}_m^*(L) + h_1 V_i(0) \bar{V}_m^*(0)$$

$$P_{im}(t) = \int_{\Omega} cv_1(X, t) \frac{\partial V_i}{\partial X} \bar{V}_m^* dX - cv_0 V_i(0) \bar{V}_m^*(0)$$

Le champ de source thermique q est décomposable aussi sur la base de branche du domaine Ω . Compte-tenu des systèmes différentiels en temps (4.25), (4.26), on propose de mettre en œuvre une méthode des temps futurs pour identifier la source dans un processus séquentiel (et donc recouvrer sa dépendance temporelle). On posera :

$$q(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) c V_i(X) \quad (4.27)$$

En fonction de la complexité du champ de source (présence de discontinuités en particulier) il faut conserver un nombre plus ou moins grand de modes pour en rendre compte. A l'opposé, la présence de bruit sur le signal de mesure (images infrarouges) impose une régularisation de la reconstruction inverse qui s'obtient par réduction modale (troncature sur le nombre de modes). Il faut donc toujours trouver un compromis du problème donné. Les valeurs propres modales correspondent aux fréquences temporelles. Les modes ayant de petites constantes de temps sont associés aux hautes fréquences spatiales et s'ils sont conservés, vont être très sensibles au bruit de mesure et ne peuvent donc pas participer à la reconstruction du champ de température expérimental sans introduire un énorme biais sur la source. Reconstruire une discontinuité nécessiterait un nombre de modes infinis et il est évident que ce genre de problème test est très difficile pour l'inversion. Notons qu'on a pondéré les états b_i par la capacité dans (4.27). Ce n'est pas indispensable, mais cela permet d'utiliser la propriété d'orthogonalité et de simplifier l'écriture.

En injectant la décomposition (4.27) dans l'équation d'état (4.25) et (4.26), on réécrit le système sous la forme matricielle :

$$\gamma \dot{\mathbf{Z}} = \Sigma \mathbf{Z} - \mathbf{Q} \mathbf{Z} - \mathbf{P}(t) \mathbf{Z} + \gamma \mathbf{B}$$

ou $\dot{\mathbf{Z}} = \gamma^{-1} \Sigma \mathbf{Z} - \gamma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{Z} - \gamma^{-1} \mathbf{P}(t) \mathbf{Z} + \mathbf{B}$ (4.28)

•. Le terme $P_{im}(t)$ ne doit pas surprendre : il correspond pour la formulation intégrale de (4.1) à la contribution du terme d'advection sur des modes de branche dans sa projection

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= (z_1(t), \dots, z_N(t))^t, \dot{\mathbf{Z}} = (\dot{z}_1(t), \dots, \dot{z}_N(t))^t \\ \mathbf{B} &= (b_1(t), \dots, b_N(t))^t \\ \gamma &= (\gamma_{im})_{N \times N}, \mathbf{Q} = (Q_{im})_{N \times N}, \mathbf{P}(t) = (P_{im})_{N \times N}, \Sigma = \text{diag}(z_1, \dots, z_N)\end{aligned}$$

Pour simplifier,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{D}(t)\mathbf{Z} + \mathbf{B} \\ \mathbf{Z}(0) &= \mathbf{Z}_0\end{aligned}\tag{4.29}$$

où

$$\mathbf{D}(t) = \gamma^{-1}(\Sigma - \mathbf{Q} - \mathbf{P}(t)).$$

Par un schéma implicite, on obtient le vecteur des états \mathbf{Z} à partir de la contribution due à la condition initiale \mathbf{Z}_0 et celle due à la présence d'un terme source \mathbf{B} (convolution en temps). Dans le cas présent, l'opérateur D "traduit" la composante cinétique du transfert en faisant jouer les valeurs propres λ_k :

$$\frac{\mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{Z}^k}{\Delta t} = \mathbf{D}^{k+1}\mathbf{Z}^{k+1} + \mathbf{B}^{k+1}$$

où $\mathbf{Z}(t_k) = \mathbf{Z}^k$. On peut réécrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$\mathbf{Z}^{k+1} = E^{k+1}\mathbf{Z}^k + \Delta t E^{k+1}\mathbf{B}^{k+1}\tag{4.30}$$

en supposant que $E^{k+1} = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{D}^{k+1})^{-1}$. Pour régulariser le calcul (filtrage), on applique classiquement une méthode de pas de temps futurs comme suggéré initialement par Beck [46]. En connaissant l'entrée \mathbf{B}^k au k -ième instant, le principe consiste à identifier \mathbf{B}^{k+1} au pas suivant considérant un critère de moindres carrés séquentiel de r pas de temps futurs. La sortie du modèle est donnée directement par $\mathbf{T}^{k+1} = \mathbf{V}\mathbf{Z}^{k+1}$. Pour le r -vecteur $\mathbf{T} = (\mathbf{T}^{k+1}, \mathbf{T}^{k+2}, \dots, \mathbf{T}^{k+r})^t$, nous allons chercher à minimiser l'estimateur "écart" entre températures mesurées $\tilde{\mathbf{T}} = (\tilde{\mathbf{T}}^{k+1}, \tilde{\mathbf{T}}^{k+2}, \dots, \tilde{\mathbf{T}}^{k+r})^t$ et température du calcul $\mathbf{T} = (\mathbf{V}\mathbf{Z}^{k+1}, \dots, \mathbf{V}\mathbf{Z}^{k+r})^t$. Ainsi le critère s'écrit :

$$\begin{aligned}J(\mathbf{B}^{k+1}, \dots, \mathbf{B}^{k+r}) &= \|\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^r (\tilde{\mathbf{T}}^{k+i} - \mathbf{V}\mathbf{Z}^{k+i}(\mathbf{B}^{k+1}, \dots, \mathbf{B}^{k+i}))^t (\tilde{\mathbf{T}}^{k+i} - \mathbf{V}\mathbf{Z}^{k+i}(\mathbf{B}^{k+1}, \dots, \mathbf{B}^{k+i}))\end{aligned}\tag{4.31}$$

La méthode des pas de temps futurs consiste à écrire r relations donnant les r états pour les r pas de temps suivants à l'instant t_k en ayant considéré une source constante (mêmes

coefficients $\mathbf{B}_{i=1,\dots,r}^{k+i} = \mathbf{B}^{k+1}$, hypothèse dite H_k) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}^{k+1} &= E^{k+1}\mathbf{Z}^k + \Delta t E^{k+1}\mathbf{B}^{k+1} \\
 \mathbf{Z}^{k+2} &= \prod_{i=1}^2 E^{k+i}\mathbf{Z}^k + \Delta t E^{k+2}(E^{k+1} + \mathbf{I})\mathbf{B}^{k+1} \\
 \mathbf{Z}^{k+3} &= \prod_{i=1}^3 E^{k+i}\mathbf{Z}^k + \Delta t E^{k+3}(E^{k+2}(E^{k+1} + \mathbf{I}) + \mathbf{I})\mathbf{B}^{k+1} \\
 &\vdots \\
 &r \text{ pas}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

En substituant la condition $\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^{k+2} = \dots = \mathbf{B}^{k+r}$ dans le critère (4.31), on obtient l'optimisation au sens des moindres carrés ci-dessous :

$$J(\mathbf{B}^{k+1}) = \|\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|^2 = \sum_{i=1}^r (\tilde{\mathbf{T}}^{k+i} - \mathbf{V}\mathbf{Z}^{k+i}(\mathbf{B}^{k+1}))^t (\tilde{\mathbf{T}}^{k+i} - \mathbf{V}\mathbf{Z}^{k+i}(\mathbf{B}^{k+1})) \tag{4.33}$$

Rappelons que les états sont définis par (4.32). La minimisation de ce critère pour les \mathbf{B}^{k+1} (non explicitée ici) conduit à une expression matricielle formelle permettant de les calculer (fonction des r températures mesurées $\tilde{\mathbf{T}}^{k+i}, i = 1 \dots r$ et de l'état \mathbf{Z}^k). La démarche ayant été adoptée dans le travail de thèse de N. Renault, nous renvoyons pour les détails à la référence [29].

4.1.3 Résultats numériques

Les conditions limites imposées aux bords du domaine durant la simulation directe sont de type mixte (Robin ou Fourier). On a pris les valeurs suivantes : coefficients d'échange $h_1 = 0.1W/(cm^2 \cdot K), h_2 = 0.02W/(cm^2 \cdot K)$, composante de vitesse constante $v_0 = 0.02cm/s$, taille de maillage spatial $N = 400$, pas de temps $\Delta t = 0.1s$ et la température initiale $T_0 = 0K$.

Pour la composante de vitesse, deux cas ont été considérés :

- vitesse constante $v_0 = 0.02cm/s$
- vitesse variable en espace et en temps. Pour "coller" à la réalité des champs cinématiques caractérisés expérimentalement, on adopte la formule suivante :

$$v(X, t) = 0.1 * t/t_f * \tanh(t/t_f * 3 * (X - L/2)). \tag{4.34}$$

Cette forme mathématique a été déterminée de manière à correspondre aux mesures réelles effectuées par **DIC** sur une éprouvette en cours de traction. Le problème complet est formulé en grandeurs adimensionnelles (Péclet, Biot, Fourier) qui permettent de garantir la similitude du problème étudié avec les cas pratiques envisagés.

Dans le processus d'inversion, un bruit synthétique (aléatoire) est superposé au résultat du calcul direct pour simuler des températures mesurées bruitées. Il est donc additif, à distribution gaussienne, de moyenne nulle et d'écart-type σ . En présence d'un rapport Signal

sur Bruit (ou SNR selon l'acronyme anglosaxon) non infini, la qualité de la reconstruction de la source ne peut être que dégradée (perte de l'unicité de la solution notamment). Le principe même d'une approche spectrale, séparant les variables de temps et d'espace, conduit à une régularisation du problème inverse en agissant sur deux "leviers". Considérer un nombre de modes réduits (noté par N_m) permet de régulariser la solution vis-à-vis de la reconstruction spatiale. La méthode des temps futurs va permettre de lisser l'effet du bruit sur un nombre fini de pas de temps successifs n_{tf} .

Cas-test 1 : Source stationnaire

Idéalement, une fonction avec des points de discontinuité peut être approchée par une infinité de modes dans la base de décomposition de l'opérateur propre. Au cas où les signaux ne sont pas bruités, nous observons donc en premier lieu la capacité de reconstruction avec un grand nombre de modes. Les figures (4.1)-ab représentent la source reconstruite avec $N_m = 20/100$ modes diffusifs. Bien entendu, aucune régularisation temporelle est effectuée (i.e. $n_{tf} = 1$). L'inversion correspond alors à l'application d'un schéma implicite. Nous observons aussi que l'erreur d'estimation se concentre principalement au point de discontinuité, qu'elle diminue lorsque le nombre de modes N_m augmente.

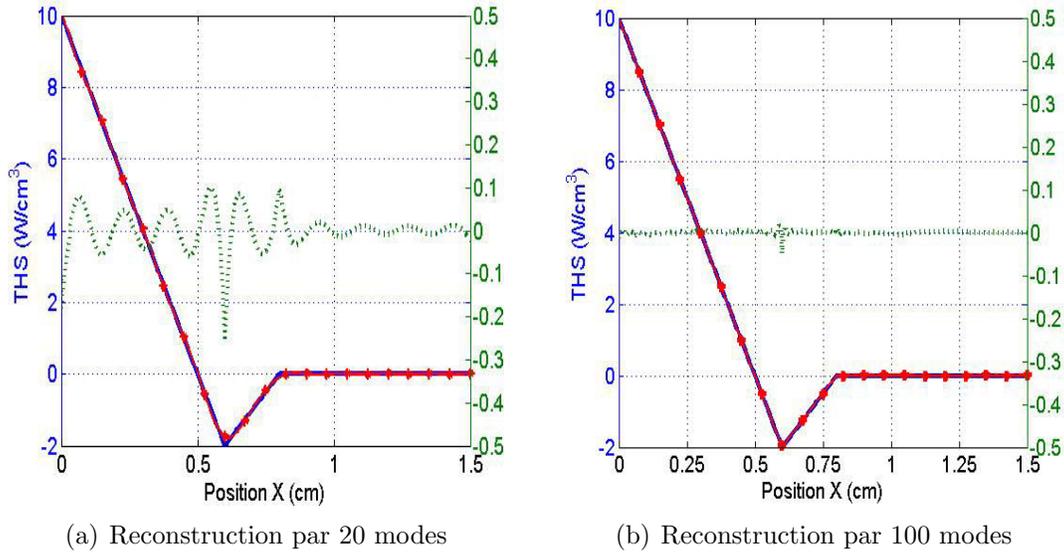


FIGURE 4.1 – Profils de THS exacte ('-'), reconstruite ('*'), et des résidus ('.') - cas sans bruit, $t = 10s$

En présence d'un bruit gaussien, la régularisation spatiale est obtenue en tronquant le nombre de modes de décomposition. Afin de choisir l'ordre de troncature N_m optimal, on définit deux critères. La recherche s'arrête lorsque l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. Premier critère : basé sur la norme des résidus entre vecteur d'observables \tilde{T} et vecteur de données filtrées $T_{filtering}$, obtenu par projection des données observables sur une

base de dimension N_m . Formellement, le critère s'écrit :

$$\tau_{N_m} = \sqrt{\|\tilde{T} - T_{filtering}\|^2 / (N + 1)} < m\sigma \quad (4.35)$$

où m est une constante ajustable (> 1). Il convient de déterminer l'ordre minimal N_m tel que les résidus passent sous le niveau de bruit. C'est un critère de "Discrepancy Principle". On ne peut prétendre obtenir des résidus qui soient sous le niveau de bruit des données originales, que l'on peut aussi introduire par : on ne prend pas les modes dont la fréquence spatiale sert à ajuster le modèle au bruit de mesure.

2. Second critère : le nombre de modes minimum est retenu, lorsque deux choix successifs de nombre de modes conduisent à une différence très faible de la norme des résidus. On a donc :

$$(\tau_{N_m} - \tau_{N_m+1}) / \tau_{N_m} < \varepsilon \quad (4.36)$$

où ε est une tolérance.

Pour quantifier l'influence du bruit par rapport aux mesures, nous introduisons également le "Signal to Noise Ratio" (SNR) qui est défini comme suit :

$$\text{SNR} = \frac{\max\{T\}}{2\sigma} \quad (4.37)$$

On donne aussi la définition de l'erreur relative d'estimation :

$$e = \frac{\|\hat{q} - q_{exact}\|}{\|q_{exact}\|} \quad (4.38)$$

Les figures (4.2), (4.4) correspondent aux résultats d'inversion obtenus pour un cas test avec les conditions suivantes : bruit $\sigma = 0.1K$ (SNR= 87.5) ; nombre de modes $N_m = 14$ déterminé par les critères (4.35), (4.36) avec $m = 1.06$ et $\varepsilon = 0.12\%$; nombre de pas de temps futurs $n_{tf} = 10$ (2.5% du temps total).

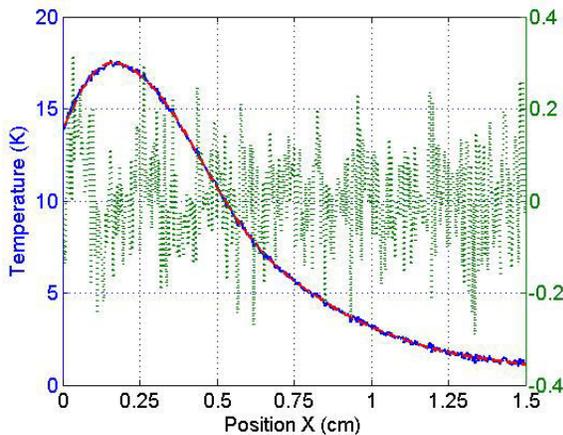


FIGURE 4.2 – Profils de Température synthétique (bleu), recalculée (rouge) et résidus (vert) - $\sigma = 0.1K$, $t = 10s$

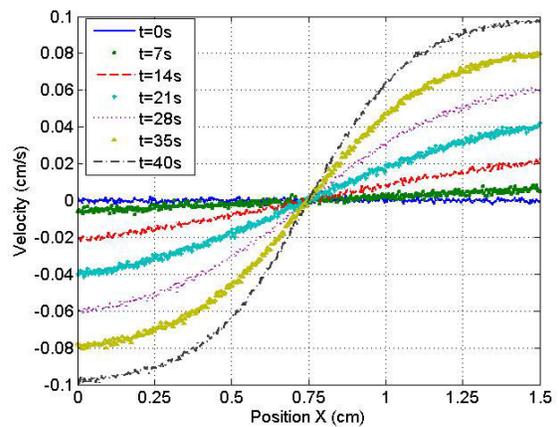


FIGURE 4.3 – Champ de vitesse temporel bruité (2% de MAX(v))

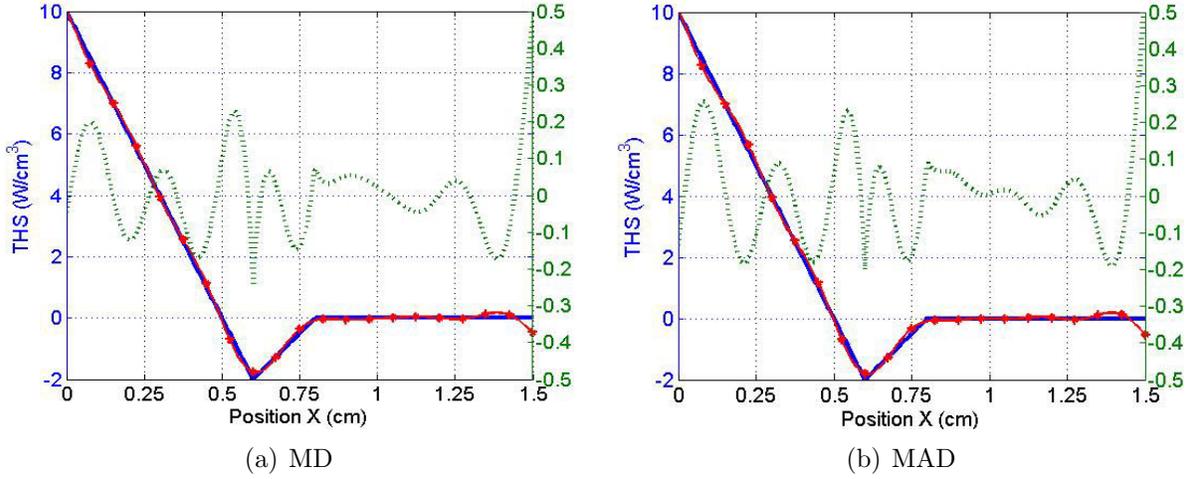


FIGURE 4.4 – Profils de THS exacte (“-”), reconstruite (“*”) et des résidus (“.”) par MD ou MAD - $t = 10s$

L'écart-type sur les résidus dans la figure (4.2) est atteint au niveau attendu avec l'ordre optimal de troncature identifié à $N_m = 14$ ($\sigma_{realized} = 0.1055$ pour MD, $\sigma_{realized} = 0.1069$ pour MAD). Les performances de filtrage pour les deux types de modes de branche sont identiques. La fig.4.4a montre la source reconstruite à partir des modes de branche diffusifs purs, la fig.4.4b à partir des modes de branche advectif-diffusifs. Dans les deux cas, les résidus d'identification sur le profil de température sont identiques et correspondent à ceux présentés en Fig.4.2. Les commentaires qu'appellent les précédentes figures sont les suivants :

- i Les résidus d'identification (Fig.4.2) apparaissent comme non signés et leur écart-type correspond à l'écart-type du bruit introduit en entrée sur les profils de température générés par le calcul direct. On peut donc qualifier la reconstruction de non biaisée.
- ii La source reconstruite correspond très bien à la source exacte imposée dans le calcul direct que ce soit en utilisant les modes diffusifs purs ou advectif-diffusifs. Les erreurs maximales se localisent au point de discontinuité (en $X = 0.6m$) et aux bords du domaine. L'erreur au point de discontinuité est moindre (très légèrement) en utilisant les MAD.
- iii L'écart moyen approximatif entre source exacte et source reconstruite est dans les deux cas inférieur à 2.5%. Il est légèrement plus important pour MAD ce qui peut être imputé à une précision moindre au niveau du respect de la condition de l'orthogonalité pour ce type de modes.

Les mêmes simulations sont reproduites pour un bruit de $\sigma = 0.2K$ ($SNR \approx 44$) afin d'analyser l'influence du bruit. En gardant le même nombre de modes et de temps futurs ($N_m = 14$, $n_{tf} = 10$), l'écart-type des résidus reste conforme aux objectifs attendus $\sigma_{realized} = 0.2023$ pour MD, et $\sigma_{realized} = 0.2030$ pour MAD. Les sources reconstruites sont présentées dans les figures (4.5). L'écart moyen approximatif entre source exacte et source reconstruite est dans les deux cas d'environ 5.0%. Le bruit ayant été multiplié par 2, l'erreur d'estimation sur la source apparaît être proportionnelle à l'amplitude du bruit.

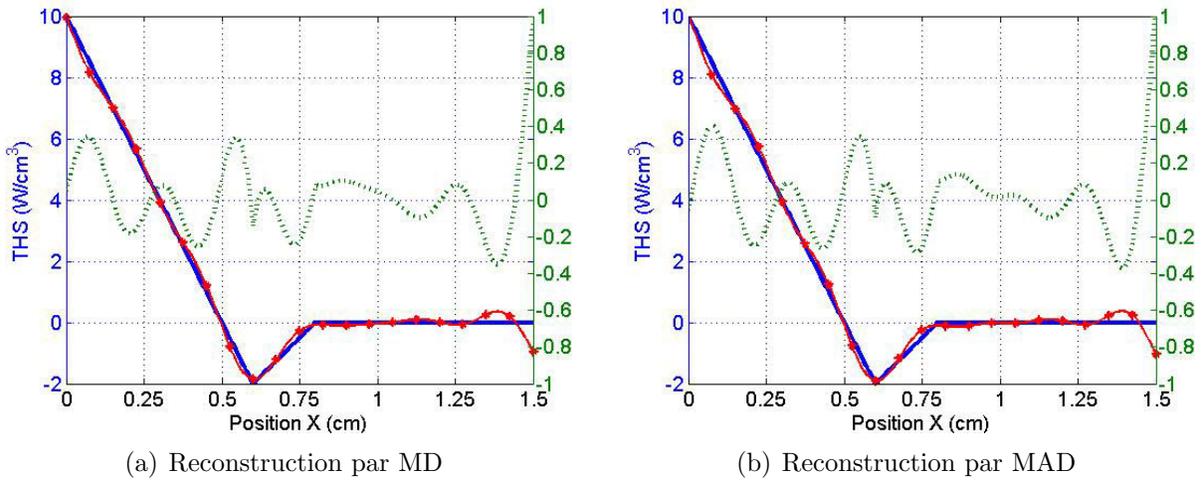


FIGURE 4.5 – Profils de THS exacte ('-'), reconstruite ('-*') et des résidus ('.') - $t = 10s$ par MD ou MAD

Remarquons que, dans ce cas test d'une source stationnaire en temps, l'augmentation du nombre de pas de temps futurs permet d'améliorer facilement la solution, car il n'y a plus d'effet de décalage en temps sur l'identification.

Cas-test 2 : Source non stationnaire

Rappelons que l'on considère une source de distribution gaussienne spatialement et de fluctuation sinusoïdale temporellement. Pour un bruit de $\sigma = 0.03K$ (SNR= 53.3), nous avons retenu les valeurs $m = 1.0005$ et $\varepsilon = 10^{-4}$ en termes de critères (4.35) et (4.36). Il convient de prendre $N_m = 8$ modes pour le filtrage en température. L'écart-type sur les résidus est de $\sigma_{realized} = 0.03002$ (Fig.4.6). L'erreur moyenne d'identification sur la source est de l'ordre 0.33% en considérant $n_{tf} = 10$ pas de temps futurs (Fig.4.7).

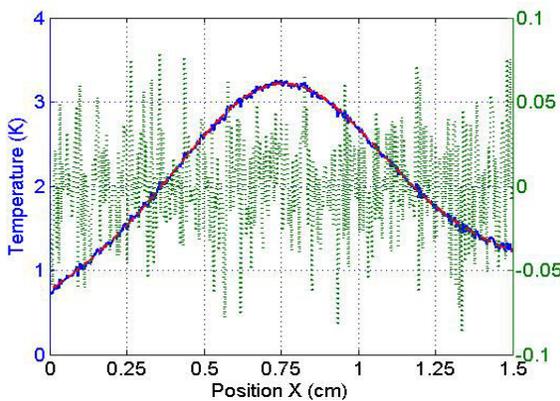


FIGURE 4.6 – Profil de température synthétique (bleu), température recalculée (rouge) et résidus (vert) - $\sigma = 0.03K$, $t = 10s$

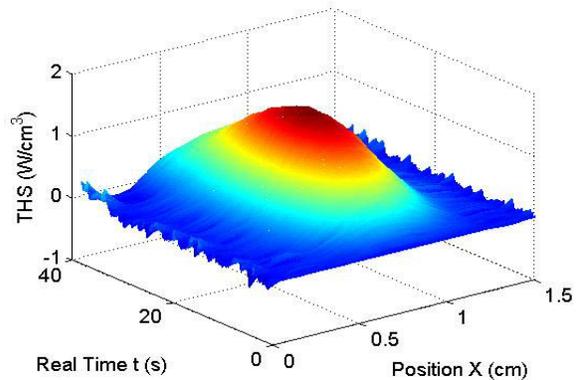


FIGURE 4.7 – Champs de THS identifiée par MD

Une comparaison des résultats en fonction du nombre de pas de temps futurs différents ($n_{tf} = 2$ ou 10) est également présentée et analysée ici. On trace les évolutions temporelles de sources en 6 points particuliers sur les figures (4.8). Cela nous permet de constater que l'augmentation du nombre de pas de temps futurs permet de lisser les profils de sources identifiées. Parallèlement, on introduit un biais dans la reconstruction qui se manifeste ici aux temps longs (décalage entre courbe théorique et reconstruite). Si les profils de sources varient doucement ou si on a pris un maillage temporel très fin, les méthodes de pas de temps futurs produisent des estimations satisfaisantes. Inversement des biais se manifestent par des variations temporelles brutales.

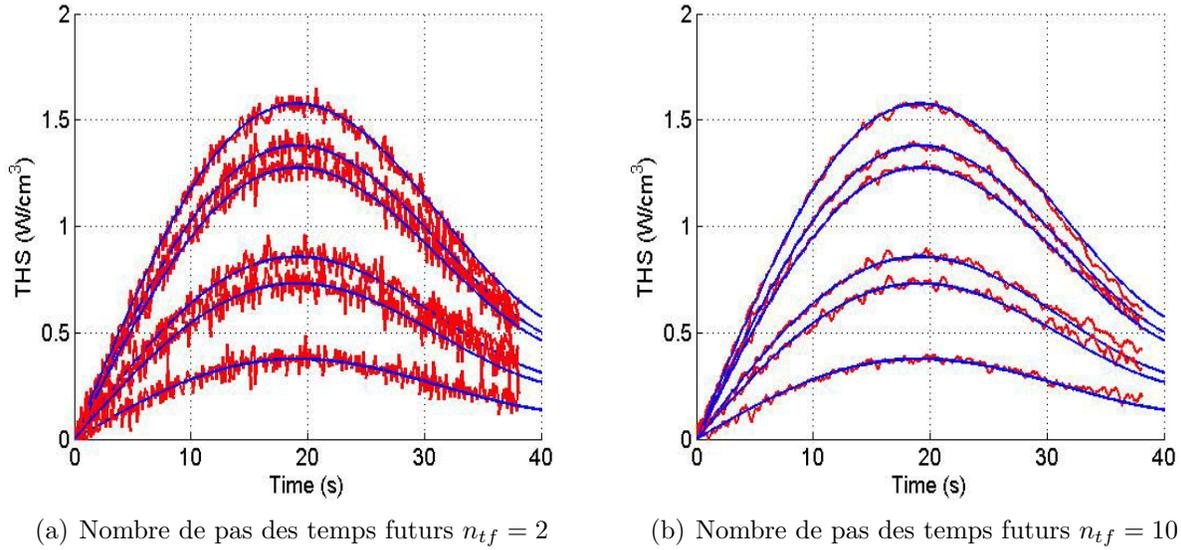


FIGURE 4.8 – Profils de THS exacte (bleu), reconstruite (rouge) par MD aux 6 points utilisant 2 ou 10 pas de temps futurs

Ce premier travail a permis d'appliquer une méthode spectrale basée sur les modes de branche pour reconstruire la source thermique dans un système de diffusion-advection. L'algorithme mis au point est très rapide. Nous présenterons des résultats portant sur la reconstruction d'une source variable temporellement et spatialement. La possibilité de combiner des techniques de régularisation différentes (SVD, pénalisation de Tikhonov...) avec la méthode présente sera vérifiée.

4.2 Tentative d'approche inverse par SVD

Au cours de cette thèse, nous avons voulu également envisager un algorithme permettant une identification préalable rapide du terme source pouvant tenir lieu d'initialisation ou de point d'appui pour la régularisation d'une approche inverse standard. D'une façon générique, un problème inverse linéaire peut se concevoir simplement à partir de l'écriture matricielle

$$Ax = b \tag{4.39}$$

où \mathbf{x} est un vecteur de paramètres inconnus, b un vecteur donné mais produit par des mesures. A s'appelle alors la matrice de sensibilité. Souvent la matrice A est très mal-conditionnée et son inversion conjuguée à la multiplication par un vecteur bruité conduit à des estimations fausses. Dans ce domaine de l'algèbre linéaire pur, l'outil le plus performant consiste à décomposer la matrice de sensibilité en valeurs singulières (technique SVD pour *Singular Value Decomposition*). Les travaux [70, 71, 72] ont mis en œuvre cette approche dans des problèmes de thermique. Sur le problème inverse de reconstruction de source, cette approche SVD a également été utilisée (Park et al [73], [74]). Il s'agissait de reconstruire des sources fonction du temps uniquement et des performances tout à fait correctes ont été obtenues avec une méthode inverse itérative (gradient conjugué standard).

4.2.1 Principe de la décomposition SVD ou KLD

Soit A une matrice de dimension $m \times n$, la décomposition en valeurs singulières de A s'écrit :

$$A = U * \Sigma * V^t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U & \text{matrice orthogonale de dimension } m \times m \\ \Sigma & \text{matrice d'homothétie de dimension } m \times n \\ V & \text{matrice orthogonale de dimension } n \times n \end{cases} \quad (4.40)$$

On rappelle que l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée et que le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1. Les colonnes des matrices U et V (vecteurs singuliers Gauche et Droit) sont de plus normalisées (leur norme vaut 1). Quant à la matrice d'homothétie, il s'agit d'une matrice rectangulaire diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs singulières de la matrice A . Il s'agit de valeurs scalaires positives ou nulles. Pour des questions pratiques, elles sont ordonnées dans un ordre décroissant. Dans chacun des espaces qui leurs sont associés, les vecteurs singuliers forment une base orthonormée.

Dans les problèmes inverses, l'approche SVD peut se retrouver à différents niveaux. Elle peut être utilisée par exemple directement pour transformer le problème des moindres carrés [54]. Ici, nous voulons considérer cette approche pour rechercher une base de décomposition optimale associée à l'opérateur différentiel qui agit sur la production du champ de température. Pour garantir une décomposition SVD unique, il faut alors travailler sur la décomposition de la matrice $A^t A$, dont les valeurs propres seront ses valeurs singulières et les vecteurs propres, ses vecteurs singuliers gauches. Cela revient à travailler sur la matrice de Gram [75] associée au signal de température qui correspond en fait à l'énergie du signal thermique.

L'espace $L^2(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable (au sens de Lebesgue), avec $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3).

Si la variable X est définie sur $[0, L]$ avec

$$\forall t > 0, \quad \int_0^L T^2(X, t) dX < \infty \quad (4.41)$$

alors $T(X, t) \in L^2[0, L]$.

Si nous munissons de plus l'espace $L^2(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\forall u, v \in L^2(\Omega) \quad \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{X})v(\mathbf{X})d\mathbf{X} \quad (4.42)$$

ce produit scalaire induit alors la norme $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2(\mathbf{X})d\mathbf{X}\right)^{1/2}$.

Muni de cette norme l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert sur lequel on travaille dans la partie 4.2. Introduisons aussi l'espace $L^2[0, \tau]$ avec τ l'horizon d'observation, on peut définir un produit scalaire de deux fonctions du temps f et g par

$$\forall f, g \in L^2[0, \tau] \quad \langle f, g \rangle_{L^2[0, \tau]} = \int_0^{\tau} f(t)g(t)dt \quad (4.43)$$

À ce stade, les fonctions températures sont définies dans $H = L^2[0, L] \times L^2[0, \tau]$ et dans cet espace il y a aussi un produit scalaire

$$\forall T, T' \in H \quad \langle T, T' \rangle_H = \int_0^{\tau} \int_0^L T(X, t)T'(X, t)dXd t \quad (4.44)$$

qui va introduire une norme sur H .

$$\forall H \quad \|T\|_H = \left(\int_0^{\tau} \int_0^L T^2(X, t)dXd t \right)^{1/2} \quad (4.45)$$

Ici, on introduit un opérateur linéaire W , dit de "Gram", défini par $W : H \longrightarrow L^2[0, L] \times L^2[0, L]$

$$W(X, X') = \int_0^{\tau} T(X, t)T(X', t)dt \quad (4.46)$$

Il est facile de voir que cet opérateur est symétrique : $W(X, X') = W(X', X)$. Par ailleurs, $W(X, X')$ est un opérateur dont on sait qu'il est compact et positif sur H . Notons \mathcal{L} l'opérateur à noyau $W(X, X')$ défini par $\forall u \in L^2[0, L]$, $\mathcal{L}(u) = \int_{\Omega} W(X, X')u(X')dX'$. Remarquons que nous sommes dans le cas d'un opérateur \mathcal{L} à noyau qui est un endomorphisme de Hilbert-Schmidt.

On rappelle que l'opérateur $W(X, X')$ est dit positif, lorsque, pour toutes les fonctions non nulles $u \in L^2[0, L]$, on a l'inégalité suivante :

$$\langle \mathcal{L}(u), u \rangle_{L^2[0, L]} = \int_0^L \int_0^L W(X, X')u(X)u(X')dXdX' > 0 \quad (4.47)$$

Le théorème spectral (annexe.A.1) démontre que si \mathcal{L} est un opérateur compact et positif, il existe une famille orthogonale complète de fonctions propres $\{V_m(X)\}_{m=1, \dots, \infty}$ associées à \mathcal{L} dans H . A chaque fonction propre est associée une valeur singulière réelle positive de sorte que : $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots > 0$. Les valeurs propres et les fonctions propres de \mathcal{L} sont naturellement définies par

$$\mathcal{L}(V_m) = \int_0^L W(X, X')V_m(X')dX' = \sigma_m^2 V_m(X) \quad (4.48)$$

avec la condition d'orthogonalité

$$\langle V_i(X), V_j(X) \rangle_{L^2[0, L]} = \int_0^L V_i(X)V_j(X)dX = \delta_{ij} \quad (4.49)$$

Dans le cas d'opérateurs de Hilbert-Schmidt à noyau, le théorème de diagonalisation de Mercer (voir annexe.A.1) permet de décomposer le noyau sur les mêmes modes que ceux associés à \mathcal{L} .

$$W(X, X') = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 V_i(X) V_i(X') \quad (4.50)$$

De plus, toutes les fonctions de l'espace H peuvent se projeter de manière unique dans la famille des fonctions propres de \mathcal{L} , car $\{V_i(X)\}_{i \in \mathbb{N}}$ est un ensemble complet (une base) dans H . Donc $\forall t, T(X, t) \in H$, nous pourrions écrire :

$$\forall t, \quad T(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(X) z_i(t), \quad (4.51)$$

où les coefficients d'état (coefficients de la décomposition) sont donnés par

$$z_i(t) = \langle T(X, t), V_i(X) \rangle_{L^2[0, L]} \equiv \int_0^L T(X, t) V_i(X) dX \quad (4.52)$$

Compte tenu de (4.50) et (4.51), les coefficients d'état vérifient également l'orthogonalité :

$$\langle z_i(t), z_j(t) \rangle_{L^2[0, \tau]} = \int_0^{\tau} z_i(t) z_j(t) dt = \delta_{ij} \sigma_j^2 \quad (4.53)$$

Enfin, les racines carrées des valeurs propres de \mathcal{L} sont les valeurs singulières de $T(X, t)$. L'équation (4.51) permet donc, comme pour la section 4.1, d'envisager une décomposition du signal en température sur une nouvelle base dite SVD (ou KLD). On sait par ailleurs que cette décomposition est très efficace pour isoler les modes dominants de tout processus physique (associés aux valeurs singulières les plus fortes). Ceci en fait un outil très utilisé en traitement de signal pour la compression et la réduction du bruit de grandes quantités de données [76]. Il est important ici de bien prendre conscience du fait que cette base modale n'est pas intrinsèque à l'opérateur mais correspond à une réalisation particulière du transfert selon des conditions expérimentales bien spécifiques. Rappelons qu'ici nous voulons juste tester l'aptitude de l'approche SVD à fournir une information a priori sur la source par une méthode directe d'estimation.

Une approximation de dimension r de $T(X, t)$ est accomplie à l'aide d'une troncature en modes dans l'éq.(4.51) avec les r premiers modes, soit

$$\forall t, \quad T_r(X, t) = \sum_{i=1}^r V_i(X) z_i(t). \quad (4.54)$$

L'erreur d'approximation est

$$\forall t, \quad e_r(X, t) \equiv T(X, t) - T_r(X, t) = \sum_{i=r+1}^{\infty} V_i(X) z_i(t) \quad (4.55)$$

Grâce à l'orthogonalité des modes $\{V_i(X)\}$ et des états $\{z_i(t)\}$, on en déduit que

$$\|e_r\|^2 \equiv \int_0^{\tau} \int_0^L e_r^2(X, t) dX dt = \sum_{i=r+1}^{\infty} \sigma_i^2 \quad (4.56)$$

Comme $\|T(X, t)\|^2 < +\infty$ (Eq.4.41), l'erreur d'approximation tend vers zéro : $\lim_{r \rightarrow \infty} \|e_r\|^2 = 0$.

Concernant le caractère filtrant du processus SVD/KLD, il a été prouvé que la présence d'un bruit spatialement non corrélé n'affecte pas les modes singuliers mais n'introduit d'effets que sur les états [75]. Si l'on écrit

$$\tilde{T}(X, t) = T(X, t) + \varepsilon(X, t), \quad (4.57)$$

que l'on suppose le bruit $\varepsilon(X, t)$ indépendant de $T(X, t)$:

$$\forall X, X' \quad \int_0^\tau \varepsilon(X, t)T(X', t)dt = 0 \quad (4.58)$$

et non corrélé

$$\forall X, X' \quad W_\varepsilon(X, X') = \int_0^\tau \varepsilon(X, t)\varepsilon(X', t)dt = \sigma_\varepsilon^2 \delta(X - X') \quad (4.59)$$

où

$$\delta(X - X') = \begin{cases} 1, & X = X' \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

l'expression de l'énergie associée aux mesures s'écrit alors :

$$\tilde{W}(X, X') = W(X, X') + W_\varepsilon(X, X') = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(X)\tilde{\sigma}_i^2 V_i(X') \quad (4.60)$$

avec

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \sigma_i^2 + \sigma_\varepsilon^2 \delta(X - X')$$

Les fonctions propres restent bien exemptes de toute perturbation liée au bruit et on a

$$\tilde{T}(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(X)\tilde{z}_i(t). \quad (4.61)$$

Les états bruités sont obtenus par

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i(t) &= \int_0^L \tilde{T}(X, t)V_i(X)dX \\ &= \int_0^L T(X, t)V_i(X)dX + \int_0^L \varepsilon(X, t)V_i(X)dX = z_i(t) + \gamma_i(t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

où $\gamma_i(t)$ est la projection orthogonale du bruit sur $V_i(X)$.

$$\forall i, \quad \sigma_{\varepsilon, i}^2 \equiv \int_t \gamma_i^2(t)dt = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.63)$$

Une simple troncature sur le nombre de modes agit comme un filtrage des données expérimentales. On peut montrer que le ratio des rapports Signal/Bruit sans et avec troncature est

plus petit que 1, i.e. que les SNR sont améliorés par troncature sur les observations [77]. Il ne faut pas toutefois que cette troncature biaise le signal (modifie sa forme originelle). Un filtrage optimal conduisant à l'écart minimal entre données ainsi filtrées et le modèle $\|T(X, t) - T_{optimal}\|^2$ a été proposé par [78], qui repose sur le théorème de Wiener. Il consiste à considérer que le champ optimal des données expérimentales filtrées est obtenu par

$$T_{optimal} = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(X) \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_\varepsilon^2} \tilde{z}_i \quad (4.64)$$

L'équation ci-dessus signifie qu'un poids optimal est appliqué aux états bruités en \tilde{z}_i qui dépend du rapport signal sur bruit (SNR) $\sigma_i^2/\sigma_\varepsilon^2$ dans la direction du vecteur $V_i(X)$. Un petit SNR conduira à une forte atténuation des valeurs des états $\tilde{z}_i(t)$. Nous avons retenu ce principe dans les applications numériques présentées ultérieurement.

4.2.2 Implémentation pratique

Dans la pratique, les mesures sont discrètes, donc les fonctions recherchées circonscrites à un espace de dimension finie. On définit la matrice de Gram associée aux mesures $\mathbf{T}(t)$ ($n \times 1$) comme :

$$\mathbf{W} \equiv \int_0^\tau \mathbf{T}(t) \mathbf{T}^t(t) dt \quad (4.65)$$

Cette matrice est de taille $n \times n$, symétrique et définie positive et n représente par exemple le nombre total de pixels d'une image IR. Les termes diagonaux de la matrice \mathbf{W} caractérisent l'énergie du signal en température et sa décomposition SVD produit l'ensemble de vecteurs orthonormés $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$, pour lesquels on a donc $\mathbf{V}^t \mathbf{V} = \mathbf{I}$. La décomposition spectrale s'écrit :

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{V}^t \quad (4.66)$$

où $\Sigma = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2]$.

En notation matricielle, les vecteurs température $\mathbf{T}(t)$ peuvent s'exprimer par combinaison linéaire sur les vecteurs propres de \mathbf{W} soit

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{V} \mathbf{Z}(t) \quad (4.67)$$

où $\mathbf{Z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^t$ est le vecteur des états associés. Une bonne pratique d'échantillonnage de $T(X, t)$ doit conduire à ce que les éléments de \mathbf{W} et les vecteurs propres associés soient assez proches de $W(X, X')$ et $V_m(X)$ au sens de leur approximation numérique.

4.2.3 Reconstruction de sources spatio-temporelles par SVD

Nous revenons à notre problème initial pour adapter cet algorithme et en tester les performances dans le cadre de nos cas tests (source spatio-temporelle). Cette méthode et les programmes Matlab que nous avons développé ont auparavant été testés sur un cas issu de la littérature, consistant à estimer des propriétés thermophysiques (diffusivités et

coefficients d'échange). Les résultats sont reportés dans l'annexe.B et valident nos calculs. Les simulations directes sont produites par les équations suivantes :

$$c \frac{\partial T}{\partial t}(X, t) = k \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}(X, t) - cv(X, t) \frac{\partial T(X, t)}{\partial X} + q(X, t) \quad (4.68)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial X}(0, t) = \varphi_1(t) \quad \text{et} \quad -k \frac{\partial T}{\partial X}(L, t) = \varphi_2(t) \quad (4.69)$$

$$T(X, 0) = T_0 \quad (4.70)$$

pour lesquelles les conditions limites considérées ici sont donc de type Neumann. Dans l'approche inverse, nous supposons que les fonctions flux φ_1 et φ_2 sont connues (correspondent à ce qui a été introduit dans le calcul direct). L'algorithme procède d'abord par une décomposition du champ de température expérimental sur les modes SVD, ces derniers étant obtenus numériquement par SVD de la matrice expérimentale de Gram (W). La source peut également être décomposée sur ces mêmes modes soit

$$T(X, t) = \sum_{i=1}^N V_i(X) z_i(t) \quad (4.71)$$

$$q(X, t) = \sum_{i=1}^N V_i(X) b_i(t) \quad (4.72)$$

Par produit scalaire avec chacun des modes $\langle \cdot, V_j \rangle$, et en profitant de la propriété d'orthogonalité des modes, le système (4.68) devient :

$$c \dot{z}_j(t) = k \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2}, V_j \rangle z_i(t) - c \sum_{i=1}^N \langle v(X, t) \frac{\partial V_i}{\partial X}, V_j \rangle z_i(t) + b_j(t) \quad (4.73)$$

Sur le plan du calcul, ces produits scalaires sur fonctions discrétisées reviennent à des opérations élémentaires de produits scalaires entre vecteurs. Par exemple, on écrira

$$\langle \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2}, V_j \rangle = \mathbf{V}_j^t L_{xx} \mathbf{V}_i \quad (4.74)$$

où L_{xx} est la matrice représentant l'opérateur de dérivée seconde par différence finie.

On peut donc calculer numériquement les états $\{b_j(t)\}$ de la décomposition de la source, en appliquant un schéma implicite pour discrétiser le jeu d'EDO en les états $z_j(t)$. En posant $t_k = k\Delta t$,

$$b_j(t_k) = c \frac{z_j(t_{k+1}) - z_j(t_k)}{\Delta t} - k \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2}, V_j \rangle z_i(t_{k+1}) + c \sum_{i=1}^N \langle v(X, t) \frac{\partial V_i}{\partial X}, V_j \rangle z_i(t_{k+1}) \quad (4.75)$$

Seuls les premiers modes sont utilisables, dont le nombre est déterminé en calculant le % d'énergie qu'ils contiennent par rapport au total et cela est corrélé avec le report amplifié du

bruit sur les états $z_j(t)$. Aux modes de faible énergie vont correspondre des états fortement perturbés par le bruit de mesure, qu'il convient donc de ne pas garder dans l'inversion.

Nous ne reportons ici que les résultats obtenus pour le cas-test 1 pour lequel la source est invariante en temps $q(x)$, continue mais de classe C_1 (Chapitre 3-Fig.3.2). On considère les conditions aux limites telles que $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (conditions adiabatiques). Nous arrivons aux mêmes observations avec le cas-test 2.

4.2.3.1 Sans Bruit

Dans un premier temps, nous donnons les résultats obtenus en l'absence de bruit additionné aux sorties "modèle". Les valeurs singulières obtenues sont reportées dans le tableau 4.1

| | Valeurs singulières | Contribution à l'énergie(%) |
|--------------|---------------------|-----------------------------|
| σ_1^2 | 14591560.8 | 97.85 |
| σ_2^2 | 315740.73 | 2.11 |
| σ_3^2 | 4327.46 | 0.029 |
| σ_4^2 | 31.08 | 0.0002 |
| σ_5^2 | 0.36 | 2.4E-06 |
| σ_6^2 | 0.0312 | 2.09E-07 |

TABLE 4.1 – Valeurs singulières et Distribution d'énergie

On peut constater que les 2 premiers modes propres captent plus de 99.96% de l'énergie totale du signal! Compte-tenu de leur graphe (Fig.4.11) il est clair qu'il sera impossible de reconstruire correctement la source sans en prendre d'autres en considération. Sur les figures (4.9) et (4.10), on observe que la source reconstruite à partir des 20 premiers modes est globalement bien reproduite et que les résidus en température par contre sont excellents et redonnent bien le niveau de bruit. L'interprétation en est simple : les modes singuliers de décomposition sont parfaitement "conçus" pour le champ de température qui a permis de les obtenir. Ce champ de température est la conséquence d'une cause, la source, qui, bien qu'elle puisse être décomposée sur ces mêmes modes, ne peut pas bénéficier de la même efficacité.

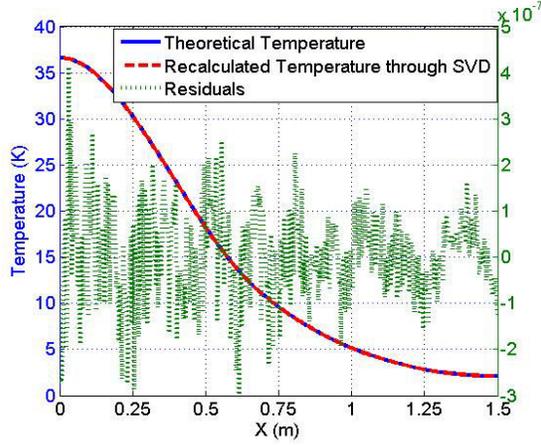
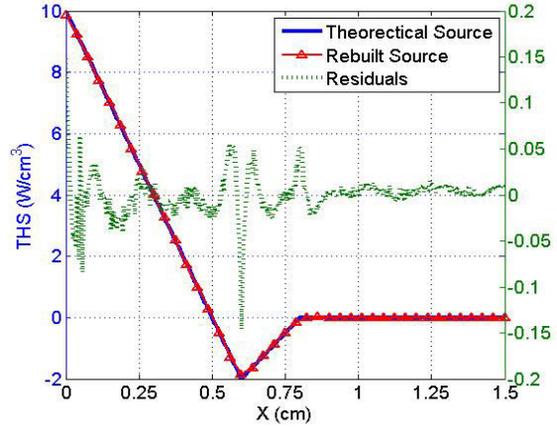
FIGURE 4.9 – Profil de Température exacte et recalculée - $t = 10s$ 

FIGURE 4.10 – THS reconstruite par 20 modes SVD

4.2.3.2 Cas Bruité

Dans un second temps, on ajoute un bruit synthétique de faible niveau ($\sigma = 0.01$). Les valeurs propres obtenues $\tilde{\sigma}_i^2$ et les écarts relatifs par rapport aux valeurs attendues $|(\tilde{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)/\sigma_i^2|$ sont reportées dans le tableau 4.2.

| | Valeurs singulières | Ecart relatif (%) |
|----------------------|---------------------|-------------------|
| $\tilde{\sigma}_1^2$ | 14591556.2 | 3.2e-05 |
| $\tilde{\sigma}_2^2$ | 315739.4 | 0.0004 |
| $\tilde{\sigma}_3^2$ | 4327.48 | 0.0005 |
| $\tilde{\sigma}_4^2$ | 31.097 | 0.05000 |
| $\tilde{\sigma}_5^2$ | 0.366 | 1.10 |
| $\tilde{\sigma}_6^2$ | 0.038 | 23.2 |

TABLE 4.2 – Valeurs singulières en présence de bruit sur l'observable et écart relatif par rapport aux valeurs attendues

On peut noter que pour les faibles valeurs singulières, l'écart relatif par rapport aux valeurs exactes augmente, confirmation de ce qui a été énoncé précédemment. Le bruit sur le signal se reporte sur les états et d'autant plus qu'ils représentent une fraction faible de l'énergie totale. Une comparaison des modes calculés numériquement est présentée dans les figures (4.11) et (4.12). On vérifie que le bruit reste sans influence sur le calcul des 4 premiers modes, et commence à se manifester sur les suivants.

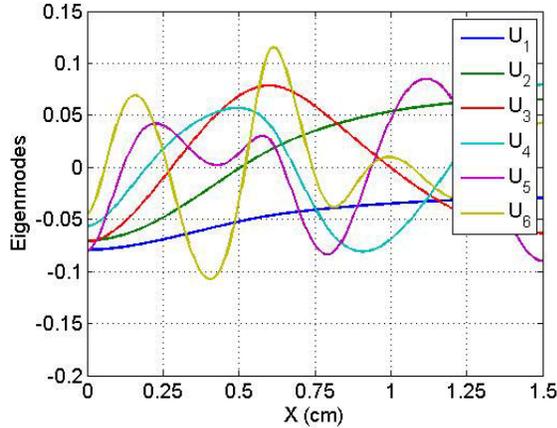
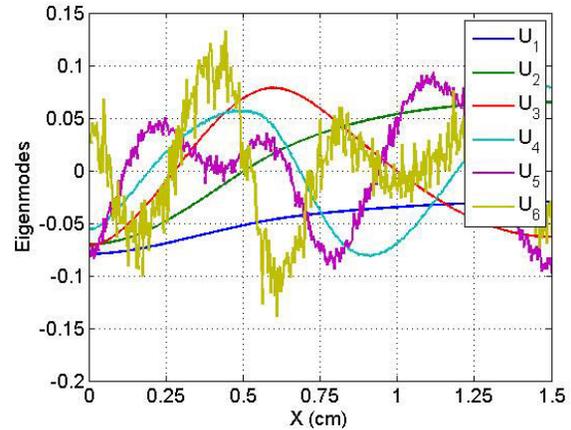


FIGURE 4.11 – Modes SVD sans bruit


 FIGURE 4.12 – Modes SVD avec un bruit de $\sigma = 0.01$

Ci-dessous, nous montrons les reconstructions obtenues pour deux niveaux de bruit différents avec une troncature à 5 modes (nombre optimum constaté) et 6 modes. Dans le cas d'un bruit $\sigma = 0.01$ (SNR=2550), la source est correctement reconstruite par 5 modes, exception faite de la discontinuité pour laquelle nous manquons de modes haute fréquence (Fig. 4.13a). Avec 6 modes, on observe (Fig. 4.13b) une nette dégradation de la reconstruction, qui ne rend même plus compte du comportement global de la source d'entrée. En multipliant le bruit d'un facteur 3 ($\sigma = 0.03$, SNR=850), les résultats se dégradent drastiquement (Fig. 4.14a) et avec 6 modes (Fig. 4.14b), il n'est tout simplement plus possible de reconstruire la source : la solution diverge. Selon le niveau de bruit, l'ajout d'un seul mode supplémentaire et de l'état bruité correspondant rend mal posé le calcul (4.75), principalement à cause de l'approximation des dérivées spatiales sur les modes et temporelles sur les états. Une approche avec pas de temps futurs a été implémentée mais est incapable d'améliorer les résultats. La figure (4.15) donnant les modes SVD/KLD obtenus pour le bruit de $\sigma = 0.03$ permettent de concevoir l'impact énorme de la troncature SVD sur la reconstruction et l'effet de seuil très net propre à cette technique.

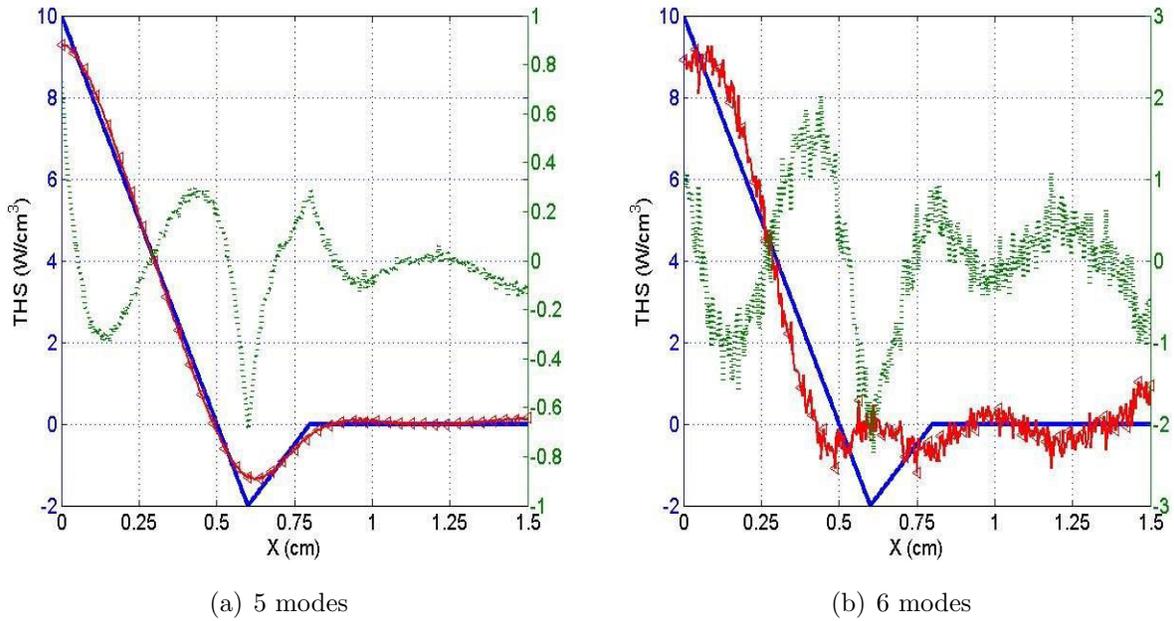


FIGURE 4.13 – Profils de Source Exacte ('-'), Reconstituée ('-◁') par 5 ou 6 modes et Résidus (':') - $\sigma = 0.01$

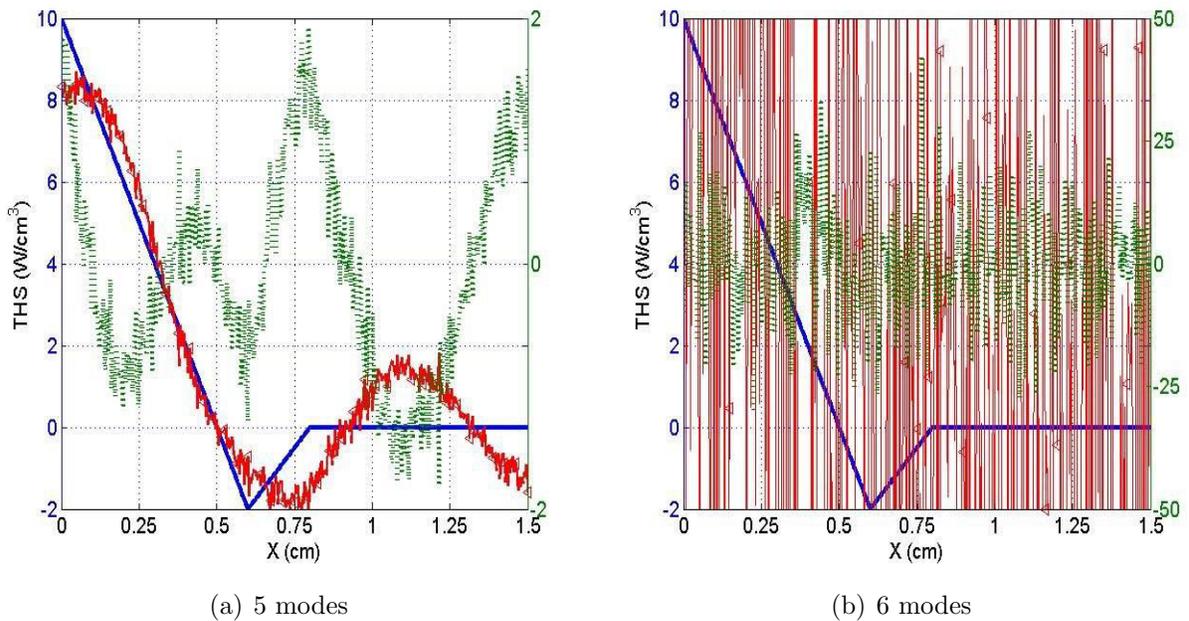
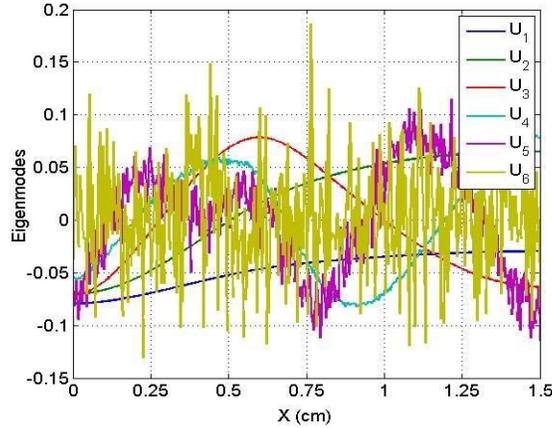


FIGURE 4.14 – Profils de Source Exacte ('-'), Reconstituée ('-◁') par 5 ou 6 modes et Résidus (':') - $\sigma = 0.03$

FIGURE 4.15 – Modes SVD avec un bruit de $\sigma = 0.03$

En conclusion, l’approche SVD a un potentiel évident et reconnu pour composer avec le caractère mal-posé des problèmes inverses et offrir un filtrage efficace des données garantissant une reconstruction correcte d’un vecteur de paramètres inconnus. Nous avons donc voulu voir ce que la technique pouvait apporter sur l’aspect reconstruction de sources. Nos observations, à l’issue de nos essais numériques, est que le terme source étant par nature passif vis-à-vis de l’opérateur de transfert de chaleur, on en perd sa trace en retenant, pour le décomposer, les modes filtrant du champ de température. C’est pour cela par exemple que la technique SVD s’avère extrêmement performante pour identifier 2 paramètres distincts de diffusivité thermique dans deux directions de l’espace qui marquent fortement l’observable produit dans le processus dynamique de transfert [A.2](#). Cela se traduit mathématiquement par un effet de concentration de l’énergie totale du signal sur les premiers modes, dont l’intérêt se limite à notre avis à la reconstruction d’informations globales. On ne pourra prétendre, par cette méthode, rivaliser avec les méthodes inverses standard. Par contre, l’efficacité de la méthode pour retrouver un comportement global de source et son extrême rapidité en temps de calculs font qu’il est indispensable de l’utiliser à des fins d’initialisation d’un algorithme inverse, plus à même de “terminer” le travail de reconstruction en améliorant la précision.

4.3 Méthode itérative de reconstruction

Dans ce troisième travail, nous répondons à l’objectif initial de développer une méthode inverse itérative pour être en mesure de voir si cela présente un intérêt pour résoudre notre problème en comparaison de la méthode séquentielle. Pour revenir sur les remarques formulées au chapitre 1 liées à la possibilité de mixer les recettes dans la résolution de problèmes inverses, nous combinons ici trois mécanismes de régularisation :

- Dans une méthode itérative, chaque itération du processus que nous allons mettre au point va produire une nouvelle solution du problème inverse, qui doit converger vers une solution finale. Par essence, le processus d’approximation est l’itération elle-même. La régularisation est obtenue en arrêtant ce processus au “bon” moment : le paramètre de régularisation est simplement l’itération d’arrêt [79]. La méthode itérative que nous

avons mise en œuvre est la méthode dite du gradient conjugué (CGM pour *Conjuguate Gradient Method*).

- Le problème inverse est bâti sur un critère que l'on doit minimiser sur l'ensemble complet des données (différence avec l'approche séquentielle). Ce critère peut être complété par un terme de pénalisation (régularisation de Tikhonov) pour tenir compte d'une information a priori (source globalement identifiée par la technique SVD exposée en 4.2.1 par exemple). La méthode itérative revêt par ailleurs un intérêt particulier quand elle est associée à une formulation du critère basée sur l'état adjoint et l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, méthode standard en optimisation.
- Enfin, notre approche spectrale du modèle direct laisse encore la possibilité d'une régularisation dans un sous-espace (quasi-solution). De plus la formulation du problème en termes d'EDO sur les états associés à des modes de décomposition peut permettre d'assimiler notre problème à un problème inverse de contrôle optimal (source optimale de chaleur conduisant à la "trajectoire" mesurée du champ de température). Ceci nous a permis pendant la thèse de profiter de résultats mathématiques bien établis.

Nous terminerons ce chapitre en proposant une amélioration de la méthode CGM inspirée des idées du paragraphe 4.2.1.

4.3.1 Principe de la formulation adjointe

L'équation (4.29) en section 4.1 montre que l'approche spectrale conduit à un problème typique des problèmes déterministes de contrôle optimal que l'on redonne ici avec des notations génériques. Étant donné $\mathbf{Z}(t)$ un vecteur de n_z fonctions d'état définies dans l'espace de Hilbert H et continues en temps t , et $\mathbf{U}(t)$ la sollicitation (le contrôle), vecteur à n_u composantes dans l'espace de contrôle \mathcal{U} , l'équation différentielle associée au système dynamique s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t)), \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \quad (4.76)$$

Notons que la fonction f peut être non linéaire et dépendre explicitement du temps. La fonctionnelle de coût associée au problème de contrôle optimal est établie de manière à rendre minimum un coût cumulé instantané $C(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))$ sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ et un coût terminal $S(\mathbf{Z}(t_f))$ (forme dite de *Bolza*, [80]), c-à-d

$$J(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))(\mathbf{z}_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} C(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))dt + S(\mathbf{Z}(t_f)) \quad (4.77)$$

Par analogie avec l'écriture issue de la mécanique classique, le coût instantané correspond au *Lagrangien*, i.e. $L(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t)) = C(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))$. La fonctionnelle J fait aussi apparaître une dépendance directe aux données initiales (\mathbf{z}_0, t_0) . L'identification de \mathbf{U} dans son espace d'états \mathcal{U} passe par la recherche du minimum de coût

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{Z}_0, t_0) = \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} [J(\mathbf{Z}, \mathbf{U})(\mathbf{Z}_0, t_0)] \quad (4.78)$$

soumis au problème à valeurs initiales (4.76). Si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{n_u}$, ce problème d'optimisation est dit "sans contraintes". Dans le cas où l'on souhaite rechercher une solution optimale en

respectant une ou plusieurs contraintes, la voie classique consiste à fabriquer un critère composite qui impose le respect de la dynamique suivie par les états en toutes circonstances (à tout instant et quelles que soient les valeurs de contrôle). C'est la méthode de Lagrange ou de l'état adjoint. Le nouveau critère s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}
 J_\mu(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))(\mathbf{Z}_0, t_0) &= \int_{t_0}^{t_f} C(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))dt + S(\mathbf{Z}(t_f)) \\
 &+ \int_{t_0}^{t_f} \mu^t(t)(\dot{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{f}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t)))dt
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

où $\mu(t)$ est le vecteur des *multiplicateurs de Lagrange* de dimension n_z , appelé aussi vecteur des *états adjoints* ou des *co-états*. Il est clair que nous devons considérer les variables \mathbf{Z} , \mathbf{U} et μ comme indépendantes. On supposera par ailleurs la continuité des dérivées d'ordre 1 de $J_\mu(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))$ en \mathbf{Z} , \mathbf{U} , μ . La solution optimale \mathbf{U}^* au problème de minimisation associé à (4.79) est obtenue en cherchant à vérifier la stationnarité de $J_\mu(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t))$ soit les conditions

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial J_\mu}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial J_\mu}{\partial \mu} = 0 \tag{4.80}$$

Ceci conduit aux équations dites de Hamilton dont l'obtention peut être trouvée dans tous les textes classiques [81, 82] et fait appel aux théorèmes fondamentaux en calcul des variations. Elle est référencée en théorie du contrôle optimal sous le théorème de Pontryagin. Le hamiltonien étant défini par

$$\mathcal{H}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t), \mu(t)) \equiv C(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t)) + \mu^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{U}(t)) \tag{4.81}$$

la première condition de stationnarité conduit à (pour $t_0 < t \leq t_f$)

$$\frac{d\mathbf{Z}^*}{dt}(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} \right)^* \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} \right) (\mathbf{Z}^*, \mathbf{U}^*, \mu^*) = \mathbf{f}(\mathbf{Z}^*(t), \mathbf{U}^*(t)) \tag{4.82}$$

Elle ré-affirme donc que l'équation dynamique est vérifiée pour le contrôle optimum et que l'intervention du multiplicateur de Lagrange optimal ne perturbe pas cette contrainte. La seconde condition de stationnarité conduit à (pour $t_0 \leq t < t_f$)

$$-\frac{d\mu^*}{dt}(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Z}} \right)^* \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Z}} \right) (\mathbf{Z}^*, \mathbf{U}^*, \mu^*) = \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{Z}} + \frac{\partial \mathbf{f}^t}{\partial \mathbf{Z}} \mu \right)^* \tag{4.83}$$

C'est l'équation dite d'Euler-Lagrange ou du problème adjoint, à satisfaire par le multiplicateur de Lagrange optimal et qui est à résoudre de manière rétrograde en temps. La troisième condition de stationnarité

$$0 = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{U}} \right)^* \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{U}} \right) (\mathbf{Z}^*, \mathbf{U}^*, \mu^*) = \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{f}^t}{\partial \mathbf{U}} \mu \right)^* \tag{4.84}$$

traduit la condition d'optimalité recherchée sur le contrôle.

Les équations (4.82,4.83) forment un problème à valeurs initiale et finale. Des conditions finales (dites conditions de transversalité) viennent fermer le problème et dépendent des cas

considérés (donc du problème) : t_f fixé ou libre ; $\mathbf{Z}(t_f) = \mathbf{Z}_f$ fixé ou libre. Pour ne pas rentrer dans les détails, nous indiquerons que la condition que nous avons retenue en pratique dans notre algorithme est celle d'un temps final et d'un état associé fixés. Ces démonstrations font également partie du corpus du théorème de Pontryagin. En résumé, on peut trouver la commande optimale grâce à (4.84) qui nécessite de connaître le multiplicateur de Lagrange donc de résoudre conjointement le système (4.82,4.83).

4.3.2 Formulation adjointe appliquée à notre problème

On applique maintenant ces principes généraux au problème discuté au paragraphe 4.1. On rappelle que la source et la variable température sont décomposées sur une base de modes propres de dimension finie (N_m) associés à l'équation de transport de chaleur.

$$T(X, t) = \sum_{i=1}^{N_m} V_i(X) z_i(t) \quad (4.85)$$

$$q(X, t) = \sum_{i=1}^{N_m} V_i(X) b_i(t) \quad (4.86)$$

L'objectif consiste à reconstituer la sollicitation q en identifiant un sous ensemble des fonctions du temps $\mathbf{B}(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^{N_m}$. Pour cela nous disposons d'enregistrements de la température ainsi que d'un modèle permettant de calculer l'état thermique du système.

Indépendamment de la base spectrale retenue, le modèle se ramène à un système d'équations d'états de dimension N_m , qui s'écrit sous forme matricielle de manière identique au problème de contrôle optimal pour les systèmes dynamiques :

$$\begin{aligned} C\dot{\mathbf{Z}}(t) &= A(t)\mathbf{Z}(t) + M(t) + D\mathbf{B}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{B}(t)) \\ \mathbf{Z}(0) &= \mathbf{Z}_0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t) &= (z_1(t), z_2(t), \dots, z_{N_m}(t))^t : N_m \times 1 \\ \mathbf{B}(t) &= (b_1(t), b_2(t), \dots, b_{N_m}(t))^t : N_m \times 1 \end{aligned}$$

Par comparaison au système mis en évidence pour les modes de branche (Eqs.4.8,4.1), les matrices de capacité C et de diffusion-convection A sont à coefficients réels et de dimensions : $\dim C = \dim A = N_m \times N_m$. La matrice C est symétrique définie positive. La matrice A n'est pas symétrique du fait de la présence du terme de transport advectif. La matrice M de dimension $N_m \times 1$ fait intervenir les conditions aux limites du problème. La matrice D de dimension $N_m \times N_m$ fait intervenir les produits scalaires des modes. Elle correspond à l'identité I si les modes sont orthogonaux. La projection des observables expérimentaux sur l'ensemble de base $\mathbf{V}(X) = (V_1(X), V_2(X), \dots, V_{N_m}(X)) : 1 \times N_m$, permet d'obtenir les variables d'état pour l'instant initial $\mathbf{Z}_0 = \langle V, T_0 \rangle_\Omega$ et les états temporels suivants $\tilde{\mathbf{Z}}(t) = \langle \mathbf{V}, \tilde{T}(t) \rangle_\Omega$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ réalise un produit scalaire interne sur l'espace Ω .

Le critère de moindres carrés classique, intégrant un coût terminal, s'écrit de manière générale en température :

$$J(q) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_f} \|\tilde{T}(M, t) - T(M, t; q)\|^2 dt \right) + \|\tilde{T}(M, t_f) - T(M, t_f; q)\|^2 \quad (4.88)$$

Par la stratégie de décomposition modale privilégiée ici pour la modélisation directe, au critère ci-dessus peut être substitué un critère sur les états observés $\tilde{\mathbf{Z}}(t)$ et les sorties modèle $\mathbf{Z}(t; B)$ qui dépendent des états inconnus B . On redéfinit alors le critère comme :

$$J(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_f} (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{Z}(t; B))^t (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{Z}(t; \mathbf{B})) dt + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{Z}}(t_f) - \mathbf{Z}(t_f; \mathbf{B}))^t (\tilde{\mathbf{Z}}(t_f) - \mathbf{Z}(t_f; \mathbf{B})) \right) \quad (4.89)$$

Nous avons vu, dans la section 4.3.1, que l'objectif du problème inverse consiste à chercher une trajectoire optimale qui minimise la fonctionnelle de coût J (Eq.4.89). Une étape essentielle repose normalement sur un calcul numérique stable du gradient ∇J , calcul que nous allons rendre plus efficace par la méthode de l'état adjoint vue précédemment. On peut définir une fonctionnelle étendue :

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\mu}) = J(\mathbf{Z}, \mathbf{B}) + \int_0^{t_f} \boldsymbol{\mu}^t(t) (C\dot{\mathbf{Z}}(t) - A(t)\mathbf{Z}(t) - M(t) - D\mathbf{B}(t)) dt \quad (4.90)$$

En particulier, il faut bien noter qu'on aura $\mathcal{L}(\mathbf{Z}(t; \mathbf{B}), \mathbf{B}, \boldsymbol{\mu}) = J(\mathbf{B})$.

Par intégration par parties (i.p.p), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{Z}(t; B))^t (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{Z}(t; \mathbf{B})) dt \\ &+ \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{Z}}(t_f) - \mathbf{Z}(t_f; B))^t (\tilde{\mathbf{Z}}(t_f) - \mathbf{Z}(t_f; \mathbf{B})) + (C\boldsymbol{\mu}(t_f))^t \mathbf{Z}(t_f) \\ &- (C\boldsymbol{\mu}(0))^t \mathbf{Z}(0) - \int_0^{t_f} ((C\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) + A(t)^t \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\mu}(t)^t (M(t) + D\mathbf{B}(t))) dt \end{aligned} \quad (4.91)$$

Étant donné un vecteur de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$, la différentielle de cette fonctionnelle (pour une variation infinitésimale de la sollicitation B) conduit à

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \int_0^{t_f} (-\tilde{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{Z}(t) - C\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) - A(t)^t \boldsymbol{\mu})^t \delta \mathbf{Z} dt - \int_0^{t_f} (D^t \boldsymbol{\mu}(t))^t \delta \mathbf{B} dt \\ &+ (C\boldsymbol{\mu}(t_f) - (\tilde{\mathbf{Z}}(t_f) - \mathbf{Z}(t_f)))^t \delta \mathbf{Z}(t_f) - (C\boldsymbol{\mu}(0))^t \delta \mathbf{Z}(0) \\ &= \int_0^{t_f} (-\tilde{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{Z}(t) - C\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) - A(t)^t \boldsymbol{\mu})^t \delta \mathbf{Z} dt - \int_0^{t_f} (D^t \boldsymbol{\mu}(t))^t \delta \mathbf{B} dt \\ &+ (C\boldsymbol{\mu}(t_f) - (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{Z}(t_f)))^t \delta \mathbf{Z}(t_f) \end{aligned} \quad (4.92)$$

car $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0$, et $\delta \mathbf{Z}(0) = 0$.

Par application du lemme fondamental sur le calcul des variations, considérant des fonctions continues et des variations $\delta \bullet$ indépendantes entre elles, les composantes de cette fonctionnelle doivent s'annuler sur $[t_0, t_f]$. On a d'abord à résoudre le *problème adjoint* :

$$-C\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) = A(t)^t \boldsymbol{\mu}(t) + \tilde{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{Z}(t) \quad (4.93)$$

$$\boldsymbol{\mu}(t_f) = C^{-1}(\tilde{\mathbf{Z}}(t_f) - \mathbf{Z}(t_f)) \quad (4.94)$$

On voit que pour l'équation différentielle ordinaire adjointe, c'est l'écart observation-modèle (sur les états) qui joue le rôle de l'excitation. Pour pouvoir résoudre effectivement le problème adjoint, il est impératif de lui associer une condition initiale. Puisque la résolution doit s'opérer à rebours en temps, il s'agit en fait d'une condition finale exprimée à l'instant $t = t_f$.

L'Eq (4.92) produit alors une forme linéaire en B au sens du produit interne :

$$d\mathcal{L} = - \int_0^{t_f} (D^t \boldsymbol{\mu}(t))^t \delta \mathbf{B} dt = \langle -D^t \boldsymbol{\mu}(t), \delta \mathbf{B} \rangle_{L^2} \quad (4.95)$$

Si l'on suppose que \mathbf{Z} néanmoins est une fonction de \mathbf{B} , du fait que $\mathcal{L}(\mathbf{Z}(t; \mathbf{B}), \mathbf{B}, \boldsymbol{\mu}) = J(\mathbf{B})$, on obtient

$$dJ \equiv \langle \nabla J, \delta \mathbf{B} \rangle = \langle -D^t \boldsymbol{\mu}(t), \delta \mathbf{B} \rangle \quad (4.96)$$

Ainsi, l'expression analytique du gradient est produite par

$$\nabla J = -D^t \boldsymbol{\mu}(t) \quad (4.97)$$

L'intérêt de la formulation adjointe apparaît ici. Au lieu de chercher à produire directement ∇J pour les besoins de l'algorithme, on passe par une résolution d'ODE en multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$ qui en fournit une estimation.

4.3.3 Gradient conjugué

4.3.3.1 Principe de la méthode

De nombreux ouvrages d'enseignement et d'articles de vulgarisation donnent les détails de cette méthode. Nous en rappelons juste les grandes lignes pour aider le lecteur à suivre notre propos, en nous basant sur le travail de synthèse de Jarny et Orlande [55].

Les méthodes de gradient conjugué se basent généralement sur le calcul de la dérivée première ∇J afin de localiser le minimum du critère des moindres carrés $J(B)$. Dans ces méthodes, on initialise l'algorithme par B^0 et la nouvelle estimation B^{k+1} est obtenue par :

$$\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^k + \rho^k \mathbf{w}^k \quad (4.98)$$

Les itérations sont terminées lorsque certaines conditions d'arrêt sont vérifiées. Ici, ρ^k est un scalaire positif, et le vecteur de descente \mathbf{w}^k est de la même taille que \mathbf{B}^k . Notons aussi, qu'à chaque itération k , ρ^k et \mathbf{w}^k doivent être actualisés. Une condition nécessaire à vérifier pour garantir la convergence est :

$$J(\mathbf{B}^{k+1}) - J(\mathbf{B}^k) < 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.99)$$

Considérant une approximation linéaire en $J(\mathbf{B}^{k+1})$, on obtient en vertu de 4.98

$$J(\mathbf{B}^{k+1}) - J(\mathbf{B}^k) = \rho^k \langle \nabla J^k, \mathbf{w}^k \rangle + \dots \quad (4.100)$$

Comme ρ^k est positif, une condition nécessaire pour diminuer J , dite “*condition de descente*”, est :

$$\langle \nabla J^k, \mathbf{w}^k \rangle < 0 \quad (4.101)$$

La méthode consiste donc à préciser la manière de calculer les directions de descente (gradients conjugués) :

$$\mathbf{w}^k = -\nabla J^k, \quad k = 0 \quad (4.102)$$

$$\mathbf{w}^k = -\nabla J^k + \gamma^k \mathbf{w}^{k-1}, \quad k > 0 \quad (4.103)$$

Cette procédure permet de collecter aussi l'information de la direction de descente précédente et de trouver une nouvelle direction \mathbf{w}^k plus adaptée à la situation actualisée.

Dans le cas général, soit linéaire, soit non linéaire, les deux définitions les plus répandues du paramètre de conjugaison γ^k sont :

Fletcher-Reeves

$$\gamma_{FR}^k = \frac{\|\nabla J^k\|^2}{\|\nabla J^{k-1}\|^2}$$

Polak-Ribière

$$\gamma_{PR}^k = \frac{\langle \nabla J^k - \nabla J^{k-1}, \nabla J^k \rangle}{\|\nabla J^{k-1}\|^2}$$

L'influence de ce choix a été analysée dans la littérature. La méthode de Fletcher-Reeves converge si le point initial est suffisamment proche du minimum exact. Par contre, la méthode de Polak-Ribière peut conduire, quoique rarement, à un cycle d'itérations infini avec un échec de convergence. La vitesse de convergence est généralement plus importante. La convergence de Polak-Ribière peut néanmoins être garantie en effectuant $\gamma = \max\{\gamma_{PR}, 0\}$. Si $\gamma_{PR} < 0$, cette action est équivalente à redémarrer le "gradient conjugué" par la direction de descente initiale \mathbf{w}^0 .

À chaque itération, l'algorithme requiert donc d'effectuer une recherche linéaire afin de déterminer le pas optimal ρ^k , suivant la direction de descente \mathbf{w}^k . Elle consiste à minimiser par rapport à ρ^k la fonction objectif suivante :

$$\phi(\rho) = J(\mathbf{B}^{k+1}) = J(\mathbf{B}^k + \rho^k \mathbf{w}^k) \quad (4.104)$$

Poser $\phi'(\rho) = 0$ conduit à la détermination du pas optimal ρ^k . Cela conduit aussi à une propriété d'orthogonalité des gradients conjugués, issue de (4.100) par passage à la limite :

$$\phi'(\rho) = \langle \nabla J^{k+1}, \mathbf{w}^k \rangle = 0 \quad (4.105)$$

Les démonstrations pour la convergence peuvent être retrouvées dans [83, 84].

Cependant, il est parfois difficile de trouver les zéros de ϕ' de manière analytique. On adopte donc une méthode de recherche linéaire numérique : méthode de Newton-Raphson et méthode de la sécante. Les deux méthodes nécessitent de calculer la dérivée seconde de ϕ .

La méthode de Newton-Raphson repose sur le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} \phi(\rho) &= J(\mathbf{B}^k + \rho \mathbf{w}^k) \approx J(\mathbf{B}^k) + \rho \left[\frac{d}{d\rho} J(\mathbf{B}^k + \rho \mathbf{w}^k) \right]_{\rho=0} + \frac{\rho^2}{2} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} J(\mathbf{B}^k + \rho \mathbf{w}^k) \right]_{\rho=0} \\ &= J(\mathbf{B}^k) + \rho \langle \nabla J(\mathbf{B}^k), \mathbf{w}^k \rangle + \frac{\rho^2}{2} \langle \mathbf{w}^k, J''(\mathbf{B}^k) \mathbf{w}^k \rangle \end{aligned} \quad (4.106)$$

On obtient alors :

$$\frac{d}{d\rho}J(\mathbf{B}^k + \rho\mathbf{w}^k) \approx \langle \nabla J(\mathbf{B}^k), \mathbf{w}^k \rangle + \rho \langle \mathbf{w}^k, J''(\mathbf{B}^k)\mathbf{w}^k \rangle \quad (4.107)$$

où J'' est la matrice hessienne.

En imposant la nullité de l'expression (4.107), on obtient

$$\rho^k = -\frac{\langle \nabla J(\mathbf{B}^k), \mathbf{w}^k \rangle}{\langle \mathbf{w}^k, J''(\mathbf{B}^k)\mathbf{w}^k \rangle} \quad (4.108)$$

Cette méthode ne fonctionne que si le terme J'' peut être évalué à chaque itération. Dans le cas contraire, on peut utiliser la méthode de la sécante. Le principe consiste à approcher la dérivée seconde de $J(\mathbf{B}^k + \rho\mathbf{w}^k)$ par une différence des dérivées premières en $\rho = 0$ et $\rho = \varepsilon$, avec ε un nombre petit aléatoire non nul :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2}J(\mathbf{B}^k + \rho\mathbf{w}^k) &\approx \frac{\left[\frac{d}{d\rho}J(\mathbf{B}^k + \rho\mathbf{w}^k) \right]_{\rho=\varepsilon} - \left[\frac{d}{d\rho}J(\mathbf{B}^k + \rho\mathbf{w}^k) \right]_{\rho=0}}{\varepsilon} \\ &= \frac{\langle \nabla J(\mathbf{B}^k + \varepsilon\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k \rangle - \langle \nabla J(\mathbf{B}^k), \mathbf{w}^k \rangle}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Il en résulte respectivement pour (4.108) :

$$\rho^k = -\varepsilon \frac{\langle \nabla J(\mathbf{B}^k), \mathbf{w}^k \rangle}{\langle \nabla J(\mathbf{B}^k + \varepsilon\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k \rangle - \langle \nabla J(\mathbf{B}^k), \mathbf{w}^k \rangle} \quad (4.110)$$

Entre ces deux méthodes, la méthode de Newton-Raphson a une meilleure vitesse de convergence, et il est préférable de l'utiliser [85], le calcul de $\langle \mathbf{w}^k, J''(\mathbf{B}^k)\mathbf{w}^k \rangle$ pouvant être obtenu de manière approximative. La méthode de la sécante ne demande que la dérivée première ∇J , mais la convergence dépend du choix du paramètre ε . Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.2 pour tous les éléments de preuves mathématiques liées à l'existence et à l'unicité de la solution d'un tel problème inverse itératif, compte-tenu des espaces vectoriels sur lesquels on travaille.

Théoriquement, la méthode CGM converge vers la solution exacte en un maximum de n itérations, si on a n paramètres à identifier. Mais souvent, la convergence n'est pas atteinte à cause de l'accumulation d'erreurs sur les résidus. Cela conduit à perdre en précision et les vecteurs de descente ne vérifient plus l'orthogonalité (4.105). En présence de bruit, il est crucial de bien respecter cette propriété. C'est la raison pour laquelle nous avons proposé une méthode pour stabiliser la recherche des gradients conjugués.

4.3.3.2 Algorithme utilisé

Dans l'algorithme CGM ci-dessous, \mathbf{w} représente les vecteurs du gradient conjugué.

Algorithme de CGM

- Étape 1 : Initialisation : $n = 0$, discrétisation uniforme du temps par $N_t + 1$ pas.
 Calcul des matrices $A(t), C, D, M(t)$ et de l'état initial Z_0 .
 Choix de la sollicitation initiale $\mathbf{B}^{(0)}(t)$.
 Calcul de la première direction de descente : $\mathbf{w}^0 = -\nabla J^{(0)}$,
 où $\nabla J^{(0)} = \nabla J(\mathbf{B}^{(0)})$.
- Boucle sur les étapes 2 à 7 jusqu'à vérification d'une des 2 conditions d'arrêt*
- Étape 2 : Résolution du problème direct (4.87) considérant la sollicitation $\mathbf{B}^{(n)}(t)$:
 Initialisation $\mathbf{Z}^{(n)}(0) = \mathbf{Z}_0, \forall n \in N$.
for $k = 0 : N_t - 1$, boucle en temps
 $C \frac{\mathbf{Z}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{Z}_k^{(n)}}{\Delta t} = A_{k+1} \mathbf{Z}_{k+1}^{(n)} + M_{k+1} + D \frac{\mathbf{B}_{k+1}^{(n)} + \mathbf{B}_k^{(n)}}{2}$: schéma semi-implicite
end
- Étape 3 : Calcul du multiplicateur de Lagrange μ à l'itération n :
 Initialisation par le temps final (équation (4.93))
 $\boldsymbol{\mu}^{(n)}(t_f) = C^{-1}(\tilde{\mathbf{Z}}(t_f) - \mathbf{Z}^{(n)}(t_f))$
for $k = N_t - 1 : -1 : 0$, boucle rétrograde en temps
 $-C \frac{\boldsymbol{\mu}_{k+1}^{(n)} - \boldsymbol{\mu}_k^{(n)}}{\Delta t} = A_k^t \boldsymbol{\mu}_k^{(n)} + \frac{(\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1} - \mathbf{Z}_{k+1}^{(n)}) + (\tilde{\mathbf{Z}}_k - \mathbf{Z}_k^{(n)})}{2}$: schéma semi-implicite
end
 Calcul des vecteurs gradients par (4.97) : $\nabla J^{(n)} = -D^t \boldsymbol{\mu}^{(n)}$.
- Étape 4 : Calcul de la direction de descente :
 Si $n = 0$, $\mathbf{w}^n = -\nabla J^{(0)}$;
 Si $n \geq 1$, calcul de $\gamma^n = \frac{\|\nabla J^{(n)}\|^2}{\|\nabla J^{(n-1)}\|^2}$
 (pondération de "descente" de Fletcher-Reeves)
 $\mathbf{w}^n = -\nabla J^{(n)} + \gamma^n \mathbf{w}^{n-1}$.
- Étape 5 : Recherche du pas optimal ρ^n (Line search),
 tel que $\rho^n = \arg \min_{\rho \in \mathbb{R}} \{J(\mathbf{B}^{(n)} + \rho \mathbf{w}^n)\}$.
- Étape 6 : Actualisation de l'itération suivante : $\mathbf{B}^{(n+1)} = \mathbf{B}^{(n)} + \rho^n \mathbf{w}^n$
- Étape 7 : Incrémentation $n \leftarrow n + 1$, retour à l'étape 2.
-

Dans la pratique, un bon choix de $B^{(0)}(t)$ consiste généralement à considérer un vecteur nul. Dans notre approche, cela présente l'avantage d'initialiser correctement tous les modes haute fréquence dont le poids serait de toutes façons très faible. De fait l'algorithme optimisera le poids sur les premiers modes. L'alternative est de considérer une information de source a priori que l'on projettera sur la base retenue pour décomposer la quasi-solution. Nous en discuterons dans la partie résultats de simulation.

4.3.3.3 Conditions d'arrêt

La condition traditionnelle pour sortir du processus itératif est spécifiée par

$$J(\mathbf{B}^{n+1}) < \varepsilon \quad (4.111)$$

où ε est un nombre très petit, dépendant du niveau du bruit aléatoire sur les mesures. Techniquement, il convient d'arrêter l'algorithme et de considérer le critère (4.89) comme

atteint, en respect du principe de discrimination (discrepancy principle [86]), i.e. il n'est pas acceptable d'obtenir des résidus d'identification (écarts expérience-modèle) inférieurs au bruit de mesure. Dans l'approximation

$$\|\tilde{T} - T\| \approx \sigma \quad (4.112)$$

où σ est l'écart-type du bruit. En substituant (4.112) dans le critère (4.89), la tolérance d'arrêt ε s'exprimera par :

$$\varepsilon = m\sigma^2 \quad (4.113)$$

la constante m étant liée à l'écriture de (4.89) (par exemple une condition de non orthogonalité entre les modes $\|\mathbf{V}^t \mathbf{V}\| \neq 1$ peut conduire à augmenter m).

Le principe de discrimination est défini et appliqué selon la définition suivante.

Définition 4.3.1 (Discrepancy principle). *Si on suppose $\|\tilde{T} - T\| \leq \sigma$ et soit $\tau > 1$, le processus itératif doit être arrêté lorsque pour la première fois, on a $\|\tilde{T} - T(t; \mathbf{B}^{k(\sigma)})\| \leq \tau\sigma$.*

On remarquera que l'indice d'arrêt $k(\sigma)$ dépend de σ (il dépend aussi de \tilde{T} puisqu'un biais est toujours possible).

Théorème 4.3.1. *Soit $\mathbf{B}^{(k)}$ défini précédemment, si l'algorithme est arrêté selon le principe de discrimination, avec*

$$\|\tilde{T} - T(t; \mathbf{B}^{(k^*)})\| \leq \tau\sigma < \|\tilde{T} - T(t; \mathbf{B}^{(k)})\| \quad \text{pour tout } 0 \leq k < k^*, \tau > 1, \quad (4.114)$$

alors $\mathbf{B}^{(k^*)} \rightarrow \mathbf{B}^{exact}$, lorsque $\sigma \rightarrow 0$.

Démonstration. Voir [79]. □

Nous formulons deux remarques :

- i Le principe de discrimination est bien défini. Pour tous les σ et \tilde{T} tels que $\|\tilde{T} - T\| \leq \sigma$, il existe toujours un indice fini pour lequel les résidus sont inférieurs à $\tau\sigma$ [87].
- ii Comme les résidus doivent être calculés au cours de chaque itération, ce principe nécessite très peu d'effort de calcul supplémentaire.

4.3.3.4 Résultats numériques

Nous donnons quelques résultats obtenus sur nos cas tests en utilisant l'algorithme CGM standard. Pour la modélisation directe, on garde pour le champ de vitesse la même fonction que celle définie au chapitre 4.1.3. Pour les conditions aux limites, nous avons retenu les formes simples suivantes

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= -0.005 \exp(0.1742t) \\ \varphi_2(t) &= 0.005 \exp(0.1249t) \end{aligned} \quad (4.115)$$

La température initiale est uniformément nulle (écart éprouvette-ambiance extérieure nul). Pour la décomposition du champ de température, les résultats obtenus par la base des modes de branche diffusifs sont reportés en Annexe C. Ils ne conduisent pas aux résultats les meilleurs du point de vue de la reconstruction de source pour sensiblement les mêmes

raisons que lorsque nous avons utilisé les modes SVD. Ils ont une faculté à concentrer l'énergie du signal sur les quelques premiers modes ce qui rend difficile le rendu précis de localisations spatiales. Nous avons donc choisi de reporter dans le corps du manuscrit les résultats obtenus selon exactement le même principe mais en s'appuyant sur une autre base spectrale en modes de Fourier **cosinus**. Deux modes mixtes ont été ajoutés afin de rendre les résultats plus compatibles avec des conditions limites non homogènes en température. La source ne sera cependant décomposée que sur la base réelle des modes de type **cos** en l'absence d'aucune information sur la source aux limites du domaine considéré (à gradient nul a priori loin de la zone d'intérêt). La décomposition modale s'écrira dans ce cas (voir Annexe A.3) :

$$\begin{aligned}
 T(X, t) &= -\frac{2L}{k\pi}\varphi_1(t)\sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \frac{2L}{k\pi}\varphi_2(t)\cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \frac{z_0(t)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t)\cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right) \\
 q(X, t) &= b_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t)\cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.116}$$

Là-encore, le nombre de modes de décomposition reste contrôlé par les deux critères (4.35), (4.36) mis en place précédemment.

On reprend d'abord le cas-test 1 avec un bruit sur le champ de température de $\sigma = 0.3K$ (SNR= 83.3) et un bruit de l'ordre de 2% de l'amplitude maximale sur le champ cinématique. Avec les critères utilisés, la troncature sur le nombre de modes est réalisée à $N_m = 18$. La figure (4.16) présente l'évolution du profil de température en fonction du temps. L'écart-type des résidus sur le champ de température est contrôlé à $\sigma_{real} = 0.3023K$ ce qui est conforme au niveau de bruit imposé. L'algorithme converge globalement vers la source imposée en entrée et nécessite pour cela 176 itérations. Sur la figure (4.17), la source spatiale à l'instant $t = 10s$ est reconstruite avec une erreur relative de l'ordre 8.3%. La valeur de la fonctionnelle de minimisation (4.89) est stabilisée à 0.1688.

Pour le cas-test 2, le bruit de mesure considéré est de $\sigma = 0.1K$ (SNR= 15). On utilise également 18 modes de Fourier pour l'inversion. La convergence est atteinte pour 68 itérations et la fonctionnelle de minimisation (4.89) se stabilise à 0.019. On voit que l'erreur relative de reconstruction de la source est de l'ordre de 3.12% (figure (4.18), moins élevée que pour le cas-test 1.

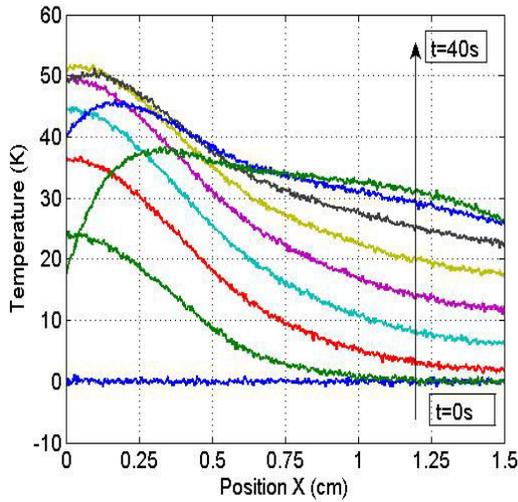


FIGURE 4.16 – Profils de température à différents instants - bruit $\sigma = 0.3K$

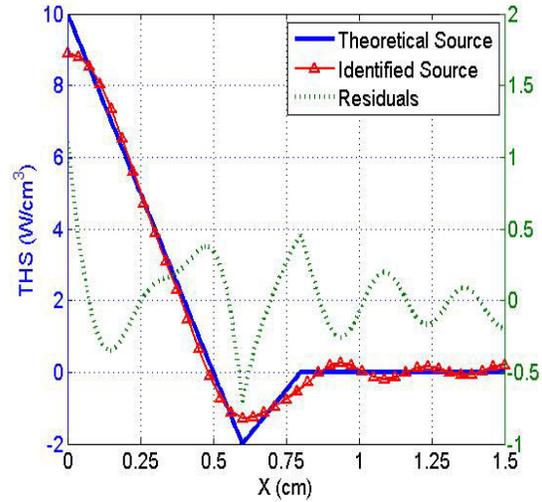


FIGURE 4.17 – Profils de THS exacte, identifiée et résidus - $t = 10s$

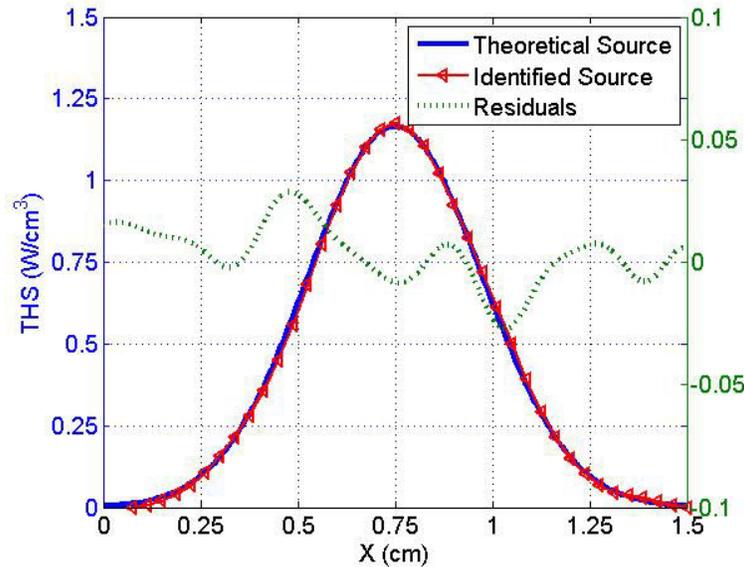


FIGURE 4.18 – Profils de THS exacte, identifiée et résidus - $t = 10s$

Ces résultats montrent l'aptitude de l'approche itérative à reconstruire le terme source pour l'opérateur d'advection-diffusion avec un bruit sur les champs thermique et cinématique. Le double critère permettant de sélectionner le nombre de modes optimal fonctionne ici sur une base sensiblement différente (modes de Fourier au lieu de modes de branche) mais conduit à une très bonne qualité de reconstruction. Même si les cas présentés ici correspondent à un rapport signal sur bruit modeste, on a pu vérifier en augmentant le bruit qu'on perturbait l'identification par action directe sur le calcul du gradient conjugué. Nous proposons dans la section suivante une nouvelle stratégie pour améliorer l'algorithme.

4.3.4 CGM stabilisée

Numériquement, le gradient du critère $J(B(t))$ produit le vecteur :

$$\nabla J(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial b_1}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial b_{N_m}}(t) \end{pmatrix} : N_m \times 1 \quad (4.117)$$

En présence de bruit sur les mesures, le calcul approximatif de ce vecteur pour chaque itération peut conduire à sélectionner des directions de descente et des incréments de pas non optimaux, nuisant ainsi (faits constatés) à la fois à la stabilité de l'algorithme et à la vitesse de convergence. Compte-tenu des études faites en section 4.2, l'idée nous est venue d'implémenter la décomposition de "Karhunen-Loève" (KLD) [75], ou de "Truncated Singular Value Decomposition" (TSVD) [72, 71, 70], sur la matrice de Gram des vecteurs gradients ∇J pour garder les directions de descente majeures et "ex" filtrer ainsi celles qui sont fortement perturbées par le bruit. Cette idée est particulièrement intéressante ici dans la mesure où nous mettons ainsi à profit l'approche de réduction de modèle (quasi-solution) qu'apportent les décompositions spatiales. L'implémentation de la TSVD est difficile pour les grands systèmes (mobilisation importante de mémoire calcul) tels que ceux qu'on obtiendrait par des discrétisations spatiales nodales. On rend ainsi conforme le rang de la matrice de Gram avec l'information qu'elle contient réellement (amélioration de son conditionnement) ce qui permet de produire des directions de descente ayant un meilleur impact dans le processus d'optimisation.

Cette idée rentre dans les démarches maintenant classiques qu'on trouve par exemple au niveau de la méthode de Levenberg-Marquardt (méthode itérative également) et qui permet d'adapter au mieux le sens et l'amplitude des vecteurs de descente.

4.3.4.1 Analyse de sensibilité

Dans le cas classique d'estimation linéaire au sens des moindres carrés. On est confronté au problème de résolution matricielle

$$Sx = y \quad (4.118)$$

La solution des moindres carrés pour un vecteur de données \tilde{y} est :

$$\hat{x} = (S^t S)^{-1} S^t \tilde{y} \quad (4.119)$$

La variance sur cet estimateur $Cov(\hat{x})$ est alors

$$Cov(\hat{x}) = (S^t S)^{-1} S^t Cov(\tilde{y}) S (S^t S)^{-t} \quad (4.120)$$

Sous les hypothèses idéales $Cov(\tilde{y}) = \sigma I$ (pas de biais, bruit gaussien, de moyenne nulle), on a classiquement

$$Cov(\hat{x}) = \sigma^2 (S^t S)^{-1} \quad (4.121)$$

Le mauvais conditionnement de $S^t S$ est à l'origine des échecs d'identification et l'on peut évoquer deux stratégies élémentaires de contournement du problème (qui s'avèrent en fait être assimilables l'une à l'autre [54]) :

$$\begin{array}{l} \hat{x} = (S^t S + \lambda I)^{-1} S^t \tilde{y} \quad \text{Tikhonov [88]} \\ \hat{x} = (S_r^t S_r)^{-1} S_r^t \tilde{y} \text{ avec } S_r \text{ matrice réduite de } S \quad \text{TSVD [54]} \end{array}$$

Pour les problèmes de régression non-linéaire, nous n'avons plus la relation linéaire entre les données et les paramètres du modèle. Néanmoins, nous pouvons maintenir la validité des formules ci-dessus dans l'approximation linéarisée du problème (si le bruit de mesures n'est pas trop grand).

Considérant un système non linéaire avec de petites perturbations sur les données, on peut quantifier un écart (résidu) $R(x) = F(x) - y$ et considérer sa forme linéarisée autour d'une solution x^* :

$$R(x^* + \Delta x) \approx R(x^*) + S(x^*)\Delta x \quad (4.122)$$

ici, $S(x^*)$ est la matrice jacobienne.

Dans les mêmes conditions d'idéalité du bruit de mesure, on suppose $\tilde{y} = y_{true} + \varepsilon$, où $y_{true} = F(x^*)$. On en déduit l'espérance mathématique $E(\varepsilon \cdot \varepsilon^t) = \sigma^2 I$. Dans ce cas, $S(x^*)$ joue le même rôle que S dans l'équation (4.121). On a donc

$$Cov(x^*) \approx \sigma^2 (S(x^*)^t S(x^*))^{-1} \quad (4.123)$$

qui repose le problème du conditionnement de $S(x^*)^t S(x^*)$.

On quantifie également l'estimation des gradients pour un critère de moindres carrés : $J(x^*) = \|R(x^*)\|^2/2$, tels que

$$\nabla J(x^*) = S(x^*)^t R(x^*) \quad (4.124)$$

d'où l'on tire que

$$\begin{aligned} Cov(\nabla J(x^*)) &= E(\nabla J(x^*) \nabla J(x^*)^t) = S(x^*)^t E(R(x^*) R(x^*)^t) S(x^*) \\ &= S(x^*)^t E(\varepsilon \cdot \varepsilon^t) S(x^*) = \sigma^2 S(x^*)^t S(x^*) \end{aligned} \quad (4.125)$$

avec $Cov(R(x^*)) = Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Grâce à ce résultat, l'équation (4.123) peut être réécrite sans avoir à considérer le calcul du jacobien $S(x^*)$, par

$$Cov(x^*) \approx \sigma^4 (E(\nabla J(x^*) \nabla J(x^*)^t))^{-1} \quad (4.126)$$

Pour garantir l'identification avec un minimum de variance, nous utilisons la stratégie SVD sur la matrice de Gram du gradient, i.e. $E(\nabla J(x^*) \nabla J(x^*)^t)$, tel que

$$E(\nabla J(x^*) \nabla J(x^*)^t) = U(x^*) \Sigma U(x^*)^t \quad (4.127)$$

où $U(x^*)$ représente la matrice des vecteurs propres, et $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$ est la matrice diagonale des valeurs propres. Elle produit aussi la décomposition de $\nabla J(x^*)$ sur la base $U(x^*)$, telle que $\nabla J(x^*) = \sum_{i=1}^n z_i U_i(x^*)$, avec z_i coefficients de décomposition. On retrouve le résultat (4.126) :

$$Cov(x^*) \approx \sigma^4 U(x^*) \Sigma U(x^*)^t = \sigma^4 \sum_{i=1}^n \frac{U_i(x^*) U_i(x^*)^t}{\sigma_i^2} \quad (4.128)$$

Comme les σ_i^2 sont décroissantes, les termes successifs de la somme contribuent de plus en plus à accroître la variance. Si l'on tronque (4.128), on peut réduire significativement la variance d'estimation.

Remarquons que quand x dépend du temps, i.e. $x(t)$, on a la définition pour (4.127) :

$$E(\nabla J(x^*(t))\nabla J(x^*(t))^t) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \nabla J(x^*(t))\nabla J(x^*(t))^t dt \quad (4.129)$$

Revenons à notre cas, le modèle est donné par : $\mathbf{T}(t) = VZ(t; B(t))$ et les paramètres à estimer $B(t)$ sont aussi des fonctions du temps. Considérant la fonctionnelle (4.89), l'utilisation d'une forme linéarisée pour l'estimation itérative basée sur (4.121) demande le calcul de la matrice de sensibilité (jacobienne) :

$$S(t) = \left(\frac{\partial z_i(t)}{\partial b_j(t)} \right)_{ij}$$

Les formes analytiques des états peuvent être explicités grâce à la formule de Duhamel appliquée à 4.87 :

$$Z(t) = \exp\left(\int_0^t C^{-1}A(t')dt'\right) Z_0 + \int_0^t \exp\left(\int_{t'}^t C^{-1}A(s)ds\right) C^{-1}(M(t') + DB(t'))dt' \quad (4.130)$$

Il apparaît donc ici l'impossibilité de calculer le Jacobien S analytiquement, donc l'impossibilité de calculer la matrice gradient selon (4.124) et donc **la justification du recours à la formulation adjointe** qui permet de la calculer par le moyen des multiplicateurs de Lagrange. Comme dans la section 4.2, on suit la stratégie KLD ou SVD sur le vecteur gradient. La matrice de Gram mise en évidence par (4.129) correspond à

$$W = \int_t \nabla J(t)\nabla J^t(t)dt : \quad N_m \times N_m \quad (4.131)$$

et sa décomposition est obtenue par :

$$W = U\Sigma U^t \quad (4.132)$$

ou encore

$$W = \sum_{i=1}^{N_m} \sigma_i^2 u_i u_i^t \quad (4.133)$$

Ensuite, le gradient est décomposé aussi sur la même base :

$$\nabla J(t) = \sum_{i=1}^{N_m} u_i z_i(t) \quad (4.134)$$

Une approximation de l'ordre r se réalise par la troncature des modes KLD, telle que

$$\nabla J_r(t) = \sum_{i=1}^r u_i z_i(t) \quad (4.135)$$

Par conséquent, ∇J_r prenant la place de ∇J à l'étape 3 dans l'algorithme CGM, nous pouvons conserver l'information utile en termes de directions de descentes. Cette nouvelle version de l'algorithme CGM stabilisé par SVD conduit à une convergence rapide mais surtout fait converger vers un optimum global.

4.3.4.2 Résultats numériques pour l'algorithme stabilisé

Dans ce paragraphe, nous allons présenter des résultats issus de notre nouvelle méthode et comparer les performances avec la méthode CGM standard. Les calculs numériques suivent les développements exposés en section 4.3.2. Les résultats pour les deux cas tests sont les suivants.

Cas-test 1 :

Les reconstructions sont basées sur le nombre optimal de $N_m = 18$ modes de Fourier déterminé par l'algorithme lui-même. Le champ de vitesse est perturbé de l'ordre de 2%. On a testé deux niveaux de bruit plus importants que les précédents : $\sigma = 0.3K$ (SNR= 83.3) et $\sigma = 0.6K$ (SNR= 41.65). Les figures (4.19) et (4.20) superposent les profils de source exacte, reconstruite, et les résidus d'identification. On pourra comparer directement la qualité de la reconstruction par les deux méthodes (CGM standard et CGM stabilisée par TSVD) et pour un même bruit sur une même ligne.

Pour un bruit de $\sigma = 0.3K$, l'algorithme CGM standard (Fig.4.19a) s'arrête à 176 itérations, contre 282 pour l'algorithme CGM stabilisé par TSVD (Fig.4.19b). Dans les deux cas, l'écart-type des résidus d'identification sur la température est d'environ $0.3022K$ (erreur relative de 0.73% en norme). L'erreur relative sur la source reconstruite est par contre améliorée avec l'algorithme stabilisé : 8.33% pour CGM standard contre 4.72% pour CGM stabilisé. La valeur minimale atteinte par le critère d'arrêt (4.89) est dans les deux cas de 0.1678.

Pour un bruit de $\sigma = 0.6K$, l'algorithme CGM standard (Fig.4.20a) s'arrête à 119 itérations, contre 190 pour l'algorithme CGM stabilisé (Fig.4.20b). Dans les deux cas, l'écart-type des résidus d'identification sur la température est d'environ $0.6046K$ (erreur relative de 0.77% en norme). L'erreur relative sur la source reconstruite est par contre améliorée avec l'algorithme stabilisé : 11.67% pour CGM standard contre 6.0% pour CGM stabilisé. La valeur minimale atteinte par le critère d'arrêt est dans les deux cas de 0.6729.

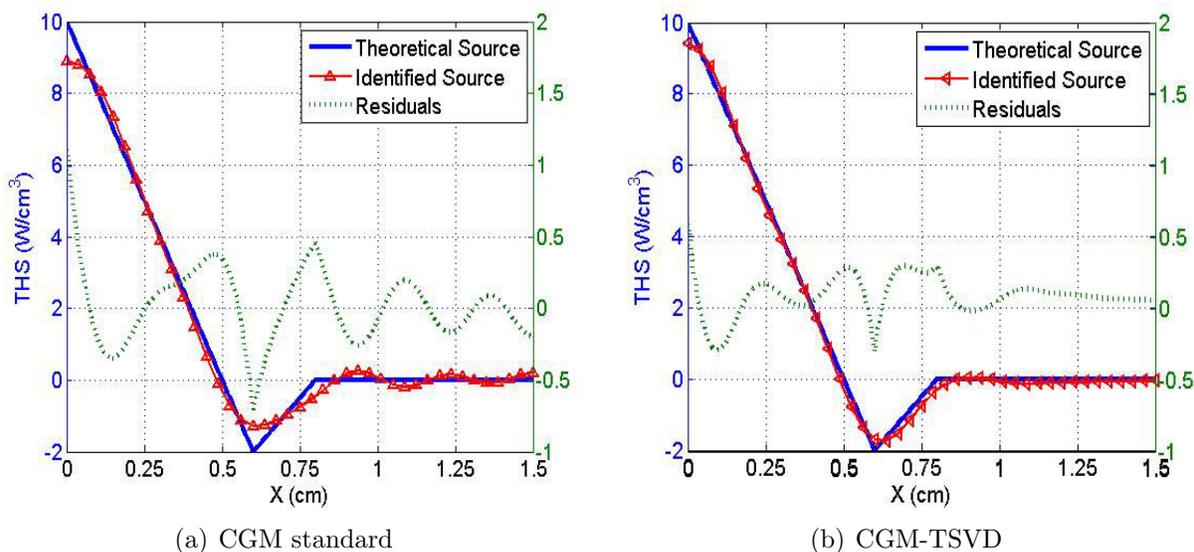
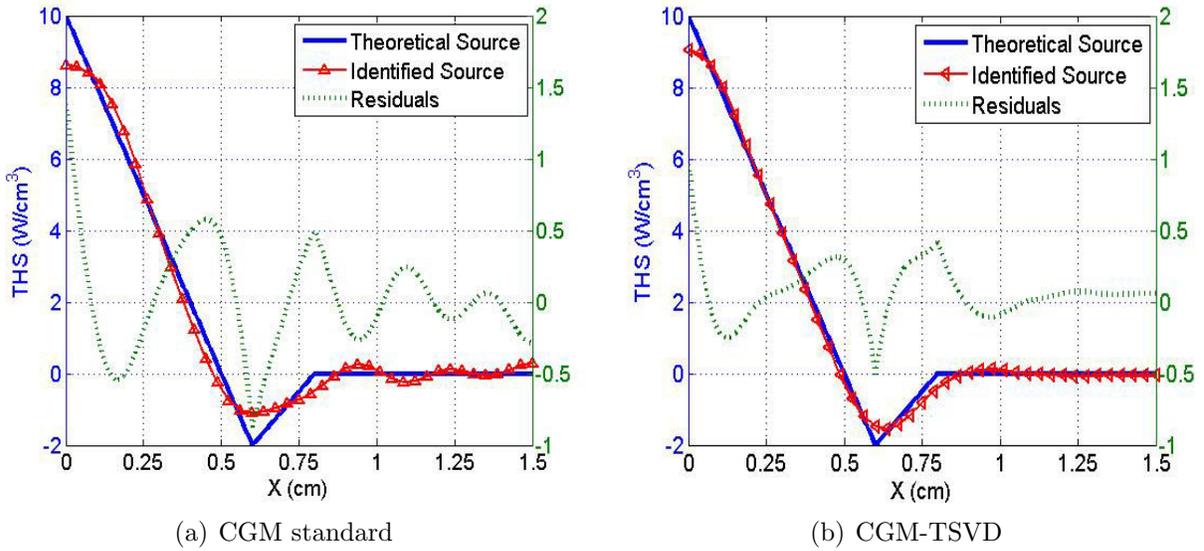


FIGURE 4.19 – THS Reconstituée par CGM standard ou CGM-TSVD - $t = 10s$ - $\sigma = 0.3K$

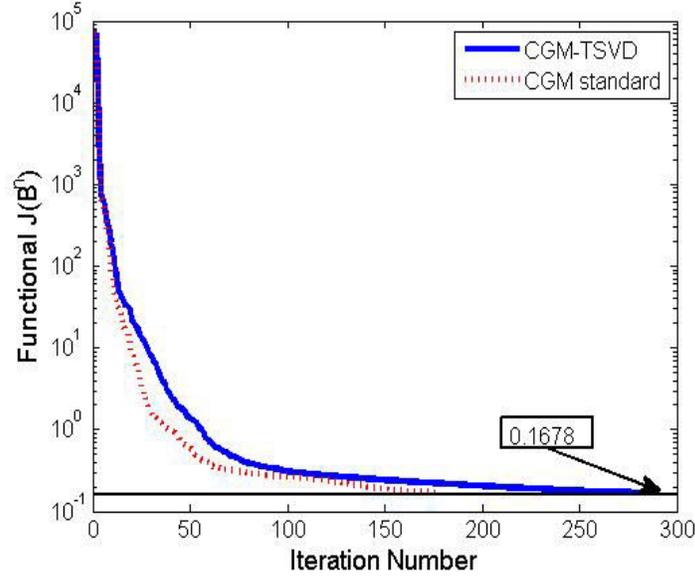

 FIGURE 4.20 – THS Reconstituée par CGM standard ou CGM-TSVD - $t = 10s$ - $\sigma = 0.6K$

Les résultats montrent que la CGM stabilisée par TSVD pour optimiser les directions de descente produit de meilleures solutions. Si l'on fait abstraction des résultats aux bords du domaine (incompatibilité des modes de décomposition Température-Source aux limites) l'erreur d'identification est réduite d'un facteur d'environ 2.

La figure (4.21) représente l'évolution du critère J (4.89) en fonction du nombre d'itérations pour le cas $\sigma = 0.3K$. On vérifie bien visuellement que le minimum du critère est atteint plus tôt avec CGM standard et que la méthode CGM-TSVD évite une décroissance trop rapide du critère. Nous pensons que cela traduit un fonctionnement de la méthode CGM standard favorisant un "piégeage" sur un optimum local. Par contre la troncature opérée dans CGM-TSVD (éq.4.135) permet une convergence vers un optimum plus global. L'ordre de troncature r peut évoluer à chaque itération. Il est déterminé comme suit :

$$\frac{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{N_m} \sigma_i^2} \geq 95\% \quad (4.136)$$

Les r premières valeurs singulières qui contribuent avec plus de 95% à l'énergie totale de la matrice de Gram sont conservées. Par contre, même si le nombre d'itérations augmente sensiblement pour CGM-TSVD, à cause de la démarche de troncature, les deux méthodes convergent toujours dans le même temps de calcul.

FIGURE 4.21 – Évolution de la fonctionnelle $J(B^n)$ selon CGM standard et CGM-TSVD

Afin de vérifier le caractère régularisant de notre méthode, nous avons voulu comparer également ces résultats avec l'approche CGM-standard munie d'une régularisation classique de Tikhonov [88]. Techniquement, il suffit juste d'ajouter au critère précédent le terme de pénalisation suivant

$$\begin{aligned} J_\alpha(B) &= J(B) + \frac{1}{2}\alpha\|B\|^2 \\ &= J(B) + \frac{1}{2}\alpha \int_0^{t_f} B(t)^t B(t) dt \end{aligned} \quad (4.137)$$

Se pose toujours dans ce type de régularisation, la question du choix du coefficient de Tikhonov α . Pour ce cas test, nous avons déterminé empiriquement la valeur de ce paramètre à $\alpha = 10^{-5}$ (valeur maximale permettant d'assurer la convergence). Le tableau 4.3 rapporte les indicateurs principaux du processus d'optimisation qui permettent de comparer les 3 options de méthodes. On observe que la régularisation de l'algorithme (par Tikhonov ou CGM-TSVD) produit le même effet : augmentation du nombre d'itérations mais réduction de l'erreur relative d'identification. Pour ce dernier point, la méthode que nous proposons semble néanmoins plus efficace. Nous soulignons aussi qu'elle offre un critère plus physique pour déterminer l'intensité de régularisation. Alors qu'un mauvais choix du coefficient de Tikhonov peut conduire à une solution biaisée, la méthode proposée ici assure systématiquement la convergence.

| s.t.d du bruit (K) | $\sigma = 0.3K$ | | | $\sigma = 0.6K$ | | |
|------------------------|-----------------|-----------|--------|-----------------|-----------|--------|
| | J_{min} | I_{max} | erreur | J_{min} | I_{max} | erreur |
| CGM standard | 0.1688 | 176 | 8.3% | 0.6736 | 119 | 11.7% |
| CGM-Tikhonov | 0.1687 | 215 | 6.3% | 0.6748 | 141 | 8.8% |
| CGM-TSVD | 0.1678 | 282 | 4.70% | 0.6729 | 190 | 6.00% |

TABLE 4.3 – Paramètres du processus d'inversion à la convergence pour cas-test 1

Cas-test 2 :

Pour le cas-test 2 dont la source est gaussienne et variable dans le temps, on considère un bruit de $\sigma = 0.1K$ (SNR= 24.25). L'identification (Fig.4.22ab) se fait à partir de 18 modes de Fourier (non optimisés automatiquement pour être dans la même situation que le cas-test 1). On observe le même comportement de l'algorithme en termes de nombre d'itérations (arrêt à 68 itérations pour CGM standard contre 119 pour CGM-TSVD). L'écart-type obtenu sur les résidus d'identification sur la température est d'environ $0.1008K$ (erreur relative de 0.8% en norme). La valeur minimale atteinte par le critère d'arrêt est d'environ 0.0187. Là encore, nous améliorons l'erreur relative sur la source (facteur 2 ici : 3.16% pour CGM standard par rapport à 1.64% pour CGM-TSVD).

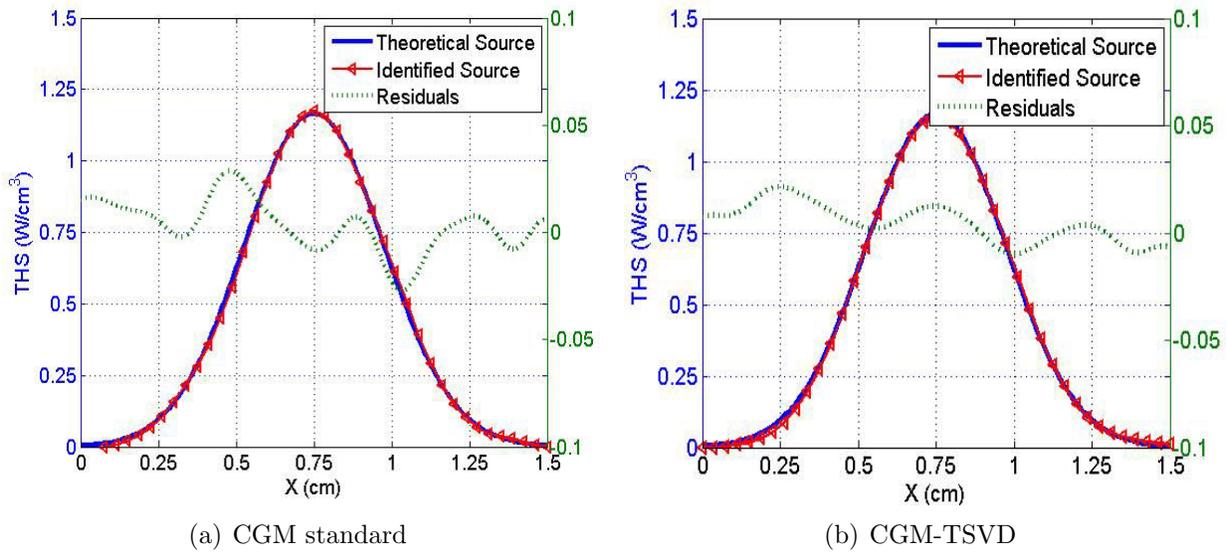


FIGURE 4.22 – Reconstruction de THS par CGM standard ou CGM-TSVD $-t = 10s$, $\sigma = 0.1K$

4.4 Comparaison des performances entre algorithmes

Pour finir ce chapitre et dans le cadre des deux cas-test de référence, nous avons comparé les performances des deux méthodes qu'on a développé. Nous insistons sur le fait que nous parlons de comparaison entre les méthodes et non entre les techniques d'inversion (séquentiel versus itérative) puisque chaque méthode fait appel à la décomposition modale qui s'est révélée la plus intéressante pour la technique inverse utilisée. Rappelons donc que

- la stratégie utilisée pour l'algorithme 1 (S1) est une approche spectrale modes de branche combinée avec l'optimisation séquentielle de Beck (Section 4.1) ;
- la stratégie utilisée pour l'algorithme 2 (S2) est une approche itérative de type Gradient Conjugué (CGM-TSVD - section 4.3) basée également sur une approche spectrale.

Pour cette comparaison, nous retenons pour les 2 cas-tests les conditions aux limites du chapitre 4.3.3 : Flux non nuls, exponentiels en temps.

Pour un bruit de $\sigma = 0.1K$, les résultats pour les deux cas tests sont présentés dans les figures (4.23), (4.24).

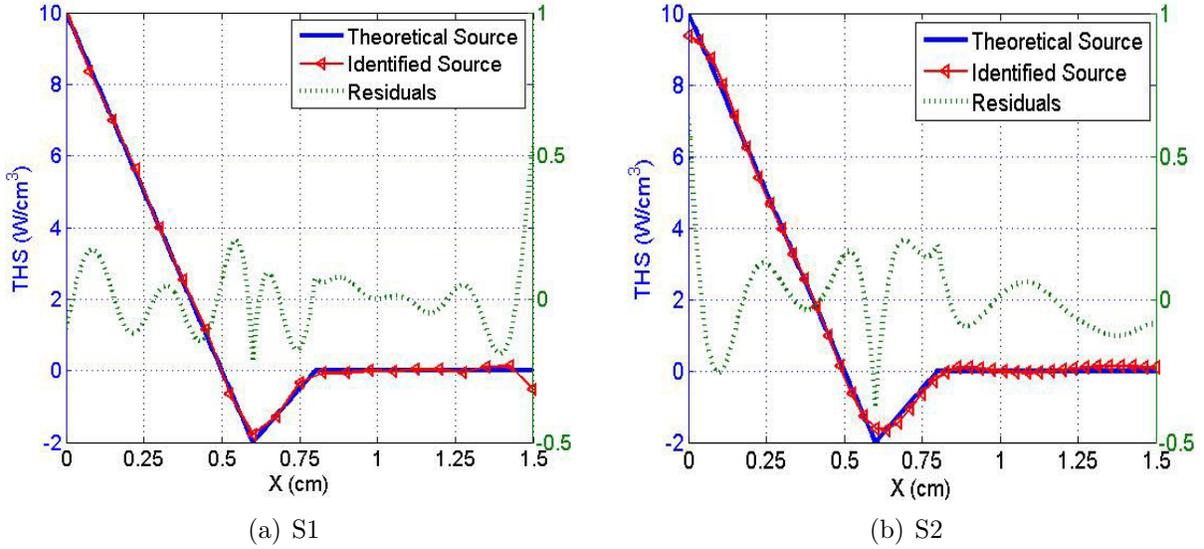


FIGURE 4.23 – **Cas-test 1** : Reconstruction de THS par S1 et S2 - $t = 10s$, $\sigma = 0.1K$

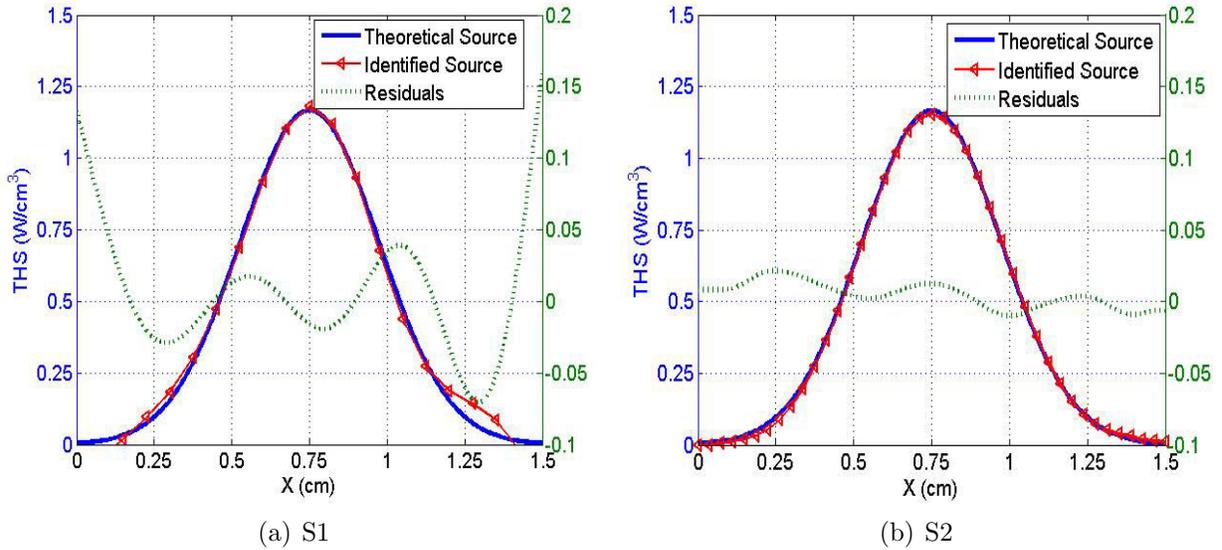


FIGURE 4.24 – **Cas-test 2** : Reconstruction de THS par S1 et S2 - $t = 10s$, $\sigma = 0.1K$

Au niveau du cas test 1, nous utilisons pour S1 $N_m = 15$ modes de branche contrôlés par nos critères et $N_{t_f} = 10$ pas de temps futurs (2.5% du temps total). Pour S2, nous utilisons $N_m = 18$ modes de Fourier de type “cos”. A convergence, les écart-types atteints sur les résidus en température (4.35) sont respectivement de 0.10067 pour S1, et 0.10070 pour S2.

Sur la source, on obtient des erreurs relatives de, respectivement, 3.17% pour S1 et 3.69% pour S2.

Au niveau du cas test 2, $N_m = 8$ modes de branche sont requis par l’algorithme S1 et $N_m = 18$ pour S2. A convergence, les écart-types atteints sur les résidus en température (4.35) sont respectivement de 0.1001 pour S1, et 0.10070 pour S2. Sur la source, on obtient des erreurs relatives de, respectivement, 7.17% pour S1 et 1.63% pour S2. Les différences de comportement entre les 2 algorithmes sont subtiles mais peuvent être néanmoins mises en évidence. Pour ce niveau de bruit, on peut constater, à partir des figures (4.23a) et (4.23b), que les modes de branche pour S1 réussissent très bien à reproduire le comportement de la source au bord $X = 0\text{cm}$, contrairement aux modes “cos”. Dans ce cas, S1 et S2 fonctionnent de manière satisfaisante. Pour le cas-test 2, S1 apparaît comme moins performant, toujours en raison du comportement au bord. La raison en est une différence des rapports signal sur bruit. A $t = 10\text{s}$, un bruit de $\sigma = 0.1\text{K}$ correspond à $\text{SNR} = 175$ pour le cas test 1, mais seulement $\text{SNR} = 16$ pour le cas test 2. De manière générale, S2 demande un peu plus de temps de calcul, mais est plus performant quand le niveau de bruit augmente, ce qui est mis en évidence dans les figures (4.25a) et (4.25b). Pour ce niveau de bruit, le nombre de modes de branche requis par S1 est de $N_m = 11$, ce qui présente un fort effet de filtrage par rapport au cas de $\sigma = 0.1\text{K}$. Par contre, S2 utilise toujours le même nombre de modes de Fourier ($N_m = 18$), donc conserve suffisamment de modes haute fréquence pour améliorer les résidus d’identification de la source. L’erreur relative avec S1 est de 6.15% contre 4.72% avec S2. On voit donc que l’augmentation du bruit, dégrade la qualité de la solution fournie par S1 (écart plus important sur les bords), mais la préserve avec S2, qui apparaît donc plus stable. L’augmentation du nombre de pas de temps futurs pour S1 (paramètre sur lequel on peut jouer) ne permet pas d’améliorer les résultats. Dans le cas où la source est variable en temps et en espace, ce type de régularisation, propre à l’approche de Beck, n’est de toutes façons pas adapté puisqu’il biaise fortement la solution (décalée en temps). Nous pouvons maintenant conclure ce chapitre par quelques remarques générales venant compléter ce comparatif entre les méthodes.

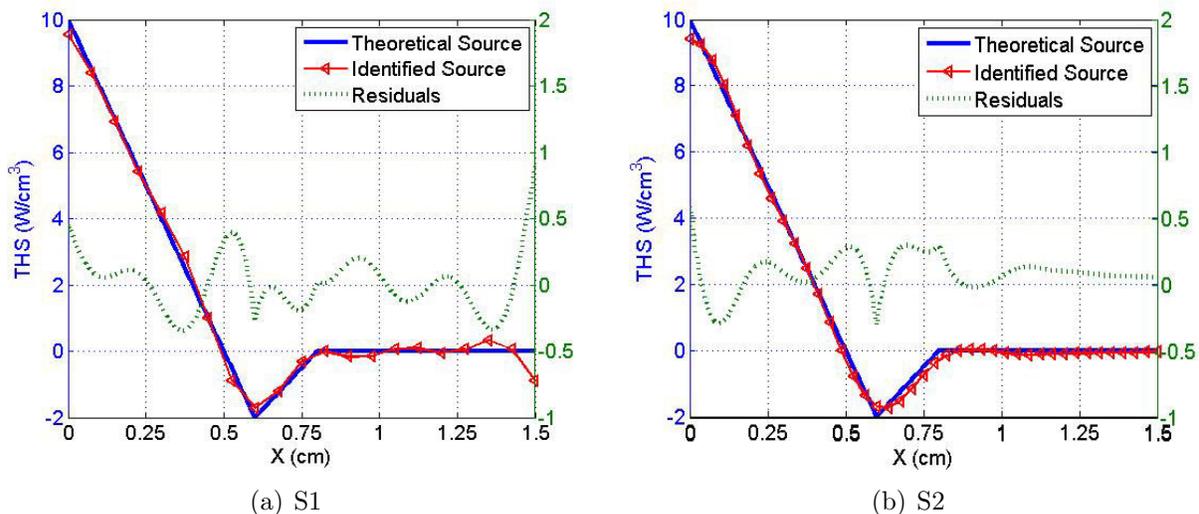


FIGURE 4.25 – Cas-test 1 : Reconstruction de THS par S1 et S2 - $t = 10\text{s}$, $\sigma = 0.3\text{K}$

4.5 Remarques de conclusion

Globalement les résultats des simulations d'inversion montrent que les deux méthodes mises en œuvre au cours de cette thèse conduisent à des performances quasi identiques. Ceci est très rassurant avant de se confronter aux données expérimentales. Quelle que soit la méthode, nous avons vu qu'il est impératif de régulariser le problème inverse. Ces deux algorithmes vont être utilisés au chapitre suivant pour reconstruire des sources thermiques à partir de données réelles et nous définirons les modalités pratiques de mise en œuvre pour chacun d'eux. Mais nous pouvons déjà discuter de leurs différences principales :

1. Une première différence est d'une importance capitale s'agissant d'un problème inverse portant finalement sur du traitement d'images : le temps de calcul. L'algorithme S1 est beaucoup plus rapide. C'est le corollaire classique lié à un traitement plus analytique que numérique du problème mathématique : nous rappelons qu'une formule permet de calculer les états de décomposition de la source de manière formelle avec S1. Le rapport entre les temps d'exécution sur un même cas peut varier dans un rapport de 4 à 20 (par exemple, pour le cas de Fig.4.23, le rapport de S2/S1 est de 62.2 s/15.5s). S'il est pratiquement invariable pour S1 (fonction uniquement du nombre de pas de temps futurs), il peut varier de manière plus conséquente pour S2 si le bruit est faible (conduisant à rechercher une minimisation du critère à plus bas niveau).
2. Une seconde différence porte sur l'aspect régularisation des deux méthodes. Dans les deux cas, le recours à une décomposition spectrale (quasi-solution) offre un moyen identique pour les deux méthodes pour régulariser sur la composante de champ spatial. La stratégie diffère par contre pour la régularisation temporelle et peut affecter la solution d'un biais. Dans le cas séquentiel, quelques pas de temps futurs suffisent généralement pour "lisser" l'influence du bruit mais sont réglés plus ou moins empiriquement et peuvent donc introduire un décalage temporel dans la reconstruction. Ceci est particulièrement pénalisant pour les dynamiques rapides comme on le verra dans la partie expérimentale, lorsqu'il s'agit de rendre compte des sources liées à la contribution de la thermoélasticité (par définition "instantannée"). Par contre, dans le cas de S2, la régularisation temporelle est globale et réglée par un critère net : le "discrepancy principle".
3. Enfin, une troisième différence réside dans l'aptitude des méthodes à reproduire le comportement des sources aux bords du domaine, pour lequel le choix de la base de décomposition devient important. Nous avons vu que la base de branche, plus générale, répond a priori bien à cette préoccupation (à bas niveau de bruit) mais perd rapidement en performance dès que le bruit augmente. La base de Fourier utilisée dans S2, si elle permet de réduire le temps de calcul sur chaque itération, présentera par contre toujours des difficultés à rendre compte de situations variées aux bords (phénomène de Gibbs). Cela ne remet pas en question l'usage de cette base pour traiter les données expérimentales puisque les conditions aux limites sont finalement proches de la condition de flux nul (d'un côté par symétrie, de l'autre par effet de distance éloignée des zones à forts gradients). Nous comparerons à nouveau ces 2 méthodes dans le chapitre 5 suivant, lors du traitement des données expérimentales.

Chapitre 5

RESULTATS DE THESE

Sommaire

| | |
|---|------------|
| 5.1 Cinématique de la striction (localisation) | 110 |
| 5.1.1 Contexte scientifique-Etat de l'art-Apport de nos travaux | 110 |
| 5.1.2 Mesures cinématiques | 114 |
| 5.1.3 Analyse du concept de Natural Draw Ratio | 129 |
| 5.1.4 Considérations liées à l'estimation inverse des THS | 136 |
| 5.2 Sources thermiques reconstruites à partir des données expérimentales | 138 |
| 5.2.1 Approche diffusive versus advecto-diffusive | 138 |
| 5.2.2 Performances de reconstruction | 140 |
| 5.2.3 Analyse thermomécanique | 149 |

Ce chapitre présente les résultats obtenus au cours de cette thèse qui sont issus de l'expérimentation. Il se concentre dans une première partie (paragraphe 5.1) sur les résultats expérimentaux issus de l'utilisation des techniques de mesures cinématiques plein-champ pour la mesure de profils de vitesse. Néanmoins, la richesse des résultats obtenus nous ayant permis de démarrer une analyse relativement fine du phénomène de striction et de son développement, nous nous sommes autorisés à dépasser le cadre strict de l'étude motivant cette thèse pour discuter de ces différents aspects. Le lecteur se fera ainsi une idée claire, si besoin était, de l'apport que peuvent constituer des résultats de cette nature et surtout comment ils viennent avantageusement enrichir la perception purement dynamique que l'on a de ce phénomène à travers les essais mécaniques classiques.

Avec l'obtention de champs de vitesse 2D (ou plutôt de profils de vitesse 1D), indispensables pour prendre en compte la composante advectée du transfert de chaleur dans la modélisation des transferts thermiques, nous prenons en compte ces mesures dans le paragraphe 5.2 pour appliquer les algorithmes évoqués au chapitre 4 aux données expérimentales d'imagerie infrarouge et ainsi, reconstruire les sources thermomécaniques.

| | |
|--|--|
| DIC : Digital Image Correlation | NDR : Natural Draw Ratio |
| EF : Eléments Finis | PSC : Polymères Semi-Cristallins |
| HDPE : PolyEthylene Haute Densité | THS : Sources de Chaleur Thermomécaniques (Thermomechanical Heat Sources) |

5.1 Cinématique de la striction (localisation)

5.1.1 Contexte scientifique-Etat de l'art-Apport de nos travaux

Parmi les problèmes difficiles en mécanique des matériaux solides “standard”, celui de la bonne compréhension du développement des instabilités plastiques (phénomène de striction) reste posé [89]. Ce phénomène s’explique de façon simple en posant l’existence d’un “point” faible dans le volume du matériau. Cette zone induit une forte hétérogénéité locale des contraintes en y concentrant la transmission des efforts (zone de moindre résistance) qui compte-tenu du comportement intrinsèque propre à chaque matériau peut le faire localement changer d’état rhéologique (par exemple élasticité → plasticité). C’est un phénomène de grande importance dans les procédures de mise en forme pour permettre de prédire correctement l’évolution géométrique des pièces (leur formabilité) et prévenir les fractures ductiles ou déchirements.

Concernant les questions de recherche fondamentales, les points clés sur lesquelles des progrès peuvent être attendus sont :

- Une phénoménologie plus fine du déclenchement des instabilités et de leurs caractéristiques cinétiques d’évolution (taille, vitesse de propagation, intensité des effets thermomécaniques...), ainsi que de leurs marqueurs microstructuraux.
- Une meilleure modélisation des lois de comportement (transition critique de la viscoélasticité vers la plasticité, le durcissement et la rupture) et tout particulièrement l’amélioration de critères prédictifs moins sensibles aux trajets de chargement et aux dépendances en vitesse.
- La possibilité de faire que les deux points soulevés précédemment se rejoignent au sein d’une simulation numérique (de type EF) menée à l’échelle d’une structure macroscopique et qu’une bonne reproduction du comportement complet soit observée. Un bon exemple en est le travail mené par Sweeney et al. [90] sur le polyéthylène : les auteurs partent d’une théorie comportementale du matériau qu’ils enrichissent d’un paramétrage en déformation effective pour assurer une relative compatibilité entre différents tests, introduisent cette loi de comportement dans Abaqus, simulent les tests opérés dans la pratique et visent une comparaison des résultats obtenus par rapport à l’expérience sur la base d’un certain nombre d’observables : courbes de traction, forme des éprouvettes “strictionnées”, dépendance de la contrainte à la vitesse de déformation.

Concernant ce dernier objectif, toutes les études antérieures visent essentiellement à une bonne reproduction des caractéristiques globales mesurées. Obtenir par exemple un séquençage correct, en termes de valeurs de déformation, des phases d’élongation, d’initiation de la striction diffuse puis de sa localisation constituait en soi un beau résultat. Avec le développement intensif au cours des 3 dernières décades, des méthodes de mesure vidéo et donc sans contact [91], il est maintenant possible de confronter les simulations numériques sur des observables locaux et non plus globaux, ce qui a toutes les chances de remettre en question les modélisations précédentes.

Historiquement, il est intéressant de noter que c’est l’imagerie infrarouge qui a d’abord été utilisée pour caractériser expérimentalement la striction. Le champ de température en sur-

face d'une éprouvette était considéré comme un bon marqueur du phénomène de localisation en raison des sources thermomécaniques exothermiques à l'œuvre dans le matériau, dans cette phase particulière de son évolution vers la plasticité et/ou l'endommagement [20, 92]. Le développement conjoint de caméras CCD très performantes, d'ordinateurs rapides et de traitements mathématiques applicables sur une très grosse masse de données, a rendu possible l'exploitation relativement récente de données cinématiques issues de techniques de mesure plein-champ. Dans les travaux de Guelorget et al. [93], la technique dite d'électronique speckle pattern interferometry (ESPI) est appliquée à des éprouvettes plates de cuivre durant un test de traction. Les auteurs établissent par cette technique un profil de vitesses de déformation dans la direction transverse de l'éprouvette, là où se développe la localisation. Ils en déduisent ainsi l'évolution en taille (largeur) de la bande de cisaillement qui s'y développe. Mais la technique la plus répandue actuellement dans les laboratoires pour obtenir des mesures de champ de déplacement est basée sur le principe de corrélation d'images numériques (DIC). De nombreuses contributions importantes sur ce sujet ont marqué le début de l'expansion de la technique. Dans les travaux de Watrisse et al. [94], le développement d'une procédure DIC-2D est exposée qui permet de réaliser des mesures de déformations dans le plan et dont il est montré tout l'intérêt pour comprendre l'initiation et le développement de la localisation dans des spécimens d'acier doux. Grytten [95] a étudié la déformation en grandes transformations de thermoplastiques ductiles (composites PolyPropylène chargés en Talc ou élastomère) en utilisant de la stéréo corrélation d'images (3D-stéréoDIC). L'étude s'attache à montrer les erreurs faites sur les courbes contrainte-vraie-déformation vraie lorsqu'on se limite à pratiquer la vidéo-extensométrie sur la seule face avant c'est-à-dire en se basant sur des hypothèses d'isotropie transverse ou de déformation isovolume. De fait, la contribution intéressante apportée par ce travail réside dans les mesures de déformation volumique et de coefficients de Poisson ainsi que dans l'effet d'anisotropie constaté dans le plan transverse, perpendiculaire à la direction d'écoulement. Les études de Besnard et al. [96] portent sur la cinématique de la localisation de déformation dans le cas de très fortes vitesses de déformation (typiquement obtenues dans les essais mécaniques basés sur les barres de Hopkinson). Sur des échantillons d'aluminium, ils observent des zones de localisation multiples et réalisent des analyses quantitatives basées sur l'évolution dimensionnelle de la forme libre de l'éprouvette et des mesures de champ de déformation. La stéréo-corrélation d'images qui permet d'adjoindre une mesure de déplacement hors-plan (qui bien que restant une mesure de déplacements de points d'une surface a reçu l'appellation communément admise de 3D-DIC) est intéressante quand on étudie les phénomènes de localisation.

Lauro et al. [97] ont utilisé un dispositif 2D-DIC pour suivre l'hétérogénéité du champ de déplacement à la surface d'un polymère soumis à un chargement en traction. Il s'agissait de PolyPropylène (PP) chargé à 20% en volume de Talc. Dans le cas de tests dynamiques à vitesses de déformation suffisamment élevées pour qu'un phénomène de striction apparaisse, les mesures 2D de champ sont exploitées de manière à reconstruire des cartes de déformation, vitesses de déformation et contraintes (moyennant une hypothèse d'incompressibilité ou d'isotropie transverse).

L'idée est d'extraire dans un seul essai toutes les relations entre mesures locales, sans contrôle particulier de l'expérience, en profitant au maximum de l'hétérogénéité des mesures de déplacement. A partir de ces données, ils construisent la surface SEÉ, représentation graphique qui permet de concentrer l'ensemble des résultats expérimentaux dans un dia-

gramme Contrainte(S)-Déformation(E)-Vitesse de déformation(\dot{E}). Ces données constituent ensuite la base d'une méthodologie pour identifier la loi de comportement du matériau testé (mais non mise en oeuvre dans l'article). Un travail assez similaire a été mené par Uchida et al. [98], qui ont étudié le phénomène de striction sur deux polymères semi-cristallins (HDPE et PP) pendant des essais de traction, et en utilisant une technique DIC-2D. Les auteurs ont évalué des déformations, taux de déformations, contraintes vraies locales (moyennées sur la section droite) à partir de mesures de champ réalisées par une approche en grille de points et un calcul itératif séquentiel pour rendre compatible la déformation estimée avec la position d'arrivée du point (network DIC). Là aussi, l'hypothèse d'incompressibilité des matériaux est utilisée pour produire l'observable de contrainte à partir de mesures cinématiques purement 2D. Ajoutons encore que dans ce travail, la forme haltère des éprouvettes qu'ils ont utilisé ne permet pas de contrôler la localisation de la striction ni sa géométrie (oblique dans le cas d'HDPE et transverse pour PP), ce qui rend difficile l'identification d'une caractéristique commune du phénomène pour la classe des semi-cristallins par exemple. Les expériences ont été menées à vitesses de déplacement de traverse constantes mais des résultats intéressants ont été obtenus qui montrent le niveau atteint localement par les gradients de déformation ou de taux de déformation dans la zone de striction. L'absence d'un contrôle des essais en vitesse de déformation fait que les auteurs normalisent les profils de taux de déformation par un rapport V/L_0 ce qui en limite l'intérêt immédiat.

Dans la publication de Tabourot et al. [99], les résultats expérimentaux obtenus par DIC dans le plan sur des échantillons d'aluminium sont utilisés en combinaison avec des sorties de simulation produites sous Abaqus. Une loi élasto-plastique est choisie et les données expérimentales sont utilisées comme entrées pour produire des simulations à partir desquelles les auteurs établissent un critère réaliste permettant de déterminer l'instant de déclenchement de la striction.

Mais le travail peut-être le plus proche du nôtre est très récent et il est du à Poulain et al. [100]. Dans ce travail expérimental, les mesures de déformation plein-champ sont utilisées en combinaison avec de la vidéoextensométrie radiale et de suivi de marqueurs pour étudier l'inhomogénéité de déformation d'un polymère thermodur (résine epoxy). L'objectif était de comprendre l'origine des écarts obtenus lorsque des hétérogénéités de déformation apparaissent en fonction de la technique vidéoextensométrique utilisée (DIC ou suivi de marqueurs). De plus, il s'agissait de proposer une méthodologie robuste pour révéler le comportement intrinsèque des polymères étudiés à partir de la réponse mécanique à des essais de traction-compression. La méthode exposée se révèle applicable en présence d'instabilités structurales modérées mais ne repose pas réellement sur une étude cinématique détaillée du phénomène de striction. Dans les travaux menés au LEMTA [56], les techniques de 3D-stéréoDIC et Vidéoextensométrie 2D par suivi de marqueurs sont comparées dans le cadre de mesures de déformation volumique. L'un des objectifs est de discuter des erreurs commises avec cette dernière technique sous l'hypothèse d'incompressibilité matériau. Il s'agit bien de montrer en quoi il est souhaitable et tout particulièrement quand on s'intéresse aux phénomènes de localisation- de privilégier la première de ces deux techniques essentiellement parce qu'on élimine deux sources possibles de biais de mesure : on s'assure tout d'abord d'une bonne mesure des composantes accessibles du tenseur de déformation dans le plan de référence, même si la surface de mesure évolue dans sa courbure, ce qui est le cas lors de la striction (cf chapitre 2) ; on corrige naturellement les mesures de l'effet du déplacement hors-plan dans

les épaules de striction, qui engendre des changements de grandissement d'image dans le cas ou une seule caméra est utilisée. Les erreurs de mesure résultant de l'utilisation de dispositifs 2D-DIC et 3D-DIC dans le cas d'une composante de déplacement hors plan (translation et rotation de la surface de mesure) sont par ailleurs bien analysées dans les travaux de Sutton et al. [101].

Pour conclure cette revue non exhaustive mais dans laquelle nous avons privilégié les travaux les plus récents et/ou significatifs sur le sujet, nous citerons encore les travaux de Maj [102] qui confrontent à la fois les données visibles et infrarouges mentionnées dans cet état de l'art pour mieux comprendre la striction. Les champs de température et de déformation sont enregistrés pour un essai de traction sur une éprouvette métallique et le déclenchement de la localisation de la déformation plastique est déterminé en utilisant un critère qui repose sur un niveau de température seuil approprié. Il est relevé que, plus la vitesse de déplacement de traverse imposée est rapide, plus ce critère fonctionne bien pour détecter le même déclenchement de la striction (les effets thermiques peuvent être considérés comme adiabatiques et procèdent d'une thermalisation très rapide des puissances internes).

Ce dernier travail rappelle ainsi combien les études d'instabilités de type localisation de déformation ont relevé à la fois d'analyses purement cinématiques ou liées aux effets thermiques induits. Ce double aspect est bien sûr également une caractéristique de ce travail de thèse qui s'inscrit ainsi dans la suite des travaux que nous avons mentionnés.

Le premier objectif de ce chapitre (section 5.1.2) est tout d'abord de concentrer tous les résultats expérimentaux obtenus sur le plan cinématique et qui peuvent servir de base de données pour tester l'efficacité de modèles utilisés dans des codes EF vis-à-vis de la propagation d'instabilités plastiques [103]. Dans les études de type benchmark liées à la striction, l'efficacité de modélisations/simulations EF est généralement jugée sur la base d'une reproductibilité qualitative d'observables macroscopiques globaux (courbes contrainte-déformation, évolution du rayon de la section pour les éprouvettes cylindriques, niveau de la contrainte seuil pendant la propagation...). Dans certains cas, elles sont directement comparées à des données expérimentales [104, 105]. Mais cela reste rare et souvent le fait de travaux réalisés il y a plus de 20 ans avec à l'évidence des instruments de métrologie qui n'ont plus rien à voir avec ceux utilisés de nos jours. En général, les simulations EF sont capables de reproduire les caractéristiques générales du phénomène de striction. Mais les travaux que nous avons étudié montrent dans l'ensemble que de grosses différences subsistent dans les prédictions quantitatives faites pour différents observables, qui d'ailleurs dépendent des outils ou recettes numériques utilisées pour développer les codes de calcul (voir par exemple [106]). Dans un proche avenir, les dispositifs de mesure plein-champ vont permettre des progrès substantiels pour juger de la pertinence des différentes méthodes numériques couplées aux modèles de comportement. Une illustration intéressante en est le travail publié par Muhammad [107], dans une application concernant HDPE. Il est également crucial de valider ou confronter les théories de la striction élaborées sur la base de la cinématique associée à leur développement, comme celle développée par exemple par Leonov [108], où des considérations simples sont introduites en termes de fonctions de l'énergie de déformation pour les phases amorphe et cristalline.

Bien que cela sorte des objectifs initiaux de cette thèse, la richesse des informations cinématiques obtenues nous a conduits à développer une analyse du développement de la striction pour les polymères semi-cristallins. Les connaissances actuelles se résument essentielle-

ment à ceci : la localisation correspond à un maximum de la force de traction enregistrée, au développement d’une altération géométrique de la forme de l’échantillon (en forme de “goulot” ou neck en anglais), jusqu’à une valeur typique (appelée Natural Draw Ratio) à partir de laquelle la striction se propage à une contrainte normalisée constante (plus de variation de contrainte). Nous apporterons en section 5.1.3 quelques données quantitatives extraites des informations cinématiques afin d’analyser plus précisément ces différentes phases et pour envisager leurs relations aux différentes évolutions microstructurales du matériau. En section 5.1.4, nous présenterons à partir des mesures obtenues de champs de vitesse, une courte analyse dimensionnelle (d’ordres de grandeur) visant à anticiper les résultats de l’approche inverse de reconstruction de source intégrant les effets diffusifs et advectifs du transfert de chaleur. Ceci nous permettra une transition directe sur le paragraphe 5.2 qui en exposera justement tous les résultats.

5.1.2 Mesures cinématiques

Nota : Ce paragraphe aurait pu donner lieu à une profusion de figures, courbes et résultats graphiques basés sur la reproduction des déplacements, déformations, vitesses, taux de déformation, pour les différentes composantes spatiales X, Y, Z, XY , pour les 4 différents tests (vitesses de traction) et démultipliés encore par des représentations 2D ou 1D et lagrangiennes ou eulériennes. Conscient que cela aurait contribué à rendre les résultats obtenus moins assimilables par le lecteur, nous avons volontairement opéré un choix drastique dans les figures présentées, uniquement guidés par les motivations scientifiques sous-jacentes et le souhait de rendre lisible la logique déductive que nous y avons mise. Dans ce chapitre, la variable Y est associée à la direction longitudinale de traction, les variables X et Z aux directions transversales et hors-plan (sens de l’épaisseur).

On rappelle que les résultats sont également analysés à travers 6 états de déformation sélectionnés à l’issue du travail expérimental pour présenter les résultats et qui sont indexés sur la valeur de déformation mesurée au centre de l’éprouvette.

5.1.2.1 Mesures de champs 2D

Toutes les figures 2D sont représentées dans le système de coordonnées eulériennes (configuration d’observation fixe qui “voit” évoluer la structure qu’elle renferme) avec une échelle de graduation exprimée en vraies valeurs (mm) mais sans que ne soit respecté le rapport d’aspect des directions X et Y pour des raisons de lisibilité des figures.

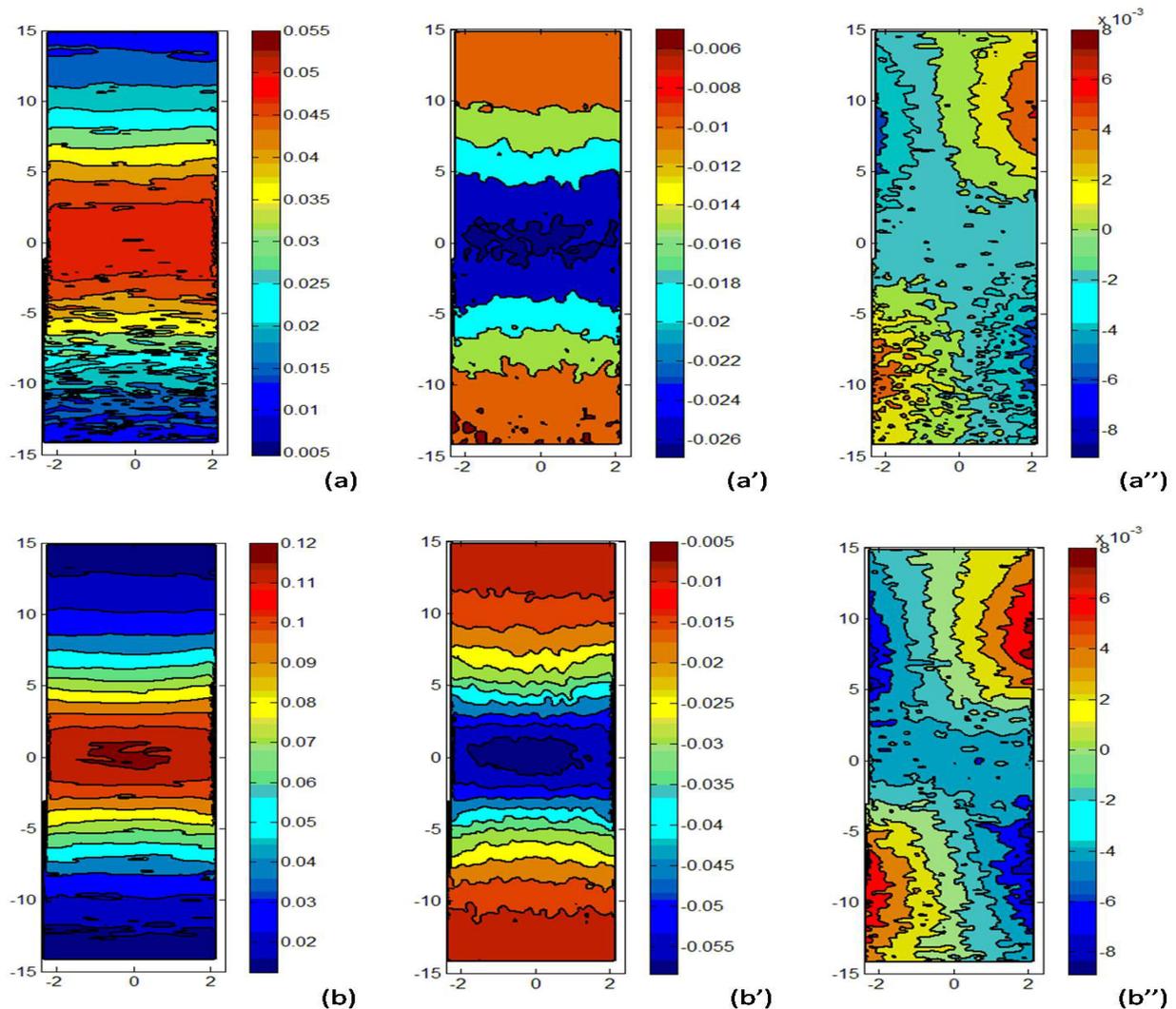
Champs de déformation

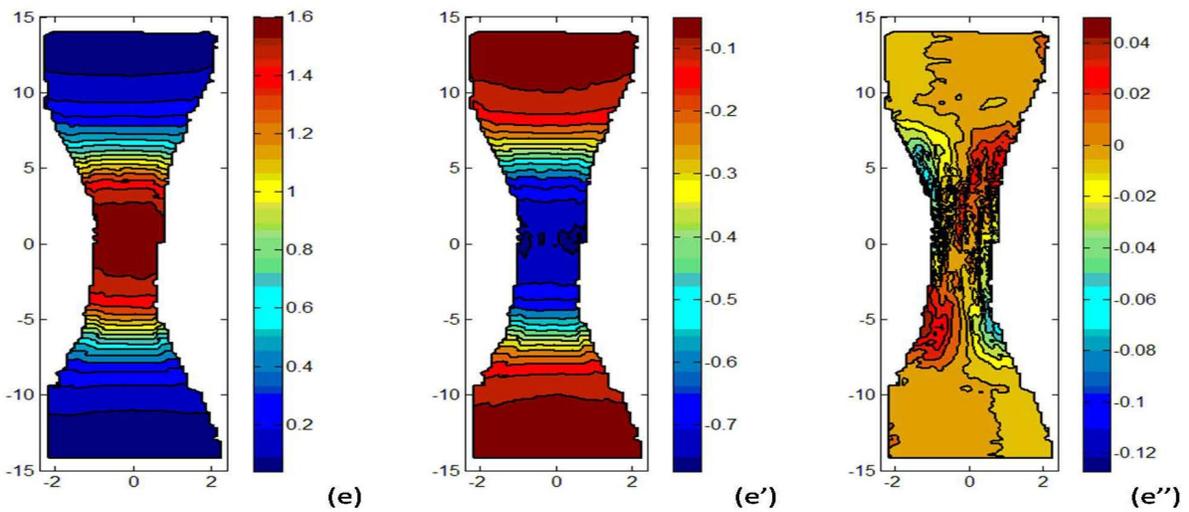
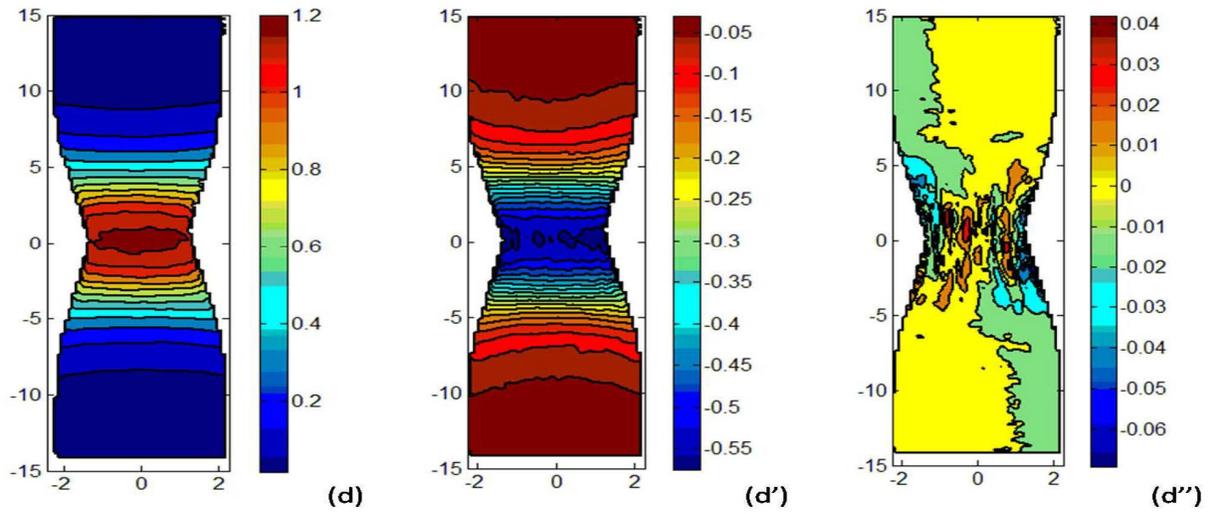
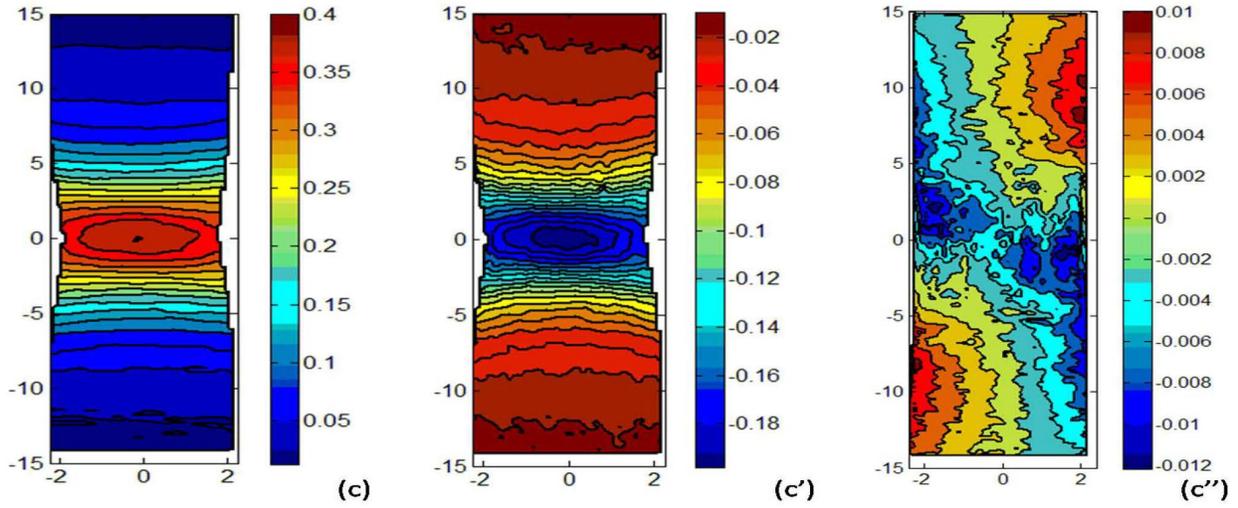
La figure (5.1) ci-dessous présente en iso-contours les champs de déformation $\varepsilon_Y, \varepsilon_X, \varepsilon_{XY}$ (Colonnes) aux différents niveaux de déformation vraie A,B,C,D,E,F (lignes) retenus au chapitre 2 (cf courbe de traction Fig.2.3 - Chapitre 2).

Ces données correspondent à un essai de traction effectué à $\dot{\varepsilon} = 0.03s^{-1}$. Dans la première colonne (figures a-f), on voit clairement se concentrer la déformation longitudinale dans la partie centrale de l’éprouvette, suivant en cela le trajet de déformation imposé par la machine grâce à la mesure temps réel fournie par VidéoTraction en suivant les marqueurs inscrits sur la face opposée de l’éprouvette. Les cartes de déformation ont été obtenues jusqu’à une

déformation d'environ 2, selon le protocole détaillé au chapitre 2.

A une déformation de $\varepsilon = 1.8$, on peut constater une largeur de l'éprouvette qui n'atteint plus que 3 mm, ce qui correspond à la moitié de la largeur initiale. Une même vision du phénomène de striction est lisible à partir des cartes en ε_X (colonne 2, figs a'-f'). Ces deux observables ne laissent pas de doutes sur le caractère fortement 1D de ces cartes de déformation dans la zone centrale. Si l'on observe les valeurs de déformation en cisaillement ε_{XY} (Colonne 3, Figs a''-f''), on peut vérifier qu'elles se maintiennent à des niveaux très bas durant tout le test. Elles sont nulles dans la zone centrale, le long de l'axe central de traction, et présentent un aspect anti-symétrique par rapport à l'origine du système d'axes de coordonnées. Les plus fortes valeurs sont obtenues dans les zones de courbure du profil de l'éprouvette (section non uniforme) et particulièrement dans les épaules de striction. Il est intéressant de noter que l'activité de cisaillement la plus importante se localise au "pied" des épaules de striction (précisément là où la section soumise à un écoulement plastique se met à croître).





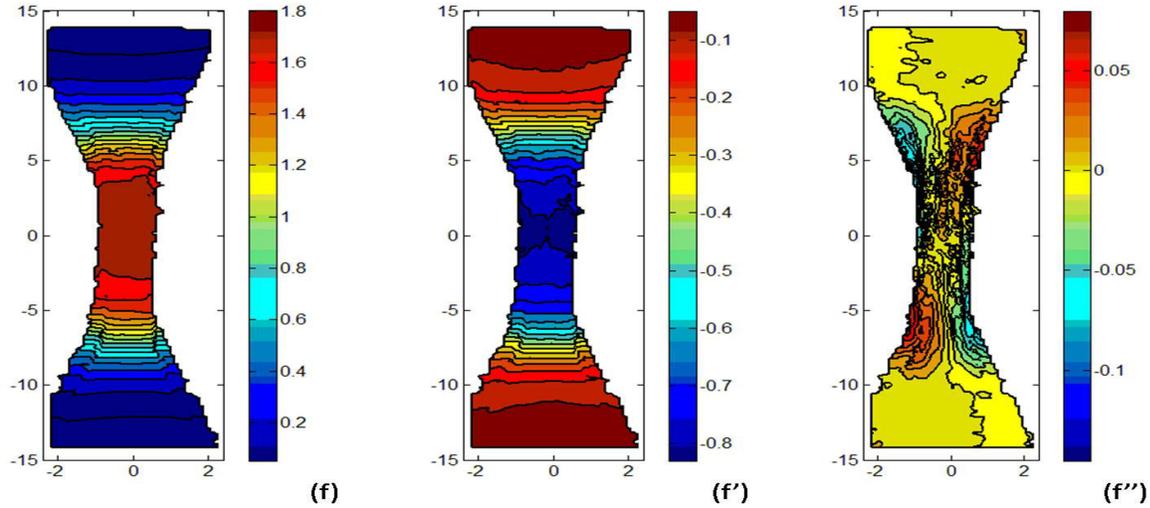


FIGURE 5.1 – Cartes des déformations $\varepsilon_Y, \varepsilon_X, \varepsilon_{XY}$ pour l’essai de traction $\dot{\varepsilon} = 0.03s^{-1}$ aux 6 états de déformation sélectionnés (A à F)

Il peut être vérifié sur les deux premières colonnes que les valeurs absolues de déformation longitudinales ε_Y et transverses ε_X restent dans un rapport d’environ 2 (approximativement ν^{-1} où le coefficient de Poisson $\nu \approx 0.5$). Aucune analyse néanmoins n’en sera extraite (pas plus qu’en termes de déformation volumique) puisqu’il a été clairement montré précédemment que des effets d’anisotropie se manifestent de façon non égale dans les directions transverses (X) et hors-plan (Z). Les seules mesures 2D dans le plan XY ne sont pas utilisées pour analyser le comportement en volume [56] (Farge et al, 2013).

5.1.2.2 Champs de vitesse

Concernant les champs de vitesses, les figures (5.2) et (5.3) donnent respectivement les courbes d’iso-contour de la norme du vecteur vitesse $\|\vec{V}(X, Y)\|$ ainsi qu’une représentation du vecteur vitesse, pour un test de $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$ et $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$ et ce, pour 4 états de déformation (A,B,C,F). Le même type de résultats est obtenu pour les autres vitesses d’essai. Il est d’abord important de noter le caractère fortement 1D des grandeurs présentées. Il sera par conséquent plus aisé de tirer des informations quantitatives de ces figures en analysant les profils 1D de ces grandeurs. Néanmoins, on peut déjà faire remarquer que les vitesses absolues les plus grandes sont obtenues aux temps courts (avant la contrainte seuil, point A) et qu’elles diminuent drastiquement dès l’installation de la striction diffuse (Point B). Ce n’est qu’en fin d’essai, pour des déformations supérieures à $\varepsilon_Y = 1.8$ (en partie centrale), que l’on revient à des valeurs de vitesses comparables à celles de début d’essai, dans les zones encore peu déformées. Il est clair également qu’alors que les effets de vitesse sont peu marqués sur la courbe de traction, ils deviennent très forts sur ces observables locaux. Entre les déformations A et B (2 premières colonnes des figures (5.2) et (5.3)) le rapport de diminution des vitesses maximum obtenues passe d’un facteur 2 ($0.1/0.05$) pour $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$ à un facteur 5 ($0.5/0.1$) pour $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$.

La figure (5.4) donne les cartographies de vitesses de déformations locales qui bien que plus bruitées (opération de dérivation numérique sur le temps) confirment ce caractère fortement

1D. Elles permettent également de bien identifier les zones d'activité plastique, où se localisent les déformations, dans les épaulements de striction (Fig. 5.4d, Point F). On remarquera sur cette même figure qu'alors que la déformation est pilotée en partie centrale à un niveau de $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$, on obtient des valeurs plus que doubles dans les zones de localisation.

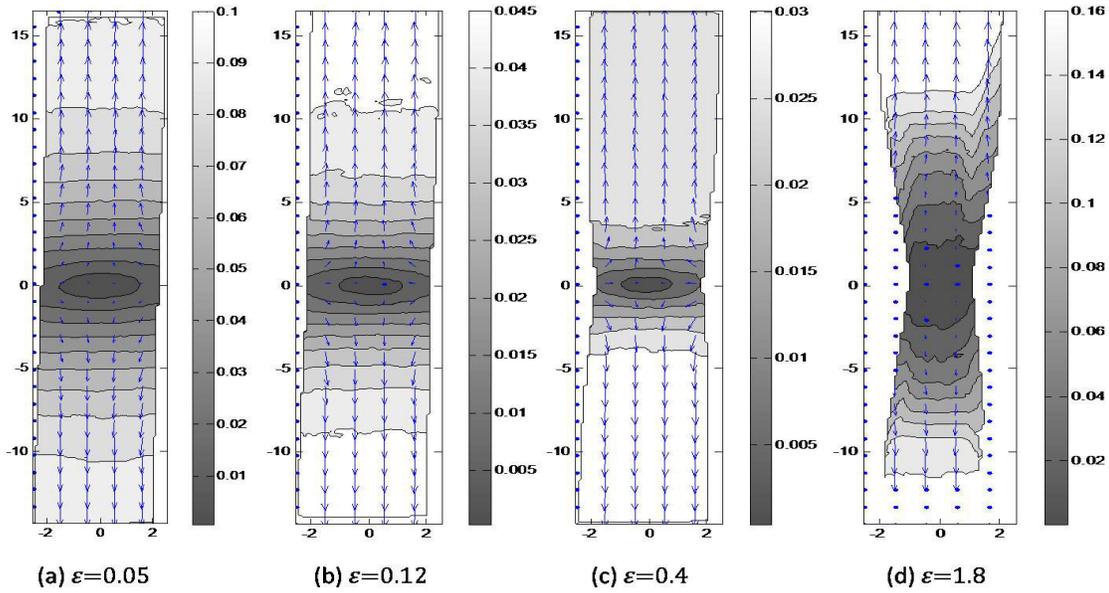


FIGURE 5.2 – Vecteur vitesse \vec{V} et sa norme $\|\vec{V}\|$ (mm/s) (iso-contours) pour $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$

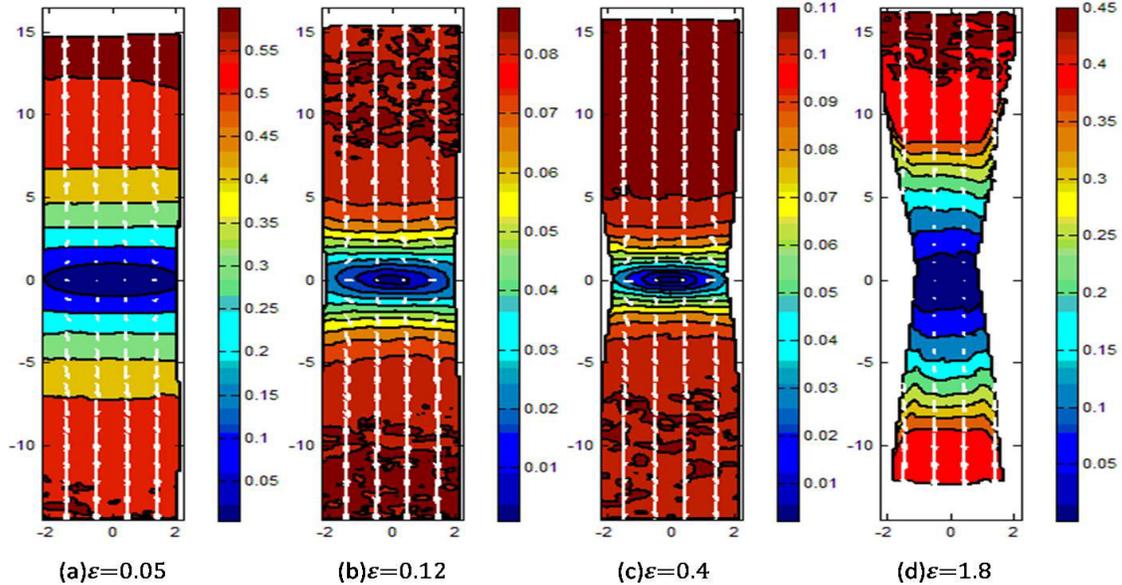


FIGURE 5.3 – Vecteur vitesse \vec{V} et sa norme $\|\vec{V}\|$ (mm/s) (iso-contours) pour $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$

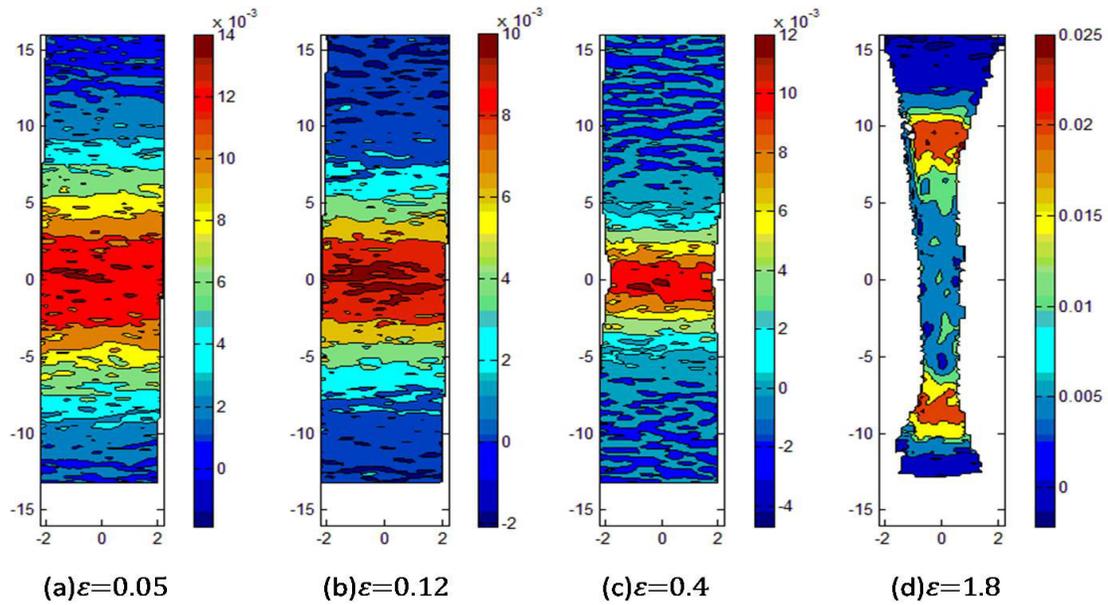


FIGURE 5.4 – Cartes iso-valeurs de l'intensité du vecteur gradient de vitesse (taux de déformation) pour $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$

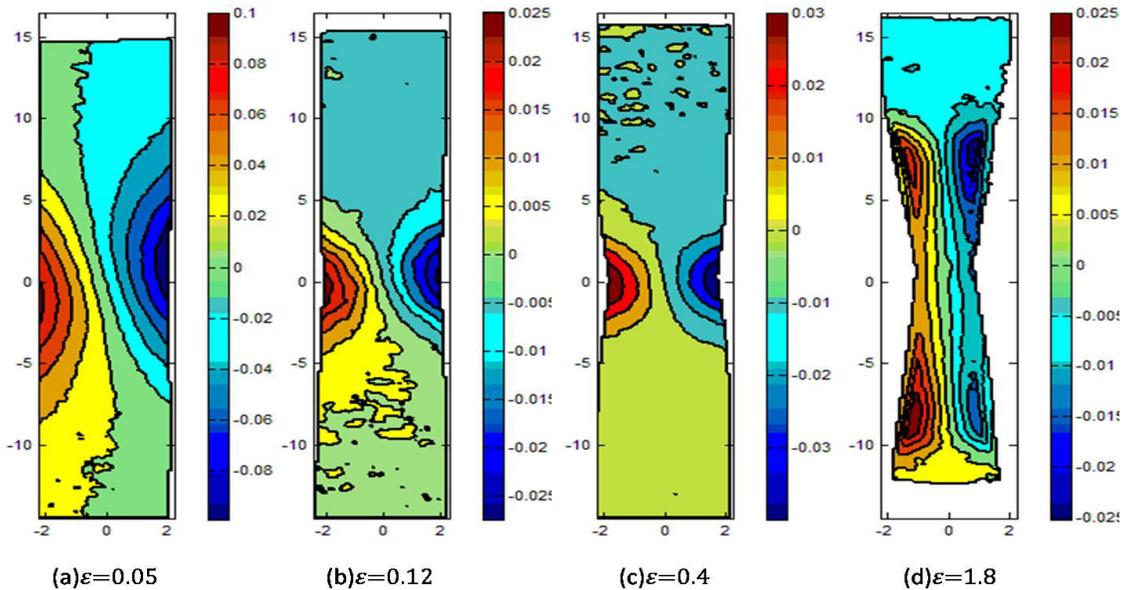


FIGURE 5.5 – Composante transverse du vecteur vitesse V_X (mm/s) pour $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$

La figure (5.5) représente la carte en isovaleurs de la composante transverse du vecteur vitesse soit $V_X(mm/s)$. Bien que le champ de vitesses soit manifestement 1D dans la direction de traction, il est possible de mesurer une composante de vitesse transverse essentiellement là où se produit la localisation (Figs.5.5 b&c). Dans la figure (5.5a), on peut relever une vitesse transverse maximum de l'ordre de $0.1mm/s$ sur les arêtes latérales de la partie centrale. Elle est donc d'un facteur 5 à 6 fois moindre que la vitesse longitudinale maximum obtenue aux extrémités de l'éprouvette (Fig.5.3a).

A propos de l’initiation de la striction, le commentaire suivant peut être fait. Au point de force maximum (Point A, Déformation de 0.05), la composante de vitesse transverse présente une distribution spatiale qui répond à la forme géométrique initiale de l’éprouvette. Au niveau de la contrainte seuil (Point B approximativement) la fig.5.5b montre que la striction est totalement enclenchée. Les iso-valeurs de V_X se bouclent précisément au niveau du plan médian (aux défauts de symétrie près de l’essai, qui sont assez visibles ici et dépendent d’un essai à l’autre, alors même qu’un dispositif est présent sur les mors pour assurer le même positionnement de l’éprouvette pour chaque essai). Une forte localisation se manifeste par les forts gradients de la grandeur observée. A ce propos, on peut faire remarquer qu’il est facile de suivre la dissociation de la localisation plastique selon 2 “épaules” qui survient aux grandes déformations. La figure (5.5d) permet d’identifier clairement ces 2 zones et d’en vérifier la symétrie par rapport au centre de l’éprouvette. La vitesse transverse V_X présente une valeur maximale en ces points de l’ordre de $0.02mm \cdot s^{-1}$ alors que la vitesse longitudinale V_Y y est de l’ordre de 16 fois plus grande.

Comme dit précédemment, ces mesures montrent également qu’il n’est pas facile d’assurer pour chaque essai que les axes de l’éprouvette coïncident avec les axes principaux de chargement de la machine. C’est pour cette raison que les essais ont été répétés un certain nombre de fois pour chaque vitesse de traction.

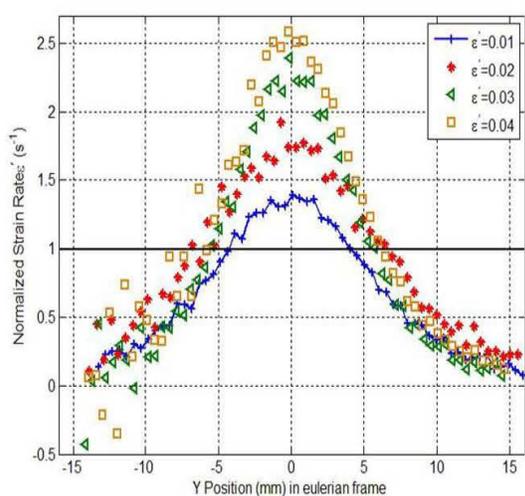
5.1.2.3 Mesures 1D (dans la direction de traction)

Taux de déformation

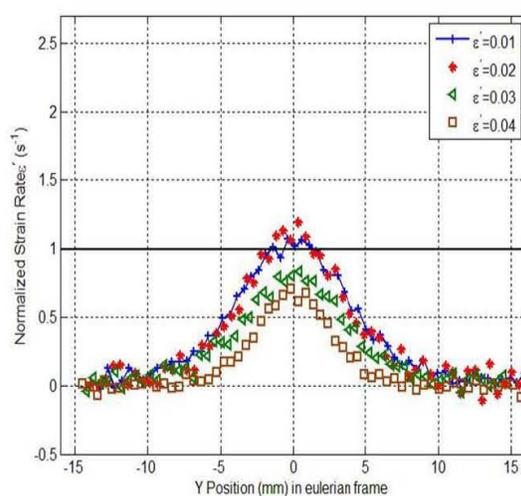
A partir des mesures séquentielles de déformation, nous pouvons calculer des dérivées temporelles numériques pour produire des profils de taux de déformation, selon la direction de traction. Malgré le soin apporté pour faire au mieux ces dérivées (schéma avec effet de filtrage limité), et parce que ces opérations sont très sensibles au bruit de mesure initial (or les déformations résultent elles-mêmes d’une première dérivation spatiale réalisée par Aramis, basée sur les mesures de déplacements), les signaux produits apparaissent naturellement très bruités. Les 6 figures ci-dessous (Figs.5.6 (A,B,C,D,E,F)) représentent les profils normalisés des taux de déformation ainsi obtenus, dans le système de coordonnées eulériennes (repère d’observation) et pour les 6 états de déformation étudiés. Chaque figure comporte les 4 profils obtenus pour les 4 vitesses imposées $\dot{\varepsilon}$. Elles permettent de voir plus clairement les défauts/difficultés de pilotage de l’essai à déformation imposée dans la partie centrale de l’éprouvette à ce fort niveau de vitesse. La normalisation est effectuée par rapport à la valeur théorique du taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ imposée par la machine dans la partie centrale de l’éprouvette, selon les mesures temps réel fournies par le vidéoextensomètre. La ligne horizontale épaisse ajustée à la valeur de 1 permet de la matérialiser. Les Figs.5.7(a,b,c,d) présentent les mêmes résultats, dans une même représentation, mais cette fois-ci, chaque figure correspond aux 4 taux de déformation considérés et présente les 6 profils obtenus pour les 6 états de déformation imposée de référence.

Les 6 figures (Fig.5.6) montrent clairement qu’au plus faible état de déformation retenu ($\varepsilon = 0.05$), le taux de déformation imposé en partie centrale est loin de respecter la consigne (et les écarts dépassent largement le niveau de bruit des mesures). Ce “biais” est d’autant plus prononcé que la vitesse de déformation imposée pour le test est importante. Les valeurs des gains PID ont été réglées à leur valeur optimale (ce qui a participé du nombre très important

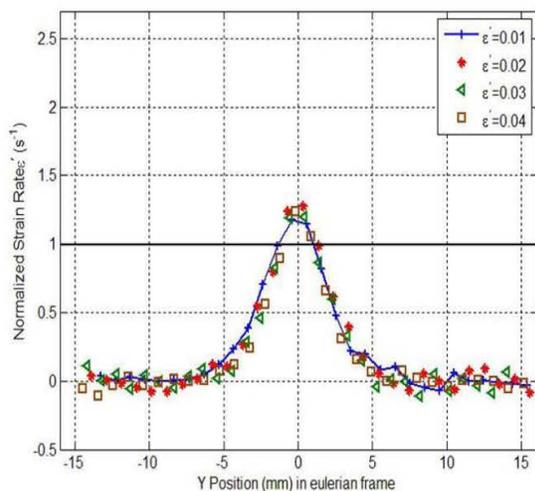
d'expériences réalisées) mais ne peuvent néanmoins assurer une régulation parfaite aux temps courts, particulièrement plus l'essai est rapide. Des essais à des taux de déformation inférieurs à $10^{-3} s^{-1}$ ne présentent pas ce défaut.



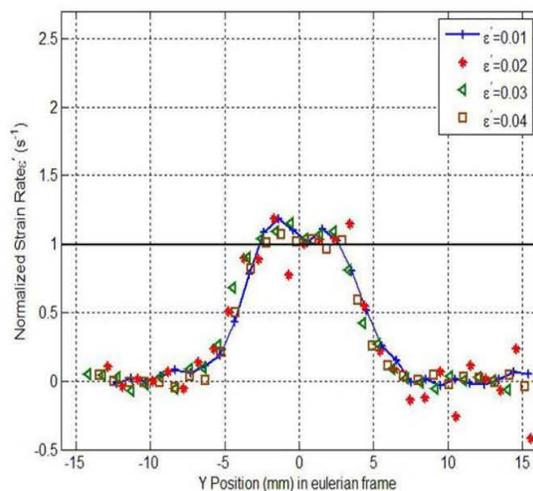
(A)



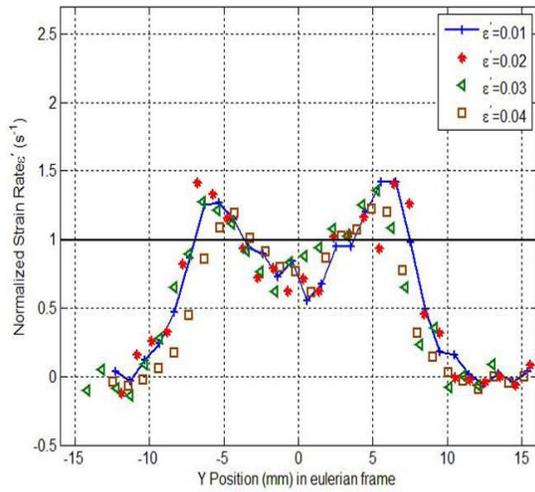
(B)



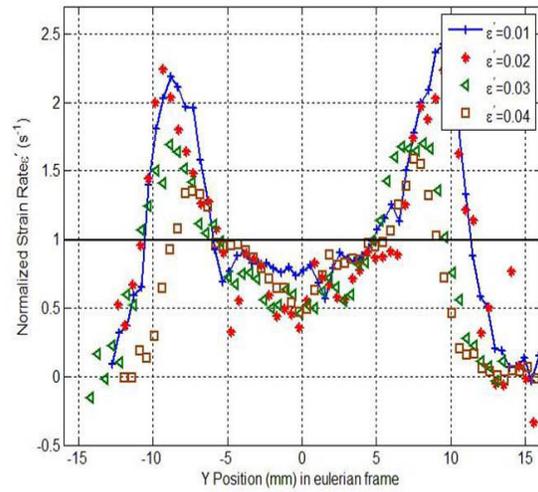
(C)



(D)



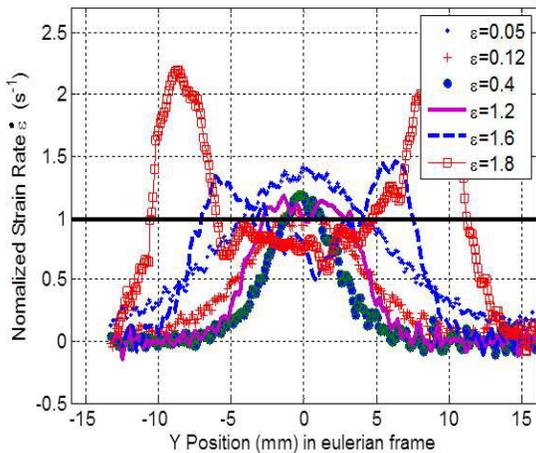
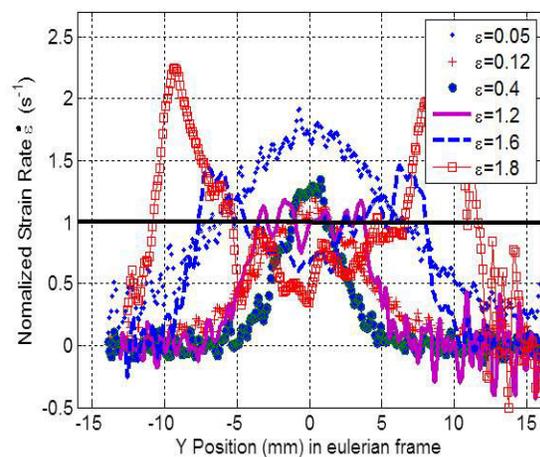
(E)



(F)

FIGURE 5.6 – Profils de taux de déformation normalisés $\dot{\epsilon}_Y(Y, t)/\dot{\epsilon}_0$ et mesurés par DIC pour les différents états de déformation (A) $\epsilon = 0.05$, (B) $\epsilon = 0.12$, (C) $\epsilon = 0.4$, (D) $\epsilon = 1.2$, (E) $\epsilon = 1.6$, (F) $\epsilon = 1.8$

Il convient néanmoins de noter à la fois la grande reproductibilité de ces mesures (y compris dans le côté systématique de leurs défauts) et le caractère symétrique attendu de ces mesures, qui permet éventuellement de moyennner plusieurs signaux obtenus sur différentes expériences. Il faut aussi remarquer qu'aux fortes déformations, la nature du comportement du matériau fait que les profils de déformation marquent un plateau dans la région centrale (Fig.5.7b). Les dérivations numériques temporelles deviennent alors extrêmement sensibles au bruit de mesure (non négligeable) ce qui explique le caractère oscillant des mesures et justifie encore une fois que les mesures soient répétées.

(a) $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ (b) $\dot{\epsilon} = 0.02s^{-1}$

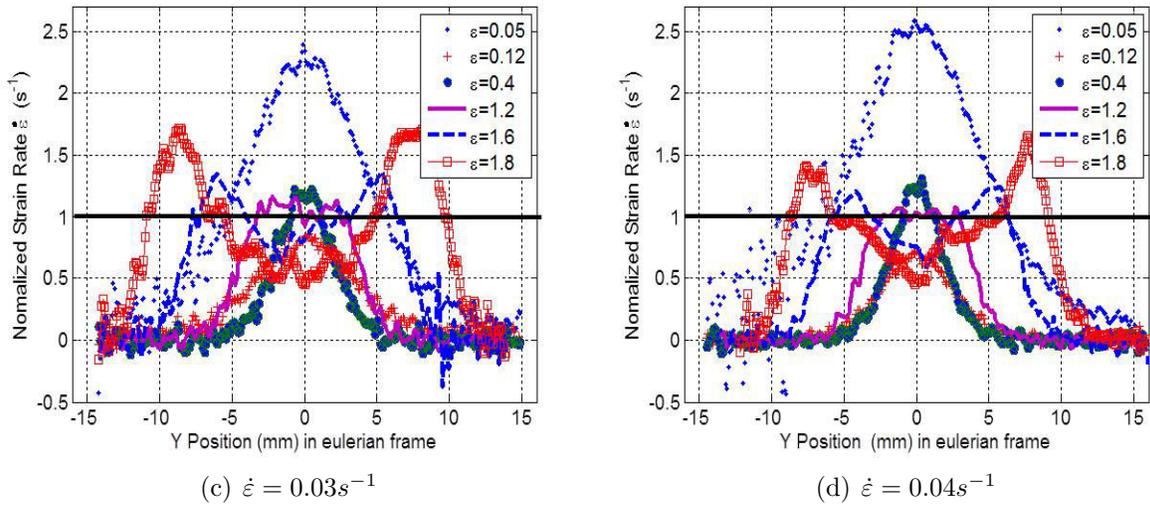


FIGURE 5.7 – Profils de taux de déformation normalisés $\dot{\varepsilon}_Y(Y, t)/\dot{\varepsilon}_0$ et mesurés par DIC pour des essais de traction à $0.01s^{-1}$ (a), $0.02s^{-1}$ (b), $0.03s^{-1}$ (c), $0.04s^{-1}$ (d)

Les principales observations que l'on peut faire à partir de ces courbes sont les suivantes :

- aux faibles déformations ($\varepsilon = 0.05$), le profil présente une allure bombée, de large extension. Le maximum correspond au centre de l'éprouvette. Il est associé au régime visco-élastique du matériau, où le champ de déformation est avant tout contrôlé par la géométrie de l'éprouvette : déformation maximale dans la section minimale de l'éprouvette, qui diminue progressivement avec l'augmentation symétrique de section relativement au point central. Le taux de déformation devient ainsi nul dans la section la plus large de l'éprouvette (la déformation n'y est pour autant pas nulle).
- Dans la gamme de déformation variant de 0.12 à 0.4, le profil du taux de déformation présente un pic prononcé dans la partie centrale de l'éprouvette (localisation du taux de déformation). Cet effet est suffisamment fort pour qu'il devienne nul dans des zones de section plus larges mais qui ne correspondent plus aux zones où l'éprouvette est à section constante. Dans la partie courbe de l'éprouvette où la section varie pourtant, le taux de déformation peut s'y trouver nul. Il est clair également que la largeur du pic est plus forte à $\varepsilon = 0.12$ qu'à $\varepsilon = 0.4$ pour le test à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$. Cette observation reste vraie lorsque la vitesse de l'essai augmente excepté pour l'essai le plus rapide $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$ où la largeur du pic apparaît sensiblement identique pour les déformations de $\varepsilon = 0.12$ et $\varepsilon = 0.4$. Ceci suggère que la striction se développe plus précocement et que la zone de déformation plastique soit beaucoup plus localisée. L'initiation de la striction analysée à partir de la distribution spatiale du taux de déformation apparaît donc clairement dépendante du taux de déformation avec un effet non-linéaire marqué entre les déformations de $\dot{\varepsilon} = 0.03s^{-1}$ et $0.04s^{-1}$.
- Pour les déformations s'échelonnant entre 0.4-1.2, un plateau est observé à une valeur constante et approximativement égale à la valeur de taux de déformation imposée par la machine à partir du signal vidéo-extensométrique. Cette phase correspond à la propagation de la striction et l'extension maximale du plateau est obtenue à une

valeur de déformation de l'ordre de 1.2. Cette valeur correspond précisément au point caractéristique des courbes contrainte-déformation (Fig.2.3-Chapitre 2) à partir duquel le durcissement se manifeste. Il est à noter que compte-tenu de la précision des mesures, l'extension de ce plateau l_p apparaît sensiblement identique quelle que soit la vitesse d'essai ($l_p \approx 6^{\pm 0.3} mm$).

- Pour les déformations les plus fortes [1.6-1.8], la striction se divise en deux lèvres ou épaules qui concentrent alors de façon symétrique les taux de déformation les plus élevés atteints au cours des tests (profils en double pics). On observe à nouveau une forte dépendance en vitesse de l'intensité de ces pics. Le taux de déformation maximum apparaît comme un peu plus du double que la valeur imposée au centre pour les tests à $0.01s^{-1}$ et $0.02s^{-1}$ (Fig.5.7ab). A la vitesse de $0.03s^{-1}$ (Fig.5.7c), ce facteur diminue à 1.7 puis à 1.5 pour la vitesse la plus rapide de $0.04s^{-1}$ (Fig.5.7d).

A notre connaissance, et bien qu'entachée d'imprécisions de mesures évidentes, aucune information de ce genre n'est reportée dans la littérature. Elle constitue de ce point de vue des données importantes qui permettraient de valider les résultats obtenus par des modélisations/simulations.

La figure (5.8) présente l'un de ces résultats mais dans le système de coordonnées lagrangienne, c'est-à-dire des points matériels repérés dans l'image de l'éprouvette non déformée, à l'instant $t = 0$ de l'essai.

Il est remarquable de constater que les "plateaux" à $\dot{\epsilon}$ constante imposée correspondent exactement à la zone de l'éprouvette ayant une section uniforme ($\pm 3mm$ par rapport au point central de l'éprouvette cf Fig.2.3 Chapitre 2). Il est également remarquable de constater que c'est "exactement" ce volume de matière qui va être le siège de la striction et que ce sont les points matériels situés à la base du congé de raccordement qui vont peu à peu être affectés, marquant ainsi la fin de la phase de propagation du necking et le début de la phase de développement de lèvres de striction pour alimenter l'écoulement plastique.

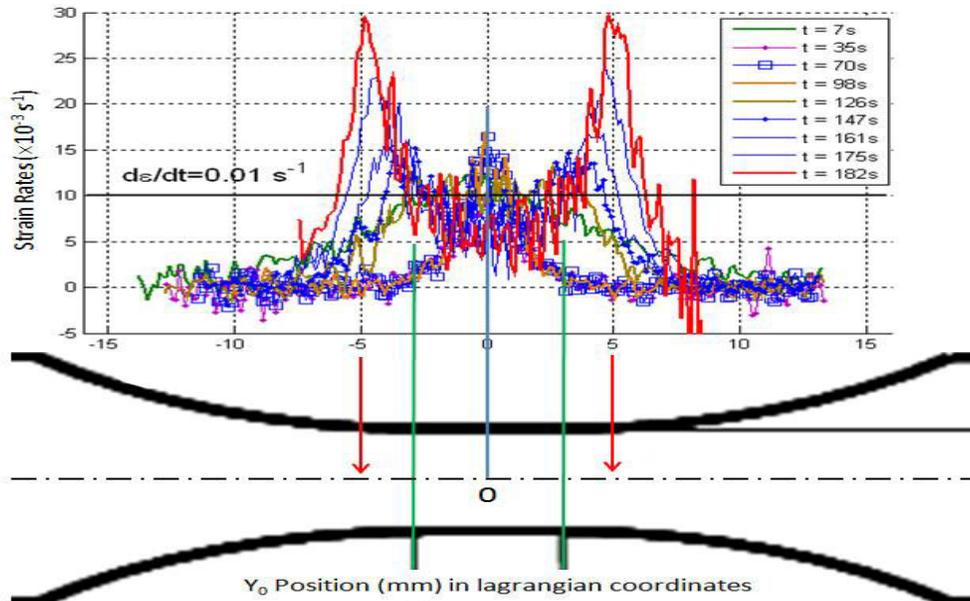


FIGURE 5.8 – Profils de taux de déformation $\dot{\epsilon}_Y(Y_0, t)$ mesurés par DIC pour un essai de traction à $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ et représentés dans le système de coordonnées matérielles.

Profil du déplacement hors plan

La figure (5.9) ci-dessous reporte la composante de déplacement hors plan U_Z mesurée par DIC. Les résultats sont très consistants avec les profils de taux de déformation obtenus. Tous les commentaires que nous venons de faire s'appliquent dans le cas de cet observable et les deux signaux apparaissent parfaitement corrélés. Il est intéressant de repérer qu'aux fortes déformations, l'extension des lèvres de striction (largeur des pics de taux de déformation) correspond globalement à la zone qui concentre tout le gradient du déplacement $\partial U_Z / \partial Y$. Plus précisément, le pic d'activité plastique marque la position précise à partir de laquelle est observé un fort gradient de déplacement dans le sens de l'épaisseur, ce qui signifie que cette activité plastique est bien alimentée en matière par l'aval de l'éprouvette (en descendant vers ses extrémités) et que l'épaisseur de la zone strictionnée (partie centrale) est bien contrôlée par l'écoulement plastique incompressible.

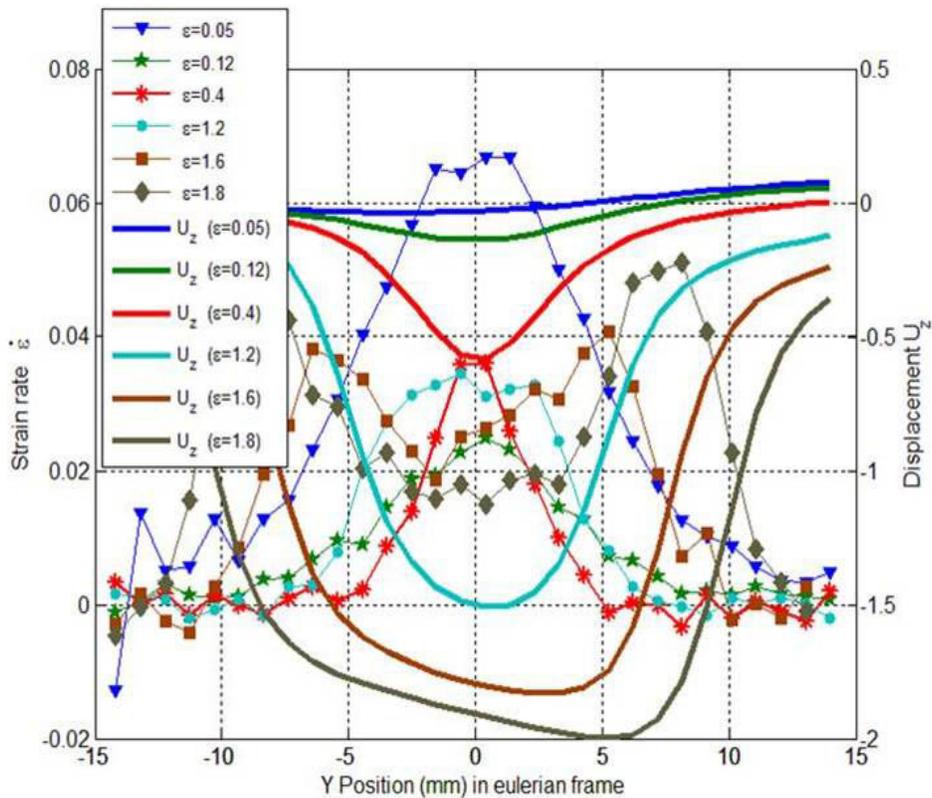


FIGURE 5.9 – Déplacement $U_Z(mm)$ et profils de taux de déformation $\dot{\epsilon}(s^{-1})$ pour un test de traction à $\dot{\epsilon} = 0.03s^{-1}$

Profils de vitesse

Des profils de vitesses absolues peuvent être obtenus à partir des cartographies de champs 2D tels que ceux présentés en Figs 5.2 et 5.3. Puisqu'il en a été souligné le caractère fortement 1D dans la région centrale subissant l'étirement, 9 profils ont été sélectionnés dans la direction de traction et répartis symétriquement de part et d'autre de l'axe central (4+1+4). La figure (5.10) ci-dessous montre ces profils ainsi que le profil moyenné selon la direction X qui en résulte. Cette démarche a été faite pour chaque test et pour chacun des 6 états de

déformation sélectionnés. Ceci explique la bonne qualité des observables produits en terme de bruit de mesure. La reproductibilité peut être jugée à partir des figures (5.11) et (5.12). Il est intéressant de noter que si des valeurs distinctes sont obtenues pour les vitesses maximales (positives et négatives) obtenues aux extrémités de l'éprouvette (le centre de l'éprouvette est toujours à vitesse nulle par changement de repère), la différence reste néanmoins constante pour chaque essai : 0.41mm/s pour $\dot{\varepsilon} = 0.04\text{s}^{-1}$ et 0.31mm/s pour $\dot{\varepsilon} = 0.03\text{s}^{-1}$.

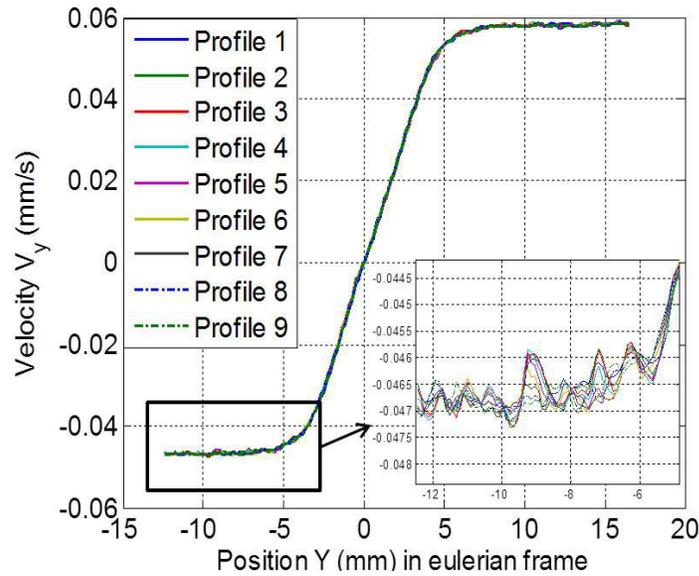


FIGURE 5.10 – Profils de vitesse longitudinale V_y dans une zone centrale de 9 pixels selon la direction X au moment où la déformation vraie $\varepsilon = 1.2$ lors un essai de traction à $\dot{\varepsilon} = 0.01\text{s}^{-1}$

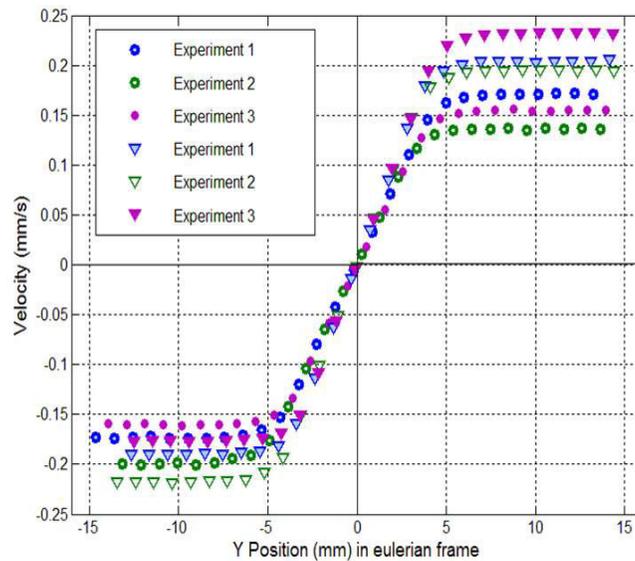


FIGURE 5.11 – Reproductibilité sur les profils de vitesse à une déformation de $\varepsilon = 1.2$ pour 3 tests répétés à $\dot{\varepsilon} = 0.03\text{s}^{-1}$ (symboles \circ) et $\dot{\varepsilon} = 0.04\text{s}^{-1}$ (symboles ∇)

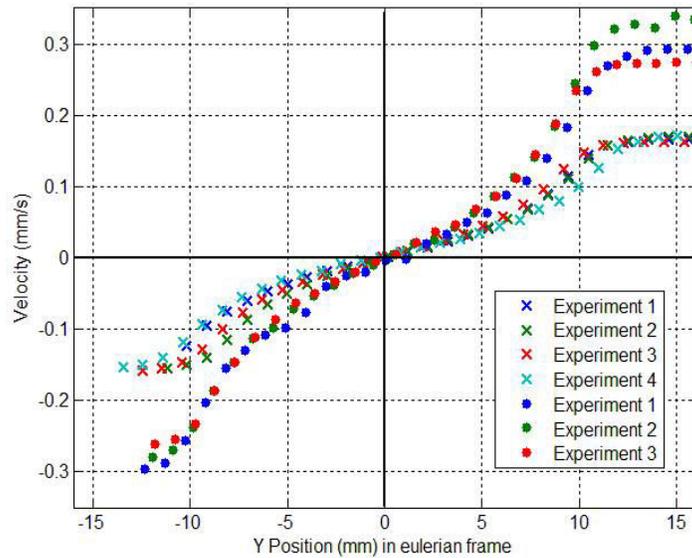


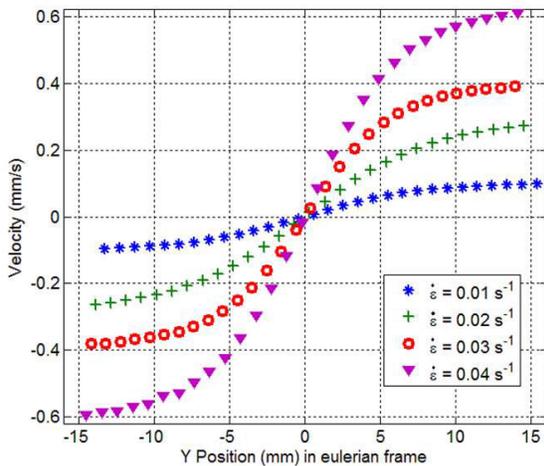
FIGURE 5.12 – Reproductibilité sur les profils de vitesse à une déformation de $\varepsilon = 1.8$ pour 3 tests répétés à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$ (symboles \times) et $\dot{\varepsilon} = 0.02s^{-1}$ (symboles \bullet)

Les profils présentés en Fig.5.13(A-F) correspondent à des profils moyennés sur 3/4 expériences répétées à la même vitesse d'essai, pour s'affranchir encore des biais de mesures. Ces profils suivent une forme sigmoïdale attendue puisque conditionnée par la géométrie de l'éprouvette qui évolue dans le temps au cours de l'essai. La bonne symétrie des profils par rapport à l'origine des graphes peut être appréciée

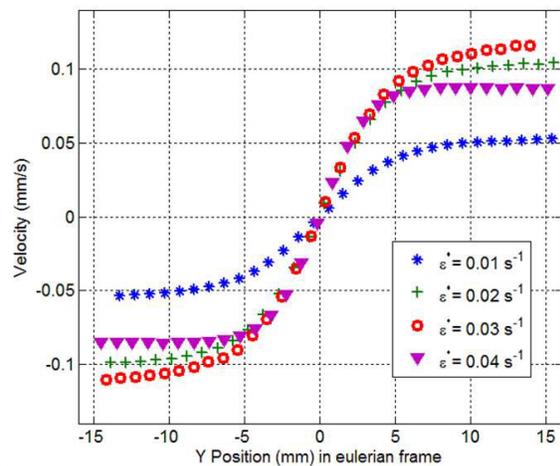
- Pour l'état de déformation (A) ($\varepsilon = 0.05$), le profil de vitesses correspond à une pure sigmoïde et les courbes sont bien ordonnées selon les taux de déformation (maximum des vitesses locales plus fort pour les essais les plus rapides). On peut observer d'ailleurs une proportionnalité bien conservée entre les valeurs maximales de vitesse pour chaque passage d'un taux de déformation imposé à un autre (facteur $3/2$ entre vitesse et taux de déformation).
- Pour l'état de déformation (B) ($\varepsilon = 0.12$), on peut souligner tout d'abord la très forte chute des niveaux de vitesse enregistrée. Le gradient de vitesse est beaucoup plus prononcé au voisinage de la position 0 de centre d'éprouvette ce qui signifie une localisation déjà importante. Dans cette région, on peut remarquer un comportement particulier pour l'essai à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$ par rapport aux 3 autres qui a déjà été détecté au niveau des courbes de traction de la Fig 2.3-(Chapitre 2). De plus la séquence de profils n'est pas proprement ordonnée selon les taux de déformation : le gradient de vitesses est plus concentré autour de la position centrale pour $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$ mais les saturations aux vitesses maximales apparaissent à un niveau moindre, intermédiaire entre les 2 essais à $0.02s^{-1}$ et $0.03s^{-1}$ et l'essai à $0.01s^{-1}$. Le déclenchement de la striction apparaît comme dépendant du taux de déformation imposé et cet effet non linéaire est conforme aux conclusions tirées des profils en taux de déformation (Fig.5.7-abcd). La courbe $\varepsilon = 0.12$ présente un comportement partiellement identique à la courbe $\varepsilon = 0.4$ pour l'essai à $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$ ce qui n'est pas le cas pour les autres essais. Le profil en taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ apparaît bien plus localisé que pour les autres essais,

i.e. un même incrément de déformation est produit par un déplacement beaucoup plus faible du vérin, d'où une vitesse moins élevée.

- Pour les états de déformation (C) $\varepsilon = 0.4$ et (D) $\varepsilon = 1.2$, la tendance observée précédemment se poursuit. Les vitesses restent en valeur absolue à des niveaux très bas comparés à la phase initiale viscoélastique mais à partir de l'état (C) on retrouve néanmoins des profils qui resteront ensuite ordonnés avec le taux de déformation. Ceci suggère qu'au point (C) la localisation est complètement établie et que la striction est entrée dans une phase de pure propagation. A l'état (D), si l'on se reporte aux profils des taux de déformation des Figs.5.7, on visualise bien que l'échantillon est déformé toujours de la même manière à ce niveau de déformation locale. L'extension du plateau i.e. l'extension du domaine eulérien où le taux de déformation apparaît comme constant est à peu près la même, ce qui est consistant avec notre remarque précédente sur l'égalité des rapports taux de déformation min/max des vitesses.
- Pour les états de déformation (E) $\varepsilon = 1.6$ et (F) $\varepsilon = 1.8$, l'allure des profils de vitesse est modifiée. A partir des profils qui présentaient un seul point d'inflexion localisé au point origine, on observe l'apparition de deux nouveaux points d'inflexion, parfaitement symétriques par rapport à celui-ci. En comparant les fig.5.13-F et 5.8, il apparaît clairement que ces 2 points d'inflexion se localisent précisément là où le gradient du déplacement hors-plan $\partial U_Z/\partial Y$ change de manière très brutale, "dessinant" ainsi les épaules de striction. L'intensité du gradient de vitesse baisse au niveau du point d'inflexion central mais se reconcentre au niveau des nouveaux points d'inflexion. Pour l'état de déformation $\varepsilon = 1.8$ (Fig.5.13-F). À un taux de déformation de $0.03s^{-1}$, le rapport entre gradients de vitesse dans les épaules de striction $\partial V_Y/\partial Y \approx 0.06s^{-1}$ et au point central $\partial V_Y/\partial Y \approx 0.02s^{-1}$ est de l'ordre de 3. Pour un essai à $0.04s^{-1}$, le même rapport est de l'ordre de 2.2.



(A)



(B)

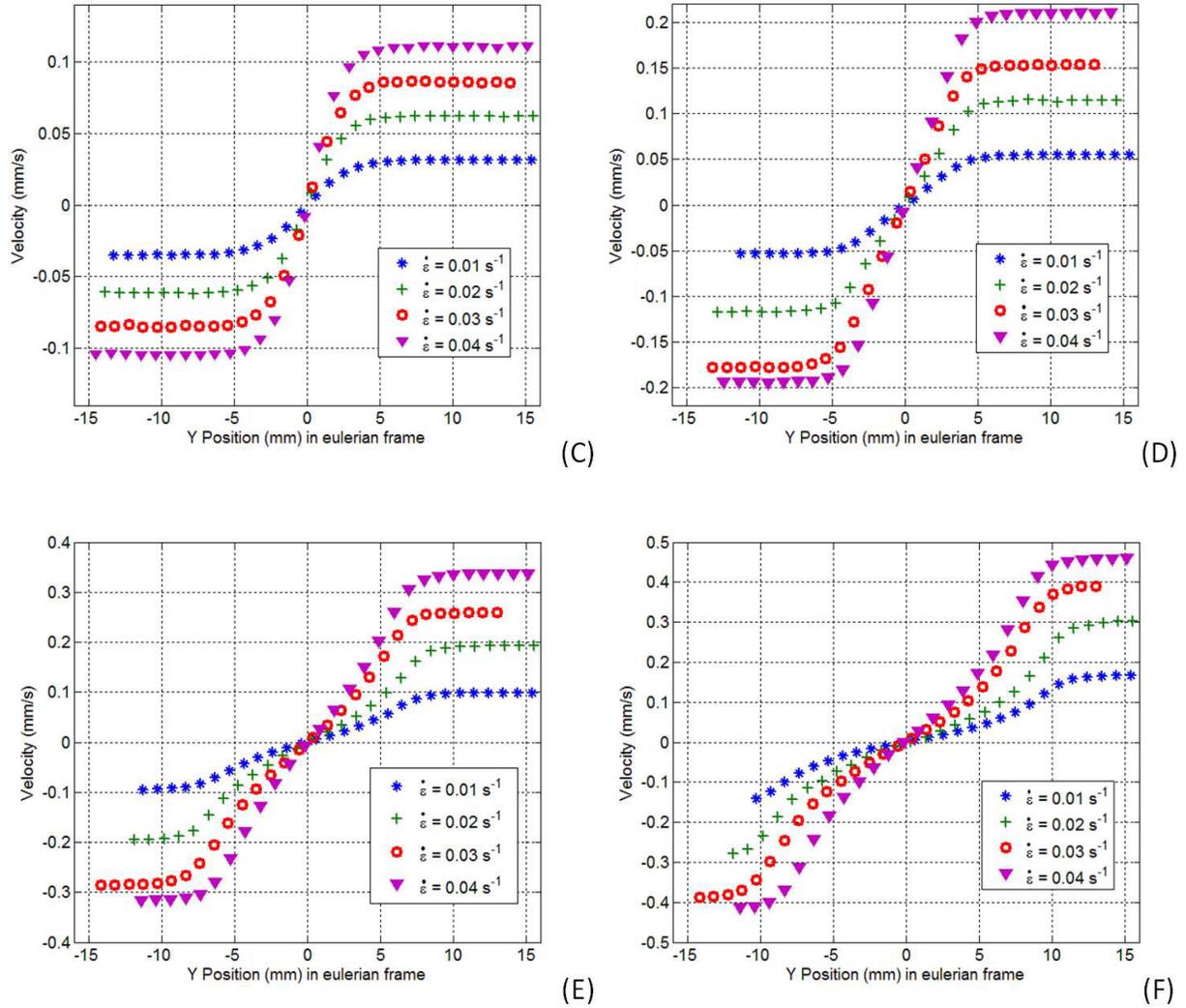


FIGURE 5.13 – Champs de vitesse expérimentaux mesurés par DIC aux différents taux de déformation et aux différents états de déformation : (A) $\varepsilon = 0.05$, (B) $\varepsilon = 0.12$, (C) $\varepsilon = 0.4$, (D) $\varepsilon = 1.2$, (E) $\varepsilon = 1.6$, (F) $\varepsilon = 1.8$

5.1.3 Analyse du concept de Natural Draw Ratio

Ces mesures cinématiques nous ont permis d'apporter quelques considérations nouvelles sur le concept de Natural Draw Ratio, souvent discuté dans la littérature consacrée aux matériaux polymères. Il y est présenté comme une déformation typique permettant de caractériser le phénomène de striction. Il ne s'agit pas de discuter d'aspects liés aux mécanismes microstructuraux des PSC, mais de reconsidérer les résultats obtenus en rapport aux signatures macroscopiques observées dans les essais de traction. L'un des critères utilisés pour caractériser la striction [109] est basé sur la notion de coefficient de durcissement

$$\gamma = \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{\dot{\varepsilon}} \quad (5.1)$$

où σ figure la contrainte vraie. L'instabilité plastique est considérée active dans la gamme de déformations pour laquelle $\gamma \leq 1$ ce qui (Fig.5.14) conduit à déterminer cette zone par un premier point correspondant au point de force maximum théorique (critère de Considère avec une hypothèse d'incompressibilité) et par un second point correspondant au second critère de Considère (point de force minimum).

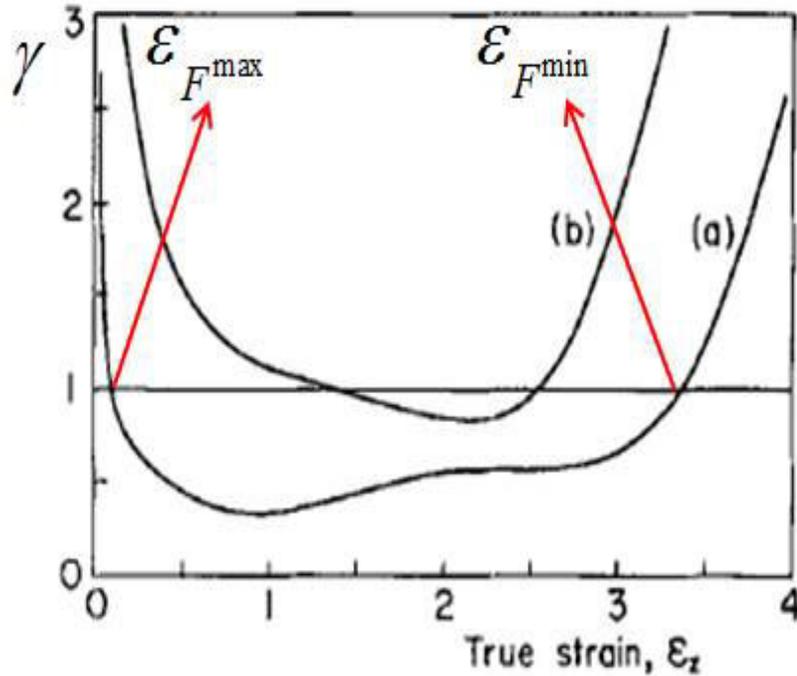


FIGURE 5.14 – Evolution de $\gamma = f(\varepsilon)$ pour deux co-polymères d’Ethylene-Butene (a) et (b). Le co-polymère (a) étant un PSC au comportement proche de HDPE (d’après Gaucher-Miri et al, 1996 [109])

Pour l’exemple de la Fig.5.14, le copolymère A, le plus cristallisé et qui se rapproche le plus du comportement de notre spécimen de PEHD au même taux de cristallisation, présente donc une zone de déformation à $\gamma \leq 1$ beaucoup plus étendue que pour le second matériau. Il est considéré comme ayant une plus grande capacité à l’étirement (“étirabilité”) et des arguments physiques sont produits généralement à l’appui de ce critère en termes notamment de niveau de nœuds (densité) d’entrecroisements du matériau.

Le second point correspondant à $\gamma = 1$ est considéré comme définissant le NDR [110] (2007). Il correspond à la déformation ultime marquant la limite d’étirabilité dite naturelle du matériau. Compte-tenu des remarques formulées sur la base des profils de taux de déformation analysés précédemment, cela signifie qu’il correspond à la déformation maximale (mesurée au centre de l’éprouvette mais homogène dans la striction) à partir de laquelle, l’étirabilité ultérieure repose sur l’extension des zones de plasticité (création d’épaules de striction). Les interprétations des mécanismes physiques à la micro-échelle expliquant cette propriété de NDR reposent sur l’idée qu’il correspond à la déformation ultime à partir de laquelle l’organisation initiale des phases amorphe et cristalline a complètement disparu au

profit de l'organisation fibrillaire bien connue.

Disposant des courbes de traction aux différentes vitesses d'essai (Fig.2.3-Chapitre 2), nous avons pu appliquer le calcul de ce coefficient de durcissement γ (hardening) pour identifier les déformations associées aux 2 critères de Considère (Forces Maximum/Minimum). Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

| | | Méthode | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | Ecart(%) |
|---|-----------------|--|-------|-------|--------|--------|----------|
| 1 | Considère 1 | $\varepsilon_{F_{max}}$ | 0.072 | 0.053 | 0.047* | 0.037* | - |
| 2 | | $\varepsilon_{\gamma=1}^l$ | 0.073 | 0.051 | 0.047 | 0.043 | - |
| 3 | Considère 2 | $\varepsilon_{F_{min}}$ | 1.26 | 1.46 | 1.65 | 1.87* | 39% |
| 4 | | $\varepsilon_{\sigma_{\lambda,tgt}}$ | 1.26 | 1.47 | 1.38 | 1.58* | 22% |
| 5 | | $\varepsilon_{d\sigma_{nom}/d\lambda=0}$ | 1.26 | 1.49 | 1.59 | 1.69 | 29% |
| 6 | | $\varepsilon_{\gamma=1}^2$ (NDR) | 1.25 | 1.48 | 1.63 | 1.68* | 30% |
| 7 | Nouveau critère | $\varepsilon_{\sigma_{tgt}}$ | 1.11 | 1.12 | 1.14 | 1.17 | 3% |

TABLE 5.1 – Valeurs de déformation caractéristiques d'un comportement de type striction. Critères de Considère, du coefficient de durcissement et nouveau critère issu de notre travail.

Les lignes 1 & 2 correspondent au 1^{er} point caractéristique ou 1^{er} critère de Considère. Les valeurs de déformation sont comprises dans l'intervalle $\varepsilon = 0.05 - 0.07$ et localisent bien un même point même si les écarts peuvent être grands à ces faibles niveaux de déformation (ils peuvent également être la manifestation d'effets de dépendance en vitesse d'essai). On vérifie en tout cas la bonne correspondance des deux valeurs entre elles pour un même essai (ce qui est normalement une réalité théorique puisqu'on peut montrer qu'on a l'identité stricte entre $\gamma = 1 \equiv d\sigma_{nom}/d\varepsilon = 0$). Cette valeur correspond à la première valeur de déformation sélectionnée pour présenter les résultats du paragraphe 5.1.

Les lignes 3 à 6 correspondent au second critère de Considère calculé de 4 manières différentes et dont on pourrait montrer qu'ils doivent coïncider (nous n'apportons pas de justifications supplémentaires ici) :

- Ligne 3 : Détection du point de force minimale sur le signal de force $\Rightarrow \varepsilon_{F_{min}}$
- Ligne 4 : Détection du point pour lequel $d\sigma/d\lambda = \sigma/\lambda$ où σ est la contrainte vraie exprimée en fonction de λ "extension ratio" défini par $\lambda = \frac{l}{l_0} = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} = exp(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon_{\sigma_{\lambda,tgt}}$
- Ligne 5 : Détection du point pour lequel $d\sigma_{nom}/d\lambda = 0$ où σ_{nom} est la contrainte nominale exprimée en fonction de λ
- Ligne 6 : Détection du second point pour lequel $\gamma = 1$

Les déformations ainsi caractérisées sont supposées correspondre toutes au NDR du matériau, supposé lui-même être une propriété (relativement) intrinsèque du matériau. On peut constater là encore que ces valeurs sont globalement consistantes entre elles pour un même essai, ce qui est attendu. Par contre les écarts calculés relativement à la valeur moyenne des différents essais sont de l'ordre de 30% ce qui viendrait contredire l'idée qu'il s'agit là d'une grandeur intrinsèque, et indépendante des effets cinétiques.

*. Valeurs peu fiables en raison de difficultés de mesures. Pour la Force max, à cause de défauts de régulation inévitables. Pour la Force min, à cause d'un plateau rendant difficile la localisation d'un minimum.

Suivant une intuition d'ordre phénoménologique, nous avons imaginé plus légitime de considérer que c'était le point (la déformation) associée à la propriété $d\sigma/d\varepsilon = \sigma/\varepsilon$ qui pouvait représenter une caractéristique intrinsèque du matériau, σ, ε étant les variables intrinsèques de notre mesure. Ce point correspond au point de tangence entre la courbe de traction contrainte vraie-déformation vraie et la droite passant par l'origine comme le montre la figure (5.15) pour l'essai à $0.04s^{-1}$.

Les valeurs obtenues sont reportées en ligne 7 (Table 5.1). Elles montrent de manière claire que ce nouveau critère pour définir le NDR est un candidat qui rend compte d'un caractère réellement intrinsèque du matériau. Pour les différents essais, l'écart relatif à la valeur moyenne obtenue est inférieur à 3% .

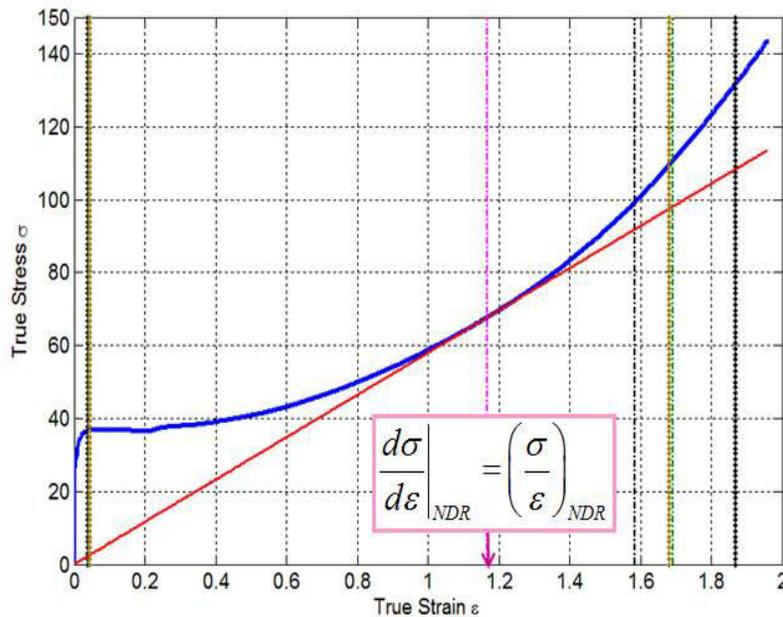


FIGURE 5.15 – Courbe contrainte vraie-Déformation vraie et détection de la déformation $\varepsilon_{\sigma_{tgt}}$ associée à la condition $d\sigma/d\varepsilon = \sigma/\varepsilon$

Nous allons montrer maintenant que cette proposition est relativement robuste au regard de ce que nous apprennent les observables cinématiques observables dans ce travail et qu'elle vient confirmer les idées précédemment avancées sur les phénomènes microstructuraux. Nous avons pu souligner en divers endroits en présentant nos résultats que certaines irrégularités des observables permettant de suivre l'instabilité plastique étaient la manifestation d'effets non-linéaires de dépendance en vitesse a priori (effets sur les niveaux d'intensité locales des taux de déformation, niveau d'extension de la zone strictionnée pour une déformation donnée). Un fait remarquable néanmoins est que la déformation maximale pour laquelle un "plateau" est observé dans les profils de taux de déformation est de l'ordre de $\varepsilon = 1.2$. A partir du moment où l'instabilité plastique s'est propagée intégralement sur le domaine de striction, les profils de taux de déformation se modifient et font apparaître deux pics. Ceci se produit approximativement pour la même déformation qui apparaît donc comme relativement intrinsèque au matériau. La figure (5.16) montre des profils de taux de déformation

compris dans la gamme de déformation [0.4-1.5] pour laquelle un plateau est observé. Jusqu'à un niveau de 0.4, les profils présentent un simple pic. A partir d'une déformation $\varepsilon = 1.5$, les profils ont deux extrema bien définis et on peut considérer que c'est pour $\varepsilon \leq 1.4$ qu'ils émergent véritablement. Compte-tenu du fait que la longueur étirée de l'éprouvette en fin d'essai dépend de la vitesse de l'essai (pour un trajet de déformation identique de la partie centrale de l'éprouvette), cela semble indiquer que c'est bien dans la phase de déformation postérieure, mettant en jeu les deux déformations plastiques dans les lèvres de striction pour laquelle les évolutions microstructurales sont 2D que se joue cette dépendance en vitesse. Cette valeur de déformation reflète l'idée d'un NDR qui se situerait à une valeur $\varepsilon \leq 1.4$. Pour confirmer cela, il est possible d'estimer à partir des Figs.5.7 la distance entre 2 pics de taux de déformation. Pour une déformation de 1.8 par exemple, cette distance est de 18.6 mm, 17.8 mm, 16.7mm and 14.7 mm dans cet ordre, pour les 4 essais, à commencer par le plus lent à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$.

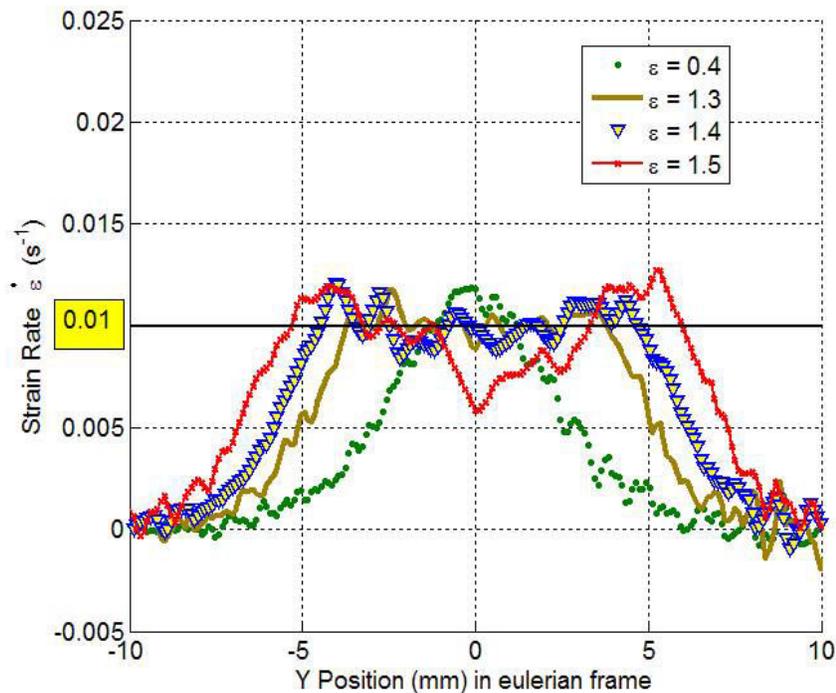


FIGURE 5.16 – Profils de taux de déformation pour les déformations dans l'intervalle $\varepsilon = 0.4 - 1.3$ (Essai à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$)

L'analyse de l'évolution au cours du temps des profils de taux de déformation en coordonnées lagrangiennes est encore plus significative (ou précise) pour repérer cette déformation de NDR. La Figure (5.17-abcd) en donne les représentations planes pour les 4 essais considérés. On observe la localisation centrale du maximum de taux de déformation avant le "yield", une chute prononcée d'intensité au moment de la localisation de la striction, et la séparation en deux épaules de striction à la fin de la phase de propagation. Si l'on repère sur chaque figure l'instant précis à partir duquel on distingue cette séparation, on observe qu'il détermine toujours une même déformation vraie qui se situe approximativement à $\varepsilon = 1.2$.

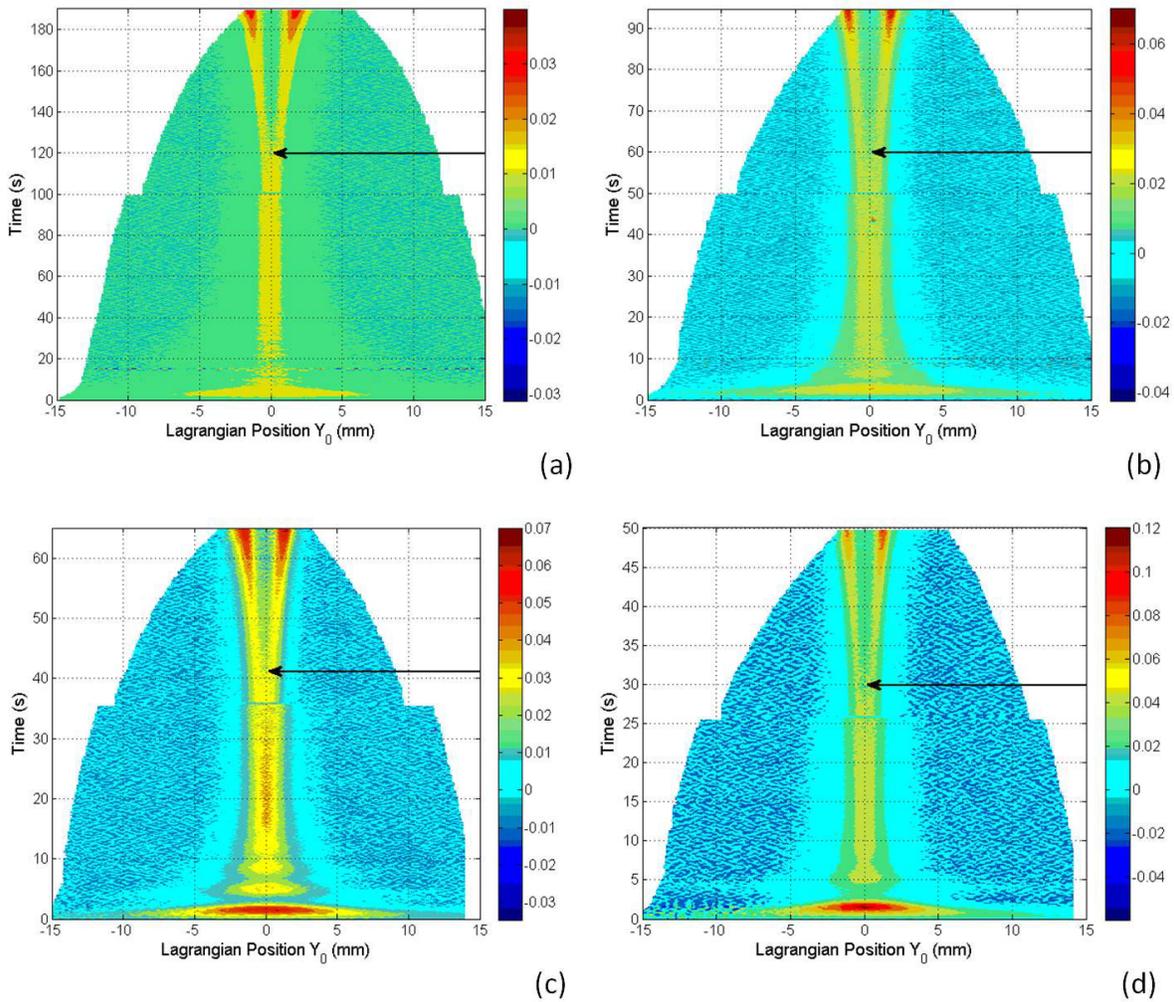


FIGURE 5.17 – Représentations 2D $\dot{\epsilon}(Y_0, t)$ des taux de déformation en coordonnées lagrangiennes et pour les 4 vitesses d’essai considérées.

Nous nous sommes alors demandés s’il était possible d’avoir une signature objective du NDR à partir des vitesses des points matériels pour lesquels les mesures sont moins bruitées. Nous avons tracé en Fig.5.18 un graphe représentant les intensités des vitesses locales atteintes pour les différents essais en $\dot{\epsilon}$. Il s’agit de la différence entre les vitesses extrémales min/max -toujours obtenues sur les extrémités de la fenêtre d’observation eulérienne- divisée par 2. Ce graphe est l’image de l’évolution de la vitesse de déplacement du vérin en fonction de la déformation. Ces tracés montrent qu’il est effectivement possible d’interpréter un effet caractéristique du NDR. Dans la plupart des cas, les expériences de type traction sont pilotées en vitesse constante de vérin : dans ces expériences, la déformation se localise tout autant et la déformation évolue avec le temps. Toutefois, quand le NDR est atteint, le déplacement du vérin contribue directement à la déformation du volume de matière situé dans les épaulés de striction. La déformation dans la striction reste alors constante, avec une valeur correspondant globalement au NDR (il peut y avoir un effet de biais qui intervienne

dû au fluage). Dans les essais que nous avons mené, pour lesquels le vérin est piloté de sorte de maintenir une vitesse de déformation constante, la vitesse du vérin est très faible lorsqu’il s’agit de faire évoluer la déformation dans la striction (l’écoulement). Mais lorsque le NDR est atteint, la progression de la déformation nécessite d’accélérer le vérin de manière sensible afin de fournir l’énergie nécessaire pour “décomposer” le volume de matière toujours dans un état très peu déformé, et alimenter ainsi la zone d’écoulement. Cette rupture dans l’évolution des vitesses apparaît effectivement sur le graphe de la Fig.5.18, et ce pour une déformation d’environ $\varepsilon = 1.2$ (Etat D), que nous considérons comme représentative du NDR.

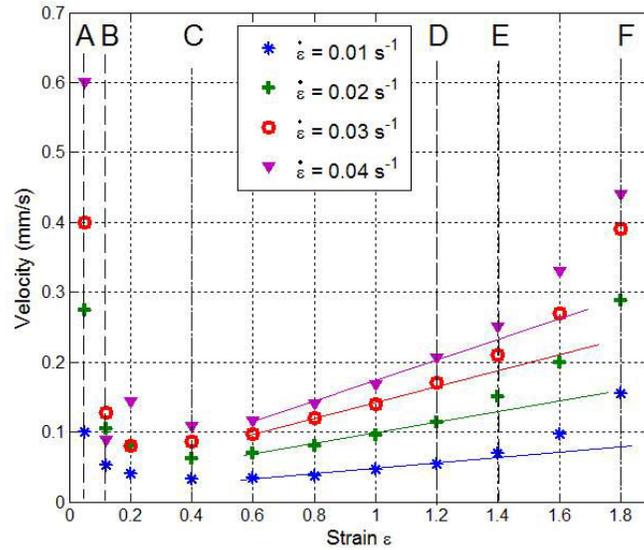


FIGURE 5.18 – Intensité maximale des vitesses en fonction de l’état de déformation pour les 4 essais.

Pour corroborer ce point de vue à partir des signatures liées aux micromécanismes de déformation et en prenant appui sur les travaux antérieurs du LEMTA [56] (Farge et al., 2013), cette façon de caractériser le NDR correspond également à la déformation typique à partir de laquelle le degré maximum d’anisotropie de la mésostructure est atteint. Cela confirme donc les idées publiées antérieurement selon lesquelles le NDR marque le début de l’état complètement fibrillé dans la partie centrale de l’éprouvette qui correspond à une valeur maximale de saturation de l’indice d’anisotropie, tel qu’il a pu être mesuré par microtomographie X et diffusion de lumière dans les travaux mentionnés. C’est également conforme à la conception d’un “durcissement d’orientation” (orientational hardening) tel que mentionné dans les travaux de Li and Buckley [103] pour qualifier le durcissement des polymères. Ces informations (Figs.5.16, 5.17, 5.18) sont autant de nouvelles données qui peuvent être confrontées dans les modélisations/simulations numériques du phénomène de striction.

Pour conclure sur ce point, nous avons voulu monter en quoi les données cinématiques que nous avons obtenu peuvent permettre d’augmenter et préciser la connaissance que nous avons de ce type d’instabilités plastiques.

5.1.4 Considérations liées à l'estimation inverse des THS

Pour conclure cette section et faire une transition avec la prochaine, dédiée aux reconstructions expérimentales de sources, nous nous proposons ici d'exploiter les mesures de vitesses locales pour déterminer les ordres de grandeur des flux de chaleur échangés par diffusion ou advection.

Pour chacune des vitesses de déformation imposées lors des essais de traction de la partie 5.1, les expériences ont été reproduites en enregistrant cette fois le champ de température par imagerie IR, selon le dispositif évoqué au chapitre 2.

L'enthalpie advectée par unité de temps et de surface correspond à la grandeur $Vh = V(c\Delta T)$ où c correspond à la chaleur volumique, V à la vitesse locale et ΔT à un écart de température de référence. L'enthalpie diffusée (ou flux de chaleur transféré par conduction), est donnée par la loi de Fourier soit $\lambda\Delta T/l$, où λ est la conductivité thermique, l une longueur de référence, typique de l'expression du mécanisme de diffusion pour un problème donné, et ΔT , le même écart de température pris comme référence.

Le mécanisme d'advection sera considéré comme négligeable par rapport à la diffusion si leur rapport reste petit en toute circonstance. Ce rapport correspond au nombre de Péclet et la condition précédente correspond ainsi à

$$Pe = \frac{cV\Delta T}{\lambda\Delta T/l} = \frac{Vl}{\alpha} \ll 1 \quad (5.2)$$

Le nombre de Péclet peut être également analysé comme le rapport des temps caractéristiques des mécanismes de diffusion et d'advection, soit

$$Pe = \frac{l^2/\alpha}{l/V} = \frac{t_\alpha}{t_V} \ll 1 \quad (5.3)$$

où α correspond à la diffusivité thermique des échantillons de PEHD, mesurée au laboratoire par méthode flash (Tableau 2.1, Chapitre 2).

L'estimation du nombre de Péclet repose sur une estimation correcte de la longueur caractéristique de diffusion. En procédant à l'inverse, on peut énoncer une condition sur cette longueur, en considérant par exemple une valeur maximale des vitesses. La Fig.5.17 permet de considérer que pour l'essai le plus rapide, la vitesse absolue sera au maximum égale à 0.5mm/s , valeur atteinte aux déformations les plus élevées considérées dans ce travail (de l'ordre de $\varepsilon = 2$). Cela donne une longueur caractéristique de diffusion devant vérifier $l \ll 550\mu\text{m}$. Compte-tenu de la résolution spatiale des mesures pour le champ thermique (de l'ordre de $150\mu\text{m}$), on voit que les gradients de température devraient être résolus sur une longueur l correspondant à 4 px, ce qui est le cas sur les expériences et compte-tenu de la résolution de la caméra utilisée. A priori en considérant la situation la plus désavantageuse, on voit que le mécanisme de diffusion sera prépondérant, au pire du même ordre de grandeur que l'advection.

Compte-tenu des différents régimes cinématiques mis en évidence en parties 5.1.2, 5.1.3, et du caractère hétérogène des phénomènes observés, il convient cependant de distinguer les différentes situations possibles pour prendre en compte également l'effet du couplage thermomécanique à l'origine des gradients thermiques.

Dans le système de coordonnées eulériennes lié à l'échantillon (origine au centre de l'éprouvette),

nous avons une vitesse toujours nulle à l'origine, et symétriquement maximale aux extrémités (dans les zones les moins déformées). En se reportant aux cartes de distribution de vitesses des Figs.5.2,5.3 ou des profils de la Fig.5.13, on peut faire les remarques suivantes :

- Aux faibles déformations, quand les vitesses sont les plus fortes, le régime thermomécanique de couplage correspond exclusivement à la thermoélasticité (les effets dissipatifs sont extrêmement limités à ce stade). Ce régime affecte la totalité de l'éprouvette dans une proportionnalité à la contrainte locale, qui est donc directement reliée à la section locale de l'éprouvette. Compte-tenu de notre géométrie, il est clair que la distribution de contrainte, bien qu'inhomogène, ne fera pas apparaître de fortes variations de contrainte et donc les gradients thermiques liés à la thermoélasticité seront très faibles. L'effet de l'advection est quasi nul à ce stade.
- Quand la striction se manifeste (Point B), l'effet thermique et les gradients de température qui l'accompagnent apparaissent de manière très localisés au centre de l'éprouvette. On a vu que cette localisation s'accompagne d'une très forte baisse des vitesses locales $V \leq 0.1mm/s$ ce qui engendre un facteur 5 sur la précédente estimation du nombre de Péclet. Mais cet effet est amplifié puisque ces gradients prennent naissance là où la vitesse est nulle où très faible.

Pour des essais à $\dot{\epsilon} = [0.01s^{-1} - 0.04s^{-1}]$ (taux de déformation imposé au centre de l'éprouvette) et considérant la longueur caractéristique de diffusion sensible à notre moyen de mesure $l \cong 550\mu m$, on obtient alors une estimation de vitesse locale de l'ordre de $V = [0.005mm/s - 0.02mm/s]$ au voisinage du centre ce qui conduit à des nombres de Péclet de l'ordre de $Pe = [0.01 - 0.04]$. On peut ainsi affirmer qu'au moment du déclenchement de la striction, seul l'effet diffusif compte.

- A la fin de l'essai (fortes déformations), les deux épaules de striction apparaissent comme des "points" animés des plus grandes vitesses/taux de déformation et les effets thermiques les plus importants (Fig.9 in [33]). Là le phénomène d'advection peut devenir du même ordre de grandeur que la diffusion. Pour l'essai le plus rapide à $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$, le taux de déformation local maximum dans les lèvres est d'environ $0.06s^{-1}$. La valeur de vitesse locale y avoisine les $0.5mm/s$ (Fig.5.17), ce qui signifie une longueur caractéristique cinématique de l'ordre de $30\mu m$. Cette longueur caractéristique ne peut être retenue pour estimer le Péclet (on trouverait une valeur de 0.05) parce qu'elle conduirait à un temps de diffusion de $3ms$. Ces deux échelles spatiales et temporelles ne sont pas résolues par notre dispositif d'imagerie IR. Par contre, considérant une longueur de référence basée sur la diffusion thermique (résolution du gradient sur au moins 4 pixels soit $l \cong 550\mu m$) nous ramène à un Péclet voisin de 1.

En conclusion, cette analyse quantitative basée sur des estimations locales de vitesse ou longueur caractéristique mises en jeu dans nos essais montre que l'influence de l'advection sur les sources reconstruites devrait être extrêmement limitée, éventuellement sensible lors de l'apparition de l'instabilité au niveau des épaules de striction pour des déformations $\epsilon > \epsilon_{NDR}$, et pour l'essai le plus rapide.

On rappelle également que sur le plan des objectifs de caractérisation thermomécanique, nous suivons le comportement du même VER central pour lequel nous souhaitons obtenir les deux informations de contrainte-déformation et THS-déformation. Ce qui se passe dans

les épaules de striction aux fortes déformations n'affectera donc pas le signal reconstruit au centre de l'éprouvette.

5.2 Sources thermiques reconstruites à partir des données expérimentales

Nous présentons maintenant les résultats obtenus sur les reconstructions de sources à partir des champs de température mesurés et recalés sur les domaines eulériens retenus pour les mesures de champs cinématiques (cf chapitre 2). Pour chaque vitesse de sollicitation, une dizaine d'expériences en moyenne ont été retenues. Les résultats sont comme précédemment présentés selon l'état de déformation de l'éprouvette dans sa zone centrale, et pour des vitesses d'essai indexées sur cette même déformation locale du centre de l'éprouvette.

Les reconstructions de sources expérimentales sont toutes obtenues avec les algorithmes S1 ou S2 fonctionnant selon les modalités que nous rappelons ici :

Algorithme S1 :

Modèle direct = Base de Branche (Advecto-diffusive ou Diffusive seule) + prise en compte du champ de vitesse (interpolation sur le maillage).

Approche inverse : Moindres carrés séquentiels (Temps futurs) + troncature spectrale du modèle direct. Compte-tenu des résultats du chapitre 4, la base de branche utilisée est soit constituée des modes diffusifs, soit des modes advecto-diffusifs déterminés dans des conditions de Péclet faible (< 1), mais pour lesquels les résultats sont de toutes façons identiques.

Algorithme S2 :

Modèle direct = Base de Fourier en cosinus + prise en compte du champ de vitesse (interpolation sur le maillage).

Approche inverse : Projection sur les modes du signal expérimental + Méthode du Gradient Conjugué appliquée aux états + régularisation sur les directions de recherche.

Quel que soit l'algorithme utilisé pour les reconstructions données dans cette section, la régularisation du problème inverse y est faite en accord avec les critères optimaux mis en évidence dans la partie théorique (chapitre 4).

5.2.1 Approche diffusive versus advecto-diffusive

Il s'agit ici de répondre au questionnement principal qui a motivé ce travail de thèse, à savoir la nécessité de prendre en compte ou non l'advection de chaleur liée aux vitesses locales de matière lors de la propagation de l'instabilité plastique.

Tous les résultats sont calculés par l'algorithme S1 en inversant le profil de température mesuré sur l'éprouvette entière. On compare d'abord les profils de source $q(Y)$ reconstruits dans le cadre de l'approximation de la diffusion pure (sans prise en compte des profils de vitesse) ou en prenant en compte un transport advectif calculé avec les vitesses locales réelles mesurées par DIC. Ces profils se rapportent à l'état de déformation de l'éprouvette $\varepsilon = 1.8$, état le plus déformé pour lequel la localisation s'est propagée dans 2 épaules de striction relativement symétriques par rapport au point central. On donne les résultats pour les 4 vitesses d'essai considérées.

Dans les figures (5.19-abcd), on peut constater que les deux profils de source ne coïncident que dans la zone centrale de l'éprouvette. La zone commune pour $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$ est d'environ 14 mm, pour $\dot{\varepsilon} = 0.02s^{-1}$ de 7mm, pour $\dot{\varepsilon} = 0.03s^{-1}$ de 5 mm et pour $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$ de 4 mm. Cela indique que la source au centre est toujours bonne pour n'importe quel modèle, ce qui est logique parce que le vrai champ de vitesse au centre du repère eulérien de caméra est très faible (quasiment zéro) en toutes circonstances. Cette première remarque valide donc les résultats obtenus dans la thèse de N.Renault [1]. Par contre, il est également clair sur ces figures que négliger l'advection conduit à des erreurs significatives sur la source reconstruite, particulièrement pour tous les points du champ spatial qui voient "passer" l'instabilité plastique. De façon assez logique, négliger le transport advecté conduit alors à surestimer la source thermomécanique (d'un facteur environ 1.5 pour tous les essais). De plus, la localisation du maximum d'intensité de la source se trouve décalé : il apparaît comme plus éloigné du point central si l'advection n'est pas prise en compte.

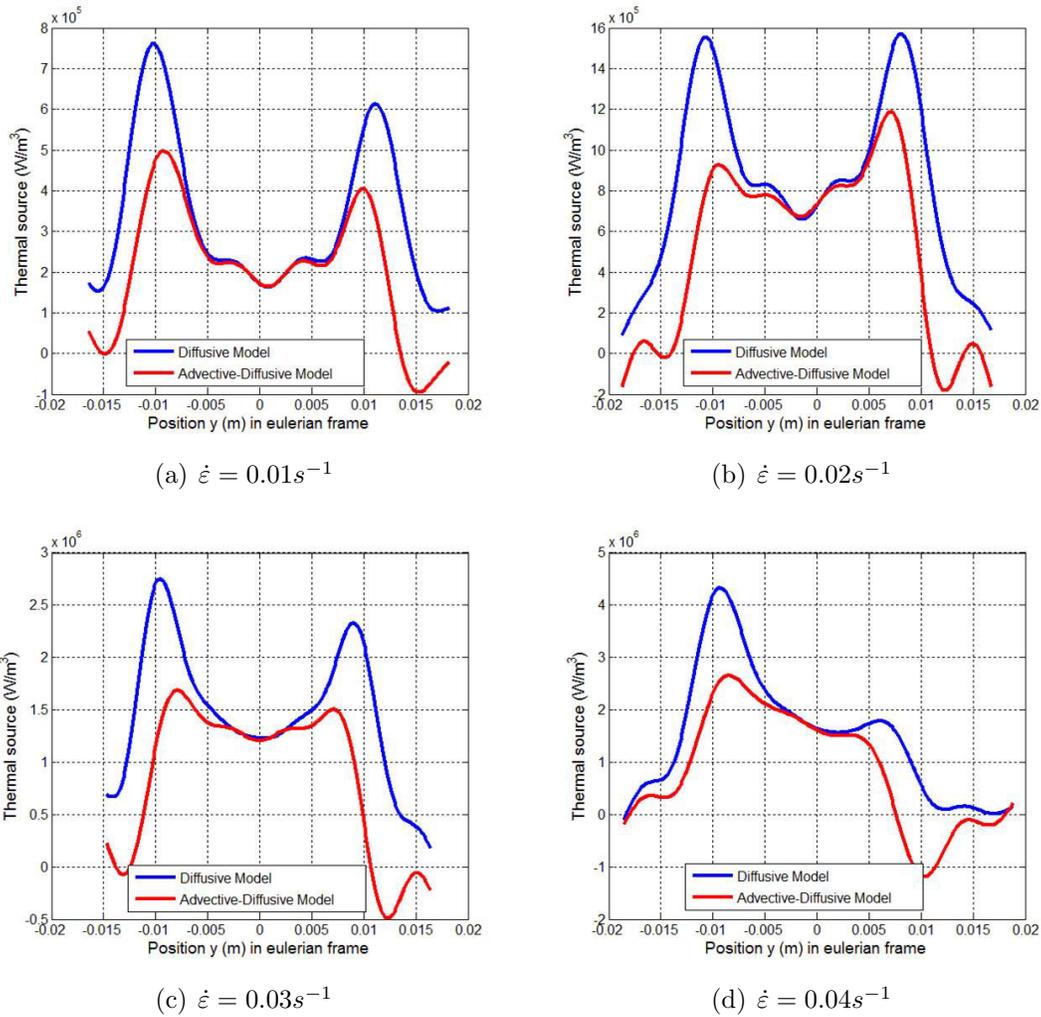


FIGURE 5.19 – Profils de source reconstruite aux différentes vitesses dans l'approximation de la diffusion pure ou avec transport advectif-diffusif pour l'état très déformé $\varepsilon = 1.8$.

Ces figures sont aussi l’occasion de souligner qu’il est extrêmement difficile d’observer (reconstruire) des profils pour lesquels on a une bonne symétrie des effets thermiques associés à la localisation, contrairement aux mesures cinématiques. Dans les figures (5.20-ab) sont reportées les évolutions temporelles des sources reconstruites en négligeant ou non l’advection et ce pour le point central (P_0) ou pour le point du champ spatial eulérien qui “enregistre” le maximum d’intensité de la source vers $\varepsilon = 1.8$ pour l’essai à $\dot{\varepsilon} = 0.02s^{-1}$ (soit un point localisé à environ 10mm du centre de l’éprouvette).

On voit que pour le point P_0 (Fig.5.20a), les sources reconstruites selon les deux modèles directs sont identiques. Il n’en est pas de même pour un point éloigné du centre. Ceci est particulièrement important si l’on veut savoir si le phénomène thermomécanique est de dynamique et d’intensité identique en tout point du matériau lors de l’activation de la plasticité ou s’il y a des effets de structure sensibles. Ce point sera commenté ultérieurement.

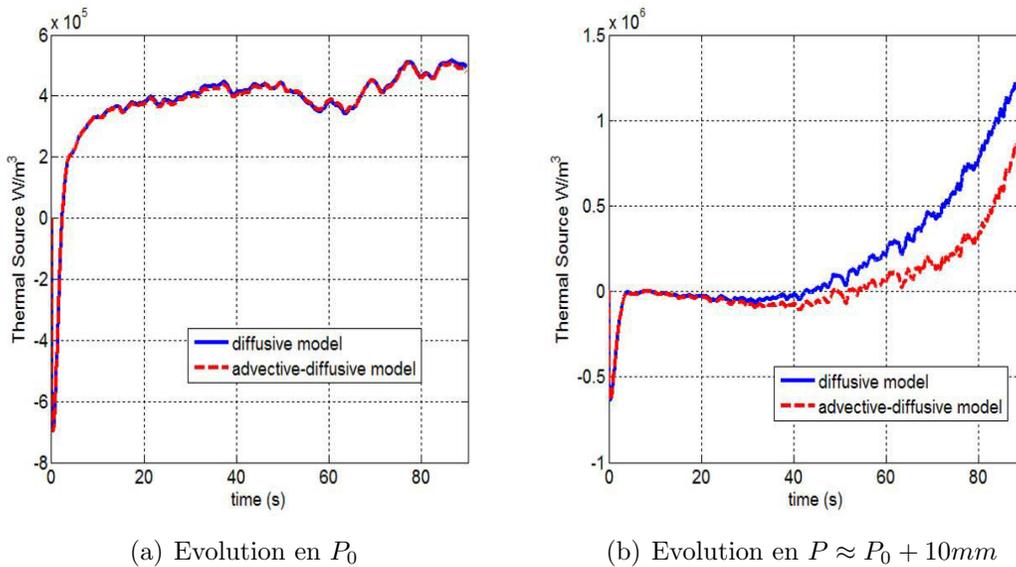


FIGURE 5.20 – THS reconstruite en 2 points différents pour l’essai $\dot{\varepsilon} = 0.02s^{-1}$

Par la suite tous les résultats présentés ont pris en compte les champs cinématiques de vitesses locales.

5.2.2 Performances de reconstruction

5.2.2.1 Reproductibilité

Les figs.5.21a ($\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$) et 5.21b ($\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$) montrent les niveaux de reproductibilité qui ont été atteints lors de nos expériences. On y a reporté les sources reconstruites dans la zone centrale (moyennée sur 5 pixels) pour 4 tests différents. L’algorithme utilisé est S1 dans les conditions de régularisation optimales.

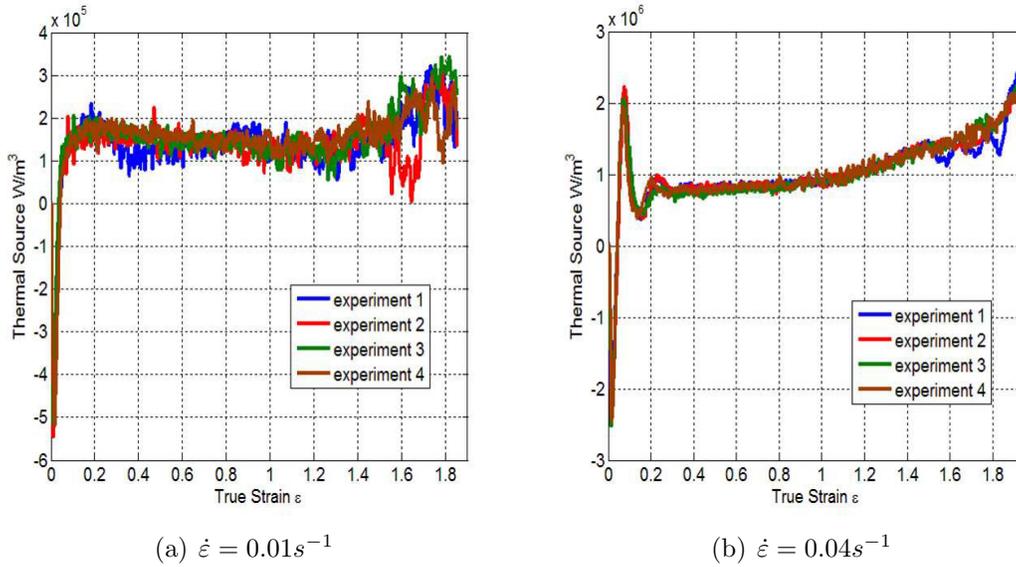


FIGURE 5.21 – Courbes de reproductibilité des THS reconstruites pour les deux vitesses de traction (a) $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$ et (b) $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$. Algorithme S1 - Moyenne sur 5 pixels centrés sur P_0 .

Ces signaux permettent de se rendre compte du niveau de bruit avec lequel on a reconstruit la source en sortie d'inversion, qui est relativement important. Dans l'intervalle de temps caractérisé par la phase d'écoulement plastique (déformations $0.5 < \varepsilon < 1$ et pour l'expérience à la vitesse la plus lente, on a un rapport Signal sur Bruit de l'ordre de 3. C'était l'ordre de grandeur obtenu lors de la thèse de N.Renault pour ce même matériau. Pour ce niveau de bruit, on voit que la reproductibilité apparaît comme satisfaisante. C'est particulièrement vrai au regard de la Fig.5.21b obtenue pour la plus forte vitesse de traction à laquelle sont associés des défauts de respect de la consigne déjà mentionnés. On voit donc que la "trajectoire" de régulation suivie par la machine au moment du déclenchement de la localisation dans l'éprouvette est reproductible. La figure (5.21b) montre que le rapport signal sur bruit s'améliore si le matériau "émet" des puissances plus importantes. Le niveau de puissance à l'écoulement plastique pour $\dot{\varepsilon} = 0.04s^{-1}$ est multiplié d'un facteur $\cong 5$ par rapport à l'expérience à $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$, et le rapport S/B en est augmenté d'un facteur double ($RSB \cong 6$).

Néanmoins ce premier aperçu des reconstructions expérimentales de puissance mise en jeu au sein d'un polymère semi-cristallin montre qu'on ne peut pas se dispenser de répéter les expériences si l'on veut pouvoir fonder une analyse thermomécanique à partir de ces signaux.

5.2.2.2 Influence de la condition initiale

Nous avons regardé dans quelle mesure l'approximation faite d'un champ de température initial constant était correct ou non, sachant que, au niveau de l'expérience, même après des temps d'attente de stabilisation relativement longs, nous constatons toujours un profil de température initiale non uniforme, symétrique et légèrement concave (température plus grande au centre que dans les mors).

On a donc procédé à des reconstructions en considérant soit un profil de température constant, correspondant à la température moyenne initiale mesurée, soit le profil réel.

Les deux figures ci-dessous présentent les sources reconstruites sur le VER central (zone de ± 2 px sur laquelle les sources sont moyennées) pour les deux vitesses de traction $0.01s^{-1}$ et $0.04s^{-1}$ avec l'algorithme S1. Aucun écart n'est constaté si ce n'est aux premiers instants. Cet écart est un artefact de calcul lié au saut "brutal" de température (donc à une source de chaleur virtuelle apparente) lorsque l'on passe du profil moyenné à t_0 au profil réel à $t_0 + \Delta t$ qui ne traduit pas encore le refroidissement de l'éprouvette (effet de décalage temporel lié par ailleurs à un défaut de synchronisation sur le temps initial de déclenchement de l'expérience). La prise en compte du profil réel ne posant aucun problème pratique particulier, il est donc préférable de partir de la situation initiale réelle.

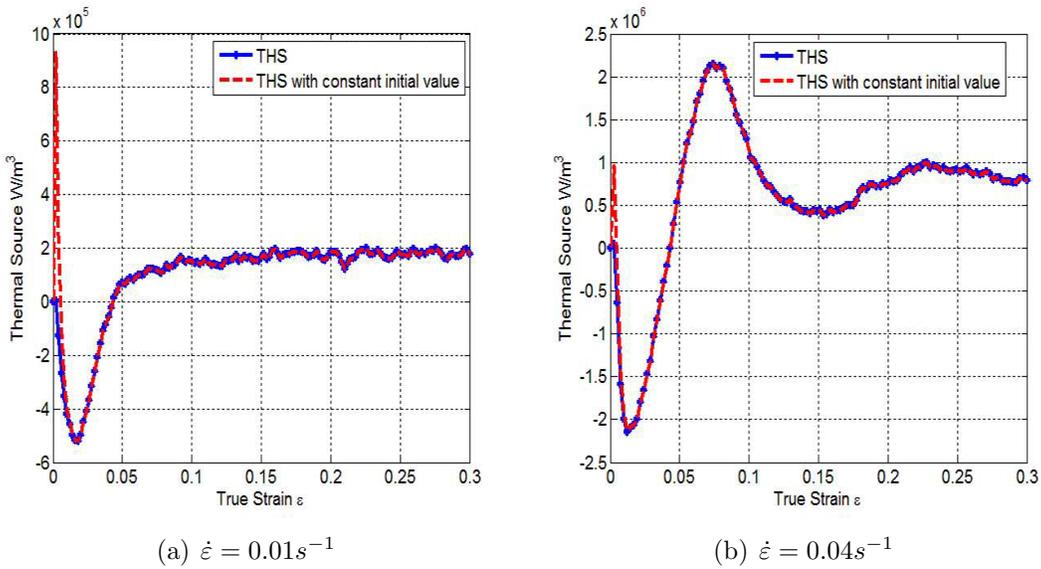


FIGURE 5.22 – THS reconstruites aux temps courts selon le traitement fait pour la Condition Initiale pour les deux vitesses de traction (a) $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ et (b) $\dot{\epsilon} = 0.04$. Algorithme S1.

5.2.2.3 Gestion des Conditions aux limites

Indépendamment des algorithmes utilisés, nous avons également une possibilité de choix pour l'inversion liée à la symétrie du problème. On pouvait concevoir en effet :

- soit de reconstruire la source sur l'intervalle $[-L_Y, L_Y]$ en prenant en compte une condition de flux échangé en L_Y qui serait estimé, de chaque côté, à partir des profils de températures expérimentaux et d'un calcul numérique approché de $\hat{\varphi}_{\pm L_Y} = \lambda \frac{\partial \hat{T}}{\partial Y} |_{\pm L_Y}$. Avantage : on prend bien en compte une différence éventuelle de symétrie des profils loin du centre de l'éprouvette. Inconvénient, il faut estimer numériquement ces deux flux. Ce cas correspondra aux courbes labellisées "Full profile" dans les figures ci-dessous.
- soit d'imposer le respect de cette symétrie en moyennant les profils de température sur les 1/2 segments $[-L_Y, 0]$ et $[0, L_Y]$ et en considérant l'identification sur l'intervalle $[0, L_Y]$ avec une condition de flux nul sur le bord gauche $\varphi_{Y=0} = 0$ et une condition de

flux conductif estimé sur le bord droit $\hat{\varphi}_{+L_Y} = \lambda \frac{\partial \langle \tilde{T} \rangle}{\partial Y} \Big|_{+L_Y}$. Avantage : on impose une condition aux limites mathématique en $Y = 0$, on n'a qu'une seule condition aux limites à évaluer numériquement en $Y = L_Y$ et on peut améliorer le rapport signal/bruit en moyennant les deux 1/2 profils de température. Inconvénient : En cas de défaut de symétrie, on peut biaiser la solution. Ce cas correspondra aux courbes labellisées "Half profile" dans les figures ci-dessous.

La figure (5.23) montre le flux conductif calculé numériquement au centre de l'éprouvette (Pixel P_0) par une différence centrée faisant intervenir 5 points. On vérifie bien que ce flux est à valeur quasi nulle et qu'il est affecté ici d'un bruit gaussien (Fig.5.23b).

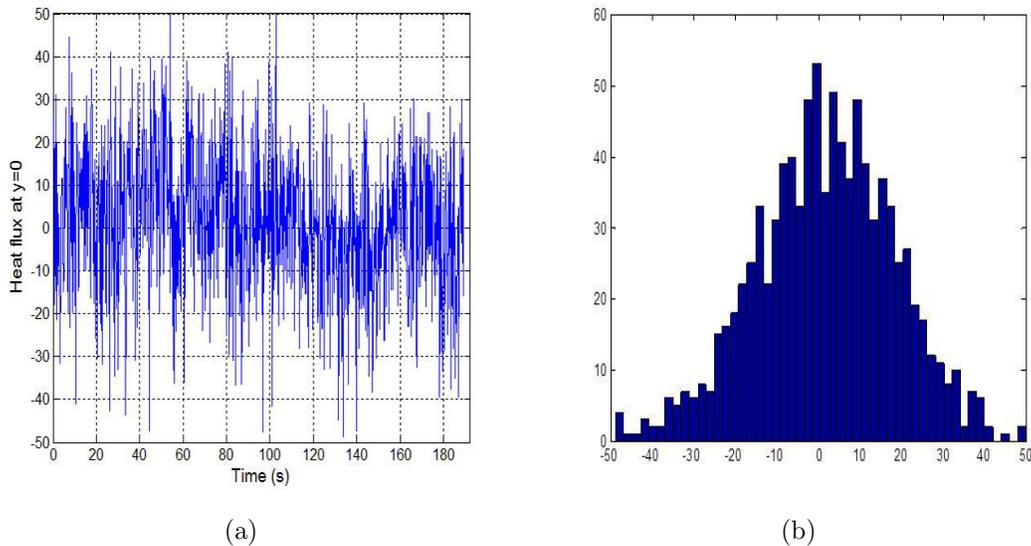


FIGURE 5.23 – (a) Flux calculé numériquement en $Y=0$ à partir du signal en température. (b) Histogramme du signal de flux de la Fig.5.23a

La figure (5.24) montre les sources reconstruites par l'algorithme 1 dans les deux cas de figure, pour les points situés au pixel central $P_0(Y = 0)$, et au pixel du point matériel correspondant à $P_{10} = P_0 \pm 10\text{px}$ et pour deux vitesses d'essai. Pour imposer la condition aux limites de flux nul, on adopte pour l'algorithme une décomposition sur la base de branche adaptée : on a imposé une condition de Steklov en $Y = L_Y$ et une condition de symétrie (flux nul) en $Y = 0$.

On peut remarquer que les deux options possibles conduisent bien à reconstruire la même source (pas d'introduction de biais). En termes de bruit, aucune des deux options n'apporte de solution plus avantageuse, ce qui montre que pour un bruit sur le signal donné, c'est avant tout la "conformité" de la base de décomposition à l'opérateur différentiel qui est prépondérante dans l'application de ces approches spectrales aux méthodes inverses.

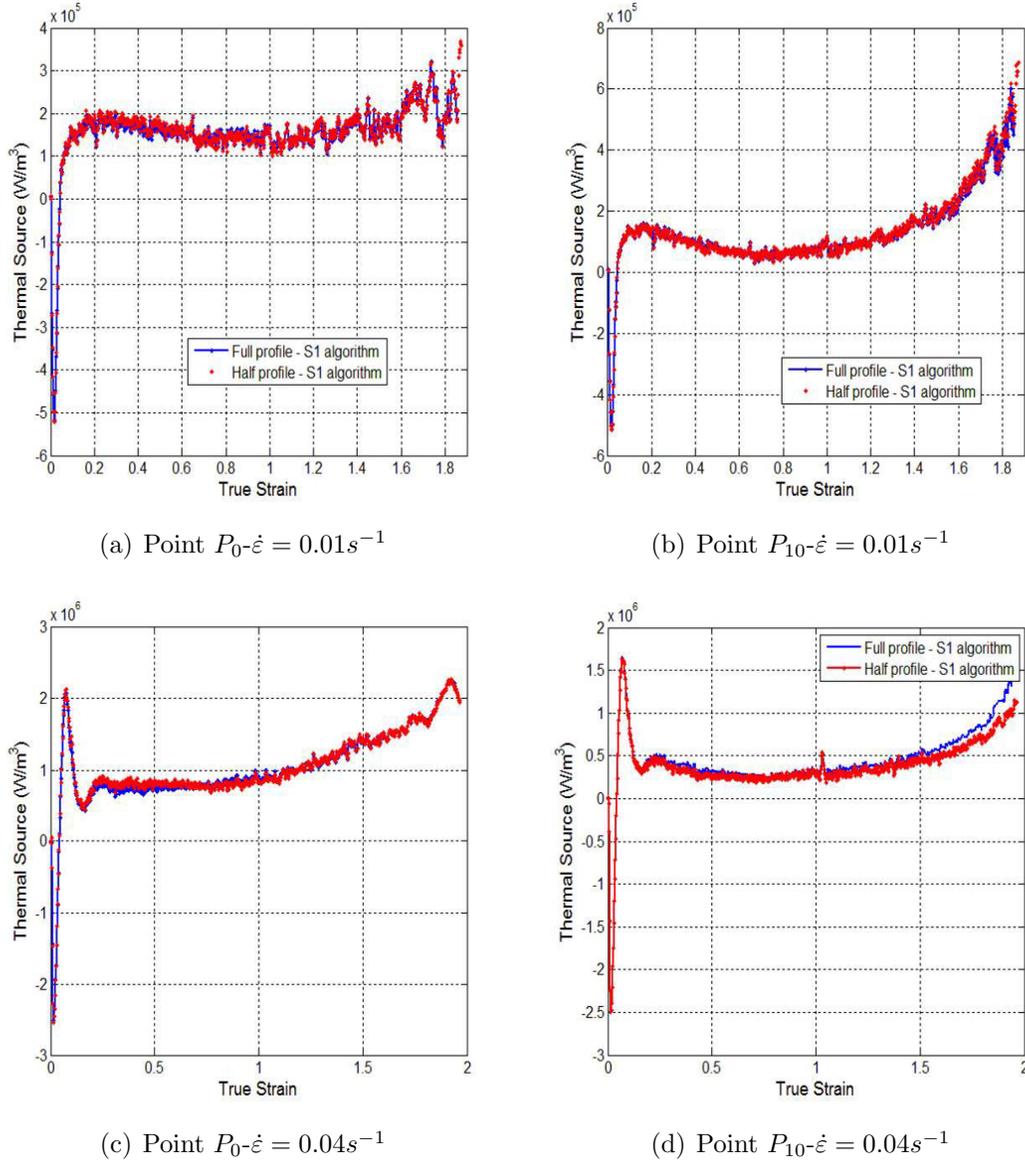


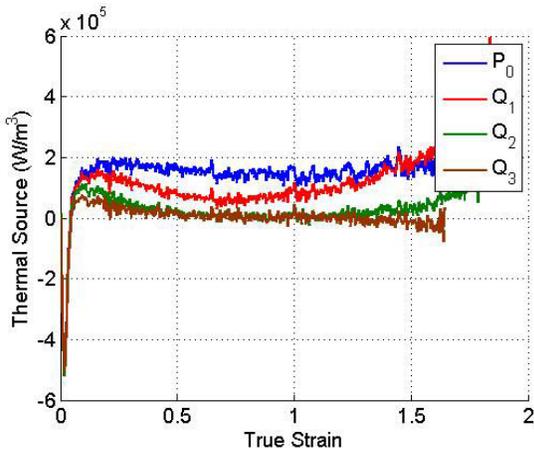
FIGURE 5.24 – Profils de source reconstruite à partir de “Full profile” et “Half profile” à vitesse $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ et $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$

Par ailleurs, nous avons aussi le choix d’adopter des conditions aux limites de type mixte (Fourier), intégrant un coefficient d’échange global c-à-d de considérer aux bords

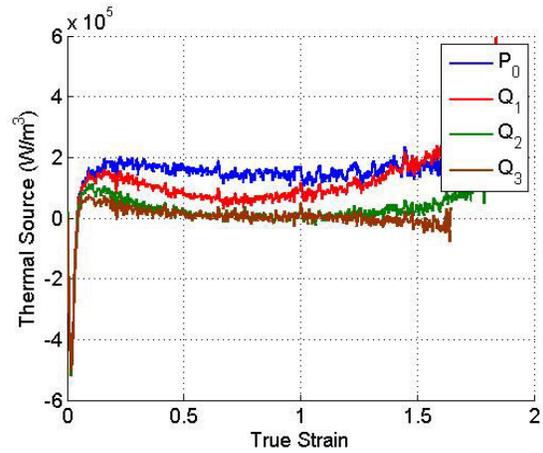
$$-k \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_{-L_Y} = -h_1(T(-L_Y) - T_\infty) \quad \text{et} \quad -k \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_{L_Y} = h_2(T(L_Y) - T_\infty) \quad (5.4)$$

où h_1, h_2 coefficients d’échange et T_∞ température de l’ambiance. Des valeurs de coefficients d’échange $h_1 = h_2 \simeq 10W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ correspondent à l’ordre de grandeur pour une situation de convection naturelle et rayonnement à basse température. Cette grandeur est certainement plus faible en raison du confinement de l’éprouvette dans une enceinte à parois réfléchissantes. La température d’ambiance est maintenue par climatisation de la salle à $T_\infty = 23^\circ C$ mais elle est de toutes façons mesurée sur le champ de température initial.

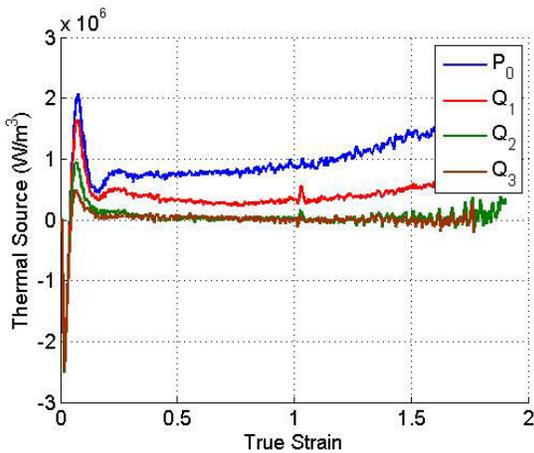
L'objectif est de voir s'il y a une influence selon la façon de traiter les CL dans la reconstruction en comparant les conditions mixtes définies en (5.4) et les conditions de Neumann avec identification du flux par le gradient. On présente les sources temporelles aux points matériels $P_0 = 0cm$, $Q_1 = P_0 \pm 1.6cm$, $Q_2 = P_0 \pm 3.2cm$ et $Q_3 = P_0 \pm 4.8cm$ pour les différents taux de déformations. Sur la figure (5.25), on a comparé la reconstruction avec deux cas de CL à vitesse $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ et $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$. On peut constater que les deux types de CL conduisent à des résultats identiques. En particulier, pour les valeurs de h_1, h_2 variant dans $[0,50]$, les profils de THS reconstruites ne changent presque pas. Cela indique la faible contribution sur la reconstruction de THS de la manière de fixer les CL. Ainsi, les deux choix de CL sont également satisfaisants pour l'inversion des données expérimentales.



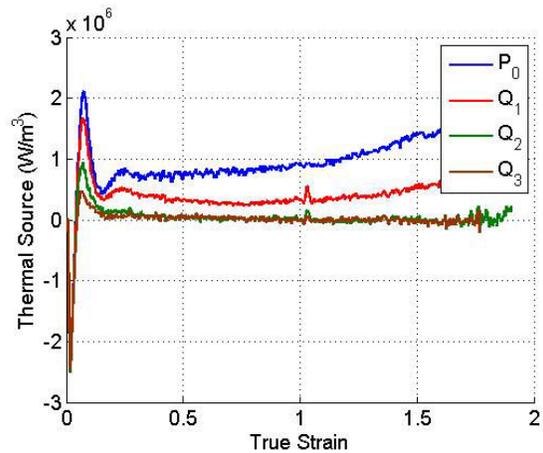
(a) $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ avec CL de Neumann



(b) $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ avec CL mixte



(c) $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$ avec CL de Neumann



(d) $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$ avec CL mixte

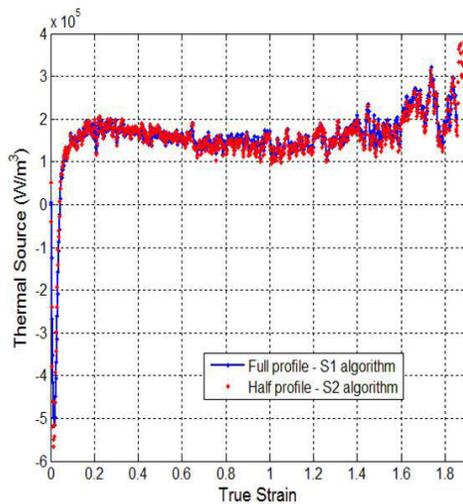
FIGURE 5.25 – Comparaison des THS reconstruites par CL de Neumann identifiée et CL mixte (h fixé) pour différentes vitesses de déformation $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$, $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$

5.2.2.4 Comparaison des deux algorithmes inverses

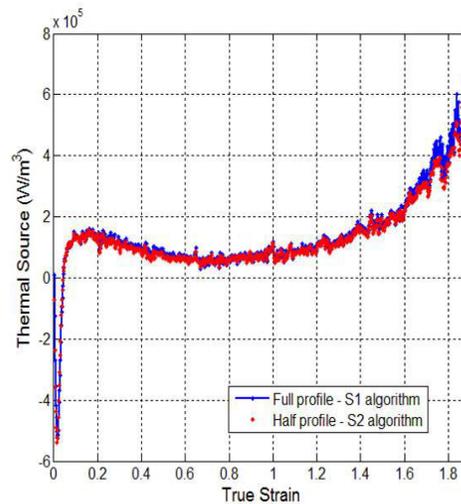
Les sources reconstruites sont analysées dans la partie centrale sur la surface de l'éprouvette. Elles comparent ce que donne chaque algorithme inverse S1/S2 et ont été obtenues en considérant le transport advectif-diffusif (avec vitesses réelles) et une application de l'algorithme sur 1/2 éprouvette (symétrisation de l'observable) ou éprouvette complète (puisque nous venons de voir que les résultats sont identiques). On rappelle que les 2 algorithmes sont appliqués avec les réglages de régularisation optimale. Les figures (5.26-ab) se rapportent à un test à vitesse de $0.01s^{-1}$ et donnent les sources reconstruites sur la zone centrale pour le point matériel correspondant au pixel central P_0 (Fig.5.26a) et le point matériel correspondant à $P_{10} = P_0 \pm 10px$ (Fig.5.26b).

Les algorithmes donnent les mêmes résultats. De très faibles écarts sont constatés en Fig.5.26b lorsque la source est reconstruite en P_{10} , sans que l'on puisse réellement en justifier l'origine. On peut noter qu'à un même niveau de régularisation, les reconstructions produisent des signaux à même niveau de bruit. Ce bruit apparaît réduit en P_{10} dans le cas où l'on a profité d'une moyenne des profils sur les 1/2 éprouvettes. On observe aussi par comparaison avec les figures (5.24) que le choix fait pour traiter les conditions aux limites (full profile versus half profile) n'affecte pas les résultats.

A la plus grande vitesse d'essai (Figs.5.26-cd), les mêmes remarques peuvent être faites mais on peut noter pour les reconstructions sur le point matériel P_{10} , des divergences qui sont dues au fait qu'à cette vitesse d'essai, on peut observer des écarts non négligeables dans la symétrie même des profils de température en fin d'essai (Fig.5.27). La solution apparaît alors biaisée du fait de la prise de moyenne pour la reconstruction "Half profile". Cet effet reste peu sensible sur la reconstruction au centre de l'éprouvette.



(a) Point P_0 - $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$



(b) Point P_{10} - $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$

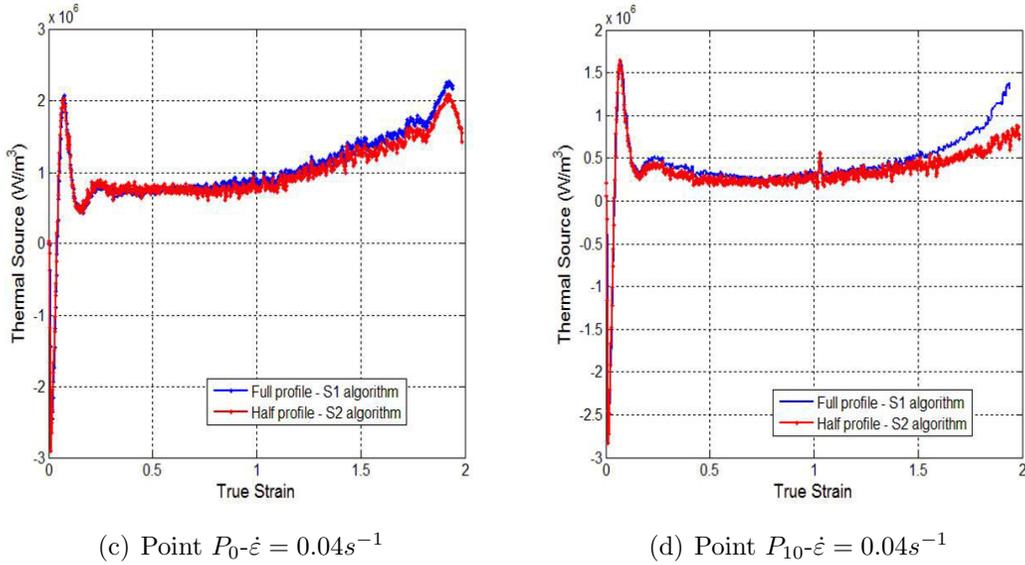


FIGURE 5.26 – Profils de source reconstruite par S1 et S2 à vitesse $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ et $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$

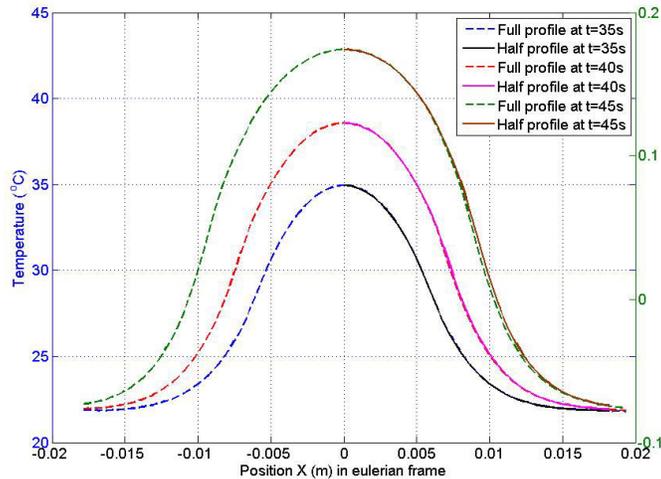


FIGURE 5.27 – Profils de température de “Full Profile” et “Half Profiles” pour l’essai $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$

Les résidus en température reportés en figures (5.28-abcd) redonnent le niveau de bruit expérimental et sont identiques par les deux algorithmes. Ici ils sont donnés pour des déformations de 0.1 (Fig.5.28-ab) pour l’algorithme S2 appliqué à 1/2 éprouvette et correspondent à un instant pour lequel le profil de température redevient supérieur à la valeur initiale (donc après l’effet thermoélastique) mais où les écarts sont encore très faibles. Les figures (5.28-cd) donnent ces résidus pour une déformation d’éprouvette de 0.4.

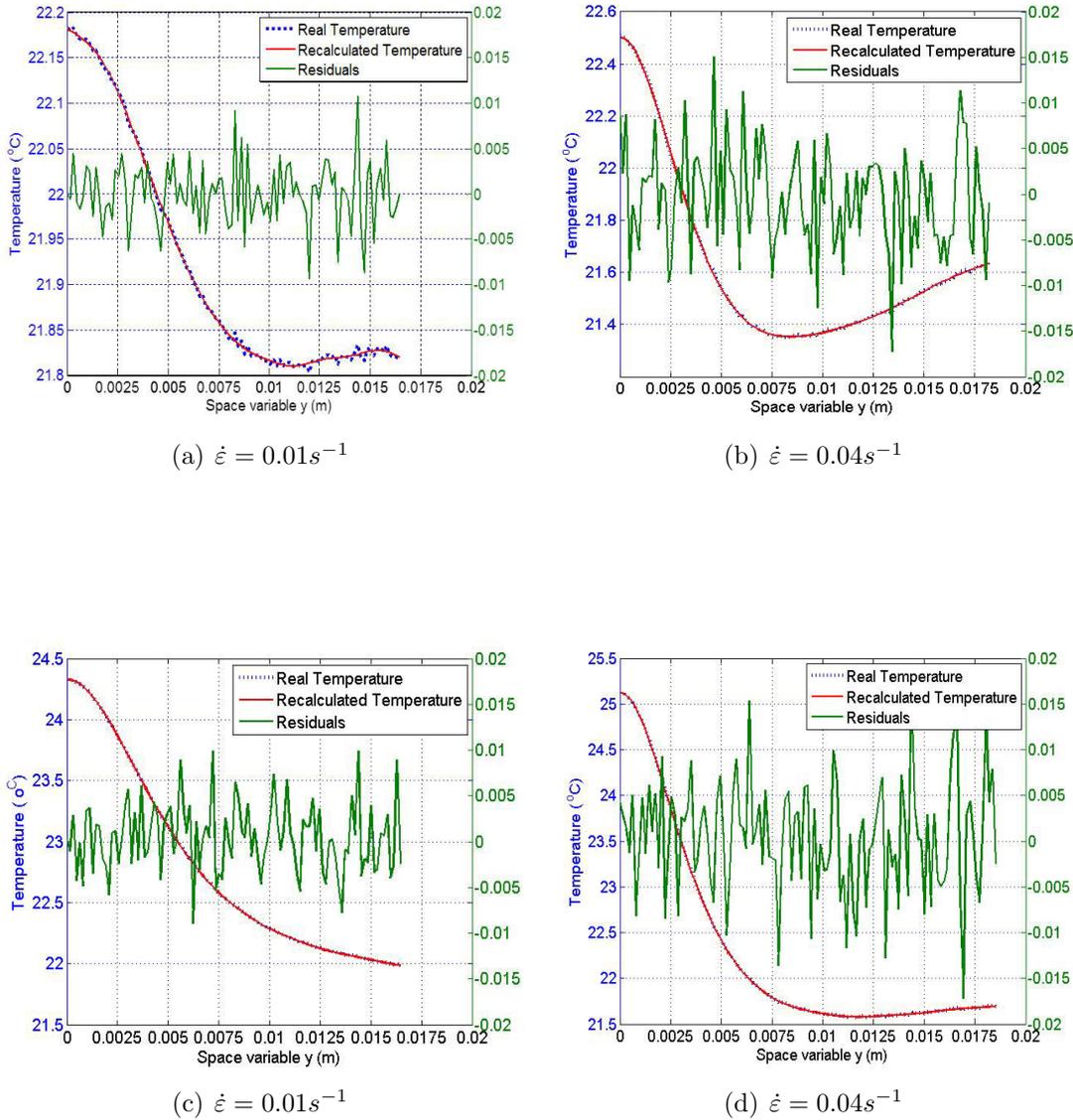


FIGURE 5.28 – Résidus en température pour l'état de déformation (a) $\epsilon = 0.1(t = 10s)$ $s.t.d_{residuals} = 0.00397$ (b) $\epsilon = 0.1(t = 2.5s)$ $s.t.d_{residuals} = 0.004$ (c) $\epsilon = 0.4(t = 40s)$ $s.t.d_{residuals} = 0.0037$ (d) $\epsilon = 0.4(t = 10s)$ $s.t.d_{residuals} = 0.0055$

Enfin, nous avons reporté sur les Figs.5.29a (essai à $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$) et 5.29b (essai à $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$), les résultats obtenus par une même méthode de reconstruction mais pour les 3 points matériels P_0 , $P_2 = P_0 + 2px$ et $P_5 = P_0 + 5px$. Ceci permet de voir que la source reconstruite pour le point matériel P_5 ne correspond déjà plus aux sources obtenues en P_0 et P_2 . La source apparaît alors comme sous-estimée. Cela indique que l'on peut se permettre de prendre pour valeur de source centrale, la moyenne de la source obtenue sur les 3 premiers pixels. Cela améliore sensiblement le signal de THS reconstruite sans biaiser le résultat et c'est important pour la phase ultérieure d'analyse thermomécanique des différentes contributions à cette source.

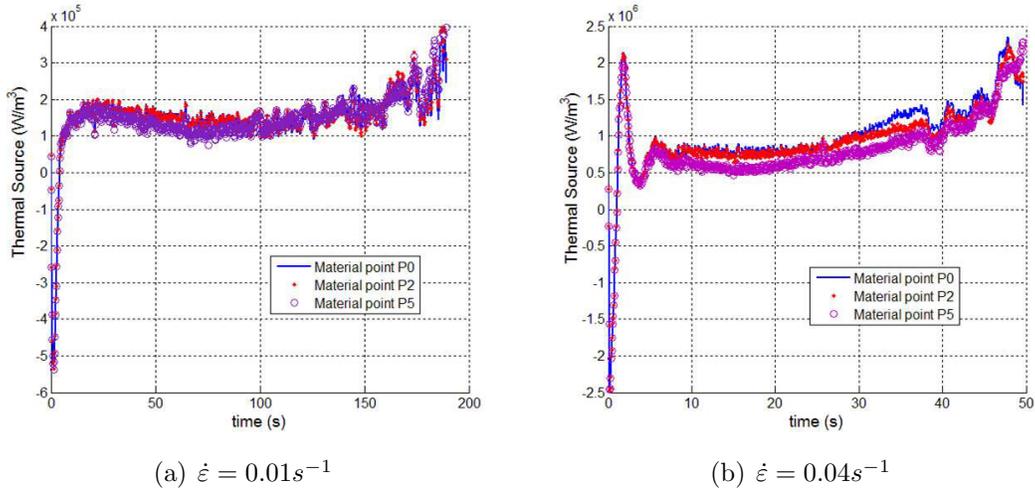


FIGURE 5.29 – Sources reconstruites en P_0, P_2, P_5 à (a) $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ (b) $\dot{\epsilon} = 0.04s^{-1}$

5.2.3 Analyse thermomécanique

Les comportements de source thermomécanique analysés ici sont issus de reconstructions ayant fait fonctionner les algorithmes inverses en prenant en compte l'advection et les profils réels de vitesse.

5.2.3.1 Analyse eulérienne/lagrangienne

On regroupe sur la figure (5.30) les sources reconstruites sur la zone centrale de l'éprouvette dans le repère eulérien. Le signal correspond à la moyenne sur 11 pixels ($P_0 \pm 5px$ voisins) des sources reconstruites sur des profils comptant toujours le même nombre de 215 pixels.

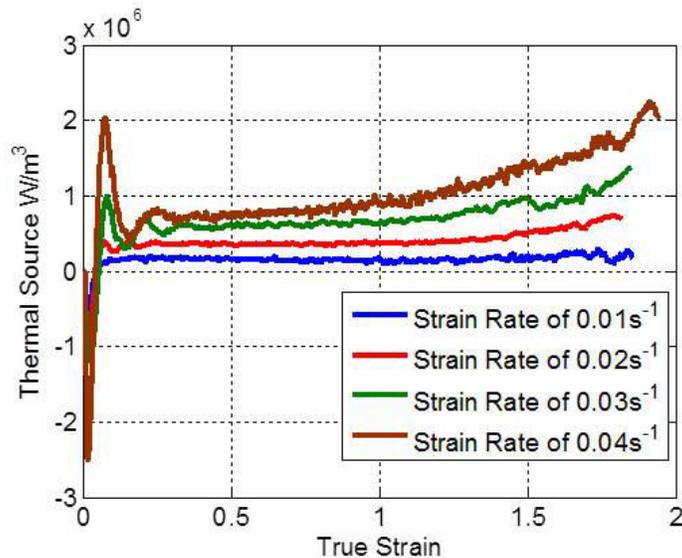


FIGURE 5.30 – Sources reconstruites sur le VER eulérien central en fonction des vitesses de traction imposées.

L'effet thermo-élastique sera analysé en détail plus loin. Ces signaux font apparaître des niveaux de puissance qui dès que la localisation est installée et se propage ($\varepsilon > 0.3$), apparaissent grosso-modo comme proportionnels à la vitesse imposée. Il n'en est pas de même pour les déformations correspondant à la localisation de la striction qui s'accompagne à l'évidence d'effets exothermiques plus intenses selon la vitesse imposée. On observe un "overshoot" à une déformation d'environ 0.07 qui correspond donc à un point intermédiaire entre les points A et B identifiés dans la courbe de traction au niveau du "genou" de traction, au passage du yield stress. Cet overshoot est d'autant plus prononcé que la vitesse de déformation est élevée. Il est suivi d'une diminution marquée et d'un niveau stabilisé à partir de déformations de l'ordre de 0.35. On note enfin sur chaque courbe une reprise de l'activité thermique pour des déformations de l'ordre de 1-1.2 qui correspondent à l'apparition d'un nouveau régime, mise en évidence également sur le plan cinématique en section 5.2.1. Même si les défauts de régulation au passage du seuil de plasticité pour les essais à 0.03 et $0.04s^{-1}$ nous empêchent d'avoir une source reconstruite pour un trajet de chargement parfaitement maîtrisé, il est clair au vu des bonnes qualités de reconstruction au passage de ces effets dynamiques (très reproductibles), que cet overshoot est très "piqué" et donc qu'il correspond vraisemblablement à un effet excessivement localisé dans le temps, probablement lié à une brutale réorganisation interne à l'échelle de la microstructure. Il faut également mentionner le fait que cet overshoot n'est pratiquement pas visible pour une vitesse de 0.01 et se manifeste vraiment pour les 3 autres vitesses. Les courbes de traction vraie montraient aussi une sensibilité de la contrainte seuil au passage de 0.01 vers les vitesses supérieures (pour lesquelles elle reste ensuite constante).

Une autre remarque intéressante peut être faite à partir des sources reconstruites pour deux points eulériens distincts et fort éloignés l'un de l'autre comme dans les figures (5.21-ab) que nous avons vu en section 5.2.1. Dans la Fig.5.21b, il est manifeste que la localisation s'accompagne d'une annulation des déformations en dehors de la zone centrale ce qui annule l'effet thermoélastique et en l'absence de déformation laisse la zone à source nulle. On peut concevoir ensuite que la partie négative et décroissante de la source corresponde à l'installation progressive d'une déformation élastique (donc d'un nouvel effet thermoélastique) qui est ensuite "effacé" par les effets thermomécaniques liés au développement de la plasticité (dissipation intrinsèque et couplages entropiques).

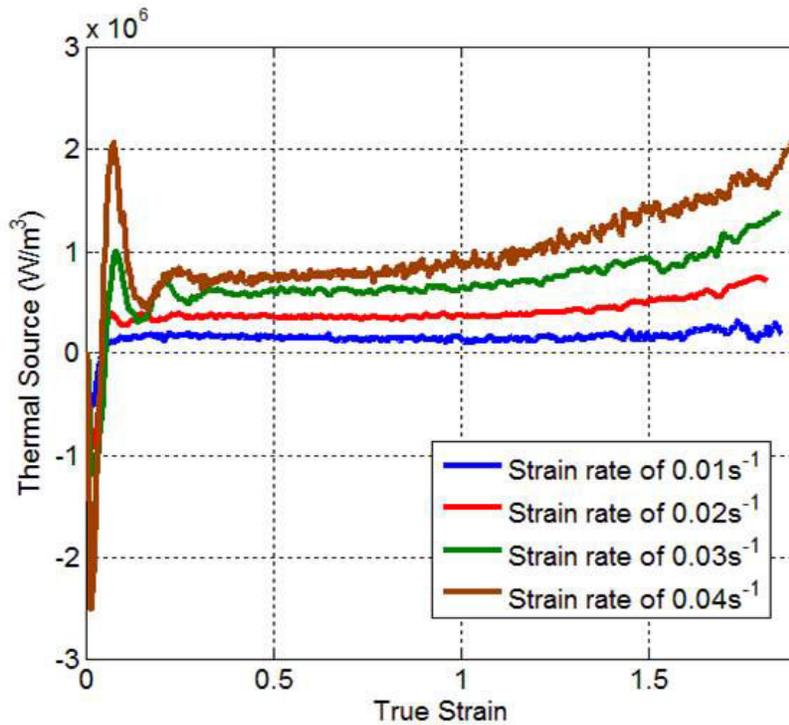
Les figures (5.31), montrent maintenant les reconstructions obtenues pour différents points matériels en fonction de ces mêmes 4 vitesses de traction. Le point P_0 correspond au point central initial $Y_0 = 0$ (Fig.5.31a), le point Q_1 à la coordonnée matérielle $Y_1 = \pm 1.6mm$ (Fig.5.31b), le point Q_2 à la coordonnée matérielle $Y_2 = \pm 3.2mm$ (Fig.5.31c). Il s'agit toujours de sources moyennées sur les 5 pixels environnants.

La Fig.5.31a n'apporte aucune information supplémentaire mais permet de voir qu'on retrouve bien les sources de la zone eulérienne centrale par moyenne sur 5 ou 11 pixels autour du pixel central. Cela a été vérifié sur tous les essais.

La Fig.5.31b permet d'apprécier ce qui se passe en dehors de la zone centrale (point Q_1) mais toujours dans la zone de l'éprouvette où la section initiale est constante (Chapitre2 Fig.2.1). Si l'effet thermoélastique y est bien de même intensité, il n'en est pas de même des autres effets thermomécaniques. Cette zone matérielle subit semble-t-il la même cinétique d'effets thermomécaniques (overshoot piqué, plateau, reprise d'activité) mais à un niveau moindre. Cette observation mériterait d'être confirmée par des analyses de microstructure

longitudinales pour détecter s'il existe des "gradients" dans le degré d'avancement des transformations microstructurales.

Pour le point Q_2 situé initialement en dehors (en limite) de la zone de section initiale constante, la situation est encore différente. La cinétique de la source présente toujours un effet thermoélastique de même intensité que les autres points (ce qui est normal, la section n'étant encore que très peu modifiée en raison du congé de raccordement à grand rayon), suivi d'un effet intense et très localisé dans le temps au moment de la striction mais de moindre intensité que pour les autres points, puis un profil de source nulle (compte-tenu du bruit). Cela semblerait indiqué que cette zone de bord de la zone de localisation subit toujours des transformations microstructurales de même nature qu'au centre (mais à un degré moindre) au moment de la localisation, mais n'est plus du tout affectée par les effets accompagnant plasticité et évolution hyperélastique. Ceci est par ailleurs confirmé visuellement par un blanchiment partiel de l'éprouvette en bord de zone de localisation, et une absence totale de fibrillation et d'écoulement de cette zone qui reste globalement peu déformée (les courbes sont toujours présentées en fonction de la déformation vraie mesurée au centre, donc du temps d'écoulement du test et il ne faut donc pas l'assimiler à la déformation du point matériel analysé).

(a) Point P_0

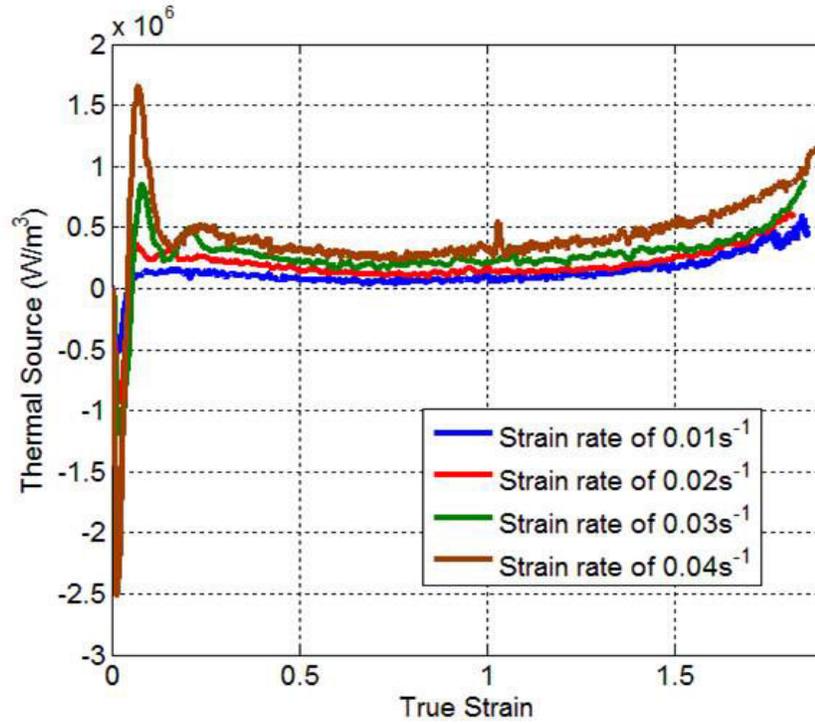
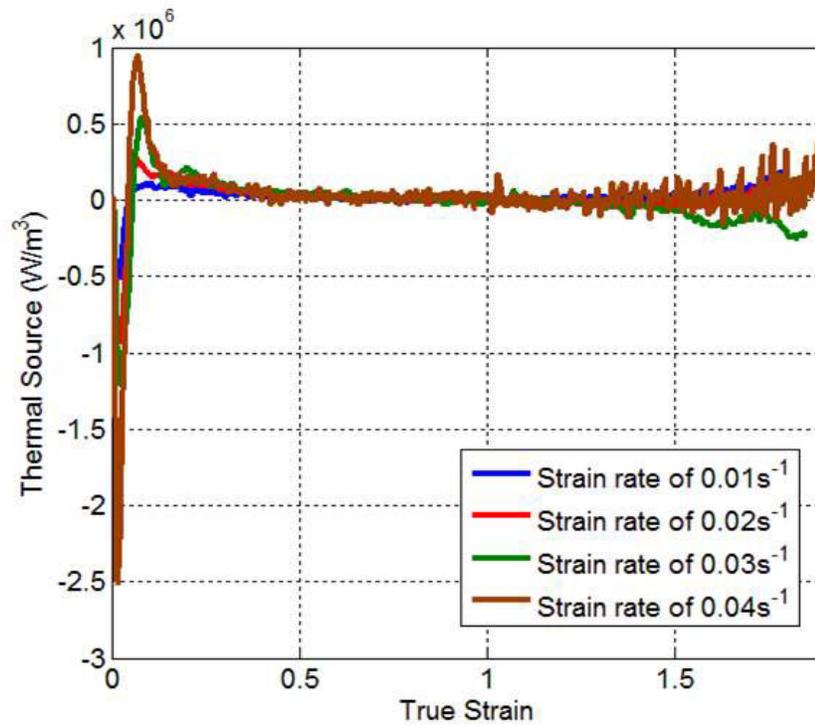
(b) Point Q₁(c) Point Q₂

FIGURE 5.31 – Evolution de la source pour différents points matériels, en fonction des vitesses de déformation imposées

Enfin les figures ci-dessous donnent les représentations 2D (temps-espace) obtenues pour les sources reconstruites dans les deux points de vue eulérien (Fig.5.32) et lagrangien (Fig.5.33) pour un même essai de traction $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$. Il donne l'aperçu global du comportement thermomécanique avec l'effet thermoélastique instantané, l'effet de localisation des déformations aux temps courts, sur la zone centrale, suivi d'une scission puis d'un déplacement de la zone plastifiée vers les extrémités de l'éprouvette. La vue dans le système lagrangien permet de prendre la mesure de l'extrême proximité des points matériels (dans la zone à section initiale constante) qui subiront de grands déplacements ultérieurs.

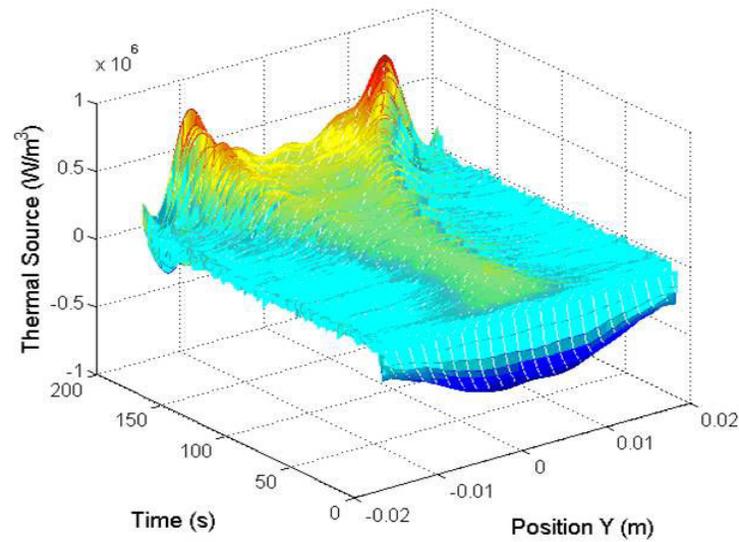


FIGURE 5.32 – Source reconstruite dans le système eulérien (domaine observé par la caméra)

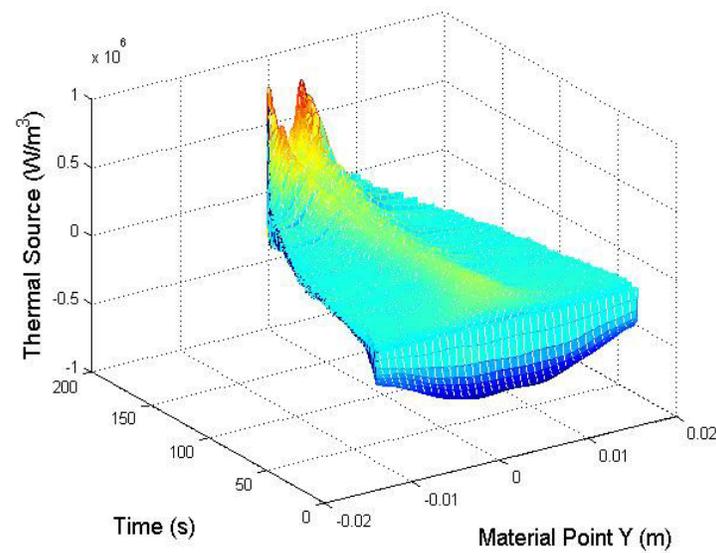


FIGURE 5.33 – Source reconstruite dans le système lagrangien (domaine observé par la caméra)

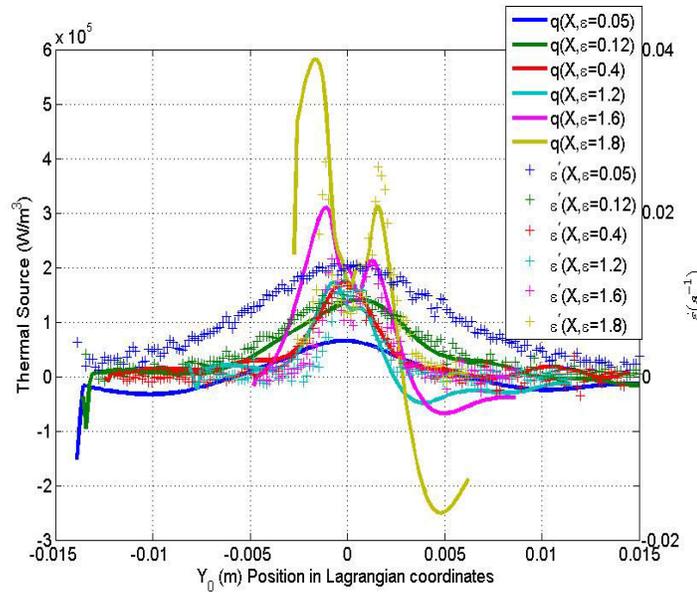
5.2.3.2 Profils de source (THS) versus taux de déformation

Les figures (5.34)-abc suivantes présentent les profils longitudinaux de source et de taux de déformation pour les 6 états de déformation de l'éprouvette et pour les vitesses d'essai à 0.01 et $0.03s^{-1}$. Malgré les difficultés de notre problème inverse, on atteint des qualités de profils de source reconstruite presque aussi bonnes que les mesures de taux de déformation. Sur un plan qualitatif, on peut observer que ces profils sont très similaires : à faible état de déformation, les effets thermoélastiques et de déformation quasi-élastique produisent un profil en bosse élargie. La localisation conduit ensuite à des profils plus “piqués” et pour les deux derniers niveaux de déformation, on observe des profils à 2 pics, localisés manifestement dans la même zone (Fig.5.34c), manifestation d'une scission et d'un déplacement de la localisation sur les épaules de striction qui s'initie vers $\varepsilon = 1.2$. Les pics d'intensité de source ne sont jamais symétriques dans tous les résultats que nous avons pu obtenir. Ces résultats corroborent en tout cas l'idée qu'il y a un couplage assez simple entre q et $\dot{\varepsilon}$.

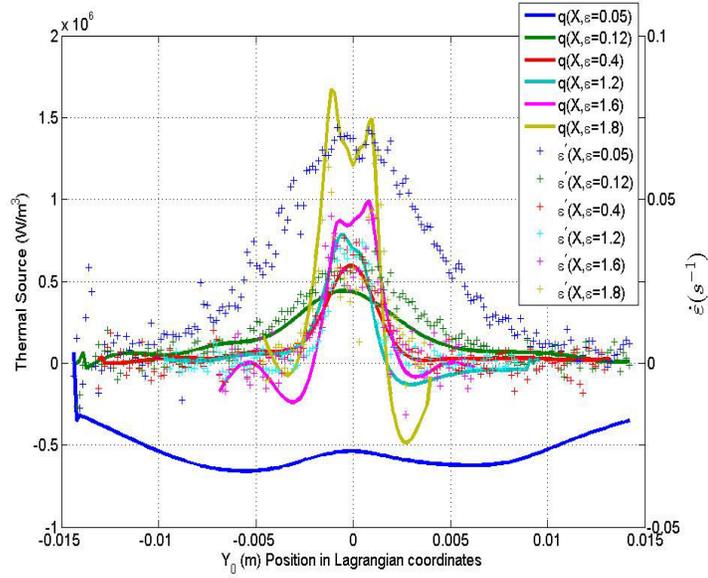
Sur le plan quantitatif, les mesures sont trop imprécises pour dégager quelques faits certains. Nous reportons dans le tableau joint les valeurs approximatives correspondant aux pics d'intensités de source et de taux de déformation, pour les 4 vitesses type. Si la valeur des puissances “émises” au niveau des pics ne cesse de croître dans un rapport de quasi proportionnalité en fonction de la vitesse d'essai, il semblerait qu'on sature au niveau des taux de déformation (remarque déjà faite en section 5.1).

| Essai | $0.01s^{-1}$ | $0.02s^{-1}$ | $0.03s^{-1}$ | $0.04s^{-1}$ |
|-----------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $q_{pic}(10^5 W/m^3)$ | 4.5 | 10 | 16 | 21 |
| $\dot{\varepsilon}_{pic}(s^{-1})$ | 0.027 | 0.05 | 0.065 | 0.065 |

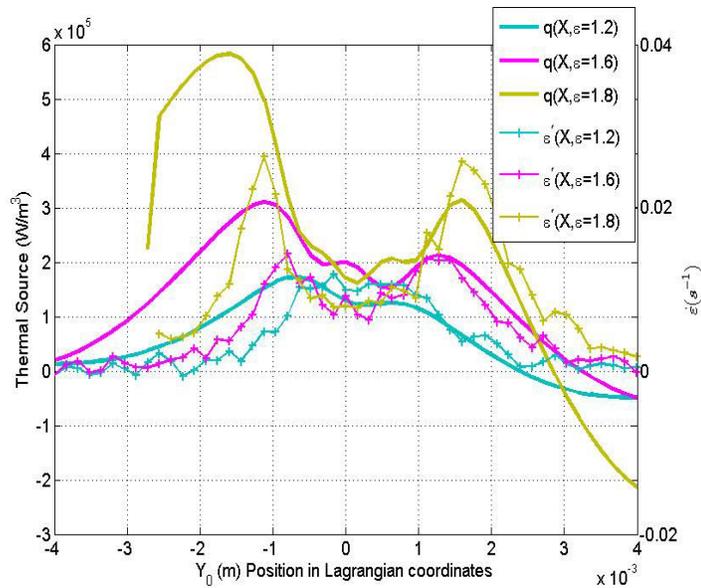
TABLE 5.2 – Valeurs maximales des pics d'intensité de source et taux de déformation dans les épaules de striction (état de déformation $\varepsilon = 1.8$)



(a) $\dot{\varepsilon} = 0.01s^{-1}$



(b) $\dot{\epsilon} = 0.03s^{-1}$



(c) Zoom du cas a)

FIGURE 5.34 – Comparaison des profils longitudinaux de source (THS) et de taux de déformation $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ et $\dot{\epsilon} = 0.03s^{-1}$

5.2.3.3 Faibles niveaux de déformation : thermoélasticité

Il est assez naturel de penser à vérifier que les solutions obtenues rendent assez bien compte du phénomène de thermoélasticité, traduit par la loi de Hooke-Duhamel qui couple les variables thermodynamiques (S, T) et (Σ, ϵ) ou (p, V) puisque seules les parties sphériques des tenseurs de déformation-contrainte sont concernées. S'agissant d'un terme de couplage réversible, non responsable de production d'entropie, le terme de source de chaleur est bien

connu de la thermodynamique classique et s'écrit (3.33) :

$$q_{thermoelstic} = -T \frac{\alpha}{\kappa} \dot{I}_{\varepsilon^e} = -T \alpha E \dot{\varepsilon}_y \quad (5.5)$$

avec

- α , coefficient de dilatation linéaire ;
- $\frac{1}{\kappa} = K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$, module de compressibilité faisant intervenir les coefficients de Lamé λ, μ ou module d'élasticité E et coefficient de Poisson ν ;
- $\dot{I}_{\varepsilon^e} = tr(\dot{\varepsilon}_e) = \frac{d}{dt} \left(\frac{V-V_0}{V_0} \right)$, taux de variation volumique élastique que l'on peut réécrire $(1 - 2\nu)\dot{\varepsilon}_Y$.

Le signe - traduit que cette source apparaît comme endothermique du point de vue du VER local : comme pour un gaz parfait, la mise en traction de l'éprouvette induit une augmentation de volume donc une baisse de température.

Pour cela il faut se focaliser sur les faibles déformations (temps courts) pour lesquelles on $q_{THS} = q_{thermoelstic}$ et nous avons retenu l'intervalle de déformation $[0 - 0.2]$ afin de suivre l'effet thermoélastique puis sa combinaison avec les effets de couplages thermiques différés. Dans cette plage de déformation, nous pouvons ainsi vérifier à la fois le fonctionnement des algorithmes mis en œuvre et la cohérence thermodynamique des résultats.

En termes de qualité de reconstruction, l'évolution de la source \hat{q}_{total} au centre de l'éprouvette (VER central) et reconstruite pour les faibles déformations peut être directement comparée avec une quantité de référence : l'énergie instantanée $\langle \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \rangle_{VER}$. En effet, aux temps courts, on peut alors négliger les transferts conductifs (les pertes également). Une moyenne est calculée sur une zone d'environ 10×10 px pour améliorer la précision du calcul, et la dérivée temporelle est calculée sur tous les pas de temps (images) disponibles.

Les figures ci-dessous comparent donc ces deux grandeurs pour les 4 vitesses d'essai considérées. L'axe des ordonnées est libellé "source intrinsèque thermoélastique" pour mettre l'accent sur ce que l'on cherche à voir mais il s'agit bien de la source totale reconstruite. Quatre remarques peuvent être faites :

- L'évolution de \hat{q}_{total} traduit une évolution "instantanée" dans les valeurs négatives, qui s'inverse ensuite et redevient positive suite aux nouveaux effets thermiques accompagnant la viscoélasticité et la plasticité au seuil d'écoulement.
- A propos des déformations typiques qui peuvent signifier le phénomène, les courbes de reproductibilité données en Fig.5.35a et b montrent qu'on ne peut pas s'attendre à une bonne précision. Les raisons sont multiples et facilement compréhensibles. Si à l'échelle mésoscopique locale, l'évolution de température est supposée instantanée, il faut néanmoins un temps de thermalisation (conversion de l'énergie en température) liée à la chaleur spécifique d'un petit volume (ordre de taille du pixel). S'y ajoute ensuite une incertitude liée à la reconstruction : disponibilité d'images aux temps courts et problèmes liés par exemple à l'utilisation de temps futurs dans l'algorithme n°1, qui tend à différer les effets. La fig.5.36 montre les reconstructions obtenues aux temps courts pour les 2 algorithmes et en faisant varier le nombre de pas de temps futurs pour l'algorithme 1. On voit donc que l'algorithme 2 présente une supériorité sur l'algorithme 1 de ce point de vue là. Néanmoins, on peut remarquer que les courbes sont

relativement proches selon l'axe des déformations (du temps) ce qui tend à montrer qu'indépendamment de la vitesse de l'essai, les effets de thermalisation sont du même ordre (ne dépendent que de l'échantillon) : le minimum est obtenu globalement pour d'une déformation de 0.02 et le passage à des valeurs positives de la source est obtenu pour une valeur un peu inférieure à $\varepsilon < 0.05$

- Si l'on considère que la valeur maximale de la source \hat{q}_{total} correspond globalement à $q_{thermoelastic}$, on doit donc observer une proportionnalité du signal à la vitesse de déformation locale qui correspond donc, au centre de l'éprouvette, à celle imposée par la machine et mesurée par vidéoextensométrie. Compte-tenu de toutes les remarques qui ont pu être faites par ailleurs sur les erreurs liées à cet asservissement, les valeurs issues des figures (5.35) et reportées dans le tableau ci-dessous montrent que l'accord est plutôt bon. On peut aussi s'intéresser à la valeur obtenue. En moyenne sur les 4 vitesses d'essai, on trouve $\alpha ET \approx 50 MPa$. En considérant $T \approx 300K$, température d'essai et $E \approx 2800 MPa$ module d'Young mesuré par essai de traction et application d'un modèle d'identification [61] (Blaise et al., 2010), on en déduit donc un coefficient de dilatation de l'ordre de $\alpha \approx 6 \times 10^{-5} K^{-1}$ ce qui correspond à l'ordre de grandeur attendu ($\alpha = [14 - 18] \times 10^{-5} K^{-1}$ selon [111]).

| Taux de déformation | $\max(\hat{q}_{total})$ | $\hat{q}_{total} \approx q_{thermoelastic} \propto \dot{\varepsilon}$ |
|------------------------------------|-------------------------|---|
| $\dot{\varepsilon}_1 = 0.01s^{-1}$ | -0.5 W/cm^3 | - |
| $\dot{\varepsilon}_2 = 0.02s^{-1}$ | -1/1.2 W/cm^3 | $\sim \times 2\dot{\varepsilon}_1$ |
| $\dot{\varepsilon}_3 = 0.03s^{-1}$ | -1.4/1.5 W/cm^3 | $\sim \times 3\dot{\varepsilon}_1$ |
| $\dot{\varepsilon}_4 = 0.04s^{-1}$ | -2.1/2.2 W/cm^3 | $\sim \times 4\dot{\varepsilon}_1$ |

TABLE 5.3 – Proportionnalité de la source reconstruite à la vitesse de déformation, signature du comportement thermo-élastique.

- La dernière remarque concerne le fait que la source reconstruite correspond quasi-parfaitement à l'énergie instantanée de référence issue directement du signal en température. Cette quasi-superposition des courbes montre qu'à ces niveaux de déformation, l'équation de la chaleur se résume à $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = q_{THS}$. Il ne peut pas y avoir encore d'effet perturbateur dû à un flux de transport (diffusif ou advectif) ce que l'on sait par ailleurs via la symétrie du problème par rapport au point central. Remarquons enfin que le léger décalage qui existerait entre les deux courbes est bien conforme à la physique : en l'absence de tout terme de transport (courbe verte), la source reconstruite précède celle obtenue en prenant en correction les flux de transferts.

Quel que soit l'algorithme utilisé, il est donc relativement robuste dans cet intervalle d'identification où les autres termes de transport sont estimés à de très faibles valeurs.

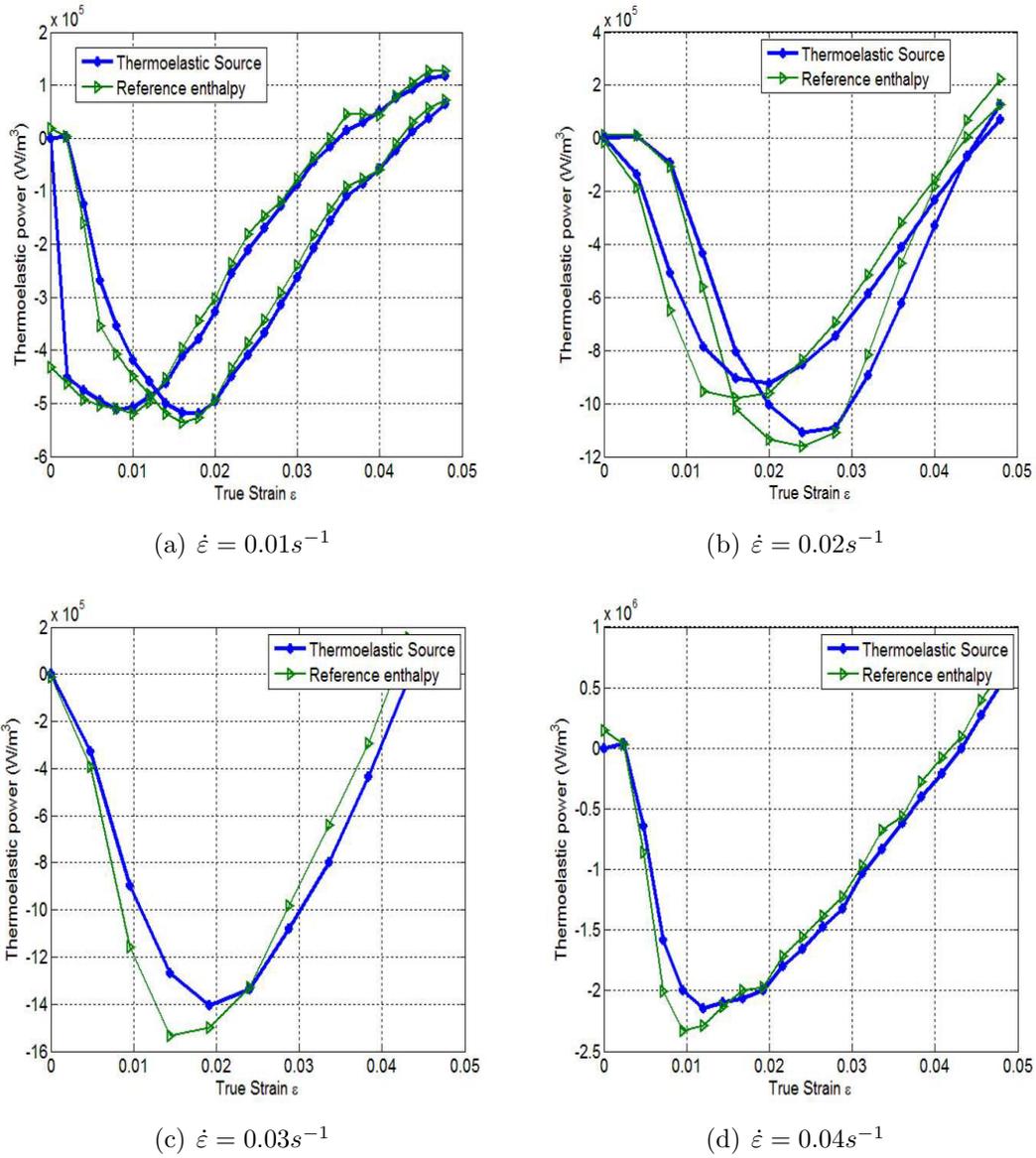


FIGURE 5.35 – Source reconstruite aux temps courts par l’Algorithme S1 pour les différents essais

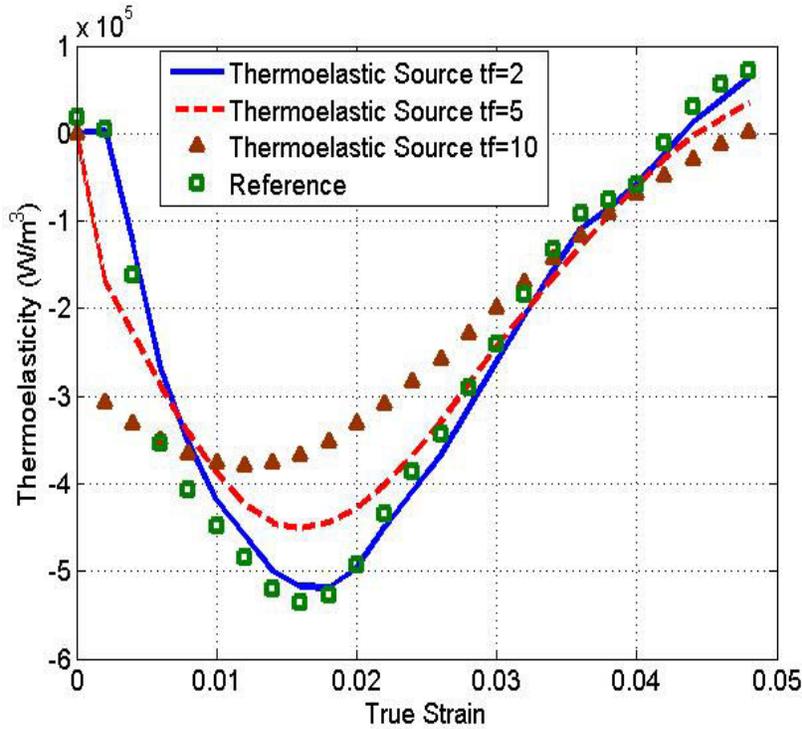


FIGURE 5.36 – Comparaison du fonctionnement des algorithmes S1 & S2 aux temps courts - Influence du nombre de pas de temps Futurs pour l’algorithme S1.

Nous avons effectué une autre vérification liée à la dépendance y en de la source reconstruite. Aux temps courts, nous avons vu que si cette source est d’origine purement thermoélastique, elle va être proportionnelle à $\dot{\epsilon}$ ou $\dot{\sigma}$: $q_{thermoelastic} = -\alpha ET\dot{\epsilon} = -\alpha T\dot{\sigma}$. Or on peut écrire $E\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{S(y,t)} = \frac{\dot{F}S - F\dot{S}}{S^2} \approx \frac{\dot{F}}{S} \right)$ en négligeant aux temps courts, la variation de section de l’éprouvette (soit $\dot{S} \approx 0$ - petites déformations). La section droite de l’éprouvette s’écrit $S = w(y,t) \times e(y,t)$ et on considère qu’aux temps courts, avant localisation de la striction, l’épaisseur reste constante, indépendante de y . Par contre, la forme initiale de l’éprouvette impose une évolution de la largeur $w(y)$. Ceci montre que $\dot{\epsilon} \propto \frac{1}{w(y)}$ et donc que le profil du taux de déformation est conditionné par la géométrie de la section droite. Le profil de source $\hat{q}(y)$ aux temps courts doit donc correspondre au profil de $\dot{\epsilon}(y)$ qui lui-même doit correspondre à la géométrie de l’éprouvette (évolution de largeur de la section droite selon y). C’est ce que montrent les figures 5.37a et b.

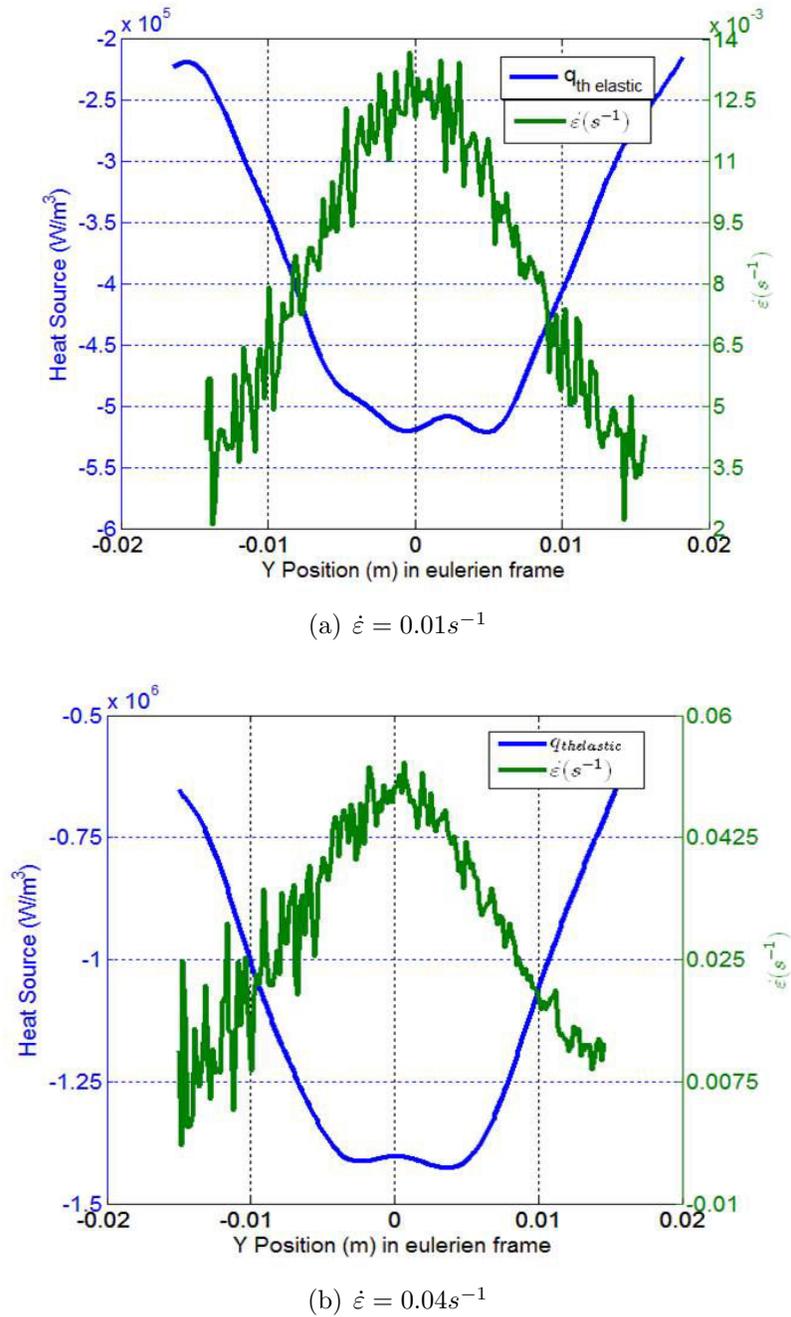


FIGURE 5.37 – Superposition des profils de source thermique identifiée et de taux de déformation pour le même instant ($\varepsilon = 0.02$) pour un essai à 0.01s^{-1} et 0.04s^{-1}

Cette dernière analyse du phénomène de thermoélasticité a eu essentiellement valeur de confirmation que les résultats expérimentaux de champs de température, traités par nos algorithmes de reconstruction de sources, conduisaient à des résultats valides sur le plan du sens physique. Ils viennent conclure ce chapitre de résultats de thèse dont les figures 5.34 sont de notre point de vue, les plus emblématiques. La très grande coïncidence des profils de taux de déformation mesurés et de THS reconstruites qui accompagnent le phénomène de

striction pendant tout un essai de traction et jusqu'à des déformations très grandes, est en effet intéressante. Elle suggère un couplage relativement simple des effets thermomécaniques et cinématiques, dont il reste par un modèle thermodynamique adapté, à attribuer clairement l'origine : dissipation intrinsèque et/ou couplages entropiques (effets de type transformations de phase?) et les parts respectives dans l'effet thermique caractérisé.

Conclusion et perspectives

AU terme de ce manuscrit, nous nous contenterons de revenir sur les apports de cette étude et les principales conclusions que l'on peut dégager vis-à-vis du problème thermomécanique global. Concernant les apports, nous avons répondu aux deux grands objectifs initiaux :1) mise au point d'algorithmes inverses de reconstruction de source pour l'équation d'advection-diffusion, 2) production de données cinématiques et thermiques et application des algorithmes à ces données.

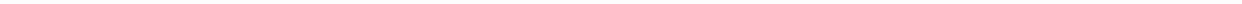
Pour l'objectif n°1, le chapitre 4 a présenté les deux méthodes mises au point et les résultats obtenus sur des cas-tests. Leur confrontation nous a rassuré sur le fait que, dans les deux cas, la reconstruction est faite correctement et montre des petites différences dans le fonctionnement des algorithmes et leur aptitude à reproduire des "détails" de la source originale (en temps ou en espace). Globalement, nous pouvons dire que les deux méthodes sont satisfaisantes. L'objectif de faire appel aux modes de branche dans une approche spectrale et réduite du modèle d'inversion conduit certes à de légères améliorations des reconstructions dans les cas bien calibrés de nos simulations et à niveau de bruit relativement modestes mais n'est pas spécialement intéressante ici compte-tenu des conditions expérimentales de production de nos observables. L'expérience que nous avons acquise du fonctionnement en confrontation de ces algorithmes nous fait néanmoins préférer la seconde méthode, itérative, que nous jugeons plus apte à éviter la production d'un résultat biaisé, plus robuste dans son comportement vis-à-vis du niveau de bruit, et plus efficace dans le réglage -assez déterminant- des critères de régularisation. Mentionnons que la méthode SVD -que nous avons aussi envisagée dans une formulation très simpliste- n'a pas produit les résultats que nous escomptions mais offre néanmoins une méthode d'estimation très rapide, qui donne la forme générale de la source recherchée, et peut avantageusement initialiser les algorithmes d'inversion. Par compte, nous avons montré que nous avons pu tirer profit du principe de troncature SVD pour l'appliquer à la méthode itérative du gradient conjugué dans un objectif de "relaxation" (au sens du calcul numérique) pour la recherche des directions conjuguées. Ceci a permis d'améliorer les résultats de la méthode standard et amène plus sûrement à une solution non locale du problème inverse. Ces résultats ont été communiqués à deux congrès internationaux (Photomechanics, Montpellier, 2013 et IPDO : 4th Inverse Problems, Design and Optimization symposium, Albi, 2013), au congrès national de la SFT. Nous espérons par ailleurs que nos travaux pourront intéresser des thermiciens pour valider les idées exploitées dans d'autres problèmes d'advection-diffusion.

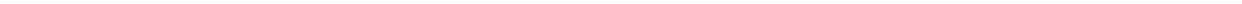
Pour l'objectif n°2 (chapitres 2 et 5), nous avons fait beaucoup d'efforts pour la production des observables cinématiques et leur conditionnement avant inversion. Les expériences se sont révélées difficiles dans le cas d'essais de traction quasi-statiques pour la gamme de vitesses

de traction visée qui correspond aux limites de ce que peut faire notre machine en régulation vidéo-extensométrique. Les écarts de température étant relativement modérés, cette gamme de vitesses s'imposait comme la seule possible pour faire jouer les effets d'advection mais nous a posé de grosses difficultés. Nous avons bien conscience que les résultats à forte vitesse sont malheureusement pollués par les effets de régulation mais en même temps, ils ont permis de vérifier que nos algorithmes étaient capables de les détecter.

Au titre des conclusions et résultats, nous pouvons dire que nous avons d'abord légitimé le travail de thèse de N. Renault, où l'inversion se faisait à partir de l'opérateur de diffusion seul. Les effets d'advection sont bien négligeables, même en présence d'un phénomène de striction. Ils n'affectent en aucune mesure les sources reconstruites sur le VER central. On montre néanmoins qu'ils changent les résultats concernant les sources identifiées au niveau des épaules de striction en les minorant (par rapport au cas de la diffusion seule qui aurait donc tendance à nous laisser penser à des intensités de source plus importantes). Le comportement global de la source thermomécanique au cours de l'essai de traction ne remet donc pas en cause non plus les conclusions formulées dans la thèse de N. Renault. La signature des différents effets est toujours présente (et mesurable) : thermoélasticité, viscoplasticité, et modifications microstructurales à chaque fois qu'il y a précisément développement de l'instabilité plastique : une première fois à l'apparition de la striction dans la zone centrale, une deuxième fois au moment du déclenchement des instabilités dans les épaules de striction, accompagnant la phase dite de durcissement hyperélastique, ce qui de notre point de vue, en remet en cause en partie l'interprétation. De plus et de manière non anticipée, la richesse des informations d'origine cinématique nous a permis de mieux comprendre le phénomène de striction et de l'interpréter en terme d'évolutions microstructurales. Nous avons par exemple pu dégager de nouvelles idées autour du concept de Natural Draw Ratio, très discuté dans la littérature en mécanique des polymères. Tout ceci a d'ailleurs fait l'objet de la première publication issue de ce travail : Kinematic Study of Necking in a SemiCrystalline Polymer through 3D Digital Image correlation, *Int. J. Solids & Structures*, published online 16/01/2015, DOI information : 10.1016/j.ijsolstr.2015.01.009) et de communications orales aux colloques national DEPOS 2014 et international DYFP 2015 (à venir en mars 2015). Si l'on veut être critique sur les reconstructions expérimentales de source, nous dirons que nous sommes un peu déçus de ne pas avoir amélioré la qualité des reconstructions. Les signaux reconstruits restent très bruités ce qui bien sûr est nuisible pour leur utilisation ensuite dans une modélisation thermomécanique. Il est intéressant de remarquer à la fin de la thèse que si nous avons passé beaucoup de temps pour produire des résultats de bonne qualité par corrélation d'images 3D, les mesures thermiques, plus faciles à mettre en œuvre, avec des caméras réputées de bonne qualité apparaissent finalement moins bonnes. Nous avons tenté de réduire l'influence de l'environnement extérieur mais il n'est par exemple pas si évident d'obtenir des profils de température symétriques par rapport au point central pendant tout l'essai et de savoir si cet effet peut être lié au comportement mécanique du matériau lui-même ou aux perturbations externes. Pour les perspectives, nous pensons donc qu'en premier, il serait important de réfléchir à améliorer ces mesures thermiques pour les rendre plus précises et avec une meilleure résolution spatiale. Les obtenir simultanément avec les mesures DIC serait aussi un avantage indéniable pour répéter moins d'expériences et éviter les biais (même si notre expérience de la reproductibilité des mesures nous fait penser qu'on a fait un travail correct).

Par ces deux thèses entreprises au LEMTA, on peut voir qu'une meilleure connaissance de la thermodynamique associée aux matériaux en général (leur loi d'état) peut se faire au prix de gros efforts de métrologie et de techniques d'inversion. Une perspective intéressante serait de reconsidérer les idées initiales des chercheurs qui se sont penchés sur cette question et qui à une époque sans caméras IR envisageaient une approche expérimentale calorimétrique directe, c'est-à-dire une mesure des flux globaux mis en jeu dans les processus de déformation. A l'heure actuelle, compte-tenu de tous les résultats dont nous disposons sur ce polymère semi-cristallin, il serait intéressant de produire des résultats de cette nature par des techniques expérimentales alternatives, mettant en jeu de plus faibles quantités de matière.





Annexe A

Eléments mathématiques

A.1 Théorème de Hilbert-Schmidt

A.1.1 Opérateur de Hilbert-Schmidt

Définition A.1.1. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (ce qui est le cas pour les fonctions étudiées lorsque $H = L^2$) et $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur de H .

On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de H telle que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty \quad (\text{A.1.1})$$

On ajoutera la proposition suivante (utile dans notre cas)

Proposition A.1.1. Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est de Hilbert-Schmidt, alors son adjoint T^* est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Remarque. Qualitativement, la condition (A.1.1) signifie que pour n grand, le vecteur Te_n devient très petit, de telle sorte que la série des normes (A.1.1) converge.

La proposition suivante est également utile pour notre calcul :

Proposition A.1.2. Soit $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction continue. Pour toute $f \in L^2([a, b])$, on considère la fonction Tf définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, s)f(s)ds \quad (\text{A.1.2})$$

Alors K , (opérateur à noyau) est un opérateur de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert $L^2([a, b])$ sur lui-même. En fait il suffit même que de supposer que le noyau K est une fonction de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue de $[a, b]^2$.

A.1.2 Théorème spectral (de décomposabilité ou de Hilbert-Schmidt)

Théorème A.1.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint. Alors, il existe une famille orthonormale finie ou infinie dénombrable $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ composée de vecteurs propres de T telle que si λ_n est la valeur propre associée à φ_n , on a*

$$\forall x \in H, \quad Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (\text{A.1.3})$$

De plus si l'ensemble $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ est infini, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda_n^2 < +\infty$.

Remarque. *Si T est auto-adjoint (opérateur de diffusion pure), tous les λ_n de la formule (A.1.3) sont des réels.*

Remarque. *Ce théorème de diagonalisation est valable pour une classe plus vaste d'opérateurs auto-adjoints de l'espace de Hilbert H : les opérateurs compacts.*

A.1.3 Théorème de Mercer (ou de diagonalisation)

C'est le théorème de diagonalisation des "matrices généralisées symétriques" appliquées à $L^2(\Omega)$ dans le cas des endomorphismes à noyau intégral [112].

Théorème A.1.4. *Si $K \in L^2(\Omega^2)$ est symétrique, alors l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ associé par (A.1.2) (qui est donc de Hilbert-Schmidt) est diagonalisable dans une b.o.n. de $L^2(\Omega)$: il existe $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}^* \in \mathbb{R}^*$ et il existe une b.o.n. $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions $L^2(\Omega)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \quad (\text{A.1.4})$$

ce avec :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty \quad (\text{A.1.5})$$

(En particulier $\lambda_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.) Et le noyau K s'exprime dans la b.o.n. $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sous la forme diagonale :

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n \otimes \varphi_n \quad (\text{A.1.6})$$

Autrement dit la fonction K est donnée par, pour (presque) tout $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega$:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}'). \quad (\text{A.1.7})$$

Démonstration. Considérant l'espace dual H^* associé à l'espace vectoriel des applications linéaires sur $H = L^2(\Omega)$. Comme les $\{\varphi_n\}$ forment une base de H on peut définir sa base duale par $\{e_m^* \in H^* | \forall \varphi_n \in H \quad e_m^*(\varphi_n) = \delta_{nm}\}$.

Dans cette expression $e_m^*(\varphi_n)$ est un produit de dualité

$$e_m^*(\varphi_n) \equiv \int_{\Omega} k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (\text{A.1.8})$$

où $k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est le noyau associé à e_m^* .

On a alors la décomposition sur la base duale de l'opérateur intégral :

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m^* \quad (\text{A.1.9})$$

$$\begin{aligned} \forall u \in H \quad T(u) &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m^*(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \int_{\Omega} k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

et

$$T(u) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

donc

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Et

$$\forall \varphi_n \in H \quad e_m^*(\varphi_n) = \int_{\Omega} k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \delta_{nm} = \int_{\Omega} \varphi_n(\mathbf{x}') \varphi_m(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

soit

$$\int_{\Omega} (k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \varphi_m(\mathbf{x}')) \varphi_m(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 0$$

donc

$$k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \varphi_m(\mathbf{x}').$$

D'autre part

$$\begin{aligned} T(\varphi_n) &= \lambda_n \varphi_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} k_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta_{nm} = \alpha_m \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_m = \lambda_m \varphi_m(\mathbf{x})$$

Soit en combinant les deux résultats

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \varphi_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (\text{A.1.10})$$

□

A.2 Existence et unicité de la solution d'un problème inverse général

Nous rappelons ci-dessous quelques résultats mathématiques de base sur l'unicité et l'existence d'une solution à un problème inverse général, en renvoyant le lecteur aux démonstrations disponibles dans les ouvrages spécialisés. Ces arguments, en nombre limité, sont rapprochés de la formulation particulière de notre problème inverse obtenue en 4.3.2. Remarquons d'abord que l'unicité de la solution pour les problèmes inverses formulés dans l'espace de Banach peut être garantie si un ensemble infini de données est disponible [113]. Dans le cas contraire, l'unicité n'existe plus et il est nécessaire de sélectionner l'une des solutions parmi un ensemble infini en utilisant un critère de norme minimale (ce qui suppose donc d'avoir défini une métrique associée à un espace de travail). Nous disposons des 4 résultats mathématiques suivants :

Définition A.2.1 (Solution de norme minimale). *Soit S un opérateur linéaire de l'espace de Banach $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Pour un élément $y \in \mathbb{Y}$, la solution x_{min} est dite de norme minimale pour l'équation $Sx = y$, si $Sx_{min} = y$ et $\|x_{min}\| = \inf\{\|\tilde{x}\| \mid \tilde{x} \in \mathbb{X}, S\tilde{x} = y\}$.*

Proposition A.2.1. *Soit \mathbb{X} un espace convexe et \mathbb{Y} un espace de Banach arbitraire, alors, si $y \in \text{Im}(S)$, la solution de norme minimale de $Sx = y$ est unique.*

Démonstration. voir [114] pour l'existence et l'unicité de solution. □

Si y est bruité (résultat d'expérience), on ne peut garantir $y \in \text{Im}(S)$ et en conséquence perdre l'unicité de la solution .

Il convient de considérer le cas d'un opérateur non-linéaire de type :

$$F(x) = y, x \in \mathbb{D}(F) \subseteq \mathbb{X}, y \in F(\mathbb{D}(F)) \subseteq \mathbb{Y} \quad (\text{A.2.1})$$

$F : \mathbb{D}(F) \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est l'application non-linéaire du domaine $\mathbb{D}(F)$ vers $F(\mathbb{D}(F))$. Le caractère local des solutions à des équations non linéaires oblige à raisonner en termes de voisinage d'un point de référence $x_0 \in \mathbb{X}$, qui dans la traduction numérique du problème revient à une condition d'initialisation. Techniquement, on déplace le système de coordonnées de l'origine 0 à x_0 et on cherche la solution de norme minimale par rapport à x_0 .

Définition A.2.2 (Solution de norme minimale à x_0). *Un élément x_{min} constitue la solution de norme minimale par rapport à x_0 de l'équation $F(x) = y$, si $F(x_{min}) = y$ et $\|x_{min} - x_0\| = \inf\{\|\tilde{x} - x_0\| \mid \tilde{x} \in \mathbb{D}(F), F(\tilde{x}) = y\}$*

Pour assurer l'existence de cette solution, des hypothèses sont faites sur les espaces de Banach \mathbb{X} et \mathbb{Y} .

Proposition A.2.2. *Sous réserve que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- i \mathbb{X} et \mathbb{Y} sont des espaces de Banach réflexifs*
- ii $\mathbb{D}(F) \subseteq \mathbb{X}$ est un ensemble fermé et convexe de \mathbb{X}*
- iii $F : \mathbb{D}(F) \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est continue de topologie faible, i.e. $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ dans \mathbb{X} implique $F(x_n) \rightharpoonup F(\bar{x})$*

Alors, l'équation non linéaire $F(x) = y$ admet une solution de norme minimale par rapport à x_0 .

Démonstration. voir [114], Proposition 3.14. □

Dans notre cas, l'opérateur F nous permet de calculer $T(X, t) = \mathbf{V}(X)Z(t; B(t))$, où $B(t)$ est le vecteur d'états de la sollicitation. En termes d'espaces vectoriels de définition, on sait que $T(X, t) \in L^2[0, L] \times L^2(0, t_f)$ et $B(t) \in l^2 \times L^2(0, t_f)$ qui sont des espaces de Banach réflexifs. $\mathbb{D}(B(t)) = l^2 \times L^2(0, t_f)$ est fermé et convexe. En ce qui concerne *iii* et la continuité, la solution formelle de (4.87) peut s'exprimer sous forme intégrale et par application de la formule de Duhamel, on peut facilement prouver que $T(X, t)$ est continue de topologie forte en fonction de $B(t)$ (donc à fortiori de topologie faible). Ainsi, l'existence d'une solution de norme minimale à notre problème est prouvée.

A.3 Décomposition de Fourier mixte

Les résultats numériques obtenus par l'approche spectrale couplée à notre méthode itérative en section 4.3.3.5 sont basés sur la décomposition de Fourier classique, mais prennent en compte les conditions limites non homogènes.

On considère que la variable de température, donc la solution du problème direct (4.68), peut être séparée en une composante homogène T_h et une fonction particulière compatible avec les conditions aux limites :

$$T(X, t) = -\frac{2L}{k\pi}\varphi_1(t)\sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \frac{2L}{k\pi}\varphi_2(t)\cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + T_h(X, t) \quad (\text{A.3.1})$$

On en déduit évidemment

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2L}{k\pi}\dot{\varphi}_1(t)\sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \frac{2L}{k\pi}\dot{\varphi}_2(t)\cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \dot{T}_h(X, t) \quad (\text{A.3.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{1}{k}\varphi_1(t)\cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) - \frac{1}{k}\varphi_2(t)\sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \frac{\partial T_h}{\partial X} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\pi}{2kL}\varphi_1(t)\sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) - \frac{\pi}{2kL}\varphi_2(t)\cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \frac{\partial^2 T_h}{\partial X^2} \quad (\text{A.3.4})$$

En portant toutes les équations ci-dessus dans (4.68), on obtient un système homogène en terme de T_h :

$$c\frac{\partial T_h}{\partial t}(X, t) = k\frac{\partial^2 T_h}{\partial X^2} - cv(X, t)\frac{\partial T_h}{\partial X}(X, t) + p(X, t) + q(X, t) \quad (\text{A.3.5})$$

$$-k\frac{\partial T_h}{\partial X}\Big|_{X=0} = 0 \quad (\text{A.3.6})$$

$$-k\frac{\partial T_h}{\partial X}\Big|_{X=L} = 0 \quad (\text{A.3.7})$$

$$T_h(X, 0) = T_0 + \frac{2L}{k\pi}\varphi_1(0)\sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) - \frac{2L}{k\pi}\varphi_2(0)\cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \quad (\text{A.3.8})$$

avec

$$\begin{aligned}
p(X, t) &= \frac{2cL}{k\pi} \left(\dot{\varphi}_1(t) \sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) - \dot{\varphi}_2(t) \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right) \\
&+ \frac{\pi}{2L} \left(\varphi_1(t) \sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) - \varphi_2(t) \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right) \\
&+ \frac{cv(X, t)}{k} \left(\varphi_1(t) \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) + \varphi_2(t) \sin\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right)
\end{aligned}$$

Avec les conditions de Neumann, la fonction T_h définie sur $[0, L]$ peut être prolongée par symétrie de l'axe (Oy) et donc décomposée par un ensemble de modes "cosinus", telle que

$$T_h = \frac{z_0(t)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right) \quad (\text{A.3.9})$$

Également, pour la source, on a

$$q(X, t) = \frac{b_0(t)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) \cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right) \quad (\text{A.3.10})$$

Grâce à la propriété de l'orthogonalité naturelle des modes, les équations d'états en fonction de $z_i(t)$ et $b_i(t)$ peuvent être établies. L'inconvénient est que l'on est obligé de calculer les dérivés de fonctions de flux $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$, ce qui est parfois difficile à faire. Pratiquement, on approche les flux par des fonctions lissées (spécification de fonction) et on effectue les calculs analytiquement.

Annexe B

Application de SVD en estimation de paramètres

Afin de tester la méthode, nous avons voulu reproduire les résultats publiés par Del Barrio et al. [75] liés à une application de mesure de diffusivités α_x, α_y dans les deux directions d'un matériau composite orthotrope (plaque mince). L'expérience consiste simplement à collecter les images infrarouges correspondant à l'observation de la surface de l'échantillon en phase de relaxation thermique (champ de température initial 2D qui s'homogénéise dans l'échantillon, avec conditions d'échange surfacique convectif dans les directions perpendiculaires au plan de l'échantillon). C'est un problème inverse d'estimation paramétrique à 3 paramètres : α_x, α_y et β représentant un nombre de Biot associé à l'échange convectif en surface, "récupéré" dans l'équation locale par un terme de type "ailette". Le transfert instationnaire est donc décrit par l'équation

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} - \beta T(x, y, t) \quad (\text{B.0.1})$$

+conditions limites adiabatiques en x et y

Les simulations directes ont été produites par un calcul de type Volumes Finis pour la discrétisation spatiale et un schéma implicite en temps (ordre 2 en espace et 1 en temps). Les résultats que nous avons obtenus sont reportés dans le tableau B.1 ci-dessous. Pour différentes résolutions spatiales de l'image, différents niveaux de bruit sur le signal de chaque pixel, nous reportons les valeurs estimées produites par l'algorithme SVD et l'écart relatif par rapport aux valeurs exactes. Entre parenthèses et en rouge sont reportés les écarts relatifs rapportés par les auteurs de [75]. Bien que très proches, nos résultats n'ont pourtant jamais redonné exactement les mêmes niveaux que ceux atteints par les auteurs de l'étude initiale (écarts beaucoup plus faibles à bas bruit, plus forts à fort niveau de bruit). N'ayant pu obtenir plus de détails sur leur procédure, et compte-tenu du comportement de l'algorithme, nous attribuons ces écarts à des différences dans la production du modèle direct.

| Résolution | Noise ampli ($^{\circ}C$) | $\hat{\beta}$ (s^{-1}) | $\hat{\alpha}_x$ ($\times 10^{-6}m^2s^{-1}$) | $\hat{\alpha}_y$ ($\times 10^{-6}m^2s^{-1}$) |
|-------------|--------------------------------|-------------------------------|---|---|
| 100 μm | ± 0.02 | 0.0151555 | 0.1519087 | 0.3021898 |
| | | 0.29%(0%!) 0.0151555 | 0.27%(0.066%!) 0.1519704 | 0.267%(0.066%!) 0.3020308 |
| 200 μm | ± 0.10 | 0.0153714 | 0.31%(0.264%!) 0.1511051 | 0.32%(0.495%!) 0.3020308 |
| | ± 0.02 | 0.0153714 | 0.42%(0.066%!) 0.1508550 | 2.04%(0.099%!) 0.3091865 |
| | ± 0.10 | 0.0153714 | 0.31%(0.132%!) 0.1511051 | 0.32%(0.264%!) 0.3020308 |
| | ± 0.50 | 0.0153714 | 1.12%(0%!) 0.1535101 | 1.628%(4.852%!) 0.2980672 |
| | ± 1.00 | 0.0153714 | 1.12%(0%!) 0.1582731 | 1.628%(4.852%!) 0.2857986 |
| | | 1.12%(0%!) 0.0153714 | 4.47%(13.93%!) 0.1582731 | 5.67%(21.78%!) 0.2857986 |

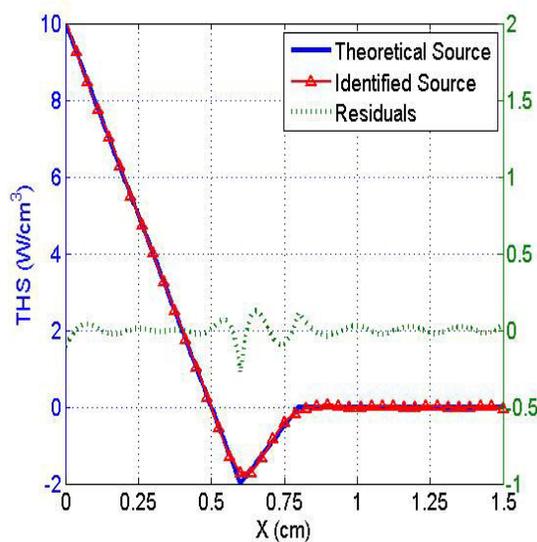
TABLE B.1 – Estimation des 3 paramètres par SVD - Valeurs exactes : $\beta = 0.0152s^{-1}$, $\alpha_x = 0.1515 \times 10^{-6}m^2s^{-1}$, $\alpha_y = 0.3030 \times 10^{-6}m^2s^{-1}$.

Seuls les 3 premiers modes sont requis pour ce problème inverse, qui concentrent l'essentiel de l'information. L'algorithme est très simple et très robuste vis-à-vis du bruit de mesure. Dans le cas où les paramètres inconnus ne dépendent pas de l'espace, le procédé de reconstruction s'avère relativement précis.

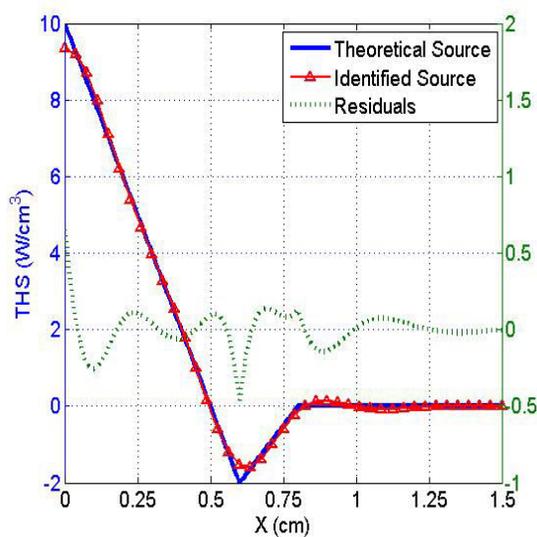
Annexe C

Comparaison entre les modes de Fourier et les modes de branche

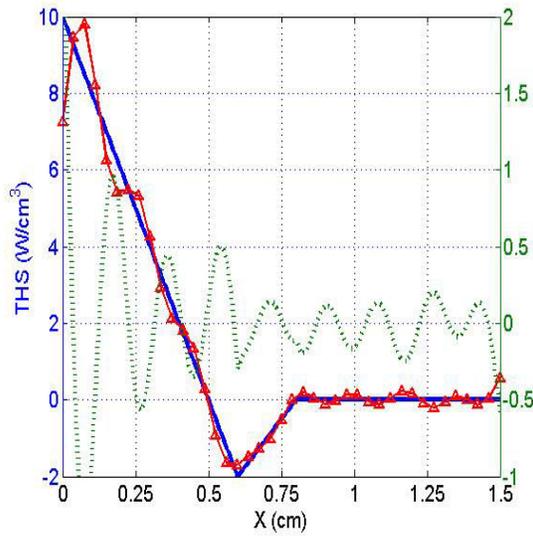
Afin de tester l'algorithme CGM combiné avec la base de branche en section 4.3.3.4, nous allons comparer les résultats de reconstruction de THS basés sur deux types de modes : base de branche diffusive et de Fourier. Nous ne reporterons que les résultats du cas-test 1 (source stationnaire), car on retrouve exactement le même comportement pour le cas-test 2. Le vecteur de paramètres au démarrage de l'algorithme est fixé à zéro dans les deux cas considérés. Dans les figures (C.1), on montre les sources reconstruites par les modes de branche (colonne à gauche) et les modes de Fourier mixte (colonne à droite), le nombre de troncature est fixé à $N_m = 18$ dans les deux cas. Les figures (C.1)-ab représentent les THS reconstruites sans bruit, et on peut constater que la base de branche montre un grand avantage pour surmonter l'incompatibilité des modes aux bords sans avoir aucune information a priori de la source. Par contre pour la base de Fourier, la source reconstruite au bord gauche montre un écart significatif par rapport à la valeur exacte.



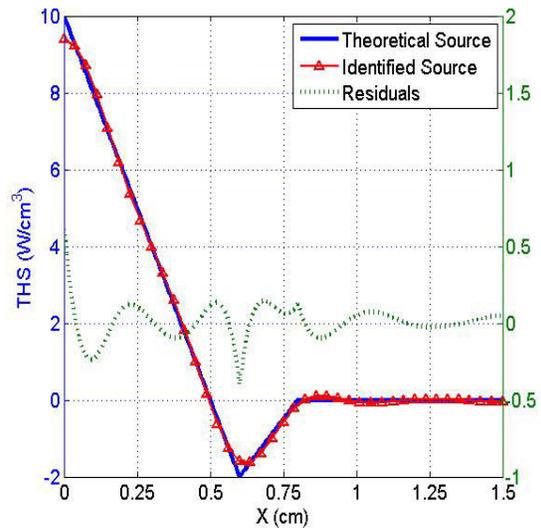
(a) Branche - $\sigma = 0$



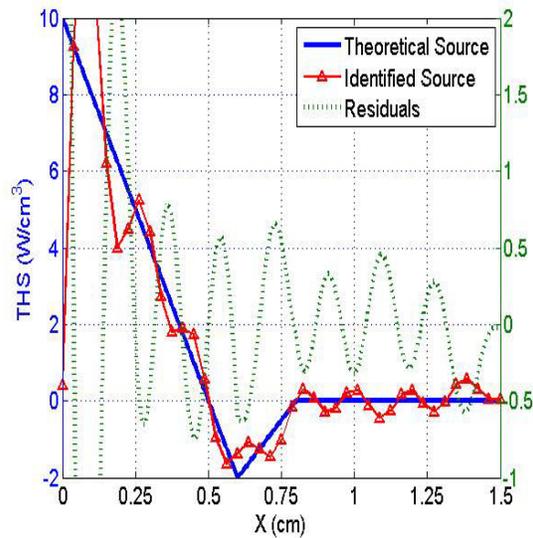
(b) Fourier - $\sigma = 0$



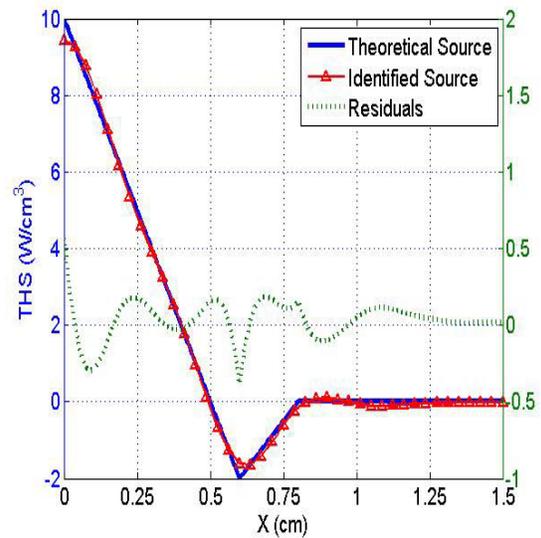
(c) Branche - $\sigma = 0.02$



(d) Fourier - $\sigma = 0.02$



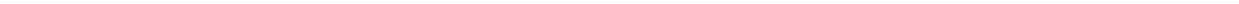
(e) Branche - $\sigma = 0.1$



(f) Fourier - $\sigma = 0.1$

FIGURE C.1 – THS reconstruite par modes de branche et modes de Fourier avec des niveaux de bruit différents - $t = 10s$

Dans les figures (C.1)-cd, un bruit de très faible niveau ($\sigma = 0.02$) est ajouté sur les profils de température, la base de branche devient cette fois-ci moins efficace et ne peut pas converger correctement en considérant le “discrepancy principle”. En augmentant encore un peu le niveau de bruit à $\sigma = 0.1$, la THS reconstruite par les modes de branche reste loin de la solution exacte par rapport à la THS reconstruite par les modes de Fourier dans les figures (C.1)-ef. Autrement dit, l’utilisation des modes de branche est plus sensible au bruit de mesure, et les modes de Fourier apparaissent plus performants pour deux raisons : la vitesse de convergence et la précision.



Bibliographie

- [1] Norbert RENAULT. *Etude du couplage thermomécanique du PEHD par essais mécaniques et inversion d'images infrarouges*. Institut National Polytechnique de Lorraine, LEMTA-UMR CNRS 7563, 2007.
- [2] M.P. Luong. Infrared thermography of fatigue in metals. *SPIE*, 1682 :222–233, 1992.
- [3] M.P. Luong and K. Dang-Van. Metal fatigue limit evaluation using infrared thermography. In *Proc. Workshop Advanced infrared technology and applications*, pages 253–262, Capri (It), Sept 20-21 1993.
- [4] M.P. Luong. Infrared thermography scanning of fatigue in metals. *Nuclear Engineering and Design*, 158 :363–376, 1995.
- [5] G. La Rosa and A. Risitano. Thermographic methodology for rapid determination of the fatigue limit of materials and mechanical components. *Int. J of Fatigue*, 22 :65–73, 2000.
- [6] J-C. Krapez, D. Pacou, and G. Gardette. Application of lock-in thermography to rapid evaluation of fatigue limit in metals. In *Proc. of 5th AITA, Int Workshop Advanced infrared technology and applications*, pages 379–385, Venezia (It), Sept 29-30 1999.
- [7] T. Boulanger, A. Chrysochoos, C. Mabru, and A. Galtier. Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels. *Int. J of Fatigue*, 26 :221–229, 2004.
- [8] P. Cugy and A. Galtier. Microplasticity and temperature increase in low carbon steel. In *In : 8th International Fatigue Conference (Edited by Blom AF)*, pages 549–556, Stockholm (Sweden), 2002.
- [9] Y. Meshaka, A. Galtier, S. André, and C. Cunat. Thermomechanical coupling and dnlr formalism. study of steel behavior under mechanical cyclic loadings. *Int. J of Mechanical Sciences*, 49 :597–607, 2007.
- [10] M. Poncelet, C. Doudard, S. Calloch, F. Hild, B. Weber, and A. Galtier. Prediction of self-heating measurements under proportional and nonproportional multiaxial cyclic loadings. *C.R. Mécanique*, 335 :81–86, 2007.
- [11] C. Doudard, S. Calloch, F. Hild, and S. Roux. Identification of heat source fields from infrared thermography : Determination of 'self-heating' in a dual-phase steel by using a dog bone sample. *Mechanics of Materials*, 42(1) :55–62, 2010.
- [12] L. Jegou, Y. Marco, V. Le Saux, and S. Calloch. Fast prediction of the wöhler curve from heat build-up measurements on short fiber reinforced plastic. *Int. J. of Fatigue*, 47 :259–267, 2013.

- [13] K.A. Hartley, J. Duffy, and R.H. Hawley. Measurement of the temperature profile during shear band formation in steels deforming at high strain rates. *J. Mech. Phys. Solids*, 35(3) :283–301, 1987.
- [14] A.T. Zehnder and A.J. Rosakis. On the temperature distribution at the vicinity of dynamically propagating cracks in 4340 steel. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :385–415, 1991.
- [15] A.T. Zehnder and A.J. Rosakis. Temperature rise at the tip of dynamically propagating cracks : measurements using high-speed infrared detectors. *Experimental techniques in fracture III*, J.Epstein ed, Society for Experimental Mechanics, pages 125–169, 1993.
- [16] J. Hodowany, G. Ravichandran, A.J. Rosakis, and P. Rosakis. Partition of plastic work into heat and stored energy in metals. *Experimental mechanics*, 40(2) :113–123, 2000.
- [17] P.R. Guduru, A.J. Rosakis, and G. Ravichandran. Dynamical shear bands : an investigation using high speed optical and infrared diagnostics. *Mechanics of Materials*, 33 :371–402, 2001.
- [18] E.M. Arruda, M.C. Boyce, and R. Jayachandran. Effects of strain rate, temperature and thermomechanical coupling on the finite strain deformation of glassy polymers. *Mechanics of Materials*, 19 :193–212, 1995.
- [19] A. Chrysochoos, H. Pham, and O. Maisonneuve. Une analyse expérimentale du comportement thermomécanique d’un alliage à mémoire de forme de type cu-zn-al. *C.R. Acad. Sci., t316, SérieII*, pages 1031–1036, 1993.
- [20] A. Chrysochoos and H. Louche. An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation. *Int. J. Eng. Science*, 38 :1759–1788, 2000.
- [21] A. Chrysochoos, B. Watrisse, J-M. Muracciole, and Y. El Kaïm. Fields of stored energy associated with localized necking of steel. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4(2) :245–262, 2009.
- [22] H. Louche, P. Schlosser, D. Favier, and L. Orgéas. Heat source processing for localized deformation with non-constant thermal conductivity. application to superelastic tensile tests of niti shape memory alloys. *Experimental Mechanics*, 52 :1313–1328, 2012.
- [23] V. Honorat. *analyse thermomécanique par mesure de champs des élastomères*. Thèse doctorat Univ. De MontpellierII, 2006.
- [24] B. Watrisse, J-M. Muracciole, and A. Chrysochoos. Thermomechanical effects accompanying the localized necking of semi-crystalline polymers. *Int. J. Therm. Sci*, 41 :422–427, 2002.
- [25] D.A. Murio. *The mollification method and the numerical solution of ill-posed problems*. John Wiley edition, 1993.
- [26] A. Chrysochoos. *Analyse du comportement thermomécanique des matériaux par thermographie infrarouge*. Photomécanique 95, Eyrolles Editions, 1995.
- [27] D. Delpueyo, X. Balandraud, and M. Grédiac. Heat source reconstruction from noisy temperature fields using an optimised derivative gaussian filter. *Infrared Physics & Technology*, 60 :312–322, 2013.
- [28] D. Delpueyo, M. Grédiac, X. Balandraud, and C. Badulescu. Investigation of martensitic microstructures in a monocrystalline cu-al-be shape memory alloy with the grid method and infrared thermography. *Mechanics of Materials*, 45 :34–51, 2012.

- [29] N. Renault, S. André, D. Maillet, and C. Cunat. A spectral method for the estimation of a thermomechanical heat source from infrared temperature measurements. *International Journal of Thermal Sciences*, 49 :1394–1406, 2010.
- [30] N. Renault, S. André, D. Maillet, and C. Cunat. A two-step regularized inverse solution for 2-d heat source reconstruction. *Int. J. Thermal Sciences*, 47(7) :834–847, 2008.
- [31] A.K. Wong and G.C. Kirby. A hybrid numerical/experimental technique for determining the heat dissipated during low cycle fatigue. *Eng. Fract. Mech.*, 37 :493–504, 1990.
- [32] N. Rajic. Thermographic Assessment of the Heat Dissipation Associated with Fatigue Crack Growth in Mild Steel. Technical Report TR-1190, Defence Science & Technology Organisation, Australia, 2001.
- [33] S. André, N. Renault, Y. Meshaka, and C. Cunat. From the thermodynamics of constitutive laws to thermomechanical experimental characterization of materials : An assessment based on inversion of thermal images. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 24(1) :1–20, 2012.
- [34] R. Abou Khachfhe and Y. Jarny. Determination of heat sources and heat transfer coefficient for two-dimensional heat flow - numerical and experimental. *Heat and Mass Transfer*, 44 :1309–1322, 2001.
- [35] C. Le Niliot and P. Gallet. Infrared thermography applied to the resolution of inverse heat conduction problems : recovery of heat line sources and boundary conditions. *Revue Générale de Thermique*, 37(8) :629–643, 2001.
- [36] J. Su and A. Silva Neto. Two-dimensional inverse heat conduction problem of source strength estimation in cylindrical rods. *Applied Mathematical Modelling*, 25 :861–872, 2001.
- [37] Z. Yi and D.A. Murio. Source terms identification for the diffusion equation. In H. R. B. Orlande, editor, *Proceedings of the 4th Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering :Theory and Practice*, volume I of *e-paper*, pages 99–106, Rio de Janeiro, Brazil, 2002.
- [38] A. Farcas. The boundary element method for the determination of a time-dependent heat source. *Proceedings of the 5th Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice*, page paper F01, 2005.
- [39] J. Guo, P. Le Masson, E. Artioukhine, T. Loulou, P. Rogeon, M. Carin, M. Dumons, and J. Costa. Estimation of a source term in a two-dimensional heat transfer problem : application to an electron beam welding. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 14(1) :21–38, 2006.
- [40] M. Bonnet. Un aperçu des approches existantes pour la description mathématique et la résolution des problèmes inverses, journée de travail : Problèmes inverses en mécanique des solides, méthodes de résolution, applications, note interne 14 du 22/10/1992. *Laboratoire de Mécanique des Solides*, pages 1–48, 1992.
- [41] C. Coles and D.A. Murio. Simultaneous space diffusivity and source term reconstruction in 2d ihcp. *Computers Math. Applic*, 42 :1549–1564, 2001.

- [42] A. Tarantola. *Inverse problem theory*. Elsevier, 1987.
- [43] J. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems, Applied Mathematical Sciences 160*. Springer, 2005.
- [44] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. *Solution of Ill-posed Problems*. Wiley, 1977.
- [45] D. Maillat, Y. Jarny, and D. Petit. Problèmes inverses en diffusion thermique - modèles diffusifs, mesures, sensibilités. *Techniques de l'Ingénieur BE8265*, page 27 pages, 2010.
- [46] J. Beck, B. Blackwell, and C.St. Clair. *Inverse Heat Conduction :Ill-Posed Problems*. Wiley-Interscience, 1985.
- [47] M. Girault and D. Petit. Identification methods in nonlinear heat conduction. part i : Model reduction & part ii : Inverse problem using a reduced model. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 48 :105–133, 2005.
- [48] A. Neveu. *Approche modal pour les systèmes thermiques*. LMEE, Université d'Evry, 2005.
- [49] O.V. Vasilyev, S. Paolucci, and M. Sen. A multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain. *Journal of Computational Physics*, 120 :33–47, 1995.
- [50] S. Bertoluzza and G. Naldi. A multilevel wavelet collocation method for the numerical solution of partial differential equations. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3 :1–9, 1994.
- [51] Y. Candau. Solving inverse heat diffusion problem with discrete wavelet transform. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 13(4) :329–339, 2005.
- [52] L. Elden, F. Berntsson, and T. Reginska. Wavelet and fourier methods for solving the sideways heat equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(6) :2187–2205, 2000.
- [53] R.C. Aster, B. Borchers, and C.H. Thurber. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier Science & Technology, 2nd edition, 2012.
- [54] M. Kern. Problèmes inverses. *Techniques de l'Ingénieur AF1380*, page 24 pages, 2010.
- [55] Y. Jarny and H.R.B. Orlande. *Adjoint Methods, Orlande H R.B., Fudym O, Maillat D and Cotta R M editors*. CRC Press, 2011. Chapter 11 : pp407-436.
- [56] L. Farge, S. André, F. Meneau, J. Dillet, and C. Cunat. A common multiscale feature of the deformation mechanisms of a semi-crystalline polymer. *Macromolecules*, 2013. doi.org/10.1021/ma4019747/, published on-line 02/12/2013.
- [57] C. G'sell, J.M. Hiver, A. Dahoun, and A. Souahi. A video-controlled tensile testing of polymers and metals beyond the necking point. *J. Mater. Sci.*, 27(18) :5031–5039, 1992.
- [58] S. André, C. Baravian, N. Renault, and C. Cunat. In situ mechanical characterization of polymers with the association of three optical techniques. *Applied Physics Letters*, 91(7) :071919, 2007. DOI :10.1063/1.2768627.
- [59] Arnaud Blaise. *Caractérisation microstructurale d'un PEHD semi-cristallin déformé, par tomographie X et diffusion de lumière polarisée*. PhD thesis, Doctorat de l'Université Henri Poincaré-Nancy I, 2011. Spécialité Mécanique et énergétique.

- [60] A. Blaise, C. Baravian, J. Dillet, L.J. Michot, and S. André. Characterization of the mesostructure of hdpe under "in-situ" uniaxial tensile test by incoherent polarized steady-light transport. *Journal of Polymer ScienceB : Polymer Physics*, 50(5) :352, 2011.
- [61] A. Blaise, C. Baravian, J. Dillet, L.J. Michot, and S. André. Characterization of the mesostructure of hdpe under "in-situ" uniaxial tensile test by incoherent polarized steady-light transport. *Journal of Polymer ScienceB : Polymer Physics*, 50(5) :352, 2011.
- [62] L. Farge, S. André, A. Pawlak, C. Baravian, S.C. Irvine, and A.M. Philippe. A study of the deformation-induced whitening phenomenon for cavitating and non cavitating semi-crystalline polymers. *Journal of Polymer ScienceB : Polymer Physics*, 2013. published on line, DOI : 10.1002/polb.23267 , 16 pages.
- [63] A. Münster. *Thermodynamique des processus irréversibles*. INSTN et PUF, Paris, 1966.
- [64] G. Kuiken. *Thermodynamics of irreversible processes : applications to diffusion and rheology*. Wiley, Chichester, 1994.
- [65] R. Aris. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, London, 1962.
- [66] J. Kaipio and E. Somersalo. Statistical inverse problems : Discretization, model reduction and inverse crimes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 198(2) :493–504, 2007.
- [67] H. Versteeg and W. Malalasekera. *Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method, 2nd edn*. PEARSON Prentice Hall, 2007.
- [68] O. Quemener, F. Joly, and A. Neveu. One-line heat flux identification from a rotating disk at variable speed. *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 53 :1529–1541, 2010.
- [69] F. Joly, O. Quemener, and A. Neveu. Modal reduction of an advection-diffusion model using a branch basis. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 53 :466–485, 2008.
- [70] Cabeza J.M.G, Garcia J.A.M, and Rodriguez A.C. A sequential algorithm of inverse heat conduction problems using singular value decomposition. *International Journal of Thermal Sciences*, 44 :235–244, 2005.
- [71] Morigi S, Reichel L, and Sgallari F. A truncated projected svd method for linear discrete ill-posed problems. *Numerical Algorithms*, 43(3) :197–213, 2002.
- [72] Shenefeld J.R, Luck R, Taylor R.P, and Berry J.T. Solution to inverse heat conduction problems employing singular value decomposition and model-reduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(1) :67–74, 2002.
- [73] H.M. Park, O.Y. Chung, and J.H. Lee. On the solution of inverse heat transfer problem using the karhunen-loève galerkin method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42 :127–142, 1999.
- [74] H.M. Park and W.S. Jung. The karhunen-loève galerkin method for the inverse natural convection problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44 :155–167, 2001.

- [75] Barrio E.P.D and Pardere C Dauvergne J.L. Thermal characterization of materials using Karhunen-Loève decomposition techniques - Part I. Orthotropic materials. *Inverse Problems in Science & Engineering*, 20(8) :1115–1143, 2012.
- [76] F. Deprettere. *SVD and Signal Processing : Algorithms, Analysis and Applications*. Elsevier Science, 1988.
- [77] E. P. Del Barrio and J.L. Dauvergne. *Karhunen-Loève Decomposition for Data, Noise, and Model Reduction in Inverse Problems*, Orlande H R.B., Fudym O, Maillet D and Cotta R M editors. CRC Press, 2011. Chapter 14 : pp507-539.
- [78] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Paris : éditions de l'école polytechnique, 2000.
- [79] M.Hanke. The minimal error conjugate gradient method is a regularization method. *Proc. of the American Mathematical Soc.*, 123 :3487–3497, 1995.
- [80] P.D. Loewen and R.T. Rockafellar. Bolza problems with general time constraints. *SIAM J. Control Optim*, 35(60) :2050–2069, 1997.
- [81] M. Athans and P. L. Falb. *Optimal control? an introduction to the theory and its applications*. Dover, 2006.
- [82] D. Liberzon. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory A Concise Introduction*. Princeton University Press, December 2011.
- [83] L.S. Lasdon, S.K. Mitter, and A.D. Waren. The conjugate gradient method for optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(2), 1967.
- [84] S. Kabanikahin and A. Penenko. Gradient-type methods in inverse parabolic problems. *Journal of Physics : Conference Series*, 135(012054), 2008.
- [85] J.R. Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. *Course, School of Computer Science*, page 57 p, 1994.
- [86] V.A. Morozov, Z. Nashed, and A.B. Aries. *Methods for solving incorrectly posed problems*. Springer, New York, 1984.
- [87] Ivan Tomba. *Iterative regularization methods for ill-posed problems*. PhD thesis, University of Bologna, Italy, 2013.
- [88] M.E. Hochstenbach and L. Reichel. An iterative method for tikhonov regularization with a general linear regularization operator. *Journal of Integral Equations and Applications*, 22(3) :465–482, 2010.
- [89] Y. Tomita. Simulations of plastic instabilities in solid mechanics. *Appl. Mech. Rev*, 47(6) :171–205, 1996.
- [90] J. Sweeney, T.L.D Collins, P.D. Coates, A.P. Unwin, R.A. Duckett, and I.M. Ward. Application of a large deformation model to unstable tensile stretching of polyethylene. *Int. J. Plasticity*, 18 :399–414, 2002.
- [91] M.A. Sutton. Computer vision-based, noncontacting deformation measurements in mechanics : A generational transformation. *Appl. Mech. Rev.*, 65(5) :05–23, 2013. doi :10.1115/1.4024984.
- [92] A. Marchand and J. Duffy. An experimental study of the formation process of adiabatic shear bands in a structural steel. *J. Mech. Phys. Solids*, 36(3) :251–283, 1988.

- [93] B. Guelorget, M. François, and G. Montay. Strain localization band width evolution by electronic speckle pattern interferometry strain rate measurement. *Scripta Materialia*, 60 :647–650, 2009.
- [94] B. Watrisse, A. Chrysochoos, J-M. Muracciole, and M. Némoz-Gaillard. Analysis of strain localization during tensile tests by digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 41(1) :29–39, 2001.
- [95] F. Grytten, H. Daiyan, M. Polanco-Loria, and S. Dumoulin. Use of digital image correlation to measure large-strain tensile properties of ductile thermoplastics. *Polymer Testing*, 28 :653–660, 2009.
- [96] G. Besnard, F. Hild, J-M. Lagrange, P. Martinuzzi, and S. Roux. Analysis of necking in high speed experiments by stereocorrelation. *International Journal of Impact Engineering*, 49 :179–191, 2013. DOI :10.1063/1.2768627.
- [97] F. Lauro, B. Bennani, D. Morin, and A.F. Epee. The seé method for determination of behaviour laws for strain rate dependent material : Application to polymer material. *International Journal of Impact Engineering*, 37(6) :715, 2010.
- [98] M. Uchida and N. Tada. Sequential evaluation of continuous deformation field of semi-crystalline polymers during tensile deformation accompanied by neck propagation. *International Journal of Plasticity*, 27 :2085–2102, 2011.
- [99] L. Tabourot, P. Vacher, T. Coudert, F. Toussaint, and R. Arrieux. Numerical determination of strain localisation during finite element simulation of deep-drawing operations. *Journal of Materials Processing Technology*, 159 :152–158, 2005.
- [100] X. Poulain, L.W. Kohlman, W. Binienda, G.D. Roberts, R.K. Goldberg, and A.A. Benzerga. Determination of the intrinsic behavior of polymers using digital image correlation combined with video-monitored testing. *International Journal of Solids and Structures*, 50(11-12) :1869–1878, 2013.
- [101] M.A. Sutton, J.H. Yan, V. Tiwari, H.W. Schreier, and J.J. Orteu. The effect of out-of-plane motion on 2d and 3d digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(10) :746–757, 2008.
- [102] M. Maj and W. Oliferuk. Analysis of plastic strain localization on the basis of strain and temperature fields. *Archives of Metallurgy and Materials*, 57(4) :1111–1116, 2012.
- [103] H.X. Li and C.P. Buckley. Necking in glassy polymers : Effects of intrinsic anisotropy and structural evolution kinetics in their viscoplastic flow. *Int. J. Plasticity*, 26 :1726–1745, 2010. DOI :10.1016/j.ijplas.2010.02.004.
- [104] D.M. Norris, B. Moran, J. Scudder, and D. Quinones. A computer simulation of the tension test. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 26 :1–19, 1978.
- [105] V. Tvergaard. Necking in tensile bars with rectangular cross-section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 103 :273–290, 1993.
- [106] J.P. Ponthot. Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity*, 18(1) :91–126, 2002.

-
- [107] S. Muhammad and P.-Y.B. Jar. Determining stress-strain relationship for necking in polymers based on macro deformation behavior. *Finite Elements in Analysis and Design*, 70-71 :36–43, 2013.
- [108] A.I. Leonov. A theory of necking in semi-crystalline polymers. *Int. J. Solids Struct.*, 39 :5913–5926, 2002.
- [109] V. Gaucher-Miri, P. François, and R. Séguéla. On the mechanisms of initiation and propagation of plastic instability in polyethylene under tensile drawing. *J. Polymer Science, Part B : Polymer Physics*, 34 :1113–1125, 1996.
- [110] R. Séguéla. On the natural draw ration of semi-crystalline polymers : Review of the mechanical, physical and molecular aspects. *Macromolecular Materials and Engineering*, 292 :235–244, 2007.
- [111] W. Martienssen and H. Warlimont. *Handbook of condensed matter and materials data*. Springer, 2005. ISBN :978-3-540-44376-6.
- [112] M.L. Gallardo. *Cours sur les espaces de Hilbert de M.L. Gallardo, Licence 3ème année*. Laboratoire de Mathématiques et Physiques Théorique, Université de Tours, 2007-2008.
- [113] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996.
- [114] T. Schuster, B. Kaltenbacher, B. Hofmann, and K. Kazimierski. *Regularization Methods in Banach Spaces*. De Gruyter, Berlin, 2012.

Résumé

Ce mémoire aborde la question de la production d'observables intrinsèques au comportement thermomécanique des matériaux pour mieux en formuler les lois d'états. Ces observables sont les sources de chaleur thermomécaniques, activées par sollicitation mécanique. Ces sources peuvent être reconstruites dans l'espace et le temps par inversion de mesures de champs de température obtenus par thermographie IR. Nous présentons essentiellement deux méthodes développées lors de ce travail de thèse qui reposent sur des approches spectrales réduites (dont la décomposition sur Modes de Branche) et des inversions séquentielles (méthode de Beck) ou itératives (Gradient Conjugué). Concernant cette dernière, nous proposons d'y adjoindre une régularisation efficace en s'inspirant de techniques de filtrage par TSVD. S'agissant de matériaux sujets aux instabilités plastiques (Polyéthylène Haute Densité) pour lesquels les vitesses locales peuvent être non négligeables, l'inversion des mesures en température nécessite que l'on considère un opérateur d'advection-diffusion, qui impose alors l'apport d'une connaissance supplémentaire : le champ de vitesses locales. Celui-ci est mesuré par corrélation d'images 3D et nous détaillons le travail expérimental mené ainsi que les résultats obtenus sur des essais de traction pilotés par vidéo-extensométrie. Nous montrons que pour des essais quasi-statiques à vitesses relativement élevées, les effets d'advection sont généralement négligeables. Nous montrons également en quoi la richesse des informations thermomécaniques (Sources) et cinématiques (Taux de déformation, vitesses) permet de mieux comprendre la dynamique de l'instabilité plastique. Enfin nous critiquons les résultats obtenus sur la reconstruction de source par confrontation des deux algorithmes développés et par une analyse physique des phénomènes observés.

Mots-clés

Problème inverse, Advection-Diffusion, Thermographie Infrarouge, Corrélation d'images, Couplages Thermomécaniques

Abstract

This work concerns the way intrinsic observables can be produced, which are related to the thermo-mechanical behavior of materials and necessary for better formulation of state laws. These observables are Thermomechanical Heat Sources (THS) which are activated through mechanical excitation. These sources can be reconstructed both in space and time by the inversion of measured temperature fields obtained through IR thermography. We develop two main methods in this work which rely on spectral reduced approaches (one of them being the decomposition on Branch Modes) and both on a sequential inversion (Beck's method) and an iterative one (Conjugated Gradient). Regarding the latter, we suggest combining the standard approach with an efficient regularization method which comes from the filtering techniques based on TSVD. As we are concerned with materials which can be subjected to plastic instabilities (High Density PolyEthylene) for which local velocities of matter displacement can be non negligible, the inversion of the measurements must be performed with the advection-diffusion operator of heat transfer. It is then necessary to obtain additional knowledge : the velocity field. This one is measured by 3D Digital Image Correlation and we detail the experimental work we have carried out, which are based on tensile tests monitored with video-extensometry. We show that for quasi-static tests at relatively high strain rates, the advective effects are generally negligible. We also show the richness of the information brought by this dual thermomechanical (heat sources) and kinematical (strain-rates, velocities) information. It allows for a better understanding of the plastic instability (necking) dynamics. Lastly, we criticize the obtained results on THS reconstruction by the confrontation between the two algorithms and by a physical analysis of the observed phenomena.

Keywords

Inverse Problems, Advection-Diffusion, Infrared Thermography, 3D Digital Image Correlation, Thermo-mechanical Couplings

