AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Ecole doctorale IAEM Lorraine – DFD Automatique
Université de Lorraine – UFR Sciences et Technologies

Ecole doctorale STI
Université de Monastir – ENIM

Filtrage et Commande Basée sur un Observateur pour les Systèmes Stochastiques

Thèse

présentée et soutenue publiquement le 7 mars 2015

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine – France

(spécialité automatique)

et

Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir – Tunisie

(spécialité génie électrique)

par

Asma BARBATA

Composition du jury

Président : Mohamed Chaabane

Rapporteurs : Farhat Fnaiech Professeur, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Tunis
Rachid Outbib Professeur, Aix-Marseille Université

Examinateurs : Mohamed Chaabane Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax
Driss Mehdi Professeur, Université de Poitiers
Hassani Messaoud Professeur, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Monastir
Harouna Souley Ali Maître de conférences, Université de Lorraine, Longwy
Michel Zasadzinski Professeur, Université de Lorraine, Longwy

Centre de Recherche en Automatique de Nancy — UMR 7039
Laboratoire de Recherche en Automatique, Traitement de Signal et Image – ENIM

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il ! Alors j'y cède en disant un grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Michel Zasadzinski qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et très disponible malgré ses nombreuses charges. Ses compétences et sa rigueur scientifiques, ses qualités humaines et sa clairvoyance m'ont beaucoup apporté et appris. Elles ont été et resteront des moteurs de mon travail de chercheur.

Mes remerciements vont aussi à mon co-encadrant Harouna Souley Ali. Ses encouragements et ses qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je lui en suis très reconnaissante.

Je remercie aussi, mon co-directeur de thèse Hassani Messaoud, pour sa disponibilité, ses encouragements et surtout son soutien permanent.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à mon travail Monsieur Farhat Fnaiech, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Tunis, et Monsieur Rachid Outbib, professeur à Aix-Marseille Université. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

J'exprime tous mes remerciements à Monsieur Mohamed Chaabane, professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, et à Monsieur Driss Mehdi, professeur à l'Université de Poitiers, pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je remercie Monsieur Mohamed Boutayeb car, par son biais, j'ai connu mon formidable encadrant de thèse ; c'est lui qui lui a transmis ma demande d'un sujet de thèse.

Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées par le biais du CRAN, surtout l'équipe de recherche de Longwy, Marouane Alma, Latifa Boutat Baddas, Mohamed Boutayeb, Mohamed Darouach, Cédric Delattre, Christophe Fonte, Hugues Rafaralahy et Ali Zemouche, ainsi que tous les thésards et thésardes de cette équipe, sans oublier Rachid Belkacem, Joëlle Pinelli et Hélène Yildiz.

Mention spéciale à Madame Anne-Marie Zasadzinski, je voudrais te dire merci pour ton aide et ton amitié.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier à ma maman qui m'a fait comprendre que la vie n'est pas faite que de problèmes qu'on pourrait résoudre grâce à des formules mathématiques et des algorithmes. Merci maman pour ta compréhension et pour toutes tes aides : soutien morale et physique, merci d'avoir garder mes enfants durant les années de ma thèse, merci mes anges pour votre sacrifice.

Malgré mon éloignement depuis de (trop) nombreuses années, leurs intelligences, leurs confiances, leurs tendresses, leurs amours me portent et me guident tous les jours. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je vous aime et je vous adore.

Je tiens à remercier mon frère et mes soeurs pour leurs encouragements permanents.

J'adresse toute ma reconnaissance à mon époux Ridha pour son aide et sa compréhension durant mes travaux de thèse.

Enfin, pour terminer ces remerciements, une pensée pour mes amis de Longwy, de Monastir et de Zaghouan, merci pour votre soutien et vos encouragements.

Je dédie ce travail à mon regretté père, je t'aime, à ma mère et à toute ma famille.

Table des matières

Remerciements **i**

Table des figures **xi**

Symboles et abréviations **xiii**

Introduction générale

1 Objectifs de la thèse et principaux résultats obtenus 2
2 Plan du manuscrit 4
3 Publications issues de la thèse 5

Chapitre 1
Systèmes stochastiques et équations différentielles stochastiques

1.1 Introduction 8
1.2 Processus stochastiques et équations différentielles stochastiques 9
1.3 Mouvement brownien 10
1.4 Equations différentielles stochastiques (EDS) 11
1.4.1 Equations différentielles stochastiques : formes intégrale et différentielle . . . 11
1.4.2 Différence entre bruit multiplicatif et bruit additif 11
1.4.3 Processus d'Itô et formule d'Itô 12
1.4.3.1 Processus d'Itô 12
1.4.3.2 Formule d'Itô et différentiateur stochastique 13
1.4.3.3 Différence entre l'intégration "standard" et l'intégration stochastique au sens d'Itô 14
1.4.4 Solution d'une équation différentielle stochastique : existence et unicité . . 15
1.4.5 Discrétisation et simulation des équations différentielles stochastiques . . . 16
1.4.5.1 Discrétisation d'un mouvement brownien 16
1.4.5.2 Discrétisation explicite d'une équation différentielle stochastique : schéma numérique d'Euler-Maruyama 17
1.5 Stabilité des équations différentielles stochastiques 19

1.5.1 Définitions de la stabilité des processus stochastiques 19
1.5.2 Théorèmes pour la stabilité des systèmes stochastiques 22
1.5.3 Relations entre la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique 24
1.5.3.1 Discussion à partir des conditions sur les fonctions de Lyapunov 24
1.5.3.2 Cas des équations différentielles scalaires 25
1.5.3.3 Exemple illustratif 29
1.5.3.4 Insuffisance des fonctions de Lyapunov quadratiques 33
1.5.4 Stabilisation et déstabilisation avec le bruit 35
1.6 Lemme borné réel 37
1.6.1 Lemme borné réel pour les systèmes déterministes 38
1.6.2 Lemme borné réel des systèmes stochastiques avec une dérive linéaire . . . 39
1.6.3 Lemme borné réel pour les systèmes stochastiques non linéaires 40
1.7 Exemples de processus stochastiques 44
1.8 Conclusion 48

Chapitre 2
Stabilité des équations différentielles stochastiques de grande dimension : application au filtrage

2.1 Introduction 52
2.2 Formulation du problème de filtrage avec la stabilité exponentielle presque sûre . 54
2.3 Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes triangulaires : cas Lipschitz . . 57
2.4 Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes triangulaires : cas one-sided Lipschitz 64
2.5 Application au filtrage d'ordre plein 68
2.5.1 Cas des mesures stochastiques 68
2.5.2 Cas des mesures déterministes 69
2.6 Extension au filtrage d'ordre réduit 70
2.6.1 Cas des mesures stochastiques 70
2.6.2 Cas des mesures déterministes 72
2.7 Conclusion 73

Chapitre 3
Filtrage des systèmes stochastiques

3.1 Introduction 76
3.2 Systèmes stochastiques considérés 77
3.3 Observateurs avec des non linéarités de type Lipschitz 78

3.3.1 Observateurs d'ordre plein . . . 78
3.3.1.1 Cas des mesures stochastiques . . . 78
3.3.1.2 Cas des mesures déterministes . . . 83
3.3.1.3 Premier exemple avec l'observateur d'ordre plein . . . 84
3.3.1.4 Second exemple avec l'observateur d'ordre plein . . . 87
3.3.2 Observateurs d'ordre réduit . . . 94
3.3.2.1 Cas des mesures stochastiques . . . 94
3.3.2.2 Cas des mesures déterministes . . . 98
3.3.2.3 Exemple . . . 103
3.4 Observateurs avec des non linéarités de type one-sided Lipschitz . . . 105
3.4.1 Cas des mesures stochastiques . . . 106
3.4.2 Cas des mesures déterministes . . . 115
3.4.3 Exemple . . . 116
3.5 Filtrage robuste des systèmes stochastiques non linéaires incertains . . . 126
3.5.1 Systèmes stochastiques incertains considérés . . . 126
3.5.2 Cas des mesures stochastiques . . . 127
3.5.2.1 Analyse du problème du filtrage robuste . . . 127
3.5.2.2 Etude de la stabilité du point d'équilibre de l'EDS avec des incertitudes paramétriques . . . 129
3.5.2.3 Observateurs robustes d'ordres plein et réduit . . . 133
3.5.3 Cas des mesures déterministes . . . 135
3.5.3.1 Sans compensation partielle des incertitudes . . . 135
3.5.3.2 Avec compensation partielle des incertitudes . . . 137
3.5.4 Exemple . . . 149
3.6 Conclusion . . . 152

Chapitre 4
Stabilité et stabilisation des systèmes stochastiques

4.1 Introduction . . . 154
4.2 Rejet exponentiel des perturbations avec un taux de décroissance garanti . . . 155
4.2.1 Position du problème . . . 155
4.2.2 Conditions suffisantes pour le rejet exponentiel des perturbations . . . 156
4.2.3 Application aux fonctions de Lyapunov quadratiques . . . 159
4.2.4 Exemple . . . 160
4.3 Commande bang-bang des systèmes stochastiques . . . 163
4.3.1 Introduction à la commande bang-bang . . . 163
4.3.2 Commande bang-bang par retour d'état . . . 164

4.3.3 Commande bang-bang basée sur un observateur 167
4.3.4 Algorithme pour la détermination des coefficients α_i 171
4.3.5 Exemple 173
4.3.5.1 Commande bang-bang par retour d'état 173
4.3.5.2 Commande bang-bang par retour d'état basé sur un observateur 175
4.4 Conclusion 180

Chapitre 5
Commande et filtrage des systèmes stochastiques singuliers

5.1 Introduction 184
5.2 Equations algébro-différentielles stochastiques non linéaires 185
5.2.1 Variables dynamiques et variables algébriques 185
5.2.2 Equations algébro-différentielles stochastiques d'indice 1, admissibilité et consistance des conditions initiales 186
5.2.2.1 Equations algébro-différentielles stochastiques d'indice 1 186
5.2.2.2 Equations algébro-différentielles stochastiques admissibles 188
5.2.2.3 Consistance des conditions initiales d'une équation algébro-différentielle stochastique 189
5.2.3 Fonctions de Lyapunov et calcul d'Itô pour les équations algébro-différentielles stochastiques 189
5.2.3.1 Fonctions de Lyapunov pour les équations algébro-différentielles stochastiques 189
5.2.3.2 Calcul d'Itô pour les équations algébro-différentielles stochastiques 190
5.3 Commande $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes singuliers stochastiques linéaires 192
5.3.1 Lemme borné réel pour les systèmes singuliers stochastiques linéaires . . . 192
5.3.2 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes singuliers stochastiques 196
5.3.2.1 Relations en boucle fermée 196
5.3.2.2 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état 199
5.3.2.3 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique 201
5.4 Observateurs pour une classe de systèmes singuliers stochastiques non linéaires . 204
5.4.1 Systèmes singuliers stochastiques non linéaires considérés 204
5.4.2 Observateur d'ordre plein et expression de l'erreur d'observation 205
5.4.3 Paramétrage des matrices de l'observateur 207
5.4.4 Approche découplée pour la synthèse de l'observateur 208
5.4.5 Stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage 210
5.5 Conclusion 214

Conclusion générale et perspectives

1 Conclusions 217
2 Perspectives et problèmes ouverts 219

Annexe A
Inégalités matricielles linéaires et compléments mathématiques

A.1 Normes vectorielles et matricielles 221
A.1.1 Relations sur les normes vectorielles et matricielles 221
A.1.2 Mesures de matrices (normes logarithmiques) 223
A.1.3 Majoration d'une fonction vectorielle 223
A.2 Pseudo-inverses et solutions des équations linéaires 224
A.2.1 Solutions d'une équation linéaire et pseudo-inverses 224
A.2.2 Pseudo-inverses réflexives 225
A.2.3 Pseudo-inverse de Moore-Penrose 225
A.3 Inégalités matricielles linéaires (LMI) 226
A.3.1 Lemme de Schur 226
A.3.2 Lemme de projection 226
A.4 Produit de Kronecker 227

Annexe B
Définitions relatives aux processus stochastiques

B.1 Introduction aux processus stochastiques 229
B.2 Espace probabilisé 229
B.3 Espérance et martingale 230

Annexe C
Lemmes divers

C.1 Lemmes sur les équations différentielles stochastiques 233
C.2 Lemme de Gronwall-Bellman 234
C.3 Lemmes de majoration 234

Bibliographie **237**

Table des figures

1.1 Trajectoires de 6 mouvements browniens scalaires indépendants centrés. 17
1.2 Application du schéma numérique d'Euler-Maruyama avec 6 mouvements browniens différents. 19
1.3 Réponse pour l'EDS (1.62) avec trois valeurs de α. 28
1.4 Stabilités MSES et ASES. 31
1.5 Réponse pour l'EDS (1.70) avec trois valeurs de a 32
1.6 Réponse du système stochastique non linéaire : états $x_1(t)$ (bleu, ①), $x_2(t)$ (vert, ②) et $x_3(t)$ (rouge, ③), perturbations $v_1(t)$ (cyan, ④) et $v_2(t)$ (magenta, ⑤). . . . 43
1.7 Réponse du système stochastique non linéaire : sorties $z_1(t)$ (bleu, ①) et $z_2(t)$ (vert, ②), perturbations $v_1(t)$ (rouge, ③) et $v_2(t)$ (cyan, ④). 44
1.8 Circuit électrique RLC. 47
1.9 Système mécanique masse-ressort. 47

3.1 Etats $x_1(t)$ (bleu ①), $x_2(t)$ (vert ②) et $x_3(t)$ (rouge ③) et commandes $u_1(t)$ (cyan ④) et $u_2(t)$ (magenta ⑤). 85
3.2 Erreur de filtrage $e_1(t)$ (bleu ①), $e_2(t)$ (vert ②) et $e_3(t)$ (rouge ③) et commandes $u_1(t)$ (cyan ④) et $u_2(t)$ (magenta ⑤). 86
3.3 $\|x(t)\|$ (bleu ①) et $\|e(t)\|$ (vert ②). 86
3.4 Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ (rouge, discontinu). 90
3.5 Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ (rouge, discontinu). 91
3.6 Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_3(t)$ (rouge, discontinu). 91
3.7 Valeur absolue de l'état $|x_1(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_1(t)|$ (rouge, discontinu). 92
3.8 Valeur absolue de l'état $|x_2(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_2(t)|$ (rouge, discontinu). 92
3.9 Valeur absolue de l'état $|x_3(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_3(t)|$ (rouge, discontinu). 93
3.10 Norme de l'état $\|x(t)\|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $\|e(t)\|$ (rouge, discontinu). 93
3.11 Fonctionnelle $z(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{z}(t)$ (rouge, discontinu). 104
3.12 Valeur absolue de la fonctionnelle $|z(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_r(t)|$ (rouge, discontinu). 105
3.13 Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ (rouge, discontinu). 119
3.14 Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ (rouge, discontinu). 120
3.15 Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_3(t)$ (rouge, discontinu). 120
3.16 Valeur absolue de l'état $|x_1(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_1(t)|$ (rouge, discontinu). 121

3.17 Valeur absolue de l'état $|x_2(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_2(t)|$ (rouge, discontinu). 121
3.18 Valeur absolue de l'état $|x_3(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_3(t)|$ (rouge, discontinu). 122
3.19 Norme de l'état $\|x(t)\|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $\|e(t)\|$ (rouge, discontinu). 122
3.20 Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynômiales (rouge, discontinu). 124
3.21 Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynômiales (rouge, discontinu). 125
3.22 Etat $x_3(t)$ (bleu, continu)et estimation $\widehat{x}_3(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynômiales (rouge, discontinu). 125
3.23 Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert) et état $x_3(t)$ (rouge). 151
3.24 Fonctionnelle $z(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{z}(t)$ (rouge, discontinu). 151

4.1 Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert), état $x_3(t)$ (rouge), perturbation $f_2(t)$ (noir). . 162
4.2 Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert), état $x_3(t)$ (rouge). 174
4.3 Commande $u_1(t)$ (bleu), commande $u_2(t)$ (rouge). 175
4.4 Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert), état $x_3(t)$ (rouge). 176
4.5 Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ (rouge, discontinu). 177
4.6 Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ (rouge, discontinu). 177
4.7 Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_3(t)$ (rouge, discontinu). 178
4.8 Erreur d'observation. 178
4.9 Commande $u_1(t)$ (bleu) et commande $u_2(t)$ (vert). 179
4.10 Commande $u_1(t)$. 179
4.11 Commande $u_2(t)$. 180

5.1 Système en boucle fermée avec les correcteurs $K(s)$ et $\overline{K}(s)$. 198

A.1 Les ensembles de fonctions Lipschitz, Lipschitz d'un côté et quadratiquement bornée. 223

Symboles et abréviations

Symboles et notations

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{C}^{n\times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
Ω	ensemble non vide (espace d'état)
$\mathcal{F}$	σ-algèbre
$(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$	une famille croissante de σ-algèbre $(\mathcal{F}_t) \in \mathcal{F}$
$\mathfrak{L}$	opérateur de différentiation stochastique utilisé dans la formule d'Itô
$f(.) > 0$	la fonction $f(.)$ est définie positive
$f(.) \leqslant 0$	la fonction $f(.)$ est définie non positive
$f(.) < 0$	la fonction $f(.)$ est définie négative
$f(.) \geqslant 0$	la fonction $f(.)$ est définie non négative
$\langle X, Y\rangle = X^T Y$	est le produit scalaire des vecteurs X et Y
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R};\mathbb{R})$	ensemble des fonctions $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables k fois
$\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$	ensembles des fonctions $V(t, x(t))$ définies sur $\mathbb{R}_+ \times\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport au temps $t \in \mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^n$.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$	espace probabilisé
$\mathbf{P}\{.\}$	mesure de probabilité
$\mathbf{E}\{.\}$	espérance mathématique

$\widehat{L}_2\left([0,\infty)\,;\mathbb{R}^k\right)$	espace des processus stochastiques non anticipatifs de carré-intégrables au sens de $\|f\|^2_{\widehat{L}_2}$
$\mathcal{L}_\infty[0,\infty)$ (ou $\mathcal{L}_\infty$)	espace des signaux continus à amplitude finie sur $[0,\infty)$ vers $\mathbb{R}^n$
$\|\cdot\|$	norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice (ou norme de Frobenius notée $\|\cdot\|_F$)
$\|f\|^2_{\widehat{L}_2}$	$= \mathbf{E}\{\int_0^\infty \|f(t)\|^2\,\mathrm{d}t\} = \int_0^\infty \mathbf{E}\{\|f(t)\|^2\}\,\mathrm{d}t < \infty$, avec $f(\cdot)=(f(t))_{t\in[0,\infty)} \in \mathbb{R}^k$, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$
$\|\cdot\|_2$	norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
$\mathrm{sgn}(x)$	signe de $x \in \mathbb{R}$
ln	logarithme népérien
$P > 0,\ P \geqslant 0$	matrice P symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$P > Q,\ P \geqslant Q$	$P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geqslant 0$) pour P, Q symétriques $\in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{tr}(A)$	trace de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{Re}(A)$	partie réelle de A
$\mathrm{Im}(A)$	espace image de A : $\{y$ tel que $y = Ax\}$
$A^\perp$	matrice Z telle que $AZ = 0$ et $\begin{bmatrix} A^T & Z \end{bmatrix}$ de rang maximal
$\ker(A)$	noyau de A : $\{x$ tel que $Ax = 0\}$
$\lambda(A)$	valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\lambda_{\max}(A),\ \lambda_{\min}(A)$	valeur propre de module maximal (resp. minimal) de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\sigma(A)$	valeurs singulières de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$A^T,\ A^{-T}$	transposée de A (resp. de l'inverse de A) $\in \mathbb{R}^{n\times m}$
$A^H,\ A^{-H}$	transposée hermitienne de A (resp. de l'inverse de A) $\in \mathbb{C}^{n\times m}$ (transposition du complexe conjugué)
A^{-1}	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$
$A^\dagger$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ vérifiant $AA^\dagger A = A$
A^+	pseudo-inverse réflexive de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ vérifiant $AA^+A = A$ et $A^+AA^+ = A^+$
$\otimes$	produit matriciel de Kronecker
$\oplus$	somme directe de deux espaces
$a \vee b$	maximum des réels a et b

$I,\ 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n,\ 0_{n\times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$)
$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p)$	matrice diagonale constituée avec les éléménts de la diagonale des matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, p$
$\mathrm{bdiag}(A_1, \ldots, A_p)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $A_1, \ldots, A_p$ ($A_i \in \mathbb{C}^{n\times m}$) matrices $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, p$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (1,2)^T & A_{22} \end{bmatrix}$	matrice partitionnée telle que le symbole $(1,2)^T$ représente le transposé du bloc (1,2), soit A_{12}^T

Abréviations

EDO	Equations Différentielles Ordinaires
EDS	Equations Différentielles Stochastiques
EADO	Equations Algébro-Différentielles Ordinaires
EADS	Equations Algébro-Différentielles Stochastiques
p.s.	presque sûrement : la probabilité d'un événement F est presque sûre si cet événement se produit avec une probabilité égale à un (c'est-à-dire $\mathbf{P}(F) = 1$)
LBR	Lemme Borné Réel
LBRS	Lemme Borné Réel pour les systèmes Stochastiques
LMI	Inégalités Matricielles Affines (pour Linear Matrix Inequalities)

Introduction générale

Dans le dictionnaire “Le Petit Robert”, l'adjectif “stochastique” trouve son origine dans le terme grec “stokhastikos” qui se traduit par “conjectural”, ce dernier venant du latin “conjectura”. Avant son usage mathématique, l'adjectif stochastique servait donc à désigner des situations ou des phénomènes qui sont (au moins en partie) le fruit du hasard ou dont le déterminisme n'est pas absolu. Cet adjectif est aussi lié aux conjectures qui sont des opinions fondées sur des probabilités ou des apparences (on parle d'hypothèse, de supposition, mais aussi de prévision ou de pronostic lorsque ces conjectures portent sur l'avenir) ou des opinions fondées sur des hypothèses non vérifiées (présomption, soupçon, ...).

Entre la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, l'adjectif stochastique a été employé avec une définition mathématique précise en théorie des probabilités afin de décrire des phénomènes imitant le mouvement brownien de fines particules accomplissant des “marches aléatoires”. Le terme “brownien” vient du nom d'un naturaliste écossais, Robert Brown, qui a observé des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen. Il n'est pas le premier à avoir fait cette observation, mais il a montré la réalité “objective” du mouvement brownien en prouvant qu'il n'est pas d'origine biologique. La caractérisation mathématique du mouvement brownien a été réalisée par Einstein en 1905, puis par Langevin en 1908, établissant ainsi l'existence en physique et en biologie de phénomènes dont les trajectoires n'ont de tangente en aucun point.

Un système stochastique est un processus dépendant du temps et contrôlé par un (ou des) mouvement brownien (aussi appelé processus de Wiener), ce qui permet de prendre en compte le caractère aléatoire ou erratique de l'évolution de l'état de ce processus. Il existe de nombreux phénomènes physiques (la géologie pour les tremblements de terre, la mécanique pour les mouvements des particules dans un gaz ou dans un environnement ionisé), biologiques (la génétique et l'évolution des populations) ou sociaux (l'économie avec les mathématiques financières et les cours boursiers) qui sont modélisés par des systèmes stochastiques évoluant dans le temps et qui sont sujets aux effets du hasard.

Alors que, pour un système déterministe, on peut prévoir son état à un instant futur connaissant son état à un instant initial [1], l'état d'un système stochastique à un instant futur connaissant son état à un instant initial n'est pas prévisible : on peut seulement estimer la probabilité qu'a le système stochastique d'être dans un état donné à un instant futur.

Les systèmes stochastiques sont décrits par des équations différentielles stochastiques (EDS) qui diffèrent des équations différentielles ordinaires (EDO) modélisant les processus déterministes. Contrairement aux EDO, les EDS contiennent deux termes : la dérive pour l'évolution du temps et la diffusion pour l'action du mouvement brownien. Du fait de la présence d'un mouvement brownien qui n'est pas dérivable par rapport au temps, les dérivées, présentes dans les EDO,

1. On ne considère pas ici le fait que la trajectoire d'un système déterministe chaotique peut devenir imprévisible lorsque les conditions initiales varient de manière infiniment petite.

sont remplacées dans les EDS par des différentielles (d$x(t)$ pour l'état, dt pour le temps et d$w(t)$ pour le mouvement brownien).

Il existe deux approches pour réaliser des calculs sur des EDS : la forme de Stratonovich [Str60, Sus78, Øks03, All07] et celle d'Itô [Itô50a, Itô50b, Itô51]. C'est la formulation proposée par Itô qui est utilisée dans ce manuscrit. Outre ceux d'Itô, les travaux fondateurs pour l'étude des EDS sont ceux de Levy [Lév48] et de Wiener [Wie49].

La notion de stabilité des solutions des EDS a été introduite par Kats et Krasovskii [KK61]. Puis, avec les travaux de Kushner [Kus65b, Kus65a, Kus67], d'Has'minski [Has12] [2], de Kozin [Koz69], de Wonham [Won66], de Zakai [Zak67, Zak69], de Gikhman et Skorokhod [GS72] et de Friedman [Fri75], plusieurs type de stabilité ont été définis pour les EDS et une approche de type Lyapunov pour étudier ces stabilités a été élaborée.

Dans ce manuscrit, on s'intéresse principalement à la stabilité du point d'équilibre d'une EDS afin de synthétiser les lois de commande ou des observateurs. L'approche utilisée est basée sur des fonctions de Lyapunov [Lya92] qui permet d'étudier le comportement asymptotique des solutions sans avoir besoin de calculer explicitement ces solutions en résolvant des EDO ou des EDS. Les fonctions de Lyapunov permettent l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov, cette dernière pouvant être définie comme suit : si tout mouvement d'un système issu d'un voisinage suffisamment petit d'un point d'équilibre demeure au voisinage de ce point, alors ce système est stable au sens de Lyapunov.

Les deux principaux types de stabilité stochastique utilisés dans ce manuscrit sont la stabilité exponentielle presque sûre (aussi appelée stabilité exponentielle avec une probabilité de un) et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Sans prétendre à l'exhaustivité, concernant l'utilisation de fonctions de Lyapunov afin d'étudier la stabilité exponentielle presque sûre, on peut citer [Mao90, Mao92b, Mao94a, Mao94b, Mao97, ZK94, Liu97, LM98, MKR98, CGR03, HM08, LD11], tandis que pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, on peut citer [Kle69, SW96, WW76, Mor95, DHS97, Mao97, MKR98, RS97, HP98, Liu01, Dam04].

1 Objectifs de la thèse et principaux résultats obtenus

Dans ce manuscrit, on s'est intéressé principalement à la stabilité exponentielle presque sûre des systèmes stochastiques non linéaires au sens d'Itô, contrôlés par des bruits multiplicatifs, afin de synthétiser des observateurs d'ordres plein et d'ordre réduit. Ce type de stabilité a été retenu afin de relaxer les conditions données dans la littérature pour la synthèse d'observateurs. En effet, dans la littérature, c'est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique qui est utilisée pour caractériser le comportement de l'erreur d'estimation (voir [Phi89, CGS00, GLSY01, GMP02, Sto02, XC02, XC03, ZCT05, GLW06, GSB07, HSRZ09, BS10]). De plus, l'état ne pouvant pas être éliminé de l'erreur d'observation, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre du système stochastique à observer est nécessaire dans ces travaux. Puisque, sous des hypothèses "suffisamment générales" (voir sections 1.5.2 et 1.5.3), la stabilité exponentielle en moyenne quadratique implique la stabilité exponentielle presque sûre [3], l'emploi de cette dernière a permis de proposer des observateurs pour des systèmes stochastiques dont le point d'équilibre est exponentiellement presque sûrement stable, mais pas forcément exponentiellement stable en moyenne quadratique, relaxant ainsi les conditions données dans la littérature pour la synthèse

2. L'édition russe du livre de Has'minskii est parue en 1969 et la 1ère traduction anglaise de ce livre a été réalisée en 1980.

3. Cette implication n'est pas toujours vraie lorsque ces hypothèses "suffisamment générales" ne sont pas satisfaites (voir section 1.5.3).

d'observateurs pour les systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs.

On a montré que le problème du filtrage des systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs en imposant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur d'observation ne peut pas être résolu en appliquant les approches de type Lyapunov disponibles dans la littérature. On a surmonté cette difficulté en proposant d'exploiter la structure triangulaire associée à ce problème du filtrage. L'approche proposée est basée sur un nouveau résultat : la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre d'une classe de systèmes stochastiques non linéaires triangulaires est équivalente à celle du point d'équilibre de chaque sous-système considéré isolément. La démonstration de ce résultat est basée sur la majoration des exposants de Lyapunov lorsque les non linéarités dans la dérive sont Lipschitz ou one-sided Lipschitz. Avec cette approche, la synthèse de l'observateur est décomposée en deux sous-problèmes découplés :

- établir la stabilité du point d'équilibre de l'EDS décrivant la dynamique de l'état à estimer,
- stabiliser l'équation différentielle stochastique décrivant la dynamique de l'erreur d'observation.

Plusieurs stratégies ont été utilisées pour la synthèse de ces observateurs : utilisation de fonctions de Lyapunov polytopiques ou non polytopiques, formalisme de type "descripteur", paramétrage des matrices des observateurs via la solution de contraintes de Sylvester. Ces méthodes ont été étendues pour la synthèse d'observateurs robustes en présence d'incertitudes paramétriques.

Un autre objectif de cette thèse est l'utilisation de la stabilité exponentielle presque sûre pour la stabilité et la stabilisation de systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs. Concernant la stabilité, des conditions suffisantes pour le rejet asymptotique des perturbations intervenant dans une équation différentielle stochastique avec des bruits multiplicatifs ont été proposées, en considérant la stabilité exponentielle presque sûre. Une borne de l'exposant de Lyapunov permet de garantir le taux de convergence exponentielle vers zéro de l'état du système. Quant à la stabilisation, une loi de commande bang-bang par retour d'état estimé a été synthétisée afin de garantir la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre du système stochastique non linéaire lorsque l'état du système est partiellement mesuré.

Le dernier objectif de cette thèse est la commande et l'observation des systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs dont la dynamique est décrite par une équation algébro-différentielle stochastique (EADS). Ces systèmes stochastiques sont aussi qualifiés de descripteurs ou de singuliers. Après avoir étendu la formule d'Itô aux EADS, un lemme borné réel a été développé pour ces systèmes lorsque la dérive et la diffusion sont linéaires. Ce dernier a été utilisé pour la synthèse d'une loi de commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état ou par retour de sortie. C'est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique qui a été utilisée. Ensuite, en employant la stabilité exponentielle presque sûre, un observateur a été synthétisé pour un système stochastique singulier avec des bruits multiplicatifs.

L'ensemble des méthodes de synthèse présentées dans ce manuscrit s'appuie sur la résolution d'inégalités matricielles affines aussi appelées LMI. Une LMI est un système d'inégalités matricielles de la forme suivante

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{N} F_i x_i < 0$$

où les inconnues sont les scalaires x_i, aussi appelés variables de décision. Lorsque les matrices F_i sont symétriques, ce qui est le cas avec les approches de type Lyapunov, on parle de programmation semi-définie. La résolution de LMI étant un problème convexe, il existe de nombreux algorithmes d'optimisation très efficaces pour calculer la solution.

2 Plan du manuscrit

Le manuscrit comporte 5 chapitres.

Chapitre 1 : Systèmes stochastiques et équations différentielles stochastiques

Ce chapitre est consacré à l'état de l'art sur les systèmes stochastiques non linéaires décrits par des EDS contrôlées par des bruits intervenant de manière multiplicative avec l'état. Ces bruits sont des mouvements browniens. Les outils et les définitions essentiels concernant les EDS, utilisés dans la suite de ce mémoire, sont présentés : les processus d'Itô, la formule d'Itô, l'existence et l'unicité des solutions, la discrétisation et la simulation des EDS, la stabilité du point d'équilibre d'une EDS et le lemme borné réel pour les systèmes stochastiques. L'accent est mis sur les différentes notions de stabilité avec une étude comparative entre la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Ce chapitre se termine avec une présentation de quelques exemples de processus stochastiques.

Chapitre 2 : Stabilité des équations différentielles stochastiques de grande dimension : application au filtrage

Ce chapitre est dédié au filtrage d'ordres plein et réduit afin d'estimer l'état d'un système stochastique non linéaire lorsque cet état est partiellement mesuré. La classe de systèmes stochastiques non linéaires considérée est générale : les non linéarités sont soit Lipschitz, soit one-sided Lipschitz et les mesures sont soit stochastiques, soit déterministes.

Le but est de garantir la stabilité exponentielle presque sûre de la dynamique de l'erreur d'estimation. On a montré que, du fait de la structure intrinsèque de l'erreur d'observation, les théorèmes basés sur une approche de type Lyapunov pour la stabilité exponentielle presque sûre ne peuvent pas être utilisés pour la synthèse des matrices de l'observateur. Afin de résoudre ce problème, on a proposé des nouveaux résultats sur la stabilité exponentielle presque sûre d'une classe de systèmes triangulaires stochastiques. La structure triangulaire liée au problème du filtrage des systèmes stochastiques a été exploitée pour synthétiser un observateur garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage en découplant l'analyse de la stabilité de l'EDS du système à observer de celle décrivant la dynamique de l'erreur de filtrage.

Chapitre 3 : Filtrage des systèmes stochastiques

Dans ce chapitre, les résultats théoriques développés dans le chapitre 2 sont utilisés pour synthétiser des observateurs d'ordres plein et réduit pour des classes de systèmes stochastiques ayant des non linéarités spécifiques, ces dernières étant Lipschitz ou one-sided Lipschitz. Les mesures sont soit stochastiques, soit déterministes. Deux approches sont proposées pour la synthèse de ces observateurs. La première exploite le caractère borné des entrées de commande. La seconde utilise une approche de type polytopique avec une modélisation de type pseudo-singulière de la dynamique du système à observer, ce qui permet de relaxer considérablement les conditions de stabilité proposées. Ce chapitre se finit avec la prise en compte d'incertitudes paramétriques dans les coefficients de l'EDS du système à observer afin de synthétiser des observateurs d'ordres plein ou réduit qui soient robustes : la stabilité exponentielle presque sûre de la dynamique de l'erreur de filtrage est garantie malgré la présence d'incertitudes dans les EDS considérées.

Chapitre 4 : Stabilité et stabilisation des systèmes stochastiques

Ce chapitre traite de la stabilité et de la stabilisation des systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs. Dans la première partie de ce chapitre, des conditions suffisantes de type Lyapunov sont proposées afin que la solution non triviale d'une EDS (l'état $x(t) = 0$ n'est pas un point d'équilibre) soit exponentiellement presque sûrement stable. Ces résultats ont été appliqués au rejet des perturbations avec un taux de décroissance exponentielle garanti pour l'état du système.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la commande de type bang-bang pour les systèmes stochastiques non linéaires. Deux cas ont été considérés : le retour d'état lorsque ce dernier est complètement disponible et la commande basée sur un observateur lorsque l'état est partiellement mesuré. Le type de stabilité utilisé est la stabilité exponentielle presque sûre.

Chapitre 5 : Commande et filtrage des systèmes stochastiques singuliers

Ce chapitre est consacré aux systèmes stochastiques singuliers ou algébro-différentiels avec des bruits multiplicatifs. Ce chapitre comprend trois parties. Dans la première partie, le calcul d'Itô est étendu aux systèmes stochastiques non linéaires algébro-différentiels puisque les formules d'Itô utilisées dans les chapitres précédents ne peuvent pas s'appliquer "directement" aux systèmes stochastiques singuliers. Dans la seconde partie, lorsque la dérive et la diffusion sont linéaires, une version du lemme borné réel est développée pour les systèmes stochastiques singuliers, puis ce dernier est utilisé pour la synthèse de deux correcteurs $\mathcal{H}_\infty$: par retour d'état et par retour de sortie dynamique. Dans ces travaux, c'est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique qui est employée. Dans la troisième partie, les résultats présentés au chapitre 2 sont utilisés afin de synthétiser un observateur pour une classe de systèmes stochastiques non linéaires algébro-différentiels en garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de la dynamique de l'erreur de filtrage.

3 Publications issues de la thèse

[BZSM12a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Filtrage des systèmes non linéaires stochastiques avec des bruits multiplicatifs. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Grenoble, France, 2012.

[BZSM12b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires stochastiques en utilisant la stabilité exponentielle presque sûre : Approche LMI. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Grenoble, France, 2012.

[BZSM13a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. $\mathcal{H}_\infty$ control for singular stochastic systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Zürich, Switzerland, 2013.

[BZSM13b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Exponential disturbance rejection with decay rate for stochastic systems. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, Washington, USA, 2013.

[BZSM13c] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Robust observer design for a class of stochastic nonlinear systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Firenze, Italy, 2013.

[BZSM14a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Observer-based bang-bang control for a class of nonlinear stochastic systems. In *Proc. Triennal IFAC World Congress*, Cape Town, South Africa, 2014.

[BZSM14b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Observer design for a class of singular stochastic nonlinear systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Strasbourg, France, 2014.

[BZSM15a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Exponential observer for a class of one-sided Lipschitz stochastic nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 60 :259–264, 2015.

[BZSM15b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Sufficient conditions for almost sure exponential stability of large scale interconnected stochastic systems. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, Chicago, USA, 2015.

Chapitre 1

Systèmes stochastiques et équations différentielles stochastiques

Sommaire

1.1 Introduction 8
1.2 Processus stochastiques et équations différentielles stochastiques . 9
1.3 Mouvement brownien 10
1.4 Equations différentielles stochastiques (EDS) 11
1.4.1 Equations différentielles stochastiques : formes intégrale et différentielle . 11
1.4.2 Différence entre bruit multiplicatif et bruit additif 11
1.4.3 Processus d'Itô et formule d'Itô 12
1.4.3.1 Processus d'Itô 12
1.4.3.2 Formule d'Itô et différentiateur stochastique 13
1.4.3.3 Différence entre l'intégration "standard" et l'intégration stochastique au sens d'Itô 14
1.4.4 Solution d'une équation différentielle stochastique : existence et unicité 15
1.4.5 Discrétisation et simulation des équations différentielles stochastiques . 16
1.4.5.1 Discrétisation d'un mouvement brownien 16
1.4.5.2 Discrétisation explicite d'une équation différentielle stochastique : schéma numérique d'Euler-Maruyama 17
1.5 Stabilité des équations différentielles stochastiques 19
1.5.1 Définitions de la stabilité des processus stochastiques 19
1.5.2 Théorèmes pour la stabilité des systèmes stochastiques 22
1.5.3 Relations entre la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique 24
1.5.3.1 Discussion à partir des conditions sur les fonctions de Lyapunov 24
1.5.3.2 Cas des équations différentielles scalaires 25
1.5.3.3 Exemple illustratif 29
1.5.3.4 Insuffisance des fonctions de Lyapunov quadratiques 33
1.5.4 Stabilisation et déstabilisation avec le bruit 35
1.6 Lemme borné réel 37
1.6.1 Lemme borné réel pour les systèmes déterministes 38
1.6.2 Lemme borné réel des systèmes stochastiques avec une dérive linéaire . 39
1.6.3 Lemme borné réel pour les systèmes stochastiques non linéaires 40
1.7 Exemples de processus stochastiques 44
1.8 Conclusion 48

1.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation des équations différentielles stochastiques auxquelles ce mémoire est consacré. Une attention particulière est portée sur l'analyse de la stabilité du point d'équilibre de ces équations différentielles stochastiques. Seules les propriétés des équations différentielles stochastiques utilisées dans ce travail de recherche doctorale sont exposées. L'ensemble des résultats décrits dans ce chapitre est issu de la littérature sur les processus stochastiques.

La section 1.2 présente les systèmes stochastiques et les équations différentielles stochastiques : l'intérêt d'introduire des phénomènes aléatoires pour décrire le comportement dynamique d'une grande variété de processus est mis en évidence.

Le mouvement brownien est présenté dans la section 1.3, tandis que la section 1.4 est consacrée aux équations différentielles stochastiques. Les formes intégrale et différentielle de ces équations sont données dans la section 1.4.1. La section 1.4.2 met en évidence les différences de comportement de la solution d'une équation différentielle stochastique selon la façon dont intervient le bruit : soit de manière linéaire, soit de manière multiplicative (ou non linéaire). Dans le premier cas, les bruits n'influencent pas la stabilité du point d'équilibre de l'équation différentielle stochastique, alors que, dans le second cas, ces bruits agissent sur cette stabilité. Les processus d'Itô et la formule d'Itô sont présentés dans la section 1.4.3. La formule d'Itô permet de faire des calculs en présence de bruits browniens. L'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle stochastique sont abordées à la section 1.4.4. La discrétisation et la simulation des équations différentielles stochastiques sont traitées dans la section 1.4.5.

La section 1.5 est consacrée aux notions de stabilité associées aux équations différentielles stochastiques. Les concepts de stabilité les plus couramment utilisés pour la synthèse de lois de commande et d'observateurs pour les processus stochastiques sont rappelés dans la section 1.5.1. Des conditions suffisantes de stabilité via une approche de type Lyapunov sont données dans la section 1.5.2. La section 1.5.3 est consacrée à une comparaison entre la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et la stabilité exponentielle presque sûre. Cette section est importante dans la motivation de ce travail de recherche doctorale : bien que la stabilité exponentielle en moyenne quadratique soit, de loin, la notion de stabilité la plus employée en automatique pour les processus stochastiques, il est montré dans cette section, sous des hypothèses "peu restrictives", que la stabilité exponentielle presque sûre est plus "générale" que la stabilité exponentielle en moyenne quadratique (sous ces hypothèses "peu restrictives", la seconde implique la première, mais la réciproque est fausse). Ainsi, dans les chapitres 1 à 5, des résultats de stabilité exponentielle presque sûre sont proposés pour la synthèse de lois de commande et d'observateurs lorsque la stabilité exponentielle en moyenne quadratique n'est pas satisfaite. Enfin, la section 1.5.4 montre que le bruit dans une équation différentielle stochastique peut être utilisé pour la stabilisation ou pour la déstabilisation.

La section 1.6 est consacrée à la généralisation de la commande $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes linéaires déterministes aux systèmes stochastiques non linéaires, c'est-à-dire à la généralisation du lemme borné réel aux systèmes stochastiques non linéaires. Cette extension est utilisée dans le chapitre 5.

Dans la section 1.7, des exemples d'application des équations différentielles stochastiques à divers types de domaines (finance, biologie, électricité, mécanique, ...) sont présentés.

Une conclusion est donnée dans la section 1.8.

1.2 Processus stochastiques et équations différentielles stochastiques

Lorsque l'état d'un système à un instant futur peut être déterminé en connaissant l'état initial de ce système et le modèle qui le décrit, ce système est appelé déterministe. Son comportement est décrit par une équation différentielle ordinaire (EDO).

Cependant, dans de nombreuses applications, une description déterministe est inopérante pour de multiples raisons : les paramètres du modèle ne sont pas connus avec suffisamment de précision ou l'estimation de leur valeur à partir d'une expérience (ou mesure) doit tenir compte d'une loi de probabilité donnée, un comportement "erratique" vient s'ajouter à l'évolution des variables, la connaissance de l'état inital n'est pas suffisante pour connaître l'état du système à un moment donné...

Si une approche déterministe ne permet pas de modéliser un système, une solution est de modifier l'EDO en insérant des bruits. On obtient alors une équation différentielle stochastique (EDS). Cette classe de modèles est bien adaptée aux systèmes stochastiques que l'on peut définir ainsi : l'état du système à un instant futur connaissant son état à un instant initial n'est pas prévisible, on peut seulement estimer la probabilité qu'a le système d'être dans un état donné à un instant futur.

Les EDS étudiées dans ce mémoire sont constituées de deux termes : la dérive qui ne contient pas de terme stochastique et la diffusion qui inclut le bruit, ce dernier interagissant de manière multiplicative (ou non linéaire) avec l'état du système. Ces bruits sont des mouvements browniens indépendants. Les EDS permettent donc de prendre en compte l'intervention de comportements aléatoires au sein des trajectoires des variables d'état d'un système : la dérive correspond à la dynamique du système, tandis que la diffusion représente les effets "aléatoires" s'ajoutant à cette dynamique.

De nombreux phénomènes sont décrits avec des EDS lorsqu'une description déterministe n'est pas satisfaisante : économie (mathématiques financières et cours boursiers), biologie (génétique et évolution des populations), géologie (tremblements de terre), ingénierie (synthèse de commande prenant en compte les défaillances pouvant apparaître aléatoirement), informatique (modélisation des réseaux), électricité (modélisation des circuits électriques en tenant compte des bruits), physique et mécanique (mouvements des particules dans un gaz ou dans un milieu ionisé, physique quantique)...

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux EDS de la forme suivante

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t), u(t), v(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t), u(t), v(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{1.1}$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ vecteur d'état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ vecteur des entrées connues (commandes),
- $v(t) \in \mathbb{R}^q \longrightarrow$ vecteur des entrées inconnues (perturbations),
- $f(x(t), u(t)) \longrightarrow$ la dérive,
- $g(x(t), u(t)) \longrightarrow$ la diffusion,
- $w(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré.

On considère aussi que les variables intervenant dans l'EDS (1.1) sont définies dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ avec (voir section B.2 dans l'annexe B)

- Ω est l'ensemble des événements,
- $\mathcal{F}$ est une tribu,
- $\mathbf{P}$ est la mesure de la probabilité sur $\mathcal{F}$.

Dans la suite de ce mémoire, sauf indication contraire, la norme utilisée sera la norme de Frobenius, aussi appelée norme euclidienne, définie par (voir section A.1 dans l'annexe A)

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}. \tag{1.2}$$

Les initiales "p.s." signifient "presque sûr", ce qui est équivalent à "avec une probabilité égale à 1".

1.3 Mouvement brownien

D'après le professeur Jean Pierre Kahane, le mouvement brownien est un phénomène naturel, et un objet mathématique à la fois. Le phénomène naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il a été observé dès le $18^{\text{ème}}$ siècle. L'objet mathématique est un processus gaussien dont la variance des accroissements est égale au temps écoulé. Norbert Wiener, qui l'a défini en 1923, l'appelait "the fundamental random function".

Un court historique des premières études sur le mouvement brownien est donné ci-dessous.

- Brown, un botaniste écossais du début du $19^{\text{ème}}$ siècle, s'intéressait à l'action du pollen dans la reproduction des plantes. Il a été amené, comme d'autres, à observer le mouvement irrégulier et incessant de particules de pollen en suspension dans l'eau. A priori, il interprétait ce mouvement irrégulier comme un phénomène vital.
- Delsaux (1877) explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau.
- Bachelier (1900) met en évidence le caractère markovien du mouvement brownien, en vue d'étudier les cours de la bourse.
- Einstein (1905) détermine la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique.
- Smoluchowski (1905)décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.
- Wiener (1923) réalise la première étude mathématique rigoureuse et donne une démonstration de l'existence du mouvement brownien.
- Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du mouvement brownien.

Le mouvement brownien, noté $w(t)$ dans ce mémoire, est défini comme suit.

Définition 1.3.1. *Un **Mouvement brownien (standard)** est un processus $w(t)$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vérifiant :*

- $w(0) = 0$ *p.s., ce qui est équivalent à* $\mathbf{P}\{w(0) = 0\} = 1$.
- $w(t)$ *est continu.*
- $w(t)$ *est à accroissements indépendants : pour tout* $n \geqslant 2$, *les accroissements aléatoires* $w(t_n) - w(t_{n-1}), w(t_{n-1}) - w(t_{n-2}), \ldots, w(t_1) - w(t_0)$ *sont indépendants pour tout* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.
- *Les accroissements sont stationnaires : pour tout* $\delta > 0$, *la loi de la variable* $w(t+\delta) - w(t)$ *ne dépend pas du temps* t.
- *Les accroissements suivent une loi gaussienne centrée de matrice de covariance* $|t-s|I$ *: pour* $s \leqslant t$, *on a* $w(t) - w(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Les processus à accroissements indépendants décrivent des états évoluant dans un univers où les variations passées n'influencent pas les variations futures.

De la définition 1.3.1, on déduit les propriétés suivantes.

- Un incrément d'un mouvement brownien correspond à

$$\Delta w(t) \approx \pm\sqrt{\Delta t}.$$

- Le mouvement brownien n'est pas différentiable car

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta w(t)}{\Delta t} \approx \frac{\pm 1}{\sqrt{\Delta t}} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} = \pm\infty.$$

- Si le mouvement brownien est multivariable ($w(t) \in \mathbb{R}^d$ et $w_i(t) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$), alors

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{w_i(t)}{t} = 0 \quad \text{p.s.}, \tag{1.3a}$$
$$\mathbf{E}\{\mathrm{d}w_i(t)\} = 0, \tag{1.3b}$$
$$\mathbf{E}\{\mathrm{d}w_i(t)\,\mathrm{d}w_i(t)\} = \mathrm{d}t, \tag{1.3c}$$
$$\mathbf{E}\{\mathrm{d}w_i(t)\,\mathrm{d}w_j(t)\} = 0 \quad i \neq j, \tag{1.3d}$$

et [Mao97], [Øks03]

$$\mathrm{d}w_i(t)\,\mathrm{d}w_i(t) = \mathrm{d}t, \tag{1.4a}$$
$$\mathrm{d}w_i(t)\,\mathrm{d}w_j(t) = 0 \quad i \neq j, \tag{1.4b}$$
$$\mathrm{d}w_i(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}w_i(t) = 0. \tag{1.4c}$$

1.4 Equations différentielles stochastiques (EDS)

1.4.1 Equations différentielles stochastiques : formes intégrale et différentielle

Dans cette section, on va considérer une forme "simplifiée" de l'EDS (1.1) en considérant que la dérive est $f(x(t))$ et la diffusion est $g(x(t))$. Dans ce cas, l'EDS (1.1) s'écrit soit sous la forme intégrale suivante (avec $T > 0$)

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(x(s))\,\mathrm{d}w(s), t \in [0, T] \tag{1.5}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est indépendant du mouvement brownien $w(t) \in \mathbb{R}^d$, soit sous la forme différentielle suivante

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w(t). \tag{1.6}$$

Dans la suite de ce mémoire, on considère la forme différentielle.

1.4.2 Différence entre bruit multiplicatif et bruit additif

Dans l'EDS suivante

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}w(t),$$

la diffusion g ne dépend pas de l'état $x(t)$: le bruit $w(t)$ agit de manière additive, donc intervient linéairement dans la dynamique de l'état $x(t)$.

Dans ce cas, le bruit $w(t)$ n'influence pas la stabilité du point d'équilibre de l'EDS et l'estimation de l'état peut être traitée avec le filtre de Kalman.

Par contre, dans l'EDS suivante

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w(t),$$

la dérive $g(x(t))$ dépend de l'état $x(t)$: le bruit $w(t)$ agit de manière multiplicative, c'est-à-dire le bruit intervient non linéairement avec la dynamique de l'état $x(t)$.

Dans ce cas, le bruit $w(t)$ influence la stabilité du point d'équilibre de l'EDS et des définitions spécifiques sont utilisées pour caractériser la stabilité du point d'équilibre de l'EDS.

1.4.3 Processus d'Itô et formule d'Itô

1.4.3.1 Processus d'Itô

Définition 1.4.1 (**Processus stochastique**). *On appelle processus stochastique à valeurs dans E muni d'une tribu ε une famille $X = \{x(t); 0 \leqslant t < \infty\}$ de variables aléatoires définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ à valeurs dans l'espace mesurable (E, ε).*

Définition 1.4.2 (**Processus d'Itô**). *[Øks03] Un processus d'Itô est un processus stochastique $x(t)$ continu à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de la forme*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(x(s))\,\mathrm{d}w(s) \tag{1.7}$$

avec $0 \leqslant t \leqslant T, x(0) \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes

- *f est une fonction module-intégrable*

$$\int_0^T \|f(x(s))\|\,\mathrm{d}s < \infty \qquad p.s. \qquad \forall\, T > 0, \tag{1.8}$$

- *g est une fonction carrée-intégrable*

$$\int_0^T \|g(x(s))\|^2\,\mathrm{d}s < \infty \qquad p.s. \qquad \forall\, T > 0. \tag{1.9}$$

L'équation (1.7) peut s'écrire sous la forme différentielle (voir section 1.4.1)

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w(t).$$

Théorème 1.4.1 (**Intégrale stochastique**). *[Mao97, Øks03] La fonction $g(x(t))$ dans le processus d'Itô (1.7) vérifie les propriétés suivantes*[1]

$$\mathbf{E}\left\{\int_a^b g(x(s))\,\mathrm{d}w(s)\right\} = 0, \tag{1.10a}$$

$$\mathbf{E}\left\{\left\|\int_a^b g(x(s))\,\mathrm{d}w(s)\right\|^2\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_a^b \|g(x(s))\|^2\,\mathrm{d}s\right\}, \tag{1.10b}$$

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^T \|g(x(s))\|^2\,\mathrm{d}s\right\} < \infty \qquad \forall\, T > 0. \tag{1.10c}$$

$$\int_a^b g(x(s))\,\mathrm{d}w(s) \text{ est } \mathcal{F}_b\text{-mesurable}, \tag{1.10d}$$

$$\int_a^b g(x(s))\,\mathrm{d}w(s) \text{ est une martingale.} \tag{1.10e}$$

Un processus d'Itô défini uniquement par sa diffusion ($\mathrm{d}x(t) = g(x(t))\,\mathrm{d}w(t)$) est une martingale car $g(x(t))$ vérifie (1.10d).

1. Processus $\mathcal{F}$-mesurable et martingale : voir définitions B.2.4 et B.3.4, annexe B.

1.4.3.2 Formule d'Itô et différentiateur stochastique

Théorème 1.4.2 (Formule d'Itô). *[Mao97, Øks03] Soit $x(t)$ un processus d'Itô. Pour toute fonction $\Phi(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et tout $0 \leqslant t \leqslant T$, $\Phi(t,x)$ est un processus d'Itô et vérifie l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\mathrm{d}\Phi(t,x) = \mathfrak{L}\Phi(t,x)\,\mathrm{d}t + \mathfrak{B}\Phi(t,x)\,\mathrm{d}w(t) \tag{1.11}$$

où

$$\mathfrak{L}\Phi(x,t) = \Phi_t(t,x) + \Phi_x(t,x)f(t,x) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(g(t,x)^T\Phi_{xx}(t,x)g(t,x)\big) \tag{1.12}$$

$$\mathfrak{B}\Phi(x,t) = \Phi_x(t,x)g(t,x) \tag{1.13}$$

avec

$$\Phi_t = \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad \Phi_x = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_n}\end{bmatrix}, \qquad \Phi_{xx} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{L}(\boldsymbol{.})$ est appelé le différentiateur stochastique.

$\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \longrightarrow$ ensemble des fonctions $\Phi(t,x)$ définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport au temps $t \in \mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient

$$\Phi(x,t) = \Phi(x_0,t_0) + \Phi_t(x_0,t_0)(t-t_0) + \Phi_x(x_0,t_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\big((x-x_0)^T\Phi_{xx}(x_0,t_0)(x-x_0) + 2\Phi_{xt}(x_0,t_0)(x-x_0)(t-t_0) + \Phi_{tt}(x_0,t_0)(t-t_0)^2\big) + \circ((x-x_0)^T(x-x_0), (t-t_0)^2, (x-x_0)(t-t_0))$$

En posant $\mathrm{d}x = x - x_0$ et $\mathrm{d}t = t - t_0$, la relation précédente devient

$$\Phi(x,t) = \Phi(x_0,t_0) + \Phi_t(x_0,t_0)\,\mathrm{d}t + \Phi_x(x_0,t_0)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\big((\mathrm{d}x)^T\Phi_{xx}\,\mathrm{d}x + 2\Phi_{xt}(x_0,t_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \Phi_{tt}(x_0,t_0)(\mathrm{d}t)^2\big) + \circ((\mathrm{d}x)^T\,\mathrm{d}x, (\mathrm{d}t)^2, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t)$$

avec Φ_t, Φ_x et Φ_{xx} définis dans le théorème 1.4.2 et

$$\Phi_{tt} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 t} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{xt} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial t} & \cdots & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_n\partial t}\end{bmatrix}.$$

Les relations (1.4a) et (1.4c) donnent $(i = 1, \ldots, d)$

$$(\mathrm{d}t)^2 = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}w_i\,\mathrm{d}w_i\,\mathrm{d}t = 0.$$

En utilisant $\circ((\mathrm{d}x)^T\,\mathrm{d}x, (\mathrm{d}t)^2, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t) \approx 0$ et $(\mathrm{d}t)^2 = 0$, le développement de Taylor ci-dessus se simplifie comme suit

$$\Phi(x,t) = \Phi(x_0,t_0) + \Phi_t(x_0,t_0)\,\mathrm{d}t + \Phi_x(x_0,t_0)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(\mathrm{d}x)^T\Phi_{xx}(x_0,t_0)\,\mathrm{d}x + \Phi_{xt}(x_0,t_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

Si on remplace dx par l'équation différentielle stochastique (1.6) dans l'équation (1.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Phi(x,t) &= \Phi(x,t) - \Phi(x_0,t_0) \\
&= \Phi_t(x_0,t_0)\,\mathrm{d}t + \Phi_x(x_0,t_0)(f(x)\,\mathrm{d}t + g(x)\,\mathrm{d}w) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(f^T(x)\,\mathrm{d}t + (\mathrm{d}w)^T g^T(x))\Phi_{xx}(x_0,t_0)(f(x)\,\mathrm{d}t + g(x)\,\mathrm{d}w) \\
&\qquad + \Phi_{xt}(x_0,t_0)(f(x)\,\mathrm{d}t + g(x)\,\mathrm{d}w)\,\mathrm{d}t \\
&= \Phi_t(x_0,t_0)\,\mathrm{d}t + \Phi_x(x_0,t_0)(f(x)\,\mathrm{d}t + g(x)\,\mathrm{d}w) \\
&\qquad + \frac{1}{2}f^T(x)\Phi_{xx}(x_0,t_0)f(x)(\mathrm{d}t)^2 + f^T(x)\Phi_{xx}(x_0,t_0)g(x)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(g^T(x)\Phi_{xx}(x_0,t_0)g(x)\,\mathrm{d}w(\mathrm{d}w)^T\big)\,.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.4) et $(\mathrm{d}t)^2 = 0$, la relation précédente devient

$$\mathrm{d}\Phi(x,t) = \Phi_t(x_0,t_0)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\left(\Phi_x(x_0,t_0)(f(x) + \frac{1}{2}(g^T(x)\phi_{xx}(x_0,t_0)g(x))\right)}_{\mathfrak{L}\Phi(t,x)}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\Phi_x(x_0,t_0)g(x)}_{\mathfrak{B}\Phi(t,x)}\,\mathrm{d}w(t).$$

•

1.4.3.3 Différence entre l'intégration "standard" et l'intégration stochastique au sens d'Itô

L'exemple simple suivant pemet de montrer la différence entre l'intégration "standard" et l'intégration stochastique au sens d'Itô.

En utilisant les règles standard de l'intégration, on obtient

$$I_1 = \int_0^t s\,\mathrm{d}s = \frac{t^2}{2}.$$

On remplace s par un mouvement brownien scalaire $w(t)$ et on considère l'intégrale stochastique suivante

$$I_2 = \int_0^t w\,\mathrm{d}w.$$

L'application de la formule d'Itô dans le théorème 1.4.2 avec $\Phi(t,w) = \dfrac{w^2}{2}$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}w$ (on a donc $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$ dans (1.6)) donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Phi(t,x) &= (\Phi_t(t,x) + \Phi_x(t,x)f(t,x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(g^T(t,x)\Phi_{xx}(t,x)g(t,x))\,\mathrm{d}t + \Phi_x(t,x)g(t,x)\,\mathrm{d}w \\
&= \left(0 + 0 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t + w\,\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{2} + w\,\mathrm{d}w = \mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient (avec $w(0) = 0$)

$$I = \int_0^t w\,\mathrm{d}w = \int_0^t \mathrm{d}\frac{w^2}{2} - \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{w^2}{2} - \frac{t}{2} \neq \frac{w^2}{2}.$$

1.4.4 Solution d'une équation différentielle stochastique : existence et unicité

Soit la fonction $f(x(t))$ qui est une fois dérivable par rapport à $x(t)$ et une fonction $g(x(t))$ qui est deux fois dérivable par rapport à $x(t)$. Ces deux fonctions vérifient

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0. \tag{1.15}$$

Théorème 1.4.3 (**Existence et unicité**). *[Mao97, Øks03, Has12] S'il existe des réels $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tels que*

$$\|f(x(t))\| + \|g(x(t))\| \leqslant k_1 \left(1 + \|x(t)\|\right) \tag{1.16}$$

$$\|f(x(t)) - f(y(t))\| + \|g(x(t)) - g(y(t))\| \leqslant k_2 \|x(t) - y(t)\| \tag{1.17}$$

alors il existe une solution unique à l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w. \tag{1.18}$$

La condition (1.16) garantit l'existence d'une solution $x(t)$ pour tout $t \geqslant 0$ (la solution "n'explose pas" en temps fini), indépendamment de x_0, et la condition (1.17) implique l'unicité de cette solution.

La condition (1.16) est appelée "linear growth condition" ou "condition de croissance linéaire", tandis que la relation (1.17) est une condition de Lipschitz. Ces deux conditions sont globales.

Le thérorème 1.4.3 ne change pas si la condition (1.16) est remplacée par

$$\|f(x(t))\|^2 + \|g(x(t))\|^2 \leqslant k_{11} \left(1 + \|x(t)\|^2\right) \tag{1.19}$$

avec $k_{11} > 0$ ou par

$$\|f(x(t))\|^2 \vee \|g(x(t))\|^2 \leqslant k_{12} \left(1 + \|x(t)\|^2\right) \tag{1.20}$$

avec $k_{12} > 0$ et si la condition (1.17) est remplacée par

$$\|f(x(t)) - f(y(t))\|^2 + \|g(x(t)) - g(y(t))\|^2 \leqslant k_{21} \|x(t) - y(t)\|^2 \tag{1.21}$$

avec $k_{21} > 0$ ou par

$$\|f(x(t)) - f(y(t))\|^2 \vee \|g(x(t)) - g(y(t))\|^2 \leqslant k_{22} \|x(t) - y(t)\|^2 \tag{1.22}$$

avec $k_{22} > 0$.

Exemple 1 : [Øks03] L'équation différentielle scalaire $\mathrm{d}x(t) = x^2(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $f(x(t)) = x^2(t)$ et $g(x(t)) = 0$) a pour solution $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$ et ne vérifie pas (1.16). Il n'y a pas de solution définie $\forall\, t \geqslant 0$ car $x(t)$ explose pour $t = 1$.

Exemple 2 : [MMR02] Soit l'équation différentielle bilinéaire scalaire $\mathrm{d}x(t) = (\overline{a}x(t) + \overline{b}u(t)x(t))\,\mathrm{d}t$ avec la mesure $y(t) = \overline{c}x(t)$ et la commande $u(t) = ky(t)$. On obtient l'équation différentielle scalaire
$\mathrm{d}x(t) = \left(\overline{a}x(t) + \overline{b}k\overline{c}x^2(t)\right)\mathrm{d}t = \left(ax(t) + bx^2(t)\right)\mathrm{d}t$ (avec $f(x(t)) = ax(t) + bx^2(t)$ et $g(x(t)) = 0$) qui a pour solution

$$x(t) = \frac{x_0 a e^{at}}{a - x_0 b\,(e^{at} - 1)}.$$

L'équation différentielle $\mathrm{d}x(t) = \left(ax(t) + bx^2(t)\right)\mathrm{d}t$ ne vérifie pas (1.16) et, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$, il n'y a pas de solution définie $\forall\, t \geqslant 0$ car $x(t)$ explose pour $t = t_s > 0$ où

$$t_s = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{x_0 b} + 1\right)$$

avec $t_s > 0$ si $-bx_0 < a < 0$ ou si $a > 0$ et $bx_0 > 0$.

Exemple 3 : [Øks03] L'équation différentielle $\mathrm{d}x(t) = 3x^{2/3}(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $f(x(t)) = 3x^{2/3}(t)$ et $g(x(t)) = 0$) a une infinité de solutions $\forall\, a > 0$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \leqslant a \\ (t-a)^3 & \text{pour} \quad t > a \end{cases}$$

et vérifie (1.16) (car l'expression $3x^{2/3}(t)$ est bornée pour $x > 0$), mais ne vérifie pas (1.17).

Les conditions d'existence et d'unicité données dans le théorème 1.4.3 peuvent être relaxées comme suit.

Théorème 1.4.4 (Existence et unicité). *[Mao97] Si*

$$\exists k > 0 \text{ tel que } x(t)^T f(x(t)) + \frac{1}{2}\left\|g(x(t))\right\|^2 \leqslant k(1 + \|x(t)\|^2) \tag{1.23}$$

$$\forall\, n \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N},\ \exists\, k_{2_n} > 0 \text{ tel que } \forall\, x(t) \in \mathbb{R}^n, \forall\, y(t) \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \|x(t)\| \vee \|y(t)\| \leqslant n$$

$$\left\|f(x(t)) - f(y(t))\right\|^2 \vee \left\|g(x(t)) - g(y(t))\right\|^2 \leqslant k_{2_n}\left\|x(t) - y(t)\right\|^2 \tag{1.24}$$

alors il existe une solution unique à l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w. \tag{1.25}$$

Les relations entre les théorèmes 1.4.3 et 1.4.4 sont résumées comme suit.

- **La condition (1.16) implique la condition (1.23).** Dans [Mao97], il est montré que pour k_1 satisfaisant (1.20), alors la condition (1.23) est vérifiée avec $k = \sqrt{k_1} + 0.5k_1$.
- **La condition (1.23) n'implique pas la condition (1.16).** Dans [Mao97], il est montré que l'EDS scalaire
$$\mathrm{d}x(t) = (x(t) - x^3(t))\,\mathrm{d}t + x^2(t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{1.26}$$
satisfait la condition (1.23), mais pas la condition (1.20).
- **La condition (1.17) implique la condition (1.24).** Si la condition (1.22) est satisfaite avec k_2, alors la condition (1.24) est vérifiée avec $k_{2_n} = k_2$, $\forall\, n \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$.
- **La condition (1.24) implique la condition (1.17).** Dans [Mao97], il est montré que l'EDS scalaire (1.26) satisfait la condition (1.24), mais pas la condition (1.22).

1.4.5 Discrétisation et simulation des équations différentielles stochastiques

1.4.5.1 Discrétisation d'un mouvement brownien

Soit N le nombre d'échantillons, l'instant initial $t_0 = 0$ et t_f l'instant final. Le numéro de l'échantillon est k avec $\min(k) = 0$. Le pas d'échantillonnage est $\delta t = \dfrac{t_f}{N}$. En utilisant les propriétés d'un mouvement brownien données dans la section 1.3, la simulation de ce dernier est obtenue par la récurrence suivante [Hig01, HK02, Gee03b, Gee03a, Vio10]

$$\Delta w_k = w_{k+1} - w_k = \overline{w}_k\sqrt{\delta t} \tag{1.27}$$

où δt et Δw_k remplacent respectivement $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}w(t)$ et où $\overline{w}_k$ est un processus gaussien discret centré et réduit

La figure 1.1 représente 6 mouvements browniens scalaires indépendants centrés.

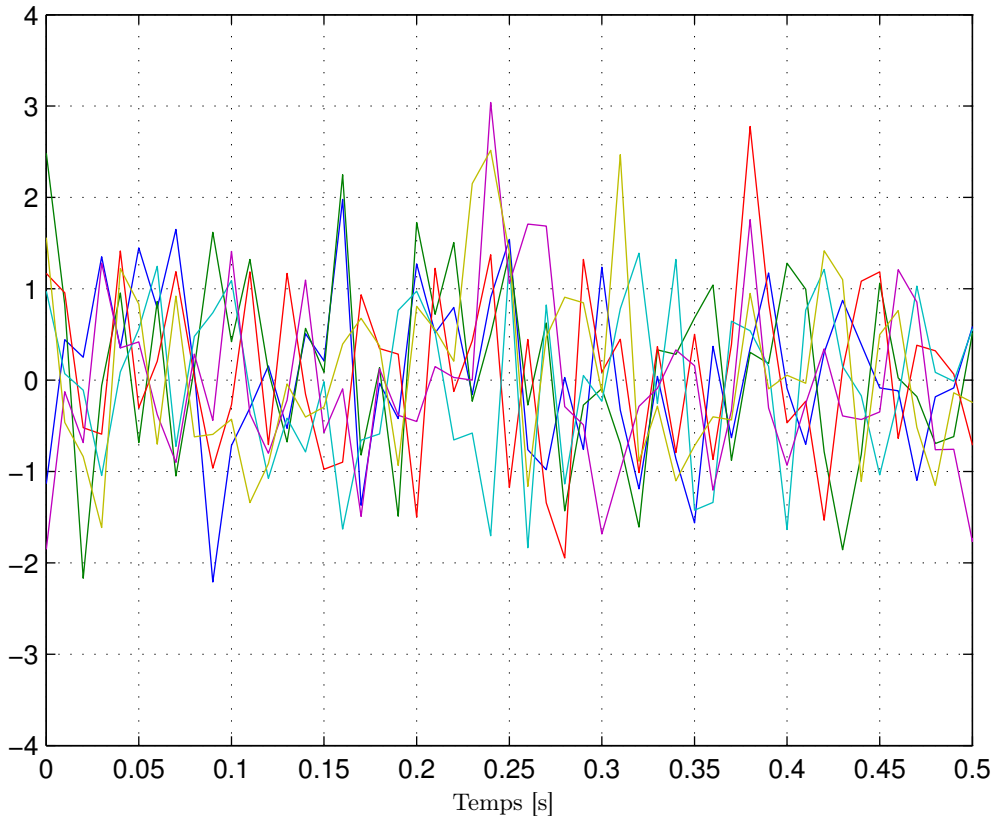


FIGURE 1.1 – Trajectoires de 6 mouvements browniens scalaires indépendants centrés.

On peut faire les remarques suivantes avec la figure 1.1.

- Les mouvements browniens sont à accroissements indépendants et sont aléatoires : les valeurs obtenues sont réparties de manière totalement erratiques. Ces valeurs pourront être très espacées les unes des autres ou très proches, voire identiques.
- Il est impossible d'assigner une tangente en un point sur une des 6 trajectoires car elles changent trop rapidement de direction de façon erratique : quelle que soit l'échelle d'observation, le mouvement brownien ne s'arrête jamais.
- Un bruit blanc est la "dérivée" d'un processus de Wiener.

1.4.5.2 Discrétisation explicite d'une équation différentielle stochastique : schéma numérique d'Euler-Maruyama

On considère l'EDS (1.6) et on pose $x_k = x(k\delta t)$, $w_k = w(k\delta t)$ et $\Delta w_k = w_{k+1} - w_k$ (voir relation (1.27)).

Le schéma de discrétisation de l'EDS (1.6) est explicite si

$$x_{k+1} = x_k + \text{fct}(x_k, \delta t, \Delta w_k) \tag{1.28}$$

et est implicite si (on parle aussi, dans certains cas, de méthode θ)

$$x_{k+1} = x_k + \theta f(x_{k+1})\delta t + \text{fct}(x_k, \delta t, \Delta w_k, \theta) \tag{1.29}$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Le choix de la fonction "$\text{fct}(x_k, \delta t, \Delta w_k)$" ou "$\text{fct}(x_k, \delta t, \Delta w_k, \theta)$" caractérise chaque schéma de discrétisation.

Remarque 1.4.1. (Discrétisation d'une EDS avec un schéma numérique implicite). A chaque instant k, le schéma numérique implicite (1.29) peut se réécrire ainsi

$$b = a + \theta f(b)\delta t. \tag{1.30}$$

L'équation implicite (1.30) a une solution unique b pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ si [HMS02, HMS03]

$$\theta k_f \delta t < 1 \tag{1.31}$$

où k_f est la constante de Lipschitz de la fonction $f(x(t))$.

Il faut donc, à chaque période d'échantillonnage, que la condition (1.31) soit vérifiée et que la solution b de l'équation soit calculée. Les schémas numériques implicites sont donc très difficiles à mettre en œuvre et nécessitent des volumes de calcul importants. □

En s'appuyant sur les travaux décrits dans [LP87, SM96, Hig01, HK02, Gee03b, Gee03a, Lem09, Pal09, Vio10, Sau10, HMS02, HMS03], de nombreux schémas de discrétisation explicites et implicites ont été testés. Ils ont tous donnés les mêmes résultats numériques. C'est pourquoi, dans la suite de ce mémoire, c'est le schéma numérique d'Euler-Maruyama (explicite) qui a été retenu car c'est le plus simple à mettre en œuvre et car il requiert peu de volumes de calcul.

Pour l'EDS (1.6), le schéma numérique d'Euler-Maruyama est donné par [LP87, SM96, Hig01, HK02, Gee03b, Gee03a, Lem09, Pal09, Vio10, Sau10]

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k)\delta t + g(x_k)\Delta w_k \tag{1.32}$$

où $\text{fct}(x_k, \delta t, \Delta w_k) = f(x_k)\delta t + g(x_k)\Delta w_k$ (voir (1.28)).

Exemple de simulation : Le schéma numérique d'Euler-Maruyama appliqué à l'EDS

$$\mathrm{d}x(t) = A_t x(t)\,\mathrm{d}t + A_w x(t)\,\mathrm{d}w(t)$$

avec

$$A_t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3.5 & 0 \\ -1 & -1 & -0.3 \end{bmatrix}, \qquad A_w = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \\ 0.5 & 0.4 & -0.1 \end{bmatrix},$$

a donné, pour chacun des 6 mouvements browniens décrits dans la figure 1.1, les réponses suivantes pour les trois états de l'EDS.

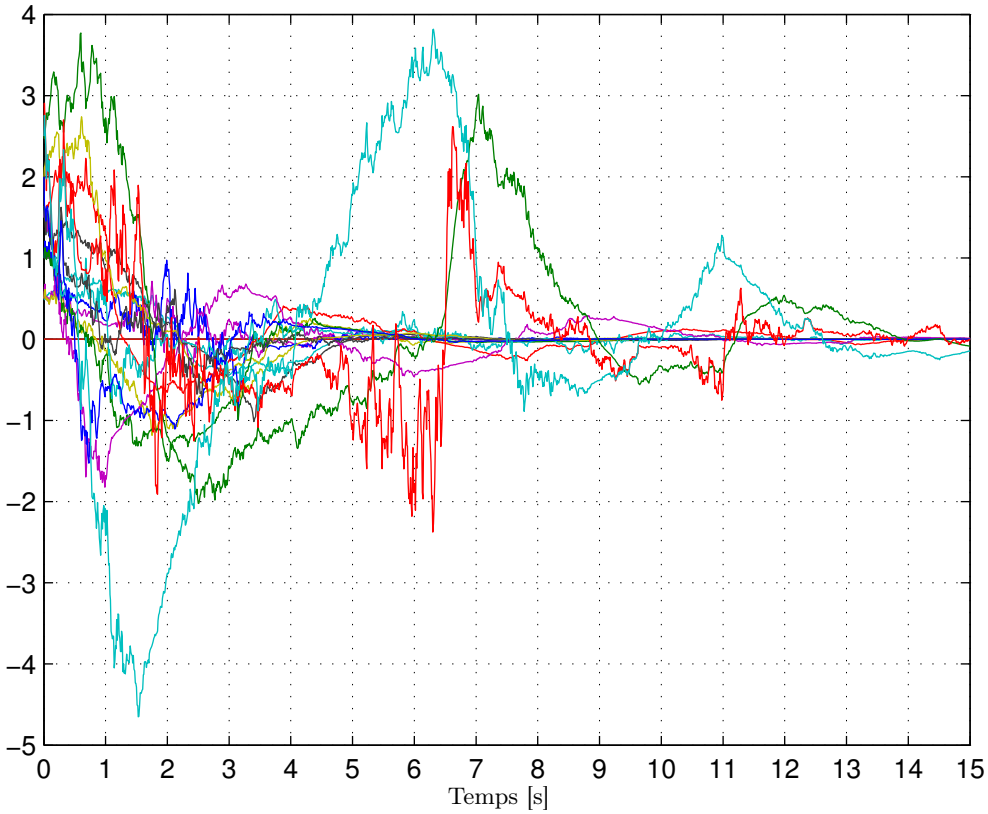


FIGURE 1.2 – Application du schéma numérique d'Euler-Maruyama avec 6 mouvements browniens différents.

Dans la figure 1.2, on constate que les trajectoires de la solution de l'EDS varient pour chaque mouvement brownien, ce qui illustre le caractère aléatoire des réponses obtenues.

1.5 Stabilité des équations différentielles stochastiques

Dans cette section, on considère l'EDS (1.6) et que la solution triviale $x(t)$ est un point d'équilibre de cette EDS, c'est-à-dire que $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. L'état initial est $x(0) = x_0$ et l'instant initial est $t_0 = 0$. On pose $w(0) = 0$.

1.5.1 Définitions de la stabilité des processus stochastiques

Avant de donner différentes définitions de la stabilité du point d'équilibre $x(t) = 0$ pour l'EDS (1.6), on va présenter les exposants de Lyapunov. La solution de l'EDS (1.6) vérifie

$$\|x(t)\| \leqslant \eta(x_0)\psi^{-\alpha}(t) \qquad \text{p.s.} \tag{1.33}$$

si et seulement si [Mao97]

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\|x(t)\|)}{\ln(\psi(t))} \leqslant -\alpha \qquad \text{p.s.,} \tag{1.34}$$

où $\alpha > 0$, $\eta(x_0) \in \mathbb{R}$, $\eta(x_0) > 0$ et $\psi(t)$ est une fonction croissante de $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$.

L'expression $\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\|x(t)\|)}{\ln(\psi(t))}$ est un exposant de Lyapunov généralisé.

Si $\psi(t) = e^t$, on obtient la stabilité exponentielle presque sûre car $\psi^{-\alpha}(t) = e^{-\alpha t}$. Puisque $\ln(\psi(t)) = \ln(e^t) = t$, on obtient l'exposant de Lyapunov "standard" $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|)$ [Mao97, HM08].

Si $\psi(t) = t$, on obtient la stabilité polynômiale presque sûre avec $\|x(t)\| \leqslant \eta(x_0)t^{-\alpha}$ et $\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\|x(t)\|)}{\ln(t)} \leqslant -\alpha$ [Mao92a, Mao94a, Mao97, Liu97].

Les principales notions de stabilité associée à l'EDS (1.6) sont présentées ci-dessous. On commence par la stabilité en probabilité.

Définition 1.5.1 (**Stabilité en probabilité**). *[Mao97] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est stable en probabilité si, pour toute paire $\delta \in [\,0 \;\; 1\,]$ et $r > 0$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta, r) > 0$ tel que*

$$\mathbf{P}\{\|x(t)\| < r,\ \forall\, t \geqslant 0\} \geqslant 1 - \delta, \quad \forall\, \|x_0\| < \varepsilon. \tag{1.35}$$

La version de la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov est donnée par la définition suivante.

Définition 1.5.2 (**Stabilité asymptotique en probabilité**). *[Mao97] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est asymptotiquement stable en probabilité s'il est stable en probabilité et si, pour tout $\delta \in [\,0 \;\; 1\,]$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ tel que*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0\right\} \geqslant 1 - \delta, \quad \forall\, \|x_0\| < \varepsilon. \tag{1.36}$$

Il existe aussi un autre type de stabilité asymptotique donnée par la définition suivante.

Définition 1.5.3 (**Stabilité asymptotique en probabilité au sens large**). *[Mao97] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est asymptotiquement stable en probabilité au sens large s'il est stable en probabilité et si*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0\right\} = 1, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.37}$$

La stabilité exponentielle presque sûre est donnée par la définition suivante.

Définition 1.5.4 (**Stabilité exponentielle presque sûre**). *[Mao97, HM08] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est exponentiellement presque sûrement stable s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) < -\alpha < 0 \qquad p.s. \tag{1.38}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, où $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|)$ est l'exposant de Lyapunov de la solution $x(t)$.

La relation (1.38) est équivalente à l'existence d'une constante $\alpha > 0$ et d'une variable aléatoire finie $M > 0$ (donc $M < +\infty$) dépendant de x_0 et de t_0 (avec $t \geqslant t_0$) telle que [Tin99]

$$\|x(t)\| \leqslant M \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad \text{p.s.} \tag{1.39}$$

Les trois définitions suivantes caractérisent la stabilité en moyenne quadratique.

Définition 1.5.5 (**Stabilité en moyenne quadratique**). *[Has12] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est stable en moyenne quadratique si, pour un $\delta > 0$ donné, il existe $\varepsilon(\delta) > 0$ tel que $\|x_0\| < \varepsilon$ implique*

$$\mathbf{E}\Big\{\sup_{t\geqslant 0}\|x(t)\|^2\Big\} < \delta. \tag{1.40}$$

Définition 1.5.6 (**Stabilité asymptotique en moyenne quadratique**). *[Has12] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est asymptotiquement stable en moyenne quadratique s'il existe ε*

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(\mathbf{E}\Big\{\|x(t)\|^2\Big\}\Big) = 0, \quad \forall\, \|x_0\| < \varepsilon. \tag{1.41}$$

Définition 1.5.7 (**Stabilité exponentielle en moyenne quadratique**). *[Mao97] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est exponentiellement stable en moyenne quadratique s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux constantes $c > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\|x_0\| < \varepsilon$ implique pour tout $t \geqslant 0$*

$$\mathbf{E}\Big\{\|x(t)\|^2\Big\} \leqslant c\,\|x_0\|^2\, e^{-\beta t}. \tag{1.42}$$

La relation (1.42) est équivalente à [Mao97, HM08]

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\Big(\mathbf{E}\Big\{\|x(t)\|^2\Big\}\Big) < -\beta < 0. \tag{1.43}$$

Dans la suite, par abus de langage, on parle de la "stabilité du système" ou de la "stabilité de l'EDS" pour la "stabilité du point d'origine".

Remarque 1.5.1. Si dans les équations (1.40), (1.41), (1.42) et (1.43), on remplace la puissance "2" par la puissance "p" où $p \geqslant 1$ est un nombre entier, alors la stabilité est celle du moment d'ordre p. □

La définition suivante ne correspond pas à la stabilité, mais à une propriété "moins contraignante" qui est la bornitude, bien que dans [TR76], les auteurs parlent improprement de stabilité asymptotique en moyenne quadratique.

Définition 1.5.8 (**Bornitude exponentielle en moyenne quadratique**). *[TR76] (définition 1) Un processus stochastique $x(t)$ est exponentiellement borné en moyenne quadratique s'il existe des constantes $\alpha > 0$, $k_1 \geqslant 0$ et $k_2 \geqslant 0$ telles pour tout $t \geqslant 0$*

$$\mathbf{E}\Big\{\|x(t)\|^2\Big\} \leqslant k_1 + k_2 e^{-\alpha t}. \tag{1.44}$$

La relation (1.44) n'implique pas que $\mathbf{E}\left\{\|x(t)\|^2\right\}$ décroît pour tout $t \geqslant 0$, mais que sa borne décroît exponentiellement quand t tend vers $+\infty$ et que la moyenne quadratique du processus stochastique est bornée par

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{E}\Big\{\|x(t)\|^2\Big\} \leqslant k_1$$

où k_1 dépend du bruit perturbant le système. Si $k_1 = 0$, alors $x(t)$ converge vers 0 exponentiellement en moyenne quadratique car on a alors

$$\mathbf{E}\Big\{\|x(t)\|^2\Big\} \leqslant k_2 e^{-\alpha t}.$$

1.5.2 Théorèmes pour la stabilité des systèmes stochastiques

Dans cette section, on considère l'EDS (1.6).

L'application de la formule d'Itô (1.11) sur la fonction de Lyapunov stochastique $V(x(t)) > 0$ donne

$$\mathrm{d}V(t,x(t)) = \mathfrak{L}V(t,x(t))\,\mathrm{d}t + \mathfrak{B}(V(t,x(t)))\,\mathrm{d}w(t), \tag{1.45}$$

$$\mathfrak{L}V(t,x(t)) = V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))f(x(t)) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(g^T(x(t))V_{xx}(t,x(t))g(x(t))\big), \tag{1.46}$$

$$\mathfrak{B}V(t,x(t)) = V_x(t,x(t))g(x(t)) \tag{1.47}$$

avec

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad V_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad V_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Les fonctions de Lyapunov $V(t,x(t))$ sont associées aux propriétés suivantes.

- Une fonction de Lyapunov $V(t,x(t))$ est définie positive ($V(t,x(t)) > 0$) si $V(t,x(t)) \geqslant \mu(\|x(t)\|)$, où $\mu(\boldsymbol{.})$ est une fonction de classe $\mathbf{K}$. Une fonction de classe $\mathbf{K}$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ qui ne s'annule qu'en zéro et qui est strictement croissante.
- Une fonction de Lyapunov $V(t,x(t))$ définie positive est "decrescent" si $V(t,x(t)) \leqslant \kappa(\|x(t)\|)$, où $\kappa(\boldsymbol{.})$ est une fonction de classe $\mathbf{K}$.
- Une fonction de Lyapunov $V(t,x(t))$ est radialement non bornée si $\lim\limits_{\|x(t)\|\to+\infty} V(t,x(t)) = +\infty$,

Les définitions précédentes de stabilité et de bornitude stochastiques se traduisent avec des critères sur $\mathfrak{L}V(t,x(t))$ ou sur $\mathfrak{L}V(t,x(t))$ et $\mathfrak{B}V(t,x(t))$.

On obtient des conditions de stabilité qui sont suffisantes, mais pas nécessaires : si on ne trouve pas de fonction de Lyapunov vérifiant les conditions données dans les théorèmes ci-dessous, on ne peut pas conclure sur la stabilité.

Théorème 1.5.1 (**Stabilité en probabilité**). *[Mao97] Le point d'équilibre $x = 0$ est stable en probabilité s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive $V(t,x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que*

$$\mathfrak{L}V(t,x(t)) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \neq 0. \tag{1.48}$$

Théorème 1.5.2 (**Stabilité asymptotique en probabilité**). *[Mao97] Le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est asymptotiquement stable en probabilité s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive et "decrescent" $V(t,x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que*

$$\mathfrak{L}V(t,x(t)) < 0 \qquad \forall\, x \neq 0. \tag{1.49}$$

Si, dans le théorème 1.5.2, la fonction de Lyapunov $V(t,x(t))$ est aussi radialement non bornée, alors le point d'équilibre $x(t) = 0$ est asymptotiquement stable en probabilité au sens large [Mao97].

Théorème 1.5.3 (**Stabilité exponentielle presque sûre**). *[Mao97, HM08] S'il existe une fonction de Lyapunov définie positive $V(t,x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et des constantes $p>0$, $c_1>0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ et $c_3 \geqslant 0$ telles que, si $\forall\, x \neq 0$ et $\forall\, t \geqslant 0$ ($g(t,x)$ est la diffusion)*

$$c_1\|x(t)\|^p \;\leqslant\; V(t,x(t)) \tag{1.50a}$$

$$\mathfrak{L}V(t,x(t)) \leqslant c_2 V(t,x(t)) \tag{1.50b}$$

$$\|\mathfrak{B}V(t,x(t))\|^2 \geqslant c_3 V^2(t,x(t)) \tag{1.50c}$$

alors

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln(\|x(t,x_0,t_0)\|) \leqslant \frac{2c_2-c_3}{2p} \qquad p.s. \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.51}$$

et le point d'équilibre $x(t)=0$ de l'EDS (1.6) est exponentiellement presque sûrement stable si

$$c_3 > 2c_2 \tag{1.52}$$

Théorème 1.5.4 (**Stabilité exponentielle en moyenne quadratique**). *[Mao97] Le point d'équilibre $x(t)=0$ de l'EDS (1.6) est exponentiellement stable en moyenne quadratique s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive $V(t,x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et des constantes $c_0>0$, $c_1>0$ et $c_2<0$ telles que, si*

$$c_1\|x(t)\|^2 \leqslant V(t,x(t)) \leqslant c_0\|x(t)\|^2 \quad et \quad \mathfrak{L}V(t,x(t)) \leqslant c_2 V(t,x(t)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.53}$$

alors

$$\mathbf{E}\left\{\|x(t,x_0,t_0)\|^2\right\} \leqslant \frac{c_0}{c_1}\|x_0\|^2 e^{c_2(t-t_0)} \qquad \forall\, t \geqslant t_0, \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.54}$$

Remarque 1.5.2. (Stabilité exponentielle en moyenne quadratique : cas linéaire). [Dam04] Si $f(x(t)) = Ax(t)$ et $g(x(t)) = \sum_{i=0}^{d} A_{w_i}x(t)$ dans l'EDS (1.6), alors les conditions énoncées dans le théorème 1.5.4 sont nécesssaires et suffisantes pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre $x(t)=0$. □

Remarque 1.5.3. Si dans les équations (1.53) et (1.54), on remplace la puissance "2" par la puissance "p" où $p \geqslant 1$ est un nombre entier, alors la stabilité est celle du moment d'ordre p. □

Théorème 1.5.5 (**Bornitude exponentielle en moyenne quadratique**). *[TR76] Soit un processus stochastique $x(t)$ dont la dérive $f(x(t))$ et la diffusion $g(x(t))$ sont continues satisfaisant (1.16) et (1.17). Soit une fonction de Lyapunov définie positive $V(x(t)) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ telle que (avec $\mathbf{E}_a\{f(x(t))\} = \mathbf{E}\{f(x(t))\}\,|_{x_0=a}$))*

$$\mathbf{E}_a\{V(x(t))\}, \mathbf{E}_a\{|\mathfrak{L}V(x(t))|\} \;\; et \;\; \mathbf{E}_a\left\{\left|\frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i}\sigma_{ij}(x)\right|^2\right\}. \tag{1.55}$$

soient bornées en t pour tout intervalle borné de t. S'il existe des constantes $c>0$, $\alpha>0$ et $k \geqslant 0$ telles que

$$V(x(t)) \geqslant c\|x(t)\|^2 \tag{1.56}$$

$$\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant k - \alpha V(x(t)) \qquad \forall\, t>0, \tag{1.57}$$

alors

$$c\mathbf{E}_a\left\{\|x(t)\|^2\right\} \leqslant V(a)e^{-\alpha t} + \frac{k}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right). \tag{1.58}$$

L'inégalité (1.58) du théorème 1.5.5 donne $k_1 = \dfrac{k}{c\alpha} \geqslant 0$ et $k_2 = \dfrac{\alpha V(a)-k}{c\alpha} \geqslant 0$ pour l'inégalité (1.44) de la définition 1.5.8 et on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{E}\left\{\|x(t)\|^2\right\} \leqslant \dfrac{k}{c\alpha}$.

1.5.3 Relations entre la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique

1.5.3.1 Discussion à partir des conditions sur les fonctions de Lyapunov

Les conditions données par le théorème 1.5.4 impliquent celles exposées au théorème 1.5.3, mais la réciproque est fausse. Ainsi, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ garantissant que le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) est exponentiellement stable en moyenne quadratique, alors cette fonction de Lyapunov permet aussi de montrer que ce point d'équlibre est exponentiellement presque sûrement stable :

- c_1 dans (1.50a) correspond à c_1 dans (1.53),
- $p = 2$ dans (1.50a),
- c_2 dans (1.50b) correspond à c_2 dans (1.53),
- $c_3 = 0$ dans (1.50c),
- c_0 dans (1.53) n'existe pas dans le théorème 1.5.3 : la fonction de Lyapunov doit être "decrescent" dans le théorème 1.5.4, ce qui n'est pas requis dans le théorème 1.5.3.

La différence importante entre les théorèmes 1.5.3 et 1.5.4 tient à la façon dont le bruit intervient, c'est-à-dire à la manière dont la dérive $g(x)$ intervient dans les conditions données par ces deux théorèmes.

Dans le théorème 1.5.4 relatif à la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, le bruit a un effet "déstabilisant" car $\frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(g^T(x(t))V_{xx}(x(t))g(x(t))\big) \geqslant 0$. Donc, pour que $\mathfrak{L}V(x(t)) < 0$, il faut que $V_x(x(t))f(x(t)) < 0$, c'est-à-dire que l'EDO

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t \tag{1.59}$$

soit exponentiellement stable.

Dans le théorème 1.5.3 relatif à la stabilité exponentielle presque sûre, si la condition $\mathfrak{L}V(x(t)) < 0$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si $\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant c_2V(x(t))$ avec $c_2 > 0$, le bruit peut permettre d'obtenir la stabilité exponentielle presque sûre si

$$c_3 > 2c_2$$

avec $\|\mathfrak{B}V(x(t))\|^2 \geqslant c_3V^2(x(t))$. Ainsi, le bruit peut avoir un effet stabilisant ou déstabilisant dans le cas de la stabilité exponentielle presque sûre, que le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDO (1.59) soit stable ou instable (voir section 1.5.4).

L'avantage de la stabilité exponentielle presque sûre sur les autres types de stabilité est qu'elle autorise $\mathfrak{L}V(x(t)) \geqslant 0$ car elle ajoute une condition sur $\mathfrak{B}V(x(t))$ (théorème 1.5.3).

Généralement, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique n'implique pas la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle presque sûre n'implique pas la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Cependant, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique implique la stabilité exponentielle presque sûre si on ajoute des conditions supplémentaires comme le montrent les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.5.6. *[Mao97] S'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$x^T(t)f(x(t)) \vee \|g(x(t))\|^2 \leqslant k\,\|x(t)\|^2\,, \tag{1.60}$$

alors la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) implique la stabilité exponentielle presque sûre.

Théorème 1.5.7. *[Mao97] Pour le système*

$$\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d} B_i x(t)\,\mathrm{d}w_i(t), \tag{1.61}$$

la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.6) implique la stabilité exponentielle presque sûre.

Les théorèmes 1.5.6 et 1.5.7 sont vrais si on remplace la stabilité exponentielle en moyenne quadratique (c'est-à-dire la stabilité exponentielle du moment d'ordre 2) par la stabilité exponentielle du moment d'ordre p.

Les conditions d'existence et d'unicité données dans le théorème 1.4.4 ne garantissent pas que l'inégalité (1.60) soit satisfaite [Mao97].

Au vu des développements ci-dessus, on peut conclure que, pour une "grande classe d'EDS", la stabilité exponentielle presque sûre est "moins contraignante" que la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Bien que, dans la littérature, ce soit la stabilité exponentielle en moyenne quadratique qui est très majoritairement utilisée, un des objectifs de ce mémoire est de proposer une approche pour la synthèse d'observateurs qui est basée sur une notion de stabilité moins contraignante : la stabilité exponentielle presque sûre. Cette stabilité est peu étudiée dans la littérature pour la synthèse d'observateurs et la stabilisation avec une loi de commande.

Dans les sections 1.5.3.2, 1.5.3.3 et 1.5.3.4, on va illustrer ces analyses à propos des relations entre la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Avec deux exemples simples (sections 1.5.3.2, 1.5.3.3), on va montrer que, selon la façon dont le bruit intervient, le point d'équilibre d'une EDS peut être stable ou instable selon le type de stabilité considéré. La section 1.5.3.4 présente un exemple où une fonction de Lyapunov quadratique ne peut pas être utilisée pour étudier la stabilité exponentielle presque sûre, alors que cette classe de fonctions de Lyapunov permet d'étudier la stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

1.5.3.2 Cas des équations différentielles scalaires

Dans cette section, on considère l'EDS avec un bruit multiplicatif suivante

$$\mathrm{d}x(t) = \alpha x(t)\,\mathrm{d}t + \sigma x(t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{1.62}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}$, $w(t) \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$.

Cette EDS peut se récrire comme suit avec $w(0) = 0$ et $x(t) \neq 0$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^t \alpha\,\mathrm{d}t + \int_0^t \sigma\,\mathrm{d}w = \alpha t + \sigma w(t). \tag{1.63}$$

On applique les formules d'Itô (1.11), (1.12) et (1.13) avec $\Phi(t,x) = \ln(x)$ sur l'EDS (1.62) (on a donc $f = \alpha x$ et $g = \sigma x$), ce qui donne (avec $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \alpha\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}w$)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi(t,x) &= \left(\Phi_t(t,x) + \Phi_x(t,x)f(t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(g(t)^T\Phi_{xx}(t,x)g(t)\big)\right)\mathrm{d}t + \Phi_x(t,x)g(t)\,\mathrm{d}w \\ &= \left(0 + \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\ln(x).\end{aligned} \tag{1.64}$$

En intégrant la relation (1.64), on obtient

$$\ln(x) = \int_0^t \mathrm{d}\ln(x) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2}\,\mathrm{d}t = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma w(t)$$

et la solution $x(t)$ de l'EDS (1.62) est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)}. \tag{1.65}$$

En suivant l'approche développée dans [Mao97], on va calculer $\mathbf{E}\{|x(t)|^2\}$ comme suit. La solution $x(t)$ (1.65) permet d'exprimer $\mathbf{E}\{|x(t)|^2\}$

$$\mathbf{E}\{|x(t)|^2\} = \mathbf{E}\left\{x_0^2 e^{2\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + 2\sigma w(t)}\right\} = e^{(2\alpha+\sigma^2)t}\mathbf{E}\left\{x_0^2 e^{-2\sigma^2 t + 2\sigma w(t)}\right\}. \tag{1.66}$$

Soit $y(t) = |x_0|^2\, e^{-2\sigma^2 t + 2\sigma w(t)}$. Si on compare $x(t)$ à $y(t)$, alors $y(t)$ est la solution de l'EDS (1.62) avec $\alpha = 0$ et σ remplacé par 2σ, c'est-à-dire de l'EDS

$$\mathrm{d}y(t) = 2\sigma y(t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{1.67}$$

qui, avec $y(0) = |x_0|^2$, est équivalente à (voir section 1.4.1)

$$y(t) = |x_0|^2 + 2\sigma \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}w(s). \tag{1.68}$$

En utilisant la relation (1.10a), on obtient $\mathbf{E}\{|y(t)|^2\} = \mathbf{E}\{|x_0|^2\}$. En introduisant ce résultat dans la relation (1.66), on obtient l'espérance quadratique de la solution $x(t)$

$$\mathbf{E}\{|x(t)|^2\} = e^{(2\alpha+\sigma^2)t}\mathbf{E}\{|x_0|^2\}. \tag{1.69}$$

Le comportement à l'infini de $x(t)$ dépend du signe de $\alpha - \frac{\sigma^2}{2}$ car le terme dominant dans l'exponentiel est t puisque $w(t)$ varie comme $\sqrt{t}$ car $\mathbf{E}\{\mathrm{d}w(t)\,\mathrm{d}w(t)\} = \mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{w(t)}{t} = 0$ (voir la section 1.3 sur le mouvement brownien).

Ainsi le bruit multiplicatif agit sur la stabilité car

(i) si $2\alpha > \sigma^2$ alors $|x(t)| \to +\infty$ p.s. quand $t \to +\infty$,
- instable en probabilité,
- instable asymptotiquement en probabilité,
- instable asymptotiquement en probabilité au sens large,
- instable exponentiellement presque sûrement,

(ii) si $2\alpha < \sigma^2$ alors $x(t) \to 0$ p.s. quand $t \to +\infty$,
- stable en probabilité,
- stable asymptotiquement en probabilité,
- stable asymptotiquement en probabilité au sens large,
- stable exponentiellement presque sûrement,

(iii) si $2\alpha = \sigma^2$ alors $x(t)$ va fluctuer suivant les variations du bruit avec $\limsup\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = \infty$ et $\liminf\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$ p.s.
- instable en probabilité,
- instable asymptotiquement en probabilité,

- instable asymptotiquement en probabilité au sens large,
- instable exponentiellement presque sûrement.

Ainsi, selon la valeur de $|\sigma|$, le mouvement brownien $w(t)$ peut stabiliser ou déstabiliser $x(t)$ même si $\alpha > 0$, donc même si l'EDO $\mathrm{d}x(t) = \alpha x(t)\,\mathrm{d}t$ est instable (voir section 1.5.4).

Pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, on a les conditions suivantes

(i) si $2\alpha < -\sigma^2 < 0$ alors $\mathbf{E}\{|x(t)|^2\} \to 0$ quand $t \to +\infty$,
- stable en moyenne quadratique,
- stable asymptotiquement en moyenne quadratique,
- stable exponentiellement en moyenne quadratique,

(ii) si $2\alpha \geqslant \sigma^2$ alors $\mathbf{E}\{|x(t)|^2\} \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.
- instable en moyenne quadratique,
- instable asymptotiquement en moyenne quadratique,
- instable exponentiellement en moyenne quadratique.

Le bruit a un effet déstabilisant au sens de la moyenne quadratique car, même si l'EDO $\mathrm{d}x(t) = \alpha x(t)\,\mathrm{d}t$ est stable, c'est-à-dire si $\alpha < 0$, une grande valeur de $|\sigma|$ peut générer $2\alpha + \sigma^2 \geqslant 0$. De plus, la stabilité de l'EDO $\mathrm{d}x(t) = \alpha x(t)\,\mathrm{d}t$ est une condition nécessaire à la stabilité exponentielle en moyenne quadratique pour l'EDS (1.62), ce qui est en accord avec la remarque 1.5.2.

Pour illustrer cette discussion, on choisit trois cas pour l'EDS (1.62)

(1) $\alpha = \alpha_1 = 0.2$ et $\sigma = 1$,
- exposant de Lyapunov (1.38) égal à $\rho_1 = \alpha_1 - 0.5\sigma^2 = -0.3 < 0 \longrightarrow$ stabilité exponentielle presque sûre,
- exposant de Lyapunov (1.43) égal à $\mu_1 = 2\alpha_1 + \sigma^2 = 1.4 > 0 \longrightarrow$ instabilité exponentielle en moyenne quadratique,

(2) $\alpha = \alpha_2 = -0.52$ et $\sigma = 1$,
- exposant de Lyapunov (1.38) égal à $\rho_2 = \alpha_2 - 0.5\sigma^2 = -1.02 < 0 \longrightarrow$ stabilité exponentielle presque sûre,
- exposant de Lyapunov (1.43) égal à $\mu_2 = 2\alpha_2 + \sigma^2 = -0.04 < 0 \longrightarrow$ stabilité exponentielle en moyenne quadratique,

(3) $\alpha = \alpha_3 = 0.51$ et $\sigma = 1$,
- exposant de Lyapunov (1.38) égal à $\rho_3 = \alpha_3 - 0.5\sigma^2 = 0.01 > 0 \longrightarrow$ instabilité exponentielle presque sûre,
- exposant de Lyapunov (1.43) égal à $\mu_3 = 2\alpha_3 + \sigma^2 = 2.02 > 0 \longrightarrow$ instabilité exponentielle en moyenne quadratique.

Les réponses obtenues sont montrées dans la figure 1.3 avec $x_0 = 2$.

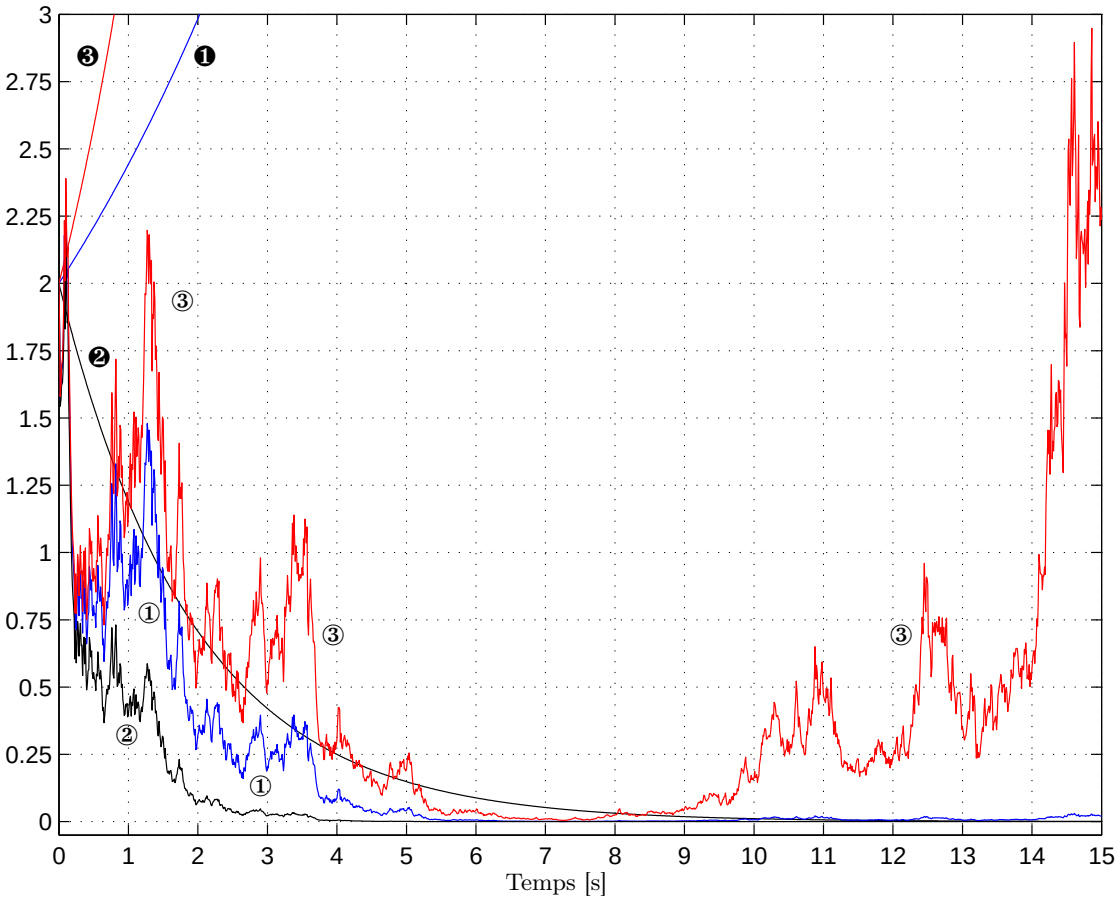


FIGURE 1.3 – Réponse pour l'EDS (1.62) avec trois valeurs de α.

Dans la figure 1.3, le cas (1) correspondant à $\alpha = \alpha_1 = 0.2$ et $\sigma = 1$ donne la courbe bleue avec ①, le cas (2) correspondant à $\alpha = \alpha_2 = -0.52$ et $\sigma = 1$ donne la courbe noire avec ② et le cas (3) correspondant à $\alpha = \alpha_3 = 0.51$ et $\sigma = 1$ donne la courbe rouge avec ③. Les courbes ❶ (bleue), ❷ (noire) et ❸ (rouge) correspondent respectivement aux réponses obtenues avec les EDO $\mathrm{d}x(t) = \alpha_i x(t)\,\mathrm{d}t$ où $i = 1, 2, 3$.

La condition $\alpha - 0.5\sigma^2 < 0$ est vérifiée pour les réponses ① et ② : on a la stabilité exponentielle presque sûre. Les courbes bleue ① et noire ② convergent exponentiellement vers 0.

La condition $\alpha - 0.5\sigma^2 < 0$ n'est pas vérifiée pour la réponse ③ : on n'a pas la stabilité exponentielle presque sûre. La courbe rouge ③ diverge vers $+\infty$.

L'exposant de Lyapunov (1.38) est un indicateur du taux de décroissance exponentielle d'une trajectoire (voir relations (1.33) et (1.34)). L'exposant de Lyapunov ρ_2 dans le cas (2) a une valeur absolue plus grande que celle de l'exposant de Lyapunov ρ_1 dans le cas (1) : $\rho_2 < \rho_1$, $|\rho_2| > |\rho_1|$ et la courbe noire ② converge plus vite que la courbe bleue ①.

L'EDO $\mathrm{d}x(t) = \alpha_1 x(t)\,\mathrm{d}t$ est instable (courbe bleue ❶) alors que l'EDS $\mathrm{d}x(t) = \alpha_1 x(t)\,\mathrm{d}t + \sigma x(t)\,\mathrm{d}w$ est stable (courbe bleue ①). Ainsi le mouvement brownien $w(t)$ a un effet stabilisateur sur la réponse.

La convergence de la courbe noire ② est plus rapide que celle de la courbe noire ❷. Ainsi, bien que l'EDO $\mathrm{d}x(t) = \alpha_2 x(t)\,\mathrm{d}t$ est stable, le mouvement brownien $w(t)$ a permis d'accélerer la convergence de la réponse.

Dans le cas (2), on a la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et la stabilité exponentielle presque sûre (courbe noire ②), alors que dans le cas (1) (courbe bleue ①) on a la stabilité exponentielle presque sûre, mais pas la stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

On constate que la stabilité exponentielle en moyenne quadratique permet de "diminuer" le caractère erratique dans la réponse.

1.5.3.3 Exemple illustratif

Dans cette section, on considère l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante

$$\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\,\mathrm{d}t + Bx(t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{1.70}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'état, $w(t) \in \mathbb{R}$ est un mouvement brownien centré, avec

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.71}$$

Puisque $AB = BA$, la solution de l'EDS (1.70) est donnée par [Mao97]

$$x(t) = \exp\left(\left(A - \frac{B^2}{2}\right)t + Bw(t)\right)x_0 = \exp\left(\begin{bmatrix} a - 0.5b^2 & 0 \\ 0 & a - 0.5b^2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} w(t)\right)x_0. \tag{1.72}$$

L'exposant de Lyapunov (1.38) est donné par

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) = a - 0.5b^2 \qquad \text{p.s.} \tag{1.73}$$

car $w(t)$ varie comme $\sqrt{t}$.

En utilisant la définition 1.5.4, la solution (1.72) est exponentiellement presque sûrement stable si et seulement si

$$2a < b^2. \tag{1.74}$$

Ainsi, si $0 \leqslant 2a < b^2$, la stabilité exponentielle presque sûre est vérifiée même si l'EDO $\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\,\mathrm{d}t$ est exponentiellement instable.

On va calculer l'espérance quadratique $\mathbf{E}\{x(t)x^T(t)\}$ de la solution $x(t)$ de l'EDS (1.70) en utilisant [Kle69, SW96].

Soit $Q(t) = \mathbf{E}\{x(t)x^T(t)\}$ et $Q_0 = \mathbf{E}\{x_0x_0^T\}$. $Q(t)$ est la solution de l'équation différentielle matricielle suivante

$$\dot{Q}(t) = AQ(t) + Q(t)A^T + BQ(t)B^T$$

qui est équivalente à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{vec}(Q(t)) = M\,\mathrm{vec}(Q(t))$$

avec (voir section A.4, annexe A)

$$M = A \otimes I_2 + I_2 \otimes A + B \otimes B.$$

La solutiont $Q(t)$ est donnée par

$$\mathrm{vec}(Q(t)) = e^{Mt}\,\mathrm{vec}(Q_0).$$

En utilisant les expressions littérales des matrices A et B, on obtient

$$M = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 2a & b^2 & 0 \\ 0 & b^2 & 2a & 0 \\ b^2 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix} = ZDZ^{-1}$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2a-b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b^2 \end{bmatrix}, Z^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= Ze^{Dt}Z^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(2a-b^2)t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2a-b^2)t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(2a+b^2)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(2a+b^2t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(t)+\beta(t) & 0 & 0 & \alpha(t)-\beta(t) \\ 0 & \alpha(t)+\beta(t) & \alpha(t)-\beta(t) & 0 \\ 0 & \alpha(t)-\beta(t) & \alpha(t)+\beta(t) & 0 \\ \alpha(t)-\beta(t) & 0 & 0 & \alpha(t)+\beta(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\alpha(t) = 0.5e^{(2a+b^2)t}$ et $\beta(t) = 0.5e^{(2a-b^2)t}$.

La solution $Q = \mathbf{E}\{x(t)x^T(t)\}$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} q_1(t) &= 0.5\left(e^{(2a+b^2)t} + e^{(2a-b^2)t}\right) q_{0_1} + 0.5\left(e^{(2a+b^2)t} - e^{(2a-b^2)t}\right) q_{0_3}, && \text{(1.75a)} \\ q_2(t) &= e^{(2a+b^2)t} q_{0_2}, && \text{(1.75b)} \\ q_3(t) &= 0.5\left(e^{(2a+b^2)t} - e^{(2a-b^2)t}\right) q_{0_1} + 0.5\left(e^{(2a+b^2)t} + e^{(2a-b^2)t)}\right) q_{0_3}, && \text{(1.75c)} \end{aligned}$$

avec

$$Q(t) = \mathbf{E}\{x(t)x^T(t)\} = \begin{bmatrix} q_1(t) & q_2(t) \\ q_2(t) & q_3(t) \end{bmatrix} > 0 \qquad \text{et} \qquad Q_0 = \mathbf{E}\{x_0 x_0^T\} = \begin{bmatrix} q_{0_1} & q_{0_2} \\ q_{0_2} & q_{0_3} \end{bmatrix} > 0. \quad (1.76)$$

Puisque $2a + b^2 \geqslant 2a - b^2$ et que $\|x(t)\|^2 = x^T(t)x(t) = \mathrm{tr}(x(t)x^T(t))$, les relations (1.75) et (1.76) donnent

$$\mathbf{E}\{\|x(t)\|^2\} = q_1(t) + q_3(t) = e^{(2a+b^2)t} \begin{bmatrix} q_{0_1} \\ q_{0_3} \end{bmatrix} = e^{(2a+b^2)t} \mathbf{E}\{\|x_0\|^2\}$$

et l'exposant de Lyapunov (1.43) est donné par

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\Big(\mathbf{E}\Big\{\|x(t)\|^2\Big\}\Big) = 2a + b^2. \tag{1.77}$$

En utilisant la définition 1.5.7, la solution (1.72) est exponentiellement stable en moyenne quadratique si et seulement si

$$2a < -b^2. \tag{1.78}$$

Ainsi, si $0 \geqslant 2a \geqslant -b^2$, l'EDO $\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\,\mathrm{d}t$ est exponentiellement stable bien que la solution (1.72) soit exponentiellement instable en moyenne quadratique. Cependant, la stabilité de l'EDO $\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\,\mathrm{d}t$ est nécessaire à la stabilité exponentielle en moyenne quadratique de la solution (1.72).

La figure ci-dessous résume les conditions de stabilité exponentielle presque sûre (ASES pour Almost Sure Exponential Stability) et de stabilité exponentielle en moyenne quadratique (MSES pour Mean-Square Exponential Stability).

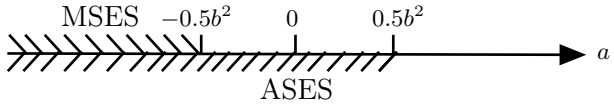


FIGURE 1.4 – Stabilités MSES et ASES.

Au vu des calculs ci-dessus, comme dans l'exemple scalaire précédent, le mouvement brownien peut avoir un effet stabilisant ou déstabilisant pour la stabilité exponentielle presque sûre (possibilité d'avoir la stabilité avec $a \geqslant 0$), tandis qu'il a un effet déstabilisant pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique (la condition $0 \geqslant 2a \geqslant -b^2$ est déstabilisante).

Pour illustrer cette discussion, on choisit trois cas pour l'EDS (1.70)

(1) $a = a_1 = 0.2$ et $b = 1$,
- exposant de Lyapunov (1.73) égal à $\rho_1 = a_1 - 0.5b^2 = -0.3 < 0 \longrightarrow$ stabilité exponentielle presque sûre,
- exposant de Lyapunov (1.77) égal à $\mu_1 = 2a_1 + b^2 = 1.4 > 0 \longrightarrow$ instabilité exponentielle en moyenne quadratique,

(2) $a = a_2 = -0.52$ et $b = 1$,
- exposant de Lyapunov (1.73) égal à $\rho_2 = a_2 - 0.5b^2 = -1.02 < 0 \longrightarrow$ stabilité exponentielle presque sûre,
- exposant de Lyapunov (1.77) égal à $\mu_2 = 2a_2 + b^2 = -0.04 < 0 \longrightarrow$ stabilité exponentielle en moyenne quadratique,

(3) $a = a_3 = 0.51$ et $b = 1$,
- exposant de Lyapunov (1.73) égal à $\rho_3 = a_3 - 0.5b^2 = 0.01 > 0 \longrightarrow$ instabilité exponentielle presque sûre,
- exposant de Lyapunov (1.77) égal à $\mu_3 = 2a_3 + b^2 = 2.02 > 0 \longrightarrow$ instabilité exponentielle en moyenne quadratique.

Les réponses obtenues sont montrées dans la figure 1.3 avec $x_0 = [\,-1 \quad 2\,]^T$.

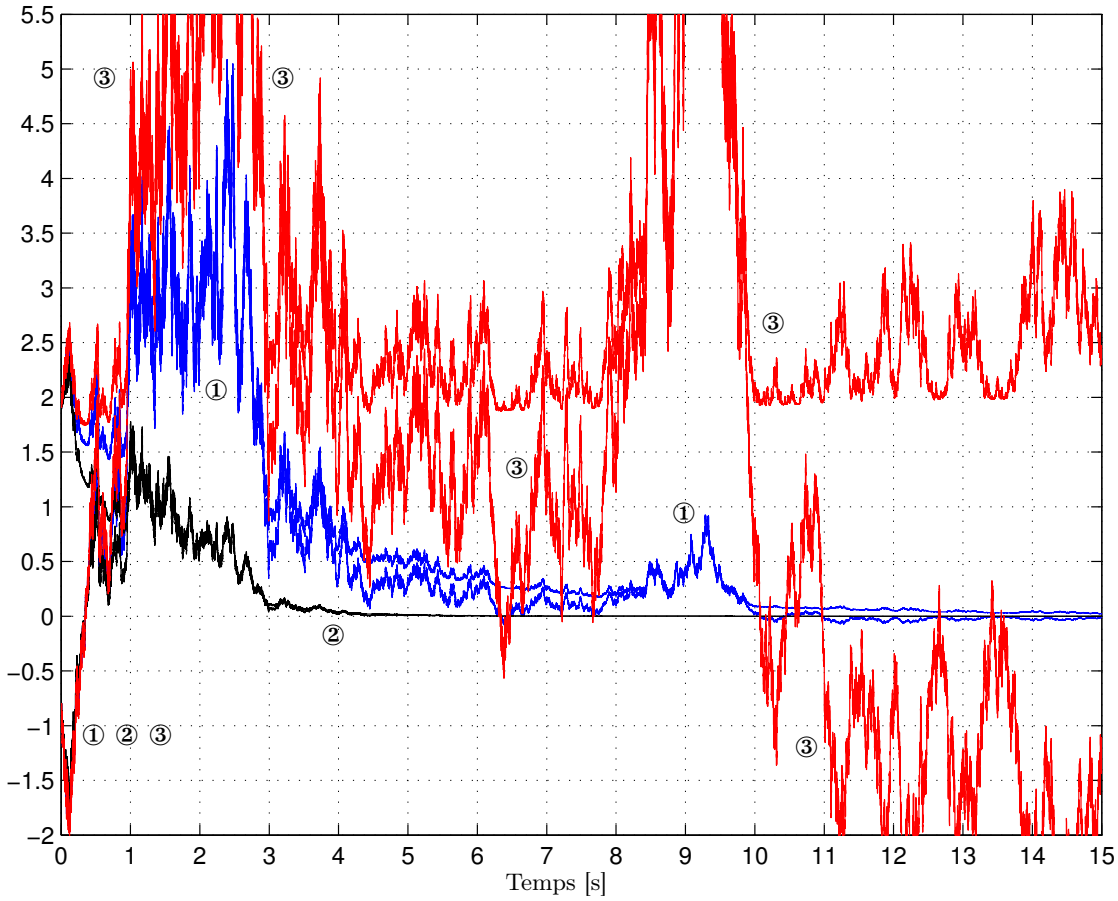


FIGURE 1.5 – Réponse pour l'EDS (1.70) avec trois valeurs de a

Dans la figure 1.5, le cas (1) correspondant à $a = a_1 = 0.2$ et $b = 1$ donne les deux courbes bleues avec ①, le cas (2) correspondant à $a = a_2 = -0.52$ et $b = 1$ donne les deux courbes noires avec ② et le cas (3) correspondant à $a = a_3 = 0.51$ et $b = 1$ donne les deux courbes rouges avec ③.

La condition $a - 0.5b^2 < 0$ est vérifiée pour les réponses ① et ② : on a la stabilité exponentielle presque sûre. Les courbes bleues ① et noires ② convergent exponentiellement vers 0.

La condition $a - 0.5b^2 < 0$ n'est pas vérifiée pour la réponse ③ : on n'a pas la stabilité exponentielle presque sûre. Les deux courbes rouge ③ divergent vers $\pm\infty$.

L'exposant de Lyapunov (1.73) est un indicateur du taux de décroissance exponentielle d'une trajectoire (voir relations (1.33) et (1.34)). L'exposant de Lyapunov ρ_2 dans le cas (2) a une valeur absolue plus grande que celle de l'exposant de Lyapunov ρ_1 dans le cas (1) : $\rho_2 = 3.4\rho_1$ et les deux courbes noires ② convergent plus vite que les deux courbes bleues ①.

L'EDO $\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a = a_1$ est instable alors que l'EDS (1.70) avec $a = a_1$ est stable (deux courbes bleues ①). Ainsi le mouvement brownien $w(t)$ a un effet stabilisateur sur la réponse.

Dans le cas (2), on a la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et la stabilité exponentielle presque sûre (deux courbes noires ②), alors que dans le cas (1) (deux courbes bleues ①) on a la stabilité exponentielle presque sûre, mais pas la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. On constate que la stabilité exponentielle en moyenne quadratique permet de "diminuer" le caractère erratique dans la réponse.

1.5.3.4 Insuffisance des fonctions de Lyapunov quadratiques

Dans cette section, on applique les théorèmes 1.5.3 et 1.5.4 sur l'EDS (1.70) avec une fonction de Lyapunov quadratique $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$. La matrice P est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

et satisfait

$$p_1 > 0, \qquad p_3 > 0 \qquad \text{et} \qquad p_1 p_3 > p_2^2 > 0 \tag{1.80}$$

pour que $P = P^T > 0$.

Avec cette fonction de Lyapunov candidate, on obtient les relations suivantes

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant c_2 V(x(t)) \\ &\iff A^T P + PA + B^T PB - c_2 P \leqslant 0 = \begin{bmatrix} p_3 b^2 + (2a - c_2)p_1 & p_2(2a + b^2 - c_2) \\ p_2(2a + b^2 - c_2) & p_1 b^2 + (2a - c_2)p_3 \end{bmatrix} \leqslant 0 \end{aligned} \tag{1.81}$$

et

$$\|\mathfrak{B}V(x(t))\|^2 = \|V_x(x(t))g(x(t))\|^2 \geqslant c_3 V^2(x(t)) \iff \begin{cases} \text{soit} & B^T P + PB - \sqrt{c_3}P \geqslant 0, \\ \text{soit} & B^T P + PB + \sqrt{c_3}P \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.82}$$

$$B^T P + PB - \sqrt{c_3}P = \begin{bmatrix} 2bp_2 - \sqrt{c_3}p_1 & bp_1 + bp_3 - \sqrt{c_3}p_2 \\ bp_1 + bp_3 - \sqrt{c_3}p_2 & 2bp_2 - \sqrt{c_3}p_3 \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{1.83}$$

$$B^T P + PB + \sqrt{c_3}P = \begin{bmatrix} 2bp_2 + \sqrt{c_3}p_1 & bp_1 + bp_3 + \sqrt{c_3}p_2 \\ bp_1 + bp_3 + \sqrt{c_3}p_2 & 2bp_2 + \sqrt{c_3}p_3 \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{1.84}$$

Stabilité exponentielle en moyenne quadratique : application du théorème 1.5.4.

Il faut calculer P telle que la condition (1.81) soit vraie avec $c_2 < 0$. Pour ce faire, il est nécessaire et suffisant de résoudre la LMI $A^T P + PA + B^T PB < 0$.

- Condition suffisante de stabilité exponentielle en moyenne quadratique avec $\mathfrak{L}V(x(t))$:
  Si on choisit

  $$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  alors on obtient

  $$A^T P + PA + B^T PB = \begin{bmatrix} 2a + b^2 & 0 \\ 0 & 2a + b^2 \end{bmatrix} < 0$$

  si et seulement si $2a + b^2 < 0$, c'est-à-dire si et seulement si la condition (1.78) est vérifiée.
- Condition nécessaire de stabilité exponentielle en moyenne quadratique avec $\mathfrak{L}V(x(t))$:
  Une condition nécessaire pour que

  $$A^T P + PA + B^T PB = \begin{bmatrix} p_3 b^2 + 2ap_1 & p_2(2a + b^2) \\ p_2(2a + b^2) & p_1 b^2 + 2ap_3 \end{bmatrix} < 0$$

avec P vérifiant (1.79) et (1.80) est $p_3b^2 + 2ap_1 < 0$ et $p_1b^2 + 2ap_3 < 0$. Puisque

$$\begin{cases} p_3b^2 + 2ap_1 < 0 \\ p_1b^2 + 2ap_3 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a < -b^2\dfrac{p_3}{p_1} \\ 2a < -b^2\dfrac{p_1}{p_3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b^2 < -b^2\left(\dfrac{p_3}{p_1} - 1\right) \\ 2a + b^2 < -b^2\left(\dfrac{p_1}{p_3} - 1\right) \end{cases} \implies 2a < -b^2 < 0,$$

la condition (1.78) est nécessaire.

Ainsi, on a montré que le théorème 1.5.4 est équivalent à la condition (1.78), ce qui est en accord avec la remarque 1.5.2.

Stabilité exponentielle presque sûre : application du théorème 1.5.3.

Si $c_2 < 0$ dans la condition (1.81), alors il suffit de choisir $c_3 = 0$ dans la condition (1.82) pour que la stabilité exponentielle presque sûre soit garantie avec le théorème 1.5.3. Mais dans ce cas, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique est aussi garantie avec le théorème 1.5.4.

En accord avec la figure 1.4, on suppose que le point d'équilibre de l'EDS (1.70) est exponentiellement instable en moyenne quadratique, c'est-à-dire que $0 \geqslant 2a \geqslant -b^2$. Dans ce cas, on a $c_2 \geqslant 0$ dans la condition (1.81). Il faut donc que $c_3 > 0$ dans la condition (1.82).

Dans les calculs qui suivent on suppose que $b > 0$ sans perte de généralité.

- $B^TP + PB - \sqrt{c_3}P \geqslant 0$:

  On a les équivalences suivantes puisque $P = P^T > 0$

$$\begin{aligned} B^TP + PB - \sqrt{c_3}P &= (B^T - 0.5\sqrt{c_3}I_2)P + P(B - 0.5\sqrt{c_3}I_2) \\ &= \begin{bmatrix} -0.5\sqrt{c_3} & b \\ b & -0.5\sqrt{c_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.5\sqrt{c_3} & b \\ b & -0.5\sqrt{c_3} \end{bmatrix} \geqslant 0 \\ &\iff \mathrm{Re}(\lambda_i(B - 0.5\sqrt{c_3}I_2)) \geqslant 0 \qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$

  La condition $\mathrm{Re}(\lambda_i(B - 0.5\sqrt{c_3}I_2)) \geqslant 0$, $i = 1, 2$, est impossible à vérifier car

$$B - 0.5\sqrt{c_3}I_2 = \begin{bmatrix} -0.5\sqrt{c_3} & b \\ b & -0.5\sqrt{c_3} \end{bmatrix} \to \det(sI_2 - (B - 0.5\sqrt{c_3}I_2)) = s^2 + \sqrt{c_3}s + 0.25c_3 - b^2,$$

$$\lambda_1(B - 0.5\sqrt{c_3}I_2) = -b - 0.5\sqrt{c_3} < 0 \text{ et } \lambda_2(B - 0.5\sqrt{c_3}I_2) = b - 0.5\sqrt{c_3}.$$

- $B^TP + PB + \sqrt{c_3}P \leqslant 0$:

  On a les équivalences suivantes puisque $P = P^T > 0$

$$\begin{aligned} B^TP + PB + \sqrt{c_3}P &= (B^T + 0.5\sqrt{c_3}I_2)P + P(B + 0.5\sqrt{c_3}I_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0.5\sqrt{c_3} & b \\ b & 0.5\sqrt{c_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5\sqrt{c_3} & b \\ b & 0.5\sqrt{c_3} \end{bmatrix} \leqslant 0 \\ &\iff \mathrm{Re}(\lambda_i(B + 0.5\sqrt{c_3}I_2)) \leqslant 0 \qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$

  La condition $\mathrm{Re}(\lambda_i(B + 0.5\sqrt{c_3}I_2)) \leqslant 0$, $i = 1, 2$, est impossible à vérifier car

$$B + 0.5\sqrt{c_3}I_2 = \begin{bmatrix} 0.5\sqrt{c_3} & b \\ b & 0.5\sqrt{c_3} \end{bmatrix} \to \det(sI_2 - (B + 0.5\sqrt{c_3}I_2)) = s^2 - \sqrt{c_3}s + 0.25c_3 - b^2,$$

$$\lambda_1(B + 0.5\sqrt{c_3}I_2) = 0.5\sqrt{c_3} - b \text{ et } \lambda_2(B + 0.5\sqrt{c_3}I_2) = 0.5\sqrt{c_3} + b > 0.$$

La condition $\|\mathfrak{B}V(x(t))\|^2 \geqslant c_3 V^2(x(t))$ avec $c_3 > 0$ est donc impossible à satisfaire avec une fonction de Lyapunov quadratique. Ainsi, on ne peut pas montrer avec une fonction de Lyapunov quadratique que le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.70) est exponentiellement presque sûrement stable si $-b^2 \leqslant 2a \leqslant b^2$.

Il existe donc des EDS pour lesquelles la stabilité exponentielle presque sûre ne peut pas être vérifiée avec une fonction de Lyaponov quadratique, ce qui renforce l'intérêt d'utiliser le bruit pour étudier cette stabilité. C'est l'objet de la section suivante.

1.5.4 Stabilisation et déstabilisation avec le bruit

Dans la section 1.5.3, le fait que l'on peut se servir du mouvement brownien pour obtenir la stabilité exponentielle presque sûre a été mis en évidence et a été illustré par deux exemples (voir sections 1.5.3.2 et 1.5.3.3). Plusieurs travaux ont traité cette problématique : [Mao94b, Mao97, Bas01, Kwi02, DLMP08, WMH10].

Dans la suite de cette section, des théorèmes relatifs à la stabilisation par le bruit sont donnés.

Théorème 1.5.8 (**Stabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b, Mao97] Tout système non linéaire*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{1.85}$$

peut être stabilisé par un mouvement brownien si la fonction $f(x(t), t)$ est globalement Lipschitz, c'est-à-dire s'il existe un réel $k_f > 0$ tel que

$$\|f(x(t), t)\| \leqslant k_f \|x(t)\| . \tag{1.86}$$

De plus, on peut utiliser un mouvement brownien scalaire pour stabiliser (1.85).

Dans le théorème 1.5.8, le système (1.85), qui est stabilisé avec des mouvements browniens, est transformé en une EDS donnée par

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t), t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{d} B_i x(t)\,\mathrm{d}w_i(t). \tag{1.87}$$

Théorème 1.5.9 (**Stabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b, Mao97] Soit l'EDS (1.87) vérifiant la condition de Lipschitz (1.86). S'il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\rho \geqslant 0$ telles que*

$$\sum_{i=0}^{d} \|B_i x(t)\|^2 \leqslant \lambda \|x(t)\|^2 \qquad et \qquad \sum_{i=0}^{d} \left\|x^T(t) B_i x(t)\right\|^2 \geqslant \rho \|x(t)\|^4 , \tag{1.88}$$

alors

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) \leqslant -(\rho - k_f - 0.5\lambda) \qquad p.s. \tag{1.89}$$

et le point d'équilibre $x(t) = 0$ est exponentiellement presque sûrement stable si

$$\rho > k_f + 0.5\lambda. \tag{1.90}$$

Théorème 1.5.10 (**Stabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b, Mao97] L'EDS (1.87) peut être stabilisée par un mouvement brownien si la fonction $f(x(t),t)$ est globalement Lipschitz, c'est-à-dire s'il existe un réel $k_f > 0$ tel que*

$$\|f(x(t),t)\| \leqslant k_f \|x(t)\|. \tag{1.91}$$

De plus, on peut utiliser un mouvement brownien scalaire pour stabiliser (1.87).

On considère l'EDS suivante

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t),t)\,\mathrm{d}t + g(x(t),t)\,\mathrm{d}w(t) + \sum_{i=0}^{d} B_i x(t)\,\mathrm{d}\overline{w}_i(t). \tag{1.92}$$

Théorème 1.5.11 (**Stabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b] Soit l'EDS (1.92) vérifiant les conditions suivantes ($k_f > 0$ et $k_g > 0$)*

$$\|f(x(t),t)\| \leqslant k_f \|x(t)\| \qquad et \qquad \mathrm{tr}(g(x(t),t)g^T(x(t),t)) \leqslant k_g \|x(t)\|^2. \tag{1.93}$$

S'il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\rho \geqslant 0$ telles que

$$\sum_{i=0}^{d} \|B_i x(t)\|^2 \leqslant \lambda \|x(t)\|^2 \qquad et \qquad \sum_{i=0}^{d} \left\|x^T(t) B_i x(t)\right\|^2 \geqslant \rho \|x(t)\|^4, \tag{1.94}$$

alors

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) \leqslant -(\rho - k_f - 0.5(k_g + \lambda)) \qquad p.s. \tag{1.95}$$

et le point d'équilibre $x(t) = 0$ est exponentiellement presque sûrement stable si

$$\rho > k_f + 0.5(k_g + \lambda). \tag{1.96}$$

Dans les sections 1.5.3.2 et 1.5.3.3, on a "implicitement" appliqué les théorèmes 1.5.8 et 1.5.9.

En effet, puisque la constante de Lipschitz k_f dans la condition (1.86) est donnée par $k_f = |\alpha|$ dans l'EDS (1.62) et par $k_f = |a|$ dans l'EDS (1.70), on a stabilisé les EDO $\mathrm{d}x(t) = \alpha x(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha > 0$ et $\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a > 0$ en utilisant un mouvement brownien : on a donc utilisé le théorème 1.5.8.

Pour l'EDS (1.62), le théorème 1.5.9 donne $\rho \leqslant \sigma^2 \leqslant \lambda$ et la condition (1.90) requiert de "maximiser" ρ et de "minimiser" λ. On choisit donc $\lambda = \rho = \sigma^2$ et la condition (1.90) est équivalente à $-\sigma^2 < 2\alpha < \sigma^2$, ce qui est plus restrictif que la condition $2\alpha < \sigma^2$ obtenue dans la section 1.5.3.2.

Pour l'EDS (1.70), le le théorème 1.5.9 donne $\rho \leqslant b^2 \leqslant \lambda$ et la condition (1.90) requiert de "maximiser" ρ et de "minimiser" λ. On choisit donc $\lambda = \rho = b^2$ et la condition (1.90) est équivalente à $-b^2 < 2a < b^2$, ce qui est plus restrictif que la condition $2a < b^2$ obtenue dans la section 1.5.3.3.

Dans ces deux exemples, le théorème 1.5.9 donne une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS soit exponentiellement stable presque sûrement, mais la stabilité exponentielle en moyenne quadratique n'est pas vérifiée (les conditions $2\alpha < -\sigma^2$ ou $2a < -b^2$ ne sont pas satisfaites avec ce théorème).

Dans la suite de cette section, des théorèmes relatifs à la déstabilisation par le bruit sont donnés.

Théorème 1.5.12 (**Déstabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b, Mao97] Le système non linéaire (1.85) peut être stabilisé par un mouvement brownien $w(t) \in \mathbb{R}^d$ si la condition de Lipschitz (1.86) est satisfaite et si $d \geqslant 2$.*

Théorème 1.5.13 (**Déstabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b, Mao97] Soit l'EDS (1.87) vérifiant la condition de Lipschitz (1.86). S'il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\rho \geqslant 0$ telles que*

$$\sum_{i=0}^{d} \|B_i x(t)\|^2 \geqslant \lambda \|x(t)\|^2 \qquad et \qquad \sum_{i=0}^{d} \left\|x^T(t) B_i x(t)\right\|^2 \leqslant \rho \|x(t)\|^4 , \tag{1.97}$$

alors

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) \geqslant (0.5\lambda - k_f - \rho) \qquad p.s. \tag{1.98}$$

et le point d'équilibre $x(t) = 0$ est exponentiellement presque sûrement instable si

$$\lambda > 2(k_f + \rho). \tag{1.99}$$

Théorème 1.5.14 (**Déstabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b] Soit l'EDS (1.92) vérifiant les conditions suivantes ($k_f > 0$ et $k_g > 0$)*

$$\|f(x(t), t)\| \leqslant k_f \|x(t)\| \qquad et \qquad \mathrm{tr}(g(x(t), t) g^T(x(t), t)) \leqslant k_g \|x(t)\|^2 . \tag{1.100}$$

S'il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\rho \geqslant 0$ telles que

$$\sum_{i=0}^{d} \|B_i x(t)\|^2 \geqslant \lambda \|x(t)\|^2 \qquad et \qquad \sum_{i=0}^{\ell} \left\|x^T(t) B_i x(t)\right\|^2 \leqslant \rho \|x(t)\|^4 , \tag{1.101}$$

alors

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) \geqslant 0.5(\lambda - 2\rho - 2k_f - 2k_g) \qquad p.s. \tag{1.102}$$

et le point d'équilibre $x(t) = 0$ est exponentiellement presque sûrement stable si

$$\lambda > 2\rho + 2k_f + 2k_g. \tag{1.103}$$

Théorème 1.5.15 (**Déstabilisation exponentielle presque sûre avec le bruit**). *[Mao94b] L'EDS (1.87) peut être stabilisée par un mouvement brownien $w(t) \in \mathbb{R}^d$ si la condition (1.100) est satisfaite et si $d \geqslant 2$.*

Remarque 1.5.4. Le théorème 1.5.9 sur la stabilisation avec le bruit correspond au théorème 1.5.11 en posant $g(x(t), t) = 0$ (donc $k_g = 0$). De même, le théorème 1.5.13 sur la déstabilisation avec le bruit correspond au théorème 1.5.14 en posant $g(x(t), t) = 0$ (donc $k_g = 0$). □

1.6 Lemme borné réel

Cette section est consacrée à la présentation du lemme borné réel pour les systèmes déterministes et pour les systèmes stochastiques.

1.6.1 Lemme borné réel pour les systèmes déterministes

Soit le système déterministe décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \tag{1.104a}$$
$$z(t) = Cx(t) + Dv(t) \tag{1.104b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $z(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie et $v(t) \in \mathbb{R}^q$ est celui de la perturbation. La fonction de transfert de ce système est $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ où $s \in \mathbb{C}$ est la variable de Laplace.

En automatique, il est important de caractériser le comportement des sorties $z(t)$ par rapport aux perturbations $v(t)$. Un des critères de performance souvent retenu est de savoir si le système rejette ou non les perturbations $v(t)$, c'est-à-dire s'il les atténue ou les amplifie. Pour ce faire, la norme souvent considérée est l'énergie d'un signal définie comme suit

$$\|v\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^T(t)v(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_0^{+\infty} \|v(t)\|^2\,\mathrm{d}t} \tag{1.105}$$

Pour caractériser l'atténuation ou l'amplification des perturbations $v(t)$ par le système (1.104), on utilise la norme induite L_2 suivante (on parle aussi de gain L_2)

$$\|G\|_\infty = \sup_{v\neq 0} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|v\|_{L_2}}, \qquad \text{avec } x_0 = 0. \tag{1.106}$$

On parle de norme $\mathcal{H}_\infty$ et la notation $\|G\|_\infty$ est utilisée dans la littérature car elle correspond à une norme de type "infinie" sur la fonction de transfert. En effet, si le système $G(s)$ (1.104) est stable, alors on a [Fra87]

$$\|G\|_\infty = \sup_{v\neq 0} \frac{\|z\|_{c_L 2}}{\|v\|_{L_2}} = \max_{\omega\in\mathbb{R}} \sigma(G(j\omega)) = \max_{\omega\in\mathbb{R}} \lambda(G(-j\omega)^T G(j\omega)) \tag{1.107}$$

où $\sigma(A)$ est une valeur singulière de la matrice A (voir section A.1.1) et $\lambda(A)$ est une valeur propre de la matrice A.

Si $\|G\|_\infty < 1$, alors le système (1.104) atténue les perturbations $v(t)$ et, si $\|G\|_\infty > 1$, alors le système (1.104) amplifie les perturbations $v(t)$.

Le lemme borné réel pour les systèmes déterministes, donné par le théorème suivant, permet de calculer la norme $\mathcal{H}_\infty$.

Théorème 1.6.1 (Lemme borné réel : cas continu). *Les trois propositions suivantes sont équivalentes pour le système (1.104) :*

(i) *A est stable*[2] *et $\|G\|_\infty < \gamma$,*

(ii) *$\exists P = P^T > 0$ telle que [Wil71, AV73, SMN90]*

$$R = \gamma^2 I_q - D^T D > 0, \tag{1.108}$$
$$A^T P + PA + C^T C + (PB + C^T D)R^{-1}(PB + C^T D)^T < 0. \tag{1.109}$$

2. Une matrice est dite stable si elle est Hurwitz, c'est-à-dire si la partie réelle de toutes ses valeurs propres est strictement négative ($\mathrm{Re}(\lambda) < 0$).

(iii) $\exists P = P^T > 0$ *telle que [BEFB94, GA94, IS94, EF96, SGC97]*

$$\begin{bmatrix} A^TP + PA & PB & C^T \\ B^TP & -\gamma^2 I_q & D^T \\ C & D & -I_r \end{bmatrix} < 0. \tag{1.110}$$

Le théorème 1.6.1 peut s'écrire en fonction d'une équation algébrique de Riccati en remplaçant $\exists P = P^T > 0$ par $\exists P = P^T \geqslant 0$ et le symbole d'inégalité dans l'inégalité algébrique de Riccati (1.109) par le symbole d'égalité si, de plus, l'EDO $\mathrm{d}x(t) = (A + BR^{-1}(D^TC + B^TP))x(t)\,\mathrm{d}t$ est asymptotiquement stable.

1.6.2 Lemme borné réel des systèmes stochastiques avec une dérive linéaire

Pour les systèmes stochastiques, on remplace l'énergie du signal $v(t)$ (1.105) par la norme suivante

$$\|v\|^2_{\widehat{L}_2} = \mathbf{E}\Big\{\int_0^{+\infty} v^T(t)v(t)\,\mathrm{d}t\Big\} = \mathbf{E}\Big\{\int_0^{+\infty} \|v(t)\|^2\,\mathrm{d}t\Big\} = \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\Big\{\|v(t)\|^2\Big\}\,\mathrm{d}t \tag{1.111}$$

et on définit l'espace des processus stochastiques non-anticipatifs et carré-intégrables $\widehat{L}_2\left([0,+\infty)\,;\mathbb{R}^q\right)$ comme suit

$$\widehat{L}_2\left([0,+\infty)\,;\mathbb{R}^q\right) = \Big\{v(t) \in \mathbb{R}^q \mid \|v\|_{\widehat{L}_2} < +\infty\Big\}. \tag{1.112}$$

Dans la suite de cette section, on utilisera $\widehat{L}_2$ au lieu de $\widehat{L}_2\left([0,+\infty)\,;\mathbb{R}^q\right)$ afin d'alléger les notations.

On considère le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) &= (A_tx(t) + B_tv(t))\,\mathrm{d}t + (A_wx(t) + B_wv(t))\,\mathrm{d}w(t) && \text{(1.113a)} \\ z(t) &= Cx(t) + Dv(t) && \text{(1.113b)} \end{aligned}$$

avec $x(t)\mathbb{R}^n$, $v(t) \in \widehat{L}_2([0,+\infty)\,;\mathbb{R}^q)$ (voir définition 1.6.1) et $z(t) \in \mathbb{R}^r$. $w(t) \in \mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien multivariable indépendant.

Définition 1.6.1 (**Gain L_2 stochastique**). *[DHS97, HP98] Si le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.113) est exponentiellement stable en moyenne quadratique, alors $v(t) \in \widehat{L}_2$ implique que $z(t) \in \widehat{L}_2$. Le gain L_2 stochastique est donné par*

$$\gamma = \sup_{v \neq 0} \frac{\|z\|_{\widehat{L}_2}}{\|v\|_{\widehat{L}_2}}, \qquad \textit{avec } x_0 = 0. \tag{1.114}$$

Le lemme borné réel pour le système stochastique (1.113) est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.6.2 (**Lemme borné réel stochastique : dérive linéaire**). *[Mor95, DHS97, HP98, GLSY01] Le système stochastique (1.113) a un gain stochastique L_2 inférieur ou égal à $\gamma > 0$ s'il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que la LMI suivante*

$$\begin{bmatrix} PA_t + A_t^TP & PB_t & A_w^TP & C^T \\ B_t^TP & -\gamma^2 I_q & B_w^TP & D^T \\ PA_w & PB_w & -P & 0 \\ C & D & 0 & -I_r \end{bmatrix} < 0 \tag{1.115}$$

soit vérifiée.

La LMI (1.115) est équivalente à l'inégalité de Riccati suivante (application du lemme de Schur A.3.1)

$$A_t^T P + PA_t + C^T C + (PB_t + C^T D)R^{-1}(PB_t + C^T D)^T + (A_w + B_w)^T P(A_{wt} + B_w) < 0 \quad (1.116)$$

avec

$$R = \gamma^2 I_q - D^T D > 0. \quad (1.117)$$

Remarque 1.6.1. Si le théorème 1.6.2 est vérifié alors le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.113a) est exponentiellement stable en moyenne quadratique car, si $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, alors on a (si $v(t) = 0$)

$$\mathfrak{L}V(x(t)) = A_t^T P + PA_t + A_w^T PA_w < 0 \quad (1.118)$$

si la LMI (1.115) est satisfaite (appliquer le lemme de Schur sur $\begin{bmatrix} PA_t + A_t^T P & A_w^T P \\ PA_w & -P \end{bmatrix}$). □

1.6.3 Lemme borné réel pour les systèmes stochastiques non linéaires

On considère le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) &= (A_t x(t) + B_t v(t) + \ell(x(t)))\,\mathrm{d}t + (A_w x(t) + B_w v(t))\,\mathrm{d}w(t) && (1.119a) \\ z(t) &= Cx(t) + Dv(t) && (1.119b) \end{aligned}$$

avec $x(t)\mathbb{R}^n$, $v(t) \in \widehat{L}_2([0, +\infty); \mathbb{R}^q)$ (voir définition 1.6.1) et $z(t) \in \mathbb{R}^r$. $w(t) \in \mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien multivariable indépendant.

La fonction non linéaire $\ell(x(t))$ vérifie $\ell(0) = 0$ et la condition de Lipschitz suivante

$$\|\ell(x(t)) - \ell(\overline{x}(t))\| \leqslant \kappa \|x(t) - \overline{x}(t)\|. \quad (1.120)$$

Théorème 1.6.3 (Lemme borné réel stochastique : dérive non linéaire). *Le système stochastique (1.113) a un gain stochastique L_2 inférieur ou égal à $\gamma > 0$ s'il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et un réel $\mu > 0$ tels que la LMI suivante*

$$\begin{bmatrix} PA_t + A_t^T P + \mu^{-1}\kappa^2 I_n & PB_t & A_w^T P & C^T & P \\ B_t^T P & -\gamma^2 I_q & B_w^T P & D^T & 0 \\ PA_w & PB_w & -P & 0 & 0 \\ C & D & 0 & -I_r & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & -\mu^{-1} I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (1.121)$$

soit vérifiée.

La LMI (1.121) est équivalente à l'inégalité de Riccati suivante (application du lemme de Schur A.3.1)

$$\begin{aligned} A_t^T P + PA_t + \mu^{-1}\kappa^2 I_n + \mu P^T P + C^T C + (PB_t + C^T D)R^{-1}(PB_t + C^T D)^T \\ + (A_w + B_w)^T P(A_w + B_w) < 0, \quad (1.122) \end{aligned}$$

avec

$$R = \gamma^2 I_q - D^T D > 0. \quad (1.123)$$

Démonstration. L'application de la formule d'Itô (1.11) sur la fonction de Lyapunov stochastique $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ avec $P = P^T > 0$ pour l'EDS (1.119) donne

$$\mathrm{d}V(x(t)) = \mathfrak{L}V(x(t))\,\mathrm{d}t + 2x^T(t)PA_w x(t)\,\mathrm{d}w \tag{1.124}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}V(x(t)) = {} & 2x^T(t)P\left(A_t x(t) + B_t v(t) + \ell(x(t))\right) \\ & + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((A_w x(t) + B_w v(t))^T 2P(A_w x(t) + B_w v(t))\right). \end{aligned} \tag{1.125}$$

En utilisant le lemme de majoration C.3.1 et la condition de Lipschitz (1.120), le terme $2x^T P\ell(x(t))$ peut être majoré comme suit

$$2x(t)^T P\ell(x(t)) \leqslant x(t)^T\mu^{-1}\kappa^2 I_n x(t) + x^T(t)\mu PP^T x(t) \tag{1.126}$$

avec $\mu > 0$ et l'inégalité (1.125) devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t)) \leqslant {} & 2x^T(t)P\left(A_t x(t) + B_t v(t)\right) + x(t)^T\mu^{-1}\kappa^2 I_n x(t) + x(t)^T\mu PP^T x(t) \\ & + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((A_w x(t) + B_w v(t))^T 2P(A_w x(t) + B_w v(t))\right). \end{aligned} \tag{1.127}$$

En se basant sur la définition (1.6.1), on considère l'indice de performance suivant

$$J_{yv} = \mathbf{E}\left\{\int_0^{+\infty}\left(y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)\right)\mathrm{d}t\right\}, \tag{1.128}$$

que l'on peut écrire en utilisant le théorème de Fubini [3] [Che85]

$$\begin{aligned}J_{yv} = \int_0^{+\infty} & \mathbf{E}\{(y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}V(x(t))\} \\ & - \mathbf{E}\{V(x(t)\}_{t=+\infty} + \mathbf{E}\{V(x(t)\}_{t=0}, \end{aligned} \tag{1.129}$$

car, en prenant l'espérance mathématique des deux côtés de l'équation (1.124) et grâce à (1.3b), on a

$$\mathbf{E}\{\mathrm{d}V(x(t))\} = \mathbf{E}\{\mathfrak{L}V(x(t))\}.$$

Or, puisque $\mathbf{E}\{V(x(t)\}_{t=0} = 0$ car $x(0) = 0$ et $\mathbf{E}\{V(x(t)\}_{t=+\infty} \geqslant 0$, ceci implique que

$$J_{yv} \leqslant \int_0^{+\infty}\mathbf{E}\{(y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t))\,\mathrm{d}t + \mathfrak{L}V(x(t))\,\mathrm{d}t\}. \tag{1.130}$$

Maintenant, on suppose que la LMI (1.121) est vérifiée et on va montrer qu'elle est suffisante pour assurer la stabilité exponentielle en moyenne quadratique de l'EDS (1.119a) et que le gain L_2 stochastique du système (1.119) est inférieur ou égal à $\gamma > 0$.

En appliquant le lemme de Schur A.3.1 sur la LMI (1.121), on a

3. Pour un processus stochastique $X(t)$, si $X(t)$ est mesurable, alors on a l'égalité suivante

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^T X(t)\,\mathrm{d}t\right\} = \int_0^T \mathbf{E}\left\{X(t)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

$$\begin{bmatrix} C^TC & C^TD_0 \\ D_0^TC & -\gamma^2 I_q + D_0^TD_0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} PA_t + A_t^TP + A_w^TPA_w + \mu^{-1}\kappa^2 I_n + \mu PP + & PB_t + A_w^TPB_w \\ B_t^TP + B_w^TPA_w & B_w^TPB_w \end{bmatrix}}_{\Xi} < 0, \quad (1.131)$$

et l'inégalité (1.130) se réécrit

$$J_{yv} \leqslant \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^TC & C^TD_0 \\ D_0^TC & -\gamma^2 I_q + D_0^TD_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t}_{(y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t))\mathrm{d}t} + \underbrace{\begin{bmatrix} x(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t}_{\mathfrak{L}\mathrm{V(x(t))}} \right\} < 0,$$

donc, si la LMI (1.121) est vérifiée, alors le système (1.119) est exponentiellement stable en moyenne quadratique et vérifie le gain gain L_2 stochastique donné par (1.114). •

Remarque 1.6.2. Si le théorème 1.6.3 est vérifié alors le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EDS (1.119a) est exponentiellement stable en moyenne quadratique comme c'est montré dans la démonstration de ce théorème. □

Pour appliquer le lemme borné réel donné par le théorème1.6.3, on considère le système stochastique (1.119) avec

$$A_t = \begin{bmatrix} -3.15 & 2.1 & -2.1 \\ 1.05 & -5.25 & 2.1 \\ 0 & -1.26 & -7.35 \end{bmatrix},\ A_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix},\ B_t = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix},\ \ell(x(t)) = \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \\ \sin(x_3(t)) \end{bmatrix}.$$

Avec $\mu = 3.5$ et $\kappa = 1$ (voir (1.120)), la LMI (1.121) a donné les solutions

$$P = \begin{bmatrix} 0.23671 & 0.075147 & -0.030202 \\ 0.075147 & 0.16242 & 0.0013741 \\ -0.030202 & 0.0013741 & 0.10506 \end{bmatrix} > 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma = 1.$$

Puisque le gain L_2 stochastique obtenu est $\gamma = 1$, le système stochastique n'atténue pas et n'amplifie pas les perturbations $v(t)$ sur les sorties $z(t)$.

Les figures 1.6 et 1.7 montrent le comportement des états $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ et des sorties $z_i(t)$ $(i = 1, 2)$ en fonction des perturbations $v_i(t)$ $(i = 1, 2)$ avec un état initial $x_0 = [\,-5 \quad 2.5 \quad 5\,]^T$.

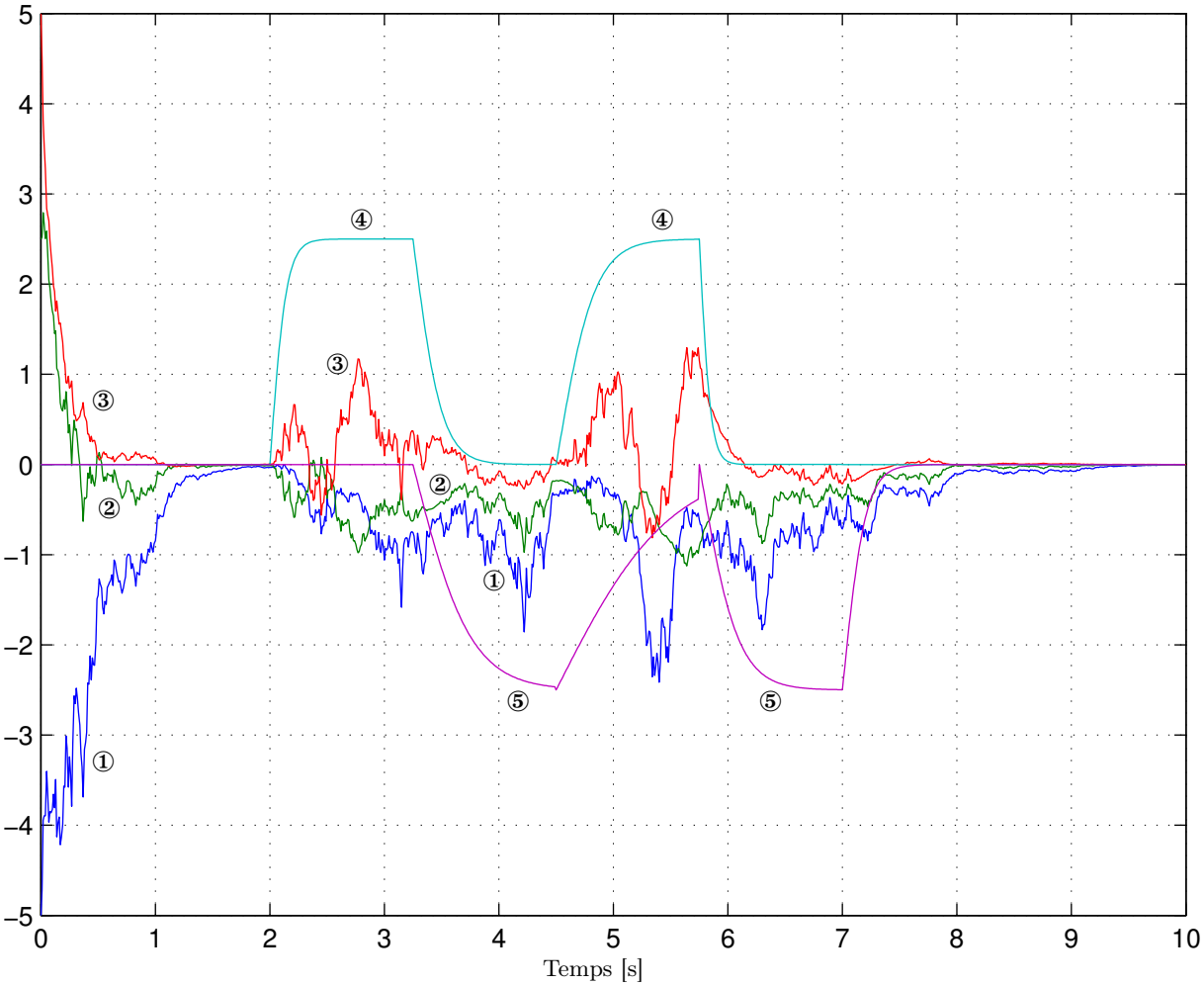


FIGURE 1.6 – Réponse du système stochastique non linéaire : états $x_1(t)$ (bleu, ①), $x_2(t)$ (vert, ②) et $x_3(t)$ (rouge, ③), perturbations $v_1(t)$ (cyan, ④) et $v_2(t)$ (magenta, ⑤).

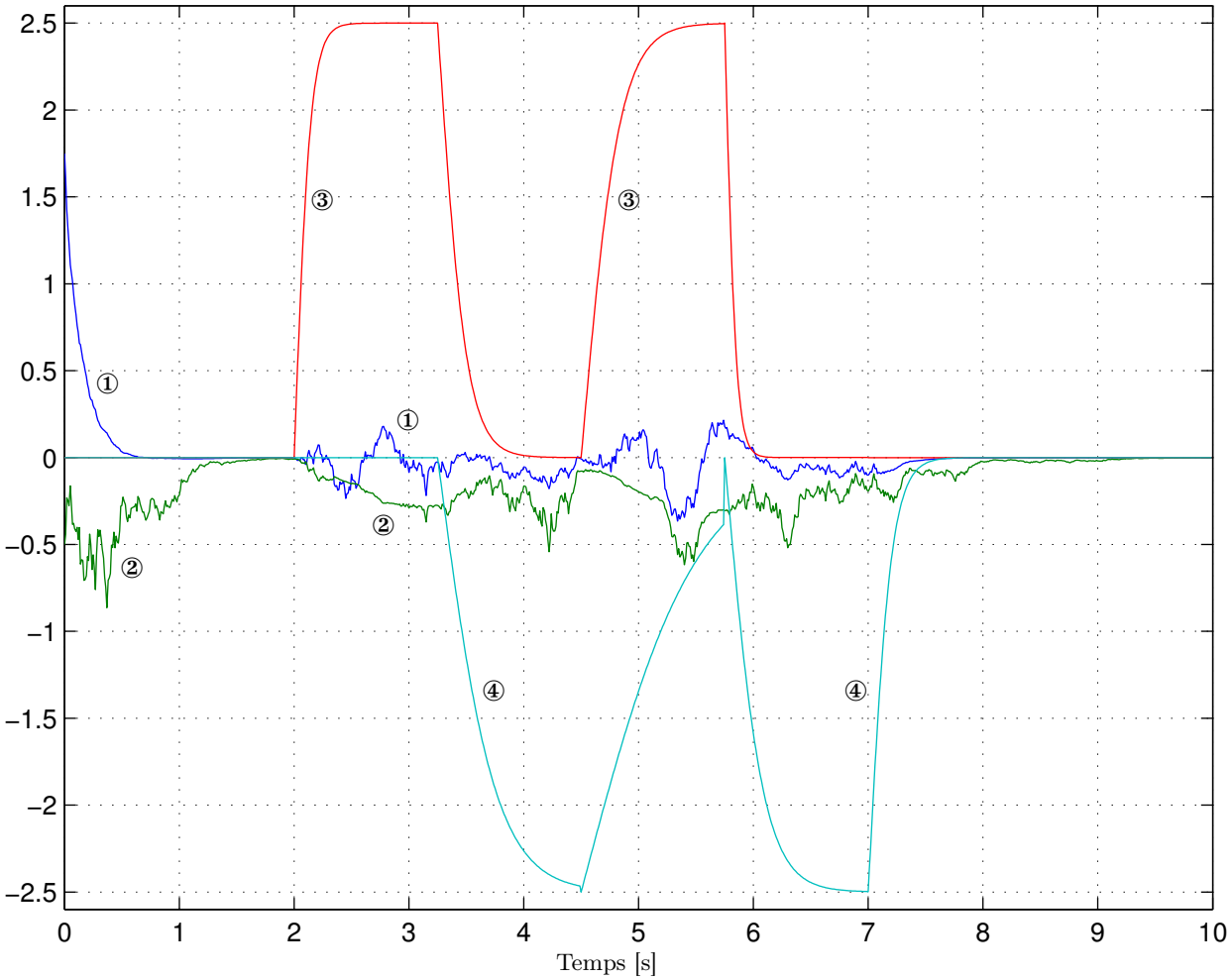


FIGURE 1.7 – Réponse du système stochastique non linéaire : sorties $z_1(t)$ (bleu, ①) et $z_2(t)$ (vert, ②), perturbations $v_1(t)$ (rouge, ③) et $v_2(t)$ (cyan, ④).

1.7 Exemples de processus stochastiques

Dans ce mémoire le temps est continu ($t \in \mathbb{R}_+$). Comme exemples de processus stochastiques à temps continu, on peut citer

- économie : mathématiques financières (marché des actions et des monnaies),
- biologie : modèles pour la génétique et l'évolution des populations,
- géologie : analyse des tremblements de terre,
- sciences de l'ingénieur : synthèse de loi de commande en présence de défaillances aléatoires,
- physique et mécanique : description des mouvements des particules dans un gaz ou dans un environnement ionisé, physique quantique, structures flexibles soumises à des vibrations, écoulement fluvial dans une section d'une rivière, ...

Si le temps est discret (instants $k \in \mathbb{N}$), on peut citer

- informatique : modélisation des réseaux informatiques (protocoles de transmission de données sur internet, ...),
- sciences de l'ingénieur : problèmes de files d'attente,
- économie : mathématiques financières, ...

Quelques exemples de processus stochastiques à temps continu décrits dans la littérature sont présentés ci-dessous.

(1) Application à la finance : évolution d'un portefeuille d'actions.

L'évolution du prix des actions d'un portefeuille est décrite par le modèle de Black-Scholes qui correspond à l'EDS suivante [Kle01]

$$\mathrm{d}S(t) = (\mu - r)S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}w(t)$$

où $S(t)$ est la valeur des actions du portefeuille, μ est la moyenne du taux d'évolution du prix des actifs financiers, r est le taux d'intérêt sans risque et σ est la volatilité. La volatilité permet de prendre en compte le caractère aléatoire des fluctuations du prix des actions d'un portefeuille.

(2) Application à la dynamique des populations : modèle avec évolution "indépendante".

La dynamique d'une population dont les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres et indépendamment de l'évolution de la population est régi par l'EDS suivante [Kle01]

$$\mathrm{d}x(t) = \alpha x(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{x(t)}\,\mathrm{d}w(t)$$

où $x(t)$ est la taille de cette population avec $0 \leqslant x(t) < +\infty$. En anglais, on parle de "branching process".

Un exemple de ce type de modèle est donné par un processus de Wright-Fisher qui est utilisé pour étudier la dynamique de la fréquence des gènes ou des allèles (dans ce modèle, $x(t)$ ne représente plus la taille d'une population. Pour simplifier la présentation de ce modèle, on considère une population dont la taille N est fixe et qui est composée de deux types d'individus notés a et A. Si les individus de type A mutent vers le type a avec un taux approximatif de $\dfrac{\gamma_1}{N}$ et si les individus de type a mutent vers le type A avec un taux approximatif de $\dfrac{\gamma_2}{N}$, alors la fréquence $x(t)$ du type d'individus A dans la population est décrite par le processus de Wright-Fisher suivant [Kle01]

$$\mathrm{d}x(t) = (-\gamma_1 x(t) + \gamma_2(1 - x(t)))\,\mathrm{d}t + \sqrt{x(t)(1 - x(t))}\,\mathrm{d}w(t).$$

L'EDS suivante [All07]

$$\mathrm{d}x(t) = (b - d)x(t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{(b + d)x(t)}\,\mathrm{d}w(t)$$

est un modèle couramment utilisé pour étudier la dynamique d'une population où $x(t)$ est la taille de la population, tandis que b et d sont respectivement les taux de naissance et de mortalité *per capita* au sein de cette population.

(3) Application à la dynamique des populations : compétition et/ou mutualisme.

Dans la nature, on peut distinguer deux types principaux de relations entre deux (ou plusieurs) espèces ou au sein d'une même espèce :

- la compétition : il s'agit d'une interaction dans laquelle les individus impliqués sont en rivalité et ont des intérêts opposés.
- le mutualisme : il s'agit d'une interaction dans laquelle les individus impliqués tirent tous un bénéfice de cette relation.

La dynamique de l'évolution de la population de deux espèces en compétition et/ou en mutualisme est décrite par le modèle de Lotka-Volterra suivant [Gar80, All07, LWW11]

$$\dot{x}_1(t) = (b_1 - a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t))x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = (b_2 - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))x_2(t)$$

où

- $x_i(t) \longrightarrow$ taille de la population de la $i^{\text{ème}}$ espèce à l'instant t,
- $b_i \longrightarrow$ taux de croissance de la $i^{\text{ème}}$ espèce,
- a_{ij} $(i \neq j) \longrightarrow$ action de la $j^{\text{ème}}$ espèce sur le taux de croissance de la $i^{\text{ème}}$ espèce,
- $a_{ii} \longrightarrow$ coefficient de compétition intraspécifique de la $i^{\text{ème}}$ espèce.

Afin de prendre en compte les incertitudes dans la connaissance du taux de croissance de la $i^{\text{ème}}$ espèce, le coefficient b_i est modélisé ainsi [MMR02, MSR03, TDHS06, PDM08, LWW11]

$$b_i \longrightarrow b_i + \alpha_i \dot{w}_i$$

où $\dot{w}(t)$ est un bruit blanc gaussien centré avec une covariance unitaire et le coefficient $\alpha_i > 0$ représente l'intensité associée à ce bruit blanc. Ainsi, $\alpha_i \dot{w}_i$ est un bruit blanc gaussien centré avec une covariance α_i^2.

Une description rigoureuse nécessite de remplacer le bruit blanc $\dot{w}(t)$ par un mouvement brownien $w(t)$ centré et de covariance unitaire. On obtient ainsi l'EDS suivante [MMR02, MSR03, TDHS06, PDM08, LWW11]

$$\mathrm{d}x_1(t) = (b_1 - a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t))x_1(t)\,\mathrm{d}t + \alpha_1 x_1(t)\,\mathrm{d}w_1(t)$$
$$\mathrm{d}x_2(t) = (b_2 - a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t))x_2(t)\,\mathrm{d}t + \alpha_2 x_2(t)\,\mathrm{d}w_2(t)$$

Dans [Che82, MMR02, MSR03, PDM08], il est montré que l'introduction d'un mouvement brownien dans les équations de Lotka-Volterra permet d'améliorer l'étude du comportement asymptotique des solutions et, notamment, d'éviter le phénomène d'explosion dans la dynamique des populations étudiées.

Un modèle proies/prédateurs est un cas particulier des équations de Lotka-Volterra stochastiques suivantes (avec $a_{11} = a_{22} = 0$) [GK76, TDHS06, All07]

$$\mathrm{d}x_1(t) = (b_1 - a_{12}x_2(t))x_1(t)\,\mathrm{d}t + \alpha_1 x_1(t)\,\mathrm{d}w_1(t)$$
$$\mathrm{d}x_2(t) = -(b_2 - a_{21}x_1(t))x_2(t)\,\mathrm{d}t + \alpha_2 x_2(t)\,\mathrm{d}w_2(t)$$

où

- $x_1(t) \longrightarrow$ effectif des proies à l'instant t,
- $x_2(t) \longrightarrow$ effectif des prédateurs à l'instant t,
- $b_1 > 0 \longrightarrow$ taux de reproduction des proies (indépendant du nombre de prédateurs),
- $b_2 > 0 \longrightarrow$ taux de mortalité des prédateurs (indépendant du nombre de proies),
- $a_{12} > 0 \longrightarrow$ taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés,
- $a_{21} > 0 \longrightarrow$ taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées.

(4) Application aux circuits électriques : circuit RLC.

Lorsqu'un circuit RLC est situé à proximité d'appareils électriques, la valeur de l'inductance peut changer du fait des interactions électromagnétiques. On suppose donc que la valeur réelle de l'inductance L dans le circuit de la figure 1.8 est donnée par [UP99]

$$L^{-1}(t) = L_0^{-1} + L_1^{-1}\dot{w}(t)$$

où $\dot{w}(t)$ est un bruit blanc gaussien centré avec une covariance unitaire et L_0 est la valeur moyenne de l'inductance.

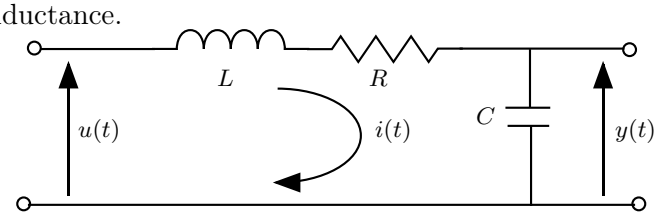


FIGURE 1.8 – Circuit électrique RLC.

Une description rigoureuse nécessite de remplacer le bruit blanc $\dot{w}(t)$ par un mouvement brownien $w(t)$ centré et de covariance unitaire. On obtient ainsi l'EDS suivante [UP99, Dam04]

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}i(t) \\ \mathrm{d}y(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{-R}{L_0} & \frac{-1}{L_0} \\ \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \right) \mathrm{d}t + \left(\begin{bmatrix} \frac{-R}{L_1} & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \right) \mathrm{d}w(t)$$

pour décrire la dynamique du courant et de la tension aux bornes du condensateur.

(5) Application aux systèmes mécaniques : système masse-ressort.

On considère le système mécanique décrit dans la figure 1.9 et composé de deux chariots liés avec un ressort [Ugr98, UP99].

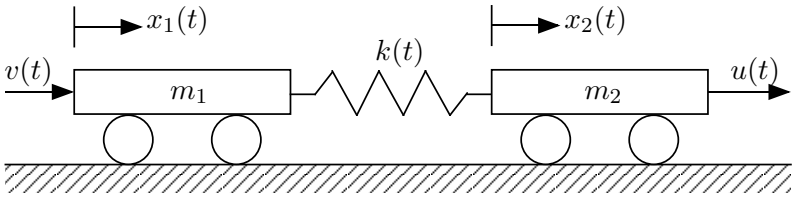


FIGURE 1.9 – Système mécanique masse-ressort.

La perturbation exogène $v(t)$ est la force qui agit sur le premier chariot de masse $m_1 = 1$ [kg]. La commande $u(t)$ est réalisée par la force qui tire le deuxième chariot de masse $m_2 = 1$ [kg]. La raideur $k(t)$ du ressort a une valeur nominale $k_0 = 1.25$ [kg/s^{-2}] mais est incertaine car sa valeur réelle n'est pas connue.

Dans le cas déterministe, le système mécanique de la figure 1.9 est décrit par l'équation [Ugr98, UP99, Dam04, ZSH+04]

$$\dot{x}(t) = (A + \overline{B}\Delta(t)\overline{C})x(t) + B_v v(t) + B_u u(t)$$

où $x(t) = [\, x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; \dot{x}_1(t) \;\; \dot{x}_2(t) \,]^T$ est l'état composé des positions et des vitesses des deux chariots et $\Delta(t) = k(t) - k_0$ représente l'incertitude sur la raideur du ressort.

Les matrices du modèle sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.25 & 1.25 & 0 & 0 \\ 1.25 & -1.25 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On suppose maintenant que la raideur $k(t)$ suit une distribution gaussienne centrée autour de k_0 pour des valeurs variant dans l'intervalle [0.5 2].

Afin que $k(t) = k_0 + \Delta(t)$ vérifie l'inégalité $0.5 \leqslant k(t) \leqslant 2$ avec une probabilité très grande, nous choisissons un écart type $\sigma = 0.25$ où $\mathbf{E}(\Delta^2(t)) = \sigma^2$.

Vu les hypothèses faites sur la distribution de $k(t)$, et donc de $\Delta(t)$, nous avons la probabilité $\mathbf{P}(|k(t) - k_0| \leqslant 0.75) \geqslant 0.997$.

Le système mécanique dans la figure 1.9 peut alors être mis sous la forme de l'EDS suivante [Ugr98, UP99, Dam04, ZSH+04]

$$\mathrm{d}x(t) = (A_t x(t) + B_v v(t) + B_u u(t))\,\mathrm{d}t + A_w x(t)\,\mathrm{d}w(t)$$

où $A_t = A + 0.5A_w^2 = A + 0.5\sigma^2(\overline{B}\,\overline{C})^2$, $A_w = \sigma\overline{B}\,\overline{C}$ et $w(t)$ est un movement brownien centré et de covariance unitaire. Notons que la valeur de la raideur $k(t)$ peut dépasser les bornes présumées des incertitudes (l'intervalle [0.5 2]) avec une probabilité non nulle.

Remarque 1.7.1. Dans [Sus78], Sussmann a montré que l'EDS précédente doit être écrite au sens de Stratonovich [4] suivante

$$\mathrm{d}x(t) = (Ax(t) + B_v v(t) + B_u u(t))\,\mathrm{d}t + A_w x(t) \circ \mathrm{d}w(t)$$

où "$\circ$" désigne la formulation de Stratonovich. L'EDS au sens de Stratonovich précédente est équivalente à l'EDS au sens d'Itô suivante [Mao94b, Øks03, All07]

$$\mathrm{d}x(t) = ((A + 0.5A_w^2)x(t) + B_v v(t) + B_u u(t))\,\mathrm{d}t + A_w x(t)\,\mathrm{d}w(t).$$

Dans l'exemple ci-dessus, on a $(\overline{B}\,\overline{C})^2 = 0$ et donc $A_t = A + 0.5A_w^2 = A + 0.5\sigma^2(\overline{B}\,\overline{C})^2 = A$. □

Les spécificités d'un traitement déterministe ou stochastique des incertitudes paramétriques peuvent être résumées comme suit.

- Cas des incertitudes déterministiques : cette description des incertitudes est plus précise et permet de prendre en compte la structure de leur répartition parmi les paramètres du modèle. La bornitude de ces incertitudes est garantie.
- Cas des incertitudes stochastiques : une bornitude en probabilité est garantie puisque ces incertitudes peuvent sortir des bornes prescrites avec une probabilité non nulle (mais "suffisamment faible"). Cette probabilité diminue si l'écart type σ diminue et tend vers 0 si $\sigma \to 0$.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, un état de l'art a été présenté sur les systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs. Après avoir introduit les processus stochastiques et le mouvement brownien,

4. Voir [Str60, Øks03, All07] pour la forme de Stratonovich d'une EDS.

l'essentiel de ce chapitre a été consacré aux équations différentielles stochastiques et à la stabilité du point d'équilibre de ces équations.

Après avoir mis en évidence les différences entre les équations différentielles stochastiques lorsque les bruits sont additifs ou multiplicatifs, la notion de processus d'Itô a été expliquée et la formule d'Itô a été développée. La formule d'Itô est très importante car, les mouvements browniens étant non dérivables, cette formule permet de réaliser des calculs sur les processus stochastiques. L'accent est aussi mis sur les conditions d'existence et d'unicité d'une solution d'une équation différentielle stochastique avec des bruits multiplicatifs.

Une partie importante de ce chapitre est dédiée à la stabilité du point d'équilibre d'une équation différentielle stochastique. Les principales définitions de stabilité pour ces systèmes sont présentées et les conditions de stabilité via une approche de type Lyapunov sont données pour ces définitions de stabilité. Bien que ce soit la stabilité exponentielle en moyenne quadratique qui est très majoritairement mise en œuvre dans la littérature sur les systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs, c'est la stabilité exponentielle presque sûre qui est utilisée dans ce mémoire (à l'exception de la section 5.3 du chapitre 5). Ce choix pour la stabilité est motivé par une étude comparative entre la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et la stabilité exponentielle presque sûre. Cette étude a permis de montrer, sous des hypothèses "peu restrictives", que la stabilité exponentielle en moyenne quadratique implique la stabilité exponentielle presque sûre, la réciproque étant fausse. De plus, le rôle stabilisant ou déstabilisant des bruits multiplicatifs a été mis en évidence lorsque c'est la stabilité exponentielle presque sûre qui est utilisée, ces bruits ayant un effet uniquement déstabilisant lorsque c'est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique qui est employée.

Le lemme borné réel pour les systèmes stochastiques est démontré. Il s'agit de l'application de la commande $\mathcal{H}_\infty$ pour ces systèmes lorsque la notion de stabilité retenue est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

Ce chapitre se termine par la présentation d'exemples d'application des équations différentielles stochastiques à divers types de domaines (finance, biologie, électricité, mécanique, ...).

Chapitre 2

Stabilité des équations différentielles stochastiques de grande dimension : application au filtrage

Sommaire

2.1 Introduction 52
2.2 Formulation du problème de filtrage avec la stabilité exponentielle presque sûre 54
2.3 Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes triangulaires : cas Lipschitz 57
2.4 Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes triangulaires : cas one-sided Lipschitz 64
2.5 Application au filtrage d'ordre plein 68
2.5.1 Cas des mesures stochastiques 68
2.5.2 Cas des mesures déterministes 69
2.6 Extension au filtrage d'ordre réduit 70
2.6.1 Cas des mesures stochastiques 70
2.6.2 Cas des mesures déterministes 72
2.7 Conclusion 73

2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié au filtrage des systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs. Ces systèmes sont décrits dans le chapitre 1. La synthèse d'un observateur, aussi appelé filtre, afin d'estimer l'état d'un système est un des problèmes majeurs de l'automatique car, pour des raisons technologiques, d'accès ou de coût, certaines variables d'état ne sont pas mesurées. Afin de commander un processus lorsque les variables d'état sont partiellement disponibles, de faire du diagnostic (détecter et isoler des défaillances) ou de la supervision, il est nécessaire de reconstruire les états qui ne sont pas mesurés ou d'estimer leur évolution lorsque les mesures sont entachées par des bruits ou par des perturbations.

Parfois, dans la littérature, on différencie les filtres et les observateurs : on parle de filtre (donc de filtrage) lorsque, en plus de la stabilité, on prend en compte un critère de performance sur l'erreur de filtrage (atténuation de type $\mathcal{H}_\infty$, minimisation de la variance en présence de bruits additifs (filtre de Kalman, ...)), tandis qu'on emploie le mot observateur lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la stabilité de l'erreur d'observation. Dans la suite de ce manuscrit, on utilise indifféremment les termes "filtre" ou "observateur".

Les travaux fondateurs pour la théorie des observateurs sont ceux de Kalman et Bucy quant à la synthèse du célèbre filtre de Kalman [Kal60, KB61] et de Luenberger [Lue66, Lue71]. Plusieurs livres abordent de manière détaillée la synthèse d'observateurs ou de filtres : le filtrage optimal des systèmes linéaires dans [AM79], les observateurs d'ordre plein ou réduit pour ces systèmes dans [O'R83], les lois de commande basées sur un observateur dans [KS72] et les filtres pour les systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs dans [GS13].

Il existe de nombreux travaux sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires ou non linéaires. Concernant le cas linéaire, outre les publications de Luenberger, on peut citer [Tse73, GM89, Sha90, Fu91, HBM91, NK91, YS91b, YS91a, ST92a, ST92b, YS92, SK94, DGF94, HSK96b, HSK96c, HSK96a, KRB96, TS96a, DZ97, PP98, XFL98, BM99, HSK99, KSH00, BC01, CF01, HK01] pour les observateurs d'ordre plein (les dimensions des états de l'observateur et du système sont identiques) et [Hip89, HW90, WH90, PSS91, YH97, HC00] pour les observateurs d'ordre réduit (la dimension de l'état de l'observateur est inférieure à celle de l'état du système). Le problème de la dimension minimale de l'état de l'observateur est traité dans [FW72, Moo72, ML75, RB75, GFH81, Tsu85]. Dans [BS85, BS86, NHS87a, NHS87b, WG98, Dar00a, Dar00b, DZB00, DZS01, SDZ06], les auteurs abordent la synthèse d'un filtre fonctionnel de dimension minimale ou non : il s'agit d'estimer une fonction de l'état d'un système sans reconstruire l'ensemble de cet état. Dans la suite de ce manuscrit, le problème de la synthèse d'un observateur fonctionnel d'ordre réduit pour un système stochastique est traité. Le filtrage robuste en présence d'incertitudes paramétriques est abordé dans [XdF91, FdX92, PM94, XS94, XSd94, PM96, TS96b, LF97, Ger99, GB99, WB99, PP00, EC01, Say01, XdS94, Sd95, BC00, SP97, TAN01, DZS01].

Dans le cas non linéaire, l'importance des entrées et de l'observabilité pour la synthèse d'un observateur est mise en exergue dans [HK77, Wil77, Nij81]. En se basant sur ces travaux, des observateurs à grand gain pour les systèmes non linéaires sont proposés dans [DG91, GHO92, DG91, DBGR92, DBB$^+$93, BD99, HTA02, RHMB08, FMR04, FSCM10, GSZD10]. Outre les observateurs à grand gain, il existe de nombreuses approches pour la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires lipschitziens. Sans être exhaustif, on peut citer [DSN79, WŻ87, Zei87, BCC88, XG88, HP99, Tsi89, Tsi90b, Tsi90a, DFG90, dXW93, RH94, MT95, XZ97, CR97, Raj98, RC98, ZRMD98, AK01b, AK01a, FA03, WK03, Tsi08, ZBB08, ZB09, PRP11, ZB13, GSZD12]. La synthèse d'observateurs d'ordre réduit pour différentes classes de systèmes non linéaires est traitée dans [Tha73, HF76, Fun79, GI81, NS88, BH95, BH96, BB97, Bes00, ZH02, SZRD06,

KCA08, XHZ09, BZH10, ZB11, GSZD10].

Comme l'illustre la section 1.7, les systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs sont bien adaptés pour modéliser de nombreux processus dynamiques, c'est pourquoi, depuis la dernière décennie, de nombreux travaux se sont intéressés à la synthèse d'observateurs pour ces systèmes. Dans la suite de ce manuscrit, on ne considère que les systèmes stochastiques à temps continu. Dans la littérature, c'est la stabilité en moyenne quadratique qui est utilisée pour la synthèse d'observateurs pour les systèmes stochastiques à temps continu avec des bruits multiplicatifs [Phi89, CGS00, GLSY01, GMP02, XC02, XC03, ZCT05, GLW06, GSB07, HSRZ09, BS10]. Dans ces travaux, l'approche employée est basée sur des fonctions de Lyapunov quadratiques (voir théorème 1.5.4) et requiert la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre du système à observer car, du fait de la présence de bruits multiplicatifs, on ne peut pas éliminer le bruit dans l'EDS décrivant la dynamique de l'erreur d'estimation. A l'exception de [ZCT05, HSRZ09], les systèmes stochastiques considérés dans les travaux cités ci-dessus ont une dérive et une diffusion linéaires. Phillis [Phi89] propose un observateur d'ordre plein lorsque les mesures sont stochastiques. La stabilité exponentielle en moyenne quadratique est obtenue en minimisant la trace du second moment de l'état augmenté, ce dernier étant défini comme la concaténation de l'état du système et de l'erreur d'estimation. Un filtre sous-optimal d'ordre plein est proposé dans [CGS00] lorsque les mesures sont stochastiques. L'approche utilisée est basée sur une réécriture de la formule d'Itô avec des produits de Kronecker. Dans [GLSY01], les auteurs synthétisent des filtres d'ordre plein en minimisant un critère $\mathcal{H}_\infty$ ou un critère mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Dans [GMP02], les auteurs proposent un filtre à entrées inconnues, ces dernières affectant de manière additive l'EDS du système stochastique et les mesures stochastiques : la dynamique de l'erreur d'estimation est indépendante des entrées inconnues. Dans [XC02], un observateur d'ordre réduit est proposé en minimisant la norme $\mathcal{H}_\infty$ stochastique, aussi appelée gain $\mathcal{L}_2$ stochastique (voir définition 1.6.1). Dans [XC03], un filtre $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre plein est proposé avec des mesures échantillonnées bien que le système stochastique considéré soit à temps continu. Dans [GLW06], un observateur d'ordre plein est synthétisé en présence de retards affectant l'EDS et les mesures du système stochastique, l'objectif à minimiser étant un gain induit $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$ entre des perturbations additives à énergie bornée et la borne supérieure du second moment de l'erreur d'estimation. Dans [GSB07], les auteurs proposent un filtre $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre plein lorsqu'il y a des retards sur l'EDS du système stochastique et sur les mesures, ces dernières étant stochastiques. Les retards sont inconnus, mais une borne de ces derniers est disponible. Dans [BS10], un observateur d'ordre plein est proposé lorsque les mesures sont stochastiques en minimisant un gain induit $\mathcal{L}_\infty/\mathcal{L}_\infty$ entre des perturbations additives bornées et la borne supérieure du second moment de l'erreur d'estimation. La robustesse des observateurs proposés vis-à-vis d'incertitudes paramétriques est traitée dans [GLSY01, GLW06, BS10] avec des incertitudes polytopiques et dans [XC03, GLW06] avec des incertitudes non structurées et bornées en norme. Un observateur $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre plein est proposé dans [ZCT05] lorsque la dérive et la diffusion de l'EDS du système stochastique sont constituées par une partie linéaire et par une partie non linéaire. L'équation des mesures est stochastique. Une extension aux observateurs robustes $\mathcal{H}_\infty$ est traitée lorsque les parties non linéaires de la dérive et de la diffusion ne sont pas connues, la seule information disponible étant une borne supérieure des constantes de Lipschitz de ces parties non linéaires. Un filtre fonctionnel $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit est synthétisé dans [HSRZ09] lorsque la dérive de l'EDS du système stochastique est bilinéaire et que les mesures sont stochastiques. La synthèse est basée sur le paramétrage des solutions de plusieurs équations de Sylvester.

Si les conditions de type Lyapunov sont satisfaites avec le théorème 1.5.4, alors, d'une part, le point d'équilibre de l'EDS considérée est exponentiellement stable en moyenne quadratique et, d'autre part, les conditions du théorème 1.5.3 sont satisfaites avec $c_3 = 0$, le point d'équilibre

de l'EDS est donc aussi exponentiellement presque sûrement stable. La réciproque est fausse si $c_3 > 0$ dans le théorème 1.5.3 (on a alors la stabilité exponentielle presque sûre, mais pas la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, voir la section 1.5.3.1 dans le chapitre 1). C'est pourquoi, afin d'étendre les conditions d'existence des observateurs données dans la littérature, le but de ce chapitre (et du chapitre suivant) est la synthèse d'observateurs pour les systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs en garantissant que l'erreur d'observation soit presque sûrement exponentiellement stable.

Dans la section 2.2, on montre que, du fait de la structure intrinsèque de l'erreur d'observation, les théorèmes utilisant une approche de type Lyapunov pour la stabilité exponentielle presque sûre ne peuvent pas être utilisés. La structure triangulaire liée au problème du filtrage des systèmes stochastiques est exploitée dans ce chapitre pour synthétiser un observateur garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique n'étant pas requise. L'approche proposée permet de découpler la synthèse en séparant l'analyse de la stabilité du système stochastique proprement dit de celle de l'erreur d'observation.

C'est pourquoi, dans la section 2.3 pour les EDS dont la dérive satisfait une contrainte de type Lipschitz et dans la section 2.4 pour les EDS dont la dérive satisfait une contrainte de type one-sided Lipschitz, un théorème montre que la stabilité exponentielle presque sûre d'une classe de systèmes triangulaires stochastiques est équivalente à la stabilité exponentielle presque sûre de chaque "sous-système bloc-diagonal" considéré isolément sans les termes d'interconnexion. Dans [Mao92b], avec une approche basée sur les exposants de Lyapunov, et dans [Bou99], avec une approche de type Lyapunov, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique des systèmes stochastiques triangulaires est étudiée en fonction de celle de chaque "sous-système bloc-diagonal" considéré isolément, mais du fait de la relation (1.10a) (l'intégrale stochastique au sens d'Itô de la diffusion multilpliée par la différentielle du mouvement brownien est nulle), les travaux présentés dans [Mao92b, Bou99] diffèrent de ceux développés dans ce chapitre. Dans le contexte déterministe, ce problème est abordé dans [Vid80] et [Son89, Son90]. Cette approche est étendue au cas des systèmes stochastiques non triangulaires dans le cas de la stabilité exponentielle en moyenne quadratique [Mao92b], tandis que le cas de la stabilité exponentielle presque sûre est traité dans [BZSM15b].

Les résultats de stabilité exponentielle presque sûre pour une classe de systèmes triangulaires stochastiques développés dans les sections 2.3 et 2.4 sont appliqués à la synthèse d'observateurs d'ordre plein dans la section 2.5 et d'observateurs fonctionnels d'ordre réduit dans la section 2.6. Dans ces deux sections, plusieurs cas sont considérés : la dérive est de type Lipschitz ou one-sided Lipschitz, tandis que les mesures sont stochastiques ou déterministes. Les observateurs et les lois de commande proposés dans le chapitre 3, ainsi que dans les sections 4.3 et 5.4, sont basés sur les résultats développés dans les sections 2.5 et 2.6.

2.2 Formulation du problème de filtrage avec la stabilité exponentielle presque sûre

Dans ce chapitre, on considère le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) &= f(x(t),u(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t),u(t))\,\mathrm{d}w_x(t) && \text{(2.1a)}\\ \mathrm{d}y(t) &= h(x(t))\,\mathrm{d}t + q(x(t))\,\mathrm{d}w_y(t) && \text{(2.1b)} \end{aligned}$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ vecteur d'état,

- $u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ vecteur des entrées connues (commandes),
- $y(t) \in \mathbb{R}^p \longrightarrow$ vecteur des mesures,
- $f(x(t), u(t)) \longrightarrow$ la dérive,
- $g(x(t), u(t)) \longrightarrow$ la diffusion,
- $h(x(t))$ et $q(x(t)) \longrightarrow$ fonctions de l'équation de mesure,
- $w_x(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré,
- $w_y(t) \in \mathbb{R}^\ell \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré.

Sans perte de généralité, on suppose que le vecteur des entrées $u(t)$ est borné, c'est-à-dire que les entrées admissibles $u(t)$ appartiennent à l'ensemble Γ donné par

$$\Gamma = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \mid u_{i\min} \leqslant u_i(t) \leqslant u_{i\max}, \quad i = 1, \ldots, m\}. \tag{2.2}$$

Pour tout $u(t) \in \Gamma$ les fonctions $f(x(t), u(t))$ et $h(x(t))$ sont module-intégrables et les fonctions $g(x(t), u(t))$ et $q(x(t))$ sont carré-intégrables (voir la définition 1.4.2).

Afin d'étudier la stabilité, on suppose que, pour tout $u(t) \in \Gamma$, $f(0, u(t)) = 0$, $g(0, u(t)) = 0$, $h(0) = 0$ et $q(0) = 0$. Ainsi, $x(t) = 0$ est la solution triviale de l'EDS (2.1a).

L'observateur pour le système (2.1) est donné par l'EDS (voir [TR76])

$$\mathrm{d}\widehat{x}(t) = f(\widehat{x}(t), u(t))\,\mathrm{d}t + \psi(u(t))(\mathrm{d}y(t) - h(\widehat{x}(t))\,\mathrm{d}t) \tag{2.3}$$

où $\psi(u(t))$ est une matrice de gain à déterminer qui peut dépendre de paramètres connus (tels que les commandes $u(t)$ par exemple) afin que l'erreur de filtrage $e(t)$ définie par

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \tag{2.4}$$

soit exponentiellement presque sûrement stable (voir la définition 1.5.4).

Bien que ce soit la stabilité exponentielle en moyenne quadratique (voir la définition 1.5.7) qui est très majoritairement utilisée dans la littérature (voir [CGS00, GMP02, BS10, GLSY01, HSRZ09, XC02, XC03, ZCT05, GLW06, GSB07, Phi89]), on s'intéresse à la stabilité exponentielle presque sûre car, sous des hypothèses "peu restrictives", le point d'équilibre d'une EDS peut être exponentiellement stable presque sûrement alors qu'il est exponentiellemement instable en moyenne quadratique (voir les développements et les exemples présentés dans la section 1.5.3).

La dynamique de l'erreur de filtrage est donnée par l'EDS suivante

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e(t) = (f(x(t), u(t)) - f(x(t) - e(t), u(t)) - \psi(u(t))(h(x(t)) - h(x(t) - e(t)))\,\mathrm{d}t \\ + g(x(t), u(t))\,\mathrm{d}w_x(t) - \psi(u(t))q(x(t))\,\mathrm{d}w_y(t).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Puisque la dynamique de l'erreur de filtrage est fonction de l'état $x(t)$ et que le bruit $w_x(t)$ est multiplié par l'état $x(t)$ dans l'EDS (2.1a), il s'en suit que la stabilité du point d'équilibre de l'EDS (2.5) dépend de la stabilité du point d'équilibre de l'EDS (2.1a) décrivant la dynamique de l'état $x(t)$ à observer. Ainsi, le problème de la synthèse d'un filtre pour le système stochastique (2.1) requiert de garantir simultanément la stabilité de l'EDS (2.1a) associée à l'état $x(t)$ du système et la stabilité de l'EDS (2.5) relative à l'erreur de filtrage $e(t)$. En effet, l'état $x(t)$ ne peut pas être éliminé de la dynamique de l'erreur d'observation et il n'y a aucun "feedback" permettant d'agir sur $x(t)$ dans le problème du filtrage.

Remarque 2.2.1. Dans la littérature sur le filtrage des systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs, les conditions de stabilité proposées incluent la stabilité exponentielle en moyenne quadratique simultanée du point d'équilibre de l'EDS (2.1a) et du point d'équilibre de l'EDS (2.5) (voir [CGS00, GMP02, BS10, GLSY01, HSRZ09, XC02, XC03, ZCT05, GLW06, GSB07, Phi89]).

Pour éviter d'utiliser la condition de stabilité associée à l'EDS (2.1a), les auteurs dans [TR76, YA93] ont fait l'hypothèse que $g(x(t), u(t))$ et $q(x(t))$ sont des fonctions bornées pour tout $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $u(t) \in \Gamma$. Dans ces deux articles, c'est la bornitude exponentielle en moyenne quadratique (voir la définition 1.5.8). Cette hypothèse est restrictive. Par exemple, elle ne s'applique pas sur les deux exemples simples traités dans la section 1.5.3 lorsque les conditions de stabilité exponentielle en moyenne quadratique des EDS sont satisfaites. □

Le problème de filtrage peut donc se formuler comme celui de la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre du système augmenté triangulaire suivant

$$\mathrm{d}X(t) = F(X(t), u(t))\,\mathrm{d}t + G(X(t), u(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{2.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
X(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \qquad w(t) = \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix}, \\
F(X(t), u(t)) &= \begin{bmatrix} f(x(t), u(t)) \\ f(x(t), u(t)) - f(x(t) - e(t), u(t)) - \psi(u(t))(h(x(t)) - h(x(t) - e(t))) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), e(t), u(t)) \end{bmatrix}, \\
G(X(t), u(t)) &= \begin{bmatrix} g(x(t), u(t)) & 0 \\ g(x(t), u(t)) & -\psi(u(t))q(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x(t), u(t)) \\ g_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Hypothèse 2.2.1 (**Existence et unicité de la solution**). *Pour tout $u(t) \in \Gamma$, les fonctions $F(X(t), u(t))$ et $G(X(t), u(t))$ vérifient les conditions (1.23) et (1.24) dans le théorème 1.4.4 en remplaçant l'EDS (1.25) par (2.6).*

On va maintenant analyser les conditions de stabilité exponentielle presque sûre en appliquant deux démarches :

- une approche de type Lyapunov,
- une approche basée sur la stabilisation avec les bruits.

(1) Approche de type Lyapunov. Soit une fonction de Lyapunov candidate $V(X(t))$ définie positive. En appliquant le théorème 1.5.3, la condition (1.50c), donnée par

$$\|\mathfrak{B}V(X(t))\|^2 \geqslant c_3 V^2(X(t))$$

avec $c_3 \geqslant 0$ et $\mathfrak{B}V(X(t))$ défini en (1.47), génère une constante $c_3 = 0$ car

$$\mathfrak{B}V(X(t))\Big|_{X=\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ e(t) \end{smallmatrix}\right]} = 0, \tag{2.7}$$

puisque $G(X(t), u(t)) = 0$ si $X(t) = \begin{bmatrix} 0^T & e^T(t) \end{bmatrix}^T$. On ne peut donc appliquer le théorème 1.5.3 que si $c_2 < 0$, ce qui revient à se limiter au cas où le point d'équilibre de l'EDS (2.1a) est exponentiellement stable en moyenne quadratique (voir la relation (1.53) dans le théorème 1.5.4 et les relations (1.50b) et (1.52) avec $c_3 = 0$ dans le théorème 1.5.3). Par contre, si le point d'équilibre de l'EDS (2.1a) est exponentiellement presque sûrement stable, mais pas exponentiellement stable en moyenne quadratique, alors il faut que $c_2 \geqslant 0$. Dans ce cas, on ne peut pas appliquer le théorème 1.5.3 avec $c_3 = 0$.

(2) Approche basée sur la stabilisation avec les bruits. Puisque $G(X(t), u(t)) = 0$ si $X(t) = \begin{bmatrix} 0^T & e^T(t) \end{bmatrix}^T$, on ne peut pas appliquer le théorème 1.5.9 parce que $\rho = 0$ dans (1.88). Quant au théorème 1.5.11, il ne s'applique pas directement au problème de filtrage traité car ce théorème aborde la stabilisation en ajoutant un terme bruité supplémentaire dans l'EDS (il s'agit du terme "$\sum_{i=0}^{d} B_i x(t)\,\mathrm{d}w_i(t)$" dans l'EDS (1.92)).

Pour étudier la stabilité exponentielle presque sûre de l'EDS (2.6) sans se restreindre au cas où $c_2 > 0$ dans le théorème 1.5.3, on propose d'exploiter la structure triangulaire du problème de filtrage mis en évidence par la structure de l'EDS (2.6). Comme l'a fait Mao dans [Mao92b], on considère les EDS suivantes obtenues à partir de (2.6)

$$\mathrm{d}x_1(t) = f_1(x_1(t), u(t))\,\mathrm{d}t + g_1(x_1(t), u(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{2.8a}$$
$$\mathrm{d}x_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))\,\mathrm{d}t + g_2(x_1(t), u(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{2.8b}$$

où $x_1(t)$ correspond à l'état $x(t)$ et $x_2(t)$ à l'erreur de filtrage $e(t)$ avec, pour tout $u(t) \in \Gamma$, $f_1(0, u(t)) = 0$, $f_2(0, 0, u(t)) = 0$, $g_1(0, u(t)) = 0$ et $g_2(0, u(t)) = 0$.

Aux EDS (2.8a) et (2.8b), on associe les EDS "bloc-diagonales" suivantes (car $g_2(0, u(t)) = 0$)

$$\mathrm{d}\overline{x}_1(t) = f_1(\overline{x}_1(t), u(t))\,\mathrm{d}t + g_1(\overline{x}_1(t), u(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{2.9a}$$
$$\mathrm{d}\overline{x}_2(t) = f_2(0, \overline{x}_2(t), u(t))\,\mathrm{d}t \tag{2.9b}$$

Dans la suite de cette section, on va montrer, sous des hypothèses de type Lipschitz (voir section 2.3) ou one-sided Lipschitz (voir section 2.4) sur les fonctions $f_1(x_1(t), u(t))$, $f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$, $g_1(x_1(t), u(t))$ et $g_2(x_1(t), u(t))$, que la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (2.8) est équivalente à celle du point d'équilibre de l'EDS (2.9). Cette approche exploitant la structure triangulaire du système a été utilisée par Vidyasagar dans [Vid80] pour les EDO. Cette technique a été reprise par Mao dans [Mao92b] et Boulanger dans [Bou99] pour les EDS en considérant la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Outre la différence du type de stabilité utilisé, une différence importante des développements présentés dans la suite de ce chapitre avec ceux de Mao dans [Mao92b] et de Boulanger dans [Bou99] est le fait que l'espérance de l'intégrale stochastique de la dérive est nulle (voir la relation (1.10a)).

2.3 Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes triangulaires : cas Lipschitz

Dans cette section, on considère que les fonctions $\begin{bmatrix} f_1^T(x_1(t), u(t)) \\ f_2^T(x_1(t), x_2(t), u(t)) \end{bmatrix}^T$ et $\begin{bmatrix} g_1^T(x_1(t), u(t)) \\ g_2^T(x_1(t), u(t)) \end{bmatrix}^T$, définies dans (2.8), sont Lipschitz et vérifient l'hypothèse 2.2.1 et l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.3.1. *[BZSM12a, BZSM15a] Il existe un réel $k > 0$ tel que, $\forall\, t \geqslant 0$, $\forall\, u(t) \in \Gamma$,*

$$\|f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) - f_2(0, \overline{x}_2(t), u(t))\| \leqslant k\left(\|x_1(t)\| + \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|\right), \tag{2.10a}$$
$$\mathrm{tr}\big((g_i(x_1(t), u(t)) - g_i(\overline{x}_1(t), u(t)))(g_i(x_1(t), u(t)) - g_i(\overline{x}_1(t), u(t)))^T\big) \leqslant k\,\|x_1(t) - \overline{x}_1(t)\|^2 \qquad i = 1, 2. \tag{2.10b}$$

Le théorème suivant permet d'étudier la stabilité du point d'équilibre de l'EDS (2.8) en utilisant l'EDS (2.9).

Théorème 2.3.1 (Stabilité exponentielle presque sûre d'une EDS triangulaire : cas Lipschitz). *[BZSM12a, BZSM15a] Avec l'hypothèse 2.3.1, le point d'équilibre de l'EDS (2.8) est exponentiellement presque sûrement stable si et seulement si le point d'équilibre de l'EDS (2.9) est exponentiellement presque sûrement stable.*

Puisque, pour tout $u(t) \in \Gamma$, $f_1(0, u(t)) = 0$, $f_2(0, 0, u(t)) = 0$, $g_1(0, u(t)) = 0$ et $g_2(0, u(t)) = 0$, et que l'hypothèse 2.3.1 est vraie pour tout $u(t) \in \Gamma$, la démonstration de ce théorème est faite avec $u(t) = 0$ sans perte de généralité, ce qui permet d'alléger les développements mathématiques.

Démonstration.

Soit $\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} \overline{x}_1^T(t) & \overline{x}_2^T(t) \end{bmatrix}^T$, la solution de l'EDS (2.9) avec $\overline{x}_1(t_0) = \overline{x}_{1_0}$ et $\overline{x}_2(t_0) = \overline{x}_{2_0}$.

Soit $x(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix}^T$, la solution de l'EDS (2.8) avec $x_1(t_0) = \overline{x}_{1_0} = x_{1_0}$ et $x_2(t_0) = \overline{x}_{2_0} = x_{2_0}$.

Partie "seulement si".

La stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (2.8) est équivalente à

$$\exists\, \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) < -\alpha < 0 \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, \overline{x}_{1_0} \in \mathbb{R}^{n_1}, \overline{x}_{2_0} \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

Puisque $x_1(t) = \overline{x}_1(t)$, on a

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|\overline{x}_1(t)\|) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) < -\alpha < 0 \qquad \text{p.s.}$$

Pour $x_{1_0} = 0$, on a $x_1(t) = 0\ \forall\, t \geqslant 0$ et $x_2(t) = \overline{x}_2(t)$, ce qui donne

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|\overline{x}_2(t)\|) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|) < -\alpha < 0 \qquad \text{p.s.}$$

Partie "si".

La stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (2.9) est équivalente à

$$\exists\, \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|\overline{x}_i(t)\|) < -\alpha < 0 \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, \overline{x}_{i_0} \in \mathbb{R}^{n_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.11}$$

ce qui est équivalent à

$$\|\overline{x}_i(t)\|^2 \leqslant M \|\overline{x}_{i_0}\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, t \geqslant t_0, \qquad i = 1, 2, \tag{2.12}$$

avec $M > 0$ qui est une variable aléatoire finie positive.

Puisqu'on a $x_1(t, t_0, \overline{x}_{1_0}) = \overline{x}_1(t, t_0, \overline{x}_{1_0})$, on obtient

$$\|x_1(t)\|^2 \leqslant M \|\overline{x}_{1_0}\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, t \geqslant t_0. \tag{2.13}$$

On pose

$$0 < \varepsilon < \alpha, \tag{2.14}$$

$$\delta = \frac{\ln(2M)}{\varepsilon}, \tag{2.15}$$

$$\rho = \delta \ \vee \ \frac{1}{\varepsilon} \left(8k\delta - \ln\Big(\frac{\alpha}{2kM}\Big) \right), \tag{2.16}$$

avec $a \vee b = \max(a, b)$, $\alpha > 0$ et $M > 0$ définis respectivement dans (2.11) et (2.12).

Il reste donc à montrer que

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x_2(t)\|) < -(\alpha - \varepsilon) \qquad \text{p.s.} \tag{2.17}$$

On va procéder en cinq étapes avec $\sigma \geqslant \rho$.

1ère étape : majoration de $\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2$ dans l'intervalle $t_0 + \sigma \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma + 2\delta$.

Soit t défini comme suit

$$t_0 + \sigma \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma + 2\delta, \tag{2.18}$$

alors

$$\exists\, \overline{x}_2(t) = \overline{x}_2(t, t_0 + \sigma, x_2(t_0 + \sigma)) \tag{2.19}$$

avec un instant initial $t_0 + \sigma$ et un état initial $x_2(t_0 + \sigma) = \overline{x}_2(t_0 + \sigma)$.

Soit la fonction $\Phi(t)$ suivante

$$\Phi(t) = \|(x_2(t) - \overline{x}_2(t))\|^2 = (x_2(t) - \overline{x}_2(t))^T (x_2(t) - \overline{x}_2(t)) \tag{2.20}$$

L'application de la formule d'Itô sur (2.20) donne

$$\mathrm{d}\Phi = (2(x_2 - \overline{x}_2)^T (f_2(x_1, x_2) - f_2(0, x_2)) + g_2^T(x_1) g_2(x_1))\,\mathrm{d}t + (2(x_2 - \overline{x}_2)^T g_2(x_1))\,\mathrm{d}w(t) \tag{2.21}$$

En intégrant l'équation (2.21) entre $t_0 + \sigma$ et t, on a (voir (2.18) et (2.19))

$$\int_{t_0+\sigma}^{t} \mathrm{d}\Phi = \Phi(t) - \Phi(t_0 + \sigma) = \|(x_2(t) - \overline{x}_2(t))\|^2 - \underbrace{\|(x_2(t_0 + \sigma) - \overline{x}_2(t_0 + \sigma))\|^2}_{=0}$$

Le carré de la norme de $x_2(t) - \overline{x}_2(t)$ est donné par

$$\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 = \int_{t_0+\sigma}^{t} 2(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T (f_2(x_1(s), x_2(s)) - f_2(0, \overline{x}_2(s))) + \operatorname{tr}(g_2(x_1(s)) g_2^T(x_1(s)))\,\mathrm{d}s + \mathcal{M}(t)$$

avec

$$\mathcal{M}(t) = 2 \int_{t_0+\sigma}^{t} (x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\,\mathrm{d}w(s). \tag{2.22}$$

En utilisant la relation (2.13) et en ajoutant et retranchant le terme

$$\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^{t} \left\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2$$

dans la relation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 &= 2 \int_{t_0+\sigma}^{t} (x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T (f_2(x_1(s), x_2(s)) - f_2(0, \overline{x}_2(s)))\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_{t_0+\sigma}^{t} \operatorname{tr}(g_2(x_1(s)) g_2^T(x_1(s)))\,\mathrm{d}s + \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^{t} \left\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2 \mathrm{d}s + \mathcal{M}(t) \\ &- \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^{t} \left\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2 \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz ($\left\|x^T y\right\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$) et l'hypothèse 2.3.1, avec $g_2(0) = 0$ et $\overline{x}_1 = 0$, c'est-à-dire (voir (2.10b))

$$\operatorname{tr}(g_2(x_1(s))g_2^T(x_1(s))) \leqslant k \, \|x_1(s)\|^2 ,$$

le carré de la norme de $x_2(t) - \overline{x}_2(t)$ est majoré comme suit

$$\begin{aligned}
\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 \leqslant 2 \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\| \, \|f_2(x_1(s), x_2(s)) - f_2(0, \overline{x}_2(s))\| \, \mathrm{d}s \\
+ k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_1(s)\|^2 \, \mathrm{d}s + \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 \, \|g_2(x_1(s))\|^2 \, \mathrm{d}s \\
+ \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2 \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

et, en utilisant la condition (2.10a) dans l'hypothèse 2.3.1

$$\|f_2(x_1(s), x_2(s)) - f_2(0, \overline{x}_2(s))\| \leqslant k(\|x_1(t)\| + \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|),$$

on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 &\leqslant 2k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\| \, (\|x_1(s)\| + \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|) \, \mathrm{d}s \\
&\quad + k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_1(s)\|^2 \, \mathrm{d}s + \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 \, \|g_2(x_1(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \\
&\quad + \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant 2k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 \, \mathrm{d}s + 2k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\| \, \|x_1(s)\| \, \mathrm{d}s \\
&\quad + k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_1(s)\|^2 \, \mathrm{d}s + k \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 \, \|x_1(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \\
&\quad + \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $2 \, \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\| \, \|x_1(s)\| \leq \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 + \|x_1(s)\|^2$, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}
\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 \leqslant 3k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 \, \mathrm{d}s + 2k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_1(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \\
+ k \int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 \, \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \, \|x_1(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \\
+ \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \, \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2 \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

et, en utilisant (voir (2.13))

$$\frac{\|x_1(t)\|^2}{M \, \|x_{1_0}\|^2 \, e^{-2\alpha(t-t_0)}} \leqslant 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2 \leqslant 3k\int_{t_0+\sigma}^{t}\|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + 2k\int_{t_0+\sigma}^{t}\|x_1(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\ + k\int_{t_0+\sigma}^{t}\|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\underbrace{\frac{M\|x_{1_0}\|^2}{M\|x_{1_0}\|^2}e^{-2\alpha(s-t_0-\sigma)}}_{t_0+\sigma\leqslant s\longrightarrow\leqslant 1}\mathrm{d}s \\ + \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s \\ \leqslant 4k\int_{t_0+\sigma}^{t}\|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + 2k\int_{t_0+\sigma}^{t}\|x_1(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\ + \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En utilisant (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2 \leqslant 4k\int_{t_0+\sigma}^{t}\|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + 2kM\|x_{1_0}\|^2\int_{t_0+\sigma}^{t}e^{-2\alpha(s-t_0)}\,\mathrm{d}s \\ + \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En intégrant

$$\begin{aligned}\int_{t_0+\sigma}^{t}e^{-2\alpha(s-t_0)}\,\mathrm{d}s = e^{2\alpha t_0}\int_{t_0+\sigma}^{t}e^{-2\alpha s}\,\mathrm{d}s = \frac{e^{2\alpha t_0}}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha t}-e^{-2\alpha(t_0+\sigma)}\right) \\ = \frac{e^{-2\alpha\sigma}}{2\alpha} - \frac{e^{-2\alpha(t-t_0)}}{2\alpha} \leqslant \frac{e^{-2\alpha\sigma}}{2\alpha},\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2 \leqslant 4k\int_{t_0+\sigma}^{t}\|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + \frac{2kM}{2\alpha}\|x_{1_0}\|^2 e^{-2\alpha\sigma} \\ + \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s. \quad (2.23)\end{aligned}$$

2ème étape : majoration de $\mathcal{M}(t)$ dans l'intervalle $t_0+\sigma \leqslant t \leqslant t_0+\sigma+2\delta$.

L'inégalité martingale exponentielle (voir lemme C.1.1) donne

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t_0+\sigma\leqslant t\leqslant t_0+\sigma+2\delta}\left(\mathcal{M}(t)-\beta_1\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s\right) > 2\beta_2\right\} \leqslant 2e^{-\beta_1\beta_2}.$$

En utilisant la majoration de $\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|$, on choisit

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{M\|x_{1_0}\|^2 e^{-2\alpha\sigma}},\\ \beta_2 &= 2\ln(n)M\|x_{1_0}\|^2 e^{-2\alpha\sigma},\end{aligned}$$

et on obtient

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t_0+\sigma\leqslant t\leqslant t_0+\sigma+2\delta}\left(\mathcal{M}(t)-\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\left\|x_{1_0}\right\|^2}\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s\right)\right.$$
$$\left.>2\ln(n)M\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma}\right\}\leqslant e^{-2\ln(n)}=\frac{1}{n^2}.$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli (voir lemme C.1.3), $\exists\, n_0>0$ tel que, $\forall\, n\geqslant n_0$, on a

$$\mathcal{M}(t)-\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\left\|x_{1_0}\right\|^2}\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s\leqslant 2\ln(n)M\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma}\qquad\text{p.s.}\tag{2.24}$$

3ème étape : application du lemme de Gronwall-Bellman dans l'intervalle $t_0+\sigma\leqslant t\leqslant t_0+\sigma+2\delta$.

Les relations (2.23) et (2.24) donnent

$$\left\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\right\|^2\leqslant 4k\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\right\|^2\mathrm{d}s+\frac{2kM}{2\alpha}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma}$$
$$+2\ln(n)M\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma}\qquad\text{p.s.}\qquad\forall\, n\geqslant n_0.\tag{2.25}$$

En utilisant le lemme de Gronwall-Bellman C.2 sur l'inégalité (2.25), on obtient

$$\begin{aligned}\left\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\right\|^2&\leqslant\left(\frac{2kM}{2\alpha}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma}+2\ln(n)M\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma}\right)e^{\int_{t_0+\sigma}^{t_0+\sigma+2\delta}4k\,\mathrm{d}s}\quad\text{p.s.}\quad\forall\, n\geqslant n_0\\&=\left(\frac{2kM}{2\alpha}\left\|x_{1_0}\right\|^2+2\ln(n)M\left\|x_{1_0}\right\|^2\right)e^{-2\alpha\sigma+8k\delta}\qquad\text{p.s.}\qquad\forall\, n\geqslant n_0.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Puisque

$$\frac{2kM}{\alpha}=e^{\ln\left(\frac{2kM}{\alpha}\right)}=e^{-\ln\left(\frac{\alpha}{2kM}\right)}.$$

l'inégalité (2.26) devient

$$\left\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\right\|^2\leqslant\frac{1}{2}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma+8k\delta-\ln\left(\frac{\alpha}{2kM}\right)}+2\ln(n)M\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma+8k\delta}\qquad\text{p.s.}\qquad\forall\, n\geqslant n_0.$$

Avec (2.16) et $\sigma\geqslant\rho$, on a

$$\sigma\varepsilon\geqslant\rho\varepsilon\geqslant\left(8k\delta-\ln\left(\frac{\alpha}{2kM}\right)\right)$$

et l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}\left\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\right\|^2&\leqslant\frac{1}{2}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-(2\alpha\sigma-\varepsilon\rho)}+\ln(n)\frac{2kM}{\alpha}\frac{\alpha}{k}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-2\alpha\sigma+8k\delta}\qquad\text{p.s.}\qquad\forall\, n\geqslant n_0\\&\leqslant\frac{1}{2}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma}+\ln(n)\frac{\alpha}{k}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{8k\delta-\ln\left(\frac{\alpha}{2kM}\right)-2\alpha\sigma}\qquad\text{p.s.}\qquad\forall\, n\geqslant n_0\\&\leqslant\frac{1}{2}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma}+\ln(n)\frac{\alpha}{k}\left\|x_{1_0}\right\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma}\qquad\text{p.s.}\qquad\forall\, n\geqslant n_0.\end{aligned}\tag{2.27}$$

4ème étape : majoration de $\|x_2(t)\|$ dans l'intervalle $t_0+\sigma\leqslant t\leqslant t_0+\sigma+2\delta$.

On a l'inégalité triangulaire suivante

$$\left\|z(t)-x_2(t)+\overline{x}_2(t)-\overline{x}_2(t)\right\|=\left\|z(t)-x_2(t)\right\|\leqslant\left\|z(t)-\overline{x}_2(t)\right\|+\left\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\right\|$$

et, si on pose $z(t) = 0$, on obtient

$$\|x_2(t)\| \leqslant \|\overline{x}_2(t)\| + \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|.$$

En élévant au carré l'inégalité précédente, on a

$$\|x_2(t)\|^2 \leqslant (\|\overline{x}_2(t)\| + \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|)^2 = \|\overline{x}_2(t)\|^2 + \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 + \underbrace{2\,\|\overline{x}_2(t)\|\,\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|}. \tag{2.28}$$

Le terme souligné peut être majoré comme suit en utilisant $2ab \leqslant a^2 + b^2$

$$2\,\|x_2(t)\|\,\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\| \leqslant \|x_2(t)\|^2 + \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2$$

et l'inégalité (2.28) devient

$$\|x_2(t)\|^2 \leqslant 2\,\|\overline{x}_2(t)\|^2 + 2\,\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2. \tag{2.29}$$

Les relations (2.12), (2.27) et (2.29) donnent, pour $t_0 + \sigma + \delta \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma + 2\delta$,

$$\|x_2(t)\|^2 \leqslant 2M\,\|\overline{x}_2(t_0+\sigma)\|^2\, e^{-2\alpha(t-t_0-\sigma)} + \|x_{1_0}\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\,\|x_{1_0}\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0$$

Puisque $t - t_0 - \sigma \geqslant \delta$ et en utilisant (2.15), on obtient

$$2M = e^{\ln(2M)} = e^{\varepsilon\delta}.$$

En remplaçant $2M$ par sa valeur dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|x_2(t)\|^2 \leqslant \|\overline{x}_2(t_0+\sigma)\|^2\, e^{-2\alpha(t-t_0-\sigma)+\varepsilon\delta} + \|x_{1_0}\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\,\|x_{1_0}\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0.$$

Puisque $t_0 + \sigma + \delta \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma + 2\delta$, on a $-4\alpha\delta \leqslant -2\alpha(t - t_0 - \sigma) \leqslant -2\alpha\delta$ et on obtient

$$\|x_2(t)\|^2 \leqslant \|\overline{x}_2(t_0+\sigma)\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\delta} + \|x_{1_0}\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\,\|x_{1_0}\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0. \tag{2.30}$$

$5^{\text{ème}}$ étape : stabilité de $x_2(t)$.

En posant

$$\sigma = \rho + (N-1)\delta \qquad N = 1, 2, 3, \ldots$$

avec $t_0 + \rho + N\delta \leqslant t \leqslant t_0 + \rho + (N+1)\delta$, l'inégalité (2.30) devient

$$\|x_2(t)\|^2 \leqslant \|\overline{x}_2(t_0+\rho+(N-1)\delta)\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\delta} + (\|x_{1_0}\|^2 + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\,\|x_{1_0}\|^2)e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0$$

et, par induction (par récurrence), on applique (2.30) pour $\sigma = \rho+(N-2)\delta$ et $t = t_0+\rho+(N-1)\delta$

$$\|x_2(t_0+\rho+(N-1)\delta)\|^2 \leqslant \|\overline{x}_2(t_0+\rho+(N-2)\delta)\|^2\, e^{-(2\alpha-\varepsilon)\delta}$$

$$+ (\|x_{1_0}\|^2 + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\|x_{1_0}\|^2)e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0$$

et donc, pour $t_0+\rho+N\delta \leqslant t \leqslant t_0+\rho+(N+1)\delta$, on obtient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)\|^2 &\leqslant \|\overline{x}_2(t_0+\rho+(N-1)\delta)\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)\delta} \\ &\quad + (\|x_{1_0}\|^2 + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\|x_{1_0}\|^2)e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0 \\ &\leqslant \|\overline{x}_2(t_0+\rho+(N-2)\delta)\|^2 e^{-2(2\alpha-\varepsilon)\delta} + \|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)(\sigma+\delta)} + \|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \\ &\quad + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)(\sigma+\delta)} + \ln(n)\frac{2\alpha}{k}\|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)\sigma} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\rho > \delta$ (voir (2.16)) et $\sigma = \rho + (N-1)\delta$, on a donc

$$\begin{aligned}\|x_2(t)\|^2 &\leqslant \|x_2(t_0+\rho)\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)N\delta} + N\|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)(\rho+(N-1)\delta)} \\ &\quad + N\ln(n)\frac{2\alpha}{k}\|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)(\rho+(N-1)\delta)} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, n \geqslant n_0.\end{aligned}$$

Puisque la suite $Ne^{-\varepsilon N\delta}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il existe $N_0 \geqslant n_0$ tel que, $\forall\, N \geqslant n \geqslant N_0 \geqslant n_0$, on a

$$N\ln(n)e^{-\varepsilon N\delta} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\delta e}.$$

et, avec $-(2\alpha-\varepsilon)(\rho+(N-1)\delta) \leqslant -(2\alpha-\varepsilon)(N-1)\delta < 0$, on obtient $\forall\, N \geqslant n \geqslant N_0 \geqslant n_0$

$$\begin{aligned}\|x_2(t)\|^2 &\leqslant \|x_2(t_0+\rho)\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)N\delta} + \frac{1}{\varepsilon\delta e}\left(1+\frac{2\alpha}{k}\right)\|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)(N-1)\delta+\varepsilon N\delta} \qquad \text{p.s.} \\ &= \|x_2(t_0+\rho)\|^2 e^{-(2\alpha-\varepsilon)N\delta} + \frac{1}{\varepsilon\delta e}\left(1+\frac{2\alpha}{k}\right)\|x_{1_0}\|^2 e^{-(2\alpha-2\varepsilon)N\delta-\varepsilon\delta} \qquad \text{p.s.} \\ &= \left(\|x_2(t_0+\rho)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon\delta e}\left(1+\frac{2\alpha}{k}\right)\|x_{1_0}\|^2\right)e^{-(2\alpha-2\varepsilon)N\delta} \qquad \text{p.s.}\end{aligned}$$

On pose $N \to +\infty$ et on obtient

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{2}{t}\ln(\|x_2(t)\|) < -(2\alpha-2\varepsilon) \qquad \text{p.s.}$$

et donc

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln(\|x_2(t)\|) < -(\alpha-\varepsilon) < 0 \qquad \text{p.s.}$$

$\forall\, \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \alpha$. •

2.4 Stabilité exponentielle presque sûre des systèmes triangulaires : cas one-sided Lipschitz

Une fonction $f(x) \in \mathbb{R}^n$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ est Lipschitz s'il existe une constante $\rho > 0$ telle que la condition (A.1.10) dans la section A.1.3 est vérifiée. Cette condition intervient dans l'unicité de la solution d'une EDS (voir (1.17) dans le théorème 1.4.3).

Cependant, dans le théorème 1.4.4, une condition plus générale d'unicité de la solution d'une EDS est donnée dans la relation (1.24). En effet, une fonction $f(x)$ peut vérifier (1.24), mais pas (1.17). Un exemple est donné dans [Mao97]

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w(t) = (x(t) - x^3(t))\,\mathrm{d}t + x^2\,\mathrm{d}w(t).$$

La fonction $f(x(t)) = x(t) - x^3(t)$ n'est pas (globalement) Lipschitz car

$$f^2(x(t)) = (x(t) - x^3(t))^2 = x^2(t)(1 - x^2(t))^2$$

et $1 - x^2(t)$ n'est pas borné. Donc, il n'existe pas de réel $\rho > 0$ tel que $\left|x(t) - x^3(t)\right| \leqslant \rho\,|x(t)|$.

Par contre, cette fonction est (globalement) one-sided Lipschitz car

$$x(t)f(x(t)) = x(t)(x(t) - x^3(t)) = x^2(t) - x^4(t) \leqslant x^2(t).$$

La condition (A.1.11) est donc vérifiée avec $\overline{\rho} = 1$.

Dans cette section, on considère que les fonctions $\begin{bmatrix} f_1^T(x_1(t), u(t)) \\ f_2^T(x_1(t), x_2(t), u(t)) \end{bmatrix}^T$ et $\begin{bmatrix} g_1^T(x_1(t), u(t)) \\ g_2^T(x_1(t), u(t)) \end{bmatrix}^T$, définies dans (2.8), vérifient l'hypothèse 2.2.1 et l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.4.1. *[BZSM15a] Il existe deux réels $\overline{k}_f$ et $\overline{k}_g > 0$ tels que, $\forall\, t \geqslant 0$, $\forall\, u(t) \in \Gamma$,*

$$\begin{aligned}(x_2(t) - \overline{x}_2(t))^T (f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) - f_2(0, \overline{x}_2(t), u(t))) \\ \leqslant \overline{k}_f \left((x_2(t) - \overline{x}_2(t))^T x_1(t) + \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 \right), \quad (2.31a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left((g_i(x_1(t), u(t)) - g_i(\overline{x}_1(t), u(t)))(g_i(x_1(t), u(t)) - g_i(\overline{x}_1(t), u(t)))^T \right) \\ \leqslant \overline{k}_g \|x_1(t) - \overline{x}_1(t)\|^2 \quad i = 1, 2. \quad (2.31b)\end{aligned}$$

Théorème 2.4.1 (Stabilité exponentielle presque sûre d'une EDS triangulaire : cas one-sided Lipschitz). *[BZSM15a] Avec l'hypothèse 2.4.1, le point d'équilibre de l'EDS (2.8) est exponentiellement presque sûrement stable si et seulement si le point d'équilibre de l'EDS (2.9) est exponentiellement presque sûrement stable.*

Puisque, pour tout $u(t) \in \Gamma$, $f_1(0, u(t)) = 0$, $f_2(0, 0, u(t)) = 0$, $g_1(0, u(t)) = 0$ et $g_2(0, u(t)) = 0$, et que l'hypothèse 2.4.1 est vraie pour tout $u(t) \in \Gamma$, la démonstration de ce théorème est faite avec $u(t) = 0$ sans perte de généralité, ce qui permet d'alléger les développements mathématiques.

Démonstration.

Soit $\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} \overline{x}_1^T(t) & \overline{x}_2^T(t) \end{bmatrix}^T$, la solution de l'EDS (2.9) avec $\overline{x}_1(t_0) = \overline{x}_{1_0}$ et $\overline{x}_2(t_0) = \overline{x}_{2_0}$.

Soit $x(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix}^T$, la solution de l'EDS (2.8) avec $x_1(t_0) = \overline{x}_{1_0} = x_{1_0}$ et $x_2(t_0) = \overline{x}_{2_0} = x_{2_0}$.

Partie "seulement si".

La démonstration de la partie "seulement si" est identique pour les théorèmes 2.3.1 et 2.4.1 et est donc omise.

Partie "si".

La stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (2.9) est équivalente à

$$\exists\, \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|\overline{x}_i(t)\|) < -\alpha < 0 \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, \overline{x}_{i_0} \in \mathbb{R}^{n_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.32}$$

ce qui est équivalent à

$$\|\overline{x}_i(t)\|^2 \leqslant M \|\overline{x}_{i_0}\|^2 e^{-2\alpha(t - t_0)} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, t \geqslant t_0, \qquad i = 1, 2, \tag{2.33}$$

avec $M > 0$ qui est une variable aléatoire finie positive.

Puisqu'on a $x_1(t, t_0, x_{1_0}) = \overline{x}_1(t, t_0, x_{1_0})$, on obtient

$$\|x_1(t)\|^2 \leqslant M \|\overline{x}_{1_0}\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, t \geqslant t_0. \tag{2.34}$$

On pose

$$0 < \varepsilon < \alpha, \tag{2.35}$$

$$\delta = \frac{\ln(2M)}{\varepsilon}, \tag{2.36}$$

$$\rho = \delta \ \vee \ \frac{1}{\varepsilon}\left(8\overline{k}\delta - \ln\Big(\frac{\alpha}{2kM}\Big)\right), \tag{2.37}$$

avec $a \vee b = \max(a, b)$, $\alpha > 0$ et $M > 0$ définis respectivement dans (2.32) et (2.33).

Il reste donc à montrer que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x_2(t)\|) < -(\alpha - \varepsilon) \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, \varepsilon \qquad \text{tel que} \qquad 0 < \varepsilon < \alpha. \tag{2.38}$$

On va procéder en cinq étapes avec $\sigma \geqslant \rho$.

En comparaison avec la démonstration du théorème 2.3.1, les étapes 2, 3, 4 et 5 sont identiques, seule la l'étape 1 relative à la majoration de $\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2$ est différente.

1ère étape : majoration de $\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2$ dans l'intervalle $t_0 + \sigma \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma + 2\delta$.

Soit t défini comme suit

$$t_0 + \sigma \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma + 2\delta, \tag{2.39}$$

alors

$$\exists\, \overline{x}_2(t) = \overline{x}_2(t, t_0 + \sigma, x_2(t_0 + \sigma)) \tag{2.40}$$

avec un instant initial $t_0 + \sigma$ et un état initial $x_2(t_0 + \sigma) = \overline{x}_2(t_0 + \sigma)$.

En appliquant la formule d'Itô sur les EDS (2.8b) et (2.9b), on obtient

$$\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 = \int_{t_0+\sigma}^{t} 2(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T (f_2(x_1(s), x_2(s)) - f_2(0, \overline{x}_2(s))) + \operatorname{tr}(g_2(x_1(s)) g_2^T(x_1(s)))\, \mathrm{d}s + \mathcal{M}(t)$$

avec

$$\mathcal{M}(t) = 2 \int_{t_0+\sigma}^{t} (x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\, \mathrm{d}w(s). \tag{2.41}$$

En appliquant les hypothèses (2.31a) et (2.31b), on a

$$\begin{aligned}\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 \leqslant{}& 2\overline{k}_f \int_{t_0+\sigma}^{t} (\|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 + (x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T \overline{x}_1(s))\, \mathrm{d}s + \overline{k}_g \int_{t_0+\sigma}^{t} \|x_1(s)\|^2\, \mathrm{d}s \\ &+ \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^{t} \|x_2(s) - \overline{x}_2(s)\|^2 \|g_2(x_1(s))\|^2\, \mathrm{d}s \\ &+ \mathcal{M}(t) - \frac{e^{2\alpha\sigma}}{M \|x_{1_0}\|^2} \int_{t_0+\sigma}^{t} \big\|(x_2(s) - \overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\big\|^2\, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En utilisant

$$(x_2(t) - \overline{x}_2(t))^T x_1(t) \leqslant \|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\| \|x_1(t)\| \leqslant 0.5(\|x_2(t) - \overline{x}_2(t)\|^2 + \|x_1(t)\|^2)$$

et (voir (2.34))

$$\frac{\|x_1(t)\|^2}{M\|x_{1_0}\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)}} \leqslant 1,$$

l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2 &\leqslant 2\overline{k}_f\int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + 2\overline{k}_f\int_{t_0+\sigma}^t (0.5(\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2+\|x_1(t)\|^2))\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\overline{k}_g\int_{t_0+\sigma}^t \|x_1(s)\|^2\,\mathrm{d}s + \overline{k}_g\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\|x_1(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\mathcal{M}(t)-\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s\\ &= 3\overline{k}_f\int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + \overline{k}_f\int_{t_0+\sigma}^t \|x_1(t)\|^2\,\mathrm{d}s + \overline{k}_g\int_{t_0+\sigma}^t \|x_1(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\overline{k}_g\int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\underbrace{\frac{M\|x_{1_0}\|^2}{M\|x_{1_0}\|^2}e^{-2\alpha(s-t_0-\sigma)}}_{t_0+\sigma\leqslant s\,\longrightarrow\,\leqslant 1}\mathrm{d}s\\ &\quad+\mathcal{M}(t)-\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

On définit

$$\overline{k} = \left|\overline{k}_f\right| \vee \overline{k}_g$$

et l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2 &\leqslant 4\overline{k}\int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + 2\overline{k}M\|x_{1_0}\|^2\int_{t_0+\sigma}^t e^{-2\alpha(s-t_0)}\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\mathcal{M}(t)-\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En utilisant (2.34), on obtient

$$\begin{aligned}\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2 &\leqslant 4\overline{k}\int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + 2\overline{k}M\|x_{1_0}\|^2\int_{t_0+\sigma}^t e^{-2\alpha(s-t_0)}\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\mathcal{M}(t)-\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\|x_{1_0}\|^2}\int_{t_0+\sigma}^t \left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En intégrant

$$\begin{aligned}\int_{t_0+\sigma}^t e^{-2\alpha(s-t_0)}\,\mathrm{d}s = e^{2\alpha t_0}\int_{t_0+\sigma}^t e^{-2\alpha s}\,\mathrm{d}s &= \frac{e^{2\alpha t_0}}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha t}-e^{-2\alpha(t_0+\sigma)}\right)\\ &= \frac{e^{-2\alpha\sigma}}{2\alpha}-\frac{e^{-2\alpha(t-t_0)}}{2\alpha}\leqslant\frac{e^{-2\alpha\sigma}}{2\alpha},\end{aligned}$$

on obtient

$$\|x_2(t)-\overline{x}_2(t)\|^2 \leqslant 4\overline{k}\int_{t_0+\sigma}^t \|x_2(s)-\overline{x}_2(s)\|^2\,\mathrm{d}s + \frac{2\overline{k}M}{2\alpha}\|x_{1_0}\|^2 e^{-2\alpha\sigma}$$

$$+\mathcal{M}(t)-\frac{e^{2\alpha\sigma}}{M\left\|x_{1_0}\right\|^2}\int_{t_0+\sigma}^{t}\left\|(x_2(s)-\overline{x}_2(s))^T g_2(x_1(s))\right\|^2\mathrm{d}s. \quad (2.42)$$

Puisque les inégalités (2.23) et (2.42) sont identiques si on remplace $\overline{k}$ par k, les étapes 2, 3, 4 et 5 de la démonstration du théorème 2.3.1 permettent donc de conclure cette démonstration. •

2.5 Application au filtrage d'ordre plein

2.5.1 Cas des mesures stochastiques

Dans cette section, les théorèmes 2.3.1 et 2.4.1 sont utilisés pour la synthèse d'un observateur d'ordre plein garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage.

Les théorèmes 2.3.1 et 2.4.1 permettent d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 2.5.1 (**Filtrage des systèmes stochastiques non linéaires avec la stabilité exponentielle presque sûre).** *[BZSM12a, BZSM15a] Si les conditions suivantes sont vérifiées*

- **a)** *l'hypothèse 2.2.1 est satisfaite,*
- **b)** *une des deux hypothèses, 2.3.1 ou bien 2.4.1, est vérifiée,*
- **c)** *le point d'équilibre de l'EDS (2.1a) est exponentiellement presque sûrement stable,*
- **d)** *il existe une matrice de gain $\psi(u(t))$ telle que l'EDO*

$$\dot{\overline{e}}(t)=-f(-\overline{e}(t),u(t))+\psi(u(t))h(-\overline{e}(t)) \quad (2.43)$$

soit exponentiellement stable [Vid93],

alors le système (2.3) est un observateur d'ordre plein pour le système stochastique (2.1) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage $e(t)=x(t)-\widehat{x}(t)$.

Démonstration. L'hypothèse 2.2.1 garantit l'existence et l'unicité de l'état $x(t)$ de l'EDS (2.1a). Puisque les EDS (2.6) et (2.8) ont la même structure ($x(t)$ correspond à $x_1(t)$ et $e(t)$ à $x_2(t)$), la démonstration se réduit à l'application du théorème 2.3.1 sur l'EDS (2.6) si l'hypothèse 2.3.1 est satisfaite, ou à celle du théorème 2.4.1 sur l'EDS (2.6) si l'hypothèse 2.4.1 est vérifiée. •

Remarque 2.5.1.

- **1)** Dans le théorème 2.5.1, le test de la stabilité de l'EDS (2.1a) décrivant la dynamique de l'état $x(t)$ est découplé du calcul du gain de l'observateur $\psi(u(t))$.
- **2)** Pour vérifier la stabilité du point d'équilibre de l'EDS (2.1a), on peut employer une approche de type Lyapunov (voir théorème 1.5.3) ou mettre en œuvre le théorème 1.5.9 utilisant le bruit pour étudier la stabilité.
- **3)** Le théorème 2.5.1 simplifie le problème du filtrage des systèmes stochastiques car il permet d'utiliser les approches développées dans la littérature dédiée aux observateurs pour les systèmes déterministes non linéaires du type

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \quad (2.44a)$$
$$y(t) = h(x(t)) \quad (2.44b)$$

afin de synthétiser le gain $\psi(u(t))$. □

Lors de la synthèse d'un observateur, il est important d'obtenir un taux de convergence "suffisamment rapide" pour l'erreur de filtrage. Avec les théorèmes 2.3.1, 2.4.1 et 2.5.1, la convergence exponentielle de l'état $x(t)$ et de l'erreur d'observation $e(t)$ sont traitées séparément. Une approximation du taux de décroissance de la trajectoire $x(t)$ [1] peut être obtenu en appliquant le théorème 1.5.3 ou 1.5.9 sur l'EDS (2.1a). Il est évident que l'erreur de filtrage $e(t)$ convergera "suffisamment vite" en comparaison de la trajectoire de l'état $x(t)$ si le taux de décroissance de la solution $\overline{e}(t)$ de l'EDO (2.43) sera supérieur à celui qui a été approximé pour l'état $x(t)$.

L'obtention du taux de décroissance de la solution $\overline{e}(t)$ de l'EDO (2.43) est traitée dans le lemme suivant.

Lemme 2.5.1 (Taux de décroissance de $\overline{e}(t)$). *On suppose qu'il existe un réel $\beta > 0$, une matrice de gain $\psi(u(t))$ et une matrice $Q = Q^T > 0$ tels que*

$$\begin{aligned}\overline{e}^T(t)Q(\psi(u(t))h(-\overline{e}(t)) - f(-\overline{e}(t), u(t))) \\ + (\psi(u(t))h(-\overline{e}(t)) - f(-\overline{e}(t), u(t)))^T Q\overline{e}(t) + 2\beta\overline{e}^T(t)Q\overline{e}(t) < 0,\end{aligned} \quad (2.45)$$

alors la solution $\overline{e}(t)$ de l'EDO (2.43) satisfait

$$\|\overline{e}(t)\| \leqslant \overline{M}\,\|\overline{e}(0)\|\,e^{-\beta t} \quad (2.46)$$

où $\overline{M} > 0$ est un réel donné et $t_0 = 0$.

Démonstration. Soit $V(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t)Q\overline{e}(t)$ avec $Q = Q^T > 0$ une fonction de Lyapunov candidate. La dérivée temporelle de $V(\overline{e}(t))$ le long de la trajectoire de la solution de (2.43) est donnée par

$$\dot{V}(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t)Q(\psi(u(t))h(-\overline{e}(t)) - f(-\overline{e}(t), u(t))) + (\psi(u(t))h(-\overline{e}(t)) - f(-\overline{e}(t), u(t)))^T Q\overline{e}(t).$$

Si la condition (2.45) est satisfaite, l'inégalité suivante

$$\dot{V}(\overline{e}(t)) \leqslant -2\beta\overline{e}^T(t)Q\overline{e}(t) = -2\beta V(\overline{e}(t))$$

est vérifiée et la relation (2.46) est satisfaite. •

Le but du lemme 2.5.1 est d'obtenir une valeur de β qui soit suffisamment grande.

2.5.2 Cas des mesures déterministes

Si l'équation de mesure (2.1b) est remplacée par

$$y(t) = h(x(t)), \quad (2.47)$$

alors l'équation de l'observateur (2.3) doit être remplacée par

$$\mathrm{d}\widehat{x}(t) = f(\widehat{x}(t), u(t))\,\mathrm{d}t + \psi(u(t))(y(t) - h(\widehat{x}(t)))\,\mathrm{d}t \quad (2.48)$$

et la fonction $G(X(t), u(t))$ dans l'EDS (2.6) devient

$$G(X(t), u(t)) = \begin{bmatrix} g(x(t), u(t)) \\ g(x(t), u(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x(t), u(t)) \\ g_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix},$$

avec $w(t) = w_x(t)$, tandis que la fonction $F(X(t), u(t))$ ne change pas. Ainsi le théorème 2.5.1 et le lemme 2.5.1 s'appliquent au cas où les mesures sont déterministes, c'est-à-dire au cas où $y(t) = h(x(t))$.

1. Le taux de décroissance d'une trajectoire correspond à l'exposant de Lyapunov de la solution associée à cette trajectoire (voir le début de la section 1.5.1).

2.6 Extension au filtrage d'ordre réduit

2.6.1 Cas des mesures stochastiques

Dans cette section, le but est d'estimer, non pas toutes les coordonnées de l'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ du système stochastique (2.1), mais seulement une combinaison linéaire du vecteur d'état donnée par $z(t) = Lx(t)$ avec $z(t) \in \mathbb{R}^r$ et $\text{rang}(L) = r < n$. Le vecteur $z(t)$ est appelé fonctionnelle de l'état $x(t)$ et on parle de filtrage fonctionnel d'ordre réduit.

Le filtre fonctionnel d'ordre réduit pour le système stochastique (2.1) est donné par l'EDS suivante

$$\mathrm{d}\widehat{z}(t) = \Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t))\,\mathrm{d}t + \psi_r(u(t))\,\mathrm{d}y(t) \tag{2.49}$$

où $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t)) \in \mathbb{R}^r$ et $\psi_r(u(t)) \in \mathbb{R}^{r\times p}$ sont les inconnues à déterminer pour que l'erreur de filtrage

$$e_r(t) = z(t) - \widehat{z}(t) = Lx(t) - \widehat{z}(t) \tag{2.50}$$

ait un point d'équilibre exponentiellement stable presque sûrement.

La dynamique de l'erreur de filtrage est donnée par l'EDS suivante

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e_r(t) = (Lf(x(t), u(t)) - \Sigma_r(Lx(t) - e_r(t), u(t)) - \psi_r(u(t))h(x(t)))\,\mathrm{d}t \\ + Lg(x(t), u(t))\,\mathrm{d}w_x(t) - \psi_r(u(t))q(x(t))\,\mathrm{d}w_y(t).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Remarque 2.6.1. A la différence de l'observateur d'ordre plein, (2.3), le filtre fonctionnel d'ordre réduit (2.49) ne peut pas inclure explicitement le terme $f(\widehat{x}(t), u(t))$ qui est une "copie" de la dérive de l'EDS (2.1a), mais contient un terme "$\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t))$" qui n'apparaît pas dans l'EDS (2.3).

Afin de faire une connection entre les observateurs d'ordre plein et réduit, le filtre d'ordre plein (2.3) peut se réécrire comme suit

$$\mathrm{d}\widehat{x}(t) = \Sigma(\widehat{x}(t), u(t))\,\mathrm{d}t + \psi(u(t))\,\mathrm{d}y(t)$$

avec $\Sigma(\widehat{x}(t), u(t)) = f(\widehat{x}(t), u(t)) - \psi(u(t))h(\widehat{x}(t))$.

Puisque la dimension de $z(t)$ est strictement plus petite que celle de $x(t)$, une "copie" de la dérive de l'EDS (2.1a) ne peut pas être incluse dans (2.49). C'est pourquoi, afin de prendre en compte cette dérive, l'équation de l'observateur d'ordre réduit comprend deux termes : une fonction $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t))$ et le terme $\psi_r(u(t))\,\mathrm{d}y(t)$ décrivant comment la mesure $y(t)$ agit pour contrôler l'évolution de l'estimée $\widehat{z}(t)$.

Dans le chapitre 3 à la section 3.3.2, la façon de choisir $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t))$ et $\psi_r(u(t))$ afin de prendre en compte "au mieux" le comportement dynamique de la solution $x(t)$ de l'EDS (2.1a) sera illustrée. Dans la section 2.6, on ne s'intéresse qu'aux contraintes sur $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t))$ et $\psi_r(u(t))$ pour assurer la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage, mais pas au choix de $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t))$ et $\psi_r(u(t))$, ce dernier problème, qui dépend de la structure du système stochastique (2.1) sera traité dans le chapitre 3 (voir les relations (3.42) et (3.44)). □

En posant

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix}, X_r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e_r(t) \end{bmatrix},$$

$$F_r(X_r(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f(x(t), u(t)) \\ Lf(x(t), u(t)) - \Sigma_r(Lx(t) - e_r(t), u(t)) - \psi_r(u(t))h(x(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), e_r(t), u(t)) \end{bmatrix},$$

$$G_r(X_r(t), u(t)) = \begin{bmatrix} g(x(t), u(t)) & 0 \\ Lg(x(t), u(t)) & -\psi_r(u(t))q(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x(t), u(t)) \\ g_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix},$$

l'EDS (2.1a) et l'observateur (2.51) peuvent se réécrire ainsi

$$\mathrm{d}X_r(t) = F_r(X_r(t), u(t))\,\mathrm{d}t + G_r(X_r(t), u(t))\,\mathrm{d}w(t). \tag{2.52}$$

Hypothèse 2.6.1 (**Existence et unicité de la solution).** *Pour tout $u(t) \in \Gamma$, les fonctions $F_r(X(t), u(t))$ et $G_r(X(t), u(t))$ vérifient les conditions (1.23) et (1.24) dans le théorème 1.4.4 en remplaçant l'EDS (1.25) par (2.52).*

Comme pour l'observateur d'ordre plein (voir (2.7)), on a

$$\mathfrak{B}V(X_r(t))\Big|_{X_r=\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ e_r(t) \end{smallmatrix}\right]} = 0, \tag{2.53}$$

puisque $G_r(X_r(t), u(t)) = 0$ si $X_r(t) = \begin{bmatrix} 0^T & e_r^T(t) \end{bmatrix}^T$, où $V(X_r(t)) > 0$ est une fonction de Lyapunov candidate, et on obtient $c_3 = 0$ en appliquant la condition (1.50c) du théorème 1.5.3. On ne peut donc pas appliquer le théorème 1.5.3 si $c_2 \geqslant 0$ dans la condition (1.50b). C'est pourquoi, comme dans le cas de l'observateur d'ordre plein, on va exploiter la structure triangulaire de l'EDS (2.52) dans le théorème suivant.

Théorème 2.6.1 (**Filtrage des systèmes stochastiques non linéaires avec la stabilité exponentielle presque sûre).** *[BZSM12a, BZSM15a] Si les conditions suivantes sont vérifiées*

- **a)** *l'hypothèse 2.2.1 est satisfaite,*
- **b)** *une des deux hypothèses, 2.3.1 ou bien 2.4.1, est vérifiée,*
- **c)** *le point d'équilibre de l'EDS (2.1a) est exponentiellement presque sûrement stable,*
- **d)** *il existe une function $\Sigma_r(\overline{e}(t), u(t))$ telle que l'EDO*

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = -\Sigma_r(-\overline{e}_r(t), u(t)) \tag{2.54}$$

soit exponentiellement stable [Vid93],

alors le système (2.49) est un observateur fonctionnel d'ordre réduit pour le système stochastique (2.1) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage $e_r(t) = z(t) - \widehat{z}(t)$.

Démonstration. L'hypothèse 2.2.1 garantit l'existence et l'unicité de l'état $x(t)$ de l'EDS (2.1a). Puisque les EDS (2.52) et (2.8) ont la même structure ($x(t)$ correspond à $x_1(t)$ et $e_r(t)$ à $x_2(t)$), la démonstration se réduit à l'application du théorème 2.3.1 sur l'EDS (2.6) si l'hypothèse 2.3.1 est satisfaite, ou à celle du théorème 2.4.1 sur l'EDS (2.52) si l'hypothèse 2.4.1 est vérifiée. •

Comme dans le cas d'ordre plein, le choix de taux de décroissance de la solution $\overline{e}_r(t)$ de l'EDO (2.54) dans le théorème 2.6.1 permet d'agir sur la vitesse de convergence de l'erreur de filtrage $e_r(t)$ dont la dynamique est donnée par l'EDS (2.51). L'approche proposée dans le lemme 2.5.1 est étendue au filtrage fonctionnel d'ordre réduit dans le lemme suivant.

Lemme 2.6.1 (Taux de décroissance de $\overline{e}_r(t)$). *On suppose qu'il existe un réel $\beta_r > 0$, une fonction $\Sigma_r(-\overline{e}_r(t), u(t))$ et une matrice $P = P^T > 0$ tels que*

$$-\overline{e}_r^T(t)P\Sigma_r(-\overline{e}_r(t), u(t)) - \Sigma_r^T(-\overline{e}_r(t), u(t))P\overline{e}_r(t) + 2\beta_r\overline{e}^T(t)P\overline{e}_r(t) < 0 \tag{2.55}$$

alors la solution $\overline{e}_r(t)$ de l'EDO (2.54) satisfait

$$\|\overline{e}_r(t)\| \leqslant \overline{M}_r \|\overline{e}_r(0)\| e^{-\beta_r t} \tag{2.56}$$

où $\overline{M}_r > 0$ est un réel donné et $t_0 = 0$.

Démonstration. soit $V(\overline{e}_r(t)) = \overline{e}_r^T(t)P\overline{e}_r(t)$ avec $P = P^T > 0$ une fonction de Lyapunov candidate. La dérivée temporelle de$V(\overline{e}_r(t))$ le long de la trajectoire de la solution de (2.54) est donnée par

$$\dot{V}(\overline{e}_r(t)) = -\overline{e}_r^T(t)\Sigma_r(-\overline{e}_r(t), u(t)) - \Sigma_r^T(-\overline{e}_r(t), u(t))P\overline{e}_r(t).$$

Si la condition (2.55) est satisfaite, l'inégalité suivante

$$\dot{V}(\overline{e}_r(t)) \leqslant -2\beta_r\overline{e}_r^T(t)P\overline{e}_r(t) = -2\beta_r V(\overline{e}_r(t))$$

est vérifiée et la relation (2.56) est satisfaite. •

Le but du lemme 2.6.1 est d'obtenir une valeur de β_r qui soit suffisamment grande.

Comme il est précisé dans la remarque 2.6.1, la détermination de $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t)$ et de $\psi_r(u(t))$ pour synthétiser le filtre fonctionnel d'ordre réduit (2.49) afin que les conditions (2.54) dans le théorème 2.6.1 et (2.55) dans le lemme 2.6.1 soient vérifiées, n'est pas traitée dans cette section, mais dans le chapitre 3 à la section 3.3.2.

Le théorème 2.6.1 et lemme 2.6.1 permettent d'utiliser les approches proposées dans la littérature pour synthétiser un observateur d'ordre réduit pour un système non linéaire déterministe, le choix de $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t))$ et de $\psi_r(u(t))$ dépendant de la structure des fonctions $f(x(t), u(t))$ et $h(x(t))$ dans le système (2.1).

Dans ce paragraphe, quelques méthodes pour synthétiser des observateurs d'ordre réduit pour les systèmes déterministes sont rappelées. Dans le cas linéaire, le problème de la synthèse d'un observateur d'ordre réduit est traité dans [Lue66, Lue71] et $\Sigma_r(\widehat{z}(t), u(t)$ et $\psi_r(u(t))$ sont obtenues en résolvant une équation de Sylvester sous une contrainte de stabilité. Cette approche est étendue à la synthèse d'un observateur fonctionnel d'ordre réduit dans [WG98, Dar00a]. Pour les systèmes non linéaires dans un "cadre général", le problème de la synthèse d'un observateur d'ordre réduit est traité dans [KCA08]. Un cas important lors de la synthèse d'un observateur d'ordre réduit est l'existence d'une partie linéaire dans la fonction non linéaire $f(x(t), u(t))$ [Tha73, NS88, BH95, BH96, ZH02, XHZ09]. Dans de nombreux cas, l'observabilité est exploitée afin de mettre en évidence cette partie linéaire en appliquant un changement de base approprié [BB97]. Cette approche a été généralisée dans [Bes00]. Des méthodes basées sur une forme canonique normale sont proposées dans [BZH10, ZB11] pour synthétiser des observateurs d'ordre réduit non linéaires. Il existe des méthodes de synthèse d'observateurs d'ordre réduit qui sont dédiées à des "structures" spécifiques de la fonction $f(x(t), u(t))$, par exemple pour les systèmes bilinéaires [HF76, Fun79, GI81, GSZD10, SZRD06].

2.6.2 Cas des mesures déterministes

Si l'équation de mesure (2.1b) est remplacée par

$$y(t) = Cx(t), \tag{2.57}$$

alors l'équation de l'observateur (2.49) doit être remplacée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(t) &= \Sigma_r(\eta(t), u(t))\,\mathrm{d}t + \psi_r(u(t))y(t)\,\mathrm{d}t & \text{(2.58a)} \\ \widehat{z}(t) &= \eta(t) + Ey(t) & \text{(2.58b)} \end{aligned}$$

où $\Sigma_r(\eta(t), u(t)) \in \mathbb{R}^r$, $\psi_r(u(t)) \in \mathbb{R}^{r\times p}$ et $E \in \mathbb{R}^{r\times p}$ sont les inconnues à déterminer.

En posant $\Psi = L - EC$, l'erreur d'observation devient

$$e_r(t) = z(t) - \widehat{z}(t) = \Psi x(t) - \eta(t) \tag{2.59}$$

et a une dynamique décrite par l'EDS suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_r(t) = (\Psi f(x(t), u(t)) - \Sigma_r(\Psi x(t) - e_r(t)), u(t)) - \psi_r(u(t))Cx(t))\,\mathrm{d}t \\ + \Psi g(x(t), u(t))\,\mathrm{d}w_x(t). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Le théorème 2.6.1 et le lemme 2.6.1 s'appliquent au cas où l'équation de mesures est $y(t) = Cx(t)$ si les fonctions $F_r(X(t), u(t))$ et $G_r(X(t), u(t))$ dans l'EDS (2.52) sont remplacées par

$$\begin{aligned} F_r(X_r(t), u(t)) &= \begin{bmatrix} f(x(t), u(t)) \\ \Psi f(x(t), u(t)) - \Sigma_r(\Psi x(t) - e_r(t), u(t)) - \psi_r(u(t))Cx(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), e_r(t), u(t)) \end{bmatrix}, \\ G_r(X(t), u(t)) &= \begin{bmatrix} g(x(t), u(t)) \\ \Psi g(x(t), u(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x(t), u(t)) \\ g_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $w(t) = w_x(t)$.

Remarque 2.6.2. Si la matrice E dans l'observateur (2.58) est $E = 0$, alors $\widehat{z}(t) = \eta(t)$ et on peut utiliser une équation de mesures plus générale que celle donnée par la relation (2.57). Dans ce cas, l'équation de mesures considérée est donnée par (2.47) et les fonctions $f_2(x(t), e_r(t), u(t))$ et $g_2(x(t), u(t))$ dans $F_r(X_r(t), u(t))$ et $G_r(X_r(t), u(t))$ deviennent

$$\begin{aligned} f_2(x(t), e_r(t), u(t)) &= Lf(x(t), u(t)) - \Sigma_r(Lx(t) - e_r(t), u(t)) - \psi_r(u(t))h(x(t)), \\ g_2(x(t), u(t)) &= Lg(x(t), u(t)), \end{aligned}$$

où on a choisi $y(t) = h(x(t))$ comme équation de mesures. □

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé une solution au problème du filtrage pour une classe de systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs lorsque le critère de stabilité associé à l'erreur d'observation est la stabilité exponentielle presque sûre. Deux classes de systèmes stochastiques ont été considérés : la dérive de l'EDS vérifie une contrainte de type Lipschitz ou de type one-sided Lipschitz.

On a montré que le problème du filtrage des systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs en imposant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur d'observation ne peut pas être résolu en appliquant les approches de type Lyapunov disponibles dans la littérature : il

s'agit de garantir que le point d'équilibre de l'erreur d'estimation est exponentiellement presque sûrement stable sans se restreindre au cas où ce point d'équilibre est exponentiellement stable en moyenne quadratique.

On a surmonté cette difficulté en exploitant la structure triangulaire associée à ce problème de filtrage, ce qui a permis de découpler, lors de la synthèse du filtre, l'analyse de la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS associée au système à observer de la détermination du (ou des) gain de l'observateur permettant de garantir la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'erreur d'estimation.

Cette nouvelle approche est basée sur deux théorèmes, selon que la dérive de l'EDS est Lipschitz ou one-sided Lipschitz, montrant que la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre d'une classe d'EDS triangulaire est équivalente à celle du point d'équilibre de chacun des "sous-systèmes bloc-diagonaux" considérés isolément sans les termes d'interconnexion.

Ces deux théorèmes ont été appliqués au problème du filtrage des systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs en assurant la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'erreur d'observation. Plusieurs cas ont été considérés : observateurs d'ordre plein et observateurs fonctionnels d'ordre réduit, avec des mesures stochastiques ou déterministes. La majorité des résultats proposés dans les chapitres 3, 4 et 5 s'appuient sur ces deux théorèmes.

Chapitre 3

Filtrage des systèmes stochastiques

Sommaire

3.1 Introduction 76
3.2 Systèmes stochastiques considérés 77
3.3 Observateurs avec des non linéarités de type Lipschitz 78
3.3.1 Observateurs d'ordre plein 78
3.3.1.1 Cas des mesures stochastiques 78
3.3.1.2 Cas des mesures déterministes 83
3.3.1.3 Premier exemple avec l'observateur d'ordre plein 84
3.3.1.4 Second exemple avec l'observateur d'ordre plein 87
3.3.2 Observateurs d'ordre réduit 94
3.3.2.1 Cas des mesures stochastiques 94
3.3.2.2 Cas des mesures déterministes 98
3.3.2.3 Exemple 103
3.4 Observateurs avec des non linéarités de type one-sided Lipschitz . 105
3.4.1 Cas des mesures stochastiques 106
3.4.2 Cas des mesures déterministes 115
3.4.3 Exemple 116
3.5 Filtrage robuste des systèmes stochastiques non linéaires incertains 126
3.5.1 Systèmes stochastiques incertains considérés 126
3.5.2 Cas des mesures stochastiques 127
3.5.2.1 Analyse du problème du filtrage robuste 127
3.5.2.2 Etude de la stabilité du point d'équilibre de l'EDS avec des incertitudes paramétriques 129
3.5.2.3 Observateurs robustes d'ordres plein et réduit 133
3.5.3 Cas des mesures déterministes 135
3.5.3.1 Sans compensation partielle des incertitudes 135
3.5.3.2 Avec compensation partielle des incertitudes 137
3.5.4 Exemple 149
3.6 Conclusion 152

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'application des résultats du chapitre 2, notamment ceux des sections 2.5 et 2.6, à une classe de systèmes stochastiques non linéaires dont la dérive de l'EDS est constituée par une partie bilinéaire états-commandes à laquelle est ajoutée une fonction non linéaire dépendant de l'état, notée $\ell(x(t))$. Les mesures sont soit déterministes, soit stochastiques. Le but est de synthétiser des observateurs pour ces systèmes en garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur d'estimation. Les méthodes développées dans ce chapitre s'appuient sur les théorèmes 2.5.1 et 2.6.1, ainsi que sur les lemmes 2.5.1 et 2.6.1. Les observateurs proposés sont d'ordre plein ou réduit.

La section 3.2 est consacrée à la présentation des systèmes stochastiques non linéaires considérés dans ce chapitre.

Dans les sections 3.3 et 3.5, la fonction non linéaire $\ell(x(t))$ est Lipschitz, tandis que dans la section 3.4, la fonction non linéaire $\ell(x(t))$ est one-sided Lipschitz.

Dans la section 3.3, des observateurs d'ordre plein et des filtres fonctionnels d'ordre réduit sont proposés pour deux types de mesures : des mesures stochastiques ou des mesures déterministes. La synthèse des filtres fonctionnels d'ordre réduit est basée sur le paramétrage des solutions de plusieurs équations de Sylvester. Ce paramétrage est analysé pour chacune des classes d'équations de Sylvester dans la remarque 3.5.3 à la fin de la section 3.5.3.2. Dans la section 3.3, les entrées de commande sont traitées comme des pseudo-incertitudes bornées en norme.

Dans la section 3.4, la structure polytopique de l'ensemble des entrées de commande admissibles est exploitée. Afin de tirer le meilleur parti de cette structure polytopique, la fonction de Lyapunov dépend de ces entrées. Afin de conserver la propriété de convexité lorsque la formule d'Itô est appliquée, les équations décrivant les dynamiques de l'état du système et de l'erreur d'observation sont réécrites avec une formulation descripteur ou pseudo-singulière en se basant sur une approche qui a été proposée dans [FS02, CM04]. Les fonctions de Lyapunov associées à cette forme descripteur contiennent chacune une matrice instrumentale, ce qui permet d'éviter les produits entre les éléments du vecteur des entrées lorsque la formule d'Itô est appliquée. Cette approche descripteur a nécessité de développer la formule d'Itô dans le cas des équations algébro-différentielles non linéaires (EADS), ce qui est fait dans la section 5.2. Dans la section 3.4, seul le filtrage d'ordre plein est abordé et deux cas sont considérés : les mesures sont stochastiques ou déterministes.

Dans la section 3.5, des observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes paramétriques sont synthétisés en considérant les entrées de commande comme des pseudo-incertitudes bornées en norme. Les incertitudes considérées sont non structurées et bornées en norme. Elles sont décrites dans la section 3.5.1. Un observateur robuste d'ordre plein et un filtre fonctionnel robuste d'ordre réduit sont développés dans la section 3.5.2 lorsque les mesures sont stochastiques. Le cas des mesures déterministes est abordé dans la section 3.5.3 en considérant deux configurations pour le traitement des incertitudes. Dans la section 3.5.3.1, il n'y a pas de compensation partielle des incertitudes : ces dernières affectent la dérive de l'EDS décrivant la dynamique de l'erreur de filtrage. Dans la section 3.5.3.2, il y a une compensation partielle des incertitudes : ces dernières n'affectent pas la dérive de l'EDS décrivant la dynamique de l'erreur de filtrage. Dans les sections 3.5.3.1 et 3.5.3.2, des observateurs robustes d'ordre plein et des filtres fonctionnels robustes d'ordre réduit sont synthétisés.

3.2 Systèmes stochastiques considérés

On rappelle que la norme utilisée est la norme de Frobenius, aussi appelée norme euclidienne et définie par la relation (1.2).

Dans ce chapitre, on considère l'un des deux systèmes stochastiques suivants

$$\mathrm{d}x(t) = \left(A_{t_0}x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)A_{t_i}x(t) + \ell(x(t))\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) \tag{3.1a}$$

$$\mathrm{d}y(t) = Cx(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{h} D_k x(t)\,\mathrm{d}w_{y_k}(t) \tag{3.1b}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{3.1c}$$

ou

$$\mathrm{d}x(t) = \left(A_{t_0}x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)A_{t_i}x(t) + \ell(x(t))\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) \tag{3.2a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.2b}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{3.2c}$$

avec

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ vecteur d'état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ vecteur des entrées connues (commandes),
- $y(t) \in \mathbb{R}^p \longrightarrow$ vecteur des mesures,
- $z(t) \in \mathbb{R}^r$ vecteur de la fonctionnelle de l'état $x(t)$ à estimer ($r \leqslant n$),
- $w_x(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré,
- $w_y(t) \in \mathbb{R}^h \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré.

Les entrées admissibles $u(t) \in \Omega$ sont bornées comme suit

$$\Omega = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \mid u_{i,\min} \leqslant u_i(t) \leqslant u_{i,\max}, i = 1, \ldots, m\} \tag{3.3}$$

et la fonction $\ell(x(t))$ vérifie

$$\ell(0) = 0. \tag{3.4}$$

Afin de ne pas estimer de coordonnées redondantes dans le vecteur $z(t)$, la matrice L dans les équations (3.1c) et (3.2c) est de rang plein ligne

$$\mathrm{rang}(L) = r \leqslant n. \tag{3.5}$$

Dans la suite de ce chapitre, les observateurs proposés seront synthétisés soit en présence de mesures stochastiques (système (3.1)), soit en présence de mesures déterministes (système (3.2)). Les différences entre ces deux types de mesures lors de la synthèse d'un observateur ont été traitées dans les sections 2.5 et 2.6.

Dans la section 3.3, on va considérer les entrées $u_i(t)$ comme des pseudo-incertitudes bornées en norme, tandis que, dans la section 3.4, on va exploiter la structure polytopique de l'ensemble $\overline{\Omega}$ défini en (3.88).

Dans le chapitre 2, les non linéarités traitées sont soit Lipschitz, soit one-sided Lipschitz. Dans la suite de ce chapitre, on a choisi de consacrer la section 3.3 au cas où la fonction $\ell(x(t))$ est Lipschitz, tandis que le cas où la fonction $\ell(x(t))$ est one-sided Lipschitz est abordé dans la section 3.4.

3.3 Observateurs avec des non linéarités de type Lipschitz

Dans cette section, la fonction $\ell(x)$ est Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\kappa > 0$ tel que (voir (A.1.10))

$$\|\ell(x_1) - \ell(x_2)\| \leqslant \kappa \|x_1 - x_2\| \qquad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Les conditions d'existence et d'unicité de la solution $x(t)$, données par le théorème 1.4.4, sont donc satisfaites pour les EDS (3.1a) et (3.2a).

3.3.1 Observateurs d'ordre plein

Pour l'observateur d'ordre plein, il faut estimer tout le vecteur d'état $x(t)$, donc la relation (3.1c) ou (3.2c) est remplacée par

$$z(t) = x(t) \tag{3.7}$$

dans la suite de cette section. On a donc $L = I_n$ et $r = n$.

3.3.1.1 Cas des mesures stochastiques

Pour le système stochastique (3.1) avec des mesures stochastiques (voir (3.1b)), l'observateur d'ordre plein proposé a la structure suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{x}(t) = \left(A_{t_0}\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i}\widehat{x}(t) + \ell(\widehat{x}(t)) \right) \mathrm{d}t \\ + \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t) \right) (\mathrm{d}y(t) - C\widehat{x}(t)\,\mathrm{d}t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $\widehat{x}(t)$ est l'estimation de l'état $x(t)$ et K_0 et K_i sont des gains à déterminer pour que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \tag{3.9}$$

converge exponentiellement presque sûrement.

En comparant l'observateur (3.8) avec la forme générale (2.3) donnée dans le chapitre 2, le gain est $\psi(u(t)) = K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t)$.

L'expression de la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en combinant l'EDS (3.1) et l'observateur (3.8), est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e(t) = \left(\left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C) u_i(t)) \right) e(t) + \ell(x(t)) - \ell(\widehat{x}(t)) \right) \mathrm{d}t \\ + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) - \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t) \right) \left(\sum_{k=1}^{h} D_k x(t)\,\mathrm{d}w_{y_k}(t) \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Afin d'appliquer le théorème 2.5.1, l'EDS (2.6) dans le chapitre 2 est obtenue en posant

$$f_1(x(t), u(t)) = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i} \right) x(t) + \ell(x(t)), \tag{3.11a}$$

$$g_1(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1} x(t) & \dots & A_{w_d} x(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.11b}$$

$$f_2(x(t),e(t),u(t)) = \left(A_{t_0} - K_0C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_iC)u_i(t))\right)e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t)-e(t)), \quad (3.11c)$$

$$g_2(x(t),u(t)) = \Big[A_{w_1}x(t) \quad \dots \quad A_{w_d}x(t) \quad -g_{2_y}(x(t),u(t))\Big], \quad (3.11d)$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix}, X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad (3.11e)$$

avec

$$g_{2_y}(x(t),u(t)) = \Big[(K_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{m} K_iu_i(t))\, D_1x(t) \quad \dots \quad (K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_iu_i(t))\, D_hx(t)\Big].$$

Avec les notations ci-dessus, les EDS (2.8) et (2.9) sont obtenues en posant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = e(t)$, $\overline{x}_1(t) = \overline{x}(t)$ et $\overline{x}_2(t) = \overline{e}(t)$ et l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée puisque la fonction $\ell(x(t))$ satisfait la condition de Lipschitz (3.6). Le théorème 2.5.1 s'applique donc en remplaçant l'hypothèse 2.2.1 par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.1a) et l'EDO (2.43) par

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(A_{t_0} - K_0C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_iC)u_i(t))\right)\overline{e}(t) - \ell(-\overline{e}(t)). \quad (3.12)$$

Afin de diminuer le "pessimisme" dans la détermination des conditions de stabilité, il est intéressant de remplacer les commandes $u_i(t)$ par une nouvelle variable $\varepsilon_i(t)$ dont l'intervalle de variation est compris entre -1 et 1. Ainsi, en utilisant l'ensemble Ω donné par (3.3), on définit la variable $\varepsilon_i(t)$ comme suit

$$u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i\varepsilon_i(t) \quad (3.13)$$

où

$$\alpha_i = \frac{u_{i,\max} + u_{i,\min}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_i = \frac{u_{i,\max} - u_{i,\min}}{2}$$

pour $i = 1, \dots, m$, avec $\alpha_0 = 1$ et $\sigma_0 = 0$.

Les nouvelles variables $\varepsilon_i(t)$ sont donc bornées et appartiennent au polytope convexe suivant

$$\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^m \mid -1 \leqslant \varepsilon_i(t) \leqslant 1, i = 1, \dots, m\} \quad (3.14)$$

et permettent de définir la matrice $\Delta_n(\varepsilon(t))$ comme suit

$$\Delta_n(\varepsilon(t)) = \text{bdiag}(\varepsilon_1(t)I_n(t), \dots, \varepsilon_m(t)I_n(t)) \quad (3.15)$$

avec la propriété suivante

$$\Delta_n(\varepsilon(t))\Delta_n^T(\varepsilon(t)) \leqslant I_{mn}. \quad (3.16)$$

Avec les relations (3.13), (3.14), (3.15), et (3.16), le traitement de la stabilité qui doit être garantie quelle que soit l'entrée bornée $u(t)$ est remplacé par une approche de type "stabilité robuste" qui doit être satisfaite pour toutes les incertitudes bornées en norme $\varepsilon(t)$ et définies par la condition (3.16) (voir [ZMRS03, SZRD06, HSRZ09]).

En insérant (3.13) dans (3.1a) et (3.12), on obtient (on a $x(t) = \overline{x}(t)$)

$$\mathrm{d}x(t) = \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i A_{t_i} x(t) + H_1 \Delta_n(\varepsilon(t)) H_2 x(t) + \ell(x(t))\right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\, \mathrm{d}w_{x_j}(t), \tag{3.17}$$

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(\sum_{i=0}^{m} (A_{t_i} - K_i C)\alpha_i + (H_1 - \overline{K}\mathcal{C})\Delta_n(\varepsilon(t)) H_2\right) \overline{e}(t) - \ell(-\overline{e}(t)), \tag{3.18}$$

avec

$$H_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{t_1} & \dots & \sigma_m A_{t_m} \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \overline{K} = \begin{bmatrix} K_1 & \dots & K_m \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \mathrm{bdiag}(\sigma_1 C, \dots, \sigma_m C).$$

Avec les calculs ci-dessus, le théorème suivant est une application du théorème 2.5.1 et du lemme 2.5.1 en utilisant une approche de type Lyapunov avec les relations (3.17) et (3.18). Des conditions de type LMI sont données pour déterminer les gains K_0, …, K_m de l'observateur (3.8).

Théorème 3.3.1. *[BZSM12b] On suppose que l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée. L'EDS (3.8) est un observateur pour le système (3.1) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ et Y_i $(i = 0, \dots, m)$ et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$ et $\beta \geqslant 0$ tels que les LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} (1,1)_a & \sigma_1 P A_{t_1} & \dots & \sigma_m P A_{t_m} & P & A_{w_1}^T P & \dots & A_{w_d}^T P \\ (1,2)^T & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1,m)^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu_2} & 0 & 0 & 0 \\ P A_{w_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ P A_{w_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{3.19}$$

$$\begin{bmatrix} (1,1)_b & \sigma_1(Q A_{t_1} - Y_1 C) & \dots & \sigma_m(Q A_{t_m} - Y_m C) & Q \\ (1,2)^T & -\mu_3 I_n & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ (1,m)^T & 0 & 0 & -\mu_3 I_n & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu_4} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.20}$$

sont vérifiées, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$ et où

$$(1,1)_a = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P A_{t_i} + A_{t_i}^T P) + (\mu_1 + \mu_2^{-1}\kappa^2) I_n - \rho P,$$

$$(1,1)_b = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i((QA_{t_i} - Y_iC) + (QA_{t_i} - Y_iC)^T) + (\mu_3 + \mu_4^{-1}\kappa^2)I_n + 2\beta Q,$$

et que, pour chaque $j = 1, \ldots, d$, l'une des deux LMI suivantes

$$A_{w_j}^T P + PA_{w_j} - \sqrt{2\rho_j}P > 0, \tag{3.21}$$
$$A_{w_j}^T P + PA_{w_j} + \sqrt{2\rho_j}P < 0 \tag{3.22}$$

est satisfaite.

Les gains K_i sont alors donnés par $K_i = Q^{-1}Y_i$ pour $i = 0, \ldots, m$.

Démonstration.

1ère étape : Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a).

L'EDS (3.1a) est identique à l'EDS (3.17).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_x(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ avec $P = P^T > 0$.

La condition (1.50a) du théorème 1.5.3 est satisfaite avec $p = 2$ et $c_1 = \lambda_{\min}(P)$.

L'application de $\mathfrak{L}V_x(x(t))$ à l'EDS (3.17) donne

$$\mathfrak{L}V_x(x(t)) = x^T(t)\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(PA_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P A_{w_j}\right)x(t) + 2x^T(t)PH_1\Delta_n(\varepsilon(t))H_2x(t) + 2x^T(t)P\ell(x(t)). \tag{3.23}$$

En utilisant les inégalités (3.6), (3.16) et (C.3.1) (voir le lemme C.3.1), la relation (3.23) devient

$$\mathfrak{L}V_x(x(t)) \leqslant x^T(t)\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(PA_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P A_{w_j} + \mu_1^{-1}PH_1H_1^TP + \mu_1 H_2^T H_2 + \mu_2^{-1}\kappa^2 I_n + \mu_2 PP\right)x(t) \tag{3.24}$$

avec $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

S'il existe un réel c_2 tel que $c_2 < \rho$ et $\mathfrak{L}V_x(x(t)) \leqslant c_2V_x(x(t))$, alors la condition (1.50b) du théorème 1.5.3 est satisfaite.

En utilisant l'inégalité (3.24), la condition $\mathfrak{L}V_x(x(t)) \leqslant c_2V_x(x(t))$ est vérifiée si l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(PA_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P A_{w_j} + \mu_1^{-1}PH_1H_1^TP + \mu_1 H_2^T H_2 + \mu_2^{-1}\kappa^2 I_n + \mu_2 PP - \rho P < 0 \tag{3.25}$$

l'est également.

Puisque $H_2^T H_2 = I_n$, l'application du lemme de Schur (voir (A.3.1) dans le lemme A.3.1) sur l'inégalité (3.25) donne la LMI (3.19).

L'application de $\mathfrak{B}V_x(x(t))$ à l'EDS (3.17) donne

$$\mathfrak{B}V_x(x(t)) = \begin{bmatrix} x^T(t)(A_{w_1}^T P + PA_{w_1})x(t) & \ldots & x^T(t)(A_{w_d}^T P + PA_{w_d})x(t) \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

S'il existe un réel $c_3 = 2\rho$ avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$ et $\rho_j \geqslant 0$ tel que $\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 \geqslant c_3 V_x^2(x(t))$, alors la condition (1.50c) du théorème 1.5.3 est satisfaite. En utilisant la relation (3.26), on obtient

$$\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 - c_3 V_x^2(x(t)) = \sum_{j=1}^{d} x^T(t)(A_{w_j}^T P + P A_{w_j} - \sqrt{2\rho_j} P)x(t) \times x^T(t)(A_{w_j}^T P + P A_{w_j} + \sqrt{2\rho_j} P)x(t). \quad (3.27)$$

La condition $\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 \geqslant c_3 V_x^2(x(t))$ est donc vérifiée si, pour chaque j avec $j = 1, \ldots, d$, l'une des deux LMI (3.21) ou (3.22) est satisfaite.

Puisque $c_2 < \rho$ et que $c_3 = 2\rho \geqslant 0$, l'inégalité (1.52) du théorème 1.5.3 est satisfaite et le point d'équilibre de l'EDS (3.1a) est exponentiellement stable presque sûrement.

2ème étape : Stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (3.12).

L'EDO (3.12) est identique à l'EDO (3.18).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_e(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t) Q \overline{e}(t)$ avec $Q = Q^T > 0$. La dérivée temporelle de $V_e(\overline{e}(t))$ le long de la trajectoire de la solution de l'EDO (3.18) est donnée par

$$\dot{V}_e(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t) \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i ((A_{t_i} - K_i C)^T Q + Q(A_{t_i} - K_i C)) \right) \overline{e}(t) + 2\overline{e}^T(t) Q (H_1 - \overline{K}\mathcal{C}) \Delta_n(\varepsilon(t)) H_2 \overline{e}(t) - 2\overline{e}^T(t) Q \ell(-\overline{e}(t)). \quad (3.28)$$

En utilisant les inégalités (3.6), (3.16) et (C.3.1) (voir le lemme C.3.1), la relation (3.28) devient

$$\dot{V}_e(\overline{e}(t)) \leqslant \overline{e}^T(t) \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i ((A_{t_i} - K_i C)^T Q + Q(A_{t_i} - K_i C)) + \mu_3^{-1} Q \mathcal{H} \mathcal{H}^T Q + \mu_3 I_n + \mu_4^{-1} \kappa^2 I_n + \mu_4 Q Q \right) \overline{e}(t) \quad (3.29)$$

avec $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$ et $\mathcal{H} = H_1 - \overline{K}\mathcal{C}$.

En appliquant le lemme 2.5.1, l'inégalité (3.29) est vérifiée avec $\beta \geqslant 0$ si

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i ((A_{t_i} - K_i C)^T Q + Q(A_{t_i} - K_i C)) + \mu_3^{-1} Q \mathcal{H} \mathcal{H}^T Q + \mu_3 I_n + \mu_4^{-1} \kappa^2 I_n + \mu_4 Q Q + 2\beta Q < 0, \quad (3.30)$$

alors il existe un réel $\theta > 0$ tel que

$$\dot{V}_e(\overline{e}(t)) \leqslant -\theta \overline{e}^T(t) Q \overline{e}(t) = -\theta V_e(\overline{e}(t)) \quad (3.31)$$

et on obtient la stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (3.12) puisque

$$\|\overline{e}(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}} \, \|\overline{e}_0\| \, e^{-\theta(t - t_0)} \quad (3.32)$$

avec $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Par définition, on a $\theta > \beta$.

En posant $Y_i = Q K_i$ pour $i = 0, \ldots, m$, l'application du lemme de Schur (voir (A.3.1) dans le lemme A.3.1) sur l'inégalité (3.30) donne la LMI (3.20). •

Remarque 3.3.1. On peut appliquer le théorème 3.3.1 en remplaçant les LMI (3.19), (3.21) et (3.22) par le théorème 1.5.9. Dans ce cas, on remplace l'approche de type Lyapunov donnée par le théorème 1.5.3 par l'utilisation du bruit $w_x(t)$ pour montrer la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a). □

3.3.1.2 Cas des mesures déterministes

Pour le système stochastique (3.2) avec des mesures déterministes (voir (3.2b)), l'observateur d'ordre plein proposé a la structure suivante

$$\mathrm{d}\widehat{x}(t) = \left(A_{t_0}\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i}\widehat{x}(t) + \ell(\widehat{x}(t)) \right) \mathrm{d}t + \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t) \right) (y(t) - C\widehat{x}(t))\, \mathrm{d}t \quad (3.33)$$

où $\widehat{x}(t)$ est l'estimation de l'état $x(t)$ et K_0 et K_i sont des gains à déterminer pour que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \quad (3.34)$$

converge exponentiellement presque sûrement.

En comparant l'observateur (3.33) avec la forme générale (2.48) donnée dans le chapitre 2, le gain est $\psi(u(t)) = K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t)$.

L'expression de la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en combinant l'EDS (3.2) et l'observateur (3.33), est donnée par

$$\mathrm{d}e(t) = \left(\left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C) u_i(t)) \right) e(t) + \ell(x(t)) - \ell(\widehat{x}(t)) \right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\, \mathrm{d}w_{x_j}(t). \quad (3.35)$$

Afin d'appliquer le théorème 2.5.1, l'EDS (2.6) dans le chapitre 2 est obtenue en posant

$$f_1(x(t), u(t)) = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i} \right) x(t) + \ell(x(t)), \quad (3.36a)$$

$$g_1(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1} x(t) & \dots & A_{w_d} x(t) \end{bmatrix}, \quad (3.36b)$$

$$f_2(x(t), e(t), u(t)) = \left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C) u_i(t)) \right) e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t) - e(t)), \quad (3.36c)$$

$$g_2(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1} x(t) & \dots & A_{w_d} x(t) \end{bmatrix}, \quad (3.36d)$$

$$w(t) = w_x(t), X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (3.36e)$$

En comparant les équations dans (3.11) et (3.36), l'application du théorème 2.5.1 et du lemme 2.5.1 sur le système stochastique (3.2) avec l'observateur (3.33) donne le théorème 3.3.1 en remplaçant l'expression "*L'EDS (3.8) est un observateur pour le système (3.1)*" par "*L'EDS (3.33) est un observateur pour le système (3.2)*". Il s'agit d'une conséquence directe des développements présentés dans la section 2.5.2 du chapitre 2.

3.3.1.3 Premier exemple avec l'observateur d'ordre plein

Pour illustrer les développements ci-dessus sur l'observateur d'ordre plein, on considère le système stochastique (3.1) avec $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$, $d = 1$, $h = 1$ et les matrices suivantes

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix},\ A_{t_1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.02 & 0.04 \\ 0 & 0.01 & -0.02 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix},\ A_{t_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_w = \begin{bmatrix} -3.5557 & -0.10952 & -0.47238 \\ 0.46643 & -4.031 & -0.80024 \\ -0.1 & 0.066667 & -3.4833 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $L = I_3$.

La non linéarité est donnée par la fonction $\ell(x(t))$ suivante

$$\ell(x(t)) = \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \\ \sin(x_3(t)) \end{bmatrix}$$

qui vérifie les conditions (3.4) et (3.6) avec $\kappa = 1$.

L'espace des entrées admissibles Ω est défini en (3.3) avec les bornes suivantes sur ces entrées

$$u_{1,\min} = -0.056, u_{1,\max} = 0.064,\ u_{2,\min} = -0.04,\ u_{2,\max} = 0.048.$$

L'hypothèse 2.3.1 est vérifiée.

En choisissant

$$\mu_1 = 3.5, \mu_2 = 3.5,\ \mu_3 = 0.1, \mu_4 = 0.1, \rho = 20, \beta = 0.95,$$

les LMI (3.19), (3.20) et (3.22) du théorème 3.3.1 ont généré les résultats suivants

$$P = \begin{bmatrix} 1.7363 & -0.11821 & -0.19304 \\ -0.11821 & 1.3746 & 0.010061 \\ -0.19304 & 0.010061 & 2.2102 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 2.9333 & 0.25191 & -0.056006 \\ 0.25191 & 2.8818 & 0.06448 \\ -0.056006 & 0.06448 & 3.1472 \end{bmatrix},$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 2.9148 & 18.73 \\ 14.99 & -2.5479 \\ -9.4191 & -16.218 \end{bmatrix},\ Y_1 = \begin{bmatrix} 0.32182 & -0.21942 \\ -0.13394 & 0.091321 \\ 0.17199 & -0.11727 \end{bmatrix},\ Y_2 = \begin{bmatrix} -0.069088 & 0.082906 \\ 0.06751 & -0.081012 \\ -0.079651 & 0.095582 \end{bmatrix},$$

Les gains $K_0 = Q^{-1}Y_0$, $K_1 = Q^{-1}Y_1$ et $K_2 = Q^{-1}Y_2$ de l'observateur d'ordre plein (3.8) sont

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.48564 & 6.4041 \\ 5.2285 & -1.3318 \\ -3.0913 & -5.0119 \end{bmatrix},\ K_1 = \begin{bmatrix} 0.11579 & -0.078947 \\ -0.057895 & 0.039474 \\ 0.057895 & -0.039474 \end{bmatrix},\ K_2 = \begin{bmatrix} -0.026316 & 0.031579 \\ 0.026316 & -0.031579 \\ -0.026316 & 0.031579 \end{bmatrix}.$$

Les simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \ \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama avec un pas d'échantillonnage $\mathrm{d}t = 0.00125$ seconde (voir (1.32)).

Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 confirment l'efficience de l'approche proposée.

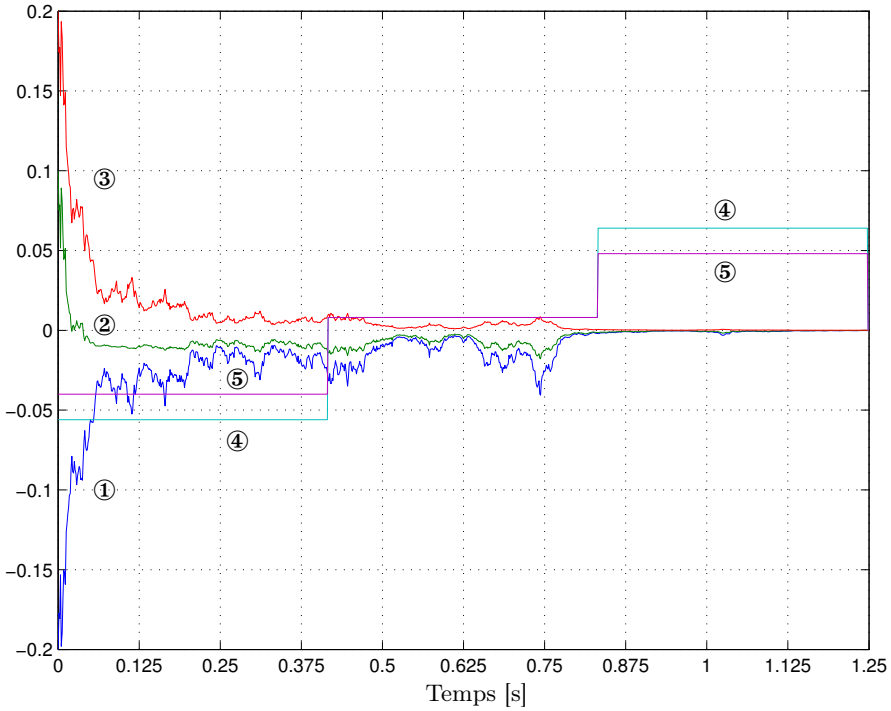


FIGURE 3.1 – Etats $x_1(t)$ (bleu ①), $x_2(t)$ (vert ②) et $x_3(t)$ (rouge ③) et commandes $u_1(t)$ (cyan ④) et $u_2(t)$ (magenta ⑤).

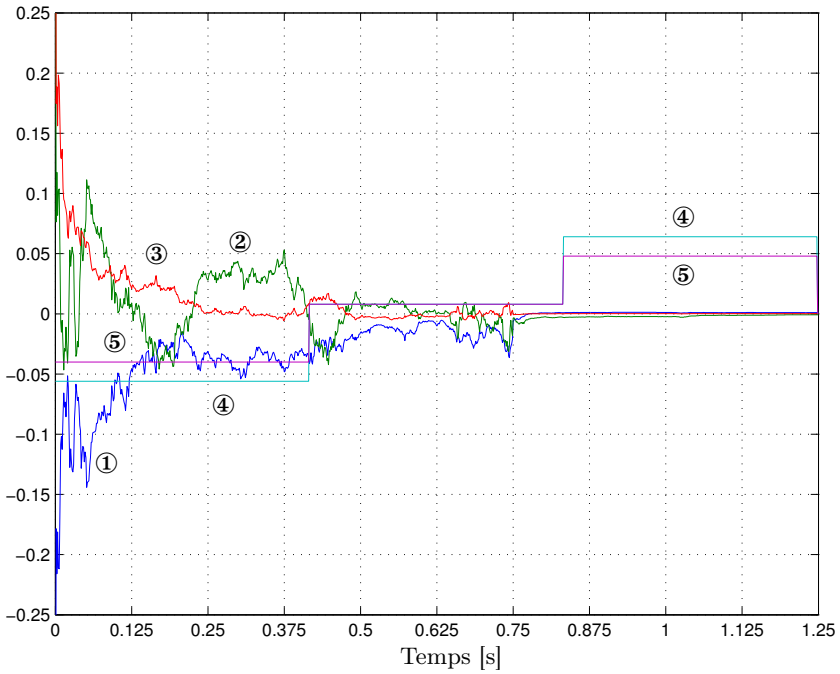


FIGURE 3.2 – Erreur de filtrage $e_1(t)$ (bleu ①), $e_2(t)$ (vert ②) et $e_3(t)$ (rouge ③) et commandes $u_1(t)$ (cyan ④) et $u_2(t)$ (magenta ⑤).

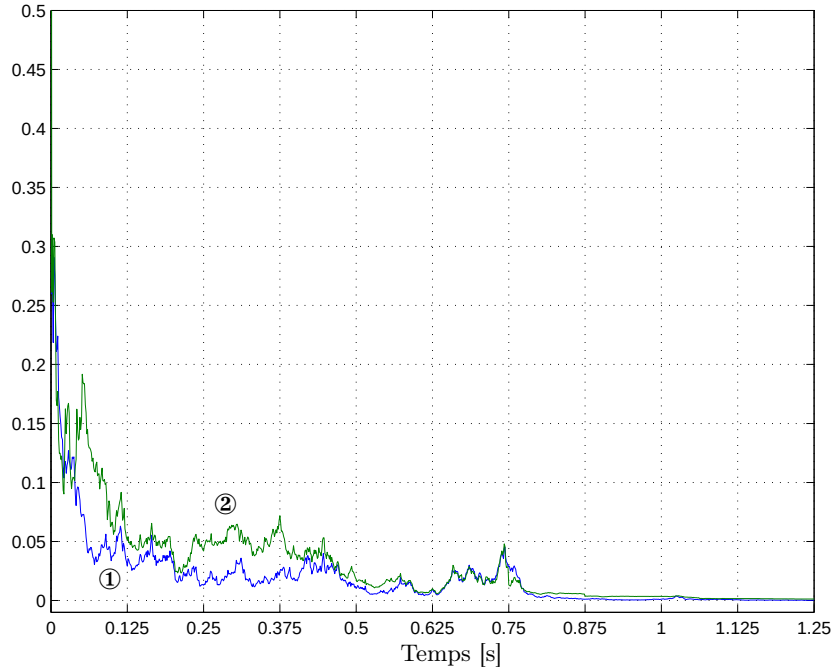


FIGURE 3.3 – $\|x(t)\|$ (bleu ①) et $\|e(t)\|$ (vert ②).

Dans la figure 3.1, on constate que la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a) a bien été garantie par les LMI (3.19) et (3.22) malgré la présence des commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ d'une amplitude comparable à celle des variables d'état.

La stabilité exponentielle de l'erreur d'observation est bien vérifiée grâce à la LMI (3.19), comme le montre la figure 3.2.

La figure 3.3 met en évidence le fait que la convergence de la norme de l'état $x(t)$ et de celle de l'erreur d'observation $e(t)$ est exponentielle.

3.3.1.4 Second exemple avec l'observateur d'ordre plein

Alors que dans le 1er exemple présenté dans la section 3.3.1.3, la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a) est démontrée en employant une approche de type Lyapunov en résolvant les LMI (3.19) et (3.22) du théorème 3.3.1, dans ce second exemple, c'est l'application du théorème 1.5.9 qui est mise en œuvre : le bruit $w_x(t)$ est utilisé pour montrer la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a), tandis que la stabilité de l'erreur d'observation est obtenue en résolvant la LMI (3.20) du théorème 3.3.1.

Dans cet exemple, on a choisi un modèle biologique présenté dans la littérature : il s'agit d'une classe de modèles à compartiments déterministes pour décrire la chimiothérapie d'un cancer [LS02, ŚLS03, LS03]. L'introduction de comportements aléatoires dans ces modèles déterministes permet de prendre en compte les incertitudes affectant les valeurs numériques des paramètres et les approximations faites dans la modélisation. Les EDS sont un moyen efficace pour représenter ces comportements aléatoires. Par exemple, cette approche a été utilisée dans la littérature pour les systèmes mécaniques dans [Dam04, UP99], les systèmes biologiques dans [DGM08, DGM09], la dynamique des populations dans [MMR02, PDM08] et les processus électriques dans [Dam04, UP99, WM76, KB13].

Dans [LS02, ŚLS03, LS03], ces modèles déterministes sont bilinéaires et décrivent l'évolution du nombre de cellules cancéreuses dans chaque compartiment. Les paramètres du modèle sont les temps de transit moyen des cellules à travers chaque compartiment.

Afin de prendre en compte les incertitudes dans la valeur de ces temps de transit moyen, on introduit un comportement aléatoire dans le modèle donné dans [LS02, ŚLS03, LS03], en ajoutant le terme $A_w x(t)\,\mathrm{d}w_x(t)$ où $x(t)$ est le vecteur d'état et $w_x(t)$ est un mouvement brownien.

Ainsi, le modèle C avec trois compartiments qui est donné dans [ŚLS03, LS03] est réécrit sous la forme d'une EDS (3.1a) avec l'équation de mesure (3.1b) comme suit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) &= ((A_{t_0} + u_1(t)A_{t_1} + u_2(t)A_{t_2})x(t))\,\mathrm{d}t + A_w x(t)\,\mathrm{d}w_x(t) && \text{(3.37a)} \\ \mathrm{d}y(t) &= Cx(t)\,\mathrm{d}t + Dx(t)\,\mathrm{d}w_y(t) && \text{(3.37b)} \end{aligned}$$

avec

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -a_0 & 0 & 2ba_2 \\ a_0 & -a_1 & 2(1-b)a_2 \\ 0 & a_1 & -a_2 \end{bmatrix},\ A_{t_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2ba_2 \\ 0 & 0 & -2(1-b)a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{t_2} = \begin{bmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_w = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Le système stochastique (3.37) correspond à (3.1) avec $\ell(x(t)) = 0$, $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$, $d = 1$, $h = 1$ et $L = I_3$.

L'hypothèse 2.3.1 est vérifiée.

L'état $x(t) = [\, x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)\,]^T$ représente le nombre des cellules cancéreuses dans les compartiments 0, 1 et 2. Les coefficients a_i $(i = 0, 1, 2)$ sont les paramètres de la loi de

distribution exponentielle associée à l'inverse du temps de transit moyen des cellules à travers le $i^{\text{ème}}$ compartiment. b est la probabilité que de nouvelles cellules nées entrent dans le compartiment 0.

Les valeurs numériques des paramètres dans le modèle C donnés dans [ŚLS03, LS03] sont $a_0 = 0.05$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$ et $b = 0.9$.

Les réels θ_i sont $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1.6$.

Les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont les doses des médicaments (injections) administrées et l'essemble Ω des entrées admissibles $u(t)$ défini en (3.3) est caractérisé par les bornes suivantes [ŚLS03, LS03]

$$\begin{aligned} u_{1\,\min} = 0 \leqslant u_1(t) \leqslant u_{1\,\max} = 1, \\ u_{2\,\min} = 0 \leqslant u_2(t) \leqslant u_{2\,\max} = 6. \end{aligned}$$

Si $u_1(t) = 0$ et $u_2(t) = 1$, $\lambda(A_{t_0} + A_{t_1}u_1(t) + A_{t_2}u_2(t)) = [\,0 \quad -0.6 \quad -1\,]^T$ [1], alors le point d'équilibre de l'EDS (3.37a) est exponentiellement instable en moyenne quadratique pour certains $u(t) \in \Omega$ puisque la valeur propre maximale est égale à zéro (voir théorème 1.5.3 dans [Dam04] (ou les remarques 1.5.2 et 1.5.3)). En effet, avec ces choix pour $u_1(t)$ et $u_2(t)$, l'EDS (3.37a) devient

$$\mathrm{d}x(t) = \overline{A}_t x(t)\,\mathrm{d}t + A_w x(t)\,\mathrm{d}w_x(t)$$

où $\overline{A}_t = A_{t_0} + A_{t_1}u_1(t) + A_{t_2}u_2(t)$ n'est pas Hurwitz. Le théorème 1.5.3 dans [Dam04] stipule que le point d'équilibre de cette EDS est exponentiellement (ou asymptotiquement) stable en moyenne quadratique si et seulement s'il existe une matrice $X = X^T > 0$ telle que (voir les remarques 1.5.2 et 1.5.3)

$$\overline{A}_t X + X\overline{A}_t^T + A_w X A_w^T < 0.$$

Cette condition est impossible à réaliser puisque la matrice $\overline{A}_t$ n'est pas Hurwitz.

Il s'ensuit que les observateurs basés sur la stabilité exponentielle en moyenne quadratique proposés dans la littérature (voir [Phi89, CGS00, GLSY01, GMP02, Sto02, XC02, XC03, ZCT05, GLW06, GSB07, HSRZ09, BS10]) s'avèrent inapplicables pour le système (3.37).

Pour déterminer les gains K_0, K_1 et K_2 de l'observateur d'ordre plein (3.8) pour le système stochastique (3.37), on procède en deux étapes comme annoncé au début de cette section. Cette procédure en deux étapes est une conséquence directe des théorèmes 2.5.1 et 3.3.1, ainsi que de la remarque 3.3.1.

1ère étape : Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.37a) avec le théorème 1.5.9.

Pour vérifier la condition (c) dans le théorème 2.5.1, on définit les constantes φ_1, φ_2 et φ_3 suivantes

$$\begin{aligned} &\|(A_{t_0} + u_1(t)A_{t_1} + u_2(t)A_{t_2})x(t)\| \\ &\qquad \leqslant \underbrace{(\sigma_{\max}(A_{t_0}) + \max(|u_1(t)|)\sigma_{\max}(A_{t_1}) + \max(|u_2(t)|)\sigma_{\max}(A_{t_2}))}_{\varphi_1} \|x(t)\|\,, \\ &\|A_w x(t)\|^2 \leqslant \underbrace{\sigma^2_{\max}(A_w)}_{\varphi_2} \|x(t)\|^2\,, \\ &\left\|x^T(t)\,A_w x(t)\right\|^2 \geqslant \underbrace{\sigma^4_{\min}(A_w)}_{\varphi_3} \|x(t)\|^4\,, \end{aligned}$$

1. $\lambda(A)$ est le vecteur des valeurs propres de la matrice A.

où $\sigma_{\min}(A)$ et $\sigma_{\max}(A)$ sont les valeurs singulières minimales et maximales de la matrice A (voir (A.1.2) et (A.1.3) dans la section A.1 de l'annexe A).

Le théorème 1.5.9 donne la condition suffisante suivante

$$\varphi_1 + 0.5\varphi_2 - \varphi_3 < 0 \tag{3.38}$$

pour que le point d'équilibre de l'EDS (3.37a) soit presque sûrement exponentiellement stable avec

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t,0,x_0)\|) \leqslant \varphi_1 + 0.5\varphi_2 - \varphi_3 \qquad \text{p.s.} \tag{3.39}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Les réels φ_1, φ_2 et φ_3 dans (3.39) sont donnés par $\varphi_1 = 4.3268$, $\varphi_2 = 2.56$ et $\varphi_3 = 6.5536$.

Le point d'équilibre de l'EDS (3.37a) est presque sûrement exponentiellement stable puisque la relation (3.39) devient

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t,0,x_0)\|) \leqslant \varphi_1 + 0.5\varphi_2 - \varphi_3 = -0.94679 \qquad \text{p.s.}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$2^{\text{ème}}$ étape : Synthèse des gains K_0, K_1 et K_2 de l'observateur d'ordre plein (3.8).

Puisque $\ell(x(t)) = 0$ dans l'EDS (3.37a), la LMI (3.20) dans le thérorème 3.3.1 se simplifie comme suit

$$\begin{bmatrix} (1,1)_b & \sigma_1(QA_{t_1} - Y_1C) & \dots & \sigma_m(QA_{t_m} - Y_mC) \\ (1,2)^T & -\mu_3 I_n & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ (1,m)^T & 0 & 0 & -\mu_3 I_n \end{bmatrix} < 0 \tag{3.20-bis}$$

avec

$$(1,1)_b = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i((QA_{t_i} - Y_iC) + (QA_{t_i} - Y_iC)^T) + \mu_3 I_n + 2\beta Q. \tag{3.40}$$

Avec $\mu_3 = 0.1$ et $\beta = 5$, la LMI (3.20-bis) donne les solutions suivantes

$$Q = \begin{bmatrix} 25.523 & -19.528 & 2.0094 \\ -19.528 & 47.432 & 85.139 \\ 2.0094 & 85.139 & 299.71 \end{bmatrix},$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 92.109 & -89.918 \\ -33.322 & 167.08 \\ 71.925 & 179.07 \end{bmatrix},\ Y_1 = \begin{bmatrix} -9.3412 & -9.3412 \\ 5.7033 & 5.7033 \\ -4.5877 & -4.5877 \end{bmatrix},\ Y_2 = \begin{bmatrix} -1.2514 & 1.0011 \\ 1.86 & -1.488 \\ 2.3091 & -1.8473 \end{bmatrix}.$$

Les gains $K_0 = Q^{-1}Y_0$, $K_1 = Q^{-1}Y_1$ et $K_2 = Q^{-1}Y_2$ de l'observateur d'ordre plein (3.8) sont

$$K_0 = \begin{bmatrix} 5.5528 & 1.1515 \\ 2.4886 & 5.9949 \\ -0.50419 & -1.1132 \end{bmatrix},\ K_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.4 \\ -0.04444 & -0.04444 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ K_2 = \begin{bmatrix} -0.027778 & 0.022222 \\ 0.027778 & -0.022222 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \ \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama avec un pas d'échantillonnage $\mathrm{d}t = 0.002$ seconde (voir (1.32)).

Les figures obtenues sont les suivantes (figures 3.4 à 3.10) : elles permettent de valider, pour chacune des trois coordonnées du vecteur d'état, la convergence de l'état estimé vers l'état réel et de comparer la vitesse de convergence de l'erreur de filtrage par rapport à celle de l'état. L'état $x(t)$ et l'état estimé $\widehat{x}(t)$ sont représentés sur les figures 3.4 à 3.6 pour chacune des trois coordonnées. La valeur absolue de l'état $x_i(t)$ est comparée à celle de l'erreur de filtrage $e_i(t)$ dans les figures 3.7 à 3.9 pour $i = 1, 2, 3$. La figure 3.10 montre la norme des vecteurs d'état $x(t)$ et d'erreur de filtrage $e(t)$.

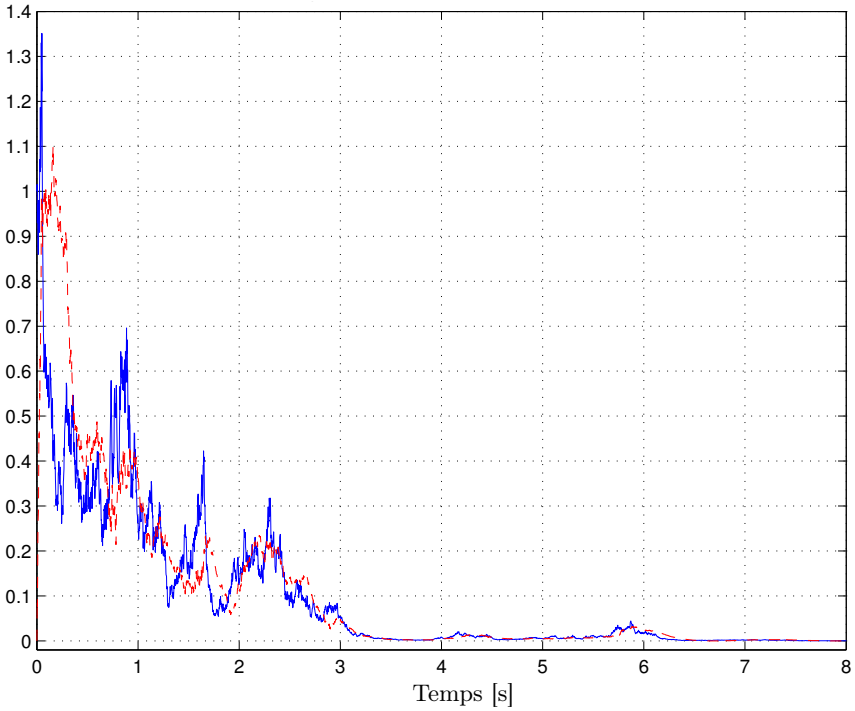


FIGURE 3.4 – Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ (rouge, discontinu).

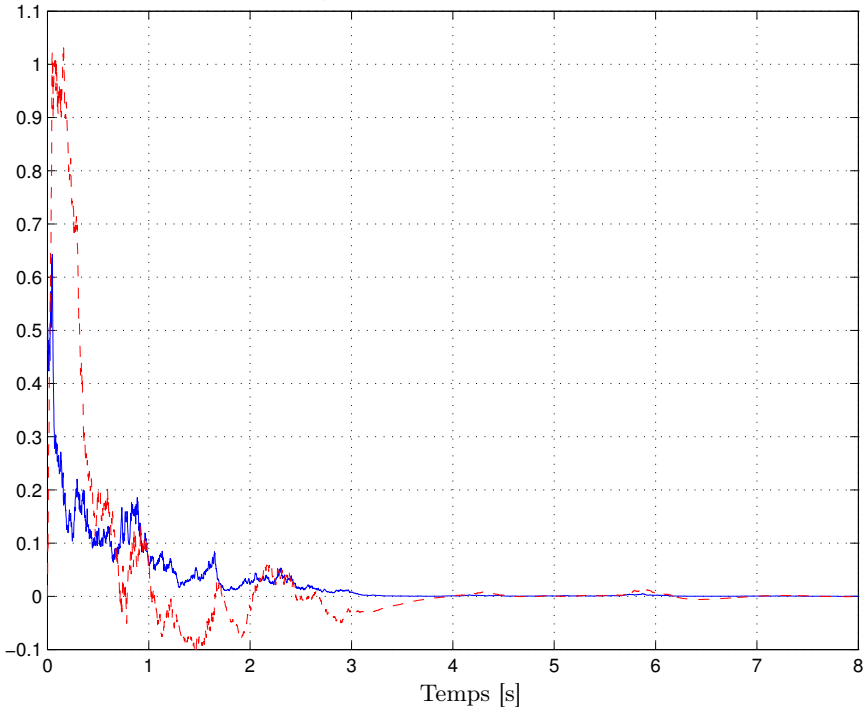


FIGURE 3.5 – Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ (rouge, discontinu).

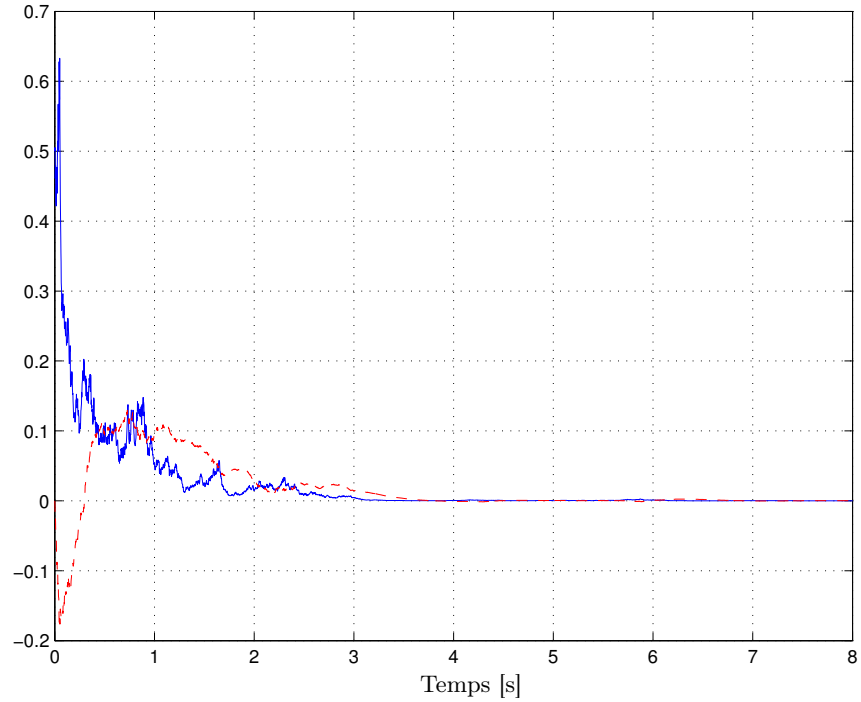


FIGURE 3.6 – Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_3(t)$ (rouge, discontinu).

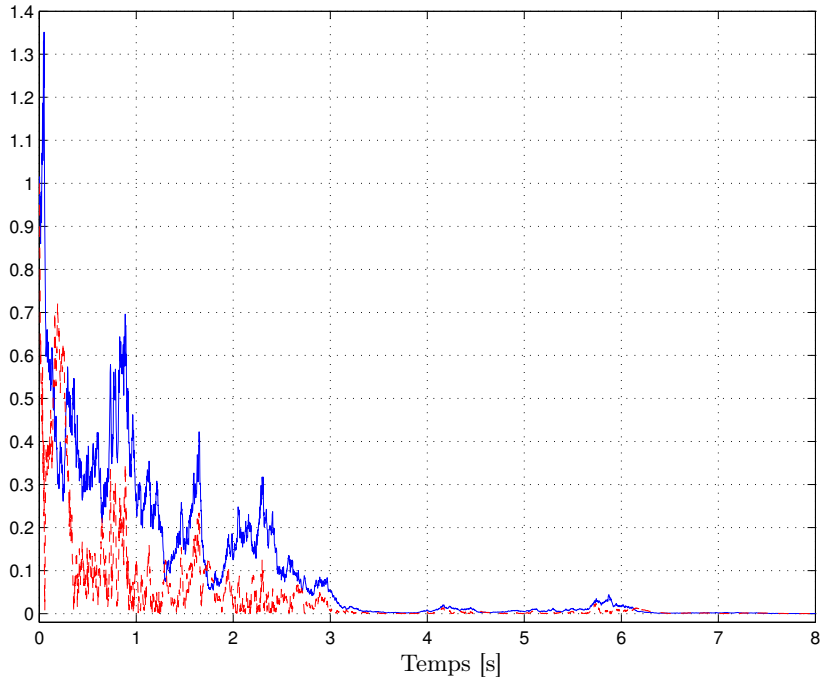


FIGURE 3.7 – Valeur absolue de l'état $|x_1(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_1(t)|$ (rouge, discontinu).

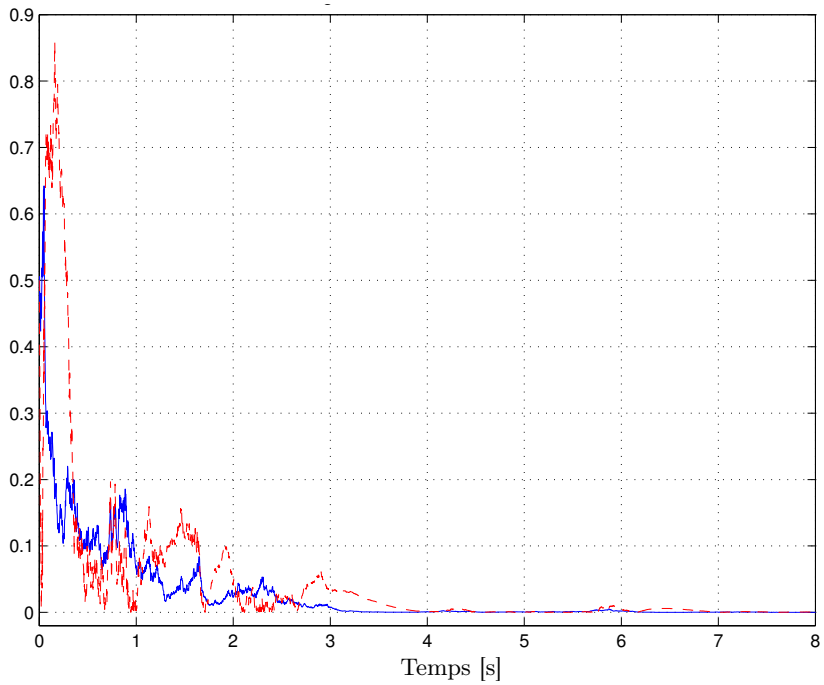


FIGURE 3.8 – Valeur absolue de l'état $|x_2(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_2(t)|$ (rouge, discontinu).

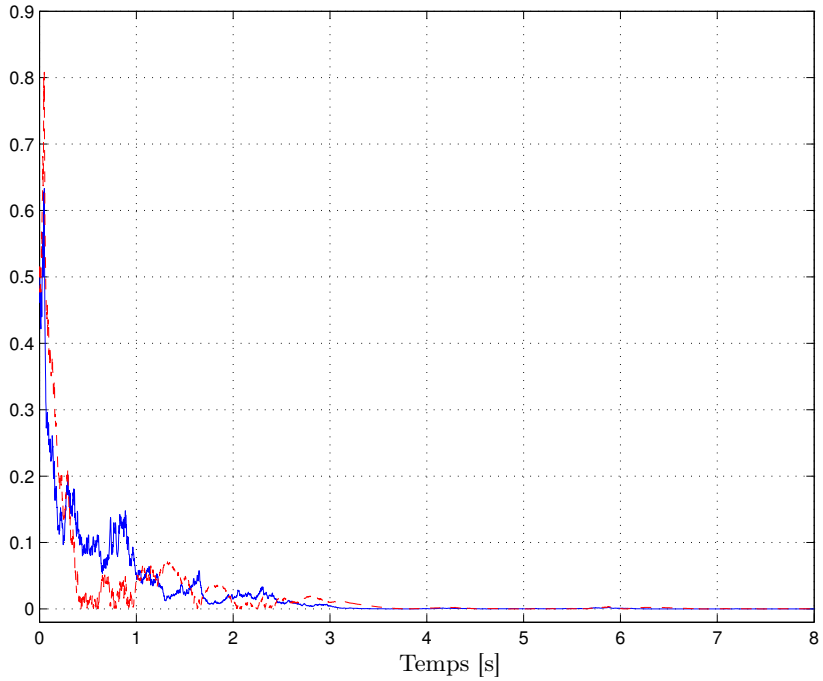


FIGURE 3.9 – Valeur absolue de l'état $|x_3(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_3(t)|$ (rouge, discontinu).

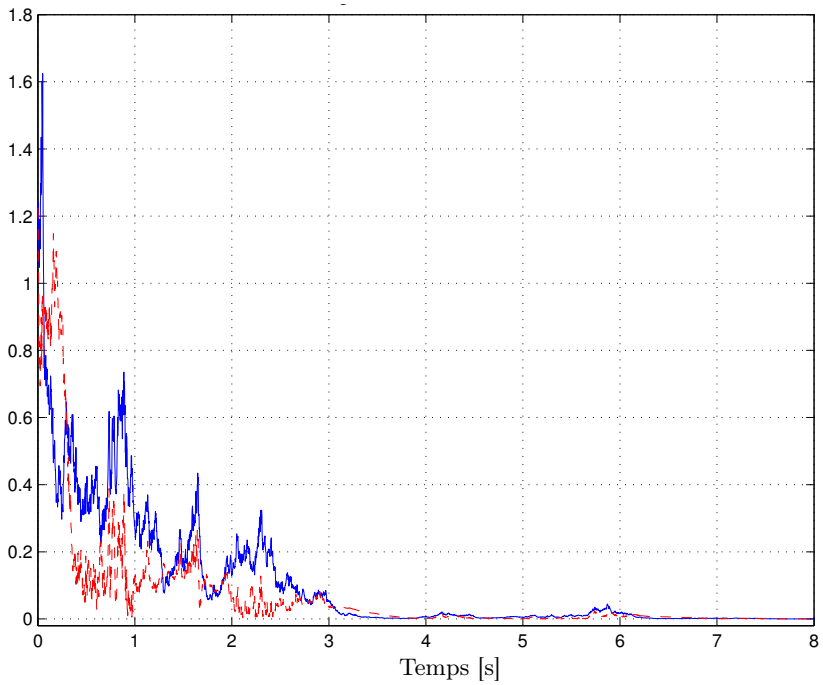


FIGURE 3.10 – Norme de l'état $\|x(t)\|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $\|e(t)\|$ (rouge, discontinu).

La convergence de l'estimation $\widehat{x}(t)$ vers l'état $x(t)$ pour chacune des trois coordonnées est illustrée dans les figures 3.4, 3.5 et 3.6. La nature exponentielle de cette convergence est mise en évidence dans les figures 3.7, 3.8 et 3.9. La figure 3.10 montre que l'erreur de filtrage converge plus rapidement que l'état, ce que confirment les figures 3.7, 3.8 et 3.9 pour chacune des trois coordonnées. Les résultats obtenus dans ces simulations confirment l'importance du paramètre β introduit dans le lemme 2.5.1 pour agir sur le taux de décroissance exponentielle de l'erreur d'observation. Ce paramètre intervient dans la LMI (3.20) dans le thérorème 3.3.1 (en réalité dans la LMI (3.20-bis) puisque $\ell(x(t)) = 0$ dans l'EDS (3.37a)).

3.3.2 Observateurs d'ordre réduit

Dans cette section, on n'estime pas la totalité du vecteur d'état $x(t)$, mais seulement une combinaison linéaire de celui-ci, appelée $z(t)$, avec $z(t) \in \mathbb{R}^r$ et $r < n$ dans la condition (3.5).

La fonctionnelle à estimer $z(t) = Lx(t)$ dans les systèmes stochastiques (3.1) et (3.2) vérifie la propriété suivante : il existe une fonction $\overline{\ell}(z)$ telle que

$$\ell(x(t)) = \overline{\ell}(Lx(t)) = \overline{\ell}(z(t)). \tag{3.41}$$

3.3.2.1 Cas des mesures stochastiques

Pour le système stochastique (3.1) avec des mesures stochastiques (voir (3.1b)), l'observateur fonctionnel d'ordre réduit proposé a la structure suivante

$$\mathrm{d}\widehat{z}(t) = \left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right)\widehat{z}(t) + L\overline{\ell}(\widehat{z}(t))\right)\mathrm{d}t + \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i\right)\mathrm{d}y(t) \tag{3.42}$$

où $\widehat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de $z(t)$. M_i et N_i $(i = 0, \ldots, m)$ sont des matrices de gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e_r(t) = z(t) - \widehat{z}(t) = Lx(t) - \widehat{z}(t) \tag{3.43}$$

converge exponentiellement presque sûrement.

Remarque 3.3.2. La condition (3.41) permet d'utiliser un observateur d'ordre réduit donné par (2.49) tout en intégrant une "recopie" de $\ell(x(t))$ dans la dynamique de l'observateur fonctionnel d'ordre réduit car cet observateur a $\widehat{z}(t)$ comme vecteur d'état. Puisque $\widehat{z}(t)$ est l'estimation du vecteur $z(t)$ donné par (3.1c), le terme $\overline{\ell}(\widehat{z}(t))$ dans l'observateur (3.42) permet de prendre en compte le terme $\ell(x(t))$ dans l'EDS (3.1a). □

En comparant l'observateur (3.42) avec la forme générale (2.49) donnée dans le chapitre 2, la fonction $\Sigma_r(\hat{z}(t), u(t))$ et le gain $\psi_r(u(t))$ sont donnés par

$$\Sigma_r(\hat{z}(t), u(t)) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right)\widehat{z}(t) + L\overline{\ell}(\widehat{z}(t)) \quad \text{et} \quad \psi_r(u(t)) = N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t). \tag{3.44}$$

L'expression de la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en combinant l'EDS (3.1) et l'observateur (3.42), est donnée par

$$\mathrm{d}e_r(t) = \left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right) e_r(t) + (LA_{t_0} - M_0 L - N_0 C)x(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{m} u_i(t)(LA_{t_i} - M_iL - N_iC)x(t) + L(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(Lx(t) - e_r(t)))\right)\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{j=1}^{d} LA_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) - \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_iu_i(t)\right)\left(\sum_{k=1}^{h} D_kx(t)\,\mathrm{d}w_{y_k}(t)\right). \quad (3.45)$$

Afin de supprimer un maximum de termes dépendant de l'état $x(t)$ dans l'EDS (3.45), on va déterminer les matrices M_i et N_i en imposant que les contraintes de Sylvester suivantes

$$LA_{t_i} - M_iL - N_iC = 0, \qquad i = 0, \ldots, m, \quad (3.46)$$

soient vérifiées. En insérant (3.46) dans l'EDS (3.45), on obtient l'EDS suivante

$$\mathrm{d}e_r(t) = \left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)M_i\right)e_r(t) + L(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(Lx(t) - e_r(t)))\right)\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{j=1}^{d} LA_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) - \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_iu_i(t)\right)\left(\sum_{k=1}^{h} D_kx(t)\,\mathrm{d}w_{y_k}(t)\right). \quad (3.47)$$

Afin d'appliquer le théorème 2.6.1, l'EDS (2.52) dans le chapitre 2 est obtenue en posant

$$f_1(x(t), u(t)) = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)A_{t_i}\right)x(t) + \ell(x(t)), \quad (3.48a)$$
$$g_1(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1}x(t) & \ldots & A_{w_d}x(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.48b)$$
$$f_2(x(t), e_r(t), u(t)) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)M_i\right)e_r(t) + L(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(Lx(t) - e_r(t))), \quad (3.48c)$$
$$g_2(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} LA_{w_1}x(t) & \ldots & LA_{w_d}x(t) & -g_{2_y}(x(t), u(t)) \end{bmatrix}, \quad (3.48d)$$
$$w(t) = \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix}, X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e_r(t) \end{bmatrix}, \quad (3.48e)$$

avec

$$g_{2_y}(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} (N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_iu_i(t))\,D_1x(t) & \ldots & (N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_iu_i(t))\,D_hx(t) \end{bmatrix}.$$

Avec les notations ci-dessus, les EDS (2.8) et (2.9) sont obtenues en posant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = e_r(t)$, $\overline{x}_1(t) = \overline{x}(t)$ et $\overline{x}_2(t) = \overline{e}_r(t)$ et l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée puisque la fonction $\ell(x(t))$ satisfait la condition de Lipschitz (3.6). Le théorème 2.6.1 s'applique donc en remplaçant l'hypothèse 2.2.1 par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.1a) et l'EDO (2.54) par

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)M_i\right)\overline{e}_r(t) - L\overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)). \quad (3.49)$$

Soit $L^\dagger$ une pseudo-inverse de la matrice L (voir la section A.2), on a donc

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} L^\dagger & (I_n - L^\dagger L) \end{bmatrix}\right) = n$$

et les conditions de Sylvester (3.46) sont équivalentes à

$$(LA_{t_i} - M_iL - N_iC)\begin{bmatrix} L^\dagger & (I_n - L^\dagger L)\end{bmatrix} = 0 \qquad i = 0, \ldots, m. \tag{3.50}$$

Puisque la matrice L est de rang plein lignes avec $r < n$ (voir (3.5)), on a $LL^\dagger = I_r$. En utilisant l'approche développée dans [Dar00a, SZRD06], les matrices M_i et N_i sont données par

$$M_i = LA_{t_i}L^\dagger - N_iCL^\dagger \qquad i = 0, \ldots, m, \tag{3.51}$$

$$\mathcal{N}\mathcal{F} = L\mathcal{A} \tag{3.52}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{t_0}(I_n - L^\dagger L) & \ldots & A_{t_m}(I_n - L^\dagger L)\end{bmatrix}, \qquad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} N_0 & \ldots & N_m\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{F} = \mathrm{bdiag}(C(I_n - L^\dagger L), \ldots, C(I_n - L^\dagger L)).$$

L'équation (3.52) a une solution $\mathcal{N}$ si et seulement si (voir équation (A.2.11) avec $A = I$ et remarque 3.5.3)

$$\mathrm{rang}\left(\begin{bmatrix} LA_{t_0} & \ldots & LA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \mathrm{rang}\left(\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) \tag{3.53}$$

et la solution générale est donnée par (voir équation (A.2.9) avec $A = I$)

$$\mathcal{N} = L\mathcal{A}\mathcal{F}^\dagger + Z(I_{(m+1)p} - \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger) \tag{3.54}$$

où $Z \in \mathbb{R}^{r\times(m+1)p}$ est une matrice arbitraire qu'on peut considérer comme "la matrice de gain de l'observateur".

En insérant (3.51) et (3.54) dans l'EDO (3.49), on obtient

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = (\mathbb{A} - Z\mathbb{C} + (\mathbb{B} - Z\mathbb{D})\Delta_r(\varepsilon(t))H_3)\,\overline{e}_r(t) - L\overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)) \tag{3.55}$$

avec

$$\mathbb{A} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i LA_{t_i}L^\dagger - L\mathcal{A}\mathcal{F}^\dagger \begin{bmatrix} \alpha_0 CL^\dagger \\ \vdots \\ \alpha_m CL^\dagger \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \sigma_1 LA_{t_1}L^\dagger & \ldots & \sigma_m LA_{t_m}L^\dagger \end{bmatrix} - L\mathcal{A}\mathcal{F}^\dagger \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 CL^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m CL^\dagger \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{C} = (I_{(m+1)p} - \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger) \begin{bmatrix} \alpha_0 CL^\dagger \\ \vdots \\ \alpha_m CL^\dagger \end{bmatrix}, \quad \mathbb{D} = (I_{(m+1)p} - \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 CL^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m CL^\dagger \end{bmatrix} \quad H_3 = \begin{bmatrix} I_r \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix},$$

et

$$\Delta_r(\varepsilon(t)) = \text{bdiag}(\varepsilon_1(t) I_r(t), \ldots, \varepsilon_m(t) I_r(t)) \tag{3.56}$$

avec la propriété suivante

$$\Delta_r(\varepsilon(t))\Delta_r^T(\varepsilon(t)) \leqslant I_{mr}, \tag{3.57}$$

où $\varepsilon_i(t)$ est défini dans (3.13) et (3.14).

Avec les calculs ci-dessus, le théorème suivant est une application du théorème 2.6.1 et du lemme 2.6.1 en utilisant une approche de type Lyapunov avec les relations (3.17) et (3.55). Des conditions de type LMI sont données pour déterminer les gains $M_0, \ldots, M_m$ et $N_0, \ldots, N_m$ de l'observateur (3.42).

Théorème 3.3.2. *On suppose que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.53) sont satisfaites. L'EDS (3.42) est un observateur fonctionnel d'ordre réduit pour le système (3.1) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ et R et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_5 > 0$, $\mu_6 > 0$ et $\beta_r \geqslant 0$ tels que les LMI (3.19) et*

$$\begin{bmatrix} (Q\mathbb{A} - R\mathbb{C}) + (Q\mathbb{A} - R\mathbb{C})^T + \mu_5 I_r + \mu_6^{-1}\kappa^2 I_r + 2\beta_r Q & Q\mathbb{B} - R\mathbb{D} & QL \\ (Q\mathbb{B} - R\mathbb{D})^T & -\mu_5 I_{mr} & 0 \\ L^T Q & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu_6} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.58}$$

soient vérifiées, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^d \rho_j$, et que, pour chaque $j = 1, \ldots, d$, l'une des deux LMI (3.21) ou (3.22) soit satisfaite.

Le gain Z est alors donné par $Z = Q^{-1}R$. Les matrices M_i et N_i de l'observateur sont obtenues avec (3.51) et (3.54).

Démonstration.

1ère étape : Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a).

Cette partie de la démonstration est identique à celle du théorème 3.3.1.

2ème étape : Stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (3.55).

L'EDO (3.49) est identique à l'EDO (3.55) puisque la condition (3.53) est satisfaite.

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_e(\overline{e}_r(t)) = \overline{e}_r^T(t) Q \overline{e}_r(t)$ avec $Q = Q^T > 0$. La dérivée temporelle de $V_e(\overline{e}_r(t))$ le long de la trajectoire de la solution de l'EDO (3.55) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(\overline{e}_r(t)) = \overline{e}_r^T(t)(\mathbb{A} - Z\mathbb{C} + (\mathbb{A} - Z\mathbb{C})^T)\overline{e}_r(t) \\ + 2\overline{e}_r^T(t) Q(\mathbb{B} - Z\mathbb{D})\Delta_r(\varepsilon(t)) H_3 \overline{e}_r(t) - 2\overline{e}_r^T(t) Q L \overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)). \end{aligned} \tag{3.59}$$

En utilisant les inégalités (3.6), (3.57) et (C.3.1) (voir le lemme C.3.1), la relation (3.59) devient

$$\dot{V}_e(\overline{e}_r(t)) \leqslant \overline{e}_r^T(t) \left((\mathbb{A} - Z\mathbb{C})^T Q + Q(\mathbb{A} - Z\mathbb{C}) \right.$$

$$+\mu_5^{-1}Q(\mathbb{B}-Z\mathbb{D})(\mathbb{B}-Z\mathbb{D})^TQ+\mu_5 I_r+\mu_6^{-1}\kappa^2 I_r+\mu_6 QLL^TQ\big)\,\overline{e}_r(t) \quad (3.60)$$

avec $\mu_5 > 0$, $\mu_6 > 0$.

En appliquant le lemme 2.6.1, l'inégalité (3.60) est vérifiée avec $\beta_r \geqslant 0$ si

$$(\mathbb{A}-Z\mathbb{C})^TQ+Q(\mathbb{A}-Z\mathbb{C})+\mu_5^{-1}Q(\mathbb{B}-Z\mathbb{D})(\mathbb{B}-Z\mathbb{D})^TQ + \mu_5 I_r+\mu_6^{-1}\kappa^2 I_r+\mu_6 QLL^TQ+2\beta_r Q<0, \quad (3.61)$$

alors il existe un réel $\theta_r > 0$ tel que

$$\dot{V}_e(\overline{e}_r(t)) \leqslant -\theta_r \overline{e}^T(t)Q\overline{e}_r(t) = -\theta_r V_e(\overline{e}_r(t)) \quad (3.62)$$

et on obtient la stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (3.49) puisque

$$\|\overline{e}_r(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}}\,\|\overline{e}_{r_0}\|\,e^{-\theta_r(t-t_0)} \quad (3.63)$$

avec $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Par définition, on a $\theta_r > \beta_r$.

En posant $Z = Q^{-1}R$, l'application du lemme de Schur (voir (A.3.1) dans le lemme A.3.1) sur l'inégalité (3.61) donne la LMI (3.58). •

3.3.2.2 Cas des mesures déterministes

Pour le système stochastique (3.2) avec des mesures déterministes (voir (3.2b)), l'observateur fonctionnel d'ordre réduit proposé a la structure suivante

$$\mathrm{d}\eta(t) = \left(\left(M_0+\sum_{i=1}^m u_i(t)M_i\right)\eta(t)+(L-EC)\overline{\ell}(\eta(t))\right)\mathrm{d}t + \left(N_0+\sum_{i=1}^m u_i(t)N_i\right)y(t)\,\mathrm{d}t \quad (3.64a)$$

$$\widehat{z}(t) = \eta(t)+Ey(t) \quad (3.64b)$$

où $\widehat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de $z(t)$. E, M_i et N_i $(i = 0,\ldots,m)$ sont des matrices de gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e_r(t) = z(t)-\widehat{z}(t) = \Psi x(t)-\eta(t) \quad (3.65)$$

converge exponentiellement presque sûrement avec

$$\Psi = L-EC. \quad (3.66)$$

Remarque 3.3.3. Puisque les mesures sont données par $y(t) = Cx(t)$, on peut insérer l'équation (3.64b) dans l'observateur (3.64). Si on considère le cas particulier $E = 0$, alors l'observateur (3.64) se réduit à l'EDO (3.64a) avec $\eta(t) = \widehat{z}(t)$, c'est-à-dire à l'observateur (3.42). Puisque'on peut obtenir une solution où la matrice E est quelconque, les conditions d'existence pour résoudre des équations de Sylvester seront plus générales : il suffit de comparer les conditions d'existence que l'on aurait avec $E = 0$ (voir (3.53)) avec celles associées au cas où E est quelconque (voir (3.78)). Les implications entre les conditions d'existence des solutions d'équations de Sylvester lorsque la matrice E de l'observateur est contrainte ou non à être nulle sont discutées dans la remarque 3.5.3. □

En comparant l'observateur (3.64) avec la forme générale (2.58) donnée dans le chapitre 2, la fonction $\Sigma_r(\hat{z}(t), u(t))$ et le gain $\psi_r(u(t))$ sont donnés par

$$\Sigma_r(\eta(t), u(t)) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right) \eta(t) + (L - EC)\overline{\ell}(\eta(t))$$
$$\text{et} \quad \psi_r(u(t)) = N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t). \quad (3.67)$$

L'expression de la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en combinant l'EDS (3.2) et l'observateur (3.64), est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_r(t) = &\left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right) e_r(t) + (\Psi A_{t_0} - M_0\Psi - N_0 C)x(t)\right)\mathrm{d}t \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(t)(\Psi A_{t_i} - M_i\Psi - N_i C)x(t) + \Psi(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(\Psi x(t) - e_r(t)))\right)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{j=1}^{d} \Psi A_{w_j} x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t). \quad (3.68) \end{aligned}$$

Afin de supprimer un maximum de termes dépendant de l'état $x(t)$ dans l'EDS (3.45), on va déterminer les matrices M_i et N_i en imposant que les contraintes de Sylvester suivantes

$$\Psi A_{t_i} - M_i\Psi - N_i C = 0, \qquad i = 0, \ldots, m, \quad (3.69)$$

soient vérifiées. En insérant (3.69) dans l'EDS (3.68), on obtient l'EDS suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_r(t) = &\left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right) e_r(t) + \Psi(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(\Psi x(t) - e_r(t)))\right)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{j=1}^{d} \Psi A_{w_j} x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t). \quad (3.70) \end{aligned}$$

Afin d'appliquer le théorème 2.6.1, l'EDS (2.52) dans le chapitre 2 est obtenue en posant

$$f_1(x(t), u(t)) = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i}\right) x(t) + \ell(x(t)), \quad (3.71a)$$
$$g_1(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1} x(t) & \ldots & A_{w_d} x(t) \end{bmatrix}, \quad (3.71b)$$
$$f_2(x(t), e_r(t), u(t)) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right) e_r(t) + \Psi(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(\Psi x(t) - e_r(t))), \quad (3.71c)$$
$$g_2(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \Psi A_{w_1} x(t) & \ldots & \Psi A_{w_d} x(t) \end{bmatrix}, \quad (3.71d)$$
$$w(t) = w_x(t), X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e_r(t) \end{bmatrix}, \quad (3.71e)$$

Avec les notations ci-dessus, les EDS (2.8) et (2.9) sont obtenues en posant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = e_r(t)$, $\overline{x}_1(t) = \overline{x}(t)$ et $\overline{x}_2(t) = \overline{e}_r(t)$ et l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée puisque la fonction $\ell(x(t))$ satisfait la condition de Lipschitz (3.6). Le théorème 2.6.1 s'applique donc en remplaçant l'hypothèse 2.2.1 par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.2a) et l'EDO (2.54) par

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i \right) \overline{e}_r(t) - \Psi \overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)). \tag{3.72}$$

Avant de déterminer les matrices M_i, N_i et E de l'observateur (3.64), il faut d'abord résoudre les équations de Sylvester (3.69). L'approche présentée dans cette section constitue une généralisation au cas où $E \neq 0$ de celle exposée dans la section 3.3.2.1

Soit $L^\dagger$ une pseudo-inverse de la matrice L (voir la section A.2), on a donc

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} L^\dagger & (I_n - L^\dagger L) \end{bmatrix} \right) = n$$

et les conditions de Sylvester (3.69) sont équivalentes à

$$(\Psi A_{t_i} - M_i \Psi - N_i C) \begin{bmatrix} L^\dagger & (I_n - L^\dagger L) \end{bmatrix} = 0 \qquad i = 0, \ldots, m. \tag{3.73}$$

Puisque la matrice L est de rang plein lignes avec $r < n$ (voir (3.5)), on a $LL^\dagger = I_r$. En utilisant l'approche développée dans [Dar00a, SZRD06] et la définition de la matrice Ψ, l'équation (3.73) est équivalente à

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi A_{t_i} L^\dagger - M_i \Psi L^\dagger - N_i C L^\dagger, \qquad i = 0, \ldots, m, && \text{(3.74a)} \\ 0 &= \Psi \overline{A}_{t_i} + M_i E \overline{C} - N_i \overline{C}, \qquad i = 0, \ldots, m, && \text{(3.74b)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{A}_{t_i} &= A_{t_i}(I_n - L^\dagger L), \qquad i = 0, \ldots, m, \\ \overline{C} &= C(I_n - L^\dagger L). \end{aligned}$$

Avec la définition de Ψ et la relation (3.74a), les matrices M_i sont données par

$$M_i = \overline{\overline{A}}_{t_i} - \mathcal{J}_i \overline{\overline{C}}_i, \qquad i = 0, \ldots, m, \tag{3.75}$$

avec, pour $i = 0, \ldots, m$,

$$\overline{\overline{A}}_{t_i} = L A_{t_i} L^\dagger, \qquad \overline{\overline{C}}_i = \begin{bmatrix} C A_{t_i} L^\dagger \\ C L^\dagger \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{J}_i = \begin{bmatrix} E & J_i \end{bmatrix}, \qquad J_i = N_i - M_i E. \tag{3.76}$$

Avec les matrices définies dans les équations (3.75) et (3.76), la relation (3.74b) s'écrit sous la forme compacte suivante

$$\mathcal{J}\mathcal{G} = L\mathcal{A} \tag{3.77}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{t_0}(I_n - L^\dagger L) & \ldots & A_{t_m}(I_n - L^\dagger L) \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} E & J_0 & \ldots & J_m \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} C\mathcal{A} \\ \text{bdiag}(C(I_n - L^\dagger L), \ldots, C(I_n - L^\dagger L)) \end{bmatrix}.$$

L'équation (3.77) a une solution $\mathcal{J}$ si et seulement si (voir équation (A.2.11) avec $A = I$ et remarque 3.5.3)

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} LA_{t_0} & \ldots & LA_{t_m} \\ CA_{t_0} & \ldots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} CA_{t_0} & \ldots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) \tag{3.78}$$

et la solution générale est donnée par (voir équation (A.2.9) avec $A = I$)

$$\mathcal{J} = L\mathcal{A}\mathcal{G}^\dagger + \mathcal{Z}(I_{(m+2)p} - \mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger) \tag{3.79}$$

où $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{r\times(m+2)p}$ est une matrice arbitraire qu'on peut considérer comme "la matrice de gain de l'observateur".

La condition d'existence (3.78) est explicitée dans le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *[Dar00a, SZRD06] La condition (3.78) est nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution $\mathcal{J}$ à l'équation (3.77)*

Démonstration. La condition

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} L\mathcal{A} \\ \mathcal{G} \end{bmatrix}\right) = \text{rang}(\mathcal{G}) \tag{3.80}$$

est équivalente à l'existence d'une solution $\mathcal{J}$ à l'équation (3.77) (voir (A.2.11) avec $A = I$). L'équivalence entre les conditions (3.78) et (3.80) est démontrée dans [Dar00a, SZRD06]. •

En insérant (3.75) et (3.79) dans l'EDO (3.72), on obtient

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = \left(\overline{\mathbb{A}} - \mathcal{Z}\overline{\mathbb{C}} + (\overline{\mathbb{B}} - \mathcal{Z}\overline{\mathbb{D}})\Delta_r(\varepsilon(t))H_3\right)\overline{e}_r(t) - \Psi\overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)) \tag{3.81}$$

avec

$$\overline{\mathbb{A}} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i LA_{t_i}L^\dagger - \begin{bmatrix} 0 & L\mathcal{A} \end{bmatrix}\mathcal{G}^\dagger \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i CA_{t_i}L^\dagger \\ \alpha_0 CL^\dagger \\ \vdots \\ \alpha_m CL^\dagger \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 LA_{t_1}L^\dagger & \ldots & \sigma_m LA_{t_m}L^\dagger \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & L\mathcal{A} \end{bmatrix}\mathcal{G}^\dagger \begin{bmatrix} \sigma_1 CA_{t_1}L^\dagger & \ldots & \sigma_m CA_{t_m}L^\dagger \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 CL^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m CL^\dagger \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbb{C}} = (I_{(m+2)p} - \mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger) \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i C A_{t_i} L^\dagger \\ \alpha_0 C L^\dagger \\ \vdots \\ \alpha_m C L^\dagger \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbb{D}} = (I_{(m+2)p} - \mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger) \begin{bmatrix} \sigma_1 C A_{t_1} L^\dagger & \dots & \sigma_m C A_{t_m} L^\dagger \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 C L^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m C L^\dagger \end{bmatrix}$$

et où la matrice H_3 est donnée dans (3.55) et le terme $\Delta_r(\varepsilon(t))$ est défini dans (3.56) vérifiant la propriété (3.57) avec $\varepsilon_i(t)$ donné par (3.13) et (3.14).

Avec les calculs ci-dessus, le théorème suivant est une application du théorème 2.5.1 et du lemme 2.6.1 en utilisant une approche de type Lyapunov avec les relations (3.17) et (3.81). Des conditions de type LMI sont données pour déterminer les gains $M_0, \dots, M_m$, $N_0, \dots, N_m$ et E de l'observateur (3.64).

Théorème 3.3.3. *On suppose que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.78) sont satisfaites. L'EDS (3.64) est un observateur fonctionnel d'ordre réduit pour le système (3.2) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ et $\mathcal{R}$ et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_5 > 0$, $\mu_6 > 0$ et $\beta_r \geqslant 0$ tels que les LMI (3.19) et*

$$\begin{bmatrix} (Q\overline{\mathbb{A}} - \mathcal{R}\overline{\mathbb{C}}) + (Q\overline{\mathbb{A}} - \mathcal{R}\overline{\mathbb{C}})^T + \mu_5 I_r + \mu_6^{-1}\kappa^2 I_r + 2\beta_r Q & Q\overline{\mathbb{B}} - \mathcal{R}\overline{\mathbb{D}} & \star \\ (Q\overline{\mathbb{B}} - \mathcal{R}\overline{\mathbb{D}})^T & -\mu_5 I_{mr} & 0 \\ (Q(L - A_E C) - \mathcal{R}C_E C)^T & 0 & \dfrac{-I_p}{\mu_6} \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.82)$$

soient vérifiées, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$, et que, pour chaque $j = 1, \dots, d$, l'une des deux LMI (3.21) ou (3.22) soit satisfaite avec

$$A_E = L\mathcal{A}\mathcal{G}^\dagger \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(m+1)p \times p} \end{bmatrix} \qquad et \qquad C_E = (I_{(m+2)p} - \mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger) \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(m+1)p \times p} \end{bmatrix}$$

Le gain $\mathcal{Z}$ est alors donné par $\mathcal{Z} = Q^{-1}\mathcal{R}$. Les matrices M_i, N_i et E de l'observateur sont obtenues avec (3.75), (3.76) et (3.79).

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 3.3.2 en remplaçant $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ Z et R par $\overline{\mathbb{A}}$, $\overline{\mathbb{B}}$, $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{D}}$, $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{R}$.

La seule différence avec la démonstration du théorème 3.3.2 vient du fait qu'il faut remplacer le terme QL par $Q(L - EC)$ dans l'expression de $\dot{V}_e(\overline{e}_r(t))$ et donc le terme QLL^TQ par $Q(L - EC)(L - EC)^TQ$ dans les majorations de $\dot{V}_e(\overline{e}_r(t))$.

En utilisant (3.77) et (3.79), la matrice E s'exprime en fonction du gain $\mathcal{Z}$ comme suit

$$E = A_E + \mathcal{Z}C_E. \qquad (3.83)$$

En introduisant l'expression de E donnée par (3.83) dans les majorations de $\dot{V}_e(\overline{e}_r(t))$, on obtient la LMI (3.82). •

Remarque 3.3.4. Si on pose $E = 0$ dans l'observateur fonctionnel d'ordre réduit (3.64), alors le théorème 3.3.3 pour les mesures déterministes est identique au théorème 3.3.2 pour les mesures stochastiques. Ainsi, dans le cas où $E = 0$, il faut utiliser le théorème 3.3.2 en remplaçant "*L'EDS (3.42) est un observateur fonctionnel d'ordre réduit pour le système (3.1)*" par "*L'EDS (3.64) avec $E = 0$ est un observateur fonctionnel d'ordre réduit pour le système (3.2)*".

La contrainte (3.52) correspond à la contrainte (3.77) lorsque $E = 0$, la condition (3.53) implique donc la condition (3.78), mais la réciproque est fausse. □

3.3.2.3 Exemple

Dans cette section, on reprend l'exemple décrivant l'évolution du nombre de cellules cancéreuses présenté dans la section 3.3.1.4. C'est le modèle C avec trois compartiments, donné dans [ŚLS03, LS03] et reformulé sous la forme de l'EDS (3.37), qui est retenu avec l'équation de mesure (3.1b) et la variable à estimer donnée par la relation (3.1c). On obtient donc le système stochastique suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) &= ((A_{t_0} + u_1(t)A_{t_1} + u_2(t)A_{t_2})x(t))\,\mathrm{d}t + A_w x(t)\,\mathrm{d}w_x(t) && (3.84a)\\ \mathrm{d}y(t) &= Cx(t)\,\mathrm{d}t + Dx(t)\,\mathrm{d}w_y(t) && (3.84b)\\ z(t) &= Lx(t) && (3.84c) \end{aligned}$$

où les matrices A_{t_0}, A_{t_1}, A_{t_2} et A_w sont les mêmes que dans l'EDS (3.37a) et où

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ et } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc $z(t) = x_1(t)$.

Le système stochastique (3.84) correspond à (3.1) avec $\ell(x(t)) = 0$, $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$, $d = 1$, et $h = 1$.

L'hypothèse 2.3.1 est vérifiée.

Pour déterminer les matrices M_0, M_1, M_2, N_0, N_1 et N_2 de l'observateur d'ordre réduit (3.42) pour le système stochastique (3.84), on procède en deux étapes comme dans l'exemple 3.3.1.4. Cette procédure en deux étapes est une conséquence directe des théorèmes 2.6.1 et 3.3.2, ainsi que de la remarque 3.3.1.

1ère étape : Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.84a) avec le théorème 1.5.9.

Les calculs sont identiques à ceux qui sont développés dans la section 3.3.1.4 à la page 88.

2ème étape : Synthèse des matrices M_0, M_1, M_2, N_0, N_1 et N_2 du filtre d'ordre réduit (3.42).

La condition (3.53) est vérifiée puisque

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LA_{t_0} & LA_{t_1} & LA_{t_2} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = 9$$

Puisque $\ell(x(t)) = 0$ dans l'EDS (3.84a), la LMI (3.58) dans le thérorème 3.3.2 se simplifie comme suit

$$\begin{bmatrix} (Q\mathbb{A} - R\mathbb{C}) + (Q\mathbb{A} - R\mathbb{C})^T + \mu_5 I_r + 2\beta_r Q & Q\mathbb{B} - R\mathbb{D} \\ (Q\mathbb{B} - R\mathbb{D})^T & -\mu_5 I_{mr} \end{bmatrix} < 0. \qquad (3.58\text{-bis})$$

Avec $\mu_3 = 0.01$ et $\beta_r = 0.3$, la LMI (3.58-bis) donne les solutions suivantes

$Q = 0.005562$,

$$R = \begin{bmatrix} -7.7522\ 10^{-11} & -6.1026\ 10^{5} & 1.2788\ 10^{-10} & -1.7776\ 10^{5} & 1 & -9.028\ 10^{5} \end{bmatrix}.$$

Le gain $Z = Q^{-1}R$ est donné par (voir (3.54))

$$Z = \begin{bmatrix} -1.3938\ 10^{-8} & -1.0972\ 10^{8} & 2.2992\ 10^{-8} & -3.196\ 10^{7} & 179.79 & -1.6231\ 10^{8} \end{bmatrix}.$$

Les matrices M_0, M_1, M_2, N_0, N_1 et N_2 du filtre d'ordre réduit (3.42) sont données par (voir (3.51) et (3.54))

$$M_0 = -3.65,\ M_1 = 3.6,\ M_2 = -0.05,$$
$$N_0 = \begin{bmatrix} -1.8272\ 10^{-8} & 3.6 \end{bmatrix},\ N_1 = \begin{bmatrix} -2.6612\ 10^{-9} & -3.6 \end{bmatrix},\ N_2 = \begin{bmatrix} -1.3515\ 10^{-8} & 7.2082 \times 10^{-8} \end{bmatrix}.$$

Les simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \widehat{z}_0 = 0$$

et en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama avec un pas d'échantillonnage $\mathrm{d}t = 0.002$ seconde (voir (1.32)).

Les figures obtenues sont les suivantes (figures 3.11 et 3.12) : elles permettent de valider la convergence de l'estimation $\widehat{z}(t)$ vers la fonctionnelle $z(t)$ de l'état réel et de comparer la vitesse de convergence de l'erreur de filtrage par rapport à celle de la fonctionnelle. La fonctionnelle $z(t)$ et son estimation $\widehat{z}(t)$ sont représentées sur la figure 3.11. La valeur absolue de la fonctionnelle $z(t)$ est comparée à celle de l'erreur de filtrage $e_r(t)$ dans la figure 3.12.

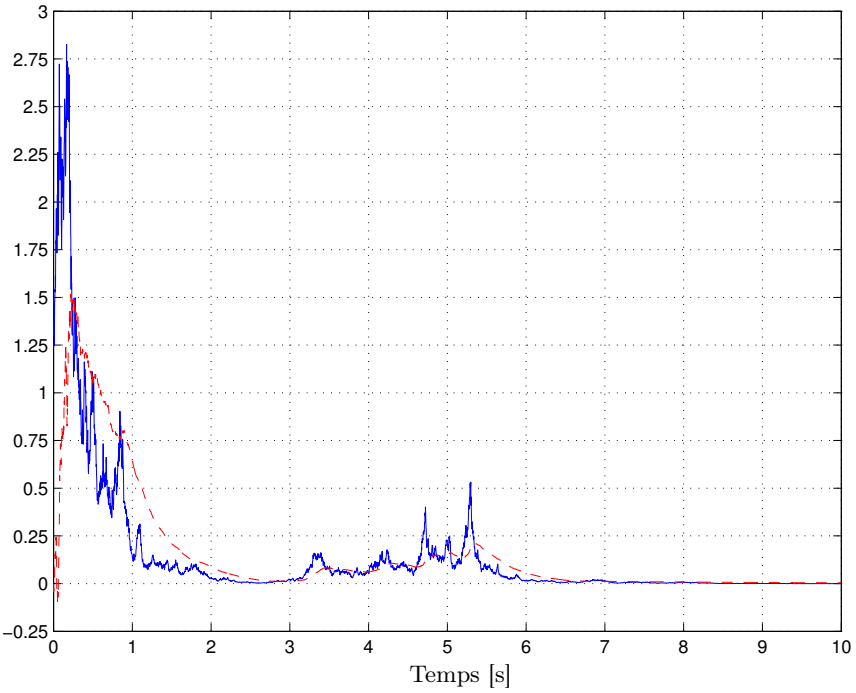


FIGURE 3.11 – Fonctionnelle $z(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{z}(t)$ (rouge, discontinu).

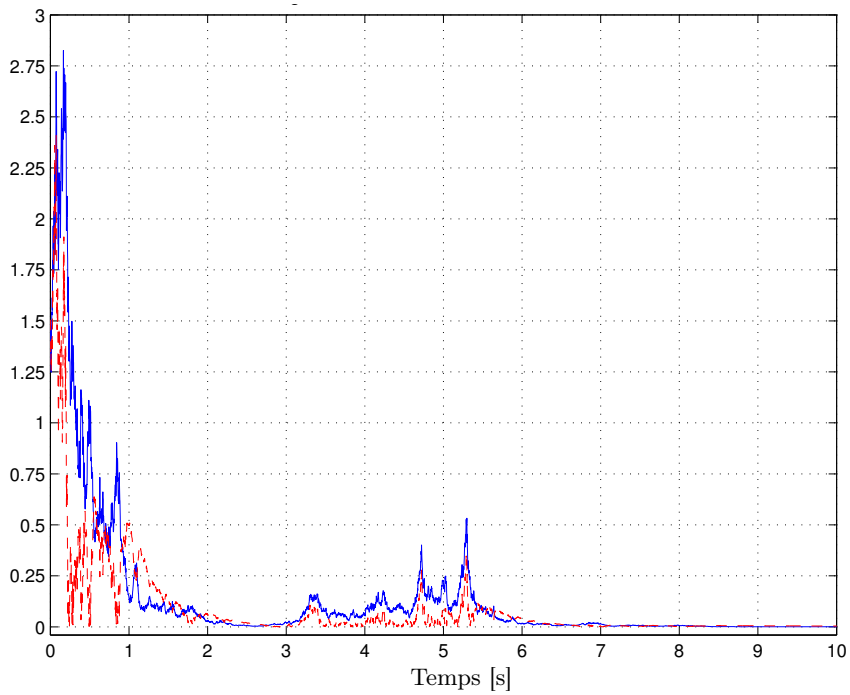


FIGURE 3.12 – Valeur absolue de la fonctionnelle $|z(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_r(t)|$ (rouge, discontinu).

La convergence de l'estimation $\widehat{z}(t)$ vers la fonctionnelle $z(t)$ est illustrée dans la figure 3.11. La nature exponentielle de cette convergence est mise en évidence dans la figure 3.12. La figure 3.12 montre que l'erreur de filtrage converge plus rapidement que la fonctionnelle.

Les résultats obtenus dans ces simulations confirment l'importance du paramètre β_r introduit dans le lemme 2.6.1 pour agir sur le taux de décroissance exponentielle de l'erreur d'observation. Ce paramètre intervient dans la LMI (3.58) dans le thérorème 3.3.2 (en réalité dans la LMI (3.58-bis) puisque $\ell(x(t)) = 0$ dans l'EDS (3.84a)).

3.4 Observateurs avec des non linéarités de type one-sided Lipschitz

Dans cette section, la fonction $\ell(x)$ est one-sided Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que (voir (A.1.11))

$$(\ell(x_1) - \ell(x_2))^T (x_1 - x_2) \leqslant a \|x_1 - x_2\|^2 \qquad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}^n \tag{3.85}$$

et quadratiquement bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux réels b et c tels que (voir (A.1.12))

$$\|\ell(x_1) - \ell(x_2)\|^2 \leqslant b \|x_1 - x_2\|^2 + c(\ell(x_1) - \ell(x_2))^T (x_1 - x_2) \qquad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{3.86}$$

Une discussion comparative sur les fonctions Lipschitz, one-sided Lipschitz et quadratiquement bornées est faite en annexe dans la section A.1.3 où la figure A.1 illustre les relations entre ces trois propriétés.

Pour les systèmes non linéaires déterministes, les propriétés (3.85) et (3.86) ont été utilisées dans [Hu06, Hu08, XHZ09, ZH09, AM10, LM10, ZTS10, BBZ12, ZLSH11, ZSZY12] pour synthétiser des observateurs et dans [BZSM15a] dans le cas des systèmes non linéaires stochastiques.

La condition (3.85) généralise la classe des fonctions Lipschitz afin de prendre en compte une classe plus générale de systèmes non linéaires [Hu06, AM10]. La constante a pour les fonctions one-sided Lipschitz dans (3.85) peut être positive, nulle ou négative, tandis que la constante de Lipschitz dans (3.6) doit être positive. De plus, si la fonction $\ell(x)$ est Lipschitz, alors elle est à la fois one-sided Lipschitz et quadratiquement bornée ($b > 0$ et $c = 0$), mais la réciproque est fausse [AM10] (voir figure A.1). La condition one-sided Lipschitz (3.85) permet d'obtenir des conditions moins pessimistes pour la stabilité de l'erreur d'observation que la condition de Lipschitz ([Hu06, AM10, ZLSH11]) puisque la constante a dans (3.85) est plus petite ou égale que la constante de Lipschitz κ dans (3.6). La bornitude quadratique définie dans (3.86) permet d'obtenir des conditions de type LMI qui sont solvables [ZLSH11].

Avec (3.85) et (3.86), les conditions d'existence et d'unicité de la solution $x(t)$, données par le théorème 1.4.4, sont donc satisfaites pour les EDS (3.1a) et (3.2a).

Cette section est dédiée à la synthèse d'observateurs d'ordre plein. Il faut estimer tout le vecteur d'état $x(t)$, donc la relation (3.1c) ou (3.2c) est remplacée par

$$z(t) = x(t) \tag{3.87}$$

dans la suite de cette section. On a donc $L = I_n$ et $r = n$.

Dans cette section, l'ensemble Ω des entrées admissibles $u(t)$, défini dans (3.3), est remplacé par l'ensemble $\overline{\Omega}$ suivant

$$\overline{\Omega} = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \mid u_{i\min} \leqslant u_i(t) \leqslant u_{i\max},\ \mu_{i,\min} \leqslant \dot{u}_i(t) \leqslant \mu_{i,\max}\}. \tag{3.88}$$

Comme annoncé à la fin de la section 3.2, la structure polytopique de l'ensemble des entrées admissibles (3.88) va être exploitée pour la synthèse d'un observateur alors que c'est l'autre propriété de l'ensemble des entrées admissibles (3.3), c'est-à-dire la bornitude des entrées admissibles, qui a été utilisée dans la section 3.3 pour la synthèse d'observateurs.

3.4.1 Cas des mesures stochastiques

Pour le système stochastique (3.1) avec des mesures stochastiques (voir (3.1b)), l'observateur d'ordre plein proposé a la structure suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{x}(t) = &\left(A_{t_0}\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i}\widehat{x}(t) + \ell(\widehat{x}(t))\right)\mathrm{d}t \\ &+ \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t)\right)(\mathrm{d}y(t) - C\widehat{x}(t)\,\mathrm{d}t) \end{aligned} \tag{3.89}$$

où $\widehat{x}(t)$ est l'estimation de l'état $x(t)$ et K_0 et K_i sont des gains à déterminer pour que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \tag{3.90}$$

converge exponentiellement presque sûrement.

En comparant l'observateur (3.89) avec la forme générale (2.3) donnée dans le chapitre 2, le gain est $\psi(u(t)) = K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t)$.

L'expression de la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en combinant l'EDS (3.1) et l'observateur (3.89), est donnée par

$$\mathrm{d}e(t) = \left(\left(A_{t_0} - K_0C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_iC)u_i(t)\right)e(t) + \ell(x(t)) - \ell(\widehat{x}(t))\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) - \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m}K_iu_i(t)\right)\left(\sum_{k=1}^{h}D_kx(t)\,\mathrm{d}w_{y_k}(t)\right). \quad (3.91)$$

Afin d'appliquer le théorème 2.5.1, l'EDS (2.6) dans le chapitre 2 est obtenue en posant

$$f_1(x(t),u(t)) = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m}u_i(t)A_{t_i}\right)x(t) + \ell(x(t)), \quad (3.92a)$$

$$g_1(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1}x(t) & \dots & A_{w_d}x(t) & 0\end{bmatrix}, \quad (3.92b)$$

$$f_2(x(t),e(t),u(t)) = \left(A_{t_0} - K_0C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_iC)u_i(t)\right)e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t)-e(t)), \quad (3.92c)$$

$$g_2(x(t),u(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1}x(t) & \dots & A_{w_d}x(t) & -g_{2_y}(x(t),u(t))\end{bmatrix}, \quad (3.92d)$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t)\end{bmatrix}, X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t)\end{bmatrix}, \quad (3.92e)$$

avec

$$g_{2_y}(x(t),u(t)) = \begin{bmatrix}\left(K_0 + \sum_{i=1}^{m}K_iu_i(t)\right)D_1x(t) & \dots & \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m}K_iu_i(t)\right)D_hx(t)\end{bmatrix}.$$

Avec les notations ci-dessus, les EDS (2.8) et (2.9) sont obtenues en posant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = e(t)$, $\overline{x}_1(t) = \overline{x}(t)$ et $\overline{x}_2(t) = \overline{e}(t)$ et l'hypothèse 2.4.1 est vérifiée puisque la fonction $\ell(x(t))$ satisfait la condition one-sided Lipschitz (3.85). Le théorème 2.5.1 s'applique donc en remplaçant l'hypothèse 2.2.1 par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.1a) et l'EDO (2.43) par

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(A_{t_0} - K_0C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_iC)u_i(t)\right)\overline{e}(t) - \ell(-\overline{e}(t)). \quad (3.93)$$

A la différence de la section 3.3 où on a exploité la bornitude des commandes $u(t)$ en remplaçant l'ensemble des entrées admissibles Ω (voir (3.3)) par des nouvelles entrées "équivalentes" $\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon$ définies dans (3.13) et vérifiant $\Delta_n(\varepsilon(t))\Delta_n^T(\varepsilon(t)) \leqslant I_{mn}$ (voir (3.16)), c'est la structure polytopique de l'ensemble $\overline{\Omega}$, défini dans (3.88), qui va être utilisée pour appliquer le théorème 2.5.1. C'est pourquoi on choisit une fonction de Lyapunov candidate de la forme

$$V_x(x(t)) = x^T(t)P(u(t))x(t) = x^T(t)\left(P_0 + \sum_{i=1}^{m}P_iu_i(t)\right)x(t)$$

polytopique pour analyser la stabilité, avec $P(u(t)) = P^T(u(t)) > 0$.

Cette classe de fonctions de Lyapunov permet de réduire le pessimisme dans les conditions assurant la stabilité exponentielle presque sûre puisque on utilise explicitement une" structure bilinéaire" des systèmes stochastiques considérés (voir (3.1a) et (3.93)).

En se basant sur la définition de l'ensemble des entrées admissibles $\overline{\Omega}$ (3.88), on introduit le vecteur $\zeta(t)$ suivant

$$\zeta^T(t) = [\zeta_1(t) \quad \dots \quad \zeta_m(t) \quad \zeta_{m+1}(t) \quad \dots \quad \zeta_{2m}(t)] = [u_1(t) \quad \dots \quad u_m(t) \quad \dot{u}_1(t) \quad \dots \quad \dot{u}_m(t)] \quad (3.94)$$

qui appartient au polytope convexe $\mathcal{P}$ suivant

$$\mathcal{P} = [u_{1\min}, u_{1\max}] \times \ldots \times [u_{m\min}, u_{m\max}] \times [\mu_{1\min}, \mu_{1\max}] \times \ldots \times [\mu_{m\min}, \mu_{m\max}]. \quad (3.95)$$

L'ensemble des $\nu = 2^{2m}$ sommets du polytope $\mathcal{P}$ est $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \{\beta = [\beta_1 \ldots \beta_i \ldots \beta_{2m}]^T \in \mathbb{R}^{2m} \mid \forall\, i \in [1,m],\\ \beta_i \in \{u_{i\min}, u_{i\max}\} \text{ et}\\ \forall\, i \in [m+1, 2m], \beta_i \in \{\mu_{i\min}, \mu_{i\max}\}\}. \quad (3.96)\end{aligned}$$

Les notations suivantes

$$P(\zeta(t)) = P_0 + \sum_{i=1}^{m} P_i\zeta_i(t),\ \dot{P}(\zeta(t)) = \sum_{i=m+1}^{2m} P_i\zeta_i(t),$$
$$Q(\zeta(t)) = Q_0 + \sum_{i=1}^{m} Q_i\zeta_i(t),\ \dot{Q}(\zeta(t)) = \sum_{i=m+1}^{2m} Q_i\zeta_i(t),$$
$$\mathcal{A}_t(\zeta(t)) = A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} A_{t_i}\zeta_i(t),\ \mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_0 & \ldots & K_m \end{bmatrix},\ \mathcal{C}(\zeta(t)) = \begin{bmatrix} C^T & C^T\zeta_1(t) \ldots & C^T\zeta_m(t) \end{bmatrix}^T,$$

sont utilisées dans le théorème 3.4.1.

Théorème 3.4.1. *[BZSM15a] On considère que l'hypothèse 2.4.1 et les conditions (3.85) et (3.86) sont satisfaites. Soit $\beta^k \in \mathcal{S}$ les vecteurs définis dans (3.96). Il existe $P(\zeta(t)) = P^T(\zeta(t))$, $Q(\zeta(t)) = Q^T(\zeta(t)) > 0$, F, G et $\mathcal{Y}$ et des réels $c_1 > 0$, $\varepsilon_1^k > 0$, $\varepsilon_2^k > 0$, $\varepsilon_3^k > 0$ et $\varepsilon_4^k > 0$ (pour $i = 1, \ldots, d$) tels que les LMI suivantes sont vérifiées pour tout $k = 1, \ldots, 2^{2m}$*

$$0 < c_1 I_n \leqslant P(\beta^k) \quad (3.97)$$

$$\begin{bmatrix} (a) & \star & \star & \star & \ldots & \star \\ (b) & -F-F^T & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (c) & 0 & -\varepsilon_2^k I_n & 0 & \ldots & 0 \\ P(\beta^k)A_{w_1} & 0 & 0 & -P(\beta^k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ P(\beta^k)A_{w_d} & 0 & 0 & \ldots & 0 & -P(\beta^k) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.98)$$

$$\begin{bmatrix} (d) & \star & \star \\ G^T\mathcal{A}_t(\beta^k) - \mathcal{Y}\mathcal{C}(\beta^k) + Q(\beta^k) - G & -G - G^T & 0 \\ Q(\beta^k) - (\frac{\varepsilon_3^k}{2} - \frac{\varepsilon_4^k c}{2})I_n & 0 & -\varepsilon_4^k I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (3.99)$$

où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$, avec

$$\begin{aligned}(a) &= \mathcal{A}_t^T(\beta^k)F + F^T\mathcal{A}_t(\beta^k) - \rho P(\beta^k) + \dot{P}(\beta^k) + (\varepsilon_1^k a + \varepsilon_2^k b)I_n,\\ (b) &= F^T\mathcal{A}_t(\beta^k) + P(\beta^k) - F,\\ (c) &= P(\beta^k) - (\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2 c}{2})I_n,\end{aligned}$$

$$(d) = \mathcal{A}_t^T(\beta^k)G + G^T\mathcal{A}_t(\beta^k) - \mathcal{C}^T(\beta^k)\mathcal{Y}^T - \mathcal{Y}\mathcal{C}(\beta^k) + \dot{\mathcal{Q}}(\beta^k) + (\varepsilon_3^k a + \varepsilon_4^k b)I_n,$$

et si, pour tout $i = 1, \ldots, d$ *et* $k = 1, \ldots, 2^{2m}$*, l'une des deux inégalités suivantes*

$$A_{w_i}^T P(\beta^k) + P(\beta^k)A_{w_i} - \sqrt{2\rho_i}P(\beta^k) > 0, \tag{3.100}$$
$$A_{w_i}^T P(\beta^k) + P(\beta^k)A_{w_i} + \sqrt{2\rho_i}P(\beta^k) < 0, \tag{3.101}$$

est vérifiée, alors le système (3.89) est un observateur pour le système stochastique (3.1) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage avec $K_i = G^{-T}Y_i$ *(*$i = 1, \ldots, m$*) et* $\mathcal{Y} = [\, Y_0 \quad \ldots \quad Y_m \,]$*.*

Démonstration.
1ère étape : Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_x(x(t)) = x^T(t)P(\zeta(t))x(t)$ avec $P(\zeta(t)) = P^T(\zeta(t)) = P_0 + \sum_{i=1}^m P_i\zeta_i(t) > 0$ où le vecteur $\zeta(t)$ est défini dans (3.94).

L'EDS (3.1a) est réécrite sous la forme d'une EADS équivalente suivante (voir (5.1))

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x(t) \\ \mathrm{d}\eta \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} \mathcal{A}_w(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}w_x(t) \tag{3.102}$$

avec $\mathcal{A}_t(\zeta) = A_{t_0} + \sum_{i=1}^m A_{t_i}\zeta_i(t)$ et $\mathcal{A}_w(x(t)) = [\, A_{w_1}x(t) \quad \ldots \quad A_{w_d}x(t) \,]$.

En lien avec l'EADS ci-dessus, la fonction de Lyapunov candidate $V_x(x(t))$ est reformulée comme suit

$$\begin{aligned} V_x(x(t)) &= x^T(t)P(\zeta(t))x(t) = x^T(t)\left(P_0 + \sum_{i=1}^m P_i\zeta_i(t)\right)x(t) \\ &= \overline{V}_x(x(t), \eta(t)) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \eta^T(t) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E^T} \underbrace{\begin{bmatrix} P(\zeta(t)) & 0 \\ F & F \end{bmatrix}}_{\mathbb{P}(\zeta(t))} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.103}$$

avec la contrainte (voir (5.29) et (5.30))

$$E^T\mathbb{P}(\zeta(t)) = \mathbb{P}^T(\zeta(t))E \geqslant 0. \tag{3.104}$$

Puisque $P(\zeta(t)) = P^T(\zeta(t)) > 0$, la contrainte (3.104) est satisfaite.

Pour la suite de la démonstration, on choisit $E^+ = E$ comme pseudo-inverse réflexive de E (voir section A.2.2).

Puisque $E^+ = E$ et $E^T = E$ et que les deux conditions suivantes (voir (5.43a) et (5.43b))

$$(I_{2n} - EE^+)\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t))x(t) - \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

$$(I_{2n} - EE^+)\begin{bmatrix} \mathcal{A}_w(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.106}$$

sont vérifiées, la formule d'Itô pour les systèmes singuliers donne (voir les équations (5.42a) et (5.42b) avec la remarque 5.2.6)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}\overline{V}_x(x(t),\eta(t)) &= \begin{bmatrix} x^T(t) & \eta^T(t) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_t(\zeta(t))^T \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\zeta(t)) & 0 \\ F & F \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} P(\zeta(t)) & F^T \\ 0 & F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) & -I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{P}(\zeta(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + 2 \begin{bmatrix} \ell^T(x(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\zeta(t)) & 0 \\ F & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A}_w^T(x(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\zeta(t)) & 0 \\ F & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_w(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} x^T(t) & \eta^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,1) & \star \\ F^T\mathcal{A}_t(\zeta(t)) + P(\zeta(t)) - F & -F - F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + 2\ell^T(x(t)) P(\zeta(t)) x(t), \qquad (3.107a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}\overline{V}_v(x(t),\eta(t)) &= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & \eta^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\zeta(t)) & F^T \\ 0 & F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{w_1} x(t) & \dots & A_{w_d} x(t) \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) P(\zeta(t)) A_{w_1} x(t) & \dots & x^T(t) P(\zeta(t)) A_{w_d} x(t) \end{bmatrix}, \qquad (3.107b)
\end{aligned}
$$

avec $(1,1) = \mathcal{A}_t^T(\zeta(t))F + F^T\mathcal{A}_t(\zeta(t)) + \sum_{j=1}^d A_{w_j}^T P(\zeta(t)) A_{w_j} + \dot{P}(\zeta(t))$.

En utilisant les notations $x_u(t)$ et $x_v(t)$ introduites dans l'équation (5.4), les variables algébriques $x_v(t)$ peut être déduites de manière unique de l'équation (3.105) en fonction des variables dynamiques $x_u(t)$ comme suit

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \eta(t) \end{bmatrix}}_{x_v(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_u(t)}. \qquad (3.108)
$$

Puisque l'EADS (3.102) est d'indice 1 (voir (3.106) et (3.108) avec la définition 5.2.1), le lemme 5.2.3 montre que l'on peut utiliser le théorème 1.5.3 avec $\mathfrak{L}\overline{V}_x(x(t),\eta(t))$ et $\mathfrak{B}\overline{V}_x(x(t),\eta(t))$ calculés dans (3.107).

Il reste donc à appliquer le théorème 1.5.3 à l'EADS (3.102). Puisque $\overline{V}_x(x(t),\eta(t)) = \overline{V}_x(x_u(t)) = x^T(t)P(\zeta(t))x(t)$, la condition (1.50a) est satisfaite si on choisit $p = 2$ et c_1 afin que les 2^{2^m} LMI (3.97) soient vérifiées.

En utilisant (3.107a), la condition (1.50b) est vraie s'il existe un réel $c_2 < \rho$ tel que

$$
\begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1,1) - \rho P(\zeta(t)) & \star & P(\zeta(t)) \\ F^T\mathcal{A}_t(\zeta(t)) + P(\zeta(t)) - F & -F - F^T & 0 \\ P(\zeta(t)) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix} < 0. \qquad (3.109)
$$

Puisque la LMI dans (3.109) a un bloc de zéros sur la diagonale, on va utiliser les hypothèses (3.85) et (3.86) de la même manière que dans [ZLSH11], [ZSZY12]. On définit $\gamma_1(t) = \varepsilon_1(ax^T(t)x(t) - \ell^T(x(t))x(t)) > 0$ et $\gamma_2(t) = \varepsilon_2(bx^T(t)x(t) + c\,\ell^T(x(t))x(t) - \ell^T(x(t))\ell(x(t))) > 0$

où $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ sont des réels donnés. En ajoutant $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ au terme de gauche de l'inégalité (3.109), cette inégalité est vraie si

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1,1) - \rho P(\zeta(t)) + (\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b) I_n & \star & \star \\ F^T \mathcal{A}_t(\zeta(t)) + P(\zeta(t)) - F & -F - F^T & 0 \\ P(\zeta(t)) - (\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2 c}{2}) I_n & 0 & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix} < 0. \quad (3.110)$$

Le passage de l'inégalité (3.109) à l'inégalité (3.110) s'explique comme suit.

L'hypothèse (3.85) implique l'existence d'un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\varepsilon_1 (a \|x(t)\|^2 - x^T(t) \ell(x(t))) \geqslant 0$$

et l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_1 a I_n & 0 & \frac{-\varepsilon_1 I_n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\varepsilon_1 I_n}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix} \geqslant 0. \quad (3.111)$$

L'hypothèse (3.86) implique l'existence d'un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que

$$\varepsilon_2 (b \|x(t)\|^2 + c x^T(t) \ell(x(t)) - \ell(x(t))^T \ell(x(t))) \geqslant 0$$

et l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_2 b I_n & 0 & \frac{\varepsilon_2 c I_n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2 c I_n}{2} & 0 & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \ell(x(t)) \end{bmatrix} \geqslant 0. \quad (3.112)$$

L'inégalité (3.110) est obtenue en ajoutant les inégalités (3.111) et (3.112) à l'inégalité (3.109).

En utilisant la convexité du polytope $\mathcal{P}$ et en appliquant le lemme de Schur, l'inégalité (3.110) est satisfaite si les 2^{2^m} LMIs (3.98) sont vérifiées en remplaçant ε_1 et ε_2 par ε_1^k et ε_2^k avec $k = 1, \ldots, 2^{2^m}$.

En utilisant (3.107b), la convexité du polytope $\mathcal{P}$ et la définition de $\mathcal{A}_w(x)$, la condition (1.50c) est vérifiée s'il existe $c_3 = 2\rho = \sum_{i=1}^d \rho_i$ avec $\rho_i \geqslant 0$ tels que l'une des deux LMI (3.100) ou (3.101) est satisfaite.

Puisque $c_2 < \rho$ et $c_3 = 2\rho \geqslant 0$, l'inégalité $c_3 > 2c_2$ (voir (1.52)) est satisfaite et la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.1a) est prouvée.

2ème étape : Stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (3.93).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_e(x(t)) = \overline{e}^T(t) Q(\zeta(t)) \overline{e}(t)$ avec $Q(\zeta(t)) = Q^T(\zeta(t)) = Q_0 + \sum_{i=1}^m Q_i \zeta_i(t) > 0$ où le vecteur $\zeta(t)$ est défini dans (3.94).

En suivant l'approche "singulière" développée dans [FS02, CM04], l'EDO (3.93) et la fonction de Lyapunov $V_e(\overline{e}(t))$ peuvent être écrites comme suit

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\overline{e}}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{K}\mathcal{C}(\zeta(t)) & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ell(-\overline{e}(t)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

$$
\begin{aligned}
V_e(\overline{e}(t)) &= \overline{e}^T(t)Q(\zeta(t))\overline{e}(t) = \overline{e}^T(t)\left(Q_0 + \sum_{i=1}^{m} Q_i\zeta_i(t))\right)\overline{e}(t) \\
&= \overline{V}_e(\overline{e}(t),\varphi(t)) = \begin{bmatrix}\overline{e}^T(t) & \varphi^T(t)\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{E^T} \underbrace{\begin{bmatrix} Q(\zeta(t)) & 0 \\ G & G\end{bmatrix}}_{\mathbb{Q}(\zeta(t))} \begin{bmatrix}\overline{e}(t) \\ \varphi(t)\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.114}
$$

avec $\mathcal{K} = [\, K_0 \quad \dots \quad K_m]$ et $\mathcal{C}(\zeta(t)) = [\, C^T \quad C^T\zeta_1(t) \quad \dots \quad C^T\zeta_m(t)]^T$.

La contrainte (voir (5.29) et (5.30))

$$
E^T\mathbb{Q}(\zeta(t)) = \mathbb{Q}^T(\zeta(t))E \geqslant 0. \tag{3.115}
$$

est vérifiée puisque $Q(\zeta(t)) = Q^T(\zeta(t)) > 0$.

Comme dans la 1ère partie de la démonstration, on choisit $E^+ = E$ comme pseudo-inverse réflexive de E. Puisque $E^+ = E$ et $E^T = E$, la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov $\overline{V}(\overline{e}(t),\varphi(t))$ le long de la trajectoire du système (3.113) est donnée par

$$
\begin{aligned}
\dot{\overline{V}}_e(\overline{e}(t),\varphi(t)) = \begin{bmatrix}\overline{e}(t) \\ \varphi(t)\end{bmatrix}^T \Bigg(& \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{K}\mathcal{C}(\zeta(t)) & -I_n\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(\zeta) & 0 \\ G & G\end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} Q(\zeta(t)) & G^T \\ 0 & G^T\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{K}\mathcal{C}(\zeta(t)) & -I_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{Q}(\zeta(t)) & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\Bigg) \begin{bmatrix}\overline{e}(t) \\ \varphi(t)\end{bmatrix} \\
& + 2\begin{bmatrix} -\ell(-\overline{e}(t))^T & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(\zeta(t)) & 0 \\ G & G\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\overline{e}(t) \\ \varphi(t)\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.116}
$$

En appliquant le lemme de Schur et en utilisant la relation précédente, on obtient

$$
\dot{\overline{V}}_e(\overline{e}(t),\varphi(t)) = \begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ -\ell(-\overline{e}(t))\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1,1)_a & \star & Q(\zeta(t)) \\ (2,1)_a & -G - G^T & 0 \\ Q(\zeta(t)) & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ -\ell(-\overline{e}(t))\end{bmatrix} < 0 \tag{3.117}
$$

avec $(1,1)_a = \mathcal{A}_t^T(\zeta(t))G + G^T\mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{C}^T(\zeta(t))\mathcal{Y}^T - \mathcal{Y}\mathcal{C}(\zeta(t)) + \dot{Q}(\zeta(t))$, $(2,1)_a = G^T\mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{Y}\mathcal{C}(\zeta(t)) + Q(\zeta(t)) - G$, $Y_i = G^TK_i$ et $\mathcal{Y} = [\, Y_0 \quad \dots \quad Y_m]$.

Puisque la LMI dans (3.117) a un bloc de zéros sur la diagonale, on va utiliser les hypothèses (3.85) et (3.86) de la même manière que dans [ZLSH11], [ZSZY12]. On définit $\gamma_3(t) = \varepsilon_3(ax^T(t)x(t) - \ell^T(x(t))x(t)) > 0$ et $\gamma_4(t) = \varepsilon_4(bx^T(t)x(t) + c\,\ell^T(x(t))x(t) - \ell^T(x(t))\ell(x(t))) > 0$ où $\varepsilon_3 > 0$ et $\varepsilon_4 > 0$ sont des réels donnés. En ajoutant $\gamma_3(t)$ et $\gamma_4(t)$ au terme de gauche de l'inégalité (3.117), cette inégalité est vraie si

$$
\begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ -\ell(-\overline{e}(t))\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1,1)_a + (\varepsilon_3 a + \varepsilon_4 b)I_n & \star & \star \\ G^T\mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{Y}\mathcal{C}(\zeta(t)) + Q(\zeta) - G & -G - G^T & 0 \\ Q(\zeta(t)) - (\dfrac{\varepsilon_3}{2} - \dfrac{\varepsilon_4 c}{2})I_n & 0 & -\varepsilon_4 I_n\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ -\ell(-\overline{e}(t))\end{bmatrix} < 0. \tag{3.118}
$$

Le passage de l'inégalité (3.117) à l'inégalité (3.118) s'explique comme suit.

L'hypothèse (3.85) implique l'existence d'un réel $\varepsilon_3 > 0$ tel que

$$\varepsilon_3(a\,\|\overline{e}(t)\|^2 - \overline{e}^T(t)\ell(\overline{e}(t))) \geqslant 0$$

et l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ \ell(\overline{e}(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_3 a I_n & 0 & \dfrac{-\varepsilon_3 I_n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-\varepsilon_3 1 I_n}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ \ell(\overline{e}(t)) \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{3.119}$$

L'hypothèse (3.86) implique l'existence d'un réel $\varepsilon_4 > 0$ tel que

$$\varepsilon_4(b\,\|\overline{e}(t)\|^2 + c\overline{e}^T(t)\ell(\overline{e}(t)) - \ell(\overline{e}(t))^T\ell(\overline{e}(t))) \geqslant 0$$

et l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ \ell(\overline{e}(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_4 b I_n & 0 & \dfrac{\varepsilon_4 c I_n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\varepsilon_4 c I_n}{2} & 0 & -\varepsilon_4 I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ \varphi(t) \\ \ell(\overline{e}(t)) \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{3.120}$$

L'inégalité (3.118) est obtenue en ajoutant les inégalités (3.119) et (3.120) à l'inégalité (3.117).

En utilisant la convexité du polytope $\mathcal{P}$, l'inégalité (3.118) est satisfaite si 2^{2m} LMIs (3.99) sont satisfaites en remplaçant ε_3 et ε_4 par ε_3^k et ε_4^k avec $k = 1, \ldots, 2^{2m}$. •

Les trois remarques suivantes permettent d'expliciter la démarche suivie dans cette section et de discuter de l'intérêt des approches qui ont été mises en œuvre pour obtenir le théorème 3.4.1.

Remarque 3.4.1. Dans la 1ère étape de la démonstration ci-dessus, l'EDS (3.1a) est réécrite sous la forme d'une EADS équivalente donnée par (3.102), c'est-à-dire par

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x(t) \\ \mathrm{d}\eta \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} \mathcal{A}_w(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}w_x(t), \text{ (EADS-a)}$$

alors que l'on aurait pu choisir l'EADS équivalente

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x(t) \\ \mathrm{d}\eta \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \mathcal{A}_t(\zeta(t)) & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_w(x(t)) \end{bmatrix} \mathrm{d}w_x(t). \text{ (EADS-b)}$$

Si on utilise la forme donnée par (EADS-b), alors la condition (3.106) n'est pas vérifiée car

$$(I_{2n} - EE^+) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_w(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_w(x(t)) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et l'EADS (EADS-b) n'est pas d'indice 1 (voir définition 5.2.1), alors que l'EADS (EADS-a) est d'indice 1 comme cela a été montré dans la 1ère étape de la démonstration du thérorème 3.4.1 (voir après l'équation (3.108)).

De plus, l'utilisation de la forme donnée par (EADS-b) dans (3.107b) et (3.107b) donne

$$\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix}0 & \mathcal{A}_w^T(x(t))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P(\zeta(t)) & 0\\ F & F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \mathcal{A}_w(x(t))\end{bmatrix}\right)=0,$$

$$\mathfrak{B}\overline{V}_v(x(t),\eta(t))=2\begin{bmatrix}\eta^T(t)P(\zeta(t))A_{w_1}x(t) & \dots & \eta^T(t)P(\zeta(t))A_{w_d}x(t)\end{bmatrix}.$$

Ainsi, le terme avec la trace dans $\mathfrak{L}\overline{V}_v(x(t),\eta(t))$ est nul alors qu'il ne l'est pas si on utilise la fonction de Lyapunov $V_x(x(t))=x^T(t)P(\zeta(t))x(t)$. De même, $\mathfrak{B}V_v(x(t))$ ne dépend pas de $\eta(t)$ à la différence de $\mathfrak{B}\overline{V}_v(x(t),\eta(t))$ ci-dessus. □

Remarque 3.4.2. Afin de réduire le pessimisme dû à une approche de type Lyapunov dans le théorème 3.4.1, deux fonctions de Lyapunov polynomiales

$$V_x(x(t))=x^T(t)\left(P_0+\sum_{i=1}^{m}P_i\zeta_i(t)\right)x(t)\qquad\text{et}\qquad V_e(\overline{e}(t))=\overline{e}^T(t)\left(Q_0+\sum_{i=1}^{m}Q_i\zeta_i(t)\right)\overline{e}(t)$$

ont été utilisées. Ces deux fonctions de Lyapunov ont la même structure qu'une "partie" des non linéarités que l'EDS (3.1a) (seule la non linéarité $\ell(x(t))$ n'intervient pas dans ces deux fonctions de Lyapunov). Ce choix des fonctions de Lyapunov a été fait car $\zeta_i(t)=u_i(t)$ pour $i=1,\dots,m$ et car l'entrée $u(t)$ est bornée et appartient à un polytope convexe $\overline{\Omega}$ donné dans (3.88). Les deux fonctions de Lyapunov utilisées permettent donc d'étendre le domaine de recherche des solutions des LMI dans le théorème 3.4.1 et d'augmenter ainsi les degrés de liberté dans la synthèse de l'observateur. □

Remarque 3.4.3. Pour éviter les termes quadratiques comme $u_i(t)u_j(t)$ dans les inégalités du théorème 3.4.1, une formulation descripteur (pseudo-singulière) est basée sur cette approche qui a été proposée dans [FS02, CM04]. Cette approche consiste à écrire l'EDS (3.1a) sous une forme d'une équation algébro-différentielle stochastique (EADS) donnée par (3.102). De la même façon, l'EDO (3.93) a été reformulée comme une équation algébro-différentielle (3.113). Cette approche de type "singulière" est associée à l'expression des fonctions de Lyapunov $\overline{V}_x(x(t),\eta(t))$ et $\overline{V}_e(\overline{e}(t),\varphi(t))$.

L'introduction des matrices instrumentales F et G dans les fonctions de Lyapunov $\overline{V}_x(x(t),\eta(t))$ et $\overline{V}_e(\overline{e}(t),\varphi(t))$ permet d'éviter les produits non linéaires $P(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ et $Q(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ dans les LMI du théorème 3.4.1. Les produits non linéaires $P(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ et $Q(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ ont été respectivement remplacés par les produits linéaires $F^T\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ et $G^T\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ dans les LMI de ce théorème.

Cette "linéarisation" obtenue grâce à la reformulation sous une forme algébro-différentielle des équations différentielles stochastique et ordinaire permet donc l'utilisation d'une fonction de Lyapunov polynômiale, ce qui serait impossible en présence des produits $P(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ et $Q(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$. En effet, une approche polytopique ne peut pas être utilisée avec ces produits car les sommets du polytope $\mathcal{P}$ sont obtenus en combinant les valeurs maximales et minimales des coordonnées du vecteur $\zeta(t)$. Dans ce cas, c'est-à-dire sans utiliser la forme algébro-différentielle, pour éviter les produits non linéaires $P(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$ et $Q(\zeta(t))\mathcal{A}_t(\zeta(t))$, il faudrait employer deux fonctions de Lyapunov non polynômiales $V_x(x(t))=x^TP_0x$ et $V_e(\overline{e}(t))=\overline{e}^T(t)Q_0\overline{e}(t)$.

De plus, les matrices instrumentales non symétriques F et G permettent d'introduire des degrés de liberté supplémentaires dans la résolution des LMI du théorème 3.4.1. Si on pose $F=F^T=P(\zeta(t))$ et $G=G^T=Q(\zeta(t))$, alors les inégalités obtenues dans théorème 3.4.1 seraient identiques à celles obtenues avec une formulation non singulière. □

3.4.2 Cas des mesures déterministes

Pour le système stochastique (3.2) avec des mesures déterministes (voir (3.2b)), l'observateur d'ordre plein proposé a la structure suivante

$$\mathrm{d}\widehat{x}(t) = \left(A_{t_0}\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)A_{t_i}\widehat{x}(t) + \ell(\widehat{x}(t))\right)\mathrm{d}t + \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t)\right)(y(t) - C\widehat{x}(t))\,\mathrm{d}t \quad (3.121)$$

où $\widehat{x}(t)$ est l'estimation de l'état $x(t)$ et K_0 et K_i sont des gains à déterminer pour que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \quad (3.122)$$

converge exponentiellement presque sûrement.

En comparant l'observateur (3.121) avec la forme générale (2.48) donnée dans le chapitre 2, le gain est $\psi(u(t)) = K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t)$.

L'expression de la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en combinant l'EDS (3.2) et l'observateur (3.121), est donnée par

$$\mathrm{d}e(t) = \left(\left(A_{t_0} - K_0C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_iC)u_i(t)\right)e(t) + \ell(x(t)) - \ell(\widehat{x}(t))\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t). \quad (3.123)$$

Afin d'appliquer le théorème 2.5.1, l'EDS (2.6) dans le chapitre 2 est obtenue en posant

$$f_1(x(t), u(t)) = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)A_{t_i}\right)x(t) + \ell(x(t)), \quad (3.124a)$$

$$g_1(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1}x(t) & \dots & A_{w_d}x(t)\end{bmatrix}, \quad (3.124b)$$

$$f_2(x(t), e(t), u(t)) = \left(A_{t_0} - K_0C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_iC)u_i(t)\right)e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t) - e(t)), \quad (3.124c)$$

$$g_2(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} A_{w_1}x(t) & \dots & A_{w_d}x(t)\end{bmatrix}, \quad (3.124d)$$

$$w(t) = w_x(t), X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t)\end{bmatrix}. \quad (3.124e)$$

En comparant les équations dans (3.92) et (3.124), l'application du théorème 2.5.1 et du lemme 2.5.1 sur le système stochastique (3.2) avec l'observateur (3.121) donne le théorème 3.4.1 en remplaçant l'expression "*alors le système (3.89) est un observateur pour le système stochastique (3.1)*" par "*alors le système (3.121) est un observateur pour le système stochastique (3.2)*". Il s'agit d'une conséquence directe des développements présentés dans la section 2.5.2 du chapitre 2 [BZSM12b].

Remarque 3.4.4. Dans ce chapitre, le choix suivant a été fait.

- La section 3.3 est consacrée au cas où la fonction $\ell(x(t))$ est Lipschitz et la méthode pour synthétiser un observateur considère que les entrées $u(t)$ sont bornées en norme, ce qui a permis de définir une "pseudo-entrée" $\varepsilon(t)$ en utilisant les relations (3.13) à (3.16) [BZSM12b].
- La section 3.4 consacrée au cas où la fonction $\ell(x(t))$ est one-sided Lipschitz et l'approche mise en œuvre pour la synthèse d'un observateur exploite la structure polytopique convexe de l'ensemble $\overline{\Omega}$ (défini en (3.88)) des entrées admissibles $u(t)$ avec une réécriture sous une forme algébro-différentielle de l'EDS (3.1a) (ou (3.2a)) [BZSM15a].

Ce choix est arbitraire car on aurait pu inverser l'association entre la nature de la non linéarité $\ell(x(t))$ (Lipschitz ou one-sided Lipschitz) et la façon de considérer les entrées $u(t)$ dans la synthèse de l'observateur (entrées bornées en norme ou entrées appartenant à un polytope convexe).

Les développements mathématiques changeant très peu si on effectue cette "inversion", c'est pourquoi, afin de ne pas alourdir la rédaction de ce manuscrit de thèse, cette permutation entre la caractérisation de la fonction $\ell(x(t))$ et la manière de traiter les entrées n'est pas rédigée. □

3.4.3 Exemple

Pour illustrer les développements ci-dessus sur l'observateur d'ordre plein, on considère le système stochastique (3.1) avec $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$, $d = 1$, $h = 1$ et les matrices suivantes

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.01 \\ 0 & 1 & 0.02 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 1 & 0.03 \\ 0.05 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_{t_2} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.01 & 0 \\ 0.05 & 1 & 0.01 \\ 0.03 & 0.01 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_w = \begin{bmatrix} -3.6492 & 0.047222 & 0.53139 \\ -0.27208 & -3.9014 & -0.63181 \\ 0.058333 & 0.038889 & -3.5194 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

et $L = I_3$.

L'espace des entrées admissibles $\overline{\Omega}$ est défini en (3.88) avec les bornes suivantes sur ces entrées

$$u_{1,\min} = -0.2, u_{1,\max} = 0.2, \; u_{2,\min} = -0.2, \; u_{2,\max} = 0.2,$$
$$\mu_{1\,\min} = -3.2, \; \mu_{1\,\max} = 3.2, \; \mu_{2\,\min} = -2.6, \; \mu_{2\,\max} = 2.6.$$

La non linéarité est donnée par la fonction $\ell(x(t))$ suivante

$$\ell(x(t)) = \begin{bmatrix} -2(x_1^3(t) + x_1(t)) \\ -2(x_2^3(t) + x_2(t)) \\ -2(x_3^3(t) + x_3(t)) \end{bmatrix}$$

et la condition (3.4) est satisfaite.

Puisque

$$\ell^T(x(t))x(t) = -2\sum_{i=1}^{3} x_i^2(t)(x_i^2(t) + 1) \leqslant 0,$$

la fonction $\ell(x(t))$ est one-sided Lipschitz et vérifie la condition (3.85) avec $a = 0$. L'hypothèse 2.4.1 est donc satisfaite.

Pour vérifier que la fonction $\ell(x(t))$ est localement quadratiquement bornée, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition (3.86), on calcule les entités suivantes

$$\ell^T(x(t))\ell(x(t)) = 4\sum_{i=1}^{3} x_i^2(t)(x_i^2(t)+1)^2 = 4\sum_{i=1}^{3} x_i^6(t) + 2x_i^4(t) + x_i^2(t),$$
$$bx^T(t)x(t) = b\sum_{i=1}^{3} x_i^2(t),$$
$$c\ell^T(x(t))x(t) = -2c\sum_{i=1}^{3} x_i^2(t)(x_i^2(t)+1) = -2c\sum_{i=1}^{3} x_i^4(t) + x_i^2(t),$$

et la condition (3.86) est équivalente à

$$4\sum_{i=1}^{3} x_i^6(t) + 2x_i^4(t) + x_i^2(t) \leqslant \sum_{i=1}^{3} -2cx_i^4(t) + (b-2c)x_i^2(t). \tag{3.125}$$

Des conditions suffisantes pour satisfaire l'inégalité (3.125) sont

$$4\sum_{i=1}^{3} x_i^2(t) \leqslant \sum_{i=1}^{3}(b-2c)x_i^2(t), \tag{3.126a}$$
$$4\sum_{i=1}^{3} x_i^6(t) + 2x_i^4(t) \leqslant \sum_{i=1}^{3} -2cx_i^4(t) \tag{3.126b}$$

La condition (3.126a) est équivalente à

$$4 \leqslant b - 2c. \tag{3.127}$$

La condition (3.126b) est équivalente à

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^6(t) = \|x(t)\|^6 \leqslant -\left(\frac{1}{2}c+2\right)\sum_{i=1}^{3} x_i^4(t) = -\left(\frac{1}{2}c+2\right)\|x(t)\|^4$$

et donc à

$$\|x(t)\|^2 \leqslant -\left(\frac{1}{2}c+2\right). \tag{3.128}$$

On choisit $b=-150$ et $c=-145$ et les conditions (3.127) et (3.127) donnent

$$4 \leqslant b - 2c = 140$$
$$\|x(t)\|^2 \leqslant -\left(\frac{1}{2}c+2\right) = 70.5.$$

La fonction $\ell(x(t))$ est donc localement quadratiquement bornée, il suffit que $\|x(t)\|^2 \leqslant 70.5$.

On peut remarquer que la fonction $\ell(x(t))$ est donc localement quadratiquement bornée quelle que soit la valeur de $\|x(t)\|$ finie. En effet, on peut toujours choisir une valeur de c qui soit négative avec $|c|$ suffisamment grande et une valeur de b qui satisfasse $4 \leqslant b - 2c$.

En choisissant

$$\rho = 20,$$

les LMI (3.97), (3.98), (3.99) et (3.100) (résolues pour les $2^{2m} = 16$ sommets du polytope $\mathcal{P}$) du théorème 3.4.1 ont généré les résultats suivants

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 7.4579,\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_1^1 & \dots & \varepsilon_1^8\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}5.4718 & 0.035932 & 4.5107 & 0.032114 & 4.9 & 0.033429 & 4.9395 & 0.033567\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_1^9 & \dots & \varepsilon_1^{16}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}2.9111 & 0.018329 & 1.9372 & 0.014406 & 2.2999 & 0.015551 & 2.3434 & 0.015722\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_2^1 & \dots & \varepsilon_4^8\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}4.2327 & 0.027409 & 3.2228 & 0.023218 & 3.6218 & 0.024615 & 3.6642 & 0.024778\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_2^9 & \dots & \varepsilon_2^{16}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}4.0755 & 0.026318 & 3.0821 & 0.022249 & 3.4746 & 0.0236 & 3.5165 & 0.023758\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_3^1 & \dots & \varepsilon_2^8\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}5.4718 & 0.035932 & 4.5107 & 0.032114 & 4.9 & 0.033429 & 4.9395 & 0.033567\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_3^9 & \dots & \varepsilon_3^{16}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}2.9111 & 0.018329 & 1.9372 & 0.014406 & 2.2999 & 0.015551 & 2.3434 & 0.015722\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_4^1 & \dots & \varepsilon_4^8\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}4.2327 & 0.027409 & 3.2228 & 0.023218 & 3.6218 & 0.024615 & 3.6642 & 0.024778\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\varepsilon_4^9 & \dots & \varepsilon_4^{16}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}4.0755 & 0.026318 & 3.0821 & 0.022249 & 3.4746 & 0.0236 & 3.5165 & 0.023758\end{bmatrix},\\
P_0 &= \begin{bmatrix}36.146 & 0.73289 & -0.37953\\ 0.73289 & 36.871 & 0.61373\\ -0.37953 & 0.61373 & 36.461\end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix}44.96 & 0.22976 & -0.86708\\ 0.22976 & 44.587 & 0.39662\\ -0.86708 & 0.39662 & 44.25\end{bmatrix},\\
P_2 &= \begin{bmatrix}45.291 & 0.36495 & -0.90387\\ 0.36495 & 44.835 & 0.44147\\ -0.90387 & 0.44147 & 44.421\end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix}71.197 & 9.9275 & -1.793\\ 9.9275 & 94.076 & -2.2363\\ -1.793 & -2.2363 & 98.714\end{bmatrix},\\
Q_0 &= \begin{bmatrix}0.027606 & 0.025798 & -2.2645\ 10^{-5}\\ 0.025798 & 0.025434 & 2.192\ 10^{-5}\\ -2.2645\ 10^{-5} & 2.192\ 10^{-5} & 0.052303\end{bmatrix},\\
Q_1 &= \begin{bmatrix}0.23898 & 0.027577 & -2.5717\ 10^{-5}\\ 0.027577 & 0.23728 & 2.4189\ 10^{-5}\\ -2.5717\ 10^{-5} & 2.4189\ 10^{-5} & 0.26567\end{bmatrix},\\
Q_2 &= \begin{bmatrix}0.25799 & 0.039858 & -3.5491\ 10^{-5}\\ 0.039858 & 0.25538 & 3.5875\ 10^{-5}\\ -3.5491\ 10^{-5} & 3.5875\ 10^{-5} & 0.29652\end{bmatrix},\\
G &= \begin{bmatrix}0.4677 & 0.4146 & -0.00066056\\ 0.4146 & 0.40085 & 0.00066045\\ -0.00066056 & 0.00066045 & 0.85062\end{bmatrix},\\
Y_0 &= \begin{bmatrix}0.0007903 & 31.222\\ 0.0042353 & 28.705\\ 2.3099 & -57.708\end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix}0.0037226 & 1.785\\ 0.0030082 & 1.6834\\ 0.14388 & -3.49\end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix}0.00087725 & 2.1436\\ 0.00076222 & 1.9557\\ 0.14282 & -3.4856\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Afin de diminuer le nombre de variables de décision que le solveur de LMI doit calculer, on

a choisi de poser $\varepsilon_1^k = \varepsilon_3^k$ et $\varepsilon_2^k = \varepsilon_4^k$ pour $k = 1, \ldots, 2^{2^m} = 16$.

Les gains $K_0 = G^{-T}Y_0$, $K_1 = G^{-T}Y_1$ et $K_2 = G^{-T}Y_2$ de l'observateur (3.89) sont

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.0015048 & 37.05 \\ 0.0045352 & 33.401 \\ 2.7156 & -67.839 \end{bmatrix}, \; K_1 = \begin{bmatrix} 0.021572 & 0.98414 \\ -0.015087 & 3.1885 \\ 0.16917 & -4.1046 \end{bmatrix}, \; K_2 = \begin{bmatrix} 0.008091 & 2.9669 \\ -0.0067438 & 1.8169 \\ 0.16791 & -4.0968 \end{bmatrix}.$$

Les simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes

$$x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \; \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} -1.15 \\ 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

et en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama avec un pas d'échantillonnage $\mathrm{d}t = 0.005$ seconde (voir (1.32)).

Les figures 3.13 à 3.19 confirment l'efficience de l'approche proposée. Elles permettent de valider, pour chacune des trois coordonnées du vecteur d'état, la convergence de l'état estimé vers l'état réel et de comparer la vitesse de convergence de l'erreur de filtrage par rapport à celle de l'état. L'état $x(t)$ et l'état estimé $\widehat{x}(t)$ sont représentés sur les figures 3.13 à 3.15 pour chacune des trois coordonnées. La valeur absolue de l'état $x_i(t)$ est comparée à celle de l'erreur de filtrage $e_i(t)$ dans les figures 3.16 à 3.18 pour $i = 1, 2, 3$. La figure 3.19 montre la norme des vecteurs d'état $x(t)$ et d'erreur de filtrage $e(t)$.

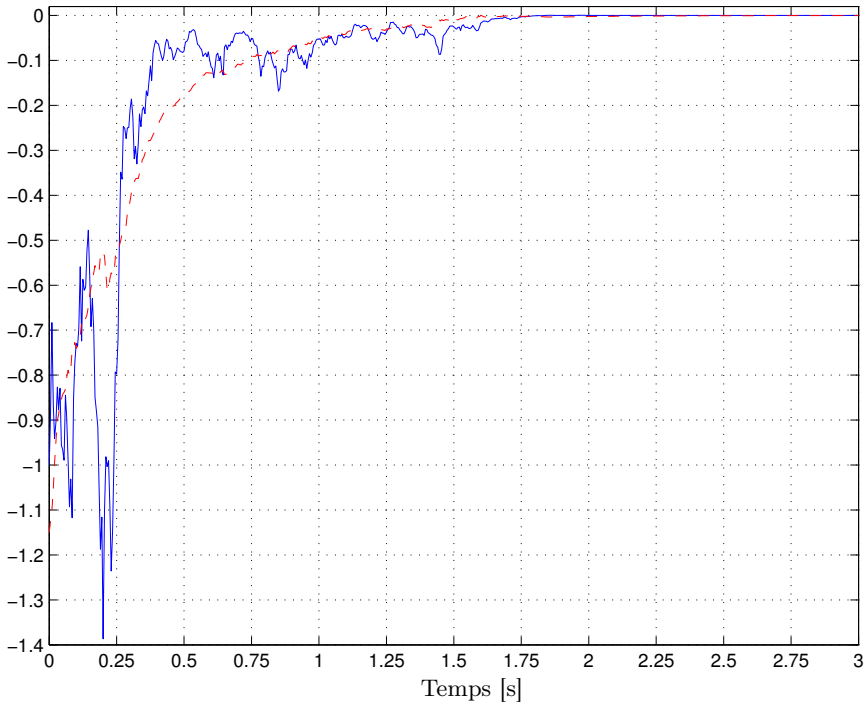


FIGURE 3.13 – Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ (rouge, discontinu).

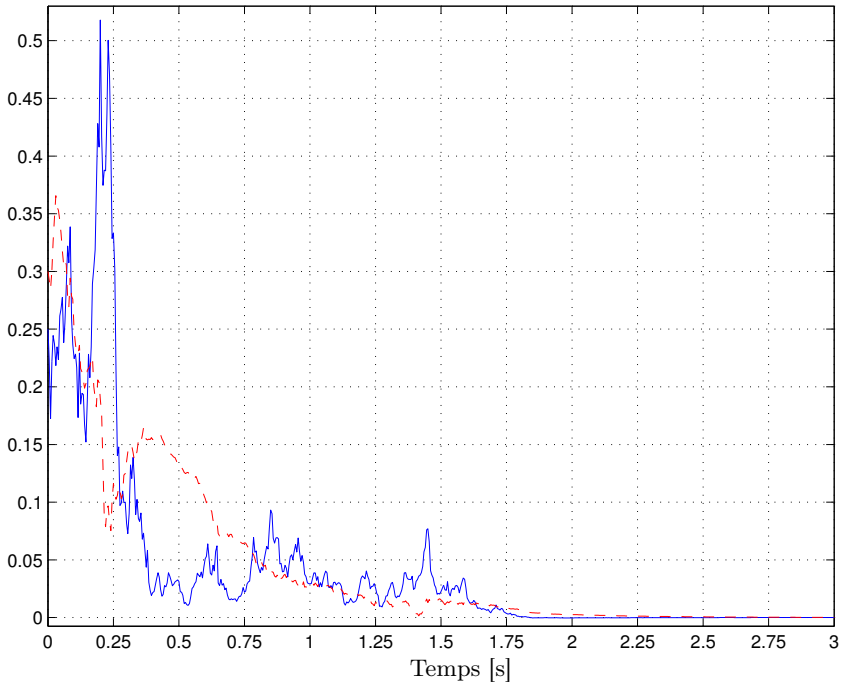


FIGURE 3.14 – Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ (rouge, discontinu).

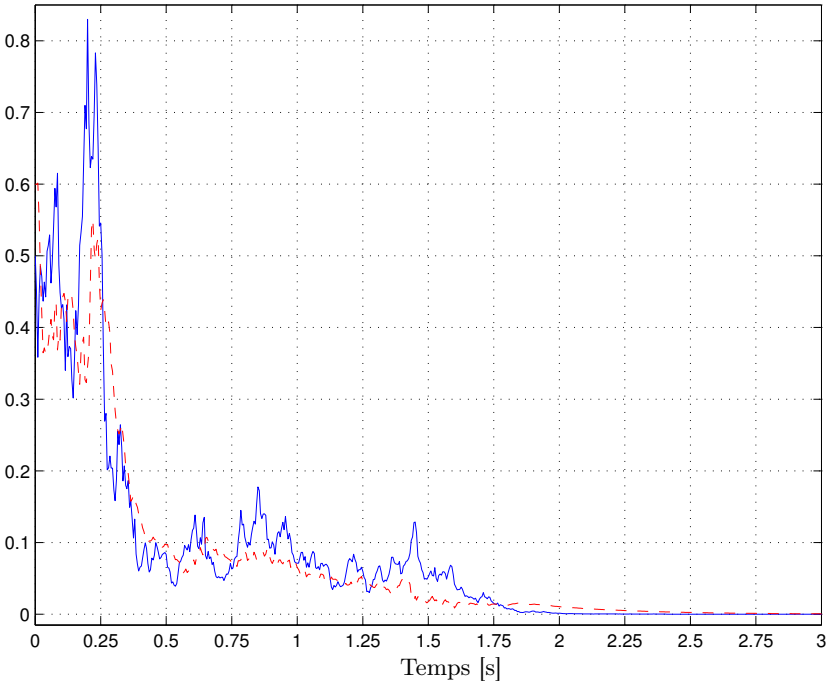


FIGURE 3.15 – Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_3(t)$ (rouge, discontinu).

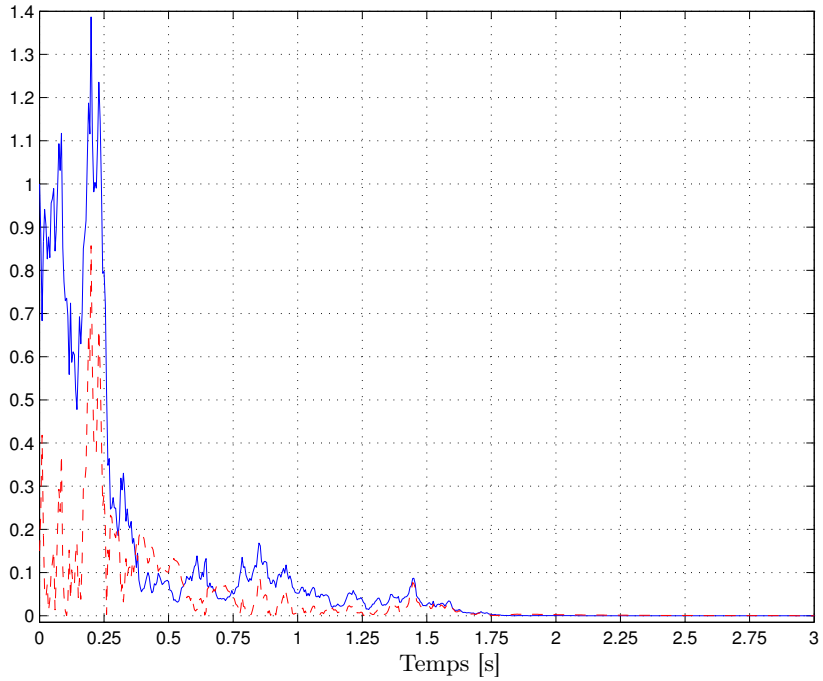


FIGURE 3.16 – Valeur absolue de l'état $|x_1(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_1(t)|$ (rouge, discontinu).

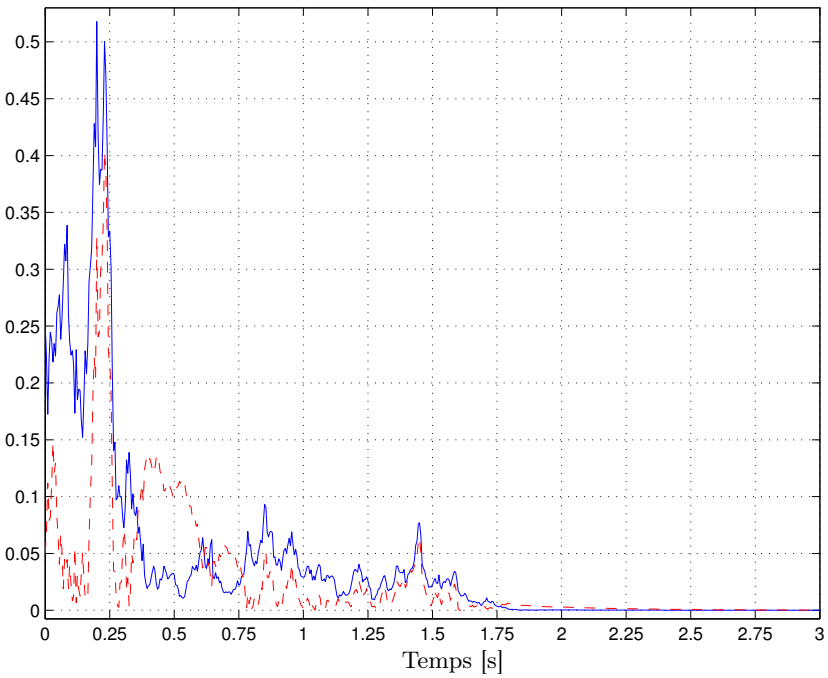


FIGURE 3.17 – Valeur absolue de l'état $|x_2(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_2(t)|$ (rouge, discontinu).

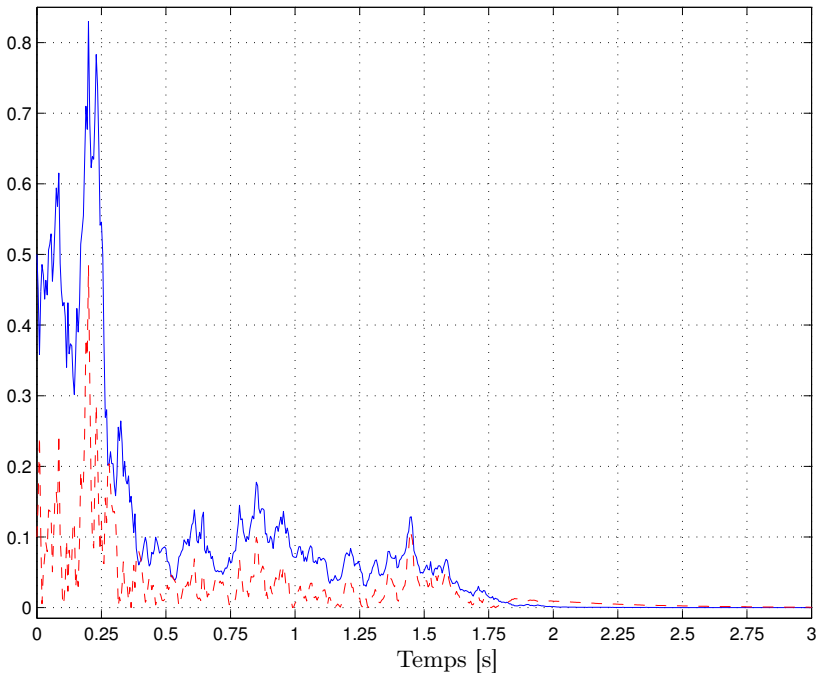


FIGURE 3.18 – Valeur absolue de l'état $|x_3(t)|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $|e_3(t)|$ (rouge, discontinu).

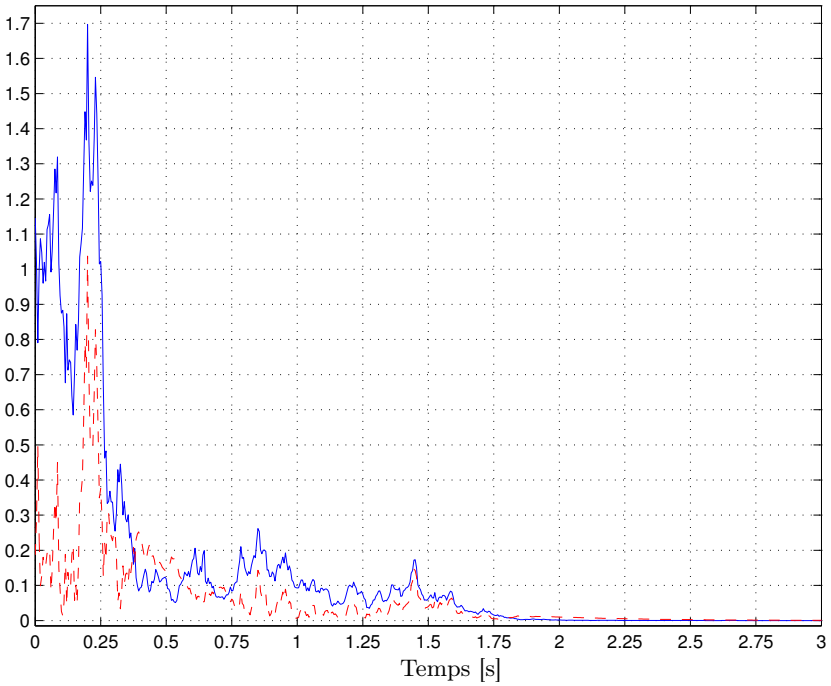


FIGURE 3.19 – Norme de l'état $\|x(t)\|$ (bleu, continu) et de l'erreur de filtrage $\|e(t)\|$ (rouge, discontinu).

La convergence de l'estimation $\widehat{x}(t)$ vers l'état $x(t)$ pour chacune des trois coordonnées est illustrée dans les figures 3.13, 3.14 et 3.15. La nature exponentielle de cette convergence est mise en évidence dans les figures 3.16, 3.17 et 3.18. La figure 3.19 montre que l'erreur de filtrage converge plus rapidement que l'état, ce que confirment les figures 3.16, 3.17 et 3.18 pour chacune des trois coordonnées.

Comparaison des approches polytopique avec une fonction de Lyapunov polynômiale et polytopique "classique" (c'est-à-dire avec une fonction de Lyapunov non polynômiale).

Afin de valider l'intérêt d'utiliser des fonctions de Lyapunov polynômiales (voir (3.103) et (3.114)) avec une modélisation algébro-différentielle du système (voir (3.102) et (3.113)), les gains de l'observateur (3.89) vont être recalculés en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratique "standard" données par

$$\mathcal{V}_x(x(t)) = x^T(t)\mathcal{P}_0 x(t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}_e(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t)\mathcal{Q}_0\overline{e}(t) \tag{3.129}$$

avec $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^T > 0$ et avec $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_0^T > 0$.

De plus, l'EADS (3.102) et l'EDAO (3.113) sont respectivement remplacées par l'EDS (3.1a) et l'EDO (3.93).

Avec les fonctions de Lyapunov ci-dessus, l'EDS (3.1a) et l'EDO (3.93), le théorème 3.4.1 est modifié comme suit : la condition (3.97) est supprimée, les 2^{2^m} LMI (3.98) sont remplacées par

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_t^T(\beta^k)\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_0\mathcal{A}_t(\beta^k) - \rho\mathcal{P}_0 + (\varepsilon_1^k a + \varepsilon_2^k b)I_n & \star & \star & \dots & \star \\ \mathcal{P}_0 - (\frac{\varepsilon_1^k}{2} - \frac{\varepsilon_2^k c}{2})I_n & -\varepsilon_2^k I_n & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{P}_0 A_{w_1} & 0 & -\mathcal{P}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathcal{P}_0 A_{w_d} & 0 & \dots & 0 & -\mathcal{P}_0 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.130}$$

les 2^{2m} LMI (3.99) sont remplacées par

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_t^T(\beta^k)\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_0\mathcal{A}_t(\beta^k) - \mathcal{C}^T(\beta^k)\mathcal{Y}^T - \mathcal{Y}\mathcal{C}(\beta^k) + (\varepsilon_3^k a + \varepsilon_4^k b)I_n & \star \\ \mathcal{Q}_0 - (\frac{\varepsilon_3^k}{2} - \frac{\varepsilon_4^k c}{2})I_n & -\varepsilon_4^k I_n \end{bmatrix} < 0 \tag{3.131}$$

et les $2^{2^m}m$ LMI (3.100) et (3.101) sont remplacées par

$$A_{w_i}^T\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_0 A_{w_i} - \sqrt{2\rho_i}\mathcal{P}_0 > 0, \tag{3.132}$$

$$A_{w_i}^T\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_0 A_{w_i} + \sqrt{2\rho_i}\mathcal{P}_0 < 0, \tag{3.133}$$

avec $i = 1, \dots, m$ et $k = 1, \dots, 2^{2m}$.

Les LMI ci-dessus ont été obtenues en posant $\mathcal{P}_0 = P(\zeta(t)) = F = F^T > 0$, $\mathcal{Q}_0 = Q(\zeta(t)) = G = G^T > 0$, $\mathcal{A}_t(\zeta(t))x(t) - \eta(t) = 0$ (la variable $\eta(t)$ est donc remplacée par $\mathcal{A}_t(\zeta(t))x(t)$) et $(\mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{K}\mathcal{C}(\zeta(t)))\overline{e}(t) - \varphi(t) = 0$ (la variable $\varphi(t)$ est donc remplacée par $(\mathcal{A}_t(\zeta(t)) - \mathcal{K}\mathcal{C}(\zeta(t)))\overline{e}(t)$) dans les développements mathématiques dans la démonstration du théorème 3.4.1.

En choisissant

$$\rho = 20,$$

la résolution des LMI (3.130), (3.131) et (3.133) a donné les résultats numériques suivants

$$\mathcal{P}_0 = \begin{bmatrix} 0.020518 & 0.0014497 & 0.00024594 \\ 0.0014497 & 0.021234 & 0.0013065 \\ 0.00024594 & 0.0013065 & 0.024357 \end{bmatrix}, \mathcal{Q}_0 = \begin{bmatrix} 45.845 & -0.015659 & 0.047384 \\ -0.015659 & 46.321 & -0.12083 \\ 0.047384 & -0.12083 & 46.129 \end{bmatrix},$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} -4444.2 & -174.52 \\ -4508.9 & 2368.4 \\ 67.212 & 6724.3 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} -342.11 & 88.756 \\ -311.64 & 243.64 \\ 105.21 & 474.53 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 52.792 & 126.04 \\ 93.251 & 32.444 \\ 103.66 & -129.5 \end{bmatrix}.$$

Les gains $K_0 = \mathcal{Q}_0^{-1} Y_0$, $K_1 = \mathcal{Q}_0^{-1} Y_1$ et $K_2 = \mathcal{Q}_0^{-1} Y_2$ de l'observateur (3.89) sont

$$K_0 = \begin{bmatrix} -96.974 & -3.94 \\ -97.37 & 51.509 \\ 1.3016 & 145.91 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} -7.4669 & 1.9271 \\ -6.7244 & 5.2873 \\ 2.2709 & 10.299 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1.1499 & 2.7524 \\ 2.0194 & 0.69401 \\ 2.2513 & -2.8084 \end{bmatrix}.$$

Les figures 3.20, 3.21 et 3.22 permettent de comparer l'observateur (3.89) synthétisé avec le théorème 3.4.1 avec ce même observateur synthétisé avec les LMI (3.130), (3.131), (3.132) et (3.133) (voir figures 3.13, 3.14 et 3.15).

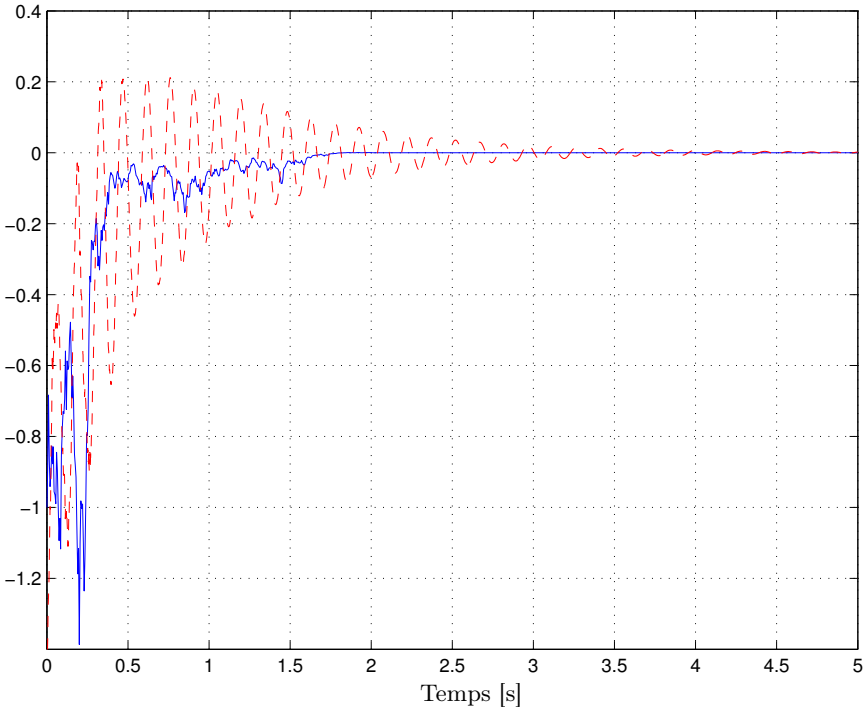


FIGURE 3.20 – Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynômiales (rouge, discontinu).

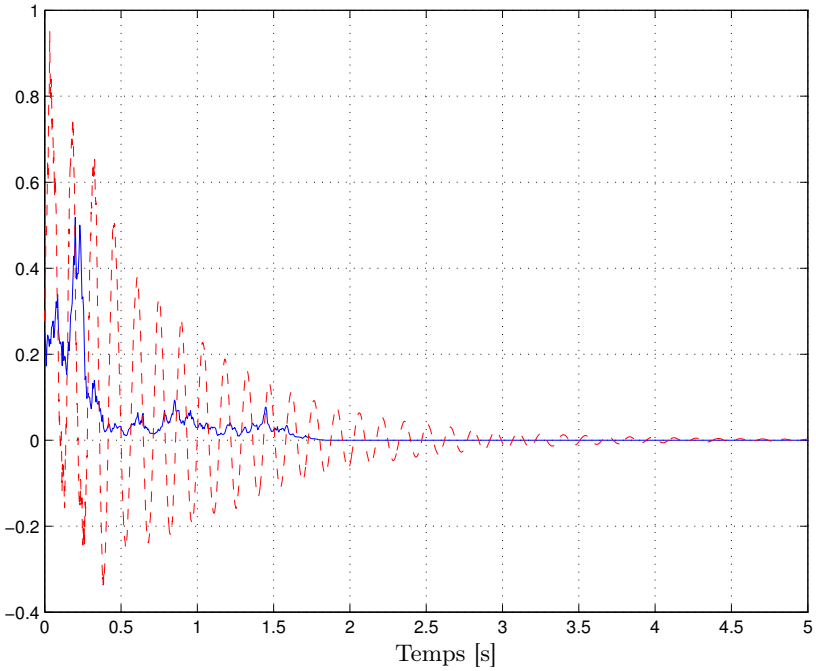


FIGURE 3.21 – Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynômiales (rouge, discontinu).

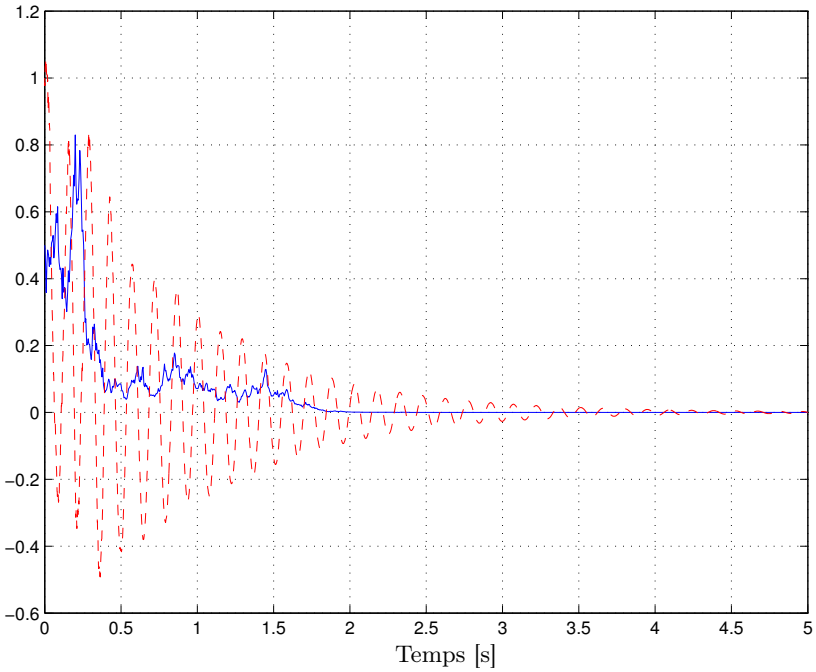


FIGURE 3.22 – Etat $x_3(t)$ (bleu, continu)et estimation $\widehat{x}_3(t)$ avec les fonctions de Lyapunov non polynômiales (rouge, discontinu).

Dans les figures 3.20, 3.21 et 3.22 données ci-dessous, on peut voir que l'observateur obtenu avec les fonctions de Lyapunov standard conduit à un comportement pire que celui obtenu avec les fonctions de Lyapunov polynômiales et la formulation algébro-différentielle utilisées dans le théorème 3.4.1, ce dernier étant illustré par les figures 3.13, 3.14 et 3.15.

Cette simulation montre donc l'intérêt de l'approche proposée dans cette section.

3.5 Filtrage robuste des systèmes stochastiques non linéaires incertains

Dans cette section, on considère les systèmes stochastiques non linéaires (3.1) et (3.2) donnés dans la section 3.2 en insérant des incertitudes paramétriques.

En effet, il important que les observateurs synthétisés puissent fournir une bonne estimation de l'état d'un système stochastique lorsque les paramètres de ce dernier ne sont pas connus avec précision, c'est-à-dire lorsque ces paramètres sont affectés par des incertitudes. Dans ce cas, la seule information disponible est la valeur nominale des paramètres du système stochastique et l'intervalle de variation autour de cette valeur nominale.

Lorsque l'estimation obtenue par un observateur converge vers l'état réel malgré la présence d'incertitudes paramétriques, on qualifie cet observateur de robuste.

Cette problématique d'observation robuste est d'un intérêt essentiel car, dans la pratique, on peut souvent considérer que les paramètres d'un système ne sont pas connus avec précision pour de nombreuses raisons et ces incertitudes peuvent résulter de sources multiples, par exemple lors d'une procédure d'identification du modèle, de la réduction de l'ordre de ce dernier, de l'inaccessibilité de certains paramètres physiques à la mesure pour des raisons technologiques ou de coût, ...

Il faut souligner que l'observation robuste n'est pas le dual de la commande robuste. En effet, dans le cadre de la commande robuste, on peut agir sur l'état du système stochastique incertain, alors que, pour l'observation robuste, cette action est impossible : on est obligé de se contenter d'avoir accès aux états qui sont mesurés (donc pas aux états qui ne le sont pas) sans agir sur la dynamique des états du système stochastique considéré.

Alors que c'est la stabilité exponentielle presque sûre qui est utilisée dans cette section, à notre connaissance, tous les travaux existant sur l'observation robuste des systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs et des incertitudes paramétriques concernent la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, à l'exception de [BZSM13c] (observateur robuste d'ordre plein).

La synthèse d'observateurs robustes d'ordre plein lorsque la dérive et la diffusion sont linéaires est traitée dans [GLSY01, XC03, Xia07] avec un critère $\mathcal{H}_\infty$ sur l'erreur d'observation (voir le lemme borné réel dans la section 1.6.2), tandis que ce critère est du type $\mathcal{L}_\infty/\mathcal{L}_\infty$ [BS10].

Les incertitudes paramétriques sont non structurées et bornées en norme dans [XC03, Xia07] et polytopiques dans [GLSY01, BS10].

Dans [Xia07], un observateur robuste d'ordre plein est proposé pour un système singulier stochastique (voir section 5 pour les systèmes singuliers stochastiques) avec un critère $\mathcal{H}_\infty$ sur l'erreur d'observation lorsque la dérive et la diffusion sont linéaires.

Dans [ZHR$^+$05] et [NH06], un observateur robuste d'ordre réduit est utilisé dans le cadre d'une loi de commande pour stabiliser un système stochastique avec des paramètres incertains.

Dans cette section, des méthodes pour synthétiser des observateurs robustes aux incertitudes paramétriques sont proposées pour des systèmes stochastiques incertains ayant des mesures stochastiques ou déterministes. Les incertitudes paramétriques considérées sont non structurées et bornées en norme.

3.5.1 Systèmes stochastiques incertains considérés

Les systèmes stochastiques non linéaires incertains considérés sont

$$\mathrm{d}x(t) = \left((A_{t_0} + \Delta A_{t_0}(t))x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)(A_{t_i} + \Delta A_{t_i}(t))x(t) + \ell(x(t)) \right) \mathrm{d}t$$

$$+\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) \tag{3.134a}$$

$$\mathrm{d}y(t) = Cx(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{h}D_k x(t)\,\mathrm{d}w_{y_k}(t) \tag{3.134b}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{3.134c}$$

ou

$$\mathrm{d}x(t) = \left((A_{t_0}+\Delta A_{t_0}(t))x(t)+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)(A_{t_i}+\Delta A_{t_i}(t))x(t)+\ell(x(t))\right)\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) \tag{3.135a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.135b}$$

$$z(t) = Lx(t) \tag{3.135c}$$

où les signaux intervenant dans (3.134) et (3.135) sont les mêmes que ceux définis pour les systèmes (3.1) et (3.2) dans la section 3.2.

Les entrées admissibles $u(t)$ sont bornées et appartiennent à l'ensemble Ω donné par (3.3).

La matrice L est de rang plein lignes comme le précise la condition (3.5) et la fonction non linéaire $\ell(x)$ vérifie $\ell(0)=0$ (voir (3.4)) et la contrainte de Lipschitz donnée par (3.6).

Les matrices $\Delta A_{t_i}(t)$ et $\Delta A_{w_i}(t)$ représentent les incertitudes paramétriques à temps variant qui affectent le système stochastique non linéaire incertain (3.134) ou (3.135). Ces incertitudes sont non structurées et bornées en norme. Elles vérifient les contraintes suivantes

$$\begin{bmatrix}\Delta A_{t_0}(t) & \dots & \Delta A_{t_m}(t) & \Delta A_{w_1}(t) & \dots & \Delta A_{w_d}(t)\end{bmatrix}$$
$$= F\Delta(t)\begin{bmatrix}H_{A_{t_0}} & \dots & H_{A_{t_m}} & H_{A_{w_1}} & \dots & H_{A_{w_d}}\end{bmatrix} \tag{3.136}$$

où $\Delta(t)\in\mathbb{R}^{a\times b}$ est une matrice inconnue dont les éléments sont Lebesgue mesurables et satisfont

$$\Delta(t)\Delta^T(t)\leqslant I_a, \tag{3.137}$$

et où F, $H_{A_{t_0}}$, …, $H_{A_{t_m}}$ et $H_{A_{w_1}}$, …, $H_{A_{w_d}}$ sont des matrices constantes données avec des dimensions appropriées.

Les conditions d'existence et d'unicité de la solution $x(t)$, données par le théorème 1.4.4, sont donc satisfaites pour les EDS (3.134a) et (3.135a).

3.5.2 Cas des mesures stochastiques

Dans cette section, un observateur robuste d'ordre plein et un observateur robuste d'ordre réduit vont être synthétisés pour le système stochastique non linéaire incertain avec des mesures stochatiques (3.134).

3.5.2.1 Analyse du problème du filtrage robuste

Si on pose

$$z(t)=x(t), \tag{3.138}$$

c'est-à-dire $L = I_n$ et $r = n$, un observateur robuste d'ordre plein pour le système (3.134) est décrit par

$$\mathrm{d}\widehat{x}(t) = \left(A_{t_0}\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i}\widehat{x}(t) + \ell(\widehat{x}(t)) \right) \mathrm{d}t + \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t) \right) (\mathrm{d}y(t) - C\widehat{x}(t)\,\mathrm{d}t) \quad (3.139)$$

où $\widehat{x}(t)$ est l'estimation de l'état $x(t)$ et K_0 et K_i sont des gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \quad (3.140)$$

converge exponentiellement presque sûrement.

Si on pose $r < n$, alors on suppose qu'il existe une fonction $\overline{\ell}(z)$ telle que (voir (3.41))

$$\ell(x(t)) = \overline{\ell}(Lx(t)) = \overline{\ell}(z(t)) \quad (3.141)$$

et un observateur robuste d'ordre réduit pour le système (3.134) est formulé comme suit

$$\mathrm{d}\widehat{z}(t) = \left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i \right) \widehat{z}(t) + L\overline{\ell}(\widehat{z}(t)) \right) \mathrm{d}t + \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i \right) \mathrm{d}y(t) \quad (3.142)$$

où $\widehat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de $z(t)$. M_i et N_i $(i = 0, \ldots, m)$ sont des matrices de gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e_r(t) = z(t) - \widehat{z}(t) = Lx(t) - \widehat{z}(t) \quad (3.143)$$

converge exponentiellement presque sûrement.

La dynamique de l'erreur d'observation $e(t)$ (3.140) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e(t) = {} & \left(\left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C) u_i(t) \right) e(t) \right. \\ & \left. + \ell(x(t)) - \ell(x(t) - e(t)) \right) \mathrm{d}t + \left(\Delta A_{t_0}(t) + \sum_{i=1}^{m} \Delta A_{t_i}(t) u_i(t) \right) x(t)\,\mathrm{d}t \\ & + \sum_{j=1}^{d} (A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t)) x(t)\,\mathrm{d}w_x(t) - \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t) \right) D x(t)\,\mathrm{d}w_y(t) \end{aligned} \quad (3.144)$$

tandis que celle de l'erreur d'estimation $e_r(t)$ (3.143) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_r(t) = {} & \left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i \right) e_r(t) + L(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(Lx(t) - e_r(t))) \right. \\ & \left. + (L(A_{t_0} + \Delta A_{t_0(t)}) - M_0 L - N_0 C) x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) (L(A_{t_i} + \Delta A_{t_i}(t)) - M_i L - N_i C) x(t) \right) \mathrm{d}t \\ & + \sum_{j=1}^{d} L(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t)) x(t)\,\mathrm{d}w_x(t) - \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t) \right) D x(t)\,\mathrm{d}w_y(t). \end{aligned} \quad (3.145)$$

Pour appliquer le théorème 2.5.1 sur les EDS (3.134a) et (3.144), l'hypothèse 2.2.1 est remplacée par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.134a) et l'EDO (2.43) par

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C) u_i(t) \right) \overline{e}(t) - \ell(-\overline{e}(t)). \tag{3.146}$$

Pour l'observateur d'ordre réduit, les contraintes de Sylvester suivantes

$$LA_{t_i} - M_i L - N_i C = 0, \qquad i = 0, \ldots, m, \tag{3.147}$$

sont introduites afin de supprimer un maximum de termes dépendant de l'état $x(t)$ dans l'EDS (3.145).

Afin d'appliquer le théorème 2.6.1 sur les EDS (3.134a) et (3.145), l'hypothèse 2.2.1 est remplacée par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.134a) et l'EDO (2.54) par

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i \right) \overline{e}_r(t) - L\overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)). \tag{3.148}$$

Les EDO (3.12) et (3.146) sont identiques, tout comme les EDO (3.49) et (3.148). Ainsi, pour l'estimation robuste d'ordre plein, la LMI (3.20) du théorème 3.3.1 s'applique donc, mais il faut modifier les LMI (3.19), (3.21) et (3.22). De même, pour l'estimation robuste d'ordre réduit, la LMI (3.58) du théorème 3.3.2 s'applique donc avec la condition (3.53), mais il faut aussi modifier les LMI (3.19), (3.21) et (3.22).

Les LMI (3.19), (3.21) et (3.22) ne prennent pas en compte les incertitudes paramétriques dans l'EDS (3.134a). Le problème commun qui reste donc à résoudre pour la synthèse d'observateurs robustes d'ordre plein et réduit est d'étudier la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.134a).

3.5.2.2 Etude de la stabilité du point d'équilibre de l'EDS avec des incertitudes paramétriques

Le lemme suivant donne des conditions suffisantes pour la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.134a).

Lemme 3.5.1. *[BZSM13c] Le point d'équilibre de l'EDS (3.134a) est exponentiellement presque sûrement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$*

et $\mu_5 > 0$ tels que la LMI suivante

$$\begin{bmatrix}
(1,1)_a & \sigma_1 PA_{t_1} & \dots & \sigma_m PA_{t_m} & \sigma_1 PF & \dots & \sigma_m PF & P & PF & A_{w_1}^T P & \dots & A_{w_d}^T P & 0 \\
(1,2)^T & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(1,m+1)^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1,m+2)^T & 0 & \dots & 0 & -\mu_1 I_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(1,2m+1)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 I_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-I_a}{\alpha\mu_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
PA_{w_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 & PF \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
PA_{w_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & PF \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F^T P & \dots & F^T P & \dfrac{-I_a}{\mu_4}
\end{bmatrix} < 0, \tag{3.149}$$

est vérifiée et que, pour chaque $j = 1, \dots, d$, l'une des deux LMI suivantes

$$\begin{bmatrix} A_{w_j}^T P + PA_{w_j} + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j} P & PF \\ F^T P & \dfrac{-I_a}{\mu_5} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.150}$$

$$\begin{bmatrix} -(A_{w_j}^T P + PA_{w_j}) + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j} P & PF \\ F^T P & \dfrac{-I_a}{\mu_5} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.151}$$

est vérifiée, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^d \rho_j$, $\alpha = \sum_{i=0}^m \alpha_i$ et $\alpha_0 = 1$, et où

$$(1,1)_a = \sum_{i=0}^m \alpha_i (PA_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \mu_3^{-1} \sum_{i=0}^m \alpha_i H_{A_{t_i}}^T H_{A_{t_i}} + \mu_1 \overline{H}_2^T \overline{H}_2 + \mu_2^{-1} \kappa^2 I_n + \mu_4^{-1} \sum_{j=1}^d H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} - \rho P.$$

Démonstration. Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_x(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ avec $P = P^T > 0$.

La condition (1.50a) du théorème 1.5.3 est satisfaite avec $p = 2$ et $c_1 = \lambda_{\min}(P)$.

En utilisant les notations introduites dans les équations (3.13) à (3.17) et dans la relation (3.136), l'EDS (3.134a) se réécrit ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x(t) &= \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i(t)(A_{t_i} + \Delta A_{t_i}(t))x(t) + \sum_{i=1}^m \sigma_i \varepsilon_i(t)(A_{t_i} + \Delta A_{t_i}(t))x(t) + \ell(x(t)) \right) \mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{j=1}^d (A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\, \mathrm{d}w_{x_j}(t) \\
&= \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i(t)(A_{t_i} + \Delta A_{t_i}(t))x(t) + \overline{H}_1 \overline{\Delta}(\varepsilon(t), t) \overline{H}_2)x(t) + \ell(x(t)) \right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j}(t) \tag{3.152}$$

avec

$$\overline{H}_1=\Big[\sigma_1 A_{t_1}\quad\ldots\quad\sigma_m A_{t_1}\quad\sigma_1 F\quad\ldots\quad\sigma_m F\Big], \tag{3.153}$$

$$\overline{H}_2=\Big[I_n\quad\ldots\quad I_n\quad H_{A_{t_1}}^T\quad\ldots\quad H_{A_{t_m}}^T\Big]^T, \tag{3.154}$$

$$\overline{\Delta}(\varepsilon(t),t)=\mathrm{bdiag}(\varepsilon_1(t)I_n,\ldots,\varepsilon_m(t)I_n,\varepsilon_1(t)\Delta(t),\ldots,\varepsilon_m(t)\Delta(t)), \tag{3.155}$$

avec la propriété suivante

$$\overline{\Delta}(\varepsilon(t),t)\overline{\Delta}^T(\varepsilon(t),t)\leqslant I_{m(n+a)}. \tag{3.156}$$

En appliquant la formule d'Itô à l'EDS (3.152) avec la fonction de Lyapunov $V_x(x(t))$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}V_x(x(t))=x^T(t)\Bigg(&\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(P(A_{t_i}+\Delta A_{t_i}(t))+(A_{t_i}+\Delta A_{t_i}(t))^TP)\\&+\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))^TP(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))\Bigg)x(t)\\&+2x^T(t)P\overline{H}_1\overline{\Delta}(\varepsilon(t),t)\overline{H}_2x(t)+2x^T(t)P\ell(x(t)).\end{aligned} \tag{3.157}$$

En utilisant les inégalités données par (3.6), (3.156) et (C.3.1), la relation (3.157) devient

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}V_x(x(t))\leqslant x^T(t)\Bigg(&\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(P(A_{t_i}+\Delta A_{t_i}(t))+(A_{t_i}+\Delta A_{t_i}(t))^TP)\\&+\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))^TP(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))\\&+\mu_1^{-1}P\overline{H}_1\overline{H}_1^TP+\mu_1\overline{H}_2^T\overline{H}_2+\mu_2^{-1}\kappa^2I_n+\mu_2PP\Big)x(t)\end{aligned} \tag{3.158}$$

avec $\mu_1>0$ et $\mu_2>0$.

S'il existe un réel c_2 tel que $c_2<\rho$ et $\mathfrak{L}V_x(x(t))\leqslant c_2V_x(x(t))$, alors la condition (1.50b) du théorème 1.5.3 est satisfaite. En utilisant l'inégalité (3.158), la condition $\mathfrak{L}V_x(x(t))\leqslant c_2V_x(x(t))$ est vérifiée si l'inégalité

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(P(A_{t_i}+\Delta A_{t_i}(t))+(A_{t_i}+\Delta A_{t_i}(t))^TP)+\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))^TP(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))\\+\mu_1^{-1}P\overline{H}_1\overline{H}_1^TP+\mu_1\overline{H}_2^T\overline{H}_2+\mu_2^{-1}\kappa^2I_n+\mu_2PP-\rho P<0\end{aligned} \tag{3.159}$$

est satisfaite.

Puisqu'on a $\Delta A_{t_i}(t)=F\Delta(t)H_{A_{t_i}}$ et $\Delta A_{w_j}(t)=F\Delta(t)H_{A_{w_j}}$ (voir (3.136)), l'inégalité (3.159) devient

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(PA_{t_i}+A_{t_i}^TP)+\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(P(F\Delta(t)H_{A_{t_i}})+(F\Delta(t)H_{A_{t_i}})^TP)$$

$$+\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+F\Delta(t)H_{A_{w_j}})^T P(A_{w_j}+F\Delta(t)H_{A_{w_j}})+\mu_1^{-1}P\overline{H}_1\overline{H}_1^T P+\mu_1\overline{H}_2^T\overline{H}_2$$
$$+\mu_2^{-1}\kappa^2 I_n+\mu_2 PP-\rho P<0. \quad (3.160)$$

En utilisant les inégalités (3.137), (C.3.1) et (C.3.2), on a

$$2x^T\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(F\Delta(t)H_{A_{t_i}})^T P)x\leqslant\mu_3^{-1}x^T\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(H_{A_{t_i}})^T(H_{A_{t_i}})x+x^T\mu_3\sum_{i=0}^{m}\alpha_i PFF^T Px,$$
$$\sum_{j=1}^{d}(A_{w_j}+F\Delta(t)H_{A_{w_j}})^T P(A_{w_j}+F\Delta(t)H_{A_{w_j}})\leqslant\sum_{j=1}^{d}\left(A_{w_j}^T(P^{-1}-\mu_4FF^T)^{-1}A_{w_j}+\mu_4^{-1}H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}}\right)$$

et la condition $\mathfrak{L}V_x(x(t))-\rho V(x(t))<0$ est vérifiée si l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(PA_{t_i}+A_{t_i}^T P)+\mu_1^{-1}P\overline{H}_1\overline{H}_1^T P+\mu_1\overline{H}_2^T\overline{H}_2+\mu_2^{-1}\kappa^2 I_n+\mu_2 PP+\mu_3^{-1}\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(H_{A_{t_i}})^T(H_{A_{t_i}})$$
$$+\mu_3\sum_{i=0}^{m}\alpha_i PFF^T P+\sum_{j=1}^{d}\left(A_{w_j}^T(P^{-1}-\mu_4FF^T)^{-1}A_{w_j}+\mu_4^{-1}H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}}-\rho_j P\right)<0 \quad (3.161)$$

est satisfaite.

L'application du lemme de Schur (A.3.1) à l'inégalité (3.161) donne la LMI (3.149) avec $\alpha=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i$. Si la LMI (3.149) est vérifiée, alors la condition (1.50b) du théorème 1.5.3 est satisfaite.

L' application de $\mathfrak{B}V_x(x(t))$ à l'EDS (3.152) donne

$$\mathfrak{B}V_x(x(t))=\Big[x^T(t)((A_{w_1}+\Delta A_{w_1}(t))^T P+P(A_{w_1}+\Delta A_{w_1}(t)))x(t)\quad\ldots$$
$$x^T(t)((A_{w_d}+\Delta A_{w_d}(t))^T P+P(A_{w_d}+\Delta A_{w_d}(t)))x(t)\Big]. \quad (3.162)$$

S'il existe un réel $c_3=2\rho$ avec $\rho=\sum_{j=1}^{d}\rho_j$ et $\rho_j\geqslant 0$ tel que $\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2\geqslant c_3V_x^2(x(t))$, alors la condition (1.50c) du théorème 1.5.3 est satisfaite.

Puisqu'on a

$$\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2-c_3V_x^2(x(t))$$
$$=\sum_{j=1}^{d}x^T(t)((A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))^T P+P(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))+\sqrt{2\rho_j}P)x(t)$$
$$\times x^T(t)((A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))^T P+P(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))-\sqrt{2\rho_j}P)x(t),$$

la condition (1.50c) du théorème 1.5.3 est donc vérifiée s'il existe un réel $c_3=2\sum_{j=1}^{d}\rho_j$ tel que, pour chaque j avec $j=1,\ldots,d$, l'une des deux LMI

$$(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))^T P+P(A_{w_j}+\Delta A_{w_j}(t))+\sqrt{2\rho_j}P\ <\ 0, \quad (3.163a)$$

$$(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))^T P + P(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t)) - \sqrt{2\rho_j} P \quad > \quad 0, \tag{3.163b}$$

est vérifiée.

L'inégalité (3.163a) peut être réécrite comme suit

$$A_{w_j}^T P + P A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t)^T P + P \Delta A_{w_j}(t) + \sqrt{2\rho_j} P < 0.$$

En utilisant l'inégalité (C.3.1) avec (3.136) et (3.137), le terme $x^T(t)(\Delta A_{w_j}(t)^T P + P \Delta A_{w_j}(t))x(t)$ peut être borné comme suit

$$\begin{aligned} x^T(t)(\Delta A_{w_j}(t)^T P + P \Delta A_{w_j}(t))x(t) &= 2x^T(t) P \Delta A_{w_j}(t) x(t) = 2x^T(t) P F \Delta(t) H_{A_{w_j}} x(t) \\ &\leqslant x^T(t)(\mu_5 P F F^T P + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}})x(t) \end{aligned}$$

avec $\mu_5 > 0$ et l'inégalité (3.163a) est vérifiée si on a

$$A_{w_j}^T P + P A_{w_j} + \mu_5 P F F^T P + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j} P < 0.$$

L'application du lemme de Schur (A.3.1) à l'inégalité précédente donne la LMI (3.150).

En posant $\overline{\Delta}(t) = -\Delta(t)$, on a $\overline{\Delta}(t)\overline{\Delta}^T(t) \leqslant I_a$ et en utilisant l'inégalité (C.3.1) avec (3.136) et (3.137), le terme $-x^T(t)(\Delta A_{w_j}(t)^T P + P \Delta A_{w_j}(t))x(t)$ peut être borné comme suit

$$\begin{aligned} -x^T(t)(\Delta A_{w_j}(t)^T P + P \Delta A_{w_j}(t))x(t) &= 2x^T(t) P \overline{\Delta}(t) A_{w_j} x(t) = 2x^T(t) P F \overline{\Delta}(t) H_{A_{w_j}} x(t) \\ &\leqslant x^T(t)(\mu_5 P F F^T P + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}})x(t) \end{aligned}$$

avec $\mu_5 > 0$.

Puisque $\Delta A_{w_j}(t) = -F\overline{\Delta}(t) H_{A_{w_j}}$, l'inégalité précédente peut être écrite comme suit

$$2x^T(t) P \Delta A_{w_j}(t) x(t) \geqslant x^T(t)(-\mu_5 P F F^T P - \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}})x(t)$$

et l'inégalité (3.163b) est vérifiée si on a

$$A_{w_j}^T P + P A_{w_j} - \mu_5 P F F^T P - \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} - \sqrt{2\rho_j} P > 0$$

ou, ce qui est équivalent,

$$-(A_{w_j}^T P + P A_{w_j}) + \mu_5 P F F^T P + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j} P < 0.$$

En appliquant le lemme de Schur à l'inégalité précédente, on obtient la LMI (3.151).

Puisque $c_2 < \sum_{j=1}^d \rho_j$ et $c_3 = 2\sum_{j=1}^d \rho_j \geqslant 0$, l'inégalité (1.52) du théorème 1.5.3 est satisfaite et la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.134a) est démontrée. •

3.5.2.3 Observateurs robustes d'ordres plein et réduit

En utilisant les développements faits dans la section 3.5.2.1 avec le lemme 3.5.1, on peut donc énoncer sans démonstration les deux théorèmes suivants pour les observateurs robustes d'ordres plein et réduit en adaptant respectivement les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

Théorème 3.5.1. *[BZSM13c] On suppose que l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée. L'EDS (3.139) est un observateur robuste d'ordre plein pour le système (3.134) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ et Y_i $(i = 0, \ldots, m)$ et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$, $\mu_5 > 0$, $\mu_6 > 0$, $\mu_7 > 0$ et $\beta \geqslant 0$ tels que les LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix}
(1,1)_a & \sigma_1 PA_{t_1} & \ldots & \sigma_m PA_{t_m} & \sigma_1 PF & \ldots & \sigma_m PF & P & PF & A_{w_1}^T P & \ldots & A_{w_d}^T P & 0 \\
(1,2)^T & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(1,m+1)^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1,m+2)^T & 0 & \ldots & 0 & -\mu_1 I_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(1,2m+1)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 I_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-I_n}{\mu_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-I_a}{\alpha\mu_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
PA_{w_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 & PF \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
PA_{w_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & PF \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F^T P & \ldots & F^T P & \frac{-I_a}{\mu_4}
\end{bmatrix} < 0, \tag{3.164}$$

$$\begin{bmatrix}
(1,1)_b & \sigma_1(QA_{t_1} - Y_1 C) & \ldots & \sigma_m(QA_{t_m} - Y_m C) & Q \\
(1,2)^T & -\mu_6 I_n & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
(1,m)^T & 0 & 0 & -\mu_6 I_n & 0 \\
Q & 0 & 0 & 0 & \frac{-I_n}{\mu_7}
\end{bmatrix} < 0 \tag{3.165}$$

sont vérifiées, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$, $\alpha = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i$ et $\alpha_0 = 1$, et où

$$(1,1)_a = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (PA_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \mu_3^{-1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i H_{A_{t_i}}^T H_{A_{t_i}} + \mu_1 \overline{H}_2^T \overline{H}_2 + \mu_2^{-1} \kappa^2 I_n + \mu_4^{-1} \sum_{j=1}^{d} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} - \rho P,$$

$$(1,1)_b = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i ((QA_{t_i} - Y_i C) + (QA_{t_i} - Y_i C)^T) + (\mu_6 + \mu_7^{-1} \kappa^2) I_n + 2\beta Q,$$

et que, pour chaque $j = 1, \ldots, d$, l'une des deux LMI suivantes

$$\begin{bmatrix}
A_{w_j}^T P + PA_{w_j} + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j} P & PF \\
F^T P & \frac{-I_a}{\mu_5}
\end{bmatrix} < 0, \tag{3.166}$$

$$\begin{bmatrix}
-(A_{w_j}^T P + PA_{w_j}) + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j} P & PF \\
F^T P & \frac{-I_a}{\mu_5}
\end{bmatrix} < 0, \tag{3.167}$$

est satisfaite.

Les gains K_i sont alors donnés par $K_i = Q^{-1}Y_i$ pour $i = 0, \ldots, m$.

Théorème 3.5.2. *On suppose que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.53) sont satisfaites. L'EDS (3.142) est un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit pour le système (3.134) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ et R et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$, $\mu_5 > 0$, $\mu_8 > 0$, $\mu_9 > 0$, $\beta_r \geqslant 0$ tels que les LMI (3.164) et*

$$\begin{bmatrix} (Q\mathbb{A} - R\mathbb{C}) + (Q\mathbb{A} - R\mathbb{C})^T + \mu_8 I_r + \mu_9^{-1}\kappa^2 I_r + 2\beta_r Q & Q\mathbb{B} - R\mathbb{D} & QL \\ (Q\mathbb{B} - R\mathbb{D})^T & -\mu_8 I_{mr} & 0 \\ L^T Q & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu_9} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.168}$$

sont vérifiées, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$, $\alpha = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i$ et $\alpha_0 = 1$, et que, pour chaque $j = 1, \ldots, d$, l'une des deux LMI (3.166) ou (3.167) soit satisfaite.

Le gain Z est alors donné par $Z = Q^{-1}R$. Les matrices M_i et N_i de l'observateur sont obtenues avec (3.51) et (3.54).

3.5.3 Cas des mesures déterministes

A la différence du cas des mesures stochastiques (3.134b) qui donne $\mathrm{d}y(t)$, dans le cas avec des mesures déterministes (3.135b), on a accès à $y(t)$, ce qui permet de rajouter une "seconde" équation à l'observateur donnée par $\widehat{z}(t) = \eta(t) + Ey(t)$ (voir les observateurs d'ordre réduit (3.42) et (3.64)). En effet, la mesure $\mathrm{d}y(t)$ donne $\mathrm{d}\widehat{z}(t) = \mathrm{d}\eta(t) + E\,\mathrm{d}y(t)$ ou $\mathrm{d}\widehat{z}(t) = \eta(t)\,\mathrm{d}t + E\,\mathrm{d}y(t)$, mais on ne peut pas obtenir directement $\widehat{z}(t)$. L'équation $\widehat{z}(t) = \eta(t) + Ey(t)$ permet de considérer deux cas lorsque les mesures sont déterministes :

- des observateurs robustes d'ordres plein et réduit sans compensation partielle des incertitudes dans la section 3.5.3.1,
- des observateurs robustes d'ordres plein et réduit avec compensation partielle des incertitudes dans la section 3.5.3.2.

3.5.3.1 Sans compensation partielle des incertitudes

Si on pose

$$z(t) = x(t), \tag{3.169}$$

c'est-à-dire $L = I_n$ et $r = n$, un observateur robuste d'ordre plein pour le système (3.135) est décrit par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{x}(t) = &\left(A_{t_0}\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i}\widehat{x}(t) + \ell(\widehat{x}(t)) \right) \mathrm{d}t \\ &+ \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i(t) \right) (\mathrm{d}y(t) - C\widehat{x}(t)\,\mathrm{d}t) \end{aligned} \tag{3.170}$$

où $\widehat{x}(t)$ est l'estimation de l'état $x(t)$ et K_0 et K_i sont des gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \tag{3.171}$$

converge exponentiellement presque sûrement.

Si on pose $r < n$, alors on suppose qu'il existe une fonction $\overline{\ell}(z)$ telle que (voir (3.41))

$$\ell(x(t)) = \overline{\ell}(Lx(t)) = \overline{\ell}(z(t)) \tag{3.172}$$

et un observateur robuste d'ordre réduit pour le système (3.134) est formulé comme suit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(t) = &\left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right)\eta(t) + (L - EC)\overline{\ell}(\eta(t))\right)\mathrm{d}t \\ &+ \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i\right) y(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.173a}$$

$$\widehat{z}(t) = \eta(t) + Ey(t) \tag{3.173b}$$

où $\widehat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de $z(t)$. E, M_i et N_i $(i = 0, \ldots, m)$ sont des matrices de gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e_r(t) = z(t) - \widehat{z}(t) = \Psi x(t) - \eta(t) \tag{3.174}$$

converge exponentiellement presque sûrement avec

$$\Psi = L - EC. \tag{3.175}$$

La dynamique de l'erreur d'observation $e(t)$ (3.171) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e(t) = &\left(\left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_i C)u_i(t)\right)e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t) - e(t))\right)\mathrm{d}t \\ &+ (\Delta A_{t_0}(t) + \sum_{i=1}^{m} \Delta A_{t_i}(t) u_i(t))x(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d}(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_x(t) \end{aligned} \tag{3.176}$$

tandis que celle de l'erreur d'estimation $e_r(t)$ (3.174) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_r(t) = &\left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right)e_r(t) + \Psi(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(\Psi x(t) - e_r(t)))\right. \\ &\left. + (\Psi(A_{t_0} + \Delta A_{t_0}(t)) - M_0\Psi - N_0 C)x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)(\Psi(A_{t_i} + \Delta A_{t_i}(t)) - M_i\Psi - N_i C)x(t)\right)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{j=1}^{d} \Psi(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_x(t). \end{aligned} \tag{3.177}$$

Pour appliquer le théorème 2.5.1 sur les EDS (3.135a) et (3.176), l'hypothèse 2.2.1 est remplacée par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.135a) et l'EDO (2.43) par

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m}(A_{t_i} - K_i C)u_i(t)\right)\overline{e}(t) - \ell(-\overline{e}(t)). \tag{3.178}$$

Les EDO (3.146) et (3.178) sont identiques. Ainsi, la synthèse d'un observateur robuste d'ordre plein avec des mesures déterministes est donnée dans le théorème 3.5.1 en remplaçant

l'expression "*L'EDS (3.139) est un observateur robuste d'ordre plein pour le système (3.134)*" par "*L'EDS (3.170) est un observateur robuste d'ordre plein pour le système (3.135)*".

Pour l'observateur d'ordre réduit, les contraintes de Sylvester suivantes

$$\Psi A_{t_i} - M_i \Psi - N_i C = 0, \qquad i = 0, \ldots, m, \tag{3.179}$$

sont introduites afin de supprimer un maximum de termes dépendant de l'état $x(t)$ dans l'EDS (3.177).

Afin d'appliquer le théorème 2.6.1 sur les EDS (3.135a) et (3.177), l'hypothèse 2.2.1 est remplacée par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.135a) et l'EDO (2.54) par

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i \right) \overline{e}_r(t) - \Psi \overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)). \tag{3.180}$$

Les EDO (3.148) et (3.180) sont identiques à l'exception de la matrice L qui a été remplacée par $\Psi = L - EC$. En réalité, l'EDO (3.148) est la même que l'EDO (3.72). Ainsi, en utilisant le théorème 3.3.3, la synthèse d'un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit avec des mesures déterministes est donnée dans le théorème 3.5.2 en remplaçant

- l'expression "*L'EDS (3.142) est un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit pour le système (3.134)*" par "*L'EDS (3.173) est un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit pour le système (3.135)*",
- la condition (3.53) par la condition (3.78),
- la LMI (3.168) par (3.82) où μ_8 et μ_9 dans (3.168) correspondent respectivement à μ_5 et μ_6 dans (3.82),
- l'expression "*Les matrices M_i et N_i de l'observateur sont obtenues avec (3.51) et (3.54).*" par "*Les matrices M_i, N_i et E de l'observateur sont obtenues avec (3.75) et (3.79).*"

Remarque 3.5.1. Si on pose $E = 0$ dans l'observateur fonctionnel d'ordre réduit (3.173), alors la synthèse d'un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit avec des mesures déterministes est donnée dans le théorème 3.5.2 en remplaçant l'expression "*L'EDS (3.142) est un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit pour le système (3.134)*" par "*L'EDS (3.173) est un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit pour le système (3.135)*" (voir remarque 3.3.4). □

3.5.3.2 Avec compensation partielle des incertitudes

L'idée est d'utiliser la matrice Ψ, c'est-à-dire la matrice E, afin d'éliminer les termes en $\Delta A_{t_i}(t) x(t)\, \mathrm{d}t$ dans l'EDS décrivant la dynamique de l'erreur d'estimation. Il faut donc que la contrainte $\Psi F = 0$ dans cette EDS soit vérifiée (voir l'équation (3.136)). Cependant la contrainte $\Psi F = 0$ requiert que le rang de la matrice F soit strictement inférieur au nombre de lignes de la matrice F, c'est-à-dire à $(m+1+d)n$. De plus, la matrice F dans la relation (3.136) prend en compte des termes que l'on ne souhaite pas annuler : $\Delta A_{w_j}(t)$ avec $j = 1, \ldots, d$. C'est pourquoi il est judicieux de remplacer l'équation (3.136) par

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{t_0}(t) & \ldots & \Delta A_{t_m}(t) \end{bmatrix} = F_t \Delta_t(t) \begin{bmatrix} H_{A_{t_0}} & \ldots & H_{A_{t_m}} \end{bmatrix} \tag{3.181a}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{w_1}(t) & \ldots & \Delta A_{w_d}(t) \end{bmatrix} = F_w \Delta_w(t) \begin{bmatrix} H_{A_{w_1}} & \ldots & H_{A_{w_d}} \end{bmatrix} \tag{3.181b}$$

où $\Delta_t(t) \in \mathbb{R}^{a_t \times b_t}$ et $\Delta_w(t) \in \mathbb{R}^{a_w \times b_w}$ sont des matrices inconnues dont les éléments sont Lebesgue mesurables et satisfont

$$\Delta_t(t) \Delta_t^T(t) \leqslant I_{a_t} \qquad \text{et} \qquad \Delta_w(t) \Delta_w^T(t) \leqslant I_{a_w}, \tag{3.182}$$

et où F_t, F_w, $H_{A_{t_0}}, \ldots, H_{A_{t_m}}$ et $H_{A_{w_1}}, \ldots, H_{A_{w_d}}$ sont des matrices constantes données avec des dimensions appropriées. Ainsi, la contrainte $\Psi F = 0$ est remplacée par $\Psi F_t = 0$.

Les propriétés de la matrice L et des fonctions non linéaires $\ell(x(t))$ et $\overline{\ell}(Lx(t))$ sont rappelées dans les sections 3.5.1 et 3.5.2.1.

L'observateur robuste d'ordre plein (3.170) est remplacé par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta_f(t) = &\left(\left(M_{f_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_{f_i}\right)\eta(t) + (I_n - E_f C)\ell(\eta_f(t))\right)\mathrm{d}t \\ &+ \left(N_{f_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_{f_i}\right) y(t)\,\mathrm{d}t \qquad (3.183a) \\ \widehat{x}(t) = &\,\eta_f(t) + E_f y(t) \qquad (3.183b) \end{aligned}$$

où $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation de l'état $x(t)$. E_f, M_{f_i} et N_{f_i} $(i = 0, \ldots, m)$ sont des matrices de gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) = \Psi_f x(t) - \eta_f(t) \qquad (3.184)$$

converge exponentiellement presque sûrement avec

$$\Psi_f = I_n - E_f C. \qquad (3.185)$$

L'observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit (3.173) est remplacé par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(t) = &\left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right)\eta(t) + (L - EC)\overline{\ell}(\eta(t))\right)\mathrm{d}t \\ &+ \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i\right) y(t)\,\mathrm{d}t \qquad (3.186a) \\ \widehat{z}(t) = &\,\eta(t) + E y(t) \qquad (3.186b) \end{aligned}$$

où $\widehat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'estimé de $z(t)$ avec $r < n$. E, M_i et N_i $(i = 0, \ldots, m)$ sont des matrices de gains à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e_r(t) = z(t) - \widehat{z}(t) = \Psi_r x(t) - \eta(t) \qquad (3.187)$$

converge exponentiellement presque sûrement avec

$$\Psi_r = L - EC. \qquad (3.188)$$

La dynamique de l'erreur d'observation $e(t)$ (3.184) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e(t) = &\left(\left(M_{f_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_{f_i}\right) e(t) + \Psi_f(\ell(x(t)) - \ell(\Psi_f x(t) - e(t)))\right. \\ &\left. + (\Psi_f(A_{t_0} + \Delta A_{t_0(t)}) - M_{f_0}\Psi_f - N_{f_0} C)x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)(\Psi_f(A_{t_i} + \Delta A_{t_i}(t)) - M_{f_i}\Psi_f - N_{f_i} C)x(t)\right)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{j=1}^{d} \Psi_f(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_x(t) \qquad (3.189) \end{aligned}$$

tandis que celle de l'erreur d'estimation $e_r(t)$ (3.187) est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e_r(t) = \Bigg(\Bigg(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\Bigg) e_r(t) + \Psi_r(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(\Psi_r x(t) - e_r(t))) \\ +(\Psi_r(A_{t_0} + \Delta A_{t_0(t)}) - M_0\Psi_r - N_0 C)x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)(\Psi_r(A_{t_i} + \Delta A_{t_i(t)}) - M_i\Psi_r - N_i C)x(t)\Bigg)\,\mathrm{d}t \\ + \sum_{j=1}^{d} \Psi_r(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_x(t). \quad (3.190)\end{aligned}$$

Si on définit la matrice J_{f_i} suivante

$$J_{f_i} = N_{f_i} - M_{f_i} E_f, \qquad i = 0, \ldots, m, \quad (3.191)$$

et si on pose

$$M_{f_i} = \Psi_f A_{t_i} - J_{f_i} C, \qquad i = 0, \ldots, m, \quad (3.192)$$

alors les équations de Sylvester suivantes

$$\Psi_f A_{t_i} - M_{f_i}\Psi_f - N_{f_i} C = 0, \qquad i = 0, \ldots, m, \quad (3.193)$$

sont vérifiées et la dynamique de l'erreur d'observation $e(t)$ (3.189) se simplifie comme suit

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e(t) = \Bigg(\Bigg(M_{f_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_{f_i}\Bigg) e(t) + \Psi_f(\ell(x(t)) - \ell(\Psi_f x(t) - e(t))) \\ +\Psi_f \Delta A_{t_0}(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\Psi_f \Delta A_{t_i}(t)x(t)\Bigg)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} \Psi_f(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_x(t). \quad (3.194)\end{aligned}$$

Avec la contrainte

$$\Psi_f F_t = 0, \quad (3.195)$$

la relation (3.194) devient (voir (3.181))

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e(t) = \Bigg(\Bigg(M_{f_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_{f_i}\Bigg) e(t) + \Psi_f(\ell(x(t)) - \ell(\Psi_f x(t) - e(t)))\Bigg)\,\mathrm{d}t \\ + \sum_{j=1}^{d} \Psi_f(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_x(t). \quad (3.196)\end{aligned}$$

et la dérive dans la relation (3.196) ne contient pas de termes incertains.

L'équation $F_t = E_f C F_t$ (3.195) a une solution E_f si et seulement si (voir équation (A.2.11) avec $A = I$)

$$\mathrm{rang}(CF_t) = \mathrm{rang}\left(\begin{bmatrix} F_t \\ CF_t \end{bmatrix}\right) \quad (3.197)$$

et la solution générale est donnée par (voir équation (A.2.9) avec $A = I$)

$$E_f = F_t(CF_t)^\dagger + W_f(I_p - (CF_t)(CF_t)^\dagger) \quad (3.198)$$

où $W_f \in \mathbb{R}^{n\times p}$ est une matrice arbitraire.

Si on introduit la relation (3.198) dans l'équation (3.192), alors les matrices M_{f_i} sont données par

$$M_{f_i} = (I_n - F_t(CF_t)^\dagger)A_{t_i} - \begin{bmatrix} W_f & J_{f_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_p - (CF_t)(CF_t)^\dagger)CA_{t_i} \\ C \end{bmatrix}, \qquad i = 0, \ldots, m. \quad (3.199)$$

Pour appliquer le théorème 2.5.1 sur les EDS (3.135a) et (3.196), l'hypothèse 2.2.1 est remplacée par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.135a) et l'EDO (2.43) par

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(M_{f_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_{f_i} \right) \overline{e}(t) - \Psi_f \ell(-\overline{e}(t)) \quad (3.200)$$

où les matrices M_{f_i} sont calculées dans (3.199).

En utilisant les notations introduites dans les équations (3.13) à (3.17), l'EDO (3.200) se réécrit ainsi

$$\dot{\overline{e}}(t) = (\mathbb{A}_f - \mathcal{Z}_f\mathbb{C}_f + (\mathbb{B}_f - \mathcal{Z}_f\mathbb{D}_f)\Delta_n(\varepsilon(t))H_2)\overline{e}(t) - (I_n - (A_{Z_f} + \mathcal{Z}_f C_{Z_f})C)\ell(-\overline{e}(t)) \quad (3.201)$$

avec

$$\mathbb{A}_f = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \widetilde{A}_{t_i},\ \mathbb{B}_f = \begin{bmatrix} \sigma_1 \widetilde{A}_{t_1} & \ldots & \sigma_m \widetilde{A}_{t_m} \end{bmatrix},\ \mathcal{Z}_f = \begin{bmatrix} W_f & J_{f_0} & \ldots & J_{f_m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{C}_f = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \widetilde{C} A_{t_i} \\ \alpha_0 C \\ \vdots \\ \alpha_m C \end{bmatrix},\ \mathbb{D}_f = \begin{bmatrix} \sigma_1 \widetilde{C} A_{t_1} & \ldots & \sigma_m \widetilde{C} A_{t_m} \\ \sigma_1 C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m C \end{bmatrix},\ C_{Z_f} = \begin{bmatrix} \widetilde{C} \\ 0_{(m+1)p\times n} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{t_i} = (I_n - F_t(CF_t)^\dagger)A_{t_i},\ \widetilde{C} = (I_p - (CF_t)(CF_t)^\dagger)C,\ A_{Z_f} = (I_n - F_t(CF_t)^\dagger).$$

Avec la contrainte

$$\Psi_r F_t = 0, \quad (3.202)$$

et les contraintes de Sylvester

$$\Psi_r A_{t_i} - M_i \Psi_r - N_i C = 0, \qquad i = 0, \ldots, m, \quad (3.203)$$

la relation (3.190) devient (voir (3.181))

$$\mathrm{d}e_r(t) = \left(\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i \right) e_r(t) + \Psi_r(\overline{\ell}(Lx(t)) - \overline{\ell}(\Psi_r x(t) - e_r(t))) \right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} \Psi_r(A_{w_j} + \Delta A_{w_j}(t))x(t)\,\mathrm{d}w_x(t). \quad (3.204)$$

Soit $L^\dagger$ une pseudo-inverse de la matrice L (voir la section A.2), on a donc

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} L^\dagger & (I_n - L^\dagger L) \end{bmatrix} \right) = n$$

et les conditions de Sylvester (3.203) sont équivalentes à

$$(\Psi_r A_{t_i} - M_i\Psi_r - N_i C)\begin{bmatrix} L^\dagger & (I_n - L^\dagger L)\end{bmatrix} = 0 \qquad i = 0,\ldots,m. \tag{3.205}$$

Puisque la matrice L est de rang plein lignes avec $r < n$ (voir (3.5)), on a $LL^\dagger = I_r$. En utilisant l'approche développée dans [Dar00a, SZRD06] et la définition de la matrice Ψ_r, l'équation (3.205) est équivalente à

$$0 = \Psi_r A_{t_i} L^\dagger - M_i\Psi_r L^\dagger - N_i C L^\dagger, \qquad i = 0,\ldots,m, \tag{3.206a}$$
$$0 = \Psi_r \overline{A}_{t_i} + M_i E\overline{C} - N_i\overline{C}, \qquad i = 0,\ldots,m, \tag{3.206b}$$

avec

$$\overline{A}_{t_i} = A_{t_i}(I_n - L^\dagger L), \qquad i = 0,\ldots,m,$$
$$\overline{C} = C(I_n - L^\dagger L).$$

Avec la définition de Ψ_r et la relation (3.74a), les matrices M_i sont données par

$$M_i = \overline{\overline{A}}_{t_i} - \mathcal{J}_i\overline{\overline{C}}_i, \qquad i = 0,\ldots,m, \tag{3.207}$$

avec, pour $i = 0,\ldots,m$,

$$\overline{\overline{A}}_{t_i} = LA_{t_i}L^\dagger, \qquad \overline{\overline{C}}_i = \begin{bmatrix} CA_{t_i}L^\dagger \\ CL^\dagger\end{bmatrix}, \qquad \mathcal{J}_i = \begin{bmatrix} E & J_i\end{bmatrix}, \qquad J_i = N_i - M_i E. \tag{3.208}$$

Avec les matrices définies dans les équations (3.207) et (3.208), la relation (3.206b) avec la contrainte (3.202) s'écrivent sous la forme compacte suivante

$$\mathcal{J}_r\mathcal{G}_r = L\mathcal{A}_r \tag{3.209}$$

où

$$\mathcal{A}_r = \begin{bmatrix} F_t & A_{t_0}(I_n - L^\dagger L) & \ldots & A_{t_m}(I_n - L^\dagger L)\end{bmatrix}, \qquad \mathcal{J}_r = \begin{bmatrix} E & J_0 & \ldots & J_m\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{G}_r = \begin{bmatrix} CF_t & CA_{t_0}(I_n - L^\dagger L) & \ldots & CA_{t_m}(I_n - L^\dagger L) \\ 0 & C(I_n - L^\dagger L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(I_n - L^\dagger L)\end{bmatrix}.$$

L'équation (3.209) a une solution $\mathcal{J}_r$ si et seulement si (voir équation (A.2.11) avec $A = I$ et remarque 3.5.3)

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LF_t & LA_{t_0} & \ldots & LA_{t_m} \\ CF_t & CA_{t_0} & \ldots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L\end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} CF_t & CA_{t_0} & \ldots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L\end{bmatrix}\right) \tag{3.210}$$

et la solution générale est donnée par (voir équation (A.2.9) avec $A = I$)

$$\mathcal{J}_r = L\mathcal{A}_r\mathcal{G}_r^\dagger + \mathcal{Z}_r(I_{(m+2)p} - \mathcal{G}_r\mathcal{G}_r^\dagger) \tag{3.211}$$

où $\mathcal{Z}_r \in \mathbb{R}^{r\times(m+2)p}$ est une matrice arbitraire qu'on peut considérer comme "la matrice de gain de l'observateur".

La condition d'existence (3.210) est démontrée dans le lemme suivant.

Lemme 3.5.2. *[Dar00a, SZRD06] La condition (3.210) est nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution $\mathcal{J}_r$ à l'équation (3.209)*

Démonstration. La condition

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} L\mathcal{A}_r \\ \mathcal{G}_r \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}(\mathcal{G}_r) \tag{3.212}$$

est équivalente à l'existence d'une solution $\mathcal{J}_r$ à l'équation (3.209) (voir (A.2.11) avec $A = I$). L'équivalence entre les conditions (3.210) et (3.212) est démontrée dans [Dar00a, SZRD06]. •

Afin d'appliquer le théorème 2.6.1 sur les EDS (3.135a) et (3.204), l'hypothèse 2.2.1 est remplacée par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (3.135a) et l'EDO (2.54) par

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)M_i\right)\overline{e}_r(t) - \Psi_r\overline{\ell}(-\overline{e}_r(t)). \tag{3.213}$$

En utilisant les notations introduites dans les équations (3.13), (3.14) et (3.55) à (3.57), l'EDO (3.213) se réécrit ainsi

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = (\mathbb{A}_r - \mathcal{Z}_r\mathbb{C}_r + (\mathbb{B}_r - \mathcal{Z}_r\mathbb{D}_r)\Delta_r(\varepsilon(t))H_3)e_r(t) - (L - (A_{Z_r} + \mathcal{Z}_rC_{Z_r})C)\overline{\ell}(-e_r(t)) \tag{3.214}$$

avec

$$\mathbb{A}_r = \sum_{i=0}^m \alpha_i LA_{t_i}L^\dagger - L\mathcal{A}_r\mathcal{G}_r^\dagger \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m \alpha_i CA_{t_i}L^\dagger \\ \alpha_0 CL^\dagger \\ \vdots \\ \alpha_m CL^\dagger \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B}_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 LA_{t_1}L^\dagger & \dots & \sigma_m LA_{t_m}L^\dagger \end{bmatrix} - L\mathcal{A}_r\mathcal{G}_r^\dagger \begin{bmatrix} \sigma_1 CA_{t_1}L^\dagger & \dots & \sigma_m CA_{t_m}L^\dagger \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 CL^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m CL^\dagger \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{C}_r = (I_{(m+2)p} - \mathcal{G}_r\mathcal{G}_r^\dagger) \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m \alpha_i CA_{t_i}L^\dagger \\ \alpha_0 CL^\dagger \\ \vdots \\ \alpha_m CL^\dagger \end{bmatrix},\ \mathbb{D}_r = (I_{(m+2)p} - \mathcal{G}_r\mathcal{G}_r^\dagger) \begin{bmatrix} \sigma_1 CA_{t_1}L^\dagger & \dots & \sigma_m CA_{t_m}L^\dagger \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 CL^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m CL^\dagger \end{bmatrix},$$

$$A_{Z_r} = L\mathcal{A}_r\mathcal{G}_r^{\dagger}\begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(m+1)p\times p}\end{bmatrix},\ C_{Z_r} = (I_{(m+2)p} - \mathcal{G}_r\mathcal{G}_r^{\dagger})\begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(m+1)p\times p}\end{bmatrix}.$$

Puisque les EDO (3.201) et (3.214) ont la "même structure" que l'EDO (3.81), on peut énoncer, sans démonstration, les deux théorèmes suivants pour la synthèse des observateurs robustes d'ordres plein (3.183) et réduit (3.186) en s'appuyant sur le lemme 3.5.1 et sur le théorème 3.3.3.

Théorème 3.5.3. *On suppose que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.197) sont vérifiées. Le système (3.183) est un observateur robuste d'ordre plein pour le système (3.135) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage et vérifiant la contrainte (3.195) s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ et $\mathcal{R}_f$ et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$, $\mu_5 > 0$, $\mu_6 > 0$, $\mu_7 > 0$ et $\beta \geqslant 0$ tels que les LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix}
(1,1)_a & \sigma_1 PA_{t_1} & \dots & \sigma_m PA_{t_m} & \sigma_1 PF & \dots & \sigma_m PF & P & PF & A_{w_1}^T P & \dots & A_{w_d}^T P & 0 \\
(1,2)^T & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(1,m+1)^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1,m+2)^T & 0 & \dots & 0 & -\mu_1 I_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(1,2m+1)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 I_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-I_a}{\alpha\mu_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
PA_{w_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & 0 & PF \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
PA_{w_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & PF \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F^T P & \dots & F^T P & \dfrac{-I_a}{\mu_4}
\end{bmatrix} < 0, \tag{3.215}$$

$$\begin{bmatrix}
(Q\mathbb{A}_f - \mathcal{R}_f\mathbb{C}_f) + (Q\mathbb{A}_f - \mathcal{R}_f\mathbb{C}_f)^T + \mu_5 I_n + \mu_6^{-1}\kappa^2 I_n + 2\beta Q & Q\mathbb{B}_f - \mathcal{R}_f\mathbb{D}_f & \star \\
(Q\mathbb{B}_f - \mathcal{R}_f\mathbb{D}_f)^T & -\mu_5 I_{mr} & 0 \\
(Q(I_n - A_{Z_f}C) - \mathcal{R}_f C_{Z_f} C)^T & 0 & \dfrac{-I_p}{\mu_6}
\end{bmatrix} < 0 \tag{3.216}$$

sont vérifiées, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^{d}\rho_j$, $\alpha = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i$ et $\alpha_0 = 1$, et où

$$(1,1)_a = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i(PA_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \mu_3^{-1}\sum_{i=0}^{m}\alpha_i H_{A_{t_i}}^T H_{A_{t_i}} + \mu_1\overline{H}_2^T\overline{H}_2 + \mu_2^{-1}\kappa^2 I_n + \mu_4^{-1}\sum_{j=1}^{d}H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} - \rho P,$$

et que, pour chaque $j = 1, \dots, d$, l'une des deux LMI suivantes

$$\begin{bmatrix} A_{w_j}^T P + PA_{w_j} + \mu_5^{-1}H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j}P & PF \\ F^T P & \dfrac{-I_a}{\mu_5}\end{bmatrix} < 0, \tag{3.217}$$

$$\begin{bmatrix} -(A_{w_j}^T P + P A_{w_j}) + \mu_5^{-1} H_{A_{w_j}}^T H_{A_{w_j}} + \sqrt{2\rho_j} P & PF \\ F^T P & \dfrac{-I_a}{\mu_5} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.218}$$

est satisfaite.

Le gain $\mathcal{Z}_f$ est alors donné par $\mathcal{Z}_f = Q^{-1}\mathcal{R}_f$. Les matrices M_{f_i}, N_{f_i} et E_f de l'observateur sont obtenues avec (3.191), (3.198) et (3.199) où

$$\mathcal{Z}_f = \begin{bmatrix} W_f & J_{f_0} & \dots & J_{f_m} \end{bmatrix}.$$

Théorème 3.5.4. *On suppose que l'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.210) sont satisfaites. L'EDS (3.142) est un observateur fonctionnel robuste d'ordre réduit pour le système (3.135) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage et vérifiant la contrainte (3.202) s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ et $\mathcal{R}_r$ et des réels $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$, $\mu_5 > 0$, $\mu_8 > 0$, $\mu_9 > 0$, $\beta_r \geqslant 0$ tels que les LMI (3.215) et*

$$\begin{bmatrix} (Q\mathbb{A}_r - \mathcal{R}_r\mathbb{C}_r) + (Q\mathbb{A}_r - \mathcal{R}_r\mathbb{C}_r)^T + \mu_5 I_r + \mu_6^{-1}\kappa^2 I_r + 2\beta_r Q & Q\mathbb{B}_r - \mathcal{R}_r\mathbb{D}_r & \star \\ (Q\mathbb{B}_r - \mathcal{R}_r\mathbb{D}_r)^T & -\mu_5 I_{mr} & 0 \\ (Q(L - A_{Z_r}C) - \mathcal{R}_r C_{Z_r} C)^T & 0 & \dfrac{-I_p}{\mu_6} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.219}$$

sont vérifiées, où $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, d)$ sont des réels donnés avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$, $\alpha = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i$ et $\alpha_0 = 1$, et que, pour chaque $j = 1, \dots, d$, l'une des deux LMI (3.217) ou (3.218) soit satisfaite.

Le gain $\mathcal{Z}_r$ est alors donné par $\mathcal{Z}_r = Q^{-1}\mathcal{R}_r$. Les matrices M_i, N_i et E de l'observateur sont obtenues avec (3.207), (3.208) et (3.211).

Remarque 3.5.2. Dans les théorèmes 3.5.3 et 3.5.4, deux expressions sont utilisées pour décrire les incertitudes. Pour analyser la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.135a), c'est-à-dire les LMI (3.215), (3.217) et (3.218), c'est avec la relation (3.136) que sont décrites les incertitudes paramétriques, tandis que, pour analyser la stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (3.201) ou de l'EDO (3.214), c'est-à-dire la LMI (3.216) ou la LMI (3.219), les incertitudes paramétriques sont décrites avec (3.181) afin de calculer Ψ_f ou Ψ pour compenser partiellement l'effet de ces incertitudes sur la dynamique l'erreur d'observation $e(t)$ ou $e_r(t)$. Il faut noter que les mêmes incertitudes paramétriques peuvent être décrites indifféramment par (3.136) ou par (3.181), le choix entre ces deux formulations dépendant du contexte. □

Remarque 3.5.3. Dans ce chapitre, il y a trois types de contraintes de Sylvester :

- l'équation (3.46) pour le cas où $E = 0$ *(cas des mesures stochastiques pour l'observateur d'ordre réduit (sans ou avec incertitudes paramétriques) et cas des mesures déterministes pour l'observateur d'ordre réduit dans les remarques 3.3.4 et 3.5.1 (sans incertitudes paramétriques ou avec incertitudes paramétriques et sans compensation partielle de ces incertitudes))*

$$LA_{t_i} - M_i L - N_i C = 0, \qquad i = 0, \dots, m, \tag{3.46}$$

et la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution est la relation (3.53)

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right), \tag{3.53}$$

- l'équation (3.69) pour le cas où il n'y a pas de contrainte supplémentaire sur la matrice E *(cas des mesures déterministes pour l'observateur d'ordre réduit (sans incertitudes paramétriques ou avec incertitudes paramétriques et sans compensation partielle de ces incertitudes))*

$$\Psi A_{t_i} - M_i\Psi - N_iC = 0, \qquad i = 0, \dots, m, \tag{3.69}$$

et la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution est la relation (3.78)

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right), \tag{3.78}$$

- l'équation (3.203) pour le cas où E est sujette à la contrainte (3.202) *(cas des mesures déterministes pour l'observateur d'ordre réduit avec incertitudes paramétriques et avec compensation partielle de ces incertitudes)*

$$\Psi_r A_{t_i} - M_i\Psi_r - N_iC = 0, \qquad i = 0, \dots, m, \tag{3.203}$$

$$\Psi_r F_t = 0, \tag{3.202}$$

et la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution est la relation (3.210)

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LF_t & LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ CF_t & CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} CF_t & CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) \tag{3.210}$$

avec $\Psi = \Psi_r = L - EC$.

Puisque $E = 0$ est un cas particulier de E quelconque, la condition (3.53) implique la condition (3.78), mais la réciproque est fausse. En effet, puisqu'il existe deux matrices carrées Υ_1 et Υ_2, de dimensions appropriées, avec $\det(\Upsilon_1) \neq 0$ et $\det(\Upsilon_2) \neq 0$, telles que

$$\Upsilon_1 \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on a donc les relations de rang suivantes

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon_1 \end{bmatrix}} \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \Upsilon_2\right)$$

$$= \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \Upsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \Upsilon_2\right)$$

$$= \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \Phi_3 & \Phi_4 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \Upsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ C & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \Upsilon_2\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Il s'en suit que la condition (3.78) est équivalente à

$$\operatorname{rang}(\Phi_4) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}\right), \tag{3.220}$$

tandis que la condition (3.53) est équivalente à

$$\Phi_2 = 0. \tag{3.221}$$

Si la condition (3.221) est vérifiée, alors la condition (3.220) est satisfaite, mais la réciproque est fausse.

Puisque rajouter la contrainte (3.202) sur la matrice E est un cas particulier de E quelconque, la condition (3.210) implique la condition (3.78), mais la réciproque est fausse. En effet, pour que la condition (3.210) soit satisfaite, il est nécessaire que les matrices constituées par les colonnes $n+1$ à $(m+1)n$ des deux matrices intervenant dans la condition (3.210) aient un rang identique, c'est-à-dire que la condition (3.78) soit satisfaite.

Pour illustrer la façon de démontrer les conditions (3.53), (3.78) et (3.210), on va démontrer la condition (3.210) (il suffit de supprimer des termes dans cette condition pour obtenir les deux autres) en suivant la démarche utilisée dans [Dar00a] pour $i = 0$ et dans [SZRD06] pour $i = 0, \dots, m$ avec une contrainte sur E différente de $\Psi F = 0$.

On a

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LF_t & LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ CF_t & CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LF_t & LA_{t_0} & \dots & LA_{t_m} \\ CF_t & CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{a_t} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L^\dagger & 0 & 0 & I_n - L^\dagger L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^\dagger & 0 & 0 & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} LF_t & LA_{t_0}L^\dagger & \dots & LA_{t_m}L^\dagger & LA_{t_0}(I_n - L^\dagger L) & \dots & LA_{t_m}(I_n - L^\dagger L) \\ CF_t & CA_{t_0}L^\dagger & \dots & CA_{t_m}L^\dagger & CA_{t_0}(I_n - L^\dagger L) & \dots & CA_{t_m}(I_n - L^\dagger L) \\ 0 & CL^\dagger & 0 & 0 & C(I_n - L^\dagger L) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & CL^\dagger & 0 & 0 & C(I_n - L^\dagger L) \\ 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (m+1)r + \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} L\mathcal{A}_r \\ \mathcal{G}_r \end{bmatrix}\right)$$

et

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} CF_t & CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{rang}\left(\begin{bmatrix} CF_t & CA_{t_0} & \dots & CA_{t_m} \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{a_t} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L^\dagger & 0 & 0 & I_n - L^\dagger L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^\dagger & 0 & 0 & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{rang}\left(\begin{bmatrix} CF_t & CA_{t_0}L^\dagger & \dots & CA_{t_m}L^\dagger & CA_{t_0}(I_n - L^\dagger L) & \dots & CA_{t_m}(I_n - L^\dagger L) \\ 0 & CL^\dagger & 0 & 0 & C(I_n - L^\dagger L) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & CL^\dagger & 0 & 0 & C(I_n - L^\dagger L) \\ 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (m+1)r + \text{rang}(\mathcal{G}_r).$$

Ainsi, comme le stipule le lemme 3.5.2, les conditions (3.210) et (3.212) sont équivalentes. □

3.5.4 Exemple

Pour illustrer les développements ci-dessus sur l'observation robuste des systèmes stochastiques, on considère le système stochastique incertain décrit par (3.134), (3.136) et (3.137) avec $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$, $d = 1$, $h = 1$, $r = 1$ et les matrices suivantes

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -1.51 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.51 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.51 \end{bmatrix},\ A_{t_1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.02 & 0.04 \\ 0 & 0.01 & -0.02 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix},\ A_{t_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_w = \begin{bmatrix} -3.5657 & -0.10952 & -0.47238 \\ 0.46643 & -4.041 & -0.80024 \\ -0.1 & 0.066667 & -3.4933 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_{A_{t_0}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, H_{A_{t_1}} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & -0.01 \\ -0.02 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix},\ H_{A_{t_2}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$H_{A_w} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

La fonction non linéaire $\ell(x(t))$ est donnée par

$$\ell(x(t)) = \overline{\ell}(Lx(t)) = \begin{bmatrix} \sin(Lx(t)) \\ \sin(Lx(t)) \\ \sin(Lx(t)) \end{bmatrix}$$

et vérifie la contrainte $\ell(0) = 0$ (voir (3.4)) et la condition de Lipschitz (3.6) avec $\kappa = 1$.

Les entrées admissibles $u(t)$ sont bornées et appartiennent à l'ensemble Ω donné par (3.3) avec

$$u_{1,\min} = -0.7,\ u_{1,\max} = 0.8,\ u_{2,\min} = -0.7,\ u_{2,\max} = 0.8.$$

On va synthétiser un observateur d'ordre réduit donné par (3.142) en appliquant le théorème 3.5.2.

L'hypothèse 2.3.1 et la condition (3.53) sont satisfaites.

En choisissant

$$\mu_1 = 3.5,\ \mu_2 = 3.5,\ \mu_3 = 0.1,\ \mu_4 = 6,\ \mu_5 = 5,\ \mu_8 = 0.1,\ \mu_9 = 0.1,\ \rho = 20,\ \text{et } \beta_r = 2.175,$$

les LMI (3.164), (3.166) et (3.168) dans le théorème 3.5.2 ont généré les résultats suivants

$$P = \begin{bmatrix} 1.0972 & -0.31295 & -0.18997 \\ -0.31295 & 0.95065 & 0.03919 \\ -0.18997 & 0.03919 & 2.3615 \end{bmatrix},\ Q = 10.076,$$
$$R = \begin{bmatrix} 88.781 & 44.391 & 121.86 & 0 & -165.03 & -66.013 \end{bmatrix}.$$

Le gain $Z = Q^{-1}R$ est donné par

$$Z = \begin{bmatrix} 8.8113 & 4.4056 & 12.094 & 0 & -16.379 & -6.5516 \end{bmatrix}.$$

Les matrices M_0, M_1, M_2, N_0, N_1 et N_2 du filtre d'ordre réduit (3.142) sont données par (voir (3.51) et (3.54))

$$M_0 = -3.21,\ M_1 = 0.025,\ M_2 = -0.015,$$
$$N_0 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.6 \end{bmatrix},\ N_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 \end{bmatrix},\ N_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.01 \end{bmatrix}.$$

Les simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes

$$x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},\ \widehat{z}_0 = 0.5$$

et en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama avec un pas d'échantillonnage $\mathrm{d}t = 0.001$ seconde (voir (1.32)).

Les simulations sont illustrées dans les figures 3.23 et 3.24.

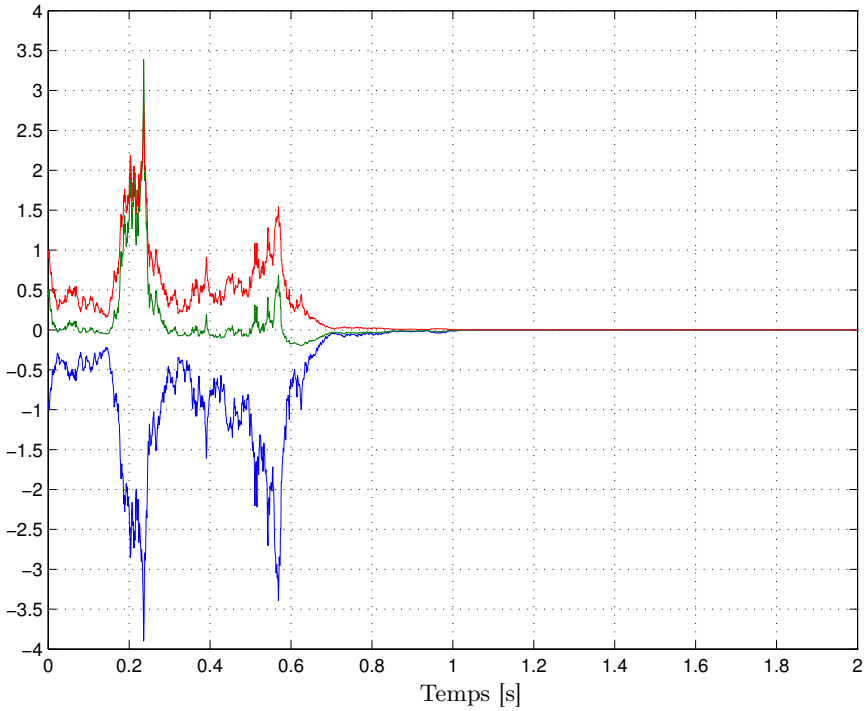


FIGURE 3.23 – Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert) et état $x_3(t)$ (rouge).

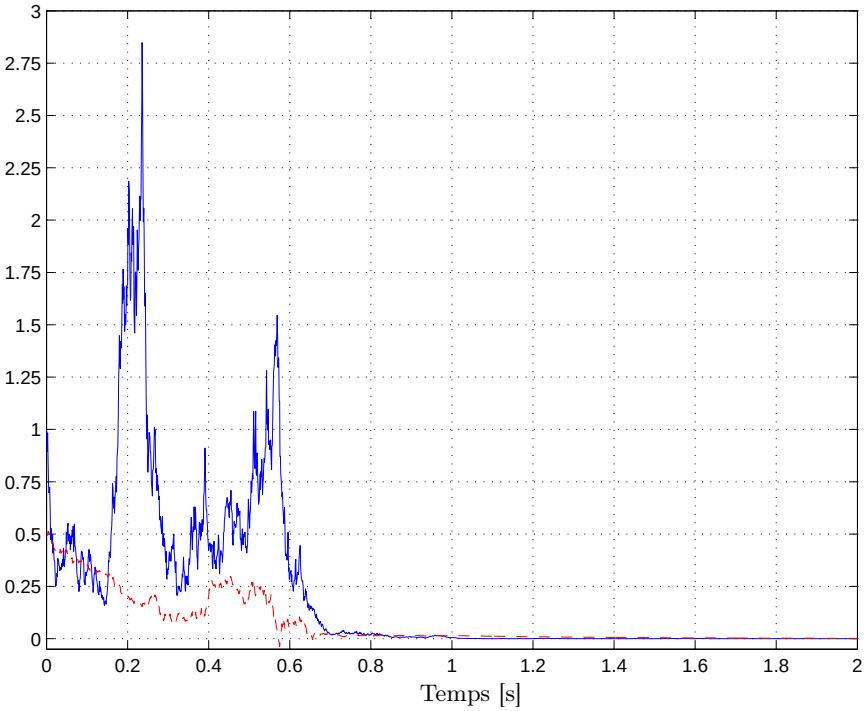


FIGURE 3.24 – Fonctionnelle $z(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{z}(t)$ (rouge, discontinu).

Dans la figure 3.23, on constate que la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (3.134a) a bien été garantie par les LMI (3.164) et (3.166) malgré la présence d'incertitudes paramétriques.

La convergence de l'estimation $\widehat{z}(t)$ vers la fonctionnelle $z(t)$ est illustrée dans la figure 3.24.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème du filtrage pour une classe de systèmes stochastiques non linéaires a été résolu lorsque la dérive de l'EDS de ces systèmes est constituée par une partie bilinéaire états-commandes à laquelle est ajoutée une fonction non linéaire $\ell(x(t))$. Le type de stabilité utilisé pour le point d'équilibre de l'erreur d'estimation est la stabilité exponentielle presque sûre. Deux cas sont considérés : la fonction $\ell(x(t))$ est Lipschitz ou one-sided Lipschitz. Deux configuration des mesures ont été prises en compte : des mesures déterministes et des mesures stochastiques.

Des observateurs d'ordre plein et des filtres fonctionnels d'ordre réduit ont été synthétisés lorsque les entrées de commande sont traitées comme des pseudo-incertitudes bornées en norme. Cette approche a été étendue au cas où les coefficients des matrices intervenant dans la dérive et dans la diffusion de l'EDS du système à observer sont entachés par des incertitudes paramétriques non structurées et bornées en norme. Dans le cas où les mesures sont déterministes, deux cas ont été considérés : pas de compensation partielle des incertitudes (ces dernières affectent la dérive de l'EDS décrivant la dynamique de l'erreur de filtrage) et compensation partielle des incertitudes (ces dernières n'affectent pas la dérive de l'EDS décrivant la dynamique de l'erreur de filtrage).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions des différentes équations de Sylvester intervenant dans la synthèse des filtres fonctionnels d'ordre réduit, ainsi que le paramétrage de leurs solutions, sont donnés.

Une approche basée sur la structure polytopique de l'ensemble des entrées de commande admissibles est développée. Elle est basée sur une reformulation de type descripteur ou pseudo-singulier des équations décrivant les dynamiques de l'état du système et de l'erreur d'observation. Ce formalisme a permis d'utiliser des fonctions de Lyapunov dépendant des entrées de commande. Afin de préserver la convexité, les produits entre les éléments du vecteur des entrées lorsque la formule d'Itô est appliquée ont été évités en introduisant une matrice instrumentale dans chacune des fonctions de Lyapunov utilisées.

Chapitre 4

Stabilité et stabilisation des systèmes stochastiques

Sommaire

4.1 Introduction 154
4.2 Rejet exponentiel des perturbations avec un taux de décroissance garanti 155
4.2.1 Position du problème 155
4.2.2 Conditions suffisantes pour le rejet exponentiel des perturbations 156
4.2.3 Application aux fonctions de Lyapunov quadratiques 159
4.2.4 Exemple 160
4.3 Commande bang-bang des systèmes stochastiques 163
4.3.1 Introduction à la commande bang-bang 163
4.3.2 Commande bang-bang par retour d'état 164
4.3.3 Commande bang-bang basée sur un observateur 167
4.3.4 Algorithme pour la détermination des coefficients α_i 171
4.3.5 Exemple 173
4.3.5.1 Commande bang-bang par retour d'état 173
4.3.5.2 Commande bang-bang par retour d'état basé sur un observateur 175
4.4 Conclusion 180

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la stabilité et à la stabilisation des systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs. Comme dans les chapitres 2 et 3, le type de stabilité étudié est la stabilité exponentielle presque sûre. Deux problèmes de stabilité et de stabilisation sont abordés :

- le rejet exponentiel des perturbations avec un taux de décroissance garanti (section 4.2),
- la stabilisation des systèmes stochastiques via une commande bang-bang (section 4.3).

Le premier de ces deux problèmes peut être vu comme l'étude de la stabilité exponentielle presque sûre d'une solution non triviale d'une EDS car, si la solution d'une EDS est affectée par perturbation exogène, alors le point d'équilibre peut ne pas être $x(t) = 0$. En s'appuyant sur une idée originale de Mao dans [Mao97] (p.141), on se propose d'étendre la définition de la stabilité exponentielle presque sûre de l'origine au cas où la solution de l'EDS est non triviale, c'est-à-dire différente de zéro. La stabilité presque sûre [1] de la solution non triviale d'une EDS est étudiée dans [Liu97, LM98, CGR03, LD11].

Dans la section 4.2, le problème de la stabilité de la solution non triviale d'une EDS est traitée comme un problème de rejet de perturbations avec un taux de décroissance exponentielle garanti. Après avoir posé le problème dans la section 4.2.1, une approche de type Lyapunov est proposée dans la section 4.2.2 afin d'obtenir des conditions suffisantes pour assurer la convergence exponentielle presque sûre vers zéro, avec un taux de décroissance garanti, de la solution de l'EDS en présence de perturbations additives sur la dérive. Dans la section 4.2.3, les conditions proposées dans la section 4.2.2 sont appliquées au cas où la fonction de Lyapunov est quadratique. Le choix de cette classe de fonctions de Lyapunov s'appuie sur le fait que les fonctions Lyapunov quadratiques permettent d'obtenir des algorithmes de synthèse pour les correcteurs et les observateurs qui sont aisés à mettre en œuvre d'un point de vue numérique. Dans la section 4.2.4, un exemple permet d'illustrer les développements effectués dans la section 4.2.

Dans la section 4.3, ce sont les mêmes systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs que dans le chapitre 3 : la dérive de l'EDS est constituée par une partie bilinéaire états-commandes à laquelle est ajoutée une fonction non linéaire dépendant de l'état, notée $\ell(x(t))$. Cette fonction est lipschitzienne. A notre connaissance, les seuls travaux traitant de la stabilisation exponentielle presque sûre d'une EDS en utilisant l'approche de type Lyapunov exposée dans le théorème 1.5.3 sont ceux de Hu et Mao dans [HM08]. Les auteurs considèrent que la dérive et la diffusion de l'EDS à stabiliser sont linéaires en l'état et en la commande et que tout le vecteur d'état est mesuré. Ce sont donc des lois de commande par retour d'état qui sont proposées dans [HM08].

Dans la section 4.3.3, la loi de commande proposée est basée sur un observateur car le vecteur d'état est partiellement mesuré, les mesures étant stochastiques. La loi de commande proposée est de type bang-bang pour deux raisons détaillées ci-dessous.

a) La commande est dite bang-bang lorsque chaque coordonnée du vecteur des commandes commute entre une valeur maximale et une valeur minimale, la loi de commutation dépendant de l'état du système à commander. Cette stratégie de commande a été appliquée avec succès aux systèmes bilinéaires déterministes : voir [Lon80, Rya84, Moh91, LS02, LS03, ŚLS03] pour la commande par retour d'état et [ZLCL04, GSZD07, Gér08] pour la commande basée sur un observateur. La dérive dans le système stochastique non linéaire considéré dans la section 4.3 est proche des fonctions intervenant dans les ODE décrivant

1. La stabilité presque sûre est exponentielle ou non selon le choix de la fonction $\psi(t)$ dans les équations (1.33) et (1.34) : si $\psi(t) = e^t$, elle est exponentielle, si $\psi(t) = t$, elle est polynômiale, ... (voir [Mao92a, Mao94a, Mao97, Liu97]).

les systèmes déterministes dans les publications citées ci-dessus.

b) Puisqu'on ne peut pas insérer le bruit de l'EDS du système à commander dans les équations décrivant la loi de commande, on rencontre le même problème que dans le chapitre 2 lors de l'utilisation du théorème 1.5.3 pour la synthèse d'un observateur (voir équation (2.7)) : on aura $c_3 = 0$ dans le théorème 1.5.3 car la diffusion de l'EDS en boucle fermée sera nulle si l'état $X(t) = [x^T(t) \;\; x_k^T(t)]^T$ vérifie la contrainte $x(t) = 0$ avec $x_k(t)$ quelconque [2]. Ainsi, comme dans le chapitre 3, la synthèse de la loi de commande va s'appuyer sur l'approche découplée explicitée dans les théorèmes 2.3.1 et 2.5.1. La commande de type bang-bang se prête bien à cette approche : dans un premier temps, un retour d'état est synthétisé, puis, dans un second temps, un observateur permet de remplacer cet état par son estimation dans la loi de commande.

Le système stochastique non linéaire considéré est décrit dans la section 4.3.1. La section 4.3.2 traite de la loi de commande bang-bang par retour d'état, tandis que la loi de commande bang-bang par retour d'état estimé est abordée dans la section 4.3.3. La détermination simultanée des valeurs maximales et minimales des commandes et des fonctions de Lyapunov conduit à des bilinéarités dans les inégalités à résoudre. Afin de pouvoir utiliser la programmation convexe, il faut transformer ces inégalités en LMI. Ce problème est traité dans la section 4.3.4 où ces inégalités sont "linéarisées" en fixant alternativement certaines variables de décision et en minimisant un critère ad-hoc. La convergence de l'algorithme itératif ainsi obtenu vers les solutions des inégalités ne peut pas être garantie. Un exemple illustre l'approche proposée dans la section 4.3.5.

4.2 Rejet exponentiel des perturbations avec un taux de décroissance garanti

Dans cette partie, on se propose d'étudier le comportement asymptotique des systèmes stochastiques en présence de perturbations exogènes.

4.2.1 Position du problème

On considère l'EDS suivante

$$\mathrm{d}x(t) = (f_1(x(t)) + f_2(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{4.1}$$

avec

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ vecteur d'état,
- $w(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré,
- $f_2(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ perturbation exogène.

L'EDS (4.1) est la version perturbée de l'EDS suivante

$$\mathrm{d}x(t) = f_1(x(t))\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{4.2}$$

avec $f_1(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Ainsi, $x(t) = 0$ est la solution triviale de l'EDS (4.2). La fonction $f_1(x(t))$ est module-intégrable et la fonction $g(x(t))$ est carré intégrable (voir la définition 1.4.2). Afin de garantir l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS (4.2), les fonctions $f_1(x(t))$ et $g(x(t))$ vérifient les conditions (1.23) et (1.24) dans le théorème 1.4.4 en remplaçant l'EDS (1.25) par (4.2).

2. $x(t)$ est l'état du système stochastique à commander, tandis que $x_k(t)$ est l'état du correcteur à synthétiser.

Du fait de l'existence de la perturbation $f_2(t)$ dans l'EDS (4.1), $x(t) = 0$ peut ne pas être un point d'équilibre de cette EDS.

Dans la suite de la section 4.2, des conditions suffisantes vont être proposées afin de rejeter exponentiellement la perturbation $f_2(t)$ avec un taux de décroissance garanti. Il s'agit, via une approche de type Lyapunov, de rechercher des conditions suffisantes pour que la solution de l'EDS perturbée (4.1) converge exponentiellement presque sûrement vers 0 et de proposer une borne supérieure pour l'exposant de Lyapunov associé à cette solution. Cette borne supérieure correspond à un taux de décroissance exponentielle garanti.

4.2.2 Conditions suffisantes pour le rejet exponentiel des perturbations

Le problème du rejet exponentiel des perturbations avec un taux de décroissance garanti pour l'EDS (4.1) est résolu dans le théorème suivant. Avant d'énoncer ce théorème, les notations suivantes sont définies pour l'application de la formule d'Itô à l'EDS (4.1) avec la fonction $U(x(t), t) \in \mathbb{R}$ avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}_+$ (voir le théorème 1.4.2 et les relations (1.46) et (1.47))

$$\mathfrak{L}U(x(t),t) = \mathfrak{L}^*U(x(t),t) + U_x(x(t),t)f_2(t), \tag{4.3a}$$

$$\mathfrak{L}^*U(x(t),t) = U_t(x(t),t) + U_x(x(t),t)f_1(x(t)) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(g^T(x(t))U_{xx}(x(t),t)g(x(t))), \tag{4.3b}$$

$$\mathfrak{B}U(x(t),t) = U_x(x(t),t)g(x(t)), \tag{4.3c}$$

où

$$U_t(x(t),t) = \frac{\partial U(x(t),t)}{\partial t},$$

$$U_x(x(t),t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U(x(t),t)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial U(x(t),t)}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$U_{xx}(x(t),t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 U(x(t),t)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U(x(t),t)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 U(x(t),t)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U(x(t),t)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Le différentiateur stochastique $\mathfrak{L}U(x(t), t)$ est appliqué sur l'EDS (4.1) dans (4.3a), tandis que le différentiateur stochastique $\mathfrak{L}^*U(x(t), t)$ est appliqué sur l'EDS (4.2) dans (4.3b).

Théorème 4.2.1. *[BZSM13b] Soit le réel $t_0 \geqslant 0$. On suppose que $x(t)$ est une solution de l'EDS (4.1) satisfaisant $\|x(t)\| \neq 0$ presque sûrement pour tout $t \geqslant t_0$ à condition que $\|x_0\| \neq 0$ presque sûrement. Soit $V(x(t), t)$ est une fonction de Lyapunov définie positive et $\varphi(t) > 0$ est une fonction donnée.*

S'il existe des réels $\theta > 0$, $c_1 > 0$, c_2, $c_3 \geqslant 0$ et $p > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant t_0$,

$$\mathfrak{L}^*V(x(t),t) \leqslant c_2 V(x(t),t), \tag{4.4a}$$

$$\|\mathfrak{B}V(x(t),t)\|^2 \geqslant c_3 V^2(x(t),t), \tag{4.4b}$$

$$V_x(x(t),t)f_2(t) \leqslant \varphi(t)V(x(t),t), \tag{4.4c}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\left(\frac{\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s}{t-t_0}\right) \leqslant \theta, \tag{4.4d}$$

$$c_1\|x(t)\|^p \leqslant V(x(t),t), \tag{4.4e}$$

alors

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln\|x(t)\|}{t}\leqslant\frac{-(c_3-2(c_2+\theta))}{2p}\qquad p.s. \tag{4.5}$$

Si

$$c_3>2(c_2+\theta) \tag{4.6}$$

alors la solution $x(t)$ de l'EDS (4.1) converge exponentiellement presque sûrement vers zéro quand $t\to+\infty$. □

Démonstration. On considère la fonction de Lyapunov $V(x(t),t)$ définie positive. En utilisant les relations suivantes

$$(\ln(f))'=\frac{f'}{f},\quad (\ln(f))''=\frac{f''f-f'^2}{f^2}=\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2},$$

l'application de la formule d'Itô à l'EDS (4.1) avec la fonction $U(x,t)=\ln(V(x,t))$ donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}U(x(t),t) &= U_t(x(t),t)+U_x(x(t),t)(f_1(x(t))+f_2(t))\\
&\qquad+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(g^T(x(t))U_{xx}(x(t),t)g(x(t))\big)\,\mathrm{d}t+U_x(x(t),t)g(x(t))\,\mathrm{d}w(t)\\
&=\left(\frac{V_t(x(t),t)}{V(x(t),t)}+\frac{V_x(x(t),t)f_1(x(t))+V_x(x(t),t)f_2(t)}{V(x(t),t)}\right.\\
&\qquad+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{g^T(x(t))V_{xx}(x(t),t)g(x(t))}{V(x(t),t)}\right)\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{(g(x(t))V_x(x(t),t))^T(g(x(t))V_x(x(t),t))}{(V(x(t),t))^2}\right)\right)\mathrm{d}t\\
&\qquad+\frac{V_x(x(t),t)g(x(t))}{V(x(t),t)}\,\mathrm{d}w(t)\\
&=\left(\frac{\mathfrak{L}^*V(x(t),t)}{V(x(t),t)}+\frac{V_x(x(t),t)f_2(t)}{V(x(t),t)}-\frac{1}{2}\frac{\left\|g^T(x(t))V_x(x(t),t)\right\|^2}{(V(x(t),t))^2}\right)\mathrm{d}t\\
&\qquad+\frac{V_x(x(t),t)g(x(t))}{V(x(t),t)}\,\mathrm{d}w(t).
\end{aligned}\tag{4.7}$$

En intègrant l'expression (4.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\ln(V(x(t),t)) &= \ln(V(x_0,t_0))+\int_{t_0}^{t}\frac{\mathfrak{L}^*V(x(s),s)}{V(x(s),s)}\,\mathrm{d}s\\
&\qquad+\int_{t_0}^{t}\frac{V_x(x(s),s)f_2(s)}{V(x(s),s)}\,\mathrm{d}s+M(t)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\left\|g^T(x(s))V_x(x(s),s)\right\|^2}{(V(x(s),s))^2}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{4.8}$$

avec

$$M(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{V_x(x(s),s)g(x(s))}{V(x(s),s)}\,\mathrm{d}w(s). \tag{4.9}$$

L'inégalité martingale exponentielle (voir lemme C.1.1) donne

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left(M(t)-\frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\|\mathfrak{B}V(x(s),s)\|^2}{(V(x(s),s))^2}\,\mathrm{d}s>v\right)\right\}\leqslant e^{-\alpha v} \tag{4.10}$$

avec $\alpha > 0$ et $v > 0$. Si on choisit $v = 2\alpha^{-1}\ln(t_0 + k - 1)$ avec $k = 2, \ldots, +\infty$ et $0 < \alpha < 1$, l'application du lemme de Borel-Cantelli (voir lemme C.1.3) donne

$$M(t) \leqslant 2\alpha^{-1}\ln(t_0 + k - 1) + \frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{\|\mathfrak{B}V(x(s), s)\|^2}{(V(x, s))^2}\,\mathrm{d}s.$$

L'application des conditions (4.4a), (4.4b) et (4.4c) à l'inégalité (4.8) donne

$$\begin{aligned}
\ln(V(x(t), t)) &\leqslant \ln(V(x_0, t_0)) + 2\alpha^{-1}\ln(t_0 + k - 1) + \int_{t_0}^{t}\frac{\mathfrak{L}^* V(x(s), s)}{V(x(s), s)}\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t}\frac{V_x(x(s), s) f_2(s)}{V(x(s), s)}\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{1}{2}(1 - \alpha)\int_{t_0}^{t} \frac{\|\mathfrak{B}V(x(s), s)\|^2}{(V(x(s), s)))^2}\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \ln(V(x_0, t_0)) + 2\alpha^{-1}\ln(t_0 + k - 1) + c_2\int_{t_0}^{t}\frac{V(x(s), s)}{V(x(s), s)}\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t}\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{1}{2}(1 - \alpha)\int_{t_0}^{t} c_3\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \ln(V(x_0, t_0)) + 2\alpha^{-1}\ln(t_0 + k - 1) + c_2(t - t_0) - \frac{1}{2}(1 - \alpha)c_3 t \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}(t - t_0)\varphi(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Avec la condition (4.4d), il existe un réel $\theta > 0$ tel que

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\,\mathrm{d}s}{t - t_0} \leqslant \theta,$$

alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(s)ds \leqslant (\theta + \delta)(t - t_0) \qquad (4.12)$$

et l'insertion de la relation (4.12) dans l'inégalité (4.11) donne

$$\begin{aligned}
\ln(V(x(t), t)) &\leqslant \ln(V(x_0, t_0)) + 2\alpha^{-1}\ln(t_0 + k - 1) + c_2(t - t_0) \\
&\quad - \frac{1}{2}(1 - \alpha)c_3(t - t_0) + (\theta + \delta)(t - t_0). \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Pour $k - 1 \leqslant t \leqslant k$, l'inégalité (4.13) donne

$$\frac{\ln(V(x(t), t))}{t - t_0} \leqslant \frac{\ln(V(x_0, t_0))}{t - t_0} + 2\alpha^{-1}\frac{\ln(t_0 + k - 1)}{t - t_0} + c_2 - \frac{1}{2}(1 - \alpha)c_3 + (\theta + \delta)$$

et on obtient

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln(V(x(t), t))}{t - t_0} = \limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln(V(x(t), t))}{t} \leqslant c_2 - \frac{1}{2}(1 - \alpha)c_3 + (\theta + \delta). \qquad (4.14)$$

La condition (4.4e) donne

$$\limsup_{t\to+\infty} c_1\|x(t)\|^p \leqslant \limsup_{t\to+\infty} V(x(t), t)$$

et on obtient

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln(c_1)}{t}+p\limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln(\|x(t)\|)}{t}\leqslant\limsup_{t\to+\infty}\frac{\ln(V(x(t),t))}{t}. \tag{4.15}$$

Les inégalités (4.14) et (4.15) donnent

$$p\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\|\leqslant c_2-\frac{1}{2}(1-\alpha)c_3+(\theta+\delta) \tag{4.16}$$

et, en posant $\alpha\longrightarrow 0$ et $\delta\longrightarrow 0$, on obtient

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln(\|x(t)\|)\leqslant\frac{-(c_3-2(c_2+\theta))}{2p}. \tag{4.17}$$

Si l'inégalité $c_3>2(c_2+\theta)$ est satisfaite, la convergence exponentielle presque sûre de l'état $x(t)$ vers zéro est garantie. •

Remarque 4.2.1. Si $f_2(t)\equiv 0$, alors les conditions (4.4a), (4.4b) et (4.4e) assurent que la solution triviale $x(t)=0$ de l'EDS non perturbée (4.2) est exponentiellement presque sûrement stable (voir théorème 1.5.3). □

4.2.3 Application aux fonctions de Lyapunov quadratiques

L'utilisation du théorème 4.2.1 dépend fortement du choix de la fonction de Lyapunov $V(x(t),t)$. En automatique, la fonction de Lyapunov la plus utilisée est la fonction de Lyapunov quadratique du type $V(x(t))=x^T(t)Px(t)$ où la matrice P satisfait $P=P^T>0$. En effet, avec ce type de fonction de Lyapunov, les problèmes d'observation et de commande peuvent être résolus en utilisant des inégalités matricielles linéaires, aussi appelées LMI. Par exemple, dans [HM08], la stabilisation par retour d'état d'une EDS dont la dérive et la diffusion sont linéaires est traitée comme un problème de résolution de LMI grâce à l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques du type $V(x(t))=x^T(t)Px(t)$.

Il est donc intéressant d'étudier l'existence de classes de fonctions $f_2(t)$ permettant d'appliquer le théorème 4.2.1 avec une fonction de Lyapunov quadratique donnée par $V(x(t))=x^T(t)Px(t)$ avec $P=P^T>0$. Pour cela, il faut choisir une classe de fonctions $f_2(t)$ permettant de vérifier la condition (4.4c) du théorème 4.2.1.

Pour satisfaire la condition (4.4c) et (4.4d), on considère la classe de vecteurs des perturbations $f_2(t)$ définie par

$$\|f_2(t)\|\leqslant\beta e^{-\lambda t}, \tag{4.18}$$

où $\lambda>0$ et $\beta>0$ sont des réels, en association avec les fonctions suivantes $\varphi(t)$ données par

$$\varphi(t)=\theta \tag{4.19}$$

où $\theta>0$ est un réel donné. Avec cette classe de fonctions $\varphi(t)$, la condition (4.4d) est vérifiée et le scalaire θ peut être vu comme un paramètre permettant de satisfaire l'inégalité $c_3>2(c_2+\theta)$ dans le théorème 4.2.1.

Afin d'étudier la condition (4.4c) avec la fonction de Lyapunov $V(x(t))=x^T(t)Px(t)$, on majore $V_x(x(t))f_2(t)$ comme suit

$$V_x(x(t))f_2(t)=2x^T(t)Pf_2(t)\leqslant 2\left\|x^T(t)P\right\|\|f_2(t)\|\leqslant 2\beta\left\|x^T(t)P\right\|e^{-\lambda t}. \tag{4.20}$$

Pour $V(x(t))=x^T(t)Px(t)>0$ et $\theta>0$, il existe $t_0\geqslant 0$ telle que

$$2\beta\left\|x^T(t)P\right\|e^{-\lambda t}\leqslant\theta x^T(t)Px(t)\qquad\forall\, t\geqslant t_0. \tag{4.21}$$

En utilisant les inégalités (4.20) et (4.21), la condition (4.4c) est satisfaite où la perturbation $f_2(t)$ est définie par la relation (4.18).

Pour illustrer le choix d'une perturbation exponentielle bornée $f_2(t)$ définie dans (4.18), on considère l'exemple suivant où l'EDS (4.1) est donnée par

$$\mathrm{d}x(t) = (-x(t) + f_2(t))\,\mathrm{d}t \tag{4.22}$$

avec la diffusion $g(x(t)) = 0$.

La solution de l'équation homogène $\dot{x}(t) = -x(t)$ est $x_h(t) = x_0\,e^{-t}$ et une solution particulière est $x_p(t) = \alpha(t)e^{-t}$. La solution générale est donc donnée par

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = (x_0 + \alpha(t))e^{-t}$$

où $\alpha(t)$ est une fonction à déterminer.

En remplaçant $x_p(t)$ par sa valeur dans l'équation (4.22), on obtient

$$\dot{x}_p(t) = \dot{\alpha}(t)e^{-t} - \alpha(t)e^{-t} = -\alpha(t)e^{-t} + f_2(t),$$

ce qui donne $f_2(t) = \dot{\alpha}(t)e^{-t}$. La fonction $\alpha(t)$ est donc donnée par

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} f_2(s)e^{s}\,\mathrm{d}s.$$

Pour que l'intégrale ci-dessus converge lorsque $t \to +\infty$ (c'est-à-dire pour que cette intégrale ait une valeur finie), la fonction $f_2(t)$ peut être choisie comme suit

$$f_2(t) = \psi(t)e^{-t}$$

où $\psi(t)$ est une fonction quelconque qui doit être choisie telle que l'intégrale $\int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s$ converge lorsque $t \to +\infty$. Dans ce cas, on a

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s$$

et la solution $x(t)$ converge exponentiellement vers zéro lorsque $t \to +\infty$.

4.2.4 Exemple

On considère l'EDS (4.1) avec

$$f_1(x(t)) = A_t x(t) + \ell(x(t)) = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 1 & 0.6 & -3.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \\ \sin(x_3(t)) \end{bmatrix},$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } t < 0.08 \text{ sec} \\ \begin{bmatrix} \sin(25\pi t)e^{-\varepsilon t} \\ \sin(25\pi t)e^{-\varepsilon t} \\ \sin(25\pi t)e^{-\varepsilon t} \end{bmatrix} & \text{si } t \geqslant 0.08 \text{ sec} \end{cases},$$

$$g(x(t)) = A_w x(t) = \begin{bmatrix} 3.5 & -0.1 & 0 \\ 1 & 3.72 & 0 \\ 0.1 & 0 & 3.85 \end{bmatrix} x(t).$$

En appliquant le différentiateur stochastique $\mathfrak{L}^* V(x(t))$ à l'EDS (4.1) avec $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ et $P = P^T > 0$, on obtient

$$\mathfrak{L}^* V(x(t)) = x^T(t)(PA_t + A_t^T P + A_w^T P A_w)x(t) + 2x^T(t)P\ell(x(t)).$$

En utilisant le lemme de majoration C.3.1 et le fait que la fonction $\ell(x(t))$ est globalement lipschitzienne avec une constante de Lipschitz égale à 1, l'expression $\mathfrak{L}^* V(x(t))$ peut être majorée comme suit

$$\mathfrak{L}^* V(x(t)) \leqslant x^T(t)(PA_t + A_t^T P + \mu^{-1} I_3 + \mu PP + A_w^T P A_w)x(t) \tag{4.23}$$

où $\mu > 0$ est un réel donné.

En utilisant l'inégalité (4.23), la condition $\mathfrak{L}^* V(x,t) \leqslant c_2 V(x,t)$ est satisfaite s'il existe un réel c_2 tel que

$$PA_t + A_t^T P + \mu^{-1} I_3 + \mu PP + A_w^T P A_w - c_2 P < 0. \tag{4.24}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus et le lemme de Schur A.3.1, l'inégalité (4.4a) dans le théorème 4.2.1 est vérifiée si la LMI suivante

$$\begin{bmatrix} PA_t + A_t^T P + \dfrac{1}{\mu} I_3 - c_2 P & A_w^T P & P \\ PA_w & -P & 0 \\ P & 0 & \dfrac{-1}{\mu} I_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.25}$$

est satisfaite.

L'application de l'opérateur $\mathfrak{B} V(x(t))$ à l'EDS (4.1) avec $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ donne

$$\mathfrak{B} V(x(t)) = x^T(t)(A_w^T P + PA)x(t)$$

et, pour une réel $c_3 > 0$, on obtient

$$\|\mathfrak{B} V(x(t))\|^2 - c_3 V(x(t))^2 = x^T(t)(A_w^T P + PA - \sqrt{c_3}P)x(t) \times x^T(t)(A_w^T P + PA + \sqrt{c_3}P)x(t).$$

La condition (4.4b) dans le théorème 4.2.1 est donc satisfaite si l'une des deux LMI suivantes

$$A_w^T P + PA_w - \sqrt{c_3}P > 0, \tag{4.26}$$

$$A_w^T P + PA_w + \sqrt{c_3}P < 0, \tag{4.27}$$

est vérifiée.

L'inégalité (4.4e) dans le théorème 4.2.1 est vérifiée si on choisit $c_1 = \lambda_{\min}(P)$ et $p = 2$ où $\lambda_{\min}(P)$ est la plus petite valeur propre de la matrice P.

L'application du théorème 4.2.1 avec les LMI (4.25) et (4.25) et avec $\varphi(t) = \theta$ donne

$$P = \begin{bmatrix} 27.644 & 0.39887 & -6.7554 \\ 0.39887 & 9.485 & -11.8.27 \\ -6.7554 & -11.827 & 42.84 \end{bmatrix},$$

$$c_2 = 15,\ c_3 = 40,\ \theta = 0.1,\ \mu = 0.1.$$

et l'exposant de l'exponentiel de la solution $x(t)$ est borné comme suit

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(\|x(t))\|) \leqslant \frac{-(c_3 - 2(c_2+\theta))}{2p} = -2.45. \qquad p.s.$$

Le taux de décroissance garanti est égal à 2.45, il existe donc une variable aléatoire finie $M > 0$ telle que

$$\|x(t)\| \leqslant M \|x_0\| e^{-2.45(t)} \qquad \text{p.s.} \tag{4.28}$$

quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, donne une limite supérieure du taux de décroissance (voir (1.38) et (1.39)).

Avec $\varepsilon = 3$, la figure 4.1 montre la perturbation $f_2(t)$ et la convergence exponentielle presque sûre de l'état $x(t)$.

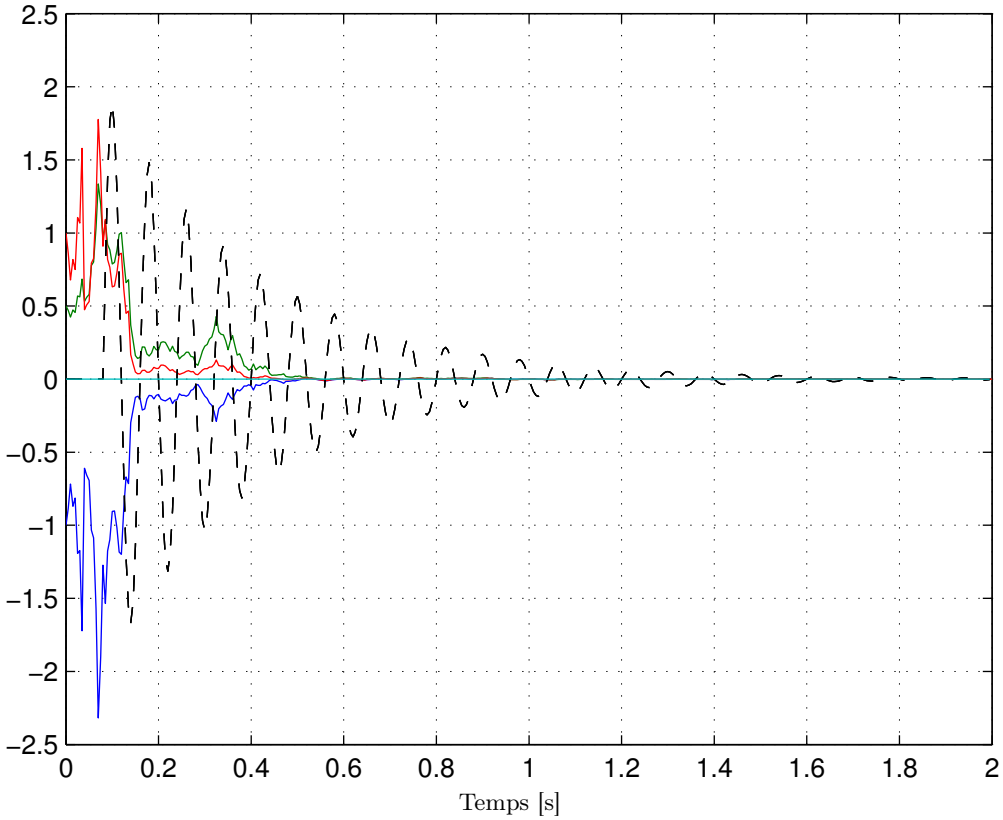


FIGURE 4.1 – Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert), état $x_3(t)$ (rouge), perturbation $f_2(t)$ (noir).

Avant que la perturbation $f_2(t)$ apparaisse, c'est-à-dire pour $0 \leqslant t \leqslant 0.08$ seconde, les trois composantes de l'état $x(t)$ décroissent exponentiellement presque sûrement, mais la limite de zéro n'est pas encore atteinte.

A partir de $t = 0.08$ seconde, on peut voir l'effet de la perturbation $f_2(t)$ sur l'état $x(t)$. La figure 4.1 montre que les trois composantes de l'état $x(t)$ convergent vers zéro tandis que la perturbation $f_2(t)$ n'a pas encore convergé, ce qui est en accord avec le fait que la perturbation $f_2(t)$ satisfait la condition (4.4c) dans le théorème 4.2.1 et que $c_3 > 2(c_2 + \theta)$.

4.3 Commande bang-bang des systèmes stochastiques

4.3.1 Introduction à la commande bang-bang

Cette section est consacrée à la stabilisation d'un système stochastique non linéaire (bilinéarité états-commandes et non linéarité additionnelle) avec des bruits multiplicatifs en utilisant une commande bang-bang. Le but est d'obtenir la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre en boucle fermée.

Une commande bang-bang est une commande discontinue et saturée où chaque élément du vecteur de commande commute entre deux valeurs. Le problème à résoudre est donc double :

- déterminer, pour chaque élément du vecteur de commande, les deux bornes de commutation,
- proposer un algorithme pour gérer les commutations.

Dans [Lon80, Rya84, Moh91], des commandes bang-bang ont été employées avec succès pour stabiliser par retour d'état des systèmes bilinéaires déterministes. Dans [LS02, LS03, ŚLS03], cette stratégie de commande a été appliquée à un modèle à 2 ou 3 compartiments pour la chimiothérapie d'un cancer. Lorsque l'état n'est pas entièrement mesuré, des lois de commande bang-bang basées sur des observateurs ont été proposées dans [ZLCL04] et dans [GSZD07, Gér08]. Dans [ZLCL04], la loi de commutation des éléments du vecteur de commande dépend d'un observateur de Luenberger d'ordre plein, tandis que, dans [GSZD07, Gér08], cette loi de commutation dépend de l'estimation de l'état obtenue via un observateur particulier d'ordre plein.

A notre connaissance, une loi de commande bang-bang pour les systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs n'a été proposée que dans [AT74] en utilisant la stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

Afin de développer des lois de commande bang-bang, on considère le système stochastique suivant

$$\mathrm{d}x(t) = \left(A_{t_0} x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i} x(t) + \ell(x(t)) \right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\, \mathrm{d}w_{x_j}(t) \tag{4.29a}$$

$$\mathrm{d}y(t) = Cx(t)\,\mathrm{d}t + Dx(t)\,\mathrm{d}w_y(t) \tag{4.29b}$$

avec

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ vecteur d'état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ vecteur des entrées connues (commandes),
- $y(t) \in \mathbb{R}^p \longrightarrow$ vecteur des mesures,
- $w_x(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré,
- $w_y(t) \in \mathbb{R} \longrightarrow$ mouvement brownien (ou processus de Wiener) indépendant et centré.

La fonction $\ell(x(t))$ vérifie la propriété suivante

$$\ell(0) = 0 \tag{4.30}$$

et la condition de Lipschitz suivante

$$\|\ell(x(t)) - \ell(\overline{x}(t))\| \leqslant \kappa \, \|x(t) - \overline{x}(t)\| \tag{4.31}$$

avec $\kappa > 0$. De plus, la fonction $\ell(x(t))$ est module-intégrable (voir la définition 1.4.2). Les conditions d'existence et d'unicité de la solution de l'EDS (4.29a) données dans le théorème 1.4.4 sont donc satisfaites.

Dans la suite de cette section, une commande bang-bang est proposée dans deux situations pour le système stochastique bilinéaire avec des bruits multiplicatifs (4.29) :

- lorsque le vecteur d'état est complètement mesuré, la loi de commutation est basée sur la dynamique de cet état,
- lorsque le vecteur d'état est partiellement mesuré, la loi de commutation est basée sur l'estimation de cet état via un observateur.

4.3.2 Commande bang-bang par retour d'état

Dans cette section, on considère que toutes les composantes du vecteur d'état $x(t)$ sont disponibles, c'est-à-dire que l'équation de mesure (4.29b) est remplacée par

$$y(t) = x(t). \tag{4.29b-bis}$$

La commande bang-bang $u(x(t))$ par retour d'état est définie comme suit

$$u(x(t)) = -\begin{bmatrix} |\alpha_1| \operatorname{sgn}(x^T(t) A_{t_1}^T P x(t)) \\ \vdots \\ |\alpha_m| \operatorname{sgn}(x^T(t) A_{t_m}^T P x(t)) \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

où les coefficients α_i $(i = 1, \ldots, m)$ sont des paramètres à déterminer afin d'assurer la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (4.29a). Ce problème est résolu dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *[BZSM14a] La commande $u(x)$ dans (4.32) est une commande bang-bang assurant la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de la solution de l'EDS (4.29a) s'il existent $P = P^T > 0$ et des reéls $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\rho_1 > 0, \ldots, \rho_d > 0$ et $\mu > 0$ tels que l'inégalité suivante*

$$\begin{bmatrix} (1,1)_a & A_{w_1}^T P & \cdots & \cdots & A_{w_d}^T P & P \\ P A_{w_1} & -P & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ P A_{w_d} & 0 & \cdots & 0 & -P & 0 \\ P & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.33}$$

est vérifiée avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$ et que, pour tout $j = 1, \ldots, d$, une des deux inégalités suivantes

$$A_{w_j}^T P + P A_{w_j} - \sqrt{2\rho_j} P > 0, \tag{4.34}$$

$$A_{w_j}^T P + P A_{w_j} + \sqrt{2\rho_j} P < 0 \tag{4.35}$$

est vérifiée avec

$$(1,1)_a = (A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_{t_i})^T P + P(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_{t_i}) + \kappa^2 \mu^{-1} I_n - \rho P.$$

Démonstration. On considère la fonction de Lyapunov candidate suivante $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ avec $P = P^T > 0$.

La condition (1.50a) du théorème 1.5.3 est vérifiée avec $p = 2$ et $c_1 = \lambda_{\min}(P)$.

Pour prouver la condition (1.50b) du théorème 1.5.3, on calcule $\mathfrak{L}V(x(t))$

$$\mathfrak{L}V(x(t)) = x^T(t)\left((A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{t_i})^T P + P(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{t_i}) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P A_{w_j}\right) x(t) \\ - 2x^T(t)P\ell(x(t)).$$

Puisque $\ell(x(t))$ est une fonction lipschitzienne vérifiant les conditions (4.30) et (4.31), l'application du lemme (C.3.1) sur la relation précédente donne

$$\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant x^T(t)\left((A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{t_i})^T P + P(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{t_i}) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P A_{w_j} + \kappa^2\mu^{-1} I_n + \mu PP\right) x(t) \quad (4.36)$$

avec $\mu > 0$.

S'il existe un réel c_2 tel que $c_2 < \rho$ et $\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant c_2 V(x(t))$, alors la condition (1.50b) du théorème 1.5.3 est satisfaite.

En utilisant l'inégalité (4.36), la condition $\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant c_2 V(x(t))$ est vérifiée si

$$x^T(t)\left((A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{t_i})^T P + P(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{t_i}) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P A_{w_j} + \kappa^2\mu^{-1} I_n + \mu PP - \rho P\right) x(t) \leqslant 0. \quad (4.37)$$

Afin d'inclure la loi de commande (4.32) dans l'inégalité (4.37), l'idée consiste à ajouter et à soustraire les termes $x^T(t)\alpha_i A_{t_1}^T P x(t)$ à l'inégalité (4.37). Ainsi l'inégalité suivante est équivalente à (4.37)

$$x^T(t)\left((A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_{t_i})^T P + P(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_{t_i}) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P A_{w_j} + \kappa^2\mu^{-1} I_n + \mu PP - \rho P\right) x(t) \\ \underbrace{+ x^T(t)\left(\sum_{i=1}^{m}(u_i - \alpha_i){A_{t_i}}^T P + P\sum_{i=1}^{m}(u_i - \alpha_i)A_{t_i}\right) x(t)} \leqslant 0. \quad (4.38)$$

Le terme souligné dans (4.38) se réécrit comme suit

$$x^T(t)\left(\sum_{i=1}^{m}(u_i - \alpha_i){A_{t_i}}^T P + P\sum_{i=1}^{m}(u_i - \alpha_i)A_{t_i}\right) x(t) \\ = x^T(t)\left(\sum_{i=1}^{m}(-|\alpha_i|\operatorname{sgn}(x^T(t)A_{t_i}^T P x(t)) - \alpha_i){A_{t_i}}^T P\right.$$

$$+P\sum_{i=1}^{m}(-\left|\alpha_i\right|\operatorname{sgn}(x^T(t)A_{t_i}^TPx(t))-\alpha_i)A_{t_i}\Bigg)\,x(t) \tag{4.39}$$

Puisque

$$|\alpha_i| = \begin{cases} \alpha_i & \text{si} \quad \alpha_i > 0 \\ -\alpha_i & \text{si} \quad \alpha_i < 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

le signe de $(-\left|\alpha_i\right|\operatorname{sgn}(x^T(t)A_{t_i}^TPx(t))-\alpha_i)x^T(t)A_{t_i}^TPx(t)$ dépend du signe de $x^T(t)A_{t_i}^TPx(t)$ comme suit :

(i) si $x^T(t)A_{t_i}Px(t)>0$ et puisque

$$\begin{cases} \alpha_i > 0 \Longleftrightarrow -\left|\alpha_i\right|-\alpha_i = -2\alpha_i < 0 \\ \alpha_i < 0 \Longleftrightarrow -\left|\alpha_i\right|-\alpha_i = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

(ii) si $x^T(t)A_{t_i}Px(t)<0$ et puisque

$$\begin{cases} \alpha_i > 0 \Longleftrightarrow \left|\alpha_i\right|-\alpha_i = 0 \\ \alpha_i < 0 \Longleftrightarrow \left|\alpha_i\right|-\alpha_i = -2\alpha_i < 0 \end{cases} \tag{4.42}$$

alors la partie soulignée dans (4.38) est $\leqslant 0$.

Par conséquent, la condition $\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant c_2V(x(t))$ est vérifiée si

$$x^T(t)\Bigg((A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_iA_{t_i})^TP+P(A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_iA_{t_i})+\sum_{i=1}^{m}A_{w_j}^TPA_{w_j} \\ +\kappa^2\mu^{-1}I_n+\mu PP-\rho P\Big)\,x(t)\leqslant 0. \tag{4.43}$$

En appliquant le lemme de Schur (voir lemme A.3.1) à l'inégalité (4.43), on obtient l'inégalité (4.33).

Finalement, pour vérifier la relation (1.50c) du théorème 1.5.3, on applique $\mathfrak{B}V(x(t))$ à l'équation (4.29a) et on obtient

$$\mathfrak{B}V(x(t)) = \Big[x^T(t)(A_{w_1}^TP+PA_{w_1})x(t) \quad \dots \quad x^T(t)(A_{w_d}^TP+PA_{w_d})x(t)\Big]. \tag{4.44}$$

S'il existe des réels $c_3 = 2\rho$ avec $\rho = \sum_{j=1}^{d}\rho_j$ et $\rho_j \geqslant 0$ tels que $\|\mathfrak{B}V(x,t)\|^2 \geqslant c_3V^2(x(t))$, alors la relation (1.50c) du théorème 1.5.3 est satisfaite.

En utilisant la relation (4.44), on obtient

$$\|\mathfrak{B}V(x(t))\|^2-c_3V^2(x(t)) = \sum_{j=1}^{d}x^T(t)(A_{w_j}^TP+PA_{w_j}-\sqrt{2\rho_j}P)x(t) \\ \times x^T(t)(A_{w_j}^TP+PA_{w_j}+\sqrt{2\rho_j}P)x(t). \tag{4.45}$$

La condition $\|\mathfrak{B}V(x(t))\|^2 \geqslant c_3V^2(x(t))$ est vérifiée si, pour tout j avec $j=1,\dots,d$, l'une des deux inégalités (4.34) ou (4.35) est vérifiée.

Puisque $c_2 < \rho$ et $c_3 = 2\rho \geqslant 0$, l'inégalité (1.52) est vérifiée et le point d'équilibre de l'EDS (4.29a) est presque sûrement exponentiellement stable. •

4.3.3 Commande bang-bang basée sur un observateur

Dans cette section, on considère que les composantes du vecteur d'état $x(t)$ ne sont pas toutes disponibles, c'est-à-dire que l'équation de mesure est donnée par (4.29b) : le système stochastique considéré est donc (4.29).

Puisque l'état $x(t)$ n'est pas disponible, on ne peut pas utiliser la commande bang-bang (4.32). On la remplace donc par la commande bang-bang suivante basée sur un observateur

$$u(\widehat{x}(t)) = -\begin{bmatrix} |\alpha_1| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T(t) A_{t_1}^T \mathcal{F} \widehat{x}(t)) \\ \vdots \\ |\alpha_m| \operatorname{sgn}(\widehat{x}^T(t) A_{t_m}^T \mathcal{F} \widehat{x}(t)) \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

où $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ l'estimation de l'état $x(t)$ obtenue avec l'observateur suivant

$$\mathrm{d}\widehat{x}(t) = \left(A_{t_0}\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{t_i}\widehat{x}(t) + \ell(\widehat{x}(t)) \right) \mathrm{d}t + \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i \right) (\mathrm{d}y(t) - C\widehat{x}(t)\,\mathrm{d}t). \tag{4.47}$$

L'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \tag{4.48}$$

a une dynamique (on combine (4.29a), (4.29b) et (4.47)) décrite par l'EDS suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e(t) = \Bigg(\Bigg((A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C) u_i \Bigg) e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t) - e(t)) \Bigg) \mathrm{d}t \\ + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\,\mathrm{d}w_{x_j} - \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i \right) D x(t)\,\mathrm{d}w_y. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Il faut donc déterminer les scalaires α_i $(i = 1, \ldots, m)$ et calculer les gains K_i $(i = 0, \ldots, m)$ de l'observateur pour que le système stochastique en boucle fermée formé par l'EDS (4.29a), la commande bang-bang (4.46) et l'EDS (4.49) soit exponentiellement presque sûrement stable.

Puisque $-|\alpha_i| \leqslant u_i \leqslant |\alpha_i|$, pour $i = 1, \ldots, m$, on peut définir le polytope convexe suivant

$$\mathcal{P} = \{[-|\alpha_1|, |\alpha_1|] \times \ldots \times [-|\alpha_m|, |\alpha_m|]\} \tag{4.50}$$

et les u_i $(i = 1, \ldots, m)$ peuvent être considérés comme des paramètres variant dans le polytope $\mathcal{P}$ dont les 2^m sommets appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}$ suivant

$$\mathcal{S} = \{[\beta_1, \ldots, \beta_m]^T\}, \forall i = 1, \ldots, m, \beta_i \in \{-|\alpha_i|, |\alpha_i|\}. \tag{4.51}$$

Pour tout $v = 1, \ldots, 2^m$, on définit les sommets suivants

$$\Gamma_v = [\Gamma_1^v, \ldots, \Gamma_m^v]^T \in \mathcal{S}. \tag{4.52}$$

Remarque 4.3.1. Chaque Γ_i^v (avec $i = 1, \ldots, m$ et $v = 1, \ldots, 2^m$) dans (4.52) dépend de $\widehat{x}(t)$ (voir la commande bang-bang $u(\widehat{x}(t))$ dans l'équation (4.46)). Afin de simplifier les notations, l'expression Γ_i^v est utilisée à la place de $\Gamma_i^v(\widehat{x}(t))$ puisque, dans la preuve du théorème 4.3.2, la stabilité exponentielle presque sûre en boucle fermée est garantie en testant des inégalités convexes sur chacun des sommets du polytope convexe $\mathcal{P}$ défini par (4.50). De plus, pour chaque $i = 1, \ldots, m$, le terme Γ_i^v ne peut prendre que deux valeurs : α_i ou $-\alpha_i$. □

En insérant la commande bang-bang (4.46) et en tenant compte de la remarque 4.3.1, l'EDS (4.29a) devient

$$\mathrm{d}x(t) = \left(A_{t_0}x(t) + \ell(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i^v A_{t_i} x(t) \right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\, \mathrm{d}w_{x_j} \tag{4.53}$$

et l'équation d'erreur se réécrit comme suit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e(t) = \left(\left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C)\Gamma_i^v \right) e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t) - e(t)) \right) \mathrm{d}t \\ + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\, \mathrm{d}w_{x_j} - \left(K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i \Gamma_i^v \right) Dx(t)\, \mathrm{d}w_y \end{aligned} \tag{4.54}$$

où v est l'indice du vecteur Γ_v donné dans (4.52) et représentant la combinaison des m commandes $u_i(\widehat{x}(t))$ $(i = 1, \ldots, m)$ qui sont réalisées à l'instant t.

Afin d'appliquer le théorème 2.5.1, l'EDS (2.6) dans le chapitre 2 est obtenue en posant

$$\begin{aligned} f_1^v(x(t)) &= \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i^v A_{t_i} \right) x(t) + \ell(x(t)), \\ g_1(x(t)) &= \begin{bmatrix} A_{w_1}x(t) & \cdots & A_{w_d}x(t) & 0 \end{bmatrix}, \\ f_2(x(t), e(t)) &= \left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C)\Gamma_i^v \right) e(t) + \ell(x(t)) - \ell(x(t) - e(t)), \\ g_2^v(x(t)) &= \begin{bmatrix} A_{w_1}x(t) & \cdots & A_{w_d}x(t) & K_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} K_i \Gamma_i^v x(t) \end{bmatrix}, \\ w(t) &= \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix}, X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Avec les notations ci-dessus, les EDS (2.8) et (2.9) sont obtenues en posant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = e(t)$, $\overline{x}_1(t) = \overline{x}(t)$ et $\overline{x}_2(t) = \overline{e}(t)$ et l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée puisque la fonction $\ell(x(t))$ satisfait la condition de Lipschitz (4.31). Le théorème 2.5.1 s'applique donc en remplaçant l'hypothèse 2.2.1 par les conditions du théorème 1.4.4, l'EDS (2.1a) par (4.53) et l'EDO (2.43) par

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(A_{t_0} - K_0 C + \sum_{i=1}^{m} (A_{t_i} - K_i C)\Gamma_i^v \right) \overline{e}(t) - \ell(-\overline{e}(t)). \tag{4.55}$$

Théorème 4.3.2. *[BZSM14a] On suppose que l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée. La relation (4.46) est une loi de commande bang-bang basée sur l'observateur (4.47) qui assure la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre des EDS (4.53) et (4.54) s'il existe des matrices $\mathcal{F} = \mathcal{F}^T > 0$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$ et Y_i et $(i = 0, \ldots, m)$ et des réels $\mu > 0$, $\mu_1 > 0$, $\rho_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, d)$ et $\beta \geqslant 0$*

tels que les inégalités suivantes

$$\begin{bmatrix} (1,1)_b & A_{w_1}^T\mathcal{F} & \cdots & \cdots & A_{w_d}^T\mathcal{F} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F}A_{w_1} & -\mathcal{F} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \mathcal{F}A_{w_d} & 0 & \cdots & 0 & -\mathcal{F} & 0 \\ \mathcal{F} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{-I_n}{\mu} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.56}$$

$$\begin{bmatrix} (1,1)_c & \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q} & \dfrac{-I_n}{\mu_1} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.57}$$

sont vérifiées pour tout $v = 1, \ldots, 2^m$ *avec* $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$ *et que, pour tout* $j = 1, \ldots, d$*, une de ces deux inégalités suivantes*

$$A_{w_j}^T\mathcal{F} + \mathcal{F}A_{w_j} - \sqrt{2\rho_j}\mathcal{F} > 0, \tag{4.58}$$

$$A_{w_j}^T\mathcal{F} + \mathcal{F}A_{w_j} + \sqrt{2\rho_j}\mathcal{F} < 0 \tag{4.59}$$

est vérifiée avec

$$(1,1)_b = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i^v A_{t_i}\right)^T \mathcal{F} + \mathcal{F}\left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i^v A_{t_i}\right) + \kappa^2\mu^{-1}I_n - \rho\mathcal{F}$$

$$(1,1)_c = \sum_{i=1}^{m}((\mathcal{Q}A_{t_i} - Y_iC)^T\Gamma_i^v + (\mathcal{Q}A_{t_i} - Y_iC)\Gamma_i^v) + (\mathcal{Q}A_{t_0} - Y_0C)^T + (\mathcal{Q}A_{t_0} - Y_0C) + \mu_1^{-1}\kappa^2 I_n + 2\beta\mathcal{Q}.$$

Les gains K_i *sont donnés par* $K_i = \mathcal{Q}^{-1}Y_i$ *pour* $i = 0, \ldots, m$*.*

Démonstration.

1ère étape : Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (4.53).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_x(x(t)) = x^T(t)\mathcal{F}x(t)$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}^T > 0$.

La condition (1.50a) du théorème 1.5.3 est satisfaite avec $p = 2$ et $c_1 = \lambda_{\min}(\mathcal{F})$.

Pour prouver la condition (1.50b) du théorème 1.5.3, on calcule $\mathfrak{L}V_x(x(t))$

$$\mathfrak{L}V_x(x(t)) = x^T(t)\left((A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m}\Gamma_i^v A_{t_i})^T\mathcal{F} + \mathcal{F}(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m}\Gamma_i^v A_{t_i}) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T\mathcal{F}A_{w_j}\right)x(t) - 2x^T(t)\mathcal{F}\ell(x(t)).$$

Puisque $\ell(x(t))$ est une fonction lipschitzienne vérifiant les conditions (4.30) et (4.31), l'application du lemme (C.3.1) sur la relation précédente donne

$$\mathfrak{L}V_x(x(t)) \leqslant x^T(t)\left((A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i^v A_{t_i})^T\mathcal{F}+\mathcal{F}(A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i^v A_{t_i}) + \sum_{j=1}^{d}A_{w_j}^T\mathcal{F}A_{w_j}+\kappa^2\mu^{-1}I_n+\mu\mathcal{F}\mathcal{F}\right)x(t) \quad (4.60)$$

avec $\mu > 0$.

S'il existe un réel c_2 tel que $c_2 < \rho$ et $\mathfrak{L}V_x(x(t)) \leqslant c_2V_x(x(t))$, alors la condition (1.50b) du théorème 1.5.3 est satisfaite.

En utilisant l'inégalité (4.60), la condition $\mathfrak{L}V_x(x(t)) \leqslant c_2V_x(x(t))$ est vérifiée si

$$(A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i^v A_{t_i})^T\mathcal{F}+\mathcal{F}(A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i^v A_{t_i}) + \sum_{j=1}^{d}A_{w_j}^T\mathcal{F}A_{w_j}+\kappa^2\mu^{-1}I_n+\mu\mathcal{F}\mathcal{F}-\rho\mathcal{F}\leqslant 0. \quad (4.61)$$

En appliquant le lemme de Schur (voir lemme A.3.1) à l'inégalité (4.61), on obtient l'inégalité (4.56). Vu la convexité du polytope $\mathcal{P}$ (voir (4.50)), la condition (1.50b) du théorème 1.5.3 est satisfaite si l'inégalité (4.56) est vraie pour tous les sommets du polytope $\mathcal{P}$, c'est-à-dire pour tous les $v = 1, \ldots, 2^m$.

Finalement, pour vérifier la relation (1.50c) du théorème 1.5.3, on applique $\mathfrak{B}V_x(x(t))$ à l'EDS (4.53) et on obtient

$$\mathfrak{B}V_x(x(t)) = \left[x^T(t)(A_{w_1}^T\mathcal{F}+\mathcal{F}A_{w_1})x(t) \quad \ldots \quad x^T(t)(A_{w_d}^T\mathcal{F}+\mathcal{F}A_{w_d})x(t)\right]. \quad (4.62)$$

S'il existe des réels $c_3 = 2\rho$ avec $\rho = \sum_{j=1}^{d}\rho_j$ et $\rho_j \geqslant 0$ tels que $\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 \geqslant c_3V_x^2(x(t))$, alors la relation (1.50c) du théorème 1.5.3 est satisfaite.

En utilisant la relation (4.62), on obtient

$$\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 - c_3V_x^2(x(t)) = \sum_{j=1}^{d}x^T(t)(A_{w_j}^T\mathcal{F}+\mathcal{F}A_{w_j}-\sqrt{2\rho_j}\mathcal{F})x(t) \times x^T(t)(A_{w_j}^T\mathcal{F}+\mathcal{F}A_{w_j}+\sqrt{2\rho_j}\mathcal{F})x(t). \quad (4.63)$$

La condition $\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 \geqslant c_3V_x^2(x(t))$ est vérifiée si, pour tout j avec $j = 1, \ldots, d$, l'une des deux inégalités (4.58) ou (4.59) est vérifiée.

Puisque $c_2 < \rho$ et $c_3 = 2\rho \geqslant 0$, l'inégalité (1.52) est vérifiée et le point d'équilibre de l'EDS (4.53) est presque sûrement exponentiellement stable.

2ème étape : Stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (4.55).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_e(\overline{e}(t)) = \overline{e}(t)^T\mathcal{Q}\overline{e}(t)$ avec $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$. La dérivée temporelle de $V_e(\overline{e}(t))$ le long de la trajectoire de la solution de l'EDO (4.55) est donnée par

$$\dot{V}_e(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t)\left(\sum_{i=1}^{m}((A_{t_i}-K_iC)^T\Gamma_i^v\mathcal{Q}+\mathcal{Q}(A_{t_i}-K_iC)\Gamma_i^v\right.$$

$$+(A_{t_0}-K_0C)^T\mathcal{Q}+\mathcal{Q}(A_{t_0}-K_0C)\big)\,\overline{e}(t)-2\overline{e}^T(t)\mathcal{Q}\ell(-\overline{e}(t)). \quad (4.64)$$

Puisque $\ell(x(t))$ est une fonction lipschitzienne vérifiant les conditions (4.30) et (4.31), l'application du lemme (C.3.1) sur la relation précédente donne

$$\dot{V}_{\overline{e}}(\overline{e}(t)) \leqslant \overline{e}(t)^T\left(\sum_{i=1}^{m}((A_{t_i}-K_iC)^T\Gamma_i^v\mathcal{Q}+\mathcal{Q}(A_{t_i}-K_iC)\Gamma_i^v)\right.$$
$$\left.+(A_{t_0}-K_0C)^T\mathcal{Q}+\mathcal{Q}(A_{t_0}-K_0C)+\mu_1^{-1}\kappa^2I_n+\mu_1\mathcal{Q}\mathcal{Q}\big)\,\overline{e}(t) \quad (4.65)$$

avec $\mu_1>0$

En utilisant la convexité du polytope $\mathcal{P}$ (voir (4.50)), le point d'équilibre de l'EDS (4.55) est exponentiellement stable si l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m}((A_{t_i}-K_iC)^T\Gamma_i^v\mathcal{Q}+\mathcal{Q}(A_{t_i}-K_iC)\Gamma_i^v)+(A_{t_0}-K_0C)^T\mathcal{Q}+\mathcal{Q}(A_{t_0}-K_0C)$$
$$+\mu_1^{-1}\kappa^2I_n+\mu_1\mathcal{Q}\mathcal{Q}+2\beta\mathcal{Q}<0 \quad (4.66)$$

est satisfaite avec $\beta\geqslant 0$ pour tout $v=1,\ldots,2^m$, c'est-à-dire pour tous les sommets du polytope $\mathcal{P}$.

Si on pose $Y_i=\mathcal{Q}K_i$ pour $i=0,\ldots,m$, et en appliquant le lemme de Schur (voir lemme A.3.1)) à l'inégalité (4.66) on obtient l'inégalité (4.57). •

4.3.4 Algorithme pour la détermination des coefficients α_i

Dans le théorème 4.3.1, l'inégalité (4.33) est bilinéaire puisque les coefficients α_i et la matrice de Lyapunov P sont à déterminer.

Cette inégalité bilinéaire doit être "transformée" en des inégalités matricielles linéaires (LMI) afin d'utiliser un solveur standard de LMI pour les problèmes d'optimisation convexe.

Pour ce faire, on considère deux inégalités dans la suite :

- l'inégalité I_1 qui correspond à l'inégalité (4.33) en remplaçant le terme $(1,1)_a$ par

$$(1,1)_a=(A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_iA_{t_i})^TP+P(A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_iA_{t_i})+\kappa^2\mu^{-1}I_n-\rho P-\gamma I_n$$

  avec $\gamma\in\mathbb{R}$.
- l'inégalité I_2 qui correspond soit à l'inégalité (4.34) ou à l'inégalité (4.35).

L'idée consiste à minimiser un réel γ. Si on trouve $\gamma<0$, alors la stabilité exponentielle presque sûre est obtenue.

Mais, puisque γ peut être positif ou nul, l'inégalité $I_1<0$ peut être résolue, même si l'inégalité (4.33) n'est pas vérifiée, ce qui permet de continuer d'essayer de trouver une solution faisable pour le théorème 4.3.1.

On présente ci-dessous l'esquisse d'un algorithme itératif pour obtenir des solutions α_i et P.

Algorithme.

- **Etape 0.**
  Choisir un réel $\varepsilon>0$ "suffisamment" petit, un entier $k_{\max}$ "suffisamment" grand et un entier $N>0$ (avec $N<k_{\max}$).

Poser $k = 0$, $n = 0$ et choisir $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\ldots$, $\alpha_m \in \mathbb{R}$, $\rho_1 > 0$, $\ldots$, $\rho_d > 0$.
Trouver $P = P^T > 0$, $\mu > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ qui sont solutions du problème LMI suivant

$$\min_{\gamma} \text{ sous } I_1 < 0, I_2 < 0$$

Poser $\gamma_0 = \gamma$, $P_0 = P$, $\alpha_{1_0} = \alpha_1$, $\ldots$, $\alpha_{m_0} = \alpha_m$, $\mu_0 = \mu$, $\rho_{1_0} = \rho_1$, $\ldots$, $\rho_{d_0} = \rho_d$.
- Si $\gamma_0 < 0$, alors aller à l'étape 3.
- Si $\gamma_0 \geqslant 0$, alors aller à l'étape 1.

- **Etape 1.**
  $k \longleftarrow k + 1$.
  Poser $P = P_{k-1}$.
  Trouver $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\ldots$, $\alpha_m \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\rho_1 > 0$, $\ldots$, $\rho_d > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ qui sont solutions du problème LMI suivant

$$\min_{\gamma} \text{ sous } I_1 < 0, I_2 < 0$$

  Poser $\gamma_k = \gamma$, $P_k = P$, $\alpha_{1_k} = \alpha_1$, $\ldots$, $\alpha_{m_k} = \alpha_m$, $\mu_k = \mu$, $\rho_{1_k} = \rho_1$, $\ldots$, $\rho_{d_k} = \rho_d$.
  - Si $\gamma_k < 0$, alors aller à l'étape 3.
  - Si $\gamma_k \geqslant 0$ alors
    - Si $\gamma_{k-1} - \gamma_k < \varepsilon$ et si $n \geqslant N$, alors aller à l'étape 3.
    - Si $\gamma_{k-1} - \gamma_k < \varepsilon$ et si $n < N$, alors $n \longleftarrow n + 1$ et aller à l'étape 2.
    - Si $\gamma_{k-1} - \gamma_k \geqslant \varepsilon$, alors poser $n = 0$ et aller à l'étape 2.

- **Etape 2.**
  $k \longleftarrow k + 1$.
  Poser $\alpha = \alpha_{1_{k-1}}$, $\ldots$, $\alpha = \alpha_{m_{k-1}}$, $\rho_1 = \rho_{1_{k-1}}$, $\ldots$, $\rho_d = \rho_{d_{k-1}}$.
  Trouver $P = P^T > 0$, $\mu > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ qui sont solutions du problème LMI suivant

$$\min_{\gamma} \text{ sous } I_1 < 0, I_2 < 0$$

  Poser $\gamma_k = \gamma$, $P_k = P$, $\alpha_{1_k} = \alpha_1$, $\ldots$, $\alpha_{m_k} = \alpha_m$, $\mu_k = \mu$, $\rho_{1_k} = \rho_1$, $\ldots$, $\rho_{d_k} = \rho_d$.
  - Si $\gamma_k < 0$, aller à l'étape 3.
  - Si $\gamma_k \geqslant 0$ et si $k \geqslant k_{\max}$, alors aller à l'étape 3.
  - Si $\gamma_k \geqslant 0$ et si $k < k_{\max}$, alors
    - Si $\gamma_{k-1} - \gamma_k < \varepsilon$ et si $n \geqslant N$, alors aller à l'étape 3.
    - Si $\gamma_{k-1} - \gamma_k < \varepsilon$ et si $n < N$, alors $n \longleftarrow n + 1$ et aller à l'étape 1.
    - Si $\gamma_{k-1} - \gamma_k \geqslant \varepsilon$, alors poser $n = 0$ et aller à l'étape 1.

- **Etape 3.**
  Fin.

Remarque 4.3.2. Dans cet algorithme, il y a deux tests qui permettent de contrôler le nombre d'itérations :
- un test d'arrêt afin de limiter le nombre d'itérations k et d'éviter un nombre infini d'itérations $\longrightarrow$ condition du type "tant que $k < k_{\max}$" au commencement de l'algorithme,
- un test sur un compteur n qui permet d'autoriser au moins N itérations lorsque le paramètre γ ne diminue pas "suffisamment", c'est-à-dire quand $\gamma_{k-1} - \gamma_k < \varepsilon$. □

Pour le théorème 4.3.2, on propose soit d'utiliser les scalaires α_i obtenus dans le théorème 4.3.1, soit d'adapter l'algorithme ci-dessus au théorème 4.3.2. Cette adaptation se fait comme suit :

- ajouter une variable réelle $\mu_1 > 0$ qui intervient de la même façon que μ,
- ajouter une variable réelle $\beta \geqslant 0$ qui intervient de la même façon que les α_i,
- remplacer la matrice P par les $m+3$ matrices $\mathcal{F}$, $\mathcal{Q}$, Y_0, $\ldots$, Y_m,
- l'inégalité I_1 correspond à l'inégalité (4.56) en remplaçant le terme $(1,1)_b$ par

$$(1,1)_b = \left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i^v A_{t_i}\right)^T \mathcal{F} + \mathcal{F}\left(A_{t_0} + \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i^v A_{t_i}\right) + \kappa^2 \mu^{-1} I_n - \rho\mathcal{F} - \gamma I_n$$

- l'inégalité I_2 correspond soit à l'inégalité (4.58) ou à l'inégalité (4.59),
- l'inégalité I_3 qui correspond à l'inégalité (4.57) en remplaçant le terme $(1,1)_c$ par

$$(1,1)_c = \sum_{i=1}^{m}((\mathcal{Q}A_{t_i} - Y_i C)^T \Gamma_i^v + (\mathcal{Q}A_{t_i} - Y_i C)\Gamma_i^v) + (\mathcal{Q}A_{t_0} - Y_0 C)^T + (\mathcal{Q}A_{t_0} - Y_0 C) + \mu_1^{-1}\kappa^2 I_n + 2\beta\mathcal{Q} - \gamma I_n$$

est ajoutée aux problèmes d'optimisation à résoudre aux étapes 0, 1 et 2.

4.3.5 Exemple

Pour illustrer les développements ci-dessus sur la commande bang-bang, on considère le système stochastique (4.29) avec $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$, $d = 1$ et les matrices suivantes

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix},\ A_{t_1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.02 & 0.04 \\ 0 & 0.01 & -0.02 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix},\ A_{t_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_w = \begin{bmatrix} -3.5557 & -0.10952 & -0.47238 \\ 0.46643 & -4.031 & -0.80024 \\ -0.1 & 0.066667 & -3.4833 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La non linéarité est donnée par la fonction $\ell(x(t))$ suivante

$$\ell(x(t)) = \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \\ \sin(x_3(t)) \end{bmatrix}$$

qui vérifie les conditions (4.30) et (4.31) avec $\kappa = 1$.

4.3.5.1 Commande bang-bang par retour d'état

Dans un premier temps, on suppose que l'état est complètement mesuré afin de calculer une loi de commande bang-bang par retour d'état. Dans ce cas, l'équation de mesure (4.29b) est remplacée par (4.29b-bis).

En choisissant

$$\mu = 0.1,\ \rho = 20,$$

les inégalités (4.33) et (4.35) du théorème 4.3.1 ont généré les résultats suivants

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & -6.6099 & -3.7544 \\ -6.6099 & 20.449 & 5.4699 \\ -3.7544 & 5.4699 & 40.245 \end{bmatrix}, \ |\alpha_1| = 33, \ |\alpha_2| = 12.$$

Les simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes

$$x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama avec un pas d'échantillonnage $\mathrm{d}t = 0.001$ seconde (voir (1.32)).

Les figures 4.2 et 4.3 confirment l'efficience de l'approche proposée.

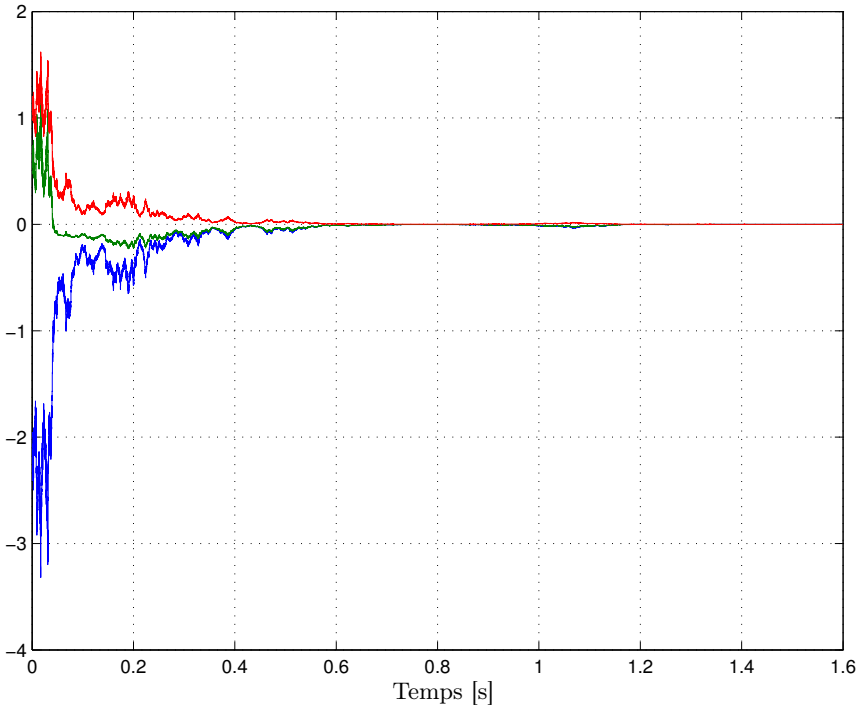


FIGURE 4.2 – Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert), état $x_3(t)$ (rouge).

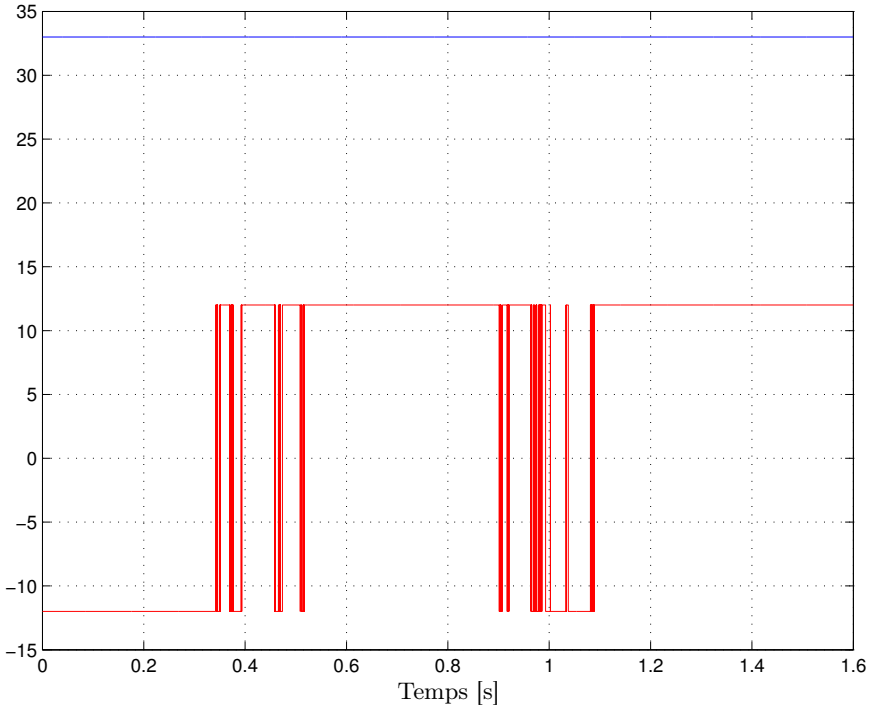


FIGURE 4.3 – Commande $u_1(t)$ (bleu), commande $u_2(t)$ (rouge).

Dans la figure 4.2, on constate que la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (4.29a) a bien été obtenue en appliquant la commande bang-bang (4.32). Dans la figure 4.3, on constate que la commande $u_1(t)$ est restée constante et égale à $|\alpha_1| = 33$, tandis que la commande $u_2(t)$ a commuté entre les valeurs $|\alpha_2| = 12$ et $-|\alpha_2| = -12$.

4.3.5.2 Commande bang-bang par retour d'état basé sur un observateur

Dans un premier temps, on applique une loi de commande bang-bang basée sur un observateur pour le système stochastique non linéaire (4.29a) avec un vecteur d'état partiellement mesuré (4.29b). Les valeurs numériques des paramètres de ce système sont données au début de la section 4.3.5, page 173.

L'hypothèse 2.3.1 est vérifiée.

En choisissant

$$\rho = 20,\ \mu = 0.1,\ \mu_1 = 0.1,\ \beta = 0.5,$$

les inégalités (4.56), (4.57) et (4.59) du théorème 4.3.2 ont généré les résultats suivants

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 4.3549 & 0.072979 & -0.30135 \\ 0.072979 & 3.4762 & 0.10534 \\ -0.30135 & 0.10534 & 4.1554 \end{bmatrix},\ \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 2.0862 & -1.0181 & 0.24947 \\ -1.0181 & 2.2513 & -0.27699 \\ 0.24947 & -0.27699 & 1.213 \end{bmatrix},$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} -508.04 & 32.021 \\ -483.45 & 259.53 \\ 18.119 & 738.98 \end{bmatrix},\ Y_1 = \begin{bmatrix} -2.7931 & -0.1995 \\ -3.3884 & 1.723 \\ 0.11783 & 4.6006 \end{bmatrix},\ Y_2 = \begin{bmatrix} -23.657 & 0.11182 \\ -23.453 & 11.66 \\ -0.04959 & 35.392 \end{bmatrix},$$

$|\alpha_1| = 0.1,\ |\alpha_2| = 0.1.$

Les gains $K_0 = \mathcal{Q}^{-1}Y_0$, $K_1 = \mathcal{Q}^{-1}Y_1$ et $K_2 = \mathcal{Q}^{-1}Y_2$ de l'observateur (4.47) sont

$$K_0 = \begin{bmatrix} -447.89 & 42.268 \\ -415.8 & 214.3 \\ 12.104 & 649.46 \end{bmatrix},\ K_1 = \begin{bmatrix} -2.6626 & 0.04505 \\ -2.7059 & 1.2874 \\ 0.026845 & 4.0775 \end{bmatrix},\ K_2 = \begin{bmatrix} -21.054 & 0.93328 \\ -19.972 & 9.4327 \\ -0.27147 & 31.139 \end{bmatrix}.$$

Les simulations ont été réalisées avec les conditions initiales suivantes

$$x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},\ \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama avec un pas d'échantillonnage $\mathrm{d}t = 0.001$ seconde (voir (1.32)).

Les figures 4.4 à 4.11 illustrent les résultats obtenus en simulation avec la commande bang-bang par retour d'état basé sur un observateur.

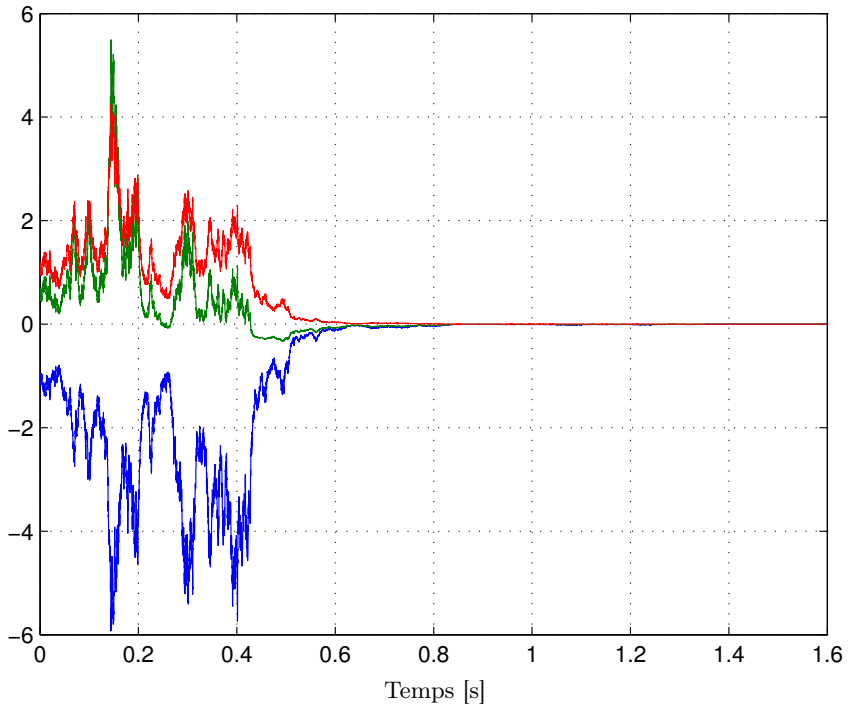


FIGURE 4.4 – Etat $x_1(t)$ (bleu), état $x_2(t)$ (vert), état $x_3(t)$ (rouge).

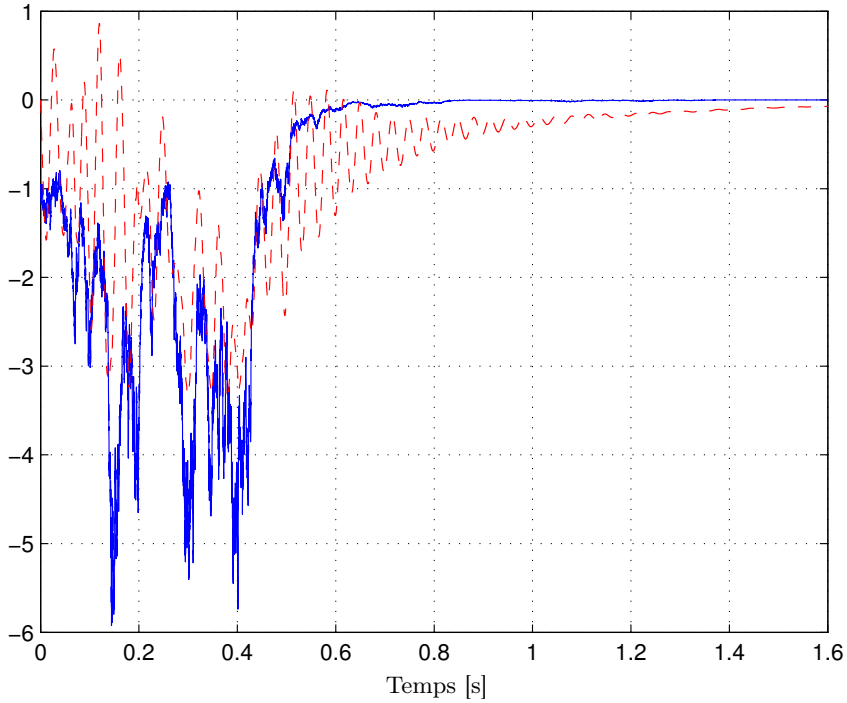


FIGURE 4.5 – Etat $x_1(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_1(t)$ (rouge, discontinu).

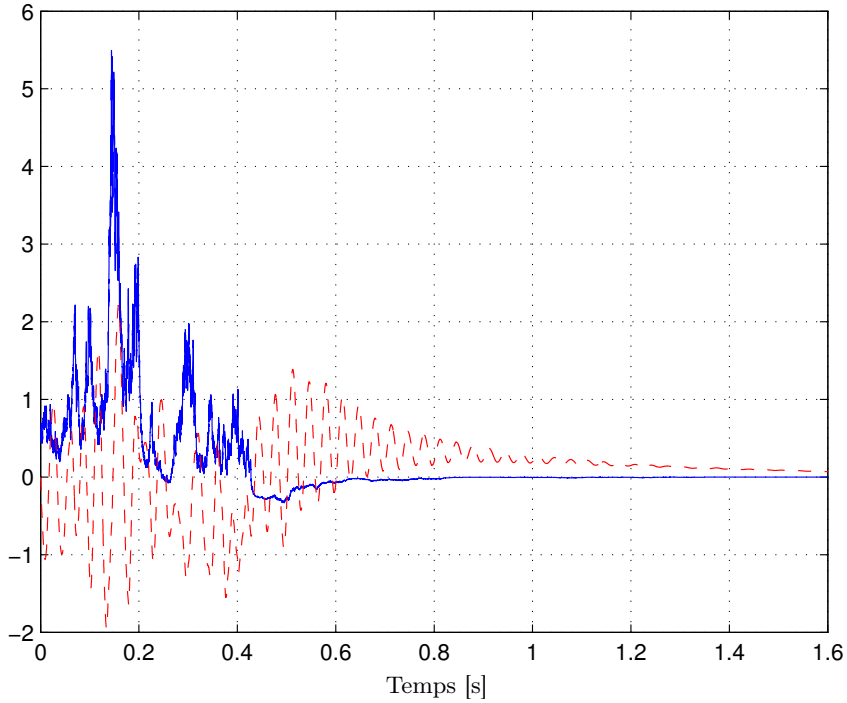


FIGURE 4.6 – Etat $x_2(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_2(t)$ (rouge, discontinu).

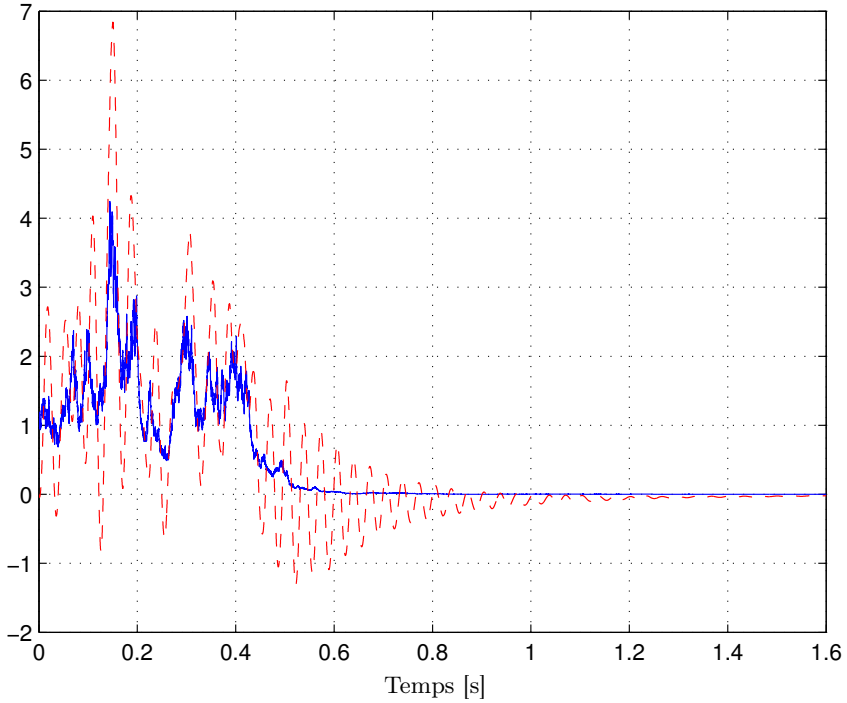


FIGURE 4.7 – Etat $x_3(t)$ (bleu, continu) et estimation $\widehat{x}_3(t)$ (rouge, discontinu).

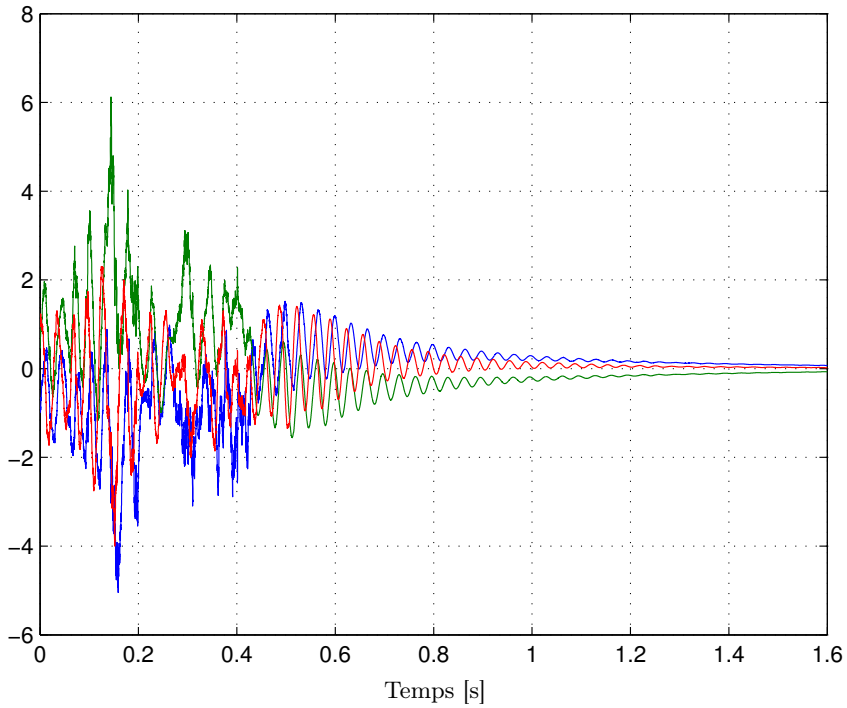


FIGURE 4.8 – Erreur d'observation.

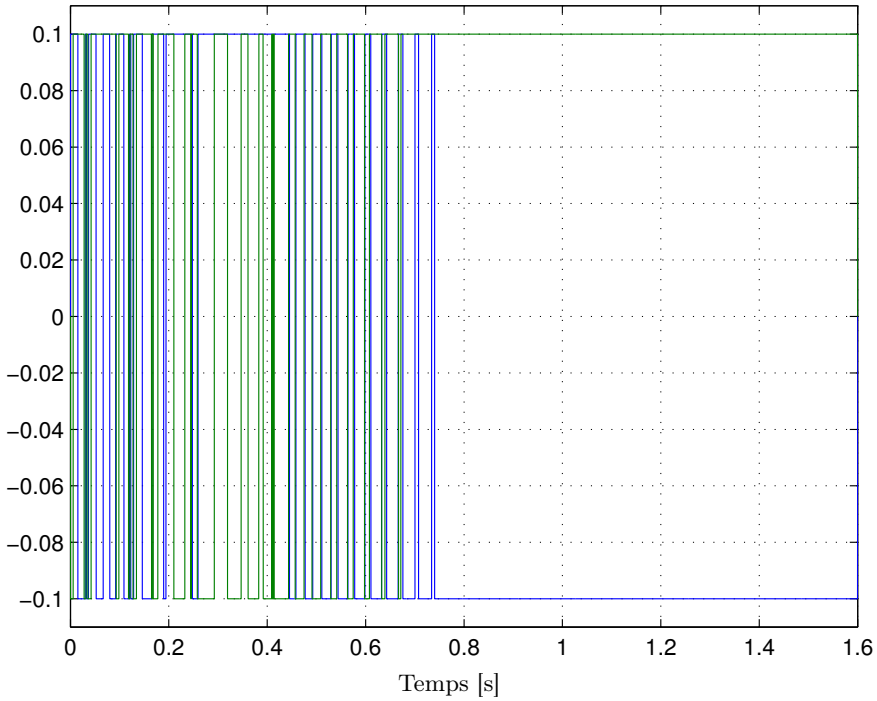


FIGURE 4.9 – Commande $u_1(t)$ (bleu) et commande $u_2(t)$ (vert).

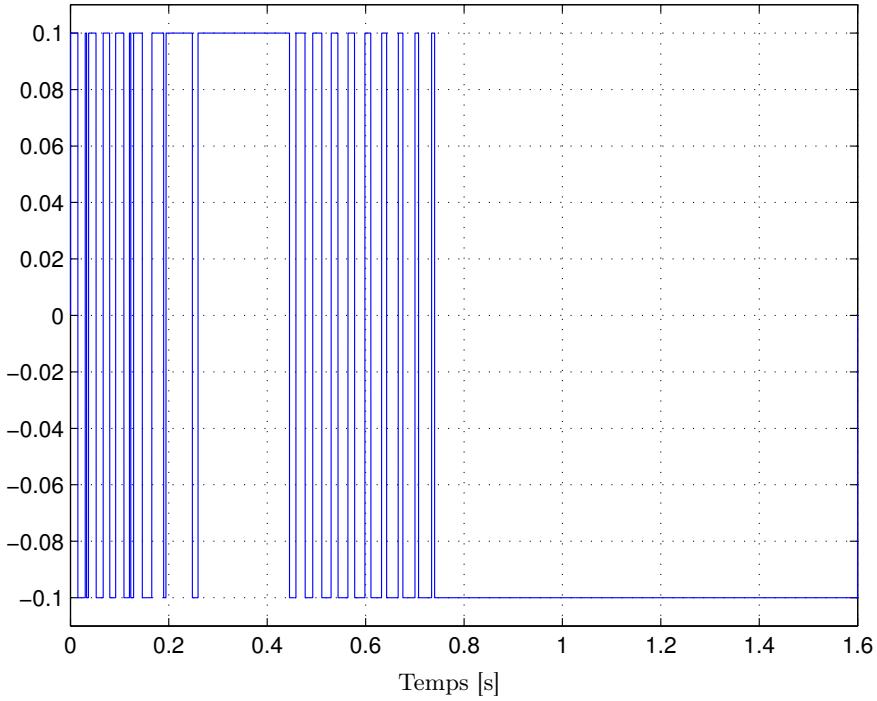


FIGURE 4.10 – Commande $u_1(t)$.

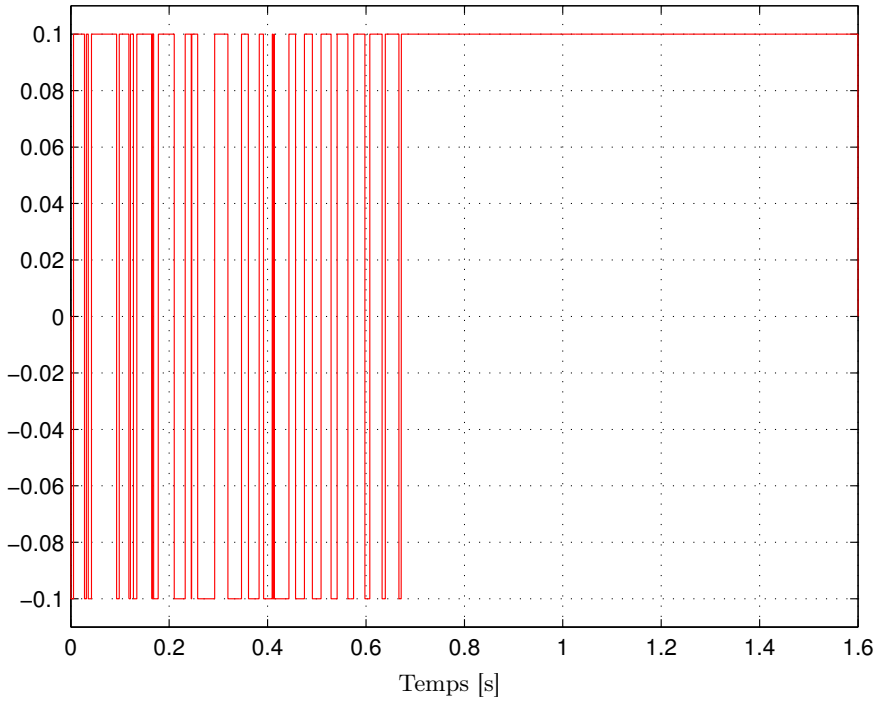


FIGURE 4.11 – Commande $u_2(t)$.

La commande bang-bang proposée a bien assuré la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EDS (4.29a) comme le montre la figure 4.4. De même, l'erreur d'estimation converge exponentiellement presque sûrement vers zéro comme l'illustre la figure 4.8. Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 montrent la convergence exponentielle presque sûre de l'estimation vers chacune des composantes du vecteur d'état de l'EDS (4.29a). Cette convergence est plus lente que la dynamique de l'EDS et comporte des composantes oscillatoires à hautes fréquences. Ces composantes oscillatoires à hautes fréquences montrent les limites de cette stratégie de commande lorsque l'état n'est pas complètement mesuré : sur les figures 4.9, 4.10 et 4.11, les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ n'arrivent pas à compenser ce comportement oscillatoire en boucle fermée qui n'existe pas sur l'état du système à commander (figure 4.4), mais sur l'estimation de cet état (figures 4.5, 4.6 et 4.7). On peut noter que ce comportement oscillatoire n'existe pas lorsque l'état est complètement mesuré (figure 4.2).

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux problèmes ont éte abordés.

Le premier problème concerne la détermination de conditions suffisantes pour garantir le rejet exponentiel, avec un taux de décroissance garanti, des perturbations additives affectant une EDS dont les bruits sont multiplicatifs. Ces conditions ont été obtenues en utilisant une approche de type Lyapunov. L'utilisation de ces conditions avec des fonctions de Lyapunov quadratiques a été étudiée. Un exemple illustre les résultats obtenus.

Le second problème traité est la stabilisation exponentielle presque sûre par retour d'état estimé d'une classe de systèmes stochastiques non linéaires avec des bruits multiplicatifs. Les mesures sont stochastiques. La loi de commande est de type bang-bang. Dans un premier temps, une loi de commande par retour d'état est calculée. Puis, un observateur permet de remplacer l'état du système dans la loi de commande par son estimation. La stabilité exponentielle presque

sûre a été démontrée en utilisant l'approche découplée développée dans le chapitre 2. Un algorithme permet de résoudre itérativement les inégalités assurant la stabilité exponentielle presque sûre en boucle fermée en "linéarisant" ces inégalités à chaque itération. La loi de commande proposée est testée sur un exemple.

Chapitre 5

Commande et filtrage des systèmes stochastiques singuliers

Sommaire

5.1 Introduction 184
5.2 Equations algébro-différentielles stochastiques non linéaires 185
5.2.1 Variables dynamiques et variables algébriques 185
5.2.2 Equations algébro-différentielles stochastiques d'indice 1, admissibilité et consistance des conditions initiales 186
5.2.2.1 Equations algébro-différentielles stochastiques d'indice 1 . . . 186
5.2.2.2 Equations algébro-différentielles stochastiques admissibles . . 188
5.2.2.3 Consistance des conditions initiales d'une équation algébro-différentielle stochastique 189
5.2.3 Fonctions de Lyapunov et calcul d'Itô pour les équations algébro-différentielles stochastiques 189
5.2.3.1 Fonctions de Lyapunov pour les équations algébro-différentielles stochastiques 189
5.2.3.2 Calcul d'Itô pour les équations algébro-différentielles stochastiques 190
5.3 Commande $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes singuliers stochastiques linéaires 192
5.3.1 Lemme borné réel pour les systèmes singuliers stochastiques linéaires . 192
5.3.2 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes singuliers stochastiques 196
5.3.2.1 Relations en boucle fermée 196
5.3.2.2 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état 199
5.3.2.3 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique 201
5.4 Observateurs pour une classe de systèmes singuliers stochastiques non linéaires 204
5.4.1 Systèmes singuliers stochastiques non linéaires considérés 204
5.4.2 Observateur d'ordre plein et expression de l'erreur d'observation 205
5.4.3 Paramétrage des matrices de l'observateur 207
5.4.4 Approche découplée pour la synthèse de l'observateur 208
5.4.5 Stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage 210
5.5 Conclusion 214
1 Conclusions 217
2 Perspectives et problèmes ouverts 219

5.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la stabilisation et à l'observation des systèmes modélisés par des équations algébro-différentielles stochastiques (EADS) en présence de bruits multiplicatifs.

Afin de mieux modéliser certaines classes de systèmes physiques, beaucoup d'attention a été accordée à l'étude des systèmes singuliers, appelés aussi systèmes descripteurs ou algébro-différentiels. Ces systèmes présentent de nombreux avantages car ils permettent une représentation beaucoup plus générale des systèmes que la forme classique non singulière. Les systèmes algébro-différentiels permettent de prendre en compte des contraintes algébriques (et non seulement dynamiques) et des comportements impulsionnels dans leur représentation [Dai89, Apl91, TMK94, MKOS97, UI99, Mas06, Mas07, YZZ13].

Donc, la combinaison de la représentation stochastique sous forme d'Itô et de la représentation sous forme descripteur nous permet de considérer une classe de systèmes physiques beaucoup plus large [Win02, Win03]. A notre connaissance, il y a très peu de résultats concernant ce type de systèmes dans la littérature dans les domaines de la commande et du filtrage à l'exception de ceux de Xia dans [Xia07] où l'auteur traite du filtrage d'une classe de systèmes stochastiques algébro-différentiels lorsque la dérive et la diffusion sont linéaires et que des retards sont présents dans la dérive, le type de stabilité considéré étant la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Dans [Win02, Win03], c'est la discrétisation des EADS et leur application à la modélisation des circuits électroniques qui sont traitées.

Deux problèmes sont abordés dans ce chapitre :

- développer un lemme borné réel pour cette classe de systèmes stochastiques et l'appliquer à la commande $\mathcal{H}_\infty$ (section 5.3),
- synthétiser un observateur pour une classe de systèmes singuliers stochastiques non linéaires en utilisant la stabilité exponentielle presque sûre (section 5.4).

Avant de proposer une solution à ces deux problèmes, il a fallu adapter la formule d'Itô aux EADS. C'est l'objet de la section 5.2. Pour ce faire, l'approche utilisée est basée sur la décomposition du pseudo-état $x(t)$ en deux parties en s'appuyant sur les travaux menés dans [Win03] : une partie dynamique $x_u(t)$ et une partie algébrique $x_v(t)$ (voir section 5.2.1). Cette méthode permet d'étendre les concepts d'indice 1 et d'admissibilité aux EADS (voir section 5.2.2), de formaliser le calcul d'Itô pour les EADS et d'adapter les conditions de type Lyapunov pour les stabilités exponentielle presque sûre (théorème 1.5.3) et exponentielle en moyenne quadratique (théorème 1.5.4) aux EADS (voir section 5.2.3).

Dans la section 5.3.1, un lemme borné réel est développé pour les systèmes stochastiques algébro-différentiels lorsque la dérive et la diffusion sont linéaires [1]. Ce lemme borné réel est ensuite appliqué, dans la section 5.3.2, à la synthèse d'une loi de commande $\mathcal{H}_\infty$ permettant de garantir que le système bouclé est admissible avec la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, tout en garantissant un niveau d'atténuation sur les perturbations à énergie bornée. Deux cas sont traités pour cette loi de commande $\mathcal{H}_\infty$: le retour d'état dans la section 5.3.2.2 et le retour de sortie dynamique dans la section 5.3.2.3.

Dans la section 5.4, c'est la stabilité exponentielle presque sûre qui est utilisée pour la synthèse d'un observateur pour un système stochastique décrit par une EADS avec des non linéarités one-sided Lipschitz. L'approche proposée se décompose en quatre étapes. Dans un premier temps, on reformule l'erreur d'observation sous une forme adéquate adaptée à l'EADS décrivant la dynamique du système stochastique (section 5.4.2), ce qui permet, dans un second temps, de paramétrer les matrices de l'observateur via un seul gain (section 5.4.3). Dans un troisième temps,

1. Le lemme borné réel pour les systèmes stochastiques non singuliers est rappelé dans la section 1.6.

on applique l'approche découplée explicitée dans les théorèmes 2.3.1 et 2.5.1 (section 5.4.4), ce qui permet, enfin, d'exprimer des conditions suffisantes garantissant que l'EADS associée à l'erreur d'estimation est admissible avec la stabilité exponentielle presque sûre (section 5.4.5).

5.2 Equations algébro-différentielles stochastiques non linéaires

On considère l'équation algébro-différentielle stochastique non linéaire suivante

$$E\,\mathrm{d}x(t) = f(x(t),t)\,\mathrm{d}t + g(x(t),t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{5.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le pseudo-état et $w \in \mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien multivariable indépendant et centré. La dérive $f(x(t),t)$ est module-intégrable (voir(1.8)) et la diffusion $g(x(t),t)$ est carré-intégrable (voir (1.9)). Les fonctions $f(x(t),t)$ et $g(x(t),t)$ vérifient

$$f(0,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(0,t) = 0 \tag{5.2}$$

et les conditions données par le théorème 1.4.4.

La matrice $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dans (5.1) est singulière, c'est-à-dire que

$$\mathrm{rang}(E) = r < n. \tag{5.3}$$

5.2.1 Variables dynamiques et variables algébriques

Le pseudo-état $x(t)$ dans l'EADS (5.1) peut être décomposé ainsi

$$x(t) = \underbrace{E^+Ex(t)}_{x_u(t)} + \underbrace{(I_n - E^+E)x(t)}_{x_v(t)} \tag{5.4}$$

où E^+ est une pseudo-inverse réflexive quelconque de E vérifiant $E = EE^+E$ et $E^+ = E^+EE^+$ (voir les sections A.2.1 et A.2.2 dans l'annexe A). Une pseudo-inverse réflexive vérifie $\mathrm{rang}(E^+) = \mathrm{rang}(E)$.

Soit les ensembles $\mathcal{S}_u$ et $\mathcal{S}_v$ définis par

$$\mathcal{S}_u = \{x_u(t) \mid x_u(t) = E^+Ex(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{5.5a}$$
$$\mathcal{S}_v = \{x_v(t) \mid x_v(t) = (I_n - E^+E)x(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{5.5b}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de $\mathcal{S}_u$ et de $\mathcal{S}_v$, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{S}_u \oplus \mathcal{S}_v, \tag{5.6}$$

ce qui est équivalent à $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}_u \cup \mathcal{S}_v$ et $\mathcal{S}_u \cap \mathcal{S}_v = \{0\}$. L'espace vectoriel $\mathcal{S}_u$ correspond à l'espace vectoriel $\overline{\mathcal{U}}$ et l'espace vectoriel $\mathcal{S}_v$ correspond à l'espace vectoriel $\overline{\mathcal{V}}$ définis dans les équations (A.2.5c), (A.2.5d) et (A.2.5f).

Dans la suite de ce chapitre, $x_u(t)$ est appelé la variable dynamique avec $\mathcal{S}_u = \{x_u(t)\}$ l'espace vectoriel des variables dynamiques et $x_v(t)$ est appelé la variable algébrique avec $\mathcal{S}_v = \{x_v(t)\}$ l'espace vectoriel des variables algébriques. Ainsi, on a les relations suivantes

$$Ex(t) = Ex_u(t) \qquad \text{et} \qquad 0 = Ex_v(t), \tag{5.7}$$
$$Ex_u(t) = 0 \Longleftrightarrow x_u(t) = 0 \Longleftrightarrow x(t) = x_v(t), \tag{5.8}$$

où les variables $x_u(t)$ et $x_v(t)$ sont données par (5.4).

5.2.2 Equations algébro-différentielles stochastiques d'indice 1, admissibilité et consistance des conditions initiales

5.2.2.1 Equations algébro-différentielles stochastiques d'indice 1

En utilisant les propriétés des pseudo-inverses (voir la section A.2 dans l'annexe A), on a l'équivalence suivante avec l'EADS (5.1)

$$\begin{bmatrix} EE^+ \\ I_n - EE^+ \end{bmatrix} E\,\mathrm{d}x(t) = \begin{bmatrix} EE^+ \\ I_n - EE^+ \end{bmatrix} (f(x(t),t)\,\mathrm{d}t + g(x(t),t)\,\mathrm{d}w(t))$$

$$\iff \begin{cases} E(\mathrm{d}x_u(t)+\mathrm{d}x_v(t)) = EE^+ f(x_u(t)+x_v(t),t)\,\mathrm{d}t + EE^+ g(x_u(t)+x_v(t),t)\,\mathrm{d}w(t) \\ 0 = (I_n - EE^+) f(x_u(t)+x_v(t),t)\,\mathrm{d}t + (I_n - EE^+) g(x_u(t)+x_v(t),t)\,\mathrm{d}w(t) \end{cases} \tag{5.9}$$

et l'EADS (5.1) est décomposée en deux parties : les contraintes dynamiques et les contraintes algébriques mises en évidence dans (5.9).

Afin que la solution $x(t)$ de l'EDS (5.1) ne soit pas directement affectée par le bruit $w(t)$, il faut que le bruit $w(t)$ n'apparaisse pas directement dans les contraintes algébriques et donc que la relation suivante [Win03]

$$0 = (I_n - EE^+) g(x_u(t) + x_v(t), t) \tag{5.10}$$

soit vérifiée pour tout $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (donc $\forall\, x_u(t) \in \mathcal{S}_u$ et $\forall\, x_v(t) \in \mathcal{S}_v$) et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Cette condition est satisfaite si

$$\mathrm{Im}(g(x_u(t) + x_v(t), t)) \subseteq \ker(I_n - EE^+) = \mathrm{Im}(E). \tag{5.11}$$

En insérant la contrainte (5.10) dans l'EADS (5.9) avec $Ex_v(t) = 0$, on obtient l'EADS suivante

$$\begin{aligned} E\,\mathrm{d}x_u(t) &= EE^+ f(x_u(t) + x_v(t), t)\,\mathrm{d}t + EE^+ g(x_u(t) + x_v(t), t)\,\mathrm{d}w(t) && \text{(5.12a)} \\ 0 &= (I_n - EE^+) f(x_u(t) + x_v(t), t) && \text{(5.12b)} \\ 0 &= (I_n - EE^+) g(x_u(t) + x_v(t), t) && \text{(5.12c)} \end{aligned}$$

Puisque

$$E^+ E x_u(t) = x_u(t), \tag{5.13}$$

l'EADS (5.12) est équivalente à

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_u(t) &= E^+ f(x_u(t) + x_v(t), t)\,\mathrm{d}t + E^+ g(x_u(t) + x_v(t), t)\,\mathrm{d}w(t) && \text{(5.14a)} \\ 0 &= (I_n - EE^+) f(x_u(t) + x_v(t), t) && \text{(5.14b)} \\ 0 &= (I_n - EE^+) g(x_u(t) + x_v(t), t) && \text{(5.14c)} \end{aligned}$$

où $x_u(t)$ joue le rôle de l'état, tandis que $x_v(t)$ joue celui d'une entrée exogène.

Afin qu'il n'y ait pas de problème de causalité dans l'EADS (5.1) (ou dans l'EADS (5.14)), il faut que les contraintes algébriques données par (5.14b) aient une solution unique $x_v(t)$ en fonction des variables dynamiques $x_u(t)$. Dans le cas contraire, la connaissance d'une condition initiale $x(0) = x_0$ n'est pas suffisante pour obtenir la solution de l'EADS (5.1) car il faudrait aussi avoir des informations sur $x_v(t)$ avec $t > 0$. La contrainte (5.14b) possède une solution unique $x_v(t)$ exprimée en fonction de $x_u(t)$ si [Win03]

$$\det\left(E + (I_n - EE^+) \frac{\mathrm{d}f(x(t),t)}{\mathrm{d}x} \right) \neq 0 \tag{5.15}$$

et si la solution de l'équation (5.14b) peut s'écrire ainsi

$$x_v(t) = \widehat{v}(x_u(t), t) \tag{5.16}$$

où $x_v(t)$ existe globalement et est unique [Win03].

Les développements faits dans cette section permettent de définir une EADS d'indice 1.

Définition 5.2.1 (EADS d'indice 1). *[Win03] L'EADS (5.1) est d'indice 1 si*

- *les contraintes algébriques (5.14b) ont une solution unique pour les variables algébriques $x_v(t)$ en fonction des variables dynamiques, c'est-à-dire que la condition (5.15) est satisfaite et si la fonction $\widehat{v}$ définie dans (5.16) existe globalement et de manière unique,*
- *les bruits n'affectent pas les contraintes algébriques, c'est-à-dire que la condition*

$$0 = (I_n - EE^+)g(x(t), t) \tag{5.17}$$

est satisfaite $\forall\, x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\forall\, t \geqslant 0$.

En insérant la solution $x_v(t)$ dans l'EDS (5.12a), on obtient l'EDS régulière suivante

$$\mathrm{d}x_u(t) = E^+ f(x_u(t) + \widehat{v}(x_u(t), t), t)\,\mathrm{d}t + E^+ g(x_u(t) + \widehat{v}(x_u(t), t), t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{5.18}$$

et la solution $x_u(t)$ appartient au sous-espace invariant $\mathcal{S}_u$. On peut alors énoncer la remarque suivante qui est importante pour l'étude des conditions de stabilité de l'EADS (5.1) avec des fonctions de Lyapunov.

Remarque 5.2.1 (Stabilité du point d'équilibre $x(t) = 0$). Si l'EADS (5.1) est d'indice 1, alors le point d'équilibre $x(t) = 0$ de l'EADS (5.1) est stable si et seulement si le point d'équilibre $x_u(t)$ de l'EDS (5.18) est stable. □

Remarque 5.2.2 (Cas des équations algébro-différentielles ordinaires). Soit l'équation algébro-différentielle ordinaire (EADO) suivante

$$E\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{5.19}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le pseudo-état et la matrice E est singulière avec $\mathrm{rang}(E) = r < n$.

Puisque le terme de diffusion est nul ($g(x(t), t) = 0$), on peut appliquer les développements faits dans les sections 5.2.1 et 5.2.2.1 à l'EADO (5.19). Cette EADO sera d'indice 1 si les contraintes algébriques (5.14b) ont une solution unique pour les variables algébriques $x_v(t)$ en fonction des variables dynamiques, c'est-à-dire que la condition (5.15) est satisfaite et si la fonction $\widehat{v}$ définie dans (5.16) existe globalement et de manière unique.

Dans le cas où l'EADO est linéaire, c'est-à-dire si elle s'écrit comme suit

$$E\dot{x}(t) = A_t x(t) \tag{5.20}$$

il est montré dans [Dai89, MW01] que l'EADO (5.20) est d'indice 1 si et seulement si

- l'EADO (5.20) est régulière, c'est-à-dire qu'elle possède une solution unique $x(t)$,
- l'EADO (5.20) est causale.

L'EADO (5.20) est régulière si et seulement si [Dai89, MW01]

$$\det(sE - A_t) \not\equiv 0 \tag{5.21}$$

avec $s \in \mathbb{C}$.

Si l'EADO (5.20) est régulière, alors elle est causale si et seulement si [Dai89, MW01]

$$\deg(\det(sE - A_t)) = \operatorname{rang}(E) \tag{5.22}$$

avec $s \in \mathbb{C}$.

On peut donc en conclure que l'EADO (5.20) est d'indice 1 si et seulement si les conditions (5.21) et (5.22) sont satisfaites ou si et seulement si (voir (5.15))

$$\det\big(E + (I_n - EE^+)A_t\big) \neq 0. \tag{5.23}$$

Si l'EADO (5.20) est régulière, alors il existe deux matrices $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\det(P) \neq 0$ et $\det(Q) \neq 0$ telles que [Dai89, MW01]

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N_{t_2} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad QAP = \begin{bmatrix} A_{t_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

où $n_1 + n_2 = n$ et la matrice N_{t_2} est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $N_{t_2}^k = 0$. L'indice de l'EADO (5.24) est k. L'EADO (5.24) est d'indice 1 si $N_{t_2} = 0$ dans (5.24).

La décomposition donnée dans (5.24) est appelée forme de Kronecker-Weierstrass de l'EADO (5.20).

La causalité est équivalente à l'absence de modes impulsionnels (aussi appelés modes infinis). Ces modes impulsifs sont les solutions s de l'équation $\det(sN_{t_2} - I_{n_2}) = 0$. □

En utilisant les développements faits dans la remarque 5.2.2, l'EADS

$$E\,\mathrm{d}x(t) = A_t x(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d} A_{w_i} x(t)\,\mathrm{d}w(t) \tag{5.25}$$

est d'indice 1 si les conditions (5.21) et (5.22) sont satisfaites et si

$$0 = (I_n - EE^+)\begin{bmatrix} A_{w_1} & \dots A_{w_d} \end{bmatrix}. \tag{5.26}$$

On peut remplacer les conditions (5.21) et (5.22) par (5.23) et la condition (5.26) par

$$\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} A_{w_1} & \dots A_{w_d} \end{bmatrix}\right) \subseteq \operatorname{Im}(E). \tag{5.27}$$

5.2.2.2 Equations algébro-différentielles stochastiques admissibles

En étendant la notion d'admissibilité d'une équation algébro-différentielle ordinaire définie dans [MKOS97] au cas des EADS non linéaires, on obtient la définition suivante.

Définition 5.2.2 (**EADS admissible**). *[BZSM13a, BZSM14b] L'EADS (5.1) est admissible*

- *l'EADS (5.1) est d'indice 1,*
- *le point d'équilibre de l'EADS (5.1) est stable.*

La notion de stabilité retenue dans la définition 5.2.2 dépend du problème à résoudre : dans la section 5.3, il s'agit de la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, tandis que dans la section 5.4, il s'agit de la stabilité exponentielle presque sûre.

5.2.2.3 Consistance des conditions initiales d'une équation algébro-différentielle stochastique

Définition 5.2.3 (Condition initiale consistante). *La condition (5.14c) étant supposée satisfaite quels que soient $x_u(t) \in \mathcal{S}_u$, $x_v(t) \in \mathcal{S}_v$ et $t \geqslant 0$, une condition initiale $x_0 = x(0) = x_u(0) + x_v(0)$ sera consistante pour l'EADS (5.1) si et seulement si la condition suivante*

$$(I_n - EE^+)f(x_u(0) + x_v(0), 0) = 0 \tag{5.28}$$

est satisfaite.

Si l'EADS (5.1) est d'indice 1, alors toutes les initialisations consistantes sont données par $x_0 = x(0) = x_u(0) + x_v(0)$ avec $x_u(0) \in \mathcal{S}_u$ et $x_v(0) = \widehat{v}(x_u(0), 0)$.

5.2.3 Fonctions de Lyapunov et calcul d'Itô pour les équations algébro-différentielles stochastiques

5.2.3.1 Fonctions de Lyapunov pour les équations algébro-différentielles stochastiques

Dans cette section, les fonctions de Lyapunov pour l'EADS (5.1) sont les mêmes que celles qui sont utilisées pour les équations algébro-différentielles ordinaires dans [MKOS97, TK98, RA00, ZLX02]. Ces fonctions de Lyapunov quadratiques, qui sont employées dans [Xia07, BZSM13a, BZSM14b], sont données par

$$V(x(t)) = x^T(t)E^T P x(t) \tag{5.29}$$

où la matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifie la contrainte

$$E^T P = P^T E \geqslant 0. \tag{5.30}$$

On a donc $V(x(t)) = x^T(t)E^T P x(t) = x^T(t)P^T E x(t) \geqslant 0$.
Les relations (5.4) et (5.29) donnent

$$\begin{aligned} V(x_u(t) + x_v(t)) &= (x_u^T(t) + x_v^T(t))E^T P(x_u(t) + x_v(t)) \\ &= x_u^T(t)E^T P x_u(t) + x_u^T(t)E^T P x_v(t) + \underbrace{x_v^T(t)E^T P x_u(t) + x_v^T(t)E^T P x_v(t)}_{=0} \\ &= x_u^T(t)E^T P x_u(t) + \underbrace{x_u^T(t)P^T E x_v(t)}_{=0} \\ &= x_u^T(t)E^T P x_u(t) = x_u^T(t)P^T E x_u(t) = V(x_u(t)). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Remarque 5.2.3 (Positivité de la fonction de Lyapunov $V(x(t))$). Du fait de la remarque 5.2.1 et en utilisant la relation (5.31), la fonction de Lyapunov $V(x(t))$ donnée dans (5.29) sera strictement définie positive si $V(x_u(t)) > 0$ (et donc $V(x_u(t)) = 0$ si et seulement si $x_u(t) = 0$). Ainsi, $x_u(t)$ est le "vrai" état, tandis que $x(t)$ est le pseudo-état. □

On obtient donc

$$V_x(x(t)) = V_{x_u}(x_u(t)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_{u_1}} & \cdots & \dfrac{\partial V}{\partial x_{u_n}} \end{bmatrix} = x_u^T(t)E^T P + x_u^T(t)P^T E = 2x_u^T(t)E^T P, \tag{5.32}$$

$$V_{xx}(x(t)) = V_{x_u x_u}(x_u(t)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_{u_1}\partial x_{u_1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_{u_1}\partial x_{u_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_{u_n}\partial x_{u_1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_{u_n}\partial x_{u_n}} \end{bmatrix} = E^T P + P^T E = 2E^T P. \tag{5.33}$$

5.2.3.2 Calcul d'Itô pour les équations algébro-différentielles stochastiques

Afin de simplifier les notations et sans perte de généralité, on suppose que les fonctions f et g dans l'EADS (5.1) ne dépendent pas explicitement du temps.

L'application de la formule d'Itô sur l'EDS (5.14a) donne

$$\mathrm{d}V(x_u(t)) = \mathfrak{L}V(x_u(t))\,\mathrm{d}t + \mathfrak{B}V(x_u(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{5.34}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}V(x_u(t)) &= f^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T V_{x_u}^T(x_u(t)) \\
&\quad +\frac{1}{2}\operatorname{tr}(g^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T V_{x_u x_u}(x_u(t))E^+ g(x_u(t)+x_v(t))), \quad (5.35a)\\
\mathfrak{B}V(x_u(t)) &= 2g^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T V_{x_u}^T(x_u(t)). \quad (5.35b)
\end{aligned}$$

En utilisant la fonction de Lyapunov définie en (5.29) et (5.30) avec (5.34) et (5.35), on obtient

$$\begin{aligned}
f^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T V_{x_u}^T(x_u(t)) &= f^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T E^T P x_u(t) \\
&\quad +x_u^T(t)P^T EE^+ f(x_u(t)+x_v(t)), \quad (5.36a)\\
g^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T V_{x_u x_u}(x_u(t))E^+ g(x_u(t)+x_v(t)) & \\
= 2g^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T E^T P E^+ g(x_u(t)+x_v(t)), \quad (5.36b)&\\
2g^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T V_{x_u}^T(x_u(t)) = 2g^T(x_u(t)+x_v(t))(E^+)^T E^T P x_u^T(t). \quad (5.36c)&
\end{aligned}$$

La formule d'Itô ayant été sur l'EDS (5.14a), les relations (5.14b) et (5.14c) sont donc vérifiées et, puisque $V(x(t)) = V(x_u(t))$ (voir (5.31)), on a

$$x_u^T(t)P^T E = x_u^T(t)E^T P = x^T(t)E^T P = x^T(t)P^T E \tag{5.37}$$

et les relations suivantes

$$\begin{aligned}
x_u^T(t)P^T EE^+ f(x_u(t)+x_v(t)) &= x^T(t)P^T f(x(t)), \quad (5.38a)\\
x_u^T(t)P^T EE^+ g(x_u(t)+x_v(t)) &= x^T(t)P^T g(x(t)), \quad (5.38b)
\end{aligned}$$

sont donc satisfaites.

En insérant (5.38a) dans (5.36a) et (5.38b) dans (5.36c), la formule d'Itô donnée par (5.34), (5.35a) et (5.35b) devient

$$\mathrm{d}V(x(t)) = \mathfrak{L}V(x(t))\,\mathrm{d}t + \mathfrak{B}V(x(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{5.39}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}V(x(t)) &= f^T(x(t))Px(t)+x^T(t)P^T f(x(t))+\operatorname{tr}(g^T(x(t))(E^+)^T E^T P E^+ g(x(t))), \quad (5.40a)\\
\mathfrak{B}V(x(t)) &= 2x^T(t)P^T g(x(t)). \quad (5.40b)
\end{aligned}$$

Lemme 5.2.1 (Formule d'Itô pour une EADS (version 1)). *[BZSM13a] Soit l'EADS (5.1), la formule d'Itô appliquée à la fonction de Lyapunov $V(x(t))$ définie par (5.29) et (5.30) est donnée par (5.39), (5.40a) et (5.40b) si les conditions*

$$\begin{aligned}
0 &= (I_n - EE^+)f(x(t)), \quad (5.41a)\\
0 &= (I_n - EE^+)g(x(t)). \quad (5.41b)
\end{aligned}$$

sont satisfaites.

Démonstration. Conséquence directe des calculs développés dans la section 5.2. •

Remarque 5.2.4. La condition (5.41b) est identique à (5.10). Elle signifie que la solution $x(t)$ de l'EADS (5.1) n'est pas directement affectée par le bruit $w(t)$, c'est-à-dire que le bruit $w(t)$ n'apparaît pas directement dans les contraintes algébriques de l'EADS. Ainsi, par construction, la contrainte (5.41b) est automatiquement vérifiée (voir les EADS (5.9) et (5.12)). □

Remarque 5.2.5. Dans, [Xia07], les relations (5.39), (5.40a) et (5.40b) sont données sans démonstration et sans mentionner les contraintes (5.41a) et (5.41b). Ces deux contraintes, qui correspondent respectivement à (5.14b) et (5.14c), ont été utilisées pour obtenir (5.38a) et (5.38b), et donc (5.40a) et (5.40b). □

Avec (5.41b), on a $g^T(x(t))((E^+)^T E^T - I_n) = 0$, ce qui donne

$$\mathrm{tr}(g^T(x(t))(E^+)^T E^T P E^+ g(x(t))) = \mathrm{tr}(g^T(x(t)) P E^+ g(x(t)))$$

et la relation (5.40) se simplifie ainsi

$$\mathfrak{L}V(x(t)) = f^T(x(t))Px(t) + x^T(t)P^T f(x(t)) + \mathrm{tr}(g^T(x(t))PE^+ g(x(t))), \tag{5.42a}$$
$$\mathfrak{B}V(x(t)) = 2x^T(t)P^T g(x(t)). \tag{5.42b}$$

Le lemme 5.2.1 peut donc être reformulé comme suit.

Lemme 5.2.2 (Formule d'Itô pour une EADS (version 2)). *[BZSM14b, BZSM15a] Soit l'EADS (5.1), la formule d'Itô appliquée à la fonction de Lyapunov $V(x(t))$ définie par (5.29) et (5.30) est donnée par (5.39), (5.42a) et (5.42b) si les conditions*

$$0 = (I_n - EE^+)f(x(t)), \tag{5.43a}$$
$$0 = (I_n - EE^+)g(x(t)). \tag{5.43b}$$

sont satisfaites.

Démonstration. Conséquence directe des calculs développés dans la section 5.2. •

Remarque 5.2.6. Si la fonction de Lyapunov dépend du temps, alors il faut rajouter le terme $V_t(x(t)) = \dfrac{\partial V(x(t))}{\partial t}$ dans l'expression de $\mathfrak{L}V(x(t))$ donnée par (5.40a) ou par (5.42a). □

Les développements présentés dans la section 5.2 permettent de formuler des conditions pour la stabilité exponentielle presque sûre et pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre de l'EADS (5.1), notamment en s'appuyant sur les remarques 5.2.1 et 5.2.3. Ces conditions sont formulées dans les lemmes suivants.

Lemme 5.2.3 (Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre d'une EADS). *[BZSM14b, BZSM15a] On suppose que l'EADS (5.1) est d'indice 1. Le point d'équilibre de l'EADS (5.1) est exponentiellement presque sûrement stable si les conditions du théorème 1.5.3 sont satisfaites en remplaçant la condition (1.50a) par*

$$c_1\|x_u(t)\|^p \leqslant V(t, x_u(t)) \tag{5.44}$$

et en utilisant les formules (5.40a) et (5.40b) ou (5.42a) et (5.42b) pour $\mathfrak{L}V(t, x(t))$ et $\mathfrak{B}V(t, x(t))$, la variable $x_u(t)$ étant définie dans (5.4).

Démonstration. Conséquence directe des calculs développés dans la section 5.2. •

Lemme 5.2.4 (Stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre d'une EADS). *[BZSM13a] On suppose que l'EADS (5.1) est d'indice 1. Le point d'équilibre de l'EADS (5.1) est exponentiellement stable en moyenne quadratique si les conditions du théorème 1.5.4 sont satisfaites en remplaçant dans la condition (1.53) l'expression "*$c_1 \|x(t)\|^2 \leqslant V(t,x(t)) \leqslant c_0 \|x(t)\|^2$*" par*

$$c_1 \|x_u(t)\|^2 \leqslant V(t,x_u(t)) \leqslant c_0 \|x_u(t)\|^2 \tag{5.45}$$

et en utilisant les formules (5.40a) et (5.40b) ou (5.42a) et (5.42b) pour $\mathfrak{L}V(t,x(t))$ *et* $\mathfrak{B}V(t,x(t))$*, la variable* $x_u(t)$ *étant définie dans (5.4).*

Démonstration. Conséquence directe des calculs développés dans la section 5.2. •

5.3 Commande $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes singuliers stochastiques linéaires

Dans cette section, le lemme borné réel traité dans la section 1.6.1 du chapitre 1 est étendu au cas des EADS (section 5.3.1), puis un correcteur, dit "$\mathcal{H}_\infty$" est proposé afin de stabiliser une EADS et vérifier les conditions du lemme borné réel (section 5.3.2).

Comme cela est rappelé dans la section 1.6.1, le lemme borné réel consiste à donner des conditions sur un système dynamique afin que le gain entre l'énergie de l'entrée et celle de la sortie de ce système soit inférieur à une borne $\gamma > 0$ donnée. Dans le cas des systèmes décrits par des EDO, le lemme borné réel est formulé via des équations de Riccati dans [GD88, DGKF89], via des inégalités de Riccati dans [Wil71, AV73, SMN90] (voir théorème 1.6.1) et via des inégalités matricielles linéaires (appelées LMI) dans [BEFB94, GA94, IS94, EF96, SGC97] (voir théorème 1.6.1). Le correcteur $\mathcal{H}_\infty$ associé au lemme borné réel est obtenu en utilisant des propriétés des LMI démontrées dans [PZPB91].

Pour les systèmes singuliers, c'est-à-dire pour les systèmes décrits par une EADO, le lemme borné réel est formulé en termes de LMI dans [TMK94, MKOS97, UI99, RA00, RA02, Mas06, Mas07, MS08].

Dans le cas stochastique, c'est-à-dire lorsque le système est modélisé par une EDS avec des bruits multiplicatifs, le lemme borné réel est exprimé en termes de LMI lorsque la dérive et la diffusion sont linéaires dans [Mor95, DHS97, HP98, GLSY01, XC02, XC03] (voir théorème 1.6.2). Pour ces systèmes stochastiques, le gain entre l'énergie de l'entrée et celle de la sortie est remplacé par le gain entre la moyenne quadratique de l'énergie de l'entrée et celle de la sortie (voir le gain L_2 stochastique dans la définition 1.6.1). Une extension au cas des EDS non linéaires est donnée dans le théorème 1.6.3 et dans [HSRZ09] pour le cas bilinéaire. Les solutions proposées dans ces articles s'appuient sur la transformation en LMI des équations de Riccati associées à la stabilité exponentielle en moyenne quadratique étudiées dans [WW76].

5.3.1 Lemme borné réel pour les systèmes singuliers stochastiques linéaires

On considère le système singulier stochastique suivant

$$E\,\mathrm{d}x(t) = (A_t x(t) + B_t v(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d} (A_{w_i} x(t) + B_{w_i} v(t))\,\mathrm{d}w_i(t) \tag{5.46a}$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_{zv} v(t) \tag{5.46b}$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ pseudo-état,
- $v(t) \in \mathbb{R}^q \longrightarrow$ entrées exogènes (perturbations, référence, etc, ...),
- $z(t) \in \mathbb{R}^\ell \longrightarrow$ sorties contrôlées,
- $w(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien indépendant et centré où $w_i(t)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $w(t)$.

La matrice $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dans (5.46) est singulière, c'est-à-dire que

$$\text{rang}(E) = r < n. \tag{5.47}$$

Hypothèse 5.3.1 (Norme stochastique des entrées admissibles). *Dans la suite de la section 5.3, le signal exogène $v(t)$ vérifie la relation de bornitude suivante*

$$\|v\|_{\widehat{L}_2} < +\infty \tag{5.48}$$

avec

$$\|v\|^2_{\widehat{L}_2} = \mathbf{E}\Big\{\int_0^{+\infty} v^T(t)v(t)\,\mathrm{d}t\Big\} = \mathbf{E}\Big\{\int_0^{+\infty} \|v(t)\|^2\,\mathrm{d}t\Big\} = \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\Big\{\|v(t)\|^2\Big\}\,\mathrm{d}t, \tag{5.49}$$

c'est-à-dire que $v(t) \in \widehat{L}_2([0,+\infty);\mathbb{R}^q)$ où l'espace de signaux $\widehat{L}_2([0,+\infty);\mathbb{R}^q)$ est défini en (1.112).

En se basant sur la notion de gain L_2 stochastique donnée dans la définition 1.6.1, le système singulier stochastique (5.46) satisfait aux conditions du lemme borné réel si

- l'EADS (5.46a) avec $v(t) = 0$ est admissible : indice 1 et stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre (voir les définitions 5.2.1 et 5.2.2 et le lemme 5.2.4),
- le gain L_2 stochastique entre $v(t)$ et $z(t)$, donné dans la définition 1.6.1, est majoré par un réel $\gamma > 0$, $\forall\, v(t) \in \widehat{L}_2([0,+\infty);\mathbb{R}^q)$.

Vu la norme $\|v\|_{\widehat{L}_2}$ utilisée dans la définition du gain L_2 stochastique et dans l'hypothèse 5.3.1, c'est la stabilité en moyenne quadratique qui est retenue pour caractériser l'admissibilité de l'EADS (5.46a).

L'indice de performance γ est aussi appelé "coefficient d'atténuation" de l'entrée (ou de la perturbation) $v(t)$ ou critère $\mathcal{H}_\infty$ [HP98] car le gain L_2 stochastique est considéré comme une extension aux systèmes stochastiques de la norme $\mathcal{H}_\infty$ donnée dans la relation (1.107).

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour que le système singulier stochastique (5.46) satisfasse aux conditions du lemme borné réel.

Théorème 5.3.1 (Lemme borné réel pour les EADS). *[BZSM13a] Le système stochastique singulier (5.46) est admissible avec la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et satisfait le critère de performance suivant*

$$\|z\|^2_{\widehat{L}_2} \leqslant \gamma^2 \|v\|^2_{\widehat{L}_2}, \quad \forall\, v(t) \in \widehat{L}_2, v(t) \neq 0, x_0 = 0 \tag{5.50}$$

où $\gamma > 0$ est le facteur d'atténuation des perturbations $v(t)$ s'il existe une matrice P et deux scalaires $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ tels que les conditions suivantes

$$\text{Im}\Big(\begin{bmatrix} A_{w_1} & B_{w_1} & \dots & A_{w_d} & B_{w_d}\end{bmatrix}\Big) \subseteq \text{Im}(E) \tag{5.51}$$

$$E^T P = P^T E \geqslant 0 \tag{5.52}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} (1,1) & \star & C_z^T \\ (2,1) & (2,2) & D_{zv}^T \\ C_z & D_{zv} & -I_\ell \end{bmatrix} < 0 \tag{5.53}$$

sont satisfaites avec

$$(1,1) = A_t^T P + P^T A_t + \sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ A_{w_i} + \mu_1 E^T P + \mu_2 I_n,$$
$$(2,1) = B_t^T P + \sum_{i=1}^{d} B_w^T (E^+)^T P^T E E^+ A_{w_i},$$
$$(2,2) = \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ B_{w_i} - \gamma^2 I_q.$$

La démonstration de ce théorème se décompose en deux parties. Dans un premier temps, on montre que l'EADS (5.46a) est d'indice 1. La seconde partie de la démonstration est dédiée au coefficient d'atténuation des perturbations, γ, et à la stabilité exponentiellelle moyenne quadratique.

Démonstration.
1ère partie : indice 1 de l'EADS (5.46a).

Dans cette partie, on considère l'EADS (5.46a). En utilisant les notations introduites dans l'EADS (5.1), la dérive $f(x(t),t)$ est remplacée par $A_t x(t) + B_t v(t)$, tandis que la diffusion $g(x(t),t)$ l'est par $[\, A_{w_1} x(t) + B_{w_i} v(t) \ \ldots \ A_{w_d} x(t) + B_{w_d} v(t) \,]$.

Le bruit n'apparaît pas dans les contraintes algébriques si la condition (5.27) est vérifiée en remplaçant A_{w_i} par $[A_{w_i} \ B_{w_i}]$ avec $i = 1, \ldots, d$. La condition (5.51) garantit que la partie algébrique de l'EADS (5.46a) n'est pas affectée par le bruit $w(t)$.

La variable $v(t)$ intervenant linéairement de manière additive et la dérive de l'EADS (5.46a) étant linéaire en $x(t)$, si la condition (5.51) est vérifiée, alors l'équation (5.14b) a une solution unique $x_v(t)$ en fonction de $x_u(t)$ (voir la définition de $x_u(t)$ et de $x_v(t)$ dans (5.4)) si [Win03] (voir (5.15))

$$\det\left(E + (I_n - EE^+) \frac{\mathrm{d}f(x(t),t)}{\mathrm{d}x} \right) \neq 0.$$

Puisque $f(x(t),t)$ est remplacé par $A_t x(t) + B_t v(t)$, on a

$$E + (I_n - EE^+) \frac{\mathrm{d}f(x(t),t)}{\mathrm{d}x} = E + (I_n - EE^+) A_t$$

et cette condition devient (voir (5.23))

$$\det(E + (I_n - EE^+) A_t) \neq 0.$$

Dans [MW01], il est démontré que $\det(E + (I_n - EE^+)A_t) \neq 0$ est équivalent au fait que l'EADO

$$E\dot{x} = A_t x$$

est régulière (c'est-à-dire $\det(sE - A_t) \not\equiv 0$ [Dai89]) et n'a pas de modes impulsionnels (c'est-à-dire $\deg(\det(sE - A_t)) = \mathrm{rang}(E)$ [Dai89]). En utilisant le lemme 2 dans [MKOS97], cette EADO est régulière et n'a pas de modes impulsionnels si et seulement s'il existe une matrice P telle que les conditions (5.52) et

$$A_t^T P + P A_t < 0 \tag{5.54}$$

sont satisfaites.

L'inégalité (5.54) est vérifiée si la LMI (5.53) est satisfaite puisque, avec le bloc (1,1) de Ψ, on obtient

$$A_t^T P + P A_t \leqslant -\sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ A_{w_i} - \mu_1 E^T P - \mu_2 I_n < 0.$$

Ainsi, d'après la définition 5.2.1, l'EADS (5.46a) est d'indice 1 si les conditions (5.51), (5.52) et (5.53) sont satisfaites.

2ème partie : Atténuation des perturbations et stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

Maintenant, on considère que l'EADS (5.46a) est d'indice 1 (voir la 1ère partie de cette démonstration). Alors les conditions (5.41a) et (5.41b) sont vérifiées et on peut utiliser les relations (5.39), (5.40a) et (5.40b) pour appliquer la formule d'Itô à l'EADS (5.46a) avec la fonction de Lyapunov suivante $V(x(t)) = x^T(t) E^T P x(t)$ où la matrice P satisfait la relation (5.52). On obtient

$$\mathrm{d}V(x(t)) = \mathfrak{L}V(x(t))\,\mathrm{d}t + \mathfrak{B}V(x(t))\,\mathrm{d}w(t), \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}V(x(t)) = {} & x^T(t)\left(A_t^T P + P^T A_t + \sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ A_{w_i}\right) x(t) + 2x^T(t) P^T B_t v(t) \\ & + \sum_{i=1}^{d} v^T(t) B_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ B_{w_i} v(t) + 2\sum_{i=1}^{d} x^T(t) A_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ B_{w_i} v(t),\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\mathfrak{B}V(x(t)) = 2x^T(t) P^T \begin{bmatrix} A_{w_1} x(t) + B_{w_1} v(t) & \dots & A_{w_d} x(t) + B_{w_d} v(t) \end{bmatrix}. \tag{5.57}$$

Puisque le processus stochastique est non anticipatif, l'espérance et l'intégrale peuvent commuter [HP98], l'indice de performance (5.50) peut s'écrire comme suit

$$J_{zv} = \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\big(z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) + \mathrm{d}V(x(t))\big)\,\mathrm{d}t - \mathbf{E}(V(x(t)))_{t\to+\infty} + \mathbf{E}(V(x(t)))_{t=0}. \tag{5.58}$$

Puisque $x_0 = 0$, $\mathbf{E}(\mathfrak{B}V(x(t))) = 0$ et $\mathbf{E}(V(x(t)))_{t\to+\infty} \geqslant 0$, la relation (5.58) conduit à l'inégalité suivante

$$J_{zv} \leqslant \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\big(z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) + \mathfrak{L}V(x(t))\big)\,\mathrm{d}t. \tag{5.59}$$

L'inégalité (5.50) est vérifiée si $J_{zv} \leqslant 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{aligned} & z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) + \mathfrak{L}V(x(t)) + \mu_1 V(x(t)) + \mu_2 x^T(t) x(t) \\ & \qquad = \begin{bmatrix} x^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} (1,1) & \star \\ (2,1) & (2,2) \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \leqslant 0 \end{aligned} \tag{5.60}$$

où

$$(1,1) = A_t^T P + P^T A_t + \sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ A_{w_i} + C_z^T C_z + \mu_1 E^T P + \mu_2 I_n,$$

$$(2,1) = B_t^T P + \sum_{i=1}^{d} B_w^T (E^+)^T P^T E E^+ A_{w_i} + D_{zv}^T C_z,$$

$$(2,2) = \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ B_{w_i} + D_{zv}^T D_{zv} - \gamma^2 I_q.$$

L'inégalité (5.60) est satisfaite si

$$\Theta < 0. \tag{5.61}$$

L'application du lemme de Schur à l'inégalité (5.61) donne la LMI (5.53).

Si la stabilité exponentielle en moyenne quadratique est démontrée, alors l'indice de performance (5.50) est garanti si les relations (5.51), (5.52) et (5.53) sont satisfaites.

Pour démontrer la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, on considère que $v(t) = 0$ dans l'EADS (5.46a) et $\mathfrak{L}V(x(t))$ devient (voir (5.56) avec $v(t) = 0$)

$$\mathfrak{L}V(x(t)) = x^T(t) \left(A_t^T P + P^T A_t + \sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ A_{w_i} \right) x(t), \tag{5.62}$$

puis on utilise le lemme 5.2.4 avec le théorème 1.5.4.

Puisque $\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant -\mu_1 V(x(t))$ où $\mathfrak{L}V(x(t))$ est donné dans (5.62), la condition $\mathfrak{L}V(x(t)) \leqslant c_2 V(x(t))$ dans la relation (1.53) du thérorème 1.5.4 est satisfaite avec $c_2 = \mu_1 > 0$ si la LMI (5.53) est vérifiée.

Soit les variables dynamiques $x_u(t)$ et l'ensemble $\mathcal{S}_u = \{x_u(t)\}$ définis dans (5.4) et (5.5).

L'inégalité $A_t^T P + P^T A_t < 0$ est vérifiée puisque la LMI (5.61) est satisfaite. Il en découle, en utilisant la propriété (A.1.9b) sur les mesures de matrices (voir section A.1.2 dans l'annexe A), que la relation

$$-0.5\lambda_{\max}(-A_t^T P - P^T A_t) \leqslant \mathrm{Re}(\lambda_i(P^T A_t)) \leqslant 0.5\lambda_{\max}(A_t^T P + P^T A_t) < 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.63}$$

L'inégalité permet de déduire que toutes les valeurs propres de la matrice P sont non nulles et donc que $\det(P) \neq 0$.

On obtient donc $\mathrm{rang}(E^T P) = \mathrm{rang}(E) = \dim(\mathcal{S}_u)$ puisque $x_u(t) = E^+ E x(t)$ et que $\mathrm{rang}(E^+ E) = \mathrm{rang}(E)$ pour toutes les pseudo-inverses réflexives (voir la relation (A.2.14) dans section A.2.2 de l'annexe A).

Alors la condition (5.45) dans le lemme 5.2.4 est satisfaite avec $c_1 = \lambda_{\min}(E^T P)$ et $c_0 = \lambda_{\max}(E^T P)$.

La stabilité exponentielle en moyenne quadratique du point d'équilibre de l'EADS (5.46a) est donc démontrée et la démonstration est terminée. •

5.3.2 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes singuliers stochastiques

5.3.2.1 Relations en boucle fermée

On considère le système stochastique singulier suivant

$$\begin{aligned}
E\,\mathrm{d}x(t) &= (A_t x(t) + B_t v(t) + G_t u(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d} (A_{w_i} x(t) + B_{w_i} v(t))\,\mathrm{d}w_i(t) && \text{(5.64a)}\\
z(t) &= C_z x(t) + D_{zv} v(t) + D_{z_u} u(t) && \text{(5.64b)}\\
y(t) &= C_y x(t) + D_{yv} v(t) && \text{(5.64c)}
\end{aligned}$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ pseudo-état,

- $u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ commandes,
- $v(t) \in \mathbb{R}^q \longrightarrow$ entrées exogènes (perturbations, référence, etc, ..., sauf les commandes),
- $z(t) \in \mathbb{R}^\ell \longrightarrow$ sorties contrôlées,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p \longrightarrow$ sorties mesurées,
- $w(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien indépendant et centré où $w_i(t)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $w(t)$.

La matrice $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dans (5.64) est singulière, c'est-à-dire que

$$\operatorname{rang}(E) = r < n. \tag{5.65}$$

Le signal $v(t)$ vérifie l'hypothèse 5.3.1 ($\|v\|_{\widehat{L}_2} < +\infty$).

L'équation du correcteur $\mathcal{H}_\infty$ dynamique par retour de sortie dynamique $K(s)$ est donnée par

$$\begin{aligned} E_k\,\mathrm{d}x_k(t) &= (A_k x_k(t) + B_k y(t))\,\mathrm{d}t && \text{(5.66a)}\\ u(t) &= C_k x_k(t) + D_k y(t) && \text{(5.66b)} \end{aligned}$$

- $s \in \mathbb{C} \longrightarrow$ variable de Laplace,
- $x_k(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ pseudo-état du correcteur si $k < n$ ou état du correcteur si $k = n$,

et $E_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\operatorname{rang}(E_k) = k \leqslant n$, c'est-à-dire la matrice E_k est singulière si $k < n$ et régulière si $k = n$.

Insérer la loi de commande (5.66) dans le système (5.64) conduit au système en boucle fermée suivant

$$\begin{aligned} E_c\,\mathrm{d}x_c(t) &= (A_t^c x_c(t) + B_t^c v(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d} (A_{w_i}^c x_c(t) + B_{w_i}^c v(t))\,\mathrm{d}w_i && \text{(5.67a)}\\ z(t) &= C^c x_c(t) + D^c v(t) && \text{(5.67b)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_c &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_k \end{bmatrix},\ A_t^c = \begin{bmatrix} A_t + G_t D_k C_y & G_t C_k \\ B_k C_y & A_k \end{bmatrix},\ x_c(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix},\\ B_t^c &= \begin{bmatrix} B_t + G_t D_k D_{yv} \\ B_k D_{yv} \end{bmatrix},\ A_{w_i}^c = \begin{bmatrix} A_{w_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_{w_i}^c = \begin{bmatrix} B_{w_i} \\ 0 \end{bmatrix},\\ C^c &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_k C_y & D_{zu} C_k \end{bmatrix},\ D^c = D_{zv} + D_{zu} D_k D_{yv}. \end{aligned}$$

Les matrices du système en boucle fermée ci-dessus peuvent être réécrites comme suit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_t^c & B_t^c \\ C^c & D^c \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|c} A_t & 0 & B_t \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zv} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & G_t \\ I_n & 0 \\ \hline 0 & D_{zu} \end{array}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}}_{\Phi} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & I_n & 0 \\ C_y & 0 & D_{yv} \end{array}\right]\\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_t & \mathcal{B}_t \\ \mathcal{C}_z & D_{zv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{G}_t \\ \mathcal{D}_{zu} \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} \mathcal{C}_y & \mathcal{D}_{yv} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.68}$$

La synthèse d'un correcteur $\mathcal{H}_\infty$ (5.66) revient à déterminer une matrice Φ et une matrice E_k telles que le système en boucle fermée (5.67) satisfasse les conditions du lemme borné réel donné par le théorème 5.3.1.

Remarque 5.3.1 (Cas des mesures avec $D_{yu} \neq 0$). Dans l'équation des mesures (5.64c), les commandes $u(t)$ n'interviennent pas. Dans cette remarque, on considère le cas où l'équation des mesures fait intervenir les commandes $u(t)$. L'équation des mesures (5.64c) est alors remplacée par

$$\overline{y}(t) = C_y x(t) + D_{yv} v(t) + D_{yu} u(t) \tag{5.69}$$

avec un terme direct $D_{yu} \neq 0$. Avec cette nouvelle équation de mesure, le correcteur $K(s)$ donné par (5.66) est remplacé par le correcteur $\overline{K}(s)$ suivant

$$\begin{aligned} E_k \, \mathrm{d}x_k(t) &= (\overline{A}_k x_k(t) + \overline{B}_k \overline{y}(t)) \, \mathrm{d}t & \text{(5.70a)} \\ u(t) &= \overline{C}_k x_k(t) + \overline{D}_k \overline{y}(t) & \text{(5.70b)} \end{aligned}$$

La matrice E_k est la même dans (5.66) et (5.70).

On va étudier les conditions que doivent vérifier les matrices $\overline{A}_k$, $\overline{B}_k$, $\overline{C}_k$ et $\overline{D}_k$ afin que les relations en boucle fermée données par (5.64a), (5.64b), (5.64c) et (5.66), ou par (5.64a), (5.64b), (5.69) et (5.70) soient identiques.

La figure 5.1 montre comment obtenir des relations en boucle fermée identiques avec les correcteurs $K(s)$ et $\overline{K}(s)$: il faut que ce soit la même loi de commande $u(t)$ qui soit générée pour les correcteurs $K(s)$ et $\overline{K}(s)$.

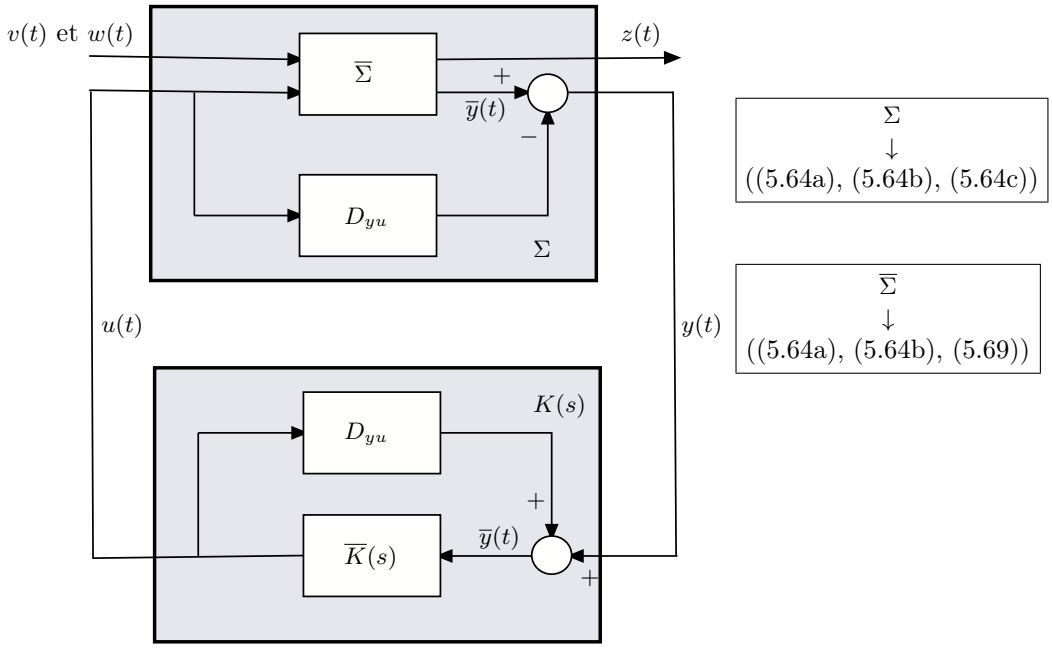


FIGURE 5.1 – Système en boucle fermée avec les correcteurs $K(s)$ et $\overline{K}(s)$.

Dans la figure 5.1, le correcteur $\overline{K}(s)$ est obtenu à partir du correcteur $K(s)$ avec la formule suivante

$$\overline{K}(s) = K(s)(I_p + D_{yu} K(s))^{-1}, \tag{5.71}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \overline{A}_k &= A_k - B_k (I_p + D_{yu} D_k)^{-1} D_{yu} C_k, & \text{(5.72a)} \\ \overline{B}_k &= B_k (I_p + D_{yu} D_k)^{-1}, & \text{(5.72b)} \\ \overline{C}_k &= C_k - D_k (I_p + D_{yu} D_k)^{-1} D_{yu} D_k, & \text{(5.72c)} \end{aligned}$$

$$\overline{D}_k = D_k(I_p + D_{yu}D_k)^{-1} \tag{5.72d}$$

avec la condition de bien-posé suivante [ZDG96]

$$\det(I_p + D_{yu}D_k) \neq 0. \tag{5.73}$$

Il est préférable de calculer un correcteur avec l'équation des mesures (5.64c) car les matrices des relations en boucle fermée s'écrivent alors de manière linéaire en fonction des matrices du correcteur (voir (5.68)). Si l'équation des mesures est donnée par (5.69), alors, les matrices des relations en boucle fermée ne s'écrivent pas de manière linéaire en fonction des matrices du correcteur car les relations en boucle fermée font apparaître le terme $(I_p + D_{yu}D_k)^{-1}$.

Afin de préserver la linéarité des relations en boucle fermée en fonction des matrices du correcteur à calculer lorsque l'équation des mesures est donnée par (5.69), il suffit de calculer un correcteur $K(s)$ en considérant que l'équation (5.64c) correspond aux mesures, puis d'implémenter le correcteur $\overline{K}(s)$ en utilisant les relations (5.71) ou (5.72) afin de prendre en compte la "vraie" équation des mesures donnée par (5.69). □

5.3.2.2 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état

Dans un premier temps, on va considérer un cas particulier : la commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état. Pour ce faire, on suppose que tout le pseudo-état $x(t)$ est mesuré, c'est-à-dire que l'équation des mesures (5.64c) est remplacée par

$$y(t) = x(t) \tag{5.64c-bis}$$

Le correcteur $\mathcal{H}_\infty$ (5.66) se simplifie comme suit

$$u(t) = D_k x(t). \tag{5.74}$$

et les relations en boucle fermée données par (5.67) deviennent

$$\begin{aligned}
E_c\,\mathrm{d}x_c(t) &= (A_t^c x_c(t) + B_t^c v)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d}(A_{w_i}^c x_c + B_{w_i}^c v(t))\,\mathrm{d}w_i(t) \\
&= ((A_t + G_t D_k)x_c(t) + B_t v(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d}(A_{w_i}x_c(t) + B_{w_i}v(t))\,\mathrm{d}w_i(t) \quad (5.75a) \\
z(t) &= C^c x_c(t) + D^c v(t) \\
&= (C_z + D_{zu}D_k)x_c(t) + D_{zv}v(t) \quad (5.75b)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&x_c(t) = x(t),\ E_c = E,\ A_t^c = A_t + G_t D_k,\ B_t^c = B_t,\ A_{w_i}^c = A_{w_i},\ B_{w_i}^c = B_{w_i}, \\
&C^c = C_z + D_{zu}D_k,\ D^c = D_{zv}.
\end{aligned}$$

Les relations en boucle fermée (5.75) se réécrivent comme suit

$$\begin{bmatrix} A_t^c & B_t^c \\ C^c & D^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_t + G_t D_k & B_t \\ C_z + D_{zu}D_k & D_{zv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_t & B_t \\ C_z & D_{zv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_t \\ D_{zu} \end{bmatrix} D_k \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.76}$$

L'application du lemme borné réel, donné par le théorème 5.3.1, au système stochastique singulier (5.75) permet de déduire le gain de retour d'état D_k grâce au théorème suivant.

Théorème 5.3.2 (Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état pour les EADS). *Il existe un gain de retour d'état D_k tel que le système stochastique singulier en boucle fermée (5.75) est admissible avec la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et satisfait le critère de performance suivant*

$$\|z\|_{\widehat{L}_2}^2 \leqslant \gamma^2 \|v\|_{\widehat{L}_2}^2, \quad \forall\, v(t) \in \widehat{L}_2, v(t) \neq 0, x_0 = 0, \tag{5.77}$$

où $\gamma > 0$ est le facteur d'atténuation des perturbations $v(t)$, s'il existe une matrice P et deux scalaires $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ tels que les conditions suivantes

$$\mathrm{Im}\Big(\begin{bmatrix} A_{w_1} & B_{w_1} & \dots & A_{w_d} & B_{w_d} \end{bmatrix}\Big) \subseteq \mathrm{Im}(E) \tag{5.78}$$

$$E^T P = P^T E \geqslant 0 \tag{5.79}$$

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d B_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ B_{w_i} - \gamma^2 I_q & D_{zv}^T \\ D_{zv} & -I_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1^T \end{bmatrix} < 0 \tag{5.80}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d B_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ B_{w_i} - \gamma^2 I_q & D_{zv}^T \\ D_{zv} & -I_\ell \end{bmatrix} < 0 \tag{5.81}$$

sont satisfaites avec $\mathcal{N}_1 = {D_{zu}^T}^\perp$.

Démonstration. On applique le théorème 5.3.1 au système (5.75) avec la fonction de Lyapunov candidate $V(x(t)) = x^T(t) E^T P x(t)$. Les conditions (5.51) et (5.78), d'une part, (5.52) et (5.79), d'autre part, étant deux à deux identiques, il reste à montrer que la condition (5.53) est vérifiée.

Avec le système (5.75), la condition (5.53) peut se reformuler comme suit

$$\Psi_s = \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & D_{zu} \end{bmatrix}}_{\Delta_s} \underbrace{\begin{bmatrix} P^T G_t D_k \\ D_k \end{bmatrix}}_{\Omega_s} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Xi_s} + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_k^T G_t^T P & D_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} (1,1)_s & \star & C_z^T \\ (2,1)_s & (2,2)_s & D_{zv}^T \\ C_z & D_{zv} & -I_\ell \end{bmatrix}}_{\Gamma_s} < 0 \tag{5.82}$$

avec

$$(1,1)_s = A_t^T P + P^T A_t + \sum_{i=1}^d A_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ A_{w_i} + \mu_1 E^T P + \mu_2 I_n,$$

$$(2,1)_s = B_t^T P + \sum_{i=1}^d B_w^T (E^+)^T P^T E E^+ A_{w_i},$$

$$(2,2)_s = \sum_{i=1}^d B_{w_i}^T (E^+)^T E^T P E^+ B_{w_i} - \gamma^2 I_q.$$

L'inégalité (5.82) a pour solutions P et D_k si et seulement s'il existe une matrice P telle que (voir lemme A.3.2 dans la section A.3.2 de l'annexe A)

$$\mathcal{N}_{\Delta_s}^T \Gamma_s \mathcal{N}_{\Delta_s} < 0 \tag{5.83}$$

$$\mathcal{N}_{\Xi_s}^T \Gamma_s \mathcal{N}_{\Xi_s} < 0 \tag{5.84}$$

où les matrices $\mathcal{N}_{\Delta_s}$ et ,$\mathcal{N}_{\Xi_s}$ vérifient $\mathcal{N}_{\Delta_s} = \Delta_s^{T\perp}$ et $\mathcal{N}_{\Xi_s} = \Xi_s^{\perp}$. En utilisant (5.76), les matrices $\mathcal{N}_{\Delta_s}$ et $\mathcal{N}_{\Xi_s}$ sont données par

$$\mathcal{N}_{\Delta_s} = \begin{bmatrix} 0_{n\times q} & 0 \\ I_q & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{bmatrix},\ \mathcal{N}_{\Xi_s} = \begin{bmatrix} 0_{n\times q} & 0 \\ I_q & 0 \\ 0 & I_\ell \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

avec $\mathcal{N}_1 = D_{zu}^{T\perp}$.

La LMI (5.80) est équivalente à la LMI (5.83) et la LMI (5.81) est équivalente à la LMI (5.84). •

Le gain D_k est obtenu en résolvant la LMI (5.82) avec la solution P donnée dans le théorème 5.3.2.

5.3.2.3 Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique

Dans cette section, on considère que les composantes du vecteur du pseudo-état $x(t)$ ne sont pas toutes disponibles, c'est-à-dire que l'équation de mesure est donnée par (5.64c) : le système stochastique considéré est donc (5.64). Le correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique est (5.66). Les relations en boucle fermée sont donc (5.67) et (5.68).

L'application du lemme borné réel, donné par le théorème 5.3.1, au système stochastique singulier (5.67) permet de déduire les matrices du correcteur (5.66) grâce au théorème suivant.

Théorème 5.3.3 (Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique pour les EADS). *[BZSM13a] Soit $E_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice avec $\mathrm{rang}(E_k) = k \leqslant n$. Il existe un correcteur $\mathcal{H}_\infty$ $K(s)$ donné par (5.66) tel que le système stochastique singulier en boucle fermée (5.67) est admissible avec la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et satisfait le critère de performance suivant*

$$\|z_c\|_{\widehat{L}_2}^2 \leqslant \gamma^2 \|v\|_{\widehat{L}_2}^2, \quad \forall\, v(t) \in \widehat{L}_2, v(t) \neq 0, x_0 = 0, \tag{5.86}$$

où $\gamma > 0$ est le facteur d'atténuation des perturbations $v(t)$, s'il existe des matrices S, N_1, N_2, $\overline{S}$ et Z, et deux scalaires $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ tels que les conditions

$$\begin{bmatrix} E^T S & E^T N_1 \\ E_k^T N_2 & E_k^T \overline{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^T E & N_2^T E_k \\ N_1^T E & \overline{S}^T E_k \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.87}$$

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^T \overline{\overline{E}} B_{w_i} - \gamma^2 I_q & D_{zv}^T \\ D_{zv} & -I_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{5.88}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_2^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_3^T & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,1)_{(5.89)} & \star & C_z^T \\ B_t^T S + \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^T \overline{\overline{E}} A_{w_i} & \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^T \overline{\overline{E}} B_{w_i} - \gamma^2 I_q & D_{zv}^T \\ C_z & D_{zv} & -I_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \end{bmatrix} < 0 \tag{5.89}$$

$$EZ = \begin{bmatrix} A_{w_1} & B_{w_1} & \dots & A_{w_d} & B_{w_d} \end{bmatrix} \tag{5.90}$$

sont satisfaites, où

$$(1,1)_{(5.89)} = A_t^T S + S^T A_t + \sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^T \overline{\overline{E}} A_{w_i} + \mu_1 E^T S + \mu_2 I_n$$

et où $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{E}}^T = (E^+)^T E^T S E^+$, $\mathcal{N}_1 = D_{zu}^{T\,\perp}$, $\mathcal{N}_2 = C_y^{\perp}$ *et* $\mathcal{N}_3 = D_{yv}^{\perp}$.

Une fois que les matrices S, N_1, N_2, $\overline{S}$ *et* Z *sont trouvées, les matrices* A_k, B_k, C_k *et* D_k *du correcteur (5.66) sont obtenues en résolvant la LMI suivante*

$$\Psi_c < 0 \tag{5.91}$$

où

$$P_c = \begin{bmatrix} S & N_1 \\ N_2 & \overline{S} \end{bmatrix}, \ \Phi = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$$

et où la matrice Ψ_c *est donnée par (5.93).*

Démonstration. On applique le théorème 5.3.1 au système bouclé (5.67) avec la fonction de Lyapunov candidate $V_c(x_c(t)) = x_c^T(t) E_c^T P_c x_c(t)$ satisfaisant la condition $E_c^T P_c = P_c^T E_c \geqslant 0$. La matrice P_c est décomposée comme suit

$$P_c = \begin{bmatrix} S & N_1 \\ N_2 & \overline{S} \end{bmatrix} \tag{5.92}$$

où $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et, en utilisant (5.68), la LMI (5.52) est donc équivalente à la LMI (5.87).

En utilisant (5.68), la LMI (5.53) appliquée au système en boucle fermée (5.67) peut être écrite comme suit

$$\Psi_c = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{zu} \end{bmatrix}}_{\Delta_c} \underbrace{\begin{bmatrix} P_c^T \mathcal{G}_t \Phi & P_c^T \mathcal{G}_t \Phi \\ \Phi & \Phi \end{bmatrix}}_{\Omega_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{C}_y & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{yv} & 0 \end{bmatrix}}_{\Xi_c} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_y^T & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{yv}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T \mathcal{G}_t^T P_c & \Phi^T \\ \Phi^T \mathcal{G}_t^T P_c & \Phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{zu}^T \end{bmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} (1,1)_c & \star & \mathcal{C}_z^T \\ (2,1)_c & (2,2)_c & D_{zv}^T \\ \mathcal{C}_z & D_{zv} & -I_\ell \end{bmatrix}}_{\Gamma_c} < 0 \tag{5.93}$$

où (on a utilisé $E_c^T P_c = P_c^T E_c$)

$$\begin{aligned} (1,1)_c &= \mathcal{A}_t^T P_c + P_c^T \mathcal{A}_t + \sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^{c\,T} \overline{E} A_{w_i}^c + \mu_1 E_c^T P_c + \mu_2 I_{2n} \\ &= \begin{bmatrix} A_t^T S + S^T A_t & A_t^T N_1 \\ N_1^T A_t & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{d} \begin{bmatrix} A_{w_i}^T \overline{\overline{E}} A_{w_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 E^T S + \mu_2 I_n & \mu_1 E^T N_1 \\ \mu_1 E_k^T N_2 & \mu_1 E_k^T \overline{S} + \mu_2 I_n \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{5.94}$$

$$(2,1)_c = \mathcal{B}_t^T P_c + \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^{cT}\,\overline{E}\,A_{w_i}^c = \begin{bmatrix} B_t^T S & B_t^T N_1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{d} \begin{bmatrix} B_{w_i}^T \overline{\overline{E}} A_{w_i} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.95}$$

$$(2,2)_c = \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^{cT}\,\overline{E} B_{w_i}^c - \gamma^2 I_q = \sum_{i=1}^{d} B_{w_i}^T \overline{\overline{E}} B_{w_i} - \gamma^2 I_q, \tag{5.96}$$

$$\overline{E} = \overline{E}^T = (E_c^+)^T E_c^T P_c E_c^+ = \begin{bmatrix} (E^+)^T E^T S E^+ & (E^+)^T E^T N_1 E_k^+ \\ (E_k^+)^T E_k^T N_2 E^+ & (E_k^+)^T E_k^T\,\overline{S} E_k^+ \end{bmatrix}, \tag{5.97}$$

puisqu'on peut choisir la pseudo-inverse réflexive suivante

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} E^+ & 0 \\ 0 & E_k^+ \end{bmatrix},$$

et avec $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{E}}^T = (E^+)^T E^T S E^+$.

L'inégalité (5.93) a pour solutions P_c et Φ si et seulement s'il existe P_c telle que la LMI (voir lemme A.3.2 dans la section A.3.2 de l'annexe A)

$$\mathcal{N}_{\Delta_c}^T \Gamma_c \mathcal{N}_{\Delta_c} < 0 \tag{5.98}$$

$$\mathcal{N}_{\Xi_c}^T \Gamma_c \mathcal{N}_{\Xi_c} < 0 \tag{5.99}$$

est vérifiée où $\mathcal{N}_{\Delta_c} = \Delta_c^{T\perp}$ et $\mathcal{N}_{\Xi_c} = \Xi_c^{\perp}$. En utilisant (5.68), les matrices $\mathcal{N}_{\Delta_c}$ et $\mathcal{N}_{\Xi_c}$ sont donnés par

$$\mathcal{N}_{\Delta_c} = \begin{bmatrix} 0_{2n\times q} & 0 \\ I_q & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_{\Xi_c} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n\times\ell} \\ 0 & \mathcal{N}_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \end{bmatrix} \tag{5.100}$$

où

$$\mathcal{N}_1 = D_{zu}^{T\,\perp}, \qquad \mathcal{N}_2 = C_y^{\perp} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_3 = D_{yv}^{\perp}.$$

La LMI (5.98) est équivalente à la LMI (5.88) et la LMI (5.99) est équivalente à la LMI (5.89).

En utilisant (5.68), la condition (5.51) appliquée au système en boucle fermée (5.67) est équivalente à l'existence d'une matrice Z_c telle que (voir relations (A.2.6) et (A.2.10) dans l'annexe A en remplaçant A par E_c, X par Z_c et B par la matrice identité)

$$E_c Z_c = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{w_1} & 0 & B_{w_1} & \dots & A_{w_d} & 0 & B_{w_d} \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.101}$$

La condition (5.101) est équivalente à la condition (5.90) puisqu'on a $E_k Z_2 = 0$ (la matrice Z dans (5.90) correspond à Z_1 dans (5.101)). •

Remarque 5.3.2 (Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ singulier ou régulier). Dans le théorème 5.3.3, on choisit une matrice E_k telle que la LMI (5.87) est satisfaite. Si la matrice $E_k = I_n$ permet de vérifier la condition (5.87), on a $k = n$ et le correcteur (5.66) est non singulier. □

Remarque 5.3.3 (Cas stochastique singulier versus cas déterministe singulier). Dans le cas des systèmes singuliers déterministes, le correcteur $\mathcal{H}_\infty$ nécessite la résolution d'une LMI en S (sous-matrice de P_c dans (5.92)) et une LMI en R où $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une sous-matrice de P_c^{-1} définie comme suit (voir [MKOS97, UI99, Mas07, MS08])

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} R & M_1 \\ M_1^T & \overline{R} \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir la LMI en R, ces auteurs pré-multiplient Γ_c dans (5.93) par la matrice $\begin{bmatrix} P_c^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \end{bmatrix}$ et post-multiplient Γ_c par la matrice $\begin{bmatrix} P_c^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \end{bmatrix}$ (voir la relation à la fin de la preuve du théorème 4.2 dans [GA94] et la relation (5.93) dans la démonstration du théorème 5.3.3). Puisque, dans le cas déterministe, il n'existe pas de terme du type $\sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^{c\,T} \overline{E} A_{w_i}^c$ où $\overline{E} = (E_c^+)^T E_c^T P_c E_c^+$ (voir (5.94)), il n'y a pas de non linéarité de type $R^T S R$ dans l'inégalité obtenue.

On ne peut pas utiliser cette approche en stochastique à cause du terme $\sum_{i=1}^{d} A_{w_i}^{c\,T} \overline{E} A_{w_i}^c$ dans la matrice Γ_c introduit par le calcul d'Itô, c'est-à-dire par le terme $\mathrm{tr}(g^T(x(t))(E^+)^T E^T P E^+ g(x(t)))$ dans (5.40a) où la matrice P est remplacée par P_c. Le problème est identique si on considère le terme $\mathrm{tr}(g^T(x(t))PE^+g(x(t)))$ dans (5.42a) avec $\overline{E} = P_c E_c^+$.

Il s'agit d'une spécificité importante du cas stochastique singulier par rapport au cas déterministe singulier pour la synthèse d'un correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique.

La même remarque peut se faire pour le retour d'état (voir théorème 5.3.2 et la matrice Γ_s dans (5.82)). □

5.4 Observateurs pour une classe de systèmes singuliers stochastiques non linéaires

5.4.1 Systèmes singuliers stochastiques non linéaires considérés

On considère le système singulier non linéaire stochastique suivant

$$E\,\mathrm{d}x(t) = \left(A_{t_0}x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_{t_i} x(t) + \ell(x(t)) \right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\,\mathrm{d}w_j(t) \qquad (5.102a)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (5.102b)$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ pseudo-état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ commandes,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p \longrightarrow$ sorties mesurées,
- $w(t) \in \mathbb{R}^d \longrightarrow$ mouvement brownien indépendant et centré où $w_j(t)$ est la $j^{\text{ème}}$ composante de $w(t)$.

La matrice $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dans (5.102a) est singulière, c'est-à-dire que

$$\operatorname{rang}(E) = r < n. \tag{5.103}$$

Sans perte de généralité, les entrées connues $u(t)$ sont assumées être bornées, c'est-à-dire les entrées admissibles $u(t)$ appartiennent à l'ensemble Ω

$$\Omega = \{u(t) \in \mathbb{R}^m \mid u_{i\min} \leqslant u_i(t) \leqslant u_{i\max}, \quad i = 1, \ldots, m\}. \tag{5.104}$$

La fonction non linéaire $\ell(x(t))$ dans l'EADS (5.102a) est one-sided-Lipschitz (5.105), quadratiquement bornée (5.106) et s'annule en zéro, propriétés qui sont énoncées dans l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.4.1. *La fonction $\ell(x(t))$ dans l'EADS (5.102a) vérifie les trois propriétés suivantes.*

(i) *Il existe un réel a tel que*

$$(\ell(x_1) - \ell(x_2))^T (x_1 - x_2) \leqslant a \|x_1 - x_2\|^2 \qquad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{5.105}$$

(ii) *Il existe deux réels b et c tels que*

$$\|\ell(x_1) - \ell(x_2)\|^2 \leqslant b \|x_1 - x_2\|^2 + c(\ell(x_1) - \ell(x_2))^T (x_1 - x_2) \quad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{5.106}$$

(iii) *On a $\ell(0) = 0$.*

Ces propriétés sont aussi utilisées dans la section 3.4 du chapitre 3 (voir relations (3.85) et (3.86)). Les fonctions one-sided Lipschitz et quadratiquement bornées sont présentées dans la section A.1.3 de l'annexe A (voir relations (A.1.11) et (A.1.12), ainsi que la figure A.1).

Les matrices E et C satisfont l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.4.2.

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\right) = n. \tag{5.107}$$

5.4.2 Observateur d'ordre plein et expression de l'erreur d'observation

L'observateur d'ordre plein à synthétiser est de la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(t) &= (M(u(t))\eta(t) + N(u(t))y(t) + \xi(\eta(t)))\,\mathrm{d}t && \text{(5.108a)} \\ \widehat{x}(t) &= \eta(t) + Ry(t) && \text{(5.108b)} \end{aligned}$$

avec

$$M(u(t)) = M_0 + \sum_{i=1}^{m} M_i u_i(t)$$

$$N(u(t)) = N_0 + \sum_{i=1}^{m} N_i u_i(t).$$

$\eta(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état de l'observateur et $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du pseudo-état $x(t)$.

Les matrices M_i, N_i et R $(i = 0, \ldots, m)$ et la fonction non linéaire $\xi(\centerdot)$ sont des paramètres de l'observateur à déterminer afin que l'erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \tag{5.109}$$

soit exponentiellement presque sûrement stable.

Sous l'hypothèse 5.4.2, il existe quatre matrices $a_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $a_3 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $a_4 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ telles que

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) \neq 0 \tag{5.110}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.111}$$

ce qui est équivalent à

$$a_1E + a_2C = I_n, \tag{5.112a}$$
$$a_3E + a_4C = 0. \tag{5.112b}$$

Les matrices a_1, a_2, a_3 et a_4 sont données par

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^{\dagger}, \tag{5.113a}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \gamma\left(I_{n+p} - \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^{\dagger}\right), \tag{5.113b}$$

où $A^{\dagger}$ est une pseudo-inverse A vérifiant $A = AA^{\dagger}A$ (voir section A.2.1) et $\gamma \in \mathbb{R}^{p\times(n+p)}$ est une matrice qui sélectionne les p lignes indépendantes de la matrice $I_{n+p} - \left[\begin{smallmatrix} E \\ C \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} E \\ C \end{smallmatrix}\right]^{\dagger}$.

Les équations (5.112a) et (5.112b) sont équivalentes à

$$a_2C = I_n - a_1E \tag{5.114a}$$
$$a_4C = -a_3E \tag{5.114b}$$

Si la condition (5.107) est satisfaite et sans perte de généralité, la matrice R de l'observateur peut s'écrire en fonction d'une matrice $\beta \in \mathbb{R}^{n\times p}$ comme suit

$$R = a_2 + \beta a_4 \tag{5.115}$$

et l'estimation du pseudo-état est alors donnée par

$$\widehat{x}(t) = \eta(t) + a_2y(t) + \beta a_4y(t).$$

Si la condition (5.107) est satisfaite, l'erreur d'observation peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) &= x(t) - \eta(t) - (a_2 + \beta a_4)Cx(t) \\ &= (a_1 + \beta a_3)Ex(t) - \eta(t) \end{aligned} \tag{5.116}$$

en utilisant les relations (5.114a) et (5.114b).

5.4.3 Paramétrage des matrices de l'observateur

En utilisant l'équation (5.116), la dynamique de l'erreur d'observation est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}e(t) &= (a_1+\beta a_3)\left((A_t(u(t))x(t)+\ell(x(t)))\,\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{d}A_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_j(t)\right)\\
&\qquad -(M(u(t))\eta(t)+N(u(t))Cx(t)+\xi(\eta(t)))\,\mathrm{d}t\\
&= (M(u(t))e(t)+((a_1+\beta a_3)A_{t_0}-M_0(a_1+\beta a_3)E-N_0C)x(t)\\
&\qquad +\sum_{i=1}^{m}((a_1+\beta a_3)A_{t_i}-M_i(a_1+\beta a_3)E-N_iC)u_i(t)x(t)\\
&\qquad +(a_1+\beta a_3)(\ell(x(t))-\ell((a_1+\beta a_3)Ex(t)-e(t))))\,\mathrm{d}t\\
&\qquad +\sum_{j=1}^{d}(a_1+\beta a_3)A_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_j(t) \qquad (5.117)
\end{aligned}$$

où

$$A_t(u(t))=A_{t_0}+\sum_{i=1}^{m}A_{t_i}u_i(t)$$

et où la fonction $\xi(\eta(t))$ dans l'observateur (5.108) est choisie comme suit

$$\xi(\eta(t))=(a_1+\beta a_3)\ell(\eta(t)). \qquad (5.118)$$

Si les $m+1$ équations de Sylvester suivantes

$$(a_1+\beta a_3)A_{t_i}-M_i(a_1+\beta a_3)E-N_iC=0, \qquad i=0,\dots,m, \qquad (5.119)$$

sont vérifiées, alors l'expression de la dynamique de l'erreur d'observation (5.117) se simplifie comme suit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}e(t) &= (M(u(t))e(t)+(a_1+\beta a_3)(\ell(x(t))-\ell((a_1+\beta a_3)Ex(t)-e(t))))\,\mathrm{d}t\\
&\qquad +\sum_{j=1}^{d}(a_1+\beta a_3)A_{w_j}x(t)\,\mathrm{d}w_j(t). \qquad (5.120)
\end{aligned}$$

En utilisant (5.114b), les équations de Sylvester données par (5.119) peuvent se réécrire ainsi

$$(a_1+\beta a_3)A_{t_i}-M_ia_1E-G_iC=0, \quad i=0,\dots,m, \qquad (5.121)$$

avec

$$G_i=N_i-M_i\beta a_4 \qquad i=0,\dots,m \qquad (5.122)$$

Les $m+1$ équations de Sylvester données dans (5.121) peuvent se réécrire sous la forme compacte suivante

$$YV=W \qquad (5.123)$$

où

$$Y=\begin{bmatrix}-\beta & M_0 & M_1 & \dots & M_m & G_0 & G_1 & \dots & G_m\end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} a_3A_{t_0} & a_3A_{t_1} & \cdots & a_3A_{t_m} \\ a_1E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1E \\ C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1A_{t_0} & a_1A_{t_1} & \dots & a_1A_{t_m} \end{bmatrix}.$$

L'équation (5.123) a une solution si et seulement si (voir (A.2.11) avec $A = I$)

$$\operatorname{rang}(V) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}\right) \tag{5.124}$$

et la solution générale est donnée par (voir (A.2.9) avec $A = I$)

$$Y = WV^\dagger + Z(I_\rho - VV^\dagger) \tag{5.125}$$

où $Z \in \mathbb{R}^{n\times\rho}$ est une matrice arbitraire avec $\rho = (n+p)(m+1)+p$.

A cette étape de la synthèse, le gain de l'observateur est réduit à la matrice Z. Il faut maintenant déterminer le gain Z afin que le point d'équilibre de l'EDS (5.120) soit presque sûrement exponentiellement stable, les matrices de l'observateur étant données par la relation (5.125).

5.4.4 Approche découplée pour la synthèse de l'observateur

Puisque la pseudo-état $x(t)$ apparaît dans la dynamique de l'erreur d'observation (5.120), l'analyse de la stabilité du point d'équilibre de l'EDS (5.120) doit être faite avec le système augmenté constitué par l'EADS (5.102a) et l'EDS (5.120)

$$E\,\mathrm{d}x(t) = f_1(x(t),u(t))\,\mathrm{d}t + g_1(x(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{5.126a}$$
$$\mathrm{d}e(t) = f_2(x(t),e(t),u(t))\,\mathrm{d}t + g_2(x(t))\,\mathrm{d}w(t) \tag{5.126b}$$

où

$$\begin{aligned} f_1(x(t),u(t)) &= A_t(u(t))xt) + \ell(x(t)), \\ f_2(x(t),e(t),u(t)) &= M(u(t))e + (a_1+\beta a_3)(\ell(x(t)) - \ell((a_1+\beta a_3)Ex(t) - e(t))), \\ g_1(x(t)) &= \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}x(t), \\ g_2(x(t)) &= \sum_{j=1}^{d} (a_1+\beta a_3)A_{w_j}x(t). \end{aligned}$$

Afin d'étudier la stabilité exponentielle presque sûre de l'EDS (5.126) avec le lemme 5.2.3, il faut vérifier si l'EDS est d'indice 1. Le lemme suivant donne les conditions pour que l'EADS (5.126) soit d'indice 1.

Lemme 5.4.1. *[BZSM14b] L'EADS (5.126) est d'indice 1 si et seulement si*

$$\det\left(E + (I_n - EE^+)\left(A_t(u(t)) + \frac{\mathrm{d}\ell(x(t))}{\mathrm{d}x(t)}\right)\right) \neq 0, \tag{5.127a}$$

$$\mathrm{Im}\Big(\begin{bmatrix} A_{w_1} & \dots & A_{w_d}\end{bmatrix}\Big) \subseteq \mathrm{Im}(E), \tag{5.127b}$$

où E^+ est une pseudo-inverse réflexive quelconque de E vérifiant $E = EE^+E$ et $E^+ = E^+EE^+$ (voir les sections A.2.1 et A.2.2 dans l'annexe A).

Démonstration. En utilisant la définition 5.2.1 et les développements faits dans la section 5.2.2.1, l'EADS (5.126) est d'indice 1 si et seulement si

- $\det\left(\overline{E} + (I_{2n} - \overline{E}\,\overline{E}^+)\dfrac{\mathrm{d}F(X(t),u(t))}{\mathrm{d}X(t)}\right) \neq 0,$
- $(I_{2n} - \overline{E}\,\overline{E}^+)G(X(t)) = 0,$

où

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t)\end{bmatrix},\ F(X(t),u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x(t),u(t)) \\ f_2(x(t),e(t),u(t))\end{bmatrix},\ G(X(t)) = \begin{bmatrix} g_1(x(t),u(t)) \\ g_1(x(t),u(t))\end{bmatrix},\ \overline{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_n\end{bmatrix}.$$

La deuxième condition est équivalente à $\mathrm{Im}(G(X(t))) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{E})$.

Puisqu'on a

$$\overline{E} + (I_{2n} - \overline{E}\,\overline{E}^+)\frac{\mathrm{d}F(X(t),u(t))}{\mathrm{d}X(t)} = \begin{bmatrix} E + (I_n - EE^+)\left(A_t(u(t)) + \dfrac{\mathrm{d}\ell(x(t))}{\mathrm{d}x(t)}\right) & 0 \\ 0 & I_n\end{bmatrix},$$

$$G(X(t)) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & (a_1 + \beta a_3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{w_1} & \dots & A_{w_d} \\ A_{w_1} & \dots & A_{w_d}\end{bmatrix}.$$

Les conditions (5.127a) ets (5.127b) sont démontrées. •

Puisque le signal de commande $u(t)$ est borné (voir (5.104)) et puisque l'hypothèse 5.4.1 est vérifiée, l'hypothèse 2.4.1 est satisfaite pour le système (5.102a) et le théorème 2.5.1 peut être appliqué à la synthèse de l'observateur d'ordre plein (5.108) comme le montre le théorème suivant.

Théorème 5.4.1. *[BZSM14b] Si les hypothèses 5.4.1 et 5.4.2 sont vérifiées pour le système (5.102) et si les conditions (5.124) et (5.127) sont satisfaites pour ce système, alors le système (5.108) est un observateur d'ordre plein pour le système stochastique (5.102) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage si*

a) *l'EADS (5.102a) est stable exponentiellement presque sûrement,*

b) *s'il existe des matrices β, M_i et N_i $(i = 0, \dots, m)$ telles que l'ODE*

$$\dot{\overline{e}}(t) = (M(u(t))\overline{e}(t) - (a_1 + \beta a_3)\ell(-\overline{e}(t))) \tag{5.128}$$

est exponentiellement stable.

Démonstration. Puisque les conditions (5.127a) et (5.127b) sont satisfaites, l'EADS (5.126) est d'indice 1 (voir lemme 5.4.1). On peut donc utiliser le lemme 5.2.3 pour étudier la stabilité exponentielle presque sûre. Le lien fait dans ce lemme entre les variables dynamiques (notées $x_u(t)$) et le pseudo-état $x(t)$ permet d'utiliser le théorème 2.4.1 puisque l'hypothèse 2.4.1 est satisfaite si l'hypothèse 5.4.1 est vérifiée.

Puisque l'hypothèse 5.4.2 et la condition (5.124) sont utilisées pour obtenir l'EADS (5.126b), on applique le théorème 2.4.1 sur l'EADS (5.126). En utilisant la même approche que pour le théorème 2.5.1, on obtient les deux conditions exprimées dans le théorème 5.4.1 : le point d'équilibre de l'EADS (5.126) est presque sûrement exponentiellement stable si le point d'équilibre de l'EADS "bloc-diagonale" (ou "découplée") formée par l'EADS (5.102a) et l'ODE (5.128) est presque sûrement exponentiellement stable (5.128). •

Avec le théorème 5.4.1, la synthèse de l'observateur (5.108) est découplée sous deux sous-problèmes indépendants :

- l'analyse de la stabilité de l'EADS (5.102a),
- la stabilité exponentielle de l'EDO (5.128).

5.4.5 Stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage

Puisque chaque composante du vecteur des entrées $u(t)$ est bornée (voir équation (5.104)), on peut remplacer les entrées $u_i(t)$ par des nouvelles variables $\varepsilon_i(t)$ qui présentent une plage de variation entre -1 et 1. Les nouvelles entrées $\varepsilon_i(t)$ sont données par

$$u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i \varepsilon_i(t) \tag{5.129}$$

où $\alpha_i = \dfrac{u_{i,\max} + u_{i,\min}}{2}$ et $\sigma_i = \dfrac{u_{i,\max} - u_{i,\min}}{2}$ pour $i = 1, \ldots, m$, avec $\alpha_0 = 1$ et $\sigma_0 = 0$. Les nouvelles variables $\varepsilon_i(t)$ sont bornées et appartiennent au polytope convexe suivant

$$\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^m \mid -1 \leqslant \varepsilon_i(t) \leqslant 1, i = 1, \ldots, m\}. \tag{5.130}$$

On peut donc définir la matrice $\Delta_n(\varepsilon(t))$ suivante

$$\Delta_n(\varepsilon(t)) = \mathrm{bdiag}(\varepsilon_1(t) I_n(t), \ldots, \varepsilon_m(t) I_n(t)) \tag{5.131}$$

avec la propriété suivante

$$\Delta_n(\varepsilon(t)) \Delta_n^T(\varepsilon(t)) \leqslant I_{mn}. \tag{5.132}$$

En utilisant les nouvelles entrées $\varepsilon_i(t)$, l'EADS (5.102a) peut être écrite comme suit

$$E\,\mathrm{d}x(t) = \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i A_{t_i} x(t) + H_1 \Delta_n(\varepsilon(t)) H_2 + \ell(x(t)) \right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j} x(t)\, \mathrm{d}w_j(t) \tag{5.133}$$

avec $H_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{t_1} & \ldots & \sigma_m A_{t_m} \end{bmatrix}$ et $H_2 = \begin{bmatrix} I_n & \ldots & I_n \end{bmatrix}^T$.

Si on calcule la matrice de gain Z, on peut déduire les matrices β et M_i, G_i avec l'équation (5.125) et les matrices N_i peuvent être obtenues avec la relation (5.122).

En utilisant l'équation (5.125), les matrices de l'observateur (5.108) sont données par ($i = 0, \ldots, m$)

$$\beta = W V^\dagger \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(n+p)(m+1)\times p)} \end{bmatrix} + Z(I_\rho - V V^\dagger) \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(n+p)(m+1)\times p)} \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{F}_\beta + Z\mathcal{G}_\beta, \tag{5.134}$$

$$M_i = WV^\dagger \begin{bmatrix} 0_{(p+in)\times n} \\ I_n \\ 0_{((p+1)m+(m-i)n)\times n} \end{bmatrix} + Z(I_\rho - VV^\dagger) \begin{bmatrix} 0_{(p+in)\times n} \\ I_n \\ 0_{((p+1)m+(m-i)n)\times n} \end{bmatrix}$$
$$= \mathcal{F}_i + Z\mathcal{G}_i. \tag{5.135}$$

En utilisant ces notations, l'ODE (5.128) devient

$$\dot{\bar{e}}(t) = \left(\left(\mathcal{F}_0 + Z\mathcal{G}_0 + \sum_{i=1}^{m} (\mathcal{F}_i + Z\mathcal{G}_i) u_i \right) \bar{e}(t) - (a_1 + (\mathcal{F}_\beta + Z\mathcal{G}_\beta) a_3) \ell(-\bar{e}(t)) \right). \tag{5.136}$$

Les matrices G_i n'intervenant pas dans l'ODE (5.128), il n'est pas utile de les exprimer en fonction du gain Z à cette étape des calculs.

L'insertion des notations introduites dans (5.129)-(5.133) dans l'ODE (5.136) donne

$$\dot{\bar{e}}(t) = \left(\left(\sum_{i=0}^{m} (\mathcal{F}_i + Z\mathcal{G}_i)\alpha_i + (H_1 + Z\mathcal{G}_i)\Delta_n(\varepsilon(t))H_2 \right) \bar{e}(t) \right.$$
$$\left. + (a_1 + (\mathcal{F}_\beta + Z\mathcal{G}_\beta)a_3)(-\ell(-\bar{e}(t))) \right). \tag{5.137}$$

En utilisant les notations introduites ci-dessus et le théorème 5.4.1, la synthèse de l'observateur (5.108) est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 5.4.2. *[BZSM14b] Si les hypothèses 5.4.1 et 5.4.2 sont vérifiées pour le système (5.102) et si les conditions (5.124) et (5.127) sont satisfaites pour ce système, alors le système (5.108) est un observateur d'ordre plein pour le système stochastique (5.102) garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur de filtrage s'il existe des matrices P, $Q = Q^T \geqslant 0$ et Y, et des scalaires $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ et $\lambda_4 > 0$ tels que les trois LMI et la condition de rang suivantes*

$$E^T P = PE^T \geqslant 0 \tag{5.138}$$

$$\operatorname{rang}(E^T P) = \operatorname{rang}(E) \tag{5.139}$$

$$\begin{bmatrix} (1,1)_a & \star & \star & \star & \star \\ \sigma_1 A_{t_1}^T & -\mu_1 I_n & \star & \star & \star \\ \vdots & 0 & \ddots & \star & \star \\ \sigma_m A_{t_m}^T & \vdots & \ddots & -\mu_1 I_n & \star \\ P - 0.5(\lambda_1 - \lambda_2 c) I_n & 0 & \dots & 0 & -\lambda_2 I_n \end{bmatrix} < 0 \tag{5.140}$$

$$\begin{bmatrix} (1,1)_b & \star & \star & \star & \star & \star \\ \sigma_1 (Q\mathcal{F}_1 + Y\mathcal{G}_1)^T & -\mu_2 I_n & \star & \star & \star & \star \\ \vdots & 0 & \ddots & \star & \star & \star \\ \sigma_m (Q\mathcal{F}_m + Y\mathcal{G}_m)^T & \vdots & \ddots & \ddots & \star & \star \\ (Qa_1 + (Q\mathcal{F}_\beta + Y\mathcal{G}_\beta)a_3)^T & \vdots & \ddots & 0 & -\mu_2 I_n & \star \\ Q - 0.5(\lambda_3 - \lambda_4 c) I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_4 I_n \end{bmatrix} < 0 \tag{5.141}$$

soient satisfaites, où $\rho_j \geqslant 0$ *(*$j = 1, \ldots, d$*) sont des réels donnés avec* $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$*, et où*

$$(1,1)_a = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P^T A_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_i}^T P E^+ A_{w_i} + (\mu_1 + a\lambda_1 + b\lambda_2) I_n - \rho E^T P$$

$$(1,1)_b = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i ((Q\mathcal{F}_i + Y\mathcal{G}_i)^T + (Q\mathcal{F}_i + Y\mathcal{G}_i)) + (\mu_2 + a\lambda_3 + b\lambda_4) I_n$$

et que, pour chaque $j = 1, \ldots, d$*, l'une de ces deux LMI*

$$A_{w_j}^T P + P^T A_{w_j} - \sqrt{2\rho_j} E^T P > 0, \tag{5.142}$$

$$A_{w_j}^T P + P^T A_{w_j} + \sqrt{2\rho_j} E^T P < 0 \tag{5.143}$$

soit vérifiée. La matrice de gain Z *est donnée par* $Z = Q^{-1}Y$*.*

Démonstration. La démonstration est une application du théorème 5.4.1. Pour appliquer le théorème 5.4.1, les hypothèses 5.4.2 et 2.4.1 avec les conditions (5.124) et (5.127) sont obligatoires. C'est la $2^{\text{ème}}$ version de la formule d'Itô qui est utilisée (voir lemme 5.2.2).
Stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EADS (5.102a).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_x(x(t)) = x^T(t) E^T P x(t)$ avec $E^T P = P E^T \geqslant 0$. Les lemmes 5.2.2 et 5.2.3 et le théorème 1.5.3 sont appliqués à l'EADS (5.102a).

L'EADS (5.102a) est identique à l'EADS (5.133). L'application de $\mathfrak{L}V_x(x(t))$ à l'EADS (5.133) donne

$$\mathfrak{L}V_x(x(t)) = x^T(t) \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i A_{t_i} x(t) + H_1 \Delta_n(\varepsilon(t)) H_2 + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P E^+ A_{w_j} \right) x(t) + 2\ell^T(x(t)) P x(t). \tag{5.144}$$

En utilisant le lemme C.3.1 et l'inégalité (5.132), la condition (1.50b) du théorème 1.5.3 est satisfaite s'il existe un réel c_2 tel que $c_2 < \rho$ et

$$\begin{bmatrix} x^T & \ell^T(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \ell(x) \end{bmatrix} < 0 \tag{5.145}$$

où

$$\Psi = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P A_{t_i} + A_{t_i}^T P) + \sum_{j=1}^{d} A_{w_j}^T P E^+ A_{w_j} + \mu_1^{-1} P H_1 H_1^T P + \mu_1 H_2^T H_2 - \rho E^T P$$

et $\mu_1 > 0$ et $\rho > 0$ sont des réels donnés.

En utilisant l'hypothèse 5.4.1, on définit les fonctions $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ comme suit

$$\gamma_1(t) = \lambda_1 (a x^T(t) x(t) - \ell^T(x(t)) x(t)) > 0$$

$$\gamma_2(t) = \lambda_2 (b x^T(t) x(t) + c\, \ell^T(x(t)) x(t) - \ell^T(x(t)) \ell(x(t))) > 0$$

où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ sont des réels donnés (voir [ZLSH11]). En sommant $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ au terme de gauche de l'inégalité (5.145), cette inégalité est satisfaite si

$$\begin{bmatrix} \Psi + (\lambda_1 a + \lambda_2 b) I_n & P - 0.5(\lambda_1 + \lambda_2 c) I_n \\ P^T - 0.5(\lambda_1 + \lambda_2 c) I_n & -\lambda_2 I_n \end{bmatrix} < 0. \tag{5.146}$$

La LMI (5.140) est obtenue en appliquant le lemme de Schur (voir (A.3.1) dans le lemme A.3.1)) sur la LMI (5.146).

L'application de $\mathfrak{B}V_x(x(t))$ à l'EADS (5.133) donne

$$\mathfrak{B}V_x(x(t)) = \begin{bmatrix} x^T(t)(A_{w_1}^T P + PA_{w_1})x(t) & \dots & x^T(t)(A_{w_d}^T P + PA_{w_d})x(t) \end{bmatrix}. \tag{5.147}$$

S'il existe un réel $c_3 = 2\rho$ avec $\rho = \sum_{j=1}^{d} \rho_j$ et $\rho_j \geqslant 0$ tel que $\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 \geqslant c_3 V_x^2(x(t))$, alors la condition (1.50c) du théorème 1.5.3 est satisfaite. En utilisant la relation (5.147), on obtient

$$\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 - c_3 V_x^2(x(t)) = \sum_{j=1}^{d} x^T(t)(A_{w_j}^T P + PA_{w_j} - \sqrt{2\rho_j}P)x(t) \times x^T(t)(A_{w_j}^T P + PA_{w_j} + \sqrt{2\rho_j}P)x(t). \tag{5.148}$$

La condition $\|\mathfrak{B}V_x(x(t))\|^2 \geqslant c_3 V_x^2(x(t))$ est donc vérifiée si, pour chaque j avec $j = 1, \dots, d$, l'une des deux LMI (5.142) ou (5.143) est satisfaite.

Le lemme 5.2.3 montre que la condition (1.50a) du théorème 1.5.3 doit être testée, non sur le pseudo-état $x(t)$, mais sur la variable dynamique $x_u(t) \in \mathcal{S}_u$ définie dans la relation (5.5a). Puisque $\text{rang}(E) = \text{rang}(E^+E)$, on a $\dim(\mathcal{S}_u) = \text{rang}(E)$. De plus, on a $V_x(x_u(t)) = V_x(x(t))$. Alors, si les conditions (5.138) et (5.139) sont vérifiées, la condition (1.50a) du théorème 1.5.3 est satisfaite avec $p = 2$ et $c_1 = \lambda_{\min}(E^T P) > 0$.

Puisque $c_2 < \rho$ et que $c_3 = 2\rho \geqslant 0$, l'inégalité (1.52) du théorème 1.5.3 est satisfaite et la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de l'EADS (5.102a) est démontrée.

Stabilité exponentielle du point d'équilibre de l'EDO (5.128).

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V_e(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t) Q \overline{e}(t)$ avec $Q^T = Q \geqslant 0$.

L'ODE (5.128) est identique à l'ODE (5.137).

La dérivée de $V_e(\overline{e}(t))$ le long de la trajectoire de l'ODE (5.137) est donnée par

$$\dot{V}_e(\overline{e}(t)) = \overline{e}^T(t) \sum_{i=0}^{m} \alpha_i((\mathcal{F}_i + Z\mathcal{G}_i)^T Q + Q(\mathcal{F}_i + Z\mathcal{G}_i))\overline{e}(t) + 2\overline{e}^T(t)Q(H_1 + Z\mathbf{G})\Delta_\varepsilon(t)H_2\overline{e}(t) - 2\overline{e}^T(t)Q(a_1 + (\mathcal{F}_\beta + Z\mathcal{G}_\beta)a_3)\ell(-\overline{e}(t)). \tag{5.149}$$

avec

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 & \dots & \mathcal{G}_m \end{bmatrix}.$$

En utilisant le lemme C.3.1 et l'inégalité (5.132), la relation (5.149) devient

$$\dot{V}_e(\overline{e}(t)) \leqslant \begin{bmatrix} \overline{e}^T(t) & -\ell^T(-\overline{e}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & \Upsilon \\ \Upsilon^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}(t) \\ -\ell(-\overline{e}(t)) \end{bmatrix} \tag{5.150}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i((\mathcal{F}_i + Z\mathcal{G}_i)^T Q + Q(\mathcal{F}_i + Z\mathcal{G}_i)) + \mu_2^{-1} Q\mathcal{H}\mathcal{H}^T Q + \mu_2 I_n, \\ \Upsilon &= Q(a_1 + (\mathcal{F}_\beta + Z\mathcal{G}_\beta)a_3), \\ \mathcal{H} &= H_1 + Z\mathbf{G} \end{aligned}$$

et $\mu_2 > 0$ est un réel donné.

En utilisant l'hypothèse 5.4.1, on définit les fonctions $\gamma_3(t)$ et $\gamma_4(t)$ comme suit

$$\gamma_3(t) = \lambda_3(ax^T(t)x(t) - \ell^T(x(t))x(t)) > 0$$
$$\gamma_4(t) = \lambda_4(bx^T(t)x(t) + c\,\ell^T(x(t))x(t) - \ell^T(x(t))\ell(x(t))) > 0$$

où $\lambda_3 > 0$ et $\lambda_4 > 0$ sont des réels donnés (voir [ZLSH11]). En sommant $\gamma_3(t)$ et $\gamma_4(t)$ au terme de gauche de l'inégalité (5.150), on a $\dot{V}_e(\overline{e}) < 0$ si

$$\begin{bmatrix} \Phi + (\lambda_3 a + \lambda_4 b)I_n & \Upsilon - 0.5(\lambda_3 + \lambda_4 c)I_n \\ \Upsilon^T - 0.5(\lambda_3 + \lambda_4 c)I_n & -\lambda_4 I_n \end{bmatrix} < 0. \tag{5.151}$$

La LMI (5.141) est obtenue en appliquant le lemme de Schur (voir (A.3.1) dans le lemme A.3.1)) à la LMI (5.151) avec $Y = QZ$.

Si l'inégalité (5.151) est satisfaite, alors il existe un réel $\theta > 0$ tel que

$$\dot{V}_{\overline{e}}(\overline{e}) \leqslant -\theta \overline{e}^T \overline{e} \leqslant \frac{-\theta}{\lambda_{\max}(Q)} V_{\overline{e}}(\overline{e}) \tag{5.152}$$

et le point d'équilibre de l'ODE (5.137) est exponentiellement stable

$$\|\overline{e}\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}}\, \|\overline{e}_0\|\, e^{\frac{-\theta}{2\lambda_{\max}(Q)}(t-t_0)} \tag{5.153}$$

avec $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. •

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, trois problèmes ont été traités.

Le premier problème concerne l'extension de la formule d'Itô aux EADS non linéaires. Pour ce faire, l'espace vectoriel du pseudo-état a été décomposé en deux sous-espaces vectoriels dont la somme directe donne l'espace vectoriel du pseudo-état. Le premier sous-espace vectoriel est celui des variables dynamiques et le second celui des variables algébriques. Cette décomposition permet d'obtenir les conditions sous lesquelles l'EADS est admissible, c'est-à-dire d'indice 1 (les contraintes algébriques permettent d'exprimer de manière unique les variables algébriques en fonction des variables dynamiques, ce qui est équivalent au fait que l'EADS est régulière (existence d'une solution unique) et causale (absence de modes impulsionnels)) et stable. En se basant sur cette approche, la formule d'Itô a été étendue aux EADS non linéaires et des conditions de type Lyapunov ont été appliquées aux EADS pour les stabilités exponentielle presque sûre et exponentielle en moyenne quadratique.

Cette extension de la formule d'Itô aux EADS a permis de considérer les deux autres problèmes traités dans ce chapitre.

Le second problème abordé est la dérivation du lemme borné réel pour les systèmes stochastiques algébro-différentiels dont la dérive et la diffusion sont linéaires. Il s'agit de garantir l'admissibilité de l'EADS avec la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, tout en satisfaisant un niveau d'atténuation des perturbations à énergie bornée. Ce lemme borné réel a été utilisé pour synthétiser deux correcteurs $\mathcal{H}_\infty$: par retour d'état et par retour de sortie dynamique. Le but des ces deux correcteurs $\mathcal{H}_\infty$ est que les deux propriétés, citées ci-dessus et que le

lemme borné réel permet de vérifier, soient satisfaites en boucle fermée. La méthode de synthèse proposée est basée sur la résolution de trois LMI et d'une contrainte algébrique linéaire.

Le troisième problème considéré est la synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes stochastiques décrits par une EADS non linéaire. Les non linéarités présentes dans l'EADS sont one-sided Lipschitz. Afin que l'erreur d'estimation ne soit pas biaisée, les matrices de l'observateur sont déterminées afin que des contraintes de Sylvester soient satisfaites, ce qui permet ensuite de paramétrer ces matrices avec un gain unique. En utilisant l'approche découplée proposée dans les théorèmes 2.3.1 et 2.5.1, des conditions de type LMI avec une contrainte de rang permettent de garantir que l'erreur d'estimation est admissible avec la stabilité exponentielle presque sûre.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire de thèse est consacré à la synthèse d'observateurs et de lois de commande pour les systèmes non linéaires décrits par une équation différentielle stochastique contrôlée par des bruits multiplicatifs appelés mouvements browniens. Du fait que ces bruits n'interviennent pas de manière additive sur la dynamique de l'état, ils ont une influence importante sur la stabilité. Plusieurs types de stabilité ont été définis dans la littérature pour les systèmes stochastiques. Dans ce manuscrit, on s'est focalisé sur la stabilité exponentielle presque sûre et sur la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Alors qu'il existe de nombreux travaux dans la littérature traitant de la commande et de l'observation des systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs en utilisant la stabilité exponentielle en moyenne quadratique, il y a très peu d'articles abordant la stabilité exponentielle presque sûre. Ce constat a motivé le choix fait dans ce mémoire de traiter essentiellement la stabilité exponentielle presque sûre, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique n'étant utilisée dans ce manuscrit que dans la partie traitant de la commande $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes stochastiques singuliers.

1 Conclusions

Afin d'argumenter ce choix, une étude comparative a été réalisée au début de ce mémoire entre la stabilité exponentielle presque sûre et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Bien qu'il n'y ait pas d'implication entre ces deux stabilités (il existe des systèmes stochastiques qui satisfont l'une de ces deux stabilités, mais pas l'autre), on peut considérer, sous des conditions "suffisamment générales" [2], que la stabilité exponentielle en moyenne quadratique implique la stabilité exponentielle presque sûre. De plus, cette implication est confortée par le fait que, si on utilise des fonctions de Lyapunov bornées de manière inférieure et supérieure par des fonctions de classe $\mathbf{K}$, alors les conditions de type Lyapunov pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique exprimées dans le théorème 1.5.4 impliquent celles pour la stabilité exponentielle presque sûre données dans le théorème 1.5.3. Avec cette approche de type Lyapunov, on a illustré un fait connu dans la littérature : les bruits ont un rôle déstabilisant pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique alors qu'ils peuvent avoir une influence stabilisante pour la stabilité exponentielle presque sûre. Cependant, l'étude comparative a montré qu'il existe des EDS dont le point d'équilibre est exponentiellement presque sûrement stable alors qu'il n'existe pas de fonctions de Lyapunov satisfaisant les conditions du théorème 1.5.3, ces EDS pouvant avoir une dérive et une diffusion linéaires.

Puisque l'état ne peut pas être éliminé de l'EDS décrivant la dynamique de l'erreur d'estimation lorsqu'on s'intéresse à la synthèse d'un observateur pour un système stochastique avec des bruits multiplicatifs, la discussion faite au paragraphe ci-dessus fournit un argument supplémentaire pour le choix fait dans ce manuscrit d'utiliser la stabilité exponentielle presque sûre à la

2. Voir le théorème 1.5.6 énoncé par Mao dans [Mao97].

différence de la littérature où c'est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique qui est employée : sous l'hypothèse que les conditions du théorème 1.5.6 soient satisfaites, les observateurs développés dans ce mémoire pourront s'appliquer à certaines classes de systèmes stochastiques non linéaires dont le point d'équilibre est exponentiellement presque sûrement stable, mais pas exponentiellement stable en moyenne quadratique, ce qui n'est pas le cas des observateurs proposés dans la littérature qui s'appuient sur la stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

Puisque la diffusion associée au système augmenté, constitué par l'EDS du système à observer et par celle de l'erreur d'observation, est nulle lorsque l'état du système est égal à zéro, quel que soit les composantes du vecteur d'erreur d'estimation, les conditions de type Lyapunov données dans le théorème 1.5.3 pour la stabilité exponentielle presque sûre sont équivalentes à celles exprimées dans le théorème 1.5.4 pour la stabilité en moyenne quadratique. Il s'en suit que l'objectif de proposer des observateurs pour des systèmes stochastiques dont le point d'équilibre pourrait ne pas être exponentiellement stable en moyenne quadratique ne serait pas atteint en employant le théorème 1.5.3.

Pour surmonter cette difficulté, la structure triangulaire de l'EDS associée au problème de filtrage a été exploitée et un nouveau résultat a été démontré lorsque les non linéarités sont Lipschitz ou one-sided Lipschitz : la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre d'une classe d'EDS triangulaires non linéaires est équivalente à la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre de chaque EDS "bloc-diagonale" considérée isolément sans les termes de couplage. Ce nouveau résultat a été utilisé pour la synthèse d'observateurs pour les systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs en garantissant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur d'estimation. La méthode de synthèse proposée se décompose en deux sous-problèmes disjoints : l'étude de la stabilté de l'EDS du système à observer et le calcul des gains de l'observateur afin d'assurer la convergence de l'erreur de filtrage. Plusieurs cas ont été considérés : les mesures sont stochastiques ou déterministes, l'observateur est d'ordre plein ou réduit.

Cette approche a été appliquée à la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs dont la dérive est constituée par des bilinéarités états-commandes avec une non linéarité additive, cette dernière pouvant être Lipschitz ou one-sided Lipschitz. Les mesures sont soit stochastiques, soit déterministes et les observateurs proposés sont d'ordre plein ou sont fonctionnels et d'ordre réduit. En fonction du traitement des entrées de commande, deux stratégies pour la synthèse des observateurs sont développées. La première est basée sur la bornitude en norme des entrées admissibles. La seconde exploite le caractère convexe du polytope au sein duquel évoluent les entrées admissibles, ce qui permet de considérer des fonctions de Lyapunov polytopiques, et donc de relaxer les conditions de stabilité proposées. Afin de conserver la convexité, il faut éviter les produits entre les composantes du vecteur des commandes lors de l'application de la formule d'Itô. Ce problème a été résolu en utilisant un formalisme pseudo-descripteur pour l'EDS du système à observer et en introduisant une matrice instrumentale dans les fonctions de Lyapunov. Lorsque les paramètres de l'EDS du système à observer sont entachés par des incertitudes non structurées et bornées en normes, des observateurs robustes d'ordres plein et réduit ont été développés afin de garantir la convergence exponentielle presque sûre de l'erreur d'estimation.

Un autre problème traité dans ce manuscrit est celui de l'atténuation des perturbations pouvant affecter une EDS. Des conditions suffisantes ont été proposées afin d'assurer un taux de décroissance garanti des perturbations avec la stabilité exponentielle presque sûre.

La stabilisation d'une classe de systèmes stochastiques non linéaires garantissant la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre en boucle fermée a été réalisée au moyen d'une commande bang-bang dans deux configurations : par retour d'état et, lorsque l'état est

partiellement mesuré, par retour d'état estimé via un observateur.

La dernière partie de ce manuscrit a été consacrée aux systèmes stochastiques singuliers avec des bruits multiplicatifs. Dans un premier temps, la formule d'Itô a été étendue aux équations algébro-différentielles stochastiques. L'approche utilisée est basée sur la décomposition du pseudo-état en deux parties : les variables dynamiques et les variables algébriques. Les concepts d'indice 1 et d'admissibilité ont été formalisés pour les EADS. Puis, dans le cas où la dérive et la diffusion des EADS sont linéaires, une version du lemme borné réel a été développée pour les systèmes stochastiques singuliers avec des bruits multiplicatifs afin de donner des conditions pour que l'EADS soit admissible avec la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et pour qu'un niveau d'atténuation des perturbations exogènes à énergie bornée soit garanti. Ce lemme borné réel a été ensuite appliqué pour synthétiser un correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état et un correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique. Dans le cas des systèmes stochastiques singuliers avec des non linéarités one-sided Lipschitz et des bruits multiplicatifs, un observateur d'ordre plein a été développé afin de garantir la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur d'estimation.

2 Perspectives et problèmes ouverts

Suite aux travaux présentés dans ce mémoire, les extensions et les perspectives suivantes sont des pistes de recherche à approfondir.

1) Considérer des non linéarités plus générales dans les EDS et les EADS pour la synthèse d'observateurs avec la stabilité exponentielle presque sûre :
- en plus des bilinéarités état-commande, prendre en compte des bilinéarités état-état,
- intégrer différentes classes de fonctions affines en l'état et en la commande dans la dérive et dans la diffusion des EDS et des EADS.

2) Dans [TR76], les auteurs proposent un observateur garantissant la bornitude exponentielle en moyenne quadratique. En utilisant le théorème de la valeur moyenne et en imposant à la dérive et à la diffusion d'être bornées pour tous les états $x(t)$ et pour toutes les commandes $u(t)$ [3], Tarn et Rasis proposent la synthèse d'un observateur sans nécessiter la stabilité ou la bornitude pour le système stochastique à observer.
- Il serait intéressant d'essayer d'étendre cette approche en employant la stabilité exponentielle presque sûre afin d'éviter d'utiliser l'approche découplée développée dans ce mémoire pour la synthèse d'observateurs. A la différence des travaux dans [TR76] qui n'utilisent que l'opérateur $\mathfrak{L}V$, où V est une fonction de Lyapunov, la stabilité exponentielle presque sûre requiert d'utiliser aussi l'opérateur $\mathfrak{B}V$.

3) Prise en compte des retards :
- synthétiser des observateurs et des lois de commande avec la stabilité exponentielle presque sûre en considérant la présence de retards dans la dérive,
- considérer le cas où les retards sont à temps variant et/ou inconnus, avec comme information disponible des bornes maximales sur ces retards.

4) Etendre les résultats sur la stabilité et la stabilisation développés dans le chapitre 4 :
- rechercher des classes de fonctions de Lyapunov adaptées au théorème 4.2.1,
- analyser les conditions d'application du théorème 4.2.1 pour différentes classes de non linéarités $f_1(x(t))$, $f_2(t)$ et $g(x(t))$ dans l'EDS (4.1),

3. Dans ce manuscrit, la dérive et la diffusion ne sont pas bornées.

- généraliser la commande bang-bang en proposant une loi de commande saturée avec, entre les bornes de saturation, une loi de commande continue (linéaire ou quadratique) et fonction de l'état ou de son estimation lorsqu'il n'est pas entièrement mesuré.

5) Etendre les résultats sur les systèmes stochastiques singuliers développés dans le chapitre 5 :

- étendre le lemme borné réel et les correcteurs $\mathcal{H}_\infty$ proposés dans ce manuscrit au cas où la dérive de l'EADS est non linéaire,
- adapter le théorème 4.2.1 sur le rejet des perturbations avec un taux de décroissance exponentielle garanti au cas des EADS,
- étudier l'application des lois de commande saturées au cas des systèmes stochastiques dont la dynamique est décrite par une EADS.

6) Explorer d'autres types de stabilité pour les systèmes stochastiques :

- utiliser par exemple des stabilités exponentielles avec des moments supérieurs à deux afin d'assurer une stabilité "plus forte" pour les systèmes stochastiques considérés. Le but est d'élaborer des méthodes de synthèse d'observateurs et de lois de commande qui soient sous une forme facilement implémentable, donc sous une forme de LMI de préférence.

7) Une perspective intéressante serait de mener une étude approfondie du point de vue de l'automaticien sur la modélisation des systèmes physiques avec des EDS et des EADS. Il existe en effet déjà une large théorie concernant ces types de systèmes, mais les exemples réels d'application pour la commande et l'observation restent "marginaux" à notre goût. Il serait bien d'avoir plus d'exemples représentatifs dans des domaines aussi variés que la biologie, la finance, la mécanique, ..., afin de souligner la pertinence de ces systèmes pour la communauté automaticienne.

Annexe A

Inégalités matricielles linéaires et compléments mathématiques

Sommaire

A.1 Normes vectorielles et matricielles 221
A.1.1 Relations sur les normes vectorielles et matricielles 221
A.1.2 Mesures de matrices (normes logarithmiques) 223
A.1.3 Majoration d'une fonction vectorielle 223
A.2 Pseudo-inverses et solutions des équations linéaires 224
A.2.1 Solutions d'une équation linéaire et pseudo-inverses 224
A.2.2 Pseudo-inverses réflexives 225
A.2.3 Pseudo-inverse de Moore-Penrose 225
A.3 Inégalités matricielles linéaires (LMI) 226
A.3.1 Lemme de Schur 226
A.3.2 Lemme de projection 226
A.4 Produit de Kronecker 227

A.1 Normes vectorielles et matricielles

A.1.1 Relations sur les normes vectorielles et matricielles

La norme euclidienne, aussi appelée norme 2 ou norme de Frobenius, du vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est

$$\|x\| = \|x\|_2 = \|x\|_F = \sqrt{x^H x} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A.1.1}$$

La décomposition en valeurs singulières de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ est définie par

$$A = USV^H \tag{A.1.2}$$

où $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sont des matrices unitaires ($UU^H = U^H U = I_n$ et $VV^H = V^H V = I_m$)

et S est une matrice diagonale donnée par

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1(A) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2(A) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r(A) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0_{n-r\times m-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S} & 0_{r\times m-r} \\ 0_{n-r\times r} & 0_{n-r\times m-r} \end{bmatrix} \tag{A.1.3}$$

avec $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\text{rang}(S) = r$, $\sigma_i(A) > 0$ et $\sigma_{i+1}(A) = \lambda_{i+1}(A^H A) \geqslant \sigma_i(A) = \lambda_i(A^H A)$, $i = 1, \dots, r$. Si $i = \min(n, m) > r$, alors $\sigma_i(A) = 0$.

La norme euclidienne, aussi appelée norme de Frobenius, de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ est donnée par

$$\|A\| = \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |A_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\min(n,m)} \sigma_k^2(A) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)}. \tag{A.1.4}$$

La norme 2, aussi appelée norme 2 induite, de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ est donnée par

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{\max}(A). \tag{A.1.5}$$

La norme de Frobenius et la norme 2 vérifient les inégalités suivantes (avec $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ et $C \in \mathbb{C}^{m\times p}$) [HJ85]

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_F &\leqslant \|A\|_F + \|B\|_F, && \text{(A.1.6a)}\\
\|A+B\|_2 &\leqslant \|A\|_2 + \|B\|_2, && \text{(A.1.6b)}\\
\|AC\|_F &\leqslant \|A\|_F \|C\|_F, && \text{(A.1.6c)}\\
\|AC\|_2 &\leqslant \|A\|_2 \|C\|_2, && \text{(A.1.6d)}\\
\|A\|_2 &\leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\, \|A\|_2, && \text{(A.1.6e)}\\
\|A\|_F &= \|UAV\|_F, && \text{(A.1.6f)}\\
\|A\|_2 &= \|UAV\|_2, && \text{(A.1.6g)}\\
\max(|A_{i,j}|) &\leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{nm}\, \max(|A_{i,j}|), && \text{(A.1.6h)}\\
\max(|\lambda_i(A)|) &\leqslant \|A\|_2, && \text{(A.1.6i)}
\end{aligned}$$

où U et V sont des matrices unitaires.

Les deux inégalités suivantes sont utilisées dans ce mémoire

$$\begin{aligned}
a^T b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &\leqslant \|a\|\,\|b\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, && \text{(A.1.7a)}\\
2\,\|a\|\,\|b\| &\leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2, && \text{(A.1.7b)}
\end{aligned}$$

avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

A.1.2 Mesures de matrices (normes logarithmiques)

La mesure d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, aussi appelée norme logarithmique, est définie par [Vid93]

$$\mu_2(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\|I_n - \varepsilon A\|_2 - 1}{\varepsilon} = \lambda_{\max}\left(\frac{A + A^H}{2}\right) \tag{A.1.8}$$

et possède les propriétés suivantes [Vid93]

$$-\|A\|_2 \leqslant \mu_2(A) \leqslant \|A\|_2, \tag{A.1.9a}$$
$$-\mu_2(-A) \leqslant \operatorname{Re}\lambda(A) \leqslant \mu_2(A), \tag{A.1.9b}$$

où $\lambda(A)$ est une valeur propre de A.

A.1.3 Majoration d'une fonction vectorielle

Une fonction $f(x) \in \mathbb{R}^m$ est Lipschitz dans $\mathcal{R}$ s'il existe un réel $\rho > 0$ tel que [Vid93]

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant \rho \|x_1 - x_2\| \qquad \forall\, x_1 \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{A.1.10}$$

Une fonction $f(x) \in \mathbb{R}^n$ est Lipschitz d'un côté (en anglais "one-sided Lipschitz") dans $\mathcal{R}$ s'il existe un réel ρ tel que [AM10]

$$(f(x_1) - f(x_2))^T (x_1 - x_2) \leqslant \overline{\rho} \|x_1 - x_2\|^2 \quad \forall\, x_1 \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{A.1.11}$$

Une fonction $f(x) \in \mathbb{R}^n$ est quadratiquement bornée dans $\mathcal{R}$ s'il existe deux réels ρ_1 et ρ_2 tels que [AM10]

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|^2 \leqslant \rho_1 \|x_1 - x_2\|^2 + \rho_2 (f(x_1) - f(x_2))^T (x_1 - x_2) \qquad \forall\, x_1 \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n, \forall\, x_2 \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{A.1.12}$$

Les réels ρ et $\overline{\rho}$ vérifient les inégalités suivantes [AM10]

$$\rho \geqslant \limsup \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_2 \qquad \forall\, x \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{A.1.13a}$$
$$\overline{\rho} \geqslant \limsup \mu_2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \forall\, x \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{A.1.13b}$$

Les implications entre les inégalités (A.1.10), (A.1.11) et (A.1.12) sont décrites par le diagramme suivant [AM10].

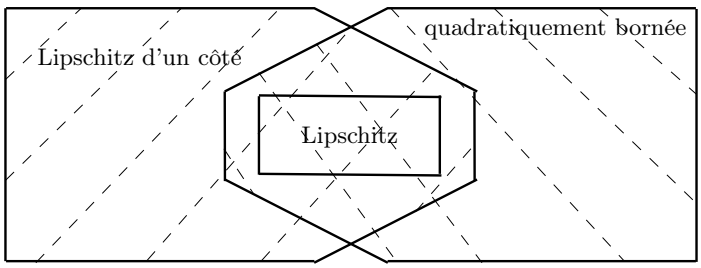


FIGURE A.1 – Les ensembles de fonctions Lipschitz, Lipschitz d'un côté et quadratiquement bornée.

A.2 Pseudo-inverses et solutions des équations linéaires

Les relations présentées dans cette section sont extraites de [RM71, BG74, YTT11].

A.2.1 Solutions d'une équation linéaire et pseudo-inverses

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. $A^\dagger \in \mathbb{C}^{m\times n}$ est une pseudo-inverse de A si

$$A = AA^\dagger A. \tag{A.2.1}$$

La pseudo-inverse $A^\dagger$ vérifie

$$\text{rang}(A^\dagger) \geqslant \text{rang}(A) = \text{rang}(AA^\dagger) = \text{rang}(A^\dagger A). \tag{A.2.2}$$

Toutes les pseudo-inverses $X = A^\dagger$ sont paramétrées par

$$X = A^\dagger + U - A^\dagger AUAA^\dagger \tag{A.2.3}$$

ou par

$$X = A^\dagger + V(I_n - AA^\dagger) + (I_m - A^\dagger A)W \tag{A.2.4}$$

où $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $W \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sont des matrices arbitraires.

L'équation

$$y = Ax$$

où $y \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^m$, permet de définir les quatre sous-espaces suivants : $\mathcal{U} = \text{Im}(A) \subset \mathbb{C}^n$, $\overline{\mathcal{V}} = \ker(A) \subset \mathbb{C}^m$, $\mathcal{V} \in \mathbb{C}^{n-\dim(\mathcal{U})}$ avec $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = C^n$ et $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathbb{C}^{m-\dim(\overline{\mathcal{V}})}$ avec $\overline{\mathcal{U}} \oplus \overline{\mathcal{V}} = \mathbb{C}^m$.

$AA^\dagger$ est un projecteur sur $\text{Im}(A)$ le long de $\mathcal{V}$ et $A^\dagger A$ est un projecteur sur $\overline{\mathcal{U}}$ le long de $\ker(A)$ avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \text{Im}(AA^\dagger) = \text{Im}(A), && \text{(A.2.5a)}\\
\mathcal{V} &= \ker(AA^\dagger) = \text{Im}(I_n - AA^\dagger), && \text{(A.2.5b)}\\
\overline{\mathcal{V}} &= \ker(A^\dagger A) = \ker(A) = \text{Im}(I_m - A^\dagger A), && \text{(A.2.5c)}\\
\overline{\mathcal{U}} &= \text{Im}(A^\dagger A), && \text{(A.2.5d)}\\
\mathbb{C}^n &= \text{Im}(AA^\dagger) \oplus \text{Im}(I_n - AA^\dagger), && \text{(A.2.5e)}\\
\mathbb{C}^m &= \text{Im}(A^\dagger A) \oplus \text{Im}(I_m - A^\dagger A). && \text{(A.2.5f)}
\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ et $C \in \mathbb{C}^{n\times q}$, l'équation linéaire

$$AXB = C \tag{A.2.6}$$

a une solution $X \in \mathbb{C}^{m\times p}$ si et seulement si

$$AA^\dagger CB^\dagger B = C \tag{A.2.7}$$

ou si et seulement si

$$(I_n - AA^\dagger)C = 0 \qquad \text{et} \qquad C(I_q - B^\dagger B) = 0. \tag{A.2.8}$$

La solution générale de l'équation (A.2.6) est

$$X = A^\dagger CB^\dagger + Z - A^\dagger AZBB^\dagger \tag{A.2.9}$$

où $Z \in \mathbb{C}^{m\times p}$ est une matrice arbitraire.

En utilisant la propriété (A.2.5a), la condition (A.2.8) est équivalente à

$$\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(C^T) \subset \mathrm{Im}(B^T) \tag{A.2.10}$$

et donc est équivalente à la condition de rang suivante

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}\Big(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\Big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}\left(\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}\right). \tag{A.2.11}$$

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice A peut être utilisée pour construire une pseudo-inverse $A^\dagger$ de A. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ et $\mathrm{rang}(A) = r$, alors la matrice X

$$X = V \begin{bmatrix} \overline{S}^{-1} & S_1 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} U^H \tag{A.2.12}$$

est une pseudo-inverse de A car $A = AXA$ où les matrices U, V et $\overline{S}$ sont définies dans (A.1.2) et (A.1.3), les matrices $S_1 \in \mathbb{C}^{r\times m-r}$, $S_2 \in \mathbb{C}^{n-r\times r}$ et $S_3 \in \mathbb{C}^{n-r\times m-r}$ sont arbitraires.

A.2.2 Pseudo-inverses réflexives

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. $A^\dagger \in \mathbb{C}^{m\times n}$ est une pseudo-inverse réflexive de A si elle vérifie (A.2.1) et

$$A^+ = A^+AA^+. \tag{A.2.13}$$

La relation (A.2.2) est remplacée par

$$\mathrm{rang}(A^+) = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(AA^+) = \mathrm{rang}(A^+A) \tag{A.2.14}$$

et cette pseudo-inverse vérifie les relations (A.2.5a)-(A.2.5f) en remplaçant (A.2.5b) par

$$\ker(AA^+) = \ker(A^+) = \mathrm{Im}(I_n - AA^+).$$

Toutes les pseudo-inverses $X = A^+$ sont paramétrées par

$$A^+ = A_1AA_2 \tag{A.2.15}$$

où $A_1 = A^\dagger$ et $A_2 = A^\dagger$ sont deux pseudo-inverses de A vérifiant (A.2.1).

Si $S_3 = S_2\overline{S}S_1$ dans (A.2.12), alors $X = A^+$.

A.2.3 Pseudo-inverse de Moore-Penrose

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. $A^- \in \mathbb{C}^{m\times n}$ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose A si elle vérifie (A.2.1), (A.2.13) et

$$AA^- = (AA^-)^H, \tag{A.2.16}$$

$$A^-A = (A^-A)^H, \tag{A.2.17}$$

La pseudo-inverse de Moore-Penrose est réflexive et unique.

Si $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ et $S_3 = 0$ dans (A.2.12), alors $X = A^-$.

A.3 Inégalités matricielles linéaires (LMI)

A.3.1 Lemme de Schur

Lemme A.3.1 (**Lemme de Schur**). *[KJ72] Soit trois matrices réelles $A = A^T$, B et $C = C^T$, alors*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \Longleftrightarrow A > 0 \text{ et } C - B^T A^{-1} B > 0 \Longleftrightarrow C > 0 \text{ et } A - BC^{-1}B^T > 0, \tag{A.3.1}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \geqslant 0 &\Longleftrightarrow A \geqslant 0 \text{ et } C - B^T A^{+} B \geqslant 0 \text{ et } B = AA^{+}B \\ &\Longleftrightarrow C \geqslant 0 \text{ et } A - BC^{+}B^T \geqslant 0 \text{ et } B = BC^{+}C \\ &\Longleftrightarrow A \geqslant 0 \text{ et } C - B^T A^{\dagger} A A^{\dagger} B \geqslant 0 \text{ et } B = AA^{\dagger}B \\ &\Longleftrightarrow C \geqslant 0 \text{ et } A - BC^{\dagger} C C^{\dagger} B^T \geqslant 0 \text{ et } B = BC^{\dagger}C. \end{aligned} \tag{A.3.2}$$

A.3.2 Lemme de projection

Lemme A.3.2 (**Lemme de projection**). *[GA94, IS94] Etant données trois matrices B, C et Q ($Q = Q^T$), les deux propositions suivantes sont équivalentes*

1) *Il existe une matrice P telle que*

$$BPC + (BPC)^T + Q < 0 \tag{A.3.3}$$

2)

$$B^{T^{\perp}{}^T} Q B^{T^{\perp}} < 0 \text{ (ou } \exists\, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mu BB^T - Q > 0) \tag{A.3.4}$$

et

$$C^{\perp^T} Q C^{\perp} < 0 \text{ (ou } \exists\, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mu C^T C - Q > 0). \tag{A.3.5}$$

Donc, pour résoudre (A.3.3), il suffit de vérifier (A.3.4) et (A.3.5) et après on reconstruit P avec (A.3.6).

Dans le cas où il existe une solution P à l'item (1), alors nous pouvons paramétrer toutes les solutions P par [IS94]

$$P = B_R^{\dagger} K C_L^{\dagger} + Z - B_R^{\dagger} B_R Z C_L C_L^{\dagger} \tag{A.3.6}$$

où

$$B = B_L B_R \text{ et } C = C_L C_R \tag{A.3.7}$$

sont respectivement des factorisations de rang plein de B et C. Les matrices Z, R et L sont arbitraires et vérifient

$$R = R^T > 0 \text{ et } \|L\| < 1, \tag{A.3.8}$$

tandis que les matrices K, S_1 et S_2 sont données par

$$K = -R^{-1} B_L^T S_1 C_R^T \left(C_R S_1 C_R^T\right)^{-1} + R^{-1} S_2^{1/2} L \left(C_R S_1 C_R^T\right)^{-1/2}, \tag{A.3.9a}$$

$$S_1 = \left(B_L R^{-1} B_L^{\dagger} - Q\right)^{-1} > 0, \tag{A.3.9b}$$

$$S_2 = R - B_L^T \left(S_1 - S_1 C_R^T \left(C_R S_1 C_R^T\right)^{-1} C_R S_1\right) B_L. \tag{A.3.9c}$$

A.4 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker des matrices A et B est défini par [Bre78, Bre79, Gra81]

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix} \tag{A.4.1}$$

et vérifie la propriété

$$\mathrm{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(X) \tag{A.4.2}$$

où l'opérateur vec(.) est défini par

$$\mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}. \tag{A.4.3}$$

Annexe B

Définitions relatives aux processus stochastiques

Sommaire

B.1 Introduction aux processus stochastiques 229
B.2 Espace probabilisé 229
B.3 Espérance et martingale 230

B.1 Introduction aux processus stochastiques

Un processus stochastique est une fonction vectorielle aléatoire qui dépend du temps. On définit donc un processus stochastique comme une famille de variables aléatoires indexées par le temps.

B.2 Espace probabilisé

La probabilité est une évaluation du caractère probable d'un évènement. La probabilité d'un évènement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus le risque (ou la chance, selon le point de vue) que l'évènement se produise est grand. Les évènements élémentaires "possibles" ω sont regroupés dans un ensemble Ω. Les parties de Ω "observables" ou "intéressantes" constituent une tribu $\mathcal{F}$.

On définit donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ avec

- Ω est l'ensemble des événements,
- $\mathcal{F}$ est une tribu,
- $\mathbf{P}$ est la mesure de la probabilité sur $\mathcal{F}$.

Définition B.2.1 (Tribu (ou $\sigma-$algèbre en anglais) sur Ω). *Une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est une famille de parties de Ω*

- *contenant l'ensemble vide,*
- *stable par passage au complémentaire (si une partie de Ω appartient à $\mathcal{F}$, alors le complémentaire de cette partie appartient aussi à $\mathcal{F}$),*
  - *à union dénombrable (si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$, avec n qui peut tendre vers $+\infty$).*

Définition B.2.2 (**Espace probabilisé**). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $\mathbf{P}$ *une application de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0 \;\; 1]$. $\mathbf{P}$ *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *si*

- $\mathbf{P}\{0\} = 0, \mathbf{P}\{\Omega\} = 1$,
- *Pour toute suite* $(A_n)_{\mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux disjoints avec* $A_n \in \mathcal{F}$ *(c'est-à-dire* $A_n \cap A_m = 0$ *si* $n \neq m$*), on a* $\mathbf{P}\left\{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\{A_n\}$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *s'appelle un espace probabilisé ou espace de probabilité.*

Définition B.2.3 (**Filtration**). *Une filtration* $\mathcal{F}_t$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est-à-dire qu'elle vérifie* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leqslant s$.

Une tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à l'instant t.

Une filtration est une sous-famille de tribus emboîtées de Ω qui peut s'interpréter comme l'information disponible qui évolue au cours du temps. Ainsi, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ si $t \leqslant s$ reflète l'augmentation de l'information disponible.

Définition B.2.4 (**Fonction $\mathcal{F}$-mesurable**). *Une fonction* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *est* $\mathcal{F}$*-mesurable si*

$$\{\omega : X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{F} \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

Si X *est vectoriel* $(X(\omega) = [\, X_1(\omega) \;\; \ldots \;\; X_n(\omega)\,]^T)$*, alors il faut que chaque coordonnée* $X_i(\omega)$ *soit* $\mathcal{F}$*-mesurable.*

Définition B.2.5 (**Processus $\mathcal{F}_t$-adapté**). *Un processus* X *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté s'il est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable quel que soit* $t \geqslant 0$.

Un processus adapté est donc un processus stochastique pour lequel une description probabiliste est réalisable.

B.3 Espérance et martingale

Définition B.3.1 (**Fonction de répartition**). *La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle* X *est la fonction* $\mathbf{F}_X$ *suivante*

$$\mathbf{F}_X(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle caractérise la loi de probabilité de cette variable aléatoire avec $\mathbf{P}\{a < X \leqslant b\} = \mathbf{F}_X(b) - \mathbf{F}_X(a)$. $\mathbf{F}_X(x)$ est une fonction croissante qui vérifie $0 \leqslant \mathbf{F}_X(x) \leqslant 1$.

Définition B.3.2 (**Densité de probabilité**). *La densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle est donnée par*

$$\mathbf{f}_X(x) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_X(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}\{X \leqslant x\}}{\mathrm{d}x}$$

La densité de probabilité est une fonction qui permet de représenter une loi de probabilité sous la forme d'intégrales avec $\displaystyle\int_a^b \mathbf{f}_X(s)\,\mathrm{d}s = \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$.

Définition B.3.3 (Espérance mathématique). *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On note $\mathbf{E}(X)$ l'espérance de X*

$$\mathbf{E}\{X\} = \int_{\Omega} X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathrm{d}\mathbf{F}_X(x)$$

où $\mathbf{F}_X$ est la fonction de répartition de X (avec $X(\omega) = x$). Si $\mathbf{E}\{X\} = 0$ on dit que X est centrée.

Définition B.3.4 (Martingale, sous-martingale, sur-martingale (super-martingale)). *Un processus $X(t) \in \mathbb{R}^n$ est une martingale ou une $\mathcal{F}_t$-martingale si*

- $\mathbf{E}\{\|X(t)\|\} < +\infty$, $\forall\, t \geqslant 0$,
- *$X(t)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté,*
- $\mathbf{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\} = X(s)\ \forall\, s, 0 \leqslant s \leqslant t$.

On parle de sous-martingale si $X(t) \in \mathbb{R}$ et si $\mathbf{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\} \geqslant X(s)\ \forall\, s, 0 \leqslant s \leqslant t$.

On parle de sur-martingale ou de super-martingale si $X(t) \in \mathbb{R}$ et si $\mathbf{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\} \leqslant X(s)$ $\forall\, s, 0 \leqslant s \leqslant t$.

Une martingale est un processus stochastique qui ne possède pas de partie prévisible relativement à l'information dont on dispose. C'est donc un processus stochastique intégrable tel que la meilleure prédiction pour une valeur future, sachant les valeurs passées et présentes, est la valeur actuelle.

Si un processus est une martingale, alors il est complètement déterminé par sa valeur terminale, ce qui veut dire que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date s, dénotée $\mathcal{F}_s$, est la valeur à cette même date ($\mathbf{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\} = X(s)$ avec $0 \leqslant s \leqslant t$).

Puisque une martingale vérifie $\mathbf{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\} = X(s)\ \forall\, s, 0 \leqslant s \leqslant t$, alors on a

$$\mathbf{E}\{\Delta_X|\mathcal{F}_s\} = 0 \qquad \forall\, s, 0 \leqslant s \leqslant t$$

avec $\Delta_X = X(t) - X(s)$.

Une martingale est une super-martingale, mais la réciproque est fausse. Une martingale est une sous-martingale, mais la réciproque est fausse.

Le fait qu'un processus stochastique soit une martingale dépend de l'information disponible et de la probabilité, c'est-à-dire de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ considéré. Si l'on change l'information disponible et/ou la probabilité, donc l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, alors le processus stochastique peut ne plus être une martingale.

Annexe C

Lemmes divers

Sommaire

C.1 Lemmes sur les équations différentielles stochastiques 233
C.2 Lemme de Gronwall-Bellman 234
C.3 Lemmes de majoration 234

C.1 Lemmes sur les équations différentielles stochastiques

On considère l'équation différentielle stochastique suivante

$$\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}t + g(x(t))\,\mathrm{d}w \tag{C.1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $w(t) \in \mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien.

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ vérifient les inégalités suivantes

$$\int_0^T \|f(x(s))\|\,\mathrm{d}s < \infty \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, T > 0, \tag{C.1.2a}$$

$$\int_0^T \|g(x(s))\|^2\,\mathrm{d}s < \infty \qquad \text{p.s.} \qquad \forall\, T > 0. \tag{C.1.2b}$$

Lemme C.1.1 (Inégalité martingale exponentielle). *([Mao97], théorème 1.7.4) Soit $g(x(t)) = [\, g_1(x(t)) \dots g_d(x(t)) \,]$ vérifiant la condition (C.1.2b) et soit les réels $T > 0$, $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$, alors*

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\int_0^t g(x(s))\,\mathrm{d}w(s) - \frac{\beta_1}{2} \int_0^t \|g(x(s))\|^2\,\mathrm{d}s \right) > \beta_2 \right\} \leqslant e^{-\beta_1 \beta_2}. \tag{C.1.3}$$

Lemme C.1.2 (Inégalité super-martingale). *[Mao97] (théorème 1.3.6) Soit $\{M_t\}_{t \leqslant 0}$ une super-martingale valuée dans $\mathbb{R}$ et soit $[\, a \;\; b \,] \subset \mathbb{R}_+$ avec b borné , alors*

$$c\mathbf{P}\left\{ \omega :\, \sup_{a \leqslant t \leqslant b} M_t(\omega) \geqslant c \right\} \leqslant \mathbf{E}\{M_a\} + \mathbf{E}\{M_b^-\} \tag{C.1.4}$$

pour tout $c > 0$, avec $M_t^- = \max(0, -M_t)$.

Définition C.1.1 (Limite supérieure d'une suite de parties d'un ensemble). *La limite supérieure d'une suite* $\{\mathcal{A}_k\}$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) de parties d'un ensemble* Ω *est l'ensemble* $\limsup_k$ *des éléments* ω *de* Ω *tels que l'assertion* $\omega \in \mathcal{A}_k$ *soit vérifiée pour une infinité d'indices* $k \geqslant 0$*. Cet ensemble est défini par*

$$\limsup_k \mathcal{A}_k = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geqslant i} \mathcal{A}_k \right). \tag{C.1.5}$$

Lemme C.1.3 (Lemme de Borel-Cantelli). *[Mao97] (théorème 1.2.4) Soit un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*, considérons une suite d'événements* $\{\mathcal{A}_k\}$*.*

1) *Si la séquence* $\{\mathcal{A}_k\} \subset \mathcal{F}$ *et si* $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\{\mathcal{A}_k\} < +\infty$*, alors*

$$\mathbf{P}\left\{ \limsup_{k\to+\infty} \mathcal{A}_k \right\} = 0. \tag{C.1.6}$$

2) *Si la séquence* $\{\mathcal{A}_k\} \subset \mathcal{F}$ *est indépendante et si* $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\{\mathcal{A}_k\} = +\infty$*, alors*

$$\mathbf{P}\left\{ \limsup_{k\to+\infty} \mathcal{A}_k \right\} = 1. \tag{C.1.7}$$

L'item 1 du lemme C.1.3 signifie que si la somme des probabilités d'une suite d'événements d'un espace de probabilité est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle. Autrement dit, il existe un ensemble $\Omega_p \in \mathcal{F}$ avec $\mathbf{P}\{\Omega_p\} = 1$ et un entier $k_p(\omega) > 0$ tel que, pour tout événement $\omega \in \Omega_p$, on a $\omega \notin \mathcal{A}_k$ si $k \geqslant k_p(\omega)$.

L'item 2 du lemme C.1.3 signifie que si la somme des probabilités d'une suite d'événements d'un espace de probabilité est infinie et que ces événements sont indépendants, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se produisent est un. Autrement dit, il existe un ensemble $\Omega_m \in \mathcal{F}$ avec $\mathbf{P}\{\Omega_m\} = 1$ tel que, pour tout événement $\omega \in \Omega_m$, il existe une sous-séquence $\{\mathcal{A}_{k_i}\}$ de $\{\mathcal{A}_k\}$ telle que l'événement ω appartient à toutes les $\{\mathcal{A}_{k_i}\}$.

C.2 Lemme de Gronwall-Bellman

Lemme C.2.1 (Lemme Gronwall-Bellman). *([Vid93, Mao97]) Soit une fonction* $v : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$*, intégrable sur* $\mathbb{R}^+$ *et* $v(.) \geqslant 0$*. Soit un réel* $c > 0$*. Si*

$$u(t) \leqslant c + \int_0^t v(s)u(s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$$

alors

$$u(t) \leqslant c \exp\left(\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s \right).$$

C.3 Lemmes de majoration

Lemme C.3.1 (Premier lemme de majoration). *[Pet87] Soit trois matrices rélles A, B et C avec* $C^T C \leqslant I_p$*, alors, pour tout réel* $\mu > 0$*, on a*

$$2x^T ACBx \leqslant \mu x^T AA^T x + \frac{1}{\mu} x^T B^T Bx \tag{C.3.1}$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme C.3.2 (**Second lemme de majoration**). *[WXD92, XC03] Soit cinq matrices A, B, C, D et F* $F^T F \leqslant I_\bullet$, *alors, pour tout réel* $\mu > 0$, *on a*

$$(A + BFC)D^{-1}(A + BFC)^T \leqslant A^T(D - \mu BB^T)^{-1}A + \frac{1}{\mu}C^T C. \tag{C.3.2}$$

Bibliographie

[AK01a] M. Arcak and P.V. Kokotović. Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37 :1923–1930, 2001.

[AK01b] M. Arcak and P.V. Kokotović. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :1146–1150, 2001.

[All07] E. Allen. *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*, volume 22 of *Mathematical Modelling : Theory and Applications*. Springer, Dordrecht, 2007.

[AM79] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.

[AM10] M. Abbaszadeh and H.J. Marquez. Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, Baltimore, USA, 2010.

[Apl91] J.D. Aplevich. *Implicit Linear Systems*, volume 152 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[AT74] N.U. Ahmed and K.L. Teo. Stochastic bang-bang control. *IEEE Trans. Aut. Control*, 19 :73–75, 1974.

[AV73] B.D.O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network Analysis and Synthesis : A Modern Theory Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

[Bas01] G.K. Basak. Stabilization of dynamical systems by adding a colored noise. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :1107–1111, 2001.

[BB97] G. Besançon and G. Bornard. On characterizing classes of observer forms for nonlinear systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Brussels, Belgium, 1997.

[BBZ12] M. Benallouch, M. Boutayeb, and M. Zasadzinski. Observers design for one-sided Lipschitz discrete-time systems. *Syst. & Contr. Letters*, 61 :879–886, 2012.

[BC00] S. Bittanti and F.A. Cuzzola. Unbiased robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering by means of LMI optimisation. In *Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design*, Prague, Czech Republic, 2000.

[BC01] S. Bittanti and F.A. Cuzzola. An LMI approach to periodic discrete-time unbiased filtering. *Syst. & Contr. Letters*, 42 :21–35, 2001.

[BCC88] G. Bornard, N. Couenne, and F. Celle. Regularly persistent observers for bilinear systems. In J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, and D. Leborgne, editors, *New Trends in Nonlinear Control Theory*, volume 122 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 130–140. Springer-Verlag, 1988.

[BD99] K.K. Busawon and J. De Leon-Morales. An improved high gain observer for single input uniformly observable systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Karlsruhe, Germany, 1999.

[BEFB94] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[Bes00] G. Besançon. Remarks on nonlinear observer design. *Syst. & Contr. Letters*, 41 :271–280, 2000.

[BG74] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverses : Theory and Applications*. Wiley, New York, 1974.

[BH95] G. Besançon and H. Hammouri. Reduced order observer for a class of non-uniformly observable systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, New Orleans, USA, 1995.

[BH96] G. Besançon and H. Hammouri. On uniform observation of nonuniformly observable systems. *Syst. & Contr. Letters*, 29 :9–19, 1996.

[BM99] P. Bolzern and M. Maroni. New conditions for the convergence of $\mathcal{H}_\infty$ filters and predictors. *IEEE Trans. Aut. Control*, 44 :1564–1568, 1999.

[Bou99] C. Boulanger. Exponential stability and stabilizability in mean square of large-scale stochastic systems. *Stochastic Analysis and Applications*, 17 :727–741, 1999.

[Bre78] J.W. Brewer. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 25 :772–781, 1978.

[Bre79] J.W. Brewer. Correction to "Kronecker products and matrix calculus in system theory". *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 26 :360, 1979.

[BS85] Y. Baram and U. Shaked. Minimal order estimation of continuous time stochastic linear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 30 :483–484, 1985.

[BS86] Y. Baram and U. Shaked. Minimal order estimation of multivariable discrete-time stochastic linear systems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 24 :817–820, 1986.

[BS10] N. Berman and U. Shaked. Robust $\mathcal{L}_\infty$-induced filtering and control of stochastic systems with state-multiplicative noise. *IEEE Trans. Aut. Control*, 55 :732–737, 2010.

[BZH10] D. Boutat, G. Zheng, and H. Hammouri. A nonlinear canonical form for reduced order observer design. In *Proc. IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, Bologna, Italy, 2010.

[BZSM12a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Filtrage des systèmes non linéaires stochastiques avec des bruits multiplicatifs. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Grenoble, France, 2012.

[BZSM12b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires stochastiques en utilisant la stabilité exponentielle presque sûre : Approche LMI. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Grenoble, France, 2012.

[BZSM13a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. $\mathcal{H}_\infty$ control for singular stochastic systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Zürich, Switzerland, 2013.

[BZSM13b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Exponential disturbance rejection with decay rate for stochastic systems. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, Washington, USA, 2013.

[BZSM13c] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Robust observer design for a class of stochastic nonlinear systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Firenze, Italy, 2013.

[BZSM14a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Observer-based bang-bang control for a class of nonlinear stochastic systems. In *Proc. Triennal IFAC World Congress*, Cape Town, South Africa, 2014.

[BZSM14b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Observer design for a class of singular stochastic nonlinear systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Strasbourg, France, 2014.

[BZSM15a] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Exponential observer for a class of one-sided Lipschitz stochastic nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 60 :259–264, 2015.

[BZSM15b] A. Barbata, M. Zasadzinski, H. Souley Ali, and H. Messaoud. Sufficient conditions for almost sure exponential stability of large scale interconnected stochastic systems. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, Chicago, USA, 2015.

[CF01] F.A. Cuzzola and A. Ferrante. Explicit formulas for LMI-based $\mathcal{H}_2$ filtering and deconvolution. *Syst. & Contr. Letters*, 42 :21–35, 2001.

[CGR03] T. Caraballo, M.J. Garrido-Atienza, and J. Real. Stochastic stabilization of dfferential systems with general decay rate. *Syst. & Contr. Letters*, 48 :397–406, 2003.

[CGS00] F. Carravetta, A. Germani, and M.K. Shuakayev. A new suboptimal approach to the filtering problem for bilinear stochastic differential systems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 38 :1171–1203, 2000.

[Che82] P.L. Chesson. The stabilizing effect of a random environment. *J. of Mathematical Biology*, 15 :1–36, 1982.

[Che85] H.F. Chen. *Recursive Estimation and Control for Stochastic Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.

[CM04] S.S. Chughtai and N. Munro. LMI-based gain-scheduled control. In *Proc. Control Conference*, University of Bath, UK, 2004.

[CR97] Y.M. Cho and R. Rajamani. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 42 :534–537, 1997.

[Dai89] L. Dai. *Singular Control Systems*, volume 118 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[Dam04] T. Damm. *Rational Matrix Equations in Stochastic Control*, volume 297 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Dar00a] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 45 :940–943, 2000.

[Dar00b] M. Darouach. On the optimal unbiased functional filtering. *IEEE Trans. Aut. Control*, 45 :1374–1379, 2000.

[DBB+93] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopara. Exponential observers for nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 38 :482–484, 1993.

[DBGR92] F. Deza, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 18 :295–299, 1992.

[DFG90] X. Ding, P.M. Frank, and L. Guo. Nonlinear observer design via an extended observer canonical form. *Syst. & Contr. Letters*, 15 :313–322, 1990.

[DG91] F. Deza and J.P. Gauthier. A simple and robust nonlinear estimator. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Brighton, UK, 1991.

[DGF94] X. Ding, L. Guo, and P.M. Frank. Parametrization of linear observers and its application to observer design. *IEEE Trans. Aut. Control*, 39 :1648–1652, 1994.

[DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Kharkonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 34 :831–847, 1989.

[DGM08] N. Dalal, D. Greenhalgh, and X. Mao. A stochastic model for internal HIV dynamics. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 341 :1084–1101, 2008.

[DGM09] N. Dalal, D. Greenhalgh, and X. Mao. Mathematical modelling of internal HIV dynamics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems : Series B*, 12 :305–321, 2009.

[DHS97] V. Dragan, A. Halanay, and A. Stoica. A small gain theorem for linear stochastic systems. *Syst. & Contr. Letters*, 30 :243–251, 1997.

[DLMP08] F. Deng, Q. Luo., X. Mao, and S. Pang. A noise suppresses or expresses exponential growth. *Syst. & Contr. Letters*, 57 :262–270, 2008.

[DSN79] I.A. Derese, P. Stevens, and E.J. Noldus. Observers for bilinear systems with bounded input. *Int. J. Syst. Sci.*, 10 :649–668, 1979.

[dXW93] C.E. de Souza, L. Xie, and Y. Wang. $\mathcal{H}_\infty$ filtering for a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 20 :419–426, 1993.

[DZ97] M. Darouach and M. Zasadzinski. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs. *Automatica*, 33 :717–719, 1997.

[DZB00] M. Darouach, M. Zasadzinski, and M. Boutayeb. On the optimal unbiased filtering via LMI. In *Proc. Int. Conf. Appl. Math. & Eng. Sci.*, Casablanca, Morocco, 2000.

[DZS01] M. Darouach, M. Zasadzinski, and H. Souley Ali. Robust reduced order unbiased filtering via LMI. In *Proc. European Contr. Conf.*, Porto, Portugal, 2001.

[EC01] L. El Ghaoui and G. Calafiore. Robust filtering for discrete-time systems with bounded noise and parametric uncertainties. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :1084–1089, 2001.

[EF96] L. El Ghaoui and J.P. Folcher. Multiobjective robust control of LTI systems subject to unstructured uncertainties. *Syst. & Contr. Letters*, 28 :23–30, 1996.

[FA03] X. Fan and M. Arcak. Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. *Syst. & Contr. Letters*, 50 :319–330, 2003.

[FdX92] M. Fu, C.E. de Souza, and L. Xie. $\mathcal{H}_\infty$ estimation for uncertain systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 2 :87–105, 1992.

[FMR04] M. Farza, M. M'Saad, and L. Rossignol. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatica*, 40 :135–143, 2004.

[Fra87] B.A. Francis. *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[Fri75] A. Friedman. *Stochastc Differential Equations and Applications*. Academic Press, New York, 1975.

[FS02] E. Fridman and U. Shaked. A descriptor system approach to $\mathcal{H}_\infty$ control of linear time-delay systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 47 :253–270, 2002.

[FSCM10] M. Farza, A. Sboui, E. Cherrier, and M. M'Saad. High-gain observer for a class of time-delay nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 83 :273–280, 2010.

[Fu91] M. Fu. Interpolation approach to $\mathcal{H}_\infty$ estimation and its connection to loop transfer recovery. *Syst. & Contr. Letters*, 17 :29–36, 1991.

[Fun79] Y. Funahashi. Stable state estimator for bilinear systems. *Int. J. Contr.*, 29 :181–188, 1979.

[FW72] T.E. Fortmann and D. Williamson. Design of low-order observers for linear feedback control law. *IEEE Trans. Aut. Control*, 17 :301–308, 1972.

[GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A Linear Matrix Inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 4 :421–448, 1994.

[Gar80] T.C. Gard. Persistence in food chains with general interactions. *Mathematical Biosciences*, 51 :165–174, 1980.

[GB99] J.C. Geromel and M.C. de Oliveira J. Bernussou. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter Lyapunov functions. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Phoenix, USA, 1999.

[GD88] K. Glover and J.C. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an $\mathcal{H}_\infty$-norm bound and relations to risk sensitivity. *Syst. & Contr. Letters*, 11 :167–172, 1988.

[Gee03a] H.P. Geering. Brown'sche Bewegung, 2003. Stochastische Systeme, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, Switzerland.

[Gee03b] H.P. Geering. Brown'sche Bewegung & Weisses Rauschen, 2003. Stochastische Systeme, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, Switzerland.

[Ger99] J.C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 47 :168–175, 1999.

[Gér08] B. Gérard. *Observateurs et Commande Basée sur un Observateur pour les Systèmes Bilinéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 2008.

[GFH81] R.D. Gupta, F.W. Fairman, and T. Hinamoto. A direct procedure for the design of single functional observers. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 28 :294–300, 1981.

[GHO92] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems, applications to bioreactors. *IEEE Trans. Aut. Control*, 37 :875–880, 1992.

[GI81] O.M. Grasselli and A. Isidori. An existence theorem for observers of bilinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 26 :1299–1300, 1981.

[GK76] T.C. Gard and D. Kannan. Stochastic differential equation modeling of prey-predator evolution. *J. Applied Probability*, 13 :429–443, 1976.

[GLSY01] E. Gershon, D.J.N. Limebeer, U. Shaked, and I. Yaesh. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering of stationary continuous-time linear systems with stochastic uncertainties. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :1788–1793, 2001.

[GLW06] H. Gao, J. Lam, and C. Wang. Robust energy-to-peak filter design for stochastic time-delay systems. *Syst. & Contr. Letters*, 55 :101–111, 2006.

[GM89] G.C. Goodwin and R.H. Middleton. The class of all stable unbiased estimators. *Syst. & Contr. Letters*, 13 :161–163, 1989.

[GMP02] A. Germani, C. Manes, and P. Palumbo. Linear filtering for bilinear stochastic differential systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Control*, 47 :1726–1730, 2002.

[Gra81] A. Graham. *Kronecker Products and Matrix Calculus : With Application*. Wiley, New York, 1981.

[GS72] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod. *Stochastc Differential Equations*. Springer Verlag, New York, 1972.

[GS13] E. Gershon and U. Shaked. *Advanced Topics in Control and Estimation of State-Multiplicative Noisy Systems*, volume 439 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2013.

[GSB07] E. Gershon, U. Shaked, and N/ Berman. $\mathcal{H}_\infty$ control and estimation of retarded state-multiplicative stochastic systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 52 :1173–1179, 2007.

[GSZD07] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. LPV approach for observer-based compensator for bilinear systems. In *Proc. Conference on Systems and Control*, Marrakesh, Morocco, 2007.

[GSZD10] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. $\mathcal{H}_\infty$ filter for bilinear systems using LPV approach. *IEEE Trans. Aut. Control*, 55 :1668–1674, 2010.

[GSZD12] B. Gérard, H. Souley Ali, M. Zasadzinski, and M. Darouach. $\mathcal{H}_\infty$ filtering for bilinear systems with a Lipschitz nonlinearity using LPV approach. *Int. J. Cont., Autom. Syst.*, 10 :1086–1095, 2012.

[Has12] R.Z. Has'minskii. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2012.

[HBM91] W.M. Haddad, D.S. Bernstein, and D. Mustafa. Mixed-norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ regulation and estimation : the discrete-time case. *Syst. & Contr. Letters*, 16 :235–247, 1991.

[HC00] C.S. Hsieh and F.C. Chen. Modified stochastic Luenberger observers. *Automatica*, 36 :1847–1854, 2000.

[HF76] S. Hara and K. Furuta. Minimal order state observers for bilinear systems. *Int. J. Contr.*, 24 :705–718, 1976.

[Hig01] D.J. Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43 :525–546, 2001.

[Hip89] P. Hippe. Design of reduced-order optimal estimators directly in the frequency domain. *Int. J. Contr.*, 50 :2599–2614, 1989.

[HJ85] R.A. Horn and C.A. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1985.

[HK77] R. Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Aut. Control*, 22 :728–740, 1977.

[HK01] B. Hassibi and T. Kailath. $\mathcal{H}_\infty$ bounds for least-squares estimators. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :309–314, 2001.

[HK02] D.J. Higham and P.E. Kloeden. *Programming Languages and Systems in Computational Economics and Finance*, chapter Maple and Matlab for stochastic differential equations in finance, pages 233–270. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.

[HM08] L. Hu and X. Mao. Almost sure exponential stabilisation of stochastic systems by state-feedback control. *Automatica*, 44 :465–471, 2008.

[HMS02] D.J. Higham, X. Mao, and A.M. Stuart. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations. *SIAM J. Numerical Analysis*, 40 :1041–1063, 2002.

[HMS03] D.J. Higham, X. Mao, and A.M. Stuart. Exponential stability of numerical solutions to stochastic differential equations. *London Mathematical Society – Journal of Computation and Mathematics*, 6 :297–313, 2003.

[HP98] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard. Stochastic $\mathcal{H}_\infty$. *SIAM J. Contr. Opt.*, 36 :1504–1538, 1998.

[HP99] M. Hou and A.C. Pugh. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. *Syst. & Contr. Letters*, 37 :1–9, 1999.

[HSK96a] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath. $\mathcal{H}_\infty$ optimality of the LMS algorithm. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 44 :267–280, 1996.

[HSK96b] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath. Linear estimation in Krein spaces, Part I : theory. *IEEE Trans. Aut. Control*, 41 :18–33, 1996.

[HSK96c] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath. Linear estimation in Krein spaces, Part II : applications. *IEEE Trans. Aut. Control*, 41 :34–49, 1996.

[HSK99] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath. *Indefinite-Quadratic Estimation and Control : A Unified Approach to $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Theories.* SIAM, Philadelphia, USA, 1999.

[HSRZ09] S. Halabi, H. Souley Ali, H. Rafaralahy, and M. Zasadzinski. $\mathcal{H}_\infty$ functional filtering for stochastic bilinear systems with multiplicative noises. *Automatica*, 45 :1038–1045, 2009.

[HTA02] H. Hammouri, B. Targui, and F. Armanet. High gain observer based on a triangular structure. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 12 :497–518, 2002.

[Hu06] G.D. Hu. Observers for one-sided Lipschitz non-linear systems. *IMA J. Mathematical Control & Information*, 23 :395–401, 2006.

[Hu08] G.D. Hu. A note on observer for one-sided Lipschitz non-linear systems. *IMA J. Mathematical Control & Information*, 25 :297–303, 2008.

[HW90] P. Hippe and C. Wurmthaller. Optimal reduced-order estimators in the frequency domain : the discrete-time case. *Int. J. Contr.*, 52 :1051–1064, 1990.

[IS94] T. Iwasaki and R.E. Skelton. All controllers for the general $\mathcal{H}_\infty$ control problems : LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30 :1307–1317, 1994.

[Itô50a] K. Itô. Brownian motions in a Lie group. *Proceedings of the Japan Academy, Serie A*, 26 :4–10, 1950.

[Itô50b] K. Itô. Stochastic differential equations in a differentiable manifold. *Nagoya Mathematical Journal*, 1 :35–47, 1950.

[Itô51] K. Itô. On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Mathematical Journal*, 3 :55–65, 1951.

[Kal60] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Trans. - Part D, J. Basic Engineering*, 82 :34–45, 1960.

[KB61] R.E. Kalman and R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *ASME Trans. - Part D, J. Basic Engineering*, 83 :95–108, 1961.

[KB13] E. Kolářová and L. Brančík. Vector stochastic differential equations used to electrical networks with random parameters. *Int. J. of Advances in Telecommunications, Electronics, Signals ans Systems*, 2 :1–8, 2013.

[KCA08] D. Karagiannis, D. Carnevale, and A. Astolfi. Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 53 :2602–2614, 2008.

[KJ72] E. Kreindler and A. Jameson. Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices. *IEEE Trans. Aut. Control*, 17 :147–148, 1972.

[KK61] I. Kats and N.N. Krasovskii. On the stability of systems with random parameters. *J. Appl. Math. Mach.*, 24 :1225–1246, 1961.

[Kle69] D.L. Kleinman. On the stability of linear stochastic systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 14 :429–430, 1969.

[Kle01] F.C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, London, 2001.

[Koz69] F. Kozin. A survey of stability of stochastic systems. *Automatica*, 5 :95–112, 1969.

[KRB96] P.P. Khargonekar, M.A. Rotea, and E. Baeyens. Mixed $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_\infty$ filtering. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 6 :313–330, 1996.

[KS72] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control*. Wiley Interscience, New York, USA, 1972.

[KSH00] T. Kailath, A.H. Sayed, and B. Hassibi. *Linear Estimation*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2000.

[Kus65a] H.J. Kushner. On the construction of stochastic Liapunov functions. *IEEE Trans. Aut. Control*, 10 :477–478, 1965.

[Kus65b] H.J. Kushner. On the existence of optimal controls. *SIAM J. Contr. Opt.*, 3 :463–474, 1965.

[Kus67] H.J. Kushner. *Stochastic Stability and Control*, volume 33 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York, 1967.

[Kwi02] A. A. Kwiecińska. Stabilization of evolution equations by noise. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130 :3067–3074, 2002.

[LD11] T.T.T. Lan and N.H. Dang. Exponential stability of nontrivial solutions of stochastic differential equations. *Scientia, Series A : Mathematical Sciences*, 29 :97–106, 2011.

[Lem09] V. Lemaire. Discrétisation d'équations différentielles stochastiques. Mathématiques en mouvement. Talk, 2009. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, France.

[Lév48] P. Lévy. *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, Paris, Francs, 1948.

[LF97] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 45 :2338–2350, 1997.

[Liu97] K. Liu. On stability for a class of semilinear stochastic evolution equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 70 :219–241, 1997.

[Liu01] K. Liu. Some remarks on exponential stability of stochastic differential equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 19 :59–65, 2001.

[LM98] K. Liu and X. Mao. Exponential stability of non-linear stochastic evolution equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 78 :173–193, 1998.

[LM10] W. Lin and H. Ma. Synchronization between adaptively coupled systems with discrete and distributed time-delays. *IEEE Trans. Aut. Control*, 55 :819–830, 2010.

[Lon80] R. Longchamp. Stable feedback control of bilinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 25 :302–306, 1980.

[LP87] H. Liske and E. Platen. Simulation studies on time discrete diffusion approximations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 29 :253–260, 1987.

[LS02] U. Ledzewicz and H. Schätter. Optimal bang-bang controls for a two-compartment model in cancer chemotherapy. *J. of Optimization Theory & Applications*, 114 :609–637, 2002.

[LS03] U. Ledzewicz and H. Schätter. Optimal control for a bilinear model with recruiting agent in cancer chemotherapy. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Maui, Hawaii, USA, 2003.

[Lue66] D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 11 :190–197, 1966.

[Lue71] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 16 :596–602, 1971.

[LWW11] M. Liu, K. Wang, and Q. Wu. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle. *Bulletin of Mathematical Biology*, 73 :1969–2012, 2011.

[Lya92] A.M. Lyapunov. *The General Problem of Stability of Motion*. PhD thesis, Kharkov Mathematical Society, 1892.

[Mao90] X. Mao. Exponential stability for stochastic differential equations with respect to semimartingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 35 :267–277, 1990.

[Mao92a] X. Mao. Almost sure polynomial stability for a class of stochastic differential equations. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford*, 43 :339–348, 1992.

[Mao92b] X. Mao. Exponential stability of large-scale stochastic differential equations. *Syst. & Contr. Letters*, 19 :71–81, 1992.

[Mao94a] X. Mao. *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*. Marcel Dekker, New York, 1994.

[Mao94b] X. Mao. Stochastic stabilization and destabilization. *Syst. & Contr. Letters*, 23 :279–290, 1994.

[Mao97] X. Mao. *Stochastic Differential Equations & Applications*. Horwood, London, 1997.

[Mas06] I. Masubuchi. Dissipativity inequalities for continuous-time descriptor systems with applications to synthesis of control gains. *Syst. & Contr. Letters*, 55 :158–164, 2006.

[Mas07] I. Masubuchi. Output feedback controller synthesis for descriptor systems satisfying closed-loop dissipativity. *Automatica*, 43 :339–345, 2007.

[MKOS97] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda. $\mathcal{H}_\infty$ control for descriptor systems : a matrix inequality approach. *Automatica*, 33 :669–672, 1997.

[MKR98] X. Mao, N. Koroleva, and A. Rodkina. Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations. *Syst. & Contr. Letters*, 35 :325–336, 1998.

[ML75] J.B. Moore and G.F. Ledwich. Minimal order observers for estimating linear functions of a state vector. *IEEE Trans. Aut. Control*, 20 :623–632, 1975.

[MMR02] X. Mao, G. Marion, and E. Renshaw. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stochastic Processes and their Applications*, 97 :95–110, 2002.

[Moh91] R.R. Mohler. *Nonlinear systems : Applications to Bilinear Control*, volume 2. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[Moo72] J.B. Moore. A note on minimal-order observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 17 :255–256, 1972.

[Mor95] T. Morozan. Parametrized Riccati equations associated to input-output operators for time-varying stochastic differential equations with state-dependent noise. In *Preprints*, volume 37, Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Romania, 1995.

[MS08] I. Masubuchi and A. Suzuki. Gain-scheduled controller synthesis based on new LMIs for dissipativity of descriptor LPV systems. In *Proc. Triennal IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

[MSR03] X. Mao, S. Sabanis, and E. Renshaw. Asymptotic behaviour of the stochastic delay Lotka-Volterra model. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 287 :141–156, 2003.

[MT95] R. Marino and P. Tomei. Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 40 :1300–1304, 1995.

[MW01] R. März and R. Winkler. Analysis und Numerik für Algebro-Differentialgleichungen. Technical report, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany, 2001.

[NH06] Y. Niu and D.W.C. Ho. Robust observer design for Itô stochastic time-delay systems via sliding mode control. *Syst. & Contr. Letters*, 55 :781–793, 2006.

[NHS87a] K.M. Nagpal, R.E. Helmick, and C.S. Sims. Reduced-order estimation, Part I : filtering. *Int. J. Contr.*, 45 :1867–1888, 1987.

[NHS87b] K.M. Nagpal, R.E. Helmick, and C.S. Sims. Reduced-order estimation, Part II : smoothing. *Int. J. Contr.*, 45 :1889–1898, 1987.

[Nij81] H. Nijmeijer. Observability of a class of nonlinear systems : a geometric approach. *Ricerche di Automatica*, 12 :50–68, 1981.

[NK91] K.M. Nagpal and P.P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an $\mathcal{H}_\infty$ setting. *IEEE Trans. Aut. Control*, 36 :152–166, 1991.

[NS88] K.M. Nagpal and C.S. Sims. Linearized reduced-order filtering. *IEEE Trans. Aut. Control*, 33 :310–313, 1988.

[Øks03] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations : an Introduction with Applications*. Springer-Verlag, New York, 6th edition, 2003.

[O'R83] J. O'Reilly. *Observers for Linear Systems*. Academic Press, New York, 1983.

[Pal09] J. Palczewski. Milstein scheme and convergence. Talk, 2009. Computations in Finance : MATH5350, University of Leeds, UK.

[PDM08] S. Pang, F. Deng, and X. Mao. Asymptotic properties of stochastic population dynamics. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A : Mathematical Analysis*, 15 :603–620, 2008.

[Pet87] I.R. Petersen. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 8 :351–357, 1987.

[Phi89] Y.A. Phillis. Estimation and control of systems with unknown covariance and multiplicative noise. *IEEE Trans. Aut. Control*, 34 :1075–1078, 1989.

[PM94] I.R. Petersen and D.C. McFarlane. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain linear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 39 :1971–1977, 1994.

[PM96] I.R. Petersen and D.C. McFarlane. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 6 :267–280, 1996.

[PP98] R.M. Pãlhares and P.L.D. Peres. Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems : a linear matrix inequality approach. *Int. J. Syst. Sci.*, 29 :587–593, 1998.

[PP00] R.M. Pãlhares and P.L.D. Peres. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance : an LMI approach. *Automatica*, 36 :851–858, 2000.

[PRP11] G. Phanomchoeng, R. Rajamani, and D. Piyabongkarn. Nonlinear observer for bounded jacobian systems, with applications to automotive slip angle estimation. *IEEE Trans. Aut. Control*, 56 :2081–2089, 2011.

[PSS91] B. Priel, E. Soroka, and U. Shaked. The design of optimal reduced-order stochastic estimation for discrete-time linear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 36 :1300–1307, 1991.

[PZPB91] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker. A collection of robust control problems leading to LMI's. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, pages 1245–1250, Brighton, UK, 1991.

[RA00] A. Rehm and F. Allgöwer. Self-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control of descriptor systems. *Computer & Chemical Engineering*, 24 :279–284, 2000.

[RA02] A. Rehm and F. Allgöwer. General quadratic performance analysis and synthesis of differential algebraic equation (DAE) systems. *J. of Process Control*, 12 :467–474, 2002.

[Raj98] R. Rajamani. Observer for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 43 :397–401, 1998.

[RB75] J.R. Roman and T.E. Bullock. Design of minimal order stable observers for linear functions of the state via realization theory. *IEEE Trans. Aut. Control*, 20 :613–622, 1975.

[RC98] R. Rajamani and Y.M. Cho. Existence and design of observers for nonlinear systems : relation to distance to unobservability. *Int. J. Contr.*, 69 :717–731, 1998.

[RH94] S. Raghavan and J.K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 59 :515–528, 1994.

[RHMB08] M. Rodrigues, H. Hammouri, C. Mechmeche, and N. Benhadj Braiek. A high gain observer based LMI approach. In *Proc. Triennal IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

[RM71] C.R. Rao and S.K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications.* Wiley, New York, 1971.

[RS97] L. Ryashko and H. Schurtz. Mean square stability analysis of some linear stochastic systems. *Dynamic Systems & Applications*, 6 :165–190, 1997.

[Rya84] E.P. Ryan. Optimal feedback control of bilinear systems. *J. of Optimization Theory & Applications*, 44 :333–362, 1984.

[Sau10] T. Sauer. Numerical solution of stochastic differential equations in finance, 2010.

[Say01] A.H. Sayed. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :998–1013, 2001.

[Sd95] U. Shaked and C.E. de Souza. Robust minimum variance filtering. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 43 :2474–2483, 1995.

[SDZ06] H. Souley Ali, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Approche LMI pour la synthèse des filtres $\mathcal{H}_\infty$ non biaisés. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bordeaux, France, 2006.

[SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Aut. Control*, 42 :896–911, 1997.

[Sha90] U. Shaked. $\mathcal{H}_\infty$-minimum error state estimation of linear stationary processes. *IEEE Trans. Aut. Control*, 35 :554–558, 1990.

[SK94] A.H. Sayed and T. Kailath. A state-space approach to adaptive RLS filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, 11 :18–60, 1994.

[ŚLS03] A. Świerniak, U. Ledzewicz, and H. Schätter. Optimal control for a class of compartmental models in cancer chemotherapy. *Int. J. Appli. Math. Comput. Sci.*, 13 :357–368, 2003.

[SM96] Y. Saito and T. Mitsui. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations. *SIAM J. Numerical Analysis*, 33 :2254–2267, 1996.

[SMN90] M. Sampei, M. Mita, and M. Nakamichi. An algebraic approach to $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control problems. *Syst. & Contr. Letters*, 14 :13–24, 1990.

[Son89] E.D. Sontag. Remarks on stabilization and input-to-state-stability. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Tampa, USA, 1989.

[Son90] E.D. Sontag. Further facts about input to state stabilization. *IEEE Trans. Aut. Control*, 35 :473–476, 1990.

[SP97] A.V. Savkin and I.R. Petersen. Fixed-order robust filtering for linear uncertain systems. *Automatica*, 33 :253–254, 1997.

[ST92a] U. Shaked and Y. Theodor. $\mathcal{H}_\infty$-optimal estimation : a tutorial. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, pages 2278–2286, Haifa, Israel, 1992.

[ST92b] U. Shaked and Y. Theodor. A frequency domain approach to the problem of $\mathcal{H}_\infty$-minimum error state estimation and deconvolution. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 40 :3001–3011, 1992.

[Sto02] A. Stoica. $\mathcal{H}_\infty$ filtering of signals subjected to multiplicative white noise. In *Proc. Triennal IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.

[Str60] R.L. Stratonovich. Conditional Markov processes. *Theory of Probability & Its Applications*, 42 :156–178, 1960.

[Sus78] H.J. Sussmann. On the gap between deterministic and stochastic differential equations. *Annals of Probability*, 6 :19–41, 1978.

[SW96] T. Sasagawa and J.L. Willems. Parametrization method for calculating exact stability bounds of stochastic linear systems with multiplicative noise. *Automatica*, 32 :1741–1747, 1996.

[SZRD06] H. Souley Ali, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Robust $\mathcal{H}_\infty$ reduced order functional filtering for uncertain bilinear systems. *Automatica*, 42 :405–413, 2006.

[TAN01] H.D. Tuan, P. Apkarian, and T.Q. Nguyen. Robust and reduced order filtering : new LMI-based characterizations and methods. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 49 :2975–2984, 2001.

[TDHS06] Y. Takeuchi, N.H. Dub, N.T. Hieu, and K. Sato. Evolution of predator-prey systems described by a Lotka-Volterra equation under random environment. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 323 :938–957, 2006.

[Tha73] F.E. Thau. Observing the state of non-linear dynamic systems. *Int. J. Contr.*, 17 :471–479, 1973.

[Tin99] Y. Ting. Practical stability with respect to time-varying sets for stochastic differential systems. *Stochastic Analysis and Applications*, 17 :895–909, 1999.

[TK98] K. Takaba and T. Katayama. $\mathcal{H}_2$ output feedback control for descriptor systems. *Automatica*, 34 :841–850, 1998.

[TMK94] K. Takaba, N. Morihira, and T. Katayama. $\mathcal{H}_\infty$ control for descriptor systems − A J-spectral factorization approach. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Lake Buena Vista, USA, 1994.

[TR76] T.J. Tarn and Y. Rasis. Observers for nonlinear stochastic systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 21 :441–448, 1976.

[TS96a] Y. Theodor and U. Shaked. A dynamic game approach to mixed $\mathcal{H}_\infty\mathcal{H}_2$ estimation. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 6 :331–345, 1996.

[TS96b] Y. Theodor and U. Shaked. Robust discrete-time minimum-variance filtering. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 44 :181–189, 1996.

[Tse73] E. Tse. Observer-estimators for discrete-time systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 18 :10–16, 1973.

[Tsi89] J. Tsinias. Observer design for nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 13 :135–142, 1989.

[Tsi90a] J. Tsinias. A correction note on "Further results on the observer design problem". *Syst. & Contr. Letters*, 15 :449, 1990.

[Tsi90b] J. Tsinias. Further results on the observer design problem. *Syst. & Contr. Letters*, 14 :411–418, 1990.

[Tsi08] J. Tsinias. Time-varying observers for a class of nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 57 :1037–1047, 2008.

[Tsu85] C.C. Tsui. A new algorithm for the design of multifunctional observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 30 :89–93, 1985.

[Ugr98] V.A. Ugrinovskii. Robust $\mathcal{H}_\infty$ control in the presence of stochastic uncertainty. *Int. J. Contr.*, 71 :219–237, 1998.

[UI99] E. Uezato and M. Ikeda. Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and $\mathcal{H}_\infty$ control of descriptor systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Phoenix, USA, 1999.

[UP99] V.A. Ugrinovskii and I.R. Petersen. Absolute stabilization and minimax optimal control of uncertain systems with stochastic uncertainty. *SIAM J. Contr. Opt.*, 37 :1089–1122, 1999.

[Vid80] M. Vidyasagar. Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions : stability and stabilizability. *IEEE Trans. Aut. Control*, 25 :773–779, 1980.

[Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.

[Vio10] P. Viot. Méthodes d'Analyse Numérique, 2010. Master Modélisation Dynamique et Statistique des Systèmes Complexes.

[WB99] F. Wang and V. Balakrishnan. Robust estimators for systems with deterministic and stochastic uncertainties. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Phoenix, USA, 1999.

[WG98] J.T. Watson and K.M. Grigoriadis. Optimal unbiased filtering via linear matrix inequalities. *Syst. & Contr. Letters*, 35 :111–118, 1998.

[WH90] C. Wurmthaller and P. Hippe. Comments on "Design of reduced-order optimal estimators directly in the frequency domain". *Int. J. Contr.*, 52 :1017–1018, 1990.

[Wie49] N. Wiener. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. MIT Press, Cambridge, USA, 1949.

[Wil71] J.C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equations. *IEEE Trans. Aut. Control*, 16 :621–634, 1971.

[Wil77] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.

[Win02] R. Winkler. Stochastic DAEs in transient noise simulation. In *Proc. Scientific Computing in Electrical Engineering*, Eindhoven, The Netherlands, 2002.

[Win03] R. Winkler. Stochastic differential algebraic equations of index 1 and applications in circuit simulation. *J. Computational & Applied Mathematics*, 157 :477–505, 2003.

[WK03] Z. Wan and M.V. Kothare. An effcient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 39 :837–846, 2003.

[WM76] A. S. Willsky and S.I. Marcus. Analysis of bilinear noise models in circuits and devices. *J. of the Franklin Institute*, 30 :103–122, 1976.

[WMH10] F. Wu, X. Mao, and S. Hu. Stochastic suppression and stabilization of functional differential equations. *Syst. & Contr. Letters*, 59 :745–753, 2010.

[Won66] W.M. Wonham. Liapunov criteria for weak stochastic stability. *J. of Differential Equations*, 2 :195–207, 1966.

[WW76] J.L. Willems and J.C. Willems. Feedback stability for stochastic systems with state and control dependent noise. *Automatica*, 12 :277–283, 1976.

[WXD92] Y. Wang, L. Xie, and C.E. De Souza. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 19 :139–149, 1992.

[WŻ87] B.L. Walcott and S.H. Żak. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 32 :166–170, 1987.

[XC02] S. Xu and T. Chen. Reduced-order $\mathcal{H}_\infty$ filtering for stochastic systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 50 :2998–3007, 2002.

[XC03] S. Xu and T. Chen. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements. *Automatica*, 39 :509–516, 2003.

[XdF91] L. Xie, C.E. de Souza, and M. Fu. $\mathcal{H}_\infty$ estimation for discrete-time linear uncertain systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 1 :111–123, 1991.

[XdS94] L. Xie, C.E. de Souza, and Y.C. Soh. Robust filtering for uncertain systems with unstable modes. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Lake Buena Vista, USA, 1994.

[XFL98] L. Xie, M. Fu, and H. Li. Passivity analysis and passification for uncertain processing systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 46 :2394–2403, 1998.

[XG88] X.H. Xia and W.B. Gao. On exponential observers for nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 11 :319–325, 1988.

[XHZ09] M. Xu, G.D. Hu, and Y. Zhao. Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz non-linear systems. *IMA J. Mathematical Control & Information*, 26 :299–317, 2009.

[Xia07] J. Xia. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filter design for uncertain time-delay singular stochastic systems with Markovian jump. *J. Control Theory & Appl.*, 5 :331–335, 2007.

[XS94] L. Xie and Y.C. Soh. Robust Kalman filtering for uncertain systems. *Syst. & Contr. Letters*, 22 :123–129, 1994.

[XSd94] L. Xie, Y.C. Soh, and C.E. de Souza. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 39 :1310–1314, 1994.

[XZ97] X. Xia and M. Zeitz. On nonlinear continuous observers. *Int. J. Contr.*, 66 :943–954, 1997.

[YA93] E. Yaz and A. Azemi. Observer design for discrete and continuous non-linear stochastic systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 24 :2289–2302, 1993.

[YH97] X. Yu and C.S. Hsu. Reduced order $\mathcal{H}_\infty$ filter design for discrete time-variant systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 7 :797–809, 1997.

[YS91a] I. Yaesh and U. Shaked. Nondefinite least squares and its relation to $\mathcal{H}_\infty$-minimum error state estimation. *IEEE Trans. Aut. Control*, 36 :1469–1472, 1991.

[YS91b] I. Yaesh and U. Shaked. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems : $\mathcal{H}_\infty$-optimal linear control and filtering. *IEEE Trans. Aut. Control*, 36 :1264–1271, 1991.

[YS92] I. Yaesh and U. Shaked. Game theory approach to state estimation of linear discrete-time processes and its relation to $\mathcal{H}_\infty$-optimal estimation. *Int. J. Contr.*, 55 :1443–1452, 1992.

[YTT11] H. Yanai, K. Takeuchi, and Y. Takane. *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. Springer, New York, 2011.

[YZZ13] C. Yang, Q. Zhang, and L. Zhou. *Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems*, volume 435 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2013.

[Zak67] M. Zakai. On the ultimate boundedness of moments associated with solutions of stochastic differential equations. *SIAM J. Contr. Opt.*, 5 :588–593, 1967.

[Zak69] M. Zakai. A Lyapunov criterion for the existence of stationary probability distributions for systems perturbed by noise. *SIAM J. Contr. Opt.*, 7 :390–397, 1969.

[ZB09] A. Zemouche and M. Boutayeb. A unified $\mathcal{H}_\infty$ adaptive observer synthesis method for a class of systems with both Lipschitz and monotone nonlinearities. *Syst. & Contr. Letters*, 58 :282–288, 2009.

[ZB11] G. Zheng and D. Boutat. Synchronization of chaotic systems via reduced observers. *IET Control Theory & Applications*, 5 :308–313, 2011.

[ZB13] A. Zemouche and M. Boutayeb. On lmi conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49 :585–591, 2013.

[ZBB08] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G.I. Bara. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to $\mathcal{H}_\infty$ performance analysis. *Syst. & Contr. Letters*, 57 :18–27, 2008.

[ZCT05] W. Zhang, B.S. Chen, and C.S. Tseng. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering for nonlinear stochastic systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 53 :589–598, 2005.

[ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[Zei87] M. Zeitz. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 9 :149–156, 1987.

[ZH02] F. Zhu and Z. Han. A note on observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 47 :1751–1754, 2002.

[ZH09] Q. Zhu and G.D. Hu. Stability analysis for uncertain nonlinear time-delay systems with quasi-one-sided Lipschitz condition. *Acta Automatica Sinica*, 35 :1006–1009, 2009.

[ZHR+05] M. Zasadzinski, S. Halabi, H. Rafaralahy, H. Souley Ali, and M. Darouach. Stochastic robust reduced order $\mathcal{H}_\infty$ observer-based control. In *Proc. Triennal IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.

[ZK94] Z.Y. Zhang and F. Kozin. On almost sure sample stability of nonlinear stochastic dynamic systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 39 :560–565, 1994.

[ZLCL04] Z. Zhang, J. Lu, J. Cao, and G. Lu. $\mathcal{H}_\infty$ observer-based compensator design for bilinear continuous-time systems. In *Proc. IEEE World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 833–837, Hangzhou, P.R. China, 2004.

[ZLSH11] W. Zhang, Y. Liang, H. Su, and Z. Han. LMI-based observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems. In *Proc. Chinese Control Conf.*, Yantei, P.R. China, 2011.

[ZLX02] L. Zhang, J. Lam, and S. Xu. On positive realness of descriptor systems. *IEEE Trans. Circ. Syst. I : Fund. Theory & Appli.*, 49 :401–407, 2002.

[ZMRS03] M. Zasadzinski, E. Magarotto, H. Rafaralahy, and H. Souley Ali. Residual generator design for singular bilinear systems subjected to unmeasurable disturbances : an LMI approach. *Automatica*, 39 :703–713, 2003.

[ZRMD98] M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, and M. Darouach. On disturbance decoupled observer for a class of bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 120 :371–377, 1998.

[ZSH+04] M. Zasadzinski, H. Souley Ali, S. Halabi, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Commande $\mathcal{H}_\infty$ robuste : approches déterministe versus stochastique. In *Proc. Colloque National Recherche IUT*, Nice, France, 2004.

[ZSZY12] W. Zhang, H. Su, F. Zhu, and D. Yue. A note on observers for discrete-time Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Circ. Syst. II : Express Briefs*, 59 :123–127, 2012.

[ZTS10] Y. Zhao, J. Tao, and N.Z. Shi. A note on observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 59 :66–71, 2010.

Abstract

This thesis deals with the filtering and control of nonlinear systems described by Itô stochastic differential equations whose diffusion is controlled by a noise which is multiplied with the state vector. The noise is a Wiener process, also known as Brownian motion. When the noise is multiplied with the state in a differential equation, it can stabilize or destabilize the system, which is not the case when the noise occurs additively with respect to the state. In addition, there are several types of stability for the systems described by stochastic differential equations, some being more conservative than others. In this manuscript, the goal is to relax the conditions of stability used in the literature using the almost sure exponential stability, also called exponential stability with probability equal to one.

Three main fields are treated in this manuscript :

(i) observers synthesis,
(ii) stability and stabilization of stochastic systems,
(iii) bounded real lemma for stochastic algebro-differential systems.

A new theorem on the almost sure exponential stability of the equilibrium point of a class of triangular nonlinear stochastic systems is proposed : the stability of the whole system is ensured by the stability of each decoupled subsystem. The proof of this result is based on the boundedness of the Lyapunov exponents. It was shown that the problem of filtering of stochastic systems with multiplicative noises by imposing the almost sure exponential stability of the observation error can not be solved by using the Lyapunov type approaches available in the literature. This difficulty was overcome by using the triangular structure, associated with this filtering problem, which allows to split the original observer design problem into two decoupled subproblems : (i) demonstrate the stability of the stochastic differential equation describing the dynamics of the state to be estimated, (ii) stabilize the stochastic differential equation describing the dynamics of the observation error. This approach is based on the new theorem on the almost sure exponential stability of a class of Lipschitz triangular nonlinear stochastic systems mentioned above. This has been extended to nonlinear stochastic systems with one-sided Lipschitz nonlinearities. To ensure the stability of the observation error, a polytopic approach was proposed with a "descriptor" formalism (or algebro-differential). The results presented above have been extended to the synthesis of robust observers in the presence of parametric uncertainties.

Conditions for asymptotic rejection of perturbations occurring in a stochastic differential equation with multiplicative noises have been proposed. The considered stability is the almost sure exponential one. A bound of the Lyapunov exponent ensures the almost sure convergence rate to zero for the state of the system. A bang-bang control law is synthesized for a class of stochastic nonlinear systems in two cases : (i) state feedback and (ii) measured output feedback with an observer. The used stability is the almost sure exponential one.

A version of the bounded real lemma is developed for stochastic algebro-differential systems (also called singular systems or descriptor systems) with multiplicative noises. This work required the development of Itô formula in the case of nonlinear stochastic algebro-differential equations. This approach has been used for the synthesis of an $\mathcal{H}_\infty$ measured output feedback control law with the exponential mean square stability. An observer for nonlinear stochastic algebro-differential systems was proposed using the almost sure exponential stability.

Keywords: Stochastic differential equations, Brownian motion, Itô formula, Linear matrix inequalities (LMI), Full order filtering, Reduced order functionnal filtering, Robust filtering, Bang-bang control, Stochastic algebro-differential equations, Real bounded lemma and $\mathcal{H}_\infty$ control for singular stochastic systems.

Résumé

Ce mémoire de thèse traite du filtrage et de la commande des systèmes non linéaires décrits par des équations différentielles stochastiques au sens d'Itô dont la diffusion est commandée par un bruit qui intervient de manière multiplicative avec l'état. Ce bruit est un processus de Wiener, aussi appelé mouvement brownien. Lorsque le bruit agit de manière multiplicative avec l'état dans une équation différentielle, il peut stabiliser ou déstabiliser le système, ce qui n'est pas le cas lorsque le bruit intervient de manière additive. Il y a plusieurs types de stabilité pour les systèmes décrits par des équations différentielles stochastiques, certaines étant plus pessimistes que d'autres. Dans ce manuscrit, nous avons cherché à relaxer les conditions de stabilité utilisées dans la littérature en employant la stabilité exponentielle presque sûre, aussi appelée stabilité exponentielle avec une probabilité de un.

Trois domaines principaux sont traités dans ce manuscrit :

(i) synthèse d'observateurs,
(ii) commande des systèmes stochastiques,
(iii) lemme borné réel pour les systèmes stochastiques algébro-différentiels.

Un nouveau théorème sur la stabilité exponentielle presque sûre du point d'équilibre d'une classe de systèmes stochastiques non linéaires triangulaires est proposé : la stabilité de l'ensemble du système est assurée par la stabilité de chaque sous-système considéré isolément. La preuve de ce résultat est basée sur la majoration des exposants de Lyapunov. On a montré que le problème du filtrage des systèmes stochastiques avec des bruits multiplicatifs en imposant la stabilité exponentielle presque sûre de l'erreur d'observation ne peut pas être résolu en appliquant les approches de type Lyapunov disponibles dans la littérature. Cette difficulté a été surmontée en proposant d'exploiter la structure triangulaire associée à ce problème de filtrage, ce qui nous a permis de décomposer la synthèse de l'observateur en deux sous-problèmes découplés : (i) démontrer la stabilité de l'équation différentielle stochastique décrivant la dynamique de l'état à estimer, (ii) stabiliser l'équation différentielle stochastique décrivant la dynamique de l'erreur d'observation. Cette approche est basée sur le nouveau théorème sur la stabilité exponentielle presque sûre d'une classe de systèmes stochastiques non linéaires triangulaires et lipschitziens évoquée ci-dessus. Ce résultat a été étendu aux systèmes stochastiques non linéaires ayant des non linéarités de type one-sided Lipschitz. Pour garantir la stabilité de l'erreur d'observation, une approche de type polytopique a été proposée avec un formalisme "descripteur" (ou algébro-différentiel). Les résultats présentés ci-dessus ont été étendus à la synthèse d'observateurs robustes en présence d'incertitudes paramétriques.

Des conditions pour le rejet asymptotique des perturbations intervenant dans une équation différentielle stochastique avec des bruits multiplicatifs ont été proposées. La stabilité considérée est la stabilité exponentielle presque sûre. Une borne de l'exposant de Lyapunov permet de garantir le taux de convergence vers zéro de l'état du système. Un correcteur de type bang-bang est synthétisé pour une classe de systèmes non linéaires stochastiques dans deux cas : (i) par retour d'état et (ii) par retour de sorties mesurées avec un observateur. Le type de stabilité utilisé est la stabilité exponentielle presque sûre.

Une version du lemme borné réel est élaborée pour les systèmes stochastiques algébro-différentiels (ou singuliers, ou descripteurs) avec des bruits multiplicatifs. Ce travail a nécessité le développement de la formule d'Itô dans le cas des équations stochastiques algébro-différentielles non linéaires. Cette approche a été utilisée pour la synthèse d'un correcteur $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sorties en utilisant la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Un observateur pour les systèmes stochastiques algébro-différentiels non linéaires a été proposé avec la stabilité exponentielle presque sûre.

Mots-clés: Equations différentielles stochastiques, Mouvement brownien, Formule d'Itô, Inégalités matricielles affines (LMI), Filtrage d'ordre plein, Filtrage fonctionnel d'ordre réduit, Filtrage robuste, Commande bang-bang, Equations algébro-différentielles stochastiques, Lemme borné réel et correcteur $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes stochastiques singuliers.