THÈSE DE DOCTORAT DE
l'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

École doctorale Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques (S2IM)

Spécialité

Mathématiques appliquées et Applications des mathématiques

Présentée par

Moussa Mory DIEDHIOU

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

Sujet de la thèse :

Approche mixte interface nette/diffuse pour les problèmes d'intrusion saline en sous-sol : Modélisation, analyse mathématique et illustrations numériques

soutenue le 01 Décembre 2015

devant le jury composé de :

M. Youcef AMIRAT	Professeur des Universités, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand,	**[Examinateur]**
Mme Laurence CHERFILS	Maître de Conférence (HDR), Université de La Rochelle,	**[Co-Directrice]**
Mme Catherine CHOQUET	Professeur des Universités, Université de La Rochelle,	**[Directrice]**
M. Frédéric HECHT	Professeur des Universités, Université Pierre et Marie Curie de Paris,	**[Examinateur]**
M. Mazen SAAD	Professeur des Universités, École Centrale de Nantes,	**[Rapporteur]**
M. Mamadou SY	Professeur des Universités, Université Gaston Berger de Saint-Louis du Sénégal.	**[Rapporteur]**

Approche mixte interface nette/diffuse pour les problèmes d'intrusion saline en sous-sol :

Modélisation, analyse mathématique et illustrations numériques

Table des matières

i

Remerciements iii

1 Introduction Générale 1
- 1.1 Contexte . . . 1
- 1.2 Objectif de la thèse . . . 2
- 1.3 Plan de la thèse . . . 3

2 Modélisation du problème d'intrusion d'eau de mer dans un aquifère libre 7
- 2.1 Introduction . . . 7
- 2.2 Notions de base en hydrogéologie souterraine . . . 9
  - 2.2.1 Définitions : . . . 9
  - 2.2.2 Volume Elémentaire Représentatif (VER) . . . 9
  - 2.2.3 Charge Hydraulique . . . 10
- 2.3 Dérivation du modèle . . . 10
  - 2.3.1 Les différentes équations du modèle . . . 10
  - 2.3.2 Les différentes hypothèses pour notre problème . . . 13
  - 2.3.3 Conséquences des hypothèses . . . 18
- 2.4 Résultats principaux des chapitres suivants . . . 27
  - 2.4.1 Résultats théoriques principaux . . . 27
  - 2.4.2 Résultats numériques principaux . . . 28
- 2.5 Tableau de comparaison avec les modèles existants . . . 28

3 Existence d'une solution au modèle sans coefficient d'emmagasinement. 35
- 3.1 Introduction . . . 35
- 3.2 Résultats . . . 37
  - 3.2.1 Résultats préliminaires . . . 37
  - 3.2.2 Énoncé du Théorème 1 . . . 38
- 3.3 Démonstration . . . 38
  - 3.3.1 Etape 1 : Existence pour le système pénalisé avec Heaviside régularisée $\mathcal{X}_0^\epsilon$ . . . 39
  - 3.3.2 Etape 2 : Elimination de la fonction auxiliaire L_M . . . 51
  - 3.3.3 Etape 3 : Principes du maximum pour la solution de $(\mathcal{P}_1)^\epsilon$ . . . 59
  - 3.3.4 Etape 4 : Existence pour le système sans régularisation de la fonction Heaviside . . . 63

4 Existence d'une solution au modèle avec coefficient d'emmagasinement 65
- 4.1 Introduction . . . 65
- 4.2 Résultats . . . 66
  - 4.2.1 Résultats préliminaires . . . 66
  - 4.2.2 Résultat principal (Théorème 2) . . . 69
- 4.3 Démonstrations . . . 72

4.3.1 Etape 1 : Existence de solution faible pour le problème régularisé . . . 74
4.3.2 Etape 2 : Principes du maximum pour la solution de $(\mathcal{P}_2^\epsilon)$ . . . 86
4.3.3 Etape 3 : Elimination de la première régularisation : $\epsilon_0 \to 0$ . . . 89
4.3.4 Etape 4 : Elimination de la fonction auxiliaire L_M^ϵ . . . 91
4.3.5 Etape 5 : Existence pour le système sans régularisation de la fonction Heaviside . . . 97

5 Simulations et Illustrations 2D et 3D 99
5.1 Introduction . . . 99
5.2 Le modèle 3D d'écoulement et de transport . . . 100
5.2.1 Les différentes équations du modèle . . . 100
5.2.2 Les différentes hypothèses . . . 102
5.2.3 Cadre et Modèle mathématique . . . 103
5.3 Présentation des schémas numériques . . . 107
5.3.1 Modèle 3D . . . 107
5.3.2 Modèle 2D . . . 109
5.4 Comparaison des modèles 3D et 2D . . . 111
5.4.1 Expérience de Keulegan . . . 112
5.4.2 Effet du pompage . . . 116
5.4.3 Effet du remplissage . . . 120
5.4.4 Effet de l'emmagasinement . . . 124
5.4.5 Effet CUSP . . . 126
5.4.6 Une remarque sur la taille du domaine d'illustration . . . 127
5.5 Quelques tests phénoménologiques sur le modèle 2D . . . 127
5.5.1 Validation du modèle 2D . . . 127
5.5.2 Effets du coefficient d'emmagasinement . . . 128
5.5.3 Effets de la zone de transition . . . 130
5.5.4 Effets de la marée . . . 130

6 Annexe : Éléments finis mixtes pour un système d'EDPs paraboliques couplées 133
6.1 Introduction . . . 133
6.2 Méthode des éléments finis mixtes . . . 135
6.2.1 Discrétisation des espaces . . . 135
6.2.2 Formulation variationnelle du modèle . . . 136
6.3 Analyse d'un schéma semi-implicite . . . 136
6.3.1 Problème discret en pression/vitesse : existence et unicité . . . 136
6.3.2 Problème discret en pression/vitesse : stabilité . . . 140
6.3.3 Problème discret en concentration : existence et unicité . . . 141

Rappels 147

Lexique 149

Mes pensées les plus pieuses à mon très cher et défunt père.
Mamadou Takila DIEDHIOU, tu aurais souhaité âprement
avoir la vue sur ce modeste travail, symbole de l'éclosion de
la graine que tu as semée et entretenue.
Ton amour pour les études, le travail acharné, soigné
et minutieux a laissé des traces immuables sur ta famille,
objet de tous tes sacrifices.
Grâce à toi, à ton appui, j'ai su gravir les obstacles.
Que Le Tout Puissant te couve de sa lumière céleste
et te comble de ses grâces.

Remerciements

J'exprime tout d'abord mon entière reconnaissance et ma gratitude à mes directrices de recherche Mme Catherine Choquet et Mme Laurence Cherfils qui n'ont ménagé aucun effort dans l'aboutissement de cette thèse. Elles m'ont, par leurs suggestions, leurs différentes orientations, apporté un précieux appui dans la réalisation de ce travail et elles ont guidé mes pas dans le champ de la recherche.

Je réitère mes sincères remerciements aux rapporteurs M. Mazen Saad et M. Mamadou Sy pour avoir accepté d'apporter un jugement objectif et scientifique au travail effectué.

J'adresse mes remerciements à M. Youcef Amirat et M. Frédéric Hecht d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse en tant qu'examinateurs.

Je remercie également toute l'équipe du laboratoire MIA (Mathématiques, Images et Applications) de l'Université de La Rochelle notamment, M. Michel Berthier Directeur du laboratoire à mon arrivée et Mme Sylviane Picq, de m'avoir accueilli chaleureusement.

Je remercie aussi Mme Carole Rosier pour sa collaboration durant la thèse et M. Christophe Bourel pour nos échanges intéressants sur ce sujet.

Je tiens à remercier ma famille, mes proches notamment Abay Goudiaby, Mouhamadou Ngouda Mboup, Aïcha Bâ, Emanuel Henry, Mamadou Diédhiou, Nouha Sané, Rokhaya Ndiaye et mes amis qui m'ont apporté leur soutien au cours de ce travail.

Une pensée particulière à mes collègues doctorants du Laboratoire MIA notamment Cyrille Beaudry, Charles Guyon et Éloïse Comte pour les moments de convivialité et de partage que nous avons passés ensemble, à Saad El Asmar, Andrews Sobral, Caroline Pacheco Do Espirito Silva, Abderrazak Nabti qui n'ont jamais cessé de m'encourager.

Chapitre 1

Introduction Générale

Sommaire

1.1 Contexte 1
1.2 Objectif de la thèse 2
1.3 Plan de la thèse 3

1.1 Contexte

Les réserves en eau douce sur la planète représentent 2,5% du volume global d'eau sur la terre. La figure (1.2) de la Nasa identifie les plus grandes nappes d'eau du monde grâce au satellite GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) (voir [70]). Une grande partie de ces eaux sont au contact avec l'eau de mer. Le cas de la France est illustré sur la figure (1.3) du BRGM (Bureau de Recherches Géologiques et Minières qui estime le niveau des nappes, leur localisation et les caractéristiques du milieu).

Ce liquide précieux est menacé d'une part de sécheresse et d'autre part de pollution, une pollution qui peut même être naturelle lorsqu'elle vient de l'eau de mer voisine. Selon le dernier rapport 2015 de l'ONU (Organisation des Nations Unies) sur le développement durable de l'eau : «*Le monde devrait faire face à un déficit de 40% en eau douce d'ici 2030*» (voir [65]), et pour s'en convaincre la figure (1.4) nous montre la prévision des nappes mondiales en 2025.

Ce travail de thèse est ainsi consacré à l'étude des écoulements dans les aquifères côtiers, qui ont un bord constitué par la mer. De ce fait, le niveau de l'aquifère, à ce bord, est imposé par celui de la mer. Il s'ensuit que si en général les eaux douces des aquifères côtiers s'écoulent dans la mer, des eaux salées peuvent s'introduire dans l'aquifère en fonction des variations de charges au sein de l'aquifère, que ces variations soient induites par la dynamique naturelle ou par la (sur-)exploitation des nappes phréatiques principalement en période estivale. C'est le phénomène de salinisation.

On appelle communément biseau salé la partie d'un aquifère côtier envahie par de l'eau salée. Il est compris entre la base de l'aquifère et une interface eau douce - eau salée, le coin d'eau salée étant sous l'eau douce. L'apparition d'un biseau salé, au-delà d'une position naturelle de faible pénétration, est le plus souvent la conséquence de la surexploitation de l'aquifère.
Cette simple définition amène à deux "évidences".

- D'abord, du point de vue sociétal. L'eau étant une ressource indispensable à la vie (mais également à bon nombre d'activités économiques), le besoin de modèles et d'outils de contrôle pour l'exploitation des nappes phréatiques est évident. Et des nappes côtières mobilisables existent dans toutes les régions du monde. [1] Ces dernières attirent de plus en plus de populations du fait de leur climat favorable. Plusieurs études ont du montré l'intensification du problème de l'intrusion saline dans ce type de

1. Cette thèse a été financée avec le soutien de la Région Limousin-Poitou-Charentes.

nappe ces dernières années (voir [35] pour les Pays-Bas, [13] pour l'Amérique du Nord, [60] pour l'Australie $\cdots$).

- Ensuite, du point de vue scientifique. Le fait que l'on puisse parler d'une interface entre eau douce et eau salée est à la fois prometteur et source de questions.

  Le côté prometteur vient du fait que si cette interface a un sens physique, on a en partie la réponse aux besoins sociétaux précédents, ou du moins on sait quel doit être l'objet de l'étude pour y répondre : l'interface. Cependant la définition rigoureuse d'une interface entre deux fluides miscibles, l'eau douce et l'eau salée, est une question troublante.

Le problème devient encore plus intéressant lorsque l'on s'intéresse à un aquifère libre (dit aussi non confiné), c'est-à-dire surmonté d'une zone non saturée. Dans ce cas, contrairement à celui d'une nappe captive délimitée au toit par des formations à perméabilité très faible faisant obstacle à tout flux appréciable, il nous faut aussi définir et contrôler une "interface libre" entre une zone suffisamment saturée pour pouvoir y considérer l'eau comme mobilisable et une zone désaturée.

1.2 Objectif de la thèse

La question de la pollution saline est donc la motivation de ce travail, et ce sont finalement les deux points précédents qui ont guidé notre travail. Notre ambition est ici de développer un modèle original, robuste et efficace pour l'étude de l'invasion saline :

- Du point de vue physique : Ce modèle se doit de tenir compte et de pouvoir évaluer l'impact des principaux phénomènes influençant la dynamique de la nappe phréatique, qu'ils soient d'origine géologique, hydrodynamique ou humaine. De plus, le modèle d'aquifère devra pouvoir être couplé facilement avec les éléments extérieurs contraignant sa dynamique : dynamique de la mer, inondation des marais, échanges avec les eaux de rivière, captage ou recharge *etc.*
- Du point de vue numérique : Le modèle doit permettre d'apporter des réponses numériques fiables bien sûr, mais aussi rapides pour répondre aux besoins de gestion des nappes, sachant que le nombre de paramètres à prendre en compte est important et que les échelles de taille des aquifères sont potentiellement grandes.

Il existe déjà une importante littérature sur le sujet, à la fois hydrogéologique et mathématique, développée essentiellement dans les années 60-70.
Le modèle exact du point de vue physique est celui de l'écoulement de deux fluides miscibles dans un milieu poreux 3D non saturé. Mathématiquement, il prend la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles fortement couplées, non linéaires de type parabolique dégénéré. En effet, si l'on considère une nappe libre, il faut faire face à la disparition progressive de l'eau dans la zone de désaturation et donc à la disparition d'une inconnue, la saturation en eau, et ce même en utilisant des modèles simplifiés comme celui de Richards. Dans un tel modèle, aucune interface n'est définie : pour déterminer la zone d'occupation du "biseau salé" ou celle de l'eau mobilisable par pompage, il faut surveiller les évolutions de la concentration en sel et de la saturation. Numériquement, des simulations sur de tels modèles sont très lourdes en terme de coût de calcul. De plus, elles génèrent une importante diffusion numérique, en particulier dans les zones de transition eau salée - eau douce & zone saturée - zone désaturée.
La relative lenteur du phénomène de salinisation et l'observation d'une stratification entre eau douce et eau salée dans les aquifères côtiers ont conduit au développement de modèles dits à interface nette voire même à un upscaling de ces modèles pour passer à l'approximation 2D d'un modèle 3D déjà approché (à cause de l'hypothèse d'interface nette). Il faut citer dans ce cadre les travaux fondamentaux de J. Bear [14]. Ces modèles se sont révélés robustes et fiables en l'absence de termes de forçage extérieur trop important. Cependant numériquement ils n'interdisent pas le développement de solutions non physiques (explosion de la hauteur des interfaces par exemple).

Nous avons choisi ici de développer une nouvelle approche, couplant au mieux les avantages des deux précédentes et annulant certains de leurs inconvénients. Nous parlons "d'approche interface nette - diffuse" car nous utilisons le phénomène de stratification des eaux du réservoir pour faire un upscaling 3D-2D (la troisième dimension restant présente car les inconnues sont les hauteurs des interfaces de salinisation et de saturation) mais dans le même temps nous conservons dans le modèle les échanges de masse dans les zones

de mélange et de désaturation en fermant le système par un modèle de changement de phase. Cette modélisation est détaillée dans le premier chapitre ci-après. Le nouveau modèle est analysé mathématiquement et numériquement dans cette thèse.

1.3 Plan de la thèse

La thèse se déroule comme suit :

Le chapitre 2 fait un rapide état de l'art de l'ensemble des approches existantes avec leurs avantages et inconvénients. Puis, il présentera la nouvelle approche mixte interface nette et diffuse, l'ensemble des équations, et les hypothèses physiques utilisées afin d'obtenir le nouveau modèle.

Les chapitres 3 et 4 présentent l'analyse mathématique du modèle, c'est-à-dire les preuves de l'existence d'une solution au système d'edp constituant notre modèle complété par des conditions aux bords et initiales. C'est certes une solution au sens faible (voire même en un sens très faible lorsque le problème est complexifié par une possible modification des propriétés de stockage du sous-sol en fonction des charges), mais elle satisfait à un principe du maximum qui la rend physiquement réaliste. Ce principe du maximum a d'ailleurs été observé lors des simulations numériques conduites sur le modèle.

Le chapitre 5 présente les simulations qui nous permettent d'afficher deux types d'expérimentation sur notre modèle. D'abord nous l'avons confronté au modèle exact 3D et avons constaté une bonne concordance entre les deux. Ensuite nous avons testé différentes situations phénoménologiques exclusivement sur le modèle 2D afin de tester ses capacités de prédiction : pompage, recharge naturelle ou forcée, effets d'emmagasinement, effets de marée...

Le chapitre 6 (annexe) amorce l'étude numérique (existence et unicité) du schéma numérique issu du modèle exact 3D. C'est ce schéma qui nous a permis de confronter numériquement notre modèle 2D au modèle exact 3D.

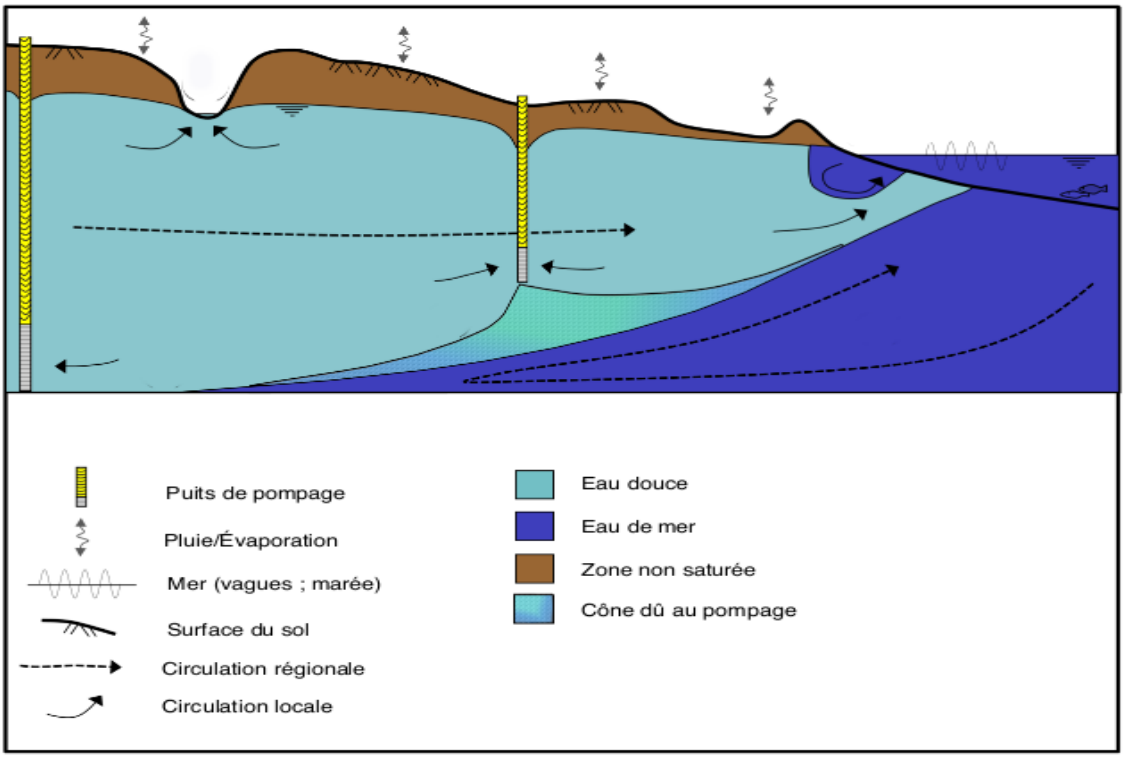


FIGURE 1.1 – Aquifère libre.

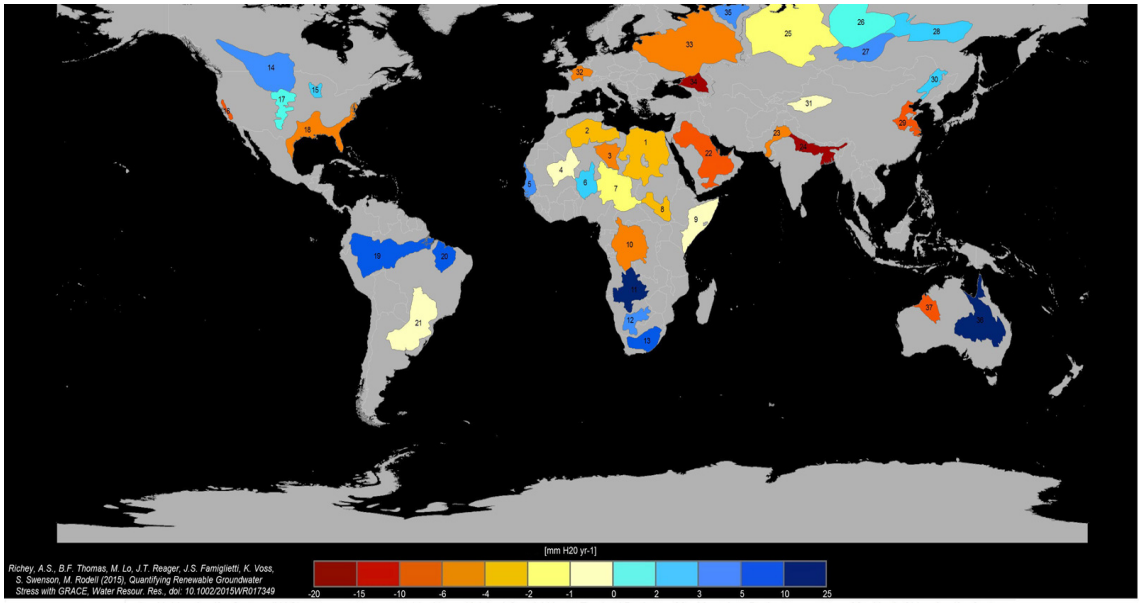


FIGURE 1.2 – UC Irvine/NASA/JPL-Caltech, *Communiqué de la NASA du 16 juin 2015.* http ://www.jpl.nasa.gov/news/news.php ?feature=4626

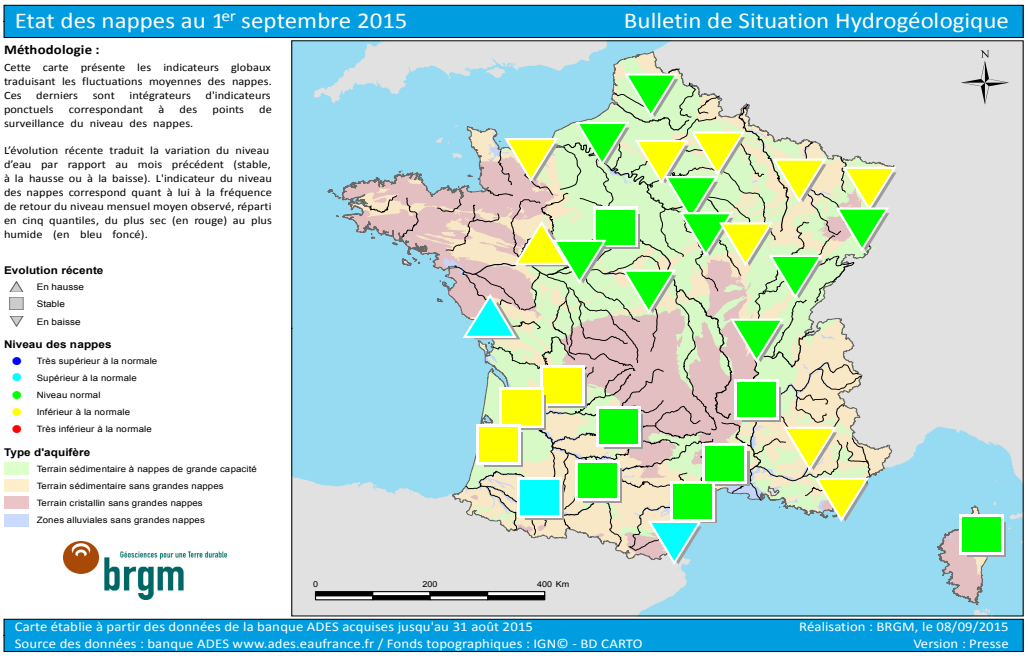
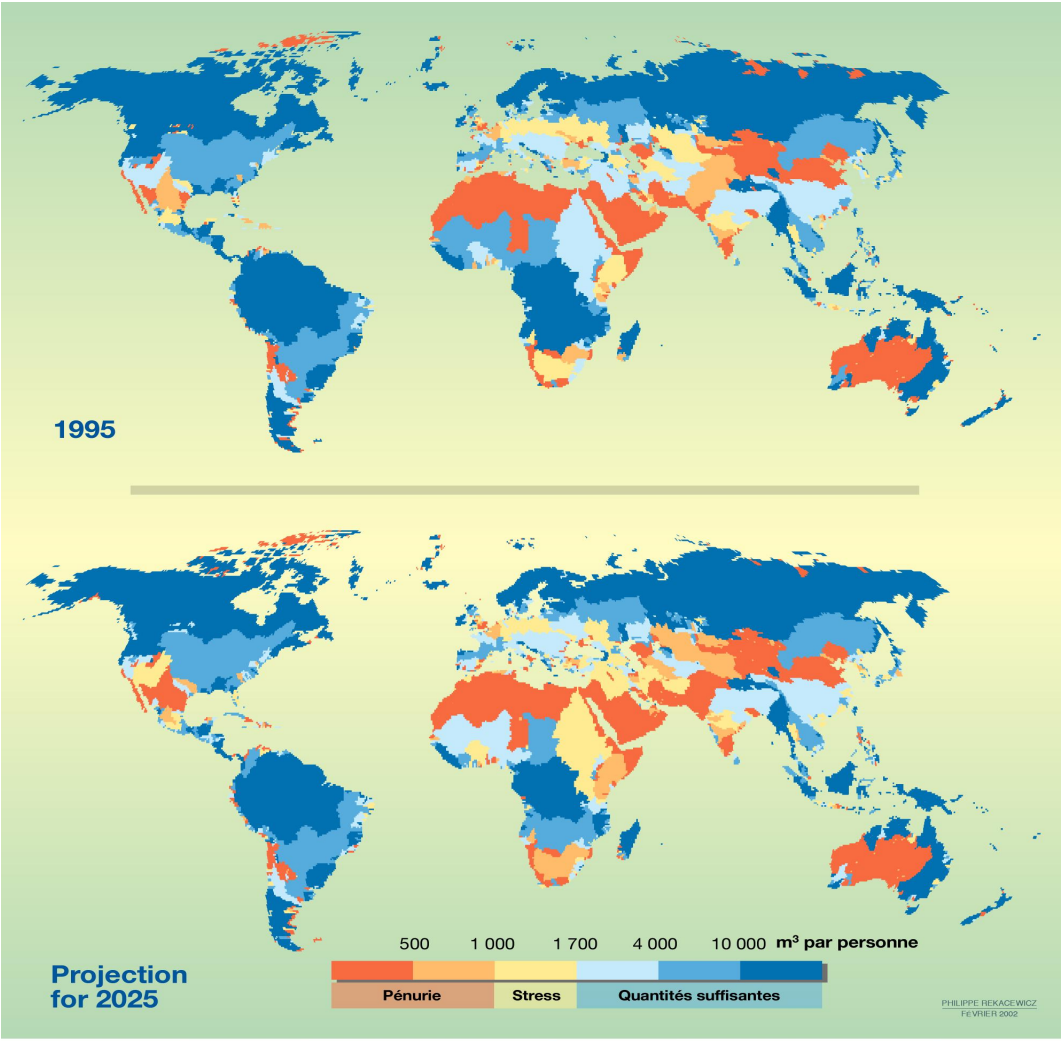


FIGURE 1.3 – Bulletin de Situation Hydrogéologique, source *BRGM (Bureau de Recherches Géologiques et Minières).*



	m³ par an par personne		m³ par an par personne		m³ par an par personne
Amérique du Nord		**Europe**		**Asie et Australie**	
1 Yukon	1 249 832	25 Danube	2 519	13 Volga	4 260
2 Mackenzie	408 243			14 Ob	14 937
3 Nelson	15 167	**Afrique et Asie occidentale**		15 Iénisséi	79 083
4 Mississippi	8 973	8 Niger	4 076	16 Lena	161 359
5 Saint-Laurent	9 095	9 Bassin du Lac Tchad	7 922	17 Kolyma	722 456
		10 Congo	22 752	18 Amour	4 917
Amérique du Sud		11 Nil	2 207	19 Gange et Brahmapoutre	-
6 Amazone	273 767	12 Zambèze	-	20 Yangtze	2 265
7 Paraná	8 025	26 Orange	1 050	21 Murray Darling	-
		24 Tigre et Euphrate	2 189	22 Huang He	361
				23 Indus	830

Source : Revenga et al. 2000, tiré de *Pilot Analysis of Global Ecosystems : Freshwater Systems*.

FIGURE 1.4 – Disponibilité en eau douce par bassin : 1995 et 2025, source *United Nations Environment Programme &Philippe Rekacewicz (Le Monde diplomatique)* .

Chapitre 2

Modélisation du problème d'intrusion d'eau de mer dans un aquifère libre

Sommaire

2.1 Introduction 7
2.2 Notions de base en hydrogéologie souterraine 9
2.2.1 Définitions : 9
2.2.2 Volume Elémentaire Représentatif (VER) 9
2.2.3 Charge Hydraulique 10
2.3 Dérivation du modèle 10
2.3.1 Les différentes équations du modèle 10
2.3.2 Les différentes hypothèses pour notre problème 13
2.3.3 Conséquences des hypothèses 18
2.4 Résultats principaux des chapitres suivants 27
2.4.1 Résultats théoriques principaux 27
2.4.2 Résultats numériques principaux 28
2.5 Tableau de comparaison avec les modèles existants 28

2.1 Introduction

L'intrusion d'eau de mer dans un aquifère costal fait partie de la famille des problèmes de transports en milieux poreux les plus étudiés. C'est un phénomène naturel dû à la combinaison de deux faits. Le premier est basé sur un principe naturel qui stipule que le fluide le plus lourd se situe en dessous du plus léger. Cette notion de fluide plus ou moins lourd est caractérisée par la connaissance de sa densité. Le second fait est de l'ordre de l'humain, quand les besoins de survie, d'épanouissement et de développement se font sentir. Cela se manifeste par un pompage important de ses eaux souterraines à des fins de consommation, pour l'agriculture et l'industrie.
Dans les zones côtières, il existe des échanges hydrauliques entre les eaux douces souterraines et l'eau de mer. Ces échanges sont lents dans des "conditions naturelles" et donc sont souvent cachés dans un quasi-équilibre entre deux couches fluides et modélisés par la relation de Ghyben-Hergberg (Badon-Ghyben (1888) voir [12] et Herzberg (1901) voir [41]). Ces derniers montrent l'existence d'une relation approximative entre (h) l'épaisseur de l'eau douce en dessus du niveau de la mer et (z) celle de l'eau douce en dessous du niveau de la mer ($z \simeq 40h$, voir figure 1.1). Dans le cas contraire, *i.e.* la partie salée est non-statique, cette hypothèse n'est pas justifiée et s'avère peu justifiable (voir [53]). Le but de ce chapitre est donc de faire mieux que ce modèle statique en dérivant un modèle précis et efficace pour simuler le déplacement du front d'eau salée dans l'aquifère côtier pour une exploitation optimale des eaux douces souterraines. Un tel modèle nécessitera

la prise en compte des principaux phénomènes hydrogéologiques gouvernant la circulation souterraine des eaux mais devra permettre des simulations rapides.
Beaucoup de recherches ont été faites sur ce problème. Jacob Bear dans [14] fut l'un des premiers à jeter les bases de sa modélisation en 1972. Des résultats récents sont dus à H. I. Essaid 1990 [34], O.Kolditz et al 1996 [47], S. Sorek et al 2001 [78], H.-J.G. Diersch et O. Koldizt 2002 [30] (voir tableau en fin de chapitre). Tous les travaux existants peuvent être classés selon trois approches :

Pas d'interface : Cette approche consiste à considérer un modèle d'écoulement de deux fluides miscibles. Elle a pour inconvénient l'impossibilité de suivi explicite de l'interface (voir [10] en milieu saturé et [24] en milieu insaturé), la zone de transition entre eau douce et eau salée étant évidement difficile à définir. De même pour l'interface entre zone saturée et insaturée. Mais son avantage est sa justesse physique car l'eau douce et l'eau salée sont effectivement miscibles. Cette approche est très lourde, à la fois des points de vue théorique et numérique.

Interfaces diffuses : Cette approche quant à elle, suppose l'existence d'interfaces diffuses entre les eaux douce et salée et aussi entre les milieux saturé et non saturé. Des travaux récents suggèrent d'utiliser des modèles de séparation de phase pour la zone de désaturation (voir [28]).

Interfaces nettes ou abruptes : Les deux fluides sont supposés immiscibles d'où l'apparition de l'interface. C'est une approximation de la physique qui a fait ses preuves, et est souvent raisonnable. Elle est basée sur l'hypothèse de non transfert de masse entre la zone douce et la zone salée. On ne considère pas de terme de pression capillaire (comme par exemple voir [9]) mais le prix à payer du point de vue théorique est l'analyse d'interfaces libres. Le suivi de ces interfaces se fait par exemple grâce à la méthode de Level-set (voir [67]), l'approche par inégalités variationnelles étant trop coûteuse (voir [62]).

Nous proposons une approche **mixte** entre **interface diffuse** et **interface abrupte**, ce qui a l'avantage de respecter la physique du problème tout en conservant l'efficacité numérique. Les hypothèses essentielles sont :

- Pas de transfert de masse explicite à l'interface abrupte virtuelle entre l'eau douce et l'eau salée.
  L'inconvénient est le traitement théorique des interfaces libres ; l'avantage réside dans le gain dimensionnel, puisque l'on traite une réalité 3D par un modèle 2D. Les échanges de masse sont en fait "cachés" dans les interface diffuses.
- Existence d'une interface diffuse d'une épaisseur (δ_h) entre l'eau douce et l'eau salée et existence d'une autre interface diffuse d'épaisseur (δ_1) entre la zone saturée et la zone insaturée.
  Ces interfaces diffuses vont être modélisées par des modèles de types "Phase fields", en l'occurrence de type Allen-Cahn en contexte fluide-fluide.

D'un point de vue théorique, l'ajout des deux zones diffuses présente les avantages suivants : si elles sont tous les deux présentes, le système a une structure parabolique, il n'est donc plus nécessaire d'introduire des termes visqueux dans une étape préliminaire de point fixe pour éviter la dégénérescence comme dans la démonstration de [59].
Du point de vue numérique, l'avantage de l'interface abrupte est bien sûr le gain dimensionnel. Néanmoins, le suivi des interfaces, même dans un contexte immiscible, est un problème difficile (voir [80] et ses références qui relèvent les faiblesses des approches classiques de "level-set" ou de "volume-of-fluid"). Ici, au contraire, le point principal est que nous bénéficions du fait que l'on a un modèle avec une structure conservative. Nous soulignons que nous pouvons démontrer un principe du maximum plus logique du point de vue de la physique (voir [25]) et chapitres 2 et 3, ce qui n'est pas possible dans le cas d'approche d'interface abrupte (voir par exemple [34], [82]).

Le but est de modéliser à la fois l'évolution du front de l'eau salée et de la surface libre supérieure de l'aquifère. Ce modèle implique un fort couplage dans le système d'équations aux dérivées partielles, de types paraboliques.
Dans la suite de la thèse, nous étudierons deux résultats d'existence globale en temps de solutions faibles : un provenant du modèle où le coefficient d'emmagasinement dans la zone de l'eau douce n'est pas négligeable (milieu compressible) et l'autre dans le cas où ce coefficient est nul (milieu incompressible).

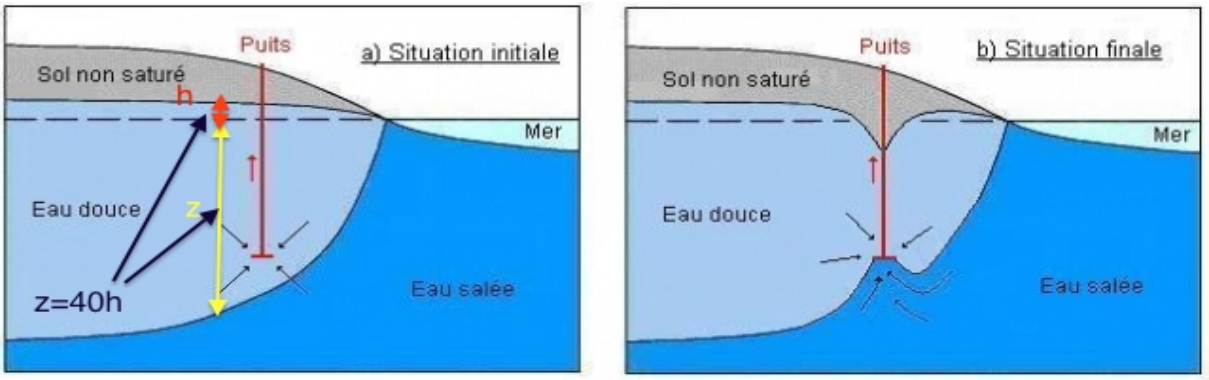


FIGURE 2.1 – Aquifère sans dépression Aquifère avec dépression

2.2 Notions de base en hydrogéologie souterraine

Les notions fondamentales pour la compréhension et la facilité de la lecture sont présentées ici. Elles sont très bien détaillées dans le livre de De Marsily 1994 (Réf [55]).

2.2.1 Définitions :

- **Aquifère :** C'est une formation géologique, poreuse et perméable contenant de façon permanente ou temporaire de l'eau douce mobilisable.
- **Milieu poreux :** C'est un milieu constitué de grains solides et de vides ou pores, ces vides pouvant être occupés par de l'air ou par un liquide.
- **Porosité :** C'est le rapport entre le volume des vides et le volume total du milieux poreux (sol) considéré

$$\phi = \frac{V_{vide}}{V_{tot}}.$$

- **Teneur en eau :** C'est le rapport entre le volume d'eau contenu dans les vides et le volume total du sol considéré

$$0 < \theta = \frac{V_{eau}}{V_{tot}} < 1.$$

- **Conductivité hydraulique :** Elle dépend de la perméabilité du milieu (k) et de la viscosité cinématique du fluide (ν) ; elle traduit la facilité avec laquelle le fluide traverse le milieu :

$$K = \frac{\rho g}{\mu} k = \frac{g}{\nu} k,$$

où ρ est la densité du fluide, μ la viscosité dynamique du fluide et g la constante d'accélération de la pesanteur.

2.2.2 Volume Elémentaire Représentatif (VER)

Un VER est, comme son nom l'indique, un volume représentatif pour lequel les propriétés caractéristiques moyennes du milieu peuvent être déduites par le passage d'une échelle microscopique à celle macroscopique. D'après De Marsily, il doit vérifier les critères suivants :

- il doit être suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores pour que l'on puisse y définir une propriété moyenne globale, avec l'assurance que l'effet de fluctuation d'un pore à un autre sera négligeable,
- il doit être suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent êtres approchées par des fonctions continues, pour pouvoir utiliser l'analyse infinitésimale sans introduire d'erreurs décelables par des instruments de mesure à l'échelle macroscopique.

2.2.3 Charge Hydraulique

La charge hydraulique Φ somme les énergies cinétique et potentielle de l'eau à une position $X = (x, y, z)$ et est donnée par la formule suivante :

$$\Phi = \frac{u^2}{2g} + Z + \frac{P}{\rho g},$$

où u est la vitesse moyenne du fluide, g constante de gravité, ρ la densité du fluide, P la pression et $Z = z - h_{ref}$ est l'élévation au-dessus d'un niveau de référence fixe. On note que dans le sous-sol, l'énergie cinétique est très petite, ce qui est dû à la petitesse de la vitesse moyenne. Ainsi la charge hydraulique Φ devient :

$$\Phi = Z + \frac{P}{\rho g}.$$

2.3 Dérivation du modèle

C'est la partie la plus importante de ce chapitre où nous décrirons toutes les équations qui interviendront dans notre modèle, notamment les équations fondamentales de la conservation de la masse et celle da la quantité de mouvement basées sur le principe de Lavoisier "*Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme*". Ensuite, nous présenterons les équations d'états qui, elles, lieront les paramètres ou inconnues présents dans le modèle.

2.3.1 Les différentes équations du modèle

a) Equation de continuité :

L'équation de continuité de l'écoulement en milieux poreux est basée sur le principe de conservation de masse dans un volume élémentaire représentatif $[x, x+dx] \times [y, y+dy] \times [z, z+dz]$ (voir Figure (2.2)) qui se résume comme suit : la variation de la masse stockée dans un VER est égale à la différence entre le flux entrant et le flux sortant et s'écrit comme suit :

$$I - O = \frac{dS}{dt}, \tag{2.1}$$

où I est la masse d'eau entrante, O est la masse d'eau sortante, S est la variation de masse d'eau par unité de temps. La quantité $I = I_x + I_y + I_z$ est la masse rentrant respectivement à x, y, et z dans toutes les directions, où

$$I_x = (\rho q_x)dydz, \qquad I_y = (\rho q_y)dxdz, \qquad I_z = (\rho q_z)dxdy,$$

avec ρ la densité du fluide, q la vitesse du fluide. La quantité $O = O_x + O_y + O_z$ est la masse sortant respectivement à $x + dx$, $y + dy$, et $z + dz$ dans toutes les directions. A l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre, on obtient :

$$O_x = (\rho q_x)dydz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x)dydzdx,$$

$$O_y = (\rho q_y)dxdz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho q_y)dxdzdy,$$

$$O_z = (\rho q_z)dxdy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho q_z)dxdydz.$$

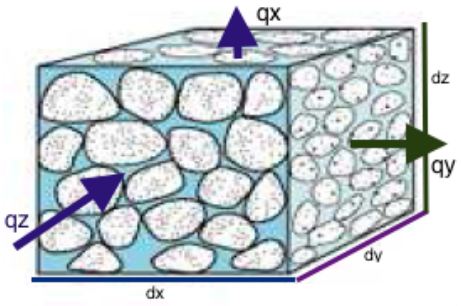


FIGURE 2.2 – Volume Elémentaire Représentatif (VER)

En insérant les termes précédents dans l'équation (2.1), on a :

$$-\Big\{\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z}\Big\}dxdydz=\frac{dS}{dt}.$$

Or S peut également s'écrire $S=(\rho\phi)dxdydz$ avec ϕ la porosité du milieu, d'où

$$-\Big\{\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z}\Big\}=\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\Leftrightarrow\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho q)=0$$

car $dxdydz\neq 0$.
De manière générale, l'équation de continuité de l'écoulement d'un fluide (monophasique) s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho q)=\rho Q, \tag{2.2}$$

où Q est le terme source volumique.

b) Equation de Darcy :

Découverte expérimentalement par **Darcy** en 1856 sur les fontaines de Dijon, la loi de **Darcy** exprime la densité du flux d'un fluide newtonien ou la vitesse de **Darcy** (q) à travers les milieux poreux :

$$q=-\frac{k}{\mu}(\nabla P+\rho g\nabla z),$$

équation qui peut aussi s'écrire à l'aide de la charge hydraulique :

$$\Phi=\frac{P}{\rho_0 g}+z-h_{ref}, \tag{2.3}$$

$$q=-K\nabla\Phi-\frac{k}{\mu}(\rho-\rho_0)g\nabla z,\quad K=\frac{k\rho_0 g}{\mu}. \tag{2.4}$$

Dans (2.3), $Z=z-h_{ref}$ est l'élévation au-dessus d'un niveau de référence fixe dans l'aquifère $h_{ref}<0$. Dans (2.4), k est la perméabilité du milieu poreux, g est la constante de gravité, μ est la viscosité du fluide, K est la matrice de conductivité hydraulique, P est la pression, ρ_0 est la densité de référence du fluide et z la hauteur du fluide.

c) Equation d'état pour la compressibilité du fluide :

Pour modéliser la compressibilité du fluide, nous supposons que la pression P est liée à la densité ρ par l'équation d'état suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho}=\alpha_P dP\Leftrightarrow\rho=\rho_0 e^{\alpha_P(P-P_0)}, \tag{2.5}$$

où $\alpha_P \geq 0$ est le coefficient de compressibilité du fluide résultant de la variation de la pression et P_0 est la pression de référence.
Une relation entre la densité ρ et la charge hydraulique Φ découle de (2.3) et (2.5). En effet

$$\Phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z - h_{ref} \Leftrightarrow P = \rho_0 g(\Phi - z + h_{ref}),$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_P dP \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \alpha_P d(\rho_0 g\Phi - \rho_0 gz),$$

donc

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_P \rho_0 g d\Phi \Leftrightarrow \rho = \rho_0 e^{\alpha_\Phi(\Phi-\Phi_0)}, \tag{2.6}$$

où $\alpha_\Phi = \rho_0 g \alpha_P \geq 0$ est le coefficient de compressibilité du fluide résultant de la variation de la charge hydraulique et Φ_0 est la charge hydraulique de référence.

Remarque 2.1 *Si $\alpha_P = 0$, alors le fluide est incompressible.*

d) Equation d'état pour la compressibilité du sol :

Modéliser la compressibilité du sol revient à modéliser les effets de la compressibilité des roches. Les premières tentatives pour expliquer ce phénomène sont basées sur le modèle de la porosité dépendant de la profondeur $\phi = \phi(z)$. Comme par exemple dans le modèle de Athy (cf.[24]) où on a :

$$\phi(z) = \phi_0 e^{-Mz}, \qquad (\phi_0, M) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Le problème de ce modèle est que la variation de la porosité n'est pas due à la variation de la pression, alors qu'en réalité cette dernière joue un rôle fondamental. C'est pourquoi une approche physique beaucoup plus cohérente consiste à dériver une équation pour la porosité.
Soit σ la contrainte totale dans le milieux poreux et σ_s la contrainte liée au squelette. Nous avons alors :

$$\sigma = \phi P + (1-\phi)\sigma_s,$$

où ϕP représente les effets dus à la pression. D'après la théorie de Terzaghi (voir [55]), la contrainte effective σ_e est définie par :

$$\sigma_e = (1-\phi)(\sigma_s - P).$$

Il s'en suit que

$$\sigma_e + P = \sigma.$$

En supposant que la contrainte totale reste inchangée, nous avons :

$$d\sigma_e = -dP.$$

De plus, le volume total V se déforme à cause de la compressibilité du sol mais le volume de la partie solide $V_s = (1-\phi)V$ reste inchangé (cf.[24]) et on a :

$$\frac{dV_s}{d\sigma_e} = 0 \Leftrightarrow -\frac{d\phi}{d\sigma_e}V + (1-\phi)\frac{dV}{d\sigma_e} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{V}\frac{dV}{d\sigma_e} = \frac{1}{(1-\phi)}\frac{d\phi}{dP}. \tag{2.7}$$

En supposant que les variations de volume et le comportement élastique du sol sont faibles, on définit la compressibilité du sol par $\beta_P \in \mathbb{R}$:

$$\beta_P = -\frac{1}{V}\frac{dV}{d\sigma_e}.$$

Il découle de l'équation (2.7) que :

$$\frac{d\phi}{dP} = (1-\phi)\beta_P \Leftrightarrow \phi = 1 - (1-\phi_0)e^{-\beta_P(P-P_0)}, \tag{2.8}$$

où P_0 est la pression de référence. En résumé, l'approche consiste à supposer que la variation de porosité provient de la compressibilité du squelette, elle-même étant due à la variation de la pression du fluide. Cela donne, en utilisant les représentations différentielles :

$$d\phi = \frac{d\phi}{dP}dP = (1-\phi)\big(\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dP}\big)dP = (1-\phi)\beta_p dP,$$

$$\frac{d\phi}{dP} = (1-\phi)\beta_P, \tag{2.9}$$

où $\beta_P = \frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dP}$ est la compressibilité du sol due à la variation de la pression.
Une relation entre la porosité ϕ et la charge hydraulique Φ découle de (2.3) et (2.8). En effet

$$\Phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z - h_{ref} \Leftrightarrow P = \rho_0 g(\Phi - z + h_{ref}),$$

donc

$$\frac{d\phi}{1-\phi} = \beta_P dP \Leftrightarrow \frac{d\phi}{1-\phi} = \beta_P \rho_0 g d\Phi.$$

On obtient donc

$$\frac{d\phi}{d\Phi} = (1-\phi)\beta_\phi \Leftrightarrow \phi = 1 - (1-\phi_0)e^{-\beta_\Phi(\Phi-\Phi_0)}, \tag{2.10}$$

où $\beta_\Phi = \phi_0 g \beta_P \geq 0$ est le coefficient de compressibilité du fluide résultant de la variation de la charge hydraulique, Φ_0 est la charge hydraulique de référence.

Nous venons de modéliser les écoulements de fluides dans un milieu poreux grâce à deux équations fondamentales : une qui provient de la conservation de la masse (2.2) et l'autre de la conservation de la quantité de mouvement ou équation de Darcy (2.4), puis deux équations d'états qui lient la porosité du milieu (ϕ) et la densité du fluide à la charge hydraulique ((2.6) et (2.10)).

2.3.2 Les différentes hypothèses pour notre problème

A ce niveau, nous tenons compte des données connues sur le contexte de l'intrusion saline pour mettre des hypothèses sur la nature du milieu, *i.e* la porosité du sol, sur la nature du fluide, *i.e* sa densité, et enfin sur l'écoulement du fluide dans le milieu poreux. Nous supposerons que le fluide et le milieu sont compressibles.

a) Hypothèse de Compressibilité du fluide :

Les fluides que nous allons considérer sont connus pour être faiblement compressibles, i.e $\alpha_p \ll 1$. Nous allons exploiter ce fait, combiné à la faible mobilité (k/μ) d'un fluide en milieu poreux i.e $\alpha_p k/\mu \ll 1$ dans (2.4), pour simplifier l'équation de Darcy en :

$$q = -K\nabla\Phi, \quad K = \frac{k\rho_0 g}{\mu}.$$

Le fait que $\alpha_p \ll 1$ sera exploité une seconde fois dans la modélisation du mouvement du fluide (voir paragraphe 3 ci-dessous).

b) Hypothèse de Compressibilité du sol

De façon analogue, nous allons supposer que le sol est faiblement compressible, donc que le coefficient de compressibilité est petit, i.e $\beta_P \ll 1$.

c) Hypothèse sur l'écoulement ou le mouvement du fluide :

Dans la suite, nous considérons les deux hypothèses classiques suivantes :
• L'hypothèse de **Dupuit** (cf.[3]) qui consiste à supposer que tous les mouvements du fluide sont essentiellement horizontaux, *i.e* : $q_z \ll 1$.
Comme $q = -K\nabla\Phi$, et en supposant que les principales directions d'anisotropie coïncident avec le repère, on considère donc :

$$\partial_z \Phi = 0. \tag{2.11}$$

Puisque $\Phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z - h_{ref}$, on a aussi

$$\partial_z \Phi = 0 \Leftrightarrow P = -\rho_0 g z + C, \tag{2.12}$$

où C est constante indépendante de la hauteur z.

Remarque 2.2

i) *La relation* (2.11) *implique que* Φ *est indépendant de* z. *De Lange interprète* (2.11) *comme une perméabilité verticale infinie* (*cf.*[*49*]).

ii) *L'hypothèse de Dupuit est donc dans ce contexte équivalente à celle de l'équilibre hydrostatique* (2.12).

iii) *Dans [14], l'hypothèse de Dupuit est justifiée dans le cas où les zones de transitions entre eau salée et eau douce, et entre milieux saturé et insaturé, sont quasiment horizontales. En pratique la validité de cette hypothèse semble aller au-delà. Ce point a été confirmé en 2D dans [42].*

• La seconde hypothèse est celle de **Bear** [14] qui consiste à négliger la variation de densité $\nabla\rho \cdot q \ll 1$ dans la direction de l'écoulement (cf. [3]).

Nous adoptons dès maintenant ce point de vue car il ne nécessite pas de nouvelle hypothèse. Le fait de négliger $(\nabla\rho \cdot q)$ provient simplement de la faible compressibilité du fluide ($\alpha_p \ll 1$) et de la petitesse de la mobilité ($\frac{k}{\mu}$) évoquée au paragraphe *a*) ci-dessus.
En prenant en considération toutes les hypothèses émises ci-dessus, notre équation (2.2) devient :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho q) = \rho Q \Longleftrightarrow \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot q + \underbrace{\nabla\rho\cdot q}_{=0} = \rho Q. \tag{2.13}$$

Or d'après (2.5) et (2.8), on a :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho\alpha_P\frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = (1-\phi)\beta_P\frac{\partial P}{\partial t}$$

et en remplaçant dans (2.38) on obtient :

$$\rho(1-\phi)\beta_P\frac{\partial P}{\partial t} + \phi\rho\alpha_P\frac{\partial P}{\partial t} + \rho\nabla\cdot q = \rho Q,$$

d'où

$$\rho\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big)\frac{\partial P}{\partial t} + \rho\nabla\cdot q = \rho Q.$$

Puisque

$$q = -K\nabla\Phi \quad et \quad P = \rho_0 g\Phi - \rho_0 g z + \rho_0 g h_{ref},$$

on obtient finalement, après simplification par $\rho \neq 0$, une équation de conservation de la masse couplée à l'équation de Darcy :

$$\underbrace{\rho_0 g\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big)}_{S^0}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \nabla\cdot(K\nabla\Phi) = Q, \tag{2.14}$$

avec $S^0 = \rho_0 g\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big)$ le coefficient d'emmagasinement en eau dans le sol.

Remarque 2.3
Le modèle que nous avons ici est différent de celui de ***Muskat*** *[58]. Pour retrouver ce dernier, on ne néglige plus la variation de la densité dans la direction de l'écoulement. On a alors :*

$$\rho\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big)\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho q) = \rho Q.$$

Puisque

$$q = -\frac{k\rho_0 g}{\mu}\nabla\Phi \quad et \quad P = \rho_0 g\Phi - \rho_0 g z + \rho_0 g h_{ref},$$

celà entraine :

$$\underbrace{\rho\,\rho_0 g\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big)}_{S^0}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \nabla\cdot(\rho K\nabla\Phi) = \rho Q,$$

avec $S^1 = \rho S^0$ le coefficient d'emmagasinement en eau dans le sol dans le modèle de ***Muskat****.*

d) Hypothèse de faible instabilité de Rayleigh-Taylor :

Quand un fluide lourd est au-dessus d'un fluide léger, on constate une instabilité dite de Rayleigh-Taylor à l'interface les séparant. Dans notre cas nous avons le fluide le plus léger (eau douce) au-dessus avec une densité de $(1000kg/m^3)$ par rapport à celui le plus lourd (eau de mer) avec une densité de $(1032kg/m^3)$. De plus nous considérons que dans le milieu poreux, nous sommes en absence de perturbations ou en présence de faibles perturbations donc nous pouvons supposer l'hypothèse de faible instabilité de Rayleigh-Taylor (en particulier pour la partie "interface nette" de notre approche ci-après).

e) Hypothèse d'interface abrupte (ou nette) :

Le modèle d'interface abrupte consiste à supposer que l'eau salée et l'eau douce sont immiscibles et donc que les zones occupées par chaque fluide sont séparées par une interface **abrupte**.
Cette interface est en réalité une zone de transition (car ces deux fluides sont en fait miscibles), mais dans le modèle on suppose que l'épaisseur de cette zone est très petite comparée aux dimensions de l'aquifère.
Dans chaque domaine nous avons une équation de conservation de la masse simplifiée du type (2.14) spécifique à chaque milieu.

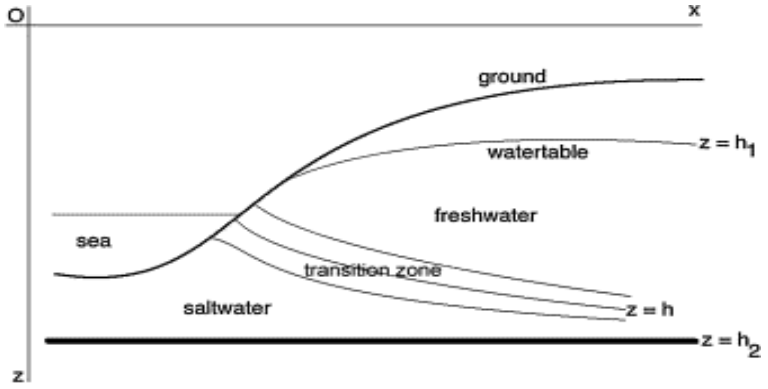


FIGURE 2.3 – Aquifère naturel

Dans le domaine de l'eau douce, nous avons :

$$S_f\frac{\partial\Phi_f}{\partial t} + \nabla\cdot q_f = Q_f, \tag{2.15}$$

et dans le domaine de l'eau de mer, nous avons :

$$S_s\frac{\partial\Phi_s}{\partial t} + \nabla\cdot q_s = Q_s, \tag{2.16}$$

où S_f, ρ_f, Φ_f et q_f sont respectivement le coefficient d'emmagasinement spécifiques en eau, la densité, la charge hydraulique et la vitesse de Darcy dans le domaine de l'eau douce, et S_s, ρ_s, Φ_s et q_s dans le domaine de l'eau salé. On rappelle que :

$$S_f = \rho_f g\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big), \quad q_f = -K_f\nabla\Phi_f, \qquad K_f = \frac{kg\rho_f}{\mu_f},$$

$$S_s = \rho_s g\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big), \quad q_s = -K_s\nabla\Phi_s, \qquad K_s = \frac{kg\rho_s}{\mu_s}.$$

Remarque 2.4
Les quantités ρ_f, ρ_s (les densités de référence dans le domaine de l'eau douce et celui de l'eau salée) sont constantes, mais distinctes ($\rho_f \neq \rho_s$). Le modèle dépend donc bien des différences de densité. Les quantités S_f, S_s, K_f, K_s, μ_f et μ_s peuvent être variables. Nous les supposerons néanmoins constantes par la suite. On supposera par ailleurs les caractéristiques de l'ensemble du réservoir homogène, ce qui entrainera ϕ et k constantes. Négliger les variations de la porosité est d'autant plus acceptable qu'elles sont pondérées par $\beta_p \ll 1$ et $\alpha_p \ll 1$ (on peut s'en convaincre aisément avec un développement de Taylor de ϕ). Et dans le domaine d'application envisagé ici, les effets dus aux variations de k sont négligeables devant ceux dus aux différences de densité. Enfin, du point de vue mathématique, ces hypothèses ne changent pas la complexité de l'analyse mais évitent plutôt des lourdeurs de calcul.

f) Conséquence de l'hypothèse de Dupuit :

Après l'hypothèse du modèle d'interface abrupte qui a permis d'établir une équation de la conservation de la masse dans chaque domaine en 3D, nous allons utiliser la conséquence de l'hypothèse de Dupuit : la charge hydraulique (Φ) est indépendante par rapport à (z), dans le cas d'un écoulement quasi-horizontal. Cette approximation de Dupuit permet d'intégrer verticalement les équations et de ramener la dimension du problème de trois à deux. Le système d'équation pour le problème 3D s'écrit :

$$S_f\frac{\partial\Phi_f}{\partial t} + \nabla\cdot q_f = Q_f \quad \text{dans} \quad \Omega_f \tag{2.17}$$

$$q_f = -K_f\nabla\Phi_f \tag{2.18}$$

$$S_s\frac{\partial\Phi_s}{\partial t} + \nabla\cdot q_s = Q_s \quad \text{dans} \quad \Omega_s \tag{2.19}$$

$$q_s = -K_s\nabla\Phi_s \tag{2.20}$$

$$+C.B + C.\text{ d'Interface} \tag{2.21}$$

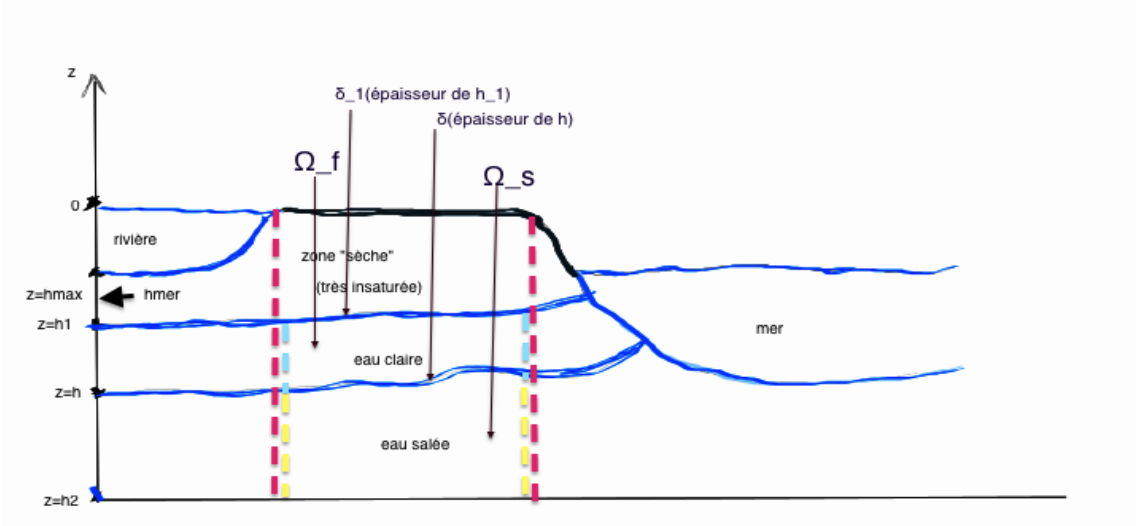


FIGURE 2.4 – Domaine d'intégration de notre aquifère

où $C.B$ signifie conditions aux bords et initiales et $C.I$ conditions à l'interface. Dans nos notations, $\Omega_f = \Omega \times [h, h_1]$ est le domaine de l'eau douce et $\Omega_s = \Omega \times [h_2, h]$ est le domaine de l'eau salée, h_1 est le niveau supérieur de la surface de l'aquifère qui varie dans le temps et dans l'espace (surface libre), h_2 est le niveau inférieur de la surface de l'aquifère qui est fixe et h est l'interface entre eau douce et eau salée (également surface libre).

• Nous définissons la hauteur maximale d'intégration h_{max} qui délimite la partie supérieure du domaine d'intérêt (dans la zone sèche on suppose que $h_{max} = 0$ et dans la zone rivière on suppose $h_{max} = h_{mer}$) : h et h_1 doivent appartenir à l'intervalle $[h_2, h_{max}]$ et nous ne regardons le problème que dans le sous-sol (voir figure 1.3).

• L'hypothèse de charge hydraulique Φ constante par rapport à z n'est vraie que perpendiculairement aux épontes (paroi délimitant les couches) de l'aquifère et devient fausse au voisinage des exutoires (ouverture pouvant servir à l'écoulement des eaux). Pour ces deux raisons, on ne peut pas considérer la zone en-dessous de la mer car la perpendiculaire à la falaise n'est pas l'axe vertical (voir figure (2.4)).

g) Hypothèses sur les conditions aux bords :

• **Zone sèche** Γ_T
On suppose qu'entre $z = h_1$ et Γ_T, la pression est égale à la pression atmosphérique P_a au niveau de la terre (Γ_T). On suppose aussi que $z = h_{max}$ coïncide avec le niveau de Γ_T.
Si $h_1 < h_{max}$, on impose l'équilibre des pressions $P_{f|z=h_1} = P_a$ et donc :

$$\Phi_{f|z=h_1} = \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1 - h_{ref}.$$

Si $h_1 = h_{max}$, on impose l'équilibre des pressions $P_{f|z=h_{max}} = P_a$ et donc :

$$\Phi_{f|z=h_{max}} = \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_{max} - h_{ref}.$$

Dans les zones sèches, pour simplifier, nous supposerons que $h_{max} = 0$.
En conséquence

$$\text{si} \quad h_1 < h_{max}, \text{ alors } \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1 - h_{ref}$$

et

$$\text{si} \quad h_1 = h_{max} = 0, \text{ alors } \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g}.$$

Donc la bonne inconnue qu'il nous faut considérer est $h_1^- := \inf(0, h_1)$:

$$\Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + \inf(0, h_1) - h_{ref} = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- - h_{ref}.$$

En supposant que P_a est constante, on a donc pour la différentiation :

$$D\Phi_f = D(h_1^-) = \mathcal{X}_0(-h_1)Dh_1,$$

avec

$$\mathcal{X}_0(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_1 \leq 0 = h_{max}, \\ 1 & \text{si} \quad h_1 > h_{max} = 0. \end{cases}$$

Le même raisonnement s'applique à la hauteur d'eau salée, d'où l'introduction de $h^- := \inf(0, h)$.

• **Zone rivière** Γ_r
On suppose la rivière à l'équilibre hydrodynamique :

$$P_{r|z=h_{max}} = P_a + \rho_f g(0 - h_{max}).$$

A (x, y) fixé, c'est donc $P_{r|z=h_{max}} = P_a - \rho_f g h_{max}$ qui va remplacer la pression P_a.

La condition au bord classique à l'interface d'un aquifère et d'un réservoir d'eau est la continuité de Φ_f, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\Phi_{f|z=h_{max}\cap\Gamma_r} = \Phi_{riviere} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Phi_{r|z=h_{max}\cap\Gamma_r} = \frac{P_{r|z=h_{max}(x,y)}}{\rho_f g} + h_{max}(x,y) - h_{ref}, \\
&\Longleftrightarrow \quad \Phi_{f|z=h_{max}\cap\Gamma_r} = \frac{P_a - \rho_f g h_{max}}{\rho_f g} + h_{max} - h_{ref}, \\
&\Longleftrightarrow \quad \Phi_{f|z=h_{max}\cap\Gamma_r} = \frac{P_a}{\rho_f g} - h_{max} + h_{max} - h_{ref}, \\
&\Longleftrightarrow \quad \Phi_{f|z=h_{max}\cap\Gamma_r} = \frac{P_a}{\rho_f g} - h_{ref}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.5
La présence de la rivière ne change donc rien car fixer Φ_f au contact du bord de la rivière Γ_r revient à fixer la pression P_a en $z = 0$. Le modèle se comporte de la façon suivante : au moment où l'eau de l'aquifère touche la rivière, celle-ci est automatiquement incluse à l'eau de l'aquifère.

• Zone faiblement perméable ou éponte :
Dans le cas d'une zone faiblement perméable ou zone éponte, nous devons considérer les termes de perte ou fuite, c'est-à-dire le flux d'eau (q_L) qui se transfère dans l'aquifère et qui est fonction de la différence de pression entre la base de l'éponte et la pression atmosphérique, de l'épaisseur et de la perméabilité de l'éponte cf. [79] :

$$q_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans la zone imperméable} \\ q_L(x) & \text{dans une zone éponte,} \end{cases}$$

et

$$q_{f|z=h_{max}}.\nabla(z - h_{max}) = q_L. \tag{2.22}$$

Le flux entre l'aquitard et l'eau contenue dans un aquifère est celui qu'on appelle terme de fuite ou terme de perte q_L. Le modèle générique pour la recharge et la décharge est :

$$q_L = (\Phi_{ext} - \Phi)/c_m$$

où Φ est la charge de l'aquifère, Φ_{ext} celle de l'aquitard [1]), la résistance $c_m = O(b_m/k_m)$ dépend de l'épaisseur b_m et de la perméabilité $k_m (k_m \ll k)$ de la membrane (voir [31]).
Cette formulation permet de traiter la charge q_{Lf} et la décharge q_{Ls}, selon le rapport entre Φ et Φ_{ext}. Ici, nous pouvons inclure un terme de fuite q_{Lf} au niveau de la partie supérieure de l'aquifère lorsque le milieu est complètement saturé *i.e.* $(h_1 = 0)$ et un terme de fuite en eau salée q_{Ls} à partir de la partie inférieure à l'eau salée :

$$q_{f|z=h_1^-}.\nabla(z - h_1^-) = q_{Lf} \quad \text{quand} \quad h_1^- = 0, \quad q_{f|z=h_2}.\nabla(z - h_2) = -q_{Ls}. \tag{2.23}$$

2.3.3 Conséquences des hypothèses

Pour simplifier le calcul nous allons exploiter les hypothèses précédentes. L'idée est d'intégrer les équations (2.17) -(2.19) suivant la direction verticale $(0, z)$ afin d'éliminer une dimension.

a) Intégrations verticales des équations :

Les premières hypothèses sont : la fonction h est univoque d'après l'hypothèse de faible instabilité de Rayleigh-Taylor ; les quantités S_s, S_f sont constantes et $Q_s = Q_f = 0$ pour simplifier l'intégration. On intègre l'équation (2.17) dans le domaine d'eau douce entre l'interface h^- et la surface supérieure h_1^-.

1. Lexique

Dans un souci de généralité des calculs, on ne considère pas tout de suite l'hypothèse de Dupuit, à savoir que Φ constante par rapport à z. On a alors :

$$\int_{h^-}^{h_1^-} \big(S_f \partial_t \Phi_f + \nabla \cdot q_f\big)(z)\, dz = 0. \tag{2.24}$$

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \partial_t \Phi_f \, dz &= S_f \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_t \Phi_f \, dz \\ &= S_f \partial_t \left(\int_{h^-}^{h_1^-} \Phi_f \, dz \right) - S_f \Phi_f(h_1^-) \partial_t h_1^- + S_f \Phi_f(h^-) \partial_t h^-.\end{aligned}$$

On désigne par $\tilde{\Phi}_f$ la moyenne verticale de Φ_f

$$\tilde{\Phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} \Phi_f \, dz, \qquad B_f = h_1^- - h^-,$$

et on a donc :

$$\begin{aligned}\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \partial_t \Phi_f \, dz &= S_f \partial_t \big(B_f \tilde{\Phi}_f\big) - S_f \Phi_f(h_1^-) \partial_t h_1^- + S_f \Phi_f(h^-) \partial_t h^- \\ &= S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f + S_f \tilde{\Phi}_f \partial_t B_f - S_f \Phi_f(h_1^-) \partial_t h_1^- + S_f \Phi_f(h^-) \partial_t h^-,\end{aligned}$$

$$\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \partial_t \Phi_f \, dz = S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f + S_f \big(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h_1^-)\big) \partial_t h_1^- - S_f \big(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h^-)\big) \partial_t h^-. \tag{2.25}$$

De même d'après la formule Leibniz :

$$\begin{aligned}\int_{h^-}^{h_1^-} \nabla \cdot q_f \, dz &= \int_{h^-}^{h_1^-} \nabla' \cdot q_f' \, dz + \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_f \, dz \\ &= \nabla' \cdot \Big(\int_{h^-}^{h_1^-} q_f' \, dz \Big) - q_f(h_1^-) \cdot \nabla' h_1^- + q_f(h^-) \cdot \nabla' h^- + \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_f \, dz, \\ &= \nabla' \cdot \big(B_f \tilde{q}_f'\big) - q_f(h_1^-) \cdot \nabla' h_1^- + q_f(h^-) \cdot \nabla' h^- + \int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_f \, dz,\end{aligned}$$

où $\nabla' = (\partial_x, \partial_y)$, $q_f' = (q_{f,x}, q_{f,y})$, $\tilde{q}_f' = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} q_f' \, dz$ et $\int_{h^-}^{h_1^-} \partial_z q_f \, dz = q_f(h_1^-) - q_f(h^-)$.
Alors nous obtenons :

$$\int_{h^-}^{h_1^-} \nabla \cdot q_f \, dz = \nabla' \cdot \big(B_f \tilde{q}_f'\big) - q_f(h_1^-) \cdot \big(\nabla' h_1^- - \partial_z z\big) + q_f(h^-) \cdot \big(\nabla' h^- - \partial_z z\big)$$

c'est-à-dire

$$\int_{h^-}^{h_1^-} \nabla \cdot q_f' \, dz = \nabla' \cdot \big(B_f \tilde{q}_f'\big) + q_f(h_1^-) \cdot \nabla\big(z - h_1^-\big) - q_f(h^-) \cdot \nabla\big(z - h^-\big). \tag{2.26}$$

En utilisant (2.25) et (2.26), l'équation (2.24) devient :

$$\begin{aligned}S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f + \nabla' \cdot \big(B_f \tilde{q}_f'\big) + S_f \big(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h_1^-)\big) \partial_t h_1^- - S_f \big(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h^-)\big) \partial_t h^- \\ + q_f(h_1^-) \cdot \nabla\big(z - h_1^-\big) - q_f(h^-) \cdot \nabla\big(z - h^-\big) = 0.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Puisque $\Phi_f(x, y, z) \approx \tilde{\Phi}_f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \ z \in (h^-, h_1^-)$ à cause de l'approximation de Dupuit, nous avons :

$$\tilde{q}_f' = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} q_f' \, dz = -\frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} K_f' \nabla' \Phi_f \, dz = -\frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} K_f' \nabla' \tilde{\Phi}_f \, dz = -\tilde{K}_f' \nabla' \Phi_f, \ \tilde{K}_f' = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} K_f' \, dz.$$

En remplaçant la dernière équation dans (2.27) et en prenant en compte les hypothèses précédentes, on obtient :

$$S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f - \nabla' \cdot \left(B_f \tilde{K}'_f \nabla' \tilde{\Phi}_f\right) + S_f \underbrace{\left(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h_1^-)\right)}_{=0} \partial_t h_1^- - S_f \underbrace{\left(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h^-)\right)}_{=0} \partial_t h^-$$
$$+ q_f(h_1^-) \cdot \nabla\left(z - h_1^-\right) - q_f(h^-) \cdot \nabla\left(z - h^-\right) = 0.$$

C'est-à-dire :

$$S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f - \nabla' \cdot \left(B_f \tilde{K}'_f \nabla \tilde{\Phi}_f\right) + q_f(h_1^-) \cdot \nabla\left(z - h_1^-\right) - q_f(h^-) \cdot \nabla\left(z - h^-\right) = 0. \tag{2.28}$$

On rappelle que dans (2.28) : $\nabla' = (\partial_x, \partial_y)$ et $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.
On procède de même pour intégrer l'équation (2.19) dans le domaine salé entre la surface inférieure de l'aquifère h_2 et l'interface h^- et on obtient

$$S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s - \nabla' \cdot \left(B_s \tilde{K}'_s \nabla' \tilde{\Phi}_s\right) + q_s(h^-) \cdot \nabla\left(z - h^-\right) - q_s(h_2) \cdot \nabla\left(z - h_2\right) = 0 \tag{2.29}$$

où $B_s = h^- - h_2$ est l'épaisseur de la zone salée. Les équations (2.28) et (2.29) modélisent respectivement l'écoulement dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine de l'eau salée et les termes $B_i \tilde{K}'_i,\ i = f, s$, peuvent être vus comme une *transmissivité dynamique des couches.*

Remarque 2.6
Nous avons deux équations (2.28) *et* (2.29) *pour résoudre notre problème avec quatre inconnues :* $\tilde{\Phi}_f$, $\tilde{\Phi}_s$, h_1^- *et* h^-. *Nous allons travailler sur l'interface pour fermer le système.*

b) Conditions sur les interfaces :

Nous incluons dans notre modèle l'existence de deux interfaces diffuses : l'une d'épaisseur δ_1 entre la zone saturée et la zone insaturée et l'autre d'épaisseur δ_h entre l'eau salée et l'eau douce. C'est ce qui rend notre modèle complètement original par rapport à la littérature existante. De plus, nous réconcilions ainsi la légèreté des modèles à interface nette avec le réalisme des modèles à interface diffuse. La dynamique de ces interfaces diffuses est gouvernée par les modèles de champ de phase. Ces modèles de champ de phase ont été introduits pour la description des transitions de phase et des procédés de solidification [22]. Ils sont maintenant largement utilisés pour la modélisation des transitions de fluides binaires. Plus près de notre contexte, ces modèles sont utilisés pour décrire l'imbibition dans les milieux poreux [32] (comparable à l'interface supérieure dans notre contexte). Dans les problèmes de séparation de phase, le modèle contient généralement un double puits de potentiel dans lequel les minima locaux correspondent aux états stables homogènes. Ici, nous utilisons plutôt un potentiel à trois puits afin de respecter l'approche première de l'interface abrupte et d'inclure les effects macroscopiques du front au niveau local dans le modèle de champ de phase. L'énergie fonctionnelle inclut également les termes non locaux impliquant le gradient (et éventuellement les dérivés d'ordre supérieur) du champ de phase. Dans le présent travail, nous choisissons un modèle simple, à savoir un modèle de type Allen-Cahn à trois points de stabilité (voir [7]).
Le fait que le modèle d'Allen-Cahn, contrairement à celui de Cahn-Hilliard, est non-conservatif, n'aura pas d'impact sur la forme conservatrice de notre modèle final. Le choix de la non dégénérescence de la mobilité pour un modèle "phase-field" est également bien fondé physiquement parce que l'apparition des phases pures, et donc la disparition de la mobilité, n'a aucun sens dans notre contexte de fluides miscibles, contrairement au contexte de la séparation de phase.

• **Modélisation de l'interface eau douce / eau salée pour le calcul de $q_f(h^-) \cdot \nabla(z - h^-)$:**

Nous utilisons un modèle de type Allen-Cahn pour modéliser la dynamique de cette interface et nous introduisons une fonction de phase F_h telle que :

$$F_h = \begin{cases} 0 & \text{dans l'eau douce} \\ \frac{c_s}{2} & \text{sur l'interface nette} \\ c_s & \text{dans l'eau salée} \end{cases},$$

où c_s est la concentration moyenne en sel dans la zone salée.
En fait $\left\{(x,y,z) \quad \text{tels que} \quad F_h(x,y,z,t) = \frac{c_s}{2}\right\}$ représente l'interface nette à l'instant t.
La fonction F_h satisfait une équation de type Allen-Cahn tristable (les trois points de stabilité sont ici 0, $\frac{c_s}{2}$ et c_s) :

$$\partial_t F_h + \vec{v}\cdot\nabla F_h - \delta_h \triangle' F_h + \frac{2F_h(F_h - c_s/2)(F_h - c_s)(3F_h^2 - c_s^2/4)}{\delta_h} = 0, \tag{2.30}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de l'interface. La forme détaillée du potentiel triple n'est pas importante ; son rôle principal est d'établir et de maintenir les bords de domaines bien définis. La relaxation élastique intégrée dans la dynamique de phase empêche la couche de mélange interfaciale de se propager. Ce point correspond aux observations dans les aquifères considérés dans le présent travail. La taille caractéristique de l'interface diffuse correspondante est $\delta_h > 0$ et est petite (voir [6] pour des résultats rigoureux). Un autre point en faveur du couplage avec l'approche interface nette est en effet la convergence du modèle champ de phase vers celui de l'interface nette (voir [72] pour Allen-Cahn, [23]-[17] pour Cahn-Hilliard et Stefan). L'équation de champ de phase (2.30) contient également une advection du paramètre d'ordre du fluide, la vitesse effective étant désignée par $\vec{v}$ (voir [18]). Nous notons que nous avons déjà négligé ici la diffusion verticale devant le terme de convection. Le passage d'un modèle 3D à un modèle 2D suppose que la zone de stabilité $\left\{F_h = \frac{c_s}{2}\right\}$ correspond à l'interface nette h^-, ce qui entraine :

$$F_h(x,y,z,t) = \frac{c_s}{2} \Longleftrightarrow z - h^-(x,y,t) = 0.$$

La différentiation de $F_h(x,y,h^-(x,y,t),t) = c_s/2 \quad i.e. \quad \partial_i[F_h(x_1,x_2,h^-(x_1,x_2,t),t)] = 0, \quad (i = x,t),$ donne

$$\partial_t F_h(x_1,x_2,h^-,t) = -\partial_z F_h(x_1,x_2,h^-,t)\partial_t h^- \quad \text{et} \quad \nabla' F_h(x_1,x_2,h^-,t) = -\partial_z F_h(x_1,x_2,h^-,t)\nabla' h^-.$$

Nous dérivons à nouveau la dernière relation

$$\triangle' F_h(x_1,x_2,h^-,t) = -\partial_z F_h(x_1,x_2,h^-,t)\triangle' h^- - \partial^2_{zz} F_h(x_1,x_2,h^-,t)|\nabla' h^-|^2 - \nabla'\partial_z F_h(x_1,x_2,h^-,t)\cdot\nabla' h^-.$$

La projection de Allen-Cahn pour $F_h = \frac{c_s}{2}$, donne alors

$$\partial_z F_h(-\partial_t h^- + \vec{v}\cdot\nabla(z - h^-) + \delta_h\triangle' h^-) + \delta_h\nabla' h^-\cdot\nabla'\partial_z F_h + \delta_h|\nabla' h^-|^2\partial^2_{zz}F_h = 0.$$

Les deux derniers termes du membre de gauche de la dernière équation peuvent être négligés. En effet, c'est la combinaison de trois quantités faibles. Tout d'abord, bien entendu, le paramètre δ_h qui est la taille caractéristique de l'interface diffuse est faible. Le point suivant provient de la dynamique de l'équation d'Allen-Cahn. Une analyse asymptotique formelle montre que le terme de réaction est dominant en temps petits, de sorte que dans l'échelle de temps rééchelonné $t' = t/\delta_h^2$ la dynamique se situe essentiellement dans l'équation différentielle ordinaire $\partial_{t'} F_h = 2F_h(F_h - c_s/2)(F_h - c_s)(3F_h^2 - c_s^2/4)$ et la valeur de F_h tend vers des valeurs stables créant ainsi des couches de transition abruptes. Ensuite, la propagation est associée à une échelle de temps beaucoup plus lente, les termes de convection et diffusion venant équilibrer le terme de réaction au voisinage des interfaces stables, mais la structure régulière de l'interface diffuse assure la petitesse de $\nabla'\partial_z F_h \ll 1$ et $\partial^2_{zz}F_h = \mathcal{O}(1)$. De plus, dans les travaux de Dupuit [33] basés sur l'observation de l'écoulement des eaux souterraines, la pente de la surface interfaciale est très petite, c'est-à-dire $|\nabla' h^-| \ll 1$. Pour la même raison, la fonction F_h se comporte heuristiquement comme une fonction en escalier dans la direction verticale et $\partial_z F_h \neq 0$. On obtient de la dernière équation :

$$-\partial_t h^- + \vec{v}\cdot\nabla(z - h^-) + \delta_h\triangle' h^- = 0. \tag{2.31}$$

On revient alors à l'hypothèse traditionnelle de la modélisation à interface nette. En fait, il s'avère que la vitesse $\vec{v}$ dans la zone de mélange qui transporte l'interface dans (2.30) et qui semble être une inconnue supplémentaire dans le modèle disparaît à ce stade. Nous n'avons donc pas à introduire une équation supplémentaire pour fermer le système (comme par exemple dans [76]) ou à introduire l'hypothèse de Fick pour $(\vec{v} - q_f)$. On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse au travers de l'interface $\left\{F = \frac{c_s}{2}\right\}$, i.e les composantes normales de la vitesse sont continues et on a :

$$\left(\frac{q_f}{\phi} - \vec{v}\right)\cdot\vec{n} = \left(\frac{q_s}{\phi} - \vec{v}\right).\vec{n} = 0. \tag{2.32}$$

La pondération par $\frac{1}{\phi}$ vient de la définition de la vitesse moyenne réelle :

$$\vec{v} = \frac{Q}{S_v} = \frac{Q}{\phi S} = \frac{1}{\phi}\frac{Q}{S} = \frac{q_f}{\phi} \quad \text{avec} \quad q_f = \frac{Q}{S} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{S_v}{S}.$$

On a noté $\vec{n}$ le vecteur normal unité par rapport à l'interface nette et parallèle à $\nabla F_{|F=\frac{c_s}{2}}$, $\vec{v}$ est la vitesse moyenne réelle qui transporte l'interface, Q est le flux ou débit s'écoulant dans la section, S est la surface de la section, q_f la vitesse fictive de filtration ou vitesse de Darcy et S_v la surface du vide dans le milieu poreux.
En combinant (2.31) et (2.32) et en rajoutant les termes de perte ou de fuite nous obtenons :

$$\begin{aligned} & q_f(h^-)\cdot\nabla(z-h^-) \\ = q_s(h^-)\cdot\nabla(z-h^-) &= \phi\Big[\frac{\partial h^-}{\partial t} - \delta_h \triangle' h^- + \Big(1-\mathcal{X}_0(-h)\Big)q_{Ls}(x)\Big] \\ &= \phi\Big[\mathcal{X}_0(-h)\frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \nabla'\cdot\Big(\mathcal{X}_0(-h)\nabla' h\Big) + \Big(1-\mathcal{X}_0(-h)\Big)q_{Ls}(x)\Big]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Remarque 2.7
*Nous retrouvons ainsi une condition au bord de type **Stefan** régularisé. Nous pourrons noter que :*

i) *Si $\delta_h \to 0$, on sait que l'asymptotique rigoureuse de Allen-Cahn (comme de Cahn-Hilliard) est le problème de Stefan classique i.e la modélisation classique de la dynamique de l'interface par une équation level-set qui donne : $q_f(h^-)\cdot\nabla(z-h^-) = \phi\partial_t h^-$ (cf. [67]).*

ii) *Si on écrit Allen-Cahn sous la forme :*

$$\partial_t F_h^\epsilon + \vec{v}\cdot\nabla F_h^\epsilon - \gamma\triangle F_h^\epsilon + \frac{F_h^\epsilon(F_h^\epsilon - \frac{c_s}{2})(F_h^\epsilon - c_s)}{\epsilon\delta_h} = 0,$$

(γ coefficient lié à l'élasticité supposée de l'interface et à δ_h), que l'on fixe γ et que l'on fait tendre ϵ vers 0, on trouve une équation pour la distance à l'interface nette F du type :

$$\partial_t F_h + \vec{v}\cdot\nabla F_h - \gamma\triangle F_h = 0$$

(voir par exemple [5] et ses références).

• **Modélisation de l'interface zone saturée / zone insaturée pour le calcul de $q_f(h_1^-)\cdot\nabla(z-h_1^-)$:**

C'est le même type de raisonnement que précédemment pour une interface diffuse d'épaisseur δ_1.
Ici, pour modéliser la dynamique de cette interface, nous introduisons une fonction de phase F telle que :

$$F = \begin{cases} -1 & \text{en zone insaturée} \\ 0 & \text{sur l'interface nette} \\ 1 & \text{en zone saturée (en eau)} \end{cases},$$

En fait $\Big\{F(x,y,z,t)=0\Big\}$ représente l'interface nette. La fonction F satisfait une équation de type Allen-Cahn :

$$\partial_t F + \vec{v}_1.\nabla F - \delta_1\triangle F + \frac{2F(F-1)(F+1)(3F^2-1)}{\delta_1} = 0$$

où $\vec{v}_1$ est la vitesse de l'interface. La zone de transition $\Big\{F=0\Big\}$ correspond à l'interface nette h_1^- et on a donc :

$$F(x,y,z,t) = 0 \Longleftrightarrow z - h_1^-(x,y,t) = 0.$$

La différentiation de $F(x,y,h_1(x,y,t),t)=0$ et la projection d'Allen-Cahn pour $F=0$ donnent :

$$-\partial_t h_1^- + \vec{v}_1\cdot\nabla(z-h_1^-) + \delta_1\triangle' h_1^- = 0. \tag{2.34}$$

En combinant (2.34) et (2.32) et en rajoutant les termes de perte ou fuite (équation (2.22)), nous obtenons :

$$\begin{aligned} q_f(h_1^-)\cdot\nabla(z-h_1^-) &= \phi\Big[\frac{\partial h_1^-}{\partial t} - \delta_1 \triangle' h_1^- + (1-\mathcal{X}_0(-h_1))q_{Lf}(x)\Big] \\ &= \phi\Big[\mathcal{X}_0(-h)\frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1\nabla'\cdot(\mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1) + (1-\mathcal{X}_0(-h_1))q_{L_f}(x)\Big]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

• **Modélisation de la couche imperméable** (h_2) **pour le calcul de** $q_{s|z=h_2}\cdot\nabla(z-h_2)$ **:**
Dans le cas où l'on suppose que la couche inférieure est imperméable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de flux entre la zone salée et la zone en-dessous de h_2, on a :

$$q_{s|z=h_2}\cdot\nabla(z-h_2) = 0.$$

Notons ici que comme nous avons supposé l'écoulement quasi-horizontal, cette condition au bord inférieur n'est pas vraie pour n'importe quelle forme de fonction h_2.
Avec $\partial_z\Phi_s = 0$ et par exemple un tenseur de perméabilité K_s diagonal, on constate que celà impose une topographie h_2 constante. Néanmoins, dans les études mathématiques qui vont suivre, nous garderons une fonction h_2 variable en espace afin de considérer des tenseurs de perméabilité plus généraux, tout en gardant à l'esprit que de petites variations de h_2 n'invalident pas le modèle d'écoulement quasi-horizontal.

• **Hypothèse de Continuité de la pression à l'interface** h **:**
Grâce à l'approximation de Dupuit, $\Phi_{f|z=h_1^-} \simeq \Phi_{f|z=h^-} = \tilde{\Phi}_f$, on a donc :

$$\tilde{\Phi}_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- - h_{ref} = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- - h_{ref}, \tag{2.36}$$

Conséquence 2.1
Puisque P_a *est constante en* $z=0$*, on a :*

$$\partial_t\tilde{\Phi}_f = \partial_t h_1^- = \mathcal{X}_0(-h_1)\partial_t h_1, \tag{2.37}$$
$$\nabla'\tilde{\Phi}_f = \nabla(h_1^-) = \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1. \tag{2.38}$$

De plus, l'hypothèse de continuité de la pression entre la couche d'eau douce et la couche au-dessus de l'interface libre h_1^- donne :

$$\begin{aligned} \Phi_{f|z=h_1^-} = \Phi_{f|z=h^-} &\iff \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- - h_{ref} = \frac{P_{f|z=h^-}}{\rho_f g} + h^- - h_{ref}, \\ &\iff P_{f|z=h^-} = P_a + \rho_f g(h_1^- - h^-). \end{aligned}$$

Par ailleurs comme on a supposé la continuité de la pression au travers de l'interface h^-, on a :

$$\begin{aligned} P_{f|z=h^-} = P_{s|z=h^-} = \rho_s g(\tilde{\Phi}_s - h^-) &\iff P_a + \rho_f g(h_1^- - h^-) = \rho_s g(\tilde{\Phi}_s - h^-), \\ &\iff \rho_s g(\tilde{\Phi}_s - h^-) = P_a + \rho_f g(h_1^- - h^-), \\ &\iff \rho_s\tilde{\Phi}_s = \frac{P_a}{g} + \rho_f(h_1^- - h^-) + \rho_s h^-, \\ &\iff \frac{\rho_s}{\rho_f}\tilde{\Phi}_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + (h_1^- - h^-) + \frac{\rho_s}{\rho_f}h^-, \\ &\iff (1+\alpha)\tilde{\Phi}_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + (h_1^- - h^-) + (1+\alpha)h^-, \\ &\iff (1+\alpha)\tilde{\Phi}_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- + \alpha h^-, \end{aligned}$$

où $(1+\alpha) = \frac{\rho_s}{\rho_f}$, avec α le paramètre de contraste de densité. En conséquence comme P_a et α sont constants, on a :

$$\begin{aligned} P_{f|z=h^-} = P_{s|z=h^-} &\implies (1+\alpha)\nabla'\tilde{\Phi}_s = \nabla h_1^- + \alpha\nabla' h^- \\ &\implies (1+\alpha)\nabla'\tilde{\Phi}_s = \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla h_1 + \alpha\mathcal{X}_0(-h)\nabla' h. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Remarque 2.8

i) *Les équations* (2.37) *et* (2.38) *de la conséquence* 1.1 *permettent d'éliminer l'inconnue* $\tilde{\Phi}_f$ *dans notre système.*

ii) *L'équation* (2.39) *permet d'éliminer l'inconnue* $\tilde{\Phi}_s$ *dans notre système.*

iii) *Avec* (2.23), (2.36) *et* (2.39), *nous pouvons réécrire la forme explicite des termes de perte ou de fuite* q_{Lf} *et* q_{Ls} *comme suit :*

$$\begin{aligned} q_{Lf}(x,h_1,h) &= (1-\mathcal{X}_0(-h_1))\mathcal{X}_0(h_1^- - h^-)\frac{k_{mf}(x)}{b_{mf}(x)}\left(\frac{P_{ext,f}(x)}{\rho_f g} + b_{mf}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g} - h_1^-\right) \\ &= (1-\mathcal{X}_0(-h_1))\mathcal{X}_0(h_1^- - h^-)\frac{k_{mf}(x)}{b_{mf}(x)}\left(\frac{P_{ext,f}(x)}{\rho_f g} + b_{mf}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g}\right). \end{aligned}$$

En effet, nous spécifions que seuls les échanges d'eau douce sont autorisés, donc le terme $\mathcal{X}_0(h_1^- - h^-)$, *et que la zone semi-perméable est à une profondeur* $h_{max} = 0$, *ainsi le terme* $(1-\mathcal{X}_0(-h_1))$, *nous font considérer ici, à un aquifère phréatique : il n'y a pas perte ou de fuite à la partie supérieure à moins que l'aquifère soit saturé. Nous imposons* $k_{mf} = 0$ *en dehors de la surface de l'aquitard.*
Le même type de raisonnement est fait pour les termes de fuite en eau salée et elles s'expriment comme suit :

$$q_{Ls}(x,h_1,h) = \mathcal{X}_0(h^- - h_2)\frac{k_{ms}(x)}{b_{ms}(x)}\left(\frac{P_{ext,s}(x)}{\rho_s g} + h_2 - b_{ms}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g(1+\alpha)} - \frac{h_1^-}{1+\alpha} - \frac{\alpha h^-}{1+\alpha}\right).$$

iv) *On a préféré ici introduire le contraste de densité* α *plutôt que le nombre d'Atwood* $A = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_s + \rho_f}$.

• Hypothèse de Continuité de la viscosité à l'interface h :

Nous ajoutons ici quelques hypothèses, essentiellement introduites pour simplifier les équations. Le milieu est supposé isotrope et la viscosité identique pour l'eau salée et pour l'eau douce. En utilisant la définition de la perméabilité pour $\tilde{K}_f$ et $\tilde{K}_s$, on a :

$$\tilde{K}_{f,x} \times \mathbb{I} = \tilde{K}_{f,y} \times \mathbb{I} = \tilde{K}_f \quad \text{et} \quad \tilde{K}_{s,x} \times \mathbb{I} = \tilde{K}_{s,y} \times \mathbb{I} = \tilde{K}_s,$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. Or nous avons :

$$\tilde{K}_f = \frac{\rho_f g}{\mu_f}\tilde{k} \Leftrightarrow \mu_f = \frac{\rho_f g}{\tilde{K}_f}\tilde{k}, \quad \text{et} \quad \tilde{K}_s = \frac{\rho_s g}{\mu_s}\tilde{k} \Leftrightarrow \mu_s = \frac{\rho_s g}{K_s}\tilde{k},$$

et il résulte

$$\begin{aligned} \mu_f = \mu_s &\Leftrightarrow \frac{\rho_f g}{\tilde{K}_f}\tilde{k} = \frac{\rho_s g}{\tilde{K}_s}\tilde{k} \\ &\Leftrightarrow \frac{\tilde{K}_s}{\rho_s} = \frac{\tilde{K}_f}{\rho_f} \\ &\Leftrightarrow \tilde{K}_s = \frac{\rho_s}{\rho_f}\tilde{K}_f \\ &\Leftrightarrow \tilde{K}_s = (1+\alpha)\tilde{K}_f \quad \text{avec} \quad (1+\alpha) = \frac{\rho_s}{\rho_f}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

• Conclusion :

En prenant en compte toutes les hypothèses émises précédemment sur les interfaces (h_1^-) et (h^-), les équations (2.28) et (2.29) obtenues grâce à l'hypothèse d'interface abrupte, et en supposant l'existence d'une interface diffuse (une zone de mélange), nous obtenons notre modèle 2D du problème mixte d'interfaces abruptes et diffuses dans un aquifère libre :

$$S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f - \nabla' \cdot (B_f \tilde{K}_f \nabla' \tilde{\Phi}_f) + q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla(z - h_1^-) - q_{f|z=h^-} \cdot \nabla\big(z - h^-\big) = \tilde{Q}_f \tag{2.41}$$

$$S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s - \nabla' \cdot (B_s \tilde{K}_s \nabla' \tilde{\Phi}_s) + q_{s|z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla\big(z - h_2\big) = \tilde{Q}_s, \tag{2.42}$$

où les termes $\tilde{Q}_f$ et $\tilde{Q}_s$ sont les moyennes des termes sources prises respectivement sur le volume occupé par l'eau douce et celui de l'eau salée.

Remarque 2.9
Le terme $S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s$ est négligeable. En effet c'est la combinaison de deux faits :
i) *d'une part l'eau salée est confinée car la couche h_2 est imperméable, donc :*

$$\partial_t \tilde{\Phi}_s \ll 1;$$

ii) *d'autre part $S_s \ll 1$ car le coefficient de compressibilité du fluide est très faible ($\alpha_P \ll 1$) et le coefficient de compressibilité du sol est aussi très faible ($\beta_P \ll 1$).*

$$S_s = \rho_s g\Big((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P\Big) \ll 1.$$

Donc on peut raisonnablement supposer que : $S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s \simeq 0$.

En faisant la somme entre (2.41) et (2.42), en tenant compte de la remarque 2.9 et (2.32), on a :

$$\begin{aligned}
-\nabla' \cdot (B_s \tilde{K}_s \nabla' \tilde{\Phi}_s) + q_{s|z=h^-} \cdot \nabla(z-h^-) - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z-h_2) &= \tilde{Q}_s, \\
S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f - \nabla' \cdot (B_f \tilde{K}_f \nabla' \tilde{\Phi}_f) - \nabla' \cdot (B_s \tilde{K}_s \nabla' \tilde{\Phi}_s) + q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla(z-h_1^-) - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z-h_2) &= \tilde{Q}_f + \tilde{Q}_s.
\end{aligned}$$

On remplace alors

$$B_s = h^- - h_2, \quad B_f = h_1^- - h^-, \quad \tilde{K}_s = (1+\alpha)\tilde{K}_f, \quad q_{s|z=h_2}.(\nabla z - \nabla h_2) = 0,$$
$$\partial_t \tilde{\Phi}_f = \mathcal{X}_0(-h_1)\partial_t h_1, \quad \nabla' \tilde{\Phi}_f = \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1,$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\nabla' \cdot \big((h^- - h_2)\tilde{K}_f(1+\alpha)\nabla' \Phi_s\big) + q_{s|z=h^-} \cdot \nabla(z-h^-) &= \tilde{Q}_s, \qquad (2.43) \\
S_f(h_1^- - h^-)\mathcal{X}_0(-h_1)\partial_t h_1 - \nabla' \cdot \big((h_1^- - h^-)\tilde{K}_f \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\big) & \\
+ q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla\big(z-h_1^-\big) - \nabla' \cdot \big((h^- - h_2)\tilde{K}_f(1+\alpha)\nabla' \tilde{\Phi}_s\big) &= \tilde{Q}_f + \tilde{Q}_s. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Or, on rappelle que :

$$\begin{aligned}
(1+\alpha)\nabla' \tilde{\Phi}_s &= \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1 + \alpha \mathcal{X}_0(-h)\nabla' h, \\
q_{f|z=h_1^-}.\nabla(z-h_1^-) &= \phi\Big[\mathcal{X}_0(-h_1)\frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \nabla' \cdot \big(\mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\big) + \big(1 - \mathcal{X}_0(-h_1)\big) q_{L_f}(x)\Big], \\
q_{s|z=h^-} \cdot \nabla\big(z-h^-\big) &= \phi\Big[\mathcal{X}_0(-h)\frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \nabla' \cdot \big(\mathcal{X}_0(-h)\nabla' h\big) + \big(1 - \mathcal{X}_0(-h)\Big) q_{L_s}(x)\Big].
\end{aligned}$$

Les équations (2.43) et (2.44) deviennent :

$$\begin{aligned}
-\nabla' \cdot \big((h^- - h_2)\tilde{K}_f \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\big) - \nabla' \cdot \big((h^- - h_2)\tilde{K}_f \alpha \mathcal{X}_0(-h)\nabla' h\big) & \\
+\phi\Big(\mathcal{X}_0(-h)\frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \nabla' \cdot \big(\mathcal{X}_0(-h)\nabla' h\big) + \big(1 - \mathcal{X}_0(-h)\Big) q_{L_s}(x)\Big) &= \tilde{Q}_s \\
S_f(h_1^- - h^-)\mathcal{X}_0(-h_1)\partial_t h_1 - \nabla' \cdot \big((h_1^- - h^-)K_f \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\big) & \\
-\nabla' \cdot \big((h^- - h_2)\tilde{K}_f \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\big) - \nabla' \cdot \big((h^- - h_2)K_f \alpha \mathcal{X}_0(-h)\nabla' h\big) & \\
+\phi\Big(\mathcal{X}_0(-h)\frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \nabla' \cdot \big(\mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\big) + \big(1 - \mathcal{X}_0(-h_1)\big) q_{L_f}(x)\Big) &= \tilde{Q}_f + \tilde{Q}_s,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\phi \mathcal{X}_0(-h)\partial_t h - \nabla' \cdot \Big(\big(\alpha \tilde{K}_f(h^- - h_2) + \delta_h \phi\big)\mathcal{X}_0(-h)\nabla' h\Big) - \nabla' \cdot \Big((h^- - h_2)\tilde{K}_f \mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\Big) & \\
+\phi\Big(1 - \mathcal{X}_0(-h)\Big) q_{L_s}(x) &= \tilde{Q}_s \\
\big(S_f(h_1^- - h^-) + \phi\big)\mathcal{X}_0(-h_1)\partial_t h_1 - \nabla' \cdot \Big(\tilde{K}_f\big((h_1^- - h^-) + (h^- - h_2) + \delta_1 \phi\big)\mathcal{X}_0(-h_1)\nabla' h_1\Big) & \\
-\nabla' \cdot \Big((h^- - h_2)\tilde{K}_f \alpha \mathcal{X}_0(-h)\nabla' h\Big) + \phi\big(1 - \mathcal{X}_0(-h_1)\big) q_{L_f}(x) &= \tilde{Q}_f + \tilde{Q}_s.
\end{aligned}$$

Nous supposons que les tailles des interfaces diffuses sont comparables. On prend donc $\delta := \delta_h = \delta_1$, (cette hypothèse permettra de montrer que $h_1 \geq h$ dans les chapitres suivants). De plus nous supposons que : $q_L := q_{L_f} = q_{L_s}$.
Nous faisons un changement de variables pour retourner notre axe vertical :

$$h_1 \longrightarrow -h_1, \quad h \longrightarrow -h, \quad h_2 \longrightarrow -h_2.$$

Notre système devient alors :

$$\begin{aligned} -\phi\mathcal{X}_0(h)\partial_t h + \nabla'\cdot\big(\big(\alpha\tilde{K}_f(h_2-h)+\delta\phi\big)\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big) + \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)(h_2-h)\nabla' h_1\big) & \\ +\phi\big(1-\mathcal{X}_0(h)\big)q_L(x) &= \tilde{Q}_s, \\ -\mathcal{X}_0(h_1)\big(S_f(h-h_1)+\phi\big)\partial_t h_1 + \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)\big((h-h_1)+(h_2-h)\big)\nabla' h_1\big) & \\ +\nabla'\cdot\big(\delta\phi K_f\mathcal{X}_0(h_1)\nabla' h_1\big) + \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\alpha(h_2-h)\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big) + \phi\big(1-\mathcal{X}_0(h_1)\big)q_L(x) &= \tilde{Q}_f+\tilde{Q}_s. \end{aligned}$$

Remarque 2.10

i) *Les termes $h^+ = \max(0,h)$, et $h_1^+ = \max(0,h_1)$ n'apparaissent plus car le principe du maximum montrera que ces supremums ne servent à rien. Ils sont remplacés par h et h_1.*

ii) *On remarque aussi que dans la dernière équation de notre système, si $h_1 = 0$ sur un sous domaine $\Omega_0 \subset \Omega$ de mesure non nulle, alors la deuxième équation du système précédent donne (en absence des termes sources surfaciques $\tilde{Q}_f$ et $\tilde{Q}_s$) :*

$$\begin{aligned} \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\alpha(h_2-h)\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big)_{|\Omega_0} = 0 \iff & -\int_{\Omega_0}\alpha\tilde{K}_f(h_2-h)\mathcal{X}_0(h)\nabla' h.\nabla'\varphi \\ & +\int_{\partial\Omega_0}\alpha\big[\varphi(\tilde{K}_f(h_2-h)\mathcal{X}_0(h)\big]\nabla' h.\vec{n} = 0, \quad \varphi\in V \\ \iff & \int_{\Omega_0}\nabla'\cdot\big(\alpha\mathcal{X}_0(h)\mathcal{X}_0(h_1)\tilde{K}_f(h_2-h)\nabla' h\big)\varphi = 0, \quad \varphi\in V \end{aligned}$$

où V est un espace de fonctions tests adapté.
Donc remplacer tous les termes en $\nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\alpha(h_2-h)\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big)$ par $\nabla'\cdot\big(\alpha\mathcal{X}_0(h)\mathcal{X}_0(h_1)\tilde{K}_f(h_2-h)\nabla' h\big)$ ne change rien au contenu physique du modèle. C'est ce que nous ferons dans la suite pour l'analyse mathématique du modèle.

c) Les termes sources :

Nous harmonisons les termes sources pour que les équations de h et h_1 ne fassent qu'une lorsque $h^+ = h_1^+$. Cela implique que $\tilde{Q}_f = 0$ si $h = h_1$ i.e qu'on arrête de pomper lorsqu'on atteint l'eau salée.
Nous adoptons donc un terme source de la forme :

$$\tilde{Q}_f = \mathcal{Q}_f(h-h_1), \quad \mathcal{Q}_f \in \mathbb{R}.$$

Cela correspond bien à la moyenne verticale du terme source volumique initial. De même, en supposant que h_2 est constante pour simplifier et en écrivant l'équation de h pour $h = h_2$, on voit qu'il faut $\tilde{Q}_s = 0$ si $h = h_2$. On choisit donc $\tilde{Q}_s$ de la forme :

$$\tilde{Q}_s = \mathcal{Q}_s(h_2-h), \quad \mathcal{Q}_s \in \mathbb{R}.$$

Si on suppose que la couche supérieure (h_1) est faiblement perméable, donc si on prend en considération le coefficient d'emmagasinement, notre modèle final s'écrit :

$$\begin{aligned}
\phi\mathcal{X}_0(h)\partial_t h - \nabla'\cdot\big(\alpha\tilde{K}_f(h_2-h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla' h\big) - \nabla'\cdot\big(\delta\phi\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big)\\
-\nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)(h_2-h)\nabla' h_1\big) - \phi\big(1-\mathcal{X}_0(h)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_s(h_2-h),\\
\mathcal{X}_0(h_1)\big(S_f(h-h_1)+\phi\big)\partial_t h_1 - \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)\big((h-h_1)+(h_2-h)\big)\nabla' h_1\big)\\
-\nabla'\cdot\big(\delta\phi\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)\nabla' h_1\big) - \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\alpha(h_2-h)\mathcal{X}_0(h_1)\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big)\\
-\phi\big(1-\mathcal{X}_0(h_1)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_f(h-h_1)-\mathcal{Q}_s(h_2-h).
\end{aligned}$$

Dans le cas où le coefficient d'emmagasinement dans le domaine d'eau douce est négligeable, *i.e* l'eau salée est confinée ($S_f = 0$), on a le système suivant :

$$\begin{aligned}
\phi\mathcal{X}_0(h)\partial_t h - \nabla'\cdot\big(\alpha\tilde{K}_f(h_2-h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla' h\big) - \nabla'\cdot\big(\delta\phi\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big)\\
-\nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)(h_2-h)\nabla' h_1\big) - \phi\big(1-\mathcal{X}_0(h)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_s(h_2-h),\\
\mathcal{X}_0(h_1)\phi\partial_t h_1 - \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)\big((h-h_1)+(h_2-h)\big)\nabla' h_1\big)\\
-\nabla'\cdot\big(\delta\phi\tilde{K}_f\mathcal{X}_0(h_1)\nabla' h_1\big) - \nabla'\cdot\big(\tilde{K}_f\alpha(h_2-h)\mathcal{X}_0(h_1)\mathcal{X}_0(h)\nabla' h\big)\\
-\phi\big(1-\mathcal{X}_0(h_1)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_f(h-h_1)-\mathcal{Q}_s(h_2-h).
\end{aligned}$$

Dans les deux systèmes précédents, la première équation modélise la conservation de masse totale d'eau, tandis que la seconde modélise la conservation de la masse d'eau douce ou claire. Il s'agit d'un modèle 2D, le processus d'upscaling ayant préservé la troisième dimension via les termes de surfaces libres h et h_1.

2.4 Résultats principaux des chapitres suivants

Avec l'intégration verticale des équations, nous avons réduit la dimension trois de notre problème initial à un problème en deux dimensions. Nous considérons donc dans la suite, un domaine Ω ouvert et borné de $\mathbb{R}^2$ décrivant la projection du milieux poreux sur le plan horizontal avec un bord Γ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$. L'intervalle de temps qui nous intéresse est $(0,T)$ [2] et on pose $\Omega_T = (0,T)\times\Omega$.

2.4.1 Résultats théoriques principaux

Par soucis de simplification de notre modèle nous posons : $\tilde{K}_f = K$, $\alpha = 1$ et $\nabla' = \nabla$. Nous introduisons les fonctions :

$$T_s(h) = h_2 - h, \quad \text{pour} \quad h \in [0, h_2],$$

et

$$T_f(u) = u, \quad \text{pour} \quad u \in [0, h_2].$$

Le problème sans coefficient d'emmagasinement ($S_f = 0$) devient :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases}
\phi\mathcal{X}_0(h)\partial_t h - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(\delta\phi\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big)\\
\quad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) - \phi\big(1-\mathcal{X}_0(h)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_s T_s(h),\\
\phi\mathcal{X}_0(h_1)\partial_t h_1 - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h-h_1)+T_s(h)\big)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big)\\
-\nabla\cdot\big(\delta\phi K\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big)\\
\quad -\phi\big(1-\mathcal{X}_0(h_1)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1)-\mathcal{Q}_s T_s(h).
\end{cases}$$

2. On utilise dans le présent mémoire la notation anglo-saxonne $(0,T) = [0,T]$.

Le problème avec coefficient d'emmagasinement dans le domaine de l'eau douce non négligé ($S_f \neq 0$) s'écrit :

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases} \phi\mathcal{X}_0(h)\partial_t h - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(\delta\phi\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big) & \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) - \phi\big(1-\mathcal{X}_0(h)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_s T_s(h), \\ \big(S_f(h-h_1)+\phi\big)\mathcal{X}_0(h_1)\partial_t h_1 - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h-h_1)+T_s(h)\big)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) & \\ \qquad -\nabla\cdot\big(\delta\phi K\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big) & \\ \qquad -\phi\big(1-\mathcal{X}_0(h_1)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1) - \mathcal{Q}_s T_s(h). \end{cases}$$

Les problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont complétés par les conditions aux bords et les conditions initiales suivantes :

$$h = h_D, \quad \text{et} \quad h_1 = h_{1,D} \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \tag{2.45}$$

$$h(0,x) = h_0(x), \quad \text{et} \quad h_1(0,x) = h_{1,0}(x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{2.46}$$

Nous supposons que les conditions aux bords et initiales satisfont des conditions physiquement réalistes sur la hiérarchie des interfaces :

$$h_{1,D} \leq h_D \leq h_2 \quad et \quad h_{1,0} \leq h_0 \leq h_2 \quad p.p \quad dans \quad \Omega \quad et \quad h_2 \in L^\infty(\Omega).$$

Deux résultats d'existence sont démontrés dans les deux chapitres suivants : le premier pour le problème sans coefficient d'emmagasinement, *i.e* le système $(\mathcal{P}_1)$ et le second est le problème avec le coefficient d'emmagasinement i.e le système $(\mathcal{P}_2)$. Il s'agira de l'existence d'une solution au sens faible pour $(\mathcal{P}_1)$, et d'une solution en un sens très faible pour $(\mathcal{P}_2)$

Remarque 2.11 *Un terme C_w défini par :*

$$C_w = \begin{cases} -\theta(s) & si \quad s \geq 0 \quad milieu\ non\text{-}saturé \\ C_s \in \mathbb{R}_+ & si \quad s = 0 \quad milieu\ saturé \end{cases},$$

est introduit dans la suite à côté du coefficient d'emmagasinement S_f du problème $(\mathcal{P}_2)$, soit $S_f C_w$, avec θ la teneur en eau dans le domaine, pour prendre en compte l'influence du degré de saturation sur la compressibilité du milieu poreux.

2.4.2 Résultats numériques principaux

Dans le chapitre 4 sont présentées des simulations numériques. D'abord pour comparer notre modèle 2D intégré par l'approche mixte d'interface abrupte/interface diffuse avec le modèle 3D type d'écoulement de deux fluides miscibles en milieu saturé (pour éviter le difficile traitement numérique d'un modèle 3D d'équations dégénérées). Puis, des simulations sont faites sur notre modèle 2D pour illustrer son efficacité (cette fois dans le cas insaturé).

2.5 Tableau de comparaison avec les modèles existants

ARTICLES	RÉSUMÉ ET MODÈLE MATHÉMATIQUE	COMPARAISON AVEC NOTRE MODÈLE
E. Abarca et al 2007 (Quasi-horizontal circulation cell in 3D seawater intrusion) Réf [2]	Les auteurs voient le problème d'intrusion saline dans un aquifère comme un problème 3D d' écoulement et de transport (l'approche "Pas d'interface"). Les équations suivantes : Equation de continuité, équation de Darcy et équation de transport modélisent le phénomène $\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}+\nabla.(\rho q)=\rho_s Q_s, \quad q=-\frac{\kappa}{\mu}.\Big(\nabla h_f+\frac{(\rho-\rho_f)}{\rho_f}\nabla z\Big)$ $\frac{\partial(\phi\rho w)}{\partial t}+\nabla.\Big(\rho w q-\rho D.\nabla w\Big)=w_s\rho_s Q_s$ $o\grave{u} \qquad h_f=\frac{p}{\rho_f g}+z.$ En tenant compte du fait que la densité dépend de la fraction de masse par la relation linéaire $\rho(w)=\rho_f+\beta_w(w-w_f),$ finalement, ils obtiennent : $\rho S_s\frac{\partial h_f}{\partial t}+\rho\phi\beta_w\frac{\partial w}{\partial t}-\nabla.\Big(\rho K(\nabla.h_f+\alpha\nabla z\Big)=\rho Q$ où β_w est la constante de la relation entre la densité de la variation et la fraction de masse. – Le terme en bleu représente le transport du soluté dans l'aquifère. – Le terme en rouge est absent dans notre modèle car caché par la moyennisation.	– **Différences** : • L'approche " Pas d'interface+ transport de soluté" est différente de notre approche mixte (Diffuse et Abrupte). – **Points communs** : Cet article vient renforcer l'hypothèse que : • La différence de densité est une caractéristique importante dans l'étude du problème d'intrusion d'eau salée dans un aquifère. • L'écoulement est quasi-horizontal dans l'aquifère (hypothèse de Dupuit).
P.Ackerer et al 2007 (Efficient approximations for the simulation of density driven flow in porous media) Réf [3]	Dans cet article Ackerer et al mettent en évidence de nouvelles approximations 3D du modèle mathématique standard connu constitué de l' équation de continuité, l'équation de Darcy et l'équation de transport : $\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}+\nabla.(\rho q)=\rho_s Q_s, \quad q=-\frac{\kappa}{\mu}.(\nabla p+\rho g\nabla z)$ $\frac{\partial(\phi\rho w)}{\partial t}+\nabla.(\rho w q-\rho D.\nabla w)=w_s\rho_s Q_s$ où w est la fraction de masse du soluté dans le fluide. – L'hypothèse de Oberbeck Boussinesq : Consiste à négliger les variations de densité (à éviter car introduit des erreurs) – L'hypothèse de Ackerer et al (Bear) néglige les variations de densité dans le sens de l'écoulement. Avec la seconde approximation plus l'hypothèse que les effets de la température sont négligés, la porosité dépendante de la pression et une matrice de conductivité rigide, le système devient :	– **Différences** : • L'approche " Pas d'interface+ transport de soluté" est différente de notre approche mixte (Diffuse et Abrupte). • Les termes de transports de soluté en bleu sont absents dans notre modèle car tout est dans le mouvement de l'interface.

ARTICLES	RÉSUMÉ ET MODÈLE MATHÉMATIQUE	COMPARAISON AVEC NOTRE MODÈLE
	$$\rho S_p \frac{\partial p}{\partial t} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \rho \nabla . q = \rho_s Q_s$$ $$q = -\frac{\kappa}{\mu}.(\nabla p + \rho g \nabla z)$$ en fonction de la pression ou bien $$\rho S \frac{\partial h}{\partial t} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \rho \nabla . q = \rho_s Q_s$$ $$q = -K.(\nabla h + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\nabla z)$$ en fonction de la charge hydraulique. où $S = \rho_0 g S_p$.	– **Points communs** : • L'hypothèse : Négliger les variations de densité sans la direction de l'écoulement. • L'hypothèse de compressibilité du fluide et celle du sol avec la théorie de Terzaghi. • Les coefficients d'emmagasinement : $S = \rho_0 g S_p$.
C.Choquet 2010 (Parabolic and degenerate parabolic models for pressure-driven transport problems) Réf [24]	Deux modèles 3D sont étudiés : – Écoulement de deux fluides miscibles dans un milieux poreux déformable (zone saturée). – Écoulement de deux fluides miscibles dans un milieux poreux partiellement saturé. • modèle 1 Systèmes EDPs de type parabolique : $\partial_t \theta(p) + \theta(p)a(c)\partial_t p + div(\underline{u}) = q_i - q_s,\ \underline{u} = -\kappa(\theta(p))\nabla p,$ $\theta(p)\partial_t c + \theta(p)b(c)\partial_t p + \underline{u}.\nabla c - div(\theta(p)D(\underline{u})\nabla c) = q_i(1-c).$ • modèle 2 EDPs de type parabolique-hyperbolique : $\partial_t \theta(p) + \theta(p)a(c)\partial_t p + div(\underline{u}) = q_i - q_s,\ \underline{u} = -\kappa(\theta(p))\nabla p,$ $\theta(p)\partial_t c + \theta(p)b(c)\partial_t p + \underline{u}.\nabla c = q_i(1-c),$ avec cette fois θ et κ qui dégénérèrent.	– **Différences** : L'approche " Pas d'interface" différente de notre approche mixte (Diffuse et Abrupte). – **Points communs** : L'hypothèse de compressibilité du fluide et celle du sol avec la théorie de Terzaghi.
H.-J.G. Diersch et O. Koldizt 2002 (Variable-density flow and transport in porous media : approches and challenges) Réf [30]	Dans cet article, H.-J.G. Diersch et al présentent les exemples et challenges de la recherche dans le modèle d'écoulement à densité variable avec une analyse mathématique basée sur la pression capillaire. L'équation de conservation de masse multiphasique avec un mélange de plusieurs espèces : $$\frac{\varepsilon^\alpha \rho^\alpha w_k^\alpha}{\partial t} + \nabla.(\varepsilon^\alpha \rho^\alpha v^\alpha w_k^\alpha) + \nabla . J_k^\alpha = R_k^\alpha + Q_k^\alpha$$ $J_k^\alpha = -\rho^\alpha D^\alpha . \nabla w_k^\alpha$ terme de difusion et dispersion où α peut être (liquide, gaz, solide). On définit par s^l, la saturation en liquide et s^g celle du gaz et vérifie $$s^l + s^g = 1,\ 0 \leq s^l \leq 1,\ 0 \leq s^g \leq 1$$ La relation entre la pression du liquide p^l et la pression du gaz p^g est donnée par $$p_c(s^l) = p^g - p^l.$$	– **Différences** : • L'approche " Pas d'interface+ transport de soluté" différente de notre approche mixte (Diffuse et Abrupte). • Absence de l'équation de Darcy dans leur modèle, alors qu'elle est fondamentale pour notre. • La présence d'une pression capillaire (faux pour un modèle eau douce/ eau salée qui est miscible).

ARTICLES	RÉSUMÉ ET MODÈLE MATHÉMATIQUE	COMPARAISON AVEC NOTRE MODÈLE
H. I. Essaid 1990 (A multilayered sharp interface model of coupled freshwater and saltwater flow in coastal systems) Réf [34]	Modélisation quasi 3D du modèle d'interface abrupte entre eau salée et eau douce. Equation de continuité couplée à l'équation de Darcy dans le domaine de l'eau douce : $$S_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} + \nabla.(q_f) = Q_f$$ Equation de continuité couplée à l'équation de Darcy dans le domaine de l'eau salée : $$S_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \nabla.(q_s) = Q_s$$ – L'approche interface abrupte : Permet d'intégrer verticalement les deux équations et de passer du 3D au 2D. En introduisant les conditions aux bords et en tenant en compte des recharges et des prélèvements en eaux alors les équations intégrées deviennent : Dans le domaine douce $$S_f B_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} + \phi\alpha \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} + \left(\phi\delta \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} - \phi(1+\delta)\frac{\partial \Phi_s}{\partial t}\right) - \nabla.(B_f K \Phi_f) = Q_f + Q_{lf}$$ Dans le domaine salé $$S_s B_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \left(\phi(1+\delta) \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - \phi\delta\frac{\partial \Phi_f}{\partial t}\right) - \nabla.(B_s K \Phi_s) = Q_s + Q_{ls}$$	– **Différences** : • Notre modèle a des termes en plus au niveau des termes en bleu et rouge et cela vient de l'approche diffuse avec la largeur des zones de transitions. • Le choix des inconnues dans notre modèle donne directement l'évolution des interfaces. – **Points communs** : • L'approche " Interface Abrupte " qui est une approche intégrée dans notre modèle . • Nous avons les mêmes équations avant intégration verticale. • Les coefficients d'emmagasinement : S_f *et* S_s.
M.Jazar et R. Monneau 2012 (Formal derivation of seawater intrusion models) Réf [44]	R. Monneau et M. Jazar étudient l'évolution des interfaces dans un modèle d'intrusion Saline 2D dérivé du modèle 3D. Le système qu'ils obtiennent est le suivant : $$\tilde{\phi}_\alpha(x,z)\frac{\partial \tilde{\rho}_\alpha}{\partial t} + \tilde{div}(\tilde{\rho}_\alpha \tilde{v}_\alpha) = 0,\ \tilde{v}_\alpha = -\tilde{\kappa}(x,z)\tilde{\nabla}(\tilde{p} + \rho_\alpha z)$$ où α peut être l'eau douce ou salée. Ils introduisent les moyennes verticales : $$\mathcal{K}_\alpha(x,z) = \gamma_s \int_0^z d\bar{z}\kappa^{xx}(x,\bar{z}),\ \Phi_\alpha(x,z) = \int_0^z d\bar{z}\phi_\alpha(x,\bar{z})$$ alors le système devient : $$(\Phi_f(.,h) - \Phi_f(.,g))_t = div_x(\mathcal{K}(x,z)|_g^h \nabla_x(p + (1-\varepsilon_0)h))$$ $$\Phi_f(.,g)_t = div_x(\mathcal{K}(x,z)|_b^g \nabla_x(p + (1-\varepsilon_0)h) + \varepsilon_0 g)$$	– **Différences** : • L'hypothèse de compressibilité du fluide et celle du sol selon la théorie de Terzaghi. – **Points communs** : • L'approche Interface Abrupte. • L'hypothèse de la continuité de la pression à travers les interfaces.

ARTICLES	RÉSUMÉ ET MODÈLE MATHÉMATIQUE	COMPARAISON AVEC NOTRE MODÈLE
O.Kolditz et al 1996 (Coupled groundwater flow and transport : Verification of variable density flow and transport models) Réf [47]	C'est un modèle 3D d'écoulement et de transport de soluté. Équation de continuité : $$\phi\frac{d\rho}{dt}+\nabla.(\phi\rho v)+\frac{\rho}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}=\rho Q_\rho$$ Équations d'états (fraction de masse/ concentration) : $$\rho=\rho^w(1+\beta_p(p-p_0)+\beta_w w,$$ $$\rho=\rho^w(1+\beta_h(h-h_0)+\beta_C C.$$ La variation de la porosité résulte de la compressibilité du milieu due à la variation de la pression d'où : $$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial p}dp=(1-\phi)(\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial p})dp=(1-\phi)\alpha_p dp$$ $$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial h}dh=(1-\phi)(\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial h})dh=(1-\phi)\alpha_h dh$$ L' équation de conservation de la masse en fonction de la pression et de la fraction de masse : $$\rho S_0^p\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla.(\rho\phi v)=\rho Q_\rho-\rho\phi\beta_w\frac{\partial w}{\partial t},\ S_0^p=\phi\beta_p+\alpha_p$$ en fonction de la charge hydraulique et de la concentration : $$S_0^h\frac{\partial h}{\partial t}+\nabla.(\phi v)=Q_\rho-\phi\beta_w\frac{\partial w}{\partial t}-\phi v.(\beta_C\nabla C),$$ avec $S_0^h=\phi\beta_h+\alpha_h$	– **Différences** : L'approche " Pas d'interface+ transport de soluté" différente de notre approche mixte (Diffuse et Abrupte). Les termes de transports de soluté en bleu sont absents dans notre modèle car tout est dans le mouvement de l'interface. Les coefficients d'emmagasinement sont différents : $$S_0^h=\phi\beta_h+\alpha_h$$ $$\neq S_0^h=\rho_0 g(\phi\alpha_p+(1-\phi)\beta_h)$$ à cause des modèles linéaires de compressibilité. – **Points communs** : L'hypothèse de compressibilité du fluide et celle du sol avec la théorie de Terzaghi.
V. Post et al 2007 (Using hydraulic head measurements in variable-density ground water flow analyses) Réf [64]	Les auteurs, nous montre dans ce papier comment exploiter des mesures de la charge hydraulique. Cela part de l'équation de Darcy : $$\vec{q}=-K\nabla h,\qquad \vec{q}=-\frac{k}{\mu}(\nabla p-\rho\vec{g})$$ Afin de mesurer h, les relations suivantes proviennent des observations faites lors des expérimentations : $$h_i=z_i+h_{p,i},\ h_{p,i}=\frac{p_i}{\rho_i g}.$$ On voit que dans la définition de $h_{p,i}$, p_i et ρ_i varient. Pour lever cette ambiguité, ils se disent : comme n'importe quelle valeur de ρ pouvait être choisie, alors le choix est porté sur la densité de l'eau douce : $$h_{f,i}=z_i+\frac{p_i}{\rho_f g}$$ et au final : $h_{f,i}=\frac{\rho_i}{\rho_f}h_i-\frac{\rho_i-\rho_f}{\rho_f}z_i.$	– **Différences** : • Ils montrent la faiblesse de l'hypothèse de Dupuit, la charge hydraulique varie dans leurs conditions. – **Points communs** : • Nous avons utilisé cette définition dans notre modèle .

ARTICLES	RÉSUMÉ ET MODÈLE MATHÉMATIQUE	COMPARAISON AVEC NOTRE MODÈLE
S. Sorek et al 2001 (A two-dimensional areal model for density dependent flow regime) Réf [78]	Nous avons là un modèle 3D d'intrusion saline moyenné pour avoir un modèle 2D avec L'approche interface abrupte. Equation de continuité couplée à l'équation de Darcy dans le domaine d'eau douce : $$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla.(\phi\rho v) = \rho_r Q_r - \rho Q_p$$ $$\phi v = -\frac{\kappa}{\mu}\Big(\nabla p - \rho g\Big) = -K\Big(\nabla H + \frac{(\rho-\rho_0)}{\rho_0}\nabla z\Big)$$ $$\frac{\partial(\phi\rho c)}{\partial t} + \nabla.\Big(\rho\phi(cv - D_c.\nabla c\Big) = w_s\rho_s Q_s$$ – **Hypothèses contraires** : • La pression verticale est hydrostatique et donc la vitesse verticale est nulle. • De plus, on ils utilisent une approximation comme : $$\overline{\rho.g} = \bar{\rho}.\bar{g}.$$	– **Différences** : • Ils intègrent l'équation de transport ce que nous ne faisons pas dans notre modèle. – **Points communs** : • L'approche " Interface Abrupte " qui est une approche intégrée dans notre modèle.
M. H. Tber et al 2006 (A finite element method for hydraulic conductivity identification in seawater intrusion problem) Réf [82]	Les auteurs considèrent des écoulements d'eaux salée et douce séparées par une interface dans un aquifère confiné et étudient l'identification de la conductivité hydraulique. L'équation de continuité couplée à celle de Darcy plus trois approximations suivantes : – L'hypothèse de Dupuit : les écoulements sont quasi-horizontaux et intégrés verticalement et réduction de 2D à 1D. – Négliger les coefficients d'emmagasinement du fait que l'aquifère en question est confiné. – Faible influence de la différence de la viscosité sur la forme de l'interface par rapport à celle de la densité qui a un effet. En prenant tout en compte, ils obtiennent le système suivant : $$-div(\kappa(x)B_f(x,\Phi_f,\Phi_s)\nabla\Phi_f) = Q_f$$ $$-div(\kappa(x)B_s(x,\Phi_f,\Phi_s)\nabla\Phi_s) = Q_s$$ où $$B_f(x,\Phi_f,\Phi_s) = \xi_2(x) - \xi_1(\Phi_f,\Phi_s)$$ $$B_s(x,\Phi_f,\Phi_s) = \xi_1(\Phi_f,\Phi_s) - \xi_0(x)$$ représentent respectivement l'épaisseur de la zone douce et celle de la zone salée. ξ_2 la hauteur de la surface supérieure de l'aquifère, ξ_0 celle inférieure et ξ_1 celle de l'interface et qui est donnée par la relation $\xi_1(\Phi_f,\Phi_s) = (1-\delta)\Phi_s - \Phi_f$, où $\delta = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha = \frac{(\rho_s-\rho_f)}{\rho_f}$.	– **Différences** : • Notre modèle a des termes en plus, cela vient de l'approche diffuse avec la largeur des zones de transitions et ce même si on suppose que l'on a un aquifère confiné. • Absence des coefficients d'emmagasinement : S_f et S_s car l'aquifère est confiné. • Leur modèle est elliptique. – **Points communs** : • L'approche " Interface Abrupte " qui est une approche intégrée dans notre modèle . • La relation en rouge entre la charge hydraulique de l'eau salée et celle douce avec la hauteur de l'interface.

Chapitre 3

Existence d'une solution au modèle sans coefficient d'emmagasinement.

Sommaire

3.1 Introduction 35
3.2 Résultats 37
3.2.1 Résultats préliminaires 37
3.2.2 Énoncé du Théorème 1 38
3.3 Démonstration 38
3.3.1 Etape 1 : Existence pour le système pénalisé avec Heaviside régularisée $\mathcal{X}_0^\epsilon$ 39
3.3.2 Etape 2 : Elimination de la fonction auxiliaire L_M 51
3.3.3 Etape 3 : Principes du maximum pour la solution de $(\mathcal{P}_1)^\epsilon$ 59
3.3.4 Etape 4 : Existence pour le système sans régularisation de la fonction Heaviside . . 63

3.1 Introduction

Comme précisé dans le chapitre précédent, le modèle mathématique qui décrit la salinisation des aquifères est fortement non-linéaire. Donc certains résultats d'existence et de régularité connus dans le cas des EDPs linéaires ne s'appliquent plus, comme par exemple le théorème de Lax-Milgram. Dans le cas non-linéaire, nous citerons [36], [52], [69] *etc.*., une vaste littérature sur les différentes techniques et méthodes de résolution des EDPs non-linéaires notamment :

- la méthode vrariationelle : avec l'étude d'un problème de minimisation de la fonctionnelle d'énergie,
- les méthodes d'approximation : avec les méthodes de monotonie, de Galerkin et celle de Faedo-Galerkin,
- les méthodes de point fixe : avec les théorèmes de Brouwer pour les applications contractantes, celui de Schauder et de Schaeffer pour l'extension ou la généralisation de Brouwer aux applications compactes. C'est cette dernière méthode que nous allons utiliser par la suite.

Dans ce chapitre, nous rappellerons dans un premier temps notre modèle d'intrusion d'eau de mer dans un aquifère libre sans coefficient d'emmagasinement, obtenu au chapitre précédent. Ce modèle $(\mathcal{P}_1)$ modélise à la fois l'évolution du front de l'eau salée et de la surface libre supérieure de l'aquifère dans un milieu incompressible. C'est un système d'équations aux dérivées partielles fortement couplé de type parabolique non-linéaire en espace. Grâce à notre approche mixte utilisée dans la modélisation, ce système est non dégénéré contrairement à celui introduit dans [59]. Ensuite, nous préciserons le cadre mathématique et les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler. Enfin, nous utiliserons la méthode de point fixe afin d'établir l'existence d'une solution faible globale en temps pour un système modifié issu du système $(\mathcal{P}_1)$. La preuve comporte plusieurs étapes :

– *dans la première étape, nous démontrons un résultat d'existence pour un système similaire, mais régularisé par une fonction Heaviside, et pondéré par la vitesse du flux d'eau douce ;*

– *dans la seconde étape, nous montrons que la fonction auxiliaire introduite dans le système peut être supprimée,*

– *dans la troisième étape, nous montrons le principe du maximum pour la solution du système régularisé et pondéré,*

– *enfin, nous terminerons par des passages à la limite pour montrer l'existence de solution faible à notre problème initial.*

• **Le modèle mathématique** $(\mathcal{P}_1)$:

Nous considérons donc dans la suite, un domaine Ω ouvert et borné de $\mathbb{R}^2$ décrivant la projection du milieux poreux sur le plan horizontal avec un bord Γ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$. L'intervalle de temps qui nous intéresse est $(0,T)$ et on pose $\Omega_T = (0,T)\times\Omega$. Nous rappelons que notre problème $(\mathcal{P}_1)$ issu de la modélisation auquel on ajoute des conditions aux bords et les conditions initiales, permet de contrôler simultanément l'évolution du front de l'eau salée (h) et de la surface libre supérieure (h_1) de l'aquifère. Il s'écrit :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} \phi\mathcal{X}_0(h)\partial_t h - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(\delta\phi\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big) & \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) - \phi q_{Ls}(x,h_1,h) &= -Q_sT_s(h), \\ \phi\mathcal{X}_0(h_1)\partial_t h_1 - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h-h_1)+T_s(h)\big)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) & \\ -\nabla\cdot\big(\delta\phi K\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big) & \\ \qquad -\phi q_{Lf}(x,h_1,h) - \phi q_{Ls}(x,h_1,h) &= -Q_fT_f(h-h_1) - Q_sT_s(h), \end{cases}$$

avec les conditions aux bords et conditions initiales suivantes :

$$h = h_D \quad \text{et} \quad h_1 = h_{1,D} \qquad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega, \tag{3.1}$$

$$h(0,x) = h_0(x), \quad \text{et} \quad h_1(0,x) = h_{1,0}(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{3.2}$$

et où q_{Lf} et q_{Ls} sont les termes de fuites définis par :

$$q_{Lf}(x,h_1,h) = \big(1-\chi_0(h_1)\big)\chi_0(h-h_1)Q_{Lf}(x), \tag{3.3}$$

$$q_{Ls}(x,h_1,h) = \chi_0(h_2-h)Q_{Lf}(x)\big(R_{Ls}(x)+\frac{h_1}{2}+\frac{h}{2}\big), \tag{3.4}$$

$$T_s(h) = h_2 - h, \quad \text{pour} \quad h\in[0,h_2] \qquad \text{et} \qquad T_f(u) = u, \quad \text{pour} \quad u\in[0,h_2].$$

En effet q_{Lf} représente seulement les échanges d'eau douce au niveau de la surface supérieure, ce qui explique la présence de $\chi_0(h-h_1)$ et celle de $\big(1-\chi_0(h_1)\big)$ pour prendre en compte les zones semi-perméables à $h_{max}=0$. Nous considérons ici un aquifère phréatique *i.e* il n'y a pas de termes de fuites au niveau de la couche supérieure jusqu'à ce que l'aquifère devienne saturé. Dans q_{Ls}, nous avons la présence de $\chi_0(h_2-h)$ pour les échanges d'eau salée au niveau de la couche inférieure.

• **Les hypothèses** :

Nous détaillons les différentes hypothèses qui serons utilisées dans ce chapitre. Nous allons commencer avec les caractéristiques du milieu poreux.

– Nous supposons qu'il existe deux réels positifs K_- et K_+ tels que le tenseur de conductivité hydraulique vérifie la condition d'ellipticité, soit borné et uniformément défini positif :

$$0 < K_-|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1,2} K_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le K_+|\xi|^2 < \infty \quad x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^2 \text{ et } \xi\neq 0. \tag{3.5}$$

– Nous supposons que la porosité est constante dans l'aquifère. En effet dans l'étude envisagée, les effets dus à la variation de la porosité ϕ sont négligeables comparés à ceux dus à la variation ou aux contrastes de densité.

– Nous supposons que les termes sources Q_f, Q_s sont des fonctions de $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ et les termes de fuite ou de perte q_{Lf} et q_{Ls} sont définis respectivement par (3.3) et (3.4), avec Q_{Lf}, Q_{Ls} et $Q_{Ls}R_{Ls}$ des fonctions de $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ telles que :

$$Q_{Lf} \geq 0, \quad Q_{Ls} \geq 0, \quad Q_{Ls}R_{Ls} \geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega \times (0,T). \tag{3.6}$$

L'hypothèse $Q_{Lf} \geq 0$ p.p. dans Ω_T signifie par exemple qu'il y a pompage ou fuite d'eau douce.

– Nous supposons aussi que

$$-(\max(Q_f,0)+\max(Q_s,0))h_2 + Q_{Lf} + Q_{Ls}R_{Ls} \geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega \times (0,T). \tag{3.7}$$

Cette hypothèse, qui pourrait sembler plutôt technique est effectivement introduite parce que la profondeur de l'aquifère ne peut dépasser h_2. Tous les termes sources doivent donc se compenser en quelque sorte. (3.7) est le garant du principe de bon sens qui est : "une boîte remplie ne peut pas être plus remplie".

– Nous supposons que les fonctions h_D, $h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ et que leurs dérivées en temps $\partial_t h_D$, $\partial_t h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0,T,H^1(\Omega)')$ où $H^1(\Omega)'$ est le dual de $H^1(\Omega)$. Les fonctions h_0, $h_{1,0} \in H^1(\Omega)$ satisfont les conditions de compatibilité :

$$h_{0|\Gamma} = h_D(0,x), \quad h_{1,0|\Gamma} = h_{1,D}(0,x) \text{ sur } \Gamma. \tag{3.8}$$

– Nous supposons que les conditions aux bords et initiales satisfont des conditions physiquement réalistes sur la hiérarchie des interfaces :

$$0 \leq h_{1,D} \leq h_D \leq h_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq h_{1,0} \leq h_0 \leq h_2 \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{et} \quad h_2 \in L^\infty(\Omega). \tag{3.9}$$

3.2 Résultats

Ici, nous posons le cadre mathématique et les espaces fonctionnels auxquels vont appartenir nos solutions, puis nous énonçons un résultat d'existence globale en temps d'une solution faible pour $(\mathcal{P}_1)$. Le point fort de ce résultat est que le principe du maximum physique est vérifié par cette solution faible.

3.2.1 Résultats préliminaires

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [1,+\infty]$, soit $W^{n,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev muni de la norme :

$$\|\phi\|_{W^{n,p}(\Omega)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour simplifier les notations, on pose : $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ et

$$V = H_0^1(\Omega), \quad V' = H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega), \quad H = L^2(\Omega).$$

Le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité entre V et V'. Les inclusions compactes et denses suivantes

$$V \subset H \equiv H' \subset V'$$

sont vérifiées voir [20]. Nous construisons l'espace $W(0,T)$ tel que : pour tout $T > 0$

$$W(0,T) := \left\{ w \in L^2(0,T,V), \quad \partial_t w \in L^2(0,T,V') \right\}$$

muni d'une norme hilbertienne

$$||w||_{W(0,T)} = \left(||w||^2_{L^2(0,T,V)} + ||\partial_t w||^2_{L^2(0,T,V')} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après J. L. Lions (voir [52] chapitre 1, proposition 2.1 et théorème 3.1), on a l'injection continue :

$$W(0,T) \subset C([0,T],[V,V']_{\frac{1}{2}}) \subset C([0,T],H)$$

et on déduit du lemme d'Aubin que l'injection suivante est compacte (voir [77]) :

$$W(0,T) \subset\subset L^2(0,T,H).$$

Nous rappelons le résultat de F. Mignot [38] qui nous servira dans la suite : soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante telle que :

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} \Big|\frac{f(\lambda)}{\lambda}\Big| < +\infty.$$

Soit $w \in L^2(0,T,H)$ telle que $\frac{dw}{dt} \in L^2(0,T,V')$ *et* $f(w) \in L^2(0,T,V)$, alors

$$\langle \frac{dw}{dt}, f(w)\rangle_{V',V} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\int_0^{w(.,y)} f(r)dr\right)dy \quad dans \quad \mathcal{D}'(0,T),$$

donc pour tout $0 \le t_1 \le t_2 \le T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \frac{dw}{dt}, f(w)\rangle_{V',V} dt = \int_\Omega \left(\int_{w(t_1,y)}^{w(t_2,y)} f(r)dr\right)dy.$$

3.2.2 Énoncé du Théorème 1

Théorème 1 :
Supposons vérifiées les hypothèses précédentes ainsi qu'une relativement faible hétérogénéité spatiale :

$$K_- \le K_+ \le 2K_-.$$

Alors pour tout $T > 0$, le problème $(\mathcal{P}_1)$, (3.1) et (3.2) admet une solution faible (h, h_1) satisfaisant :

(a) $\quad (h - h_D,\, h_1 - h_{1,D}) \in \Big(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')\Big)^2.$

Si de plus, nous supposons que h_2 est constante, on a

(b) $\quad 0 \le h_1(t,x) \le h(t,x) \le h_2$ pour presque tout x dans Ω et pour tout t dans $(0,T)$.

3.3 Démonstration

Avant de commencer la preuve de ce théorème, nous allons simplifier le système $\mathcal{P}_1$:
– en supprimant le terme $\mathcal{X}_0(h)$ devant $\partial_t h$ ou ∇h et le terme $\mathcal{X}_0(h_1)$ devant $\partial_t h_1$, du fait de la redondance de l'information sur l'inconnue (principe du maximum),
– en gardant par contre le terme $\mathcal{X}_0(h_1)$ devant ∇h,
– en supposant que les termes de fuite ou perte sont nuls, $q_L = 0$.
Cette simplification ne change en rien notre modèle du point de vue mathématique. Puis nous introduisons aussi deux fonctions incontournables pour la preuve qui sont :

- **La fonction auxiliaire** :

Cette fonction tantôt appelée auxiliaire, tantôt fonction de troncature ou fonction de pénalisation, est introduite dans le but de pénaliser la vitesse du front de l'eau douce. Soit M une constante que nous préciserons plus tard, on pose :

$$L_M(x) = \min\Big(1, \frac{M}{x}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le M \\ \frac{M}{x} & \text{si} \quad x > M \end{cases}.$$

- **La fonction de Heaviside régularisée** :

On rappelle que la fonction de Heaviside a été introduite dans la modélisation afin de s'assurer que les interfaces ne sortent pas du sous sol, notre domaine d'étude. On introduit la régularisation suivante :

$$\mathcal{X}_0(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_1 \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad h_1 > 0 \end{cases}, \qquad \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_1 \leq 0 \\ \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+\epsilon}} & \text{si} \quad h_1 > 0 \end{cases},$$

pour $\epsilon > 0$. On remarque que :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) = \frac{h_1^\epsilon}{\sqrt{(h_1^\epsilon)^2+\epsilon}} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{X}_0(h_1) & \text{presque partout si } h_1^\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} h_1 \quad \text{p.p.} \\ 1 \geq \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \geq 0. \end{cases}$$

3.3.1 Etape 1 : Existence pour le système pénalisé avec Heaviside régularisée $\mathcal{X}_0^\epsilon$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. On introduit la régularisation $\mathcal{X}_0^\epsilon$ au lieu de $\mathcal{X}_0$ dans le système et la fonction auxiliaire $L_M\big(||\nabla h_1^\epsilon||_{L^2(0,T;H)}\big)$ devant le terme en ∇h_1^ϵ (vitesse de l'interface entre l'eau douce et la partie insaturée) de la première équation dans le système qui est l'équation de conservation de la masse de l'eau salée. On obtient le nouveau système $(\mathcal{P}_1)^\epsilon$ suivant, dit régularisé et tronqué :

$$(\mathcal{P}_1)^\epsilon \begin{cases} \phi\partial_t h^\epsilon - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h^\epsilon\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)L_M\big(||\nabla h_1^\epsilon||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1^\epsilon\big) = -Q_sT_s(h^\epsilon), \\ \phi\partial_t h_1^\epsilon - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1^\epsilon\big) - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) + T_s(h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\big)\nabla h_1^\epsilon\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\big) = -Q_fT_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) - Q_sT_s(h^\epsilon), \end{cases}$$

avec les conditions aux bords et conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} h^\epsilon = h_D, & h_1^\epsilon = h_{1,D} & \text{sur} \quad \Gamma, \\ h^\epsilon(0,x) = h_0, & h_1^\epsilon(0,x) = h_{1,0}(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, nous allons maintenant omettre la dépendance en ϵ de la solution $(h^\epsilon, h_1^\epsilon)$ et chercher une solution (h, h_1) du système $(\mathcal{P}_1)_a$ suivant :

$$(\mathcal{P}_1)_a : \begin{cases} \phi\partial_t h - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1\big) = -Q_sT_s(h), \\ \phi\partial_t h_1 - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1\big) - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h - h_1) + T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\big)\nabla h_1\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big) = -Q_fT_f(h - h_1) - Q_sT_s(h), \end{cases}$$

avec les conditions aux bords et conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} h = h_D, & h_1 = h_{1,D} & \text{sur} \quad \Gamma, \\ h(0,x) = h_0, & h_1(0,x) = h_{1,0}(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée à $(\mathcal{P}_1)_a$ est de trouver une solution $(h, h_1) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times$

$L^2(0,T;H^1(\Omega))$ telle que $h = h_D$, $h_1 = h_{1,D}$ sur Γ et $h(0,\cdot) = h_0$, $h_1(0,\cdot) = h_{1,0}$ et

$$\int_0^T \phi\langle \partial_t h, w\rangle_{V',V}\, dt + \int_0^T \int_\Omega \delta\phi \nabla h \cdot \nabla w\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h \cdot \nabla w\, dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1 \cdot \nabla w\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h) w\, dxdt = 0, \quad (3.10)$$
$$\int_0^T \phi\langle \partial_t h_1, w\rangle_{V',V}\, dt + \int_0^T \int_\Omega \delta\phi \nabla h_1 \cdot \nabla w\, dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega K\big(\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)T_s(h) + T_f(h-h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla w\, dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h \cdot \nabla w\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \big(Q_f T_f(h-h_1) + Q_s T_s(h)\big) w\, dxdt = 0, \quad (3.11)$$

pour tout $w \in V = H_0^1(\Omega)$.

Puisque, nous voulons utiliser le théorème de point fixe de Schauder pour montrer que pour tout $T > 0$, notre problème (3.10)-(3.11) admet une solution (h, h_1) dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et qui vérifiera les conditions initiales et aux bords, nous construisons l'application $\mathcal{F}$ suivante définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^1(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^1(\Omega)) \\ (\bar{h},\bar{h}_1) &\longmapsto \mathcal{F}(\bar{h},\bar{h}_1) = \Big(\mathcal{F}_1(\bar{h},\bar{h}_1) = h, \mathcal{F}_2(\bar{h},\bar{h}_1) = h_1\Big), \end{aligned}$$

où (h, h_1) est la solution du problème variationnel suivant :

$$\int_0^T \phi\langle \partial_t h, w\rangle_{V',V}\, dt + \int_0^T \int_\Omega \delta\phi \nabla h \cdot \nabla w\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega KT_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)\nabla h \cdot \nabla w\, dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega KT_s(\bar{h})L_M\big(||\nabla \bar{h}_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)\nabla \bar{h}_1 \cdot \nabla w\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(\bar{h}) w\, dxdt = 0, \quad (3.12)$$
$$\int_0^T \phi\langle \partial_t h_1, w\rangle_{V',V}\, dt + \int_0^T \int_\Omega \delta\phi \nabla h_1 \cdot \nabla w\, dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1) + T_f(\bar{h}-\bar{h}_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla w\, dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega KT_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)\nabla h \cdot \nabla w\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \big(Q_f T_f(\bar{h}-\bar{h}_1) + Q_s T_s(\bar{h})\big) w\, dxdt = 0, \quad (3.13)$$

pour tout $w \in V = H_0^1(\Omega)$ avec $h = h_D$, $h_1 = h_{1,D}$ sur Γ et $h(0,\cdot) = h_0$, $h_1(0,\cdot) = h_{1,0}$.

D'après la théorie classique des EDPs paraboliques de Ladyzenskaya voir [48], la solution au problème (3.12)-(3.13) existe car ces équations sont linéaires.

On pose :

$$d(g,g_1) = -T_s(g)L_M\Big(||\nabla g_1||_{L^2(0,T;H)}\Big)\nabla g_1, \quad \forall (g,g_1) \in (L^\infty(0,T;H^1(\Omega)))^2.$$

On a alors :

$$||d(g,g_1)||_{L^2(0,T;H)} = ||T_s(g)L_M\big(||\nabla g_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla g_1||_{L^2(0,T;H)} \leq M||h_2||_{L^\infty(\Omega)} \text{ car } h_2 \in L^\infty(\Omega).$$

a) Nous allons montrer que $\mathcal{F}_1$ est continue :

Soient la suite $(\bar{h^n}, \bar{h_1^n})_n$ de $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et $(\bar{h},\bar{h}_1)$ de $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^1(\Omega))$ telle que

$$(\bar{h^n}, \bar{h_1^n}) \longrightarrow (\bar{h},\bar{h}_1) \quad dans \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^1(\Omega)) \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Nous posons

$$h_n = \mathcal{F}_1(\bar{h^n}, \bar{h_1^n}) \quad \text{et} \quad h = \mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{h}_1),$$

et nous montrons que

$$h_n \longrightarrow h \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)) \quad \text{quand} \quad n \to \infty \quad \text{(convergence forte)}.$$

Pour démontrer cette convergence forte dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, nous commençons par montrer la convergence faible dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Puis, nous utiliserons le Lemme d'Aubin pour la convergence forte dans $L^2(0,T;H)$.

• **Montrons que $(h_n - h_D)_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;V)$:**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est bien solution de (3.12) de plus si on remplace $w = h_n - h_D$ dans (3.12) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \phi\langle \partial_t h_n, (h_n - h_D)\rangle_{V',V}\, dt + \int_0^T \int_\Omega \big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\nabla h_n \cdot \nabla(h_n - h_D)\, dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega KT_s(\bar{h}^n) L_M\big(||\nabla \bar{h}_1^n||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla \bar{h}_1^n \cdot \nabla(h_n - h_D) dxdt - \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(\bar{h}^n)(h_n - h_D)\, dxdt.
\end{aligned}$$

En développant, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \phi\langle \partial_t (h_n - h_D), (h_n - h_D)\rangle_{V',V}\, dt + \int_0^T \int_\Omega \big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\nabla h_n \cdot \nabla h_n\, dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\nabla h_n \cdot \nabla h_D\, dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega KT_s(\bar{h}^n) L_M\big(||\nabla \bar{h}_1^n||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla \bar{h}_1^n \cdot \nabla h_n\, dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega KT_s(\bar{h}^n) L_M\big(||\nabla \bar{h}_1^n||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla \bar{h}_1^n \cdot \nabla h_D\, dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(\bar{h}^n)(h_n - h_D)\, dxdt - \int_0^T \phi\langle \partial_t h_D, (h_n - h_D)\rangle_{V',V}\, dt. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Nous allons estimer séparément chaque terme de (3.14). En utilisant la formule d'intégration de F.Mignot avec la fonction $(h_n - h_D)$ qui appartient à $W(0,T)$ et donc à $\mathcal{C}(0,T;H)$. Le premier terme qui s'écrit

$$\int_0^T \phi\langle \partial_t (h_n - h_D), (h_n - h_D)\rangle_{V',V}\, dt = \frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T) - h_D(T)\big|\big|_H^2 - \frac{\phi}{2}\big|\big|h_0 - h_{D|t=0}\big|\big|_H^2. \qquad (3.15)$$

Le second est majoré par

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\Big)\nabla h_n \cdot \nabla h_n\, dxdt \geq \delta\phi\big|\big|\nabla h_n\big|\big|_{L^2(0,T;H)}^2. \qquad (3.16)$$

Le troisième terme peut s'écrire avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz comme suit :

$$\Big|\int_0^T \int_\Omega \big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\nabla h_n \cdot \nabla h_D\, dxdt\Big| \quad \leq \quad \big(\delta\phi + K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}||h_D||_{L^2(0,T;H^1)},$$

puis, on applique l'inégalité de Young : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\Big|\int_0^T \int_\Omega \big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\nabla h_n \cdot \nabla h_D\, dxdt\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{\big(\delta\phi + K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)^2}{2\varepsilon}||h_D||_{L^2(0,T;H^1)}^2. \qquad (3.17)$$

De même avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le quatrième terme s'écrit :

$$\begin{aligned}\Big|-\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla\bar{h}_1^n\cdot\nabla h_n\,dxdt\Big| &\leq K_+||d(\bar{h}^n,\bar{h}_1^n)||_{L^2(0,T;H)}||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}\\ &\leq MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)},\end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Young

$$\Big|-\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla\bar{h}_1^n\cdot\nabla h_n\,dxdt\Big|\leq\frac{K_+^2M^2}{2\varepsilon}||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\frac{\varepsilon}{2}||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)}. \tag{3.18}$$

Puisqu'il ne dépend pas de h_n, le cinquième terme est majoré grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla\bar{h}_1^n\cdot\nabla h_D\,dxdt\Big| &\leq K_+||d(\bar{h}^n,\bar{h}_1^n)||_{L^2(0,T;H)}||h_D||_{L^2(0,T;H^1)}\\ &\leq MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_D||_{L^2(0,T;H^1)}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'avant dernier terme peut s'écrire comme suit :

$$\Big|-\int_0^T\int_\Omega Q_sT_s(\bar{h}^n)(h_n-h_D)\,dxdt\Big|\leq||Q_s||_{L^2(0,T;H)}||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_n-h_D||_{L^2(0,T;H)},$$

puis, en appliquant l'inégalité de Young sur le premier terme, on a :

$$\Big|-\int_0^T\int_\Omega Q_sT_s(\bar{h}^n)(h_n-h_D)\,dxdt\Big|\leq\frac{||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\frac{\phi}{2}||h_n-h_D||^2_{L^2(0,T,H)}. \tag{3.20}$$

Enfin, pour le dernier terme nous avons en appliquant successivement les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young :

$$\begin{aligned}\Big|-\int_0^T\phi\langle\partial_th_D,(h_n-h_D)\rangle_{V',V}\,dt\Big| &\leq \frac{\phi}{2\delta}||\partial_th_D||^2_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}\\ &\quad+\frac{\delta\phi}{2}||h_n||^2_{L^2(0,T;H^1)}+\frac{\delta\phi}{2}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)},\\ &\leq \frac{\phi}{2\delta}||\partial_th_D||^2_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}+\frac{\delta\phi}{2}||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)}\\ &\quad+\frac{\delta\phi}{2}||h_n||^2_{L^2(0,T;H)}+\frac{\delta\phi}{2}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

En faisant la somme de (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) et (3.21) on réécrit (3.14)

$$\begin{aligned}&\frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T)-h_D(T)\big|\big|^2_H-\frac{\phi}{2}\big|\big|h_0-h_{D|t=0}\big|\big|^2_H+\delta\phi\big|\big|\nabla h_n\big|\big|^2_{L^2(0,T;H)}\\ &\leq\varepsilon||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)}+\Big(\frac{K_+^2M^2}{\varepsilon}+\frac{||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}\Big)||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\frac{\delta\phi}{2}\int_0^T||h_n||^2_H\,dt\\ &+(\frac{(\delta\phi+K_+h_2)^2}{2\varepsilon}+\frac{\phi\delta}{2}+MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})||h_D||_{L^2(0,T;H^1)}+\frac{\phi}{2}\int_0^T||h_n-h_D||^2_Hdt.\end{aligned}$$

En réduisant cette dernière équation et en utilisant la relation suivante :

$$\frac{\delta\phi}{2}\int_0^T||h_n||^2_H\,dt=\frac{\delta\phi}{2}\int_0^T||(h_n-h_D)+h_D||^2_H\,dt\leq\frac{\delta\phi}{2}\int_0^T||h_n-h_D||^2_H\,dt+\frac{\delta\phi}{2}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T)-h_D(T)\big|\big|^2_H+(\frac{\delta\phi}{2}-\varepsilon)\big|\big|\nabla h_n\big|\big|^2_{L^2(0,T;H)} &\leq\frac{\phi}{2}(1+\delta)\int_0^T||h_n-h_D||^2_Hdt\\ &+(\frac{(\delta\phi+K_+h_2)^2}{2\varepsilon}+\phi\delta+MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)}\\ &+\Big(\frac{K_+^2M^2}{\varepsilon}+\frac{||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}\Big)||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\frac{\phi}{2}\big|\big|h_0-h_{D|t=0}\big|\big|^2_H.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Alors on choisit ε telle que : $C_g = \frac{\delta\phi}{2} - \varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$, pour un $\varepsilon_0 > 0$. De la relation (3.22) avec le Lemme de Gronwall, plus l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T)\big|\big|_H^2 - \frac{\phi}{2}\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2 \leq \frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T) - h_D(T)\big|\big|_H^2 \\
&\quad\Leftrightarrow \frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T)\big|\big|_H^2 \leq \frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T) - h_D(T)\big|\big|_H^2 + \frac{\phi}{2}\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2, \\
&\quad\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big|\big|h_n(T)\big|\big|_H \leq \sqrt{\frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T) - h_D(T)\big|\big|_H^2 + \frac{\phi}{2}\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2}, \\
&\quad\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big|\big|h_n(T)\big|\big|_H \leq \sqrt{\frac{\phi}{2}\big|\big|h_n(T) - h_D(T)\big|\big|_H^2} + \sqrt{\frac{\phi}{2}\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2},
\end{aligned}$$

on conclut qu'il existe les réels positifs A_M et B_M qui dépendent des données du problème tels que :

$$\begin{aligned}
\big|\big|h_n\big|\big|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{\phi}{2}\big|\big|h_0 - h_{D|t=0}\big|\big|_H^2 + \Big(\frac{K_+^2M^2}{\varepsilon} + \frac{||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}\Big)||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad + \frac{(\delta\phi + K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})^2}{2\varepsilon}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)} \\
&\qquad + (\delta\phi + MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})||h_D||_{L^2(0,T;H^1)}\Bigg)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}} + \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big(\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2\big)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{\phi}{2}\big|\big|h_0 - h_{D|t=0}\big|\big|_H^2 + \Big(\frac{K_+^2M^2}{\varepsilon} + \frac{||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}\Big)||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad + \frac{(\delta\phi + K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})^2}{2\varepsilon}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)} \\
&\qquad + (\delta\phi + MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})||h_D||_{L^2(0,T;H^1)}\Bigg)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}} + \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big(\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2\big)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}}, \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{\phi}{2}\big|\big|h_0 - h_{D|t=0}\big|\big|_H^2 + \Big(\frac{K_+^2M^2}{\varepsilon} + \frac{||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}\Big)||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad + \frac{(\delta\phi + K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})^2}{2\varepsilon}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)} \\
&\qquad + (\delta\phi + MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})||h_D||_{L^2(0,T;H^1)} + \frac{\phi}{2}\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}}, \\
\big|\big|h_n\big|\big|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq A_M(\phi,\delta,K,h_0,h_D,h_2,Q_s,M), \qquad (3.23) \\
\big|\big|\nabla h_n\big|\big|_{L^2(0,T;H)} &\leq \frac{1}{\sqrt{C_g}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{\phi}{2}\big|\big|h_0 - h_{D|t=0}\big|\big|_H^2 + \Big(\frac{K_+^2M^2}{\varepsilon} + \frac{||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}\Big)||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\qquad + \frac{(\delta\phi + K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})^2}{2\varepsilon}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1)} \\
&\qquad + (\delta\phi + MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})||h_D||_{L^2(0,T;H^1)} + \frac{\phi}{2}\big|\big|h_D(T)\big|\big|_H^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Big(1 + \sqrt{C_g}e^{\frac{(1+\delta)T}{2}}\Big), \\
\big|\big|\nabla h_n\big|\big|_{L^2(0,T;H)} &\leq B_M(\phi,\delta,K,h_0,h_D,h_2,Q_s,M). \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Donc la suite $(h_n - h_D)_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,H)$ puisque $(h_n)_n$ l'est dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,H)$. Nous notons aussi que l'estimation de la norme $L^\infty(0,T,H)$ justifie le fait que nous pouvons refaire les calculs en remplaçant T par un $\tau \leq T$ dans l'intégration en temps. Dans la suite pour majorer la suite $(h_n)_n$, nous poserons :

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2}. \qquad (3.25)$$

• **Montrons que $(\partial_t(h_n - h_D)_n)$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;V')$:**

La norme dans $L^2(0,T,V')$ se définit comme suit :

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\partial_t(h_n-h_D)\Big|\Big|_{L^2(0,T,V')} &= \sup_{||w||_{L^2(0,T;V)}\leq 1}\left|\int_0^T \langle \partial_t(h_n-h_D),w\rangle_{V',V}\,dt\right| \\ &= \sup_{||w||_{L^2(0,T;V)}\leq 1}\frac{1}{\phi}\Big|\int_0^T -\phi\langle\partial_t h_D,w\rangle_{V',V}\,dt-\int_0^T\int_\Omega Q_sT_s(\bar h^n)w\,dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_\Omega\Big(\delta\phi+KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\Big)\nabla h_n\cdot\nabla w\,dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)L_M\big(||\nabla\bar h_1^n||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla\bar h_1^n\cdot\nabla w\,dxdt\Big|.\end{aligned}$$

Nous allons estimer séparément les quatre termes du second membre :

$$\Big|\int_0^T -\phi\langle\partial_t h_D,w\rangle_{V',V}\,dt\Big|\leq\phi||\partial_t h_D||_{L^2(0,T;V')}||w||_{L^2(0,T;V)},$$

$$\Big|-\int_0^T\int_\Omega\Big(\delta\phi+KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\Big)\nabla h_n\cdot\nabla w\,dxdt\Big|\leq\big(\delta\phi+K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)||h_n||_{L^2(0,T;H^1)}||w||_{L^2(0,T;V)},$$

et comme la suite $(h_n)_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;H^1)$, alors

$$\Big|-\int_0^T\int_\Omega\Big(\delta\phi+KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\Big)\nabla h_n\cdot\nabla w\,dxdt\Big|\leq\big(\delta\phi+K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)C_M||w||_{L^2(0,T;V)}. \tag{3.26}$$

De plus,

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega T_s(\bar h^n)L_M\big(||\nabla\bar h_1^n||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla\bar h_1^n\cdot\nabla w\,dxdt\Big|\leq M||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||w||_{L^2(0,T;V)} \tag{3.27}$$

et enfin

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega Q_sT_s(\bar h^n)w\,dxdt\Big|\leq||Q_s||_{L^2(0,T;H)}||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||w||_{L^2(0,T;V)}. \tag{3.28}$$

En faisant la somme de (3.26), (3.27) et (3.28), on obtient une borne de la norme dans $L^2(0,T;V')$ de $\frac{\partial h_n}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\partial_t(h_n-h_D)\Big|\Big|_{L^2(0,T,V')} &\leq \frac{1}{\phi}\Big((\delta\phi+K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})C_M+M||h_2||_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad +\phi||\partial_t h_D||_{L^2(0,T;V')}+||Q_s||_{L^2(0,T;H)}||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big)||w||_{L^(0,T;V)},\end{aligned}$$

avec $||w||_{L^2(0,T,V)}\leq 1$, donc

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\partial_t(h_n-h_D)\Big|\Big|_{L^2(0,T,V')} &\leq \frac{1}{\phi}\Big((\delta\phi+K||h_2||_{L^\infty(\Omega)})C_M+M||h_2||_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad +\phi||\partial_t h_D||_{L^2(0,T;V')}+||Q_s||_{L^2(0,T;H)}||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big):=D_M.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Donc $\big(h_n\big)_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V')$ et d'après le théorème de compacité de **Aubin** voir [77] la suite $(h_n)_n$ est séquentiellement compacte dans $L^2(0,T;H)$. On peut extraire une sous suite toujours nommée $(h_n)_n$ qui converge fortement vers une limite l dans $L^2(\Omega_T)$ et faiblement dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T,V')$. En utilisant en particulier la convergence forte dans $L^2(\Omega_T)$ et donc la convergence presque partout dans $\Omega_T=(0,T)\times\Omega$, on vérifie que l est solution de (3.12). Cette solution étant unique alors $l=h$. Pour finir avec la continuité de $\mathcal{F}_1$, montrons la convergence forte dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

• **Convergence forte dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$:**

On fait la différence de la formulation faible (3.12) avec la suite $(h_n)_n$ et de la même formulation faible avec cette fois la solution h, puis on teste avec la fonction $w = h_n - h$. Cela donne :

$$\int_0^T \phi\langle\partial_t(h_n-h),(h_n-h)\rangle_{V',V}\,dt + \int_0^T\int_\Omega \big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\nabla(h_n-h)\cdot\nabla(h_n-h)\,dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega K\big(T_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) - T_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)\big)\nabla(h_n-h)\cdot\nabla h\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega K\Big(T_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla\bar{h}_1^n - T_s(\bar{h})L_M\big(||\nabla\bar{h}_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)\nabla\bar{h}_1\Big)$$
$$\cdot\nabla(h_n-h)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega Q_s(T_s(\bar{h}^n)-T_s(\bar{h}))(h_n-h)\,dxdt = 0. \tag{3.30}$$

En utilisant l'hypothèse que :

$$(\bar{h^n},\bar{h_1^n}) \longrightarrow (\bar{h},\bar{h}_1) \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega))\times L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

et en faisant tendre $n\to\infty$, l'équation (3.30) est réduite à :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^T\int_\Omega \big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\nabla(h_n-h)\cdot\nabla(h_n-h)\,dxdt\right) = 0.$$

Grâce à la positivité de K, on déduit de la relation précédente que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla(h_n-h)|^2\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega K_- T_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)|\nabla(h_n-h)|^2\,dxdt\right) \le 0.$$

Donc, nous concluons que la suite $(h_n)_n$ converge dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ vers la solution (h) de notre problème, ce qui prouve la continuité de $\mathcal{F}_1$ dans la topologie forte de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

b) Nous allons montrer de même que $\mathcal{F}_2$ est continue :

Nous appliquons la même méthode que celle décrite dans a). On pose

$$h_{1,n} = \mathcal{F}_2(\bar{h}^n,\bar{h}_1^n) \quad \text{et} \quad h_1 = \mathcal{F}_2(\bar{h},\bar{h}_1),$$

et montrons que

$$h_{1,n} \longrightarrow h_1 \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)) \quad \text{(Convergence forte)}.$$

• **Montrons que $(h_{1,n}-h_{1,D})_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;V)$:**

Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $h_{1,n}$ est solution de (3.13) de plus si on remplace $w = h_{1,n}-h_{1,D}$ dans (3.13) et on obtient :

$$\int_0^T \phi\langle\partial_t h_{1,n},(h_{1,n}-h_{1,D})\rangle_{V',V}\,dt + \int_0^T\int_\Omega \delta\phi\nabla h_{1,n}\cdot\nabla(h_{1,n}-h_{1,D})\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega K\big(T_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) + T_f(\bar{h}^n-\bar{h}_1^n)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla(h_{1,n}-h_{1,D})\,dxdt$$
$$= -\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla(h_{1,n}-h_{1,D})\,dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega \Big(Q_f T_f(\bar{h}^n-\bar{h}_1^n) + Q_s T_s(\bar{h}^n)\Big)(h_{1,n}-h_{1,D})\,dxdt,$$

soit après réduction

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \phi\langle\partial_t(h_{1,n}-h_{1,D}),(h_{1,n}-h_{1,D})\rangle_{V',V}\,dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega \big(\delta\phi+K\big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla h_{1,n}\,dxdt\\
&=\int_0^T\int_\Omega \big(\delta\phi+K\big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\\
&-\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,n}\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\\
&-\int_0^T\int_\Omega \big(Q_fT_f(\bar h^n-\bar h_1^n)+Q_sT_s(\bar h^n)\big)(h_{1,n}-h_{1,D})\,dxdt\\
&-\int_0^T \phi\langle\partial_t h_{1,D},(h_{1,n}-h_{1,D})\rangle_{V',V}\,dt. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Estimons les termes de (3.31). Le premier terme s'écrit

$$\int_0^T \phi\langle\partial_t(h_{1,n}-h_{1,D}),(h_{1,n}-h_{1,D})\rangle_{V',V}\,dt=\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T)-h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2-\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,0}-h_{1,D|t=0}\big|\big|_H^2. \qquad (3.32)$$

Pour le second, on rappelle que les fonctions T_s et T_f sont définies sur $[0,h_2]$ et prolongées par continuité en dehors telles que :

$$T_s(h)=h_2-h,\quad \forall h\in[0,h_2]\Longrightarrow T_s(h)\geq 0$$
$$T_f(u)=u,\quad \forall u\in[0,h_2]\Longrightarrow T_s(h)+T_f(h-h_1)\geq 0\quad et\quad T_s(h)+T_f(h-h_1)\leq 2h_2,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \big(\delta\phi+K\big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla h_{1,n}\,dxdt\\
&\qquad\geq\int_0^T\int_\Omega \delta\phi\big|\nabla h_{1,n}\big|^2\,dxdt\;\geq\delta\phi\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|^2_{L^2(0,T;H)}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

De plus, pour le troisième terme on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young et on a pour tout $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T\int_\Omega \Big(\delta\phi+K\big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\big)\Big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big|\\
&\qquad\leq\big(\delta\phi+2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)||\nabla h_{1,n}||_{L^2(0,T;H)}\times||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\\
&\qquad\leq\frac{\big(\delta\phi+2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)^2}{2\varepsilon}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\frac{\varepsilon}{2}\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|^2_{L^2(0,T;H)}. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

De même, pour le quatrième terme

$$\Big|-\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,n}\,dxdt\Big|\quad\leq\quad K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_n||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}||\nabla h_{1,n}||_{L^2(0,T;H)},$$

puisque $(h_n)_n$ bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, on a :

$$\Big|-\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,n}\,dxdt\Big|\leq\frac{K_+^2||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}C_M^2}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|^2_{L^2(0,T;H)}. \qquad (3.35)$$

Pour le cinquième terme ne dépendant pas de $h_{1,n}$, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big|\leq K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_n||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$

et avec $(h_n)_n$ bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$:

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big| \leq K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}C_M||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}. \tag{3.36}$$

De même, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young pour le sixième terme et on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|-\int_0^T\int_\Omega\big(Q_fT_f(\bar{h}^n-\bar{h}_1^n)+Q_sT_s(\bar{h}^n)\big)(h_{1,n}-h_{1,D})\,dxdt\Big| \\ \leq ||Q_f+Q_s||_{L^2(0,T;H)}||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_{1,n}-h_{1,D}||_{L^2(0,T;H)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big|-\int_0^T\int_\Omega\big(Q_fT_f(\bar{h}^n-\bar{h}_1^n)+Q_sT_s(\bar{h}^n)\big)(h_{1,n}-h_{1,D})\,dxdt\Big| \\ \leq \frac{||Q_f+Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\phi}+\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}-h_{1,D}\big|\big|^2_{L^2(0,T;H)}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Enfin, le dernier terme s'écrit comme :

$$\begin{aligned}\Big|-\int_0^T\phi\langle\partial_th_{1,D},(h_{1,n}-h_{1,D})\rangle_{V',V}dt\Big| &\leq \frac{\phi}{2\delta}||\partial_th_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')}+\frac{\phi\delta}{2}||h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;V)} \\ &\quad+\frac{\phi\delta}{2}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)}, \\ &\leq \frac{\phi}{2\delta}||\partial_th_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')}+\frac{\phi\delta}{2}||\nabla h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;H)} \\ &\quad+\frac{\phi\delta}{2}||h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;H)}+\frac{\phi\delta}{2}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

En faisant la somme de (3.32), (3.33), (3.35), (3.34), (3.36), (3.37) et (3.38) on réécrit (3.31) :

$$\begin{aligned}\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T)-h_{1,D}(T)\big|\big|^2_H+\delta\phi\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|^2_{L(0,T;H)} &\leq \frac{K_+||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}C_M^2}{2\varepsilon}+\frac{\phi}{2}\Big|\Big|h_{1,0}-h_{1,D|t=0}\Big|\Big|^2_H \\ &+\frac{\Big(\delta\phi+2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big)^2}{2\varepsilon}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\frac{||Q_f+Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}\big|\big|h_2\big|\big|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\phi} \\ &+\varepsilon\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|^2_{L^2(0,T;H)}+C_MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\frac{\phi}{2\delta}||\partial_th_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')} \\ &+\frac{\phi\delta}{2}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)}+\frac{\phi\delta}{2}||\nabla h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;H}+\frac{\phi\delta}{2}\int_0^T||h_{1,n}||^2_H\,dt+\frac{\phi}{2}\int_0^T||h_{1,n}-h_{1,D}||^2_Hdt.\end{aligned}$$

Ainsi après réduction et en utilisant la relation suivante

$$\frac{\delta\phi}{2}\int_0^T||h_{1,n}||^2_H\,dt=\frac{\delta\phi}{2}\int_0^T||(h_{1,n}-h_{1,D})+h_{1,D}||^2_H\,dt\leq\frac{\delta\phi}{2}\int_0^T||h_{1,n}-h_{1,D}||^2_H\,dt+\frac{\delta\phi}{2}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T)-h_{1,D}(T)\big|\big|^2_H+\big(\frac{\delta\phi}{2}-\varepsilon\big)\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|^2_{L(0,T;H)} &\leq \frac{K_+||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}C_M^2}{2\varepsilon}+\frac{\phi}{2}\Big|\Big|h_{1,0}-h_{1,D|t=0}\Big|\Big|^2_H \\ &+\frac{\Big(\delta\phi+2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big)^2}{2\varepsilon}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\frac{||Q_f+Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}\big|\big|h_2\big|\big|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\phi} \\ &+(\frac{\delta\phi}{2}+C_MK_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)})||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\frac{\phi}{2\delta}||\partial_th_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')} \\ &+\phi\delta||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)}+\frac{\phi}{2}(1+\delta)\int_0^T||h_{1,n}-h_{1,D}||^2_Hdt.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Alors, si ε est choisie telle que : $C_g := \left(\frac{\delta\phi}{2} - \varepsilon\right) \geq \varepsilon_0 > 0$, avec un $\varepsilon_0 > 0$ dans (1.54), le Lemme de Gronwall nous assure l'existence de deux réels positifs E_M et F_M dépendant des données du problème, plus si nous utilisons l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T)\big|\big|_H^2 - \frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2 \leq \frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T) - h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2 \\
&\quad \Leftrightarrow \frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T)\big|\big|_H^2 \leq \frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T) - h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2 + \frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2, \\
&\quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big|\big|h_{1,n}(T)\big|\big|_H \leq \sqrt{\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T) - h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2 + \frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2}, \\
&\quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big|\big|h_{1,n}(T)\big|\big|_H \leq \sqrt{\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,n}(T) - h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2} + \sqrt{\frac{\phi}{2}\big|\big|h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2},
\end{aligned}
$$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
\big|\big|h_{1,n}\big|\big|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{K_+||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}C_M^2}{2\varepsilon} + \frac{\phi}{2}\Big|\Big|h_{1,0} - h_{1,D|t=0}\Big|\Big|_H^2 \\
&\quad + \frac{\Big(\delta\phi + 2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big)^2}{2\varepsilon}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad + \frac{||Q_f + Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}\big|\big|h_2\big|\big|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\phi} + \frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')} + \phi\delta||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)} \\
&\quad + C_M K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\Bigg)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}} + \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big(\big|\big|h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2\big)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{K_+||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}C_M^2}{2\varepsilon} + \frac{\phi}{2}\Big|\Big|h_{1,0} - h_{1,D|t=0}\Big|\Big|_H^2 \\
&\quad + \frac{\Big(\delta\phi + 2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big)^2}{2\varepsilon}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad + \frac{||Q_f + Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}\big|\big|h_2\big|\big|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\phi} + \frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')} + \phi\delta||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)} \\
&\quad + C_M K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\Bigg)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}} + \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big(\big|\big|h_{1,D}(T)\big|\big|_H^2\big)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}}, \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{K_+||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}C_M^2}{2\varepsilon} + \frac{\phi}{2}\Big|\Big|h_{1,0} - h_{1,D|t=0}\Big|\Big|_H^2 \\
&\quad + \frac{\Big(\delta\phi + 2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big)^2}{2\varepsilon}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad + \frac{||Q_f + Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}\big|\big|h_2\big|\big|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\phi} + \frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')} + \phi\delta||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)} \\
&\quad + C_M K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\Big|\Big|h_{1,D}(T)\Big|\Big|_H^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(1+\delta)T}{2}}, \\
\big|\big|h_{1,n}\big|\big|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq E_M(\phi, \delta, K, h_{1,0}, h_{1,D}, h_2, Q_s, Q_f, M, C_M), \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|_{L^2(0,T;H)} &\leq \frac{1}{\sqrt{C_g}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}}\Bigg(\frac{K_+||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}C_M^2}{2\varepsilon}+\frac{\phi}{2}\Big|\Big|h_{1,0}-h_{1,D|t=0}\Big|\Big|^2_H \\
&\quad +\frac{\Big(\delta\phi+2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\Big)^2}{2\varepsilon}||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad +\frac{||Q_f+Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}\big|\big|h_2\big|\big|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\phi}+\frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V')} \\
&\quad +C_M K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad +\phi\delta||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;V)}+\frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\big|\big|h_{1,D}(T)\big|\big|^2_H\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Big(1+\sqrt{C_g}e^{\frac{(1+\delta)T}{2}}\Big), \\
\big|\big|\nabla h_{1,n}\big|\big|_{L^2(0,T;H)} &\leq F_M(\phi,\delta,K,h_{1,0},h_{1,D},h_2,Q_s,Q_f,M,C_M). \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Donc la suite $(h_{1,n})_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H)$ et nous poserons dans la suite $C_{1,M}$ comme majorant de la suite $(h_{1,n})_n$, défini par

$$C_{1,M}=\sqrt{E_M^2+F_M^2}. \qquad (3.42)$$

• **Montrons que $(\partial_t(h_{1,n}-h_{1,D})_n)$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;V')$:**

La norme dans $L^2(0,T,V')$ s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
\big|\big|\partial_t(h_{1,n}-h_{1,D})\big|\big|_{L^2(0,T,V')} &= \sup_{||w||_{L^2(0,T,V)}\leq 1}\left|\int_0^T\langle\partial_t(h_{1,n}-h_{1,D}),w\rangle_{V',V}\,dt\right| \\
&= \sup_{||w||\leq 1}\frac{1}{\phi}\Bigg|\int_0^T -\phi\langle\partial_t h_{1,D},w\rangle_{V',V}\,dt-\int_0^T\int_\Omega\big(\delta\phi+K\big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla w\,dxdt \\
&\quad +\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla w\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega\big(Q_fT_f(\bar h^n-\bar h_1^n)+Q_sT_f(\bar h^n)\big)w\,dxdt\Bigg|.
\end{aligned}$$

Nous allons estimer séparément les quatre termes de cette norme. Le premier s'écrit :

$$\left|\int_0^T -\phi\langle\partial_t h_{1,D},w\rangle_{V',V}\,dt\right|\leq\phi||\partial_t h_{1,D}||_{L^2(0,T;V')}||w||_{L^2(0,T;V)}. \qquad (3.43)$$

Ensuite pour le second, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_0^T\int_\Omega\big(\delta\phi+K\big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla w dxdt\right| \\
&\qquad\leq\big(\delta\phi+2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)||h_{1,n}||_{L^2(0,T;H^1)}||w||_{L^2(0,T;V)}
\end{aligned}$$

et comme $(h_{1,n})_n$ est bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, alors on a :

$$\left|-\int_0^T\int_\Omega\left(\delta\phi+K\Big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\Big)\right)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla w dxdt\right|\leq\big(\delta\phi+2K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}\big)C_{1,M}||w||_{L^2(0,T,V)}. \qquad (3.44)$$

Par ailleurs, on a :

$$\left|-\int_0^T\int_\Omega KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)\nabla h_n\cdot\nabla w\,dxdt\right|\leq K_+||h_2||_{L^\infty(\Omega)}||h_n||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}||w||_{L^2(0,T,V)}$$

et comme $(h_n)_n$ est bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$:

$$\left| -\int_0^T \int_\Omega KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla h_n \cdot \nabla w \, dxdt \right| \leq K_+ ||h_2||_{L^\infty(\Omega)} C_M ||w||_{L^2(0,T,V)}. \tag{3.45}$$

Enfin, pour le dernier terme, on a :

$$\left| -\int_0^T \int_\Omega \Big(Q_f T_f(\bar{h}^n - \bar{h}_1^n) + Q_s T_f(\bar{h}^n) \Big) w \, dxdt \right| \leq ||Q_f + Q_s||_{L^2(0,T;H)} \big|\big|h_2\big|\big|_{L^\infty(\Omega)} \big|\big|w\big|\big|_{L^2(0,T,V)}. \tag{3.46}$$

En faisant la somme de (3.43), (3.44), (3.45) et (3.46) on obtient :

$$\begin{aligned} \Big|\Big|\partial_t(h_{1,n} - h_{1,D})\Big|\Big|_{L^2(0,T,V')} \quad \leq \quad & \frac{1}{\phi}\Big(\phi ||\partial_t h_{1,D}||_{L^2(0,T;V')} + \delta\phi \\ & + (K_+ C_M + 2K_+ C_{1,M} + ||Q_f + Q_s||_{L^2(0,T;H)}) \big|\big|h_2\big|\big|_{L^\infty(\Omega)} \Big) ||w||_{L^2(0,T,V)}, \end{aligned}$$

or $||w||_{L^2(0,T,V)} \leq 1$, et donc :

$$\begin{aligned} \Big|\Big|\partial_t(h_{1,n} - h_{1,D})\Big|\Big|_{L^2(0,T,V')} \quad \leq \quad & \frac{1}{\phi}\Big(\phi ||\partial_t h_{1,D}||_{L^2(0,T;V')} + \delta\phi + (K_+ C_M \\ & + 2K_+ C_{1,M} + ||Q_f + Q_s||_{L^2(0,T;H)} \big|\big|h_2\big|\big|_{L^\infty(\Omega)}) \Big) := D_{1,M}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Donc $\big(h_{1,n}\big)_n$ est bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$ et d'après le théorème de compacité de **Aubin**, la suite $(h_{1,n})_n$ est séquentiellement compacte dans $L^2(0,T;H)$. On peut donc extraire une sous-suite toujours nommée $\big(h_{1,n}\big)$ qui converge fortement vers une limite l_1 dans $L^2(\Omega_T)$ et faiblement dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$. Avec la convergence presque partout sur $(0,T)\times\Omega$, on a que l_1 est solution de (3.13) et est unique, donc $l_1 = h_1$.

• **Convergence forte dans** $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ **:**

Pour finir la preuve sur la continuité de $\mathcal{F}_2$, nous faisons la différence entre la formulation variationnelle (3.13) avec $h_{1,n}$ et celle avec h_1, puis nous choisissons $w = h_{1,n} - h_1$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t(h_{1,n} - h_1), (h_{1,n} - h_1)\rangle_{V',V} \, dt + \int_0^T \int_\Omega \delta\phi \nabla(h_{1,n} - h_1) \cdot \nabla(h_{1,n} - h_1) \, dxdt \\ & + \int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) + T_f(\bar{h}^n - \bar{h}_1^n)\big)\nabla(h_{1,n} - h_1) \cdot \nabla(h_{1,n} - h_1) \, dxdt \\ & + \int_0^T \int_\Omega K\Big(\big(T_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) + T_f(\bar{h}^n - \bar{h}_1^n)\big) - \big(T_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1) + T_f(\bar{h} - \bar{h}_1)\big) \Big) \nabla h_1 \cdot \nabla(h_{1,n} - h_1) \, dxdt \\ & + \int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) - T_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)\big)\nabla h \cdot \nabla(h_{1,n} - h_1) \, dxdt \\ & + \int_0^T \int_\Omega \Big(\big(Q_f T_f(\bar{h}^n - \bar{h}_1^n) + Q_s T_s(\bar{h}^n)\big) - \big(Q_f T_f(\bar{h} - \bar{h}_1) + Q_s T_s(\bar{h})\big) \Big)(h_{1,n} - h_1) \, dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

En utilisant l'hypothèse que :

$$(\bar{h^n}, \bar{h_1^n}) \longrightarrow (\bar{h}, \bar{h}_1) \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

et en faisant tendre $n \to \infty$, l'équation (3.48) est réduite à :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Bigg(& \int_0^T \int_\Omega \delta\phi \nabla(h_{1,n} - h_1) \cdot \nabla(h_{1,n} - h_1) \, dxdt \\ & + \int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) + T_f(\bar{h}^n - \bar{h}_1^n)\big)\nabla(h_{1,n} - h_1) \cdot \nabla(h_{1,n} - h_1) \, dxdt \Bigg) = 0. \end{aligned}$$

Grâce à la positivité de K, on déduit de la relation précédente que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla(h_{1,n}-h_1)|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega K_-\big(T_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)+T_f(\bar h^n-\bar h_1^n)\big)|\nabla(h_{1,n}-h_1)|^2\,dxdt\right)\le 0.$$

Donc, nous concluons que la suite $(h_{1,n})_n$ converge dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ vers la solution (h_1) de notre problème, et la continuité de $\mathcal{F}_2$ dans la topologie forte de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ est prouvée.

c) Conclusion :

$\mathcal{F}$ est continue puisque ses fonctions composantes $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ le sont. De plus, si $B\in\mathbb{R}_+^*$ est la constante définie par les estimations uniformes (3.25), (3.29), (3.42) et (3.47), c'est-à-dire

$$B=\sqrt{C_M^2+D_M^2+C_{1,M}^2+D_{1,M}^2},$$

et si W_1 est la partie fermée, bornée et convexe [1] de $L^2(0,T;H^1(\Omega))\times L^2(0,T;H^1(\Omega))$ définie par

$$W_1=\Bigg\{(g,g_1)\in\Big(L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V')\Big)^2;\ (g(0),g_1(0))=(h_0,h_{1,0}),\ (g_{|\Gamma},g_{1|\Gamma})=(h_D,h_{1,D});$$

$$||(g,g_1)||_{\left(L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V')\right)^2}\le B\Bigg\},$$

alors $\mathcal{F}(W_1)\subset W_1$ et la restriction de $\mathcal{F}$ à W_1 est continue. D'après le théorème de point fixe de Schauder, il existe donc $(h,h_1)\in W_1$ point fixe de $\mathcal{F}$. On a ainsi l'existence d'une solution faible à (3.10)-(3.11).

Remarque 3.1 *La compacité de l'opérateur $\mathcal{F}$ peut être plus facilement vérifiée en introduisant la fonction L_M^ϵ au lieu de L_M dans cette étape de point fixe (voir chapitre suivant). Nous préférons ici privilégier la concision de la présentation.*

3.3.2 Etape 2 : Elimination de la fonction auxiliaire L_M

Ici, nous allons montrer l'existence d'un nombre réel $R>0$ ne dépendant pas de ϵ ni de M, telle qu'une solution faible $(h,h_1)\in W_1$ du problème (3.10)-(3.11) satisfait

$$||\nabla h||_{L^2(0,T,H)}\le R\qquad\text{et}\qquad||\nabla h_1||_{L^2(0,T,H)}\le R. \tag{3.49}$$

Nous allons utiliser les équations (3.10) et (3.11) en remplaçant respectivement $w=h-h_D$ dans (3.10) et $w=h_1-h_{1,D}$ dans (3.11). On obtient donc :

$$\int_0^T\phi\langle\partial_t h,h-h_D\rangle_{V',V}\,dt+\int_0^T\int_\Omega\delta\phi\nabla h\cdot\nabla(h-h_D)\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla(h-h_D)\,dxdt$$

1. $\forall\ \Big((g,g_1),(h,h_1)\Big)\in W_1^2$ et pour tout $t\in[0,1]$, alors $\Big(tg+(1-t)h,tg_1+(1-t)h_1\Big)\in W_1^2$.

$$= -\int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1 \cdot \nabla(h-h_D)\,dxdt$$
$$-\int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h)(h-h_D)\,dxdt, \tag{3.50}$$

$$\int_0^T \phi\langle \partial_t h_1, (h_1-h_{1,D})\rangle_{V',V}\,dt + \int_0^T \int_\Omega \delta\phi \nabla h_1 \cdot \nabla(h_1-h_{1,D})\,dxdt$$
$$+\int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)+T_f(h-h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla(h_1-h_{1,D})\,dxdt$$
$$= -\int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h \cdot \nabla(h_1-h_{1,D})\,dxdt$$
$$-\int_0^T \int_\Omega \big(Q_f T_f(h-h_1)+Q_s T_s(h)\big)(h_1-h_{1,D})\,dxdt. \tag{3.51}$$

On réécrit les différents termes de (3.50) :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \phi\langle \partial_t h, h-h_D\rangle_{V',V}\,dt \\
&= \int_0^T \phi\langle \partial_t(h-h_D), h-h_D\rangle_{V',V}\,dt + \int_0^T \phi\langle \partial_t h_D, h-h_D\rangle_{V',V}\,dt, \\
I_2 &= \int_0^T \int_\Omega \delta\phi\nabla h\cdot\nabla(h-h_D)\,dxdt = \int_0^T \int_\Omega \delta\phi\Big(\nabla h\cdot\nabla h - \nabla h\cdot\nabla h_D\Big)\,dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla(h-h_D)\,dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\Big(\nabla h\cdot\nabla h - \nabla h\cdot\nabla h_D\Big)\,dxdt, \\
I_4 &= -\int_0^T \int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla(h-h_D)\,dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h\,dxdt \\
&\quad +\int_0^T \int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_D dxdt, \\
I_5 &= -\int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h)(h-h_D)\,dxdt = -\int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h)h\,dxdt + \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h)h_D\,dxdt,
\end{aligned}$$

puis ceux de (3.51) :

$$\begin{aligned}
I_1' &= \int_0^T \phi\langle \partial_t h_1, (h_1-h_{1,D})\rangle_{V',V}\,dt \\
&= \int_0^T \phi\langle \partial_t(h_1-h_{1,D}), h_1-h_{1,D}\rangle_{V',V}\,dt + \int_0^T \phi\langle \partial_t h_{1,D}, h_1-h_{1,D}\rangle_{V',V}\,dt, \\
I_2' &= \int_0^T \int_\Omega \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla(h_1-h_{1,D})\,dxdt = \int_0^T \int_\Omega \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla h_1 dxdt - \int_0^T \int_\Omega \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3' &= \int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla(h_1 - h_{1,D})\,dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h_1\,dxdt \\
&\quad - \int_0^T \int_\Omega K\big(T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h_{1,D}\,dxdt, \\
I_4' &= -\int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h \cdot \nabla(h_1 - h_{1,D})\,dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h \cdot \nabla h_1\,dxdt + \int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h \cdot \nabla h_{1,D}\,dxdt, \\
I_5' &= -\int_0^T \int_\Omega \big(Q_f T_f(h-h_1) + Q_s T_s(h)\big)(h_1 - h_{1,D})\,dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \big(Q_f T_f(h-h_1) + Q_s T_s(h)\big)h_1\,dxdt + \int_0^T \int_\Omega \big(Q_f T_f(h-h_1) + Q_s T_s(h)\big)h_{1,D}\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Nous allons faire la somme des termes de (3.50) et (3.51) en utilisant la formule suivante pour réduire les calculs :

$$
\begin{aligned}
&K\nabla h \cdot \nabla h + KL_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h + K\nabla h_1 \cdot \nabla h_1 + K\nabla h \cdot \nabla h_1 \\
&\qquad = K\nabla(h+h_1) \cdot \nabla(h+h_1) - K\nabla h_1 \cdot \nabla h + KL_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h, \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

or $\nabla h_1 \cdot \nabla h = \nabla h_1 \cdot \nabla(h+h_1) - \nabla h_1 \cdot \nabla h_1$, donc (3.52) devient :

$$
\begin{aligned}
&K\nabla h \cdot \nabla h + KL_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h + K\nabla h_1 \cdot \nabla h_1 + K\nabla h \cdot \nabla h_1 \\
&\qquad = K\nabla(h+h_1) \cdot \nabla(h+h_1) - K\big(\nabla h_1 \cdot \nabla(h+h_1) - \nabla h_1 \cdot \nabla h_1\big) \\
&\qquad\quad + KL_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\big(\nabla h_1 \cdot \nabla(h+h_1) - \nabla h_1 \cdot \nabla h_1\big),
\end{aligned}
$$

et on obtient :

$$
\begin{aligned}
&K\nabla h \cdot \nabla h + KL_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h + K\nabla h_1 \cdot \nabla h_1 + K\nabla h \cdot \nabla h_1 \\
&\qquad = K\nabla(h+h_1) \cdot \nabla(h+h_1) + K\Big(1 - L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)\nabla h_1 \cdot \nabla h_1 \\
&\qquad\quad - K\Big(1 - L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)\nabla h_1 \cdot \nabla(h+h_1). \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Ainsi en sommant (3.50) et (3.51), puis en utilisant (3.53), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \phi\langle \partial_t(h-h_D), h-h_D\rangle_{V',V}\,dt + \int_0^T \phi\langle \partial_t(h_1-h_{1,D}), h_1-h_{1,D}\rangle_{V',V}\,dt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega \delta\phi\big(\nabla h \cdot \nabla h + \nabla h_1 \cdot \nabla h_1\big)\,dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega K\Big(\Big(1 - L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1 \cdot \nabla h_1\,dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla(h+h_1) \cdot \nabla(h+h_1)\,dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_\Omega K\Big(1 - L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big) T_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \cdot \nabla (h + h_1)\, dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \Big(\delta\phi + KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\Big) \nabla h \cdot \nabla h_D\, dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \Big(\delta\phi + KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + KT_f(h - h_1)\Big) \nabla h_1 \cdot \nabla h_{1,D}\, dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega KT_s(h) L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \cdot \nabla h_D\, dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega KT_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla h \cdot \nabla h_{1,D}\, dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h)(h - h_D)\, dxdt - \int_0^T \int_\Omega \big(Q_f T_f(h - h_1) + Q_s T_s(h)\big)(h_1 - h_{1,D})\, dxdt \\
&- \int_0^T \phi \langle \partial_t h_D, h - h_D \rangle_{V',V}\, dt + \int_0^T \langle \partial_t h_{1,D}, h_1 - h_{1,D} \rangle_{V',V}\, dt. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire :

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\int_0^T \phi \langle \partial_t (h - h_D), h - h_D \rangle_{V',V}\, dt}_{J_1} + \underbrace{\int_0^T \phi \langle \partial_t (h_1 - h_{1,D}), h_1 - h_{1,D} \rangle_{V',V}\, dt}_{J_2} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \delta\phi\big(\nabla h \cdot \nabla h + \nabla h_1 \cdot \nabla h_1\big)\, dxdt}_{J_3} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega K\left[\Big(1 - L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big) T_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h - h_1)\right] \nabla h_1 \cdot \nabla h_1\, dxdt}_{J_4} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega KT_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla (h + h_1) \cdot \nabla (h + h_1)\, dxdt}_{J_5} \\
&= \underbrace{\int_0^T \int_\Omega K\Big(1 - L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\Big) T_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \cdot \nabla (h + h_1)\, dxdt}_{J_6} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \Big(\delta\phi + KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\Big) \nabla h \cdot \nabla h_D\, dxdt}_{J_7} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \Big(\delta\phi + KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + KT_f(h - h_1)\Big) \nabla h_1 \cdot \nabla h_{1,D}\, dxdt}_{J_8} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega KT_s(h) L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \cdot \nabla h_D\, dxdt}_{J_9} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega KT_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla h \cdot \nabla h_{1,D}\, dxdt}_{J_{10}}
\end{aligned}
$$

$$+\underbrace{\int_0^T\int_\Omega -\Big\{Q_sT_s(h)(h-h_D)+\big(Q_fT_f(h-h_1)+Q_sT_s(h)\big)(h_1-h_{1,D})\Big\}\,dxdt}_{J_{11}}$$
$$+\underbrace{\int_0^T -\phi\langle\partial_t h_D, h-h_D\rangle_{V',V}\,dt+\int_0^T\langle\partial_t h_{1,D},h_1-h_{1,D}\rangle_{V',V}\,dt}_{J_{12}}. \tag{3.55}$$

Nous allons estimer les termes de (3.55) et nous utiliserons la plupart du temps l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young pour tout $\varepsilon>0$. Ainsi, en posant $u=h-h_D$, $v=h_1-h_{1,D}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\phi}{2}\int_\Omega \big(u^2(T,x)-u_0^2(x)\big)\,dx \quad \text{et} \quad J_2=\frac{\phi}{2}\int_\Omega\big(v^2(T,x)-v_0^2(x)\big)\,dx,\\
J_3 &= \int_0^T\int_\Omega \delta\phi\big(\nabla h\cdot\nabla h+\nabla h_1\cdot\nabla h_1\big)\,dxdt \geq \int_0^T\int_\Omega\delta\phi\big|\nabla h\big|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega\delta\phi\big|\nabla h_1\big|^2\,dxdt,\\
J_4 &= \int_0^T\int_\Omega K\Big(\big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)+T_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1\cdot\nabla h_1\,dxdt\\
&\geq \int_0^T\int_\Omega K_-\Big(\big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)+T_f(h-h_1)\Big)|\nabla h_1|^2\,dxdt,\\
J_5 &= \int_0^T\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla(h+h_1)\cdot\nabla(h+h_1)\,dxdt \geq \int_0^T\int_\Omega K_-T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt,\\
|J_6| &= \left|\int_0^T\int_\Omega K\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla(h+h_1)\,dxdt\right|\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega K_+\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\Big|\nabla h_1\cdot\nabla(h+h_1)\Big|\,dxdt,\\
&\leq \left(\int_0^T\int_\Omega\frac{K_+^2}{2K_-}\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt\right)^{\frac12}\\
&\quad\times\left(\int_0^T\int_\Omega 2K_-\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt\right)^{\frac12}\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega\frac{K_+^2}{4K_-}\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt\\
&\quad+\int_0^T\int_\Omega K_-\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt,\\
|J_7| &= \left|\int_0^T\int_\Omega\Big(\delta\phi+KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\Big)\nabla h\cdot\nabla h_D\,dxdt\right|\\
&\leq \left|\int_0^T\int_\Omega\delta\phi\nabla h\cdot\nabla h_D\,dxdt\right|+\left|\int_0^T\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla h_D\,dxdt\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla h|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla h_D|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_D|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega \frac{\delta\phi}{4}|\nabla h|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla h_D|^2\,dxdt\\
&\quad+\int_0^T\int_\Omega \frac{K_+\varepsilon}{4}T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega \frac{K_+}{\varepsilon}T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_D|^2\,dxdt,\\
|J_8| &= \left|\int_0^T\int_\Omega \Big(\delta\phi+KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)+KT_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1\cdot\nabla h_{1,D}dxdt\right|\\
&\leq \left|\int_0^T\int_\Omega \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\right|+\left|\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\right|\\
&\quad+\left|\int_0^T\int_\Omega K_+T_f(h-h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\right|\\
&\leq \left(\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla h_1|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left(\int_0^T\int_\Omega K_+T_f(h-h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_\Omega K_+T_f(h-h_1)|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega \frac{\delta\phi}{4}|\nabla h_1|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega \delta\phi|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt\\
&\quad+\int_0^T\int_\Omega \frac{K_+\varepsilon}{4}T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega \frac{K_+}{\varepsilon}T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt\\
&\quad+\int_0^T\int_\Omega \frac{K_+}{2}T_f(h-h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega \frac{K_+}{2}T_f(h-h_1)|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt,\\
|J_9| &= \Big|\int_0^T\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_D\,dxdt\Big|\\
&\leq \Big(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\Big(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)L_M^2\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_D|^2\,dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega \frac{K_+\varepsilon}{4}T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega \frac{K_+}{\varepsilon}T_s(h)L_M^2\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h_D|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|J_{10}| &= \Big|\int_0^T\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big| \le \int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\Big|\nabla h\cdot\nabla h_{1,D}\Big|\,dxdt\\
&\le \Big(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h|^2\,dxdt\Big)^{\frac12}\times\Big(\int_0^T\int_\Omega K_+T_s(h)|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt\Big)^{\frac12}\\
&\le \int_0^T\int_\Omega\frac{K_+\varepsilon}{4}T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)|\nabla h|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega\frac{K_+}{\varepsilon}T_s(h)|\nabla h_{1,D}|^2\,dxdt,\\
|J_{11}| &= \Big|\int_0^T\int_\Omega -Q_sT_s(h)(h-h_D)+\big(Q_fT_f(h-h_1)+Q_sT_s(h)\big)(h_1-h_{1,D})\,dxdt\Big|\\
&\le \int_0^T\int_\Omega T_s(h)|Q_su|\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega T_f(h-h_1)|Q_fv|\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega T_s(h)Q_sv|\,dxdt\\
&\le \frac{3||Q_s||^2_{L^2(0,T;H)}+2||Q_f||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}||h_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\frac{\phi}{2}\int_0^T\int_\Omega|u|^2\,dxdt+\frac{\phi}{2}\int_0^T\int_\Omega|v|^2\,dxdt,\\
|J_{12}| &= \Big|\int_0^T-\phi\Big(\langle\partial_th_D,h-h_D\rangle_{V',V}+\langle\partial_th_{1,D},h_1-h_{1,D}\rangle_{V',V}\Big)\,dt\Big|\\
&\le \Big|\int_0^T\phi\langle\partial_th_D,h-h_D\rangle_{V',V}\,dt\Big|+\Big|\int_0^T\phi\langle\partial_th_{1,D},h_1-h_{1,D}\rangle_{V',V}\,dt\Big|\\
&\le \frac{\phi\delta}{4}\int_0^T\int_\Omega|\nabla(h-h_D)|^2\,dxdt+\frac{\phi\delta}{4}\int_0^T\int_\Omega|\nabla(h-h_D)|^2\,dxdt+\frac{\phi}{\delta}\big|\big|\partial_th_D\big|\big|^2_{L^2(0,T,V')}\\
&\quad+\frac{\phi}{\delta}\big|\big|\partial_th_{1,D}\big|\big|^2_{L^2(0,T,V')}\\
&\le \frac{\phi\delta}{4}\int_0^T\int_\Omega(|\nabla h|^2+|\nabla h_1|^2)\,dxdt+\frac{\phi\delta}{4}\int_0^T\int_\Omega(|\nabla h_D|^2+|\nabla h_{1,D}|^2)\,dxdt+\frac{\phi}{\delta}\big|\big|\partial_th_D\big|\big|^2_{L^2(0,T,V')}\\
&\quad+\frac{\phi}{\delta}\big|\big|\partial_th_{1,D}\big|\big|^2_{L^2(0,T,V')}\,dxdt.
\end{aligned}
$$

En faisant la somme des estimations des différents termes J_i on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\phi\int_\Omega u^2(T,x)\,dx+\phi\int_\Omega v^2(T,x)\,dx+\int_0^T\int_\Omega\underbrace{\Big(\delta\phi-\varepsilon K_+T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\Big)}_{(1)}(|\nabla h|^2+|\nabla h_1|^2)\,dxdt\\
&+\int_{\Omega_T}2|\nabla h_1|^2\underbrace{\left(\Big(K_--\frac{K_+^2}{4K_-}\Big)\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)T_s(h)+(K_--\frac{K_+}{2})T_f(h-h_1)\right)}_{(2)}\,dxdt\\
&+2\int_0^T\int_\Omega\Big(K_-T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\Big)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt\\
&\le\phi\int_0^T\int_\Omega|u|^2\,dxdt+\phi\int_0^T\int_\Omega|v|^2\,dxdt+C,
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

où $C = C(u_0, v_0, h_2, h_D, h_{1,D}, Q_s, Q_f)$. On choisit ε de sorte que $(1) \geq 0$ et $(2) \geq 0$: c'est-à-dire

$$(1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_+ T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\varepsilon \leq \delta\phi \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{\delta\phi}{K_+ h_2},$$

$$(2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Big(1 - L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\Big) \geq 0 \quad \text{toujours vrai car} \quad 1 \geq L_M(x) = \min\Big(1, \frac{M}{x}\Big) \geq 0, \\ \Big(K_- - \frac{K_+^2}{4K_-}\Big) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_+ \leq 2K_-, \end{cases}$$

Pour pouvoir utiliser le lemme de Gronwall sur l'inégalité (3.56), il faut choisir :

$$(3) \begin{cases} \text{un} \quad \varepsilon \quad \text{tel que :} \quad \varepsilon \leq \frac{\delta\phi}{K_+ h_2} \quad \text{et} \\ K_+ \leq 2K_- \ \ i.e \, \text{une sorte de contrôle de l'hétérogénéité spatiale du milieu.} \end{cases}$$

Si la condition (3) est respectée, nous déduisons du lemme de Gronwall qu'il existe un nombre réel positif R, indépendant de ϵ de la régularisation de $\mathcal{X}_0^\epsilon$ et de M tel que :

$$||h||_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R \quad \text{et} \quad ||h_1||_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq R.$$

En particulier, $||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)} \leq R$ et cela indépendamment du choix de la constante M définissant la fonction L_M.
Nous choisissons donc $M = R$ et pouvons affirmer que toute solution faible du problème

$$(\mathcal{P}_1)_a \begin{cases} \phi\partial_t h - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_R\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\nabla h_1\big) &= -Q_s T_s(h), \\ \phi\partial_t h_1 - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1\big) - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h-h_1) + T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\big)\nabla h_1\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big) &= -Q_f T_f(h-h_1) - Q_s T_s(h), \end{cases}$$

avec les conditions initiales et aux bords

$$\begin{cases} h = h_D, & h_1 = h_{1,D} & \text{sur} & \Gamma \\ h(0,x) = h_0, & h_1(0,x) = h_{1,0}(x) & \text{p.p. dans} & \Omega, \end{cases}$$

satisfait : $L_R\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big) = 1$, puisque

$$||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)} \leq R \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq \frac{R}{||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}} \quad \Leftrightarrow \quad \min\left(1, \frac{R}{||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}}\right) = 1.$$

Alors la fonction de troncature L_M introduite dans $(\mathcal{P}_1)_a$ tout au début de la preuve, peut être omise dans le système et nous obtiendrons :

$$(\mathcal{P}_1)^\epsilon \begin{cases} \phi\partial_t h - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\big) &= -Q_s T_s(h), \\ \phi\partial_t h_1 - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1\big) - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h-h_1) + T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\big)\nabla h_1\big) \\ \qquad -\nabla\cdot\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big) &= -Q_f T_f(h-h_1) - Q_s T_s(h), \end{cases}$$

avec les conditions initiales et aux bords

$$\begin{cases} h = h_D, & h_1 = h_{1,D} & \text{sur} & \Gamma \\ h(0,x) = h_0, & h_1(0,x) = h_{1,0}(x) & \text{p.p. dans} & \Omega. \end{cases}$$

3.3.3 Etape 3 : Principes du maximum pour la solution de $(\mathcal{P}_1)^\epsilon$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que presque partout dans $(0,T)\times\Omega$, on a la hiérarchie des interfaces solutions de notre problème :

$$0 \le h_1(t,x) \le h(t,x) \le h_2, \quad \text{ici nous supposons que} \quad h_2 = \text{constante}.$$

Nous conservons la fonction de troncature "$L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})$" dans le système, bien qu'il soit maintenant établi qu'elle vale 1, pour la commodité du lecteur habitué à les trouver dans les formulations variationnelles précédentes.

a) Montrons que $h(t,x) \le h_2$, *p.p.* $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0,T)$:

On pose

$$h_m(t,x) = \big(h-h_2\big)^+ = \sup(0, h-h_2) \in L^2(0,T,V),$$

car sur le bord, $h = h_D \le h_2$ alors $h_D - h_2 \le 0$, donc $(h-h_2)^+_{|\Gamma} = 0$. Il satisfait :

$$\nabla h_m = \chi_{\{h>h_2\}}\nabla h \quad \text{et} \quad h_m(x,t) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad h(t,x) > h_2,$$

où χ est la fonction caractéristique. Soit $\tau \in (0,T)$, on choisit $w(t,x) = h_m(t,x)\chi_{(0,\tau)}(t)$ dans (3.10) et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \phi\langle \partial_t h, h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)\rangle_{V',V}\, dt + \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla h\cdot\nabla h_m(x,t)\, dxdt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)\, dxdt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T:H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)\, dxdt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega Q_sT_s(h)h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}\, dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h, h_m\rangle_{V',V}\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h>h_2\}}|\nabla h|^2\, dxdt}_{I_2} + \underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\chi_{\{h>h_2\}}|\nabla h|^2\, dxdt}_{I_3} \\
&+ \underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_m(x,t)\, dxdt}_{I_4} \\
&+ \underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega Q_sT_s(h)h_m(x,t)\, dxdt}_{I_5} = 0.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

On estime séparément les termes de (3.58). Pour I_1, on applique le résultat de F.Mignot. En effet, si on pose : $f(\lambda) := \lambda - h_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f est continue, croissante et satisfait :

$$\overline{\lim_\lambda}\Big|\frac{f(\lambda)}{\lambda}\Big| = \overline{\lim_\lambda}\Big|\frac{\lambda-h_2}{\lambda}\Big| < \infty.$$

Donc on a :

$$I_1 = \int_0^\tau \phi\langle\partial_t h, h_m\rangle_{V',V}\ dt = \frac{\phi}{2}\int_\Omega\Big(h_m^2(\tau,x) - h_m^2(0,x)\Big)\, dx = \frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\, dx,$$

car $h_m(0,x) = \big(h(0,x) - h_2\big)^+ = 0$, par hypothèse sur $h(0,x) = h_0$.
Les termes I_3, I_4 et I_5 sont nulles puisque $T_s(h)\chi_{\{h>h_2\}} = 0$, par définition de T_s. Alors l'équation (3.58) devient :

$$0 \leq \frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\,dx = \underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h>h_2\}}|\nabla h|^2\,dxdt}_{\geq 0} \leq 0.$$

D'où la contradiction sauf si h_m est nulle presque partout. Donc pour tout $\tau \in (0,T)$:

$$h(\tau,x) \leq h_2(x), \quad p.p. \quad x \in \Omega.$$

b) Montrons que $0 \leq h_1(t,x)$, *p.p.* $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0,T)$:

On pose

$$h_m(t,x) = \big(-h_1(t,x)\big)^+ = \sup(0,-h_1(t,x)) \in L^2(0,T,V).$$

h_m satisfait :

$$\nabla h_m = \chi_{\{h_1<0\}}\nabla h_1 \quad \text{et} \quad h_m(t,x) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad h_1(t,x) < 0.$$

Soit $\tau \in (0,T)$, on choisit $w(t,x) = -h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)$ dans (3.11) et on obtient :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h_1, h_m\rangle_{V',V}\,dt - \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla h_m\,dxdt\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega K\Big(T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1\cdot\nabla h_m\,dxdt\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla h_m\,dxdt\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega \Big(Q_fT_f(h-h_1) + Q_sT_s(h)\Big)h_m\,dxdt = 0,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\underbrace{-\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h_1, h_m\rangle_{V',V}\,dt}_{I_1} \quad \underbrace{+\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h_1<0\}}|\nabla h_1|^2\,dxdt}_{I_2}\\
&\underbrace{+\int_0^\tau\int_\Omega K\Big(T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\Big)\chi_{\{h_1<0\}}|\nabla h_1|^2\,dxdt}_{I_3}\\
&\underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\chi_{\{h_1<0\}}\nabla h\cdot\nabla h_1\,dxdt}_{I_4}\\
&\underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega \Big(Q_fT_f(h-h_1) + Q_sT_s(h)\Big)\chi_{\{h_1<0\}}h_1\,dxdt}_{I_5} = 0,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

avec :

$$I_1 \;=\; -\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h_1, h_m\rangle_{V',V}\,dt = \frac{\phi}{2}\int_\Omega \Big(h_m^2(\tau,x) - h_m^2(0,x)\Big)dx = \frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\,dx,$$

car $h_m(0,x) = \big(-h_1(0,x)\big)^+ = 0$, par hypothèse sur $h_1(0,x) = h_{1,0}$. Le terme I_4 est nul puisque $\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) = 0$ car $h_1 \leq 0$, et I_3 devient :

$$I_3 \;=\; \int_0^\tau\int_\Omega K\Big(T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\Big)|\nabla h_1|^2\,dxdt \geq \int_0^\tau\int_\Omega K_- T_f(h-h_1)\chi_{\{h_1<-\eta\}}|\nabla h_1|^2\,dxdt.$$

Enfin, nous utilisons l'hypothèse (3.7) :

$$-(\max(Q_f,0)+\max(Q_s,0))h_2+Q_{Lf}+Q_{Ls}R_{Ls}\geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega\times(0,T).$$

Puisque les termes de fuite sont nuls ici, nous avons que :

$$-(\max(Q_f,0)+\max(Q_s,0))h_2\geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega\times(0,T),$$

donc le terme I_5 devient :

$$I_5 \quad = \quad -\int_0^\tau\int_\Omega \Big(Q_fT_f(h-h_1)+Q_sT_s(h)\Big)h_m\,dxdt\geq 0.$$

L'équation (3.60) devient :

$$0\leq \frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(t,x)\,dtdx \leq \underbrace{-\left(\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\delta\phi+K_-T_f(h-h_1)\Big)\chi_{\{h_1<0\}}|\nabla h_1|^2\,dxdt\right)}_{\geq 0}\leq 0.$$

Nous concluons que pour tout $\tau\in(0,T)$:

$$h_1(\tau,x)\geq 0, \quad p.p. \quad x\in\Omega.$$

c) Montrons que $h_1(t,x)\leq h(t,x)$, *p.p.* $x\in\Omega$ et $\forall t\in(0,T)$:

On pose :

$$h_m(t,x)=\big(h_1(t,x)-h(t,x)\big)^+=\sup(0,h_1-h)\in L^2(0,T,V).$$

Alors h_m satisfait :

$$\nabla h_m=\chi_{\{h_1-h>0\}}\nabla(h_1-h) \quad \text{et} \quad h_m(t,x)\neq 0 \quad \text{ssi} \quad (h_1-h)(t,x)>0.$$

Soit $\tau\in(0,T)$, on choisit $w(t,x)=h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)$, dans la différence de (3.11) et de (3.10) et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \phi\langle\partial_t(h_1-h),h_m\rangle_{V',V}\,dt+\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla h_m\,dxdt\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega K\Big(\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)T_s(h)+T_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1\cdot\nabla h_m\,dxdt\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\nabla h_1\cdot\nabla h_m\,dxdt\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega Q_fT_f(h-h_1)h_m\,dxdt=0. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

Or $T_f(h-h_1)\chi_{\{h_1-h>0\}}=0$, par définition du prolongement de T_f, alors (3.61) devient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \phi\langle\partial_t(h_1-h),h_m\rangle_{V',V}\,dt+\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla h_m\,dxdt\\
&-\int_0^\tau\int_\Omega K\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)T_s(h)\Big(1-L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\Big)\nabla h_1\cdot\nabla h_m\,dxdt=0. \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

De plus, en gardant à l'esprit que la constante M a été choisie à l'étape 2 de telle sorte que $L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)=1$, il reste dans (3.62) :

$$\int_0^\tau \phi\langle\partial_t(h_1-h),h_m\rangle_{V',V}\,dt+\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla h_m\,dxdt=0. \qquad (3.63)$$

Le premier terme de (3.63) s'écrit :

$$\int_0^\tau \phi\langle\partial_t(h_1-h),h_m\rangle_{V',V}\,dt=\frac{\phi}{2}\int_\Omega\Big(h_m^2(\tau,x)-h_m^2(0,x)\Big)\,dx=\frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\,dx,$$

car $h_m(0,x)=\big(h_1(0,x)-h(0,x)\big)^+=0$, par hypothèse sur $h_1(0,x)=h_{1,0}\le h_0=h(0,x)$. Le second terme de (3.63) s'écrit :

$$\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla h_m\,dxdt=\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h_1-h>0\}}|\nabla(h_1-h)|^2\,dxdt.$$

Ainsi, l'équation (3.63) devient :

$$0\le\frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\,dx=-\underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h_1-h>0\}}|\nabla(h_1-h)|^2dxdt}_{\ge 0}\le 0.$$

Comme précédemment, on conclut que :

$$\forall t\in(0,T),\quad p.p.\quad x\in\Omega,\quad h_1(t,x)\le h(t,x).$$

Nous venons donc de montrer que

$$\forall t\in(0,T),\quad p.p.\quad x\in\Omega,\quad 0\le h_1(t,x)\le h(t,x)\le h_2.$$

d) Conclusion :

À la fin de cette étape, nous avons donc prouvé l'existence d'une solution faible $\big(h^\epsilon,h_1^\epsilon\big)\in\Big(L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))\Big)^2$ du problème $(\mathcal{P}_1)^\epsilon$ sans la fonction de troncature L_M :

$$(\mathcal{P}_1)^\epsilon\begin{cases}\phi\partial_t h^\epsilon-\nabla\cdot\Big(\delta\phi\nabla h^\epsilon\Big)-\nabla\cdot\Big(KT_s(h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\Big)\\ \qquad\qquad -\nabla\cdot\Big(KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h_1^\epsilon\Big)=-Q_sT_s(h^\epsilon),\\ \phi\partial_t h_1^\epsilon-\nabla\cdot\Big(\delta\phi\nabla h_1^\epsilon\Big)-\nabla\cdot\Big(K\Big(T_f(h^\epsilon-h_1^\epsilon)+T_s(h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\Big)\nabla h_1^\epsilon\Big)\\ \qquad\qquad -\nabla\cdot\Big(KT_s(h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\Big)=-Q_fT_f(h^\epsilon-h_1^\epsilon)-Q_sT_s(h^\epsilon),\end{cases}$$

avec les conditions initiales et aux bords

$$\begin{cases}h^\epsilon=h_D, & h_1^\epsilon=h_{1,D} & \text{sur} & \Gamma\\ h^\epsilon(0,x)=h_0, & h_1^\epsilon(0,x)=h_{1,0}(x) & \text{p.p. dans} & \Omega.\end{cases}$$

Cette solution satisfait de plus les principes du maximum suivants dans $(0,T)$,

$$0\le h_1^\epsilon\le h^\epsilon\le h_2\quad\text{p.p.}\quad\text{dans}\quad\Omega.$$

Enfin, on note que les estimations uniformes par rapport à ϵ sont vérifiées :

$$(E.U)\begin{cases}\Big|\Big|h^\epsilon\Big|\Big|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\le C, & \Big|\Big|h_1^\epsilon\Big|\Big|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\le C,\\ \Big|\Big|\partial_t h^\epsilon\Big|\Big|_{L^2(0,T;V')}\le C, & \Big|\Big|\partial_t h_1^\epsilon\Big|\Big|_{L^2(0,T;V')}\le C.\end{cases}$$

3.3.4 Etape 4 : Existence pour le système sans régularisation de la fonction Heaviside

Pour conclure, nous faisons tendre ϵ vers 0. Nous déduisons des estimations $(E.U)$, que les suites $\left(h^\epsilon - h_D\right)_\epsilon$ et $\left(h_1^\epsilon - h_{1,D}\right)_\epsilon$ sont uniformément bornées dans $W(0,T)$. De plus avec le théorème de compacité d'Aubin, nous concluons que les suites $\left(h^\epsilon - h_D\right)_\epsilon$ et $\left(h_1^\epsilon - h_{1,D}\right)_\epsilon$ sont séquentiellement compactes dans $L^2(0,T;H)$ et que l'on peut extraire deux sous-suites toujours notées $\left(h^\epsilon - h_D\right)_\epsilon$ et $\left(h_1^\epsilon - h_{1,D}\right)_\epsilon$ et qui convergent respectivement vers les fonctions $(h - h_D) \in W(0,T)$ et $(h_1 - h_{1,D}) \in W(0,T)$ et qui satisfont :

$$\begin{cases} h^\epsilon \longrightarrow h & \text{dans } L^2(0,T;H) \text{ et } p.p. \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ h^\epsilon \rightharpoonup h & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ \partial_t h^\epsilon \rightharpoonup \partial_t h & \text{faiblement dans } L^2(0,T;V'), \\ h_1^\epsilon \longrightarrow h_1 & \text{dans } L^2(0,T;H) \text{ et } p.p. \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ h_1^\epsilon \rightharpoonup h_1 & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ \partial_t h_1^\epsilon \rightharpoonup \partial_t h_1 & \text{faiblement dans } L^2(0,T;V'). \end{cases}$$

Ces résultats de convergence sont suffisants pour passer à la limite quand ϵ tend vers 0 dans le problème $(\mathcal{P}_1)^\epsilon$.
De plus (h, h_1) satisfait le principe du maximum conforme au réalisme physique :

$$0 \leq h_1(x,t) \leq h(x,t) \leq h_2, \quad \forall t \in (0,T), \quad p.p.\ x \in \Omega.$$

■

Chapitre 4

Existence d'une solution au modèle avec coefficient d'emmagasinement

Sommaire

4.1 Introduction 65
4.2 Résultats 66
4.2.1 Résultats préliminaires 66
4.2.2 Résultat principal (Théorème 2) 69
4.3 Démonstrations 72
4.3.1 Etape 1 : Existence de solution faible pour le problème régularisé 74
4.3.2 Etape 2 : Principes du maximum pour la solution de $(\mathcal{P}_2^\epsilon)$ 86
4.3.3 Etape 3 : Elimination de la première régularisation : $\epsilon_0 \to 0$ 89
4.3.4 Etape 4 : Elimination de la fonction auxiliaire L_M^ϵ 91
4.3.5 Etape 5 : Existence pour le système sans régularisation de la fonction Heaviside . 97

4.1 Introduction

Contrairement au chapitre précédent où il était question d'existence d'une solution faible pour le problème $(\mathcal{P}_1)$, ici nous montrons l'existence d'une solution faible du système $(\mathcal{P}_2)$ (solution très faible, au sens de la définition 4.1 ci-après) de notre modèle d'intrusion d'eau de mer dans un aquifère libre avec la présence d'un coefficient d'emmagasinement dans le domaine de l'eau douce. Ce coefficient prend en compte la compressibilité du milieu ou des roches et celle des fluides. Sa présence dans le nouveau système fera appâraitre une non-linéarité en temps et qui s'ajoutera à celles en espace présentes au chapitre précédent. Cette non-linéarité en temps complexifie le problème et donc nécessite le rajout d'hypothèses sur les données de départ et la définition d'une nouvelle notion de solution faible. La preuve est structurée de façon assez similaire à celle du chapitre précédent mais a nécessité de choisir plus finement les problèmes auxilliaires et le cadre d'analyse fonctionnelle.

Ce nouveau système modélise à la fois l'évolution de front de l'eau salée et de la surface libre supérieure de l'aquifère tout en tenant compte du fait que la capacité de stockage en eau du milieu évolue avec la dynamique de l'écoulement.

Nous rappelons que le système $(\mathcal{P}_2)$ issu de notre chapitre de modélisation se présente comme suit, complété par des conditions aux bords et des conditions initiales :

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases} \phi\mathcal{X}_0(h)\partial_t h - \operatorname{div}\big(\alpha K T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big) - \operatorname{div}\big(\delta\phi\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big) & \\ \qquad -\operatorname{div}\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) - \phi\big(1-\mathcal{X}_0(h)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_s T_s(h), \\ \big(S_f C_w(h_1)T_f(h-h_1)+\phi\big)\mathcal{X}_0(h_1)\partial_t h_1 - \operatorname{div}\big(\delta\phi K\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) & \\ \qquad -\operatorname{div}\big(K\big(T_f(h-h_1)+T_s(h)\big)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) & \\ \qquad -\operatorname{div}\big(\alpha K T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\mathcal{X}_0(h)\nabla h\big) - \phi\big(1-\mathcal{X}_0(h_1)\big)q_L(x) &= -\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1) - \mathcal{Q}_s T_s(h), \end{cases}$$

où le terme $S_f C_w$ caractérise la compressibilité du fluide et du milieu (roches) et se définit comme :

$$C_w = \begin{cases} -\theta(s) & \text{si} \quad s>0 \quad \text{milieu non-saturé} \\ C_s \in \mathbb{R}_+ & \text{si} \quad s=0 \quad \text{milieu saturé} \end{cases},$$

avec θ la teneur en eau dans le domaine.

Remarque 4.1 *Dans la suite de ce chapitre, nous choisirons $\alpha = 1$ et $q_L(x) = 0$ pour simplifier le problème et pour éviter la redondance de l'information sur l'inconnue (principe du maximum), nous supprimons le terme $\mathcal{X}_0(h)$ devant $\partial_t h$ ou ∇h et le terme $\mathcal{X}_0(h_1)$ devant $\partial_t h_1$, mais nous gardons le terme $\mathcal{X}_0(h_1)$ devant ∇h.*

4.2 Résultats

Nous considérons un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$ décrivant la projection de l'aquifère sur le plan horizontal. Le bord de Ω est supposé de classe $\mathcal{C}^1$ et est noté Γ. L'intervalle de temps qui nous intéresse ici est $(0,T)$, avec T un nombre réel positif. Nous posons $\Omega_T = (0,T)\times\Omega$. Pour tout ensemble X, on note par χ_X sa fonction caractéristique.

4.2.1 Résultats préliminaires

Cadre fonctionnel

Pour simplifier les notations, on pose :

$$V = H_0^1(\Omega), \quad V' = H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega), \quad H = L^2(\Omega),$$

$$E = L^1(\Omega_T) + L^2(0,T;V'), \quad E' = L^\infty(\Omega_T)\cap L^2(0,T;V).$$

Le symbole $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit de dualité entre V et V'. Les inclusions compactes et denses suivantes

$$V \subset H \equiv H' \subset V'$$

sont vérifiées et aussi

$$W^{1,q}(\Omega) \subset H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega) \quad \text{pour} \quad q>2,$$

et par conséquent

$$L^\infty(0,T;W^{1,q}(\Omega)) \subset E'.$$

Pour tout $T>0$, $q>2$, soit $W(0,T)$ l'espace tel que :

$$W(0,T) := \Big\{ w\in L^2(0,T;V), \quad \partial_t w \in L^1\big(0,T;(W_0^{1,q}(\Omega))'\big)\Big\}$$

qu'on munit de la norme

$$||w||_{W(0,T)} = \Big(||w||^2_{L^2(0,T;V)} + ||\partial_t w||^2_{L^1\left(0,T;(W_0^{1,q}(\Omega))'\right)}\Big)^{1/2}.$$

D'après J.L. Lions dans [52] prop.2.1 et thm.3.1, chap.1, on a l'injection continue :

$$W(0,T) \subset C([0,T];[V,H^{-3}(\Omega)]_{\frac{1}{4}}) \subset C([0,T];H)$$

et on déduit du lemme d'Aubin que l'injection suivante :

$$W(0,T) \subset\subset L^2(0,T,H)$$

est compacte (lemme d'Aubin, voir [77]). Pour finir nous rappelons un résultat de F.Mignot (voir [38]) qui nous servira dans la suite :

Lemme 4.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante telle que :*

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} \left| f(\lambda)/\lambda \right| < +\infty.$$

Soient $w \in L^2(0,T,H)$ telle que $\frac{dw}{dt} \in L^2(0,T,V')$ et $f(w) \in L^2(0,T,V)$, alors

$$\langle \frac{dw}{dt}, f(w) \rangle_{V,V'} = \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\int_0^{w(.,y)} f(r)dr \right) dy \quad dans \quad \mathcal{D}'(0,T),$$

donc pour tout $0 \le t_1 \le t_2 \le T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \frac{dw}{dt}, f(w) \rangle_{V,V'} dt = \int_\Omega \left(\int_{w(t_1,y)}^{w(t_2,y)} f(r)dr \right) dy.$$

Opérateur de régularisation

Nous utiliserons aussi un opérateur de régularisation. On note $\tilde{v}$ le prolongement par 0 de toute fonction $v \in L^2(0,T;V)$ à valeur dans $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^2))$. Nous rappelons que l'application définie par $v \mapsto \tilde{v}$ est une isométrie de V dans $H^1(\mathbb{R}^2)$:

$$||\nabla \tilde{v}||_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))} \le ||\nabla v||_{L^2(0,T;V)}.$$

Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ une fonction à support dans la boule unité, $\Psi > 0$, telle que $\int_{\mathbb{R}^2} \Psi(x)\,dx = 1$. Pour tout $\epsilon_0 > 0$, nous définissons $\Psi_{\epsilon_0}(x) = \Psi(x/\epsilon_0)/\epsilon_0^2$. Soit $u \in L^2(0,T;H)$ telle que $\partial_t u \in E$ et $u = u_D$ dans $(0,T)\times\Gamma$, où $u_D \in L^2((0,T)\times\Gamma)$ peut être prolongée continûment en une fonction de $\mathbb{R}^2$, encore notée u_D, telle que $\partial_t u_D \in L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2) + L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')$.
On note par $u_{,p}$ le prolongement de $u \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$u_{,p} = \chi_\Omega u + \chi_{^c\Omega} u_D.$$

La convolution $\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p}$ est la régularisation classique de Friedrichs de $u_{,p}$, $\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p} \in L^2(0,T;\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2))$. On note par $[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_T$ la restriction à Ω_T de sa dérivée en temps. Nous vérifions maintenant que $[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_T$ appartient à $L^1(0,T;L^2(\Omega)) + L^2(0,T;(W_0^{1,1}(\Omega))')$. Soit $\phi \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$. Nous remarquons que $\partial_t u_{,p} \in L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2) + L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^2)')$ cela à cause de la construction par extension. De plus, si $\check{\varphi}(\cdot,x) = \varphi(\cdot,-x)$, la fonction $\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}}$ appartient à $L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^2) \cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^2))$. Il en résulte que

$$\langle \partial_t u_{,p}, \Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}} \rangle = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u_{,p}\, (\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}})\, dxdt < \infty.$$

Par conséquent, en utilisant la définition de l'opérateur d'extension $\tilde{\cdot}$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u_{,p}\, (\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}})\, dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\Psi_{\epsilon_0} * \partial_t u_{,p})\tilde{\varphi}\, dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})\tilde{\varphi}\, dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega [\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_T \, \varphi \, dxdt < \infty.$$

De plus, nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^T \int_\Omega [\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_T \, \varphi \, dxdt \Big| &= \Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u_{,p} \, (\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}}) \, dxdt \Big| \\
&\leq ||\partial_t u_{,p}||_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')} ||(\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}})||_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^2)\cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^2))} \\
&\leq ||\partial_t u_{,p}||_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')} \big(||\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}}||_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^2)} + ||\nabla(\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}})||_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))} \\
&\leq ||\partial_t u_{,p}||_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')} \big(||\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}}||_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^2)} + ||\Psi_{\epsilon_0} * \nabla\check{\tilde{\varphi}}||_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))} \\
&\leq \max(||\partial_t u||_E \, , \, ||\partial_t u_D||_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')}) \big(||\Psi_{\epsilon_0}||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} ||\varphi||_{L^\infty(0,T;H)} \\
&\qquad + ||\Psi_{\epsilon_0}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} ||\nabla\varphi||_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \big) \\
&\leq C_\Psi \max(||\partial_t u||_E \, , \, ||\partial_t u_D||_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')}) \big(||\varphi||_{L^\infty(0,T;H)} + ||\nabla\varphi||_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \big) / \epsilon_0^2. \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Si de plus, $\varphi \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^2(0,T;V)$, la dernière estimation devient

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^T \int_\Omega [\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_T \, \varphi \, dxdt \Big| &= \Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u_{,p} \, (\Psi_{\epsilon_0} * \check{\tilde{\varphi}}) \, dxdt \Big| \\
&\leq \max(||\partial_t u||_E \, , \, ||\partial_t u_D||_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')}) \big(||\varphi||_{L^\infty(\Omega_T)} + ||\nabla\varphi||_{L^2(0,T;H)} \big), \quad (4.2)
\end{aligned}$$

puisque $||\Psi_{\epsilon_0}||_{L^1(\mathbb{R}^2)} = 1$. Finalement, nous déduisons la convergence forte suivante :

$$[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_T \to \partial_t u \quad \text{dans} \quad E \quad \text{quand} \quad \epsilon_0 \to 0. \quad (4.3)$$

Remarquons ici que l'estimation (4.2) et le résultat de convergence (4.3) restent encore vrais quand le terme $[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]$ est régularisé en temps par convolution (le même processus de construction que précédemment a encore un sens à condition que par exemple $u \in \mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega))$), cela avec une remise à l'échelle par le même paramètre ϵ_0.
Nous notons par $\big[\cdot \big]_R$, cet opérateur de régularisation en temps.
On remarque que $[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_R = [\Psi_{\epsilon_0} * \partial_t u_{,p}]$ reste vraie dans le cas où Ψ_{ϵ_0} est aussi dépendante du temps. Cette relation est classique si $u_{,p} \in \mathcal{C}^1(0,T)$. C'est aussi vrai pour un cadre de dérivées faibles. En effet, la dérivée faible est définie comme $\partial_t u_{,p} = D \in L^1_{Loc}(0,T)$ telle que

$$\langle u_{,p}, \partial_t\varphi \rangle = -\langle D, \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Alors, si $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\begin{aligned}
\langle [\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_R, \varphi \rangle &= -\langle \Psi_{\epsilon_0} * u_{,p}, \partial_t\varphi \rangle \\
&= -\langle u_{,p}, \check{\Psi}_{\epsilon_0} * \partial_t\varphi \rangle - \langle u_{,p}, \partial_t(\check{\Psi}_{\epsilon_0} * \varphi) \rangle \\
&= \langle D, \check{\Psi}_{\epsilon_0} * \varphi \rangle \\
&= \langle \Psi_{\epsilon_0} * D, \varphi \rangle. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

La contrepartie de l'estimation (4.1) est

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_0^T \int_\Omega [\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_{,p})]_{R,T} \, \varphi \, dxdt \Big| \\
&\quad \leq C \max(||\partial_t u||_E \, , \, ||\partial_t u_D||_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')}) \big(||\varphi||_{L^2(0,T;H)} + ||\nabla\varphi||_{L^1(0,T;L^1(\Omega))} \big) / \epsilon_0^3. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Enfin, nous mentionnons que si (u_n) est une suite bornée dans $L^2(0,T;H)$ telle que u_n converge faiblement vers u dans $L^2(0,T;H)$, alors, grâce à la régularisation, $[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_n)]_{R,T}$ est aussi uniformément bornée par rapport à n dans tout espace $W^{k,p}(\Omega_T)$. Donc on a :

$$[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * u_n)]_T \to \partial_t u \quad \text{dans} \quad W^{k,p}(\Omega_T) \quad \text{pour tout} \quad k,p \in \mathbb{N}^*. \quad (4.6)$$

4.2.2 Résultat principal (Théorème 2)

Le modèle simplifié qui décrit le mouvement des interfaces dans un aquifère libre avec coefficient d'emmagasinement S_f est :

$$\begin{aligned} \phi\partial_t h - \mathrm{div}\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big) - \mathrm{div}\big(\delta\phi\nabla h\big) & \\ -\mathrm{div}\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1\big) &= -\mathcal{Q}_s T_s(h), \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \big(S_f C_w(h_1)T_f(h-h_1)+\phi\big)\partial_t h_1 - \mathrm{div}\big(\delta\phi\nabla h_1\big) & \\ -\mathrm{div}\big(K\big(T_f(h-h_1)+T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\big)\nabla h_1\big) & \\ -\mathrm{div}\big(KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big) &= -\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1) - \mathcal{Q}_s T_s(h), \end{aligned} \tag{4.8}$$

complété par les conditions aux bords et conditions initiales suivantes :

$$h = h_D, \quad \text{et} \quad h_1 = h_{1,D} \qquad \text{sur} \quad (0,T)\times\Gamma, \tag{4.9}$$

$$h(0,x) = h_0(x), \quad \text{et} \quad h_1(0,x) = h_{1,0}(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{4.10}$$

Nous allons donner un résultat d'existence d'une solution faible admissible physiquement pour le problème (4.7)-(4.8) complété par (4.9)-(4.10).

Dans un premier temps, nous donnerons en détails les différentes hypothèses mathématiques.

• Nous supposons qu'il existe deux réels positifs K_- et K_+ tels que :

$$0 < K_-|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1,2} K_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le K_+|\xi|^2 < \infty \quad x\in\Omega, \xi\neq 0.$$

• Nous supposons que la porosité ϕ est constante dans l'aquifère :

$$\phi\in\mathbb{R}, \quad \phi > 0.$$

En effet, dans l'aquifère considéré ici, les effets dus à la variations de la porosité ϕ sont négligeables comparés aux autres dus à la différence de densité ρ. Du point de vue mathématique, cette hypothèse ne change pas la complexité de l'analyse mathématique mais simplifie les calculs.

• Nous supposons que la fonction C_w appartient à $\mathcal{C}^1(0,h_2)$ et est prolongée à $\mathbb{R}$ telle que

$$C_w > 0, \quad \lim_{x\to 0} C_w(x) = 0, \quad C_w(0) = 0 \quad \text{si} \quad x \le 0.$$

• Nous supposons que les termes sources $\mathcal{Q}_s$ et $\mathcal{Q}_f$ sont des fonctions de $L^2(0,T;H)$ telles que

$$\mathcal{Q}_s + \mathcal{Q}_f \le 0.$$

Nous remarquons que le pompage d'eau douce correspond à l'hypothèse $\mathcal{Q}_f \le 0$ *p.p* dans $(0,T)\times\Omega$.

• Nous supposons que les fonctions h_D et $h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;(H^1(\Omega))')$ tandis que h_0 et $h_{1,0}$ sont dans $L^\infty(\Omega)$. La fonction $h_{1,D}$ peut être prolongée en une fonction dans $\mathbb{R}^2$, encore notée $h_{1,D}$ telle que $\partial_t h_{1,D} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^2) + L^2(0,T;(H^1(\mathbb{R}^2))')$.

• Nous supposons que les conditions aux bords et les données initiales satisfont aux conditions physiques réalistes sur la hiérarchie des profondeurs des interfaces.

$$0 \le h_{1,D} \le h_D \le h_2 \quad \text{et} \quad 0 \le h_{1,0} \le h_0 \le h_2 \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{et} \quad h_2 \in L^\infty(\Omega).$$

Dans un second temps, à cause de la non linéarité de l'expression de la dérivée en temps de h_1 (qui entraine une très faible régularité de h_1), nous définissons deux concepts de solution très faible pour notre problème.

Définition 4.1 *Soit $\eta > 0$, soit $\psi \in \mathcal{C}_c^1(X)$ à support dans la boule unité, $\psi \geq 0$, telle que $\int_X \psi(s)\,ds = 1$. On définit ψ_η par :*

$$\psi_\eta = \psi(s/\eta)/\eta^n, \quad \text{où} \quad n = dim(X).$$

Dans la suite on peut choisir $X = \mathbb{R}^2$ ou $X = \mathbb{R}$. La convolution ci-dessous est appliquée dans X.

(**i**) *Le couple (h, h_1) est une (η, ψ)-***solution faible** *de* (4.7)-(4.8) **si**

$$\begin{aligned} h - h_D &\in L^2(0,T;V), \\ h &\in H^1(0,T;V'), \\ h_1 - h_{1,D} &\in L^2(0,T;V), \\ \partial_t h_1 &\in E, \\ (h(0,\cdot), h_1(0,\cdot) &= (h_0, h_{1,0}), \end{aligned}$$

et pour tout $v \in L^2(0,T;V)$ et $w \in E'$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \phi \langle \partial_t h, v\rangle_{V',V}\,dt + \int_{\Omega_T} \delta\phi \nabla h \cdot \nabla v\,dxdt + \int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h \cdot \nabla v\,dxdt \\ &\qquad + \int_{\Omega_T} (KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1 \cdot \nabla v\,dxdt + \int_{\Omega_T} \mathcal{Q}_s T_s(h) v\,dxdt = 0, \\ &\int_0^T \langle \phi \partial_t h_1, w\rangle_{E,E'}\,dt + \int_0^T \langle [\partial_t(\psi_\eta * (h_1)_{,p})]_T, S_f C_w(h_1) T_f(h - h_1) w\rangle_{E,E'}\,dt \\ &\quad + \int_{\Omega_T} \delta\phi \nabla h_1 \cdot \nabla w\,dxdt + \int_{\Omega_T} K\big(T_f(h - h_1) + T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla w\,dxdt \\ &+ \int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h \cdot \nabla w\,dxdt + \int_{\Omega_T} (\mathcal{Q}_f T_f(h - h_1) + \mathcal{Q}_s T_s(h)) w\,dxdt = 0. \end{aligned}$$

De plus les normes de $h - h_D$ dans $L^2(0,T;V)$, de h dans $H^1(0,T;V')$, de $h_1 - h_{1,D}$ dans $L^2(0,T;V)$ et de $\partial_t h_1$ dans E ne dépendent ni de η ni de ψ.

(**ii**) *Le couple (h, h_1) est une solution* **quasi-faible** *de* (4.7)-(4.8) **si**

$$\begin{aligned} h - h_D &\in L^2(0,T;V), \\ h &\in H^1(0,T;V'), \\ h_1 - h_{1,D} &\in L^2(0,T;V), \\ \partial_t h_1 &\in E, \\ (h(0,\cdot), h_1(0,\cdot) &= (h_0, h_{1,0}), \end{aligned}$$

et **si** *pour tout $\mu > 0$, il existe $\Omega_\mu \subset \Omega$, de mesure "petite" (mes$(\Omega_\mu) < \mu$) telle que pour tout $v \in L^2(0,T;V)$ et $w \in E'$ telle que supp$(w) \subset (\Omega \backslash \Omega_\mu) \times (0, T)$, on a :*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \phi \langle \partial_t h, v\rangle_{V',V}\,dt + \int_{\Omega_T} \delta\phi \nabla h \cdot \nabla v\,dxdt + \int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h \cdot \nabla v\,dxdt \\ &\qquad + \int_{\Omega_T} (KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1 \cdot \nabla v\,dxdt + \int_{\Omega_T} \mathcal{Q}_s T_s(h) v\,dxdt = 0, \\ &\int_0^T \langle \partial_t h_1, (\phi + S_f C_w(h_1) T_f(h - h_1)) w\rangle_{E,E'}\,dt + \int_{\Omega_T} \delta\phi \nabla h_1 \cdot \nabla w\,dxdt \\ &\qquad + \int_{\Omega_T} K\big(T_f(h - h_1) + T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla w\,dxdt \\ &+ \int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h \cdot \nabla w\,dxdt + \int_{\Omega_T} (\mathcal{Q}_f T_f(h - h_1) + \mathcal{Q}_s T_s(h)) w\,dxdt = 0. \end{aligned}$$

Remarque 4.2
La régularité de h_1, plus précisément de $\partial_t h_1$, rend ces derniers concepts de solution très faible comparables à celui des **solutions normalisées** *(voir par exemple [57]). Notre définition diffère de celle d'une solution renormalisée par l'équation variationnelle associée, la notre focalisant sur les points de faiblesse structurelle du problème étudié.*

D'une part, pour le concept de (η,ψ)**-solution faible**, *la formulation variationnelle faible contient une régularisation (un degré en espace* **ou** *en temps) de la dérivée en temps de h_1 (qui n'est en fait nécessaire que pour la composante de h_1 dans $H^1(0,T;V')$, voir la preuve ci-dessous). Cette régularisation correspond en quelque sorte aux hypothèses physiques imposées pour la dérivation du modèle considéré ici (variations de l'interface petites et régulières).*
Nous soulignons que les bornes uniformes par rapport à (η,ψ) sont un point crucial pour justifier que (**i**) *peut être considérée comme une définition d'intégrabilité pour notre système.*

D'autre part, le concept de solution **quasi-faible** *signifie en particulier que la solution peut violer l'équation ou les conditions aux bords sur un petit sous ensemble de $(0,T)\times\Omega$. Bien sûr, si la solution était régulière, on serait ramené à prendre $\Omega_\mu=\emptyset$ dans* (**ii**).

Nous allons prouver le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.1
On suppose que le coefficient d'emmagasinement S_f vérifie

$$(\mathcal{H})\quad 1-S_f^2h_2^2|C_w|_\infty^2\Big(\frac{2}{\phi^2}\big(1+\frac{h_2^2K_+^2}{\delta^2\phi^2}\big)+\frac{K_+^2h_2^2}{K_-\delta\phi^3}\Big)>0\qquad et\qquad (4.54).$$

(*a*) *Pour tout temps $T>0$, pour tout $\eta>0$ et pour toute fonction régulière ψ, le problème* (4.7)-(4.8)-(4.9)-(4.10) *admet une* (η,ψ)**-solution faible** (h^η,h_1^η) *dans le sens de la Définition* (4.1) **(i)** *telle que le principe du maximum suivant est vérifié*

$$0\le h_1^\eta(t,x)\le h^\eta(t,x)\le h_2\quad pour\ p.p.\quad x\in\Omega\quad et\ pour\ tout\quad t\in(0,T).$$

(*b*) *De toute suite de* (η,ψ)**-solutions faibles** $(h^\eta,h_1^\eta)_{\eta>0}$, *on peut extraire une sous-suite convergeant vers une solution* **quasi-faible** (h,h_1) *du problème* (4.7)-(4.8)-(4.9)-(4.10) *au sens de la Définition* (4.1) **(ii)** *avec*

$$0\le h_1(t,x)\le h(t,x)\le h_2,\quad t\in(0,T)\quad pour\ p.p.\quad x\in\Omega.$$

Remarque 4.3
Nous avons ici supposé la porosité ϕ constante. Cela permet d'alléger quelque peu les estimations. Cependant la conclusion du théorème 4.1 *reste valide en supposant que la porosité est une fonction donnée dans $L^\infty(\Omega)$ telle qu'il existe $\phi_-\in\mathbb{R}_+^*$, $\phi_+\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\phi_-\le\phi(x)\le\phi_+$ presque partout dans Ω. Les résultats de compacité de type Aubin-Simon utilisés ici doivent alors être remplacés par une variante telle que celle présentée dans [39] (lemme rappelé ci-dessous) :*

Lemme 4.2
Si X et Y sont des espaces de Banach tels que $X\subset L^2\subset Y$ avec injection compacte de X dans L^r, $r\ge1$; si $1<q\le\infty$; si W est un ensemble de fonctions bornées de $L^q(0,T;L^r)\cup L^1(0,T;X)$; si $\phi\partial_t v$ est bornée dans $L^1(0,T;Y)$, pour tout $v\in W$;
alors W est relativement compact dans $L^p(0,T;L^r)$, pour tout $1\le p<q$.

Remarque 4.4
Analysons ici les hypothèses et les données utilisées pour énoncer le Théorème (4.1).

L'hypothèse $\mathcal{H}$ signifie grossièrement que le paramètre S_f (coefficient d'emmagasinement) est "petit". C'est effectivement le cas des aquifères naturels (et d'ailleurs la plupart des auteurs le supposent nul ($S_f = 0$)). Néanmoins, négliger S_f peut produire une importante mésestimation du niveau de l'eau salée (voir le chapitre 4 sur les illustrations numériques en fin de manuscrit). Si $S_f = 0$, l'hypothèse $\mathcal{H}$ est évidemment vérifiée, mais cela implique aussi que $\Omega_\mu = \emptyset$. Donc nous retrouvons le résultat du chapitre précédent, dans un cadre plus faible.

La profondeur h_2 est supposée constante pour simplifier les calculs mais la preuve se généralise à $h_2 \in L^\infty(\Omega)$.

Le paragraphe suivant est consacré à la preuve du Théorème (4.1). Notre approche est tout à fait classique pour un tel problème non linéaire : nous adoptons une stratégie de point fixe. Néanmoins, nous devons nous attaquer à deux difficultés couplées :

• Tout d'abord, les deux équations sont fortement couplées avec en plus de la non linéarité en espace constatée dans le chapitre précédent, la non linéarité devant la dérivée en temps de h_1. De ce fait, en vu de bénéficier de la théorie classique des équations paraboliques de Ladyzenskaya (voir [48]), nous introduisons une régularisation en temps et en espace de ce dernier terme (régularisation par convolution présentée dans les Résultats préliminaires au début du chapitre).
Ensuite, les estimations resteront fortement couplées et la détermination d'un sous-espace convexe adéquat où chercher un point fixe est un problème difficile. Cette difficulté est un peu relaxée par l'introduction d'un poids basé sur la vitesse du front de l'eau douce dans les deux équations.

• Imaginons que nous parvenions à travers cette stratégie de point fixe à trouver une solution faible pour le problème auxiliaire, régularisé et pénalisé. A cette étape, nous devons faire face à la seconde difficulté avant de pouvoir affirmer que l'on a des estimations suffisantes pour laisser les paramètres de régularisation et de pénalisation tendre vers zéro. En effet, ce système parabolique laisse à espérer une solution faible (h, h_1) dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. On aurait alors $(S_f C_w(h_1)T_f(h-h_1)+\phi)\partial_t h_1$ dans $L^2(0,T;V')$ et $\partial_t h_1 \in E = L^1(\Omega_T) + L^2(0,T;V')$. Cela signifie que nous sommes limités à des fonctions test de $L^\infty(\Omega_T) \cap L^2(0,T;V)$, nous plaçant ainsi dans le cadre des solutions renormalisées (voir [57]). Nous allons heureusement montrer un résultat de principe du maximum faible pour h et h_1 qui nous permettra d'aller au dela de ce dernier cadre.

En bref l'esquisse de la preuve est la suivante :
La première étape est l'utilisation du théorème de point fixe de Schauder pour montrer un résultat d'existence pour un problème auxiliaire, régularisé, tronqué et pénalisé. Plus précisément, nous régularisons la fonction $\mathcal{X}_0$ avec un paramètre $\epsilon > 0$, nous utilisons aussi la régularisation par convolution et nous introduisons un poids basé sur la vitesse du front de l'eau douce dans les deux équations. Nous prouvons que le point fixe est une solution qui vit dans un sous-espace convexe caractérisé par des estimations du type renormalisées. La troncature se révèle alors inutile puisque nous montrons que la solution régularisée satisfait le principe du maximum annoncé dans le Théorème (4.1).
A ce stade, nous sommes en mesure de supprimer le premier type de régularisation, à savoir la régularisation par convolution ($\epsilon_0 \to 0$). Nous prouvons aussi que nous avons un contrôle suffisant sur la vitesse du front d'eau douce pour ignorer le poids en vitesse. Enfin, nous montrons que nous avons des estimations suffisamment uniformes pour faire tendre ϵ vers zéro.

4.3 Démonstrations

Soient $\epsilon > 0$, $\epsilon_0 > 0$ et M une constante que nous préciserons plus tard. Pour tout $g_1 \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, nous posons :

$$L^\epsilon_M(||\nabla g_1||) = \min\Big(1, \frac{M}{2||\nabla[\Psi_\epsilon * g_{1,p}]_{R,T}||_{L^2(0,T;H)}}\Big). \tag{4.11}$$

Cette expression jouera le rôle de poids dans la première étape de la preuve. Puisque $\nabla[\Psi_\epsilon * g_{1,p}]_{R,T} \to \nabla g_1$ dans $L^2(0,T;H)$ quand $\epsilon \to 0$, pour ϵ suffisamment petit nous pourrons utiliser l'estimation suivante : Pour tout $(g, g_1) \in L^2(0,T;H) \times L^2(0,T;H^1(\Omega))$, en posant

$$d(g, g_1) = -T_s(g)L^\epsilon_M(||\nabla g_1||)\nabla g_1,$$

nous avons

$$||d(g,g_1)||_{L^2(0,T;H)} \leq Mh_2.$$

Nous notons par $\mathcal{X}_0^\epsilon$ la régularisation de la fonction de Heaviside définie par

$$\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_1 \leq 0, \\ h_1/(h_1^2+\epsilon)^{1/2} & \text{si} \quad h_1 > 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{X}_0(h_1), \\ \text{et} \quad 1 \geq \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \geq 0. \end{cases}$$

Soit aussi T_{ff} une fonction auxiliaire continue telle que :

$$T_{ff}(x) = \begin{cases} T_f(x) & \text{si} \quad x \leq 2h_2, \\ 0 & \text{si} \quad x > 3h_2, \end{cases} \tag{4.12}$$

soit la fonction S appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$S(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq h_2, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 3h_2, \end{cases} \qquad ||S'||_\infty \leq 1, \quad ||S''||_\infty \leq 1, \tag{4.13}$$

et soit la fonction T définie par

$$T(x) = \begin{cases} -4h_2 & \text{si} \quad x < -4h_2, \\ x & \text{si} \quad -4h_2 \leq x \leq 4h_2, \\ 4h_2 & \text{si} \quad x > 4h_2, \end{cases} \tag{4.14}$$

où l'on pose par abus de notation

$$T'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -4h_2, \\ 1 & \text{si} \quad -4h_2 \leq x \leq 4h_2, \\ 0 & \text{si} \quad x > 4h_2. \end{cases} \tag{4.15}$$

Les trois dernières fonctions sont introduites pour permettre le traitement du terme $\partial_t h_1$ dans l'espace fonctionnel E.

Ainsi nous avons enfin les outils pour définir le nouveau système auxiliaire, régularisé et tronqué associé à (4.7)-(4.8) :

$$\begin{aligned} \phi\partial_t h^{\epsilon_0,\epsilon} - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h^{\epsilon_0,\epsilon}\big) - \nabla\cdot\big(KT_s(h^{\epsilon_0,\epsilon})L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\nabla h^{\epsilon_0,\epsilon}\big) \\ -\nabla\cdot\big(KT_s(h^{\epsilon_0,\epsilon})L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\big) = -\mathcal{Q}_s T_s(h^{\epsilon_0,\epsilon}), \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \phi\partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon} + S_f C_w(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})T_{ff}(T_f(h^{\epsilon_0,\epsilon}) - h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\big) \\ -\nabla\cdot\big(K\big(T_f(h^{\epsilon_0,\epsilon} - h_1^{\epsilon_0,\epsilon}) + T_s(h^{\epsilon_0,\epsilon})\big)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\big) \\ -\nabla\cdot\big(KT_s(h^{\epsilon_0,\epsilon})L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\nabla h^{\epsilon_0,\epsilon}\big) \\ = -\mathcal{Q}_f T_f(h^{\epsilon_0,\epsilon} - h_1^{\epsilon_0,\epsilon}) - \mathcal{Q}_s T_s(h^{\epsilon_0,\epsilon}) = 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ce système est complété par les conditions initiales et aux bords :

$$\begin{aligned} &h^{\epsilon_0,\epsilon} = h_D, \quad h_1^{\epsilon_0,\epsilon} = h_{1,D} \qquad \text{sur} \quad (0,T)\times\Gamma, \\ &h^{\epsilon_0,\epsilon}(0,x) = h_0, \quad h_1^{\epsilon_0,\epsilon}(0,x) = h_{1,0}(x) \quad \text{p.p} \quad \text{dans}\,\Omega. \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.3.1 Etape 1 : Existence de solution faible pour le problème régularisé

Lemme 4.3 *Pour tout $\epsilon_0 > 0$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une solution faible $(h^{\epsilon_0,\epsilon}, h_1^{\epsilon_0,\epsilon})$ du problème (4.16)-(4.17)-(4.18) telle que $(h^{\epsilon_0,\epsilon}, h_1^{\epsilon_0,\epsilon}) \in (L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2$, $\partial_t h^{\epsilon_0,\epsilon} \in L^2(0,T;V')$, $\partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon} \in E$. De plus les estimations suivantes (uniformes par rapport à ϵ_0 et ϵ) sont vérifiées :*

$$||h^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V')} \leq C(M), \tag{4.19}$$

$$||T'(h_1^{\epsilon_0,\epsilon} - h_{1,D})^{1/2}\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon})||_{L^2(0,T;H)} \leq C(M), \tag{4.20}$$

$$||\partial_t S(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})||_E \leq C(M). \tag{4.21}$$

Preuve :

Dans la suite nous allons omettre ϵ_0 et ϵ pour simplifier les notations. La formulation variationnelle faible associée au problème (4.16)-(4.17)-(4.18) s'écrit donc : trouver (h, h_1) telle que $(h-h_D, h_1-h_{1,D}) \in (L^2(0,T;V))^2$ et pour tout $w \in L^2(0,T;V)$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi\langle \partial_t h\,,\, w\rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} \delta\phi \nabla h\cdot\nabla w\, dxdt + \int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon(||\nabla h_1||)\nabla h\cdot\nabla w\, dxdt \\ + \int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon(||\nabla h_1||)\nabla h_1\cdot\nabla w\, dxdt + \int_{\Omega_T} \mathcal{Q}_s T_s(h) w\ dxdt = 0,\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi\langle \partial_t h_1 + S_f C_w(h_1)T_{ff}(T_f(h)-h_1)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(h_1)_{,p}]_{R,T}\,,\, w\rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla w\, dxdt \\ + \int_{\Omega_T} K\big(T_f(h-h_1) + T_s(h)L_M^\epsilon(||\nabla h_1||)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\big)\nabla h_1\cdot\nabla w\, dxdt \\ + \int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon(||\nabla h_1||)\nabla h\cdot\nabla w\, dxdt + \int_{\Omega_T} (\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1) + \mathcal{Q}_s T_s(h))\, w\, dxdt = 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Première étape de la stratégie de point fixe, nous fixons $(\bar{h}, \bar{h}_1) \in (L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2$ telle que $S(\bar{h}_1) \in W^{1,1}(\Omega) + H^1(0,T;V')$, $\bar{h}_1 = h_{1,D}$ sur $(0,T)\times\Gamma$ et

$$\begin{aligned}&||\nabla\bar{h}||_{L^2(0,T;H)} \leq M_h, \quad ||\nabla\bar{h}_1||_{L^2(0,T;H)} \leq M_1,\\ &||T'(\bar{h}_1 - h_{1,D})^{1/2}\nabla\bar{h}_1||_{L^2(0,T;H)} \leq M_S, \quad ||\partial_t S(\bar{h}_1)||_E \leq M_S',\end{aligned} \tag{4.24}$$

où M_h, M_1, M_S et M_S' sont des nombres réels positifs qui seront spécifiés plus tard.
Afin d'alléger la preuve, nous supposons que

$$\max(M_S', ||\partial_t S(h_{1,D})||_{L^1(0,T;\mathbb{R}^2)+L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^2)')}) = M_S',$$

qui est le cas le plus compliqué pour la preuve du point fixe. Nous définissons l'application $\mathcal{F}$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \quad : \quad (L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2 \quad &\to \quad (L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2\\ (\bar{h},\bar{h}_1) \quad &\mapsto \quad \mathcal{F}(\bar{h},\bar{h}_1) = (\mathcal{F}_1(\bar{h},\bar{h}_1) = h, \mathcal{F}_2(\bar{h},\bar{h}_1) = h_1)\end{aligned}$$

où (h, h_1) est la solution de

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi\langle \partial_t h\,,\, w\rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} \delta\phi \nabla h\cdot\nabla w\, dxdt + \int_{\Omega_T} KT_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1||)\nabla h\cdot\nabla w\, dxdt \\ + \int_{\Omega_T} KT_s(\bar{h})\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1||)\nabla h_1\cdot\nabla w\, dxdt + \int_{\Omega_T} \mathcal{Q}_s T_s(\bar{h}) w\ dxdt = 0,\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\int_0^T \phi\langle\partial_t h_1\,,w\rangle_{V',V}dt+\int_{\Omega_T}\delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla w\,dxdt+\int_{\Omega_T}K\big(T_f(h-\bar h_1)+T_s(h)L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1)\big)\nabla h_1\cdot\nabla w\,dxdt$$
$$+\int_0^T\langle[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0}*S(\bar h_1)_{,p}]_{R,T}\,,S_fC_w(\bar h_1)T_{ff}(T_f(h)-\bar h_1)w\rangle_{V',V}dt+\int_{\Omega_T}KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1)L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1||)\nabla h\cdot\nabla w\,dxdt$$
$$+\int_{\Omega_T}\left(\mathcal{Q}_fT_f(h-\bar h_1)+\mathcal{Q}_sT_s(h)\right)w\,dxdt=0, \tag{4.26}$$

pour tout $w\in L^2(0,T;V)$ et $(h-h_D;h_1-h_{1,D})\in L^2(0,T;V)$, $\quad(h(0,\cdot),h_1(0,\cdot))=(h_0(\cdot),h_{1,0}(\cdot))$.
Nous savons de la théorie classique des équations paraboliques (voir [48]) que le système (4.25)-(4.26) admet une unique solution puisque ce système est parabolique et linéaire. Notons que la régularisation en espace dans le terme $[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0}*S(\bar h_1)_{,p}]$ assure que la solution (h,h_1) vit bien dans $(L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V'))^2$. Ce point sera d'ailleurs confirmé par les estimations ci-après.

Maintenant nous allons prouver la propriété de point fixe pour l'application $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$. Vu le fort couplage des équations du système, nous devons faire face à de lourds calculs pour établir des estimations tout en évitant les constantes génériques.
Soient $(\bar h^n,\bar h_1^n)$ une suite de fonctions de $(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2$ qui satisfait la condition (4.24), telle que

$$(\bar h^n,\bar h_1^n)\to(\bar h,\bar h_1)\quad\text{dans}\quad(L^2(0,T;H))^2\quad\text{quand}\quad n\to\infty.$$

Au vu des estimations (4.24) et du résultat (4.6), on a quand $n\to\infty$

$$\begin{aligned}(\bar h^n,\bar h_1^n)&\rightharpoonup(\bar h,\bar h_1)\quad\text{faiblement dans}\quad(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2,\\ [\partial_t(\Psi_{\epsilon_0}*S(\bar h_1^n)_{,p}]_{R,T}&\to[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0}*S(\bar h_1)_{,p}]_{R,T}\quad\text{dans}\quad E,\\ L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1^n||)&\to L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1||)\quad\text{uniformément dans}\quad\Omega_T.\end{aligned}$$

Continuité de $\mathcal{F}_1$:

On pose $h_n=\mathcal{F}_1(\bar h^n,\bar h_1^n)$ et $h=\mathcal{F}_1(\bar h,\bar h_1)$. Nous cherchons à montrer que $h_n\to h$ dans $L^2(0,T;H)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, h_n satisfait l'équation (4.25). En prenant $w=h_n-h_D$ dans (4.25) avec la dépendance de n, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T\phi\langle\partial_t(h_n-h_D)\,,\,h_n-h_D\rangle_{V',V}dt+\int_{\Omega_T}(\delta\phi+KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1^n||))\nabla h_n\cdot\nabla(h_n-h_D)\,dxdt&\\ =-\int_{\Omega_T}KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1^n||)\nabla\bar h_1^n\cdot\nabla(h_n-h_D)\,dxdt&\\ -\int_{\Omega_T}\mathcal{Q}_sT_s(\bar h^n)(h_n-h_D)\,dxdt-\int_0^T\phi\langle\partial_t h_D\,,\,h_n-h_D\rangle_{V',V}dt.&\end{aligned}\tag{4.27}$$

La fonction h_n-h_D appartient à $L^2(0,T;L^2(\Omega))\cap H^1(0,T;V')$ et donc à $\mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega))$. Ainsi grâce au Lemme (4.1), on écrit :

$$\int_0^T\phi\langle\partial_t(h_n-h_D),(h_n-h_D)\rangle_{V',V}\,dt=\frac{\phi}{2}||h_n(T,\cdot)-h_D(T,\cdot)||_H^2-\frac{\phi}{2}||h_0-h_{D|t=0}||_H^2.\tag{4.28}$$

De plus

$$\int_{\Omega_T}(\delta\phi+KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1^n||))\nabla h_n\cdot\nabla h_n\,dxdt\geq\delta\phi||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)}.\tag{4.29}$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient pour tout $\varepsilon_1>0$:

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Omega_T}(\delta\phi+KT_s(\bar h^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar h_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar h_1^n||))\nabla h_n\cdot\nabla h_D\,dxdt\Big|&\leq(\delta\phi+K_+h_2)||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}||\nabla h_D||_{L^2(0,T;H)}\\ &\leq\frac{\varepsilon_1}{4}||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)}+\frac{(\delta\phi+K_+h_2)^2}{\varepsilon_1}||\nabla h_D||^2_{L^2(0,T;H)},\end{aligned}\tag{4.30}$$

$$\Big| - \int_{\Omega_T} KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\nabla\bar{h}_1^n \cdot \nabla h_n \, dxdt\Big| \leq K_+||d(\bar{h}^n,\bar{h}_1^n)||_{L^2(0,T;H)}||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}$$
$$\leq MK_+h_2||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)} \leq \frac{\varepsilon_1}{4}||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{K_+^2M^2}{\varepsilon_1}h_2^2, \tag{4.31}$$

$$\Big| - \int_{\Omega_T} \mathcal{Q}_s T_s(\bar{h}^n)(h_n - h_D) \, dxdt\Big| \leq \frac{||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi}h_2^2 + \frac{\phi}{2}||h_n - h_D||^2_{L^2(0,T,H)}. \tag{4.32}$$

Le terme suivant est estimé simplement par :

$$\Big| \int_{\Omega_T} KT_s(\bar{h}^n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\nabla\bar{h}_1^n \cdot \nabla h_D \, dxdt\Big| \leq K_+||d(\bar{h}^n,\bar{h}_1^n)||_{L^2(0,T;H)}||\nabla h_D||_{L^2(0,T;H)},$$
$$\leq K_+Mh_2||\nabla h_D||_{L^2(0,T;H)}. \tag{4.33}$$

Enfin, nous avons

$$\Big| - \int_0^T \phi\langle\partial_t h_D \, , \, h_n - h_D\rangle_{(H^1)',H^1}dt\Big| \leq \frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_D||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + \frac{\delta\phi}{2}||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)}$$
$$+\frac{\delta\phi}{2}||\nabla h_D||^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{\delta\phi}{2}||h_n - h_D||^2_{L^2(0,T;H)}. \tag{4.34}$$

En utilisant les estimations de (4.28) à (4.34) dans (4.27), on obtient après simplification :

$$\frac{\phi}{2}||h_n(T,\cdot) - h_D(T,\cdot)||_H^2 + (\frac{\delta\phi}{2} - \varepsilon_1)||\nabla h_n||^2_{L^2(0,T;H)} \leq \frac{\phi}{2}||h_0 - h_{D|t=0}||_H^2 + \Big(\frac{||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi} + \frac{K_+^2M^2}{2\varepsilon_1}\Big)h_2^2$$
$$+\Big(\frac{(\delta\phi + K_+h_2)^2}{2\varepsilon_1} + \frac{\delta\phi}{2}\Big)||h_D||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + K_+Mh_2||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$
$$+\frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_D||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + \frac{\phi}{2}(1+\delta)\int_0^T ||h_n - h_D||_H^2 dt, \tag{4.35}$$

pour tout $\varepsilon_1 > 0$. Nous choisissons ε_1 tel que $\delta\phi/2 - \varepsilon_1 > 0$, à savoir $\varepsilon_1 = \frac{\delta\phi}{4}$. Le lemme de Gronwall appliqué à (4.35) permet de conclure qu'il existe des nombres réels $A_M = A_M(\phi,\delta,K,h_0,h_D,h_{1,D},h_2,\mathcal{Q}_S,M)$, et $M_{h,2} = M_{h,2}(\phi,\delta,K,h_0,h_D,h_{1,D},h_2,\mathcal{Q}_S,M)$ dépendant seulement de M tels que :

$$\begin{aligned}
||h_n - h_D||_{L^\infty(0,T;H)} \leq & \Bigg(||h_0 - h_{D|t=0}||_H^2 + \Big(\frac{||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi} + \frac{4K_+^2M^2}{\delta\phi^2}\Big)h_2^2 \\
& +\Big(\frac{4(\delta\phi + K_+h_2)^2}{\delta\phi^2} + \delta\Big)||h_D||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{2K_+Mh_2}{\phi}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
& +\frac{1}{\delta}||\partial_t h_D||^2_{L^2(0,T;(H^1)')}\Bigg)^{1/2} e^{(1+\delta)T/2}, \\
||h_n||_{L^\infty(0,T;H)} \leq & \Bigg(||h_0 - h_{D|t=0}||_H^2 + \Big(\frac{||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi} + \frac{4K_+^2M^2}{\delta\phi^2}\Big)h_2^2 \\
& +\Big(\frac{4(\delta\phi + K_+h_2)^2}{\delta\phi^2} + \delta\Big)||h_D||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{2K_+Mh_2}{\phi}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
& +\frac{1}{\delta}||\partial_t h_D||^2_{L^2(0,T;(H^1)')}\Bigg)^{1/2} e^{(1+\delta)T/2} + ||h_D||_{L^\infty(0,T;H)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
||h_n||_{L^\infty(0,T;H)} &\leq \Big(||h_0 - h_{D|t=0}||_H^2 + \Big(\frac{||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi} + \frac{4K_+^2M^2}{\delta\phi^2}\Big)h_2^2 \\
&\quad + \Big(\frac{4(\delta\phi + K_+h_2)^2}{\delta\phi^2} + \delta\Big)||h_D||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{2K_+Mh_2}{\phi}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad + \frac{1}{\delta}||\partial_t h_D||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} \Big)^{1/2} e^{(1+\delta)T/2} + (||h_D||^2_{L^\infty(0,T;H)})^{1/2} e^{(1+\delta)T/2}, \\
&\leq \Big(||h_0 - h_{D|t=0}||_H^2 + \Big(\frac{||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi} + \frac{4K_+^2M^2}{\delta\phi^2}\Big)h_2^2 \\
&\quad + \Big(\frac{4(\delta\phi + K_+h_2)^2}{\delta\phi^2} + \delta\Big)||h_D||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{2K_+Mh_2}{\phi}||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad + \frac{1}{\delta}||\partial_t h_D||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + ||h_D||^2_{L^\infty(0,T;H)} \Big)^{1/2} e^{(1+\delta)T/2},
\end{aligned}
$$

donc on a :

$$
\begin{aligned}
&||h_n||_{L^\infty(0,T;H)} \leq A_M^{1/2} e^{(1+\delta)T/2}, \\
&||h_n||_{L^2(0,T;H)} \leq A_M^{1/2} T^{1/2} e^{(1+\delta)T/2}, \\
&||h_n||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq M_{h,2} := \Big(\frac{2}{\delta} A_M (1 + (1+\delta)Te^{(1+\delta)T})\Big)^{1/2},
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A_M = ||h_0 - h_{D|t=0}||_H^2 &+ \Big(\frac{||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{\phi^2} + \frac{4K_+^2M^2}{\delta\phi^2}\Big)h_2^2 + \Big(\frac{4(\delta\phi + K_+h_2)^2}{\delta\phi^2} + \delta\Big)||h_D||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&+ \frac{2}{\phi}K_+Mh_2||h_D||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{1}{\delta}||\partial_t h_D||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + ||h_D||^2_{L^\infty(0,T;H)}.
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

Donc la suite $(h_n)_n$ est uniformément bornée (par rapport à n et aussi à ϵ_0 et ϵ) dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H)$.
Remarquons que l'estimation dans $L^\infty(0,T;H)$ est bien justifiée par le fait que nous pouvons refaire les mêmes estimations en remplaçant T par $\tau \leq T$ dans l'intégration en temps.

Nous allons maintenant montrer que la suite $(\partial_t(h_n))_n$ est bornée dans $L^2(0,T;V')$. En raison de (4.25), nous avons :

$$
\begin{aligned}
||\partial_t h_n||_{L^2(0,T;V')} &= \sup_{||w||_{L^2(0,T;V)}\leq 1} \Big| \int_0^T \langle \partial_t h_n, w\rangle_{V',V}\, dt \Big| \\
&= \sup_{||w||_{L^2(0,T;V)}\leq 1} \Big| -\frac{1}{\phi}\int_{\Omega_T} \Big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\Big)\nabla h \cdot \nabla w\, dxdt \\
&\quad - \int_{\Omega_T} \frac{1}{\phi} KT_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||\big)\nabla\bar{h}_1^n \cdot \nabla w\, dxdt - \int_{\Omega_T} \frac{1}{\phi}\mathcal{Q}_s T_s(\bar{h}^n) w\, dxdt \Big|.
\end{aligned}
$$

Puisque h_n est uniformément bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ par $M_{h,2}$ avec (4.36), alors on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\phi}\Big| - \int_{\Omega_T} \Big(\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\Big)\nabla h_n \cdot \nabla w\, dxdt \Big| &\leq \big(\delta\phi + K_+h_2\big)||h_n||_{L^2(0,T,H^1)}||w||_{L^2(0,T;V)} \\
&\leq (\delta\phi + K_+h_2)M_{h,2}||w||_{L^2(0,T;V)}.
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

Ensuite, on a :

$$
\frac{K}{\phi}\Big| \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h}^n)L_M\big(||\nabla\bar{h}_1^n||\big)\nabla\bar{h}_1^n \cdot \nabla w\, dxdt \Big| \leq \frac{K_+Mh_2}{\phi}||w||_{L^2(0,T;V)}. \tag{4.39}
$$

Enfin, on a :

$$\Big|\int_{\Omega_T} \mathcal{Q}_s T_s(\bar{h}^n) w \; dxdt\Big| \leq ||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)} h_2 ||w||_{L^2(0,T;V)} \leq ||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)} h_2 ||w||_{L^2(0,T;V)}. \tag{4.40}$$

En faisant la somme de (4.38) à (4.40), on obtient la norme dans $L^2(0,T,V')$ de $\partial_t h$:

$$||\partial_t h||_{L^2(0,T,V')} \leq \Big(\delta M_{h,2} + \frac{h_2}{\phi}(K_+ M_{h,2} + K_+ M + ||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)})\Big)||w||_{L^2(0,T;V)}$$

avec $||w||_{L^2(0,T;V)} \leq 1$ alors

$$||\partial_t h||_{L^2(0,T;V')} \leq \delta M_{h,2} + \frac{h_2}{\phi}(K_+ M_{h,2} + K_+ M + ||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)}) := D_M. \tag{4.41}$$

Nous venons de montrer que $(h_n)_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$. En utilisant le Lemme d'Aubin, nous pouvons extraire une sous-suite encore notée $(h_n)_n$ qui converge fortement dans $L^2(\Omega_T)$ et faiblement dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$ vers une limite dénommée ℓ. En particulier, la convergence forte dans $L^2(\Omega)$ impliquant la convergence presque partout dans Ω_T, nous vérifions que ℓ est solution de (4.25). La solution de (4.25) étant unique, nous avons en fait $\ell = h$.

Continuité de $\mathcal{F}_2$:
On pose $h_{1,n} = \mathcal{F}_2(\bar{h}^n, \bar{h}_1^n)$ et $h_1 = \mathcal{F}_2(\bar{h}, \bar{h}_1)$. Nous cherchons à montrer que :

$$h_{1,n} \to h_1 \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H) \quad \text{et} \quad \partial_t S(h_{1,n}) \to \partial_t S(h_1) \quad \text{dans} \quad E.$$

D'abord nous réécrivons l'équation (4.26) avec comme fonction test $w = h_{1,n} - h_{1,D}$ et nous intégrons sur $(0,T) \times \Omega$. Nous obtenons après réduction :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \phi \langle \partial_t (h_{1,n} - h_{1,D}) \, , (h_{1,n} - h_{1,D}) \rangle_{V',V} dt \\
&\quad + \int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h_n) L_M^\epsilon(||\nabla \bar{h}_1^n||) \mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big) \nabla h_{1,n} \cdot \nabla h_{1,n} \, dxdt \\
&\quad = \int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h_n) L_M^\epsilon(||\nabla \bar{h}_1^n||) \mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big) \nabla h_{1,n} \cdot \nabla h_{1,D} \, dxdt \\
&\quad - \int_{\Omega_T} K T_s(h_n) \mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) L_M^\epsilon(||\nabla \bar{h}_1^n||) \nabla h_n \cdot \nabla (h_{1,n} - h_{1,D}) \, dxdt \\
&\quad - \int_0^T \langle S_f C_w(\bar{h}_1^n) T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n) [\partial_t (\Psi_{\epsilon_0} * S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T} \, , (h_{1,n} - h_{1,D}) \rangle_{V',V} dt \\
&\quad - \int_{\Omega_T} \left(\mathcal{Q}_f T_f(h_n - h_1^n) + \mathcal{Q}_s T_s(h_n)\right) (h_{1,n} - h_{1,D}) \, dxdt - \int_0^T \phi \langle \partial_t h_{1,D} \, , (h_{1,n} - h_{1,D}) \rangle_{V',V} dt.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Les principales estimations sont obtenues grâce aux mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve de la continuité de $\mathcal{F}_1$. Néanmoins, nous devons détailler les calculs car ces estimations seront utilisées pour determiner et choisir une constante adéquate dans (4.24). Par ailleurs, la dépendance (ou l'indépendance...) de ces estimations par rapport à ϵ_0 et à ϵ sera utilisée en fin de chapitre.

Nous soulignons que nous pouvons maintenant utiliser (4.36) précédemment établie pour (h_n), d'où la dépendance par rapport à $M_{h,2}$ dans l'estimation qui va suivre. Nous rappelons aussi que :

$$T_s(h) \geq 0, \qquad T_f(h - h_1) \geq 0 \quad \text{et} \quad T_s(h) + T_f(h - h_1) \leq 2h_2.$$

Alors nous estimons les termes de (4.42) : pour tout $\varepsilon_1 > 0$, on a

$$\int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla h_{1,n}\,dxdt \geq \delta\phi||\nabla h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;H)},$$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h_n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big| \\ \leq (\delta\phi + 2K_+h_2)||\nabla h_{1,n}||_{L^2(0,T;H)}||\nabla h_{1,D}||_{L^2(0,T;H)} \\ \leq \frac{\varepsilon_1}{4}||\nabla h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{(\delta\phi + 2K_+h_2)^2}{\varepsilon_1}||\nabla h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big|-\int_{\Omega_T} KT_s(h_n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,n}\,dxdt\Big| \\ \leq K_+h_2||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}||\nabla h_{1,n}||_{L^2(0,T;H)} \\ \leq \frac{K_+^2h_2^2}{\varepsilon_1}M_{h,2} + \frac{\varepsilon_1}{4}||\nabla h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;H)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big|-\int_{\Omega_T} KT_s(h_n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\nabla h_n\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big| \\ \leq K_+h_2||\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}||\nabla h_{1,D}||_{L^2(0,T;H)} \\ \leq K_+h_2M_{h,2}||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big|-\int_{\Omega_T} \left(\mathcal{Q}_fT_f(h_n - h_1^n) + \mathcal{Q}_sT_s(h_n)\right)(h_{1,n} - h_{1,D})\,dxdt\Big| \\ \leq \frac{||\mathcal{Q}_f||^2_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{\phi}h_2^2 + \frac{\phi}{4}||h_{1,n} - h_{1,D}||^2_{L^2(0,T,H)},\end{aligned}$$

$$\int_0^T \phi\langle\partial_t(h_{1,n} - h_{1,D}), (h_{1,n} - h_{1,D})\rangle_{V',V}\,dt = \frac{\phi}{2}||h_{1,n}(T,\cdot) - h_{1,D}(T,\cdot)||^2_H - \frac{\phi}{2}||h_{1,0} - h_{1,D|t=0}||^2_H,$$

$$\begin{aligned}\Big|-\int_0^T \phi\langle\partial_t h_{1,D}\,, (h_{1,n} - h_{1,D})\rangle_{V',V}dt\Big| \leq \frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + \frac{\delta\phi}{2}||\nabla h_{1,n}||^2_{L^2(0,T;H)} \\ + \frac{\delta\phi}{2}||\nabla h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{\delta\phi}{2}||h_{1,n} - h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)}.\end{aligned}$$

La dernière estimation sera basée sur la relation (4.24). Nous garderons à l'esprit que $C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)(h_{1,n} - h_{1,D})$ appartient à priori à $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$. De plus C_w, T_{ff}, T_f et leurs dérivées sont bornées dans $L^\infty(\Omega)$. Nous déduisons de (4.5), (4.14) et (4.24) :

$$\begin{aligned}\Big|-\int_0^T\int_\Omega S_fC_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T}\,,\,(h_{1,n} - h_{1,D})\,dxdt\Big| \\ \leq S_fCM'_S\Big(||C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^2(0,T,H)} \\ + ||\nabla\big(C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)(h_{1,n} - h_{1,D})\big)||_{L^1(0,T,L^1(\Omega))}\Big)/\epsilon_0^3, \\ \leq S_fCM'_S\Big(h_2||h_{1,n} - h_{1,D}||_{L^2(0,T,H)} + h_2(||h_{1,n}||_{L^1(0,T,H)} + ||h_{1,D}||_{L^1(0,T,H)}) \\ + (M_{h,2} + M_S)||h_{1,n} - h_{1,D}||_{L^2(0,T,H)}\Big)/\epsilon_0^3,\end{aligned}$$

$$\leq S_f C M_S' \Big((h_2 + M_{h,2} + M_S)||h_{1,n} - h_{1,D}||_{L^2(0,T,H)} + h_2(||h_{1,n}||_{L^2(0,T,H)} + ||h_{1,D}||_{L^2(0,T,H))}) \Big) / \epsilon_0^3$$
$$\leq \frac{S_f^2 C^2 M_S'^2}{{\epsilon_0}^6 \phi}(h_2 + M_{h,2} + M_S)^2 + \frac{\phi}{4}\int_{\Omega_T} |h_{1,n} - h_{1,D}|^2 \, dxdt + \frac{\varepsilon_1}{4}\int_{\Omega_T} |\nabla h_{1,n}|^2 \, dxdt$$
$$+ \frac{h_2^2 C^2 M_S'^2}{\varepsilon_1} + h_2 S_f C M_S' ||\nabla h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)},$$

où C représente une constance générique. Notons que nous avons utilisé le fait que par définition de T_{ff}, T_f et T, nous avons

$$\text{si } \bar{h}_1^n > h_2 \text{ ou si } \bar{h}_1^n < -3h_2 \quad \text{alors} \quad \nabla(T_{ff}(T_f(h_n)) - \bar{h}_1^n) = 0,$$

$$\text{si } -3h_2 < \bar{h}_1^n < h_2 \quad \text{alors} \quad -4h_2 < \bar{h}_1^n - h_{1,D} < h_2 \quad \text{et} \quad T'(\bar{h}_1^n - h_{1,D}) \neq 0.$$

Les mêmes types d'arguments s'appliquent pour caractériser ici $\nabla C_w(\bar{h}_1^n)$. D'où l'apparition de la constante M_S définie dans (4.24).

En sommant toutes les estimations précédentes, nous obtenons après simplification

$$\frac{\phi}{2}||h_{1,n}(T,\cdot) - h_{1,D}(T,\cdot)||_H^2 + \frac{2\delta\phi - 3\varepsilon_1}{4}\int_{\Omega_T} |\nabla h_{1,n}|^2 \, dxdt \leq \frac{\phi}{2}(1+\delta)\int_{\Omega_T} |h_{1,n} - h_{1,D}|^2 \, dxdt$$
$$+ \frac{\phi}{2}||h_{1,0} - h_{1,D|t=0}||_H^2 + \frac{K_+^2 h_2^2}{\varepsilon_1} M_{h,2}^2 + (\frac{\delta\phi}{2} + \frac{(\delta\phi + 2K_+h_2)^2}{\varepsilon_1})||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$
$$+ \frac{||\mathcal{Q}_f||^2_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{\phi} h_2^2$$
$$+ (h_2 S_f C M_S' + K_+ h_2 M_{h,2})||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{h_2^2 S_f^2 M_S'^2}{\varepsilon_1}$$
$$+ \frac{\phi}{2\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + \frac{S_f^2 C^2 M_S'^2}{{\epsilon_0}^6 \phi}(h_2 + M_{h,2} + M_S)^2.$$

Nous choisissons ε_1 telle que $2\delta\phi - 3\varepsilon_1 > 0$, par exemple $\varepsilon_1 = \delta\phi/3$. Le Lemme de Gronwall permet d'établir l'existence de deux nombres réels $A_{1,M} > 0$ et $M_{1,2} > 0$ dépendant seulement des données du problème et de $M_{h,2}$ tels que :

$$||h_{1,n}||_{L^\infty(0,T;H)} \leq A_{1,M}^{1/2} e^{(1+\delta)T/2},$$
$$||h_{1,n}||_{L^2(0,T;H)} \leq A_{1,M}^{1/2} T^{1/2} e^{(1+\delta)T/2},$$
$$||h_{1,n}||_{L^2(0,T;H^1)} \leq M_{1,2} := \big(\frac{2}{\delta} A_{1,M}(1 + (1+\delta)Te^{(1+\delta)T/2})\big)^{1/2}, \tag{4.43}$$

avec

$$A_{1,M} = ||h_{1,0} - h_{1,D|t=0}||_H^2 + \frac{1}{\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + (\delta + \frac{6(\delta\phi + 2K_+h_2)^2}{\delta\phi^2})||h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$
$$+ \frac{2(||\mathcal{Q}_f||^2_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)})}{\phi^2} h_2^2 + \frac{2}{\phi}(h_2 S_f C M_S' + K_+ h_2 M_{h,2})||h_{1,D}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$
$$+ \frac{6h_2^2 S_f^2 M_S'^2}{\delta\phi^2} + \frac{S_f^2 C^2 M_S'^2}{\epsilon_0^6 \phi}(h_2 + M_{h,2} + M_S)^2 + \frac{6K_+^2 h_2^2}{\delta\phi^2} M_{h,2} + ||h_{1,D}||^2_{L^\infty(0,T,H)}.$$

Maintenant, nous allons montrer que $\partial_t h_{1,n}$ est bornée dans E et nous calculons :

$$\begin{aligned}
||\partial_t h_{1,n}||_E &= \sup_{||w||_{E'}\leq 1}\left|\int_0^T \langle \partial_t h_{1,n}\,,\, w\rangle_{E,E'}\,dt\right| \\
&= \sup_{||w||_{E'}\leq 1}\Bigg|-\frac{1}{\phi}\int_{\Omega_T}\big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n-\bar{h}_1^n)+T_s(h)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla w\,dxdt \\
&\qquad -\frac{1}{\phi}\int_{\Omega_T} KT_s(h_n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\nabla h_n\cdot\nabla w\,dxdt \\
&\qquad -\int_0^T \langle S_f C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n)-\bar{h}_1^n)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0}*S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T}\,,\, w\rangle_{V',V}dt \\
&\qquad -\frac{1}{\phi}\int_{\Omega_T}(\mathcal{Q}_f T_f(h_n-h_1^n)+\mathcal{Q}_s T_s(h_n))\,w\,dxdt\Bigg|. \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Nous allons estimer les quatre différents termes de (4.44) :

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{1}{\phi}\int_{\Omega_T}\big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n-\bar{h}_1^n)+T_s(h)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)\nabla h_{1,n}\cdot\nabla w\,dxdt\right| \\
&\qquad \leq (\delta\phi+2K_+h_2)||h_{1,n}||_{L^2(0,T;V)}||w||_{L^2(0,T;V)} \\
&\qquad \leq (\delta\phi+2K_+h_2)M_{1,2}||w||_{L^2(0,T;V)}, \quad \text{car} \quad (h_{1,n}) \quad \text{est bornée grâce à (4.43)}, \\
&\qquad \leq C(\delta\phi+2K_+h_2)M_{1,2}||w||_{E'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{1}{\phi}\int_{\Omega_T} KT_s(h_n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\nabla h_n\cdot\nabla w\,dxdt\right| \\
&\qquad \leq K_+h_2||h_n||_{L^2(0,T;H)}||w||_{L^2(0,T;V)} \\
&\qquad \leq K_+h_2M_{h,2}||w||_{L^2(0,T;V)} \quad \text{car} \quad (h_n) \quad \text{est bornée grâce à (4.36)}, \\
&\qquad \leq CK_+h_2M_{h,2}||w||_{E'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\phi}\int_{\Omega_T}(\mathcal{Q}_f T_f(h_n-h_1^n)+\mathcal{Q}_s T_s(h_n))\,w\,dxdt\right| \\
&\qquad \leq 2(||\mathcal{Q}_f||_{L^2(0,T;H)}+||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)})h_2||w||_{L^2(0,T;V)} \\
&\qquad \leq 2(||\mathcal{Q}_f||_{L^2(0,T;H)}+||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)})h_2||w||_{E'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_0^T\int_\Omega S_f C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n)-\bar{h}_1^n)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0}*S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T}\,,\, w\,dxdt\right| \\
&\qquad = \left|-\int_{\Omega_T} S_f C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n)-\bar{h}_1^n)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0}*S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T} w\,dxdt\right| \\
&\qquad \leq S_f||\partial_t S(\bar{h}_1^n)||_E||C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n)-\bar{h}_1^n)w||_{E'} \\
&\qquad \leq S_f M_S'||C_w||_{\mathcal{C}^1(0,h_2)}\Big(h_2||w||_{L^\infty(\Omega_T)}+(M_{h,2}+M_S(1+h_2))||w||_{L^\infty(\Omega_T)}+h_2||\nabla w||_{L^2(0,T;H)}\Big).
\end{aligned}$$

En sommant les quatre estimations précédentes, nous réécrivons (4.44) et nous avons l'existence d'un nombre réel $M_{1,2}'>0$ tel que

$$||\partial_t h_{1,n}||_E \quad \leq \quad M_{1,2}', \qquad (4.45)$$

où

$$M'_{1,2} = \frac{1}{\phi}\Big((\delta\phi + 2K_+h_2)M_{1,2} + 2(||\mathcal{Q}_f||_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)})h_2 + K_+h_2M_{h,2} + S_fM'_S||C_w||_{\mathcal{C}^1(0,h_2)}\max(h_2\,,\,(M_{h,2} + M_S(1+h_2)))\Big). \tag{4.46}$$

A ce stade, nous venons de montrer que $h_{1,n}$ est uniformément bornée par rapport à n dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap (W^{1,1}(\Omega)) + H^1(0,T;V') \subset L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;(W^{1,q})')$, $q > 2$. En utilisant le Lemme d'Aubin, nous pouvons extraire une sous-suite encore notée $(h_{1,n})_n$ qui converge fortement dans $L^2(\Omega_T)$ et faiblement dans l'espace $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;(W_0^{1,q}(\Omega))')$ vers une limite notée ℓ_1. En particulier la convergence forte dans $L^2(\Omega_T)$ implique la convergence presque partout dans Ω_T. Nous affirmons que

$$L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||) \to L_M^\epsilon(||\nabla\ell_1||), \quad \text{p.p dans} \quad \Omega_T. \tag{4.47}$$

En effet nous avons $\nabla[\Psi_{\epsilon_0} * \bar{h}_{1,p}^n]_{R,T} \to \nabla[\Psi_{\epsilon_0} * \ell_{1,p}]_{R,T}$ parce que $[\Psi_{\epsilon_0} * \bar{h}_{1,p}^n]_{R,T}$ est uniformément bornée par rapport à n (mais pas par rapport à ϵ_0 bien sûr) dans $W^{p,q}(\Omega_T)$ pour tout $p, q > 1$, grâce à la régularisation par convolution. Les mêmes arguments sont appliqués pour s'assurer que

$$[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T} \to [\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(\ell_1)_{,p}]_{R,T}.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ dans (4.26), nous vérifions que ℓ_1 est la solution de l'équation (4.26). Cette solution étant unique, nous avons en fait $\ell_1 = h_1$.

Enfin il reste à préciser les estimations du type renormalisées pour $T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla h_{1,n}$ et $\partial_t S(h_{1,n})$. Les estimations ci-après sont très importantes pour la suite. En effet ce sont les seules estimations pour $h_{1,n}$ qui ne dépendent pas de ϵ_0. Elles sont aussi fondamentales pour la définition d'un sous espace convexe adéquate dans lequel chercher le point fixe.

Premièrement, nous utilisons la fonction test $T(h_{1,n} - h_{1,D})$ dans (4.26), avec T définie dans (4.14). Nous utiliserons la fonction $\mathbf{T}$ définie par

$$\mathbf{T}(x) = \begin{cases} -4h_2x - 8h_2^2 & \text{si} \quad x < -4h_2, \\ x^2/2 & \text{si} \quad -4h_2 \le x \le 4h_2, \\ 4h_2x - 8h_2^2 & \text{si} \quad x > 4h_2, \end{cases}$$

qui est une primitive positive de T. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi\mathbf{T}(h_{1,n}(T,\cdot) - h_{1,D}(T,\cdot))\,dx - \int_\Omega \phi\mathbf{T}(h_{1,0} - h_{1,D}(0,\cdot))\,dx \\
&+ \int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h_n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)T'(h_{1,n} - h_{1,D})\nabla(h_{1,n} - h_{1,D}) \\
&\quad \cdot\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})\,dxdt \\
&= \int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h_n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)T'(h_{1,n} - h_{1,D})\nabla h_{1,D} \cdot \nabla(h_{1,n} - h_{1,D})\,dxdt \\
&- \int_{\Omega_T} KT_s(h_n)L_M^\epsilon(||\nabla\bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)T'(h_{1,n} - h_{1,D})\nabla h_n \cdot \nabla(h_{1,n} - h_{1,D})\,dxdt \\
&- \int_{\Omega_T} (\mathcal{Q}_fT_f(h_n - h_1^n) + \mathcal{Q}_sT_s(h_n))\,T(h_{1,n} - h_{1,D})\,dxdt - \int_{\Omega_T} \phi\partial_t h_{1,D}T(h_{1,n} - h_{1,D})dxdt \\
&- \int_{\Omega_T} S_fC_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T}T(h_{1,n} - h_{1,D})dxdt.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Nous effectuons des estimations similaires à celles faites sur (4.42). Tout d'abord, nous avons

$$T(x)^2 \leq 2\mathbf{T}(x) \quad \text{et} \quad T'(x) \leq 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{les termes de (4.48) deviennent :}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h)L_M^\epsilon(||\nabla \bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)T'(h_{1,n} - h_{1,D})\nabla(h_{1,n} - h_{1,D}) \cdot \nabla(h_{1,n} - h_{1,D})\, dxdt \\
&\qquad \geq \delta\phi ||T'(h_{1,n} - h_{1,D})\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})||^2_{L^2(0,T;H)}, \\
&\qquad \geq \delta\phi ||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})||^2_{L^2(0,T;H)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\Omega_T} \big(\delta\phi + K\big(T_f(h_n - \bar{h}_1^n) + T_s(h_n)L_M^\epsilon(||\nabla \bar{h}_1^n||)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\big)\big)T'(h_{1,n} - h_{1,D})\nabla h_{1,D} \cdot \nabla(h_{1,n} - h_{1,D})\, dxdt \Big| \\
&\leq (\delta\phi + 2K_+h_2)||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^2(0,T;H)}||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla h_{1,D}||_{L^2(0,T;H)}, \\
&\leq \frac{\varepsilon_1}{4}||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})||^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{(\delta\phi + 2K_+h_2)^2}{\varepsilon_1}||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)}, \\
&\leq \frac{\varepsilon_1}{4}||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})||^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{(\delta\phi + 2K_+h_2)^2}{\varepsilon_1}||\nabla h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)}, \\
&\qquad \text{puisque} \quad T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2} \leq 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big| - \int_{\Omega_T} KT_s(h_n)\mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)L_M^\epsilon(||\nabla \bar{h}_1^n||)T'(h_{1,n} - h_{1,D})\nabla h_n \cdot \nabla(h_{1,n} - h_{1,D}), dxdt \Big| \\
&\qquad \leq K_+h_2||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla h_n||_{L^2(0,T;H)}||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^2(0,T;H)} \\
&\qquad \leq \frac{K_+^2h_2^2}{\varepsilon_1}M_{h,2} + \frac{\varepsilon_1}{4}||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2}\nabla(h_{1,n} - h_{1,D})||^2_{L^2(0,T;H)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big| - \int_{\Omega_T} \left(\mathcal{Q}_f T_f(h_n - h_1^n) + \mathcal{Q}_s T_s(h_n)\right) T(h_{1,n} - h_{1,D})\, dxdt \Big| \\
&\qquad \leq \frac{||\mathcal{Q}_f||^2_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{\phi}h_2^2 + \frac{\phi}{4}\int_{\Omega_T} T(h_{1,n} - h_{1,D})^2\, dxdt, \\
&\qquad \leq \frac{||\mathcal{Q}_f||^2_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{\phi}h_2^2 + \frac{\phi}{2}\int_{\Omega_T} \mathbf{T}(h_{1,n} - h_{1,D})\, dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big| - \int_0^T \int_\Omega \phi\langle \partial_t h_{1,D} T(h_{1,n} - h_{1,D})\, dxdt \Big| \leq \frac{\phi}{\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + \frac{\delta\phi}{4}\int_{\Omega_T} T(h_{1,n} - h_{1,D})^2\, dxdt \\
&\qquad \leq \frac{\phi}{\delta}||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;(H^1)')} + \frac{\delta\phi}{2}\int_{\Omega_T} \mathbf{T}(h_{1,n} - h_{1,D})\, dxdt
\end{aligned}$$

À nouveau, la dernière estimation sera basée sur la relation (4.24). Nous garderons à l'esprit que $C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)T(h_{1,n} - h_{1,D})$ appartient à priori à $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$. De plus C_w, T_{ff}, T_f et leurs dérivées sont bornées dans $L^\infty(\Omega)$. Nous déduisons de (4.5), (4.14) et (4.24) :

$$\begin{aligned}
&\Big| - \int_0^T \int_\Omega S_f C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(\bar{h}_1^n)_{,p}]_{R,T}\, , T(h_{1,n} - h_{1,D})\, dxdt \Big| \\
&\qquad \leq S_f C M_S' \Big(||C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)T(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^2(0,T,H)} \\
&\qquad\quad + ||\nabla\big(C_w(\bar{h}_1^n)T_{ff}(T_f(h_n) - \bar{h}_1^n)T(h_{1,n} - h_{1,D})\big)||_{L^1(0,T,L^1(\Omega))} \Big)/\epsilon_0^3,
\end{aligned}$$

$$\leq S_f C M_S' \Big(h_2 ||T(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^2(0,T,H)} + h_2 (||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2} \nabla h_n||_{L^2(0,T;H)} ||_{L^1(0,T,H)}) + (M_{h,2} + M_S) ||T(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^2(0,T,H)} \Big) / \epsilon_0^3,$$

$$\leq S_f C M_S' \Big((h_2 + M_{h,2} + M_S) ||T(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^2(0,T,H)} + h_2 (||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2} \nabla h_n||_{L^2(0,T;H)} ||_{L^1(0,T,H)}) \Big) / \epsilon_0^3$$

$$\leq \frac{S_f^2 C^2 M_S'^2}{{\epsilon_0}^6 \phi} (h_2 + M_{h,2} + M_S)^2 + \frac{\phi}{4} \int_{\Omega_T} |T(h_{1,n} - h_{1,D})|^2 \, dxdt + \frac{\varepsilon_1}{4} \int_{\Omega_T} |T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2} \nabla (h_{1,n} - h_{1,D})|^2 \, dxdt + \frac{h_2^2 C^2 M_S'^2}{\varepsilon_1}.$$

Notons que nous avons utilisé le fait que par définition de T_{ff}, T_f et T, nous avons

$$\text{si } \bar{h}_1^n > h_2 \text{ ou si } \bar{h}_1^n < -3h_2 \quad \text{alors} \quad \nabla (T_{ff}(T_f(h_n)) - \bar{h}_1^n) = 0,$$

$$\text{si } -3h_2 < \bar{h}_1^n < h_2 \quad \text{alors} \quad -4h_2 < \bar{h}_1^n - h_{1,D} < h_2 \quad \text{et} \quad T'(\bar{h}_1^n - h_{1,D}) \neq 0.$$

Les mêmes types d'arguments s'appliquent pour $\nabla C_w(\bar{h}_1^n)$. D'où l'apparition de la constante M_S définie dans (4.24). Alors nous déduisons de (4.48) :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi \mathbf{T}(h_{1,n}(T,\cdot) - h_{1,D}(T,\cdot)) \, dx + \int_{\Omega_T} \delta\phi T'(h_{1,n} - h_{1,D}) |\nabla (h_{1,n} - h_{1,D})| \, dxdt \\
&\leq \phi ||T(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^1(\Omega)} + \frac{(\delta\phi + 2K_+ h_2)^2}{\varepsilon_1} ||\nabla h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)} \\
&\quad + \frac{3\varepsilon_1}{4} ||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2} \nabla (h_{1,n} - h_{1,D})||^2_{L^2(0,T;H)} \\
&\quad + \frac{K_+^2 h_2}{\varepsilon} M_{h,2}^2 + \frac{||\mathcal{Q}_f||^2_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi} h_2 + \int_0^T \int_\Omega \phi(1+\delta) \mathbf{T}(h_{1,n} - h_{1,D}) \, dxdt \\
&\quad + \frac{\phi}{2\delta} ||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{S_f^2 C^2 M_S'^2}{{\epsilon_0}^6 \phi} (h_2 + M_{h,2} + M_S)^2 + \frac{S_f^2 M_S'^2 h_2^2}{\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon_1 > 0$. Nous choisissons $\varepsilon_1 = \delta\phi/3$ et nous utilisons le Lemme de Gronwall pour conclure que :

$$||T'(h_{1,n} - h_{1,D})^{1/2} \nabla h_{1,n}||_{L^2(0,T;H)} \leq M_{S,2} := (\frac{4}{\delta} A_S (1 + (1+\delta) T e^{(1+\delta)T}))^{1/2} + ||\nabla h_{1,D}||_{L^2(0,T;H)} \quad (4.49)$$

où

$$\begin{aligned}
A_s &= \phi ||T(h_{1,n} - h_{1,D})||_{L^1(\Omega)} + \frac{3K_+^2 h_2^2}{\delta\phi^2} M_{h,2}^2 + \frac{S_f^2 C^2 M_S'^2}{{\epsilon_0}^6 \phi} (h_2 + M_{h,2} + M_S)^2 \\
&\quad + \frac{||\mathcal{Q}_f||^2_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||^2_{L^2(0,T;H)}}{2\phi} h_2 + \frac{1}{2\delta} ||\partial_t h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad + \frac{3S_f^2 M_S'^2 h_2^2}{\delta\phi^2} + \frac{3(\delta\phi + 2K_+ h_2)^2}{\delta\phi^2} ||\nabla h_{1,D}||^2_{L^2(0,T;H)} \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Ensuite, pour l'estimation de la norme de $\partial_t(S(h_{1,n}))$ dans E, qui passe par

$$|\langle \partial_t (S(h_{1,n})) \, , \, \varphi \rangle_{E,E'}| = |\langle \partial_t h_{1,n} \, , \, S'(h_{1,n}) \varphi \rangle_{E,E'}|$$

pour tout $\varphi \in E'$, nous utilisons la fonction test $S'(h_{1,n})\varphi$ dans (4.26). Nous obtenons (voir les calculs avant (4.45) et en notant que $S' = 0$ en dehors du support de $T'(\cdot, -h_{1,D})$) :

$$||\partial_t S(h_{1,n})||_E \leq M'_{S,2} \tag{4.51}$$

où

$$M'_{S,2} = \frac{1}{\phi}\Big(((\delta\phi + 2K_+h_2)M_{1,2} + K_+h_2M_{h,2})M_{S,2} + S_fM'_S||C_w||_{\mathcal{C}^1(0,h_2)}\max(M_{S,2}h_2\,,\,(M_{h,2} + M_S(1+h_2))) \\ +(||\mathcal{Q}_f||_{L^2(0,T;H)} + ||\mathcal{Q}_s||_{L^2(0,T;H)})h_2\Big) \tag{4.52}$$

Propriété du point fixe pour $\mathcal{F}$:

$\mathcal{F}$ est continue (pour la topologie forte de $L^2(0,T;H)$) et pour la topologie faible de $(L^2(0,T;H^1(\Omega))\times\{g\in L^2(0,T;H^1(\Omega));\,\partial_t g\in E\})$ car ses deux applications composantes $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ le sont.

De plus, soient W_1 et W_2 les deux ensembles fermés, convexes et bornés de $(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2$ définis par :

$$W_1 = \big\{(g,g_1)\in(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2;(g(0),g_1(0) = (h_0,h_{1,0}),(g_{|\Gamma},g_{1|\Gamma}) = (h_D,h_{1,D});$$
$$||\nabla g||_{L^2(\Omega_T)}\leq M_h, ||\nabla g_1||_{L^2(\Omega_T)}\leq M_1, ||T'(g_1-h_{1,D})^{1/2}\nabla g_1||_{L^2(\Omega_T)}\leq M_S \text{ et } ||\partial_t S(g_1)||_E\leq M'_S\big\}$$

et

$$W_2 = \big\{(g,g_1)\in(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2;(g(0),g_1(0) = (h_0,h_{1,0}),(g_{|\Gamma},g_{1|\Gamma}) = (h_D,h_{1,D});$$
$$||\nabla g||_{L^2(\Omega_T)}\leq M_{h,2}, ||\nabla g_1||_{L^2(\Omega_T)}\leq M_{1,2}, ||T'(g_1-h_{1,D})^{1/2}\nabla g_1||_{L^2(\Omega_T)}\leq M_{S,2} \text{ et } ||\partial_t S(g_1)||_E\leq M'_{S,2}\big\}.$$

Nous avons montré que $\mathcal{F}(W_1)\subset W_2$. De plus $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ est un espace réflexif, $\mathcal{F}$ est un opérateur compact pour la topologie faible de $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ (d'après le théorème de Banach-Alaoglu), et compact pour la topologie forte de $L^2(0,T;H)$ (voir la preuve de la continuité de $\mathcal{F}$).

Il reste à montrer que W_2 est strictement inclus dans W_1 cela grâce au bon choix de M_h, M_1, M_S et M'_S. Clairement puisque la constante $M_{h,2}$ est indépendante de la constante M_h, celle-ci peut être choisie telle que $M_h > M_{h,2}$. De même, M_1 peut être choisie telle que $M_1 > M_{1,2}$.

Le choix de M_S et M'_S assurant avec (4.49) et (4.51) que

$$M_{S,2}\leq M_S \quad \text{et} \quad M'_{S,2}\leq M'_S \tag{4.53}$$

est le plus compliqué.

L'idée est d'utiliser la réelle petitesse de S_f (réalité assurée par les données physiques). Le rapport M/δ étant potentiellement grand puisque la taille caractéristique de l'interface diffuse peut être petite par rapport aux dimensions de l'aquifère, nous pouvons ré-écrire (4.53) (en utilisant $(1+x)^{1/2}\approx 1+x/2$ et en gardant à l'esprit (4.49)-(4.51) et (4.36))) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{C}{\delta^4} + CS_fM'_S(M_S + \frac{C}{\delta^2}) + \frac{C}{\delta}S_f^2M'_S \leq M_S, \\ \frac{C}{\delta^6} + \frac{C}{\delta^4}S_fM'_S + \frac{C}{\delta^3}S_f^2M'^2_S + \frac{C}{\delta}S_f^3M'^3_S + CS_fM'_SM_S(\frac{C}{\delta^2} + CS_fM'_S)\leq M'_S, \end{cases} \tag{4.54}$$

où C est une constante dépendant seulement des données du problème, mais pas de ϵ_0, ni de ϵ.

La relation (4.54) permet de se convaincre qu'on peut choisir M_s et M'_S de telle sorte que la condition (4.53) soit remplie si S_f est assez petit (on peut faire tendre S_f vers zéro dans (4.54) pour s'en convaincre).

Il résulte du Théorème de Schauder [[88], cor.9.7] qu'il existe un $(h,h_1)\in W_1$ tel que $\mathcal{F}(h,h_1) = (h,h_1)$. Ce point fixe pour $\mathcal{F}$ est une solution faible du problème (4.22)-(4.23). Nous rappelons que les définitions (4.49)-(4.51) et (4.36) pour $M_{h,2}, M_{S,2}$ et $M'_{S,2}$ ne dépendent pas de ϵ_0, ni de ϵ. Donc les estimations annoncées dans le Lemme (4.3) sont uniformes. De plus la condition de petitesse sur S_f dans (4.54) permet à S_f de rester à l'ordre un par rapport à ϵ_0 et ϵ.

Le lemme (4.3) est prouvé.

4.3.2 Etape 2 : Principes du maximum pour la solution de $(\mathcal{P}_2^\epsilon)$

Lemme 4.4 *Pour tout $\epsilon_0 > 0$ et pout tout $\epsilon > 0$, toute solution faible $(h^{\epsilon_0,\epsilon}, h_1^{\epsilon_0,\epsilon})$ du problème* (4.16)-(4.17)-(4.18) *satisfait pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \in (0,T)$,*

$$0 \leq h_1^{\epsilon_0,\epsilon}(t,x) \leq h^{\epsilon_0,\epsilon}(t,x) \leq h_2.$$

Remarque 4.5 *La preuve est faite pour un h_2 constant mais elle se généralise à tout $h_2 \in L^\infty(\Omega)$.*

Preuve :

Nous allons encore omettre les paramètres ϵ_0 et ϵ sur h et h_1 dans nos équations pour des raisons de simplicité. Par rapport au chapitre précédent, nous remarquons que rien ne change dans la preuve du principe du maximum pour l'équation en h de notre système. Quant à l'équation en h_1, nous avons le nouveau terme $S_f C_w(h_1) T_{ff}(T_f(h) - h_1)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(h_1)_{,p}]_{R,T}$ à gérer.
Nous allons montrer que presque partout dans $(0,T)\times\Omega$:

$$0 \leq h_1(t,x) \leq h(t,x) \leq h_2.$$

• Dans un premier temps, nous montrons que $h(t,x) \leq h_2$, *p.p.* $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0,T)$.
On pose

$$h_m(t,x) = \big(h(t,x) - h_2\big)^+ = \sup(0, h(t,x) - h_2) \in L^2(0,T;V).$$

La fonction h_m appartient à $L^2(0,T;V)$ puisque la donnée au bord satisfait $(h_D - h_2)^+ = 0$. On a aussi :

$$\nabla h_m = \chi_{\{h>h_2\}}\nabla h \quad \text{et} \quad h_m(t,x) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad h(t,x) > h_2$$

où χ est la fonction caractéristique.
Soit $\tau \in (0,T)$. On multiplie l'équation (4.16) par $w(t,x) = h_m(t,x)\chi_{(0,\tau)}(t)$ et on intègre sur $(0,\tau)\times\Omega$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h, h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)\rangle_{V',V}\ dt + \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla h\cdot\nabla h_m(x,t)\ dxdt\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)\ dxdt\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)\ dxdt\\
&+\int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h)h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}\ dxdt = 0.
\end{aligned}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h, h_m\rangle_{V',V}\ dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h>h_2\}}|\nabla h|^2\ dxdt}_{I_2}\\
&+\underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\chi_{\{h>h_2\}}|\nabla h|^2\ dxdt}_{I_3}\\
&+\underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_m(x,t)\ dxdt}_{I_4} + \underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h)h_m(x,t)\ dxdt}_{I_5} = 0. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Calculons séparément les termes de (4.55). Pour I_1 on applique le résultat de F.Mignot rappelé dans le chapitre modélisation. En effet si on pose :$f(\lambda) := \lambda - h_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue et croissante telle que

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\big|\frac{f(\lambda)}{\lambda}\big| = \overline{\lim_{\lambda}}\big|\frac{\lambda - h_2}{\lambda}\big| < \infty.$$

Donc on a :

$$I_1 = \int_0^\tau \phi\langle\partial_t h, h_m\rangle_{V',V}\ dt = \underbrace{\frac{\phi}{2}\int_\Omega \Big(h_m^2(\tau,x) - h_m^2(0,x)\Big)\ dx}_{\geq 0}$$

avec $h_m(0,x) = \big(h(0,x) - h_2\big)^+ = 0$, puisque $h(0,x) = h_0 \leq h_2$.
Comme $T_s(h)\chi_{\{h>h_2\}} = 0$ par définition de T_s, les termes I_3, I_4 et I_5 sont nuls et l'équation (4.55) devient :

$$\frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\ dx = -\underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h>h_2\}}|\nabla h_n|^2\ dxdt}_{\geq 0} \leq 0.$$

Donc h_m est nulle presque partout. D'où pour tout $\tau \in (0,T)$:

$$h(\tau,x) \leq h_2, \quad p.p. \quad x \in \Omega.$$

• Dans le second temps, nous montrons que : $0 \leq h_1(t,x)$ p.p. dans $(0,T)\times\Omega$.

Posons

$$h_m(t,x) = \big(-h_1(t,x)\big)^+ \in L^2(0,T;V).$$

On a :

$$\nabla h_m = \chi_{\{h_1<0\}}\nabla h_1 \quad \text{et} \quad h_m(t,x) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad h_1(t,x) < 0$$

où χ est la fonction caractéristique.
Soit $\tau \in (0,T)$. On multiplie l'équation (4.17) par $w(t,x) = -h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)$ et on intègre sur $(0,T)\times\Omega$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h_1, h_m\rangle_{V',V}\ dt - \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla h_m\ dxdt \\
&\quad -\int_0^\tau\int_\Omega K\Big(T_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1\cdot\nabla h_m\ dxdt \\
&\quad -\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla h_m\ dxdt - \int_0^\tau\int_\Omega \Big(\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1) + \mathcal{Q}_s T_s(h)\Big)h_m\ dxdt \\
&\quad -\int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)T_{ff}(T_f(h)-h_1)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(h_1)_{,p}]_{R,T}h_m\ dxdt = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\underbrace{-\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h_1, h_m\rangle_{V',V}\ dt}_{I_1}\ \underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla h_1.\nabla h_m\ dxdt}_{I_2} \\
&\underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega K\Big(T_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1\cdot\nabla h_m\ dxdt}_{I_3} \\
&\underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega KT_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\cdot\nabla h_m\ dxdt}_{I_4}\ \underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega \Big(\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1) + \mathcal{Q}_s T_s(h)\Big)h_m\ dxdt}_{I_5} \\
&\underbrace{-\int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)T_{ff}(T_f(h)-h_1)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(h_1)_{,p}]_{R,T}h_m\ dxdt}_{I_6} = 0, \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

avec :

$$I_1 \quad = \quad -\int_0^\tau \phi\langle\partial_t h_1, h_m\rangle_{V',V}\ dt = \underbrace{\frac{\phi}{2}\int_\Omega \Big(h_m^2(\tau,x) - h_m^2(0,x)\Big)\ dx}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\ dx}_{\geq 0},$$

car $h_m(0,x) = \big(-h_1(0,x)\big)^+ = 0$, puisque $h_1(0,x) = h_{1,0} \geq 0$.

$$I_2 \quad = \quad \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h_1<0\}}|\nabla h_1|^2 \; dxdt.$$

Comme $\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) = 0$ car $h_1 \leq 0$, alors les termes I_4 et I_6 sont nuls et

$$\begin{aligned} I_3 \quad &= \quad -\int_0^\tau \int_\Omega K\Big(T_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) + T_f(h-h_1)\Big)\nabla h_1 \cdot \nabla h_m \; dxdt \\ &\geq \quad \int_0^\tau \int_\Omega K_- T_f(h-h_1)\chi_{\{h_1<0\}}|\nabla h_1|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Enfin

$$I_5 \quad = \quad -\int_0^\tau \int_\Omega \Big(\mathcal{Q}_f T_f(h-h_1) + \mathcal{Q}_s T_s(h)\Big)h_m \; dxdt \geq 0,$$

car

$$T_f(h-h_1)\chi_{\{h_1<0\}} \geq 0, \quad T_s(h) \geq 0, \quad Q_s \leq 0 \quad et \quad Q_f \leq 0.$$

L'équation (4.56) donne donc :

$$\frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(t,x)dtdx \leq -\underbrace{\int_0^\tau \int_\Omega \left\{\Big(\delta\phi + K_- T_f(h-h_1)\Big)\chi_{\{h_1<0\}}|\nabla h_{1,n}|^2\right\} dxdt}_{\geq 0} \leq 0.$$

d'où,

$$h_1(\tau,x) \geq 0, \qquad \forall \tau \in [0,T], \quad \text{p.p } x \in \Omega.$$

• Pour finir la démonstration du principe du maximum, nous allons montrer que :

$$h_1(t,x) \leq h(t,x) \quad \text{p.p.} \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega.$$

On pose :

$$h_m(t,x) = \big(h_1(t,x) - h(t,x)\big)^+ \in L^2(0,T;V).$$

On a :

$$\nabla h_m = \chi_{\{h_1-h>0\}}\nabla(h_1-h) \quad \text{et} \quad h_m(t,x) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad (h_1-h)(t,x) > 0$$

où χ est la fonction caractéristique.
Soit $\tau \in (0,T)$, on multiplie par $w(t,x) = h_m(x,t)\chi_{(0,\tau)}(t)$ l'équation résultant de la différence entre (4.17) et (4.16) et on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \phi\langle\partial_t(h_1-h), h_m\rangle_{V',V} \; dt + \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla h_m \; dxdt \\ &+ \int_0^\tau \int_\Omega K\big(\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)T_s(h)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big) + T_f(h-h_1)\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h_m \; dxdt \\ &- \int_0^\tau \int_\Omega K T_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\nabla h_1 \cdot \nabla h_m \; dxdt + \int_0^\tau \int_\Omega \mathcal{Q}_f T_f(h-h_1)h_m \; dxdt \\ &+ \int_0^\tau \int_\Omega S_f C_w(h_1)T_{ff}(T_f(h)-h_1)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(h_1)_{,p}]_{R,T}h_m \; dxdt = 0. \end{aligned}$$

Or $T_f(h-h_1)\chi_{\{h_1-h>0\}} = 0$ par définition du prolongement de T_f. De plus, $T_{ff}(T_f(h)-h_1)\chi_{\{h_1-h>0\}} = 0$.
On a plus précisément $T_{ff}(T_f(h)-h_1) = 0$ si $h_1 \geq h$ car dans ce cas $h_1 \geq T_f(h)$. En effet,
– si $h \geq 0$, alors $T_f(h) = h$ car on a déjà montré que $h \leq h_2$ p.p. dans $\Omega\times(0,T)$,
– et si $h < 0$, $T_f(h) = 0 \leq h_1$ puisqu'on a aussi montré que $h_1 \geq 0$ p.p. dans $\Omega\times(0,T)$.

Alors en prenant en compte ces considérations nous tirons de la dernière équation :

$$\int_0^\tau \phi\langle\partial_t(h_1-h),h_m\rangle_{V',V}\ dt+\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla h_m\ dxdt=0, \tag{4.57}$$

avec

$$\int_0^\tau \phi\langle\partial_t(h_1-h),h_m\rangle_{V',V}\ dt=\underbrace{\frac{\phi}{2}\int_\Omega\Big(h_m^2(\tau,x)-h_m^2(0,x)\Big)\ dx}_{\geq 0}$$

et

$$\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h).\nabla h_m\ dxdt=\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h_1-h>0\}}|\nabla(h_1-h)|^2\ dxdt.$$

Ainsi, l'équation (4.57) devient :

$$\frac{\phi}{2}\int_\Omega h_m^2(\tau,x)\ dx=-\underbrace{\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\chi_{\{h_1-h>0\}}|\nabla(h_1-h)|^2\ dxdt}_{\geq 0}\leq 0.$$

Comme précédemment, on conclut que :

$$\forall t\in(0,T),\quad \text{p.p.}\quad x\in\Omega,\quad h_1(t,x)\leq h(t,x).$$

Conclusion : Sur cette partie concernant le principe du maximum, on vient de montrer que :

$$\forall t\in(0,T)\quad \text{p.p.}\quad x\in\Omega,\quad 0\leq h_1(t,x)\leq h(t,x)\leq h_2.$$

4.3.3 Etape 3 : Elimination de la première régularisation : $\epsilon_0\to 0$

Dans ce paragraphe, nous allons faire tendre $\epsilon_0\to 0$ dans (4.16)-(4.17)-(4.18) et nous allons exhiber une solution au nouveau système d'équations suivant sur Ω_T,

$$\begin{aligned}\phi\partial_t h^\epsilon-\nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h^\epsilon\big)-\nabla\cdot\big(KT_s(h^\epsilon)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^\epsilon||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\big)\\ -\nabla\cdot\big(KT_s(h^\epsilon)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^\epsilon||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h_1^\epsilon\big)=-\mathcal{Q}_sT_s(h^\epsilon),\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}\phi\partial_t h_1^\epsilon+S_fC_w(h_1^\epsilon)T_{ff}(T_f(h^\epsilon)-h_1^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)[\partial_t(\Psi_\eta*S(h_1^\epsilon)_{,p}]_{R,T}-\nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1^\epsilon\big)\\ -\nabla\cdot\big(K\big(T_f(h^\epsilon-h_1^\epsilon)+T_s(h^\epsilon)\big)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^\epsilon||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h_1^\epsilon\big)\\ -\nabla\cdot\big(KT_s(h^\epsilon)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1^\epsilon||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\big)\\ =-\mathcal{Q}_fT_f(h^\epsilon-h_1^\epsilon)-\mathcal{Q}_sT_s(h^\epsilon),\end{aligned} \tag{4.59}$$

où Ψ_η est une fonction régularisée par rapport au temps et à l'espace (voir la Définition (4.1)), complété par les conditions initiales et aux bords :

$$\begin{aligned}&h^\epsilon=h_D,\quad h_1^\epsilon=h_{1,D}\qquad\qquad\text{sur}\quad (0,T)\times\Gamma,\\ &h^\epsilon(0,x)=h_0,\quad h_1^\epsilon(0,x)=h_{1,0}(x)\quad\text{p.p}\qquad\text{dans}\quad\Omega.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Lemme 4.5 *Pour tout $\epsilon>0$, il existe une solution faible $(h^\epsilon,h_1^\epsilon)$ au problème* (4.58)-(4.59)-(4.60) *telle que $(h^\epsilon,h_1^\epsilon)\in(L^\infty(\Omega_T)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2$, $\partial_t h^\epsilon\in L^2(0,T;V')$, $\partial_t h_1^\epsilon\in E$. De plus les estimations suivantes (uniformes par rapport à ϵ) sont vraies :*

$$0\leq h_1^\epsilon(t,x)\leq h^\epsilon(t,x)\leq h_2\quad \textit{p.p. dans}\quad\Omega,\quad\forall\quad t\in(0,T), \tag{4.61}$$

$$||h^\epsilon||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V')}\leq C(M), \tag{4.62}$$

$$||\nabla h_1^\epsilon||_{L^2(0,T;H)}\leq C(M),\qquad ||\partial_t h_1^\epsilon||_E\leq C(M). \tag{4.63}$$

Preuve :
On rappelle le principe du maximum établi au Lemme 4.4, et les estimations (4.19)-(4.20)-(4.21) qui reviennent à :

$$||h^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V')} \leq C(M),$$
$$||\nabla h_1^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^2(0,T;H)} \leq C(M), \qquad ||\partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon}||_E \leq C(M).$$

Toutes ces estimations sont uniformes par rapport à ϵ_0. Elles sont suffisantes (voir aussi la preuve du Lemme 4.3) pour s'assurer de l'existence d'une sous-suite, encore notée $(h^{\epsilon_0,\epsilon}, h_1^{\epsilon_0,\epsilon})$ pour des raison de simplification, et d'une fonction $(h^\epsilon, h_1^\epsilon \in (L^\infty(\omega_T) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2$, $\partial_t h^\epsilon \in L^2(0,T;V')$, $\partial_t h_1^\epsilon \in E$ telles que :

$$\begin{cases} h^{\epsilon_0,\epsilon} \longrightarrow h^\epsilon & \text{dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p. dans } \Omega\times(0,T), \\ h^{\epsilon_0,\epsilon} \rightharpoonup h^\epsilon & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V'), \\ h_1^{\epsilon_0,\epsilon} \longrightarrow h_1^\epsilon & \text{dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p. dans } \Omega\times(0,T), \\ h_1^{\epsilon_0,\epsilon} \rightharpoonup h_1^\epsilon & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ \partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon} \rightharpoonup \partial_t h_1^\epsilon & \text{faiblement dans } E. \end{cases}$$

Remarquons que la compacité de $h_1^{\epsilon_0,\epsilon}$ est obtenue ici en utilisant les inclusions

$$L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \subset E' \quad \text{et} \quad W(0,T) \subset L^2(0,T;H)$$

rappelées à la sous section 2 "Résultats Préliminaires". D'ailleurs, un résultat similaire à (4.47) reste encore vrai puisque la régularisation dans L^ϵ_M dépend de ϵ mais pas de ϵ_0. Toutes ces convergences avec le Théorème de Lebesgue sont suffisantes pour passer à la limite dans l'equation (4.16) et pour prouver que la limite h^ϵ est une solution faible de (4.58).

Pour étudier le comportement limite de l'équation (4.17), la difficulté majeure est de passer à la limite dans $C_w(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})T_{ff}(T_f(h^{\epsilon_0,\epsilon}) - h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * S(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}$. C'est *a priori* un produit de convergences faibles. On le ré-écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} &C_w(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})(h^{\epsilon_0,\epsilon} - h_1^{\epsilon_0,\epsilon})[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} \\ &\quad := f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} + g(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})h^{\epsilon_0,\epsilon}[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Nous savons seulement *a priori* que

$$[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} \rightharpoonup \partial_t h_1^\epsilon \quad \text{faiblement dans } E$$

$$(h^{\epsilon_0,\epsilon}\varphi\,,\, h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\varphi) \rightharpoonup (h^\epsilon\varphi\,,\, h_1^\epsilon\varphi) \quad \text{faiblement dans } (E')^2,\ \forall\varphi\in E'.$$

Nous commençons par le premier terme du côté droit de (4.64). Pour toute fonction test admissible φ, on écrit :

$$\begin{aligned} \langle[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}\,,\, f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi\rangle_{E,E'} &= \langle\partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\,,\, f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi\rangle_{E,E'} + \langle[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} - \partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\,,\, f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi\rangle_{E,E'} \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt}\int_\Omega \mathcal{F}(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi\,dxdt - \int_{\Omega_T} \mathcal{F}(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\partial_t\varphi\,dxdt + \langle[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} - \partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\,,\, f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi\rangle_{E,E'}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}$ est la primitive de f. Nous pouvons utiliser la convergence presque partout de $h_1^{\epsilon_0,\epsilon}$ à h_1^ϵ pour passer à la limite dans les deux premiers termes du côté droit dans la dernière relation. Le dernier terme est égal à :

$$\langle[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} - \partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\,,\, f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi\rangle_{E,E'} = \langle\partial_t h_1^{\epsilon_0,\epsilon}\,,\, \check{\Psi}_{\epsilon_0} * (f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi)_{,p} - f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi\rangle_{E,E'},$$

peut être rendu arbitrairement petit quand $\epsilon_0 \to 0$ puisque $\check{\Psi}_{\epsilon_0} * (f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi)_{,p}$ est une ϵ_0-régularisation de $f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})\varphi \in E'$. Ainsi, nous pouvons résumer le comportement du premier terme du coté droit de (4.64) par :

$$\lim_{\epsilon_0\to 0} f(h_1^{\epsilon_0,\epsilon})[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} = -C_w(h_1^\epsilon)h_1^\epsilon\partial_t h_1^\epsilon. \tag{4.65}$$

Nous considérons maintenant le second terme coté droit de (4.64). Nous introduisons cette fois ci la primitive $\mathcal{G}$ de g. Nous vérifions simplement que le problème se réduit à passer à la limite dans le produit $h^{\epsilon_0,\epsilon}[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}$. La structure couplée du problème ne nous permet pas d'établir une compacité suffisante pour passer à la limite $\epsilon_0 \to 0$ dans ce terme. Il va donc falloir garder une partie de la régularisation en espace ou en en temps dans le terme $[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}$. Plus précisément, cela signifie que nous devrions d'abord réécrire tout le début de la preuve en remplaçant "$\Psi_{\epsilon_0} *$ " par une notation différenciant les régularisations en espace et en temps, puis nous ferions disparaître l'une ou l'autre de ces régularisations. Mais pas les deux. D'où la convolution par ψ_η dans la Définition 4.1. Nous avons évité ces notations encombrantes, $h^{\epsilon_0,\epsilon}[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}$ jusqu'à ici pour la commodité du lecteur.

Il reste à verifier que le degré de régularisation annoncé, en temps ou en espace, est suffisant pour passer à la limite, c'est-à-dire à justifier le choix de $\psi \in \mathcal{C}_c^1(X)$, $X = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$ dans la Définition 4.1.
Supposons d'abord que nous choisissions de conserver un degré de la régularisation en temps.
Soit

$$A^{\epsilon_0} = (h^{\epsilon_0,\epsilon}, 0).$$

Cette quantité est uniformément bornée dans $L^2(\Omega_T)$ tandis que $\mathrm{div}_{t,x}A^{\epsilon_0}$ est bornée dans $L^2(0,T;V')$. Soit

$$B^{\epsilon_0} = (\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * (h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}) \,,\, \nabla(\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * (h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p})).$$

Grâce à la régularisation par ψ_η nous affirmons que B^{ϵ_0} est uniformément bornée par rapport à ϵ_0 dans $L^2(\Omega_T)$. En effet

$$||\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * (h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p})||_{L^2} = ||\Psi_{\epsilon_0} * \partial_t(\psi_\eta) * (h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}||_{L^2} \leq ||h_1^{\epsilon_0,\epsilon}||_{L^1}||\partial_t(\psi_\eta)||_{\mathcal{C}}$$

(on utilise les mêmes types de calculs que pour (4.4)). De plus $\mathrm{curl}_{t,x}B^{\epsilon_0} = 0$. Le Lemme divergence-rotationnel ([81]) peut donc être appliqué et nous en concluons que

$$A^{\epsilon_0} \cdot B^{\epsilon_0} \to A \cdot B \quad \text{faiblement au sens des distributions,}$$

où A (resp. B) est la limite faible dans L^2 de A^{ϵ_0} (resp. B^{ϵ_0}). Cela signifie que

$$h^{\epsilon_0,\epsilon}[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} \rightharpoonup h^{\epsilon}[\partial_t(\psi_\eta * h_1^{\epsilon})_{,p}]_T \quad \text{faiblement dans } \mathcal{D}'(\Omega_T).$$

Ce dernier résultat nous suffit.

Supposons maintenant que nous choisissions de conserver un degré de la régularisation en espace.
Puisque [1] $\partial_{i,j}(\psi_\eta * h_1^{\epsilon_0}) = \partial_j\psi_\eta * \partial_j h_1^{\epsilon_0}$, le gradient $\nabla(\psi_\eta * h_1^{\epsilon_0})$ est uniformément borné dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. De plus, en utilisant encore une fois les règles classiques de la dérivation d'un tel produit de convolution, nous avons $\partial_t\nabla(\psi_\eta * h_1^{\epsilon_0}) = \partial_t(\nabla\psi_\eta * h_1^{\epsilon_0})$ et, puisque ψ_η ne dépend pas du temps, $\partial_t\nabla(\psi_\eta * h_1^{\epsilon_0}) = \nabla\psi_\eta * \partial_t h_1^{\epsilon_0}$. Cette quantité est uniformément bornée dans E. Un argument de compacité du type d'Aubin nous permet de conclure que $\nabla(\psi_\eta * h_1^{\epsilon_0})$ est séquentiellement compact dans $L^2(\Omega_T)$. Pour tout $\varphi \in L^2(0,T;V)$, nous pouvons donc calculer la limite suivante :

$$\lim_{\epsilon_0\to 0}\langle \partial_t h^{\epsilon_0,\epsilon} \,,\, [\psi_\eta * (h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}\varphi\rangle_{V,V'} \rightharpoonup \langle \partial_t h^{\epsilon} \,,\, [\psi_\eta * h_{1,p}^{\epsilon}]_T\varphi\rangle_{V,V'}.$$

Nous concluons en passant à la limite dans la formulation suivante :

$$h^{\epsilon_0,\epsilon}[\partial_t(\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} = \partial_t(h^{\epsilon_0,\epsilon}[\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * (h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T} - \partial_t h^{\epsilon_0,\epsilon}[\Psi_{\epsilon_0} * \psi_\eta * (h_1^{\epsilon_0,\epsilon})_{,p}]_{R,T}.$$

4.3.4 Etape 4 : Elimination de la fonction auxiliaire L_M^ϵ

Au vu des estimations montrées à l'étape 2, il est maintenant inutile de faire apparaître les fonctions auxiliaires T_{ff}, T_f et T_s, puisque $0 \leq h_1 \leq h \leq h_2$ (nous omettons aussi ϵ dans les notations sur (h, h_1)).

1. Nous omettons $[(\cdot)_p]_T$ pour quelques lignes. Les propriétés énoncées ci-après se transfèrent naturellement de $\mathbb{R}$ à Ω et *vice versa*.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un nombre réel $M_0 > 0$ ne dépendant pas de ϵ tel que toute solution faible (h, h_1) du problème

$$\begin{aligned}\phi\partial_t h - \operatorname{div}\big(\delta\phi\nabla h\big) - \operatorname{div}\big(K(h_2-h)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big)\\ = \operatorname{div}\big(K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\nabla h_1\big) - \mathcal{Q}_s(h_2-h)\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}\phi\partial_t h_1 - \operatorname{div}\Big(\delta\phi\nabla h_1\Big) - \operatorname{div}\Big(K\Big((h-h_1+(h_2-h))\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\Big)\nabla h_1\Big)\\ = \operatorname{div}\big(K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\nabla h\big)\\ -S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T - \mathcal{Q}_f(h-h_1) - \mathcal{Q}_s(h_2-h),\end{aligned} \tag{4.67}$$

avec les conditions aux bords et conditions initiales

$$h = h_D, \qquad \text{et} \qquad h_1 = h_{1,D} \qquad\qquad \text{sur} \qquad (0,T)\times\Gamma = (0,T)\times\partial\Omega \tag{4.68}$$

$$h(0,x) = h_0(x) \qquad \text{et} \quad h_1(0,x) = h_{1,0}(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{4.69}$$

satisfait

$$||\nabla h||_{L^2(0,T;H)} \le M_0, \quad \text{et} \quad ||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)} \le M_0. \tag{4.70}$$

Nous choisirons alors de poursuivre le travail sur le couple $(h^{M_0}, h_1^{M_0})$ ce qui nous permettra de faire disparaître la fonction auxiliaire L_{M_0} puisque de $\|\nabla h_1\|_{L^2} \le M_0$, on tire $L_{M_0}\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big) = 1$.

Dans un premier temps, nous sommons (4.66) et (4.67). Nous obtenons le problème suivant, satisfait par $(h+h_1)$:

$$\begin{aligned}&\phi\partial_t(h+h_1) - \operatorname{div}(\delta\phi\nabla(h+h_1)) - 2\operatorname{div}\big(K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\nabla(h+h_1)\big)\\ &\quad +S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T - \operatorname{div}\big(K(h-h_1)\nabla h_1\big) = -2\mathcal{Q}_f(h-h_1) - \mathcal{Q}_s(h_2-h),\end{aligned}$$

$$\text{avec } h+h_1 = h_D + h_{1,D} \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \quad \text{et } h(x,0)+h_1(x,0) = h_0(x)+h_{1,0}(x) \text{ dans } \Omega.$$

On multiplie l'équation ci-dessus par $w = h+h_1-(h_D+h_{1,D})$ et on intègre sur $\Omega\times(0,\tau)$ où $\tau\in(0,T)$. On obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega \phi\big(h+h_1-(h_D+h_{1,D})\big)^2(x,\tau)\,dx\\ &+\int_0^\tau\int_\Omega \big(\delta\phi + 2K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\big)\nabla(h+h_1)\cdot\nabla(h+h_1)\,dxdt\\ &+\int_0^\tau\int_\Omega K(h-h_1)\nabla h_1\cdot\nabla(h+h_1)\,dxdt = -\int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T(h+h_1)\,dxdt\\ &-\int_0^\tau\int_\Omega \phi(h+h_1-(h_D+h_{1,D}))\partial_t(h_D+h_{1,D})dxdt\\ &+\int_0^\tau\int_\Omega \big(\delta\phi + 2K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\big)\nabla(h+h_1)\cdot\nabla(h_D+h_{1,D})dxdt\\ &+\int_0^\tau\int_\Omega K(h-h_1)\nabla h_1\cdot\nabla(h_D+h_{1,D})dxdt + \int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T(h_D+h_{1,D})dxdt\\ &-2\int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{Q}_f(h-h_1)\big(h+h_1-(h_D+h_{1,D})\big)\,dxdt - \int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{Q}_s(h_2-h)\big(h+h_1-(h_D+h_{1,D})\big)\,dxdt\\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega \phi\Big(h_0+h_{1,0}-\big(h_D(t=0)+h_{1,D}(t=0)\big)\Big)^2(x)\,dx.\end{aligned} \tag{4.71}$$

Dans un second temps, nous faisons la soustraction de (4.67) et (4.66). Nous obtenons le problème suivant, satisfait par $(h_1 - h)$:

$$\begin{aligned}
&\phi\partial_t(h_1-h) - \operatorname{div}(\delta\phi\nabla(h_1-h)) \\
&\quad + S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_1) - \operatorname{div}\big(K(h-h_1)\nabla h_1\big) = -\mathcal{Q}_f(h-h_1), \\
&\qquad \text{avec } h_1 - h = h_{1,D} - h_D \text{ sur } (0,T)\times\Gamma \quad \text{et } h(x,0) + h_1(x,0) = h_0(x) + h_{1,0}(x) \text{ dans } \Omega.
\end{aligned}$$

On multiplie l'équation ci-dessus par la fonction test $w = h_1 - h - (h_{1,D} - h_D)$ et on intègre sur $\Omega \times (0,\tau)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \phi\big(h_1 - h - (h_{1,D}-h_D)\big)^2(x,\tau)\,dx + \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla(h_1-h)\,dxdt \\
&+ \int_0^\tau\int_\Omega K(h-h_1)\nabla h_1\cdot\nabla(h_1-h)\,dxdt = -\int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T(h_1-h)\,dxdt \\
&- \int_0^\tau\int_\Omega \phi(h_1 - h - (h_{1,D}-h_D))\partial_t(h_{1,D}-h_D)\,dxdt + \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla(h_1-h)\cdot\nabla(h_{1,D}-h_D)\,dxdt \\
&+ \int_0^\tau\int_\Omega K(h-h_1)\nabla h_1\cdot\nabla(h_{1,D}-h_D)\,dxdt + \int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_1)(h_{1,D}-h_D)\,dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega \phi\bigg((h_{1,0}-h_0) - (h_{1,D}(t=0) - h_D(t=0))\bigg)^2 dx - \int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{Q}_f(h-h_1)\big(h_1 - h - (h_{1,D}-h_D)\big)\,dxdt. \qquad (4.72)
\end{aligned}$$

En sommant (4.71) et (4.72) (et en utilisant $K\zeta\cdot\zeta \geq K_-|\zeta|^2$, $\forall\zeta\in\mathbb{R}^2$), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi(|h_1(x,\tau) - h_{1,D}(x,\tau)|^2 + |h(x,\tau) - h_D(x,\tau)|^2)\,dx + \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi(|\nabla h_1|^2 + |\nabla h|^2)\,dxdt \\
&+2\int_0^\tau\int_\Omega K_-(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt + 2\int_0^\tau\int_\Omega K_-(h-h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt \\
&\quad \leq -2\int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T(h_1-h_{1,D})\,dxdt \\
&\qquad + \int_\Omega \phi\big(h_{1,0}(x) - h_{1,D}(t=0)\big)^2 + \big(h_0(x) - h_D(t=0)\big)^2\,dx \\
&\qquad + \int_\Omega \phi\big(h_D^2(x,\tau) + h_{1,D}^2(x,\tau) - h_D^2(x,0) + h_{1,D}^2(x,0)\big)\,dx - 2\int_0^\tau\int_\Omega \phi\big(h\partial_t h_D + h_1\partial_t h_{1,D}\big)\,dxdt \\
&\qquad -2\int_0^\tau\int_\Omega \phi\delta\big(\nabla h_1\cdot\nabla h_{1,D} + \nabla h\cdot\nabla h_D\big)\,dxdt + 2\int_0^\tau\int_\Omega K(h-h_1)\nabla h_1\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt \\
&\qquad +2\int_0^\tau\int_\Omega K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\nabla(h+h_1)\cdot\nabla(h_D+h_{1,D})\,dxdt \\
&\qquad -2\int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{Q}_f(h+h_1)\big(h_1-h_{1,D}\big)\,dxdt - 2\int_0^\tau\int_\Omega \mathcal{Q}_s(h_2-h)\big(h+h_1-(h_D+h_{1,D})\big)\,dxdt
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à celle de Young, nous déduisons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi(|h_1(x,\tau) - h_{1,D}(x,\tau)|^2 + |h(x,\tau) - h_D(x,\tau)|^2)\,dx + \int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi(|\nabla h_1|^2 + |\nabla h|^2)\,dxdt \\
&+2\int_0^\tau\int_\Omega K_-(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt + 2\int_0^\tau\int_\Omega K_-(h-h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt \\
&\quad \leq C - 2\int_0^\tau\int_\Omega S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T(h_1-h_{1,D})\,dxdt + \varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi(|\nabla h|^2 + |\nabla h_1|^2)\,dxdt \\
&\qquad + \int_0^\tau\int_\Omega K_-(h-h_1)|\nabla h_1|^2\,dxdt + \int_0^\tau\int_\Omega K_-(h_2-h)\chi_0^\epsilon(h_1)L_M(|\nabla h_1|)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt \qquad (4.73)
\end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ et $C(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, h_2, \mathcal{Q}_s, \mathcal{Q}_f, \varepsilon^{-1})$ est une constante générique qui dépend des données du problème (en effet l'intégrale contenant les termes sources peut être directement bornée par C car on a déjà vu que h et h_1 sont bornées dans L^∞ ; quant aux termes impliquant h_D et $h_{1,D}$, ils sont traités avec les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young ; nous ne détaillons pas ces estimations pour nous concentrer sur celles qui suivent et qui contiennent les difficultés essentielles). On travaille alors le terme :

$$-2\int_0^\tau \int_\Omega S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T(h_1-h_{1,D})\,dxdt.$$

On notera C_1 (respectivement C_2 et C_3) une primitive de

$$x \mapsto C_w(x) \quad (\text{respectivement } x \mapsto xC_w(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto x^2 C_w(x)) \text{ telle que } \quad C_1(0) = C_2(0) = C_3(0) = 0.$$

Le point important (pour l'étape 4) est que ces trois fonctions sont bornées dans L^∞ indépendemment de ϵ. On rappelle que le terme que nous voulons estimer peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
-2\int_0^\tau \int_\Omega & S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T(h_1-h_{1,D})\,dxdt \\
&= -2S_f \int_0^\tau \int_\Omega C_w(h_1)(h-h_1)(h_1-h_{1,D})\partial_t((\psi_\eta * h_{1,p})_T - h_1)\,dxdt \\
&\quad +2S_f \int_0^\tau \int_\Omega C_w(h_1)h_1^2\partial_t h_1\,dxdt - 2S_f\int_0^\tau\int_\Omega C_w(h_1)h_1\partial_t h_1 h_{1,D}\,dxdt \\
&\quad -2S_f \int_0^\tau \int_\Omega C_w(h_1)h(h_1-h_{1,D})\partial_t h_1\,dxdt. \qquad (4.74)
\end{aligned}$$

On a d'abord

$$\begin{aligned}
\Big| -2S_f \int_0^\tau \int_\Omega & C_w(h_1)(h-h_1)(h_1-h_{1,D})\partial_t((\psi_\eta * h_{1,p})_T - h_1)\,dxdt\Big| \\
&\le ||C_w(h_1)(h-h_1)(h_1-h_{1,D})||_{E'}||(\psi_\eta * \partial_t h_{1,p})_T - h_1||_E \\
&\le C||(\psi_\eta * \partial_t h_{1,p})_T - h_1||_E.
\end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de E, $\partial_t h_{1,p}$ appartient à $L^2(0,T;(W^{1,q}(\mathbb{R}^2))')$, $q>2$. Il en résulte qu'il existe $(w_1, W_1) \in L^2(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^2))$ tel que :

$$\partial_t h_{1,p} = w_1 + W_1.$$

Donc

$$||(\psi_\eta * \partial_t h_{1,p})_T - h_1||_{L^2(0,T;(W^{1,q}(\mathbb{R}^2))')} \le ||\psi_\eta * w_1 - w_1||_{L^2(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^2))} + ||\psi_\eta * W_1 - W_1||_{L^2(0,T;L^{q'}(\mathbb{R}^2))}.$$

Puisque l'opérateur $\psi_\eta * \cdot$ est une régularisation en temps ou en espace, les quantités à droite de la dernière inégalité tendent vers zéro avec η. Cette propriété se transfère à la restriction de $(\psi_\eta * \partial_t h_{1,p})_T - h_1$ dans Ω_T. Nous concluons simplement que, pour tout η suffisamment petit, nous avons

$$\Big| -2S_f \int_0^\tau \int_\Omega C_w(h_1)(h-h_1)(h_1-h_{1,D})\partial_t((\psi_\eta * h_{1,p})_T - h_1)\,dxdt\Big| \le C. \qquad (4.75)$$

Ensuite en utilisant le principe du maximum établi pour h_1, nous estimons le second membre du côté droit de (4.74) :

$$\begin{aligned}
&\Big|2S_f \int_0^\tau \int_\Omega C_w(h_1)h_1^2\partial_t h_1\,dxdt\Big| = 2S_f\Big|\int_0^\tau \frac{d}{dt}\int_\Omega C_3(h_1)\,dxdt\Big| \\
&\le 2S_f\Big|\int_\Omega C_3(h_1(x,\tau)\,dx\Big| + 2S_f\Big|\int_\Omega C_3(h_{10})\,dx\Big| \le C(h_{1,0}, h_2, S_f). \qquad (4.76)
\end{aligned}$$

De même, en utilisant de plus l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned}
2S_f\Big|\int_0^\tau\int_\Omega C_w(h_1)h_1\partial_t h_1 h_{1,D}\,dxdt\Big| &= 2S_f\Big|\int_0^\tau\int_\Omega h_{1,D}\partial_t C_2(h_1)\,dxdt\Big| \\
&= 2S_f\Big|\int_0^\tau\int_\Omega \partial_t h_{1,D}C_2(h_1)\,dxdt - \int_\Omega \big(h_{1,D}C_2(h_1)\big)_{t=\tau}\,dx + \int_\Omega h_{1,D}(t=0)C_2(h_{1,0})\,dx\Big| \\
&\le C(h_{1,0},h_{1,D},h_2,S_f,\varepsilon^{-1}) + \varepsilon\delta\phi\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla h_1|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{4.77}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.
Enfin, nous intégrons par parties le dernier terme de (4.74) (divisé par $2S_f$) et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\int_0^\tau\int_\Omega C_w(h_1)h(h_1-h_{1,D})\partial_t h_1\,dxdt &= -\int_0^\tau\int_\Omega h(h_1C_w(h_1)-h_{1,D}C_w(h_1))\partial_t h_1\,dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_\Omega h(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1))\partial_t h_1\,dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_\Omega h\big(\partial_t C_2(h_1)-h_{1,D}\partial_t C_1(h_1)\big)\,dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_\Omega h\partial_t\big(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1)+C_4(h_{1,D})\big)\,dxdt \\
&\quad -\int_0^\tau\int_\Omega hC_1h_1)\partial_t h_{1,D}\,dxdt + \int_0^\tau\int_\Omega h\partial_t C_4(h_{1,D})\,dxdt \\
&= \int_0^\tau\int_\Omega \partial_t h\big(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1)+C_4(h_{1,D})\big)\,dxdt \\
&\quad -\int_0^\tau\int_\Omega h(\partial_t C_2(h_1)-\partial_t h_{1,D}C_1(h_1)-\partial_t C_4(h_{1,D}))\,dxdt \\
&\quad +\int_\Omega (hC_2(h_1)-hh_{1,D}C_1(h_1))\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx
\end{aligned} \tag{4.78}$$

où C_4 est la fonction définie par $C_4(x) = xC_1(x) - C_2(x)$. Cette fonction est introduite pour être sûr que

$$\big(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1)+C_4(h_{1,D})\big)_{|\partial\Omega} = C_2(h_{1,D})-h_{1,D}C_1(h_{1,D})+C_4(h_{1,D}) = 0.$$

Les termes en $t=0$ et $t=\tau$ peuvent être bornés par une constante grâce aux principes du maximum sur h et h_1. Les termes dépendant des données $\int_0^\tau\int_\Omega hC_1(h_1)\partial_t h_{1,D}\,dxdt$ et $\int_0^\tau\int_\Omega h\partial_t C_4(h_{1,D})\,dxdt$ sont de même bornés par une constante. On écrit :

$$\begin{aligned}
2S_f\Big|\int_0^\tau\int_\Omega h(\partial_t C_2(h_1)-\partial_t h_{1,D}C_1(h_1)-\partial_t C_4(h_{1,D}))\,dxdt + \int_\Omega (hC_2(h_1)-hh_{1,D}C_1(h_1))\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx\Big| \\
\le C(h_{1,0},h_{1,D},h_2,S_f).
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Pour le terme $\int_0^\tau\int_\Omega \partial_t h\big(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1)+C_4(h_{1,D})\big)\,dxdt$, on va exploiter l'équation de h (*i.e.* (4.66)). Notons que multiplier cette équation par la fonction test $w = \big(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1)+C_4(h_{1,D})\big)$ ne fait pas apparaître de termes aux bords à l'intégration par parties grâce à la définition de C_4. On obtient :

$$\begin{aligned}
&2S_f\int_0^\tau\int_\Omega \partial_t h\big(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1)+C_4(h_{1,D})\big)\,dxdt \\
&= -\tfrac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega \delta\phi\nabla h\cdot\big(C_w(h_1)(h_1-h_{1,D})\nabla h_1 - C_1(h_1)\nabla h_{1,D} + C_4'(h_{1,D})\nabla h_{1,D}\big)\,dxdt \\
&\quad -\tfrac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega K(h_2-h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(h_1)\nabla(h+h_1)\cdot \\
&\quad \big(C_w(h_1)(h_1-h_{1,D})\nabla h_1 - C_1(h_1)\nabla h_{1,D} + C_4'(h_{1,D})\nabla h_{1,D}\big)\,dxdt \\
&\quad -\tfrac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega Q_s(h_2-h)\big(C_2(h_1)-h_{1,D}C_1(h_1)+C_4(h_{1,D})\big)\,dxdt.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Une fois encore, le dernier terme est uniformément borné par une constante C. De plus,

$$\begin{aligned}&\frac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega K(h_2-h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(h_1)^2h_1\nabla h_1\cdot\nabla h_1\,dxdt\\ &\geq\frac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega K_-(h_2-h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(h_1)^2h_1|\nabla h_1|^2\,dxdt\geq 0.\end{aligned}\tag{4.81}$$

La plupart des termes restant contenant $h_{1,D}$ sont traités de façon classique à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et celle de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}&\Big|-\frac{2S_f}{\phi}\int_{\Omega_T}\delta\phi C_w(h_1)(h_1-h_{1,D})\nabla h\cdot\nabla h_1\,dxdt\Big|\\ &\qquad\leq\frac{(1-4\varepsilon)\delta\phi}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla h|^2\,dxdt+\frac{2S_f^2h_2^2|C_w|_\infty^2}{(1-4\varepsilon)\phi^2}\int_{\Omega_T}|\nabla h_1|^2\,dxdt,\end{aligned}\tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}&\Big|-\frac{2S_f}{\phi}\int_{\Omega_T}\delta\phi\big(C_4'(h_{1,D})-C_1(h_1)\big)\nabla h\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big|\\ &\qquad\leq C(h_{1,D},h_2,S_f,\delta,\phi,\varepsilon^{-1})+\varepsilon\delta\phi\int_{\Omega_T}|\nabla h|^2\,dxdt,\end{aligned}\tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}&\Big|-\frac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega K(h_2-h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(h_1)C_w(h_1)h_1\nabla h\cdot\nabla h_1\,dxdt\Big|\\ &\qquad\leq\frac{(1-4\varepsilon)\delta\phi}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla h|^2\,dxdt+\frac{2S_f^2h_2^4K_+^2|C_w|_\infty^2}{(1-4\varepsilon)\delta\phi^3}\int_{\Omega_T}|\nabla h_1|^2\,dxdt,\end{aligned}\tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}&\Big|-\frac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega K(h_2-h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(h_1)\big(C_4'(h_{1,D})-C_1(h_1)\big)\nabla(h+h_1)\cdot\nabla h_{1,D}\,dxdt\Big|\\ &\qquad\leq C(h_{1,D},h_2,S_f,K_+,K_-,\delta,\phi,\varepsilon^{-1})+\varepsilon\delta\phi\int_{\Omega_T}|\nabla h|^2\,dxdt+\varepsilon\delta\phi\int_{\Omega_T}|\nabla h_1|^2\,dxdt,\end{aligned}\tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}&\Big|-\frac{2S_f}{\phi}\int_0^\tau\int_\Omega K(h_2-h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(h_1)C_w(h_1)h_{1,D}\nabla(h+h_1)\cdot\nabla h_1\,dxdt\Big|\\ &\leq\int_{\Omega_T}K_-(h_2-h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(h_1)|\nabla(h+h_1)|^2\,dxdt+\frac{2S_f^2h_2K_+^2|C_w|_\infty^2||h_{1,D}||_\infty^2}{(K_-\delta\phi^3)}\int_{\Omega_T}|\nabla h_1|^2\,dxdt.\end{aligned}\tag{4.86}$$

On replace ces derniers résultats : (4.81), (4.82), (4.83), (4.84), (4.85), (4.86) dans (4.80). Puis, on utilise (4.80), (4.75), (4.76), (4.77) pour estimer :

$$-2\int_0^\tau\int_\Omega S_fC_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta*h_{1,p})_T(h_1-h_{1,D})\,dxdt.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\phi\big(|h_1(x,\tau)|^2+|h(x,\tau)|^2\big)\,dx+\int_0^\tau\int_\Omega\varepsilon\delta\phi|\nabla h|^2\,dxdt\\ &\quad+\int_0^\tau\int_\Omega\Big(1-3\varepsilon-S_f^2h_2^2|C_w|_\infty^2\big(\frac{2}{(1-4\varepsilon)\phi^2}+\frac{K_+^2h_2^2}{K_-\delta\phi^3}+\frac{2h_2^2K_+^2}{(1-4\varepsilon)\delta^2\phi^4}\big)\Big)|\nabla h_1|^2\,dxdt\\ &\qquad\leq C(h_0,h_D,h_{1,0},h_{1,D},h_2,\mathcal{Q}_s,\mathcal{Q}_f,S_f,\delta,\phi,K_-,K_+,\varepsilon^{-1}),\end{aligned}\tag{4.87}$$

pour tout $\varepsilon>0$.
Supposons maintenant que S_f est suffisamment petit, plus précisément :

$$\boxed{1-S_f^2h_2^2|C_w|_\infty^2\Big(\frac{2}{\phi^2}(1+\frac{h_2^2K_+^2}{\delta^2\phi^2})+\frac{K_+^2h_2}{K_-\delta\phi^3}\Big)>0.}\tag{4.88}$$

Répétons ici que cette hypothèse est légitime du point de vue physique puisque $S_f \ll 1$; essentiellement, on peut retenir que la condition de petitesse sur S_f est de l'ordre

$$S_f = \mathcal{O}(\delta).$$

Cette hypothèse sur S_f nous permet d'utiliser le lemme de Gronwall pour déduire qu'il existe une constante M_0, indépendante de ϵ dans la régularisation de $\mathcal{X}_0^\epsilon$ et de M telle que :

$$||h||_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq M_0 \quad \text{et} \quad ||h_1||_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq M_0.$$

En particulier, $||\nabla h_1||_{L^2(0,T;H)} \leq M_0$ et cette estimation ne dépend pas du choix du nombre réel M qui définit la fonction L_M^ϵ.
Donc si nous choisissons $M = M_0$, toute solution faible du système dans Ω_T

$$\begin{aligned}\phi\partial_t h - \operatorname{div}\big(\delta\phi\nabla h\big) - \operatorname{div}\big(K(h_2-h)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big)\\ = \operatorname{div}\big(K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\nabla h_1\big) - \mathcal{Q}_s(h_2-h)\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}\phi\partial_t h_1 - \operatorname{div}\Big(\delta\phi\nabla h_1\Big) - \operatorname{div}\Big(K\Big((h-h_1+(h_2-h))\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\Big)\nabla h_1\Big)\\ = \operatorname{div}\big(K(h_2-h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h\big)\\ -S_f C_w(h_1)(h-h_1)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p})_T - \mathcal{Q}_f(h-h_1) - \mathcal{Q}_s(h_2-h),\end{aligned} \tag{4.90}$$

avec les conditions aux bords et conditions initiales

$$h = h_D, \qquad \text{et} \qquad h_1 = h_{1,D} \qquad \text{sur} \qquad (0,T)\times\Gamma = (0,T)\times\partial\Omega \tag{4.91}$$

$$h(0,x) = h_0(x) \qquad \text{et} \quad h_1(0,x) = h_{1,0}(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{4.92}$$

satisfait

$$L_{M_0}^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big) = 1$$

à condition que ϵ soit suffisamment petit (garder à l'esprit la définition de (4.11)).
Ainsi le terme $L_{M_0}^\epsilon\big(||\nabla h_1||_{L^2}\big) = 1$ peut être supprimé.

4.3.5 Etape 5 : Existence pour le système sans régularisation de la fonction Heaviside

À la fin de l'étape précédente, nous avons donc prouvé l'existence d'une solution faible $\big(h^\epsilon, h_1^\epsilon\big) \in (L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2$ au problème suivant :

$$(\mathcal{P}_2^\epsilon)\begin{cases} \phi\partial_t h^\epsilon - div\Big(\delta\phi\nabla h^\epsilon\Big) - div\Big(K(h_2-h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\Big)\\ \qquad -div\Big(K(h_2-h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h_1^\epsilon\Big) = -\mathcal{Q}_s(h_2-h^\epsilon)\\ \phi\partial_t h_1^\epsilon - div\Big(\delta\phi\nabla h_1^\epsilon\Big) - div\Big(K\Big((h^\epsilon-h_1^\epsilon)+(h_2-h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\Big)\nabla h_1^\epsilon\Big)\\ -div\Big(K(h_2-h^\epsilon)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon)\nabla h^\epsilon\Big) - S_f C_w(h_1^\epsilon)(h^\epsilon-h_1^\epsilon)\partial_t(\psi_\eta * h_{1,p}^\epsilon)_T = -\mathcal{Q}_f(h^\epsilon-h_1^\epsilon) - \mathcal{Q}_s(h_2-h^\epsilon)\end{cases}$$

avec les conditions initiales et aux bords

$$\begin{cases} h^\epsilon = h_D, & h_1^\epsilon = h_{1,D} & \text{sur} & \Gamma\\ h^\epsilon(0,x) = h_0, & h_1^\epsilon(0,x) = h_{1,0}(x) & \text{p.p. dans} & \Omega.\end{cases}$$

Cette solution satisfait de plus les principes du maximum suivants dans $(0,T)$,

$$0 \leq h_1^\epsilon \leq h^\epsilon \leq h_2 \quad p.p. \quad dans \quad \Omega.$$

Enfin, on note que les estimations qui nous ont permis de définir l'ensemble A au niveau de l'étape 1 sont uniformes par rapport à ϵ. On a ainsi les estimations :

$$(E.U.) \begin{cases} \left|\left|h^\epsilon\right|\right|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, & \left|\left|h_1^\epsilon\right|\right|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \\ \left|\left|\partial_t h^\epsilon\right|\right|_{L^2(0,T;V')} \leq C, & \left|\left|\partial_t h_1^\epsilon\right|\right|_{L^2(0,T;E} \leq C. \end{cases}$$

Pour conclure, nous il nous reste à faire tendre ϵ vers 0. Des estimations uniformes $(E.U.)$, nous déduisons que les suites $\left(h^\epsilon - h_D\right)_\epsilon$ et $\left(h_1^\epsilon - h_{1,D}\right)_\epsilon$ sont uniformément bornées dans $W(0,T)$. Nous déduisons grâce la compacité d'Aubin, que $\left(h^\epsilon - h_D\right)_\epsilon$ et $\left(h_1^\epsilon - h_{1,D}\right)_\epsilon$ sont séquentiellement compactes dans $L^2(0,T;H)$ et que nous pouvons extraire une sous-suite notée pareillement telle qu'il existe (h,h_1) telle que $\left(h-h_D, h_1-h_{1,D}\right) \in (W(0,T))^2$ satisfaisant

$$\begin{cases} h^\epsilon \longrightarrow h & \text{dans } L^2(0,T;H) \text{ et } p.p. \text{ dans } \Omega\times(0,T), \\ h^\epsilon \rightharpoonup h & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ \partial_t h^\epsilon \rightharpoonup \partial_t h & \text{faiblement dans } L^2(0,T;V'), \\ h_1^\epsilon \longrightarrow h_1 & \text{dans } L^2(0,T;H) \text{ et } p.p. \text{ dans } \Omega\times(0,T), \\ h_1^\epsilon \rightharpoonup h_1 & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ \partial_t h_1^\epsilon \rightharpoonup \partial_t h_1 & \text{faiblement dans } E. \end{cases}$$

Ces résultats de convergence sont suffisants pour passer à la limite ϵ tend vers 0 dans le problème $(\mathcal{P}_2^\epsilon)$. On obtient ainsi une (η,ψ)**-solution faible** du problème (4.58)-(4.59) au sens de la Définition 4.1 **(i)**. Les conditions initiales et aux bords (4.60) sont vérifiées puisque l'application $f \in W(0,T) \longmapsto f(0) \in H$ est continue. De plus (h,h_1) satisfait le principe du maximum conforme au réalisme physique :

$$0 \leq h_1(x,t) \leq h(x,t) \leq h_2(x,t), \quad \forall t \in (0,T), \quad p.p.\ x \in \Omega.$$

Pour exhiber une **quasi-solution faible** au sens de Définition 4.1 **(ii)**, nous devons enfin faire tendre η vers zéro. Clairement, toute la difficulté est liée au passage à la limite dans le terme contenant le coefficient d'emmagasinement qui est :

$$\int_{\Omega_T} (f(h^\eta) - f(h_1))(\psi_\eta * \partial_t (h_1^\eta)_{,p}) w \, dxdt, \quad \text{avec} \quad w \in L^2(0,T;V).$$

Ce passage à la limite est obtenu en utilisant le Théorème d'Egorov. Plus précisément, comme h_1^η converge presque partout vers h_1, d'après Egorov, il existe un Ω_μ comme dans le Théorème 4.1 (ii) tel que h_1^η converge uniformément vers h_1 sur Ω_μ. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, à partir d'un certain rang, on a donc $-\varepsilon \leq (f(h^\eta) - f(h_1)) \leq \varepsilon$ et

$$-\varepsilon \langle \psi_\eta * \partial_t (h_1^\eta)_{,p}\, ,\, w\rangle_{E_\mu, E'_\mu} \leq \int_0^T \int_{\Omega_\mu} (f(h^\eta) - f(h_1))(\psi_\eta * \partial_t (h_1^\eta)_{,p}) w \, dxdt \leq \varepsilon \langle \psi_\eta * \partial_t (h_1^\eta)_{,p}\, ,\, w\rangle_{E_\mu, E'_\mu}$$

où Ω_μ est bien sûr défini comme E en remplaçant les Ω par Ω_μ. Comme $\partial_t h_1^\eta$ est uniformément bornée dans E, on tire de l'inégalité précédente qu'à partir d'un certain rang

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega_\mu} (f(h^\eta) - f(h_1))(\psi_\eta * \partial_t (h_1^\eta)_{,p}) w \, dxdt \right| \leq C\varepsilon.$$

■

Chapitre 5

Simulations et Illustrations 2D et 3D

Sommaire

5.1 Introduction 99
5.2 Le modèle 3D d'écoulement et de transport 100
5.2.1 Les différentes équations du modèle 100
5.2.2 Les différentes hypothèses 102
5.2.3 Cadre et Modèle mathématique 103
5.3 Présentation des schémas numériques 107
5.3.1 Modèle 3D 107
5.3.2 Modèle 2D 109
5.4 Comparaison des modèles 3D et 2D 111
5.4.1 Expérience de Keulegan 112
5.4.2 Effet du pompage 116
5.4.3 Effet du remplissage 120
5.4.4 Effet de l'emmagasinement 124
5.4.5 Effet CUSP 126
5.4.6 Une remarque sur la taille du domaine d'illustration 127
5.5 Quelques tests phénoménologiques sur le modèle 2D 127
5.5.1 Validation du modèle 2D 127
5.5.2 Effets du coefficient d'emmagasinement 128
5.5.3 Effets de la zone de transition 130
5.5.4 Effets de la marée 130

5.1 Introduction

Ce chapitre marque la fin de l'étude de la nouvelle approche mixte entre l'interface abrupte et celle diffuse, introduite dans le chapitre sur la modélisation des aquifères costaux. Cette approche est évidemment une approximation de la réalité puisque l'on peut la considérer comme faisant partie de la famille des écoulements à deux phases, et puisqu'elle nous a permis de ramener la dimension trois (3D) du problème initial à deux (2D) et cela grâce à l'hypothèse de Dupuit. Or les fluides qui interviennent dans le problème de la salinisation des aquifères, l'eau douce et l'eau salée, se mélangent *i.e.* sont miscibles. Le modèle correspondant d'écoulement et de transport en milieux poreux est donc à une seule phase. Pour se convaincre de la pertinence de notre nouvelle approche et de sa capacité à permettre un suivi efficace de l'interface purement virtuelle entre eau douce et eau salée, nous allons la comparer (numériquement) au modèle 3D d'écoulement à une phase adaptée au problème (tenant en particulier compte de la compressibilité du milieu, *i.e.* de sa capacité d'emmagasinement).

Nous allons donc introduire dans un premier temps le modèle d'écoulement à une seule phase pour le déplacement de deux fluides miscibles transportés par un écoulement compressible dans un milieu déformable. Il

est basé sur la loi de conservation de la quantité de mouvement avec l'équation de Darcy et la loi de conservation de la masse (ou équation de continuité) couplée au transport de soluté dans le milieu poreux, (voir [14]). Cette dernière, couplée au transport, décrit le déplacement du soluté (l'eau salée) durant l'écoulement, en prenant en compte les trois mécanismes de transport (voir [55]) :
- **l'advection** : c'est le déplacement du polluant dans le milieu poreux à la vitesse moyenne du fluide, (voir la figure a-(5.1)),
- **la diffusion** : c'est un phénomène physique modélisé par le loi de Fick et qui traduit le transfert des molécules d'une zone de forte concentration vers une zone à faible concentration, (voir la figure b-(5.1)),
- **la dispersion** : c'est un phénomène de mélange essentiellement lié à l'hétérogénéité des vitesses microscopiques dans le milieu poreux, (voir la figure c-(5.1)).

Les potentielles **compressibilités des fluides et de la roche** sont également prises en compte.
Dans un second temps, nous présenterons les schémas numériques associés aux deux modèles puis nous les simulerons à l'aide du logiciel FreeFem [63], basé sur la méthode de éléments finis. Enfin, nous montrerons quelques résultats numériques illustrant le bon comportement phénoménologique de notre modèle 2D.

Nous rappelons qu'au-delà du problème de l'intrusion de l'eau de mer dans les aquifères, les applications de ces modèles sont nombreuses et très variées, notamment dans le domaine souterrain (stockage de déchets, pollution, ...).

5.2 Le modèle 3D d'écoulement et de transport

5.2.1 Les différentes équations du modèle

Nous allons présenter les équations qui vont nous permettre d'obtenir le modèle pour les problèmes d'écoulement et de transport en milieu poreux. L'équation de Darcy et celles des états seront rappelées brièvement puisqu'elles sont détaillées dans le chapitre de modélisation. Puis nous mettrons l'accent sur l'équation de conservation de la masse couplée au transport de soluté pour expliquer la provenance du modèle final.
Dans la suite, nous garderons les mêmes notations que dans la première partie. Par exemple, q sera la vitesse de Darcy, P la pression et ϕ la porosité du milieux.

a) Equation de Darcy

La vitesse de Darcy dans un milieu poreux est donnée par

$$q = -\frac{k}{\mu}(\nabla P + \rho g \nabla z), \tag{5.1}$$

équation qui peut aussi s'écrire à l'aide de la charge hydraulique :

$$q = -K\nabla\Phi - \frac{k}{\mu}(\rho - \rho_0)g\nabla z, \quad K = \frac{k\rho_0 g}{\mu}, \tag{5.2}$$

avec

$$\Phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z - h_{ref} \Leftrightarrow P = \rho_0 g(\Phi - Z), \tag{5.3}$$

où k est la perméabilité du milieu poreux, g la constante de gravité, μ la viscosité du fluide, K la matrice de conductivité hydraulique, ρ la densité du mélange, ρ_0 la densité de l'eau pure et z la hauteur du fluide. Nous posons $Z = z - h_{ref}$ qui est l'élévation au-dessus d'un niveau de référence fixe dans l'aquifère $h_{ref} < 0$.

b) Equation d'état pour la compressibilité du fluide

La pression P est liée à la densité ρ_i du fluide i par l'équation d'état suivante

$$\frac{d\rho_i}{\rho_i} = z_i\, dP \Leftrightarrow \rho_i = \rho_{0,i} e^{z_i(P-P_0)}, \tag{5.4}$$

où $z_i \geq 0$ est le coefficient de compressibilité du fluide i résultant de la variation de la pression, P_0 est la pression de référence et $\rho_{0,i}$ est une densité de référence pour le fluide i.

Remarque 5.1 *Si $z_1 = z_2 = 0$, alors le fluide est incompressible.*

c) Equation d'état pour la compressibilité du sol

D'après la théorie de Terzaghi (voir [55]), la porosité ϕ est liée à la pression P par :

$$\frac{d\phi}{dP} = (1-\phi)\beta_P \Leftrightarrow \phi = 1 - (1-\phi_0)e^{-\beta_P(P-P_0)}. \tag{5.5}$$

Remarque 5.2 *Si $\beta_P = 0$, alors le milieu est incompressible.*

d) Equation de conservation de la masse couplée au transport d'une espèce

Nous appliquons le principe de conservation de masse dans un volume élémentaire représentatif $[x, x+dx] \times [y, y+dy] \times [z, z+dz]$ (voir Figure (2.2)) qui se résume comme suit : la variation de la masse stockée dans un VER (Volume Elémentaire Représentatif) est égale à la différence du flux de la masse entrant moins le flux de la masse sortant et les termes sources et s'écrit comme :

$$I - O = \frac{dS}{dt}, \tag{5.6}$$

où I est le flux de masse de soluté entrant, O est le flux de masse de soluté sortant, S est la variation de masse de soluté par unité de temps. La quantité $I = I_x + I_y + I_z$ est le flux de masse rentrant au point de coordonnées (x, y, z) dans toutes les directions, où

$$I_x = (\rho J_x)\, dydz, \qquad I_y = (\rho J_y)\, dxdz, \qquad I_z = (\rho J_z)\, dxdy,$$

la quantité $O = O_x + O_y + O_z$ est le flux de masse sortant en $(x+dx, y+dy, z+dz)$ dans toutes les directions. A l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} O_x &= (\rho J_x)\, dydz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho J_x)\, dydzdx, \\ O_y &= (\rho J_y)\, dxdz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho J_y)\, dxdzdy, \\ O_z &= (\rho J_z)\, dxdy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho J_z)\, dxdydz, \end{aligned}$$

où ρ est la densité du mélange, c est la concentration de l'espèce considérée et J est le flux de la masse totale dans le VER. J prend en compte les différents flux de masse transportés selon les trois mécanismes (advection, diffusion et dispersion) et s'écrit comme :

$$J = J_{adv} + J_{diff} + J_{disp} = cu - \phi D_m \nabla c - \phi D_{disp} \nabla c, \tag{5.7}$$

où D_m est le coefficient de diffusion moléculaire et D_{disp} est un tenseur du second d'ordre dû à l'hétérogénéité des vitesses dans les directions longitudinales et transversales. Il est sous la forme :

$$D_{disp} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{où}$$

D_{ij} est le coefficient qui va representer la dispersion du flux dans la direction i en raison d'une unité de gradient de la concentration dans la direction j.
En insérant les termes précédents dans l'équation (5.6), on a :

$$-\Big\{ \frac{\partial(\rho J_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho J_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho J_z)}{\partial z} \Big\}\, dxdydz = \frac{dS}{dt}.$$

Or S peut également s'écrire $S = (\rho\theta c)\, dxdydz$, d'où

$$-\Big\{ \frac{\partial(\rho J_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho J_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho J_z)}{\partial z} \Big\} = \frac{\partial(\rho\phi c)}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial(\rho\phi c)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho J) = 0$$

car $dxdydz \neq 0$.
L'équation de continuité de l'écoulement d'un fluide couplée au transport de polluant de concentration c avec un terme source Q (production ou injection) s'écrit donc :

$$\partial_t(\rho\phi c) + \mathrm{div}(\rho c q) - \mathrm{div}(\rho\phi D_m \nabla c) - \mathrm{div}(\rho\phi D_{disp}\nabla c) = \rho c Q,$$

soit :

$$\partial_t(\rho\phi c) + \mathrm{div}(\rho c q) - \mathrm{div}(\rho\phi \mathcal{D}(q)\nabla c) = \rho c Q, \tag{5.8}$$

où $\mathcal{D}(q)$ est le tenseur qui modélise les effets de dispersion et de diffusion.

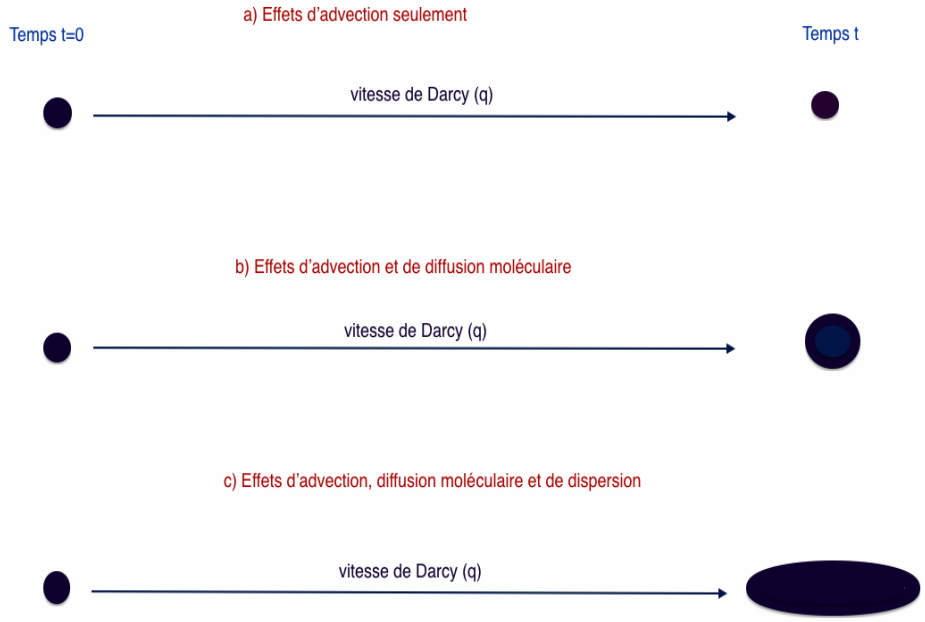


FIGURE 5.1 – Trois mécanismes de transport.

5.2.2 Les différentes hypothèses

Nous supposons dans un premier temps que nous avons deux fluides dans le mélange : l'eau "salée" avec une densité ρ_1, une concentration c et l'eau "douce" dont la densité est ρ_2, sa concentration étant $1-c$. Nous écrivons l'équation de le conservation de la masse (5.8) pour chaque fluide :

$$\partial_t(\rho_1\phi c) + \mathrm{div}(\rho_1 c q) - \mathrm{div}(\rho_1\phi\mathcal{D}(q)\nabla c) = \rho_1(Q_i - cQ_s), \tag{5.9}$$
$$\partial_t(\rho_2\phi(1-c)) + \mathrm{div}(\rho_2(1-c)u) - \mathrm{div}(\rho_2\phi\mathcal{D}(q)\nabla(1-c)) = -\rho_2(1-c)Q_s, \tag{5.10}$$

où le terme Q_i correspond à la masse d'eau injectée et Q_s correspond à la masse d'eau produite. La densité du mélange étant alors

$$\rho = \rho_1 c + \rho_2(1-c),$$

on a aussi

$$q = -\frac{k}{\mu}(\nabla P + (\rho_1 c + \rho_2(1-c))g\nabla z).$$

Nous réécrivons les équations (5.9)-(5.10) en les développant :

$$\begin{aligned}
&\rho_1\partial_t(\phi c) + \phi c\partial_t(\rho_1) + \rho_1 \mathrm{div}(cq) + cq\cdot\nabla\rho_1 \\
&\qquad -\rho_1\mathrm{div}(\phi\mathcal{D}(q)\nabla c) - \theta\mathcal{D}(q)\nabla c\cdot\nabla\rho_1 = \rho_1(Q_i - cQ_s), \qquad (5.11)\\
&\rho_2\partial_t(\phi(1-c)) + \phi(1-c)\partial_t(\rho_2) + \rho_2\mathrm{div}((1-c)q) + (1-c)q\cdot\nabla\rho_2 \\
&\qquad -\rho_2\mathrm{div}(\phi\mathcal{D}(q)\nabla(1-c)) - \phi\mathcal{D}(q)\nabla(1-c)\cdot\nabla\rho_2 = -\rho_2(1-c)Q_s, \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Dans un second temps, nous supposons que les fluides sont faiblement compressibles (nous utiliserons l'équation (5.4) dans (5.11) et (5.12)). Puis, avec l'hypothèse de Bear qui consiste à négliger les variations de la densité dans la direction de l'écoulement *i.e.* $q\cdot\nabla\rho_i \ll 1,\ \mathcal{D}(q)\nabla\rho_i \ll 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\rho_1\partial_t(\phi c) + \phi\rho_1 c z_1\partial_t P + \rho_1\mathrm{div}(cq) - \rho_1\mathrm{div}(\phi\mathcal{D}(q)\nabla c) = \rho_1(Q_i - cQ_s), \qquad (5.13)\\
&\rho_2\partial_t(\phi(1-c)) + \phi\rho_2(1-c)z_2\partial_t P + \rho_2\mathrm{div}((1-c)q) - \rho_2\mathrm{div}(\phi\mathcal{D}(q)\nabla(1-c)) = -\rho_2(1-c)Q_s \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

On simplifie par $\rho_1 \neq 0$ et $\rho_2 \neq 0$ dans (5.13)-(5.14) puis on présente les équations (5.13)+(5.14)=(5.15) et (5.13) ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\partial_t\phi(P) + \phi(P)a(c)\partial_t P + \mathrm{div}(q) = Q_i - Q_s, \qquad (5.15)\\
&\phi(P)\partial_t c + \phi(P)b(c)\partial_t P + q\cdot\nabla c - \mathrm{div}(\phi(P)\mathcal{D}(q)\nabla c) = Q_i(1-c), \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad a(c) = (z_1 - z_2)c + z_2 \quad\text{et}\quad b(c) = (z_1 - z_2)c(1-c),\ c\in[0,1].$$

En ajoutant le modèle (5.5) de la compressibilité du sol, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\big((1-\phi(P))\beta_p + \phi(P)a(c)\big)\partial_t P + \mathrm{div}(q) = Q_i - Q_s, \qquad (5.17)\\
&\phi(P)\partial_t c + \phi(P)b(c)\partial_t P + q\cdot\nabla c - \mathrm{div}(\phi(P)\mathcal{D}(q)\nabla c) = Q_i(1-c), \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

où $S_p = \big((1-\phi(P))\beta_p + \phi(P)a(c)\big)$ est le coefficient d'emmagasinement en eau dans le milieu poreux, $(1-\phi(P))\beta_p$ représentant la compressibilité du milieu et $\phi(P)a(c)$ étant relative à la compressibilité des fluides.

5.2.3 Cadre et Modèle mathématique

Nous considérons un domaine Ω, un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec un bord $\Gamma\in\mathcal{C}^1$, ν est le vecteur unité normal pointant vers l'extérieur de Ω. L'intervalle de temps qui nous intéresse est $(0,T)$. Soit $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$ le domaine spatio-temporelle considéré.

a) Formulation en Pression (P) en négligeant les effets de la gravité

Le modèle mathématique obtenu ci-dessus devient, si l'on néglige les effets de la gravité dans l'équation de Darcy :

$$\begin{aligned}
\partial_t\phi(P) + \phi(P)a(c)\partial_t P + \nabla\cdot q = Q_i - Q_s, &\qquad \text{dans } (0,T)\times\Omega \qquad (5.19)\\
q = -\kappa(\phi(P))\nabla P, &\qquad \text{dans } (0,T)\times\Omega, \qquad (5.20)\\
\phi(P)\partial_t c + \phi(P)b(c)\partial_t P + q\cdot\nabla c - \nabla\cdot(\phi(P)\mathcal{D}(q)\nabla c) = Q_i(1-c), &\qquad \text{dans } (0,T)\times\Omega, \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}(q) = |q|(\alpha_L\varepsilon(q) + \alpha_T(Id - \varepsilon(q))) + D_m Id,$$

$$a(c) = (z_1 - z_2)c + z_2 \quad\text{et}\quad b(c) = (z_1 - z_2)c(1-c),\ c\in[0,1],$$

où $\varepsilon(q)_{ij} = q_i q_j/|q|^2$, $|q| = \big(\sum_{i=1}^3 (q_i)^2\big)^{\frac{1}{2}}$, a et b sont des fonctions définies sur $[0,1]$ et prolongées continûment dans $\mathbb{R}$, ϕ représente la porosité du milieu qui dépend de la pression P, c est la concentration

de l'espèce transportée (le sel pour nous), Q_i et Q_s sont les termes sources (injection et production) et sont des fonctions positives de $L^2(\Omega)$, z_1, z_2 sont les coefficients de compressibilité des deux fluides du mélange, κ est la conductivité hydraulique du milieu, q est la vitesse de Darcy, $\mathcal{D}(q)$ est le tenseur qui modélise les effets de dispersion et diffusion, α_L, α_T sont respectivement les coefficients de dispersion longitudinale et transversale, D_m est la diffusion moléculaire supposée strictement positive.

Un résultat d'existence a été établi pour le système (5.19)-(5.20)-(5.21), complété par des conditions aux bords et conditions initiales. Nous allons rappeler les hypothèses ainsi que le résultat d'existence (voir [24] pour plus de détails). On suppose que :

• il existe ϕ_+ et κ_+ des réels positifs tels que :

$$\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \phi(x) \leq \phi_+, \ \phi'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{5.22}$$

$$\kappa \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+), \quad 0 \leq \kappa(x) \leq \kappa_+ \ \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{5.23}$$

• le tenseur $\mathcal{D}$ satisfait :

$$\mathcal{D}(q)\xi \cdot \xi \geq (D_m + \alpha_T|q|)\,|\xi|^2, \qquad |\mathcal{D}(q)\xi| \leq (D_m + \alpha_L|q|)\,|\xi|, \tag{5.24}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$,

• la solution doit vérifier les conditions aux bords et conditions initiales suivantes :

$$\begin{array}{l} q \cdot \nu_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0,T), \quad P_{|_{\Gamma_2}} = p_2 \text{ dans } (0,T), \\ P(x,0) = p_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{array} \tag{5.25}$$

$$\begin{array}{l} \phi(P)\mathcal{D}(q)\nabla c \cdot \nu_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0,T), \quad c_{|_{\Gamma_2}} = C_2 \text{ dans } (0,T), \\ c(x,0) = c_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{array} \tag{5.26}$$

où le bord Γ de Ω est l'union disjointe de Γ_1 et Γ_2, les fonctions p_2 et C_2 appartiennent à l'espace $H^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$,

• les fonctions $P_0 \in H^2(\Omega)$, $c_0 \in H^2(\Omega)$ satisfont les conditions de compatibilité

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{0|_{\Gamma_2}} = p_2(x,0), & c_{0|_{\Gamma_2}} = C_2(x,0), \\ \kappa(\phi(P_0))\nabla P_0 \cdot \nu_1 = 0, & \phi(P_0)\mathcal{D}(-\kappa(\phi(P_0))\nabla P_0)\nabla c_0 \cdot \nu_1 = 0, \end{array} \right.$$

• $c_0 \in L^\infty(\Omega)$ est une concentration admissible :

$$0 \leq c_0(x) \leq 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{5.27}$$

Théorème 5.1 *(Modèle de consolidation) Supposons qu'il existe deux réels ϕ_- et κ_- tels que :*

$$\phi(x) \geq \phi_- > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \kappa(x) \geq \kappa_- > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{5.28}$$

Supposons de plus que :

$$D_m > 0, \quad \alpha_L \geq \alpha_T > 0. \tag{5.29}$$

Alors le problème (5.19)-(5.20)-(5.21), (5.25)-(5.26) admet une solution faible (P,c) qui satisfait :

i) la fonction $P \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ est la solution de (5.19)-(5.20), (5.25) ;

ii) la fonction $c \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ est la solution de (5.21), (5.26) étant vérifiée dans $L^2(0,T;(V)')$, où $V = \{f \in L^2(0,T;W^{1,4}(\Omega));\ f_{|_{\Gamma_2}} = 0\}$.

Elle satisfait $0 \leq c(x,t) \leq 1$ p.p. dans Ω_T.

b) Formulation en Pression (P) **avec les effets de la gravité**

Si l'on conserve les effets de gravité, seule l'équation (5.20) change dans le système (5.19)-(5.20)-(5.21) pour devenir (5.1).

c) Formulation en Charge Hydraulique (Φ) **avec les effets de la gravité**

Ici, on reprend simplement les formules (5.19)-(5.1)-(5.21) en remplaçant P par la formule (5.3) :

$$P = \rho_0 g(\Phi - Z),$$

où $Z = z - h_{ref}$, et en réécrivant la vitesse de Darcy sous la forme (5.2) :

$$q = -K\nabla\Phi - \frac{k}{\mu}(\rho - \rho_0)g\nabla Z, \quad K = \frac{k\rho_0 g}{\mu},$$
$$q = -K\Big(\nabla\Phi + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\nabla Z\Big).$$

En utilisant cette formule pour q, on ne néglige plus les effets de gravité. Le terme $K\big(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\big)\nabla Z$ représente la flottabilité. Dans la suite, nous garderons ce terme car c'est lui qui contient les effets de différence de densité. Ces effets, qui sont aussi présents dans le modèle d'écoulement à deux phases (modèle 2D intégré), nous permettront de le comparer avec le modèle d'écoulements à une seule phase (modèle 3D). Plus précisément, on a

$$q = -K\Big(\nabla\Phi + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\nabla Z\Big), \quad K = \frac{k\rho_0 g}{\mu}, \tag{5.30}$$

où ρ est la densité du mélange :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 c + \rho_2(1-c) \\ &= \rho_{0,1} c e^{z_1(P-P_0)} + \rho_{0,2}(1-c)e^{z_2(P-P_0)}, \end{aligned}$$

où $\rho_{0,1}$ est la densité de référence de l'eau salée (parfois aussi notée ρ_s dans cette thèse) et $\rho_{0,2} = \rho_0$ est la densité de référence de l'eau claire (parfois aussi notée ρ_f dans cette thèse), soit :

$$\rho = \rho_{0,1} c e^{z_1\rho_0 g(\Phi - Z) - z_1 P_0} + \rho_0(1-c)e^{z_2\rho_0 g(\Phi-Z) - z_2 P_0}. \tag{5.31}$$

La définition de q de la formule (5.30) devient :

$$\begin{aligned} q &= -K\Big(\nabla\Phi + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\nabla Z\Big) \\ &= -K\Big(\nabla\Phi + \big(\frac{\rho_{0,1} - \rho_0}{\rho_0} c e^{z_1\rho_0 g(\Phi-Z) - z_1 P_0} + (1-c)e^{z_2\rho_0 g(\Phi-Z) - z_2 P_0}\big)\nabla Z\Big). \end{aligned}$$

Il est établi dans le chapitre de modélisation de la première partie qu'avec l'hypothèse de continuité de la viscosité entre eau salée et eau claire, on a :

$$\frac{\rho_{0,1}}{\rho_0} = 1 + \alpha \Leftrightarrow \frac{\rho_{0,1}}{\rho_0} - 1 = \alpha \Leftrightarrow \frac{\rho_{0,1} - \rho_0}{\rho_0} = \alpha.$$

Donc finalement q s'écrit :

$$q = -K\Big(\nabla\Phi + \alpha e^{z_1\rho_0 g(\Phi-Z) - z_1 P_0} c\nabla Z + e^{z_2\rho_0 g(\Phi-Z) - z_2 P_0}(1-c)\nabla Z\Big)$$

avec α qui décrit le contraste de densité.

Remarque 5.3

C'est très différent de ce que l'on avait au niveau de la première partie où il était question d'écoulements à deux phases, car ici on regarde un mélange (écoulement à une seule phase), donc on ne peut plus définir qu'une charge hydraulique Φ *(définir* Φ_f *et* Φ_s *n'a plus de sens).*

Remarque 5.4
Une hypothèse courante admise pour la forme de ρ est :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{0,1}c + \rho_{0,2}(1-c)\\ &= \rho_{0,1}c + \rho_0(1-c)\\ &= (\rho_{0,1}-\rho_0)c + \rho_0\\ &= \rho_0\Big((\frac{\rho_{0,1}-\rho_0}{\rho_0})c + 1\Big)\\ &= \rho_0(\alpha c + 1), \end{aligned} \tag{5.32}$$

si bien que

$$\begin{aligned} q &= -K\Big(\nabla\Phi + \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\nabla Z\Big) = -K\Big(\nabla\Phi + \frac{\rho_0(\alpha c+1)-\rho_0}{\rho_0}\nabla Z\Big),\\ q &= -K\big(\nabla\Phi + \alpha c\nabla Z\big). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Au final, nous obtenons le modèle suivant en fonction de la charge hydraulique et en présence du contraste de densité α :

$$\partial_t\phi_\Phi(\Phi) + \rho_0 g\phi_\Phi(\Phi)a(c)\partial_t\Phi + \nabla\cdot q = Q_i - Q_s, \tag{5.34}$$
$$q = -K(\nabla\Phi + \alpha c\nabla Z), \tag{5.35}$$
$$\phi_\Phi(\Phi)\partial_t c + \rho_0 g\phi_\Phi(\Phi)b(c)\partial_t\Phi + q\cdot\nabla c + \nabla\cdot(\phi_\Phi(\Phi)\mathcal{D}(q)\nabla c) = Q_i(1-c), \tag{5.36}$$

où $\phi_\Phi := \phi\big(\rho_0 g(\Phi - Z)\big)$.

d) Formulation Mixte

Dans nos schémas numériques, notre stratégie consiste à calculer à chaque pas de temps les couples (Φ, q) : charge hydraulique et vitesse de Darcy, et (c, q_c) : concentration et flux de concentration. Nous associons donc aux équations précédentes la formulation mixte suivante :

$$\partial_t\phi_\Phi(\Phi) + \rho_0 g\phi_\Phi(\Phi)a(c)\partial_t\Phi + \nabla\cdot q = Q_i - Q_s, \tag{5.37}$$
$$q = -K(\nabla\Phi + \alpha c\nabla Z), \tag{5.38}$$
$$\phi_\Phi(\Phi)\partial_t c + \rho_0 g\phi_\Phi(\Phi)b(c)\partial_t\Phi - c\nabla\cdot q + \nabla\cdot q_c = Q_i(1-c), \tag{5.39}$$
$$q_c = -\phi_\Phi(\Phi)\mathcal{D}(q)\nabla c + qc. \tag{5.40}$$

Remarque 5.5
Afin de simplifier davantage la programmation des modèles, nous allons supposer que :

- *la fonction $\phi_\Phi(\Phi)$ est de façon plus générale considérée comme la teneur volumique en eau dans un milieu partiellement saturé. Elle décrit la variation en eau en fonction de la pression. Ici, nous allons utiliser le modèle apparenté au modèle de la conductivité hydraulique exponentielle de Gardner et de Rijtema, voir [4]. Elle est donnée par la relation suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{\theta-\theta_d}{\theta_s-\theta_d} = e^{\alpha(P-P_b)} \quad &si \quad P < P_b \quad si\ le\ milieu\ est\ non\text{-}saturé\\ \theta = \theta_s \quad &si \quad P > P_b \quad si\ le\ milieu\ est\ saturé, \end{aligned}$$

  où : θ_s est la teneur volumique en eau à saturation et sa valeur numérique est comprise dans $[\phi\times 0,8;\phi]$ d'après Zammit (1999) (voir [87]) ;
  θ_d est la teneur volumique en eau résiduelle avec une valeur arbitraire de $0,01$. Cette quantité est obtenue expérimentalement et est proposée par Wösten (1995) (voir [86]) ;
  θ_e est la teneur effective qui correspond à la part de l'eau qui circule réellement dans le milieu et est

définie comme étant : $\theta_e = \theta - \theta_d$.
Les quantités P_b et $(-1/\alpha)$ sont des facteurs d'échelles liés à la pression d'entrée d'air à la surface quand le sol est pratiquement saturé ($\theta = \theta_s$).

- *Le tenseur de dispersion quant à lui, est issu du modèle de Bear (1961), Scheiddegger (1961) et est donné par la formule suivante :*

$$D = D_m Id + (\alpha_L - \alpha_T)|q|^{-1} q \cdot q + \alpha_T |q| Id,$$

une formule qu'on réécrit comme suit :

$$\mathcal{D}(q) = |q|(\alpha_L \varepsilon(q) + \alpha_T (Id - \varepsilon(q))) + D_m Id,$$

où $\varepsilon(q) = \left(q_i q_j / |q|^2\right)$, $|q| = \left(\sum_{i=1}^{3} (q_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, D_m est le coefficient de diffusion moléculaire, Id est le tenseur unité, α_T et α_L sont respectivement les coefficients de dispersion intrinsèque transversale et longitudinale. Dans la suite, nous utiliserons les valeurs utilisées dans plusieurs références : $\alpha_T = 0$, $\alpha_L = 0,2$, et $D_m = 10^{-3}$.

- *La matrice de conductivité hydraulique (K) est considérée ici égale à une constante fois l'identité partout dans le milieu. Dans les simulations, nous avons choisi $K = k_m \times Id$, avec $k_m = 39,04$.*

- *Pour finir, nous supposons que la compressibilité de l'eau douce z_1 et celle de l'eau salée z_2 sont les mêmes i.e $z_1 = z_2$. Cela entraîne :*

$$a(c) = z_2, \qquad et \qquad b(c) = 0.$$

Le modèle final simplifié issu du système (5.37)-(5.38)-(5.39)-(5.40) est donc le suivant :

$$\begin{aligned}
(\phi'_\Phi(\Phi) + \rho_0 g \phi_\Phi(\Phi) z_2)\partial_t \Phi + \nabla \cdot q &= Q_i - Q_s, && (5.41)\\
q &= -K(\nabla \Phi + \alpha c \nabla Z), && (5.42)\\
\phi_\Phi(\Phi)\partial_t c - c\nabla \cdot q + \nabla \cdot q_c &= Q_i(1-c), && (5.43)\\
q_c &= -\phi_\Phi(\Phi)\mathcal{D}(q)\nabla c + qc, && (5.44)
\end{aligned}$$

avec $\partial_t \phi_\Phi(\Phi) = \phi'_\Phi(\Phi)\partial_t \Phi$. On posera dans la suite

$$S_f^{3D}(\Phi) = \phi'_\Phi(\Phi) + \rho_0 g \phi_\Phi(\Phi) z_2 \qquad \text{et} \qquad D(\Phi, q) = \phi_\Phi(\Phi)\mathcal{D}(q).$$

5.3 Présentation des schémas numériques

Pour les illustrations numériques, nous avons utilisé le logiciel FreeFem++ [63]. Comme son nom l'indique, FreeFem++ est un logiciel libre, développé au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie à Paris par Frédéric Hecht et *al*, voir [63] et [43]. Ce logiciel est basé sur la Méthode des Eléments Finis (MEF), une méthode numérique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles.

5.3.1 Modèle 3D

Pour le cas 3D, nous considérons un domaine $\Omega^{3d} \in \mathbb{R}^3$, définit par :

$$\Omega = [-5\,;\,5] \times [0\,;\,3] \times [-3\,;\,0], \quad \text{et pour bord} \quad \Gamma^{3d} = \Gamma_1^{3d} \cup \Gamma_2^{3d},$$

où $\Gamma_1 = \Gamma_1^{3d} \cup \Gamma_3^{3d} \cup \Gamma_4^{3d} \cup \Gamma_5^{3d} \cup \Gamma_6^{3d}$ et $\Gamma_2 = \Gamma_2^{3d}$. La discrétisation en espace est $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0,2$ et en temps $dt = 0,1$. Nous considérons aussi que le domaine est imperméable sur tous les bords sauf sur Γ_2, le bord qui est en contact avec la mer où nous supposerons des conditions de Dirichlet : ce qui revient à

résoudre le système (5.41)-(5.42)-(5.43)-(5.44) avec des conditions aux bords dites de Neumann sur les faces $\Gamma_1^{3d}, \Gamma_3^{3d}, \Gamma_4^{3d}, \Gamma_5^{3d}, \Gamma_6^{3d}$, qui sont :

$$q \cdot n = 0, \qquad q_c \cdot n = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1^{3d}, \Gamma_3^{3d}, \Gamma_4^{3d}, \Gamma_5^{3d}, \Gamma_6^{3d}, \tag{5.45}$$

$$\Phi = \Phi_{\Gamma 2}, \qquad c = c_{\Gamma 2}, \qquad \text{sur } \Gamma_2^{3d}. \tag{5.46}$$

Nous écrivons donc la formulation variationnelle du problème continu (5.41)-(5.42)-(5.43)-(5.44) comme suit : trouver $\Phi \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$, $c \in L^\infty((0,T)\times\Omega) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et q, $q_c \in L^2(0,T;H(\mathrm{div};\Omega))$ tels que :

$$\int_\Omega S_f^{3D}(\Phi)\partial_t\Phi \; w \; dX + \int_\Omega w \; \nabla\cdot q \; dX = \int_\Omega (q_i - q_s) \; w \; dX, \tag{5.47}$$

$$\int_\Omega q \; v \; dX = -\int_\Omega K(\nabla\Phi + \alpha c \nabla z) \; v \; dX, \tag{5.48}$$

$$\int_\Omega \phi_\Phi(\Phi)\partial_t c \; w \; dX - \int_\Omega w \; (c\nabla\cdot q) \; dX + \int_\Omega w \; \nabla\cdot q_c \; dX = \int_\Omega q_i(1-c) \; w \; dX, \tag{5.49}$$

$$\int_\Omega D(\Phi,q)^{-1} q_c \; v \; dX - \int_\Omega D(\Phi,q)^{-1} \, q \, c \; v \; dX = -\int_\Omega \nabla c \; \cdot v \; dX, \tag{5.50}$$

pour tous $w \in L^2(\Omega)$ et $v \in H(\mathrm{div};\Omega)$. On a noté $dX = dxdydz$. En appliquant la formule de Green on obtient :

$$\int_\Omega S_f^{3D}(\Phi)\partial_t\Phi \; w \; dX + \int_\Omega w \; \nabla\cdot q \; dX = \int_\Omega (q_i - q_s) \; w \; dX, \tag{5.51}$$

$$\int_\Omega q \; v \; dX + \int_\Omega K\alpha c(\nabla z \cdot v) \; dX = \int_\Omega K \; \Phi\nabla\cdot v \; dX - \int_\Gamma K\Phi \; v\cdot n \; d\sigma, \tag{5.52}$$

$$\int_\Omega \phi_\Phi(\Phi)\partial_t c \; w \; dX - \int_\Omega w \; c\nabla\cdot q \; dX + \int_\Omega w \; \nabla\cdot q_c \; dX = \int_\Omega q_i(1-c) \; w \; dX, \tag{5.53}$$

$$\int_\Omega D(\Phi,q)^{-1} \, q_c \; v \; dX - \int_\Omega D(\Phi,q)^{-1} \, q \, c \, v \; dX = \int_\Omega c \, \nabla\cdot v \; dX - \int_\Gamma c \; v\cdot n \; d\sigma, \tag{5.54}$$

pour tous $w \in L^2(\Omega)$ et $v \in H(\mathrm{div};\Omega)$. On fait la somme de (5.51) et (5.52), puis (5.53) et (5.54). En utilisant les conditions de Neumann $\Gamma_1^{3d}, \Gamma_3^{3d}, \Gamma_4^{3d}, \Gamma_5^{3d}, \Gamma_6^{3d}$ et de Dirichlet sur Γ_2^{3d} ((5.45)-(5.46)), on arrive à :

$$\begin{aligned}\int_\Omega S_f^{3D}(\Phi)\partial_t\Phi \; w \; dX + \int_\Omega w \; \nabla\cdot q \; dX + \int_\Omega q \; v \; dX + \int_\Omega K\alpha c(\nabla z\cdot v) \; dX \\ = \int_\Omega (q_i - q_s) \; w \; dX + \int_\Omega K \, \Phi \, \nabla\cdot v \; dX - \int_{\Gamma_2} K\Phi_{\Gamma_2} \; v\cdot n \; d\sigma,\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi_\Phi(\Phi)\partial_t c \; w \; dX - \int_\Omega w \; c\nabla\cdot q \; dX + \int_\Omega w \; \nabla\cdot q_c \; dX + \int_\Omega D(\Phi,q)^{-1} q_c \; v \; dX \\ - \int_\Omega D(\Phi,q)^{-1} \, q \, c \; v \; dX = \int_\Omega q_i(1-c) \; w \; dX + \int_\Omega c \; \nabla\cdot v \; dX - \int_{\Gamma_2} c_{\Gamma_2} \; v\cdot n \; d\sigma,\end{aligned} \tag{5.56}$$

pour tous $w \in L^2(\Omega)$ et $v \in V_0 = \{v \in H(\mathrm{div};\Omega), \text{ tel que } v\cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\}$.

Pour la discrétisation en espace, $\mathcal{T}_h$ est une décomposition régulière de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ en d-simplexes fermés où h représente le diamètre des mailles. Nous supposons que $\bar{\Omega} = \cup_{O\in\mathcal{T}_h} O$. Nous définissons aussi les sous-espaces discrets correspondant aux espaces continus, $W_h \subset L^2(\Omega)$ et $V_h \subset V_0$ donnés par :

$$W_h := \{p \in L^2(\Omega) \mid p \text{ est polynomiale de degré} \leq 1 \text{ sur chaque élément } O \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_h := \{u \in H(\mathrm{div};\Omega) \; u_{|O}(x) = a + bx, a \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R} \text{ pour tout } \quad O \in \mathcal{T}_h \quad \text{ et } \quad u\cdot n = 0 \quad sur \quad \Gamma_1\}.$$

En d'autres termes, W_h représente l'espace des polynomiales de degré ≤ 1 tandis que V_h est l'espace de Raviart-Thomas d'ordre le plus faible RT_0.

La formulation variationnelle discrète associée au système (5.55)-(5.56) consistera à discrétiser en temps avec un schéma d'Euler sémi-implicite et en espace par la méthode des éléments finis mixtes. La résolution se fera itérativement en deux temps : sachant que Φ_h^0, c_h^0 sont connues,
• le premier problème est : pour $n = 1, 2, \cdots, n$ trouver $(\Phi_h^n, q_h^n) \in W_h \times V_h$ tel que :

$$\begin{aligned}\int_\Omega S^{3D}(\Phi_h^{n-1})\frac{\Phi_h^n - \Phi_h^{n-1}}{dt}\ w_h\ dX + \int_\Omega w_h\ \nabla\cdot q_h^n\ dX + \int_\Omega q_h^n\ v_h\ dX \\ = \int_\Omega (q_i - q_s)\ w_h\ dX + \int_\Omega K\Phi_h^n\ \nabla\cdot v_h\ dX - \int_{\Gamma_2} K\Phi_{\Gamma_2}\ v_h\cdot n\ d\sigma,\end{aligned} \tag{5.57}$$

pour tous $(w_h, v_h) \in W_h \times V_h$;
• le second problème est de trouver $(c_h^n, q_{ch}^n) \in W_h \times V_h$ tel que :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi_\Phi(\Phi_h^n)\frac{c_h^n - c_h^{n-1}}{dt}\ w_h\ dX - \int_\Omega w_h\ c_h^n\nabla\cdot q_h^n\ dX + \int_\Omega w_h\ \nabla\cdot q_{ch}^n\ dX + \int_\Omega D(\Phi_h^n, q_h^n)^{-1}q_{ch}^n\ v_h\ dX \\ - \int_\Omega D(\Phi_h^n, q_h^n)^{-1}q_h^n c_h^n\ v_h\ dX = \int_\Omega q_i(1 - c_h^n)\ w_h\ dX + \int_\Omega c_h^n\ \nabla\cdot v_h\ dX - \int_{\Gamma_2} c_{\Gamma_2}\ v_h\cdot n\ d\sigma,\end{aligned} \tag{5.58}$$

pour tous $(w_h, v_h) \in W_h \times V_h$.

Remarque 5.6 *Ce schéma est un cas particulier de celui présenté en annexe (pour lequel sont donnés les résultats d'existence et d'unicité de la solution).*

Le code FreeFem qui a donné les résultats présentés dans le paragraphe suivant, utilise les formulations variationnelle discrètes faibles (5.63)-(5.64), les données physiques et les conditions aux bords et initiales du problème :

1. Définition de Ω_h, W_h et V_h (le domaine est uniformément discrétisé avec un pas $h < 1$) :
   $mesh3$ `TH = Cube(NN, BB, L);//`maillage 3D de Ω,
   `X0` $= -5$; `X1` $= 5$; `Y0` $= -3$; `Y1` $= 0$; `Z0` $= -3$; `Z1` $= 0$; `Zb` $= -0.5$; `Za` $= -2.5$; `Zc = Z1`;
   `Xa` $= -5$; `Xb` $= 5$; `a = (Zb - Za)/(Xb - Xa)`; `b = Za - a * Xa`;
   $fespace$ `Vh(TH, RT03d);//` espace d'élément fini 3D de Raviart-Thomas,
   $fespace$ `Rh(TH, P1);//`espace d'élément fini $P1$ en 3D.
2. Les données physiques : $K = 39.04$, $D_m = 10e-3$, $\delta = delta = 0.2$, $\phi = 0.3$ et $dt = 0.1$.
3. Les conditions initiales :
   Φ_h^0 `= P/(g * ρ) + z;`
   c_h^0 `=  +0.2 * (Xa <= x <= Xb) × (Y0 <= y <= Y1) × (Z0 <= z <= a * x + b - delta/2)`
   `+0.1 * (Xa <= x <= Xb) × (Y0 <= y <= Y1) × (a * x + b - delta/2 < z <= a * x + b + delta/2)`
   `+0.0 * (Xa <= x <= Xb) × (Y0 <= y <= Y1) × (a * x + b + delta/2 < z <= Zc)`

5.3.2 Modèle 2D

Ici pour le cas 2D, nous considérons un domaine $\Omega^{2d} \in \mathbb{R}^2$, défini par :

$$\Omega^{2d} = [-5\,;\,5] \times [0\,;\,3], \quad \text{avec pour bord} \quad \Gamma^{2d} = \Gamma_1^{2d} \cup \Gamma_2^{2d} \cup \Gamma_3^{2d} \cup \Gamma_4^{2d}.$$

Le pas de discrétisation en espace est : $\delta_x = \delta_y = 0.05$ et celui en temps est : $dt = 0.1$. Nous rappelons que, dans notre modèle 2D, l'évolution du front de l'eau salée de profondeur (h) et celle du front de saturation en eau douce de profondeur (h_1) sont décrites par :

$$\begin{aligned}S_f^{2D}(h_1, h)\partial_t h_1 - \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h - h_1) + T_s(h)\big)\nabla h_1\big) \\ -\nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1\big) - \nabla\cdot\big(\alpha K T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big) &= -\mathcal{Q}_f T_f(h - h_1) - \mathcal{Q}_s T_s(h),\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\phi\partial_t h - \nabla\cdot\big(\alpha K T_s(h)\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h\big) - \nabla\cdot\big(K T_s(h)\nabla h_1\big) = -\mathcal{Q}_s T_s(h), \tag{5.60}$$

équations complétées par des conditions aux bords dites de Neumann homogènes sur les faces $\Gamma_1^{2d}, \Gamma_3^{2d}, \Gamma_4^{2d}$ (puisque notre domaine est supposé imperméable) :

$$\frac{\partial h_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1^{2d}, \Gamma_3^{2d}, \Gamma_4^{2d}, \tag{5.61}$$

$$h = h_{\Gamma_2^{2d}}, \qquad h_1 = h_{1\Gamma_2^{2d}} \qquad \text{sur } \Gamma_2^{2d}. \tag{5.62}$$

On a posé $S_f^{2D}(h_1, h) = S_f C_w(h_1) T_f(h - h_1) + \phi$.

La formulation variationnelle du problème continu (5.59)-(5.60)-(5.61)-(5.62) est de trouver $(h_1, h) \in (H^1(\Omega))^2$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S_f^{2D}(h_1,h)\partial_t h_1 w\,dxdy - \int_\Omega \nabla\cdot\big(K\big(T_f(h-h_1)+T_s(h)\big)\nabla h_1\big)w\,dxdy - \int_\Omega \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h_1\big)w\,dxdy \\
&\quad - \int_\Omega \nabla\cdot\big(\alpha K T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\big)w\,dxdy = -\int_\Omega \mathcal{Q}_f T_f(h-h_1)w\,dxdy - \int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h) w\,dxdy, \\
&\int_\Omega \phi\partial_t h w\,dxdy - \int_\Omega \nabla\cdot\big(\alpha K T_s(h)\nabla h\big)w\,dxdy - \int_\Omega \nabla\cdot\big(\delta\phi\nabla h\big)w\,dxdy - \int_\Omega \nabla\cdot\big(K T_s(h)\nabla h_1\big)w\,dxdy \\
&\qquad = -\int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h) w\,dxdy,
\end{aligned}$$

pour tout $w \in H^1(\Omega)$. En appliquant la formule de Green, puis les conditions au bords sur Γ^{2d}, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S_f^{2D}(h_1,h)\partial_t h_1 w\,dxdy + \int_\Omega K\big(T_f(h-h_1)+T_s(h)\big)\nabla h_1\cdot\nabla w\,dxdy + \int_\Omega \delta\phi\nabla h_1\cdot\nabla w\,dxdy \\
&\quad + \int_\Omega \alpha K T_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h\cdot\nabla w\,dxdy = -\int_\Omega \mathcal{Q}_f T_f(h-h_1)w\,dxdy - \int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h) w\,dxdy, \\
&\int_\Omega \phi\partial_t h w\,dxdy + \int_\Omega \alpha K T_s(h)\nabla h\cdot\nabla w\,dxdy + \int_\Omega \delta\phi\nabla h\cdot\nabla w\,dxdy + \int_\Omega K T_s(h)\nabla h_1\cdot\nabla w\,dxdy \\
&\qquad = -\int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h) w\,dxdy,
\end{aligned}$$

pour tout $w \in W_1 = \{v \in H^1(\Omega) |\quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2^{2d}\}$.

Pour la discrétisation en espace, $\mathcal{T}_h$ est une décomposition régulière de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ en d-simplexes fermés où h représente le diamètre des mailles. Nous supposons que $\bar{\Omega} = \cup_{O\in\mathcal{T}_h} O$. Nous définissons aussi le sous-espace discret correspondant à l'espaces continu, $W_{1,h} \subset W_1$ donné par :

$$W_{1,h} := \{p \in H^1(\Omega) \mid p \text{ est un polynôme de degré} \leq 1 \text{ sur chaque élément } O \in \mathcal{T}_h\},$$

Nous utilisons une discrétisation en temps avec un schéma d'Euler sémi-implicite et en espace par la méthode des éléments finis. La formulation variationnelle discrète de FreeFem du problème (5.59)-(5.60) complété par les conditions (5.61)-(5.62) est : sachant que le couple (h_1^{n-1}, h^{n-1}) est connu, trouver $(h_1^n, h^n) \in W_{1,h} \times W_{1,h}$ tel que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S_f^{2D}(h_1^{n-1},h^{n-1})\frac{h_1^n - h_1^{n-1}}{dt}\,w_h\,dX &+ \int_\Omega K\big(T_f(h^{n-1}-h_1^{n-1})+T_s(h^{n-1})\big)\nabla h_1^n\,\nabla\cdot w_h\,dX \\
&+ \int_\Omega \delta\phi\nabla h_1^n\cdot\nabla w_h\,dX + \int_\Omega \alpha K T_s(h^{n-1})\nabla h^n\cdot\nabla w_h\,dX \\
&+ \int_\Omega \mathcal{Q}_f T_f(h^n - h_1^n)\,w_h\,dX + \int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h^n)\,w_h\,dX + on(2, h = h_{\Gamma_2^{2d}}) = 0,
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\int_\Omega \phi \frac{h^n - h^{n-1}}{dt}\, w_h\, dX - \int_\Omega \alpha K T_s(h^{n-1}) \nabla h^n \cdot \nabla w_h\, dX + \int_\Omega \delta\phi \nabla h^n \cdot \nabla w_h\, dX$$
$$+ \int_\Omega K T_s(h^{n-1}) \nabla h_1^n \cdot \nabla w_h\, dX + \int_\Omega \mathcal{Q}_s T_s(h^n)\, w_h\, dX + on(2, h_1 = h_{1\Gamma_2^{2d}}) = 0, \tag{5.64}$$

pour tout $w_h \in W_{1,h}$.

Remarque 5.7 *Lorsqu'on considère un aquifère confiné ce qui est le cas dans la section suivante (donc seulement l'interface eau salée - eau douce), le modèle à utiliser est tout à fait similaire à* (1.59) − (1.60) *(voir [54]) ; la variable h_1 représente alors la charge en eau douce qui sera notée f_1 tandis que h_1 représente la surface imperméable supérieure de l'aquifère.*

5.4 Comparaison des modèles 3D et 2D

La comparaison 2D-3D se fera au niveau de trois coupes verticales par rapport à l'axe $(0, y)$: en $y = 0.5$, $y = 1.5$ et $y = 2,5$. Cette comparaison portera surtout sur les expérimentations de Keulegan, pompage et remplissage. De façon générale un programme 3D, avec un pas de temps $dt = 0,1$ à 25 itérations mettra plus de temps à s'exécuter par rapport au programme 2D. La coupe $y = 1.5$ correspond à la coupe qui passe par le milieu du domaine 2D et 3D, et qui traverse aussi le puits de pompage ou de remplissage.

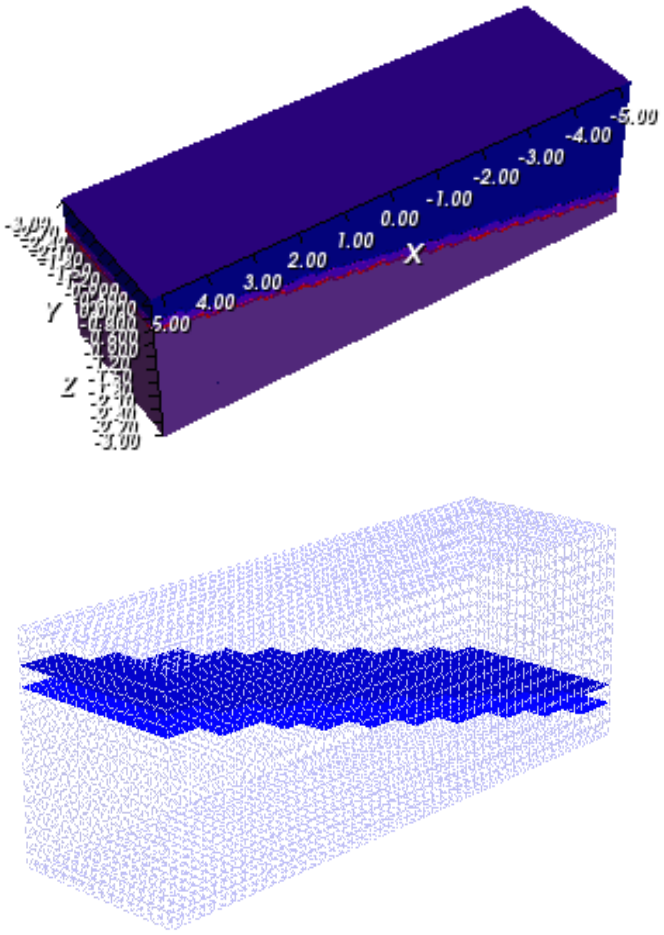


FIGURE 5.2 – Aquifère en 3D avec l'interface initiale.

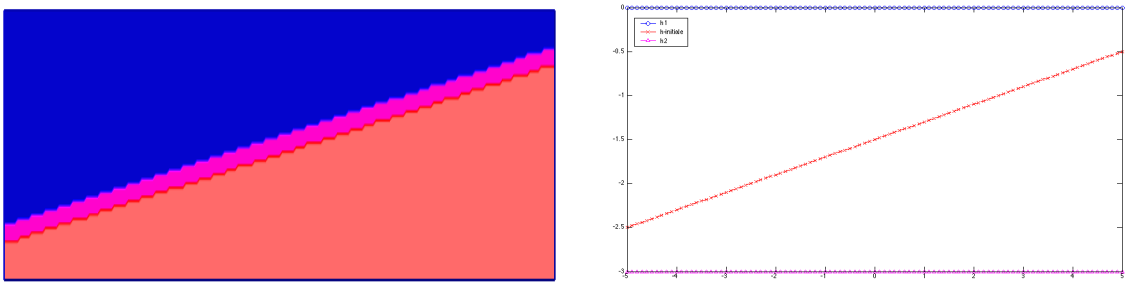


FIGURE 5.3 – Coupe à y=1,5 de la concentration initiale avec “interface” diffuse du modèle 3D à gauche, et interface h entre l'eau douce et l'eau salée du modèle 2D à droite.

Dans les cas où nous pratiquerons un test de pompage ou de remplissage en eau douce, c'est sur la coupe en $y = 1.5$ que nous constaterons une forte dépression de l'interface car c'est à ce niveau que nous placerons le puits d'extraction ou d'injection.

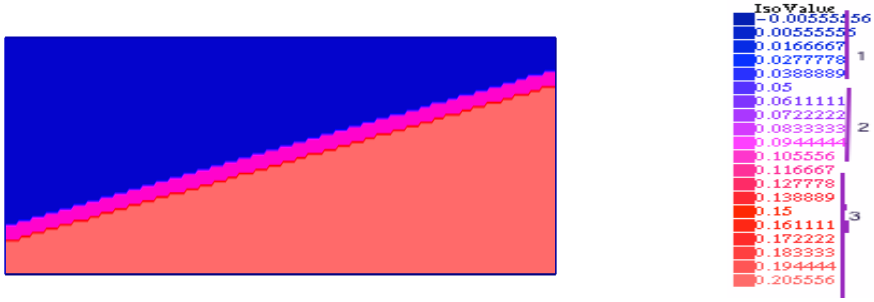


FIGURE 5.4 – Coupe à y=1,5 de la condition initiale 3D à gauche et à la droite la légende des couleurs : on considère que 1 correspond à la zone d'eau douce, 2 correspond à la zone de mélange et enfin 3 correspond à la zone d'eau salée.

La condition initiale utilisée sans tout ce paragraphe est représentée sur la figure 5.4. Il faut noter que l'on ne part pas d'une interface quasiment horizontale et que donc on ne teste pas notre modèle dans la zone de confort où l'approximation de Dupuit par interface nette est reconnue valable.
Les comparaisons des modèles 3D et 2D seront présentées comme dans la figure 5.3. Le modèle 3D est un modèle à une phase et ne différencie donc pas l'eau claire et l'eau salée, mais donne la concentration en sel. Pour la série de tests qui suit, on a choisi de définir l'eau salée dans la zone de concentration en sel $[0, 11; 0, 2]$ et la zone de transition, "l'interface diffuse", dans la zone $[0, 05; 0, 11[$ (voir la figure 5.3). L'interface nette calculée par notre modèle 2D se doit d'être dans cette interface diffuse. La concentration maximale en sel $(0, 2)$ correspond à celle de l'eau de mer envisagée.
Dans tous les autres cas sauf l'expérience de Keulegan, nous avons utilisé des conditions aux bords de type Dirichlet à droite du domaine ("hauteur de l'eau salée" fixé par les entrées depuis la mer) et des conditions aux bords de Neumann homogène à gauche du domaine pour que les interfaces, qu'elles soient nette (2D) ou diffuse (3D), évoluent librement.
Les tests on été réalisés avec la valeur de α réaliste ($\alpha = 0, 025$). Nous noterons par T le nombre d'itérations et t le temps d'exécution d'un programme FreeFem.

5.4.1 Expérience de Keulegan

Pour vérifier et comparer les modèles 2D et 3D, nous commençons par vérifier numériquement le comportement de nos modèles sur un problème classique, pour lequel une solution analytique a été proposée par Keulegan, voir [46]. Il considère un aquifère confiné avec une interface verticale à $x = 0$, avec l'eau salée dans la partie $x < 0$ et l'eau douce dans $x > 0$. Au temps $t = 0$, le portail représentant l'interface est retiré, l'interface se déplace alors du côté du fluide qui a la plus grande densité *i.e* l'eau salée. Cette interface est

décrite par un profil linéaire pivotant autour d'un point fixe (dans notre cas c'est le point $(0, L/2)$, où L est la hauteur de l'aquifère).
Si la description de l'expérience paraît simple, le problème est connu pour être complexe car il y a un choc au temps initial suivi d'un mouvement rapide de l'interface, voir [74]. Il a été vérifié que l'approximation de Ghyben-Herzberg (Herzberg, 1901, voir [41]) ne s'applique pas : les amplitudes de variations de la hauteur de l'interface sont largement supérieures aux amplitudes de variations de la charge hydraulique multipliée par 40, voir [85].

$$\text{Les données : } q_f = 0, \quad q_s = 0 \quad \text{et} \quad S_f = S_f^{2d} = S_f^{3d} = 0.$$

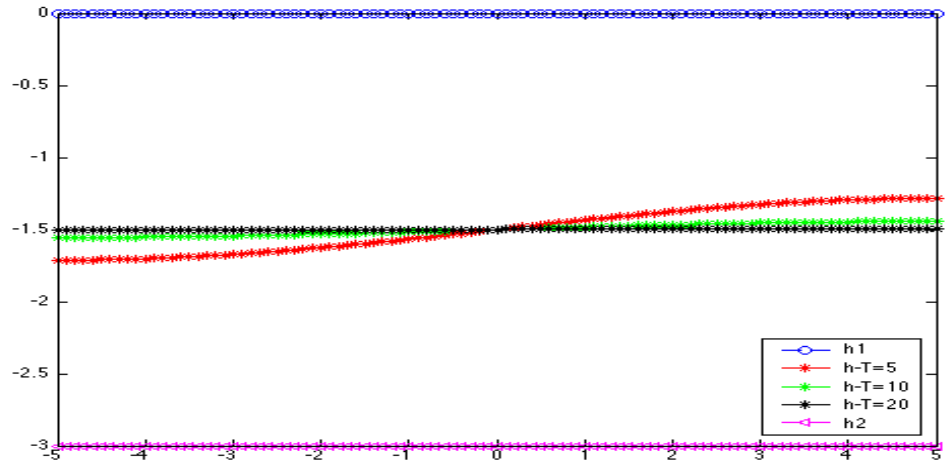


FIGURE 5.5 – Effets Keulegan pour le modèle 2D intégré quand on fixe $\alpha = 0.025$ et on fait varier T, à $y = 1.5$

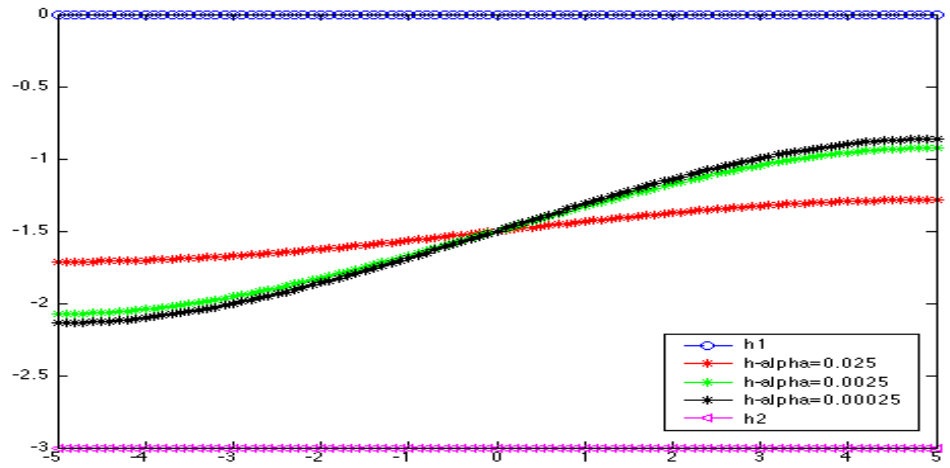


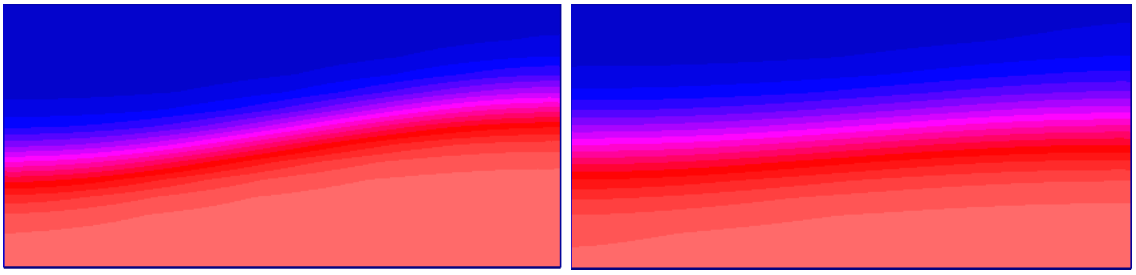
FIGURE 5.6 – Effets Keulegan pour le modèle 2D intégré quand on fixe T=5 et on fait varier le contraste α, à $y = 1,5$.

Au delà des interfaces h_1 et h_2 qui sont respectivement la couche supérieure et inférieure de l'aquifère confiné, nous allons simuler l'interface h eau douce/eau salée en faisant varier les paramètres α (le contraste

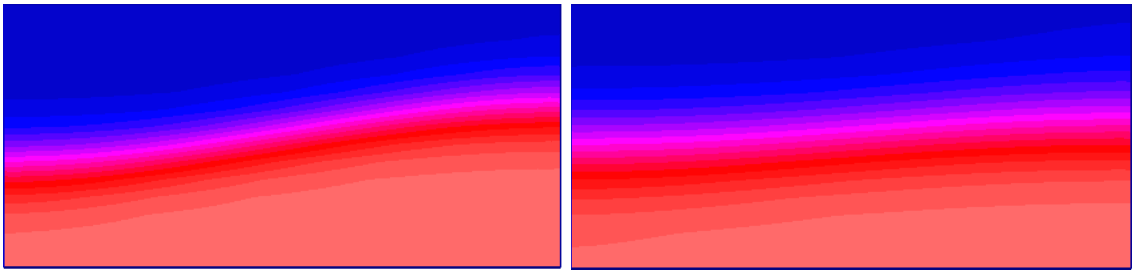
de densité) et le temps T.
Nous rappelons que l'expérience de Keulegan consiste à observer l'interface en absence de puits de production et d'injection *i.e* : $q_f = q_s = 0$.
Commençons par observer les figures 5.5 et 5.6, correspondant aux simulations effectuées sur notre modèle 2D. Pour souligner l'effet des différences de densité, on oublie ici le contexte de l'intrusion saline pour faire des tests avec des valeurs de α variant de plusieurs ordres de grandeurs (la valeur réaliste de α dans le contexte d'intrusion saline est plutôt $\alpha = 0,025$ ce qui correspond aux simulations à la figure 5.5 aux temps $T = 5, 10, 20$). Les résultas sont présentés dans la figure 5.6 au temps $T = 5$.

- À $T = 0$, nous partons avec une interface ayant le profil linéaire comme sur la figure 5.3. Puis à $T = 5$, nous constatons le faible mouvement de l'interface initiale à l'interface $\mathtt{h}_{\alpha=0,00025}$; puis à l'interface $\mathtt{h}_{\alpha=0,0025}$ et enfin à celle $\mathtt{h}_{\alpha=0,025}$ (voir figure 5.6).

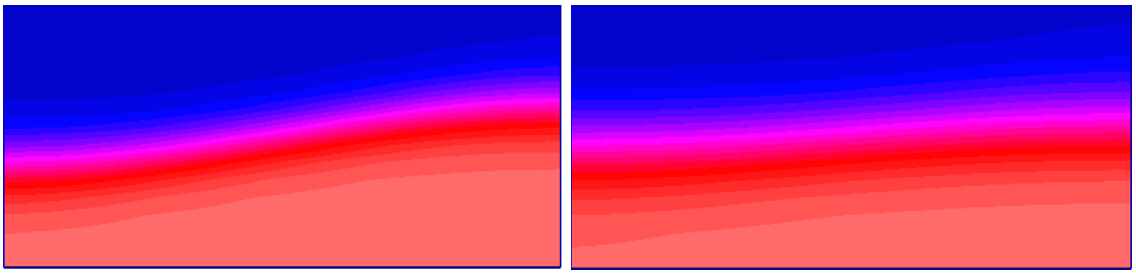
En conclusion, on observe le comportement attendu : l'interface tend vers l'horizontale à cause de l'effet du contraste des densités, le phénomène étant d'autant plus rapide que ce contraste est grand (voir figure 5.5). Nous avons aussi remarque que le temps d'exécution t d'un programme 2D est 25 fois plus rapide qu'un programme 3D, cela pour une machine standard.



a) coupe verticale à y=0.5,

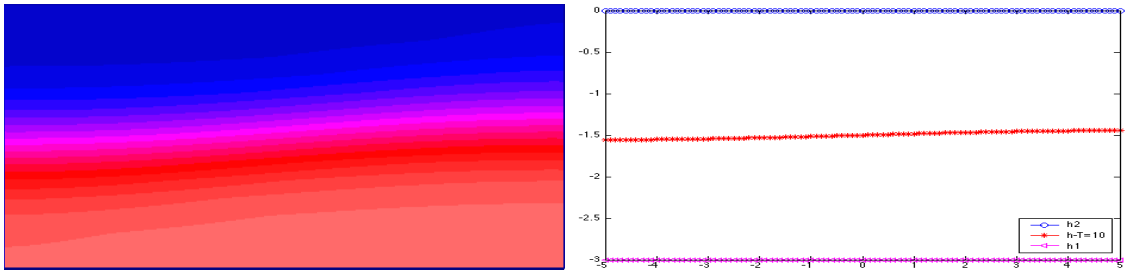


b) coupe verticale à y=1.5 :



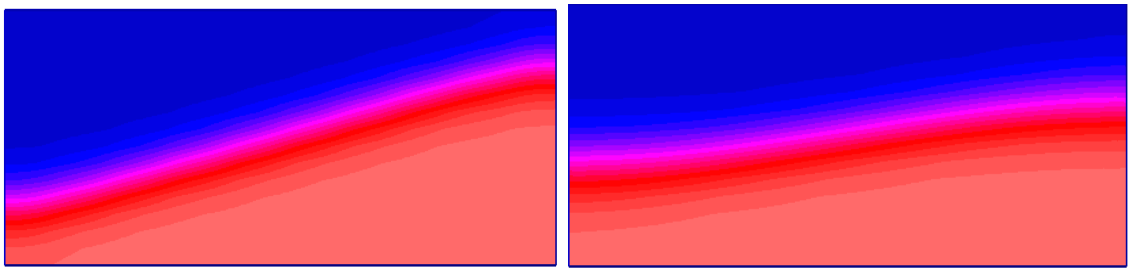
c) coupe verticale à y=2.5 :

FIGURE 5.7 – Comportement du modèle 3D : On fixe $\alpha = 0.025$ et à gauche l'expérience de Keulegan avec à $T = 5$ et à droite à $T = 10$.

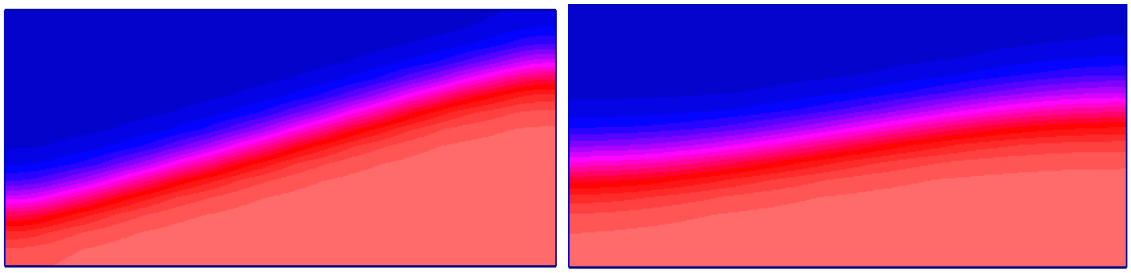


coupe verticale à y=1.5 :

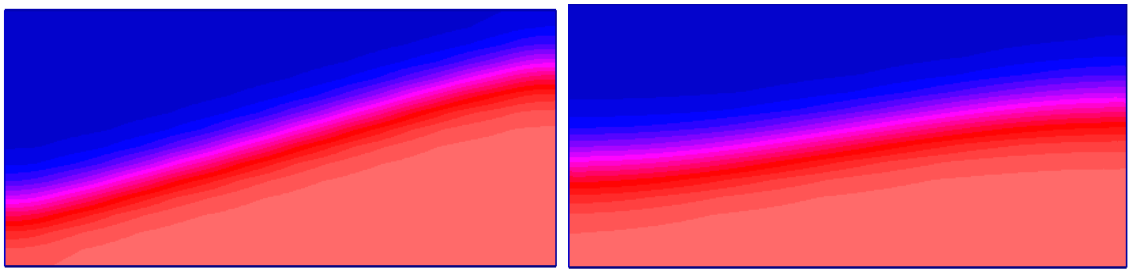
FIGURE 5.8 – Comparaison des modèles 3D et 2D : expérience de Keulegan avec $\alpha = 0.025$ et $T = 10$



a) coupe verticale à y=0.5,



b) coupe verticale à y=1.5 :



c) coupe verticale à y=2.5 :

FIGURE 5.9 – Comportement du modèle 3D : On fixe $T = 10$ et à gauche l'expérience de Keulegan avec à $\alpha = 0.0025$ et à droite à $\alpha = 0.025$.

Les figure 5.9 donnent une validation phénoménologique du bon comportement du schéma numérique 3D : nous constatons que l'interface pivote effectivement vers l'horizontale et cela plus vite si le contraste de

densité est plus élevé.
Mais la comparaison des images de gauche et droite de la figure 5.8 valide surtout le modèle approché 2D par rapport au modèle exact 3D pour le problème de l'intrusion saline. Nous voyons que l'interface nette définissant le front d'eau salée dans le modèle 2D est effectivement au coeur de la zone de mélange apparaissant dans les simulations 3D . Nous ne sommes pourtant pas ici dans le cadre optimal d'application de notre modèle 2D (à cause en particulier d'une interface initialement loin d'être quasi-horizontale, contrairement aux hypothèses classiques de Dupuit).

5.4.2 Effet du pompage

Pour répondre au besoin en consommation, les populations exploitent l'eau douce située dans les aquifères à travers des puits de pompage (voir illustration figure 5.12 : coupe initiale 3D). Dans ce cas précis, nous constatons l'apparition d'un cône d'eau salée. La progression de cette dépression dépend bien sûr du contraste de densité et du temps de pompage.

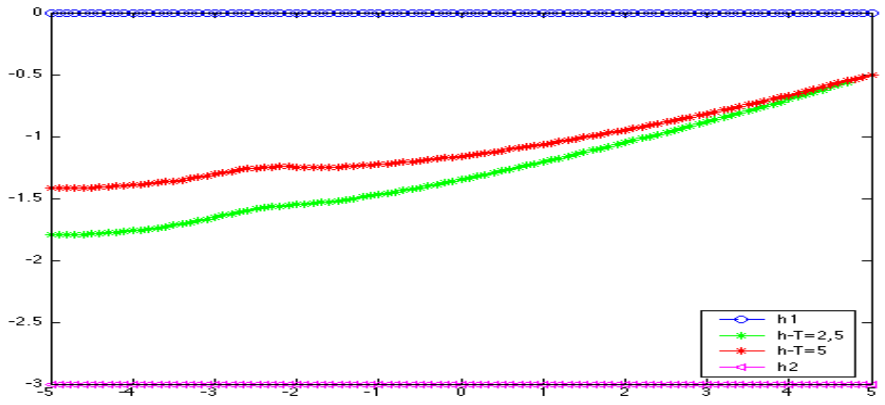


FIGURE 5.10 – Effets de pompage pour le modèle 2D intégré, avec $\alpha = 0.025$ et T qui varie

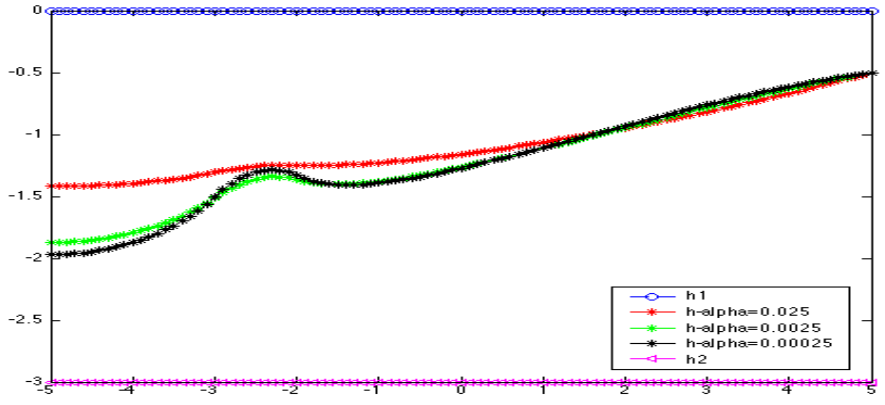
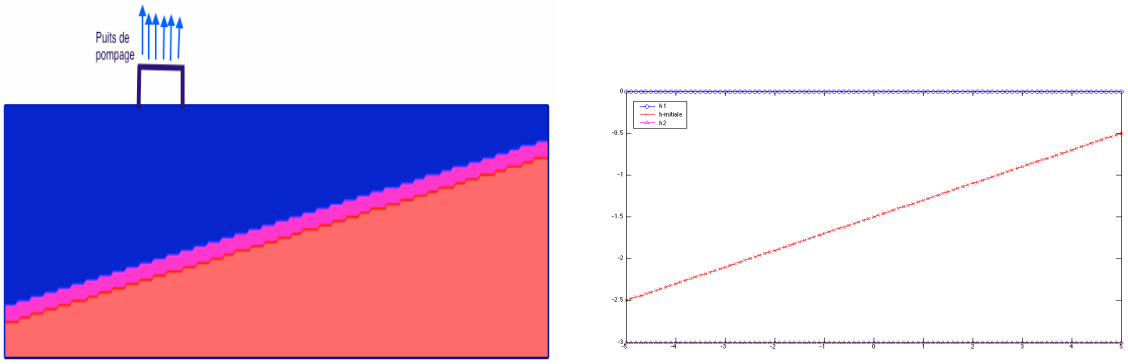


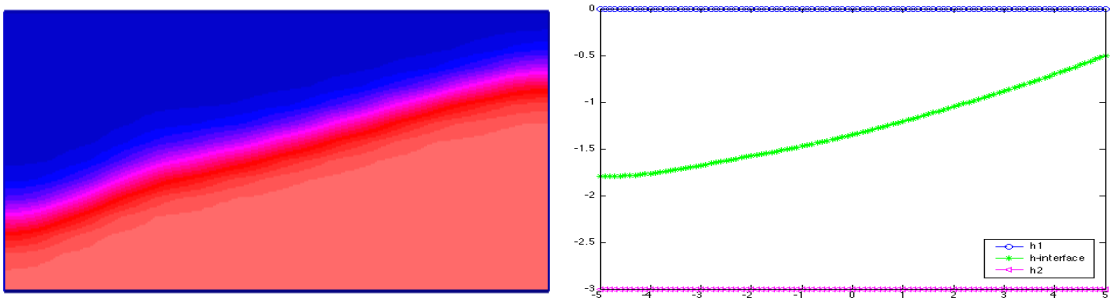
FIGURE 5.11 – Effets de pompage pour le modèle 2D intégré, T=5 et α qui varie

Sur les figure 5.10-5.14, nous observons le mouvement de l'interface avec un puits de production *i.e :*

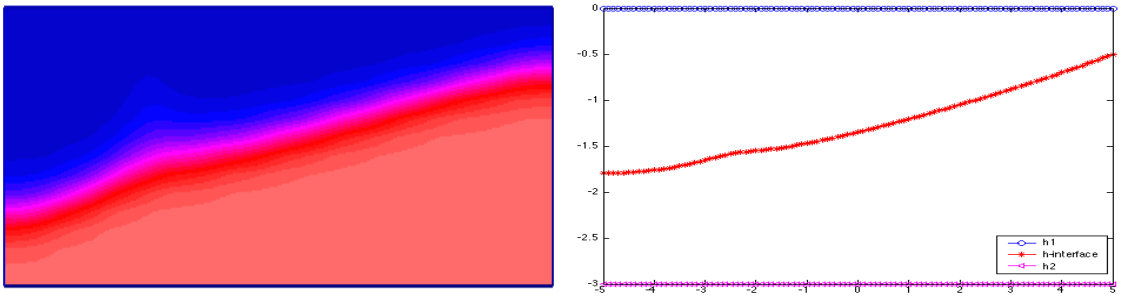
$$q_f = 0,6 * (-3. <= x <= -2.) * (1. <= y <= 2.) \quad \text{et} \quad q_s = 0 \quad \text{et} \quad S_f = 0.$$



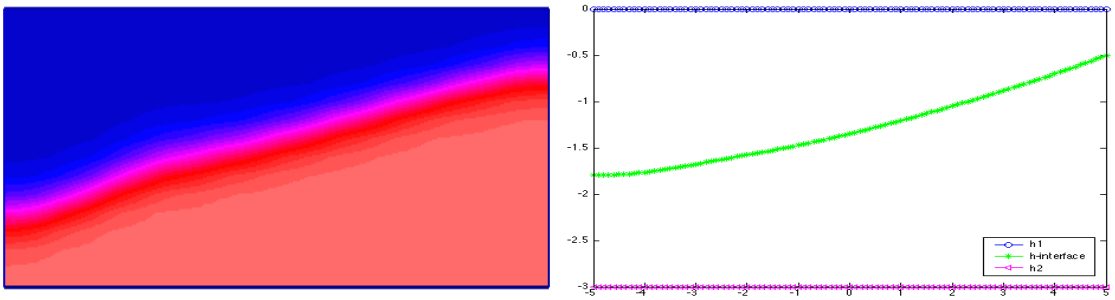
coupe verticale initiale 3D-2D à $y = 1,5$



a) coupe verticale 3D-2D à $y = 0,5$



b) coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$



c) coupe verticale 3D-2D à $y = 2,5$

FIGURE 5.12 – Effets de pompage sur le modèle 3D et 2D avec $\alpha = 0.025$ et $T = 2.5$

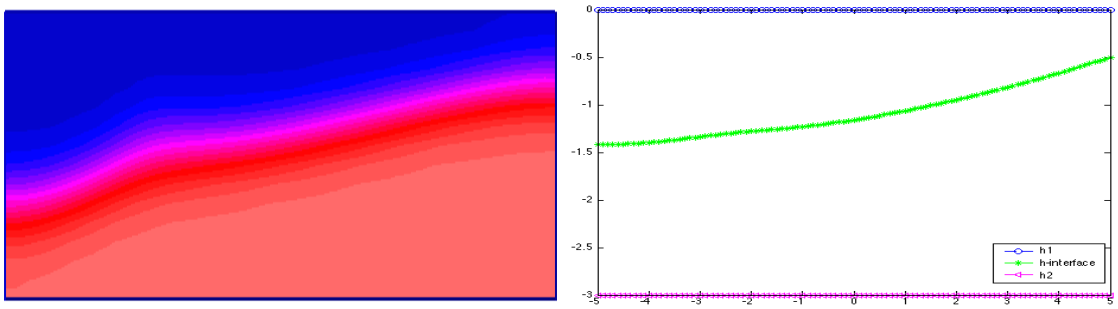
- Sur la figure 5.10, nous voyons que l'effet Keulegan (c'est-à-dire l'effet de la gravité et des différences de densité) prend le dessus sur l'effet de pompage, quand $\alpha = 0.025$, ce que montre l'interface $\mathtt{h}_{\mathtt{T=2,5}}$ puis $\mathtt{h}_{\mathtt{T=5}}$: on tend vers l'horizontale, il n'y a pas d'apparition de cône d'eau salée (dangereux pour l'exploitant), mais globalement l'interface salée remonte.

- La figure 5.11 : Ici on fait varier α (on aurait aussi pu faire varier la force de pompage) et on observe l'apparition d'un cône d'eau salée.

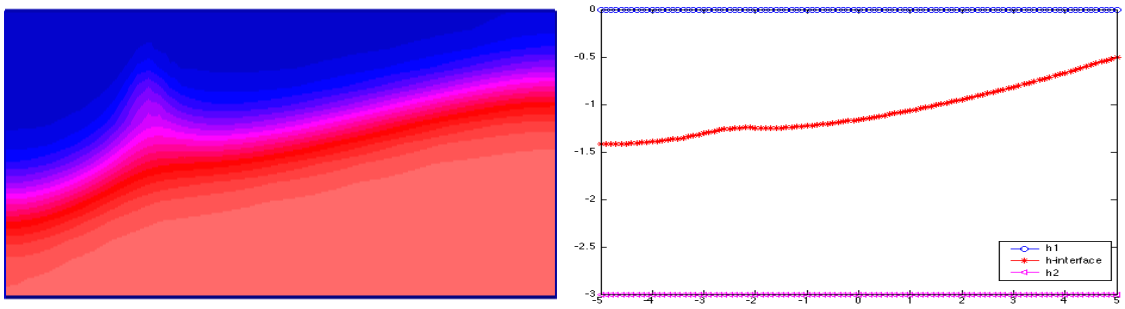
- La figure 5.12 : Du point de vue phénoménologique, on observe l'apparition du cône d'eau salée dans la zone de pompage dans le modèle 3D (attention plus faible que dans la figure 5.11 car on est revenu à$\alpha = 0,025$).

On voit sur les simulations du modèle 3D la structure "laminaire" de l'écoulement et la faible épaisseur de la zone de mélange entre eaux claire et salée (épaisseur qui est effectivement de l'ordre du δ servant à la modéliser dans notre modèle mixte 2D).

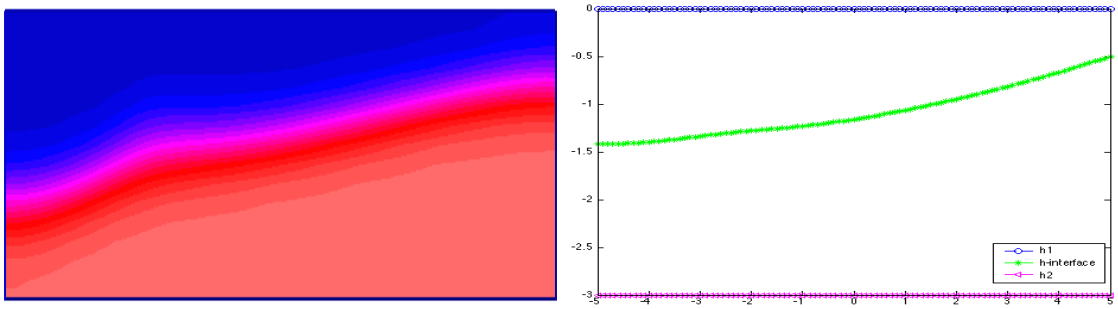
De plus, on peut vérifier que l'interface nette virtuelle h séparant l'eau claire et l'eau salée du modèle 2D est bien au coeur de la zone de mélange du modèle 3D, et ce y compris dans la zone du cône.



a) coupe verticale 3D-2D à $y = 0,5$

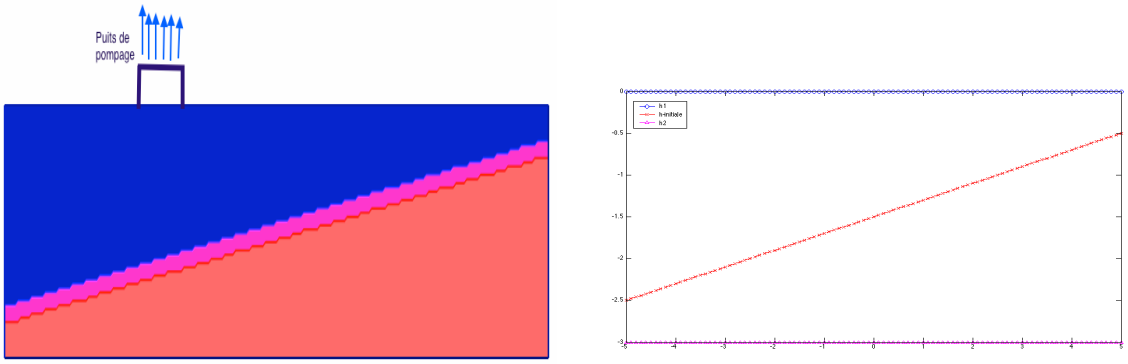


b) coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$

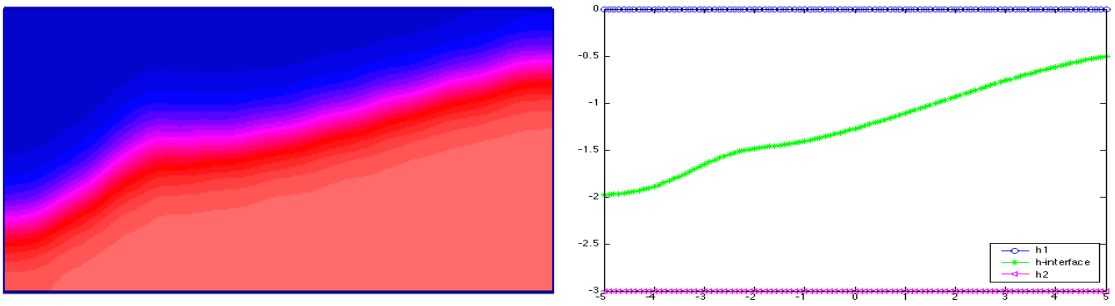


c) coupe verticale 3D-2D à $y = 2,5$

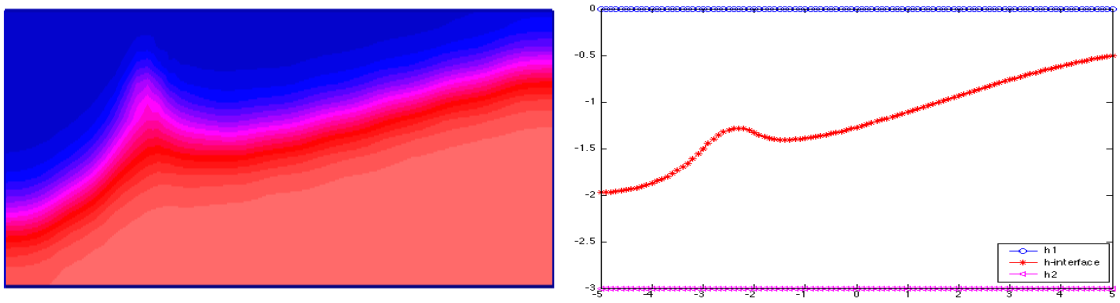
FIGURE 5.13 – Effets pompage sur le modèle 3D et 2D avec $\alpha = 0.025$ et $T = 5$.



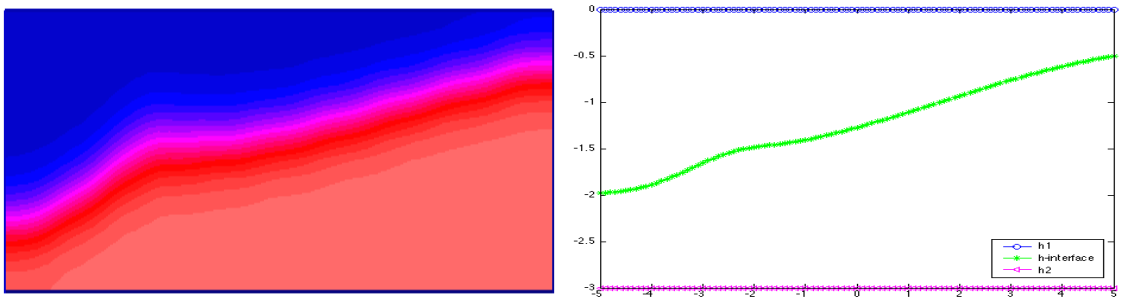
coupe verticale initiale 3D-2D à $y = 1,5$



a) coupe verticale 3D-2D à $y = 0,5$



b) coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$



c) coupe verticale 3D-2D à $y = 2,5$

FIGURE 5.14 – Effets de pompage sur le modèle 3D et 2D avec $\alpha = 0.0025$ et $T = 5$.

Nous constatons sur la figure 5.14 l'aggravation du cône d'eau salée cela du fait que l'on a pris un α plus petit. Cependant, lorsqu'on compare les simulations 3D et 2D pour cette nouvelle valeur de α, on constate qu'elles présentent une meilleure adéquation (voir la convexité des interfaces par exemple). Cela pourrait paraître étonnant alors que la valeur de α réaliste pour mesurer la différence de densité est de 0.025 et qu'ici on prend une valeur dix fois plus petite. Mais autour de l'interface, on a une zone de mélange où les

différence de concentration sont moins accentuées. Si on regarde les tables de densité pour de telles différences de concentration, on voit que α doit être pris dans l'intervalle $[0.0015; 0.005]$ (voir [51]). Prendre $\alpha = 0.025$ fausse donc les résultats en niant l'existence de la zone de mélange.

5.4.3 Effet du remplissage

Le renouvellement des nappes phréatiques se fait grâce à la pluie avec les phénomènes de ruissellement, de drainage et d'infiltration. Ici, nous choisissons un puits où, nous injectons une quantité d'eau douce afin de pouvoir constater la descente de l'interface au niveau de la zone d'injection (voir illustration figure (5.17) coupe initiale). Cette méthode est d'ailleurs utilisée par les exploitants pour limiter les effets de l'intrusion saline.

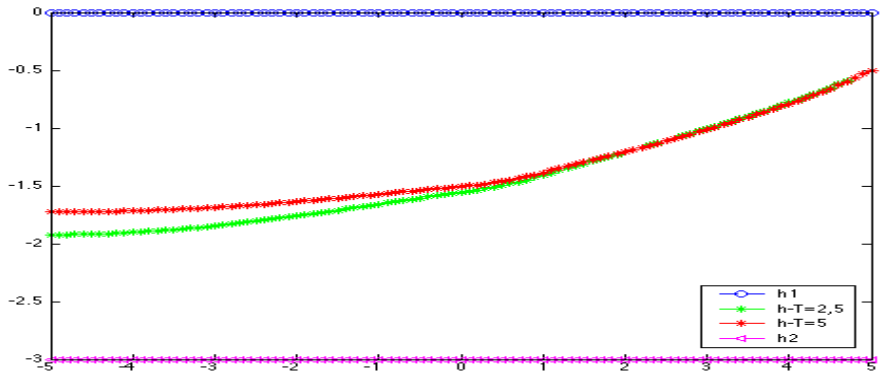


FIGURE 5.15 – Effets de remplissage pour le modèle 2D intégré, quand on fixe $\alpha = 0.025$ et T varie

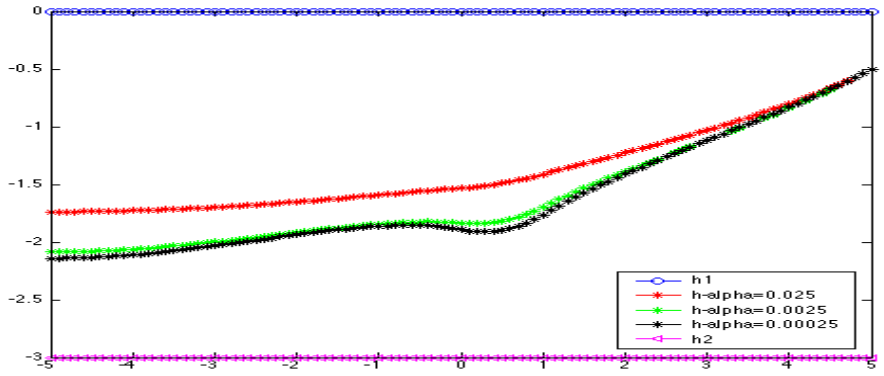
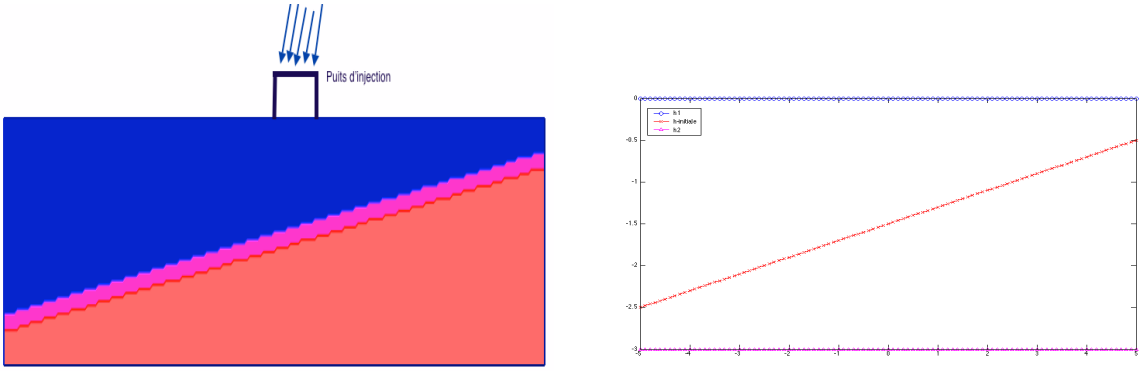


FIGURE 5.16 – Effets de remplissage pour le modèle 2D intégré, quand on fixe T=5 et α varie

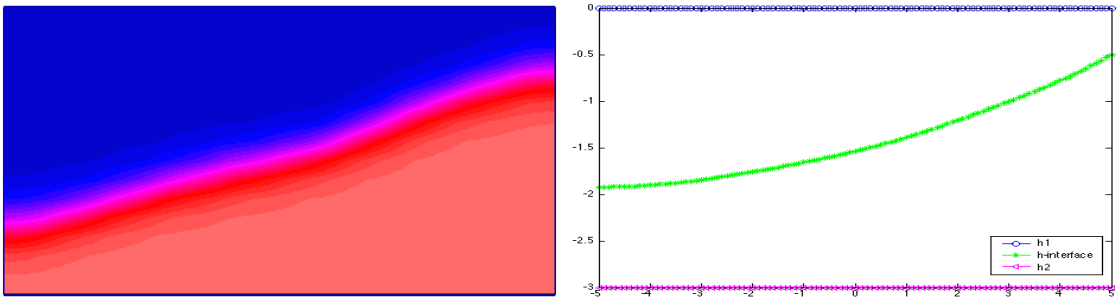
Dans la série de figures dans ce sou-paragraphe, nous observons le mouvement de l'interface avec un puits d'injection *i.e :*

$$q_f = -0.7 * (0. <= x <= 1.) * (1. <= y <= 2.) \quad \text{et} \quad q_s = 0, \quad \text{et} \quad S_f = 0.$$

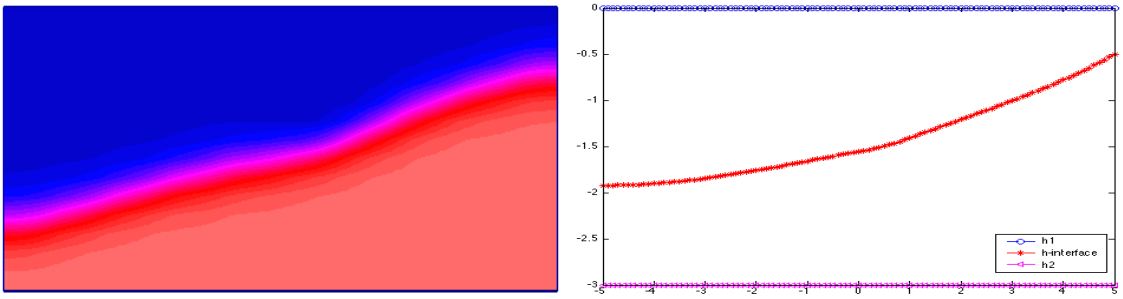
À l'inverse du paragraphe précédent, nous observons les effets d'un remplissage en eau claire avec une baisse de la profondeur de la transition entre eau douce et salée. Les commentaires du paragraphe précédent sur l'adéquation des modèles 2D et 3D restent vrais. Les tests présentés ici étant les exacts équivalents de ceux réalisés pour le test de pompage, nous ne les commentons pas plus.



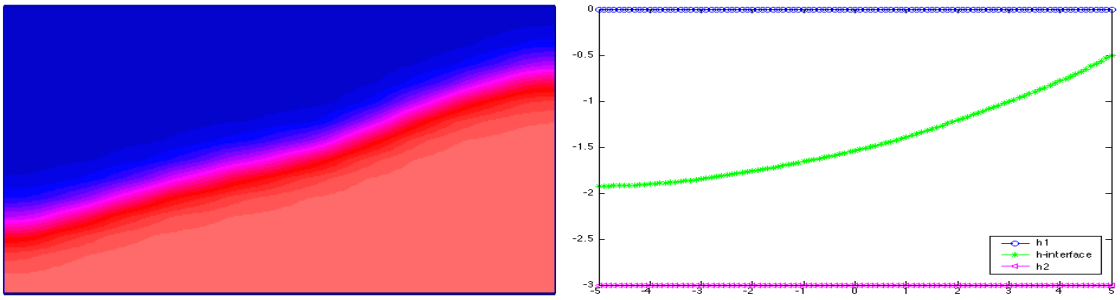
coupe verticale initiale 3D-2D à $y = 1,5$



a) coupe verticale 3D-2D à $y = 0,5$

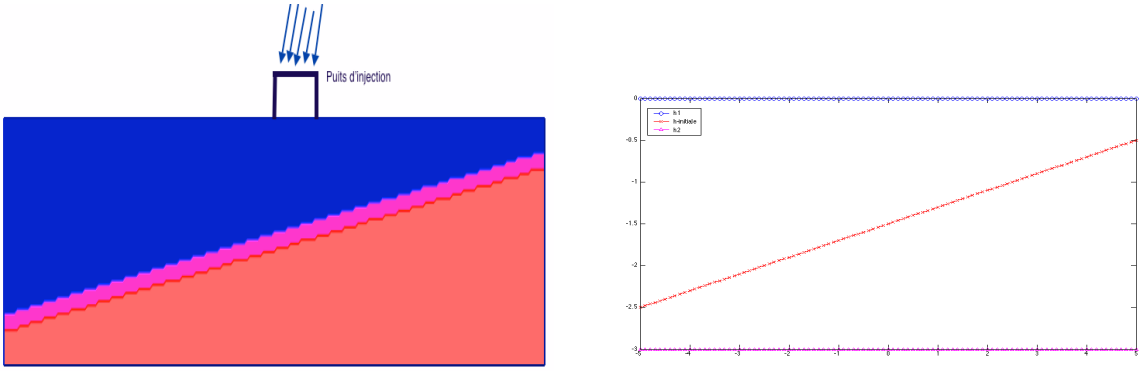


b) coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$

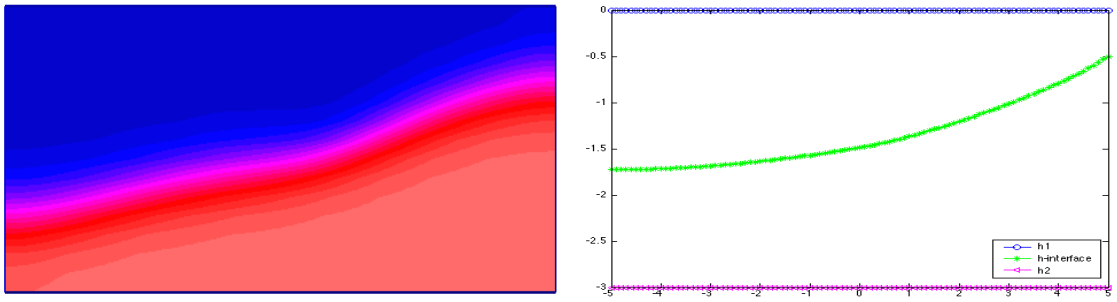


c) coupe verticale 3D-2D à $y = 2,5$

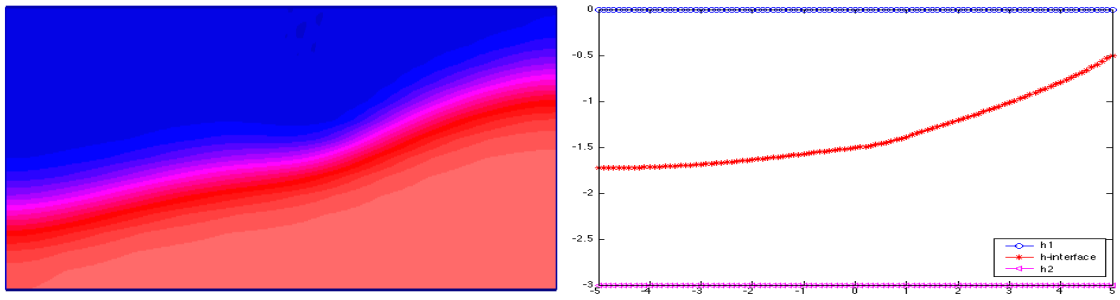
FIGURE 5.17 – Effets de remplissage sur le modèle 3D et 2D avec $\alpha = 0.025$ et $T = 2.5$



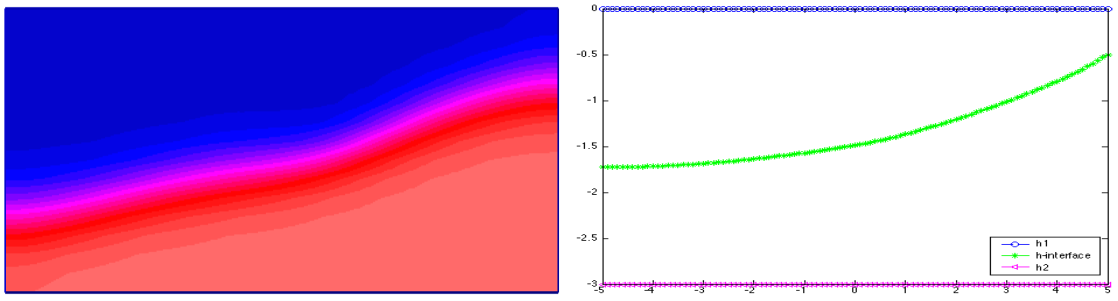
coupe verticale initiale 3D-2D à $y = 1,5$



a) coupe verticale 3D-2D à $y = 0,5$

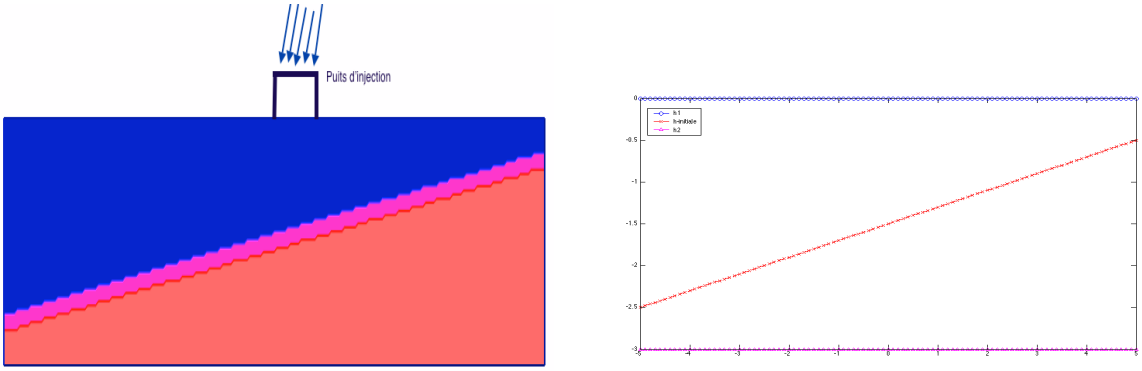


b) coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$

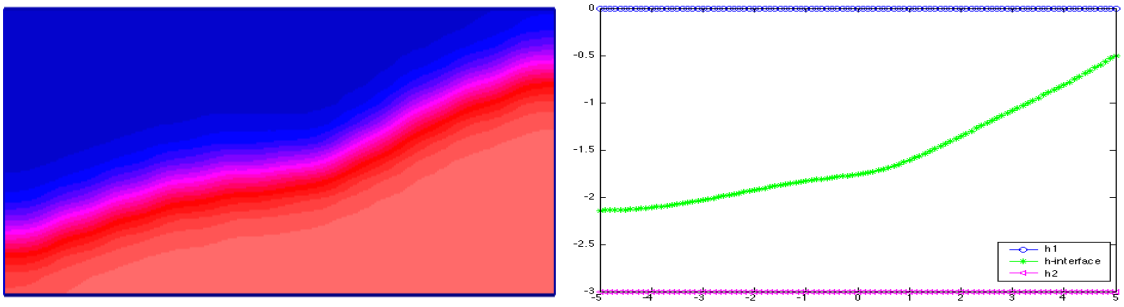


c) coupe verticale 3D-2D à $y = 2,5$

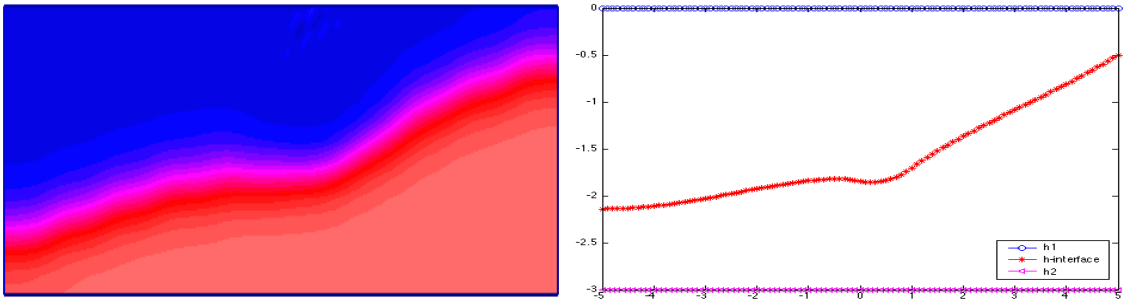
FIGURE 5.18 – Effets du remplissage sur le modèle 3D et 2D avec $\alpha = 0.025$ et $T = 5$



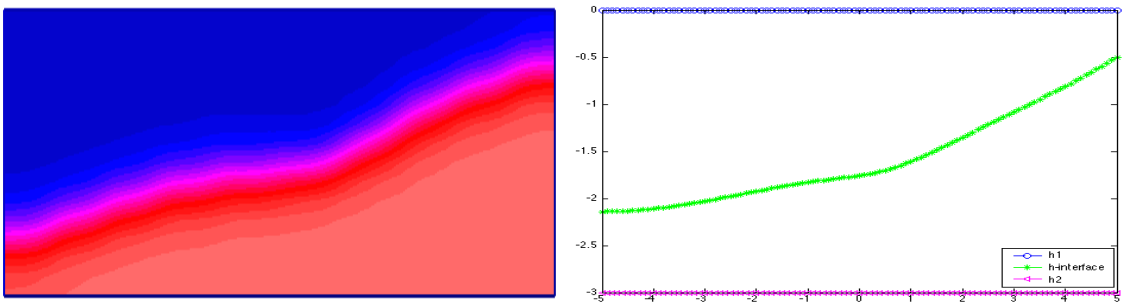
coupe verticale initiale 3D-2D à $y = 1,5$



a) coupe verticale 3D-2D à $y = 0,5$



b) coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$



c) coupe verticale 3D-2D à $y = 2,5$

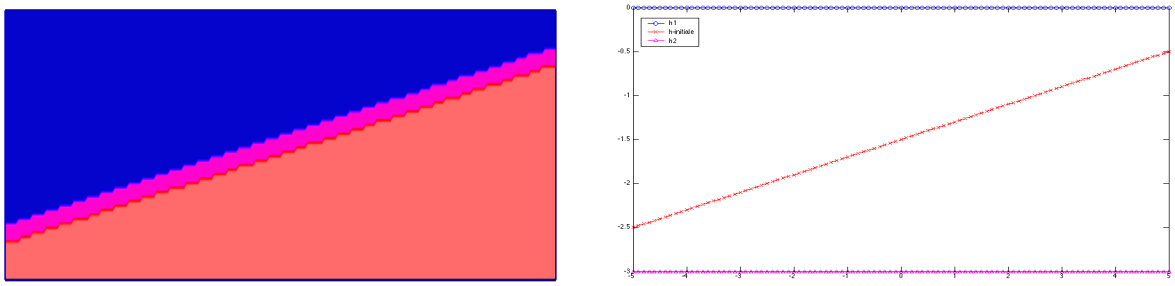
FIGURE 5.19 – Effets remplissage sur le modèle 3D et 2D avec $\alpha = 0.00025$ et $T = 5$

5.4.4 Effet de l'emmagasinement

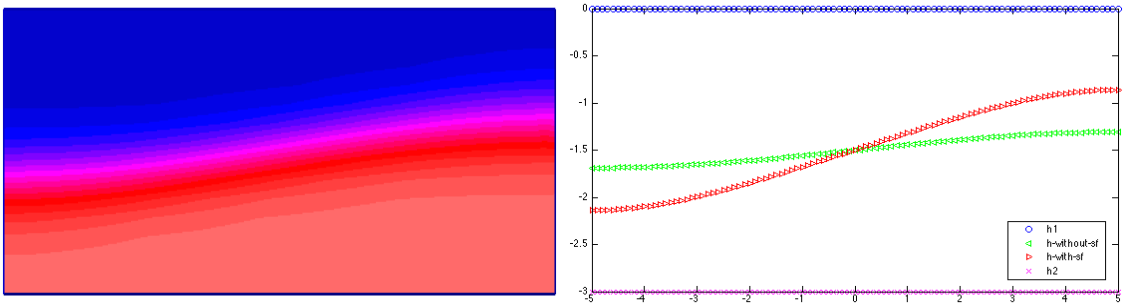
L'importance de la capacité d'emmagasinement du sous-sol (dû à la compressibilité du milieu poreux) sera à nouveau soulignée au paragraphe 5.5.2 ci-après, avec des illustrations effectuées sur le modèle 2D. Nous présentons ici simplement une illustration de la réalité de cet effet avec le modèle 3D, en comparant les résultats à porosité ϕ_Φ constante avec les résultats à porosité ϕ_Φ dépendant de la charge hydraulique, ici sur un test de Keulegan dans le cas (a) (ou de pompage dans le cas (b) ou de remplissage dans le cas (c)). On observe que la déformabilité du milieu fait que l'interface monte en cas de pompage (ou descend en cas de remplissage) moins vite. L'explication intuitive de la raison de ce phénomène est la suivante, par exemple dans le cas du remplissage : la pression supplémentaire due à l'eau injectée conduit à la déformation de chaque pore qui va pouvoir contenir plus d'eau qu'avant sans déformation) ; son remplissage va donc être plus long.

a) Cas Keulegan

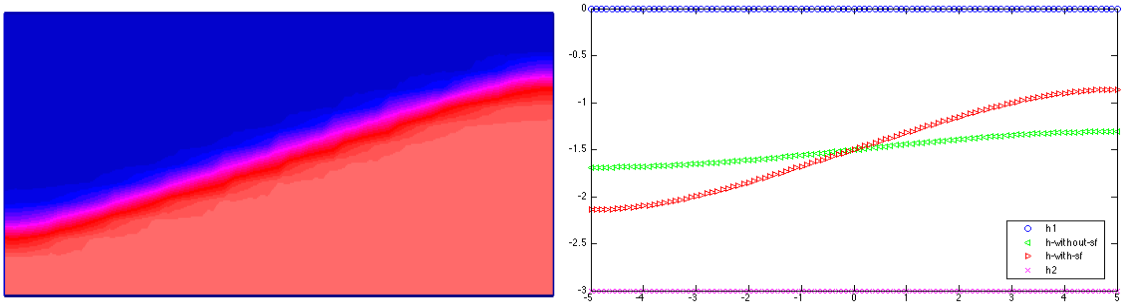
$$q_f = 0; \quad q_s = 0; \quad \alpha = 0,0025 \quad \text{et} \quad S_f = 0,5.$$



coupe verticale initiale à y=1.5 :



coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$; sans S_f

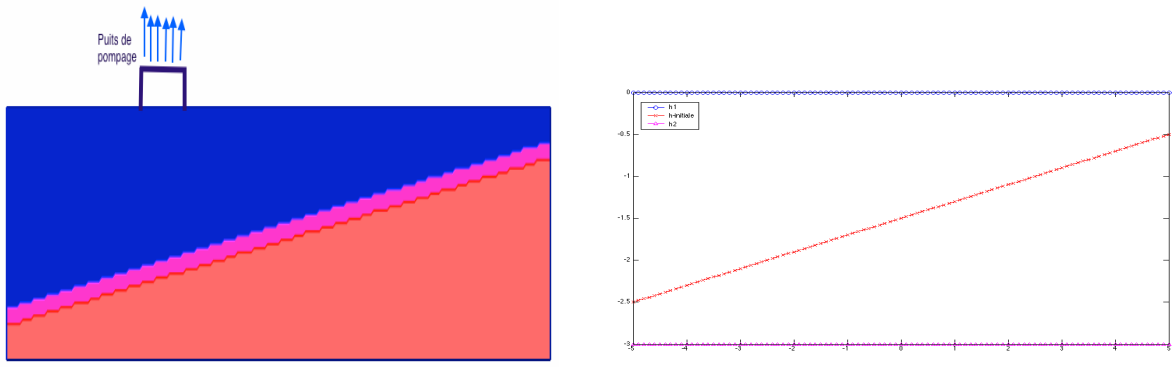


coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$; avec S_f

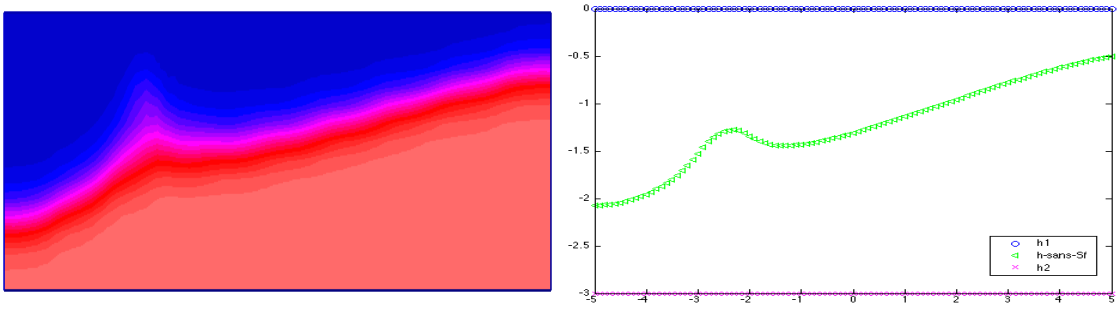
FIGURE 5.20 – Effets du coefficient d'emmagasinement en cas Keulegan, T=2,5

b) Cas pompage

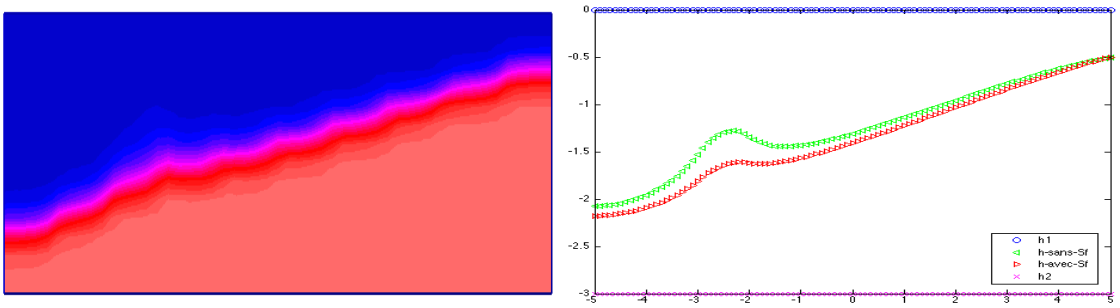
$$q_f = 0,6 * (-3. <= x <= -2.) * (1. <= y <= 2.) \quad ; \quad q_s = 0 \quad ; \quad \alpha = 0,0025 \quad \text{et} \quad S_f = 0,5.$$



coupe verticale initiale à y=1.5 :



coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$; sans S_f

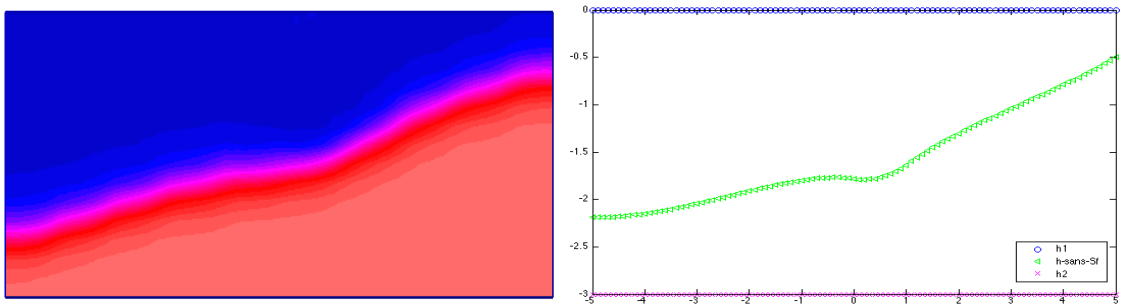


coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$; avec S_f

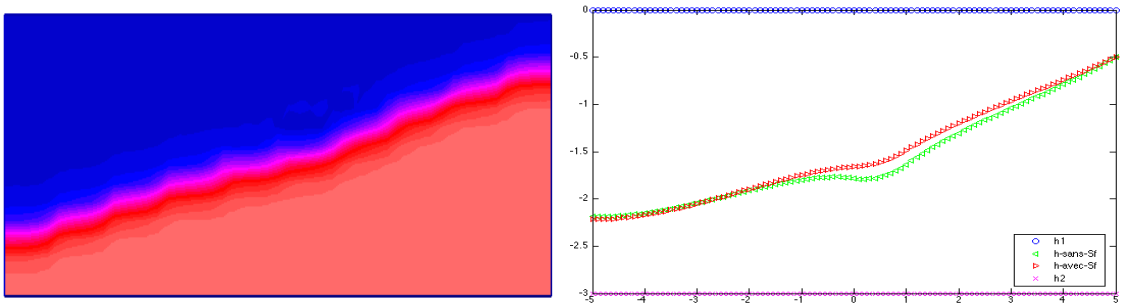
FIGURE 5.21 – Effets du coefficient d'emmagasinement en cas de pompage, T=2,5

c) Cas remplissage

$$q_f = -0,6 * (-3. <= x <= -2.) * (1. <= y <= 2.) \quad ; \quad q_s = 0 \quad ; \quad \alpha = 0,0025 \quad \text{et} \quad S_f = 0,5.$$



coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$; sans S_f



coupe verticale 3D-2D à $y = 1,5$; avec S_f

FIGURE 5.22 – Effets du coefficient d'emmagasinement en cas de remplissage, T=2,5

5.4.5 Effet CUSP

Ce test consiste à pomper très fort de l'eau douce.

$$q_f = -4 * (-3. <= x <= -2.) * (1. <= y <= 2.) \quad ; \quad q_s = 0 \quad ; \quad \alpha = 0,025, \quad T = 0,5 \quad \text{et} \quad S_f = 0.$$

coupe verticale à y=1.5

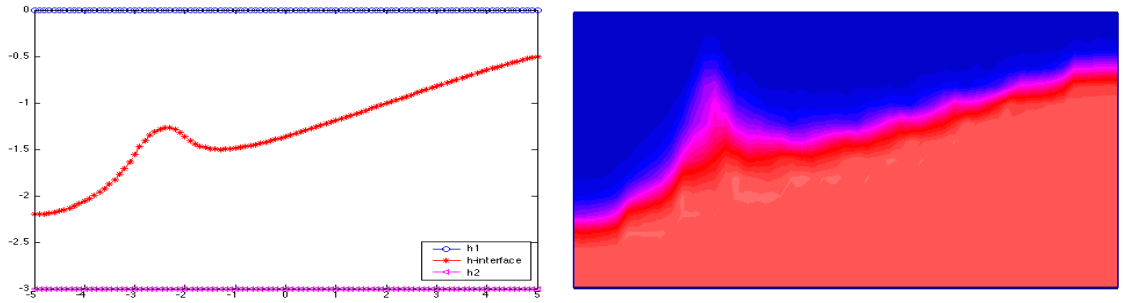


FIGURE 5.23 – Effets CUSP pour le modèle 2D à gauche et le modèle 3D à droite

Le cône d'eau salée se rapproche alors d'un cups (un point de rebroussement : une rupture dans la régularité de l'interface "diffuse"). Il est connu que ce phénomène apparaît dès lors qu'on a un taux critique de pompage et invalide alors l'approche par interface nette classique (voir [8]). Notre modèle lui continue à fournir des résultats : une interface qui certes ne présente pas de cusp mais reste au coeur de la zone de transition et continue à évoluer.

5.4.6 Une remarque sur la taille du domaine d'illustration

Le domaine choisi pour les tests précédents est évidemment petit par rapport à la taille des grands aquifères naturels, et ce simplement pour réaliser rapidement les simulations sur une machine standard. Un outil de raffinement de maillage (par exemple "mmg3d" ou "tetgen" présent dans FreeFEM) utilisé dans la zone de mélange permet cependant facilement de considérer des domaines plus grands avec les mêmes contraintes techniques pour un temps de calcul identique. Dans l'exemple ci-dessous, le même temps de calcul avec raffinement standard permet de traiter un domaine quatre fois plus grand ($\Omega = [-20\,;\,20]\times[0\,;\,12]\times[-12\,;\,0]$).

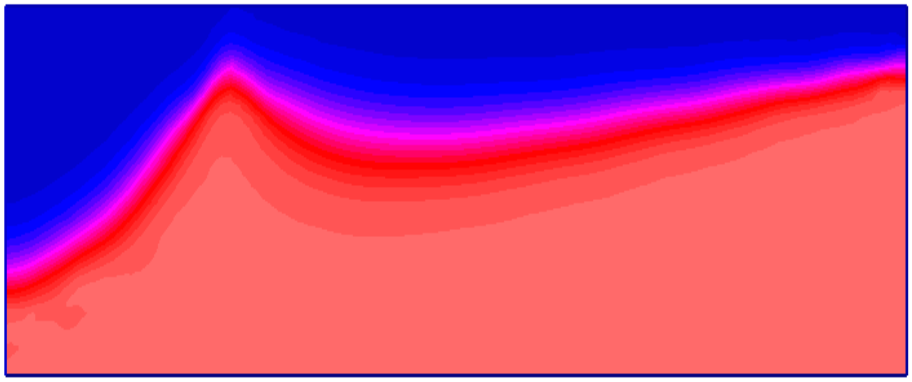


FIGURE 5.24 – Test avec raffinement

Remarque 5.8
Nous pouvons remarquer que l'interface n'est pas très lisse par rapport aux images précédentes du scénario de pompage dans le cas d'une boîte plus petite. Cela est dû au fait que nous partons avec un maillage grossier au départ et qu'un raffinement est appliqué toutes les 30 *itérations, puisque l'interface bouge avec le temps. Ce n'est pas optimal, les résultats seraient meilleurs avec un raffinement plus fréquent (mais avec une machine plus puissante !).*

5.5 Quelques tests phénoménologiques sur le modèle 2D

Cette section est dédiée à illustrer numériquement le comportement de notre modèle 2D intégré. Sa discrétisation est basée sur les Elements Finis (P1) en espace et en temps sur la méthode d'Euler semi-implicite. Une condition type CFL doit être imposée sur les pas de temps δ_t et d'espace δ_x. Cette condition reste raisonnable, puisqu'on a utilisé des valeurs de δ_t d'ordre compris dans $(0.5; 0.01)$ et des valeurs de δ_x d'ordre 1.
L'aquifère considéré ici est un parallélépipède défini par $\Big\{x, y, z \in [-50; 50] \times [-20; 20] \times [-10; 0]\Big\}$.
Les paramètres physiques sont choisis en adéquation avec [14]. Dans toute la suite, nous résolvons numériquement le problème bi-dimensionnel et nous afficherons la coupe verticale (à $y = 0$), la hauteur de h_1 (l'interface entre le milieu saturé et non-saturé en eau) et celle de h (l'interface entre l'eau douce et celle salée). En effet, contrairement au paragraphe précédent, nous profitons de l'efficacité du modèle 2D pour prendre en compte et repérer une zone non-saturée en haut de l'aquifère. Une telle étude dans le cas du modèle 3D aurait nécessité d'utiliser la variante de type Richards du modèle 3D décrit précédemment (autrement dit des équations qui dégénèrent au passage dans la zone désaturée).

5.5.1 Validation du modèle 2D

Dans un premier temps, nous allons comparer les résultats obtenus par notre modèle issu de l'approche mixte à ceux obtenus par l'approche classique d'interface nette ou abrupte (voir [54]), cette référence contenant des tests de comparaison bien connus et déjà publiés, valables dans le cas d'une zone de mélange fine. La

similarité complète avec nos résultats valide notre modèle (voir figure (5.25)). Nous mentionnons de plus que notre modèle prend en compte la zone de transition ou de mélange d'une épaisseur δ même si cette dernière est petite. Nous insistons aussi sur le fait que nous bénéficions d'un principe du maximum satisfait par les solutions de notre modèle, cela grâce à la prise en compte de la zone de transition. Nous avons montré au cours de cette thèse que ces solutions sont telles que $h_2 \leq h \leq h_1 \leq 0$ p.p dans le domaine. Il en résulte que nous n'avons plus besoin de tronquer les résultats numériques comme dans [54].

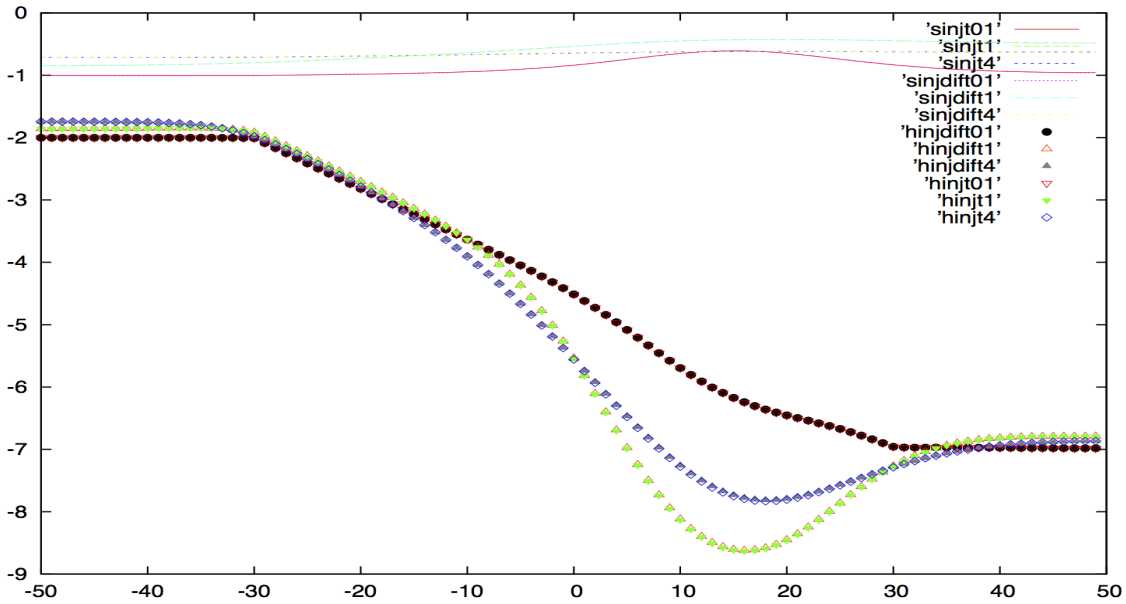


FIGURE 5.25 – Comparaison entre notre modèle ('*dif*') et le celui de l'approche classique d'interface nette inspiré de [54]. Une grande quantité d'eau douce est injectée durant un temps court de (0.8 jours). Les interfaces ('h' entre l'eau douce et celle salée et 'h_1' entre les milieux saturé et non-saturé 's'). Données du modèle : $S_f = 0.$, $\phi = 0.3$; $K_f = 39.024m/jour$ et $\delta = 0.1m$

5.5.2 Effets du coefficient d'emmagasinement

Ici, nous faisons apparaître le phénomène de compressibilité potentiel du sol et du fluide. Le coefficient d'emmagasinement est caractérisé par le paramètre S_f. Intuitivement, plus S_f est grand, plus la quantité d'eau qui peut être contenue dans le sol est importante.
La figure (5.26) correspond à un scénario d'injection ou de remplissage. Nous observons bien une surestimation de la hauteur de l'interface de la nappe phréatique h_1 et une sous-estimation de la hauteur de l'interface du front de l'eau salée quand S_f est considéré nul.
Ces erreurs d'estimations subsistent plus de trois jours après la fin de l'injection. Un tel processus d'injection est classiquement utilisé pour ramener vers le bas le cône du biseau salé. On voit ici que négliger S_f produit une sur-estimation de l'impact du processus, spécialement dans la zone d'injection, ce qui peut être particulièrement gênant pour l'exploitant.
Quant à la figure (5.27), nous observons le phénomène opposé durant le scénario de pompage.

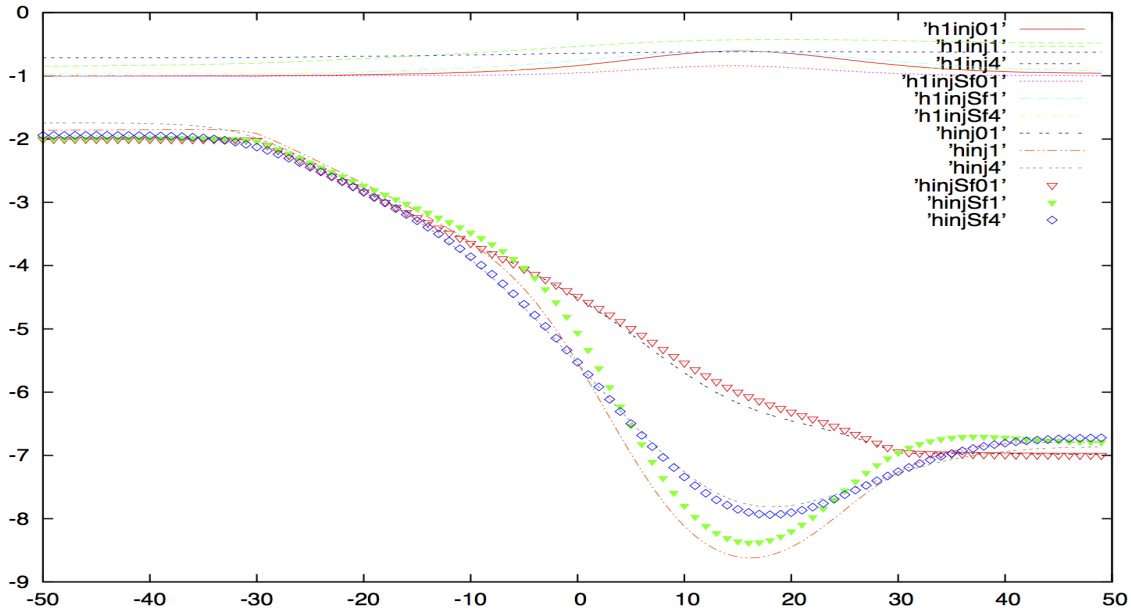


FIGURE 5.26 – Comparaison des interfaces h et h_1 dans le cas où l'on considère la compressibilité du sol ($S_f = 0.25$, 'S_f ') et dans le cas où on a un milieu incompressible ($S_f = 0.$) : scénario de remplissage ($\phi = 0.3$; $K_f = 39.024m/jour$ et $\delta = 0.1m$).

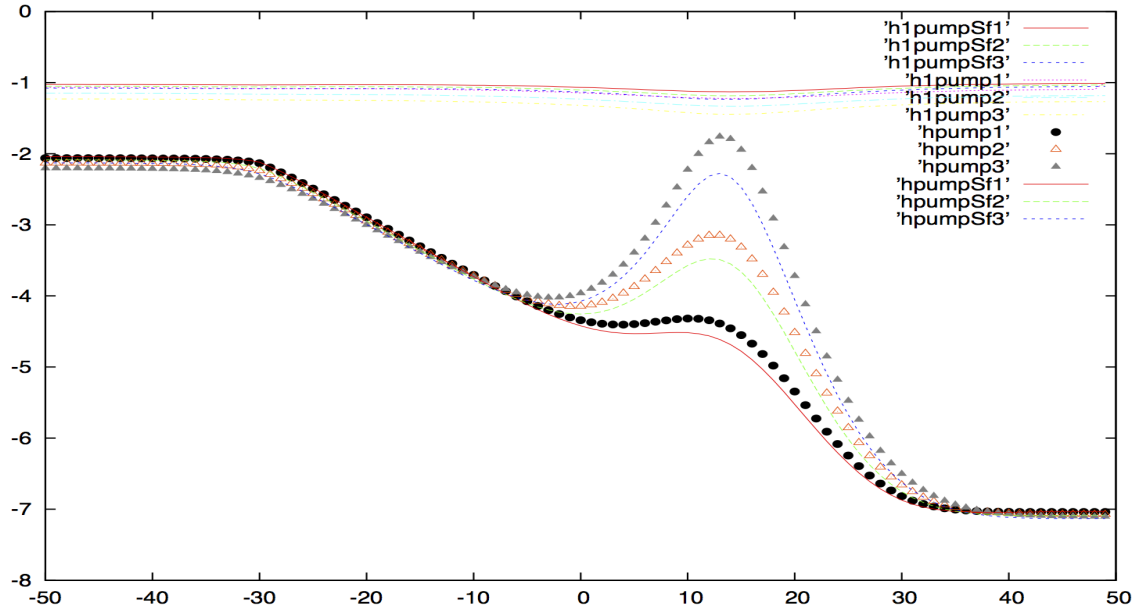


FIGURE 5.27 – Comparaison des interfaces h et h_1 dans le cas où l'on considère la compressibilité du sol ($S_f = 0.25$, 'S_f ') et dans le cas où on a un milieu incompressible ($S_f = 0.$) : scénario de pompage (le pompage est constant à travers un puits de rayon $1m$ centré à $(15; 50)$; $\phi = 0.3$; $K_f = 39.024m/jour$ et $\delta = 0.1m$).

5.5.3 Effets de la zone de transition

Dans ce test, nous montrons l'importance et l'intérêt de la zone de mélange ou de diffusion. Comme remarqué par exemple dans [27], si l'épaisseur de la zone de mélange est trop importante, la dispersion produit des effets non négligeables : elle crée des pertes de charges qui réduisent la zone de l'aquifère occupée par l'eau salée. L'épaisseur de cette zone est caractérisée par le paramètre δ dans notre modèle. Nous allons donc maintenant examiner des valeurs plus élevées pour δ. En outre, nous avons testé la possibilité de faire varier δ dans le domaine, avec une zone de mélange plus épaisse du côté de la rive. Sur la figure (5.28), la rive est du côté gauche du rectangle représenté. Nous imposons des conditions aux limites de Neumann homogènes sur la gauche du domaine et cela dans le but d'observer la libre évolution des interfaces. Conformément à [27], nous observons que l'interface salée obtenue est moins élevée dans le cas d'une plus grande valeur de δ. Si $\max \delta = \mathcal{O}(1)$ (qui n'est pas une valeur drastique), on observe une différence de 2% dans l'élévation. Cet effet augmente au fil du temps.

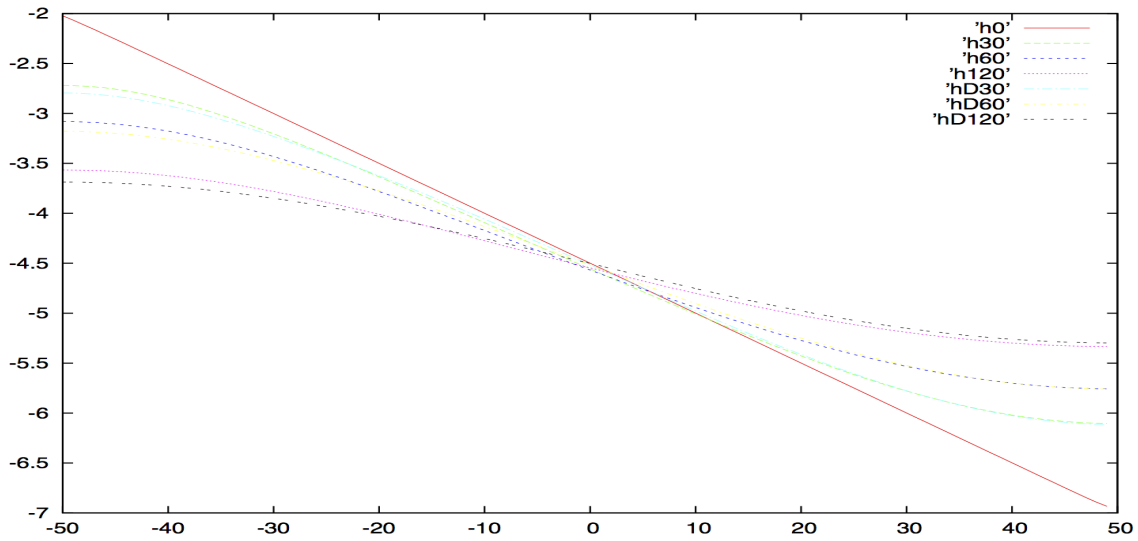


FIGURE 5.28 – Effets de l'épaisseur δ de la zone de mélange. h représente l'interface entre eau douce et eau salée. Le paramètre δ décroit de $\delta = 1m$ pour 'hd' (de $\delta = 0.1m$ pour 'h') à gauche du domaine vers 0 à droite. Les paramètres sont ceux de [27].

5.5.4 Effets de la marée

Enfin, nous couplons le phénomène précédent (celui de la zone de transition) avec les effets de la marée. Les fluctuations des marées dans la mer produit progressivement des vagues ou ondes de pression adjacentes à l'aquifère.
Les prélèvements et mesures des paramètres physiques influançant les écoulements dans le sous-sol sont évidemment très difficiles. Une méthode classique consiste à mesurer simplement les variations du niveau maximal de l'eau dans l'aquifère en fonction des marées, puis de travailler par résolution de problèmes inverses pour retrouver les paramètres (*i.e.* [73]). Bien sûr, ce processus inverse doit être basé sur des modèles adaptés.

Pour les simulations suivantes, nous utilisons les paramètres se trouvant dans [27] après une mise à échelle de notre aquifère. Nous imposons des conditions aux bords du type Dirichlet sur le côté gauche $\{x = -50\}$ pour l'interface h (hauteur de l'eau salée) ; la valeur de la condition de Dirichlet est calculée *via* un modèle analytique classique d'effet de la marée pour les puits artésiens (voir dans [37]). Le paramètre δ est calibré en utilisant la formule évaluant l'épaisseur de la zone de dispersion *eq(2)* dans [27]. Il est d'ordre un.

Dans les figures suivantes, nous observons les effets des fluctuations dues à la marée dans les eaux souterraines. La figure (5.29) tout d'abord représente deux artéfacts d'hydrographe montrant la variation de l'interface entre eau douce et eau salée au fil du temps. Les oscillations de la mer produisent des oscillations sur la condition au bord gauche de la hauteur d'eau salée dans l'aquifère, oscillations qui se propagent dans

l'aquifère, qu'on utilise le modèle avec $\delta = 0$ (sur la gauche de la figure) ou le modèle avec $\delta = \mathcal{O}(1)$ (sur la droite de la figure).
Dans le but de comparer les résultats entre les deux modèles, nous affichons aussi la solution de référence calculée par la formule analytique de [37]. La courbe obtenue par le modèle avec $\delta \neq 0$ est plus adaptée à la solution analytique. Ces observations sont aussi confirmées à d'autres échelles par les figures (5.31) et (5.32) (la courbe *'acdeltah'* correspond mieux à la solution de Ferris que la courbe *'ssdeltah'*).
Pour la figure (5.30), nous nous concentrons sur le niveau de la nappe phréatique h_1. Sur la sous-figure de gauche, nous voyons que les oscillations imposées sur le côté gauche de l'aquifère sur le front d'eau salée h induisent des comportements oscillants sur h_1. En outre, comme présenté sur la sous-figure de droite, la marée fait augmenter la hauteur moyenne de la nappe phréatique (effets connus dans les aquifères libres côtiers, voir [50]).

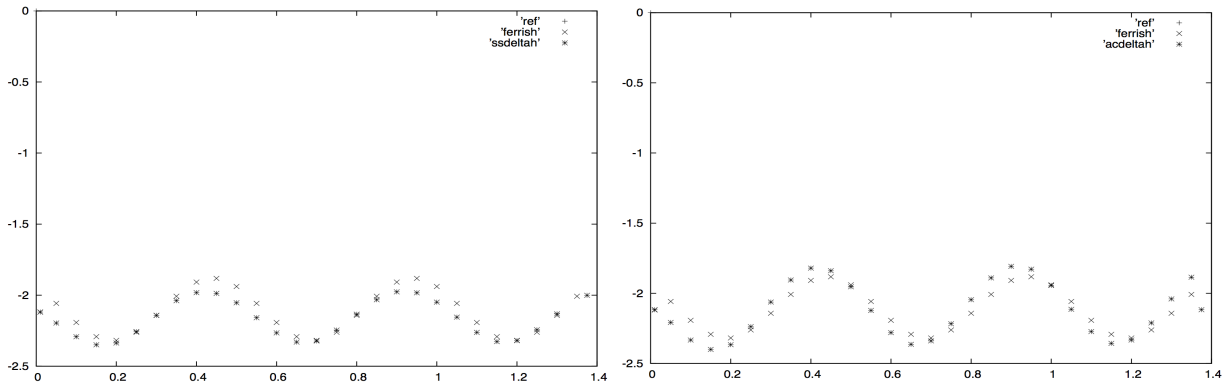


FIGURE 5.29 – Effets de la marée dans un aquifère. Ici nous nous concentrons sur le front d'eau salée h. Une condition aux bords de Dirichlet oscillante calculée avec le modèle de Ferris est imposée sur le coté gauche du domaine pour h (tandis que h_1 evolue librement avec les conditions aux bords de Neumann homogènes sur la gauche). Les autres paramètres sont issus de [27]. L'hydrographe virtuel donnant ces résultats est situé en $\{x = -35\}$. La figure sur la gauche (resp. sur la droite) correspond aux simulations avec $\delta = 0$ (resp. avec $\delta = \mathcal{O}(1)$) comparée à la solution analytique de Ferris.

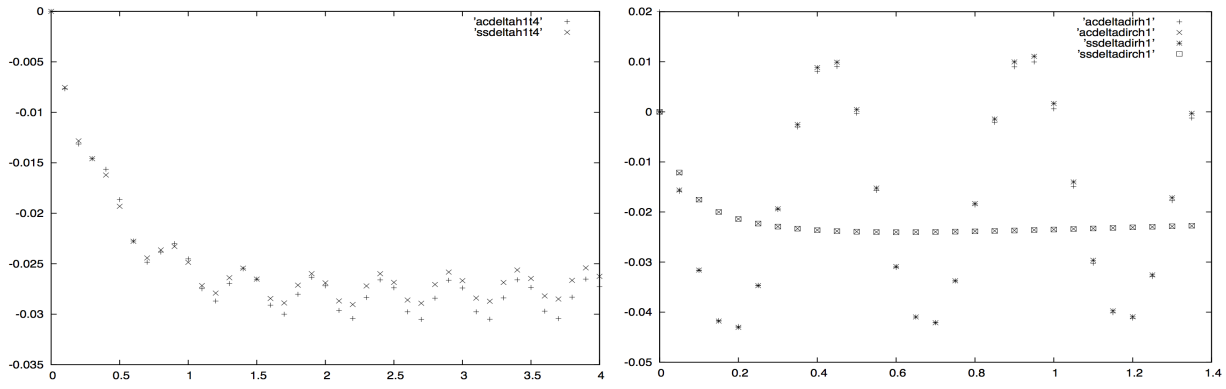


FIGURE 5.30 – Effets de marrées dans un aquifère. Ici nous nous concentrons sur le front d'eau douce h_1. Mêmes données et conditions aux bords que dans la figure (5.30). La figure sur la gauche (resp. sur la droite) montre les simulations avec $\delta = 0$ *'ssdeltadirh1t4'* et avec $\delta = \mathcal{O}(1)$ *'acdeltadirh1t4'* (resp. un zoom comparant les simulations avec *'dirh'* ou sans *'dirch'* conditions aux bords de Dirichlet oscillantes).

Les figures (5.31) et (5.32) présentent des simulations où au contraire nous illustrons les effets des conditions aux bords choisies pour h_1. Le choix des conditions aux bords, ou bien Dirichlet oscillantes ou bien Neumann (sachant que les oscillations sont induites sur h_1 par les conditions de Dirichlet oscillantes sur h) n'a pas

d'impact direct sur le comportement de h. Mais, il crée un écart important sur la profondeur du front d'eau salée h. Plus précisément, imposer des conditions de Dirichlet pour h peut produire une sur-estimation de h.

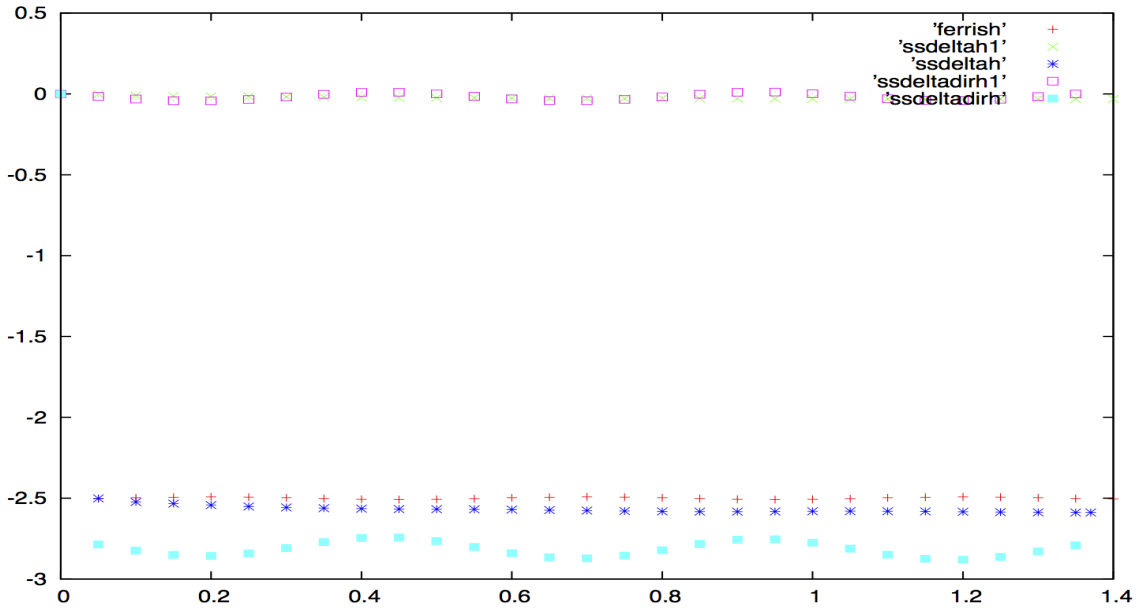


FIGURE 5.31 – Impact de conditions aux bords de Dirichlet oscillantes sur h_1. La simulation est faite avec $\delta = 0$. Les courbes *'ssdeltah1'* et *'ssdeltah'* correspondent aux calculs faits avec des conditions aux bords de type Neumann homogène sur h_1 (et une condition aux bords de type Dirichlet oscillante sur h sur la gauche du domaine) alors que les courbes *'ssdeltadirh1'* et *'ssdeltadireh'* sont calculés avec des conditions aux bords de Dirichlet oscillantes sur h_1. La courbe *'Ferrish'* est la solution de référence pour h calculée avec le modèle de Ferris. Artefact pour un hydrographe à $\{x = -35\}$.

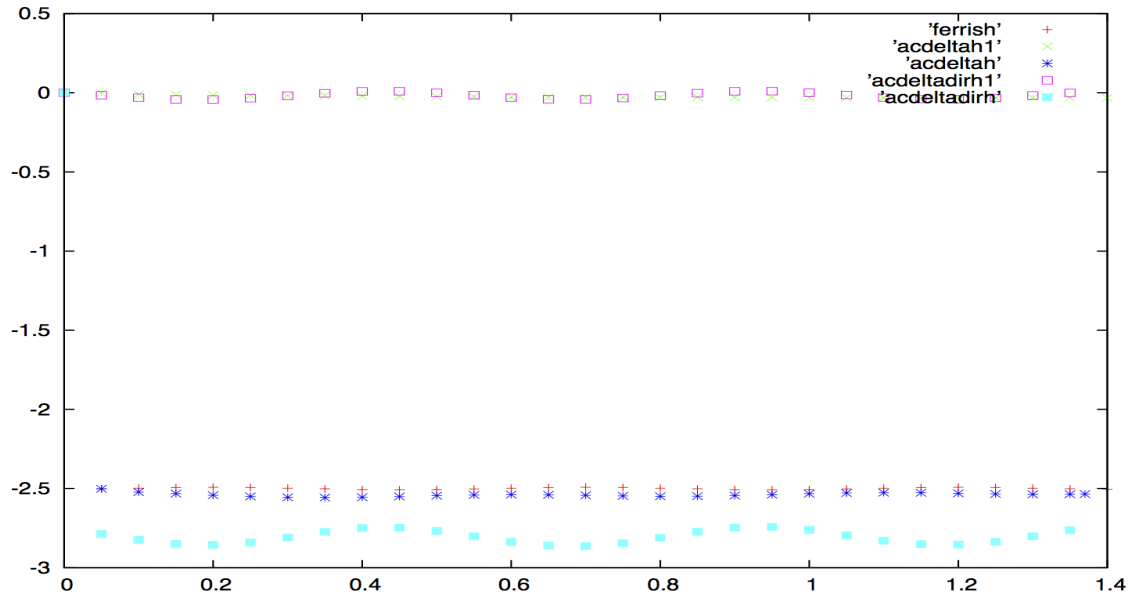


FIGURE 5.32 – Impact des conditions aux bords de Dirichlet oscillantes sur h_1. La simulation est faire avec $\delta = \mathcal{O}(1)$. Même données et notations que la figure (5.31).

Chapitre 6

Annexe : Éléments finis mixtes pour un système d'EDPs paraboliques couplées

Sommaire

6.1 Introduction 133
6.2 Méthode des éléments finis mixtes 135
6.2.1 Discrétisation des espaces 135
6.2.2 Formulation variationnelle du modèle 136
6.3 Analyse d'un schéma semi-implicite 136
6.3.1 Problème discret en pression/vitesse : existence et unicité 136
6.3.2 Problème discret en pression/vitesse : stabilité 140
6.3.3 Problème discret en concentration : existence et unicité 141

6.1 Introduction

Le but dans ce chapitre est de construire un schéma basé sur la méthode des éléments finis mixtes et d'établir un résultat d'existence, d'unicité et de stabilité pour le problème discret issu du modèle d'écoulement et de transport en milieux poreux présenté au chapitre précédent. Nous prouverons aussi que l'erreur entre la solution des problèmes continu et discret tend vers zéro avec les pas de discrétisation.
Dans la littérature, de telles études ont été faites par exemple par Radu et *al* sur l'équation de Richards couplée avec une équation de transport de soluté. Leur travail constitue en fait le pendant de celui réalisé ici, mais dans un cadre incompressible (*i.e.* $z_1 = z_2 = 0$ ci-après). Celà supprime des couplages dans le système et permet d'exploiter la transformée de Kirchhoff pour linéariser une partie des opérateurs et ainsi de profiter de résultats classiques pour la vitesse (voir [68]).

• **Le modèle mathématique** :

Nous rappelons que le modèle mathématique pour un processus de consolidation en milieu poreux présenté au chapitre précédent est décrit dans [24] par :

$$\partial_t\theta(p) + \theta(p)a(c)\partial_t p + \nabla\cdot u = q_i - q_s, \quad u = -\kappa(\theta(p))\nabla p, \qquad \text{dans } (0,T)\times\Omega, \tag{6.1}$$

$$\theta(p)\partial_t c + \theta(p)b(c)\partial_t p + u\cdot\nabla c - \nabla\cdot(\theta(p)\mathcal{D}(u)\nabla c) = q_i(1-c), \qquad \text{dans } (0,T)\times\Omega, \tag{6.2}$$

$$p_{|t=0} = p_I, \quad c_{|t=0} = c_I \text{ dans } \Omega \text{ et } p = c = 0 \text{ sur } (0,T)\times\Gamma, \tag{6.3}$$

$$\text{avec } a(c) = (z_1 - z_2)c + z_2 \quad \text{et} \quad b(c) = (z_1 - z_2)c(1-c),\ c\in[0,1].$$

où a et b sont des fonctions définies sur $[0,1]$ (qu'on pourra considérer comme prolongées continûment dans $\mathbb{R}$), θ représente la porosité du milieu qui dépend de la pression p, c la concentration, q_i et q_s sont les termes sources (injection et production), z_1, z_2 sont les coefficients de compressibilité des deux fluides du mélange, κ est la conductivité hydraulique du milieu, u est la vitesse de Darcy, $\mathcal{D}(u)$ est le tenseur qui modélise les effets de dispersion et diffusion, T est un temps fixé.

• **Les hypothèses** :

Nous rappelons aussi les hypothèses utilisées dans [24] pour établir l'existence du problème continu : on suppose l'existence des réels positifs θ_-, θ_+, θ'_-, κ_- et κ_+ tels que

$$\begin{aligned}
&(A_1) \qquad \theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad 0<\theta_- \le \theta(x) \le \theta_+, \quad \theta'(x) \ge \theta'_- \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R},\\
&(A_2) \qquad \kappa \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+), \quad 0<\kappa_- \le \kappa(x) \le \kappa_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\\
&(A_3) \qquad \mathcal{D}(u)\xi\cdot\xi \ge (D_m+\alpha_T|u|)|\xi|^2, \qquad |\mathcal{D}(u)\xi| \le (D_m+\alpha_L|u|)|\xi|, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^3,\\
&(A_4) \qquad p_I \in L^2(\Omega) \qquad \text{et} \qquad 0 \le c_I \le 1.
\end{aligned}$$

Notons que l'hypothèse (A_3) correspond aux propriétés vérifiées par le tenseur classiquement utilisé pour décrire la dispersion :

$$\mathcal{D}(u) = |u|(\alpha_L\varepsilon(u) + \alpha_T(Id-\varepsilon(u))) + D_m Id, \quad \varepsilon(u)_{i,j} = u_i u_j/|u|^2,$$

où α_L, α_T et D_m sont respectivement les coefficients de dispersion longitudinale et transversale, et de diffusion moléculaire (supposé strictement positif pour éviter la dégénérescence de l'équation de transport), $|u| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 |u_i|^2}$. Au vu de la formulation que nous allons utiliser par la suite nous allons plutôt traduire les propriétés vérifiées par le tenseur de dispersion comme suit : $\mathcal{D}(u)$ est symétrique, défini positif tel que

$$\begin{aligned}
(A_5) \qquad &\mathcal{D}(u)^{-1}\xi\cdot\xi \ge \frac{1}{D_m+\alpha_T|u|}\Big(1-\frac{(\alpha_L-\alpha_T)|u|}{D_m+\alpha_T|u|}\Big)|\xi|^2 \ge M^-|\xi|^2, \quad M^->0,\\
&|\mathcal{D}(u)^{-1/2}\xi| \le \frac{1}{D_m+\alpha_T|u|^{1/2}}|\xi|,
\end{aligned}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $d=2$ ou 3 étant la dimension du domaine considéré.

Remarque 6.1 *Vérifions que $(A5)$ correspond bien aux propriétés vérifiées par le modèle classique de dispersion. On a*

$$\mathcal{D}(u) = (D_m+\alpha_T|u|)(Id+E), \quad E = \frac{(\alpha_L-\alpha_T)|u|}{D_m+\alpha_T|u|}\varepsilon(u),$$

avec l'inverse $(Id+E)^{-1} = Id - E(Id+E)^{-1}$ bien défini puisque l'identité Id et E sont définies positives. Grâce à la symétrie et à la positivité de $(Id+E)$, on peut définir $(Id+E)^{1/2}$ et $(Id+E)^{-1/2}$ et on écrit

$$(Id+E)^{-1}\xi\cdot\xi = |\xi|^2 - E(Id+E)^{-1/2}\xi\cdot(Id+E)^{-1/2}\xi$$

où E est tel que $-E\eta\cdot\eta \ge -\frac{(\alpha_L-\alpha_T)|u|}{D_m+\alpha_T|u|}|\eta|^2$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$. On applique ce dernier résultat à $\eta = (Id+E)^{-1/2}\xi$ qui est tel que $|\eta| \le \xi$ et on conclut que

$$(Id+E)^{-1}\xi\cdot\xi \ge \Big(1-\frac{(\alpha_L-\alpha_T)|u|}{D_m+\alpha_T|u|}\Big)|\xi|^2.$$

Pour prouver la deuxième estimation de $(A5)$, on pose $\mu = \mathcal{D}(u)^{-1}\xi$. On a d'après $(A3)$, $\mathcal{D}(u)\mu\cdot\mu = \xi\cdot\mu \ge (D_m+\alpha_T|u|)|\mu|^2$ où $\xi\cdot\mu \le |\xi||\mu|$. On tire de ces deux dernières inégalités que $|\xi| \ge (D_m+\alpha_T|u|)|\mu|$ et donc

$$|\mu| \le \frac{|\xi|}{D_m+\alpha_T|u|} \Longleftrightarrow |\mathcal{D}(u)^{-1}\xi| \le \frac{1}{D_m+\alpha_T|u|}|\xi|.$$

6.2 Méthode des éléments finis mixtes

6.2.1 Discrétisation des espaces

Nous allons introduire des notations communes que nous utiliserons dans la suite de l'analyse mathématique du problème discret associé au problème continu (6.1)-(6.2)-(6.3). Soit Ω un polygone régulier, le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'espace $H(\mathrm{div};\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs vectorielles (dans $\mathbb{R}^d$) et à divergence dans $L^2(\Omega)$. L'espace $H(\mathrm{div};\Omega)$ est introduit pour traiter le flux de la concentration et le gradient de la pression dans le modèle mixte alors que la pression et la concentration sont dans $L^2(\Omega)$.

La discrétisation sera définie comme suit : soit $N \in \mathbb{N}$ et strictement positif, on définit le pas de temps τ_1 par :

$$\tau_1 = T/N \qquad \text{et} \qquad t_n = n\tau_1 \ (n \in \{1, 2, \cdots, N\}),$$

Pour la discrétisation en espace, $\mathcal{T}_h$ est une décomposition régulière de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ en d-simplexes fermés où h représente le diamètre des mailles. Nous supposons que $\bar{\Omega} = \cup_{O \in \mathcal{T}_h} O$. Nous définissons aussi les sous-espaces discrets correspondant aux espaces continus, $W_h \subset L^2(\Omega)$ et $V_h \subset H(div;\Omega)$ donnés par :

$$W_h := \{p \in L^2(\Omega) \mid p \text{ est constante sur chaque élément } O \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_h := \{u \in H(\mathrm{div};\Omega) \mid u \text{ est polynomiale de degré un sur chaque élément } O \in \mathcal{T}_h\}.$$

En d'autres termes, W_h représente l'espace des fonctions constantes par morceaux tandis que V_h est l'espace de Raviart-Thomas d'ordre le plus faible RT_0. La projection $L^2(\Omega)$ est définie par :

$$P_h : L^2(\Omega) \to W_h, \qquad < P_h w - w, w_h >= 0, \tag{6.4}$$

pour tout $w_h \in W_h$. Par ailleurs, une projection Π_h peut être définie sur $(H(div;\Omega))^d$ (voir [66]) telle que

$$\Pi_h : (H^1(\Omega))^d \to V_h, \qquad < \nabla \cdot (\Pi_h v - v), w_h >= 0, \tag{6.5}$$

pour tout $w_h \in W_h$. Pour ces opérateurs, nous avons le résultat suivant :

$$||w - P_h w||_{L^2(\Omega)} \leq Ch||w||_{H^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad ||v - \Pi_h v||_{L^2(\Omega)} \leq Ch||v||_{H^1(\Omega)}, \tag{6.6}$$

pour tout $w \in H^1(\Omega)$, $v \in (H^1(\Omega))^d$, C étant une constante positive ne dépendant pas des inconnues ou des paramètres de discrétisation.
Nous allons maintenant associer une formulation variationnelle mixte à notre système, rappelé ci-après :

$$\begin{aligned}
\partial_t \theta(p) + \theta(p) a(c) \partial_t p + \nabla \cdot u &= q_i - q_s, && (6.7)\\
u &= -\kappa(\theta(p)) \nabla p, && (6.8)\\
\theta(p)\partial_t c + \theta(p) b(c) \partial_t p + u \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\theta(p) \mathcal{D}(u) \nabla c) &= q_i(1-c), && (6.9)\\
p_{|t=0} = p_I, \quad c_{|t=0} = c_I \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad p = c = 0 \text{ sur } (0,T) \times \Gamma, && (6.10)
\end{aligned}$$

avec

$$a(c) = (z_1 - z_2)c + z_2 \quad \text{et} \quad b(c) = (z_1 - z_2)c(1-c). \tag{6.11}$$

Nous introduisons un flux de concentration (u_c), en ré-écrivant l'équation (6.9). De l'équation (6.9), on tire

$$\partial_t(\theta(p)c) - c\partial_t \theta(p) + \theta(p) b(c) \partial_t p + u \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\theta(p) \mathcal{D}(u) \nabla c) = q_i(1-c).$$

On utilise (6.7) dans l'équation précédente. On obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_t(\theta(p)c) + \theta(p)(b(c) + a(c)c)\partial_t p + \nabla \cdot u_c &= q_i - q_s c,\\
u_c &= -\theta(p)\mathcal{D}(u)\nabla c + uc.
\end{aligned}$$

En résumant, nous obtenons le problème continu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\partial_t\theta(p) + \theta(p)a(c)\partial_t p + \nabla\cdot u &= q_i - q_s, && (6.12)\\
u &= -\kappa(\theta(p))\nabla p, && (6.13)\\
\partial_t(\theta(p)c) + \theta(p)(b(c)+a(c)c)\partial_t p + \nabla\cdot u_c &= q_i - q_s c, && (6.14)\\
u_c &= -\theta(p)\mathcal{D}(u)\nabla c + uc, && (6.15)\\
p_{|t=0} = p_I, \quad c_{|t=0} = c_I \text{ dans } \Omega \quad &\text{et} \quad p = c = 0 \text{ sur } (0,T)\times\Gamma. && (6.16)
\end{aligned}$$

Remarque 6.2

1. *Nous avons $b(c)+a(c)c = cz_1$ en utilisant (6.11) et si $z_1 = z_2 = 0$ dans (6.12)-(6.13), nous retrouvons l'équation de Richards dans le cas des fluides incompressibles.*
2. *On pose dans la suite $f(c) = b(c)+a(c)c = cz_1$. Les fonctions a, b et f sont prolongées par continuité par des constantes en dehors de $[0,1]$ si bien que,*

$$0 < z_2 \le a(c) \le z_1, \qquad 0 \le b(c) \le (z_1 - z_2)/4 = b_+, \qquad 0 \le f(c) \le z_1.$$

3. *On prend dans la suite*

$$q_i = q_s$$

pour alléger les notations.

6.2.2 Formulation variationnelle du modèle

Le problème variationnel associé au problème (6.12)-(6.16) est : trouver $p \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, $c \in L^2(0,T;L^2(\Omega)$ et $u, u_c \in L^2(0,T;H(\mathrm{div};\Omega))$, avec $p_{|t=0} = p_I$ et $c_{|t=0} = c_I$ tels que :

$$\begin{aligned}
\langle\partial_t\theta(p)\ ,\ w\rangle + \langle\theta(p)a(c)\partial_t p\ ,\ w\rangle + \langle\nabla\cdot u\ ,\ w\rangle &= 0 && (6.17)\\
\langle\kappa(\theta(p))^{-1}u\ ,\ v\rangle - \langle p\ ,\ \nabla\cdot v\rangle &= 0 && (6.18)\\
\langle\partial_t(\theta(p)c)\ ,\ w\rangle + \langle\theta(p)f(c)\partial_t p\ ,\ w\rangle + \langle\nabla\cdot u_c\ ,\ w\rangle &= \langle q_s(1-c)\ ,\ w\rangle && (6.19)\\
\langle\theta(p)^{-1}D(u)^{-1}u_c\ ,\ v\rangle - \langle c\ ,\ \nabla\cdot v\rangle - \langle\theta(p)^{-1}D(u)^{-1}uc\ ,\ v\rangle &= 0 && (6.20)
\end{aligned}$$

pour tout $w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $v \in L^2(0,T;H(\mathrm{div};\Omega))$.

Remarque 6.3 *Le symbôle $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne ci-dessus le produit scalaire dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Nous utiliserons dans la suite le même symbôle pour le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, le contexte étant suffisant pour différencier les notations.*

6.3 Analyse d'un schéma semi-implicite

On construit ici un schéma semi-implicite en temps et basé sur la méthode des éléments finis mixtes en espace. Nous obtenons une formulation variationnelle discrète que nous séparons en deux problèmes variationnels discrets, le premier en pression/vitesse, le second en concentration.

6.3.1 Problème discret en pression/vitesse : existence et unicité

Contrairement à ce qui est fait par exemple dans [68], nous n'utiliserons pas une formulation avec changement de variable par la transformée de Kirchhoff. Nous allons conserver les variables "physiques", pression et vitesse de Darcy, tout en utilisant la fonction de Kirchhoff F définie dans $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \kappa(\theta(s))\,ds.$$

Problème variationnel discret 1 :

Soient $n \in \{1, \cdots, N\}$ et p_h^{n-1}, c_h^{n-1} donnés dans W_h. Le problème est de trouver $(p_h^n, u_h^n) \in W_h \times V_h$ tel que :

$$\langle \theta(p_h^n) - \theta(p_h^{n-1}) \ , \ w_h \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1})(p_h^n - p_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau_1 \langle \nabla \cdot u_h^n \ , \ w_h \rangle = 0 \tag{6.21}$$

$$\langle u_h^n \ , \ v_h \rangle - \langle F(p_h^n) \ , \ \nabla \cdot v_h \rangle = 0 \tag{6.22}$$

pour tous $w_h \in W_h$ et $v_h \in V_h$. Le schéma est initialisé par $p_h^0 = P_h p_I$, $c_h^0 = c_h p_I$.

Théorème 6.1
On suppose que les hypothèses A_1, A_2 et A_4 sont vraies. Alors le problème (6.21)-(6.22) *admet une unique solution.*

Preuve 6.1

• **Existence de** (p_h^n, u_h^n)

Nous allons commencer par montrer l'existence de la solution (p_h^n, u_h^n). Nous allons utiliser la bijectivité de la fonction F pour revenir à un raisonnement similaire à celui de [68]. Soit

$$\{w_1, \cdots, w_{n_1}\} \cup \{v_1, \cdots, v_{n_2}\} \text{ une base orthonormée de } W_h \times V_h. \tag{6.23}$$

Notons que si $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_{n_1})$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1})$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_{n_2})$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_{n_2})$ à $\mathbb{R}^{n_2}$ alors on pose $\hat{\xi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $\xi = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Nous considérons le produit scalaire et la norme sur $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ défini par :

$$((\hat{\xi}, \xi)) := (\hat{\alpha}, \alpha)_{n_1} + \tau_1 (\hat{\beta}, \beta)_{n_2} = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\alpha}_i \alpha_i + \tau_1 \sum_{i=1}^{n_2} \hat{\beta}_i \beta_i, \text{ et } |||\xi||| := ((\xi, \xi))^{1/2}, \tag{6.24}$$

où $(\cdot, \cdot)_p$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^p$. De plus, pour tout $\xi = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, nous avons un unique $(\bar{w}, \bar{v}) \in W_h \times V_h$ définis par

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k w_k \ , \ \bar{v} = \sum_{k=1}^{n_2} \beta_k v_k. \tag{6.25}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} ||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 ||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^2 ||w_k||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 \sum_{k=1}^{n_2} \beta_k^2 ||v_k||^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^2 + \tau_1 \sum_{k=1}^{n_2} \beta_k^2, \text{ car } ||v_k||^2_{L^2(\Omega)} = ||w_k||^2_{L^2(\Omega)} = 1 \text{ à cause de (6.23)}, \\ &= (\alpha, \alpha)_{n_1} + \tau_1 (\beta, \beta)_{n_2} = ((\xi, \xi)) = |||\xi|||^2. \end{aligned} \tag{6.26}$$

La présence de F dans le **Problème variationnel discret 1** interdit l'utilisation directe du produit scalaire $((\cdot, \cdot))$. On remarque cependant que (p_h^n, u_h^n) est solution du problème variationnel discret 1 si et seulement si $(\pi_h^n = F(p_h^n), u_h^n)$ est solution de

$$\langle \theta \circ F^{-1}(\pi_h^n) - \theta(p_h^{n-1}) \ , \ w_h \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1})(F^{-1}(\pi_h^n) - p_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau_1 \langle \nabla \cdot u_h^n \ , \ w_h \rangle = 0 \tag{6.27}$$

$$\langle u_h^n \ , \ v_h \rangle - \langle \pi_h^n \ , \ \nabla \cdot v_h \rangle = 0 \tag{6.28}$$

pour tous $w_h \in W_h$ et $v_h \in V_h$.
À partir de ce problème équivalent au **Problème variationnel discret 1**, nous allons introduire une application $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ qui sera définie en (6.33).
Pour ξ donné, et donc $(\bar{w}, \bar{v})$ définis par (6.25), les composantes de $\hat{\xi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ sont définies en utilisant les équations (6.27) et (6.28) :

$$\hat{\alpha}_k = \langle \theta \circ F^{-1}(\bar{w}) - \theta(p_h^{n-1}), w_k \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1})(F^{-1}(\bar{w}) - p_h^{n-1}), w_k \rangle + \tau_1 \langle \nabla \cdot \bar{v}, w_k \rangle, \tag{6.29}$$

pour tout $k = 1, \cdots, n_1$, respectivement

$$\hat{\beta}_k = \langle \bar{v}, v_k \rangle - \langle \bar{w}, \nabla \cdot v_k \rangle, \tag{6.30}$$

pour tout $k = 1, \cdots, n_2$. On définit ainsi l'application $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ par

$$\mathcal{P}(\xi) = \hat{\xi}$$

et la solution à notre problème (6.27)-(6.28) est la solution du problème

$$\mathcal{P}(\xi) = 0.$$

L'application $\mathcal{P}$ est continue par construction.
On calcule le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n_1}$ suivant

$$(\hat{\alpha}, \alpha)_{n_1} = \langle \theta \circ F^{-1}(\bar{w}) - \theta(p_h^{n-1}), \bar{w} \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1})(F^{-1}(\bar{w}) - p_h^{n-1}), \bar{w} \rangle + \tau_1 \langle \nabla \cdot \bar{v}, \bar{w} \rangle, \tag{6.31}$$

puis le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n_2}$ suivant

$$\tau_1(\hat{\beta}, \beta)_{n_2} = \tau_1 \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle - \tau_1 \langle \bar{w}, \nabla \cdot \bar{v} \rangle. \tag{6.32}$$

Nous faisons la somme de (6.31) et (6.32) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}((\hat{\xi}, \xi)) = ((\mathcal{P}(\xi), \xi)) = \langle \theta \circ F^{-1}(\bar{w}), \bar{w} \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) F^{-1}(\bar{w}), \bar{w} \rangle + \tau_1 \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \\ - \langle \theta(p_h^{n-1}), \bar{w} \rangle - \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) p_h^{n-1}, \bar{w} \rangle.\end{aligned} \tag{6.33}$$

Nous allons estimer les termes de (6.33) en utilisant les hypothèses A_1, A_2, A_4, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young. Nous obtenons :

$$I_1 = \langle \theta \circ F^{-1}(\bar{w}), \bar{w} \rangle = \int_\Omega \int_0^1 (\theta \circ F^{-1})'(s\bar{w}) \bar{w}^2 \, ds dx + \int_\Omega \theta(0) \bar{w} \, dx$$

le premier terme de I_1 s'écrit :

$$\int_\Omega \int_0^1 (\theta \circ F^{-1})'(s\bar{w}) \bar{w} \, ds dx \geq \frac{1}{\kappa_+} \theta'_- ||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} \geq 0,$$

et le second

$$\left| \int_\Omega \theta(0) \bar{w} \, dx \right| \leq \theta_+ \sqrt{|\Omega|} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{z_2 \theta_-}{4\kappa_+} \|\bar{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1, \; c_1 = \frac{\theta_+^2 \kappa_+}{z_2 \theta_-} |\Omega|,$$

$$I_2 = \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) F^{-1}(\bar{w}), \bar{w} \rangle = \int_\Omega \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) \int_0^1 (F^{-1})'(s\bar{w}) |w|^2 \, ds dx \geq \frac{z_2 \theta_-}{\kappa_+} ||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$I_3 = \tau_1 \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq \tau_1 ||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$|I_4| = |\langle \theta(p_h^{n-1}), \bar{w} \rangle| \leq \theta_+ \sqrt{|\Omega|} ||\bar{w}||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{z_2 \theta_-}{4\kappa_+} ||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + c_1,$$

$$|I_5| = |\langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) p_h^{n-1}, \bar{w} \rangle| \leq \theta_+ z_1 ||p_h^{n-1}||_{L^2(\Omega)} ||\bar{w}||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{z_2 \theta_-}{4\kappa_+} ||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(\theta_+ z_1)^2 \kappa_+}{z_2 \theta_-} ||p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, nous tirons de (6.33) en sommant les termes minorés :

$$\begin{aligned}((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \quad \geq \quad & \frac{z_2\theta_-}{\kappa_+}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau_1}{\kappa_+}||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)} \\ & -\frac{z_2\theta_-}{4\kappa_+}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} - c_1 \\ & -\frac{z_2\theta_-}{4\kappa_+}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} - c_1 \\ & -\frac{z_2\theta_-}{4\kappa_+}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{(\theta_+ z_1)^2\kappa_+}{z_2\theta_-}||p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

soit

$$((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \geq \frac{z_2\theta_-}{4\kappa_+}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)} - K_{n-1}, \tag{6.34}$$

où $K_{n-1} = 2c_1 + \frac{(\theta_+ z_1)^2\kappa_+}{z_2\theta_-}||p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)}$ est une constante strictement positive dépendant des termes sources et des données initiales du problème. D'où en posant $m = \min\left\{z_2\theta_-/4\kappa_+, 1\right\} > 0$ et en utilisant la définition (6.26) dans (6.34), on a :

$$((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \geq m|||\xi|||^2 - K_{n-1}.$$

On démontre donc que $((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \geq K_{n-1} > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ satisfaisant $|||\xi|||^2 = 2K_{n-1}/m$. D'après le Lemme 1.4. p164 de Temam [84], nous en déduisons l'existence de (π_h^n, u_h^n), solution du problème (6.27)-(6.28) avec

$$|||(\pi_h^n, u_h^n)||| \leq \sqrt{\frac{2K_{n-1}}{m}}.$$

Le résultat d'existence énoncé au Théorème 6.1 s'en suit avec

$$p_h^n = F^{-1}(\pi_h^n).$$

• **Unicité de** (p_h^n, u_h^n)

Pour l'unicité, nous allons supposer que $(p_h^{n,1}, u_h^{n,1})$ et $(p_h^{n,2}, u_h^{n,2}) \in W_h \times V_h$ sont deux solutions du problème (6.21)-(6.22) issues de la même donnée (p_h^{n-1}, u_h^{n-1}). Le couple $(p_h^{n,1}, u_h^{n,1})$ est solution de (6.21)-(6.22) donc vérifie le système suivant :

$$\begin{aligned}&\langle\theta(p_h^{n,1})\ ,\ w_h\rangle + \langle\theta(p_h^{n-1})a(c_h^{n-1})p_h^{n,1}, w_h\rangle + \tau_1\langle\nabla\cdot u_h^{n,1}\ ,\ w_h\rangle \\ &\qquad = \langle\theta(p_h^{n-1})\ ,\ w_h\rangle + \langle\theta(p_h^{n-1})a(c_h^{n-1})p_h^{n-1}, w_h\rangle, \qquad (6.35)\end{aligned}$$

$$\langle u_h^{n,1}\ ,\ v_h\rangle - \langle F(p_h^{n,1})\ ,\ \nabla\cdot v_h\rangle = 0, \tag{6.36}$$

De même le couple $(p_h^{n,2}, u_h^{n,2})$ est solution de (6.21)-(6.22) donc vérifie le système suivant :

$$\begin{aligned}&\langle\theta(p_h^{n,2})\ ,\ w_h\rangle + \langle\theta(p_h^{n-1})a(c_h^{n-1})p_h^{n,2}, w_h\rangle + \tau_1 < \nabla\cdot u_h^{n,2}\ ,\ w_h\rangle \\ &\qquad = \langle\theta(p_h^{n-1})\ ,\ w_h\rangle + \langle\theta(p_h^{n-1})a(c_h^{n-1})p_h^{n-1}, w_h\rangle, \qquad (6.37)\end{aligned}$$

$$\langle u_h^{n,2}\ ,\ v_h\rangle - \langle F(p_h^{n,2})\ ,\ \nabla\cdot v_h\rangle = 0. \tag{6.38}$$

Nous faisons la différence de (6.35) et (6.37) puis celle de (6.36) et (6.38) en posant $P = p_h^{n,1} - p_h^{n,2}$, $U = u_h^{n,1} - u_h^{n,2}$. Nous obtenons le nouveau système :

$$\langle\theta(p_h^{n,1}) - \theta(p_h^{n,2})\,, w_h\rangle + \langle\theta(p_h^{n-1})a(c_h^{n-1})P\,, w_h\rangle + \tau_1\langle\nabla\cdot U\,, w_h\rangle \quad = \quad 0, \tag{6.39}$$

$$\langle U\ ,\ v_h\rangle - \langle F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2})\ ,\ \nabla\cdot v_h\rangle \quad = \quad 0. \tag{6.40}$$

Nous prenons ensuite $w_h = F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2})$ dans (6.39) et $v_h = \tau_1 U$ dans (6.40). Nous obtenons alors en sommant (6.39) et (6.40) :

$$\langle \theta(p_h^{n,1}) - \theta(p_h^{n,2}) \, , \, F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2}) \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) P \, , \, F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2}) \rangle + \tau_1 \langle U \ , \ U \rangle = 0. \tag{6.41}$$

Les trois termes de l'équation (6.41) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle \theta \circ F^{-1}(F(p_h^{n,1})) - \theta \circ F^{-1}(F(p_h^{n,2})) \ , \ F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2}) \rangle \\ &= \int_\Omega \int_0^1 (\theta \circ F^{-1})' \big(s F(p_h^{n,1}) + (1-s) F(p_h^{n,2}) \big) (F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2}))^2 \, ds dx \\ &\quad \text{(or} \quad \theta'\big(x\big) \geq \theta'_- \geq 0, \ \forall \, x \in \mathbb{R} \quad \text{grâce à l'hypothèse } A_1) \\ &\geq \frac{\theta'_-}{\kappa_+} ||F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2})||^2_{L^2(\Omega)} \ \geq \ 0 \quad (\text{où } \theta'_- = \inf_{x \in \mathbb{R}} \theta'(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) P \, , \, F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2}) \rangle \\ &= \int_\Omega \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) \int_0^s F'(s p_h^{n,1} + (1-s) p_h^{n,2}) \, P^2 \, ds dx \\ &\geq \ z_2 \theta_- \inf_{\mathbb{R}} F' \, ||P||^2_{L^2(\Omega)} = z_2 \theta_- \kappa_- \, ||P||^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$I_3 = \tau_1 \langle U \, , \, U \rangle \ = \ \tau_1 ||U||^2_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant les minorants ci-dessus de I_1, I_2 et I_3, l'équation (6.41) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\theta'_-}{\kappa_+} ||F(p_h^{n,1}) - F(p_h^{n,2})||^2_{L^2(\Omega)} + z_2 \theta_- \kappa_- ||P||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 ||U||^2_{L^2(\Omega)} \leq \ 0 \\ \Rightarrow z_2 \theta_- \kappa_- ||P||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 ||U||^2_{L^2(\Omega)} \leq \ 0 \\ \Rightarrow ||P||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ et } ||U||^2_{L^2(\Omega)} = 0, \\ \Leftrightarrow p_h^{n,1} = p_h^{n,2} \text{ et } u_h^{n,1} = u_h^{n,2} \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

D'où l'unicité de (p_h^n, u_h^n) solution au problème (6.21)-(6.22).

Le Théorème 6.1 est prouvé.

6.3.2 Problème discret en pression/vitesse : stabilité

Lemme 6.1 *On suppose que les hypothèses A_1, A_2 sont vraies et que le couple (p_h^n, u_h^n) est solution du problème* (6.21)-(6.22)*. On a l'estimation suivante*

$$\sum_{n=1}^{N} ||p_h^n - p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 \max_{n=1\ldots N} ||u_h^n||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 \sum_{n=1}^{N} ||u_h^n - u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \tau_1$$

où C est une constante ne dépendant que des données du problème.

Démonstration

On réécrit (6.22) aux temps t^n et t^{n-1} puis on fait la différence des deux et on obtient :

$$\langle u_h^n - u_h^{n-1} \ , \ v_h \rangle - \langle F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \ , \ \nabla \cdot v_h \rangle \ = \ 0. \tag{6.42}$$

On prend les fonctions tests $w_h = F(p_h^n) - F(p_h^{n-1})$ dans (6.21) et $v_h = \tau_1 u_h^n$ dans (6.42) et on obtient :

$$\langle \theta(p_h^n) - \theta(p_h^{n-1}) \ , \ F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1}) (p_h^n - p_h^{n-1}) \, , \, F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \rangle$$

$$+ \tau_1 \langle \nabla \cdot u_h^n \ , \ F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \rangle = 0, \tag{6.43}$$

$$\tau_1 \langle u_h^n - u_h^{n-1} \ , \ u_h^n \rangle - \tau_1 \langle F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \ , \ \nabla \cdot u_h^n \rangle = 0. \tag{6.44}$$

La somme de (6.43) et (6.44) donne :

$$\langle \theta(p_h^n) - \theta(p_h^{n-1}) \ , \ F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \rangle + \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1})(p_h^n - p_h^{n-1}) \, , \, F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \rangle$$
$$+\tau_1 \langle u_h^n - u_h^{n-1} \ , \ u_h^n \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} I_i = 0. \tag{6.45}$$

Estimations des termes I_i de (6.45) :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \langle \theta \circ F^{-1}(F(p_h^n)) - \theta \circ F^{-1}(F(p_h^{n-1})) \ , \ F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \rangle \\
&= \int_\Omega \int_0^1 (\theta \circ F^{-1})' \big(sF(p_h^n) + (1-s)F(p_h^{n-1}) \big) (F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}))^2 \, ds dx \\
&\quad \text{(or } \theta'\big(x\big) \geq \theta'_- \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{grâce à l'hypothèse } A_1) \\
&\geq \frac{\theta'_-}{\kappa_+} ||F(p_h^n) - F(p_h^{n-1})||^2_{L^2(\Omega)} \ \geq \ 0, \\
I_2 &= \langle \theta(p_h^{n-1}) a(c_h^{n-1})(p_h^n - p_h^{n-1}) \, , \, F(p_h^n) - F(p_h^{n-1}) \rangle \ \geq \ z_2 \theta_- \kappa_- ||p_h^n - p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} \quad (\text{car } \inf_{\mathbb{R}} F' \geq \kappa_-), \\
I_3 &= \tau_1 \langle u_h^n - u_h^{n-1} \ , \ u_h^n \rangle = \frac{1}{2} \int_\Omega \big((u_h^n)^2 - (u_h^{n-1})^2 + (u_h^n - u_h^{n-1})^2 \big) \, dx \\
&= \frac{\tau_1}{2} \|u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau_1}{2} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\tau_1}{2} \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

L'équation (6.45) devient donc :

$$\frac{\theta'_-}{\kappa_+} ||F(p_h^n) - F(p_h^{n-1})||^2_{L^2(\Omega)} + z_2 \theta_- \kappa_- ||p_h^n - p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau_1}{2} ||u_h^n||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\tau_1}{2} ||u_h^n - u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau_1}{2} ||u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$z_2 \theta_- \kappa_- ||p_h^n - p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau_1}{2} ||u_h^n||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau_1}{2} ||u_h^n - u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau_1}{2} ||u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.46}$$

Nous en déduisons en particulier en sommant les inégalités précédentes jusqu'à un rang $m \leq N$:

$$\sum_{n=1}^{m} ||p_h^n - p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 ||u_h^m||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1 \sum_{n=1}^{m} ||u_h^n - u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} \leq C\tau_1 \quad \forall m \leq N$$

où C est une constante ne dépendant que des données du problème. On en déduit le résultat annoncé au lemme 6.1.

Conclusion : On a stabilité du schéma (6.21)-(6.22) définissant le couple (p_h^n, u_h^n).

6.3.3 Problème discret en concentration : existence et unicité

Nous proposons le schéma suivant pour l'équation de concentration.

Problème variationnel discret 2 :

Soient $n \in \{1, \cdots, N\}$, p_h^{n-1}, c_h^{n-1} donnés dans W_h et u_h^n donné dans V_h. Le problème est de trouver $(c_h^n, u_{ch}^n) \in W_h \times V_h$ tel que :

$$\langle \theta(p_h^n)(c_h^n - \theta(p_h^{n-1})c_h^{n-1}, w_h\rangle + \langle \theta(p_h^n) f(c_h^{n-1})(p_h^n - p_h^{n-1}), w_h\rangle$$

$$+\tau_1 \langle \nabla \cdot \big(D(u_h^n)^{1/2} u_{ch}^n\big), w_h\rangle + \tau_1 \langle q_s c_h^n, w_h\rangle = \tau_1 \langle q_s, w_h\rangle, \tag{6.47}$$

$$\langle \theta(p_h^n)^{-1} D(u_h^n)^{-1/2} u_{ch}^n \ , \ v_h\rangle - \langle c_h^n \ , \ \nabla \cdot v_h\rangle - \langle \theta(p_h^n)^{-1} D(u_h^n)^{-1} u_h^n c_h^n \ , \ v_h\rangle = 0, \tag{6.48}$$

pour tout $w_h \in W_h$ et $v_h \in V_h$. Le schéma est initialisé par $p_h^0 = P_h p_I$, $c_h^0 = c_h p_I$.

La racine carrée $D(u)^{1/2}$ est définie grâce à la symétrie et à la positivité de $D(u)$.

Théorème 6.2
On suppose que les hypothèses A_1, A_4, A_5 sont vraies et τ_1 suffisamment petit. Si le tenseur de dispersion $D(\cdot)$ dépend effectivement de la vitesse u, on suppose de plus que le maillage est quasi-uniforme et que la condition suivante est satisfaite par les pas de temps et d'espace :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ such that } \frac{\tau_1^{1-\varepsilon}}{h^d} = \mathcal{O}(1).$$

Alors le problème (6.47)-(6.48) *admet une unique solution.*

Preuve 6.2

• **Existence de** (c_h^n, u_{ch}^n)

La demonstration de ce théorème est similaire à la précédente. Ainsi, nous garderons la même définition des espaces et des bases. Le produit scalaire et la norme sont définis de même :

$$((\hat{\xi}, \xi)) := (\hat{\alpha}, \alpha)_{n_1} + \tau_1 (\hat{\beta}, \beta)_{n_2}, \text{ et } |||\xi||| := ((\xi, \xi))^{1/2}. \tag{6.49}$$

L'application $\mathcal{P}$ associée au système (6.47)-(6.48) sera définie en (6.54). Pour ξ donné, et donc $(\bar{w}, \bar{v})$ définis par (6.25), les composantes de $\hat{\xi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ sont définies en utilisant les équations (6.47) et (6.48) :

$$\hat{\alpha}_k = \langle \theta(p_h^n)\bar{w} - \theta(p_h^{n-1})c_h^{n-1}, w_k\rangle + \langle \theta(p_h^n) f(c_h^{n-1})(p_h^n - p_h^{n-1}), w_k\rangle$$

$$+\tau_1 \langle \nabla \cdot \big(D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\big), w_k\rangle + \tau_1 \langle q_s \bar{w}, w_k\rangle - \tau_2 \langle q_s, w_k\rangle \tag{6.50}$$

pour tout $k = 1, \cdots, n_1$, respectivement

$$\hat{\beta}_k = \langle \theta(p_h^n)^{-1} D(u_h^n)^{-1/2}\bar{v} \ , \ v_k\rangle - \langle \bar{w} \ , \ \nabla \cdot v_k\rangle - \langle \theta(p_h^n)^{-1} D(u_h^n)^{-1} u_h^n \bar{w} \ , \ v_k\rangle \tag{6.51}$$

pour tout $k = 1, \cdots, n_2$.
Ainsi, l'application $\mathcal{P}$ définie par $\mathcal{P}(\xi) = \hat{\xi}$ est continue par construction et la solution à notre problème (6.47)-(6.48) est la solution du problème $\mathcal{P}(\xi) = 0$. Nous construisons $((\mathcal{P}(\xi), \xi)) = ((\hat{\xi}, \xi))$ comme défini dans (6.49). Ainsi on fait le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n_1}$:

$$(\hat{\alpha}, \alpha)_{n_1} = \langle \theta(p_h^n)\bar{w} - \theta(p_h^{n-1})c_h^{n-1}, \bar{w}\rangle + \langle \theta(p_h^n) f(c_h^{n-1})(p_h^n - p_h^{n-1}), \bar{w}\rangle$$

$$+\tau_1 \langle \nabla \cdot \big(D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\big), \bar{w}\rangle + \tau_1 \langle q_s \bar{w}, \bar{w}\rangle - \tau_1 \langle q_s, \bar{w}\rangle, \tag{6.52}$$

puis le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n_2}$:

$$\tau_1(\hat{\beta}, \beta)_{n_2} = \tau_1 \langle \theta(p_h^n)^{-1} D(u_h^n)^{-1/2}\bar{v} \ , \ D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\rangle - \tau_1 \langle \bar{w} \ , \ \nabla \cdot \big(D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\big)\rangle$$

$$-\tau_1 \langle \theta(p_h^n)^{-1} D(u_h^n)^{-1} u_h^n \bar{w} \ , \ D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\rangle. \tag{6.53}$$

Nous faisons la somme de (6.52) et (6.53) et nous obtenons :

$$((\mathcal{P}(\xi),\xi)) = \langle\theta(p_h^n)\bar{w},\bar{w}\rangle + \langle\theta(p_h^n)f(c_h^{n-1})(p_h^n-p_h^{n-1}),\bar{w}\rangle + \tau_1\langle q_s\bar{w},\bar{w}\rangle - \tau_1\langle q_s,\bar{w}\rangle$$

$$-\langle\theta(p_h^{n-1})c_h^{n-1},\bar{w}\rangle + \tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}\bar{v}\ ,\ D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\rangle - \tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1}u_h^n\bar{w}\ ,\ D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\rangle. \quad (6.54)$$

Nous allons minorer les termes de (6.54) en utilisant les hypothèses A_1, A_4, A_5, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I_1 &= |\langle\theta(p_h^n)\bar{w},\bar{w}\rangle| \geq \theta_-||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)},\\
|I_2| &= |\langle\theta(p_h^n)f(c_h^{n-1})(p_h^n-p_h^{n-1}),\bar{w}\rangle|\\
&\leq z_1\theta_+||p_h^n-p_h^{n-1}||_{L^2(\Omega)}\|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2z_1\theta_+}{\theta_-}||p_h^n-p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)},\\
|I_3| &= |\tau_1\langle q_s\bar{w},\bar{w}\rangle| \leq \tau_1||q_s||_{L^\infty(\Omega)}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)},\\
|I_4| &= |\tau_1\langle q_s,\bar{w}\rangle| \leq \tau_1||q_s||_{L^\infty(\Omega)}||\bar{w}||_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\tau_1^2||q_s||^2_{L^\infty(\Omega)}}{\theta_-},\\
|I_5| &= |\langle\theta(p_h^{n-1})c_h^{n-1},\bar{w}\rangle| \leq \theta_+||c_h^{n-1}||_{L^2(\Omega)}||\bar{w}||_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\theta_+^2}{\theta_-}||c_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $D(u_h^n)$ est symétrique,

$$\begin{aligned}
I_6 &= \tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}\bar{v}\ ,\ D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\rangle\ = \tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}\bar{v}\ ,\bar{v}\rangle\ \geq \frac{\tau_1}{\theta_+}||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)},\\
|I_7| &= |\tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1}u_h^n\bar{w}\ ,\ D(u_h^n)^{1/2}\bar{v}\rangle| = |\tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}u_h^n\bar{w}\ ,\ \bar{v}\rangle|\\
&\leq \frac{\tau_1\theta_+}{\alpha_T}|\langle|u_h^n|^{1/2}\bar{w}\ ,\ \bar{v}\rangle| = \frac{\tau_1\theta_+}{\alpha_T}\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\int_{O_h}|u_h^n|^{1/2}|\bar{w}_h|\,|\bar{v}_h|\,dx \quad \text{(par (A5) ligne 2)}\\
&\leq \frac{\tau_1\theta_+}{\alpha_T}\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\Big((\int_{O_h}|u_h^n|\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{O_h}|\bar{w}_h|^2|\bar{v}_h|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big) \quad \text{(par Cauchy-Schwarz)}\\
&\leq \frac{\tau_1\theta_+}{\alpha_T}\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\Big(|O_h|^{1/4}\|u_h^n\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\Big(\int_{O_h}|\bar{w}_h|^2|\bar{v}_h|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big)\\
&\qquad \text{(par Cauchy-Schwarz et puisque } \|u_h^n\|_{L^2(O_h)} \leq \|u_h^n\|_{L^2(\Omega)})\\
&\leq \frac{C\tau_1\theta_+}{\alpha_T}\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\Big(|O_h|^{1/4}\Big(\int_{O_h}|\bar{w}_h|^2|\bar{v}_h|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big) \quad \text{(d'après le Lemme 6.1).}
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que $\bar{w}_h$ est constant par maille (la démonstration s'adapterait à d'autres types d'éléments finis *via* les inégalités inverses en supposant toujours le maillage quasi-uniforme (voir le théorème

4.5.11 et la remarque associée dans [19])).

$$
\begin{aligned}
I_7 &\leq \frac{C\tau_1\theta_+}{\alpha_T}\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\Big(|O_h|^{1/4}|\bar{w}_h|\big(\int_{O_h}|\bar{v}_h|^2\,dx\big)^{1/2}\Big)\\
&= \frac{C\tau_1\theta_+}{\alpha_T}\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\Big(|O_h|^{1/4}\big(\frac{1}{|O_h|}\int_{O_h}|\bar{w}_h|^2\,dx\big)^{1/2}\big(\int_{O_h}|\bar{v}_h|^2\,dx\big)^{1/2}\Big)\\
&= \frac{C\tau_1\theta_+}{h^{d/4}\alpha_T}\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\Big(\|\bar{w}_h\|_{L^2(O_h)}\|\bar{v}_h\|_{L^2(O_h)}\Big) \quad \text{(car on suppose le maillage quasi-uniforme)}\\
&\leq \frac{C\tau_1\theta_+}{h^{d/4}\alpha_T}\Big(\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\|\bar{w}_h\|^2_{L^2(O_h)}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{O_h\in\mathcal{T}_h}\|\bar{v}_h\|^2_{L^2(O_h)}\Big)^{1/2} \quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète)}\\
&= \frac{C\tau_1\theta_+}{h^{d/4}\alpha_T}\|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}\|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + c_3\tau_1^{1+\epsilon}||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \text{où} \quad c_3 = \frac{2C^2\theta_+^2\tau_1^{(1-\epsilon)}}{h^{d/2}\alpha_T^2\theta_-}.
\end{aligned}
$$

On remarque que c_3 est d'ordre 1 si la condition de type CFL liant les ordres de τ_1 et h est vérifiée. Ainsi, en utilisant respectivement les résultats de l'estimation de $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ et I_7, nous tirons de (6.54) :

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \geq\ & \theta_-||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau_1}{\theta_+}||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)}\\
&-\frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{2z_1\theta_+}{\theta_-}||p_h^n - p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} - \tau_1||q_s||_{L^\infty(\Omega)}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)}\\
&-\frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{2\tau_1^2||q_s||^2_{L^\infty(\Omega)}}{\theta_-}\\
&-\frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{2\theta_+^2}{\theta_-}||c_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)}\\
&-\frac{\theta_-}{8}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} - c_3\tau_1^{1+\epsilon}||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Soit

$$
((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \geq \underbrace{\Big(\frac{\theta_-}{2} - \tau_1||q_s||_{L^\infty(\Omega)}\Big)}_{(i)}||\bar{w}||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1\underbrace{\Big(\frac{1}{\theta_+} - \tau_1^\epsilon c_3\Big)}_{(ii)}||\bar{v}||^2_{L^2(\Omega)} - K,
$$

où

$$
K = \frac{2z_1\theta_+}{\theta_-}||p_h^n - p_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\tau_1^2||q_s||^2_{L^\infty(\Omega)}}{\theta_-} + \frac{2\theta_+^2}{\theta_-}||c_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)}
$$

est une constante strictement positive dépendant des termes sources et des données du problème. En prenant un τ_1 assez petit tel que $(i) > 0$ et $(ii) > 0$, en posant $m = \min\big\{(i),(ii)\big\}$, on a :

$$
((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \geq m|||\xi|||^2 - K.
$$

On démontre que $((\mathcal{P}(\xi),\xi)) \geq K > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ satisfaisant $|||\xi|||^2 = 2K/m$. D'après le Lemme 1.4. p164 de Temam [84], nous avons l'existence de (c_h^n, u_{ch}^n), solution du problème (6.47)-(6.48) (on remarque que la présence du terme *donné* $D(u_h^n)^{1/2}$ dans le produit scalaire (6.53) ne perturbe pas le raisonnement car $D(\cdot)^{1/2}$ est inversible : prouver l'existence de $D(u_h^n)^{1/2}u_{ch}^n$ donne donc l'existence de u_{ch}^n).

• **Unicité de** (c_h^n, u_{ch}^n)

Pour l'unicité, nous allons introduire une nouvelle notation en omettant "h", le pas de discrétisation en espace (d'autant qu'il ne change pas) et supposer que $(c_1^n, u_{c,1}^n)$, $(c_2^n, u_{c,2}^n) \in W_h \times V_h$ sont deux solutions de

(6.47)-(6.48) issues de la même solution $(c_h^{n-1}, u_{ch}^{n-1})$. Le couple $(c_1^n, u_{c,1}^n)$ est solution de (6.47)-(6.48) donc vérifie le système suivant :

$$\langle\theta(p_h^n)c_1^n - \theta(p_h^{n-1})c_h^{n-1}, w_h\rangle + \langle\theta(p_h^n)(p_h^n - p_h^{n-1})f(c_h^{n-1}), w_h\rangle$$

$$+\tau_1\langle\nabla\cdot\big(D(u_h^n)^{1/2}u_{c,1}^n\big), w_h\rangle + \tau_1\langle q_s c_1^n, w_h\rangle = \tau_1\langle q_s, w_h\rangle, \tag{6.55}$$

$$\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}u_{c,1}^n, v_h\rangle - \langle c_1^n, \nabla\cdot v_h\rangle - \langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1}u_h^n c_1^n, v_h\rangle = 0, \tag{6.56}$$

pour tous $w_h \in W_h$ et $v_h \in V_h$. Le couple $(c_2^n, u_{c,2}^n)$ est solution de (6.47)-(6.48) donc vérifie le système suivant :

$$\langle\theta(p_h^n)c_2^n - \theta(p_h^{n-1})c_h^{n-1}, w_h\rangle + \langle\theta(p_h^n)(p_h^n - p_h^{n-1})f(c_h^{n-1}), w_h\rangle$$

$$+\tau_1\langle\nabla\cdot\big(D(u_h^n)^{1/2}u_{c,2}^n\big), w_h\rangle + \tau_1\langle q_s c_2^n, w_h\rangle = \tau_1\langle q_s, w_h\rangle, \tag{6.57}$$

$$\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}u_{c,2}^n, v_h\rangle - \langle c_2^n, \nabla\cdot v_h\rangle - \langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1}u_h^n c_2^n, v_h\rangle = 0, \tag{6.58}$$

pour tous $w_h \in W_h$ et $v_h \in V_h$. Nous faisons la différence de (6.55) et (6.57) puis celle de (6.56) et (6.58). Nous posons

$$C = c_1^n - c_2^n, \quad U_c = u_{c,1}^n - u_{c,2}^n,$$

et nous obtenons le nouveau système :

$$\langle\theta(p_h^n)C, w_h\rangle + \tau_1\langle\nabla\cdot\big(D(u_h^n)^{1/2}U_c\big), w_h\rangle + \tau_1\langle q_s\, C, w_h\rangle \;=\; 0, \tag{6.59}$$

$$\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}U_c\ ,\ v_h\rangle - \langle C\ ,\ \nabla\cdot v_h\rangle$$

$$-\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1}u_h^n C\ ,\ v_h\rangle \;=\; 0. \tag{6.60}$$

Nous prenons $w_h = C$ dans (6.59) et $v_h = \tau_1 D(u_h^n)^{1/2}U_c$ dans (6.60), nous sommons (6.59) et (6.60) et obtenons :

$$\begin{aligned}&\langle\theta(p_h^n)C\,,\,C\rangle + \tau_1\langle q_s\,C\,,\,C\rangle + \tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}U_c\,,\,U_c\rangle\\ &\quad-\tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}u_h^n C\ ,\ U_c\rangle = 0.\end{aligned} \tag{6.61}$$

Nous estimons les quatre termes de l'équation (6.61) comme suit :

$$I_1 \;=\; \langle\theta(p_h^n)C\,,\,C\rangle \;\geq\; \theta_-||C||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$|I_2| \;=\; \tau_1|\langle q_s\,C\,,\,C\rangle| \;\leq \tau_1||q_s||_{L^\infty(\Omega)}||C||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$I_3 \;=\; \tau_1\langle\theta(p_h^n)^{-1}U_c\ ,\ U_c\rangle \;\geq \frac{\tau_1}{\theta_+}||U_c||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}|I_4| \;&=\; \tau_1|\langle\theta(p_h^n)^{-1}D(u_h^n)^{-1/2}u_h^n C\ ,\ U_c\rangle|\\ &\leq\; \frac{\theta_-}{2}||C||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1^{1+\epsilon}c_4||U_c||^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

où c_4 est une constante construite comme c_3 apparaissant dans l'estimation de I_7 dans la preuve d'existence précédente. L'équation (6.61) devient :

$$\underbrace{\Big(\frac{\theta_-}{2} - \tau_1||q_s||_{L^\infty(\Omega)}\Big)}_{(i)}||C||^2_{L^2(\Omega)} + \tau_1\underbrace{\Big(\frac{1}{\theta_+} - \tau_1^\epsilon c_4\Big)}_{(ii)}||U_c||^2_{L^2(\Omega)} \leq\; 0,$$

pour un τ_1 assez petit de sorte que $(i) > 0$ et $(ii) > 0$, on a :

$$||C||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ et } ||U_c||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1^n = c_2^n \text{ et } u_{c,1}^n = u_{c,2}^n \text{ p.p. dans } \Omega.$$

D'où l'unicité de (c_h^n, u_{ch}^n) solution au problème (6.47)-(6.48).
Le Théorème 6.2 est prouvé.

Rappels

Nous rappelons ici certains résultats utilisés dans ce document.

Lemme 6.2 (Formule de Leibniz)

Soient $h, g \in W^{1,2}([0,T];\mathbb{R})$, $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}\times[0,T];\mathbb{R})$ *et* I *l'intégrale définie par :*

$$I(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(x,t)dx.$$

Alors

$$\frac{dI}{dt} = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx + f(h(t),t)\frac{\partial h(t)}{\partial t} - f(g(t),t)\frac{\partial g(t)}{\partial t},$$

où

$$\int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{g(t)}^{h(t)} f(x,t)dx - f(h(t),t)\frac{\partial h(t)}{\partial t} + f(g(t),t)\frac{\partial g(t)}{\partial t}. \tag{6.62}$$

Théorème 6.3 (Schauder)

Soit X *un espace de banach, on suppose que* $K \subset X$ *est un convexe compact et de plus*

$$T : K \longrightarrow K$$

est une application continue. Alors T *a un point fixe dans* K *(cf. [36]).*

Théorème 6.4 (Injections continues de Sobolev N$\geq$ 2)

Soient $N \geq 1$, Ω *un ouvert et régulier de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ *et* q *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} 1 \leq p < N &\implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \quad p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N &\implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r}(\Omega), \quad r \in [p, +\infty[\\ p > N &\implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Si $p > N$, *on a* $:\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$, *alors* $|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^{1-\frac{N}{p}}||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$ *p.p* $x, y \in \Omega$, *donc* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}\Omega)$.

Théorème 6.5 (Injections compactes de Sobolev N$\geq$ 2)

Supposons que Ω *est de plus borné et de classe* $\mathcal{C}^1$, *on a :*

$$\begin{aligned} 1 \leq p < N &\implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r}(\Omega), \quad r \in [1, p^*[\quad avec \quad p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N &\implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r}(\Omega), \quad r \in [p, +\infty[, \\ p > N &\implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{0}(\bar{\Omega}), \end{aligned}$$

(cf. [20] pour plus de détails.)

Lemme 6.3 (Gronwall)

Soient m, $n \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ telles que m, $n \geq 0$ p.p. sur $(0,T)$. Soient a un réel positif et $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\varphi(s) \leq a + \int_0^s m(t)dt + \int_0^s n(t)\varphi(t)dt, \quad \forall s \in [0,T].$$

Alors

$$\varphi(s) \leq \left(a + \int_0^s m(t)dt\right) \exp\left(\int_0^s n(t)dt\right), \quad \forall s \in [0,T].$$

Lemme 6.4 (Gronwall version discrète)

Soient $h > 0$, $L > 0$ deux réels donnés et soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que :

$$a_{k+1} \leq (1 + hL)a_k + b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Alors on a l'estimation sur a_k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k \leq a_0 e^{khL} + \sum_{i=1}^{k-1} b_i e^{(k-i-1)hL}.$$

Lemme 6.5

Si X et Y sont des espaces de Banach tels que $X \subset L^2 \subset Y$ avec injection compacte de X dans L^r, $z \geq 1$; si $1 < q \leq \infty$; si W est un ensemble de fonctions bornées de $L^q(0,T;L^r) \cup L^1(0,T;X)$; si $\phi\partial_t v$ est bornée dans $L^1(0,T;Y)$, pour tout $v \in W$;
alors W est relativement compact dans $L^p(0,T;L^r)$, pour tout $1 \leq p < q$. (cf. [39] pour plus de détails.)

Lexique

Aquifère : Formation géologique, poreuse et perméable contenant de façon permanente ou temporaire de l'eau douce mobilisable.

Aquitard : Formations semi-perméables, qui sont des horizons de faible perméabilité dans lesquels l'eau ne peut pas être prélevée de façon efficace par des puits, mais où un écoulement non négligeable peut se produire, amenant de l'eau par drainance aux aquifères adjacents.

Aquiclude : Formations imperméables, qui ont une perméabilité *très faible* si bien qu'aucun débit de drainance significatif ne peut y prendre naissance à petite échelle (par exemple au cours d'un essai de débit), mais qui, cependant, ne sont pas négligeables sur une très grande surface.

Éponte : C'est une paroi délimitant une couche ou un filon.

Squelette : C'est le milieu constitué des pores ou vides et des grains de sable.

Bibliographie

[1] R. Ababou. Random porous media flow on large 3D grids : Numerics, performance, and application to homogenization, chap.1,pp. 1-25. *In IMA MAthematics and its Applications : Environnement Studies (Math. Comput. Statist. Anal.). Wheeler MF(ed.), Springer, NY*, 79 :410pp., 1996.

[2] E. Abarca, J. Carrera, X. Sànchez-Vila, and C. I. Voss. Quasi-horizontal circulation cells in 3D seaweter intrusion. *Journal of Hydrology*, 339 :118–129, 2007.

[3] P. Ackerer. Efficient approximations for the simulation of density driven flow in porous media. *Advances in Water Ressources*, 31 :15–27, 2008.

[4] H. Al-Bitar. *Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D / 3D, avec couplages surface / souterrain et densitaires.* Thèse de Doctorat-Institut National Polytech. Toulouse (Sci. Terr. Env.). Spécialité Modélisation en hydrologie et hydrogéologie., Juin 2007.

[5] M. Alfaro and P. Alifrangis. Convergence of a mass conserving Allen-Cahn equation whose Lagrange multiplier is nonlocal and local. *Interfaces Free Bound.*, to appear.

[6] M. Alfaro, D.Hilhorst, and M.Hiroshi. Optimal interface width for the Allen-Cahn equation. *RIMS Kokyuroku*, 1416 :148–160, 2005.

[7] S. M. Allen and J. W. Cahn. A macroscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall.*, 27 :1085–1085, 1979.

[8] H. W. Alt and C. J. Van Duijin. A free boundary problem involving a cusp : breakthrough of saltwater-Interface and Free Boundaries. 2 :21–72, 2000.

[9] H.W. Alt and S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z*, 1(183) :311–341, 1983.

[10] Y. Amirat. Ecoulement de fluides missibles en milieux saturé. *SAM*, 1, 2004.

[11] Y. Amirat, K. Hamdache, and A. Ziani. Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media. *Math.Models Mathods Appl.Sci*, 6 :729–747, 1999.

[12] W. Badon-Ghyben. Nota in verband met de voorgenomen putboring nabij amsterdam [notes ont the probable results of well drilling near amsterdam]. *In : Tijdschrift van het Kononklijk Instituut van Ingenieurs the Hague.*, 9 :p. 8–22, 1888.

[13] P. M. Barlow. Ground water in freshwater-saltwater environments of the A tlantic coast. *Geological Survey (USGS)*, 1262.

[14] J. Bear. Dynamics of fluids in porous media. *American Elsevier*, 1, 1972.

[15] J. Bear, A.H.D. Cheng, S. Sorek, D. Ouazar, and I. Herrera. Seawater intrusion in coastal aquifer : Concept, methods and pratices. *Klewer Academic Pub*, 1999.

[16] J. Bear and A. Verruijt. Modelling groundwater flow and pollution. *D. Reidel Publishing Company Dordecht, Holland*, 1987.

[17] G. Bellettini, L. Bertini, M. Mariani, and M. Novoga. Convergence of the one-dimensional Cahn-Hilliard equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(5) :3458–3480, 2012.

[18] A. J. Bray. Theory of phase-ordering kinetics. *Adv. in Physics*, 43(3) :357–459, 1994.

[19] S. C. Brenner and L. R. Scott. The mathematical theory of finite element methods. *Texts in Applied Mathematics : Springer*, 19, 2002.

[20] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle (Théorie et Applications)*, volume 1. Masson , Paris, 1983.

[21] E. Buckingham. Studies on the movement of soil moisture. *Bulletin No. 8, Washington, DC, US, Departement of Agriculture, Bureau of Soils*, 1907.

[22] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energie of a non-uniform system. i. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 28 :258–267, 1958.

[23] X. Chen. Global asympotic limit of solution of Cahn-Hilliard equation. *J. Diff.Geom.*, 44 :262–311, 1996.

[24] C. Choquet. Parabolic and degenerate parabolic models for pressure-driven transport problems. *Math.Models Mathods Appl.Sci*, 20 :543–566, 2010.

[25] C. Choquet, M. M. Diédhiou, and C. Rosier. Mathematical analysis of a sharp–diffuse interfaces model for seawater intrusion. *Journal of Differential Equations*, 259(8) :3803–3824, 2015.

[26] P. Constantin, D. Cordoba, F. Gancedo, and R. M. Strain. On the global existence for the Muskat problem. *European Mathematical Society*, 15 :201–227, 2011.

[27] H. H. Cooper. A hypothesis concerning the dynamic balance of fresh water and salt water in a coastal aquifer. *U.S. Geological Survey Water-Supply Paper 1613-C*, 1964.

[28] L. Cueto-Felgueroso and R. Juanes. A phase-field model of unsatured flow. *Water Resour. Res.,*, 45(W10409), 2009.

[29] H. P. G. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon, exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau. *Victor Dalmont Ed.,*, 1856.

[30] H.-J.G. Diersch and O. Kolditz. Variable-density flow and transport in porous media : approaches and challenges. *Advances in Water Ressources*, 25 :899–944, 2002.

[31] T. Doppler, H. J. Hendricks Franssen, H. P. Kaiser, U. Kuhlmann, and F. Stauffer. Field evidence of a dynamic leakage coefficient for modelling river-aquifer interactions. *J. of Hydrology*, 347(177-187), 2007.

[32] M. Dubé, M. Rost, K.R. Elder, M. Alava, S. Majaniemi, and T. Ala-Nissila. Liquid conservation and nonlocal interface dynamics in imbibition. *Phys. Rev. Lett.*, 83(8) :1628–1631, 1999.

[33] J. Dupuit. Études théoriques et pratiques sur les mouvements des eaux dans les canaux couverts à travers les terrains perméables. *Dunod*, 1863.

[34] H. L. Essaid. A multilayered sharp interface model of coupled freshwater and saltwater flow in coastal systems : Model developpement and application. *Water Ressources Research*, 26(7) :1431–1454, July 1990.

[35] G. O. Essink. Saltwater intrusion in 3D large-scale aquifers : a Dutch case. *Physicis and Chemistry of the Eart, Part B : Hydrology, Oceans and Atmosphère*, 26(8) :337–344, 2001.

[36] L. C Evans. Partial differential equations. *Graduate Studies in Mathematic (American Mathematical Society)*, 19, 1998.

[37] J. G. Ferris. Cyclic fluctuatiuons of water level as a basic for determining aquifer transmissibility. *Int. Assoc. Sci. Hydrology Publ.*, 1 :97–101, 1951.

[38] G. Gagneux and M. Madaune-Tort. *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, volume 22. Mathématiques et Applications, 1996.

[39] M. Galusinski and M. Saad. On a degenerate parabolic system for compressible, immiscible, two-phase flows in porous media. *Adv. Diff. Equ.*, 9(11-12) :1235–1278, 2004.

[40] F. Hecht. New developpement in FreeFem++. *J. of Numerical Mathematics*, 20 :251–265, 2012.

[41] A. Herzberg. Die Wasserversorgung einiger Nordseebader [the water supply of the north sea coast in Germany]. *Z Gasbeleucht Wasserversorg ; 44 :815-9, and 1901 ; 45 :842-4.,*, 1901.

[42] J. R. Chan Hong, C. J. Van Duijin, D. Hilhorst, and J. Van Kester. The interface between fresh and salt groundwater : a numerical study. *IMA J. Appl. Math.*, 42 :209–240, 1989.

[43] A. Le Hyaric. Introduction to freefem++-cs. 2015. *<hal-01169630>*, 2015.

[44] M. Jazar and R. Monneau. Formal derivation of seawater intrusion models. *HAL Id : hal-00572241, version 3(JM-250212.pdf)*, 2012.

[45] J. J. Jiao, X. S. Wang, and S. Nandy. Confined groudwater zone and slope instability in weatherred igneous rocks in Hong-Kong. *Engineering Geology*, 80 :71–92, May 2005.

[46] G. H. Keulegan. *Ninthprogress report on model laws for density currents ; an example of density current flow in permeable media,*. U. S., Natl. Bur. Stand. rep. Gaithersburg, 3411, 1954.

[47] O. Kolditz, R. Ratke, H.G. Diersch, and W.Zielke. Coupled groundwater flow and transport : Verification of variable density flow and transport models. *Advances in Water Ressources*, 21(1) :27–46, 1998.

[48] O. A. Ladyzhenskaja. Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Amer. Math. Soc.*, 1968.

[49] W. J. De Lange. Three-dimensional density driven flow in a Dupuit-Forchheimer analytic element model for national groundwater management. *RIZA*, 1991.

[50] H. Li and J. J. Jiao. Analytical solution of tidal groundwater flow in coastal two-aquifer systems. *Adv. Water Res.*, 25 :417–426, 2002.

[51] D. R. Lide. CRC Handbook of Chemistry and Physics. 2003.

[52] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes*. Dunod, 1968.

[53] C. Llopis-Albert and D. Pulido-Velazquez. Discussion about the validity of sharp-interface models to deal with seawater intrusion in coastal aquifers. *Hydrological Processes*, 28(10) :3642–3654, 2014.

[54] P. Marion, K. Najib, and C. Rosier. Numerical simulations for a seawater intrusion problem in a free aquifer. *Appl. Numer. Math.*, 75(48-60), 2014.

[55] G. De Marsily. Hydrogéologie quantitative. *Collection Sciences de la terre*, 1981.

[56] J. W. Mercer, S. R. Larson, and C. R. Fauts. Simulation of salt-water interface motion,. *GroundWater*, 18(4) :374–385, 1981.

[57] F. Murat. Soluciones renormalizadas de edp elipticas no lineales. *Preprint 93023, Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6*, 1993.

[58] M. Muskat. The flow of homogeneous fluids trough porous media, McGraw-Hill inc.,. *New York. Reprinted by J. W. Edwards, Ann Arbor*, 1937.

[59] K. Najib and C.Rosier. On the global existence for a degenerate elliptic-parabolic seawater intrusion problem. *Mathematics and Computer in Simulation*, 81(10) :2282–2295, 2011.

[60] K. A. Narayan, C. Schleeberger, and K. L. Bristow. Modelling seawater intrusion in the Burdekin Delta irrigation area, North Queensland, Astralia. *Agricultural water management*, 86(3) :217–228, 2007.

[61] A. Novick-Cohen. The Cahn-Hilliard equation. *in Handbook of differential equation*, 4 C.M. Dafermos and E. Feireisl edts, Elsevier, 2008.

[62] J. T. Oden and N. Kikuchi. Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media. *Int. J. Engng. Sci.*, 18 :1173–1284.

[63] O. Pironneau, F. Hecht, and A. Le Hyaric. Freefem++ version 2.15-1. *(http ://www.freefem.org//ff++)*, 2015.

[64] V. Post, H. Kooi, and C. Simmons. Using hydraulic head measurements in variable-density ground water flows analyses. *Ground Water*, 45(6) :664–671, 2007.

[65] WWAP (United Nations World Water Assessment Programme). The United Nations World Water Development Report 2015 : Water for a Sustainable World. *Paris, UNESCO*, 2015.

[66] A. Quarteroni and A. Valli. Numerical approximations of partial differential equations. *Springer-Verlag*, 1994.

[67] E.V Radkevich. On conditions for the existence of classical solution of the modified Stefan problem (the Gibbs-Thomson low). *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 75(1) :221–246, 1993.

[68] Florin A. Radu, Iuliu Sorin Pop, and Sabine Attinger. Analysis of an Euler implicite-mixed finite element schemas for reactive solute transport in porous media. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26 :320–344, March 2010.

[69] V. D. Radulescu. *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations : Monotonicity, Analytic, and Variational Methods*, volume 6. Contemporary Mathematics and Its Applications, 2008.

[70] A. S. Richey, B. F. Thomas, M.-Hui Lo, J. T. Reager, J. S. Famiglietti, K. Voss, S. Swenson, and M. Rodell. Quantifying renewable groundwater stress with GRACE. *Water Resources Research <10.1002/2015WR017349>*, 51 :5217–5238, 2015.

[71] C. Rosier and L. Rosier. Well-posedness of a degenerate parabolic equation issuing from two-dimensional perfect fluid dynamics. *Applicable Analysis*, 75(3-4) :441–465, 2000.

[72] J. Rubinstein, P. Sternberg, and J. B. Keller. Fast reaction, slow diffusion and curve shortening. *SIAM Appl. Math.*, 49 :116–133, 1998.

[73] M. Serfe. Determining the mean hydraulic gradient of ground water affected by tidal fluctuations. *Ground Water*, 29 :549–555, 1991.

[74] U. Shamir and G. Dagan. Motion of the seawater interface in caostal aquifers : a numerical solution. *Water Resour. Res.*, 7(3) :644–657, 1971.

[75] J. Shen and X. Yang. Mass conservative BDF-discontinuous Galerkin/explicit finite volume schemes for coupling subsurface and overland flows. *Comput. Math. Appl. Mech. Eng.*, 198 :2122–2136, 2009.

[76] J. Shen and X. Yang. A phase-field model and its numerical approximation for two-phase incompressible flows with different densities and viscosities. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32 :1159–1179, 2010.

[77] J. Simon. Compact sets in the space. *Annali di Mathematica pura e applicata*, 1987.

[78] S.Sorek, V.S. Borisov, and A. Yakirevich. A two-dimensional areal model for density dependent flow regime. *Transport in Porous Media*, 43 :87–105, 2001.

[79] F. Stauffer. Lecture notes. *Groundwater*, 2012.

[80] M. Sussman, K. M. Smith, M. Ohta, and R. Zhi-Wei. A sharp interface method for incompressible two-phase flows. *J. Comput. Physics*, 221 :469–505, 2007.

[81] L. Tartar. Compensated compactness and application to p.d.e., nonlinear analysis and mechanics. *Heriot-Watt Symposium*, (4-39) :136–212, 1979.

[82] M. H. Tber and M. El A. Talibi. A finite element method for hydraulic conductivity identification in a seawater intrusion problem. *Computers and Geosciences*, 33 :860–874, 2007.

[83] M. H. Tber, M. El A. Talibi, and D. Ouazar. Parameters identification in seawater intrusion model using adjoint sensitive method. *Mathematics and Computer in Simulation*, 77 :301–312, 2008.

[84] R. Temam. Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis. *AMS Chelsea Publishing,Providence, RI*, 2001.

[85] D. Thiery. *Saltwater intrusion modelling with an efficent multiphasic approach : Theory and several field Applications. 18 Swim.*, volume 97-110. Ed. Araguas Custodio and Manzano, 2004.

[86] J. H. M. Wösten, P. A. Finke, and M. J. W. Jansen. Comparaison of class and continuous pedotransfer functions to generate soil hydraulic characteristic. *Geoderma*, 66 :227–237, 1995.

[87] C. Zammit. Analyse et évaluation des paramètres des caractéristiques hydrodynamiques des sols. Préduction par un modèle analytique à base physique à partir des données texturalles. *Thèse de Docteur de l'Université Joseph Fourier-Grenoble 1*, page 200pp., 1999.

[88] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications.* Springer verlag edition, 1986.

Résumé

Le contexte du sujet est la gestion des systèmes aquifères, en particulier le contrôle de leur exploitation et de leur éventuelle pollution. Comme exemple d'application, nous nous focalisons sur le problème d'eau salée dans les aquifères côtiers. Plus généralement, le travail s'applique à tout écoulement miscible et stratifié dans un milieu poreux faiblement déformable.

Le but est d'obtenir un modèle robuste pour modéliser le déplacement des fronts de l'eau salée et de la surface supérieure de l'aquifère. Nous avons proposé une approche mixte entre interface diffuse et interface abrupte ce qui a l'avantage de respecter la réalité physique du problème tout en conservant l'efficacité numérique. De plus, nous réussissons à modéliser ce problème 3D par un modèle dynamique 2D où la 3ème dimension est traitée via l'évolution des fronts d'eau salée et de la surface libre supérieure de l'aquifère en prenant en compte l'épaisseur des zones de transition (transition entre eau salée et eau claire, transition entre zone saturée et zone insaturée).

Le modèle est basé sur les lois de conservation dans le domaine de l'eau salée et dans celui de l'eau douce, les deux domaines (à frontière libre) étant couplés par un modèle intermédiaire de changement de phase. De plus, nous avons effectué des simulations numériques pour comparer notre modèle 2D issu de l'approche mixte avec un modèle 3D d'écoulement de deux fluides miscibles en milieu compressible saturé. Puis, des simulations sont faites sur notre modèle 2D pour illustrer sont efficacité (cette fois dans le cas insaturé).

Mots clés : Modélisation. Analyse mathématique des systèmes nonlineaires couplés d'edp. Analyse numériques. Simulations.

Abstract

Subject : Mixed sharp/diffuse interface approach for the modeling of saltwater intrusion in a free aquifer.

The context of the subject is the management of aquifers, especially the control of their operations and their possible pollution. A critical case is the saltwater intrusion problem in costal aquifers. The goal is to obtain efficient and accurate models to simulate the displacement of fresh and salt water fronts for the optimal exploitation of groundwater. More generally, the work applies for miscible and stratified displacements in slightly deformable porous media.

In this work we propose an original model mixing abrupt interfaces/diffuse interfaces approaches. The advantage is to adopt the (numerical) simplicity of a sharp interface approach, and to take into account the existence of diffuse interfaces.

The model is based on the conservation laws written in the saltwater zone and in the freshwater zone, these two free boundary problems being coupled through an intermediate phase field model. An upscaling procedure let us reduce the problem to a two-dimensional setting. The theoretical analysis of the new model is performed. We also present numerical simulations comparing our 2D model with the classical 3D model for miscible displacement in a confined aquifer. Physical predictions from our new model are also given for an unconfined setting.

Keywords : Modeling. Mathematical analysis of systems of coupled nonlinear. PDE. Numeriacal analysis. Simulations.