

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Génie Électrique

Présentée et soutenue par :

M. MAËL MESUROLLE

le lundi 30 novembre 2015

Titre :

MODELISATION ET CONCEPTION D'UN ACTIONNEUR SCAO MAGNETOHYDRODYNAMIQUE DE PRECISION

Ecole doctorale :

Génie Electrique, Electronique, Télécommunications (GEET)

Unité de recherche :

Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie (LAPLACE)

Directeur(s) de Thèse :

M. YVAN LEFEVRE

Rapporteurs :

M. GERARD VINSARD, INP DE NANCY

M. MOULOUD FELIACHI, IUT SAINT NAZAIRE

Membre(s) du jury :

M. PHILIPPE TORDJEMAN, INP TOULOUSE, Président

M. YVAN LEFEVRE, INP TOULOUSE, Membre

Remerciements

Le travail de thèse qui vous est rapporté ici n'est pas tant le fruit de mon travail personnel, ni celui de mon entourage professionnel, que celui de mon environnement humain tout entier. Celui avec lequel j'interagis chaque jour, par le corps et la pensée, et qui définit par là même la notion de mon existence, si modeste soit elle. Sans cet entourage, ce travail n'aurait jamais pu aboutir. C'est pourquoi je souhaite vivement remercier l'ensemble des êtres, dans la mesure du possible, qui constituent cet entourage, et qui ont participé de près ou de très loin à l'élaboration jour après jour de ce doctorat. Parce qu'ils m'ont donné la force et la volonté de poursuivre, et finalement de mener à terme ce travail.

En tout premier lieu, je voudrais remercier sincèrement tous les membres du groupe de recherche GREM3 du laboratoire LAPLACE, pour leur accueil et la place qu'ils ont su m'accorder, si mince et éphémère soit elle. Surtout, je souhaite remercier naturellement mon directeur de thèse, Yvan LEFEVRE. Il a fait preuve de beaucoup de patience et de persévérance à mon égard, quant à la croyance que ce projet puisse arriver à son terme. Et ce, malgré toutes les difficultés rencontrées par tous les protagonistes, autant professionnelles qu'humaines. Il a également été d'une grande aide, tant pour les travaux scientifiques de fonds que de formes. Je pense par là notamment aux précieux conseils qu'il a pu me prodiguer pour les participations aux divers oraux et conférences. J'exprime aussi toute ma reconnaissance envers Dominique HARRIBEY qui a pris une grande part de responsabilité sur la partie expérimentale des travaux présentés ici, et dont les résultats sont essentiels à la cohérence de ce manuscrit.

Je souhaite également remercier M. Christophe CASTERAS et le CNES, qu'il représente, pour son rôle particulièrement moteur pour que ce projet de thèse puisse voir le jour, mais aussi pour le temps et l'intérêt accordés à ces travaux. En ce sens aussi, la DGA en la personne de M. Raphaël BAUMANN.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance envers les membres du Jury de ma soutenance : M. Gérard VINSARD et M. Mouloud FELIACHI pour avoir accepter d'être les rapporteurs de mon manuscrit de thèse, ainsi que M. Philippe TORDJEMAN en tant qu'examinateur de ma soutenance.

Je remercie sincèrement toutes les personnes avec qui j'ai pu partager mon bureau de travail, et qui ont su me supporter pendant ces trois années de thèse ; Mounir AMOKRANE, Thomas MARTIN, Alberto ROSSI, Gurvan JODIN. Je partage aujourd'hui des liens d'amitié avec ces personnes. Sans oublier Jean-François ALLIAS, collègue de bureau certes, et Léon HAVEZ, thésard du groupe CVS, deux amis précieux de l'école d'Ingénieur, l'ENSEEIHT, qui ont su m'écouter, m'aider et me soutenir à de nombreux moments pendant cette thèse. J'espère avoir pu, et pouvoir, en faire autant pour eux.

Je pense également à toutes les personnes que j'ai pu croiser au laboratoire, pour le travail et/ou le partage. Je voudrais notamment mentionner François PIGACHE pour les nombreux conseils professionnels et humains qu'il a su m'apporter, mais aussi pour les quelques moments de détente et d'ironie, autour d'un café. Il joue à mon sens un rôle essentiel dans la cohésion de cette équipe, permanents et thésards confondus. Mais aussi Frédéric MESSINE, Eric DUHAYON, Ronan PERRUSSEL, pour leur aide précieuse, tant scientifique que pour la pratique de l'enseignement. Et le partage de moments musicaux pour un certain. Au sujet des pratiques liées à l'enseignement, je souhaite également remercier Rémy RIGO-MARIANI et Satafa SANOGO. Je pense aussi à tous les collègues thésards avec qui je souhaiterais partager d'autres moments par la suite. Entre autres, car ils sont nombreux, Thomas GENEVE, Malik TOGNAN, Sébastien SANCHEZ, Samer YAMMINE, Guillaume DELAMARE, Pedro RYNKIEWICZ, Priscillia DAQUIN, Johannes SCHELLER, Damien JARROT...

A l'écriture de ces remerciements, je pense tout particulièrement à mes amis, qui sont pour beaucoup dans la réussite de cette thèse, parce qu'ils ont toujours cru en mes capacités. Je pense à Gaëlle, Laetitia, Agathe, Kirsten, Raphaël, Maxime. Mais aussi tous mes amis ingénieurs de la Meute parmi lesquels Fred, Mione, Ben, Bourl't, Gigi't, Twirl't, Quentin, Birl't, Alizée, Adirl't, JBirl't, Rime, Inès et tous les autres ! Je pense aussi à Boris Guillerey, Antoine Le Méné, Caroline Le Floch. Et Arantxa Suarez.

Dans un autre genre, je remercie M. Pierre-Yves DALLE CARBONARE, qui a su me trouver un violon avec lequel je me sens capable d'exprimer une quantité infinie de choses. Je remercie également Marc DEMEREAU, professeur d'improvisation libre, ou à tendance inclassable pour les intimes. Il a su énormément m'apporter sur le lâcher prise, la confiance en soi et la prise d'initiative, compétences si importantes à la fois dans la vie professionnelle et personnelle.

Je pense à mon cousin, Gauthier JOMIN, qui a partagé avec moi presque deux années de thèse, en cohabitation, et un moment douloureux. Merci à lui pour tous les moments agréables, et ses encouragements. Je le remercie aussi d'accorder de l'attention à nos échanges.

Enfin, je pense très fort à ma famille, dans son ensemble, recomposée. Sans elle, rien n'aurait été possible. Je pense à mes grands-parents, tous, à mes oncles et tantes que je remercie. Je pense à mes quatre charmantes petites sœurs, et à ma grande sœur, qui toutes, sans le savoir peut être, m'ont beaucoup aidé. J'aimerais remercier profondément ma mère et mon beau père, qui n'ont eu de cesse de m'encourager pendant ces huit années d'étude, surtout les trois dernières. Je pense particulièrement à toutes les riches et ouvertes discussions que je peux avoir avec mon beau père, et ses précieux conseils, qui me renforcent chaque fois, dans le questionnement des choses, et pour vivre le monde. J'aimerais partager ici aussi ma pensée la plus forte et sincère envers ma belle mère, avec qui je peux partager de l'écoute, de l'attention et des conseils dans une réciprocité fort agréable. Je tiens particulièrement à souligner la force incroyable dont elle a fait preuve, face à l'évènement, me soulageant de bon nombre de préoccupations...

Finalement, j'aimerais, s'il est possible, remercier profondément mon père, décédé en début de 2ème année de thèse, sans qui, mon regard sur le monde n'aurait jamais pu être le même. Il a su tout au long de mon enfance m'apporter une complémentarité essentielle à mon éducation. M'amenant à ce que je crois être de l'ouverture d'esprit, et la recherche de compromis. Bien que lui même ne le cherchait pas toujours. Grâce à lui j'ai toujours senti que je gardais un accès à ce que j'appellerais un autre monde, comme une porte restée entrouverte. Le monde du cœur et de l'esprit rationnel et spirituel, rassemblés entre les deux mains du corps. Le monde du beau environnant, de la sobriété heureuse et de l'humain dans le partage. Mais aussi le monde de la volonté, de l'exigence et de l'effort au service de ses convictions. Lui, le potier et le père de cinq enfants, continue d'être et d'exister, de par sa présence en moi et en toutes les personnes qu'il a croisées, présence que je sens étrangement bien plus grande aujourd'hui. En ce sens où il constitue chaque jour une source d'inspiration profonde et motivante pour guider chacun de mes pas, encore trop dispersés, mais de plus en plus sûrs et constants.

Je remercie les amis potiers pour leur soutien à la famille. Je pense à Jérémy BOYER, David LAGNIER, Armelle BARBERO et Josiane FROIDEVAUX. Je remercie Denis l'apiculteur de s'occuper de la ruche laissée par mon père, et de me permettre de découvrir aujourd'hui le monde fascinant des abeilles. Et au combien important !!

Même si je crois qu'il n'y attacherait pas autant d'importance, je souhaite donc dédier à mon père ce manuscrit, ne serait-ce que pour l'embêter un peu.

"Le Soleil de la science est la philosophie"
Francis Hallé

"Si le regard philosophique procure le recul nécessaire pour considérer la science, le regard scientifique procure le recul nécessaire pour considérer la philosophie. Aussi, leur dialogique binoculaire pourrait procurer le nouveau recul qui nous est nécessaire pour considérer la connaissance"
Edgar Morin dans *La Connaissance de la Connaissance,* 1986

SOMMAIRE

Remerciements

Nomenclature ……5

Introduction Générale ……6

I. Introduction à la Roue Inertielle MHD

1. Etat de l'Art sur les SCAO ……9
   - 1.1 Présentation SCAO ……9
   - 1.2 Modes Plate-Forme – Spot ……12
   - 1.3 Modes Plate-Forme – Myriade ……14
2. Etat de l'Art sur la Magnétohydrodynamique (MHD) ……16
3. Présentation des Roues MHD ……22
   - 3.1 Les Raisons de ce Projet ……22
   - 3.2 Caractéristiques des Roues MHD ……22
4. La MHD en Equations ……23
   - 4.1 Contribution de la Mécanique des Fluides ……23
   - 4.2 Contribution de l'Electromagnétisme ……24
   - 4.3 Lois de Couplage ……25
   - 4.4 Rappels sur les Ecoulements Visqueux Incompressibles ……28
5. Actionneur Inertiel MHD à Conduction ……31
   - 5.1 Domaine d'Etude ……31
   - 5.2 Equations MHD ……32
   - 5.3 Conditions aux Limites ……32
   - 5.4 Grandeurs Electromécaniques ……32
6. Modèle 1D cylindrique – Régime Permanent ……35
   - 6.1 Hypothèses du Modèle 1D ……35
   - 6.2 Conditions aux Limites ……36
   - 6.3 Equations MHD en 1D ……37
   - 6.4 Expressions Analytiques ……37
   - 6.5 Applications ……37

Conclusion Chapitre 1 ……40

Références ……42

II. Modélisation 2D Statique et Résolution Numérique – Effet Gyroscopique

1. Modélisations 2D Axisymétriques ……43
   - 1.1 Modèle B-φ ……43
   - 1.2 Modèle B-T ……46
   - 1.3 Bilan de la Modélisation ……50
2. Rappel sur les Différences Finies ……51

3. Résolution Numérique – Modèle B-φ ……54
3.1 Discrétisation des Equations du Problème ……54
3.2 Traitement de la Solution – Méthode de Calcul des Grandeurs Caractéristiques .....……..60
3.3 Résultats de la Résolution Numérique ……68
3.3.1 Comparaison 2D Axisymétrique – 1D Cylindrique – Maillage à Pas Constant ……...69
3.3.2 Maillage à Pas Variable sous Contraintes Physiques ……77
4. Résolution Numérique – Modèle B-T ……87
4.1 Suppléments pour le Traitement des Résultats ……87
4.2 Comparaison et Dualité ……88
5. Impact des Variations du Champ Electromagnétique sur les Caractéristiques de l'Actionneur en Régime Permanent ……92

Conclusion Chapitre 2 ……99

Références ……102

III. Modélisation 2D Dynamique et Résolution Numérique – Couple de Réaction

1. Modélisation Dynamique ……..103
1.1 Hypothèses Générales et Equations Constitutives ……...103
1.2 Modèle B-φ ……..104
1.3 Modèle B-T ……..105
1.4 Modèles 2D Axisymétriques ……..105
1.4.1 Hypothèses……..106
1.4.2 Formulation B-φ ……..106
1.4.3 Formulation B-T ……..107
2. Résolution Numérique en Différences Finies – Schéma d'Euler Implicite …….....108
2.1 Méthode Implicite – Discrétisation ……..109
2.2 Ecriture sous Forme Matricielle ……..111
2.3 Traitement de la Solution ……..113
3. Résultats de Simulation Numérique ……..113
3.1 Dynamique – Modèle B-φ ……..114
3.1.1 Variation du Nombre de Discrétisation Temporel N_t ……114
3.1.2 Résultats Complémentaires ……..117
3.1.3 Variation du Champ Electromagnétique en Entrée …….....120
3.2 Dynamique – Modèle B-T ……..128
3.2.1 Cas de Référence ……..128
3.2.2 Variation du Champ Electromagnétique en Entrée …….....131
3.2.3 Descente en Vitesse et Variation du Champ Magnétique Imposé ……135
3.3 Comparaison des Dynamiques – Utilisation du Gallium …….....139

Conclusion Chapitre 3 ……..143

Références ……..144

IV. Maquette MHD à Conduction – Mesures Expérimentales Dynamiques
1. Présentation du Banc Expérimental ……..145
1.1 La Maquette et son Prototype ……..145
1.2 Conditions Expérimentales – Adaptations pour la Simulation Numérique ...147
2. Comparaison Résultats Expérimentaux et Numériques .....…….....151

Conclusion Chapitre 4 ……..156

Conclusion Générale ……..158

Perspectives ……..160

Pour Finir, ……..161

Annexes ……166

Résumé 175

Abstract 177

NOMENCLATURE

Nom	**Symbole**	**Valeur**	**Unité S.I**
Masse volumique	ρ		$kg.m^{-3}$
Viscosité dynamique	μ		Pa.s
Viscosité cinématique	υ		$m^2.s^{-1}$
Vitesse	v		$m.s^{-1}$
Force volumique	f		N/m^3
Champ magnétique	B		T
Champ électrique	E		V/m
Pression	p		Pa
Temps	t		s
Densité de courant	j		$A.m^{-2}$
Conductivité électrique	σ		$S.m^{-1}$
Perméabilité magnétique dans le vide	μ_0	$4\pi.10^{-7}$	$H.m^{-1}$
Diffusivité magnétique	λ		$m^2.s^{-1}$
Dimension caractéristique	L		m
Elément de volume	$d\tau$		m^3
Elément de masse	dm		kg
Charge d'une particule	q		C
Courant	I		A
Débit volumique	D_v		$m^3.s^{-1}$
Débit massique	D_m		$kg.s^{-1}$
Potentiel électrique	φ		V
Tension électrique	U		V

Introduction Générale

Comprendre la Terre : voilà la question fondamentale et l'enjeu primordial qui sous-tend l'épistémologie ainsi que l'ontologie de notre connaissance du monde. D'abord par l'observation empirique puis par l'acquisition progressive d'outils de savoirs, les Hommes ont vu cette question se renouveler sans cesse, et ont pu l'envisager avec une richesse de nuances toujours croissante. De cette question fondamentale surgissent de nouvelles interrogations ; l'Homme, par son statut modeste et privilégié, qui fait face à ce monde tout en l'intégrant, poursuit sa quête de réponse, poussé par la curiosité inhérente à sa condition.

Ne serait-il pas plus simple et cohérent, pour comprendre notre organe de vie qu'est la Terre, que d'y garder les pieds dessus, bien ancrés, voire d'y plonger les mains de temps à autre ? De même, s'aventurer dans les profondeurs d'une forêt organique, florissante de vie, et vieille de dizaines de générations, au pied de roches minérales inertes dont se nourrissent les racines des arbres, nous permet de percevoir une brève lueur de connaissance. Au-delà de ce savoir incarné et intime, les Hommes observent aujourd'hui la Terre au travers d'une multitude croissante de satellites équipés d'instruments d'une grande richesse et fournissant des données essentielles à la météorologie, l'océanographie, la cartographie, etc… Surement y-a-t-il là une complémentarité entre ces deux approches. Peut être diffèrent-elles seulement par leur point de vue, l'une globale et l'autre plus locale. Si le regard n'est pas le même, le savoir qui peut en découler est certainement d'une portée tout aussi vaste.

A l'heure actuelle, l'observation de la Terre est d'autant plus primordiale que l'humanité est confrontée à ce qui semble être le plus grand défi jamais relevé. A savoir, la problématique d'un changement climatique d'un impact sur nos sociétés tout aussi important que l'a été notre activité depuis plus de deux siècles, en termes de croissance et de développements industriels et technologiques liés à l'exploitation intensive de ressources naturelles variées, orientée vers la production et l'utilisation d'énergie, ou de matériaux. Ainsi, pour comprendre le climat nous étudions depuis l'espace, à des orbites relativement basses (600 à 1000 km d'altitude), le niveau des océans, la fonte des glaces, l'évolution des forêts et de la végétation dans son ensemble, la composition de l'atmosphère et l'impact des divers aérosols émis par l'activité humaine. Mais aussi les variations du champ magnétique terrestre et le mouvement des pôles, qui pourraient être reliés à des événements météorologiques, mais aussi sismiques et volcaniques. Et les satellites sont bien sûr un outil précieux dans la quête des informations nécessaires à ces recherches.

Outre la problématique du climat, n'oublions pas non plus que l'utilisation de satellites en orbites basses autour de la Terre constitue également un instrument privilégié par les grandes entreprises de télécommunication. En effet, les satellites, par la réalisation d'un maillage spatial fin, permettent un nombre immense d'applications : communication haut débit à l'échelle de la planète, localisation, collecte d'informations environnementales, recherche et sauvetage, mesure d'impact des catastrophes naturelles… De plus, ils jouent un rôle essentiel dans le domaine de la Défense pour la résolution de problématiques liées à l'observation optique à très haute résolution, l'écoute, les télécommunications hautement sécurisées, la surveillance de l'espace…

Quelle que soit l'application visée, le CNES a développé, en partenariat avec des entreprises telles AIRBUS DEFENSE & SPACE, THALES ALENIA SPACE ou encore ASTRIUM, des plateformes dédiées à l'observation terrestre et la télécommunication que sont SPOT et MYRIADE. Le travail présenté ici a trait particulièrement à la plateforme MYRIADE, qui présente la particularité, charge utile comprise, d'avoir une masse typique de 100 à 150 kg. Cette plateforme se doit de constituer un

moyen d'accès à l'espace à des délais et coût réduits (par le gain en masse et en volume pour le lancement), pour un haut degré de performance. Ce qui est rendu possible par l'avancée des technologies et la miniaturisation des composants, notamment de l'électronique. Toujours est-il que pour obtenir des informations de plus en plus précises et complètes, la qualité des instruments de mesures utilisés par les satellites est importante. Mais aussi, et c'est l'objet de ce manuscrit de thèse, la capacité à piloter la plateforme, modifier très finement son angle d'observation, ainsi qu'à la stabiliser pendant la durée des mesures. Tout comme l'est l'allongement de la durée de vie de la plateforme et de ses composants, problématique essentielle pour l'industrie spatiale, afin d'éviter la multiplication des lancements et des déchets spatiaux.

Les travaux réalisés dans le cadre de ce doctorat, financé conjointement par le CNES et la DGA, proposent d'étudier une alternative Magnétohydrodynamique (MHD) aux roues inertielles et à réaction existantes. Ces roues, telles des gyroscopes fonctionnant à vitesse constante ou variable, permettent la stabilisation et le pilotage de l'angle d'observation des satellites. Elles font partie intégrante des systèmes utilisés pour le contrôle de l'attitude et de l'orbite des satellites (SCAO).

Ainsi, le premier chapitre de ce manuscrit porte en premier lieu sur la problématique du contrôle de l'attitude et de l'orbite des satellites, plus particulièrement en ce qui concerne les plateformes SPOT et MYRIADE. Il est complété d'un descriptif de la physique régissant les phénomènes Magnétohydrodynamique et leurs utilisations possibles. Dès lors, le concept de roue MHD portant sur la mise en rotation d'un métal liquide, à l'instar d'un rotor massique, par les forces électromagnétiques, est présenté. Ainsi que les raisons pour lesquelles il serait intéressant de l'utiliser. Enfin, ce chapitre aboutit à la présentation de la géométrie de l'actionneur étudié et d'une modélisation 1D cylindrique et stationnaire permettant l'obtention d'une solution analytique sur le profil de vitesse atteint par le fluide, dans l'optique d'un premier dimensionnement.

Le deuxième chapitre montre qu'il est possible d'établir deux formulations générales distinctes mais équivalentes, en statique. L'une fait appel à l'utilisation du potentiel scalaire électrique, l'autre utilise le potentiel vecteur électrique. Ces formulations permettent deux modélisations 2D de notre actionneur, dans le cadre d'hypothèses axisymétriques. Le lien existant entre ces deux approches et la réalisation d'un prototype est présenté. Dans un second temps, afin de comparer ces deux approches entre elles et avec la modélisation 1D, la méthode numérique permettant de résoudre les systèmes d'équations aux dérivées partielles les constituants est présentée. Elle fait appel à l'utilisation de Différences Finies. Ensuite, un travail sur le maillage de la résolution numérique est fait dans le but d'améliorer la précision des résultats, à moindre coût pour le calcul. De cette résolution numérique sont présentés un certain nombre de résultats intéressants pour le dimensionnement, selon les valeurs du champ électromagnétique source imposé.

Finalement, le dernier et troisième chapitre porte sur la modification de la modélisation 2D présentée afin de prendre en compte le caractère dynamique de la mise en mouvement du métal liquide utilisé, bien que la partie électromagnétique du problème reste dans le cadre de considérations quasi statiques. La résolution des systèmes d'équations obtenus reprend la méthode numérique utilisée précédemment, complétée par l'ajout d'un schéma implicite pour prendre en compte le caractère dynamique du problème. Ainsi, le comportement dynamique de l'actionneur est présenté suivant des variations du champ électromagnétique imposé en entrée, ou du fluide utilisé. Enfin, ces résultats numériques temporels, et le choix des hypothèses pour la modélisation, sont confrontés à la réalisation d'un premier prototypage, suivant les difficultés de réalisations et de mesures rencontrées.

I. Introduction à la Roue Inertielle MHD

Ce premier chapitre est une présentation globale des Roues Inertielles et à Réaction Magnétohydrodynamique (MHD) dans le contexte de missions spatiales qui lui seront associées. C'est pourquoi il nous faut dans un premier temps présenter ce que sont les actionneurs SCAO. Ce descriptif permettra aussi de comprendre quelles sont les attentes du point de vue du fonctionnement pour cet actionneur MHD objet de cette thèse. De plus, un état de l'art sur les actionneurs actuellement utilisés sera présenté et permettra de mettre en lumière les points pour lesquels de nouvelles études seraient intéressantes.

A partir de ce premier état de l'art, la Magnétohydrodynamique sera définie, dans son principe physique, sa découverte et son utilisation dans l'Histoire. Dès lors, le concept de roue MHD pourra être présenté, ainsi que son intérêt pour l'application visée, vis-à-vis des actionneurs actuels.

De par la définition du phénomène MHD, l'ensemble des équations le régissant sera donné. De plus, ces équations seront inscrites dans le cadre défini par l'objet de cette étude, à savoir l'actionneur MHD. Cadre qui permettra de rappeler une première modélisation analytique statique existante de ce type d'actionneur, modélisation simple et rapide permettant de mieux appréhender la MHD dans le contexte de notre application.

1. Etat de l'Art sur les SCAO

1.1 Présentation SCAO

SCAO signifie Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite. Cette dénomination regroupe donc l'ensemble des moyens mis en œuvre pour contrôler l'attitude et l'orbite des satellites sur orbite. Il peut s'agir, selon la mission attribuée au dit satellite, d'actionneurs permettant de faire pivoter le satellite sur lui-même, afin de modifier son angle d'observation par exemple, ou bien d'orienter les panneaux solaires vers les rayons lumineux émis par le Soleil. Mais aussi d'actionneurs permettant de « rigidifier », c'est-à-dire maintenir, l'axe du satellite. En effet, ce dernier est soumis à de nombreuses perturbations dues aux vents solaires ou à l'aérodynamique de l'atmosphère par exemple. Il faut donc être en mesure de maintenir le satellite en place, en termes de l'angle d'observation, mais aussi d'orbite, afin qu'il ne sorte pas de sa trajectoire orbitale.

En ce qui concerne la modification de l'angle d'observation du satellite, appelée pointage, celle-ci doit être faite avec une très grande précision. Car cela impactera directement la précision des mesures effectuées, après retraitement. Tout comme la stabilité du satellite, qui est primordiale le temps d'effectuer les dites mesures.

Aujourd'hui, plusieurs SCAO combinés permettent de remplir cette mission. En premier lieu, les roues d'inertie permettent, à vitesse constante, de stabiliser le satellite sur son axe (de la roue). C'est ce que l'on appelle l'**effet gyroscopique**. En effet, de par leur rotation à vitesse constante, un moment angulaire est produit sur son axe. Alors, dans une certaine mesure, ce moment permet de maintenir la direction de cet axe lorsqu'une force y est exercée par principe de conservation du moment cinétique. De plus, lorsque la rotation de la roue est accélérée, il apparaît un **couple de réaction**. De sorte que, le satellite évoluant dans le vide (l'espace), par principe des actions réciproques, ce dernier se met à pivoter dans l'autre sens, autour du même axe. Cela permet alors le pointage du satellite. La roue est alors appelée roue de réaction.

Actuellement, les roues inertielles et de réaction utilisées sont, entre autres, des moteurs électriques, de type DC brushless (sans balais), dont les paliers de guidage, de haute technologie, peuvent garantir des missions de 15 ans en orbite géostationnaire. Cependant, ces roues de réaction restent à durée de vie limitée, de par la présence de roulements à bille ou magnétique et l'usure mécanique qui en découle. En outre, le volant d'inertie rigide (le rotor), présente des balourds statiques et dynamiques qui produisent des micro-vibrations et dégradent ainsi la précision du pointage et le maintien de l'orbite du satellite. Enfin, leur comportement autour de la vitesse nulle pose soucis sur bien des missions requérant un pointage très précis (satellites Météosat de Troisième Génération MTG, observation depuis l'orbite géostationnaire…). En effet, outre les problèmes tribologiques de réalimentation du contact bille/piste au sein des roulements, le couple de réaction exporté est non linéaire avec un petit saut de couple au passage de la vitesse nulle dû au couple de stiction du palier de guidage. Par ailleurs, la vitesse de rotation est moins bien contrôlée dans cette zone de fonctionnement.

Les roues de réaction peuvent également être des roues à réaction à palier magnétique (RRPM). Ces dernières nécessitent un asservissement complexe du guidage suivant les axes actifs du palier. Le réglage de l'asservissement doit notamment prendre en compte les modes propres de la roue et du support. De plus, un système de « gerbage » ou de blocage doit être envisagé pour maintenir le rotor durant les vibrations de transport ou de lancement de l'engin spatial.



Fig. 1 Roue à réaction à palier magnétique

Pour réaliser l'asservissement des roues à réaction à palier magnétique, des capteurs sont mis en place tels, dans le cas des satellites SPOT :

- Une centrale inertielle composée de quatre gyromètres. Ces gyromètres étant des gyromètres deux axes, deux d'entre eux suffisent à délivrer des mesures de vitesse angulaire sur les trois axes du trièdre satellite. Les deux autres sont donc utilisés en secours.
- Deux senseurs terrestres digitaux (STD), un nominal et un redondant, permettant de mesurer la direction du centre de la Terre.



Fig. 2 Senseurs terrestres digitaux Spot 5

En second lieu, des magnéto-coupleurs (MAC) sont utilisés afin de produire un couple par interaction avec le champ magnétique terrestre, et ainsi de maintenir le satellite sur un axe. Ceci afin de pouvoir contrôler la vitesse de rotation des roues à réaction utilisées (celle sur le même axe). En effet, lors de l'accélération ou décélération de la dite roue à réaction, afin de pouvoir faire pivoter le satellite sur cet axe par réaction, il est nécessaire ensuite de ramener la vitesse de la roue à une vitesse de croisière, par exemple, permettant ainsi d'assurer le fonctionnement gyroscopique de cette roue. Or, si le satellite n'est pas maintenu, lors du retour de la roue à sa vitesse initiale, le satellite reviendrait lui aussi à sa position initiale.

Enfin, le maintien de l'orbite peut être effectué à l'aide de micropropulseurs. En effet, l'orbite du satellite évolue légèrement et il est nécessaire d'effectuer cycliquement de petites corrections afin de garder celui-ci sur son orbite héliosynchrone. Ces petites poussées sont effectuées environ tous les mois (manœuvre Modes Contrôle d'orbite Court MCC) afin de corriger le demi grand axe de l'orbite. Aussi, tous les six mois, une manœuvre de correction d'orbite plus importante avec une rotation du satellite (manœuvre MCO mode contrôle d'orbite gros), est réalisée pour corriger l'inclinaison de l'orbite. Les propulseurs utilisés (tuyère fonctionnant par combustion d'hydrazine) peuvent produire une force de 15 Newton.

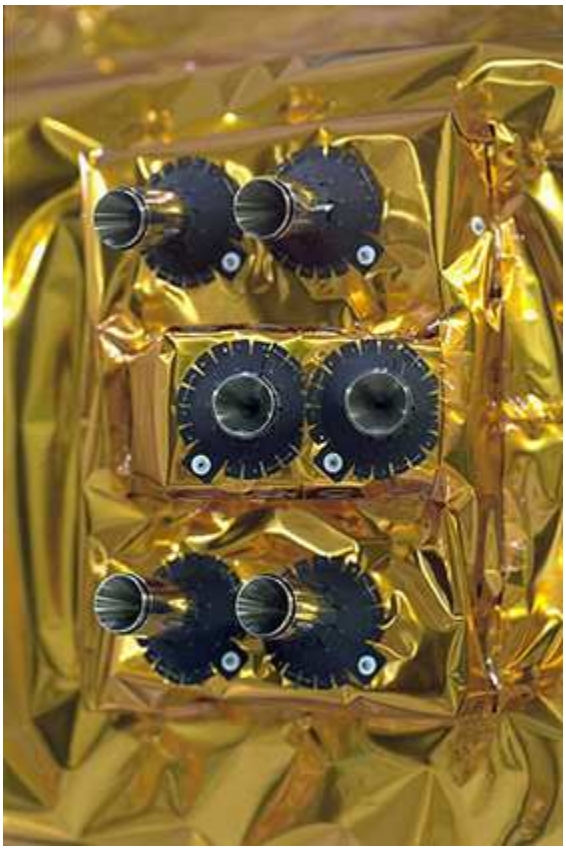


Fig. 3 Platine tuyères Spot

Dans certains modes de fonctionnement (principalement les modes d'acquisition et de replis en cas d'anomalie) les propulseurs peuvent être utilisés à la place des roues et magnéto-coupleurs : leur bras de levier par rapport au centre de gravité du satellite induit une rotation autour de l'un de ses axes.

Après une brève présentation des différents actionneurs permettant le contrôle de l'attitude et le maintien de l'orbite du satellite, il paraît intéressant de décrire ici les différents modes de fonctionnement de la plate-forme satellite pour lesquels sont utilisés l'ensemble de ces actionneurs.

1.2 Modes plate-forme - Spot

Pour la description des différents modes de fonctionnement du satellite Spot 5, les informations de la page web http://spot5.cnes.fr/satellite/4822.htm ont été reprises ici, verbatim pour ainsi dire. Pour autant, nous reprenons ici essentiellement le descriptif des modes concernant l'utilisation des roues inertielles MHD pour le pointage et le contrôle de l'orbite. Ceci afin quel lecteur puisse mieux comprendre les différentes missions des satellites et l'utilisation des divers actionneurs associés. Pour de plus amples informations, le lecteur pourra se rendre sur cette page internet donnée.

A chaque mode de la plate-forme correspond une configuration particulière des équipements et à une mise en œuvre de certains processus du logiciel de vol. Pour le satellite Spot 5, ces modes ainsi que les transitions possibles de l'un à l'autre peuvent se représenter de la façon suivante :

1.2.1 Modes d'acquisition et de replis

Différentes configurations du matériel et du logiciel de vol, nommées *Mode de lancement*, *Mode de réduction de vitesse*, *Mode acquisition « grossière »*, *Mode acquisition fine*, *Mode déploiement du générateur solaire*, *Mode survie*, sont utilisées lors de la mise en place du satellite sur son orbite. Par

exemple l'initialisation des divers appareils de mesure, le blocage des roues lors du lancement, l'acquisition de la position du satellite sur la direction géocentrique pour le placer en orbite par activation des tuyères, et stabiliser sa trajectoire, puis déployer les panneaux solaires générant l'électricité nécessaire au fonctionnement de l'ensemble des équipements. Le *Mode survie* permet quant à lui de définir les priorités en cas d'anomalies, afin de garantir les fonctionnements vitaux de la plate-forme.

Essentiellement les gyromètres, tuyères, senseurs terrestres digitaux et pour le mode survie, deux gyroscopes (roues inertielles), sont utilisés. Seul le mode survie a donc un intérêt ici pour nos roues inertielles, mode pour lequel ces actionneurs permettent de stabiliser le satellite et le pointage des panneaux solaires vers le Soleil.

1.2.2 Modes opérationnels

- **MPF : Mode pointage fin**
  Ce mode est le mode de pointage nominal des satellites Spot 1 à 4. Il permet de stabiliser et de pointer le satellite pour la réalisation de prises de vue. Il s'agit là du contrôle de l'attitude de la plate-forme. Ce fonctionnement est assuré par l'utilisation des roues à réaction et des magnéto-coupleurs qui permettent une précision d'orientation bien meilleure à celle obtenue par l'utilisation des tuyères. La commande des actionneurs utilisés est assurée par les données fournies par les gyromètres et des STD. Actuellement, les roues utilisées garantissent une précision meilleur que 0.15 degré autour de chaque axe, pour une stabilité angulaire de 8.10^{-4} degrés par seconde.
  Ce mode est démarré depuis le sol et après avoir obtenu l'acquisition fine du satellite. Il termine l'acquisition d'attitude pour Spot5. C'est un mode transitoire avant de passer en mode trace.
- **MTR : Mode trace**
  Ce mode est le mode de pointage nominal du satellite Spot5 : un contrôle en lacet permet de corriger les effets liés à la rotation de la terre et ainsi de maintenir la vitesse au sol perpendiculaire à la ligne image.
  Le satellite fonctionne alors de manière opérationnelle pour sa mission.

  Ces deux modes utilisent les mêmes équipements pour des performances identiques, à savoir les roues inertielles, objet de cette thèse, et les magnéto-coupleurs.

1.2.3 Modes de contrôle d'orbite

Deux modes particuliers permettent le maintien du satellite sur son orbite héliosynchrone :

- **MCC : Mode contrôle d'orbite court**
  Ce mode permet d'effectuer des corrections de la trajectoire du satellite, par activation des tuyères, dans le plan de son orbite. Les poussées sont suffisamment faibles pour que l'attitude du satellite soit maintenue par les roues inertielles. Ce mode concerne donc également nos roues inertielles.

- **MCO : Mode contrôle d'orbite gros**
  Ce mode est utilisé pour réaliser des corrections de la trajectoire du satellite dans le plan ou hors du plan de son orbite et d'amplitude importante. Ce mode fait uniquement appel à l'utilisation des tuyères pour la correction de la trajectoire et le contrôle de l'attitude, les poussées étant plus importantes. Ce type de manœuvres est réalisé environ tous les 6 mois.

  Ce mode ne concerne donc pas l'utilisation des roues inertielles.

Pour information, le graphe des modes et contrôle d'attitude est présenté ci-dessous :

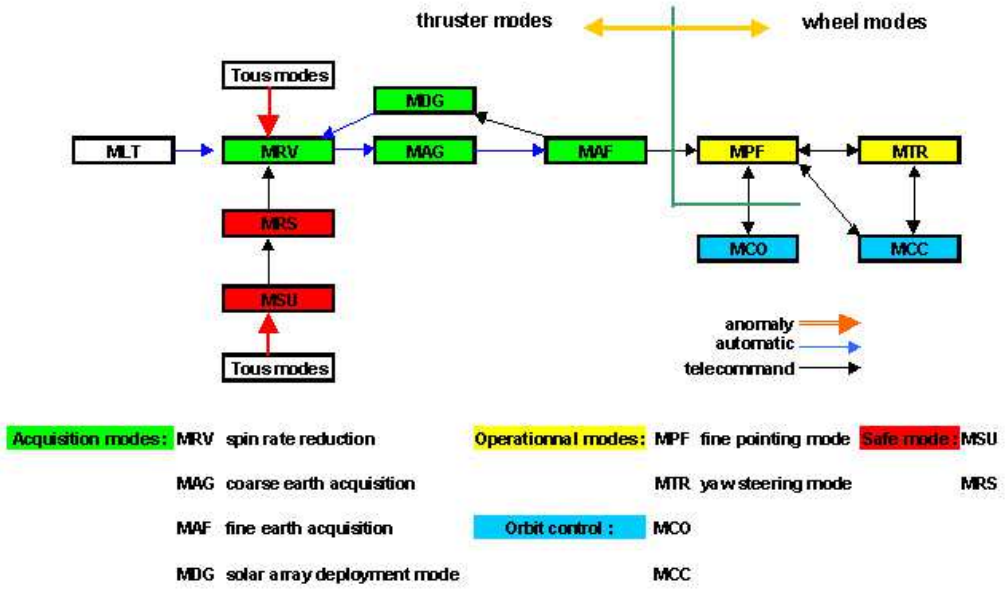


Fig. 4 Graphe des modes, contrôle de l'attitude

1.3 Modes plate-forme – Myriade

Dans le cadre de cette thèse, effectuée pour le CNES, nous nous sommes intéressés au remplacement des roues inertielles et à réaction actuelles par des roues MHD. Nous verrons par la suite pour quoi le choix a été fait de la réalisation de cette étude. Ici, nous pouvons nous attarder quelque peu sur les modes de fonctionnement décrits par le CNES et le responsable technique de cette thèse, M. C. Casteras, Ingénieur mécanisme au CNES, ainsi que Mme C. Pittet, Ingénieur de recherche au CNES, au sujet de la plate-forme Myriade, objet de cette étude. Cette description sera suffisante.

Cette plate-forme utilise, pour le contrôle d'attitude sur 3 axes, inertiel, géocentrique, solaire ou orienté selon la vitesse, en mode nominal un senseur stellaire, quatre roues à réaction de type électromécanique, et trois magnéto-coupleurs. Trois senseurs solaires et un magnétomètre sont utilisés lors de la phase de mise à poste. Le pointage est réalisé avec une précision de 5.10^{-3}° et une stabilité meilleure que 2.10^{-2}°. Le contrôle de l'orbite est quant à lui assuré par un module de propulsion utilisant quatre moteurs à hydrazine d'un Newton de poussée, et un réservoir d'une capacité de 4.5 litres.

L'asservissement de l'ensemble, est assuré par un logiciel de vol au moyen d'un calculateur (processeur T805 de 256 Mo de mémoire flash, et 1Gbits de RAM) pouvant fonctionner en environnement spatial. L'ensemble de la plate-forme dispose d'une puissance de 60W permanent (les panneaux solaires fournissant jusqu'à 180W en début de vie), est dimensionné pour une masse maximale de 80 kg.

Voici la description des modes de fonctionnement :

- **Mode « Survie »**
  Dans ce mode, après réduction de la vitesse des roues, phase pendant laquelle seuls les magnéto-coupleurs assurent la compensation des perturbations et le pointage héliocentrique, celles-ci tournent à vitesse constante (une seule roue). Ceci afin de rigidifier l'axe du satellite

et d'absorber les perturbations. Dès lors, le satellite, ou plutôt les panneaux solaires, restent pleinement exposés aux rayons solaires ce qui permet de recharger la batterie, tout en investiguant la source du problème qui a engendré ce mode. Il peut intervenir lors d'une charge insuffisante des batteries, ou lors de panne de l'ordinateur de bord par exemple. La régulation thermique de l'actionneur est assurée passivement.

- **Mode Grossier de Transition (MGT)**
  Ce mode permet de passer d'un pointage héliocentrique à un pointage géocentrique (mode normal). Rappelons que le satellite comporte 4 roues d'inerties présentes sur les 3 axes (cartésiens) ; 1 sur l'axe X (orienté anti-soleil en MAS et centre Terre en MGT et mission géocentrique), 2 sur l'axe Y (normal à l'orbite en MGT et mission), 1 sur l'axe Z (tangent à l'orbite en MGT et mode mission géocentrique).
  Dans ce mode, la commande est une commande en vitesse également. Les deux roues d'inertie présentes sur l'axe Y du satellite sont utilisées afin de le maintenir normal à l'orbite.

- **Mode Normal/Mission**
  C'est le mode où l'actionneur est commandé en couple (précision 10^{-7}N.m) à 4 Hz afin de compenser les couples perturbateurs de fréquence orbitale ou bi-orbitale. Sur l'axe Y, une seule roue est utilisée. Une marge en moment cinétique sur cette roue permet d'absorber les couples perturbateurs (à partir de la commande en couple) ainsi que de maintenir l'axe Y du satellite pendant l'arrêt de la roue qui était utilisée en MGT. Cette commande doit permettre l'observation de la terre avec une précision inférieure au dixième de degré. Les couples perturbateurs étant globalement sinusoïdaux, la vitesse des roue est aussi en sinus mais sa valeur moyenne varie (non nulle). Pour éviter la saturation en vitesse des roues résultant de la composante constante des couples perturbateurs, on utilise les magnéto-coupleurs et/ou les micro-propulseurs à tuyères.

  Pour les satellites en orbite basse inclinée, on utilise principalement des magnéto-coupleurs. Cependant, les magnéto-coupleurs produisant un couple perpendiculaire au champ magnétique (de l'ordre du μT), il y a toujours un axe du satellite qui ne peut être piloté. La roue à réaction correspondante doit, pendant ce laps de temps (environ ¼ d'orbite), compenser seule les couples de perturbations constants. Sur une orbite inclinée (inclinaison supérieure à 20-30 degrés), au bout de cette durée, l'axe non contrôlable change. Ainsi on doit contrôler la vitesse moyenne de l'actionneur et donc le dé-saturer (en diminuant sa vitesse par exemple dans le cas où la vitesse de l'actionneur croît et s'approche de sa vitesse maximale). Il doit donc être dimensionné de telle sorte qu'il puisse augmenter en vitesse progressivement (pendant ¼ d'orbite) pour compenser ce couple constant et ce jusqu'à une vitesse acceptable par cet actionneur.

  Dans le cas des orbites équatoriales, un axe du satellite est toujours colinéaire au champ terrestre. Le magnéto-coupleur correspondant est alors inutilisable et donc la roue à réaction correspondante ne peut être dé-saturée par ces actionneurs. Pour résoudre ce problème, les tuyères à propulsion chimiques sont utilisées.

  Le satellite reste en mode normal tant que des manœuvres de correction d'orbite ne sont pas nécessaires, ou tant qu'il n'y a pas de panne. Plusieurs directions de pointage peuvent être programmées pendant le mode normal, par exemple un pointage géocentrique quand la charge

utile effectue ses mesures, et un pointage héliocentrique pour recharger les batteries. Entre deux directions de pointage différentes, le satellite bascule en attitude.

- **Manœuvre d'attitude**
  Cette manœuvre intervient lorsque l'on cherche à modifier la direction de pointage, par exemple pour aligner les tuyères dans la direction de poussée pour réaliser une correction d'orbite. L'actionneur est ici commandé en couple par des profils de type Bang-Bang (γ_{man} puis $-\gamma_{man}$ ou bien γ_{man}, 0, $-\gamma_{man}$). Lorsque l'on impose γ_{man} (couple manœuvre) par exemple, la vitesse de l'actionneur augmente jusqu'à une certaine valeur ($H_{man}=0.7*H_{max}$). Pendant ce temps, le satellite se met également à tourner de plus en plus vite. Si H_{man} est atteint, on maintient alors un couple nul pendant le temps voulu afin que le satellite tourne d'un angle voulu. C'est la phase de croisière. Puis, en imposant $-\gamma_{man}$, la vitesse de rotation de l'actionneur et donc du satellite est parallèlement freinée jusqu'à zéro (même durée de décélération que d'accélération). Ainsi l'on a effectué une rotation du satellite par rapport à l'axe de l'actionneur.
  On notera que 70% du couple est utilisé pour la manœuvre tandis que 30% l'est pour compenser les perturbations.

Ainsi, il est grand temps d'évoquer les avantages attendus par la conception de roues inertielles et à réaction MHD.

2. Etat de l'art sur la Magnétohydrodynamique (MHD)

C'est en 1820 que le physicien et chimiste danois Hans Christian Oersted mis en évidence l'interaction existante entre l'électricité et le magnétisme. En effet, il démontra qu'un fil transportant du courant était capable de faire bouger l'aiguille magnétisée d'une boussole. Peu après, en 1831, l'anglais Michael Faraday mis en évidence le phénomène réciproque : au moyen d'un fil passant sur le pont de Waterloo, et en plongeant les deux extrémités de chaque côté de la rivière, il mesura un courant électrique, du fait de l'écoulement de l'eau (conductrice) soumis au champ magnétique terrestre.

La notion de transformation du mouvement en électricité, et celle de conversion mécanique de l'électricité, venaient d'apparaître, à savoir les dispositifs de conversion électromécanique. Les inventions des moteurs électriques allaient suivre ces découvertes, et réciproquement, la génération d'un courant électrique par la dynamo de Gramme en découle.

La Magnétohydrodynamique (MHD) est, quant à elle, l'interaction entre un fluide conducteur et un champ électromagnétique (**E**, **B**). En ce sens, elle constitue l'exemple le plus spectaculaire de conversion électromécanique, et s'attache à l'étude du mouvement des fluides conducteurs en présence de champs électrique et magnétique. Il s'agit donc d'une généralisation de la Mécanique des Fluides, définie par les équations de Navier-Stokes, couplée à l'Electromagnétisme, défini par les équations de Maxwell.

Le physicien suédois Hannes Alfvén fut le premier, en 1942, à employer le terme de *magnétohydrodynamique*. Il reçut le prix Nobel de physique en 1970 pour ses travaux.

Le nombre de Reynolds magnétique Re_m, défini de manière analogue au nombre de Reynolds en hydrodynamique, indique le rapport entre les phénomènes de convection et de diffusion dans un fluide soumis à un champ magnétique. Il permet de définir deux classes en MHD :

- la "MHD idéale" pour $Re_m >> 1$.

Dans ce cas, la diffusion du champ magnétique est négligée. Et l'advection du champ magnétique par la vitesse du fluide est prépondérante. L'écoulement du fluide et les lignes de champs magnétiques sont intimement liés.
Aussi, le fluide est assimilé à un conducteur parfait. Ce type de MHD est étudié dans les plasmas chauds, tels les plasmas astrophysique et thermonucléaires d'origine naturelle (étoiles) ou artificielle (tokamaks).

- la "MHD résistive" pour $Re_m << 1$.

Là, le fluide n'est pas considéré parfaitement conducteur. Une résistivité est engendrée par les collisions entre les constituants du plasma, ce qui a pour effet de transformer l'énergie magnétique en chaleur par effet Joule.
L'advection du champ magnétique ainsi que sa diffusion sont à prendre en considération. Cela dépend néanmoins du temps de diffusion, pour savoir si la résistivité du fluide sera à prendre en compte.
Ce type de MHD intervient dans les applications industrielles à plasmas froids (4 000 K)

Il existe également d'autres modèles de MHD, telle "MHD-Hall", qui intervient lorsque l'inertie des ions est à prendre en compte.

La MHD s'observe dans différents domaines physiques décrivant des phénomènes naturels, tels que :

- La Géophysique

En effet, le noyau de la Terre est, selon la théorie en vigueur, constitué pour sa partie externe d'un fluide métallique à l'état de plasma en mouvement de convection. Ce mouvement serait à l'origine de courants induits et donc du champ magnétique terrestre [1].

- L'Astrophysique

La matière observable de l'Univers étant constituée à plus de 99% de plasma, dont les étoiles, les nébuleuses, les milieux interplanétaires et interstellaires, la MHD décrit bon nombre des phénomènes qui y occurrent, tels les vents solaires et les taches solaires, région sur la surface du Soleil marquée par une température inférieure et une activité magnétique intense.

Aussi, la MHD trouve son intérêt dans bon nombre d'applications :

- L'accélérateur MHD

L'accélérateur MHD est un convertisseur MHD qui met en mouvement un fluide conducteur au moyen d'un champ magnétique et d'un champ électrique. De manière analogue aux moteurs électriques, l'inducteur de cet accélérateur est un aimant ou électroaimant, qui génère un champ magnétique dans un induit, ici le fluide conducteur. Il n'y a donc pas de pièce mécanique mobile.

Il existe deux types d'accélérateurs MHD :

En premier lieu, l'accélérateur à **conduction**, ou pompe MHD à conduction, utilise des électrodes plongées dans le fluide, afin d'y produire un champ électrique. Le principe est alors le suivant :

Sous l'effet de la force électrostatique,

$$Fe = q\boldsymbol{E} \tag{I.2.1}$$

Les particules chargées sont accélérées dans des sens opposés, vers les électrodes, selon le signe de leur charge (le fluide étant conducteur, il possède en son sein des ions chargés positivement et négativement). Le fluide reste globalement inerte. En revanche, ce mouvement de particules constitue un courant unidirectionnel. Dès lors, ce courant va interagir avec le champ magnétique, et mettre en mouvement le fluide, au moyen de la force de Laplace,

$$d\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{dl}\wedge\boldsymbol{B} \tag{I.2.2}$$

Ceci correspond à une vision globale de la force que subit localement chaque particule chargée, appelée force de Lorentz et qui s'exprime par la relation suivante :

$$\boldsymbol{F_{Lorentz}} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) \tag{I.2.3}$$

De là, il peut être déduit la loi d'Ohm en MHD dans le référentiel du laboratoire, dans le cas de matériaux bon conducteurs, la transformation de Lorentz conservant les densités de courant mais modifiant le champ électrique ($\boldsymbol{E'} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$)

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) \tag{I.2.4}$$

Et l'expression de la force de Lorentz volumique,

$$\boldsymbol{f_{Lorentz}} = \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} \tag{I.2.5}$$

A noter que les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ doivent être transverses, la vitesse s'établissant suivant la direction orthogonale.

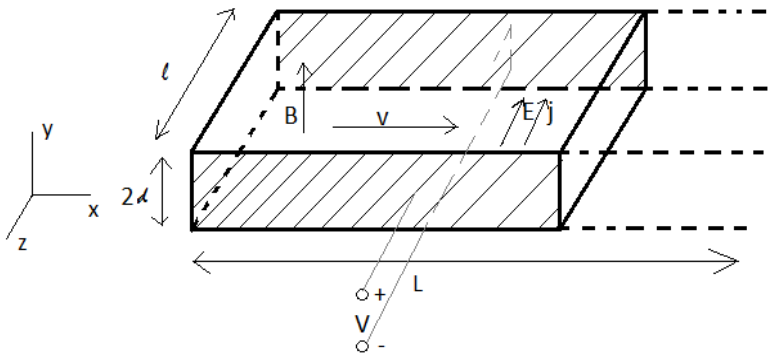


Fig. 5 Schéma représentatif de la pompe MHD à conduction

Ce type d'accélérateur présente les avantages principaux d'une bonne compacité et d'une bonne capacité à supporter de hautes température.

En second lieu, l'accélérateur MHD à **induction**, fonctionne lui sans électrode. De manière analogue au principe de fonctionne d'une machine asynchrones, un champ magnétique variable est produit, de sorte qu'il apparaît des courants induits dans le fluide conducteur, selon la loi de Lenz, et l'expression de la force électromotrice *e*,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \tag{I.2.6}$$

Ou localement, l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{I.2.7}$$

Ces courants, également transverses au champ magnétique variable, mettent en mouvement le fluide conducteur selon le même principe que celui explicité pour l'accélérateur MHD à conduction.

Les accélérateurs MHD, de manière générale, trouvent applications dans différents domaines, notamment liés à la propulsion. La propulsion Navale, à l'image du navire japonais, le Yamato 1, qui navigua pour la première fois en 1992.



Fig. 6 Le Yamato 1 dans la baie de Köbe

Ce navire, développé par des recherches civiles commençant depuis les années 1970, utilise 12 accélérateurs linéaires de Faraday. Ce système de propulsion présente l'avantage d'une propulsion directe par réaction, aspirant à l'avant l'eau de mer, naturellement conductrice, et la rejetant à l'arrière, en supprimant l'hélice et toute pièce mécanique mobile. Il se déplace silencieusement (l'écoulement est plus laminaire), jusqu'à une vitesse de 8 nœuds (15km/h) [2], [3]. Il est équipé d'électroaimants supraconducteurs refroidis à l'hélium liquide, produisant un champ de 4 teslas, ainsi qu'un courant transversale allant jusqu'à 2 000 ampères, pour une force totale de 16 000 newtons. La MHD nécessitant de fort courant et champ magnétique, cette technologie de supraconducteurs constitue la principale barrière à son utilisation.

Le fait que l'écoulement soit rendu laminaire s'explique par le fait que l'écoulement puisse être contrôlé magnétique (forçage d'écoulement), à l'aide d'aimant affleurant. Ainsi, la MHD a trouvé son intérêt dans les applications militaires de submersibles, afin de les rendre furtifs. Les premières études sur le sujet date de la fin des années 1950 aux Etats-Unis. Un premier rapport officiel a été publié sur le sujet en 1958, par l'ingénieur Stewart Way, du département R&D de Westinghouse à Pittsburg. En 1961, Warren A. Rice publie le premier brevet [4], en parallèle aux travaux des américains James B. Friauf et O. M. Philips [5], [6]. S. Way publie un second rapport en 1964 par l'ASME (American Society of Mechanical Engineers), et, en 1966, teste avec succès le premier modèle réduit de submersible à propulsion MHD dans la baie de Santa. Ces recherches sont stoppées. En cause l'impossibilité de fabriquer les bobines produisant de très forts champs magnétiques. Cependant les Soviétiques continuent la recherche sur la propulsion MHD pour les sous-marins.

Dès que les électroaimants supraconducteurs se sont rendus disponibles, les recherches ont pu reprendre. Au USA, pour l'US Navy et leurs submersibles, les recherches reprennent dans les années 1990, au sein de l'Université de Pennsylvanie, au FBNML (Francis Bitter National Magnet Laboratory) du MIT (Massachusetts Institute of Technology). L'US Navy, en parallèle à ces recherches universitaires, ne comment pas les éventuelles réalisations effectives, mais publie à la même époque plusieurs brevets décrivant des sous-marins à propulsion MHD et à diminution de traînée par contrôle de couche limite.

La propulsion MHD trouve son application également pour la propulsion spatiale de satellite et autres engins, au moyen de propulseur plasmadynamique ou à effet hall. Tel le PPS FLEX actuellement à l'étude par le CNES, la SNECMA, et le laboratoire LAPLACE. Ce type de propulseur, utilise un gaz comme le xénon, qui est confiné par une barrière de champ électromagnétique, issue de bobines, d'une anode centrale et d'une cathode externe. Puis, lorsque qu'une particule de gaz se confronte à cette barrière, elle est ionisée au contact d'un électron, puis accélérée par MHD. Ce qui permet de produire une poussée de l'ordre de 100 millinewtons, suffisant pour la mise en mouvement des satellites.

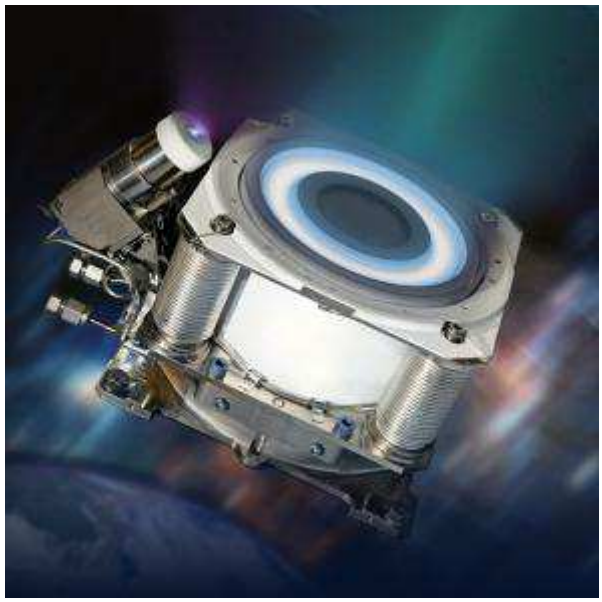


Fig. 7 PPS 1350 développé par la SNECMA

On retrouve aussi la propulsion MHD dans des applications industrielles nucléaires, afin d'assurer la circulation du sodium liquide dans les réacteurs nucléaires de type surgénérations [7], tel le

Superphénix, situé sur les bords du Rhône, et arrêté définitivement en 1997, suite à plusieurs fuites d'argon et de sodium. La MHD est aussi étudiée pour le confinement du plasma, pour la fusion nucléaire, dans une chambre torique appelée tokamak.

- Le Générateur MHD

Les Générateurs MHD consistent en l'application du fonctionnement inverse aux accélérateurs MHD. Ils peuvent être à conduction ou à induction. Le principe étant que, lorsqu'un fluide conducteur est en mouvement et qu'il est soumis à un champ magnétique continu ou variable, il peut être récupéré, au moyen d'électrodes, un courant électrique induit par MHD, les particules chargées se déplaçant, dans directions opposées suivant leur charge. Ce déplacement est l'origine du courant récupéré. Le fluide est alors freiné par la force de Lorentz (I.2.3).

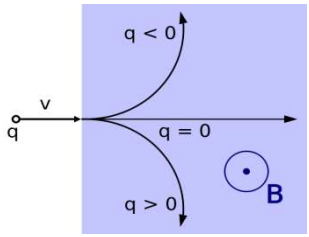
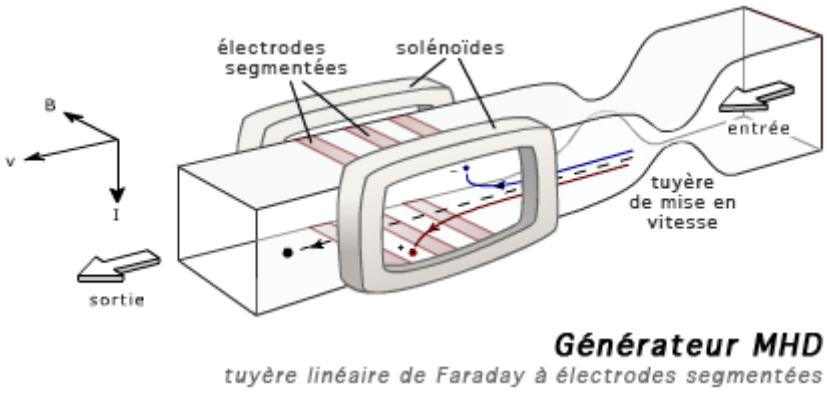


Fig. 8 Illustration de la Force de Lorentz

Ce type de technologie, confrontée là aussi dans les années 1970 à la non disponibilité de champs magnétiques suffisant, peut être utilisée dès lors que l'on dispose d'un fluide à l'état de plasma (ionisé) et à grande vitesse. Par exemple, en sortie de tuyères du réacteur d'avion supersoniques ou hypersoniques. Ceci afin de générer des courants importants, qui peuvent être réutilisé pour alimenter des électrodes à l'avant de l'avion par exemple, pour ioniser l'air et le freiner là aussi par MHD. Ceci produit également un courant, mais à surtout l'avantage de diminuer les frottements de l'avion lors de la pénétration dans l'air. L'on peut également ré-accélérer l'air à l'arrière de l'avion. Tout cela permet théoriquement d'augmenter la vitesse maximale de l'avion hypersonique.



- Le four à Induction

Cette technologie est utilisée en métallurgie, afin de mélanger les métaux par convection. Mais aussi de les chauffer par effet Joule pour les liquéfier.

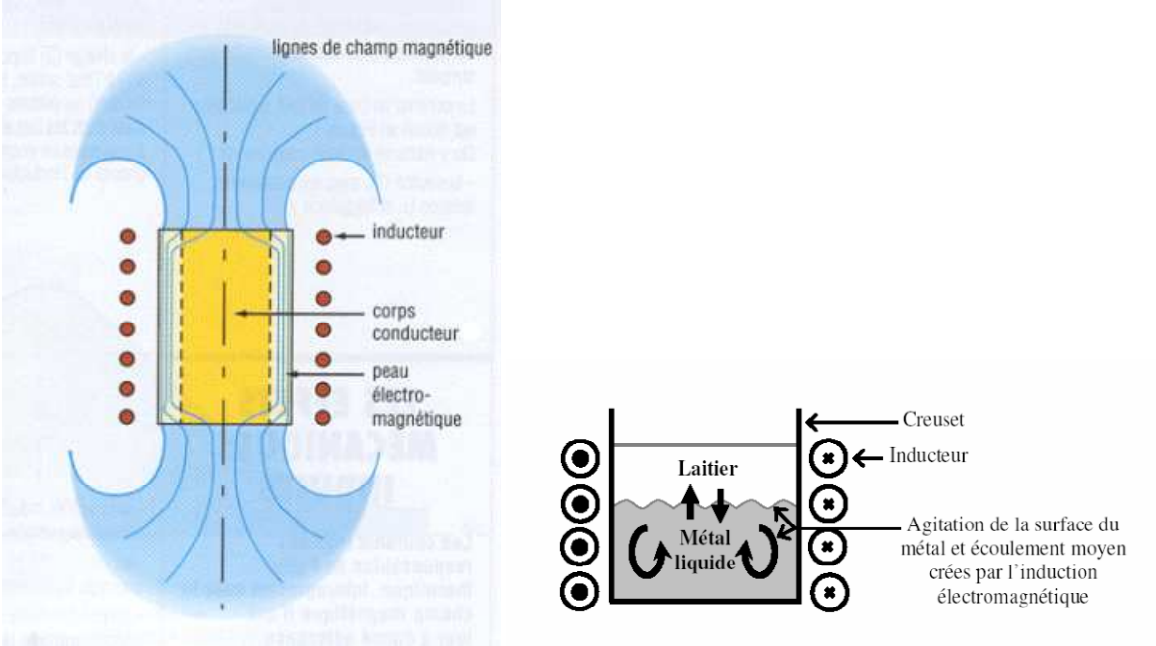


Fig. 9 Principe du chauffage par induction

Le courant produit est déduit de l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\nabla \wedge \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \qquad \text{(I.2.8)}$$

Et le mouvement convectif du fluide des lois de la MHD et de la force de Lorentz.

3. Présentation des Roues MHD

3.1 Les Raisons de ce projet

Les principaux désavantages des roues inertielles et à réaction électromécaniques ont déjà été évoqués plus haut. A savoir :

- La présence de balourds statiques et dynamiques, dus à la conception du rotor massique, et entraînant des micro-vibrations. Celles-ci induisent une perte de précision quant au pointage de la plate-forme.
- La présence de roulements à billes ou magnétiques sont à l'origine d'une usure mécanique qui limite la durée de vie de ces actionneurs. Elément primordial dans le domaine spatial.
- Ces roues présentent également un comportement non linéaire autour de la vitesse nulle (saut de couple), dû au couple de stiction au moment de la mise en mouvement. Cette vitesse est donc mal contrôlée ce qui entraîne une perte de précision important pour un pointage requérant une grande précision pour les missions d'observations (petits angles de déplacement).

Aux vues de ces inconvénients que présentent les roues électromécaniques, attachons nous maintenant à la description du phénomène MHD puis des roues MHD.

3.2 Caractéristiques des roues MHD

Les roues MHD présentent un volant d'inertie fluidique sous forme de canal cylindrique dans lequel, le métal liquide conducteur, tels le gallium, le gallinstan ou le mercure, est mis en mouvement par les forces de Lorentz. De plus, la partie en mouvement étant le métal liquide, cette technologie ne présente pas d'arbre mécanique ni de roulements.

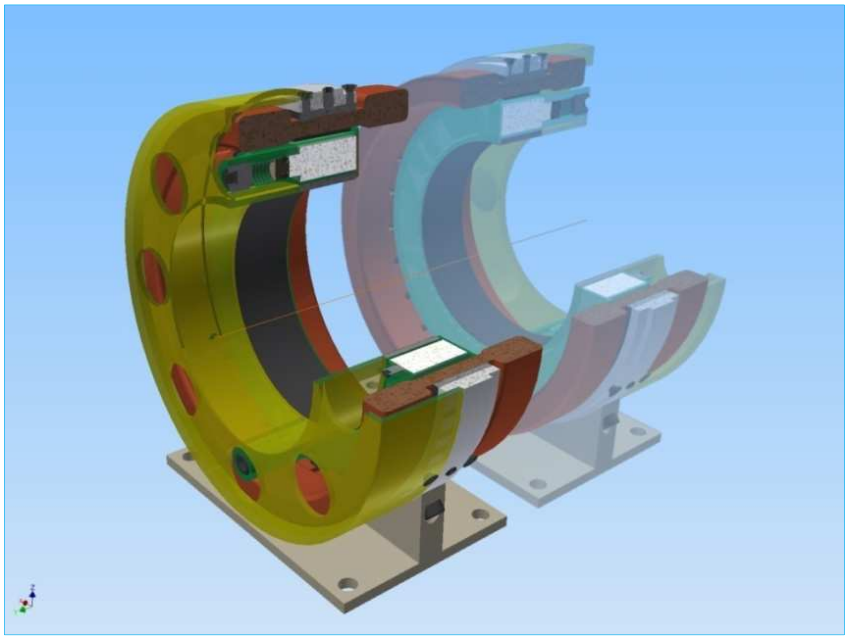


Fig. 10 Image LAPLACE – CNES (D. Harribey) – Représentation 3D Roue MHD à Induction

Dès lors, la roue MHD présente plusieurs avantages, à savoir :

- Un encombrement réduit.
- L'absence de balourds, de par l'amortissement naturel dû à la viscosité du fluide. Il n'y aura donc que peu de micro-vibrations.
- De par la viscosité du fluide toujours, une haute résolution quant à la précision de pointage est attendue autour de la vitesse nulle.
- Enfin, l'absence de pièces mécaniques d'usure laisse présager à une durée de vie théoriquement augmentée.

Les deux concepts MHD (à conduction et à induction) peuvent être exploités pour ce type d'application. Le concept de roue inertielle MHD fait d'ailleurs l'objet d'un brevet déposé par le CNES, le CNRS et l'INPT, [8]. Un prototype de faisabilité a déjà été réalisé au cours d'un projet R&T liant le CNES représenté par M. C. Casteras, M. D. Harribey, et M. Y. Lefèvre, le directeur de cette thèse. Cependant, dans cette étude, et parce qu'à l'image des moteurs électromécaniques à aimants permanents il est attendu un meilleur couple massique, cette étude se focalisera sur l'étude, dans une première approche, des roues inertielles et à réaction **MHD à Conduction**.

4. La MHD en équations

Comme explicité précédemment, la magnétohydrodynamique met en jeu plusieurs domaines de la physique. A savoir l'Electromagnétisme et la Mécanique des Fluides. En ce sens, elle est donc un phénomène couplé, faisant intervenir les lois fondamentales de ces différents domaines.

4.1. Contribution de la Mécanique des Fluides

L'équation de Navier-Stokes est la loi décrivant le mouvement des fluides. Dans le cas où ce fluide est considéré incompressible et soumis à une densité de force volumique $\boldsymbol{f}$, elle s'écrit de la manière suivant :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} \qquad \text{(I.4.1)}$$

Le 1er terme de cette équation correspond à l'accélération du fluide. Le 2ème terme du 1er membre correspond au phénomène d'advection de la quantité de mouvement par le champ vectoriel de la vitesse (forces inertielles volumiques). Cela correspond, en mécaniques des fluides, à de la convection. On peut également l'interpréter par des forces volumiques d'inertie.

Au niveau du 2nd membre, le 1er terme correspond au gradient de pression. Celui dépendant de la viscosité μ correspond à l'expression des forces de viscosités volumiques, c'est-à-dire les forces résistives.

De plus, à partir de cette équation, il est possible de définir un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds, correspondant au ratio entre les phénomènes de convection et les forces visqueuses :

$$Re = \rho.\frac{(\boldsymbol{v}.\nabla)\boldsymbol{v}}{\mu\nabla^2\boldsymbol{v}} = \frac{\rho \boldsymbol{v} d}{\mu} \qquad \text{(I.4.2)}$$

Aussi, en mécanique des fluides, le principe de conservation de la masse peut être décrit par l'équation de continuité. Sous forme locale conservative, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad \text{(I.4.3)}$$

4.2. Contribution de l'Electromagnétisme

Les équations de Maxwell, décrivant les phénomènes de l'électromagnétisme, sont les suivantes :

$$\nabla.\boldsymbol{B} = 0 \;\; ; \;\; \nabla.\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I.4.4)}$$

$$\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(I.4.5)}$$

$$\nabla \wedge \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{(I.4.6)}$$

ρ étant ici la densité de charges électriques.

Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ peut lui-même s'exprimer à l'aide du potentiel électrique φ et du potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ par la relation,

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}(\varphi) - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \text{(I.4.7)}$$

A partir de l'équation de Maxwell-Ampère (I.4.6), l'équation locale de conservation de la charge peut être obtenue :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{I.4.8}$$

4.3. Lois de Couplage

Les équations précédentes sont couplées au travers de l'expression de la force de Lorentz et de la loi d'Ohm généralisée en MHD, qui sont rappelées ici :

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{I.4.9}$$

Avec,

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B} \tag{I.4.10}$$

A partir de la loi de conservation de la charge électrique (I.4.8), en négligeant les courants de déplacements et donc la variation de la charge, et en prenant la divergence de loi d'Ohm en MHD (I.4.9), il est déduit :

$$\Delta\varphi = \boldsymbol{\nabla}.(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{I.4.11}$$

Ces relations, propres à la MHD mettent en évidence le couplage entre la Mécanique des Fluides et l'Electromagnétisme. Elles caractérisent donc les phénomènes physiques à l'origine de la MHD.

A cela il est nécessaire d'ajouter l'équation de la cinématique du champ magnétique, ou équation de l'induction, qui exprime l'évolution dans le temps et l'espace du champ magnétique, à partir du rotationnel de la loi d'Ohm en MHD (I.4.9) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) + \lambda.\Delta\mathbf{B} \tag{I.4.12}$$

Avec λ diffusivité magnétique : $\lambda = \frac{1}{\mu_0.\mu_r.\sigma}$ qui s'exprime en m².s^{-1}. A noter qu'ici le fluide n'est pas magnétique. Dans la suite donc, μ_r sera pris égal à l'unité.

Un paramètre d'écran, sans dimension, est définit comme suit :

$$R_\omega = \frac{L^2.\omega}{\lambda} \tag{I.4.13}$$

Ainsi que le nombre de Reynolds magnétique, sans dimension, défini comme le ratio entre le phénomène d'advection du champ magnétique (transport du champ $\boldsymbol{B}$ par la vitesse), sur celui de diffusion du champ :

$$Re_m = \frac{(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{\lambda\Delta B}} = \frac{vL}{\lambda} \tag{I.4.14}$$

Enfin, à partir des équations I.1, I.6 et I.8, un autre nombre sans dimension, appelé nombre de Hartmann, sans dimension, caractéristique des écoulements MHD, peut lui être défini. Il est le rapport entre les forces de Lorentz et les forces visqueuses :

$$Ha^2 \equiv \frac{j.B}{\mu.\Delta v} \equiv \frac{\sigma B^2 L^2}{\mu} \tag{I.4.15}$$

Soit,

$$Ha = Bd\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \tag{I.4.16}$$

On définit également le paramètre d'interaction *N* comme étant le ratio entre les forces de Lorentz et les forces d'inertie par,

$$N = \frac{\sigma B^2 L}{\mu} \tag{I.4.17}$$

Discussion sur l'équation de l'induction et le nombre de Reynolds magnétique :

Dans un milieu au repos ($\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$), l'équation de l'induction se réduit à l'équation de diffusion classique, dont de nombreuses solutions sont bien connues. Par exemple, dans le cas de pièces polaires parallèles d'un aimant parfait, et en régime permanent, cela conduit à un champ magnétique uniforme. Ou encore, dans le cas de systèmes de pulsation $\boldsymbol{\omega}$ en monophasé, la solution a la forme suivante :

$$\boldsymbol{B} = B_0 * \exp\left(-\frac{n}{\delta_B}\right)\sin\left(\omega t - \frac{n}{\delta_B} - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e_s} \tag{I.4.18}$$

Avec B_0 induction à la frontière du milieu conducteur, $\boldsymbol{e_s}$ vecteur unitaire tangent à la frontière plane du milieu conducteur, *n* coordonnée normale à la frontière plane du milieu conducteur dirigée vers l'intérieur, δ_B profondeur de pénétration de l'induction magnétique :

$$\delta_B = \sqrt{\frac{2}{\mu_0.\omega}} \tag{I.4.19}$$

A partir de la définition donnée du nombre de Reynolds magnétique R_{em} ci-dessus, deux cas distincts peuvent être définis suivant sa valeur.

- Lorsqu'il est très petit devant l'unité, les phénomènes de diffusion du champ magnétique deviennent prépondérants devant ceux d'advection du champ magnétique par la vitesse. L'équation de l'induction (I.4.12) se réduit à sa forme dans les milieux au repos, caractérisant la diffusion pure. En se limitant au cas où $\boldsymbol{B_0}$ est uniforme et permanent et en notant $\boldsymbol{b}$ le champ magnétique induit par la vitesse du fluide conducteur, on peut réécrire cette équation sous la forme (tenant compte de la conservation de la masse (I.4.3)),

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = (\boldsymbol{B_0}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mu_0.\sigma}.\boldsymbol{\nabla^2 b} \qquad \text{(I.4.20)}$$

En régime permanent pour l'écoulement, le rapport b/B_0 sera donc de l'ordre de R_{em}.

- En revanche, lorsque R_{em} devient grand devant l'unité, c'est le terme d'advection qui prédomine dans (I.4.20). L'équation de la cinématique du champ se réduit donc à :

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \qquad \text{(I.4.21)}$$

Cela signifie donc une propriété fort remarquable de ce type d'écoulement en présence d'un champ magnétique, à savoir que l'induction magnétique est gelée dans la matière (propriété à la base de l'explication des taches solaires). Cela signifie donc qu'il est extrêmement difficile de faire pénétrer le champ magnétique dans la matière, à moins de temps très long devant le temps caractéristique de l'écoulement. Ce type de configuration intervient dans le cas où un objet faiblement conducteur se déplacera très vite, ou encore dans le cas où un objet fortement conducteur se déplacera plus lentement (Def Rem). A titre d'illustration, voici le cas d'un objet circulaire conducteur,

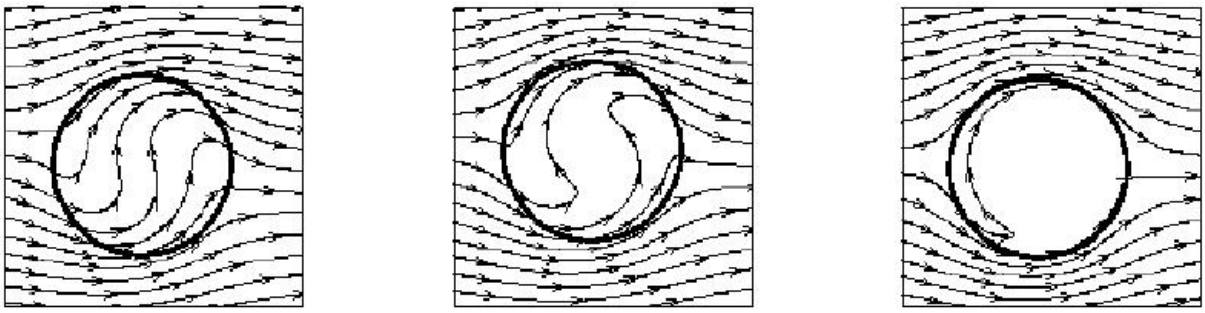


Fig. 11 Lignes de champ magnétique uniformes à l'infi et distordues par la rotation d'un cylindre
De gauche à droite : R_{em}=10 ; R_{em}=20 ; R_{em}=100

Il existe cependant des régions de faibles épaisseurs (nappes ou filaments) où le terme de diffusion est très grand et entre en compétition avec le terme de convection ($\nabla^2 \approx \frac{1}{\delta_B} \gg \frac{1}{L^2}$).

$$\delta_B \approx L R_{em}^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(I.4.22)}$$

On retrouve là une sorte d'effet de peau déjà visible (Fig. 11) dans le cas où le nombre de Reynolds magnétique vaut 100, par un effet de concentration des lignes de champ à la périphérie du cylindre conducteur.

4.4. Rappels sur les écoulements visqueux incompressibles

- Définition de l'Incompressibilité

Un fluide est considéré incompressible si sa masse volumique ne varie pas, ni dans le temps ni dans l'espace. L'équation de continuité (I.4.3) devient alors :

$$\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{v}) = 0 \qquad \text{(I.4.23)}$$

- Forces Visqueuses

Les forces visqueuses s'opposent au mouvement relatif de deux couches de fluide adjacentes. Elle est, par nature, une force de cisaillement. Ces forces sont donc dissipatives.

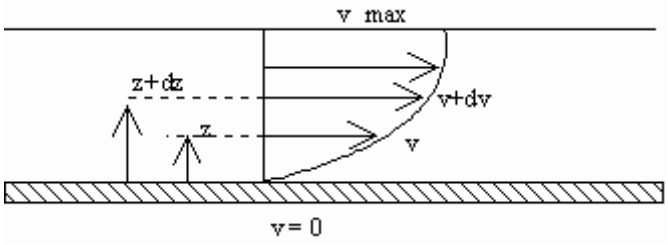


Fig. 12 Profil de Vitesse en couche limite - viscosité

Pour un fluide newtonien, cette force est tangente à la surface commune et s'oppose à leur mouvement relatif. De plus, elle est proportionnelle à la variation de vitesse relative par unité de longueur, entre les deux couches, distantes ici de *dz*. Et l'on a :

$$\boldsymbol{dF_{1\to 2}} = -\mu\frac{\partial v}{\partial z}S\boldsymbol{e_x} \qquad \text{(I.4.24)}$$

Avec μ viscosité dynamique et s'exprime en Pa.s ou poiseuille (Pl).

En s'intéressant à la force totale volumique de viscosité exercée sur une particule, c'est-à-dire à la somme des forces subies sur chacune de ses faces, il est aisé de montrer que dans le cas général :

$$\boldsymbol{f_{vis}} = \mu.\Delta\boldsymbol{v} \qquad \text{(I.4.25)}$$

On introduit la viscosité cinématique v qui s'exprime en $m^2.s^{-1}$, à partir de l'expression des forces de viscosité massique :

$$\boldsymbol{f_{visc_m}} = \frac{\mu}{\rho}.\Delta\boldsymbol{v} \quad ; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \text{(I.4.26)}$$

- Ecoulements Laminaires - Ecoulements turbulents

Le nombre de Reynolds permet de définir deux types d'écoulements :

- Ecoulement Laminaire : il intervient à faible vitesse ou forte viscosité, c'est à dire à faible nombre de Reynolds. Les lignes de courants ne s'enchevêtrent pas. Cet écoulement est

stable. Il intervient également autour de "petits" obstacles, si le fluide est suffisamment visqueux.

- A forte vitesse ou faible viscosité, et également autour de gros obstacles, les lignes de courant s'enchevêtrent, l'écoulement est instable. Cela traduit un écoulement turbulent.

Ces deux types d'écoulement ont été observés au travers de l'expérience de Reynolds. De ces observations découle la définition du nombre de Reynolds décrit plus haut.

Lorsque Re << 1, les transferts par diffusion (forces de viscosité) sont prépondérants. L'écoulement est laminaire et stable.

Lorsque Re >> 1, les transferts par convection sont prépondérants. L'écoulement devient turbulent. Cela vient du terme convectif non linéaire $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$ de l'équation de Navier-Stokes.

On dit que l'écoulement peut rester laminaire jusqu'à $Re \sim 2\,000$

- Application aux écoulements autour d'un obstacle - Notion de Couche Limite

Pour le fluide réel, la vitesse d'une particule du fluide au contact de l'obstacle ou d'une paroi s'annule (ou devient égale à la vitesse de l'obstacle). Cette annulation se produit au niveau d'une couche appelée Couche Limite (cf. Fig. 11 ci-dessus pour la forme du profil de vitesse dans cette couche). Au delà de cette couche, la vitesse du fluide varie très peu. Elle coïncide avec l'écoulement parfait. Les forces de viscosité se concentrent dans la couche limite. Hors couche limite, le terme diffusif, lié à la viscosité, devient négligeable devant le terme convectif.

L'épaisseur δ de la Couche Limite dépend du nombre de Reynolds. Dans le cas où le terme diffusif est du même ordre de grandeur que le terme convectif dans la couche limite (Re~1),

$$\delta = L/\sqrt{Re} \tag{I.4.27}$$

Le nombre de Reynolds est quant à lui défini à partir de la vitesse loin de l'obstacle.

A faible nombre de Reynolds donc (Re << 1), la notion de couche limite n'a plus vraiment de sens car elle occupe tout l'écoulement. L'écoulement est dit rampant. Les forces d'inertie (convectives) sont négligeables. Le champ de pression dans le fluide est déterminé par la contrainte visqueuse.

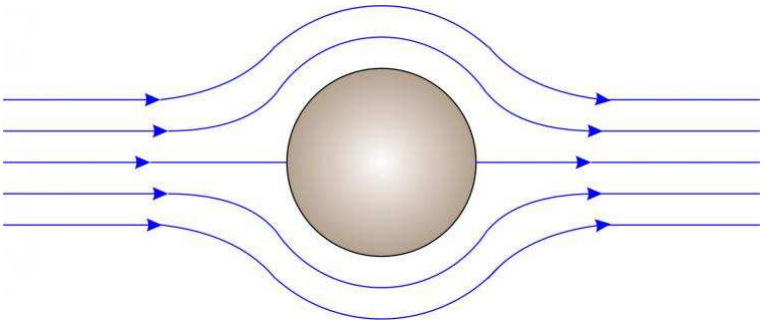


Fig. 13 Ecoulement laminaire sur un cylindre

Pour Re ~ 26, deux bulles de séparation symétriques apparaissent (tourbillons) derrière l'obstacle.

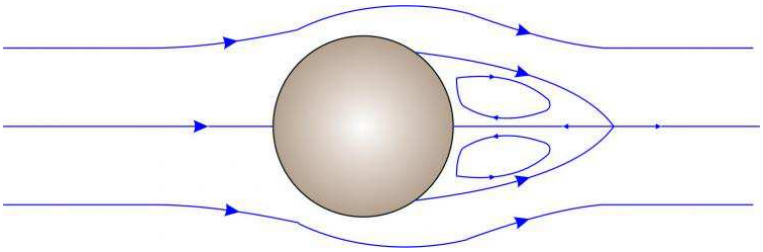


Fig. 14 Ecoulement laminaire sur un cylindre

Pour *Re* ~ 2 000, des tourbillons de Karman commencent à apparaître. Il y a décollement de la couche limite. Le sillage est turbulent. Le décollement se fait en amont de l'équateur. La couche limite, en amont du décrochement, reste laminaire.

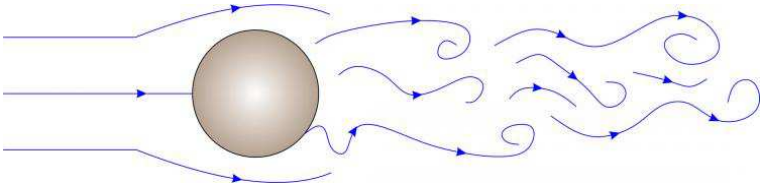


Fig. 15 Ecoulement en transition sur un cylindre

Pour *Re* ~ 15 000, la couche limite reste laminaire et se sépare de l'obstacle avant l'équateur. Le sillage turbulent est large.

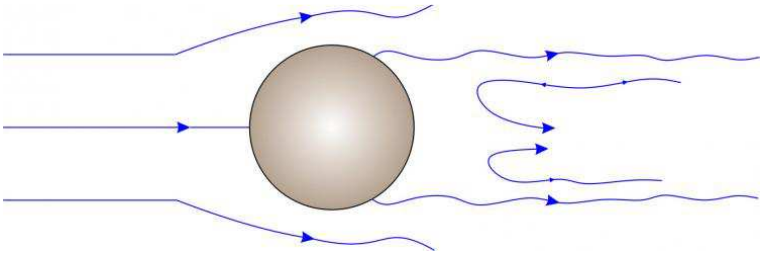


Fig. 16 Ecoulement en transition sur un cylindre

Pour *Re* > 30 000, Couche limite turbulente et sillage turbulent. La couche limite se décroche à l'aval du cylindre.

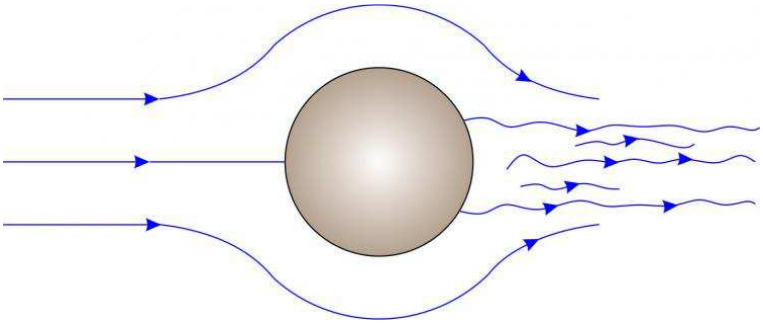


Fig. 17 Ecoulement turbulent sur un cylindre

- Notions de Débit

Le débit volumique se calcule à partir de la vitesse moyenne et de la section *S* transverse à l'écoulement qui la traverse, de la manière suivante, et s'exprime en m^3/s :

$$D_v = v_{moy}.S \tag{I.4.28}$$

De manière générale, les expressions du débit volumique et du débit massique (en *kg/s*) sont les suivantes :

$$D_m = \int_{\Sigma} \rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{n} d\sigma \tag{I.4.29}$$

$$D_v = \int_{\Sigma} \boldsymbol{v}.\boldsymbol{n} d\sigma \tag{I.4.30}$$

5. Actionneur Inertiel MHD à Conduction

Cette section porte sur l'actionneur inertiel MHD étudié et le contexte dans lequel s'applique l'ensemble des équations présentées précédemment.

5.1 Domaine d'Etude

Le domaine d'étude de la roue inertielle à conduction consiste en la section du canal torique dans lequel circule le fluide, section à forme rectangulaire. Une différence de potentiel électrique est imposée constante par des électrodes horizontales, ce qui créé un champ électrique axial. Un champ magnétique constant et radial $\boldsymbol{B_0}$ est imposé au moyen d'un électroaimant ou d'aimants polarisés radialement, par exemple. Voici une illustration du système étudié :

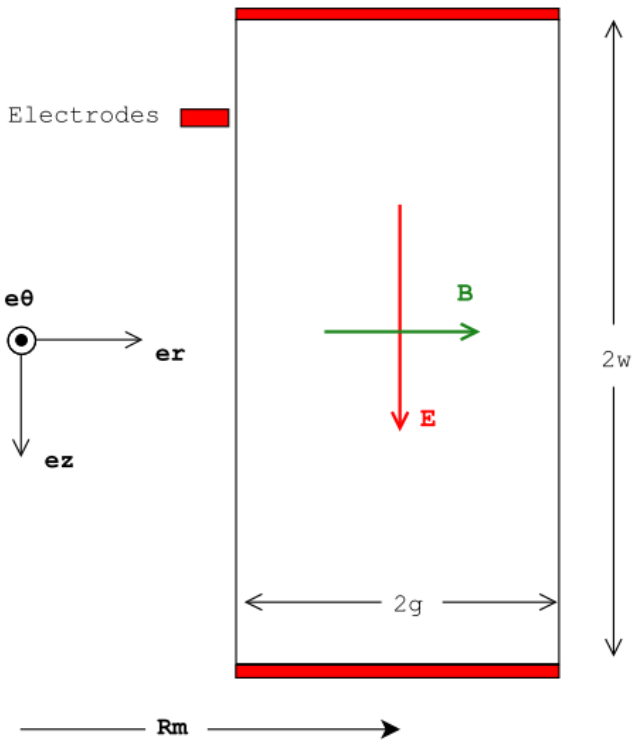


Fig. 18 Coupe schématique de la section du canal

Les champs électrique et magnétique appartiendront au plan de la section du canal torique. De plus, la géométrie est invariante par rotation autour de l'axe *z*. Ainsi, l'ensemble du problème sera

indépendant de la variable θ. La force MHD et la vitesse seront donc suivant $\boldsymbol{e_\theta}$, d'après l'expression de la force de Lorentz (I.4.10). Et, l'écoulement étant incompressible, on aura donc,

$$\boldsymbol{v} = v(r,z).\boldsymbol{e_\theta} \tag{I.5.1}$$

Aussi, dans la suite nous négligerons les forces inertielles. Ceci sera explicité plus tard.

5.2 Equations MHD

Les équations décrivant l'ensemble du problème sont ici rappelées en synthèse. Ainsi, nous avons l'équation de Navier-Stokes et la conservation de la masse, du côté de la mécanique des fluides, (I.4.1) et (I.4.3),

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu\,\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} \tag{I.5.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{v}) = 0 \tag{I.5.3}$$

Les phénomènes de l'électromagnétisme sont décrits par les équations de Maxwell, sous l'hypothèse de l'approximation quasi-statique. En effet, les phénomènes de l'électromagnétisme sont supposés beaucoup plus rapides que ceux de la mécanique des fluides.

$$\nabla.\boldsymbol{B} = 0 \quad \nabla\wedge\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \nabla\wedge\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{I.5.4}$$

Enfin, l'ensemble de ces équations sont couplées au travers des équations de couplage, (I.4.9) et (I.4.10),

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} \tag{I.5.5}$$

5.3 Conditions aux Limites

La première condition aux limites est celle de vitesse nulle du fluide au niveau des parois. Aussi, les électrodes imposent un gradient de potentiel aux parois. Le potentiel au niveau des électrodes est donc invariant suivant *r*. Aussi, les parois magnétiques étant isolantes, la densité de courant y sera tangentielle, c'est-à-dire axiale. Cela implique donc un gradient de potentiel électrique radial nul au niveau des parois magnétiques.

5.4 Grandeurs Electromécaniques

Afin de dimensionner la roue MHD, il est nécessaire de donner ici les équations permettant le calcul des grandeurs caractéristiques électromécanique. Telles que la puissance électrique fournie, la puissance mécanique développée, les pertes Joules, le moment cinétique développé, les couples mis en jeu, etc. L'ensemble de ces grandeurs constitueront donc la base de critères permettant de discuter la capacité de la roue dimensionnée à répondre aux exigences pour son application, à savoir le contrôle de l'attitude et de l'orbite pour les satellites.

- Puissance motrice MHD

La puissance motrice MHD se calcule globalement à partir en intégrant le produit scalaire local de la force MHD volumique et de la vitesse :

$$P_{MHD} = \iiint_V \boldsymbol{f_{mhd}}.\boldsymbol{v}.dV \tag{I.5.6}$$

- Puissance électrique fournie

Pour le calcul de la puissance électrique fournie, nous avons besoin de déterminer la tension électrique aux bornes des électrodes, ainsi que le courant traversant le canal.

La tension se détermine, le long d'une ligne reliant les deux électrodes, à partir de la loi d'Ohm MHD, de la manière suivante :

$$U = \int \left(\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right).\boldsymbol{dl} \tag{I.5.7}$$

Le courant se détermine à partir de l'intégrale surfacique du courant, surfaces transverses aux lignes de courants, dirigées par $\boldsymbol{n}$ défini sur le repère orthonormé :

$$I = \iint_S \boldsymbol{j}.\boldsymbol{n}dS \tag{I.5.8}$$

Alors,

$$P_{elec} = U * I \tag{I.5.9}$$

- Pertes Joules

Les pertes joules sont données par l'expression,

$$P_J = \iiint \frac{\|\boldsymbol{j}\|^2}{\sigma}.dV = \boldsymbol{0} \tag{I.5.10}$$

- Inertie

Par définition, l'inertie du fluide dans le canal torique, de rayon interne $r_{int} = R_m - g$ et de rayon externe $r_{ext} = R_m + g$, s'exprime par l'intégrale volumique,

$$J_\Delta = \iiint \rho r^2.dV \tag{I.5.11}$$

Ce qui donne,

$$J_\Delta = \frac{1}{2}.m.\left(r_{int}^2 + rext^2\right) \tag{I.5.12}$$

avec *m* la masse de fluide, et $\mathcal{V}$ le volume, qui s'expriment par,

$$m = \rho\mathcal{V} = \rho\pi.(2w)\left(r_{ext}^2 - r_{int}^2\right) \tag{I.5.13}$$

- Moment cinétique

Le moment cinétique se calcul sous forme intégrale par la relation suivante :

$$\boldsymbol{M_{cin}} = \iiint r\boldsymbol{e_r}\wedge\rho\boldsymbol{v}.dV = \left(\iiint \rho v r dV\right).\boldsymbol{e_z} = M_{cin}.\boldsymbol{e_z} \tag{I.5.14}$$

r étant le rayon d'un élément de volume et *v* sa vitesse.

- Vitesse moyenne

La vitesse moyenne peut se déduire de la détermination de l'inertie et du moment cinétique, par la relation suivante (I.4.40), (I.4.38),

$$M_{cin} = J_\Delta.\frac{v_{moy}}{R_m} \tag{I.5.15}$$

- Couple MHD

Il s'agit de l'intégrale volumique des couples locaux dans un élément de volume, à savoir, en terme de moment,

$$\boldsymbol{M_{MHD}} = \iiint r\boldsymbol{e_r}\wedge\boldsymbol{f_{mhd}}.dV = C_{MHD}.\boldsymbol{e_z} = \left(\iiint f_{mhd}.r.dV\right).\boldsymbol{e_z} \tag{I.5.16}$$

Le couple MHD correspondant à la norme du moment de la force MHD.

- Couple résistif

Le couple résistif peut être calculé de deux manières. Puisqu'il s'agit des forces visqueuses qui sont à l'origine de ce couple résistif, il peut être calculé à partir de leur expression,

$$\boldsymbol{M_{res_{vol}}} = \iiint r\boldsymbol{e_r}\wedge\mu\boldsymbol{\nabla^2 v}.dV = C_{res_{vol}}.\boldsymbol{e_z} = \left(\iiint \mu\nabla^2 v.r.dV\right).\boldsymbol{e_z} \tag{I.5.17}$$

Ou bien de manière surfacique, à partir du tenseur de contraintes visqueuses, calculé sur chacune des faces du canal torique, [9],

$$\boldsymbol{M_{res_{surf}}} = \iint \mu r.\boldsymbol{e_r}\wedge\left(r\frac{\partial\left(\frac{v_\theta(r,z)}{r}\right)}{\partial x}.\boldsymbol{e_\theta}.dS_r + \frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z}.\boldsymbol{e_\theta}.dS_z\right)$$

$$C_{res_{surf}} = \iint \mu r.\left(r\frac{\partial\left(\frac{v_\theta(r,z)}{r}\right)}{\partial x}.dS_r + \frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z}.dS_z\right) \tag{I.5.18}$$

Toutes ces grandeurs permettront par la suite de caractériser notre actionneur modélisé selon ses performances, et en comparaison des roues actuelles électromécaniques utilisées. Afin de dimensionner la roue MHD à conduction, il est maintenant nécessaire de s'intéresser aux modèles existants pour les moteurs MHD, permettant la mise en équations du problème étudié et sa résolution.

6. Modèle 1D cylindrique - Régime Permanent

Afin de modéliser les roues inertielles MHD en Régime Permanent, dans le but de dimensionner vis à vis de l'effet gyroscopique, un modèle analytique 1D cylindrique a été développé par A. Salvati et F. Curti [10], plus particulièrement sur la configuration à champ magnétique radial et champ électrique axial. Ce modèle permet de prendre en compte le caractère cylindrique de la géométrie. Il reste néanmoins en une seule dimension. Mais il permet d'obtenir un premier résultat rapide, car la solution s'obtient analytiquement. (Fig. 18) illustre le domaine d'étude et la configuration choisie.

L'écoulement se fait suivant $\boldsymbol{e_\theta}$. La configuration choisie est celle d'un champ magnétique radial toujours (entrefer magnétique de longueur $2g$). Ce champ est imposé, par des aimants ou électroaimants, à B_0 au niveau du rayon moyen R_m. Le champ électrique est imposé par des électrodes supposées parfaitement conductrices. Le plan ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_z}$) étant un plan de symétrie pour les sources de courants, le champ magnétique induit de par les lignes de courant du fluide sera othoradial.

$$\boldsymbol{E} = E_0.\boldsymbol{e_z} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{B_0 R_m}{r}.\boldsymbol{e_r} + b(r,z).\boldsymbol{e_\theta} \qquad E_0, B_0 > 0 \tag{I.6.1}$$

6.1 Hypothèses du Modèle 1D

Les hypothèses suivantes sont faites :

- La géométrie étant invariante par rotation autour de l'axe z, toutes les grandeurs sont indépendantes de la variable θ.
- L'écoulement est considéré incompressible et orthoradial (I.4.31) :

$$\boldsymbol{v} = v(r,z).\boldsymbol{e_\theta}$$

- Le ratio $Cf = \frac{w}{g}$ est supposé grand devant l'unité. De plus, notre intérêt étant porté sur l'écoulement non loin du centre du canal, les variations axiales de vitesses pourront être négligées.

$$\boldsymbol{v} = v(r).\boldsymbol{e_\theta} \tag{I.6.2}$$

- Les phénomènes de propagation sont négligés dans l'équation de Maxwell-Ampère (I.4.6), ainsi que les effets de bords.
- Considérant le fluide à l'équilibre hydrostatique, et, la géométrie étant circulaire, il n'y a pas de gradient de pression à prendre en compte.

Remarque :

Dans la pratique, nous ne nous intéressons qu'à la projection orthoradiale de l'équation de Navier-Stokes. Projection pour laquelle les forces inertielles et les gradients de pression sont bien négligeables, et direction sur laquelle s'applique l'ensemble des forces MHD. Cependant,

cela signifie aussi que l'existence de vitesses radiales et axiales n'est pas prise en compte. Cette hypothèse est très contraignante. [11] montre que les vitesses radiales et axiales existent. En effet, la géométrie étant cylindrique, il y a existence de gradients de pressions radiaux et forces inertielles radiales. Aussi, du fait de l'apparition d'un champ magnétique induit orthoradiale et des composantes radiale et axiale de la densité de courant (cf. II et l'équation (II.1.10)), la force de Lorentz présente bien des composantes radiale et axiale. Toutefois, à moins de faire un modèle 3D qui nous semble très complexe et prématuré dans le développement actuel des actionneurs inertiels MHD, il n'est pas possible de prendre en compte ces composantes de vitesse en 1D et en 2D. [11] présente toutefois une solution axisymétrique dans un cas particulier. En fait ce sont les effets des composantes radiales et axiales qui sont négligés. Et ce, dans une première approche, et afin de déterminer le moment cinétique fourni par l'actionneur en régime permanent, du fait de la force d'entrainement de Lorentz orthoradiale, composante prépondérante.

- Cas du Régime Permanent.
- La densité de courant volumique est à flux conservatif, du fait de la loi de conservation de la charge et du régime permanent. Et,

$$\boldsymbol{j} = j(r).\boldsymbol{e_z} \tag{I.6.3}$$

- En première approximation, l'écoulement sera considéré laminaire.
- Le nombre de Reynolds magnétique est supposé petit devant l'unité. Les phénomènes inductifs (pour le champ magnétique) sont donc négligés.
- Le fluide est supposé parfaitement conducteur. Le cadre de l'approximation quasi-statique est donc appliqué ici.

De ce fait, en reprenant les équations (I .4.4) et (I.4.7)

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}(\varphi).\boldsymbol{e_z} = E_0.\boldsymbol{e_z} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{B_0 R_m}{r}.\boldsymbol{e_r} \qquad E_0, B_0 > 0 \tag{I.6.4}$$

6.2 Conditions aux Limites

Voici les conditions Limites aux problèmes :

- La vitesse est nulle aux parois

$$v(Rm \pm g, z) = 0 \tag{I.6.5}$$

- Le champ électrique est supposé purement axial et constant, et les électrodes, parfaitement conductrices, impose une tension *U* à leurs bornes, de telle sorte que,

$$\varphi(\pm w) = \mp\frac{U}{2} \tag{I.6.6}$$

$$E_0 = \frac{U}{2w} > 0$$

6.3 Equations MHD en 1D

On obtient les expressions suivantes,

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) = \sigma\left(\frac{U}{2w} - v_\theta(r).\frac{B_0.R_m}{r}\right).\boldsymbol{e_z} \quad \text{(I.6.7)}$$

$$\boldsymbol{f_{mhd}} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B} = \sigma B_0.\frac{R_m}{r}.\left(\frac{U}{2w} - v_{\theta(r)}.\frac{B_0.R_m}{r}\right).\boldsymbol{e_\theta} \quad \text{(I.6.8)}$$

L'équation de Navier-Stokes (I.4.1) devient,

$$\left(\Delta v_\theta(r) - \frac{v_\theta(r)}{r^2}.\left(1 + \frac{\sigma}{\mu}B_0^2{R_m}^2\right)\right) = -\frac{\sigma}{\mu}.\frac{B_0E_0R_m}{r} \quad \text{(I.6.9)}$$

6.4 Expressions analytiques

(I.6.9) se résout analytiquement et la vitesse est de la forme :

$$v_\theta(r) = \frac{E_0}{B_0}\left(\frac{r}{R_m} - Ar^\alpha - Br^{-\alpha}\right) \quad \text{(I.6.10)}$$

Avec,

$$A = \frac{1 - \beta^{\alpha+1}}{(1 - \beta^{2\alpha}).{R_m}^\alpha} \quad \text{(I.6.11)}$$

$$B = \beta^{\alpha+1}.\frac{1 - \beta^{\alpha-1}}{1 - \beta^{2\alpha}}.{R_m}^\alpha \quad \text{(I.6.12)}$$

Et,

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{{H_a}^2}{\lambda^2}} \;\; ; \;\; \beta = \frac{R_m + g}{R_m - g} \quad \text{(I.6.13)}$$

$$\lambda = \frac{g}{R_m} \;\; ; \;\; H_a = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)} * B_0 g \quad \text{(I.6.14)}$$

6.5 Applications

Exprimons la vitesse moyenne v_{moy},

$$v_{moy} = \frac{1}{2g}.\int_{R_m-g}^{R_m+g} v_\theta(r).dr \quad \text{(I.6.15)}$$

Comme $\alpha > 1$,

$$v_{\theta_{moy}} = \frac{E_0}{B_0}\left(\frac{1}{R_m} - \frac{A((R_m+g)^{\alpha+1} - (R_m-g)^{\alpha+1})}{2g.(\alpha+1)} - \frac{B((R_m+g)^{-\alpha+1} - (R_m-g)^{-\alpha+1})}{2g.(-\alpha+1)}\right) \quad \text{(I.6.16)}$$

Le profil de l'écoulement obtenu est de la forme d'un profil de Hartmann, comme en 1D cartésien, mais avec un profil "penché", dû au caractère cylindrique de la géométrie et à la conservation du flux magnétique. Voici sa forme, pour différentes valeurs du nombre de Hartmann, en considérant le mercure comme fluide utilisé :

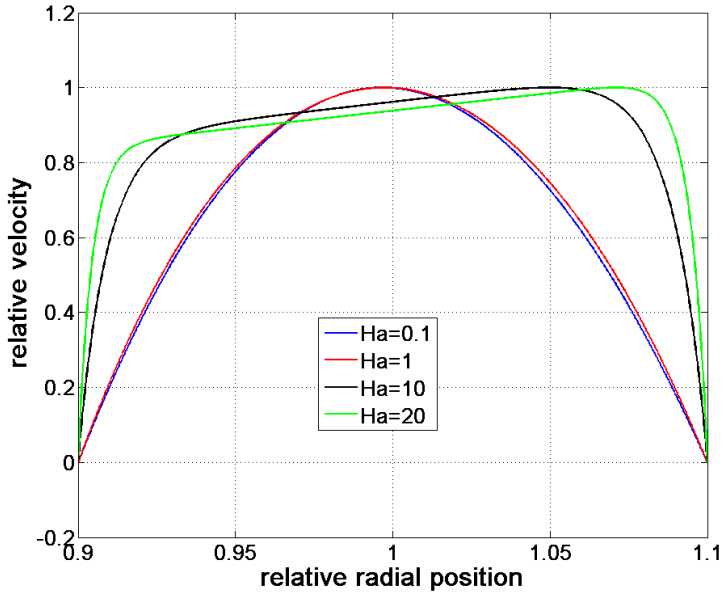


Fig. 19 Représentation du profil de vitesse normalisé pour différentes valeurs du nombre de Hartmann 1D cylindrique

Observations :

Ces différents profils en vitesse montre bien la forme d'un profil de Hartmann dit « aplati » pour des nombres de Hartmann relativement élevés (≥ 10), et des profils plus semblables à un écoulement classique de type Poiseuille. Les profils de type Hartmann présentent des gradients de vitesse importants proche parois, pour atteindre une valeur maximale inférieure à celle obtenue pour les profils de type Poiseuille.

- Analogie électrique

A l'image de l'analogie avec le circuit électrique présenté dans le cours [12], dans le cas de problèmes MHD en 1D cartésien, un schéma électrique équivalent est ici développé. A partir de l'expression de la densité de courant (I.5.7), de la loi de conservation de la charge (I.4.8), le courant I traversant le canal entre les deux électrodes peut s'exprimer ainsi,

$$I(r) = \iint j(r).rdrd\theta = \iint \sigma\left(\frac{U}{2w} - v_\theta(r).\frac{B_0.R_m}{r}\right).r.drd\theta \quad \text{(I.6.17)}$$

$$I = 2\pi.\sigma.R_m.\left(2g.\frac{U}{2w} - B_0\int_{R_m-g}^{R_m+g} v_\theta(r).dr\right) = 2\pi.\sigma.R_m.\left(2g.\frac{U}{2w} - B_0.2g.v_{moy}\right) \quad \text{(I.6.18)}$$

De plus, en posant R_i la résistance équivalente interne au canal, par analogie avec le circuit électrique,

$$IR_i = U - v_{\theta_{moy}}.B_0.2w \quad \text{(I.6.19)}$$

Avec,

$$R_i = \frac{w}{\sigma.(2\pi R_m).g} \quad \text{(I.6.20)}$$

Le schéma électrique analogue peut alors être donné :

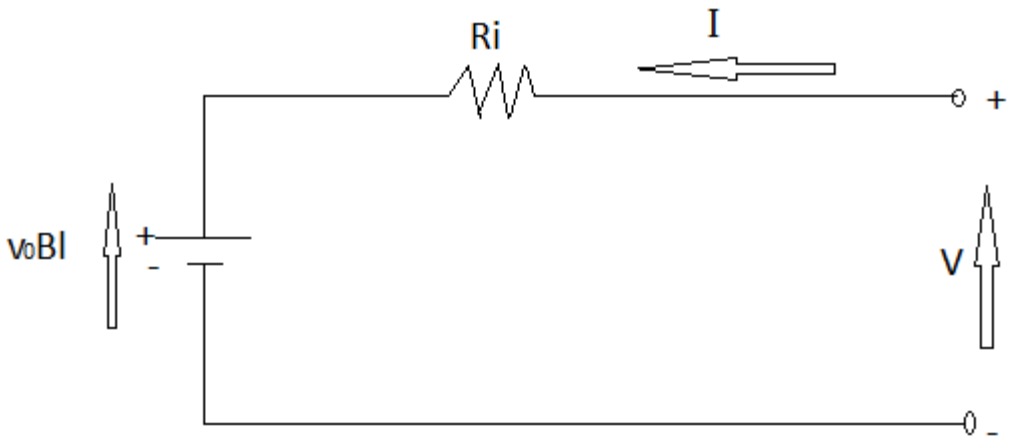


Fig. 20 Schéma électrique du moteur MHD

Compte tenu de l'illustration qu'apporte cette analogie, nous pouvons nous intéresser à définir les différentes puissances mises en jeu. Tout d'abord, la puissance électrique fournie par l'alimentation peut être définie comme suit, en convention générateur :

$$P_{e_f} = U.I \quad \text{(I.6.21)}$$

Ensuite, la puissance absorbée par l'actionneur, autrement dit la puissance mécanique MHD développée par l'actionneur peut être définie comme suit, en convention moteur :

$$P_{MHD} = I.v_{\theta_{moy}}.B_{0.2w} \quad \text{(I.6.22)}$$

Et la puissance dissipée par Effet Joule dans le métal liquide, en convention récepteur, par :

$$P_J = R_i.I^2 \quad \text{(I.6.23)}$$

Il est alors possible d'écrire le bilan de puissance sous la forme suivante :

$$P_{e_f} = P_{MHD} + P_J \quad \text{(I.6.24)}$$

$$U.I = R_i.I^2 + v_{\theta_{moy}}.B_0.2w.I \quad \text{(I.6.25)}$$

Remarque :

Si $0 < v_{\theta_{moy}} < \frac{U}{2w.B_0}$, alors $P_{e_f} > 0 \ \ et \ \ P_{MHD} > 0$, ce qui correspond à un fonctionnement moteur pour cet actionneur. Le fluide est mis en mouvement par MHD.

Si $v_{\theta_{moy}} > \frac{U}{2w.B_0}$, alors $P_{e_f} < 0 \ \ et \ \ P_{MHD} < 0$, alors, à partir d'un écoulement préétabli, et sous l'effet du champ électromagnétique, le fluide conducteur est freiné et l'énergie mécanique est convertie en énergie électrique. Ceci correspond au fonctionnement générateur de la MHD.

Si $v_{\theta_{moy}} < 0$, alors $P_{e_f} > 0 \ \ et \ \ P_{MHD} < 0$, dans ce cas, de la puissance électrique est fournie et convertie en puissance mécanique sous forme d'un écoulement dans la direction $-\boldsymbol{e_\theta}$, sous l'effet d'un champ magnétique suivant $-\boldsymbol{e_r}$. Il peu aussi s'agir d'un frein MHD dans le cas d'un écoulement préétabli dans la direction orthoradiale (positive).

Conclusion Chapitre 1 :

Ce chapitre nous a donc permis de mieux comprendre quels sont les besoins demandés par le CNES pour réaliser le contrôle de l'attitude et de l'orbite des satellites, plus particulièrement en mission d'observation terrestre. Ces prérequis ont ainsi été traduits en modes de fonctionnements pour notre Roue MHD. A savoir, un fonctionnement dit gyroscopique permettant de stabiliser le satellite sur un axe lorsque la roue (le fluide) présente une vitesse constante, et un fonctionnement dit à réaction, c'est-à-dire lorsque le fluide en rotation est accéléré ou décéléré et produit ainsi un couple de réaction sur l'axe considéré et permet le pointage du satellite. Plusieurs roues en association permettront ainsi un pointage dans toutes les directions de l'espace.

La présentation des caractéristiques des roues actuelles mise en parallèle à celles des roues MHD a permis de montrer les divers avantages que peut présenter ce nouveau type de technologie pour l'application visée, de part essentiellement la viscosité naturelle du fluide et l'absence de rotor massique et de roulements mécaniques. Ainsi, ce type d'actionneur MHD devrait offrir une précision accrue, particulièrement pour les faibles vitesses (et faibles angles de pointage), ainsi qu'une durée de vie fortement augmentée.

Nous avons ensuite défini ce qu'est la physique de la MHD. Etant la rencontre des physiques de la Mécanique des Fluides et de l'Electromagnétisme, les diverses lois correspondantes ont été présentées, ainsi que les lois de Couplage représentant le liant entre ces deux physiques qu'est la MHD. Ce travail, couplé à une présentation du système étudié, a permis une première modélisation analytique en 1D cylindrique. Cette modélisation peut ainsi servir à un premier dimensionnement simple et rapide de l'actionneur. Mais surtout, elle a permis de mieux appréhender quel sera le type d'écoulement obtenu dans le canal torique constituant la roue inertielle.

Néanmoins, cette modélisation présente des hypothèses fortes, particulièrement sur la géométrie de l'actionneur, qui peuvent donc être contraignantes et amener à un résultat faussé quant au dimensionnement de l'actionneur. Toutefois, elle servira de socle pour la comparaison de résultats obtenus à partir de modèles plus complexes résolus numériquement. C'est donc sur ce point que porte le prochain chapitre.

Aussi, une analogie avec l'électricité a été présentée et permet d'élaborer un regard de *génie électrique* sur cette application. Cet aspect peut être particulièrement intéressant lorsqu'il s'agit de réaliser l'alimentation d'un tel actionneur.

Références

[1] - M. François Petrèlis, "Effet Dynamo : Etude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique", Thèse de doctorat de l'université de Paris 6, 2002

[2] - S. Motora, K, Imaichi, M. Nakato, S. Takesawa, "An outline of the R&D project on superconducting MHD ship propulsion in Japan", MHDs91, Int.Synp. On Superconducting magneto hydrodynamic ship propulsion, Proceedings, pp. 53-68, Japan, Oct. 1991

[3] - J. P. Thibault, "Seawater magnetohydrodynamic thrusters", Onde Electrique, Mar-Apr 1995, pp. 19-23

[4] - W. A. Rice, U.S. patent 2997013, August 12, 1961

[5] - J. B. Friauf, "Electromagnetic ship propulsion" J. of Amer.Soc. Of Naval engrs, Feb. 1960, pp 139-142

[6] - O. M. Phillips, "The prospects for magneto hydrodynamic ship propulsion", J. os Ship Research, March 1962, pp 43-51

[7] - H. Branover, A. El Boher, E. Greenspan and A. Barak, "Promising Applications of the Liquid Metal MHD Energy Conversion Technology", Proceedings of the 24th Intersociety Energy Conversion Engineering, Conf. Washington, D.C, Aug. 6-11 1989, pp. 1051-1058

[8] - C. Casteras, Y. Lefèvre, D. Harribey, CNES, CNRS, INPT, WO 2013124225 A1

[9] – F. Sidoroff, “Mécanique des milieu continus”. Ecole d’ingénieur Centrale de Lyon, 1980, pp. 166. <cel-00530377>

[10] - A. Salvati ; F. Curti, "MHD Reaction Wheel for Spacecraft Attitude Control : Configuration Lumped Parameter Model", IAA-AAS-DyCoSS2-13-01

[11] G. Vinsard, S. Dufour and J. P. Brancher , “Rotating motion in salt water with Laplace forces,”*IEEE Trans. Magn.,*vol. 45, n°3, March 2009.

[12] - Woodson, Herbert H., and James R. Melcher. Electromechanical Dynamics. 3 vols. (Massachusetts Institute of Technology : MIT OpenCourseWare), pp. 861-894.

II. Modélisation 2D Statique et Résolution Numérique – Effet Gyroscopique

Suite à la modélisation 1D en cylindrique de la roue MHD à conduction, pour son fonctionnement inertiel (gyroscopique), ce chapitre porte sur la modélisation de cette même roue en 2D Axisymétrique, en Régime Permanent. Cette modélisation intervient dans l'idée d'améliorer la précision de la modélisation 1D analytique présentée précédemment, tout en étant plus large dans notre approche (octroi d'hypothèses géométriques contraignantes pour la conception). Aussi cette modélisation nous permettra d'approfondir notre compréhension des phénomènes MHD. Il s'agira donc de mettre en évidence les apports de ce nouveau modèle, comparativement au 1D cylindrique. Tout en restant dans l'optique du dimensionnement de cet actionneur, du point de vue de son fonctionnement gyroscopique (Moment Cinétique fourni, entre autres critères).

Nous verrons que le système d'équations constitue en fait un problème Dual, du point de vue des équations et des variables du système, mais aussi de la réalisation de l'actionneur, plus particulièrement son alimentation.

Le modèle obtenu sera résolu à l'aide d'une méthode numérique, à savoir les différences finies, compte tenu de la géométrie simple de domaine d'étude. Et ce, pour les deux approches possibles (dualité). Les résultats seront comparés, afin de vérifier l'équivalence des deux approches.

De plus, un travail sur la résolution numérique sera fait, particulièrement sur le maillage utilisé, afin d'améliorer la précision des résultats pour un temps de calcul moindre.

Enfin, seront présentées les évolutions des grandeurs caractéristiques de l'actionneur, dont la détermination est nécessaire au dimensionnement, selon des variations du champ électromagnétique en entrée.

1. Modélisations 2D Axisymétrique

Deux approches sont possibles pour cette modélisation. Ces deux méthodes s'appuient sur la connaissance du champ magnétique imposé dans l'entrefer. Toutefois, elle diffèrent du fait que l'une s'intéresse à la résolution du potentiel électrique, et est nommée *B*-φ, et que l'autre, de par l'introduction du potentiel vecteur électrique *T*, se concentre sur la prise en compte de l'existence, et la résolution, du champ magnétique induit dans l'entrefer. Cette dernière est nommée *B*-*T*. Nous montrerons que ces deux approches, distinctes en apparence, sont à la fois équivalentes en ce qui concerne la résolution du problème, et indépendantes.

1.1 Modèle B-φ

1.1.1 Formulation générale

L'établissement de ce modèle est basé sur les travaux de Moreau et Hunt [1-3] effectués dans les années 1960, et repris dans [4]. Une structure à champ magnétique radial est considérée. (Fig.18) la présente.

La loi de conservation de la charge (I.4.8) associée au Régime Permanent implique que la densité de courant $\boldsymbol{j}$ est à divergence nulle :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} = 0 \qquad \text{(II.1.1)}$$

Cela permet de déduire, à partir de l'expression de la loi d'Ohm généralisée (I.4.9), l'équation suivante :

$$\Delta(\varphi) = \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \qquad \text{(II.1.2)}$$

De plus, l'équation de Navier-Stokes peut se reformuler, à partir de l'expression de la force de Lorentz (I.4.10) et de la loi d'Ohm en MHD (I.4.9), en Régime Permanent par,

$$\rho.(\boldsymbol{v}.\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu.\Delta\boldsymbol{v} + \sigma(-\boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} + \rho.\boldsymbol{g} \qquad \text{(II.1.3)}$$

Il convient maintenant d'appliquer cette formulation générale à la modélisation 2D axisymétrique.

1.1.2. Application Axisymétrique du Modèle B-φ

Un champ B_0 est imposé au milieu de l'entrefer magnétique (Fig. 18). Les électrodes imposent une tension U à leurs bornes, axialement. La géométrie ainsi que le champ magnétique sont invariants par rotation autour de l'axe z. C'est pourquoi des considérations 2D axisymétriques peuvent être appliquées. De plus, il n'y a pas de gradient de pression suivant $\boldsymbol{e_\theta}$. De sorte que toutes les variables ne dépendent pas de θ.

Pour développer ce modèle, nous utilisons à nouveau certaines hypothèses :

- L'écoulement étant considéré incompressible, et du fait de la loi de conservation de la masse (I.4.3), la vitesse du fluide est de la forme :

$$\boldsymbol{v}(r,z) = v(r,z)\boldsymbol{e_\theta} \qquad \text{(II.1.4)}$$

- Les phénomènes de propagation sont négligés dans l'équation de Maxwell-Ampère, du fait du régime permanent, (I.4.6) :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B} = \mu_0.\boldsymbol{j} \qquad \text{(II.1.5)}$$

- L'existence de gradients de pression dans l'équation de Navier-Stokes est négligée, la géométrie de l'actionneur étant circulaire, et considérant l'écoulement à l'équilibre hydrostatique.

- Le plan ($\mathbf{e_r}$; $\mathbf{e_z}$) est un plan de symétrie pour les sources de courant. De fait le champ magnétique induit par l'écoulement sera orthoradial.

$$\boldsymbol{B} = B_0.\frac{R_m}{r}.\boldsymbol{e_r} + b(r,z).\boldsymbol{e_\theta} \qquad \text{(II.1.6)}$$

- Les effets de bords sont négligés.
- Dans cette modélisation, nous nous placerons en Régime Permanent. Ainsi (I.4.7) devient,

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\big(\varphi(r,z)\big) \qquad \text{(II.1.7)}$$

- En grossière approximation, l'écoulement sera considéré laminaire ($R_e < 2\,000$).

Les conditions aux limites associées au domaine d'étude sont les suivantes :

- La vitesse de l'écoulement est nulle aux parois :

$$v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w) \tag{II.1.8}$$

- Les électrodes imposent une différence de potentiel à leurs bornes de telle sorte que :

$$\varphi(r, \pm w) = \mp \frac{U}{2} \tag{II.1.9}$$

- Les parois magnétiques sont considérées parfaitement isolantes. Les lignes de courant sont donc tangentielles à ces parois et :

$$j_r(R_m \pm g, z) = 0 \tag{II.1.10}$$

- Au niveau des électrodes horizontales, la densité de courant n'a pas de composante radiale non plus :

$$j_r(z, \pm w) = 0 \tag{II.1.11}$$

Le modèle est ensuite développé de la manière suivante. :

A partir de la loi d'Ohm en MHD (I.4.9), et de l'expression du champ électrique (II.1.7) et du champ magnétique (II.1.6), l'expression de la densité de courant devient, dans le repère $(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_z}, \boldsymbol{e_\theta})$,

$$\boldsymbol{j} = \sigma . \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \varphi(r,z)}{\partial r} \\ 0 \\ -v_\theta(r,z) B_0 . \dfrac{R_m}{r} - \dfrac{\partial \varphi(r,z)}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{II.1.12}$$

Ce qui permet d'obtenir la relation suivante à partir de (II.1.2),

$$\Delta \varphi + B_0 . \frac{R_m}{r} . \frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} = 0 \tag{II.1.13}$$

Et, à partir de l'équation de Navier-Stokes (II.1.3), projetée suivant $\boldsymbol{e_\theta}$, en régime permanent et à l'équilibre hydrostatique et considérant l'ensemble des hypothèses citées, puis à partir de l'expression (II.1.12),

$$\Delta v_\theta(r,z) - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2} . \left(1 + \frac{\sigma}{\mu} . B_0^2 R_m^2\right) = \frac{\sigma}{\mu} . B_0 . \frac{R_m}{r} . \frac{\partial \varphi(r,z)}{\partial z} \tag{II.1.14}$$

Avec $\Delta v_\theta(r,z) = \frac{1}{r} . \frac{\partial\left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$ ici.

Le système à 2 équations suivant, constituant le modèle en question, est donc obtenu :

$$\Delta\varphi + B_0.\frac{R_m}{r}.\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} = 0 \tag{II.1.15}$$

$$\Delta v_\theta(r,z) - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2}.\left(1 + \frac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right) = \frac{\sigma}{\mu}.B_0.\frac{R_m}{r}.\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z} \tag{II.1.16}$$

Avec pour Conditions aux Limites :

$$v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w) \tag{II.1.17}$$

$$j_r(R_m \pm g, z) = 0 = \frac{\partial\varphi(R_m \pm g, z)}{\partial r} \tag{II.1.18}$$

$$\varphi(r, \pm w) = \mp\frac{U}{2} \tag{II.1.19}$$

$$j_r(r, \pm w) = 0 = \frac{\partial\varphi(r, \pm w)}{\partial r} \tag{II.1.20}$$

Pour remarque, l'équation (II.1.15) fait apparaître, au second terme, une densité volumique de charges équivalente (à l'inverse de la permittivité dans le vide près) du à l'interaction du champ magnétique et du champ des vitesses. Ce système est entièrement déterminé de par les conditions aux limites.

1.2 Modèle en B-T

1.2.1 Introduction au Modèle B-T

Contrairement à la modélisation précédente utilisant classiquement le potentiel électrique ou le potentiel vecteur magnétique, celle présentée ici introduit le potentiel vecteur électrique (**T)**. Cela correspond au cas où le courant total traversant le canal est imposé. [5]

La densité de courant étant à divergence nulle (II.1.1), le potentiel vecteur électrique peut être introduit :

$$\boldsymbol{j} = \nabla\wedge\boldsymbol{T} \tag{II.1.21}$$

Et, à partir de la loi d'Ohm en MHD (I.4.9) de l'expression du champ électrique (I.4.7) en régime permanent, en prenant le rotationnel de la densité de courant,

$$\boldsymbol{\nabla\wedge(\nabla\wedge T)} = \sigma.\nabla\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) \tag{II.1.22}$$

Aussi, à partir de l'expression de la force de Lorentz (I.4.10), l'équation de Navier Stokes peut s'écrire, en régime permanent, par,

$$\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\nabla\wedge T})\wedge\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\rho.g} \tag{II.1.23}$$

Ces deux équations constituent l'ensemble des équations du problème MHD en régime permanent.

1.2.2 Application Axisymétrique du Modèle B-T

Pour l'application de ce modèle, l'ensemble des hypothèses faites pour le modèle *B-φ* sont de nouveau considérées (cf. II.1.1.2). Considérant l'expression du champ magnétique rappelée ici,

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_0}(r) + b(r,z).\boldsymbol{e_\theta} \tag{II.1.24}$$

Avec,

$$\boldsymbol{B_0}(r) = B_0.\frac{R_m}{r}.\boldsymbol{e_r} \tag{II.1.25}$$

Et l'équation de Maxwell-Ampère (II.1.5), le potentiel vecteur électrique peut se relier au champ magnétique, en introduisant le potentiel scalaire magnétique **Ω** par la relation suivante,

$$\boldsymbol{B} = \mu_0.(\boldsymbol{T} - \nabla\Omega) \tag{II.1.26}$$

Et, puisque,

$$\nabla\wedge\boldsymbol{B} = \nabla\wedge(b(r,z).\boldsymbol{e_\theta}) \tag{II.1.27}$$

Et,

$$\nabla\wedge\boldsymbol{B} = \mu_0.\nabla\wedge\boldsymbol{T} \tag{II.1.28}$$

Alors, en choisissant $\boldsymbol{T}$ tel qu'il soit à divergence nulle, comme le champ magnétique induit $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{T} = \frac{b(r,z)}{\mu_0}.\boldsymbol{e_\theta} \tag{II.1.29}$$

Et,

$$-\nabla\Omega = B_0.\frac{R_m}{r}.\boldsymbol{e_r} \tag{II.1.30}$$

Ce qui montre que le gradient du potentiel scalaire magnétique correspond physiquement au champ magnétique appliqué.

De plus, d'après (II.1.4), l'écoulement étant considéré incompressible,

$$\boldsymbol{v}(r,z) = v(r,z)\boldsymbol{e_\theta} \tag{II.1.31}$$

Ainsi, à partir de (II.1.22), (II.1.24) et (II.1.31), l'équation suivante est obtenue :

$$\boldsymbol{\nabla\wedge(\nabla\wedge T)} = \sigma.\nabla\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B_0}) \tag{II.1.32}$$

Aussi, à partir de (II.1.23) et (II.1.31),

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\nabla\wedge T})\wedge\boldsymbol{B} = +\boldsymbol{\nabla}p \tag{II.1.33}$$

Projetées suivant $\boldsymbol{e_\theta}$, et à l'équilibre hydrostatique, ces deux équations donnent :

$$\Delta T - \frac{T}{r^2} + \sigma B_m R_m \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) = 0 \tag{II.1.34}$$

$$\left(\Delta v - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{B_m R_m}{\mu\, r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rT) = 0 \tag{II.1.35}$$

Où *T* constitue la composante orthoradiale du potentiel vecteur électrique.

Remarque :

D'après (II.1.29), (II.1.34) et (II.1.35) sont équivalentes à :

$$\Delta b(r,z) - \frac{b(r,z)}{r^2} + \mu_0 \sigma B_0 R_m . \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

$$\Delta v_\theta(r,z) - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2} + \frac{B_0}{\mu . \mu_0} . \frac{R_m}{r} . \left(\frac{1}{r} . \frac{\partial r b(r,z)}{\partial r}\right) = 0$$

Cette écriture intervient dans les travaux de Moreau [1].

L'expression de la densité de courant en fonction du champ magnétique induit est précisée, de par l'équation de Maxwell-Ampère (II.1.5)

$$\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_0} . \frac{\partial b(r,z)}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{\mu_0} . \frac{1}{r} . \frac{\partial r . b(r,z)}{\partial r} \end{pmatrix} \tag{II.1.36}$$

Les conditions limites associées au problème sont données au paragraphe II.1 à savoir :

- Vitesses nulles aux parois (II.1.28) :

$$v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w) \tag{II.1.37}$$

- Les parois magnétiques sont considérées parfaitement isolantes. Les lignes de courant sont donc tangentielles à ces parois et, (II.1.29) :

$$j_r(R_m \pm g, z) = 0 = \frac{1}{\mu_0} . \frac{\partial b(R_m \pm g, z)}{\partial z} \tag{II.1.38}$$

- Au niveau des électrodes horizontales, la densité de courant n'a pas de composante radiale non plus, (II.1.31) :

$$j_r(z, \pm w) = 0 = \frac{1}{\mu_0} . \frac{\partial b(r, \pm w)}{\partial z} \tag{II.1.39}$$

A partir de (II.1.21), (II.1.38) et (II.1.39) deviennent :

$$j_r(z, \pm w) = \frac{\partial}{\partial z} T(r, \pm w) = 0 \tag{II.1.40}$$

$$j_r(R_m \pm g, z) = \frac{\partial}{\partial z} T(R_m \pm g, z) = 0 \tag{II.1.41}$$

Le potentiel vecteur électrique est donc uniforme le long des parois verticales magnétiques. T_{int} et T_{ext} sont notés de sorte que :

$$T_{int} = T(R_m - g, z) \tag{II.1.42}$$

$$T_{ext} = T(R_m + g, z) \tag{II.1.43}$$

Les valeurs du potentiel vecteur électrique T_{int} et T_{ext} peuvent être reliées au courant imposé au niveau des électrodes. En effet, au niveau des électrodes, la densité de courant est purement axiale. Et la densité de courant étant à flux conservatif, d'après la relation (II.1.1), dans le cadre de l'approximation quasi-statique (en régime permanent ici), la connaissance de la seule densité de courant axiale à une électrode permet de déterminer la valeur du courant traversant le canal. Ainsi, le courant I_0 imposé au fluide au travers des électrodes est égal à :

$$I_0 = \iint_{S_{elect}} j_z dS_{elect} \tag{II.1.44}$$

Et d'après le théorème de Stokes et (II.1.21),

$$I_0 = 2\pi \int_{R_m - g}^{R_m + g} \frac{1}{r} \frac{\partial (rT)}{\partial r} r dr \tag{II.1.45}$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation suivante :

$$I_0 = 2\pi((R_m + g)T_{ext} - (R_m - g)T_{int}) \tag{II.1.46}$$

Ainsi, en posant le potentiel vecteur électrique au rayon interne égal à zéro, les conditions limites suivante sont obtenues :

$$T_{int} = 0 \tag{II.1.47}$$

$$T_{ext} = \frac{I_0}{2\pi(R_m + g)} \tag{II.1.48}$$

Ou encore, à partir de (II.1.29),

$$b_{int} = 0 \tag{II.1.49}$$

$$b_{ext} = \frac{\mu_0 . I_0}{2\pi(R_m + g)} \tag{II.1.50}$$

Le problème étudié est donc constitué des équations (II.1.34) et (II.1.35), avec pour conditions aux limites (II.1.37), (II.1.40), (II.1.47) et (II.1.47).

Ainsi, c'est le courant qui est ici imposé, contrairement au modèle *B-φ* où la tension était imposée. Le modèle *B-T* constitue donc une alternative intéressante si l'étude de la conception d'une roue inertielle alimentée par une source de courant et pilotée en courant (et en champ magnétique s'il est produit à partir d'un électroaimant…) est souhaitée.

1.3 Bilan de la Modélisation

Deux approches ont donc été obtenues par la modélisation, représentées par deux systèmes d'équations distincts et rappelés ci-dessous, avec leurs conditions aux limites :

Tableau 1 Bilan de la Modélisation 2D Axisymétrique Statique

Modèle B-φ	**Modèle B-T**
$\Delta\varphi + B_0.\frac{R_m}{r}.\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} = 0$	$\Delta T - \frac{T}{r^2} + \sigma B_m R_m \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) = 0$
$\Delta v_\theta(r,z) - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2}.\left(1+\frac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right) = \frac{\sigma}{\mu}.B_0.\frac{R_m}{r}.\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z}$	$\left(\Delta v - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{B_m R_m}{\mu\, r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rT) = 0$
$v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w)$	$v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w)$
$\varphi(r, \pm w) = \mp\frac{U}{2}$	$j_r(z, \pm w) = \frac{\partial}{\partial z}T(r, \pm w) = 0$
$j_r(R_m \pm g, z) = 0 = \frac{\partial\varphi(R_m \pm g, z)}{\partial r}$	$T_{int} = 0 \;\; ; \;\; T_{ext} = \frac{I_0}{2\pi(R_m + g)}$

Il est important de constater que les équations en Laplacien de T et φ, sur la deuxième ligne de ce tableau, sont indépendantes l'une de l'autre. Aussi, chacun des systèmes associés aux deux modèles sont parfaitement déterminés par l'ensemble des conditions aux limites. D'ailleurs les conditions aux limites sont absolument équivalentes pour chacun des deux modèles. Seules les variables en fonction desquelles elles sont exprimées changent. En effet, les deux dernières lignes du tableau viennent toutes deux du fait que la densité de courant radiale est nulle au niveau de chacune des parois.

C'est pourquoi, nous pouvons conclure que le problème étudié est un problème **Dual.** En effet, dans le premier problème, le potentiel scalaire électrique est résolu avec la vitesse du fluide, et le profil de vitesse peut être déterminé. A contrario du modèle *B-T* où c'est le potentiel vecteur électrique, image du champ magnétique induit (II.1.29), qui est résolu avec la vitesse du fluide. Ainsi, dans le modèle *B-φ*, il n'est pas nécessaire de prendre en compte l'existence du champ magnétique induit. Cela ne signifie pas qu'il est négligé (cela dépend du nombre de Reynolds magnétique). Seul le champ magnétique radial imposé à son importance. En revanche, dans le modèle *B-T*, le potentiel scalaire n'est pas résolu (il peut être résolu après résolution du système, à l'aide de l'équation (II.1.15)), et l'intérêt est porté sur le champ magnétique induit, quand bien même il serait négligeable, comparativement au champ magnétique imposé.

L'une ou l'autre de ces deux approches sera utilisée en fonction des conditions aux limites imposées par l'alimentation. C'est-à-dire que, lorsque l'alimentation est une source de tension, le modèle *B-φ* sera idéalement utilisé. En revanche, lorsqu'une source de courant est utilisée, le modèle *B-T* conviendra particulièrement. La distinction entre ces deux approches présente donc directement un lien avec la mise en pratique de ce type d'actionneur, selon qu'il sera commandé en tension ou en courant.

En fait, [1] présente un système à trois équations réunissant ces deux approches, si ce n'est que le champ magnétique induit ***b*** est exprimé à l'instar du potentiel vecteur électrique présenté ici.

Bien sûr, nous vérifierons ces dires aux vues des résultats de la résolution numérique du problème, réalisée à partir de chacune de ces deux approches 2D axisymétriques.

C'est pourquoi nous nous intéressons maintenant à la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles à l'aide de méthodes numériques, telles la résolution par Eléments Finis ou par Différences Finies. Compte tenu de la simplicité du domaine de résolution (la section rectangulaire (Fig.18)), et des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann, nous avons choisi d'utiliser la résolution numérique par Différences Finies.

2. Rappel sur les Différences Finies

Ce rapide rappel sur la résolution numérique par différences finies n'a pas vocation à présenter l'ensemble des travaux réalisés sur ce point. Mais plutôt d'introduire la méthode dans ses grands principes de base utilisés pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) données au paragraphe précédent. Cette présentation se base sur plusieurs livres traitant de la résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes, notamment pour les fluides incompressibles [6-8].

Considérons un problème en 1D, et un pas constant. Le théorème de Taylor-Young est à la base des méthodes de différences finies permettant d'approximer et résoudre les équations aux dérivées partielles :

Soit f une fonction de classe C^{n+1} au voisinage d'un point x réel, alors pour tout h réel,

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} . f^{(k)}(x) + o(h^n) \qquad \text{(II.2.1)}$$

Remarque :

$o(h^n) = R_n(h)$ est une fonction de h négligeable asymptotiquement devant h^n tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0 \qquad \text{(II.2.2)}$$

Cette formule de Taylor à l'ordre *k* permet l'obtention d'une approximation de *f(x+h)* connaissant *f* et ses dérivées successives au point *x*. A l'ordre 2 par exemple,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + o(h^2) \quad \text{(II.2.3)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + o(h^2) \quad \text{(II.2.4)}$$

Et réciproquement elle donne une approximation des dérivées successives de *f* au point *x*, par combinaisons linéaires des équations précédentes, connaissant les valeurs prises par *f* au voisinage. Ainsi, les formules suivantes sont obtenues afin d'approximer les dérivées premières et secondes de *f* en *x*.

Schéma de dérivée à droite :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(1) \quad \text{(II.2.5)}$$

Schéma de dérivée à gauche :

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + o(1) \quad \text{(II.2.6)}$$

Schéma centré :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h) \quad \text{(II.2.7)}$$

Schéma centré pour la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h) \quad \text{(II.2.8)}$$

Il est important de remarquer que le schéma centré apporte une meilleure précision sur l'erreur quant à l'approche de la dérivée première. Ce schéma sera donc choisi en priorité.

De plus, ces schémas présentés sont les schémas de discrétisations de type Euler. Ces schémas permettent une approximation des dérivées partielles d'autant plus précise que le maillage est fin. Ceci sera déterminent pour l'étude des résultats pour la résolution numérique.

Remarque :

Ces schémas sont valables dans le cas d'un pas de discrétisation constant.

Pour poursuivre sur le fonctionnement de la méthode des différences finies, prenons le cas de l'EDP suivante en 1D :

$$\begin{cases} -u'' + cu' = f \text{ dans }]0,1[\\ \quad \mathrm{u}(0) = 0 \\ \quad \mathrm{u}(1) = 0 \end{cases} \quad avec\ f\ et\ c\ deux\ fonctions\ données\ et\ c \geq 0$$

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet. Le segment [0, 1] est découpé en *N* intervalles de longueur $h = \frac{1}{N}$. Le domaine Ω_h est donc défini par $N + 1$ nœuds,

$$\Omega_h = \{ih, 0 \leq i \leq N\}$$

→ Les conditions aux limites se réécrivent par : $u_0 = u_N = 0$

→ L'approximation de la dérivée seconde par le développement de Taylor s'écrit, au nœud *i*,

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}.(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + o(h) \qquad \text{(II.2.9)}$$

→ Le schéma centré est utilisé pour la dérivée première, de telle sorte qu'il y ait la même précision sur les deux approximations

$$u_i' = \frac{1}{2h}.(u_{i+1} - u_{i-1}) + o(h) \qquad \text{(II.2.10)}$$

Il est donc maintenant possible de réécrire le système d'équation de départ sous la forme :

$$\begin{cases} i = 1 \ : \ -\frac{1}{h^2}.(-2u_1 + u_2) + \frac{c_1}{2h}.(u_2) = f_1 + o(h) \\ i < 1 < N-1 \ : \ -\frac{1}{h^2}.(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{c_i}{2h}.(u_{i+1} - u_{i-1}) = f_i + o(h) \\ i = N-1 \ : \ -\frac{1}{h^2}.(u_{N-2} - 2u_{N-1}) + \frac{c_{N-1}}{2h}.(-u_{N-2}) = f_{N-1} + o(h) \end{cases}$$

Ce qui peut maintenant s'écrire sous la forme matricielle $A_h U_h = B_h$ soit,

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{c_1}{2h}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{c_2}{2h}\right) & \frac{2}{h^2} & \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{c_2}{2h}\right) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{h^2} & \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{c_{N-2}}{2h}\right) \\ 0 & \cdots & \cdots & \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{c_{N-1}}{2h}\right) & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

(II.2.11)

Cette équation peut ensuite être résolue par inversion directe ou par une méthode itérative, sous *Matlab* par exemple. Ce qui permet de trouver les valeurs de *u* en chaque nœud.

3. Résolution Numérique - Modèle en *B-φ*

Nous pouvons maintenant appliquer la méthode de résolution en différences finies explicitée dans le paragraphe précédent à notre problème MHD.

Dans cette partie donc, nous nous attacherons à résoudre le système d'équations représentant le modèle *B*-φ. Nous mettrons donc de côté le champ magnétique induit ($\boldsymbol{b}$) par l'écoulement. En effet, ce dernier étant orthoradial, il n'intervient donc pas dans l'expression de la force de Lorentz projetée suivant $\boldsymbol{e_\theta}$ (I.4.10). Puisque, comme nous l'avions explicité précédemment, nous ne considérons pas l'existence de gradients de pression ni de vitesses radiaux et axiaux.

Voici donc le système d'équations à résoudre et les conditions aux limites correspondantes :

$$\begin{cases} \Delta\varphi + B_0.\dfrac{R_m}{r}.\dfrac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} = 0 \\ \Delta v_\theta(r,z) - \dfrac{v_\theta(r,z)}{r^2}.\left(1 + \dfrac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right) = \dfrac{\sigma}{\mu}.B_0.\dfrac{R_m}{r}.\dfrac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z} \end{cases}$$

Avec les conditions de type Dirichlet,

$$\begin{cases} v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w) \\ \varphi(r, \pm w) = \mp\dfrac{U}{2} \end{cases}$$

Et les conditions de type Neumann,

$$\left\{\frac{\partial\varphi(R_m \pm g, z)}{\partial r} = 0\right.$$

Remarque :

Ce problème correspond donc, au niveau de la commande l'actionneur, à l'imposition d'une tension électrique entre les deux électrodes. Et d'un champ magnétique radial bien entendu. Ces deux grandeurs détermineront donc les caractéristiques de l'écoulement.

3.1 Discrétisation des équations du problème

Afin de discrétiser ces équations aux dérivées partielles pour leur résolution numérique, le domaine d'étude rectangulaire (cf. Fig. (18)) est maillé radialement et axialement par N_r et N_z segments. Les pas de maillage ne sont pas nécessairement constants. Un schéma présente le maillage du domaine d'étude (dans le cas de pas constants),

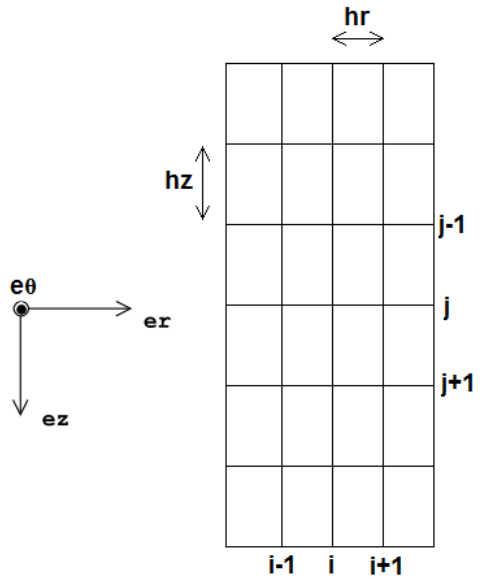


Fig. 19 Schéma d'un maillage à pas constants

De fait, autour d'un nœud quelconque, mais à l'intérieur du domaine d'étude, n_0, les nœuds alentours sont définis comme suit :

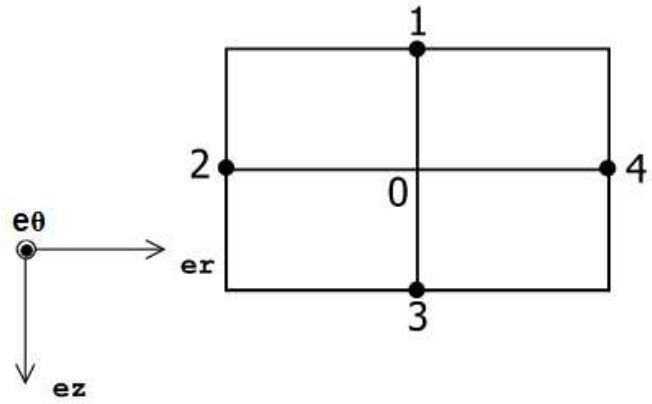


Fig. 20 Eléments de maillage autour d'un nœud n_0

Le maillage est donc constitué de $N_r + 1$ lignes axiales et $N_z + 1$ lignes horizontales, soit $(N_r + 1) * (N_z + 1)$ nœuds de maillage. On note h_1 le pas de maillage allant du nœud $n_0 \equiv (i, j)$ au noeud $n_1 \equiv (i, j + 1)$. Et ainsi de suite pour $h_2, h_3,$ et h_4. Les équations étant discrétisées à l'intérieur du domaine d'étude et non aux parois, alors $1 \leq i \leq N_r - 1$ et $1 \leq j \leq N_z - 1$.

La procédure est la suivante pour aboutir à la discrétisation du problème d'équations aux dérivées partielles :

Rappelons l'expression du Laplacien scalaire,

$$\Delta v_\theta(r,z) = \nabla^2 v_\theta(r,z) = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_\theta(r,z)}{\partial z^2} \qquad \text{(II.3.1)}$$

Dans la suite, l'étude se fera dans le cas où $(i,j) \in [1, N_r - 1] \times [1, N_z - 1]$, c'est à dire que la discrétisation des équations est étudiée à l'intérieur du domaine d'étude, et non sur les parois. A partir des développements de Taylor, tels que les suivants :

$$v(r_0 + h_4) = v_4 = v_0 + h_4.\frac{\partial v}{\partial r}\Big)_0 + \frac{h_4^2}{2}.\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\Big)_0 + o(h_4^2) \quad \text{(II.3.2)}$$

$$v(r_0 - h_2) = v_2 = v_0 - h_2.\frac{\partial v}{\partial r}\Big)_0 + \frac{h_2^2}{2}.\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\Big)_0 + o(h_2^2) \quad \text{(II.3.3)}$$

$$\varphi(r_0 + h_3) = \varphi_3 = \varphi_0 + h_3.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big)_0 + \frac{h_3^2}{2}.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\Big)_0 + o(h_3^2) \quad \text{(II.3.4)}$$

$$\varphi(r_0 - h_1) = \varphi_1 = \varphi_0 - h_1.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big)_0 + \frac{h_1^2}{2}.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\Big)_0 + o(h_1^2) \quad \text{(II.3.5)}$$

Il est aisé de retrouver les relations suivantes (le schéma centré sera le seul utilisé) :

En effectuant la soustraction $h_1^2.\varphi_3 - h_3^2.\varphi_1$,

$$\frac{\partial \varphi(r,z)}{\partial z}\Big)_0 = \frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_3 - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_1 + \frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3}.\varphi_0 \quad \text{(II.3.6)}$$

Et à partir de la somme $h_1.v_3 + h_3.v_1$,

$$\frac{\partial^2 v_\theta(r,z)}{\partial z^2}\Big)_0 = \frac{2}{h_3.(h_1+h_3)}.v_3 + \frac{2}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 - \frac{2}{h_1 h_3}.v_0 \quad \text{(II.3.7)}$$

$$\frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}.\left(\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r} + r\frac{\partial^2 v_\theta(r,z)}{\partial r^2}\right) \quad \text{(II.3.8)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r}\right)\Big)_0 = v_4.\frac{2r_0 + h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + v_2.\frac{2r_0 - h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + v_0.\frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} \quad \text{(II.3.9)}$$

Pour remarque, dans le cas où les pas radial et axial sont constants (h_r et h_z), soit $h_1 = h_3$ et $h_2 = h_4$, ces expressions de dérivées discrétisées se retrouvent sous les formes plus simples présentées précédemment, à savoir,

$$\frac{\partial \varphi(r,z)}{\partial z}\Big)_0 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2h_z} \quad \text{(II.3.10)}$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta(r,z)}{\partial z^2}\Big)_0 = \frac{1}{h_z^2}.(v_3 + v_1 - 2v_0) \quad \text{(II.3.11)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r}\right)\Big)_0 = v_4.\left(r_0.\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2h_r}\right) + v_2.\left(r_0.\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2h_r}\right) - \frac{2r_0}{h_r^2}.v_0 \quad \text{(II.3.12)}$$

L'équation de Navier-Stokes (II.1.16) au nœud n_0 peut donc se réécrire sous sa forme discrétisée pour la résolution, multipliée par le rayon, afin de supprimer le facteur en $\frac{1}{r}$ dans le second membre :

$$\begin{aligned} v_4.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + v_2.\frac{2r_0-h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}.v_3 + \frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 \\ + v_0.\left(\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2h_4} - \frac{2r_0}{h_1h_3} - \frac{1}{r_0}.\left(1+\frac{\sigma}{\mu}.B_0^2R_m^2\right)\right) \\ = \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\left(\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_3 - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_1 + \frac{h_3-h_1}{h_1h_3}.\varphi_0\right) \end{aligned} \quad \text{(II.3.13)}$$

De la même manière, l'équation (II.1.15), multipliée par le rayon, peut être mise sous la forme discrétisée suivante,

$$\begin{aligned} \varphi_4.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + \varphi_2.\frac{2r_0-h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \varphi_3.\frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)} + \varphi_1.\frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)} \\ + \varphi_0.\left(\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2h_4} - \frac{2r_0}{h_1h_3}\right) \\ + B_0.R_m.\left(v_3.\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)} - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 + v_0.\frac{h_3-h_1}{h_1h_3}\right) = 0 \end{aligned} \quad \text{(II.3.14)}$$

Les conditions aux limites induisent des cas particuliers pour ces équations :

- cas où n_0 est situé sur la ligne axiale la plus proche de la paroi magnétique axiale située au niveau du rayon interne, soit pour $i = 1$ et $1 \leq j \leq N_z - 1$, alors les conditions aux limites donnent :

$$v_2 \equiv v_{\theta_{0,j}} = 0 \;\; et \;\; \varphi_2 \equiv \varphi_{0,j} = \varphi_0 \equiv \varphi_{1,j} \quad \text{(II.3.15)}$$

Alors, les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_4.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}.v_3 + \frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 \\ + v_0.\left(\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2h_4} - \frac{2r_0}{h_1h_3} - \frac{1}{r_0}.\left(1+\frac{\sigma}{\mu}.B_0^2R_m^2\right)\right) \\ = \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\left(\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_3 - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_1 + \frac{h_3-h_1}{h_1h_3}.\varphi_0\right) \end{aligned} \quad \text{(II.3.16)}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + \varphi_3.\frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)} + \varphi_1.\frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)} \\ + \varphi_0.\left(\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2h_4} - \frac{2r_0}{h_1h_3} + \frac{2r_0-h_4}{h_2.(h_2+h_4)}\right) \\ + B_0.R_m.\left(v_3.\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)} - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 + v_0.\frac{h_3-h_1}{h_1h_3}\right) = 0 \end{aligned} \quad \text{(II.3.17)}$$

- Cas où n_0 se trouve sur la ligne axiale la plus proche de la paroi magnétique externe, soit pour $i = N_r - 1$ et $1 \leq j \leq N_z - 1$. Les conditions aux limites donnent :

$$v_4 \equiv v_\theta_{N_r,j} = 0 \quad et \quad \varphi_4 \equiv \varphi_{N_r,j} = \varphi_0 \equiv \varphi_{N_r-1,j} \tag{II.3.18}$$

Les équations (II.3.13) et (II.3.14) discrétisées s'écrivent alors,

$$\begin{aligned} v_2.\frac{2r_0 - h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}.v_3 + \frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 \\ + v_0.\left(\frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} - \frac{1}{r_0}.\left(1 + \frac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right)\right) \\ = \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\left(\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_3 - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_1 + \frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3}.\varphi_0\right) \end{aligned} \tag{II.3.19}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2.\frac{2r_0 - h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \varphi_3.\frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)} + \varphi_1.\frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)} \\ + \varphi_0.\left(\frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} + \frac{2r_0 + h_2}{h_4.(h_2+h_4)}\right) \\ + B_0.R_m.\left(v_3.\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)} - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 + v_0.\frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3}\right) = 0 \end{aligned} \tag{II.3.20}$$

- Cas où n_0 est situé sur la ligne radiale adjacent à l'électrode située en $+w$, soit pour $1 \leq i \leq N_r - 1$ et $j = N_z - 1$. Alors, les conditions aux limites donnent,

$$v_3 \equiv v_{\theta_{i,N_z}} = 0 \quad et \quad \varphi_3 \equiv \varphi_{i,N_z} = -\frac{U}{2} \tag{II.3.21}$$

Les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) se réécrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} v_4.\frac{2r_0 + h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + v_2.\frac{2r_0 - h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 \\ + v_0.\left(\frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} - \frac{1}{r_0}.\left(1 + \frac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right)\right) \\ = \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\left(-\frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_1 + \frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3}.\varphi_0\right) \\ - \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \end{aligned} \tag{II.3.22}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4.\frac{2r_0 + h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + \varphi_2.\frac{2r_0 - h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \varphi_1.\frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)} \\ + \varphi_0.\left(\frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3}\right) \\ + B_0.R_m.\left(-\frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1 + v_0.\frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3}\right) = \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \end{aligned} \tag{II.3.23}$$

- Cas où n_0 est situé sur la ligne radiale adjacente à l'électrode située en $-w$, soit pour $1 \leq i \leq N_r - 1$ et $j = 1$. Alors, les conditions aux limites donnent,

$$v_1 \equiv v_{\theta_{i,0}} = 0 \quad et \quad \varphi_1 \equiv \varphi_{i,0} = +\frac{U}{2} \tag{II.3.24}$$

Les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) s'écrivent alors,

$$\begin{aligned} v_4.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + v_2.\frac{2r_0-h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}.v_3 \\ + v_0.\left(\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2h_4} - \frac{2r_0}{h_1h_3} - \frac{1}{r_0}.\left(1+\frac{\sigma}{\mu}.B_0^2R_m^2\right)\right) \\ = \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\left(\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_3 + \frac{h_3-h_1}{h_1h_3}.\varphi_0\right) \\ - \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \end{aligned} \quad \text{(II.3.25)}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + \varphi_2.\frac{2r_0-h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + \varphi_3.\frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)} \\ + \varphi_0.\left(\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2h_4} - \frac{2r_0}{h_1h_3}\right) \\ + B_0.R_m.\left(v_3.\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)} + v_0.\frac{h_3-h_1}{h_1h_3}\right) = -\frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \end{aligned} \quad \text{(II.3.26)}$$

L'ensemble de ces équations va donc permettre l'écriture du système matriciel représentant le problème dans son ensemble. Afin d'aboutir à sa résolution. Certains termes ne sont plus dépendant des variables du problème (la vitesse et le potentiel électrique). Ces termes apparaitront dans le second membre du système matriciel, cf. *Annexe 2* pour l'écriture du problème sous forme matricielle.

Alors l'équation (II.1.16) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A.X + B.Y = S \quad \text{(II.3.27)}$$

De la même manière, l'équation (II.1.15) peut se mettre sous la forme :

$$AA.Y + BB.X = SS \quad \text{(II.3.28)}$$

Ainsi, le système d'équations matricielles suivant est obtenu :

$$\begin{cases} A.X + B.Y = S \\ AA.Y + BB.X = SS \end{cases}$$

Ce système d'équations matricielles est ensuite mis sous la forme d'une seule équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ BB & AA \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ SS \end{pmatrix} \quad \text{(II.3.29)}$$

Système qui se résout donc de la manière suivante, par une inversion de matrice :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ BB & AA \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} S \\ SS \end{pmatrix} \quad \text{(II.3.30)}$$

Le code de calcul permettant cette résolution numérique a été développé sous *Matlab.*

Remarque importante :

La résolution numérique du système matriciel, les matrices sont construites creuses. Puisque étant constituées de trois à cinq diagonales uniquement, le reste des points sont donc nuls. Ainsi, la mémoire sollicitée par la résolution est beaucoup plus faible, et des matrices de tailles plus importantes peuvent être construites. Sachant que la taille des matrices correspond à une résolution du maillage plus importante, et donc une précision de résolution accrue, du fait des schémas de discrétisations de type Euler centrés utilisés.

La solution obtenue par cette résolution numérique, est unique, et sous forme d'un vecteur contenant l'ensemble des valeurs des variables du problème, à savoir la vitesse et le potentiel électrique, en chaque nœud du maillage. Afin de pouvoir afficher l'ensemble des résultats dans le domaine d'étude, sous forme de courbes, et afin de pouvoir exploiter ces résultats et ainsi déterminer les performances de l'actionneur, ce vecteur solution doit être retraité.

3.2 Traitement de la Solution - Méthode de Calcul des Grandeurs Caractéristiques

L'ensemble des grandeurs caractéristiques permettant de discuter les performances de notre actionneur ont été présentées dans le premier chapitre de ce mémoire (cf. I.5.4). Ainsi que les relations permettant de les retrouver. Ce paragraphe porte donc sur les méthodes développées afin de déterminer ces grandeurs. En effet, le résultat de la résolution numérique étant sous forme de deux vecteurs donnant la valeur de la vitesse et du potentiel électrique en chaque nœud du maillage, nous ne possédons pas de fonction décrivant l'évolution des variables du problème en chaque point de l'espace. C'est donc à partir des informations obtenues par la résolution numérique qu'il nous faut développer une méthode de traitement des résultats permettant d'afficher l'évolution des variables dans le domaine d'étude, puis de calculer les grandeurs caractéristiques. Finalement, les bilans en termes de puissance et de couple pourront être précisés.

Le premier point consiste donc à scinder le vecteur solution $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ en un vecteur X contenant les valeurs de la vitesse, et un vecteur Y contenant celles du potentiel électrique en chaque nœud. Cette étape est triviale.

En deuxième lieu, de par la forme des vecteurs cités ci-dessus, il reste à transformer les deux vecteurs variables, sous forme de colonnes, en matrices, associant à chaque ligne la position radiale par exemple, et à chaque colonne la position axiale. Le détail de la méthode utilisée est présentée en *Annexe 3*. Ainsi, dans le cas de la vitesse, par exemple, la matrice suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} v_{\theta_{1,1}} & \cdots & v_{\theta_{1,N_Z-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\theta_{N_r-1,1}} & \cdots & v_{\theta_{N_r-1,N_Z-1}} \end{pmatrix} \qquad \text{(II.3.31)}$$

Puisque la résolution numérique a lieu uniquement sur les nœuds internes au domaine d'étude, il est nécessaire d'y ajouter les conditions aux limites, à savoir ici une condition de vitesse nulle en chaque nœud des parois. Ainsi, la matrice des vitesses, de dimension $(N_r + 1) * (N_z + 1)$ devient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_{\theta_{1,1}} & \cdots & v_{\theta_{1,N_z-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & v_{\theta_{N_r-1,1}} & \cdots & v_{\theta_{N_r-1,N_z-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(II.3.32)}$$

Dans le cas de la matrice du potentiel électrique, il s'agit, conformément aux conditions limites, d'égaliser le potentiel électrique aux rayons interne et externe à celui aux nœuds adjacents, et de l'imposer aux électrodes supérieure et inférieure respectivement à $-\frac{U}{2}$ et $+\frac{U}{2}$. La matrice suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} \frac{U}{2} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,N_z-1} & -\frac{U}{2} \\ \frac{U}{2} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,N_z-1} & -\frac{U}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{U}{2} & \varphi_{N_r-1,1} & \cdots & \varphi_{N_r-1,N_z-1} & -\frac{U}{2} \\ \frac{U}{2} & \varphi_{N_r-1,1} & \cdots & \varphi_{N_r-1,N_z-1} & -\frac{U}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(II.3.33)}$$

Dès lors, l'écriture de ces matrices permettra l'exploitation de la solution de manière beaucoup plus simple, notamment pour le tracer de ces variables, et la détermination des grandeurs caractéristiques de l'actionneur.

En ce qui concerne la détermination des ces grandeurs électromécaniques, dont les relations sont présentées au paragraphe I.4, l'idée est d'utiliser les mêmes schémas de discrétisation que ceux utilisés pour la résolution numérique du système d'EDPs.

De fait, connaissant les valeurs de la vitesse et du potentiel électrique en chaque nœud du maillage complet (parois comprises), les dérivées partielles d'ordre 1 ou 2 seront approchées par les dits schémas de discrétisation. Alors, ces schémas étant de type « centré », lorsqu'il s'agira de dérivées suivant la position axiale par exemple, les calculs permettront de les approcher sur les parois magnétiques mais non sur les électrodes. Et réciproquement, en approchant une dérivée radiale, le résultat sera obtenu sur l'ensemble des nœuds du domaine, exceptés les nœuds sur les parois magnétiques.

Voici le détail des méthodes utilisées.

- Force MHD volumique et couple moteur

Afin de déterminer les valeurs de la force MHD projetée suivant $\boldsymbol{e_\theta}$ en chaque nœud du maillage, et à partir de l'expression de la force de Lorentz (I.4.10), il est d'abord nécessaire de calculer la densité de courant axiale. En effet, la force MHD volumique et orthoradiale s'exprime par,

$$f_{mhd_\theta}(r,z) = j_z(r,z).B_r(r) \quad \text{(II.3.57)}$$

Alors, l'expression de la densité de courant (II.1.12) est rappelée.

$$j_z(r,z) = \sigma.\left(-v_\theta(r,z)B_0.\frac{R_m}{r} - \frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z}\right) \tag{II.3.58}$$

La valeur de la dérivée partielle du potentiel électrique doit être déterminée en chaque nœud du domaine d'étude. Pour ce faire, le schéma de discrétisation utilisé pour la résolution numérique est repris. Ainsi, au nœud (i,j), et en notant h_1 le pas de maillage allant du nœud $(i,j-1)$ au nœud (i,j) et h_3 celui allant du nœud (i,j) au nœud$(i,j+1)$, $(i,j) \in [0,N_r] \times [1,N_z-1]$, cette dérivée est approchée de la manière suivante :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)_{i,j} = \frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_{i,j+1} - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_{i,j-1} + \frac{h_3-h_1}{h_1h_3}.\varphi_{i,j} \tag{II.3.59}$$

Ainsi, la valeur de la densité de courant axiale au nœud (i,j) s'exprime,

$$j_{z_{i,j}} = \sigma.\left(-v_{i,j}B_0.\frac{R_m}{r_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)_{i,j}\right) \tag{II.3.60}$$

Et la force MHD volumique othoradiale au nœud (i,j) par,

$$f_{mhd_{\theta_{i,j}}} = -\sigma v_{i,j}B_0^2.\frac{R_m}{r_i^2} - \sigma B_0.R_m/r_i\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)_{i,j} \tag{II.3.61}$$

Alors, la densité de force MHD orthoradiale pourra être représentée dans le domaine d'étude complet, excepté au niveau des nœuds sur les électrodes. Aussi, la détermination du couple moteur MHD sur l'axe de l'actionneur est rendu possible, à partir de la relation (I.5.16). La méthode employée consiste à calculer le couple développé en chaque nœud du maillage, puis de les sommer. La valeur de la force MHD volumique est donc prise en un nœud (i,j). Elle est ensuite intégrée sur le volume centré sur ce nœud, constitué de la somme d'un quart du volume constitué par chaque maille autour du nœud en question, puis multipliée par le rayon correspondant. En notant h_4 et h_2 les pas de maillage allant respectivement du nœud (i,j) au nœud $(i+1,j)$ et du nœud $(i-1,j)$ au nœud (i,j), cet élément de volume s'exprime par,

$$d\mathcal{V}_{i,j} = 2\pi r_i * \left(\frac{1}{2}.(h_2+h_4)\right) * \left(\frac{1}{2}.(h_1+h_3)\right) \tag{II.3.62}$$

Il est important de noter que le couple MHD est déterminé en chaque nœud à l'intérieur du domaine d'étude. En effet, bien que nous ayons la connaissance de la valeur de la force MHD au niveau des parois magnétiques, celle-ci n'intervient pas dans le bilan de puissance, puisque la vitesse y est nulle. De plus, l'objectif est de réaliser un bilan de couple. Or, le couple résistif est dû à la force de viscosité. Et cette dernière, de par son expression comprenant un Laplacien vectoriel (I.4.25), ne pourra être déterminée qu'aux nœuds à l'intérieur du domaine d'études (parois non comprises), en utilisant des schémas de discrétisation centrés. Et donc, afin de comparer physiquement l'apport de ces deux couples, il doit être fait de même avec le couple MHD. Enfin, cette méthode de calcul respecte la discrétisation faite des équations aux EDPs du problème étudié pour la résolution numérique, c'est à dire sans prise en compte des nœuds aux parois au sein des vecteurs variables.

Le couple MHD, ou couple moteur, se détermine donc par la relation suivante :

$$C_{mhd} = \sum_{j=1}^{N_z-1} \sum_{i=1}^{N_r-1} f_{mhd_{\theta_{i,j}}} . d\mathcal{V}_{i,j} . r_i \quad \text{(II.3.63)}$$

- Couple résistif

Le calcul du couple résistif sur l'axe de l'actionneur est important en ce sens qu'il représente la contribution des forces résistives à contrer l'établissement de l'écoulement par la force de Lorentz, en régime établi. Dans cet écoulement, il s'agit uniquement des forces de contraintes visqueuses. Deux approches permettent de les évaluer. La première consiste à considérer les tenseurs de contraintes et de déformations appliqués aux forces visqueuses et en coordonnées cylindriques au niveau des parois [9;10], dans le cas d'un écoulement incompressible, et pour les forces de cisaillement (visqueuses). Elle permet de définir le couple résistif par la relation (I.5.18), qui donne,

$$Cres_{surf} = \iint \mu r . \boldsymbol{e_r} \wedge \left(\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r} - \frac{v_\theta(r,z)}{r} \right) . \boldsymbol{e_\theta} . dS_r + \mu r . \boldsymbol{e_r} \wedge \frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} . \boldsymbol{e_\theta} . dS_z \quad \text{(II.3.64)}$$

Le couple résistif obtenu par cette méthode, dite surfacique, a donc pour origine les forces de cisaillement sur chacune des quatre parois. En effet, les parois constituent la seule contrainte considérée pour l'établissement de l'écoulement. Elles imposent une vitesse nulle à leurs bords puisqu'elles sont immobiles. Les contributions de ces quatre surfaces sont définies ainsi :

$$C_{res_{r_{int}}} = \iint \mu r . \boldsymbol{e_r} \wedge \left(\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r} - \frac{v_\theta(r,z)}{r} \right) . \boldsymbol{e_\theta} . dS_{r_{int}} \quad \text{(II.3.65)}$$

$$C_{res_{r_{ext}}} = \iint \mu r . \boldsymbol{e_r} \wedge \left(\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r} - \frac{v_\theta(r,z)}{r} \right) . (-\boldsymbol{e_\theta}) . dS_{r_{int}} \quad \text{(II.3.66)}$$

$$C_{res_{elect_{sup}}} = \iint \mu r . \boldsymbol{e_r} \wedge \frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} . \boldsymbol{e_\theta} . dS_{elect_sup} \quad \text{(II.3.67)}$$

$$C_{res_{elect_{sup}}} = \iint \mu r . \boldsymbol{e_r} \wedge \frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} . \boldsymbol{e_\theta} . dS_{elect_inf} \quad \text{(II.3.68)}$$

$dS_{r_{int}}$ constitue un élément de surface du rayon interne du canal torique.

$dS_{elect_{inf}}$ constitue un élément de surface de l'électrode inférieure (en $-w$).

Pour calculer ces couples, et les dérivées qui y sont associées, nous nous plaçons sur l'unique maille adjacente aux parois respectives. En effet, ce calcul du couple résistif fait appel aux calculs des forces surfaciques de cisaillement localisées sur les parois. De fait, pour être le plus précis possible, les déterminations des dérivées et des vitesses considérées doivent s'effectuer centrées sur cette unique maille.

Alors,

$$C_{res_{r_{int}}} = \mu . 2\pi (r_{int} + \frac{1}{2} . h_1)^2 \sum_{j=1}^{N_z-1} \frac{1}{2} . (h_j + h_{j+1}) . \left(\frac{v_{\theta_{1,j}} - v_{\theta_{0,j}}}{h_{i=1}} - \frac{\frac{1}{2} . \left(v_{\theta_{0,j}} + v_{\theta_{1,j}} \right)}{\left(r_{int} + \frac{1}{2} . h_1 \right)} \right)$$

(II.3.46)

$$C_{res_{r_{ext}}} = \mu.2\pi(r_{ext} - \frac{1}{2}.h_{N_r})^2 \sum_{j=1}^{N_z-1} \frac{1}{2}.(h_j + h_{j+1}).(\frac{v_{\theta_{N_r+1,j}} - v_{\theta_{N_r,j}}}{h_{i=N_r}} - \frac{\frac{1}{2}.\left(v_{\theta_{N_r,j}} + v_{\theta_{N_r+1,j}}\right)}{\left(r_{ext} - \frac{1}{2}.h_{N_r}\right)})$$

(II.3.47)

$$C_{res_{elect_{sup}}} = \mu.2\pi \sum_{i=1}^{N_r-1} \frac{1}{2}.(h_i + h_{i+1}).r_i{}^2.(\frac{v_{\theta_{i,N_z+1}} - v_{\theta_{i,N_z}}}{h_{j=N_z}})$$

(II.3.48)

$$C_{res_{elect_{inf}}} = \mu.2\pi \sum_{i=1}^{N_r-1} \frac{1}{2}.(h_i + h_{i+1}).r_i{}^2.(\frac{v_{\theta_{i,1}} - v_{\theta_{i,0}}}{h_{j=1}})$$

(II.3.49)

A noter que les valeurs des vitesses aux parois, à savoir $(v_{\theta_{0,j}}, v_{\theta_{N_r+1,j}}, v_{\theta_{i,0}}, v_\theta_{i,N_z+1})$, sont nulles.

Le couple résistif est alors obtenu en sommant l'ensemble de ces contributions :

$$C_{res_{surf}} = C_{res_{r_{int}}} + C_{res_{r_{ext}}} + C_{res_{elect_{sup}}} + C_{res_{elect_inf}} \qquad \text{(II.3.73)}$$

La deuxième méthode du calcul du couple résistif consiste à intégrer la contribution de la force visqueuse volumique dans tout le domaine.

Rappelons l'expression de la force visqueuse volumique :

$$\boldsymbol{f_{vis}} = \mu.\Delta\boldsymbol{v} \qquad \text{(II.3.74)}$$

Nous ne nous intéressons qu'à la contribution orthoradiale de cette force, tout comme pour la force de Lorentz, et l'équation de Navier-Stokes. L'expression du Laplacien vectoriel est donnée en *Annexe 1.* Afin d'exprimer le Laplacien vectoriel de la vitesse à partir des informations du maillage, le schéma de discrétisation utilisé pour la résolution numérique est de nouveau considéré :

$$\begin{aligned}(\Delta\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{\theta}} = \left(\Delta v_\theta(r,z) - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2}\right) &= \left(\frac{1}{r}.\frac{\partial\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{r}.\left(\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r} + r\frac{\partial^2 v_\theta(r,z)}{\partial r^2}\right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2}\right)\end{aligned} \qquad \text{(II.3.75)}$$

$$(\Delta \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{\theta}_{i,j}} = \frac{2+\frac{h_2}{r_i}}{h_4.(h_2+h_4)}.v_{i+1,j} + \frac{2-\frac{h_4}{r_i}}{h_2.(h_2+h_4)}.v_{i-1,j} + \frac{2}{h_3.(h_1+h_3)}.v_{i,j+1} + \frac{2}{h_1.(h_1+h_3)}.v_{i,j-1} + \left(\frac{\frac{h_4}{r_i}-\frac{h_2}{r_i}-2}{h_2 h_4} - \frac{2}{h_1 h_3} - \frac{1}{{r_i}^2}\right).v_{i,j} \quad \text{(II.3.76)}$$

Ainsi, en procédant de la même manière que pour le calcul du couple MHD, c'est à dire en sommant les forces visqueuses volumiques en chaque nœud du maillage à l'intérieur du domaine, la formulation suivante est obtenue, équivalente à la relation (I.5.17) :

$$C_{res_{vol}} = \sum_{j=1}^{N_z-1} \sum_{i=1}^{N_r-1} \mu.\Delta \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\theta}_{i,j}}.d\mathcal{V}_{i,j}.r_i \quad \text{(II.3.77)}$$

- Moment Cinétique

A partir de la relation (I.5.14), le moment cinétique est calculé en sommant les produits de la vitesse en chaque nœud du domaine intérieur (la vitesse étant nulle sur les parois) multipliée par le rayon et l'élément de volume entourant le nœud correspondant, multiplié quant à lui par la masse volumique du fluide :

$$M_{cin} = \sum_{i=1}^{N_r-1} \sum_{j=1}^{N_z-1} \rho.\frac{1}{2}.(h_i + h_{i+1}).\frac{1}{2}.\left(h_j + h_{j+1}\right).2\pi.r_i^2.v_{\theta_{i,j}} \quad \text{(II.3.78)}$$

Ce critère est essentiel ici en ce sens que ce chapitre s'intéresse à la modélisation de l'actionneur en Régime Permanent. C'est-à-dire que cette résolution numérique permet de déterminer le potentiel stabilisant de la roue inertielle pour le satellite, c'est-à-dire son potentiel du point de vue de son fonctionnement gyroscopique. Et, le moment cinétique est cette grandeur qui caractérise ce mode de fonctionnement. Ainsi, selon les caractéristiques du champ électromagnétique source, le moment cinétique développé est modifié, de par la vitesse moyenne de l'écoulement, et donc son profil aussi.

- Bilan de puissance

Pour réaliser le bilan de puissance de l'actionneur, il nous faut déterminer la puissance électrique fournie à l'actionneur, la puissance mécanique résultante et les pertes par effets joule. Les méthodes de calcul utilisées à partir de la solution obtenue pour obtenir ces puissances sont ici explicitées.

La puissance mécanique développée, ou puissance motrice MHD, se calcul à partir de l'expression (I.5.6). L'ensemble des puissances motrices volumiques développées en chaque nœud à l'intérieur du domaine d'étude est donc intégré dans le volume entourant le nœud correspondant. A l'intérieur du domaine d'étude uniquement, puisque, aux parois, la vitesse est nulle et donc la puissance aussi. Ce qui donne la relation suivante :

$$P_{MHD} = \sum_{i=1}^{N_r-1} \sum_{j=1}^{N_z-1} f_{mhd_{i,j}} * v_{\theta_{i,j}} * d\mathcal{V}_{i,j} \qquad \text{(II.3.79)}$$

Les pertes joule se calculent à partir de la relation (I.5.10). La densité de courant axiale ayant déjà été calculée dans le domaine d'étude, il nous faut préalablement déterminer les valeurs de celle radiale. Ceci peut être fait à partir de la relation (II.1.12) liant la densité de courant radiale à la dérivée radiale du potentiel électrique.

La valeur de la dérivée radiale du potentiel électrique doit être déterminée en chaque nœud du domaine d'étude. Pour ce faire, le schéma de discrétisation utilisé pour la résolution numérique est repris. Ainsi, au nœud (i,j), et en notant h_2 le pas de maillage allant du nœud $(i-1,j)$ au nœud (i,j) et h_4 celui allant du nœud (i,j) au nœud$(i+1,j)$, $(i,j) \in [1, N_r-1] \times [0, N_z]$, cette dérivée est approchée de la manière suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big)_{i,j} = \frac{h_2}{h_4.(h_2+h_4)}.\varphi_{i+1,j} - \frac{h_4}{h_2.(h_2+h_4)}.\varphi_{i-1,j} + \frac{h_4-h_2}{h_2 h_4}.\varphi_{i,j} \qquad \text{(II.3.80)}$$

Ainsi, la densité de courant radiale est obtenue en chaque nœud, et s'exprime par,

$$j_{r_{i,j}} = \sigma.\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big)_{i,j}\right) \qquad \text{(II.3.81)}$$

Et les pertes par effet Joule se calculent en intégrant les pertes Joule volumiques en chaque nœud du maillage, à l'intérieur du domaine d'étude, de la manière suivante :

$$P_J = \sum_{i=1}^{N_r-1} \sum_{j=0}^{N_z} \frac{j_{r_{i,j}}^2}{\sigma} * d\mathcal{V}_{i,j} + \sum_{i=0}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_z-1} \frac{j_{z_{i,j}}^2}{\sigma} * d\mathcal{V}_{i,j} \qquad \text{(II.3.82)}$$

Avec, pour $(i,j) \in [1, N_r-1] * [1, N_z-1]$

$$d\mathcal{V}_{i,j} = \frac{1}{2}.(h_2+h_4).\frac{1}{2}.(h1+h3).2\pi.r_i \qquad \text{(II.3.83)}$$

Et, pour $i = 1$

$$d\mathcal{V}_{1,j} = \frac{1}{2}.(h_{i=1}).\frac{1}{2}.(h1+h3).2\pi.r_{int} \qquad \text{(II.3.84)}$$

Pour $i = N_r$

$$d\mathcal{V}_{N_r,j} = \frac{1}{2}.\left(h_{i=N_r}\right).\frac{1}{2}.(h1+h3).2\pi.r_{ext} \qquad \text{(II.3.85)}$$

Et, pour $j = 1$

$$d\mathcal{V}_{i,1} = \frac{1}{2}.(h2+h4).\frac{1}{2}.\left(h_{j=1}\right).2\pi.r_i \qquad \text{(II.3.86)}$$

Pour $i = N_r$

$$d\mathcal{V}_{i,N_z} = \frac{1}{2}.(h2 + h4).\frac{1}{2}.\left(h_{j=N_z}\right).2\pi.r_i \quad \text{(II.3.87)}$$

Enfin, pour déterminer la puissance électrique fournie à l'actionneur, la relation (I.5.9) est utilisée. La tension imposée aux bornes des électrodes est connue. Il reste à déterminer le courant qui passe à travers le canal. Pour ce faire, on détermine la densité de courant au niveau d'une des électrodes, comme cela a été explicité au paragraphe (II.1.2.2).

A partir de la relation (II.1.12), la dérivée axiale du potentiel électrique à la paroi peut être calculée. Le procédé utilisé est le même que pour calculer le couple résistif à partir des forces de contraintes visqueuses sur les parois. A savoir, que la dérivée axiale du potentiel est déterminée à partir des informations sur l'unique maille adjacente à la paroi, de manière à être le plus précis possible. De même, la vitesse est moyennée au milieu de la maille. De manière à respecter la méthode de calcul de la dérivée du potentiel électrique, qui se fait à partir de toutes les informations sur la maille en question. Alors,

$$j_{z_{elect_i}} = \sigma.\left(-\frac{1}{2}.v_{\theta_{i,1}}.B_0.\frac{R_m}{r_i} - \frac{\varphi_{\theta_{i,1}} - \varphi_{\theta_{i,0}}}{h_{j=1}}\right) \quad \text{(II.3.88)}$$

Ensuite, le courant axial est calculé en multipliant cette densité de courant axiale en chaque nœud par la surface traversée par le courant autour du nœud, et en intégrant suivant le rayon, de la manière suivante, et en suivant la notation habituelle :

$$I_{z_{elect}} = \sum_{i=0}^{N_r} j_{z_{elect_i}} * dS_i \quad \text{(II.3.89)}$$

Avec, pour $i \in [1, N_r - 1]$

$$dS_i = \frac{1}{2}.(h_2 + h_4).2\pi.r_i \quad \text{(II.3.90)}$$

Et, pour $i = 1$

$$dS_1 = \frac{1}{2}.(h_{i=1}).2\pi.r_{int} \quad \text{(II.3.91)}$$

Enfin, pour $i = N_r$

$$dS_{N_r} = \frac{1}{2}.\left(h_{i=N_r}\right).2\pi.r_{ext} \quad \text{(II.3.92)}$$

Alors, la détermination de la puissance électrique fournie à l'actionneur s'obtient par,

$$P_{elec_{fournie}} = U * I_{z_{elect}} \quad \text{(II.3.93)}$$

En notant la puissance utile par,

$$P_{utile} = P_{Joule} + P_{MHD} \quad \text{(II.3.94)}$$

Le bilan de puissance permettra de comparer la valeur de la puissance utile à celle de la puissance électrique fournie, sachant que par analogie électrique, les seules pertes étant dues à l'échauffement au sein du fluide. En théorie, le bilan devrait donner :

$$P_{utile} = P_{elec_{fournie}} \tag{II.3.95}$$

L'ensemble des outils amenant à la détermination des grandeurs caractéristiques de l'actionneur vont donc permettre de comparer, plus que qualitativement, quantitativement les solutions obtenues, selon le type de maillage utilisé (raffinement, pas constant ou pas variable). Ces résultats seront de plus comparés aux solutions obtenues à partir du modèle 1D en cylindrique, présenté dans le chapitre I. Afin de justifier l'apport du 2D et de la résolution numérique associée.

3.3 Résultats de la Résolution Numérique

Après avoir détaillé la méthode de résolution numérique associée à l'approche en *B-φ* de la modélisation 2D axisymétrique du problème étudié, en Différences Finies donc, ainsi que les méthodes employées pour l'exploitation des résultats, ce paragraphe porte sur les solutions types obtenues, comparées à l'approche 1D cylindrique présentée dans le 1er chapitre. Les apports éventuels de cette modélisation 2D seront donc mis en avant. Aussi, l'impact de la résolution numérique sur la validité de la solution, plus particulièrement le maillage utilisé, sera étudié. Enfin, une étude sur la variabilité de la solution et des grandeurs dimensionnant l'actionneur en régime permanent sera effectuée, suivant l'imposition des grandeurs en entrées, caractérisant le champ électromagnétique. Toutes ces études seront réalisées pour une configuration de référence de l'actionneur, d'un point de vue de ses dimensions géométriques, avec un coefficient de forme $Cf = \frac{w}{g} = 2.5$. Celle-ci n'est pas donnée dans le souci de préserver le caractère confidentiel de la thèse. Cependant, cela n'aura pas d'impact sur la qualité de l'étude. En effet, les objectifs principaux de cette thèse sont de mieux appréhender les phénomènes MHD pour l'application visée et d'apporter des outils permettant par la suite la conception d'un prototype viable. C'est donc dans l'optique de mieux comprendre la méthode de résolution employée, et l'évolution de la solution du problème selon les grandeurs imposées en entrée, que ces études sont réalisées. Et non pas, dans un premier temps du moins, dans l'idée de dimensionner un actionneur.

En premier lieu, nous nous intéressons donc à l'impact du maillage utilisé pour la résolution numérique sur les solutions. Nous travaillerons donc à champ électromagnétique imposé constant, d'un maillage à l'autre. Le nombre de Hartmann, dont l'expression est donnée dans le premier chapitre de ce mémoire (I.4.15), permet de caractériser la forme du profil de l'écoulement, sera ici égal à 18.2. Le fluide considéré est toujours le Mercure. Et dans un premier temps encore, nous nous intéressons au cas où les maillages utilisés sont à pas constants.

3.3.1 Comparaison 2D Axisymétrique (B-φ) - 1D cylindrique – Maillage à pas constant

3.3.1.1 Premier résultat

Une première solution de la résolution numérique est présentée ci-dessous, à partir du modèle *B-φ*. La solution présentée a été obtenue à partir d'un maillage à pas constants avec $N_r = 200$ et $N_z = 60$. La configuration choisie est la même que pour la solution obtenue par la résolution analytique 1D également présentée ci-dessous.

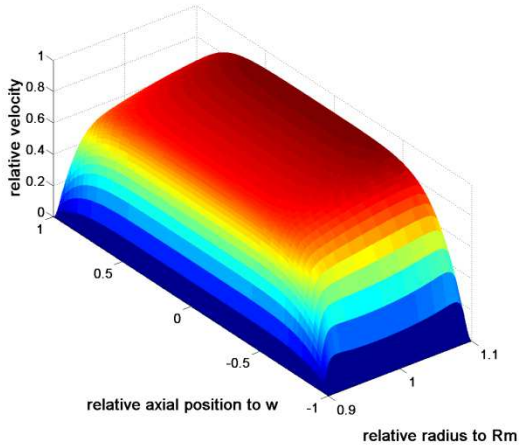


Fig. 21 2D - Profil de vitesse relatif de référence
$N_r = 200$; $N_z = 60$
12261 nœuds.

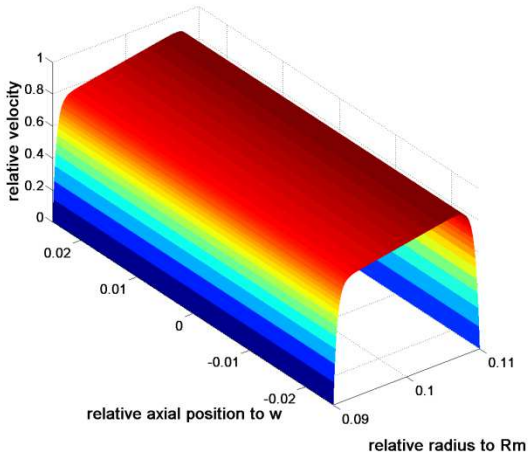


Fig. 22 1D - Profil de vitesse relatif / référence
$N_r = 200$

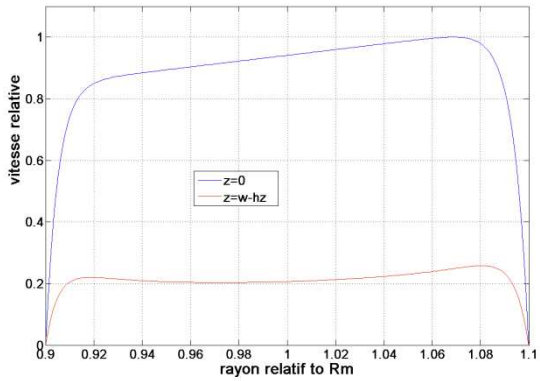


Fig. 23 2D - Tracés de vitesse relatifs suivant r (en $z = 0$ et $z = h_z - w$) - solution de référence
$N_r = 200$; $N_z = 60$

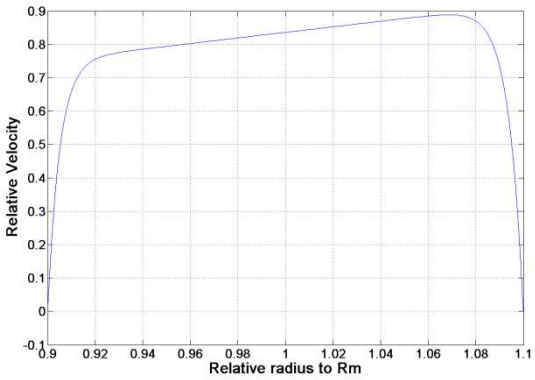


Fig. 24 1D - Profil de vitesse relatif / référence
$N_r = 200$

Observations :

La solution analytique obtenue en 1D cylindrique a été répliquée suivant la direction axiale en suivant à la lettre la considération que, la vitesse, n'évolue pas avec la position axiale. Aussi, à partir du profil de vitesse obtenu en 2D, des tracés de l'évolution de la vitesse ont été réalisés pour deux positions axiales définies, à savoir en $z = 0$ et $z = w - h_z$.

La première observation qui peut être faite, de par l'observation de ces différentes courbes, est que la vitesse aux électrodes n'est pas nulle lorsque le modèle 1D est considéré (par hypothèse). Cela implique également le fait que les gradients de vitesse axiaux ne sont pas considérés (par hypothèses toujours). Or, la résolution numérique appliquée au modèle 2D-*B*-φ met en évidence des gradients de vitesse non négligeables, suivant la position axiale, et une vitesse qui décroît en s'approchant des électrodes. Cela a pour conséquence que la vitesse maximale atteinte, en régime permanent, est plus importante en 2D que en 1D, de par le principe de conservation des forces (la force de Lorentz exercée sur le fluide étant exactement la même en 1D et 2D, de par l'imposition du même champ électromagnétique). En revanche, le couple résistif, dû aux forces de viscosité dans le fluide et aux parois, sera certainement sous-estimé par le modèle 1D, du fait de l'absence de gradients de vitesse suivant *z*. Néanmoins, les gradients de vitesse radiaux restent plus importants que ceux axiaux, d'après (Fig.21). Enfin, toujours de par l'absence de gradient de vitesse axiale en 1D, le moment cinétique lié

à la vitesse moyenne du fluide dans le canal sera probablement surestimé (ainsi que la vitesse moyenne) par le 1D. Aussi, les profils de vitesse obtenus en 2D semblent plus plausibles.

Enfin, remarquons que l'établissement de la vitesse se fait de manière exponentielle, particulièrement dans la direction radiale. A l'image de la solution analytique obtenue en 1D cylindrique (I.6.10), se présentant en fait sous la forme d'une somme de cosinus et sinus hyperbolique, mais dont le profil, dit de Hartmann, est « penché » de par la géométrie cylindrique de l'actionneur et que le champ magnétique est à conservation de flux.

Ensuite, nous présentons les grandeurs caractéristiques obtenues par ces deux solutions. La solution obtenue par résolution numérique et sous un maillage précis, est prise comme référence. Et les valeurs sont données en relatif par rapport à cette même référence. Un aspect important de la solution est de s'assurer du respect des bilans de couple et de puissance, évalué par le calcul d'écarts relatifs définis comme suit :

$$\varepsilon_{C_{vol}} = \frac{C_{res_{vol}} - C_{MHD}}{C_{MHD}} \quad \text{(II.3.96)}$$

$$\varepsilon_{C_{surf}} = \frac{C_{res_{surf}} - C_{MHD}}{C_{MHD}} \quad \text{(II.3.97)}$$

$$\varepsilon_P = \frac{P_{utile} - P_{elec_{fournie}}}{P_{elec_{fournie}}} \quad \text{(II.3.98)}$$

Sont également relevés les temps nécessaires à la résolution numérique (qui comprend la construction des matrices, qui nécessite environ un dixième du temps de résolution) et au post traitement, notés respectivement t_{resol} et t_{trait}. Sachant que pour le 1D, un temps de résolution n'aurait pas de sens puisqu'il s'agit uniquement de tracés et de calculs à partir de formulations analytiques. En revanche, le temps de traitement pourra être pris en compte. Est également défini le pourcentage de pertes Joules sur la puissance utile totale.

Tableau 2 Grandeurs Caractéristiques - Comparaison 1D-2D

	Résolution Numérique 2D $N_r = 200\,;N_z = 60$	Résolution Analytique 1D
M_{cin}	1	+0.6%
C_{MHD}	1	+2.4%
$C_{res_{vol}}$	1	+2.4%
$C_{res_{surf}}$	1	+2.4%
v_{moy}	1	+2.6%
$I_{z_{elec}}$	1	-5.2%
P_{MHD}	1	-11.7%
P_{joule}	1	-5.4%
P_{utile}	1	-8.7%
$P_{elec_{fournie}}$	1	-5.4%
$\varepsilon_{C_{vol}}$	0%	0%
$\varepsilon_{C_{surf}}$	0%	0%
ε_P	+3.6%	0%

$\%_{P_{Joule}}$	48.7%	50.5%
t_{resol}	6.2s	
t_{trait}	3.4s	2s

Observations :

Le moment cinétique trouvé par les deux approches est très proche. Mais la différence se voit plus nettement à partir de l'observation des vitesses moyennes. En effet, puisque nous travaillons à des vitesses relativement faibles en comparaison à l'inertie du fluide (comparaison purement mathématique), cette première n'aura que peu d'impact sur la valeur du moment cinétique. Précisons que, par construction, l'inertie de fluide mise en jeu est évidemment la même d'une solution à l'autre.

Aussi, le couple résistif ne semble pas sous-estimé en 1D. Au contraire, il semble surestimé. Cela dit, les couples restent très proches l'un de l'autre. Pourtant, cela reste contradictoire que le couple résistif obtenu en 1D soit supérieur à celui obtenu en 2D, si ce n'est que la totalité de la force MHD motrice est concentrée sur les parois magnétiques, en 1D. De fait, les gradients radiaux ont toutes les chances d'être supérieurs en 1D, par rapport au 2D. Néanmoins, si nous raisonnons du point de vue des forces de contraintes visqueuses, le modèle 1D ne les prend pas en compte. Pourtant ces forces sont bien présentes au niveau des surfaces constituées par les électrodes. De fait, cette constatation reste contradictoire.

Par ailleurs, donnons le rapport des couples résistifs à la fois sur les parois magnétiques et sur les électrodes, vis-à-vis du couple résistif total, pour cette résolution numérique :

$$\%_{C_{res_{mag}}} = 93\% \ ; \ \%_{C_{res_{elect}}} = 7\%$$

Ceci montre bien que la part du couple résistif produit au niveau des électrodes est faible. Il est donc tout à fait possible que, malgré la non prise en compte des gradients de vitesses axiaux par le modèle 1D, une mauvaise résolution numérique due à un maillage non suffisamment fin conduise à un couple résistif apparemment plus élevé en 1D. Toutefois, cela reste en désaccord avec la Physique.

Partant du postulat que plus le maillage est fin, meilleure sera la résolution numérique (de par une meilleure approximation des dérivées partielles des équations du système), cela signifie certainement que le maillage utilisé n'est pas assez fin. Aussi, de par le caractère analytique de la résolution 1D, les bilans en couple et en puissance y sont parfaitement respectés. En revanche, ceux obtenus par la résolution numérique sont plus litigieux. Cela pourrait venir de la validité de la solution autant que des méthodes d'approximations de dérivées utilisées pour la détermination de ces grandeurs. Tout cela reste grandement lié à la résolution du maillage. Il faut donc poursuivre l'étude de son impact sur la solution obtenue numériquement. Sur la solution, mais aussi sur la précision des calculs aboutissant aux grandeurs caractéristiques de l'actionneur (Moment cinétique, Couple moteur, etc..).

3.3.1.2 Impact du maillage

Pour ce faire, nous présentons maintenant plusieurs solutions obtenues par différents maillages plus ou moins fins. Et dans les mêmes conditions que décrit précédemment.

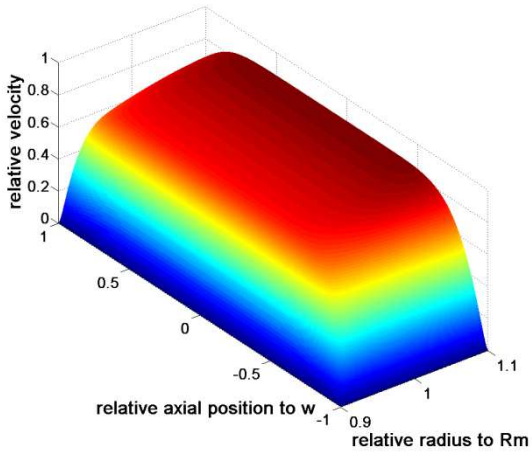


Fig. 23 2D - Profil de vitesse relatif de référence
$N_r = 1000$; $N_z = 2000$
2 003 001 nœuds.

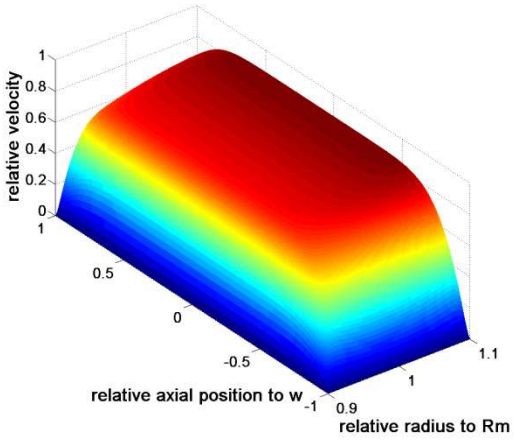


Fig. 26 Profil de vitesse relatif
$N_r = 500$; $N_z = 500$
251 001 nœuds.

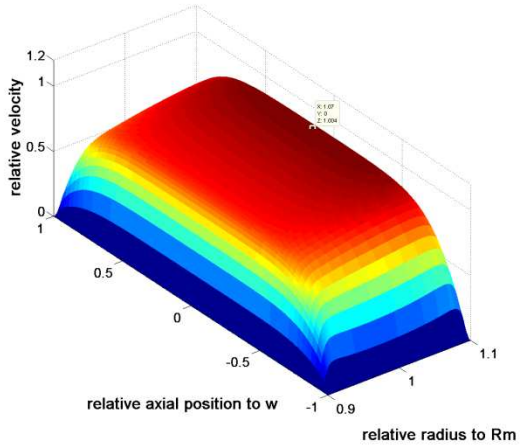


Fig. 27 Profil de vitesse relatif
$N_r = 120$; $N_z = 60$
7381 nœuds.

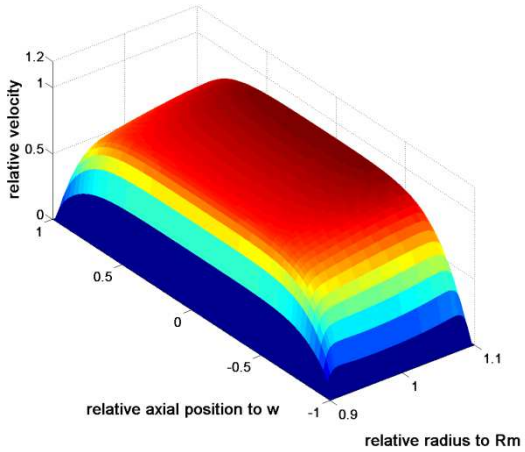


Fig. 28 Profil de vitesse relatif
$N_r = 60$; $N_z = 60$
3721 nœuds.

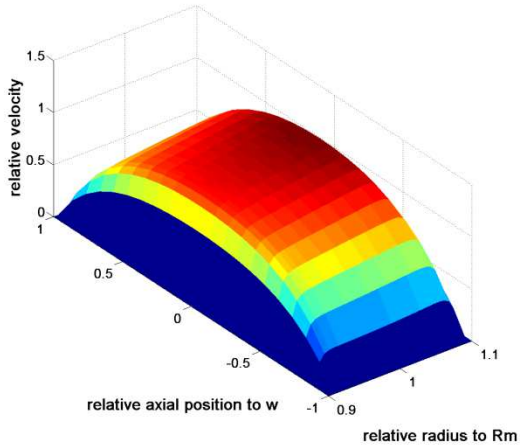


Fig. 29 Profil de vitesse relatif
$N_r = 30$; $N_z = 20$
651 nœuds.

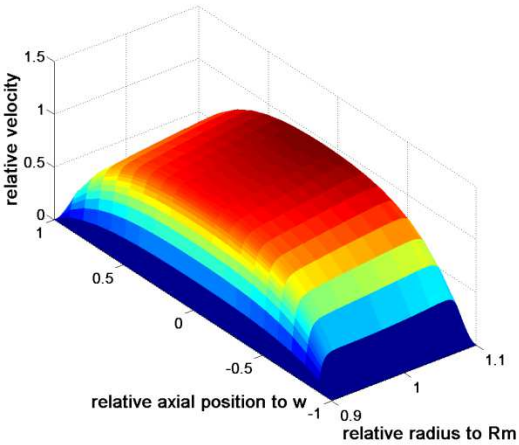


Fig. 30 Profil de vitesse relatif
$N_r = 120$; $N_z = 20$
2541 nœuds.

Observations :

Chaque profil de vitesse est tracé relativement au maximum de vitesse atteint pour le maillage de référence choisi ici ($N_r = 200\ et\ N_z = 60$), et dont la solution a été présentée précédemment. Ces courbes vérifient l'idée que, en diminuant le raffinement du maillage suivant la direction axiale ou radiale, les gradients de vitesses semblent être sous-estimés proche parois (suivant la même direction correspondante), du fait d'une mauvaise approximation des dérivées partielles dans les équations du système. Et la vitesse maximale, afin de respecter l'équilibre des forces (de Lorentz et de viscosité) en régime permanent, est légèrement augmentée (d'après le principe fondamental de la dynamique).

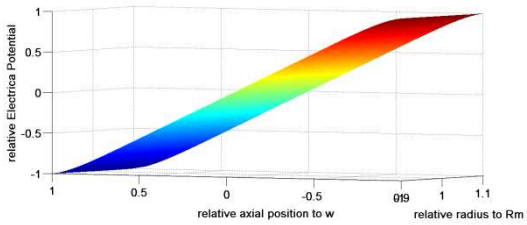


Fig. 31 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 1000\ ; N_z = 2000$
2 003 001 nœuds.

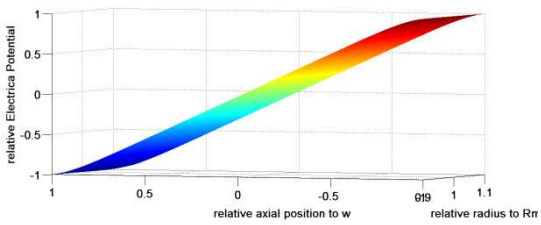


Fig. 32 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 500\ ; N_z = 500$
251 001 nœuds.

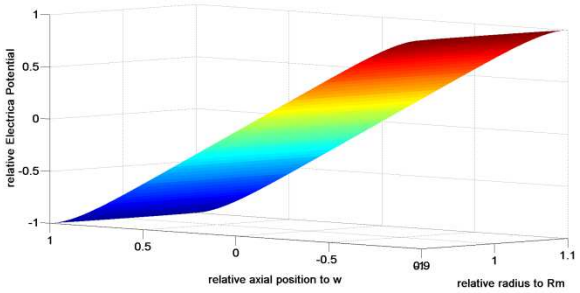


Fig. 33 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 120\ ; N_z = 60$
7381 nœuds.

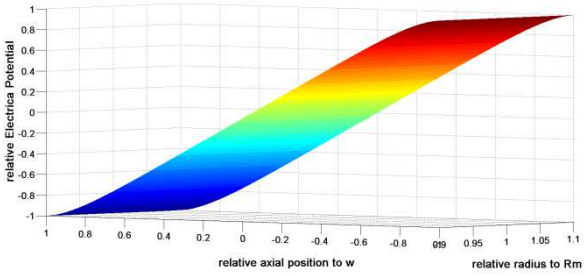


Fig. 34 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 60\ ; N_z = 60$
3721 nœuds.

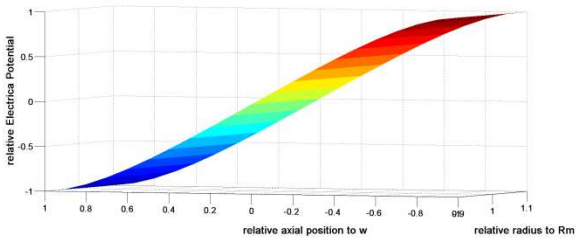


Fig. 35 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 30\ ; N_z = 20$
651 nœuds.

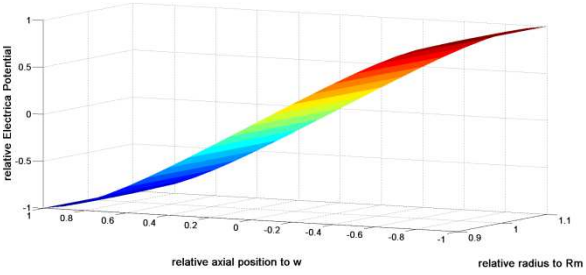


Fig. 36 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 120\ ; N_z = 20$
2541 nœuds.

Observations :

Sur ces courbes, il peut être remarqué que lorsque le raffinement du maillage est dégradé, le gradient du potentiel électrique semble se stabiliser (devenir constant) plus loin des parois. Le point d'inflexion, quant à lui, se situe bien toujours en z=0. En revanche, le gradient du potentiel semble d'autant plus important à ce point d'inflexion que le maillage est grossier.

Aussi, la variation du potentiel électrique semble purement axiale. Si des gradients axiaux existent, ils seront certainement négligeables. Cela pourra être vérifié par le calcul des densités de courant axiale et radiale. Aussi, le potentiel étant imposé aux électrodes ($\pm\frac{U}{2}$), les extrema du potentiel sont nécessairement toujours identiques.

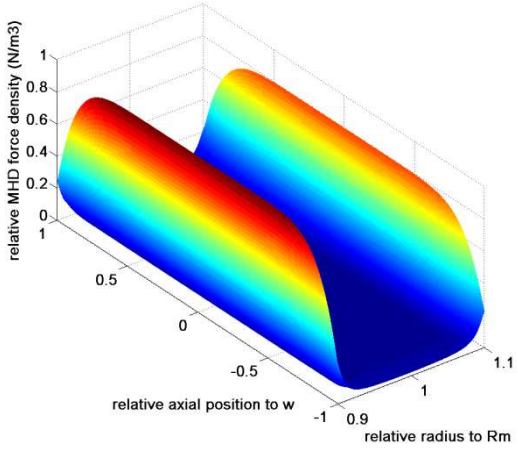


Fig. 37 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 1000$; $N_z = 2000$
2 003 001 nœuds.

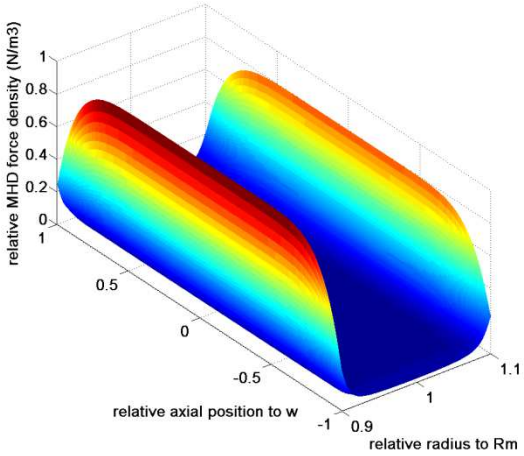


Fig. 38 Profil du potentiel électrique relatif
$N_r = 500$; $N_z = 500$
251 001 nœuds.

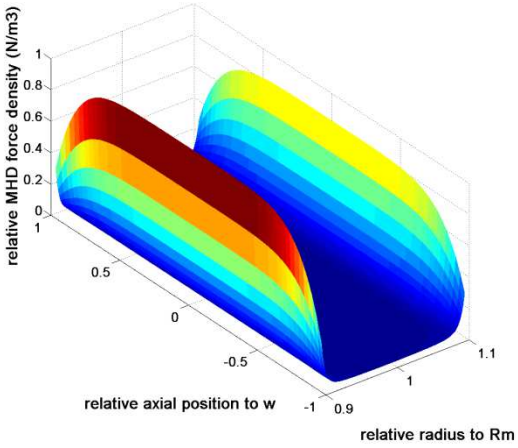


Fig. 39 Profil de la force MHD relatif
$N_r = 120$; $N_z = 60$
7381 nœuds.

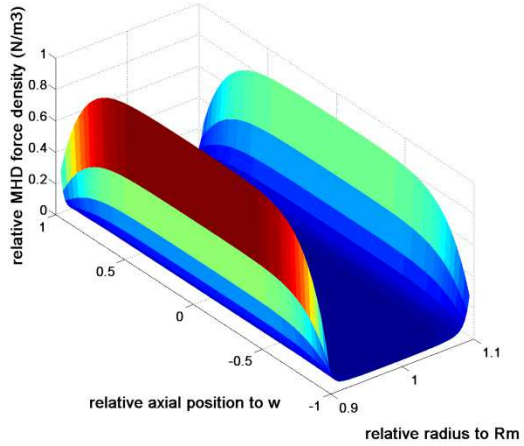


Fig. 40 Profil de la force MHD relatif
$N_r = 60$; $N_z = 60$
3721 nœuds.

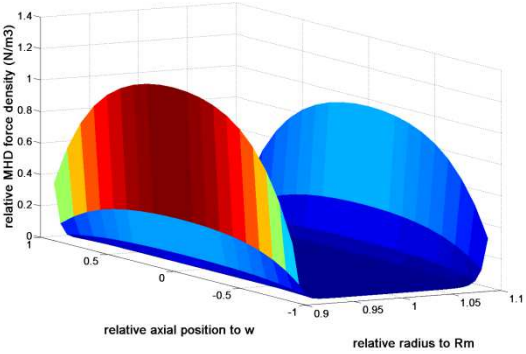


Fig. 41 Profil de la force MHD relatif
$N_r = 30$; $N_z = 20$
651 nœuds.

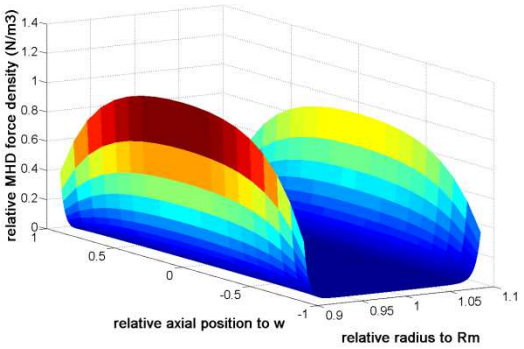


Fig. 4 Profil de la force MHD relatif
$N_r = 120$; $N_z = 20$
2541 nœuds.

Observations :

L'observation faite sur le potentiel électrique se retrouve sur l'évolution axiale de la force MHD proche des parois magnétiques. Celle-ci atteint d'autant plus lentement une valeur « constante », un palier, que le maillage est faiblement raffiné. En effet, son expression dépendant du gradient axial du potentiel électrique, et de la vitesse, qui elle aussi varie plus continuellement et loin des parois avec un maillage grossier.

Remarquons aussi que la force MHD se concentre proche parois, particulièrement proche des parois magnétiques. Au milieu du canal, elle est nulle car un équilibre est installé entre les deux termes présents dans son expression, l'un dû au gradient du potentiel électrique, l'autre à la vitesse (et le champ B), cf. l'expression de la densité de courant axiale (II.1.12).

Enfin, la valeur maximale atteinte par la force MHD évolue d'un maillage à l'autre, à l'image de la vitesse dans le canal et du gradient du potentiel électrique en z=0.

De plus, l'observation faite que, le gradient axial semble atteindre une valeur constante d'autant plus loin des électrodes que le maillage est grossier, rejoint parfaitement le fait que la vitesse continue elle aussi à varier fortement au milieu du canal, de sorte que la densité de courant s'annule bien au milieu du canal, à l'image de la densité de force MHD localisée uniquement proche parois (I.2.4) et (I.2.5). Les forces de viscosité étant elles aussi localisées proche parois, de par la condition de vitesse nulle aux parois. Cela fait également appel à la notion de couche limite pour l'écoulement, au-delà de laquelle la vitesse est constante (si ce n'est ici la variation linéaire du champ magnétique, qui implique une variation constante de vitesse au milieu du canal).

Le tableau suivant nous donne les valeurs des grandeurs caractéristiques en relatif par rapport à la solution dite de référence présentée plus haut.

Tableau 3 Grandeurs Caractéristiques - 2D - Comparaison de Différents Maillages à Pas Constants

$(N_r * N_z)$	1000*2000	500*500	200*60	120*60	60*60	30*20	120*20	1D
nœuds	2 003 001	251001	12261	7381	3721	651	2541	
M_{cin}	+0.2%	+0.2%	1	-0.05%	-0.2%	-1.7%	-0.9%	+0.6%
C_{MHD}	+9.5%	+7.1%	1	-4.8%	-16.7%	-38%	-9.5%	+2.4%
$C_{res_{vol}}$	+9.5%	+7.1%	1	-4.8%	-16.7%	-38%	-9.5%	+2.4%
$C_{res_{surf}}$	+9.5%	+7.1%	1	-7.1%	-19%	-40%	-9.5%	+2.4%
v_{moy}	+2.2%	+1.8%	1	-0.4%	-1.3%	-7.6%	-4.5%	+2.6%
$I_{z_{elec}}$	+2.1%	+0.8%	1	-3.8%	-12.2%	-9.3%	+11%	-5.2%
P_{MHD}	0%	0%	1	-1.7%	-3.4%	-6.8%	-1.2%	-11.7%
P_{joule}	-1.8%	-1.8%	1	+1.8%	+12.5%	+53.6%	+5.4%	-5.4%
P_{utile}	-0.9%	-0.9%	1	+0.9%	+4.3%	+20%	+2.6%	-8.7%
$P_{elec_{fournie}}$	+1.8%	+0.9%	1	-3.6%	-12.6%	-10%	+10.8%	-5.4%
$\varepsilon_{C_{vol}}$	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$\varepsilon_{C_{surf}}$	0%	0%	0%	-2.5%	-2.9%	-3.8%	0%	0%
ε_P	+0.9%	+1.8%	+3.6%	+8.4%	+23.7%	+38%	-4%	0%
$\%_{P_{Joule}}$	48.2%	48.2%	48.7%	49.1%	52.5%	62.3%	50%	50.5%
t_{resol}	542s	57.8s	6.2s	1.6s	0.7s	0.2s	0.5s	
t_{trait}	246s	17s	3.4s	2.2s	0.9s	0.8s	0.9s	2s
$\%_{C_{resmag}}$	91.2%	93%	93%	93.6%	93%	95.2%	96.6%	(100%)
$\%_{P_{Joule_z}}$	99.4%	99.4%	99.5%	99.6%	99.7%	99.8%	99.5%	(100%)

Observations :

Ici nous pouvons constater que pour les deux maillages les plus fins, le couple résistif obtenu devient supérieur à celui obtenu en 1D. Cela confirme bien ce qui était initialement attendu. A savoir d'une part que le modèle 1D, qui néglige l'existence des gradients axiaux de vitesses, sous-estime effectivement le couple résistif dû aux forces de contraintes visqueuses également présentes aux surfaces des électrodes. Ainsi, le couple moteur à fournir est également augmenté, le bilan en couple étant parfaitement respecté. Aussi, la vitesse moyenne est bien surestimée par le modèle 1D, du fait de la non prise en compte de la condition de vitesse nulle aux électrodes. Cela peut être également remarqué à partir de la valeur du moment cinétique.

D'autre part, le couple résistif était sous-estimé en 2D pour le maillage de référence ($N_r = 200\ et\ N_z = 60$) du fait d'un maillage trop grossier qui n'approche pas assez précisément les différentes dérivées partielles présentes dans les équations du système. Il est donc justifier de supposer que les valeurs de couples et puissances atteintes par les maillages les plus fins soient les plus exactes.

Dans l'état actuel des choses, il n'est pas possible de dire qu'elle serait la valeur théorique du couple qui doit être atteinte, et à quel point le maillage doit être raffiné pour l'obtenir. Aussi, il est important de noter que la résolution est de fait beaucoup plus lente pour ces maillages très fins. Ceci peut être contraignant dans le cadre d'un dimensionnement de l'actionneur, réalisé par optimisation par exemple. Mais aussi pour la résolution dynamique à suivre pour dimensionner le couple de réaction de l'actionneur. En effet, il s'agira de répéter autant de fois que de pas temporel la résolution d'un problème relativement équivalent.

Concernant le bilan de puissance, lorsque le maillage est grossier, le courant I_z au niveau des électrodes est mal évalué (sous-estimé). De fait, la puissance électrique fournie par l'actionneur est également sous-estimée. Cela est dû à la difficulté d'évaluer le courant I_z au niveau d'une des électrodes, car ce calcul prend en compte l'approximation du gradient de vitesse axial pris sur une seule maille suivant z, qui est donc fortement dépendant du maillage. Pour preuve, même à maillage fin, et à pas constant, la convergence n'est pas parfaite (par rapport à la puissance utile).

Enfin, le rendement de l'actionneur sera de 50% environ, rendement relativement classique pour les actionneurs MHD à conduction.

Conclusion :

Globalement, plus le maillage est fin, plus les bilans en couples et puissances sont respectés. Egalement, plus le maillage est fin, plus la solution numérique s'approche d'une solution exacte, notamment en ce qui concerne le moment cinétique et la vitesse moyenne dans le canal. De part à la fois une meilleure approximation des dérivées partielles pour les schémas de discrétisation utilisés dans la résolution numérique, mais aussi un calcul numérique plus exact des grandeurs caractéristiques, qui utilisent de nouveau ces mêmes schémas. Tout ceci peut justifier, dans une certaine mesure, la convergence de la résolution pour les maillages les plus raffinés.

Aussi, d'après les diverses courbes tracées, les gradients de vitesse et de force MHD sont concentrés qu'en certaines zones de la section du canal, à savoir plus particulièrement proche parois. Ces gradients sont ensuite très faibles au milieu du canal. De plus, un grand nombre de nœuds implique un temps de calcul plus long. L'idée est donc de placer judicieusement ces nœuds de sorte

que la précision des approximations numériques soient maximisée là où cela est nécessaire, c'est-à-dire proche parois, tout en limitant le nombre de nœuds pour le maillage.

C'est pourquoi, il est proposé d'utiliser un maillage à pas variable.

3.3.2 Maillage à Pas Variable sous Contraintes Physiques

Comme nous l'avons explicité plus haut, les gradients de vitesse sont concentrés proches parois. De fait, c'est également dans cette zone que le nombre de nœuds requis est plus important, afin d'avoir une bonne approximation des divers gradients, autant pour la résolution que le post traitement de la solution. De plus, comme nous l'avions remarqué, l'établissement de la vitesse se fait de manière exponentielle. Notre idée est donc de déterminer les épaisseurs caractéristiques sur lesquelles s'effectue cet établissement de la vitesse. De sorte que nous pourrons mailler plus finement là où cela est nécessaire pour la résolution numérique. Aussi, la connaissance de ces épaisseurs caractéristiques permettra de réaliser ce maillage de manière autonome vis-à-vis de l'utilisateur.

Pour ce faire, nous faisons appel aux travaux de R. Moreau [1] qui montrent que, dans le cas d'une section rectangulaire où les parois perpendiculaires au champ magnétique sont considérées isolantes, et les parois qui lui sont parallèles parfaitement conductrices, il est alors possible de déterminer deux épaisseurs équivalentes à des couches limites, notées $\delta_{\perp}$ et $\delta_{/\!/}$. Ces épaisseurs de couche limite sont valables pour des nombres de Hartmann très supérieurs à l'unité, et respectivement loin des électrodes, et loin des parois magnétiques. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\boldsymbol{\delta_{\perp}} = \frac{g}{H_a} = \frac{1}{B_0}.\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \qquad \text{(II.3.99)}$$

$$\boldsymbol{\delta_{/\!/}} = H_a^{-\frac{1}{2}}.w \qquad \text{(II.3.100)}$$

Ces relations montrent que l'épaisseur de couche limite au niveau des parois magnétiques $\delta_{\perp}$ ne dépend pas de l'épaisseur d'entrefer magnétique, contrairement à celle au niveau des électrodes. De plus, pour $H_a \gg 1$, cette dernière sera beaucoup plus grande que la première. Ce qui se vérifie d'ailleurs sur les courbes de vitesse présentées dans le paragraphe précédent.

Pour le maillage dit de référence ($N_r = 200$ et $N_z = 60$), et pour un nombre de Hartmann égal à 18.2, nous pouvons représenter ces épaisseurs caractéristiques sur le profil de vitesse obtenu.

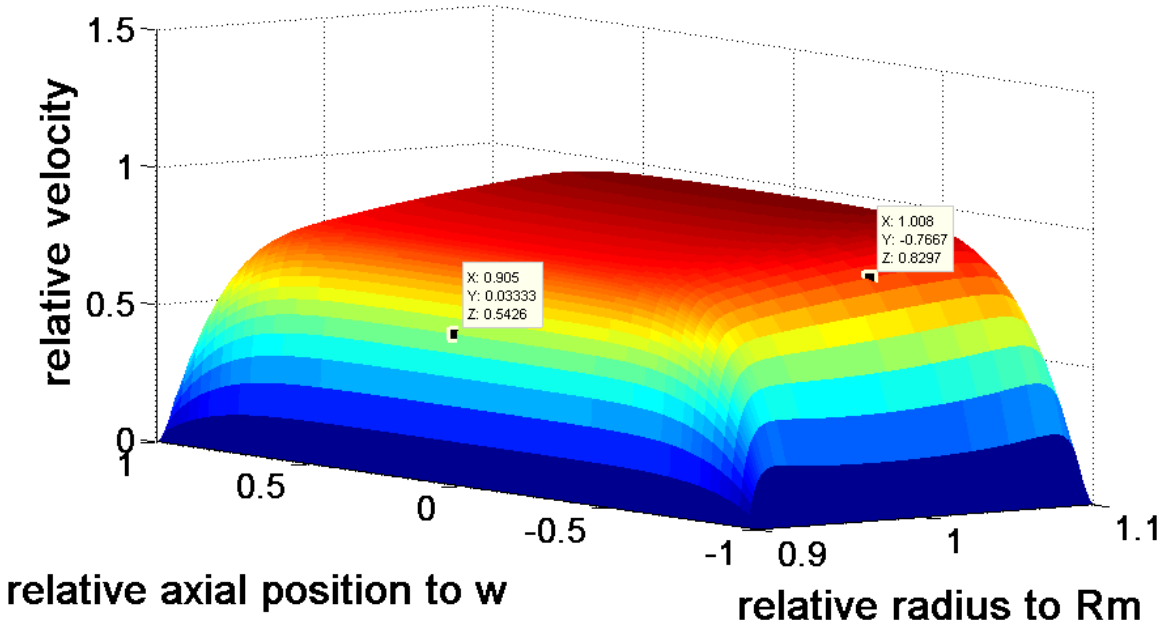


Fig. 5 Représentations des épaisseurs de couche limite

Sur ce profil, $\delta_{\perp}$ est représentée à gauche par le point de coordonnées $(0.905; 0.033; 0.543)$, dont la coordonnée $X = 0.905$ correspond à l'épaisseur en question relativement à Rm. L'épaisseur est exactement de, relativement à Rm : $\delta_{\perp} = 0.05.g$.

Le point de coordonnées $(1.08; -0.7667; 0.8297)$ correspond, par sa coordonnée $Y = -0.7667$, à l'épaisseur de couche limite $\delta_{/\!/} = 0.234.w$.

Nous pouvons constater que $\delta_{/\!/}$ est bien supérieure à $\delta_{\perp}$ comme explicité en [1]. Aussi, nous pouvons observer que si la vitesse est presque complètement établie axialement sur $\delta_{/\!/}$, ce n'est en revanche pas le cas pour l'établissement radial de la vitesse sur $\delta_{\perp}$. En effet, le nombre de Hartmann est ici égal à 18.2 ce qui n'est pas très grand devant l'unité. Cela peut justifier le fait que la couche limite soit plus épaisse.

Ainsi, une première résolution numérique à pas constant peut être nécessaire afin de déterminer la correspondance ou non de ces épaisseurs caractéristiques avec les distances sur lesquelles s'établissent effectivement les gradients de vitesse. Cela peut remettre en cause l'idée d'un maillage réalisé en autonomie, quelques soient la géométrie et le champ appliqué. Autrement, il pourrait être intéressant d'effectuer une étude portant sur la variation des épaisseurs de couche limite effectives en fonction de celles théoriques, en fonction du nombre de Hartmann par exemple.

En ce qui concerne notre étude, nous en resterons sur cette observation. Ainsi, les épaisseurs de couche limite théorique seront utilisées pour réaliser différents maillages dits sous contraintes physiques, car dépendant intrinsèquement de ces épaisseurs théoriques.

3.3.2.1 Construction du Maillage

Pour réaliser ce maillage à pas variable donc, différentes zones sont définies. Ici, ce n'est pas réellement un maillage à pas variable qui est effectué, mais plutôt un maillage par segment. Ces segments donc, sont définis pour les directions axiale et radiale en fonction des épaisseurs de couche

limite théoriques. Par expérience des zones où les gradients des différentes grandeurs sont les plus importants, et du fait des méthodes de calcul de post traitement (particulièrement la puissance électrique et le couple résistif par la méthode dite surfacique), il est maintenant su que le maillage doit être particulièrement fin très proche de la paroi. C'est pourquoi, le premier segment est défini de la façon suivante :

$$\delta_{r_1} = \frac{1}{a}.\delta_{\perp} \quad \text{(II.3.101)}$$

$$\delta_{z_1} = \frac{1}{a}.\delta_{/\!/} \quad \text{(II.3.102)}$$

Avec $20 \geq a \geq 2$ entier.

Ensuite, le deuxième segment est défini de sorte que, approximativement, la vitesse atteint la moitié de sa valeur maximale au bout de ce segment. Dans notre configuration, cela donne :

$$\delta_{r_2} = \frac{1}{b}.\delta_{\perp} \quad \text{(II.3.103)}$$

$$\delta_{z_2} = \frac{1}{c}.\delta_{/\!/} \quad \text{(II.3.104)}$$

Avec $b \in [1,2]$ et$c \in [2,3]$ entiers.

Enfin, un troisième segment est défini de tel sorte que la vitesse soit complètement établie à la fin de ce segment.

$$\delta_{r_3} = 6.\delta_{\perp} \quad \text{(II.3.105)}$$

$$\delta_{z_3} = 2.\delta_/\!/ \quad \text{(II.3.106)}$$

Ces paramètres ont été fixés pour l'étude, de sorte que l'épaisseur totale de ces trois segments suffisent à mailler l'ensemble des zones où les gradients sont plus élevés, jusqu'au plateau de vitesse.

Ensuite, en prenant l'exemple de la direction radiale, le maillage est réalisé de la façon suivante :

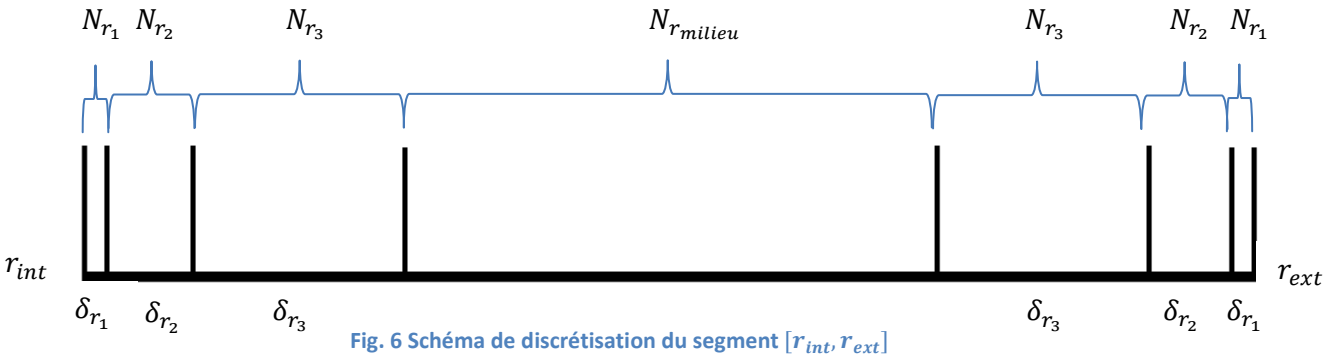


Fig. 6 Schéma de discrétisation du segment $[r_{int}, r_{ext}]$

Ainsi, le nombre de pas de discrétisation est défini pour chacun des segments, à l'intérieur desquels le pas est constant. Il s'agit donc bien d'un maillage par segments. Avec,

$$N_r = 2.(N_{r_1} + N_{r_r} + N_{r_3}) + N_{z_{milieu}} \quad \text{(II.3.107)}$$

$$N_z = 2.\left(N_{z_1} + N_{z_2} + N_{z_3}\right) + N_{z_{milieu}} \quad \text{(II.3.108)}$$

3.3.2.2 Comparaison

Pour l'étude, différentes configurations de maillages sous contraintes physiques ont été choisies. Une comparaison des résultats est faite pour quatre d'entre elles. L'ensemble des courbes et grandeurs caractéristiques données le sont toujours relativement à la solution dite de référence ($N_r = 200\,, N_z = 60$). Les courbes et résultats obtenus pour cette solution de référence, et pour la solution au maillage le plus fin ($N_r = 1000\,, N_z = 2000$) à pas constant, sont rappelés pour permettre une bonne comparaison visuelle avec les résultats obtenus à partir des différents maillages sous contraintes physiques.

Aussi, différentes configurations de maillages sous contraintes physiques sont définies. Selon la segmentation ainsi que pour le nombre de pas de discrétisation pour chaque segment.

S1

$$\delta_{r_1} = \frac{1}{10}.\delta_{\perp}\ ;\ \delta_{r_2} = \frac{1}{2}.\delta_{\perp}\ ;\ \delta_{r_3} = 6.\delta_{\perp} \qquad \text{(II.3.109)}$$

$$\delta_{z_1} = \frac{1}{10}.\delta_{/\!/}\ ;\ \delta_{z_2} = \frac{1}{2}.\delta_{/\!/}\ ;\ \delta_{z_3} = 2.\delta_{/\!/} \qquad \text{(II.3.110)}$$

S2

$$\delta_{r_1} = \frac{1}{10}.\delta_{\perp}\ ;\ \delta_{r_2} = \frac{1}{2}.\delta_{\perp}\ ;\ \delta_{r_3} = 6.\delta_{\perp} \qquad \text{(II.3.111)}$$

$$\delta_{z_1} = \frac{1}{10}.\delta_{/\!/}\ ;\ \delta_{z_2} = \frac{1}{2}.\delta_{/\!/}\ ;\ \delta_{z_3} = \frac{3}{2}.\delta_{/\!/} \qquad \text{(II.3.112)}$$

S3

$$\delta_{r_1} = \frac{1}{4}.\delta_{\perp}\ ;\ \delta_{r_2} = 1.\delta_{\perp}\ ;\ \delta_{r_3} = 6.\delta_{\perp} \qquad \text{(II.3.113)}$$

$$\delta_{z_1} = \frac{1}{4}.\delta_{/\!/}\ ;\ \delta_{z_2} = \frac{1}{3}.\delta_{/\!/}\ ;\ \delta_{z_3} = \frac{3}{2}.\delta_{/\!/} \qquad \text{(II.3.114)}$$

D1

$$N_{r_1} = 20\,; N_{r2} = 15\,; N_{r_3} = 20\,; N_{r_{milieu}} = 5\,; N_r = 115 \qquad \text{(II.3.115)}$$

$$N_{z_1} = 20\,; N_{z_2} = 15\,; N_{z_3} = 20\,; N_{z_{milieu}} = 5\,; N_z = 115 \qquad \text{(II.3.116)}$$

D2

$$N_{r_1} = 25\,; N_{r2} = 20\,; N_{r_3} = 10\,; N_{r_{milieu}} = 5\,; N_r = 115 \qquad \text{(II.3.117)}$$

$$N_{z_1} = 20\,; N_{z_2} = 15\,; N_{z_3} = 20\,; N_{z_{milieu}} = 5\,; N_z = 105 \qquad \text{(II.3.118)}$$

D3

$$N_{r_1} = 20\,; N_{r2} = 15\,; N_{r_3} = 30\,; N_{r_{milieu}} = 5\,; N_r = 135 \qquad \text{(II.3.119)}$$

$$N_{z_1} = 20\,; N_{z_2} = 15\,; N_{z_3} = 20\,; N_{z_{milieu}} = 5\,; N_z = 115 \qquad \text{(II.3.120)}$$

Le choix de ces configurations sera explicité tout au long des observations faites à partir des courbes suivantes :

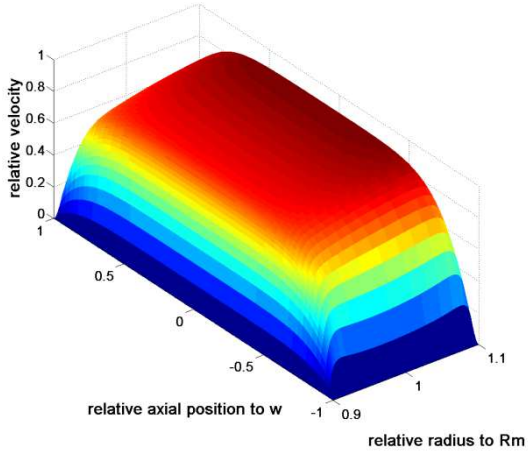


Fig. 7 2D - Profil de vitesse relatif de la référence
$N_r = 200$; $N_z = 60$
12 261 nœuds.

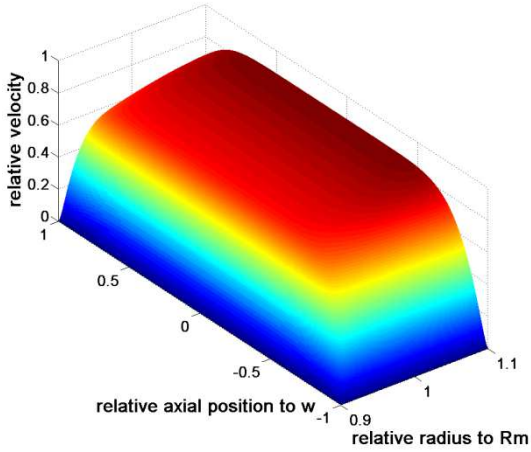


Fig. 8 2D - Profil de vitesse relatif
$N_r = 1000$; $N_z = 2000$
2 003 001 nœuds.

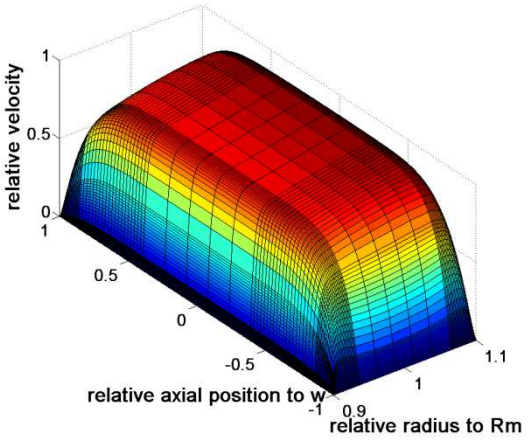


Fig. 47 Profil de vitesse relatif
S1 + D1
13456 nœuds.

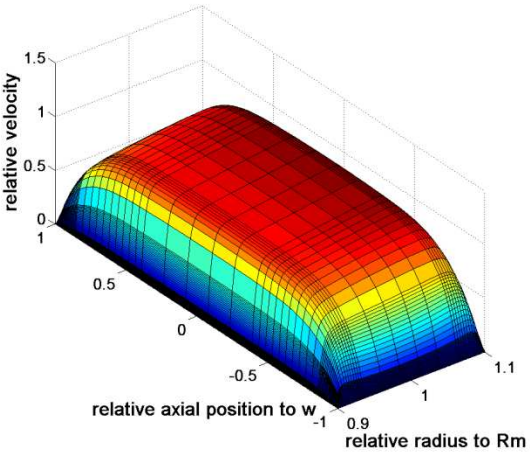


Fig. 48 Profil de vitesse relatif
S1 + D2
12296 nœuds.

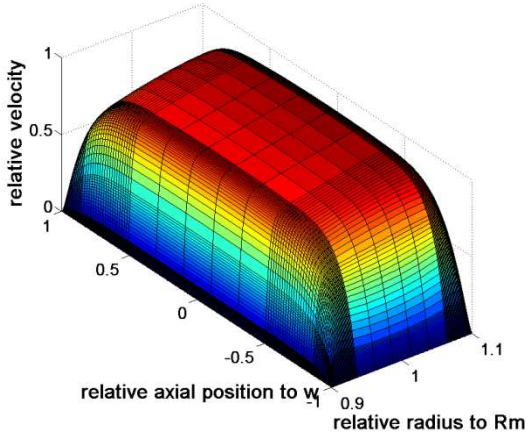


Fig. 49 Profil de vitesse relatif
S2 + D3
15776 nœuds.

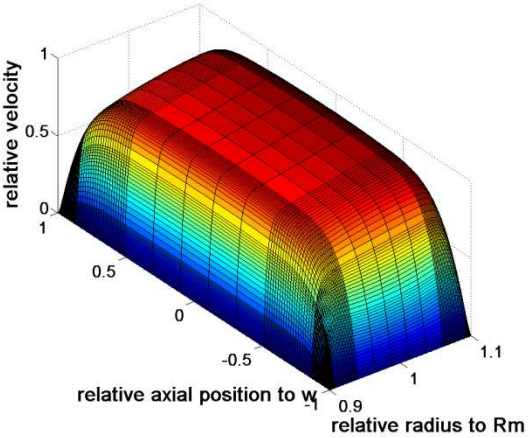


Fig. 50 Profil de vitesse relatif
S3 + D1
13456 nœuds.

Observations :

Ces courbes montrent bien les différents maillages utilisés et leur raffinement progressif. Les différentes zones se distinguent en effet nettement, avec un maillage très fin proche parois, puis deux autres zones particulières, avant d'arriver au milieu du canal où là le maillage est très grossier. C'est cette zone, où les gradients sont très faibles et constants qui permet un gain énorme en terme du nombre de nœuds utilisé pour le maillage.

En ce qui concerne les courbes obtenues à partir de la segmentation de type *S1*, il peut être observé que le nombre de nœuds est trop important au milieu du canal, suivant la direction axiale. Alors même que le « palier » en vitesse semble déjà atteint. C'est pourquoi la segmentation *S2* a été étudiée. De sorte que le segment δ_{z_3} présente une taille réduite mais tout de même suffisante pour un assurer un maillage assez fin là où le gradient de vitesse continue à varier légèrement. La segmentation *S3* prend également en compte cette observation.

Aussi, la configuration {S1 + D2} cherche principalement à maximiser le nombre de nœuds proche parois, pour les différents calculs surfaciques. Seulement, visuellement, un manque de nœuds peut se laisser présager sur les segments δ_{r_3} et δ_{z_3}. Nous verrons ce qu'il en sera concernant les grandeurs caractéristiques pour cette solution. D'ailleurs, la configuration {S1 + D1} semble aussi présenter, visuellement, un manque de nœuds dans le segment δ_{r_3} pour la bonne prise en compte des gradients radiaux correspondants. C'est pourquoi la discrétisation *D3* a été faite, ainsi que l'étude de la configuration {S2 + D3} afin de tester un apport de nœuds supplémentaire sur ce même segment.

Enfin, la dernière configuration {S3 + D1} permet de tester un nombre de nœuds inférieur très proche parois (mais toujours assez conséquent), afin d'augmenter globalement le nombre de nœuds sur les segments $\delta_{r_2}, \delta_{r_3}, \delta_{z_2}$ et δ_{z_3}. Tout en gardant l'observation faite pour le schéma *S1* et le segment δ_{z_3}. De plus, les premiers et seconds segments étant pris plus larges, les derniers segments arrivent plus « loin » au milieu du canal.

Afin de comparer quantitativement ces différentes configurations entre elles et avec celles obtenues à pas constants, voici un tableau présentant les différentes grandeurs caractéristiques. Les valeurs sont toujours données relativement à la solution dite de référence.

Tableau 4 Grandeurs Caractéristiques - 2D - Comparaison de Différents Maillages à Pas Variables

$(N_r * N_z)$ nœuds	1000*2000 2 003 001	200*60 12261	S1 + D1 116*116 13456	S1 + D2 116*106 12296	S2 + D3 136*116 15776	S3 + D1 116*116 13456	1D
M_{cin}	+0.2%	1	+0.1%	-0.05%	+0.1%	+0.1%	+0.6%
C_{MHD}	+9.5%	1	+11.9%	+11.9%	+11.9%	+11.9%	+2.4%
$C_{res_{vol}}$	+9.5%	1	+11.9%	+11.9%	+11.9%	+11.9%	+2.4%
$C_{res_{surf}}$	+9.5%	1	+11.9%	+11.9%	+11.9%	+11.9%	+2.4%
v_{moy}	+2.2%	1	+2.2%	+1.8%	+2.2%	+2.2%	+2.6%
$I_{z_{elec}}$	+2.1%	1	-2.8%	-11.7%	-1.6%	-0.8%	-5.2%
P_{MHD}	0%	1	0%	0%	0%	0%	-11.7%
P_{joule}	-1.8%	1	0%	+1.8%	-1.8%	-1.8%	-5.4%
P_{utile}	-0.9%	1	0%	+0.8%	-0.8%	-0.8%	-8.7%
$P_{elec_{fournie}}$	+1.8%	1	-2.7%	-11.7%	-1.8%	-0.9%	-5.4%
$\varepsilon_{C_{vol}}$	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$\varepsilon_{C_{surf}}$	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
ε_P	+0.9%	+3.6%	+6.5%	+18.4%	+4.6%	+3.6%	0%
$\%_{P_{Joule}}$	48.2%	48.7%	48.7%	49.1%	48.2%	48.2%	50.5%
t_{resol}	542s	6.2s	1.8s	1.8s	2.1s	1.9s	
t_{trait}	246s	3.4s	1.4s	1.3s	1.5s	1.3s	2s
$\%_{C_{res_{mag}}}$	91.2%	93%	91.7%	92.5%	91.6%	91.7%	(100%)
$\%_{P_{Joule_z}}$	99.4%	99.5%	99.4%	99.3%	99.4%	99.4%	(100%)

Observations :

Ces résultats nous montrent en premier lieu que les valeurs de couples trouvées sont supérieures lorsque les maillages sous contraintes physiques sont utilisés, comparativement à celles obtenues à partir des maillages à pas constants, même le plus fin d'entre eux. Cela peut venir du fait que le raffinement du maillage est très important là où les gradients sont très élevés, c'est-à-dire au niveau des 1ers segments δ_{r_1} et δ_{z_1}. En outre, cela est également le cas pour la configuration {S3 + D1}, qui semble donc suffisante pour obtenir un calcul du couple résistif précis par la méthode surfacique. Or, les configurations {S1 + D1}, {S1 + D2} et {S2 + D3} présentant des segments δ_{r_1} et δ_{z_1} plus petits pour un nombre de nœuds supérieur ou égal à la configuration {S3 + D1}, nous pouvons en conclure que pour avoir une bonne précision sur le calcul du couple résistif, notamment par la méthode qui considère les forces de contraintes visqueuses aux parois et nécessitant une très bonne précision du premier gradient de vitesse à partir de ces mêmes parois, un tel raffinement de ces premières configurations n'est pas nécessaire. Aussi, puisque pour un raffinement supérieur, ces configurations ne donnent pas de valeur supérieur de couple à la configuration {S3 + D1}, alors il semble que cette valeurs de couple résistif corresponde à la valeur exacte.

De plus, en augmentant de fait le nombre de nœuds sur les segments $\delta_{r_2}, \delta_{r_3}, \delta_{z_2}$ et δ_{z_3}, la configuration {S3 + D1} semble permettre d'obtenir une meilleure précision sur le calcul du courant axial aux électrodes et de la puissance électrique fournie à l'actionneur. La configuration {S2 + D3} est également concernée par cette observation.

Le bilan en couple est parfaitement respecté par ces nouveaux maillages. De plus, les moments cinétiques sont bons, ainsi que les vitesses moyennes, comparés aux valeurs obtenues pour le maillage à pas constant le plus fin, si ce n'est pour la configuration {S1 + D2}. En effet, cette dernière ne

présente pas un nombre de nœuds suffisant pour les segments δ_{r_3} et δ_{z_3}. Les bilans en couple permettent de valider la convergence des solutions d'un point de vue numérique, sans pour autant valider l'exactitude de la solution.

Les temps de calculs sont nettement plus courts avec ces maillages à pas variable que ceux du maillage à pas constant le plus fin, et même inférieurs à ceux pour celui de référence, pour des résultats meilleurs que ceux de la solution de référence.

De par ces observations, l'idée nous vient d'utiliser le schéma *S3*, suffisant pour obtenir une bonne précision pour le calcul surfacique du couple résistif, associé à une discrétisation de type *D3* où le nombre de nœuds est augmenté sur δ_{r_3}, et en faisant de même sur δ_{z_3}. Ceci afin d'améliorer la précision du calcul du courant fourni à l'actionneur, ainsi que la puissance électrique.

D4

$$N_{r_1} = 20\,;N_{r2} = 15\,;N_{r_3} = 30\,;N_{r_{milieu}} = 5\,;N_r = 135 \qquad \text{(II.3.121)}$$

$$N_{z_1} = 20\,;N_{z_2} = 15\,;N_{z_3} = 30\,;N_{z_{milieu}} = 5\,;N_z = 135 \qquad \text{(II.3.122)}$$

Tableau 5 Grandeurs Caractéristiques - 2D – Maillage {S3 + D4}

$(N_r * N_z)$ nœuds	S3 + D4 136*136 18496
M_{cin}	+0.1%
C_{MHD}	+11.9%
$C_{res_{vol}}$	+11.9%
$C_{res_{surf}}$	+11.9%
v_{moy}	+2.2%
$I_{z_{elec}}$	+0.8%
P_{MHD}	0%
P_{joule}	-1.8%
P_{utile}	-0.8%
$P_{elec_{fournie}}$	+0.9%
$\varepsilon_{C_{vol}}$	0%
$\varepsilon_{C_{surf}}$	0%
ε_P	+1.8%
$\%_{P_{Joule}}$	48.2%
t_{resol}	3.1s
t_{trait}	2s
$\%_{C_{res_{mag}}}$	91.6%
$\%_{\mathrm{P_{Joule_z}}}$	99.4%

La solution obtenue par ce maillage se rapproche du maillage très fin à pas constant ($N_r = 1000\,;N_z = 2000$) du point de vue du bilan en puissance, avec une puissance électrique et un courant axial mieux estimés. De plus, elle donne une meilleure estimation du couple résistif à compenser par l'actionneur et la force de Lorentz. Tout cela sur des temps de résolution beaucoup plus courts. Ce maillage sera donc celui choisi pour la suite des travaux. Voici le profil de vitesse obtenu par ce maillage :

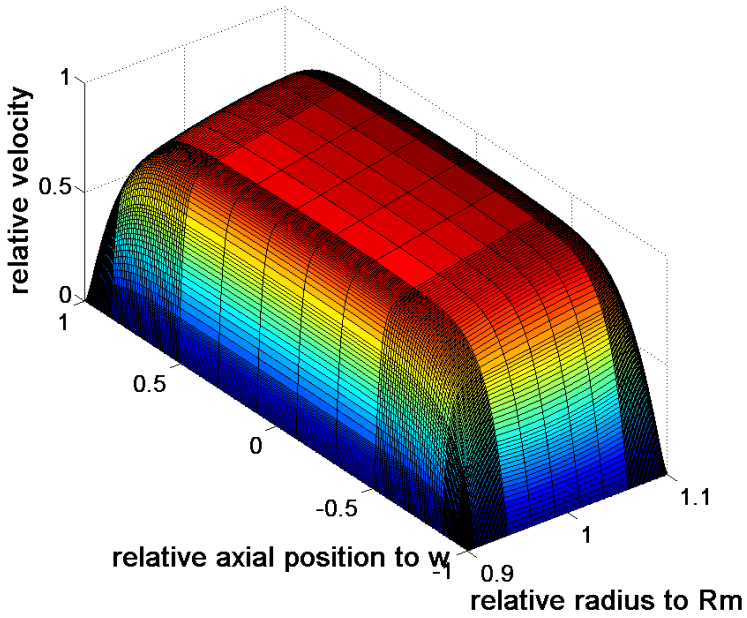


Fig. 51 Profil de vitesse relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

3.3.2.3 Résultats Complémentaires

A partir de la solution obtenue pour ce maillage sous contraintes physiques, nous présentons ici divers résultats complémentaires utiles à la compréhension du problème MHD.

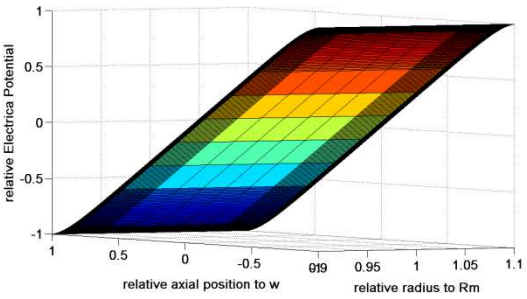


Fig. 529 Profil relatif du potentiel électrique
S3 + D4
15776 nœuds.

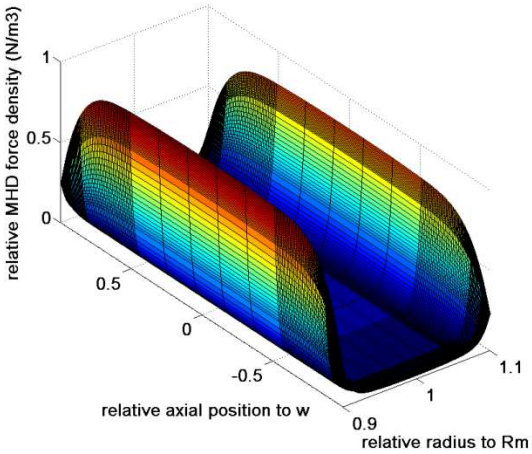


Fig. 53 Profil de force MHD relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

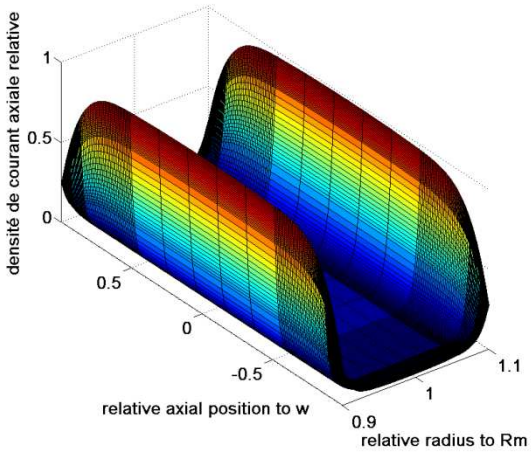


Fig. 54 Profil relatif de la densité de courant axiale
S3 + D4
15776 nœuds.

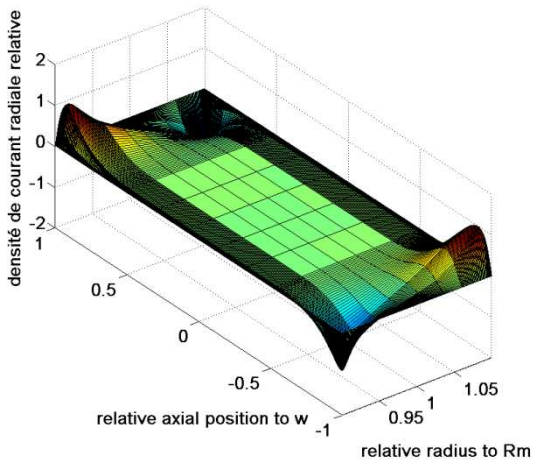


Fig. 55 Profil relatif de la densité de courant radiale
S3 + D4
15776 nœuds.

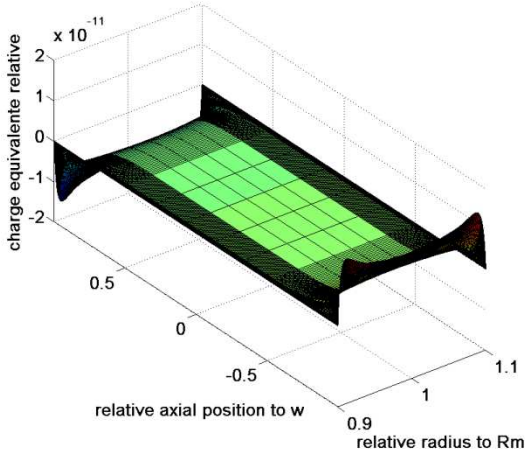


Fig. 56 Profil de charge équivalente relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

Observations :

Le profil de charge équivalente nous montre bien que, le fluide étant un bon conducteur, considéré parfait, les charges se concentrent très près des électrodes. A l'image du potentiel dont le gradient varie très près des parois pour augmenter puis se stabiliser en allant au milieu du canal. Aussi, du fait du maillage plus fin proche des parois que pour la solution de référence, la charge équivalente atteint un maximum plus élevé, ce qui signifie que ces charges sont d'autant plus localisées que le maillage fin permet d'évaluer correctement les gradients de potentiel et de vitesse importants proches parois.

Le profil de la densité de courant radiale permet de deviner l'existence de boucles de courant contenues dans le plan de la section du canal. Et dont la ligne centrale axiale est une ligne d'antisymétrie. L'existence de ce courant implique l'existence d'un champ magnétique induit orthoradial. Cependant, la participation de la densité de courant radiale dans le total des pertes Joules étant inférieure au pourcent, et les valeurs de densités auxquelles nous avons accès, justifie le fait d'avoir négliger l'existence de champ induit dans les équations du modèle 2D *B-φ* utilisé ici.

Enfin, les profils de densité de courant axiale et de la force MHD orthoradiale montrent bien le lien de proportionnalité entre les deux, de par la loi de Lorentz (I.4.10). Aussi, ces grandeurs sont

localisées proches parois, et plus particulièrement près des parois magnétiques. Cela est dû au fait que le gradient de potentiel y est plus élevé loin des électrodes, et que la vitesse est nulle proche parois. Ainsi la densité de courant axiale et de la force de Lorentz sont bien maximales près des parois magnétiques (II.1.12). Puis, elles s'annulent au milieu du canal, du fait de l'établissement de la vitesse, et de la compensation des deux termes antagonistes dans l'expression de la densité de courant axiale.

Cependant, ces grandeurs ne sont pas nulles proches des électrodes. Seulement, le gradient du potentiel électrique est plus faible. En fait, la densité de courant axiale est du même ordre de grandeur que celle radiale, proche électrode.

4. Résolution Numérique – Modèle B-T

Dans cette section, nous nous intéressons aux résultats apportés par la résolution numérique du problème MHD à partir de l'approche au potentiel vecteur électrique *T*. Ces résultats seront présentés en comparaison au modèle *B-φ,* de sorte que nous puissions vérifier la dualité des deux approches 2D.

Ce problème, constitué par le système d'équations et les conditions limites résumés dans le tableau 1 en II.1.3, est résolu numériquement de manière analogue à celle développée pour le modèle *B-φ*. La discrétisation des équations, l'intégration des conditions aux limites et la construction des matrices ne sont donc pas présentées pour ce modèle.

4.1 Suppléments pour le traitement des résultats

Afin de caractériser les solutions obtenues par ce modèle et sa résolution numérique, beaucoup de grandeurs électromécaniques s'obtiennent par les mêmes méthodes de calcul que celles développées pour le modèle *B-φ* présentées au paragraphe II.3.3. Telles que la force MHD volumique en chaque nœud (à la différence près que l'expression de la densité de courant (II.1.12) est utilisée ici), le couple résistif dû aux forces volumiques de viscosité (ou par l'approche des forces de contraintes visqueuses aux parois), le couple MHD, les pertes Joules, la puissance motrice MHD, le moment cinétique.

En revanche, pour la détermination de la puissance électrique fournie à l'actionneur, cette approche implique la connaissance du courant imposé aux électrodes, mais pas celle de la différence de potentiel entre celles-ci. Il nous faut donc la déterminer.

L'étude ayant lieu de le cadre de l'approximation quasistatique, le champ électrique est à circulation conservative. De fait, la différence de potentiel entre les électrodes s'exprime par,

$$U = \int \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl} \tag{II.4.1}$$

Et, d'après la loi d'Ohm MHD (I.4.9),

$$U = \int \left(\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}\right).\boldsymbol{dl} \tag{II.4.2}$$

Le champ étant à circulation conservative, l'intégration est réalisée sur le chemin le plus court entre les deux électrodes, à rayon donné,

$$U(r) = \int_{-w}^{w} \left(\frac{j_z(r,z)}{\sigma} + v_\theta(r,z).\frac{B_0 R_m}{r}\right).dz \tag{II.4.3}$$

Puis, à partir de la valeur moyenne de la tension entre les électrodes,

$$U = \frac{1}{2g}. \int_{r_{int}}^{r_{ext}} U(r)dr \tag{II.4.4}$$

La puissance électrique fournie par l'actionneur est obtenue à partir de (II.3.93).

Aussi, l'introduction du potentiel vecteur électrique et le choix des conditions aux limites pour ce dernier permet d'aboutir à une expression théorique du couple MHD, dont le résultat sera comparé à celui obtenu par l'intégration de la force volumique dans tout le volume et dépendant de la discrétisation du domaine d'étude (le maillage).

En effet, l'expression intégrale du couple moteur est la suivante (I.5.16) :

$$C_{mhd_{th}} = \iiint \boldsymbol{f_{mhd}}(\mathrm{r,z}) \wedge r\boldsymbol{e_r}.\, d\mathcal{V} = 2\pi \iint_{S_{canal}} jz(r,z).B_0(r).r^2 dr dz \tag{II.4.5}$$

Où S_{canal} est la section du canal torique. A partir de (II.1.21), (II.1.24) et (II.1.25), la formulation suivante est obtenue :

$$C_{mhd_{th}} = 2\pi \int_{-w}^{w} \left(\int_{R_m-g}^{R_m+g} \frac{1}{r} \frac{\partial (rT)}{\partial r} \frac{B_0 R_m}{r} r^2 dr \right) dz \tag{II.4.6}$$

Et donc à partir de (II.1.46)-(II.1.48), l'expression théorique du couple MHD est :

$$C_{mhd_{th}} = 2I_0 B_m R_m w \tag{II.4.7}$$

Ce résultat est important dans le sens où le couple moteur MHD ne dépend que des grandeurs imposées ici, à savoir le champ magnétique radial au milieu de l'entrefer magnétique et le courant imposé au travers des électrodes. Cette expression servira donc de critère à la convergence de la résolution analytique du point de vue du couple fourni par l'actionneur en régime établi.

4.2 Comparaison et Dualité

Une solution obtenue à partir du modèle *B-T* est ici présentée. Les courbes comme les grandeurs caractéristiques sont données relativement à la solution de référence habituelle. Ses résultats sont comparés à la dernière solution obtenue à partir d'un maillage segmenté ({S3+D4}). Le même maillage est repris pour la solution ici. Aussi, puisque le courant doit être imposé pour le nouveau modèle, nous prendrons la valeur du courant obtenue par résolution numérique pour cette même configuration et le modèle *B-φ*. Pour la comparaison, nous présentons ici un tableau de figures représentant les profils obtenus par ces solutions.

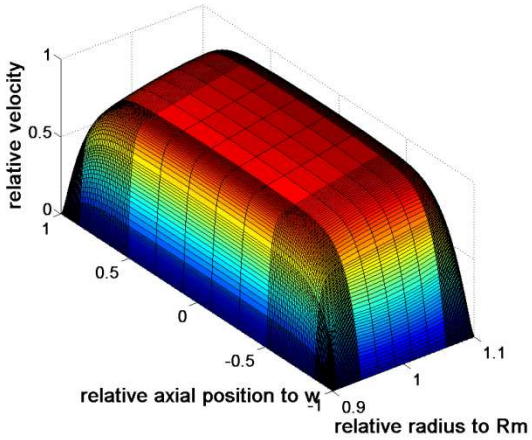


Fig. 57 Modèle *B-φ* - Profil de vitesse relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

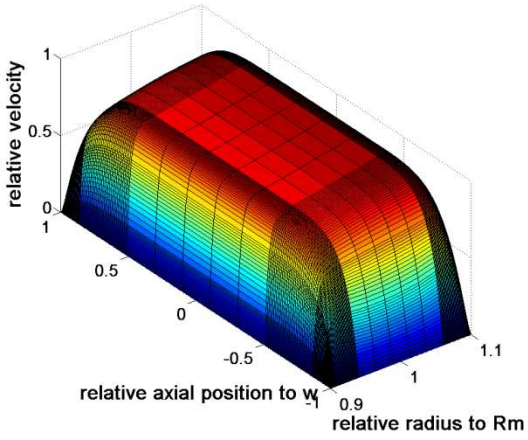


Fig. 58 Modèle *B-T* - Profil de vitesse relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

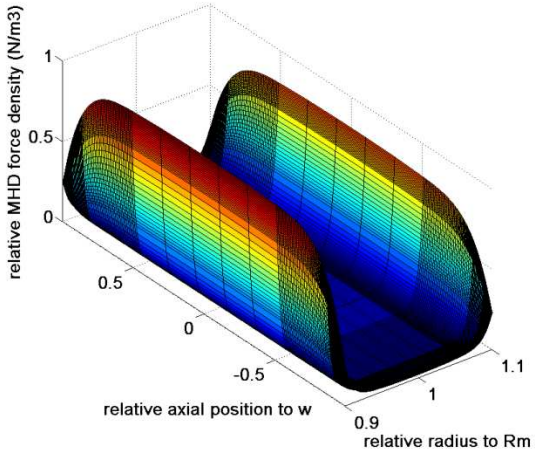


Fig. 10 Modèle *B-φ* - Profil de force MHD relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

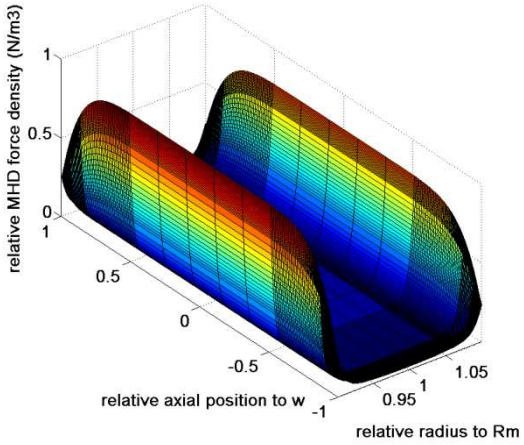


Fig. 11 Modèle *B-T* - Profil de force MHD relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

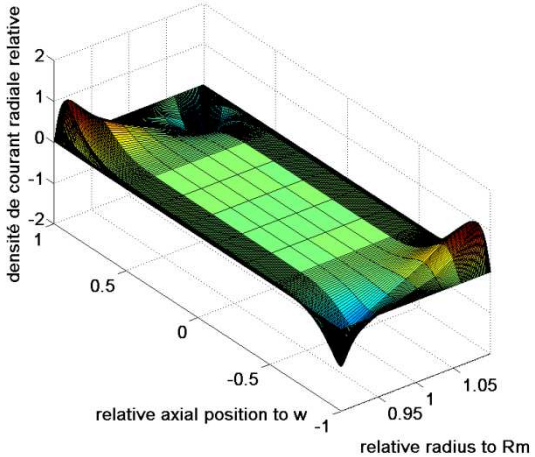


Fig. 61 Modèle *B-φ* - Profil relatif de la densité de courant radiale
S3 + D4
15776 nœuds.

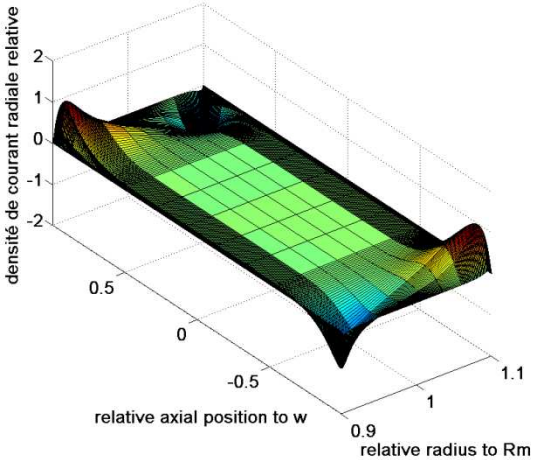


Fig. 62 Modèle *B-T* - Profil relatif de la densité de courant radiale
S3 + D4
15776 nœuds.

Observations :

Du point de vue des courbes, celles-ci sont absolument comparables. Les solutions obtenues semblent donc bien concorder et confirmer la dualité des modèles *B*-φ et *B*-*T*.

Ce dernier permet également de tracer la visualisation du potentiel vecteur électrique, image du champ magnétique induit, ainsi que ses lignes d'équipotentielles tangentes à la densité de courant.

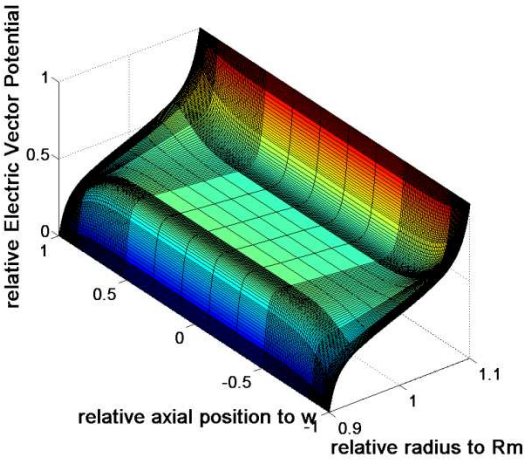


Fig. 63 Modèle *B*-*T* - Profil du potentiel vecteur électrique *T* relatif
S3 + D4
15776 nœuds.

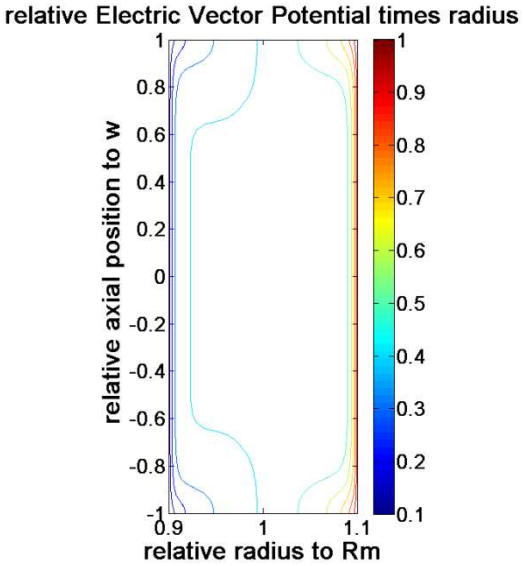


Fig. 64 Modèle *B*-*T* – Lignes équipotentielles relatives pour le champ *rT*, parallèles à *j*
S3 + D4
15776 nœuds.

Observations :

Conformément aux courbes représentant la densité de courant axiale (ou la densité de force MHD), les lignes d'équipotentielles sont d'autant plus resserrées que le champ y est intense, c'est-à-dire près des parois magnétiques. Aussi, il n'y a pas de lignes au milieu du canal, la densité de courant y étant nulle.

Du fait de la relation (II.4.7), nous pouvons quantifier l'écart des valeurs de couple obtenues par rapport à la théorie. L'écart relatif du couple MHD obtenu numériquement en fonction du couple MHD théorique est défini par,

$$\varepsilon_{C_{th}} = \frac{C_{MHD} - C_{mhd_{th}}}{C_{mhd_{th}}} \qquad \text{(II.4.8)}$$

Tableau 6 Grandeurs Caractéristiques – Comparaison Modèles *B-φ* et *B-T*

$(N_r * N_z)$ nœuds	Modèle B-φ S3 + D4 136*136 18496	Modèle B-T S3 + D4 136*136 18496
M_{cin}	+0.1%	-2.05%
C_{MHD}	+11.9%	+9.5%
$C_{res_{vol}}$	+11.9%	+9.5%
$C_{res_{surf}}$	+11.9%	+9.5%
v_{moy}	+2.2%	0%
$I_{z_{elec}}$	+0.8%	+0.8%
P_{MHD}	0%	-3.4%
P_{joule}	-1.8%	-5.3%
P_{utile}	-0.8%	-4.3%
$P_{elec_{fournie}}$	+0.9%	-1.8%
$\varepsilon_{C_{vol}}$	0%	0%
$\varepsilon_{C_{surf}}$	0%	0%
ε_P	+1.8%	+0.9%
$\%_{P_{Joule}}$	48.2%	48.2%
t_{resol}	3.1s	2.6s
t_{trait}	2s	1.3s
$\%_{C_{res_{mag}}}$	91.6%	91.5%
$\%_{\mathrm{P_{Joule_z}}}$	99.4%	99.5%
$\varepsilon_{C_{th}}$	+2.2%	0%
$U_{électrodes}$	0%	-2.4%

Observations :

Les valeurs obtenues par le modèle *B-T* sont inférieures pour le moment cinétique, la vitesse moyenne, les couples mis en jeu, mais aussi pour l'ensemble des puissances. Ceci s'explique notamment parce que, bien que le courant, imposé pour ce modèle, soit donc nécessairement égal au premier modèle étudié, la tension électrique calculée numériquement est inférieure à celle imposée en *B-φ* (-2.4%).

Mais aussi parce que le moment cinétique et les couples sont inférieurs, cela peut supposer que le courant calculé numériquement en *B-φ* a été sous-estimé (comme le laisse penser le bilan en puissance non parfait). Or, cette valeur étant reprise pour être imposée au modèle *B-T*, cela semble bien être la cause de cette perte en couple moteur (-2.4%), en vitesse moyenne (-2.2%), et en puissance motrice.

Précision supplémentaire sur les caractéristiques de l'écoulement :

A titre indicatif, nous apportons ici quelques précisions sur l'écoulement. Tout d'abord, le nombre de Reynolds pour l'écoulement considéré est de :

$$R_e = 19970$$

Ensuite, le nombre de Reynolds magnétique est de :

$$R_{em} = 2.99e - 3$$

Ceci montre que, bien que le champ magnétique induit soit négligeable, ses gradients, liés à la densité de courant, sont directement liés à l'établissement de l'écoulement, et sa forme. De plus, ces mêmes gradients permettent de déterminer entièrement l'intensité de la force de Lorentz en jeu. L'existence du champ induit, si elle est prise en compte, a donc un fort impact physique sur l'écoulement. Dans le cas où il est négligé, c'est donc un aspect physique du problème couplé qui est négligé, sans pour autant que les caractéristiques de l'écoulement soient fausses. Car dans ce cas, c'est le potentiel électrique qui intervient sur les conditions du problème.

Conclusion :

La résolution, d'un point de vue numérique, reste très satisfaisante. Et l'ensemble des résultats confirme la dualité supposée du modèle 2D axisymétrique, qui peut donc se résoudre par deux approches numériques différentes. Le champ magnétique induit et le potentiel électrique sont uniquement liés par la densité de courant. Et ils ont un impact absolument équivalent sur l'écoulement du fluide. Ce dernier étant prépondérant pour notre conception de l'actionneur.

Cette dualité, d'une certaine façon, est reliée au couplage du problème entre grandeurs électromagnétiques et fluidiques. Aussi, elle permet d'appréhender la conception de l'actionneur de deux façons pratiques et différentes. Puisqu'il nous est maintenant possible d'imposer, au-delà du champ magnétique dans l'entrefer, indifféremment le courant, ou la tension. Cela impactera nécessairement la conception de l'actionneur (source de courant ou source de tension).

C'est pourquoi il est nécessaire de mieux comprendre l'impact de ces grandeurs d'entrée sur l'écoulement et les caractéristiques de l'actionneur, toujours en régime permanent ici.

5. Impact des variations du champ électromagnétique sur les caractéristiques de l'actionneur en régime permanent

Dans ce paragraphe nous nous intéressons donc à l'évolution des grandeurs caractéristiques de l'actionneur en régime permanent - le couple moteur (théorique et numérique), le moment cinétique et la vitesse moyenne de l'actionneur, les diverses puissances, la tension si le courant est imposé et inversement le courant si la tension est imposée - lors d'une variation des grandeurs imposées en entrée (courant ou tension, et champ magnétique). Dans un premier temps, l'évolution des grandeurs selon une variation en courant est donnée :

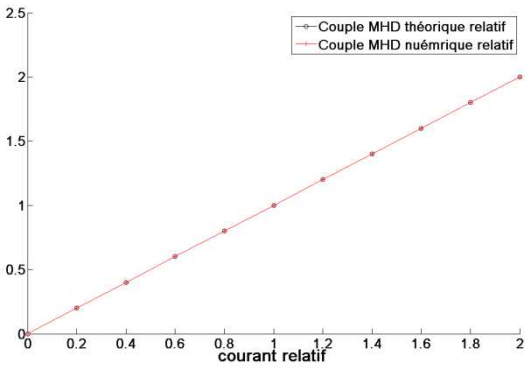


Fig. 65 Evolution du couple moteur relatif en fonction du courant imposé et à champ B_0 constant.

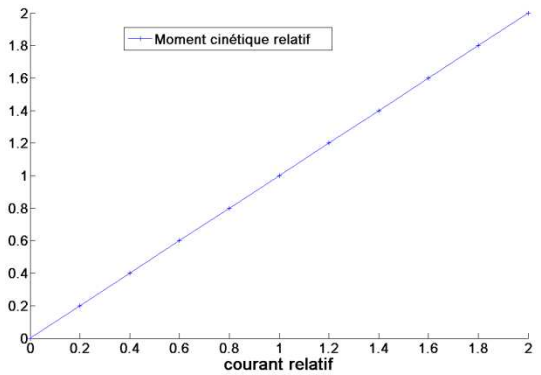


Fig. 66 Evolution du moment cinétique relatif en fonction du courant imposé et à champ B_0 constant.

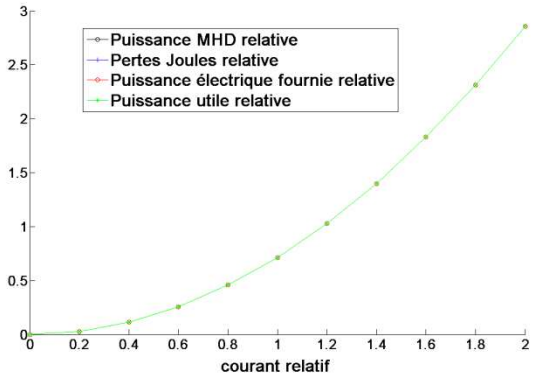


Fig. 67 Evolution des puissances relatives en fonction du courant imposé et à champ B_0 constant.

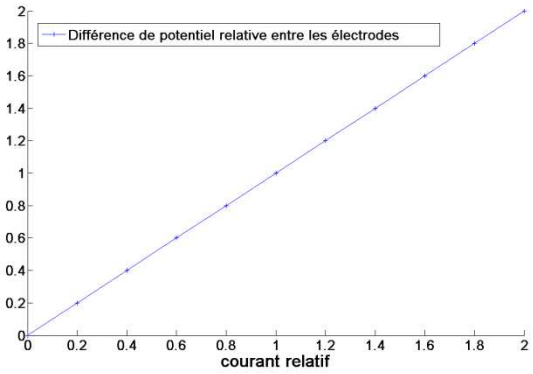


Fig. 68 Evolution de la différence de potentiel électrique relative en fonction du courant imposé et à champ B_0 constant.

Observations :

Lorsque le courant augmente, le couple moteur (et résistif) ainsi que le moment cinétique augmentent proportionnellement, cf (Fig. 65) et (Fig. 66). En effet, d'après l'expression de la force de Lorentz qui entraine le fluide (I.2.5), celle-ci sera d'autant plus importante que le courant imposé sera grand. De fait, à grandeurs géométriques du canal torique constantes, la vitesse moyenne est aussi augmentée proportionnellement. Ainsi que, d'après la relation (I.6.16), le couple MHD. Enfin, (Fig. 68) montre que la différence de potentiel entre les électrodes augmente linéairement avec le courant imposé, conformément à l'intégrale (II.4.3).

Enfin, de par les expressions de la puissance motrice (I.5.6), des pertes Joules (I.5.10) et de la puissance électrique fournie (I.5.9), et du fait que, à la fois la force MHD, la vitesse et la tension augmentent proportionnellement avec le courant, ces puissances augmentent nécessairement selon le carré du courant, ce que la figure (Fig. 67) permet de confirmer.

Remarque :

Ces résultats sont obtenus à partir du maillage de configuration {S3 + D4}.

Voici maintenant l'évolution des grandeurs selon une variation du champ magnétique et à courant constant.

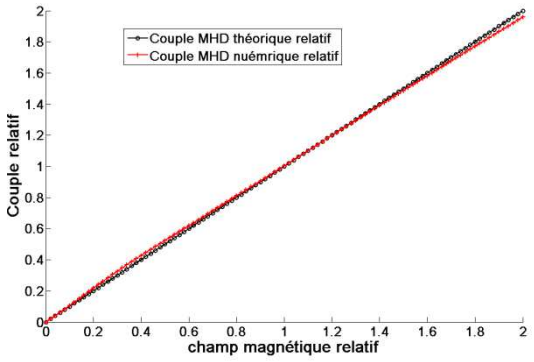


Fig. 69 Evolution du couple moteur MHD relatif en fonction du champ magnétique radial imposé au milieu de l'entrefer et à courant constant.

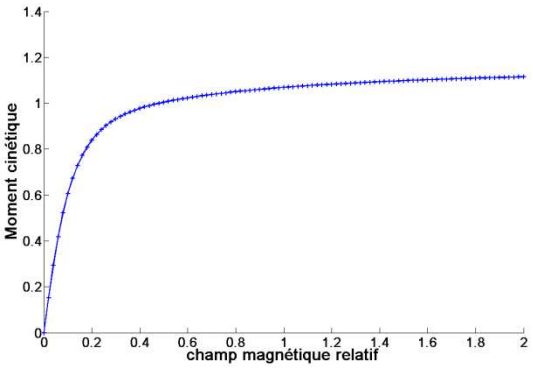


Fig. 70 Evolution du moment cinétique relatif en fonction du champ magnétique radial imposé au milieu de l'entrefer et à courant constant.

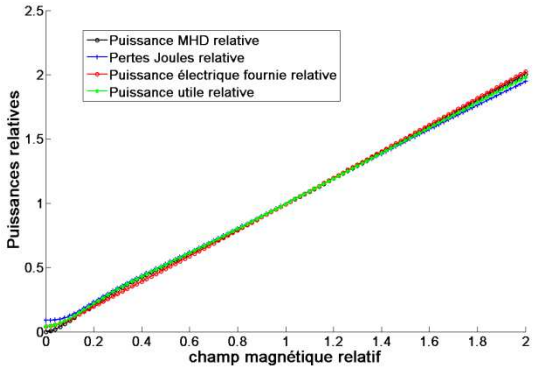


Fig. 71 Evolution des puissances relatives en fonction du champ magnétique radial imposé au milieu de l'entrefer et à courant constant.

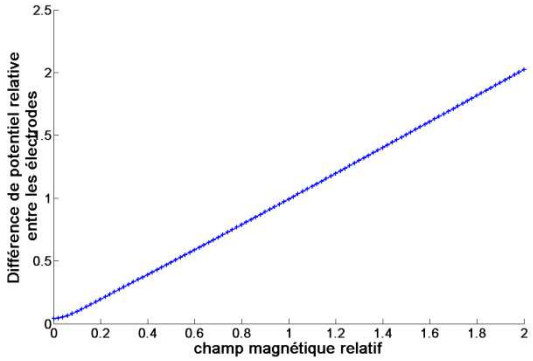


Fig. 72 Evolution de la différence de potentiel, entre les électrodes, relative en fonction du champ magnétique radial imposé au milieu de l'entrefer et à courant constant.

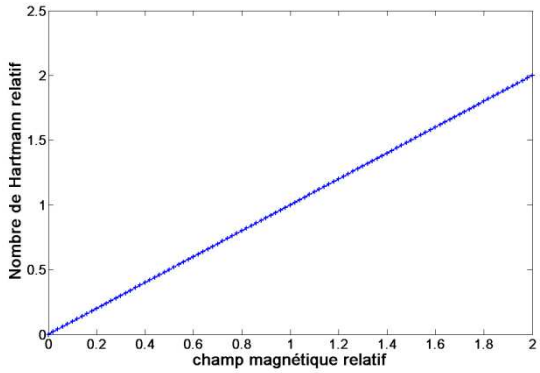


Fig. 73 Evolution du nombre de Hartmann relatif en fonction du champ magnétique radial imposé au milieu de l'entrefer et à courant constant.

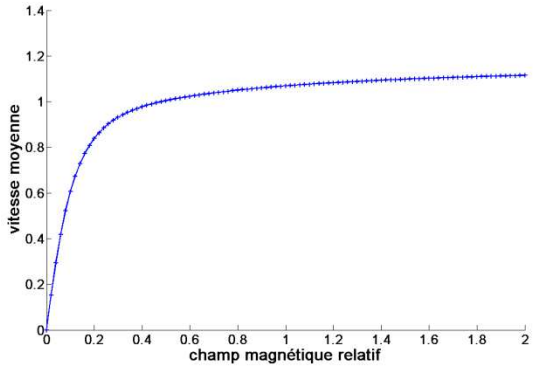


Fig. 74 Evolution de la vitesse moyenne relative en fonction du champ magnétique radial imposé au milieu de l'entrefer et à courant constant.

Observations :

D'après la loi d'Ohm en MHD (I.4.9) et (II.4.3), le courant imposé par les électrodes étant constant, lorsque le champ magnétique imposé $\boldsymbol{B_0}$ augmente, la densité de courant s'annulant au milieu du canal, le gradient du potentiel électrique axial et la tension calculée sur une ligne axiale augmentent, et ce, proportionnellement, comme nous le montre la figure (Fig. 72).

Le couple moteur augmente également proportionnellement au courant, du fait de l'expression de la force de Lorentz (I.2.5), ou du point de vue de la force de Laplace macroscopique (I.2.2), à courant constant et champ magnétique variable. Du point de vue du couple résistif (égal au couple moteur en régime permanent), il peut être remarqué que le nombre de Hartmann augmentant, l'écoulement s'établit sur une couche de plus en plus faible (II.3.99), ce qui augmente le gradient de vitesse proche parois et ainsi donc les forces de contraintes visqueuses à leur bords.

La vitesse moyenne et le moment cinétique semblent présenter une croissance limitée (Fig. 74). En effet, à l'image de l'expression de la vitesse moyenne obtenue à partir du modèle 1D cylindrique, (I.6.16), qui en 1D cartésien donne :

$$v_{moy} = \frac{E_0}{B_0}.\left(1 - \frac{th(Ha)}{Ha}\right) \qquad \text{(II.5.1)}$$

Dont nous avons tracé la représentation ici du terme $\frac{th(Ha)}{Ha}$ en fonction du nombre de Hartmann,

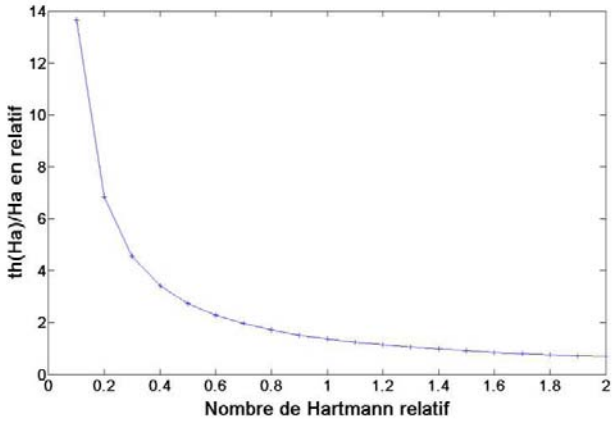


Fig. 75 Evolution du terme th(Ha)/Ha **en fonction du nombre de Hartmann (**Ha**)**
1D Cartésien

Lorsque B_0 augmente, H_a augmente et le terme $\frac{th(Ha)}{Ha}$ de l'expression de la vitesse moyenne à un comportement en $\frac{1}{Ha}$ quand Ha tend vers l'infini (puisque $th(Ha)$ tend vers 1). De fait, ce terme tend vers zéro, et la vitesse moyenne tend vers le rapport $\frac{E_0}{B_0}$. Aussi, le terme $\frac{th(Ha)}{Ha}$ présente une décroissance rapide en partant de l'infini. Et d'après la figure (Fig.72), la différence de potentiel électrique, et donc le champ électrique, semble augmenter linéairement avec le champ magnétique, si ce n'est pour les valeurs les plus faibles du champ. Ceci peut se retrouver à partir de la loi d'Ohm en MHD (I.4.8), étant à courant constant. Ainsi, la vitesse moyenne va augmenter pour tendre néanmoins rapidement vers un maximum, cf (Fig. 74).

Cette observation peut également se rapporter à la figure (Fig. 19), sur laquelle sont présentés différents profils de vitesses. Ces profils de vitesse sont d'autant plus « aplatis » et « bas » (jusqu'à une certaine limite dépendant du rapport $\frac{E_0}{B_0}$), que le nombre de Hartmann est important. Et la montée en vitesse à partir des parois est également d'autant plus rapide que Ha est grand.

C'est pourquoi, du fait de la complexité technique pour augmenter le champ magnétique et du coût que cela peut représenter, il ne semble pas utile de dépasser une certaine valeur, relativement faible. Faudrait-il encore vérifier l'impact de ce champ magnétique sur l'écoulement du fluide (diminution des turbulences par phénomène d'advection entre le champ vectoriel de la vitesse et celui du champ magnétique).

Enfin, les puissances électriques augmentent linéairement par rapport au champ magnétique imposé. Pour la puissance électrique, puisque à courant constant, la différence de potentiel entre les électrodes augmente proportionnellement. Et pour la puissance mécanique développée, du fait que la force augmente proportionnellement et que la vitesse moyenne tend rapidement vers un « palier ».

Remarque :

Etant donné que le nombre de Hartmann augmente avec le champ magnétique, il a été constaté, que le maillage par segmentations sous contraintes physiques (dépendant du nombre de Hartmann) divergeait à partir d'un certain stade. En effet, comme il a été explicité au paragraphe (II.3.3.2), le

maillage a été développé à partir d'épaisseurs caractéristiques d'établissement de l'écoulement, mais pour un cas où celles-ci n'étaient que peu respectées. Ce maillage a donc été adapté à ces conditions. Il est donc possible de comprendre que à Hartmann variable, ces épaisseurs varient et surtout le respect de l'établissement de l'écoulement vis-à-vis de ces épaisseurs. Et que de fait, le maillage utilisé ne soit plus adapté à partir d'une certaine valeur de champ. Ainsi, un maillage en segments a été utilisé mais indépendant de ces contraintes physiques. Afin d'obtenir une convergence correcte pour l'ensemble de ces tests.

Poursuivons sur la présentation des évolutions de ces grandeurs lorsque la différence de potentiel électrique est imposée entre les électrodes, et qu'elle varie, à champ magnétique constant :

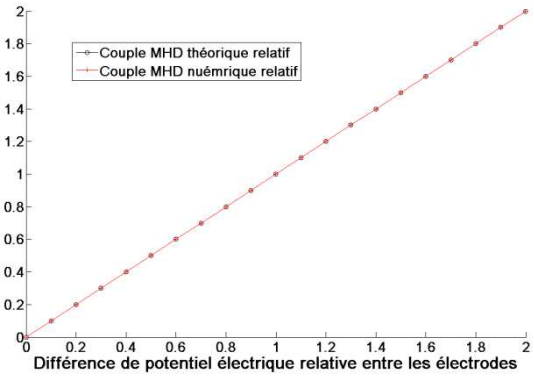


Fig. 76 Evolution du couple moteur MHD relatif en fonction de la tension imposée aux bornes des électrodes à champ magnétique constant.

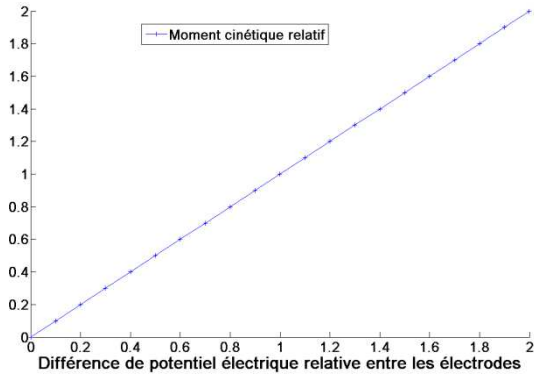


Fig. 77 Evolution du moment cinétique relatif en fonction de la tension imposée aux bornes des électrodes à champ magnétique constant.

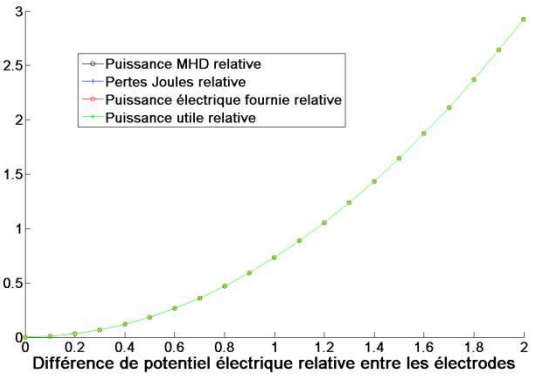


Fig. 78 Evolution des puissances relatives en fonction de la tension imposée aux bornes des électrodes à champ magnétique constant.

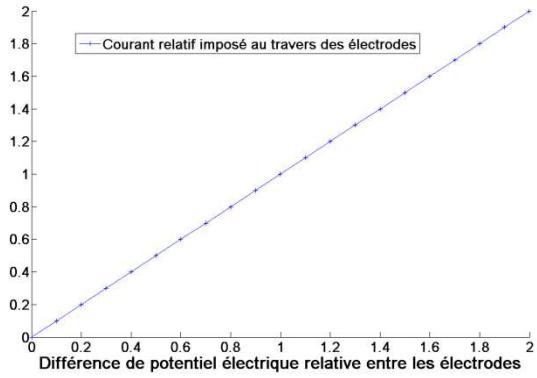


Fig. 79 Evolution du courant relatif au travers du canal en fonction de la tension imposée aux bornes des électrodes à champ magnétique constant.

Observations :

La figure (Fig. 79) montre que le courant fourni par les électrodes augmente proportionnellement avec la tension électrique. En effet, d'après la loi d'Ohm en MHD (I.4.9), le terme $\sigma \boldsymbol{E}$ augmente, et la vitesse étant très faible au niveau des parois, la densité de courant axiale augmente ainsi que le courant imposé (II.3.88). La force de Lorentz et donc le couple MHD s'en retrouve augmenté proportionnellement cf (Fig. 76). Enfin, la vitesse moyenne et donc le moment cinétique augmentent proportionnellement, du fait du terme $\sigma \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$ qui augmente nécessairement afin d'annuler la densité de courant axiale au milieu du canal (écoulement à l'équilibre) (I.4.9). De fait, la puissance motrice augmente proportionnellement à la tension imposée (Fig. 78). Ainsi que la puissance électrique, de par ces explications. Les pertes Joules augmentent, elles, proportionnellement au carré du courant, qui augmente lui proportionnellement à la tension électrique imposée (Fig. 78).

Du point de vue du couple résistif, nécessairement égal au couple MHD (bilan de couple), à nombre de Hartmann constant (donc épaisseur d'établissement de l'écoulement constante car forme du profil identique), la vitesse maximale à atteindre étant plus importante, les gradients de vitesse sont d'autant augmentés, proche parois. Ce qui a pour effet d'augmenter les forces de viscosité volumiques, ou de contraintes visqueuses surfaciques.

Enfin, nous présentons l'évolution de ces grandeurs lorsque la différence de potentiel électrique entre les électrodes est constante et que le champ magnétique imposé varie :

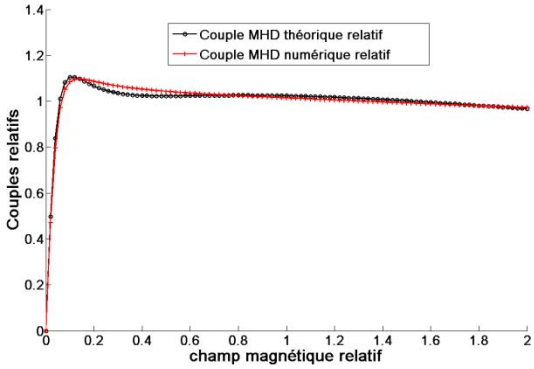


Fig. 80 Evolution du couple moteur MHD relatif en fonction du champ magnétique imposé et à champ E_0 constant.

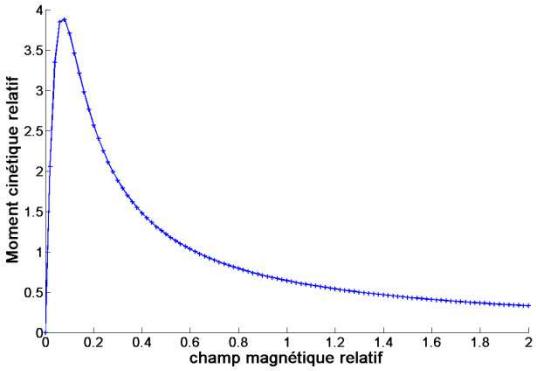


Fig. 81 Evolution du moment cinétique relatif en fonction du champ magnétique imposé et à champ E_0 constant.

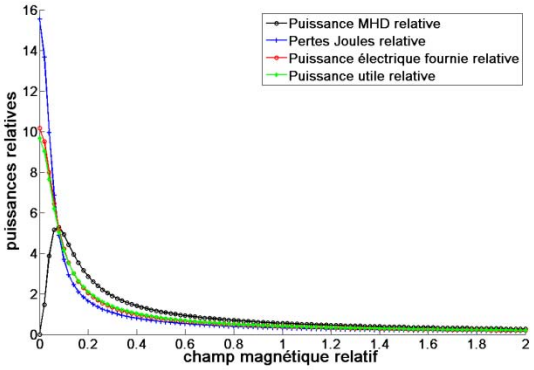


Fig. 82 Evolution des puissances relatives en fonction du champ magnétique imposé et à champ E_0 constant.

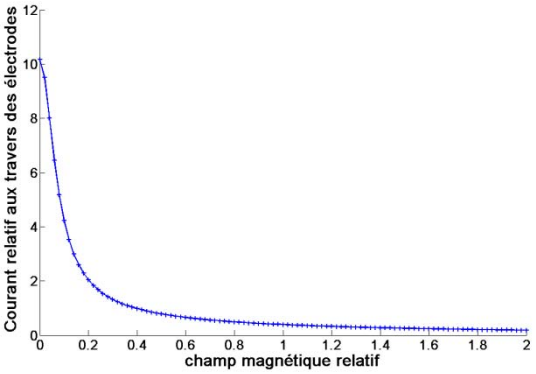


Fig. 83 Evolution du courant relatif au niveau des électrodes en fonction du champ magnétique imposé et à champ E_0 constant.

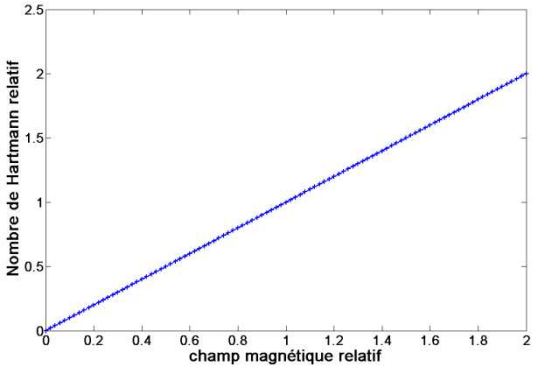


Fig. 84 Evolution du nombre de Hartmann relatif en fonction du champ magnétique à E_0 constant.

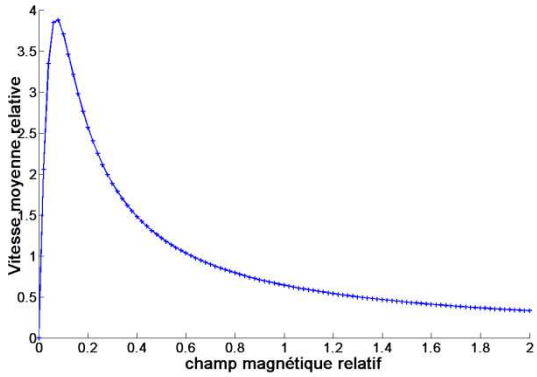


Fig. 85 Evolution de la vitesse moyenne relative en fonction du champ magnétique et à E_0 constant.

Observations :

Dans ce cas, la tension électrique imposée aux bornes des électrodes étant fixée, et le champ magnétique variant, le courant diminue rapidement, du fait de la loi d'Ohm MHD (I.4.9). En effet, en partant de zéro (vitesse nulle et champ magnétique nul), le terme $\sigma \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$ augmente rapidement et s'oppose au terme $\sigma \boldsymbol{E}$. Aussi, le champ magnétique augmentant, la force de Lorentz augmente aussi, et donc la vitesse également. Ceci s'observe sur les figures représentant le couple et la vitesse (Fig. 81, 82 et 85). Ainsi, le courant diminue très rapidement. Jusqu'à ce que, le courant ayant fortement diminué, la force de Lorentz commence à diminuer également, ainsi que le couple moteur, et donc la vitesse atteinte par le fluide (Fig. 83,82,85).

On observe donc un maximum atteint rapidement par la vitesse, lorsque le champ magnétique augmente, et à faible intensité. Puis, la vitesse moyenne diminue fortement et tend vers ce qui semble être la valeur nulle. Remarquons tout de même que la puissance électrique en jeu diminue continuellement, ce qui veut dire qu'il faut prendre en compte cette donnée pour savoir si l'optimum en vitesse moyenne correspond à des puissances acceptables par un éventuel cahier des charges contraignant.

Le nombre de Hartmann, lui, augmente logiquement proportionnellement avec le champ magnétique imposé (Fig. 84).

Ici on trace la courbe théorique de la vitesse, à partir de son équation obtenue en 1D cartésien (II.5.1) :

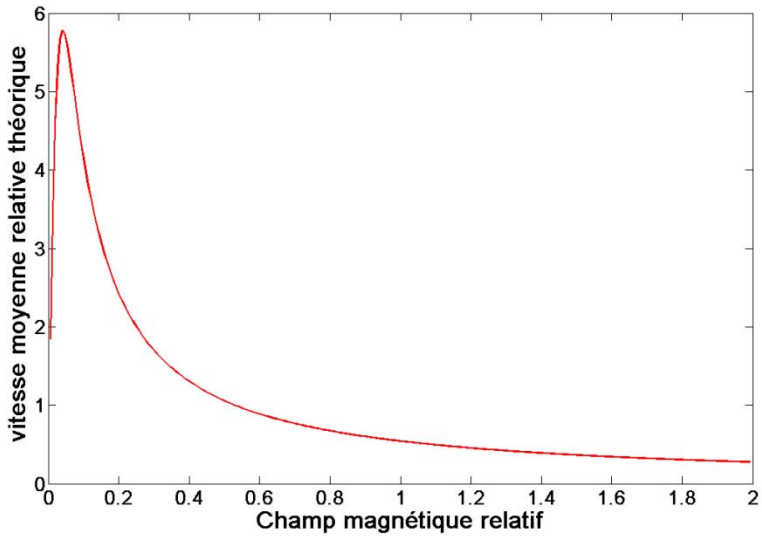


Fig. 86 Tracé de la vitesse moyenne théorique à partir du modèle 1D cartésien

Observations :

Le tracé de la vitesse moyenne théorique obtenu à partir du modèle 1D en coordonnées cartésiennes montre bien l'existence d'un optimum pour le champ magnétique, optimum pour lequel on a le maximum de moment cinétique, en régime permanent. En revanche, la valeur de la vitesse atteinte semble surestimée par rapport aux résultats du modèle 2D (cf. Fig. 85). L'équation (II.5.1), met en bien en évidence, comme il a été explicité précédemment, un terme $1 - \frac{th(Ha)}{Ha}$ qui tend vers 1

lorsque le champ magnétique augmente, et le terme $\frac{E_0}{B_0}$ en facteur qui tend vers zéro à champ électrique constant.

Conclusion de ces observations :

Nous retiendrons de l'ensemble de ces observations que, lorsque le champ magnétique est imposé, le couple moteur (et résistif) obtenu à l'équilibre des forces en jeu augmente proportionnellement par rapport aux grandeurs d'entrées (courant imposé, tension électrique imposée). Ainsi que la vitesse moyenne du fluide. En effet, le courant et le champ électrique sont alors liés au travers de la conductivité électrique du fluide (cf. loi d'Ohm en MHD (I.4.9)). Les puissances augmentent donc avec le carré de la grandeur qui varie.

En revanche, lorsque la tension ou le courant est imposé, le comportement de l'actionneur n'est plus le même en ce qui concerne le régime permanent atteint. Le cas où c'est la tension qui est imposée présente un courant au niveau des électrodes qui diminue rapidement vers la valeur nulle, et surtout l'existence d'un optimum vis-à-vis du champ B_0 pour le moment cinétique fourni par l'actionneur, ainsi que sur le couple moteur. La puissance motrice augmente donc avec la vitesse, pour redescendre avec les autres puissances en jeu, la densité de courant diminuant fortement et prenant le pas sur l'augmentation du champ B_0, ce qui a pour effet de diminuer globalement la force de Lorentz à l'origine de la mise en mouvement du fluide.

Alors que, lorsque le courant est imposé, la tension électrique augmente proportionnellement avec le courant, (après un premier accroissement parabolique plus lent). Ainsi, le rapport $\frac{E_0}{B_0}$ tend vers une valeur constante. Ce qui a pour effet que, bien que la force de Lorentz augmente proportionnellement au champ B_0 et donc le couple moteur, le moment cinétique et la vitesse moyenne du fluide tendent vers une valeur constante. Et donc la puissance électrique en jeu augmente proportionnellement uniquement au champ magnétique. Il semble donc qu'il ne soit pas utile d'augmenter indéfiniment le champ magnétique dans l'entrefer.

Enfin, le moment cinétique (et donc la vitesse moyenne) en régime permanent augmente proportionnellement au courant ou à la tension imposés, mais tend rapidement vers une valeur limite, due à la géométrie de l'actionneur et aux caractéristiques du fluide (nombre de Hartmann) lorsque le champ magnétique augmente.

Conclusion Chapitre 2 :

Deux formulations 3D générales ont été présentées, à partir des équations constituantes du problème, et en régime permanent. Ces formulations ont été appliquées dans le cadre d'hypothèses constituantes pour une approche 2D axisymétrique. Nous avons pu remarquer la dualité intrinsèque de notre problème, à savoir que les variables du potentiel électrique φ et du champ magnétique induit b sont indépendantes pour la résolution. De plus, à l'instar du champ magnétique induit b, nous avons montré qu'une approche utilisant le potentiel vecteur électrique T et le potentiel scalaire magnétique Ω est plus que cohérente, physiquement, pour notre problème. Ces deux approches constituant alors l'ensemble du modèle présenté par [1].

En effet, le modèle en *B*-φ est l'approche à considérer lorsque, d'un point de vue pratique, l'alimentation de l'actionneur est une source de tension et permet d'imposer le potentiel à chaque électrode. A l'inverse, si l'alimentation utilisée est une source de courant et impose donc le courant aux bornes des électrodes, l'approche en *B*-*T* est plus que judicieuse.

Après un bref rappel sur la méthode des Différences Finies employée pour la résolution numérique des deux modèles, le traitement numérique des résultats, et les solutions ont été présentés. Un travail sur le maillage a été réalisé, afin de montrer l'influence du nombre de nœuds sur la précision de la solution. Ceci lorsque le maillage est à pas constant. Ces résultats ont montré l'intérêt d'une approche 2D pour la détermination des grandeurs caractéristiques de l'actionneur, comparativement au modèle 1D cylindrique. En effet, ce dernier ne prend pas en compte l'ensemble des gradients de vitesses présents dans le canal, pourtant à l'origine d'un couple résistif, dû aux forces de viscosité, qui doit être compensé par le couple moteur de l'actionneur. De plus, cette approche numérique permet une visualisation 2D intéressante de l'ensemble des variables et grandeurs, telles la vitesse du fluide, le potentiel électrique, la densité de courant et la force de Lorentz.

Dès lors, afin d'obtenir une précision satisfaisante à moindre coût (temporel de la résolution, et en mémoire de l'ordinateur), un maillage sous contraintes physiques a été établi. A partir du constat que l'ensemble des gradients de vitesses se concentrent sur une couche mince à partir des parois. En fait, l'épaisseur de la couche dépend du nombre de Hartmann et de la direction du champ magnétique.

Dans notre cas, nous avons donc deux épaisseurs caractéristiques de type effet de peau et équivalentes à la notion de couche limite. Puisque, en dehors de ces couches, l'écoulement est établi. Ces épaisseurs caractéristiques ont été présentées en [1] et réutilisées afin d'établir ce maillage sous contraintes physiques, pour lequel la précision des résultats numériques est bien supérieure à celle obtenue à partir d'un maillage à pas constants, à nombre de nœuds équivalent.

Ainsi, la configuration du maillage {S3 + D4} est conservée pour la suite de cette étude.

Les comparaisons des résultats entre les deux formulations sont satisfaisantes et confirment la dualité du problème, et l'indépendance des variables que sont le potentiel électrique et le champ magnétique induit. D'ailleurs, ce dernier, bien qu'effectivement négligeable en valeur absolue devant le champ magnétique imposé radialement, présente un impact physique bien réel sur l'écoulement. Ou du moins, sa résolution permet de déterminer le profil de vitesse dans le canal, la vitesse du fluide conducteur, « transportant » les lignes de champ magnétique, étant à l'origine de l'existence du champ *b*.

Enfin, l'évolution des grandeurs caractéristiques a été présentée, lors d'une variation du champ électromagnétique en entrée, à l'origine de la force de Lorentz qui met en mouvement le fluide. Cette étude a permis de constater que, l'évolution des grandeurs présente un comportement équivalent que ce soit le courant ou le potentiel électrique qui est imposé aux bornes des électrodes qui varient, à champ magnétique constant. En revanche, les grandeurs atteintes en régime permanent évoluent très différemment lorsque c'est le champ magnétique imposé qui varie, selon que c'est le courant ou le potentiel électrique qui est fixé. Cela est dû principalement au couplage représenté par la loi d'Ohm généralisée (I.4.9) définissant l'expression de la densité de courant, et le terme en $\sigma \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$, ainsi que l'expression de la force de Lorentz (I.4.10), faisant de nouveau apparaître un produit vectoriel avec le champ magnétique.

Cette étude présente donc un fort intérêt pour le choix du type d'alimentation pour la réalisation d'une roue inertielle MHD.

La suite se doit donc de s'intéresser à l'étude du deuxième mode de fonctionnement de cette roue, à savoir la production d'un couple de réaction pour le pointage du satellite. Ce couple étant dû à une variation de la vitesse moyenne du fluide, il est donc maintenant indispensable d'étudier la dynamique d'établissement de l'écoulement, sous un champ électromagnétique d'entrée imposé, sujet de ce troisième chapitre.

Références

[1] - René Moreau, « Ecoulement d'un métal liquide en présence d'un champ magnétique », *Techniques de l'Ingénieur,* d2950.

[2] - J. C. R. Hunt, « Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts », *J. Fluid Mech. (1965),* vol. 21, part 4, pp. 557-590.

[3] - J. C. R. Hunt, « Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. II », *J. Fluid Mech. (1965),* vol. 23, part 3, pp. 563-581.

[4] - M. Mesurolle, Y. Lefèvre, "Finite Difference 2D model of a magnetohydrodynamic inertial actuator", *Numelec 2015,* 3-5 June 2015, Saint-Nazaire, France.

[5] - M. Mesurolle, Y. Lefèvre, C. Casteras, "Electric Vector Potential Formulation to Model a Magnetohydrodynamic Inertial Actuator", *IEEE Transactions on Magnetics, vol 52 n° 3,* Mars 2016.

[6] – C. A. J. Fletcher, « Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fundamental and General Techniques », *Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998).*

[7] – J. H. Ferziger, M. Peric, "Computational Methods for Fluid Dynamics", *3rd Edition*, *Springer (2001).*

[8] – H. P. Langtangen, K-A. Mardal et R. Winther, "Numerical Methods for Incompressible Viscous Flow", *Advances in Water Resources,* University of Oslo (2002).

[9] - A. Salvati, F. Curti, "MHD Reaction Wheel for Spacecraft Attitude Control: Configuration and Lumped Parameter Model", *IAA-AAS-DyCoSS2-13-01 (2014).*

[10] - F. Sidoroff, "Mécanique des Milieux Continus". *Ecole Centrale de Lyon (1980), pp.166. < cel-00530377 >.*

III. Modélisation 2D Dynamique et Résolution Numérique – Couple de Réaction

La modélisation 2D axisymétrique en Régime Permanent, et la résolution numérique associée par Différences Finies nous ont permis d'apporter des solutions quant à la détermination des caractéristiques de l'actionneur du point de vue de son fonctionnement gyroscopique. Plus particulièrement, la résolution des équations associées au système de l'actionneur inertiel MHD nous a permis de donner le profil de vitesse de l'écoulement dans le canal, selon ses dimensions géométriques, et ainsi d'obtenir le Moment Cinétique fourni par l'actionneur pour stabiliser le satellite.

Cette partie s'intéresse maintenant au fonctionnement dynamique de l'actionneur, du point de vue de son fonctionnement de roue à réaction. En effet, à vitesse variable pour le fluide (et donc à champ électromagnétique imposé variable), l'actionneur induit un couple de réaction qui permet le pilotage du satellite, afin de le pointer dans telle ou telle direction (les appareils de mesure ou les panneaux solaires). Ainsi, il est nécessaire de formuler un modèle décrivant le régime dynamique de l'actionneur, et les hypothèses permettant d'y aboutir.

Après avoir formulé ce modèle, en utilisant de nouveau les deux approches possibles (*B*-φ et *B*-*T*), nous nous intéresserons aux résultats obtenus à partir de résolutions numériques, en Différences Finies toujours. Ces résultats permettront de comprendre le comportement dynamique de l'actionneur.

Enfin, ce comportement sera étudié lors d'une variation du champ électromagnétique en entrée, et pour différents fluides inertiels.

1. Modélisation Dynamique

1.1 Hypothèses Générales et Equations Constitutives

De manière générale, l'ensemble des hypothèses utilisées pour l'établissement des modèles 2D Axisymétriques sont réutilisées ici (cf. paragraphe (II.1)). A savoir :

- Le fluide est considéré incompressible. L'équation de Navier-Stokes (I.4.1) en Régime Dynamique s'écrit donc :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu\,\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} \qquad \text{(III.1.1)}$$

- Et la loi de conservation de la masse (I.4.3) nous donne, dans le cas d'un écoulement incompressible :

$$\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{v}) = 0 \qquad \text{(III.1.2)}$$

- En ce qui concerne les lois de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell sont considérées dans le cadre de l'approximation quasi-statique. En effet, les phénomènes temporels d'établissement du champ électromagnétique sont considérés beaucoup plus rapides que les phénomènes temporels d'établissement de l'écoulement.

$$\nabla.\boldsymbol{B} = 0 \;\; ; \;\; \nabla.\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(III.1.3)}$$

$$\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{(III.1.4)}$$

$$\nabla \wedge \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \quad \text{(III.1.5)}$$

- Et la loi de conservation de la charge donne (I.4.8) :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} = 0 \quad \text{(III.1.6)}$$

Nous rappelons également ici la loi d'Ohm constitutive de la MHD et la force de Lorentz qui en découle :

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \quad \text{(III.1.7)}$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B} \quad \text{(III.1.8)}$$

Les équations constitutives de la MHD temporelle et les hypothèses associées choisies vont maintenant permettre d'établir la modélisation du problème étudié. De manière analogue aux modèles développés dans le cas du régime permanent, nous allons donc formuler la modélisation de deux manières différentes mais équivalentes en ce qui concerne la solution trouvée. Le problème étant Dual, ainsi que la possibilité d'imposer la tension électrique ou le courant aux électrodes, pour le champ électromagnétique en entrée. Lorsque le choix est fait d'imposer la tension aux électrodes, la formulation utilisant le potentiel scalaire électrique est utilisée. En revanche, lorsque le courant est imposé, c'est celle qui utilise le potentiel vecteur électrique *T* qui sera choisie. D'où les deux formulations suivantes.

1.2 Modèle *B-φ*

Le potentiel scalaire électrique est introduit à partir de l'équation (I.4.7) dans le cadre de l'approximation quasi-statique :

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}(\varphi) \quad \text{(III.1.9)}$$

Ainsi, à partir de l'équation ((III.1.6), et en prenant la divergence de la loi d'Ohm en MHD (III.1.7), en tenant compte de l'expression du champ électrique (III.1.9),

$$\Delta\varphi = \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \quad \text{(III.1.10)}$$

Cette équation constitue la première équation du modèle développé ici. Elle correspond à l'équation (I.4.11) dans le cadre de l'approximation quasi-statique. L'équation (III.1.1) est réécrite à partir de (III.1.7) :

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu\,\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{g} \quad \text{(III.1.11)}$$

(III.1.2), (III.1.10) et (III.1.11) constituent les équations MHD du modèle *B-φ* en temporel.

1.3 Modèle *B-T*

Le potentiel vecteur électrique *T* est introduit, du fait que la densité de courant est à divergence nulle (III.1.6) :

$$\boldsymbol{j} = \nabla \wedge \boldsymbol{T} \qquad \text{(III.1.12)}$$

Et comme explicité dans le paragraphe (II.1.2), l'équation (II.1.22) est obtenue et rappelée ici :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{T}) = \sigma . \nabla \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \qquad \text{(III.1.13)}$$

Et l'équation de Navier-Stokes en temporel (III.1.11) est réécrite sous la forme :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{T}) \wedge \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\rho . g} \qquad \text{(III.1.14)}$$

Ainsi, (III.1.2), (III.1.12) et (III.1.13) sont les équations constitutives du modèle *B-T* en temporel.

Les deux formulations ont donc été exprimées de manière générale (3D), c'est-à-dire de manière indépendante à la géométrie et aux conditions du problème étudié de l'actionneur. L'application de ces modèles est donc présentée au paragraphe suivant, en utilisant les particularités du problème étudié afin d'aboutir à deux modélisations en 2D du problème, et aller vers sa résolution.

1.4 Modèles Dynamiques 2D Axisymétriques

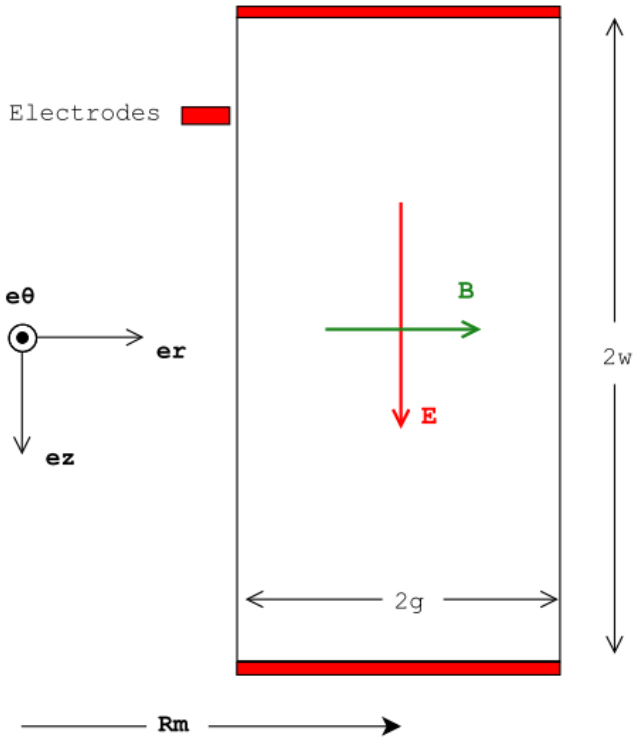


Fig. 87 Rappel du Schéma de la section du canal torique

1.4.1 Hypothèses

Les hypothèses considérées dans le paragraphe (II.1) sont de nouveau posées ici. A savoir :

- L'écoulement est considéré incompressible et orthoradial (seule la projection orthoradiale de l'équation de Navier-Stokes sera considérée), de sorte que, comme explicité en remarque paragraphe (I.6), les vitesses et gradients de pression axiaux et radiaux ne sont pas considérés. Et,

$$\boldsymbol{v} = v(r,z).\boldsymbol{e_\theta} \qquad \text{(III.1.15)}$$

- La géométrie est invariante par rotation autour de l'axe z. De fait, l'existence de gradients de pression orthoradiaux est négligée dans l'équation de Navier-Stokes (III.1.1).
- Le champ électromagnétique imposé est invariant par rotation autour du même axe. C'est pourquoi, l'ensemble des variables ne dépend pas de θ.
- Le plan ($\mathbf{e_r}$; $\mathbf{e_z}$) est plan de symétrie pour la distribution des charges électriques. Le champ magnétique induit par l'écoulement sera donc orthoradial.

$$\boldsymbol{B} = B_0.\frac{R_m}{r}.\boldsymbol{e_r} + b(r,z).\boldsymbol{e_\theta} \qquad \text{(III.1.16)}$$

- L'écoulement sera considéré laminaire ($R_e < 2000$).

Précisons que dans le cas de la modélisation dynamique, les variables b, φ, T et v dépendent également du temps.

1.4.2 Formulation *B*-φ

Dans ce modèle, l'existence du champ magnétique induit, qu'elle soit négligeable ou non (selon la valeur du nombre de Reynolds magnétique), n'est pas prise en compte pour la détermination des caractéristiques de l'écoulement produit, puisque ce modèle s'intéresse uniquement à la résolution du potentiel scalaire électrique et de la vitesse du fluide dans le canal.

A partir de l'ensemble de ces considérations, le modèle 2D axisymétrique en temporel peut être formulé. (III.1.10) devient (II.1.15) :

$$\Delta\varphi(r,z) + B_0.\frac{R_m}{r}.\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} = 0 \qquad \text{(III.1.17)}$$

Et, tenant compte de la loi d'Ohm en MHD (III.1.7) et de l'expression du champ électrique (III.1.9), l'équation de Navier-Stokes (III.1.11) projetée suivant $\boldsymbol{e_\theta}$ est :

$$\frac{\partial}{\partial t}v_\theta(r,z) - \upsilon\Delta v_\theta(r,z) + \frac{v_\theta(r,z)}{r^2}.\left(\upsilon + \frac{\sigma}{\rho}.B_0^2R_m^2\right) = -\frac{\sigma}{\rho}.B_0.\frac{R_m}{r}.\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z} \qquad \text{(III.1.18)}$$

υ étant la viscosité cinématique du fluide définie (I.4.25).

Les conditions limites spatiales pour ce problème sont données en (II.1) et rappelées ici :

$$v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w) \qquad \text{(III.1.19)}$$

$$j_r(R_m \pm g, z) = 0 = \frac{\partial \varphi(R_m \pm g, z)}{\partial r} = \frac{1}{\mu_0} . \frac{\partial b(R_m \pm g, z)}{\partial z} \quad \text{(III.1.20)}$$

$$\varphi(r, \pm w) = \mp \frac{U}{2} \quad \text{(III.1.21)}$$

$$j_r(r, \pm w) = 0 = \frac{\partial \varphi(r, \pm w)}{\partial r} = \frac{1}{\mu_0} . \frac{\partial b(r, \pm w)}{\partial z} \quad \text{(III.1.22)}$$

En condition temporelle initiale, seule la vitesse est initialisée à sa valeur initiale, qui peut être nulle, ou égale à la valeur obtenue précédemment, lors de l'imposition d'un champ électromagnétique en entrée différent.

$$v_\theta(r, z, t = 0) = v_0 \quad \text{(III.1.23)}$$

1.4.3 Formulation *B*-*T*

Contrairement à la formulation précédente, celle-ci ne s'intéresse pas à la résolution du potentiel scalaire électrique, mais à celle du champ magnétique induit au travers du potentiel vecteur électrique, dont le lien a été montré au paragraphe (II.1.2). Se reporter aux équations (II.1.26)-(II.1.30) et l'introduction du potentiel scalaire magnétique Ω. Alors, (III.1.13) peut s'exprimer par :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{T}) = \sigma . \nabla \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B_0}) \quad \text{(III.1.24)}$$

Et l'équation de Navier-Stokes (III.1.14) se reformule par :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{v} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{T}) \wedge \boldsymbol{B} \quad \text{(III.1.25)}$$

Ces équations sont projetées suivant $\boldsymbol{e_\theta}$, la direction de l'écoulement, et donnent :

$$\Delta T(r, z) - \frac{T(r, z)}{r^2} + \sigma B_m R_m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta(r, z)}{r} \right) = 0 \quad \text{(III.1.26)}$$

$$\Delta b(r, z) - \frac{b(r, z)}{r^2} + \mu_0 \sigma B_0 R_m . \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta(r, z)}{r} \right) = 0 \quad \text{(III.1.27)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\theta(r, z) - v \left(\Delta v_\theta(r, z) - \frac{v_\theta(r, z)}{r^2} \right) - \frac{B_m R_m}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r T(r, z)) = 0 \quad \text{(III.1.28)}$$

(III.1.25) et (III.1.26) étant équivalentes.

Les conditions limites spatiales sont données en (II.1.2) et rappelées ici :

$$v(R_m \pm g, z) = 0 = v(r, \pm w) \quad \text{(III.1.29)}$$

$$j_r(R_m \pm g, z) = 0 = \frac{1}{\mu_0} . \frac{\partial b(R_m \pm g, z)}{\partial z} \quad \text{(III.1.30)}$$

$$j_r(z, \pm w) = 0 = \frac{1}{\mu_0}.\frac{\partial b(r, \pm w)}{\partial z} \quad \text{(III.1.31)}$$

$$b(R_m - g, z) = b_{int} = 0 \quad \text{(III.1.32)}$$

$$b(R_m + g, z) = b_{ext} = \frac{\mu_0.I_0}{2\pi(R_m + g)} \quad \text{(III.1.33)}$$

Pour condition initiale temporelle, seule la vitesse est initialisée (III.1.23).

Conclusion :

Les deux modélisations possibles en 2D axisymétrique ont finalement été formulées. Les systèmes d'équations correspondants ont été posés ainsi que les conditions limites nécessaires à leur résolution. Cette dernière, forte de ces bases, peut donc être mise en place. Le paragraphe qui suit traite donc de cette résolution du problème étudié en dynamique. L'objet est donc de mieux appréhender les conditions de mise en place de l'écoulement lorsqu'un champ électromagnétique est imposé, à partir d'une vitesse nulle par exemple. Et ce, jusqu'à l'obtention du régime permanent, ou établi, pour l'écoulement du fluide. Mais aussi lorsque, à partir d'un régime d'écoulement préétabli, le champ électromagnétique en entrée est modifié, voir annulé. Les résultats attendus permettront d'aller vers un dimensionnement de l'actionneur MHD du point de vue du couple de réaction qu'il devra fournir dans le système du satellite, pour son pointage.

La résolution de ces problèmes nécessite une approche numérique. Et, de manière analogue au cas du régime statique étudié au chapitre II de cette thèse, il a été choisi d'utiliser une méthode basée sur l'utilisation des Différences Finies.

2. Résolution Numérique en Différences Finies – Schéma d'Euler Implicite

Nombreuses sont les méthodes qui peuvent être utilisées pour résoudre un problème à variables spatiales et temporelles. En ce qui nous concerne, compte tenue de la géométrie simple du problème étudié (Fig. 87), nous avons opté pour une méthode de résolution par Différences Finies.

La discrétisation des équations du problème se fait donc à partir de schémas de type Euler. Comme il avait été explicité au paragraphe (II.2), les discrétisations spatiales permettant d'approcher les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 seront faites à partir des schémas d'Euler centrés, (II.2.7) et (II.2.8). Tout comme il avait été fait pour la résolution en Régime Statique. L'équation de Navier-Stokes ((III.1.28) et (III.1.18), en ne tenant compte que de la vitesse dans son expression, est de type parabolique (tout comme l'équation de diffusion de la chaleur), en coordonnées cylindriques. Sa discrétisation temporelle peut également être faite à partir d'un schéma centré, ou bien de manière implicite ou explicite (analogues des dérivées à gauche ou à droite spatiales).

Le choix de ce schéma temporel, ainsi que du temps auquel sont exprimées les différentes dérivées spatiales est primordial pour les caractéristiques de la résolution. En différences finies, plusieurs méthodes existent selon le choix de ces schémas, et sont présentées en [1],[2] et [3]. Aussi, nous nous concentrerons sur la méthode dite implicite, parce que, contrairement à la méthode explicite, elle est inconditionnellement stable, quelques soient les pas de discrétisation temporel et spatial choisis. De plus, la consistance, c'est-à-dire la précision de la solution obtenue, de ces deux approches est équivalente (ordre 1 temporellement et 2 spatialement (ordre de troncature), par rapport aux valeurs des pas de discrétisation correspondants).

La méthode de résolution numérique est présentée uniquement pour la formulation *B*-φ, à titre d'exemple. Le problème étudié est donc rappelé ici :

$$\begin{cases} \Delta\varphi(r,z) + B_0.\dfrac{R_m}{r}.\dfrac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}v_\theta(r,z) - \upsilon\Delta v_\theta(r,z) + \dfrac{v_\theta(r,z)}{r^2}.\left(\upsilon + \dfrac{\sigma}{\rho}.B_0^2R_m^2\right) = -\dfrac{\sigma}{\rho}.B_0.\dfrac{R_m}{r}.\dfrac{\partial\varphi(r,z)}{\partial z} \end{cases}$$

Avec pour conditions aux limites spatiales de type Dirichlet :

$$\begin{cases} v_\theta(R_m \pm g, z) = 0 = v_\theta(r, \pm w) \\ \varphi(r, \pm w) = \mp\dfrac{U}{2} \end{cases}$$

Et de type Neumann,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(R_m \pm g, z)}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

Et pour condition initiale temporelle,

$$v_\theta(r, z, t = t_0) = v_0(r, z)$$

2.1 Méthode Implicite - Discrétisation

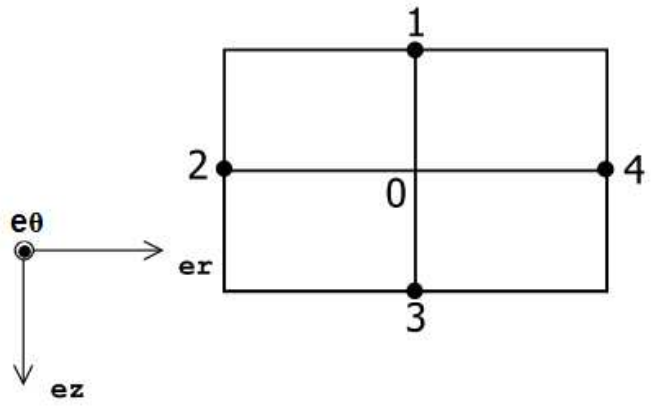
Soient t_0 et t_f les temps respectivement initial et final définissant la plage temporelle $[t_0; t_f]$ sur laquelle a lieu la résolution numérique. Soit N_t le nombre de segments de discrétisation sur cet intervalle. Le pas temporel est défini par :

$$\Delta t = \frac{1}{N_t} \qquad \text{(III.2.1)}$$

Le domaine temporel peut être défini par :

$$\Omega_t = \{n.\Delta t + t_0, 0 \leq n \leq N_t\}$$

La discrétisation du maillage et les nœuds alentours d'un nœud n_0 sont définis comme pour la résolution numérique statique et suivant le schéma :



La dérivée partielle temporelle dans l'équation de Navier-Stokes se discrétise à partir du schéma,

$$\left.\frac{\partial v_\theta}{\partial t}\right)_0^{n+1} = \frac{v_0^{n+1} - v_0^n}{\Delta t} \qquad \text{(III.2.2)}$$

Discrétisation pour laquelle la vitesse au temps t_{n+1} est inconnue et celle au temps t_n est connue (déterminée au pas temporel précédent).

Ensuite, les discrétisations pour les dérivées spatiales sont faites en suivant les mêmes schémas que ceux établis pour la résolution numérique statique et présentés au paragraphe (II.3.1). Elles sont exprimées au temps t_{n+1}. A titre d'exemple, voici quelques-unes de ces discrétisations :

$$\left.\frac{\partial \varphi(r,z)}{\partial z}\right)_0^{n+1} = \frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_3^{n+1} - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_1^{n+1} + \frac{h_3-h_1}{h_1 h_3}.\varphi_0^{n+1} \qquad \text{(III.2.3)}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r}\right)\right)_0^{n+1} = v_4^{n+1}.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + v_2^{n+1}.\frac{2r_0-h_4}{h_2.(h_2+h_4)} + v_0^{n+1}.\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2 h_4} \qquad \text{(III.2.4)}$$

L'équation de Navier-Stokes (III.1.18) discrétisée au nœud n_0 pour déterminer la valeur de la vitesse au temps t_{n+1} s'écrit :

$$\begin{aligned} \upsilon\Delta t.\left(v_4^{n+1}.\frac{-2r_0-h_2}{h_4.(h_2+h_4)} + v_2^{n+1}.\frac{-2r_0+h_4}{h_2.(h_2+h_4)} - \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}.v_3^{n+1} - \frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1^{n+1}\right. \\ + v_0^{n+1}.\left(\frac{r_0}{\upsilon\Delta t} + \frac{h_2-h_4+2r_0}{h_2 h_4} + \frac{2r_0}{h_1 h_3} + \frac{1}{r_0}.\left(1+\frac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right)\right) \\ \left. + \upsilon\Delta t.\frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\left(\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\varphi_3 - \frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\varphi_1 + \frac{h_3-h_1}{h_1 h_3}.\varphi_0\right) = v_0^n.r_0 \right. \end{aligned}$$

(III.2.5)

Et l'équation (III.1.17) se discrétise de la même façon que (II.3.14), au temps t_{n+1},

$$\varphi_4^{n+1}.\frac{2r_0+h_2}{h_4.(h_2+h_4)}+\varphi_2^{n+1}.\frac{2r_0-h_4}{h_2.(h_2+h_4)}+\varphi_3^{n+1}.\frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}+\varphi_1^{n+1}.\frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}$$
$$+\varphi_0^{n+1}.\left(\frac{h_4-h_2-2r_0}{h_2h_4}-\frac{2r_0}{h_1h_3}\right)$$
$$+B_0.R_m.\left(v_3^{n+1}.\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}-\frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.v_1^{n+1}+v_0^{n+1}.\frac{h_3-h_1}{h_1h_3}\right)=0$$

(III.2.6)

Cette méthode est dite implicite dans le sens où le calcul de la solution à un temps $n+1$ nécessite la résolution d'un système matriciel d'équations linéaires. Contrairement à la méthode explicite où la solution est calculée à partir d'une combinaison des valeurs de vitesses au temps n, connues, aux nœuds alentours.

Les termes non connus sont placés à gauche du signe égalité, les termes connus à droite.

L'introduction des conditions aux limites spatiales a lieu de manière analogue à celle présentée au paragraphe (II.3.1). La condition initiale temporelle devient :

$$v_\theta(r=r_0,z=z_0,t=t_0)=v_0(r=r_0,z=z_0) \qquad \text{(III.2.7)}$$

2.2 Ecriture sous forme matricielle

L'ensemble de ces discrétisations permet l'écriture d'un système matriciel représentant les équations linéaires à résoudre, à chaque pas de temps. La construction de ces matrices s'effectue de manière analogue à celle présentée *Annexe 2*. On obtient, au temps t_{n+1}, le système d'équations matricielles suivant :

$$A.X^{n+1}+B.Y^{n+1}=R.X^n+S$$

$$AA.Y^{n+1}+BB.X^{n+1}=SS$$

Avec,

$$X^{n+1} = \begin{pmatrix} v_{1,1}^{n+1} \\ v_{2,1}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ v_{i,1}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ v_{N_r-1,1}^{n+1} \\ v_{1,2}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ v_{N_r-1,2}^{n+1} \\ v_{1,3}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ v_{N_r-1,N_z-1}^{n+1} \end{pmatrix} \quad et \quad Y^{n+1} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}^{n+1} \\ \varphi_{2,1}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{i,1}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{N_r-1,1}^{n+1} \\ \varphi_{1,2}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{N_r-1,2}^{n+1} \\ \varphi_{1,3}^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{N_r-1,N_z-1}^{n+1} \end{pmatrix} \quad et \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_i \\ . \\ . \\ . \\ r_{N_r-1} \\ r_1 \\ . \\ . \\ . \\ r_{N_r-1} \\ r_1 \\ . \\ . \\ . \\ r_{N_r-1} \end{pmatrix}$$

Les matrices A, B, AA, BB, S et SS sont identiques aux matrices obtenues *Annexe 2*, si ce n'est que les coefficients des matrices A, B et S sont multipliés par le terme $-\upsilon.\Delta t$. Aussi les coefficients $\alpha_{i,j}$ de la matrice A (*Annexe 2* (3)) sont modifiés en rajoutant le terme $-\frac{r_0}{\upsilon\Delta t}$:

$$\alpha_{i,j} = -\upsilon\Delta t.\left(-\frac{r_0}{\upsilon\Delta t} + \frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} - \frac{1}{r_0}.\left(1 + \frac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right)\right) \qquad \text{(III.2.8)}$$

Le système d'équations matricielles est mis sous la forme d'une seule équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ BB & AA \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X^{n+1} \\ Y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ SS \end{pmatrix} \qquad \text{(III.2.9)}$$

Avec Id la matrice Identité.

Le système est résolu à chaque pas de temps par inversion directe de matrice sous *Matlab*,

$$\begin{pmatrix} X^{n+1} \\ Y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ BB & AA \end{pmatrix}^{-1}.\left(\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ SS \end{pmatrix}\right) \qquad \text{(III.2.10)}$$

Sachant que pour respecter la condition initiale temporelle, lorsque $n = 0$, le vecteur vitesse X^0 est initialisé par :

$$X^0 = \begin{pmatrix} v_{0_{1,1}} \\ v_{0_{2,1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{0_{i,1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{0_{N_r-1,1}} \\ v_{0_{1,2}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{0_{N_r-1,2}} \\ v_{0_{1,3}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{0_{N_r-1,N_z-1}} \end{pmatrix}$$

2.3 Traitement de la solution

Les grandeurs caractéristiques de l'actionneur peuvent être obtenues à chaque pas temporel de la même façon qu'en statique (cf. paragraphes (II.3.2) et (II.4.1)). Seulement, étant en dynamique, si le bilan en puissance n'est pas modifié dans son principe, celui en couple doit nécessairement prendre en compte le couple dynamique qui se rajoute au couple moteur et couple résistif, du fait de la variation en vitesse, et de l'inertie du fluide.

Le couple dynamique est obtenu en dérivant le moment cinétique par rapport au temps. Le moment cinétique est calculé suivant la méthode explicitée au paragraphe (II.3.2). Et le bilan en couple suivant est vérifié à chaque instant :

$$C_{MHD} - C_{res} = C_dyn \qquad \text{(III.2.11)}$$

Avec,

$$C_{dyn} = J.\frac{d\omega}{dt} = \frac{dM_{cin}}{dt} \qquad \text{(III.2.12)}$$

Pratiquement, le couple dynamique sera donc calculé ainsi :

$$C_{dyn}^{n+1} = \frac{M_{cin}^{n+1} - M_{cin}^{n}}{\Delta t} \qquad \text{(III.2.13)}$$

3. Résultats de Simulation Numérique

Les résultats des simulation en dynamique sont présentés relativement à la dernière solution obtenue à partir du modèle *B-φ* et de la configuration de maillage {S3 + D4}, présentée paragraphe (II.3.3.2.2). C'est d'ailleurs ce maillage spatial qui sera utilisé pour la résolution numérique

temporelle. Les couples moteurs, résistifs et dynamiques seront présentés relativement à la valeur du couple MHD obtenue sous la configuration de champ électromagnétique initiale, pour un nombre de Hartmann de 18.2. Pour cette configuration, le champ électromagnétique est celui de référence et,

$$E_0 = 1 \;\; ; \;\; B_0 = 1$$

Les puissances sont quant à elles normalisées par rapport à la puissance électrique calculée à partir de cette même solution en régime permanent. Aussi, le courant calculé au niveau des électrodes (axial donc) est normalisé par rapport à la valeur calculée lors de la résolution numérique en statique, et dans les mêmes conditions. Ce courant obtenu est donc celui de référence et noté,

$$I_0 = 1$$

Les dynamiques des différentes résolutions, et le régime permanent atteint par elles, seront donc comparés suivant le champ électromagnétique imposé en entrée et le modèle utilisé pour la résolution, choix qui correspond à l'imposition soit de la différence de potentiel entre les électrodes, soit du courant au niveau des électrodes.

Le fluide utilisé est le mercure.

3.1 Dynamique – Modèle *B-φ*

Dans ce paragraphe, le modèle *B-φ* est utilisé pour la résolution numérique du problème en temporel. Le champ magnétique radial est imposé dans l'entrefer (B_0), et le champ électrique dans le canal (E_0), c'est-à-dire le potentiel aux électrodes (ou la différence de potentiel entre les électrodes). Le problème est résolu pour une condition de vitesse initiale nulle. Le champ électromagnétique est imposé. Et la résolution numérique permet de déterminer la montée en vitesse du fluide en dynamique jusqu'à son régime permanent.

3.1.1 Variation du nombre de discrétisation temporelle N_t

Ici sont présentées deux solutions numériques obtenues lors du choix d'un nombre de discrétisation temporelle différent, à discrétisation spatiale identique. Le champ électromagnétique imposé en entrée est celui de référence. Le temps final, par expérience, a été fixé à 20s. Temps suffisant pour atteindre le régime permanent de l'écoulement. Dans un cas, le nombre de segments de discrétisation temporelle a été fixé à 1000. Dans l'autre cas, à 200. Sachant que, étant donné la méthode de discrétisation implicite utilisée, la résolution est temporellement stable et convergente, quelle que soit la valeur de N_t. Seule l'erreur de troncature évolue. Théoriquement proportionnellement à Δt^2 [4].

Voici, pour visualisation, les profils de vitesses obtenus selon ces deux discrétisations temporelles.

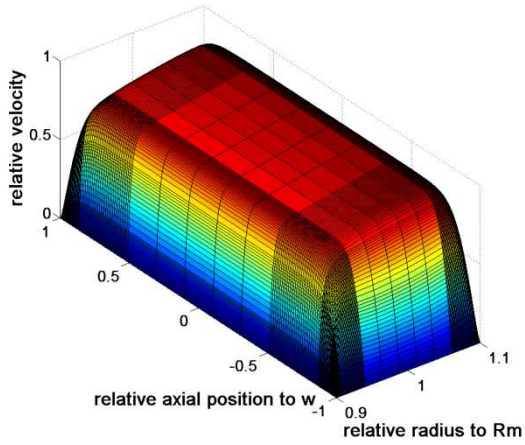


Fig. 88 Profil de vitesse final relatif de référence
{S3 + D4}
$N_t = 1000$

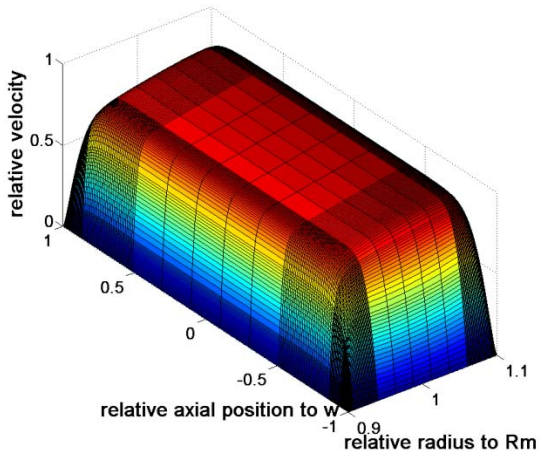


Fig. 89 Profil de vitesse final relatif
{S3 + D4}
N_t =200

Pas d'observations notoires à effectuer. Plus concrètement, les courbes de montée en vitesse moyenne et moment cinétique sont présentées également pour les deux discrétisations,

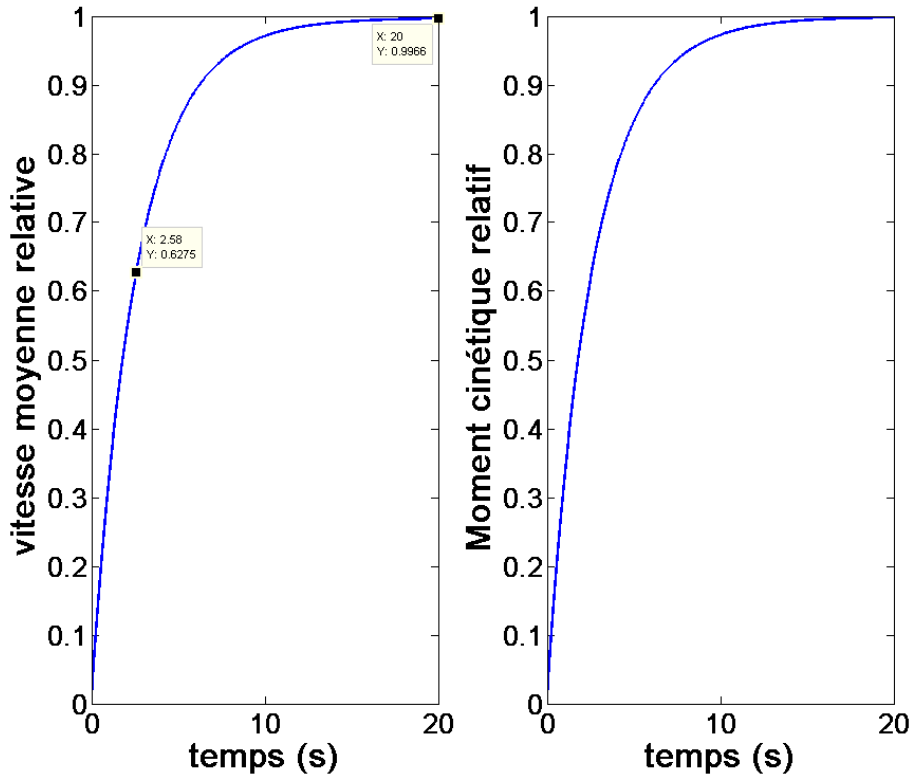


Fig. 90 Dynamique de l'établissement de l'écoulement - $N_t = 1000$.

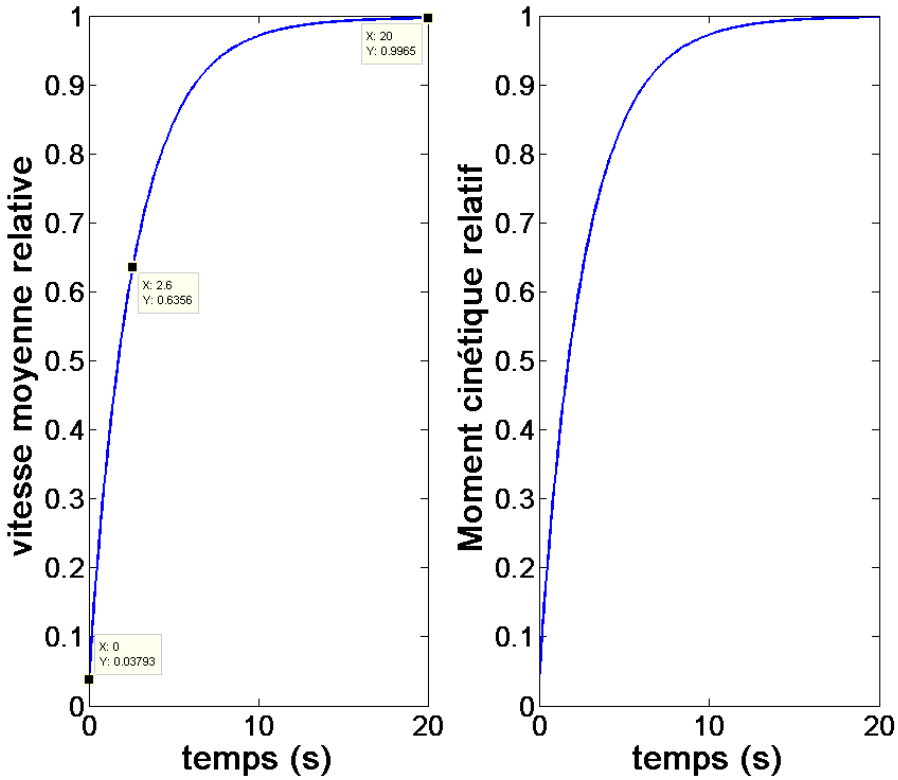


Fig. 91 Dynamique de l'établissement de l'écoulement - $N_t = 200$.

Observations :

Le temps de simulation semble être suffisant pour observer la montée en vitesse de l'écoulement jusqu'au régime permanent. Aussi, la vitesse moyenne atteint au bout de 20s de simulation est sensiblement la même pour les deux discrétisations temporelles, et proche de la valeur obtenue à partir de la résolution numérique en régime permanent.

De plus, la dynamique observée correspond à un établissement de l'écoulement qui semble suivre une loi de type exponentielle, avec pour constante de temps,

$$\tau \simeq 2.6s$$

pour les deux discrétisations. Cette constante de temps est donnée à partir du temps pour lequel la vitesse a atteint 63% de sa valeur finale.

En effet, l'équation de Navier-Stokes utilisée ici pour la résolution numérique en dynamique (III.1.18), montre bien une équation différentielle temporelle d'ordre 1 de la forme,

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau}.v(t) = f(t)$$

En comparaison à l'équation (III.1.18), la fonction *f(t)* notée ici correspond au terme dépendant de la conductivité et de la masse volumique du fluide et du champ magnétique et présentant le gradient axial du potentiel électrique. La constante de temps τ de ce système dynamique serait donc dépendante des caractéristiques du fluide et du champ magnétique imposé, mais aussi variable en fonction de l'instant *t*, de par la présence du Laplacien de vitesse, lié au profil de vitesse variable temporellement, et du gradient du potentiel dans le second membre. Cependant, dans l'idée de comprendre le comportement global de la dynamique du fluide, nous retiendrons la forme exponentielle de la

croissance en vitesse moyenne, et ainsi la constante de temps et le régime permanent atteint selon le fluide et le champ imposé en entrée. Ceci afin d'aller vers la réalisation d'une commande de l'actionneur, qui suivra les résultats de cette thèse. En rappelant l'expression de l'équation (III.1.18),

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\theta(r,z) - \upsilon \Delta v_\theta(r,z) + \frac{v_\theta(r,z)}{r^2} . \left(\upsilon + \frac{\sigma}{\rho} . B_0^2 R_m^2 \right) = -\frac{\sigma}{\rho} . B_0 . \frac{R_m}{r} . \frac{\partial \varphi(r,z)}{\partial z}$$

la constante de temps τ peut s'écrire, en première approche,

$$\tau(t) = \frac{1}{\frac{1}{r^2} . \left(\upsilon + \frac{\sigma}{\rho} . B_0^2 R_m^2 \right) - \frac{\upsilon \Delta v_\theta(r,z,t)}{v_\theta(r,z,t)}} \qquad \text{(III.3.1)}$$

sachant que le gradient axial du potentiel électrique dépend également du gradient axial de la vitesse à l'instant t.

Cette expression reste exhaustive et complexe, mais permet de dire, dans une première tentative de compréhension, que nous devrions observer une dynamique d'autant plus rapide que le champ magnétique imposé est grand, ou que la viscosité, ou la conductivité électrique du fluide sont importantes, ou encore que sa masse volumique est faible

Conclusion :

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces deux discrétisations semble équivalente. A cela, précisons que les temps de résolution et de traitement numérique des résultats sont nettement supérieurs lorsque $N_t = 1000$, respectivement de 784s et 458s, comparés à ceux pour $N_t = 200$, respectivement de 230s et 175s. Alors, nous pouvons conclure que la discrétisation temporelle de 200 segments est largement suffisante pour obtenir une approche correcte de la dynamique de la montée en vitesse du fluide. Puisqu'il s'agit surtout de comprendre le comportement dynamique du fluide dans sa globalité, selon le champ électromagnétique imposé en entrée ou le fluide utilisé, sans pour autant, en premier lieu, nécessiter une précision importante sur les valeurs caractéristiques de cette dynamique. Ainsi, nous conserverons par la suite le choix d'une discrétisation de 200 segments temporellement, afin de limiter le temps de simulation, quel que soit, par la suite, l'horizon temporel nécessaire pour atteindre le régime permanent. Bien que ce soit le pas de discrétisation temporel Δt qui ait une importance sur la précision des résultats.

3.1.2 Résultats complémentaires

Sont ici présentés des résultats complémentaires portant sur l'évolution des différents couples et puissances en jeu dans l'actionneur, lors de l'établissement de l'écoulement, ainsi que le courant calculé au niveau des électrodes. De plus, ces résultats complémentaires ont trait à la résolution à partir du champ électromagnétique de référence en entrée, et d'une condition de vitesse initiale nulle.

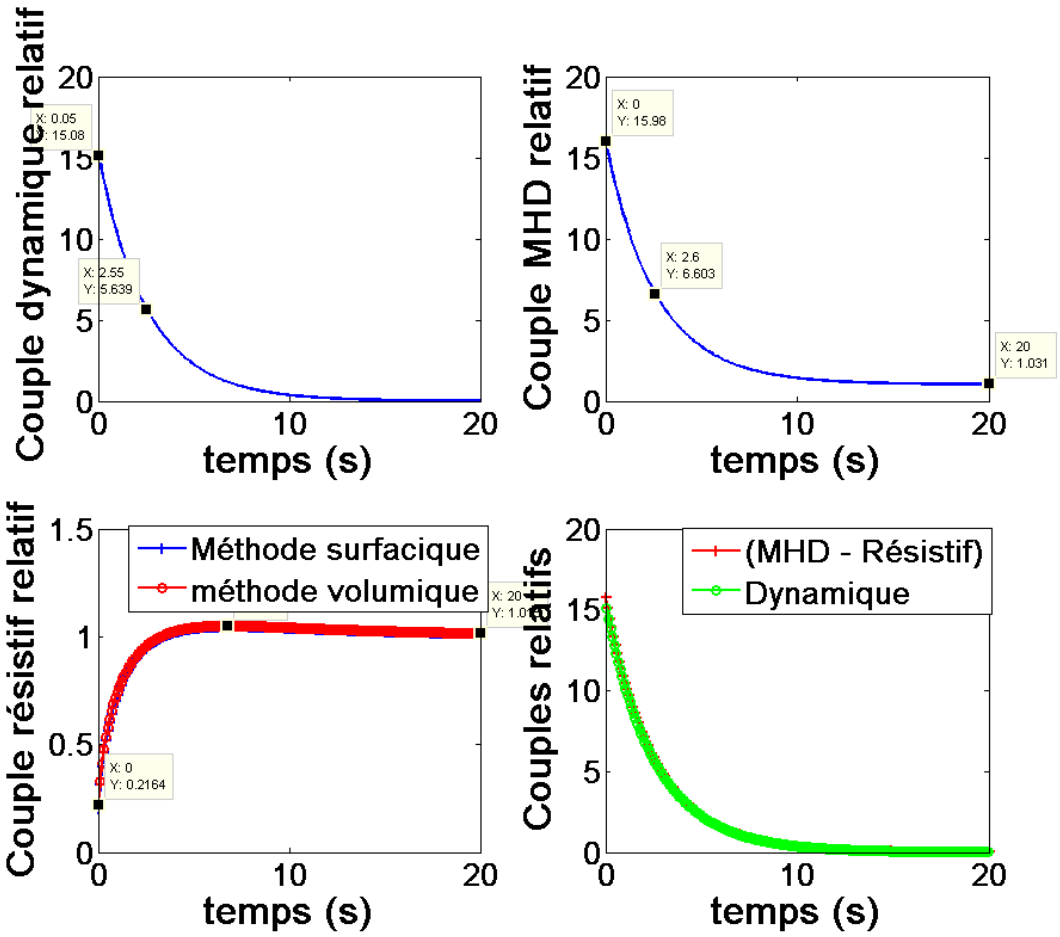


Fig. 92 Evolutions temporelles des différents couples

Observations :

Le couple dynamique évolue avec la même dynamique que la vitesse moyenne, de par son expression (III.2.12). Il est donc initialement maximal jusqu'à tendre vers la valeur nulle, lorsque le régime permanent est atteint. Le couple MHD initial est aussi maximal, puisque, de par l'expression de la force de Lorentz (III.1.8), le courant est initialement maximal et égal au terme σE_0, puis la vitesse augmentant, le courant diminue (cf. loi d'Ohm en MHD (III.1.7)). Ce couple présente également la même dynamique que celle de la vitesse moyenne et atteint en régime permanent une valeur très proche de celle calculée à partir de la résolution numérique statique. Le couple résistif, quant à lui, est initialement nul (pas de vitesse donc pas de gradient de vitesse), et augmente rapidement pour atteindre un maximum, puis diminue légèrement, jusqu'à ce que le profil de vitesse en Hartmann soit bien établi.

Le bilan en couple est bien vérifié, suivant l'équation (III.2.11), les courbes du couple dynamique et de la différence entre le couple MHD et le coupe résistif se superposant bien (cf. dernier quadrant en bas à droite Fig. 92).

Les diverses puissances en jeu sont maintenant présentées, ainsi que le courant au niveau des électrodes :

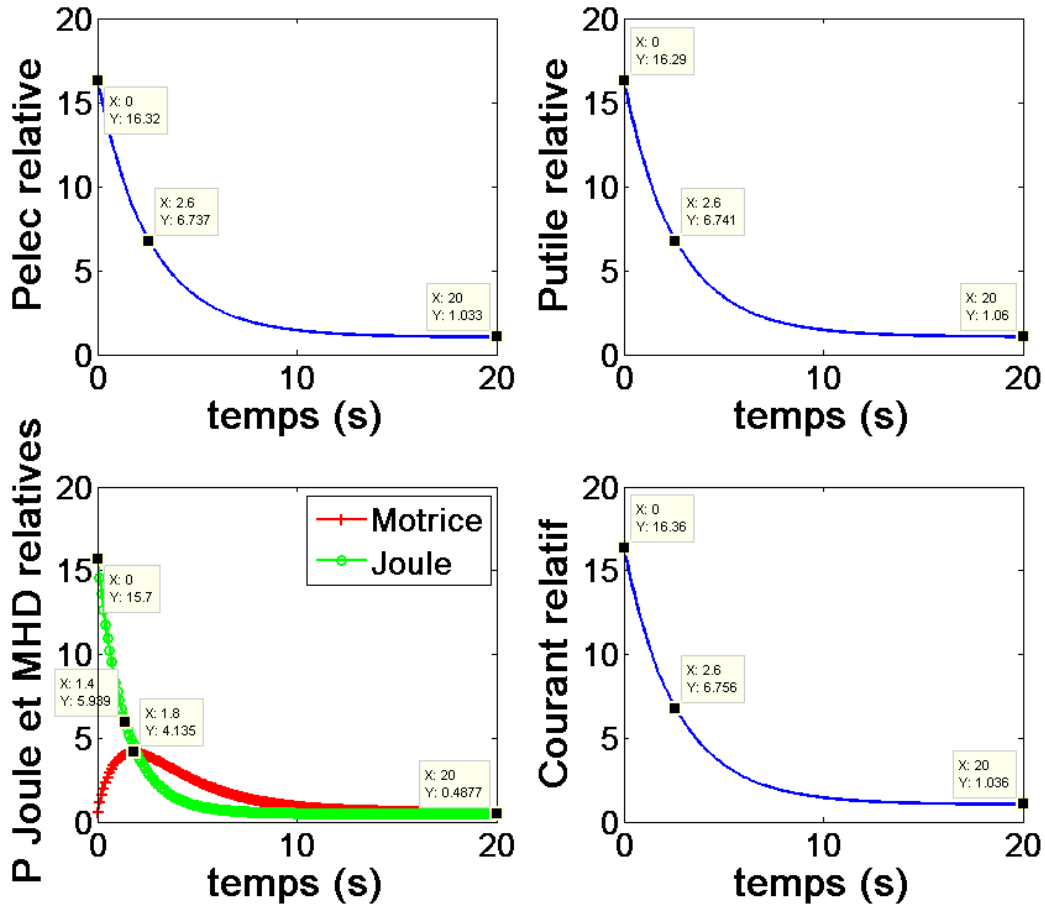


Fig. 93 Evolutions temporelles des différentes puissances et du courant aux électrodes

Observations :

Le courant, à l'image de la puissance électrique fournie par l'actionneur (à tension constante), présente bien la même dynamique que celle de la vitesse moyenne, du fait de la variation du terme $\sigma v B_0$ présent dans la loi d'Ohm MHD (III.1.7), et, comme explicité ci-dessus, décroît jusqu'à atteindre sa valeur en régime permanent proche de celle de la résolution statique, lorsque la force de Lorentz motrice et celle résistive se compensent parfaitement, et que l'écoulement est établi.

Le bilan de puissance ($P_{utile} = P_{elec}$) est bien vérifié, avec un petit écart néanmoins, à l'image de celui obtenu en statique. La dynamique reste la même.

La puissance motrice MHD est initialement nulle (la vitesse initiale étant nulle), puis croît et passe par un maximum avant de redescendre. En effet, la vitesse, à partir d'un état initial nul, croît, ce qui fait augmenter cette puissance mécanique. Néanmoins, son augmentation induit également une diminution de la densité de courant, et donc la force de Lorentz, ce qui provoque également une diminution de la puissance motrice. Les pertes par effet Joule diminuent avec le carré du courant. Les valeurs atteintes en régime permanent et leur part dans la puissance utile totale correspondent aux valeurs présentées par le régime permanent (cf. Tableau (5)).

Conclusion :

Seules les dynamiques des puissances motrices et pertes Joules, et du couple résistif ne suivent pas celle de la vitesse moyenne dans le canal. Autrement, les valeurs atteintes en régime permanent

correspondent bien à celles déterminées à partir de la résolution numérique en statique, et la solution dite de référence présentée au paragraphe (II.3.3.2.2).

Nous nous attachons maintenant à comparer la dynamique de l'établissement de l'écoulement en fonction du champ électromagnétique en entrée. Nous vérifierons que ces comportements correspondent bien à ceux attendus de par l'expression, exhaustive et parfaitement théorique, de la constante de temps (III.3.1).

3.1.3 Variation du champ électromagnétique en entrée

- **Variation du champ E_0**

Nous présentons ici une montée en vitesse, selon la valeur du champ E_0 donnée relativement à la valeur de référence. L'ensemble des courbes sont toujours tracées relativement à la solution de référence.

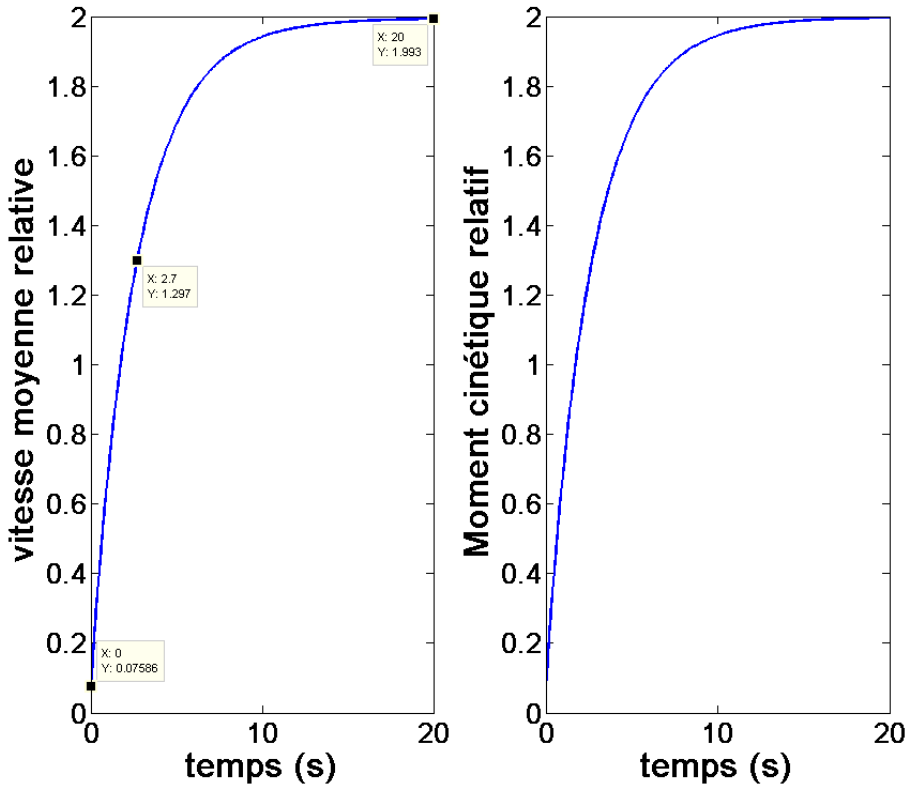


Fig. 94 Evolutions temporelle de la vitesse moyenne et du moment cinétique
$E_0 = 2$; $B_0 = 1$

La dynamique est toujours la même que celle présentée précédemment pour un champ E_0 égal à l'unité (en référence). En revanche, le régime permanent atteint est deux fois plus important, comme explicité à partir de l'étude faite en régime permanent (II.5). Cela confirme également ce que semble exprimer la relation exhaustive de la constante de temps (III.3.1).

Voici le profil de vitesse obtenu :

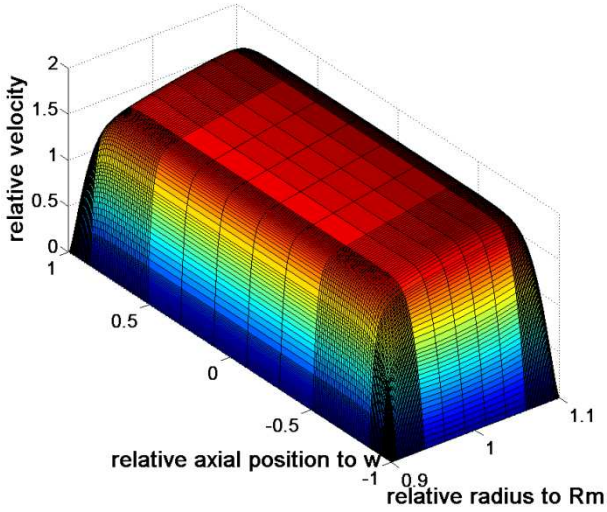


Fig. 95 Profil de Vitesse atteint en régime permanent
$E_0 = 2$; $B_0 = 1$

Rapidement, présentons les évolutions des différents couples et puissances, ainsi que celle du courant aux électrodes.

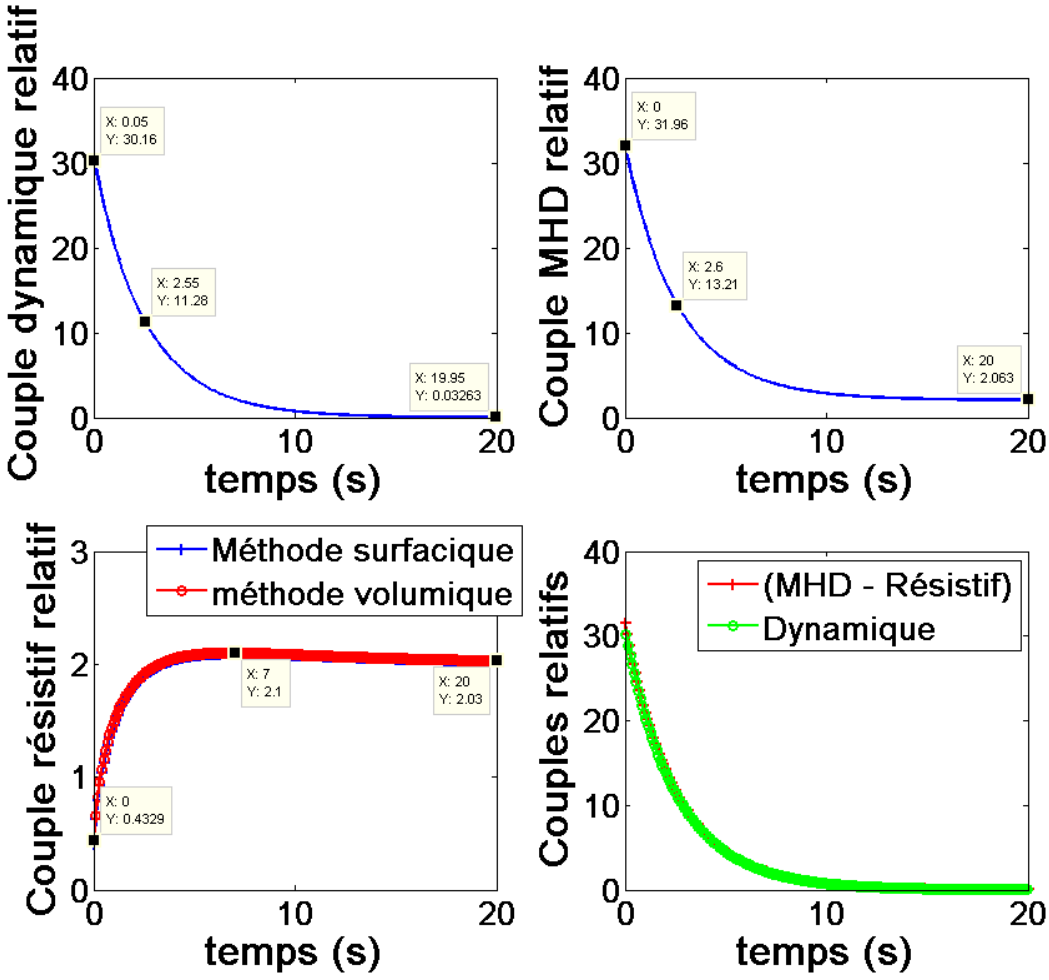


Fig. 96 Evolutions temporelles des couples en jeu
$E_0 = 2$; $B_0 = 1$

Le couple dynamique tend bien vers zéro, et est initialement deux fois supérieur au cas où $E_0 = 1$. Ceci s'explique par le fait que initialement, la vitesse étant nulle, le courant, suivant la loi d'Ohm en MHD, sera deux fois plus important dans ce cas que celui précédent (terme σE_0). Et donc, initialement, la force MHD sera deux fois plus importante, ce qui met en mouvement deux fois plus rapidement le fluide (pour atteindre une valeur finale également double).

De par la loi d'Ohm en MHD, la vitesse atteinte étant, à chaque instant, deux fois supérieure, ainsi que le champ électrique, au cas précédent, la force MHD sera également doublée, et donc le couple MHD aussi (cf. figure du deuxième quadrant en haut à droite). La vitesse maximale étant deux fois plus importante, le couple résistif tend vers une valeur à hauteur du double de celle de référence (les gradients de vitesse sont deux fois plus importants).

La dynamique est toujours inchangée.

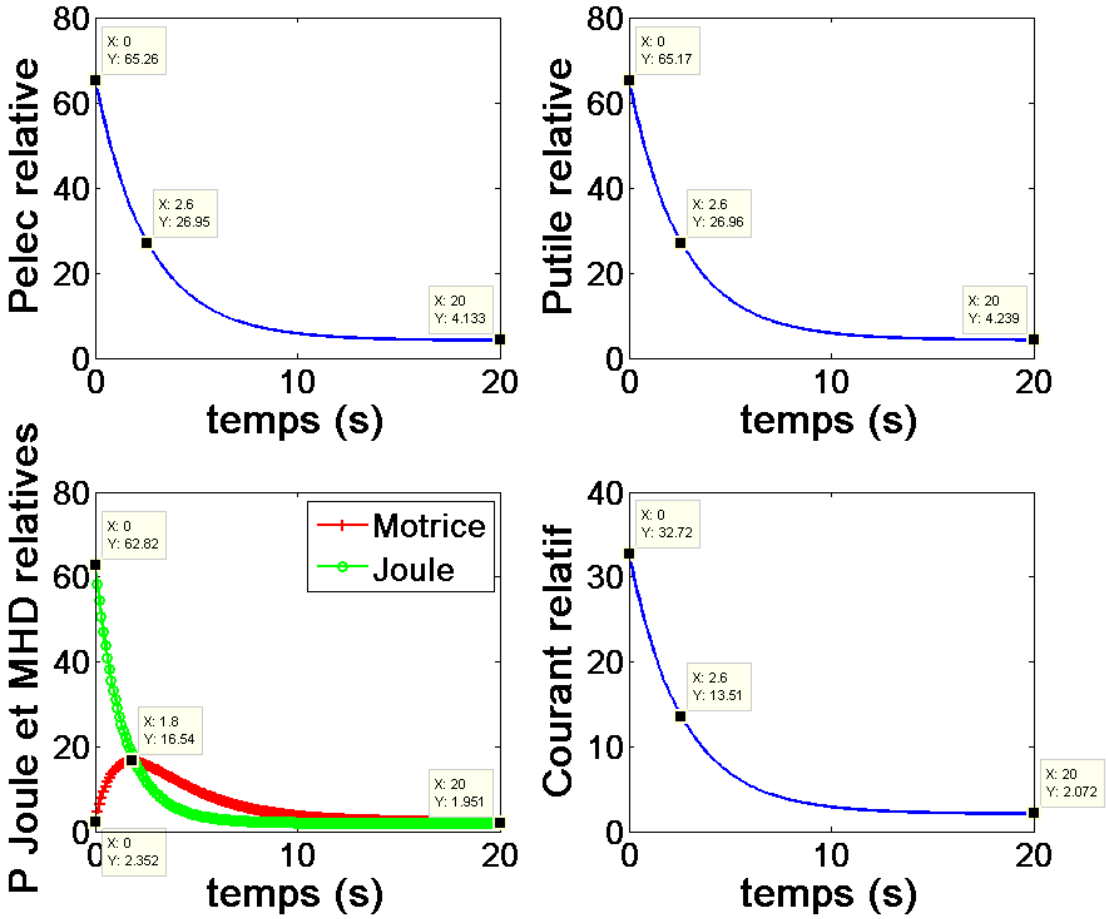


Fig. 97 Evolutions temporelles des puissances en jeu et du courant
$E_0 = 2$; $B_0 = 1$

Le courant est bien doublé initialement (terme σE_0). Cela implique donc un appel de courant d'autant plus grand au démarrage de l'actionneur. S'agissant de la puissance électrique, et également de la puissance utile, cela sera donc fonction du carré du courant. Soit une valeur initiale et finale (et à chaque instant) 4 fois supérieure à celle du cas de référence. Ainsi que les valeurs atteintes par la puissance motrice et les pertes Joules.

En bref, la dynamique est bien inchangée lorsque le champ électrique imposé est modifié. Seules les valeurs atteintes par les différentes grandeurs changent.

Remarque importante :

La dynamique sera celle-ci, si tant est qu'il n'y ait pas de limitation en courant du point de vue de l'alimentation.

- **Variation du champ B_0**

Nous présentons ici différentes montées en vitesse, selon la valeur du champ B_0 imposé relativement à la valeur de référence. Deux cas sont traités ici, à savoir lorsque le champ magnétique radial imposé dans l'entrefer sera égale à 2 puis à 4 par rapport à la valeur de référence. L'ensemble des courbes sont toujours tracées relativement à la solution de référence.

Voici l'évolution des vitesses pour ces deux cas :

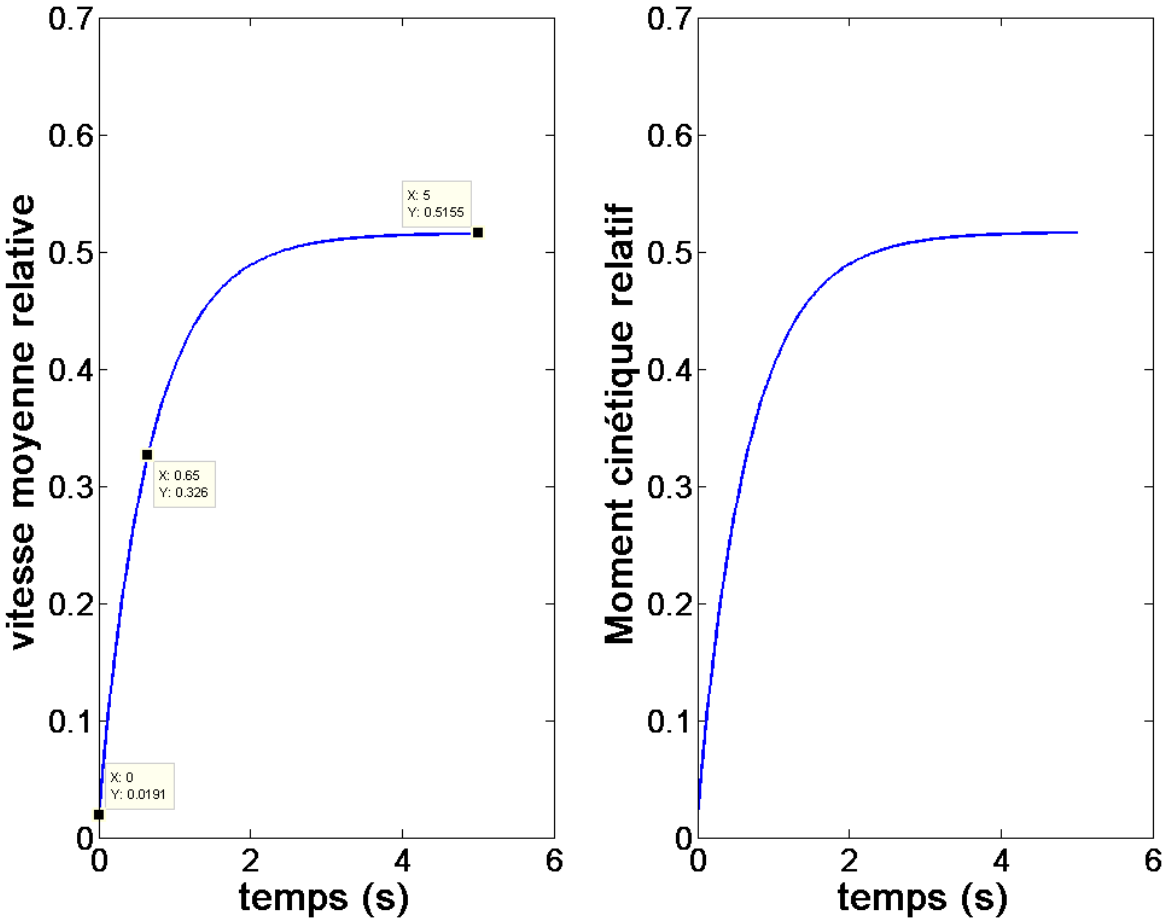


Fig. 98 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
$E_0 = 1$; $B_0 = 2$

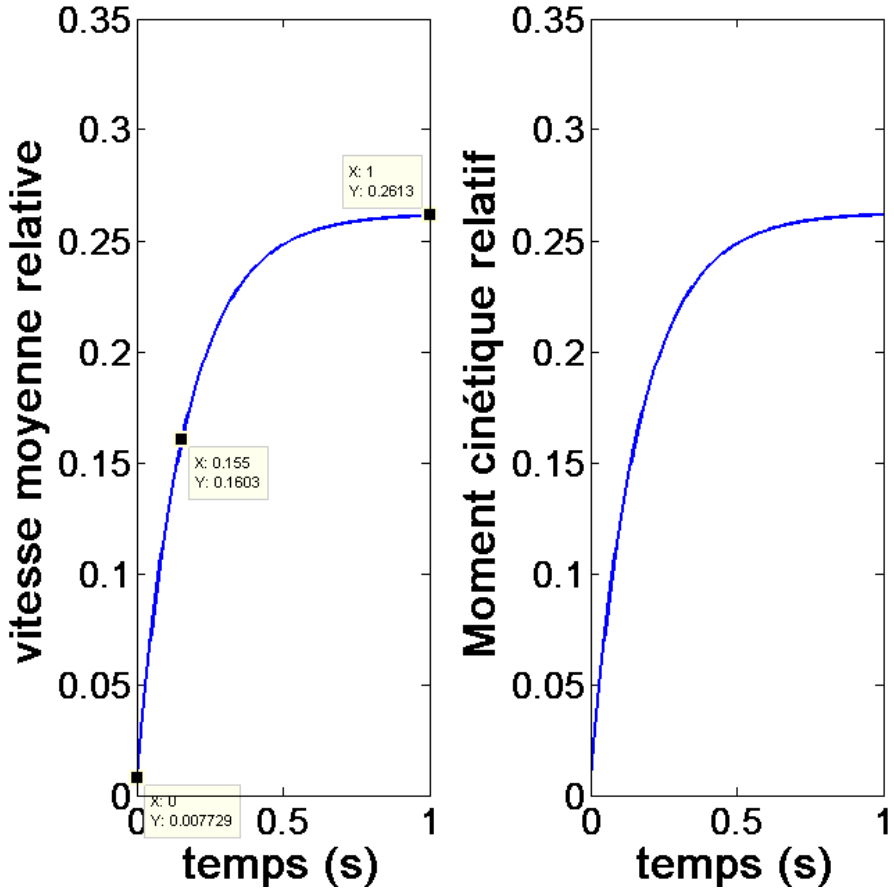


Fig. 99 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
$E_0 = 1$; $B_0 = 4$

Observations :

La vitesse moyenne a une dynamique approximativement 4 fois plus rapide lorsque $B_0 = 2$ et 16 fois plus rapide lorsque $B_0 = 4$. Ceci semble corroborer l'expression de la constante de temps (III.3.1), et plus particulièrement l'évolution de cette constante en fonction de $\frac{1}{B_0^2}$. En ce qui concerne le régime permanent atteint, celui-ci semble évoluer en $\frac{1}{B_0}$. Ce qui signifie que le nombre de Hartmann doit être assez élevé pour que l'expression de la vitesse moyenne en régime permanent se rapproche du rapport E_0/B_0 (cf. l'étude réalisée au paragraphe (II.5)).

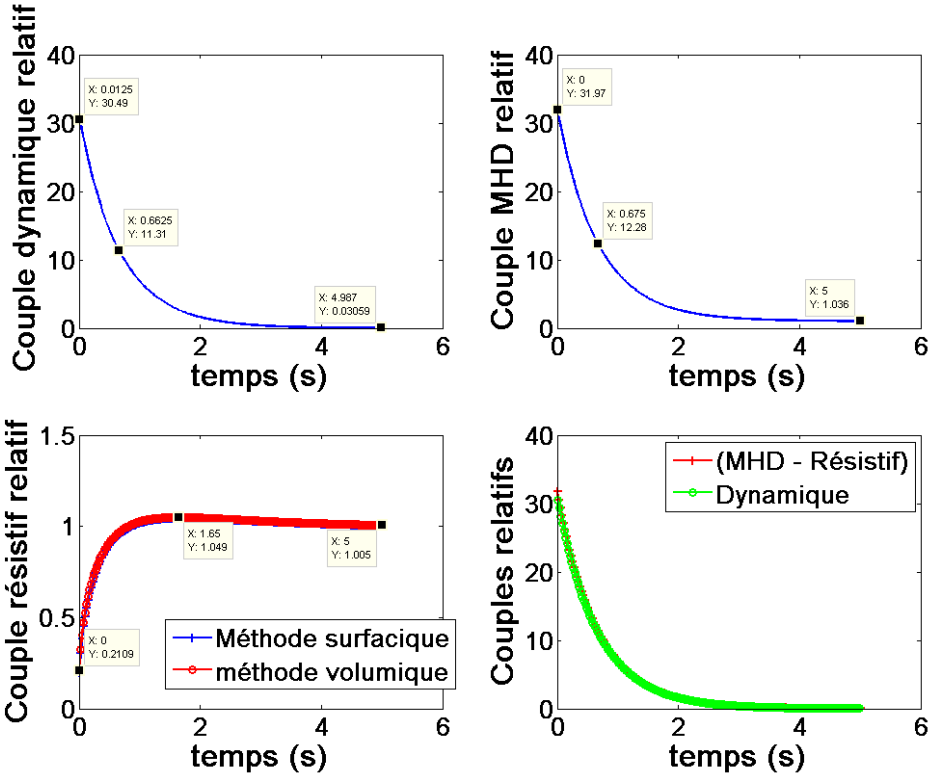


Fig. 100 Evolutions temporelles des couples en jeu
E_0=1 ; B_0=2

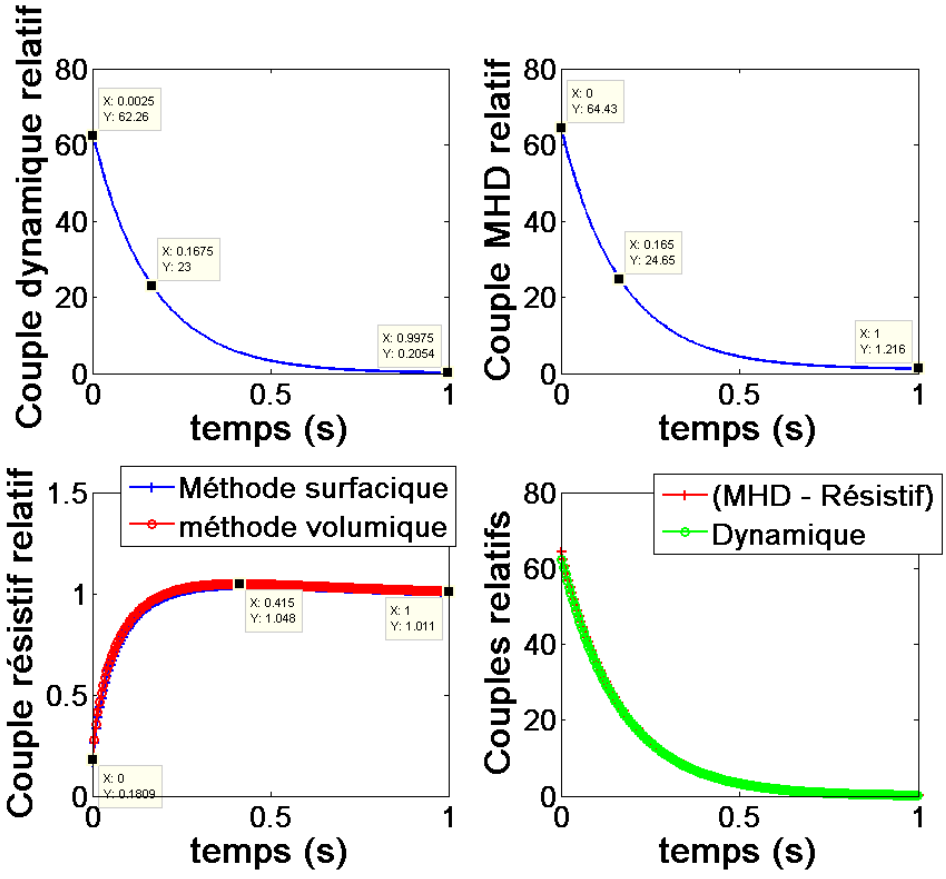


Fig. 101 Evolutions temporelles des couples en jeu
$E_0 = 1$; $B_0 = 4$

Observations :

Les valeurs initiales des couples MHD et dynamique sont multipliées, par rapport aux valeurs initiales de la solution lorsque $B_0 = 1$, par le rapport du champ magnétique appliqué relativement à celui de référence. En effet, la force de Lorentz est initialement proportionnelle au champ magnétique appliqué, à champ électrique constant (III.1.8) et (III.1.7).

Les dynamiques des couples, outre celui résistif, sont toujours celle de la vitesse moyenne et du moment cinétique.

Quant aux valeurs atteintes en régime permanent, se référer à l'étude du paragraphe (II.5).

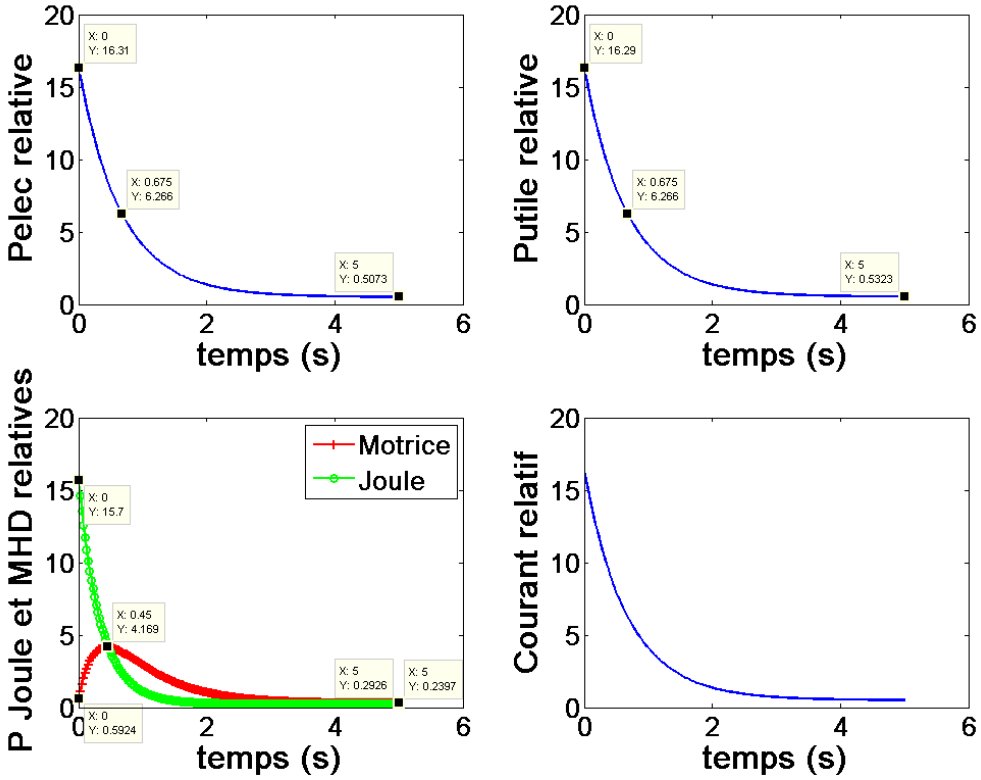


Fig. 102 Evolutions temporelles des puissances en jeu et du courant
$E_0 = 1$; $B_0 = 2$

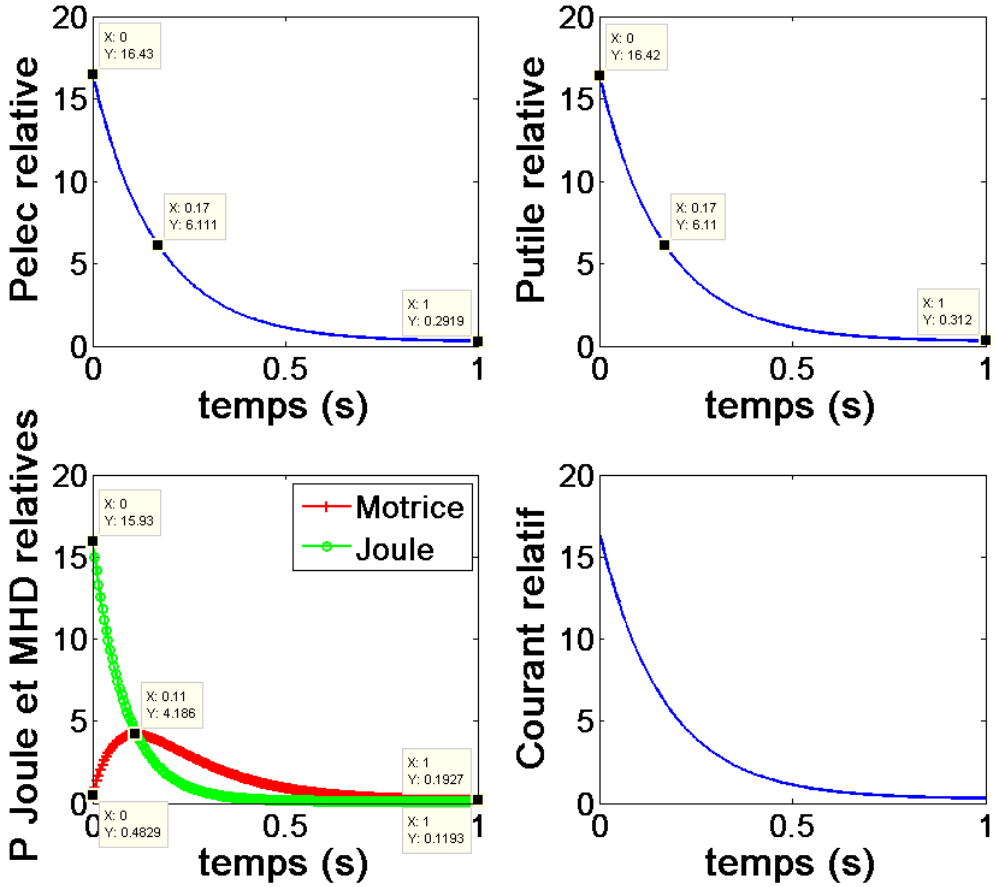


Fig. 103 Evolutions temporelles des puissances en jeu et du courant
$E_0 = 1$; $B_0 = 4$

Observations :

Les dynamiques des puissances et du courant, outre les pertes Joules, sont identiques à celle de la vitesse moyenne et du moment cinétique. Aussi, leurs valeurs initiales ne sont pas modifiées par la variation du champ magnétique imposé dans l'entrefer. En effet, la vitesse étant nulle initialement, le terme $\sigma v B_0$ dans la loi d'Ohm MHD n'intervient pas. Aussi, une fois que la vitesse s'établit, celle-ci est d'autant plus faible que le champ B_0 est important, dans le cas présent.

Pour l'étude des valeurs atteintes en régime permanent, se référer au paragraphe (II.5). Ici par exemple, le courant final est fonction du rapport $\frac{1}{B_0}$. Cela dépend certainement de la plage de champ magnétique sur laquelle on se situe ici. Il faudrait descendre plus bas en champ magnétique pour observer une augmentation rapide du courant avec le champ B_0.

L'appel de courant au démarrage de l'actionneur est cependant inchangé ici.

Conclusion :

Lorsque le champ magnétique imposé dans l'entrefer varie, les valeurs atteintes par le régime permanent évoluent, en fonction de $\frac{1}{B_0}$ ici. En fait, la plage en champ magnétique étudiée ici correspond à des nombres de Hartmann respectivement de $18.2, 36.4$ *et* 72.8. Ainsi, dans ce cas, le

paragraphe (II.5) a montré que l'expression de la vitesse moyenne en régime permanent peut se rapporter au terme E_0/B_0.

De plus, en se référant à l'expression du nombre de Hartmann (I.4.16), cela correspond au cas où la viscosité cinématique υ est négligeable devant le terme $\frac{\sigma}{\rho}.B_0^2.Rm^2$ dans l'expression de la constante de temps (III.3.1). Ainsi, elle peut se réécrire,

$$\tau(t) = \frac{1}{\frac{1}{r^2}.\left(\frac{\sigma}{\rho}.B_0^2 R_m^2\right) - \frac{\upsilon \Delta v_\theta(r,z,t)}{v_\theta(r,z,t)}} \qquad \text{(III.3.2)}$$

L'évolution de la dynamique en fonction du rapport $\frac{1}{B_0^2}$ est donc bien retrouvée.

Nous souhaitons maintenant comparer la dynamique de l'établissement de l'écoulement de ce cas d'étude avec le cas où c'est le courant qui est imposé, contrairement à la tension électrique. De fait, le modèle développé à partir du potentiel vecteur est utilisé.

3.2 Dynamique – Modèle *B-T*

3.2.1 Cas de référence

En premier lieu est présenté la résolution numérique en temporelle de l'établissement de la vitesse lors de l'imposition du champ électromagnétique de référence :

$$I_0 = 1 \;\; ; \;\; B_0 = 1$$

Le courant de référence est celui calculé au niveau des électrodes par la résolution numérique statique et le modèle *B-φ* lors de l'imposition du champ électrique de référence $E_0 = 1$. L'ensemble des grandeurs seront toujours tracées relativement à la solution dite de référence dans ce chapitre. Voici donc l'évolution temporelle de la vitesse moyenne :

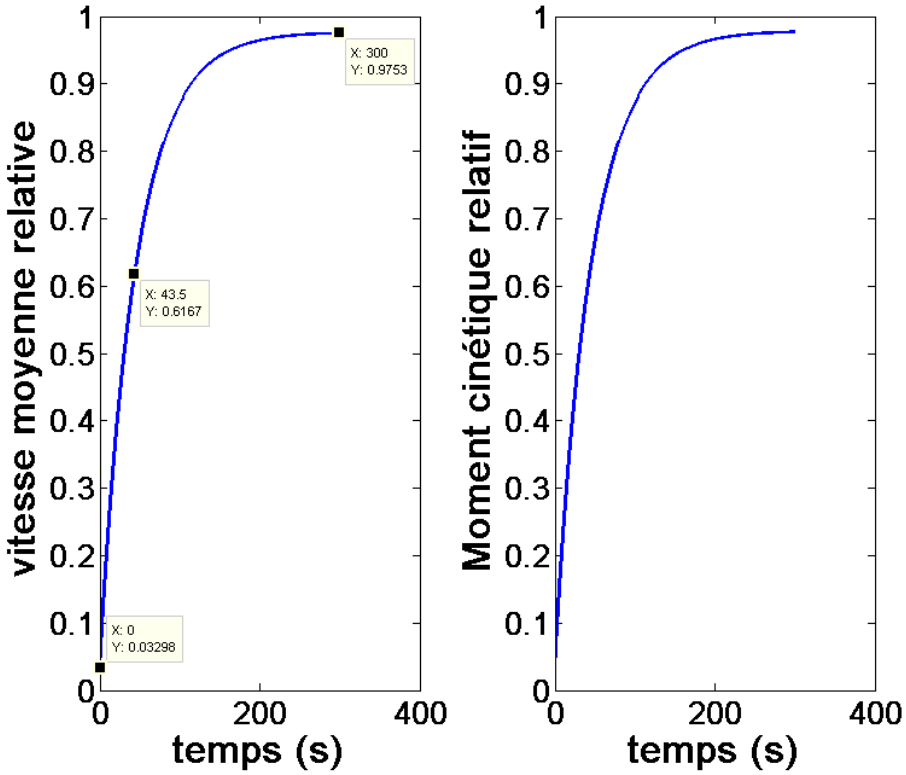


Fig. 104 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
$I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Observations :

La première chose qui peut être observée c'est que, bien que le régime permanent atteint soit le même (ce pour quoi le courant imposé a été calculé, et déjà vérifié par la résolution numérique statique), la dynamique est quant à elle beaucoup plus longue ! Nous avons ici une constante de temps de l'ordre de 43.5s. En effet, l'équation de Navier-Stokes en potentiel vecteur électrique (III.1.28) a la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\theta(r,z) - \upsilon\left(\Delta v_\theta(r,z) - \frac{v_\theta(r,z)}{r^2}\right) = \frac{B_m R_m}{\rho r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(rT(r,z)\right)$$

Et donc, de manière exhaustive et complexe, mais théorique, et analogue à une équation différentielle d'ordre 1, une expression de la constante de temps peut être donnée ainsi :

$$\tau(t) = \frac{1}{\frac{1}{r^2}.\upsilon - \upsilon\frac{\Delta v_\theta(r,z,t)}{v_\theta(r,z,t)}} \qquad \text{(III.3.3)}$$

Celle-ci ne semble donc plus dépendre que des caractéristiques du fluide, plus particulièrement sa viscosité. Ceci justifierait l'existence d'une croissance de type exponentielle à constante de temps beaucoup plus importante.

Néanmoins, remarquons tout de même qu'elle dépend de la forme du profil de vitesse à l'instant *t* (Laplacien de vitesse), qui dépend, lui, de la valeur du champ magnétique imposé radialement et des autres caractéristiques du fluide (conductivité électrique et masse volumique), de par le nombre de Hartmann, comme nous l'avons vu à partir du modèle 1D cylindrique (I.6). Mais aussi de par

l'évolution du couple MHD (et donc du couple résistif) qui augmente lorsque le champ magnétique imposé augmente à courant imposé constant, présentée au paragraphe (II.5). Aussi, le second membre dépend de la valeur du champ imposé et de la masse volumique. C'est pourquoi la constante de temps évoluera probablement avec ces grandeurs.

Tout cela reste à confirmer par de plus amples résolutions à divers champ électromagnétiques en entrée. Nous présentons maintenant les différentes évolutions des couples, puissances et de la différence de potentiel entre les électrodes.

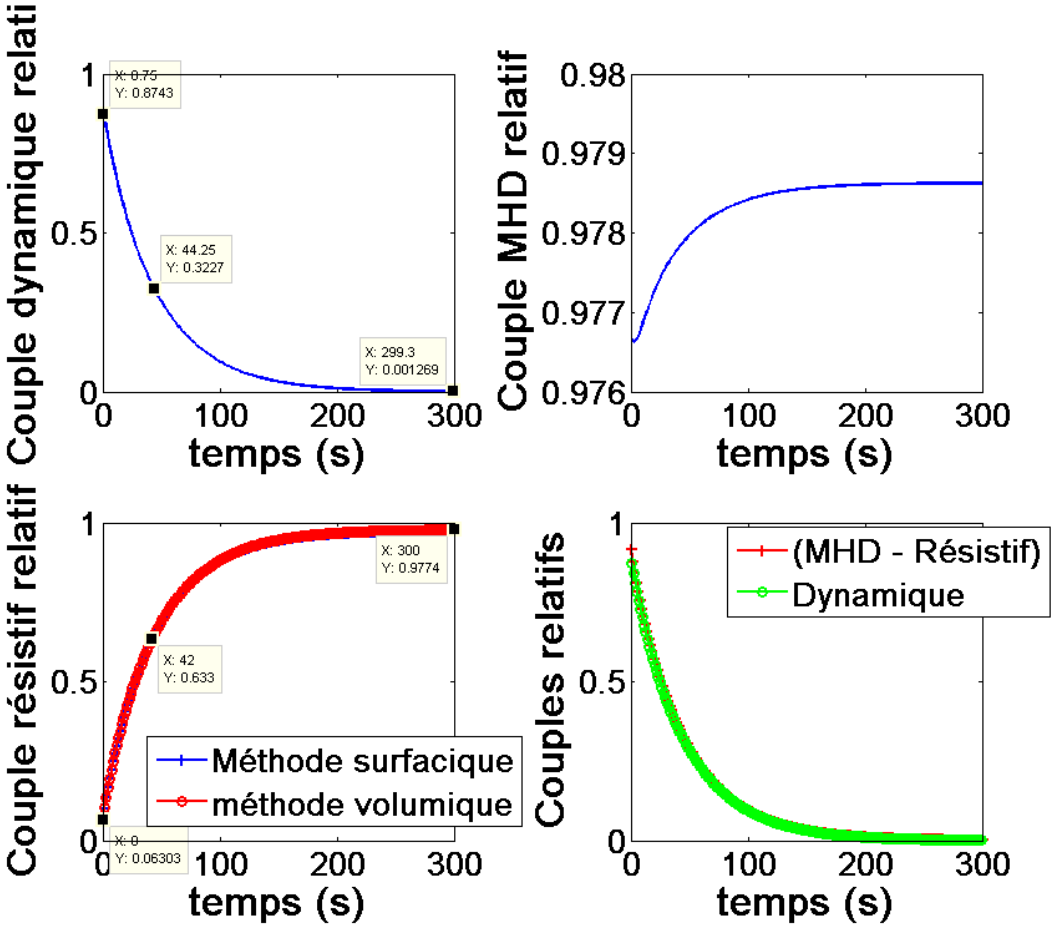


Fig. 105 Evolutions des couples en jeu
$I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Observations :

La dynamique des couples dynamique et résistif correspond à celle de la vitesse moyenne et du moment cinétique. Initialement, le couple résistif étant nulle (vitesse initiale nulle), le couple moteur MHD est entièrement compensé par le couple dynamique (III.2.11). A l'état final, l'écoulement est établi et le couple résistif converge vers le couple MHD. Le couple MHD, qui de par l'expression de la force de Lorentz (III.1.8), à courant et champ magnétique imposés constants, peut être considéré constant tout au long du régime dynamique. C'est une différence importante à noter, comparativement au cas présenté précédemment où le champ électrique est imposé. Car pour ce dernier, le couple MHD et la force de Lorentz est initialement maximale, pour décroître vers la même valeur. Ceci explique entre autre une dynamique beaucoup plus rapide dans le cas où le champ électrique est imposé.

Le bilan en couple est bien respecté tout au long de l'établissement de la vitesse du fluide.

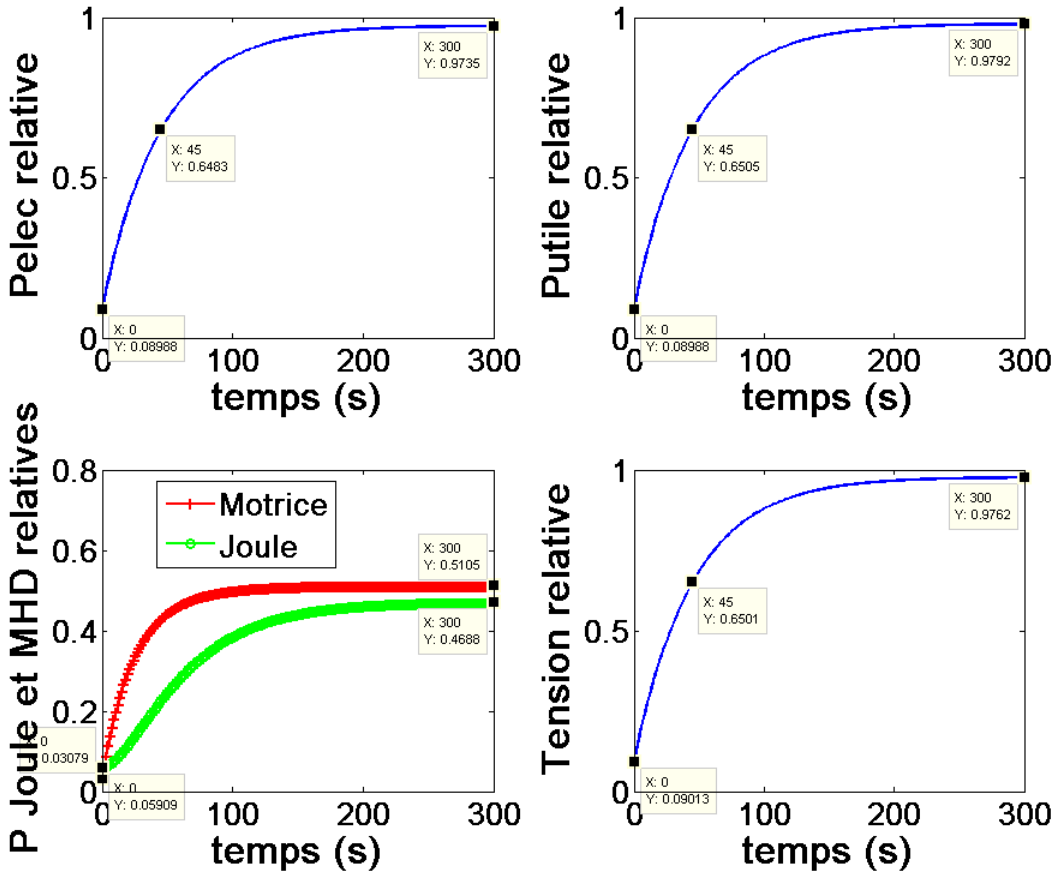


Fig. 106 Evolutions temporelles des puissances en jeu et de la différence de potentiel entre les électrodes
$I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Observations :

La dynamique des puissances, outre la puissance motrice et les pertes Joules, est de type exponentielle et équivalente à celle de la vitesse moyenne. Ainsi que pour la tension électrique. Cette dernière part d'une valeur initiale non nulle correspondant au terme $\frac{I_0}{\sigma}$ de la relation d'Ohm en MHD (III.1.7), à vitesse initiale nulle. Puis à courant et champ magnétique constants, la vitesse augmentant, la tension augmente aussi. Avec en conséquence la même dynamique que celle de la vitesse moyenne.

Les valeurs atteintes en régime permanent correspondent à celles présentées à partir de la solution de référence et le maillage {S3 + D4}, paragraphe (II.5).

3.2.2 Variation du champ électromagnétique en entrée

- **Variation du courant imposé I_0**

Voici quelques courbes de montée en vitesse lorsque le courant imposé varie :

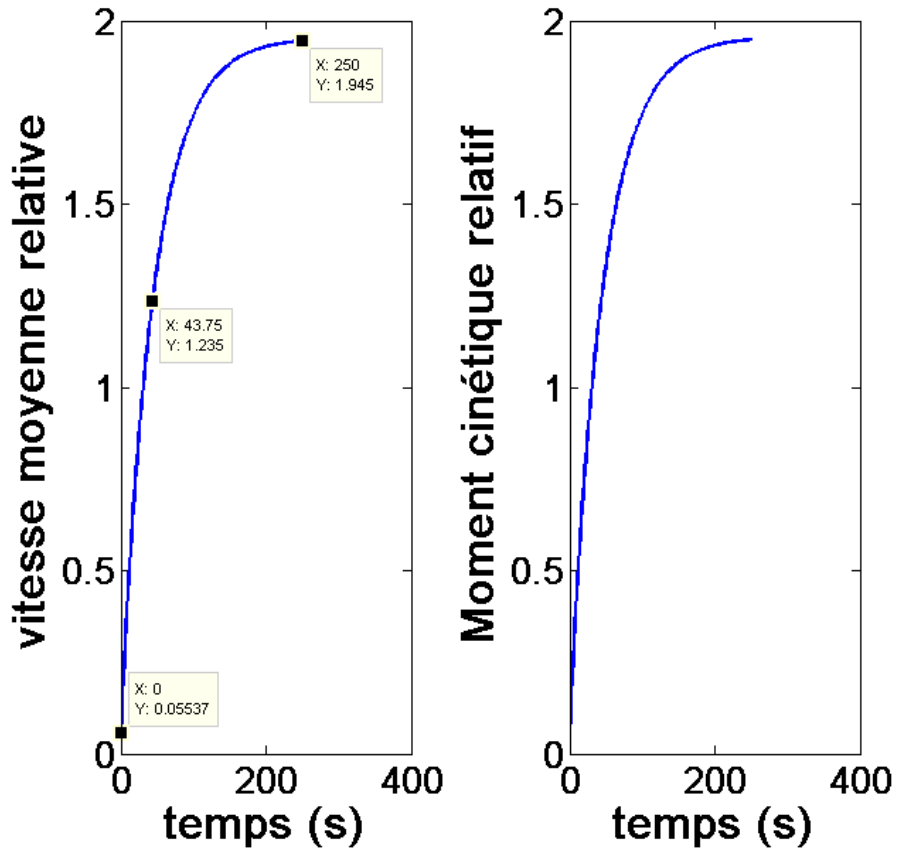


Fig. 107 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
$I_0 = 2$; $B_0 = 1$

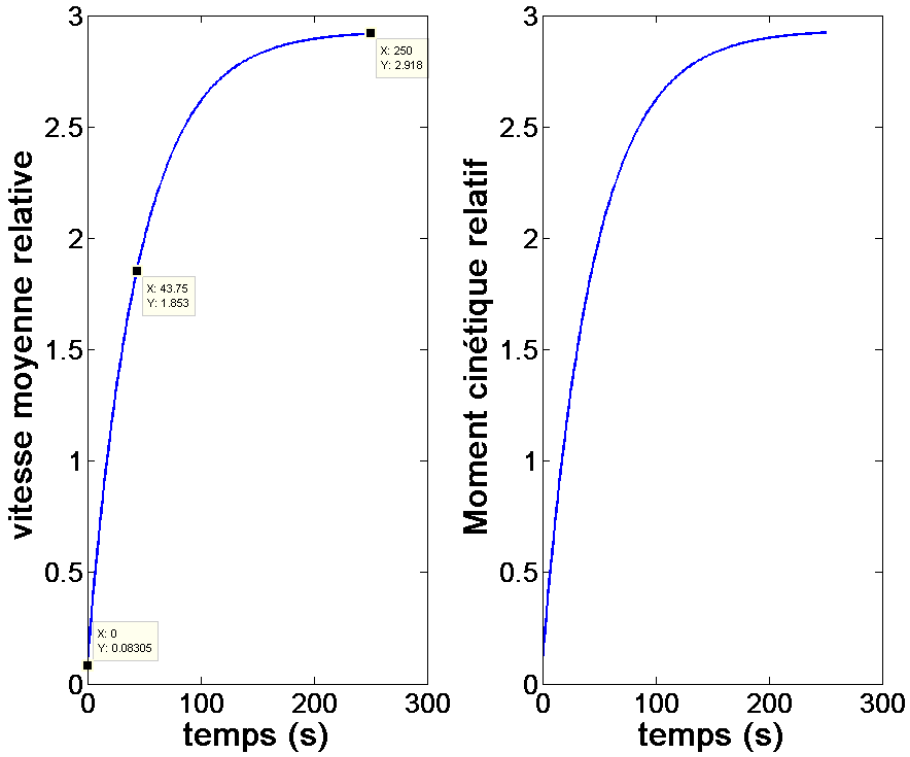


Fig. 108 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
$I_0 = 3$; $B_0 = 1$

Observations :

La dynamique de l'établissement de l'écoulement est inchangée, comparativement au cas où le courant est celui de référence. Il en sera donc de même pour les couples et puissances en jeu. En revanche, les valeurs des différentes grandeurs, initiales pour la tension électrique et le couple moteur (constant), et finales pour toutes, sont modifiées. En ce qui concerne leurs évolutions, voir le paragraphe (II.5).

- **Variation du champ magnétique B_0**

Voici différentes courbes de montée en vitesse lorsque le champ magnétique imposé radialement dans l'entrefer varie :

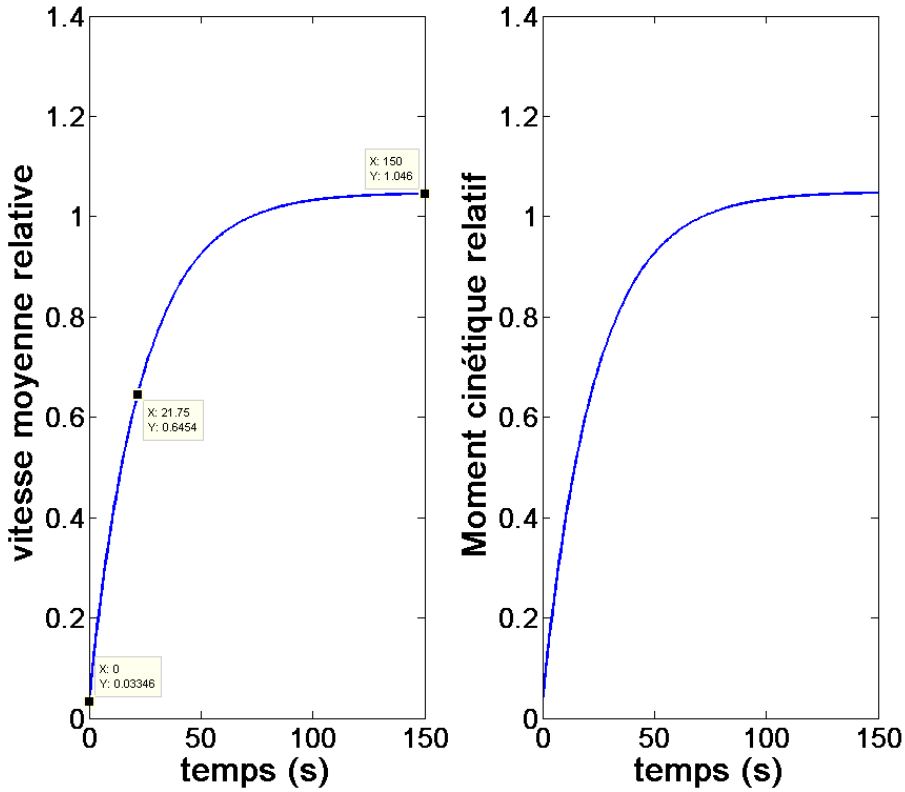


Fig. 109 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique $I_0 = 1$; $B_0 = 2$

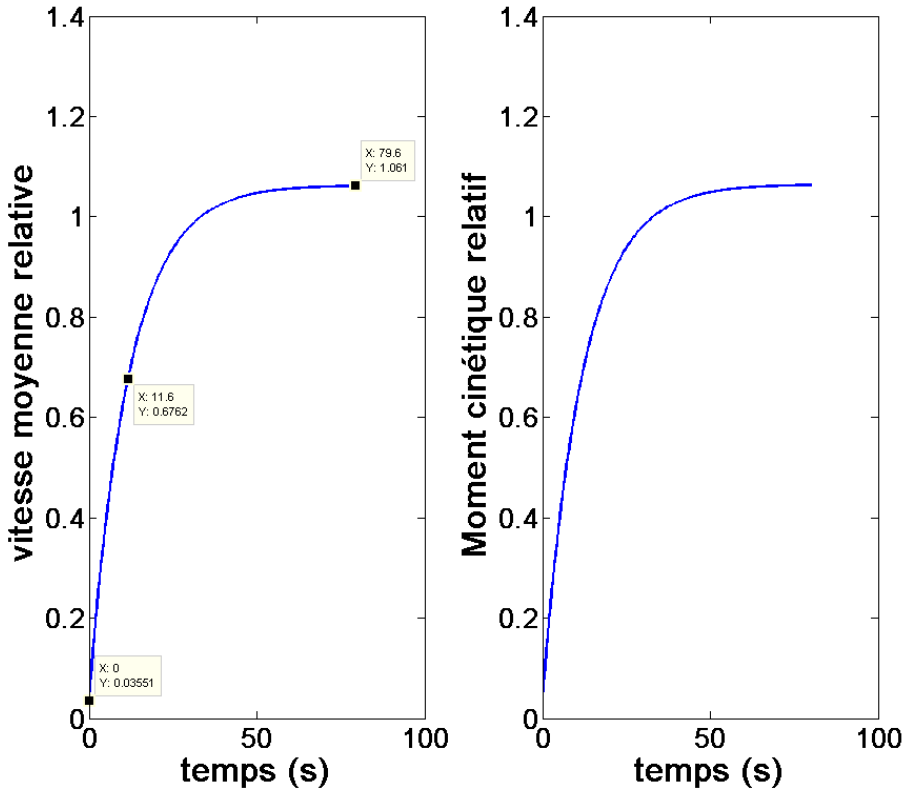


Fig. 110 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
$I_0 = 1$; $B_0 = 4$

Observations :

La dynamique de l'établissement de l'écoulement évolue en $\frac{1}{B_0}$, contrairement au cas où la tension était imposée où elle évoluait en $\frac{1}{B_0^2}$. Cette différence d'évolution de la dynamique entre ces deux cas d'étude peut s'expliquer à partir des expressions de la force de Lorentz et de la loi d'Ohm en MHD. En effet, de par le principe fondamental de la dynamique, plus la force MHD sera grande, plus l'accélération de la vitesse sera importante.

Or, dans le cas où la tension est imposée, le courant évolue temporellement selon la vitesse multipliée par le champ magnétique selon le terme $\sigma v B_0$. De fait, la force de Lorentz évolue temporellement en fonction de la vitesse multipliée par le carré du champ magnétique. Il ne s'agit pas ici de l'intensité de la force qui est étudiée, mais bien de la dynamique qu'elle impliquera sur l'établissement de l'écoulement selon la valeur du champ magnétique.

En revanche, dans le cas où le courant est imposé, la force MHD, constante, est proportionnelle au champ magnétique, simplement. De fait, une variation en champ magnétique sur le champ électromagnétique en entrée n'impactera que proportionnellement la rapidité de la dynamique, ce qui est observé sur les courbes ci-dessus.

Remarquons tout de même que le régime permanent atteint n'est pas modifié (cf. (II.5)).

Conclusion :

Lorsque le courant est modifié, la dynamique est inchangée, mais les intensités des différentes grandeurs le sont. En revanche, lorsque le champ magnétique radial est modifié, le régime permanent

est inchangé. Cf. (II.5) qui précise que cela dépend de la plage de valeurs du champ magnétique sur laquelle les résolutions ont été effectuées. Toutefois, la dynamique est accélérée, la constante de temps variant en $\frac{1}{B_0}$. Cette évolution est à différencier de celle observée lorsque la tension électrique est imposée.

3.2.3 Descente en vitesse, et variation du champ magnétique imposé.

Dans ce paragraphe, nous étudions la descente en vitesse, à partir du régime permanent atteint par l'imposition d'un champ électromagnétique (condition de vitesse initiale non nulle), jusqu'à la vitesse nulle. Pour ce faire, le courant est imposé à zéro, et le champ magnétique est conservé à son état précédent. Ce qui revient donc à ouvrir le circuit aux bornes des électrodes.

- **Descente en vitesse à partir du régime permanent (R.P.) $I_0 = 1$; $B_0 = 1$**

Le régime permanent pris pour condition initiale est celui atteint par la montée en vitesse lorsque $I_0 = 1$ et $B_0 = 1$. Pour la descente en vitesse, le courant est imposé à zéro au niveau des électrodes.

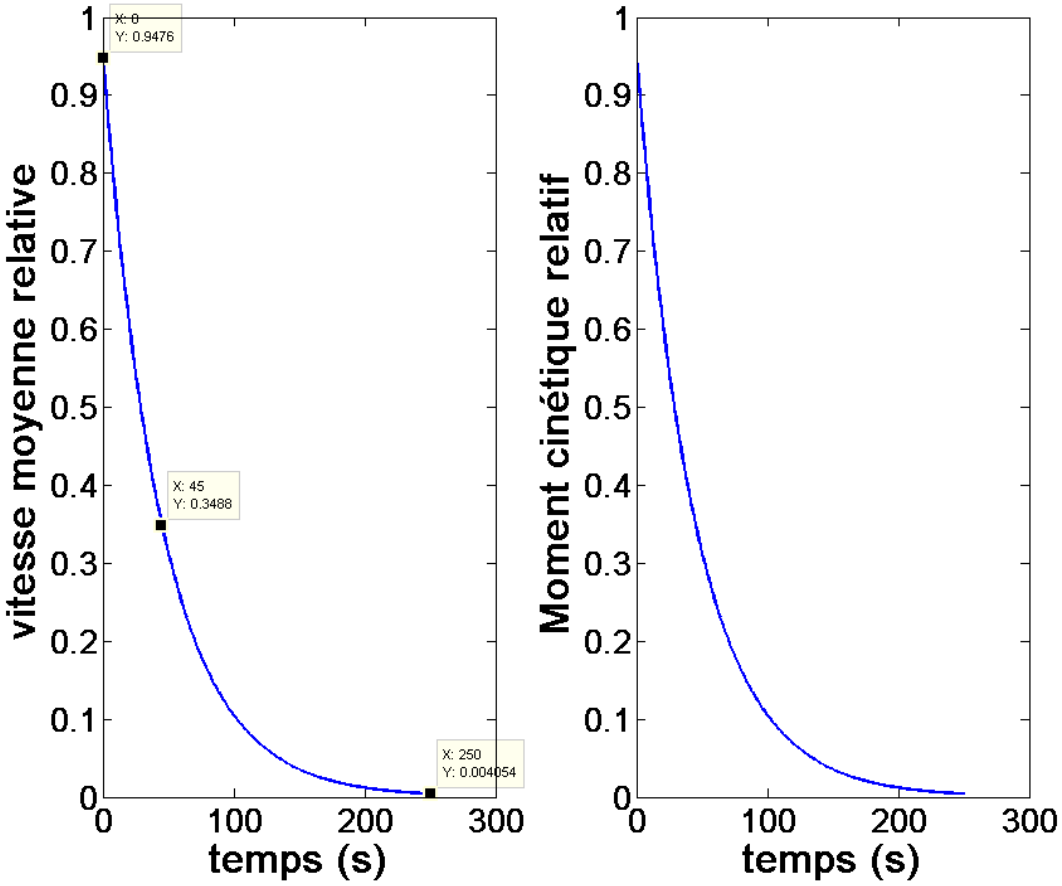


Fig. 111 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
R.P. $I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Observations :

La dynamique est la même que celle de la montée en vitesse (cf. Fig.(104)).

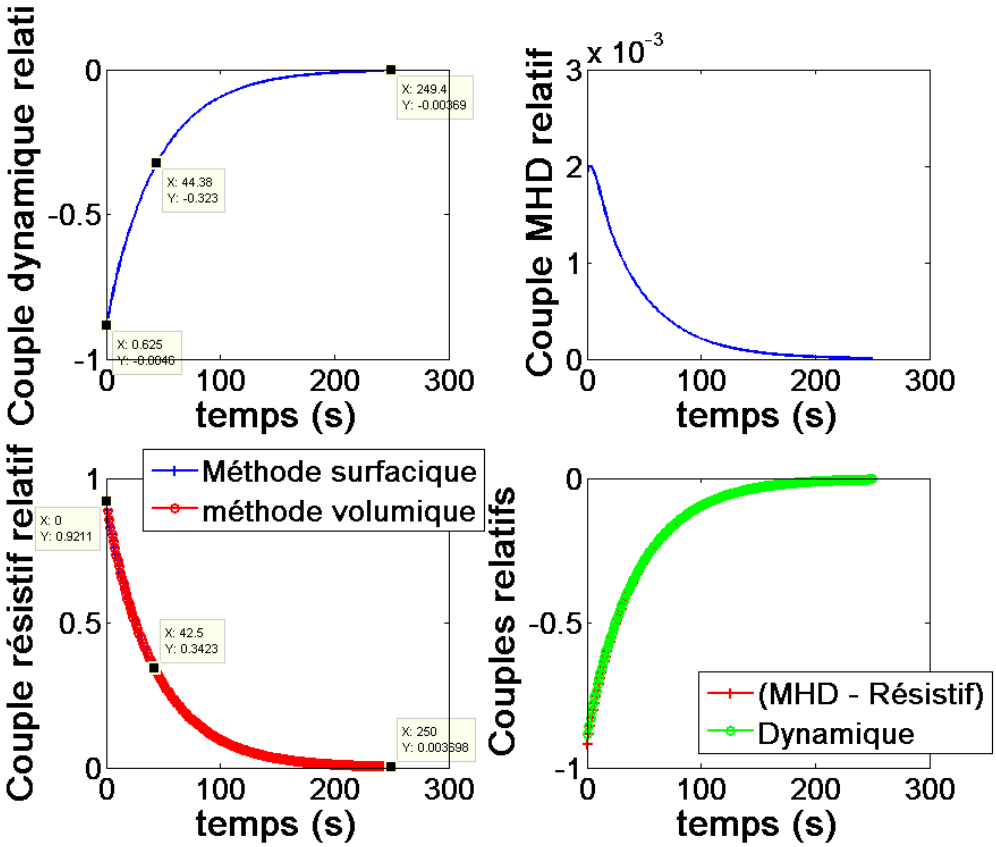


Fig. 112 Evolutions temporelles des couples en jeu
R.P. $I_0 = 1$; $B_0 = 1$

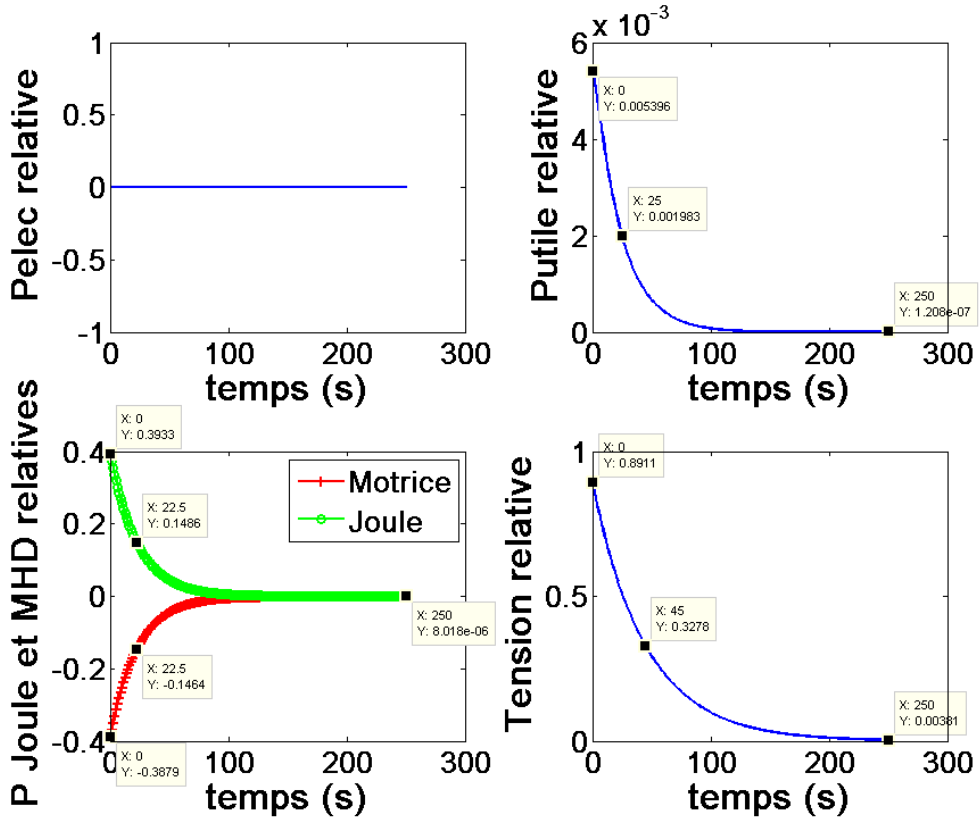


Fig. 113 Evolutions temporelles des puissances en jeu et de la différence de potentielle entre les électrodes
R.P. $I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Observations :

Les dynamiques des couples observés sont celles de la vitesse. Bien que la puissance électrique fournie soit nulle (courant nul aux électrodes), la puissance motrice, le couple MHD, et les pertes Joules ne sont pas nuls. En effet, le terme $\sigma v B_0$ dans la loi d'Ohm MHD n'est pas nul dans le canal, parois non comprises (III.1.7). Il y a donc apparition d'une densité de courant dans le canal, liée à l'existence de champ magnétique induit (expression de la densité de courant (II.1.36)). De surcroît, celle-ci a pour effet de produire une tension électrique aux bornes des électrodes (Fig. (113)), proportionnelle à la vitesse du fluide. Les courants générés au sein du fluide ont pour effet, localement, de freiner le liquide. Maintenir un champ magnétique imposé présente donc l'intérêt d'avoir une dynamique de décroissance en vitesse plus rapide, imposée par le champ B_0.

Théoriquement, les pertes Joules et la puissance motrice se compensent parfaitement. Pourtant, la résolution numérique présente une valeur, faible, pour la puissance utile.

Le couple dynamique est négatif, puisqu'il y a décroissance de la vitesse du fluide. En effet, à partir d'une valeur absolue maximale, il décroît pour tendre vers zéro.

De manière complémentaire est présenté le potentiel vecteur électrique dans le canal, au temps final de la simulation (250s ici).

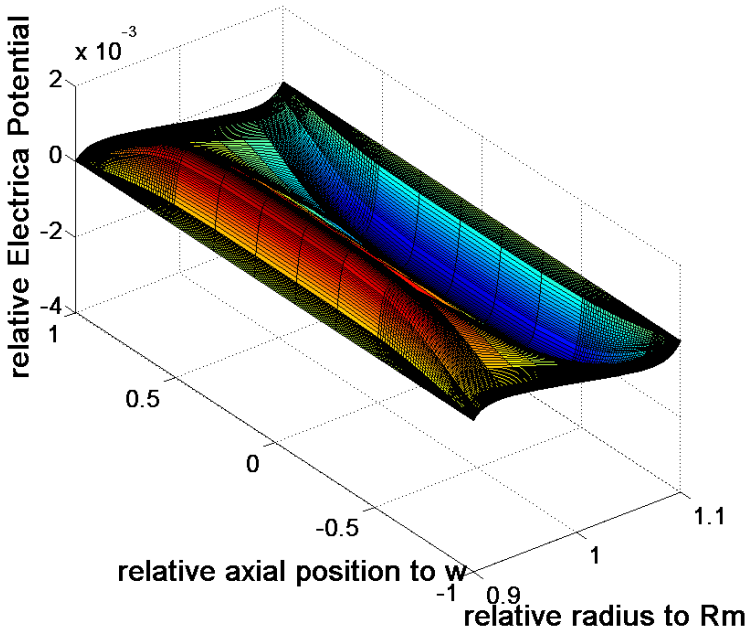


Fig. 114 Profil du potentiel vecteur électrique à tf=250s
R.P. $I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Et le contour des lignes d'équipotentiels du champ *rT*.

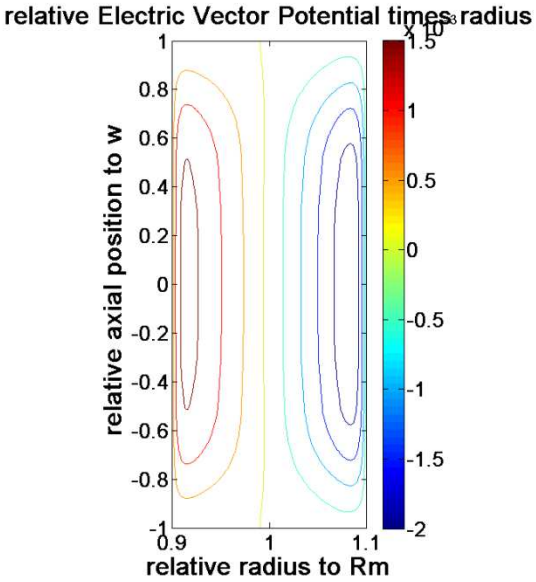


Fig. 115 Lignes d'équipotentiel du potentiel vecteur électrique multiplié par le rayon.
R.P. $I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Ces lignes d'équipotentiels justifient l'existence de l'établissement de boucles de densité de courant dans le canal, à l'origine de la puissance motrice, du couple MHD, et des pertes Joules existants.

- **Descentes en vitesse à partir des régimes permanents $I_0 = 1$; $B_0 = 2$ *ou* 4**

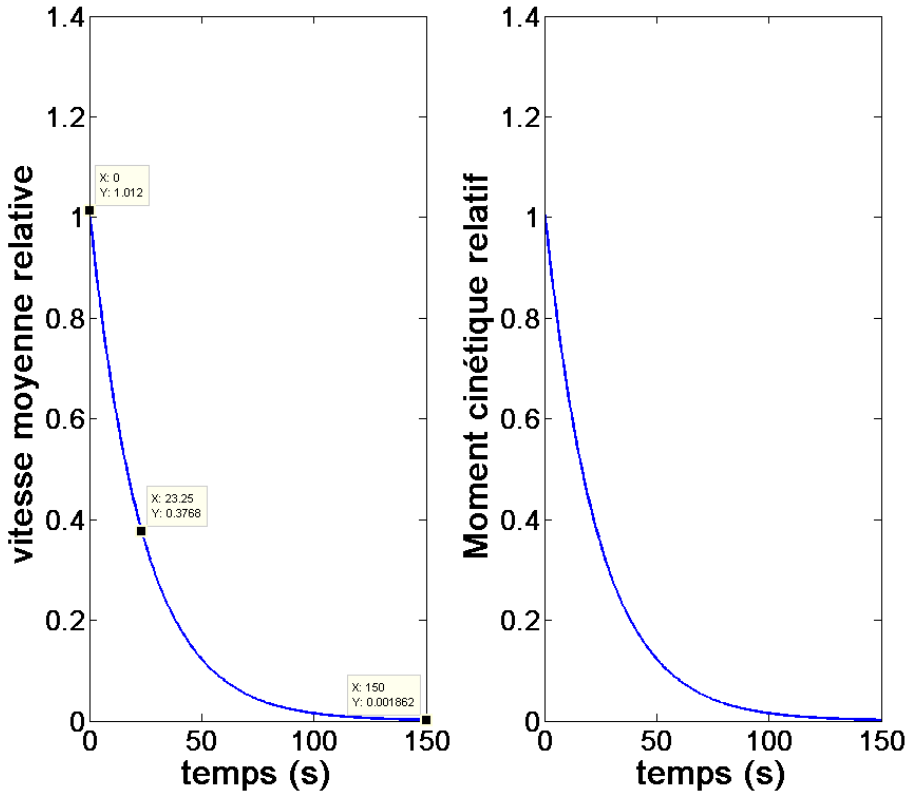


Fig. 116 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
R.P. $I_0 = 1$; $B_0 = 2$

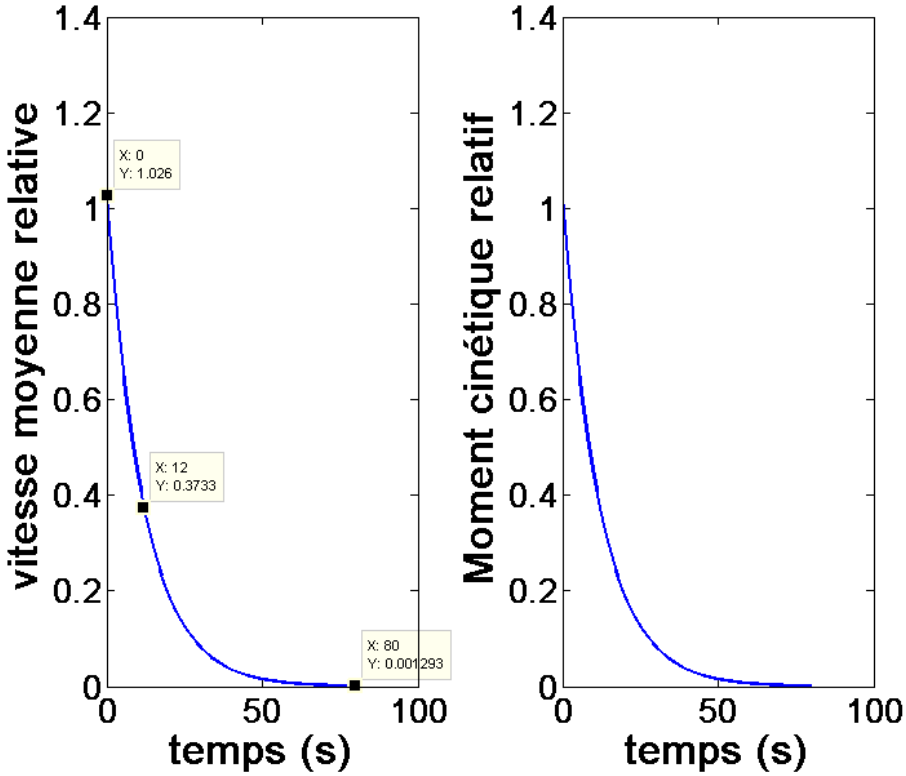


Fig. 117 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
R.P. $I_0 = 1$; $B_0 = 4$

Les dynamiques des décroissances en vitesse sont dans les deux cas les mêmes que lors des montées en vitesse (Fig. 109 et 110). Elles dépendent du champ magnétique imposé et les constantes de temps évoluent en $\frac{1}{B_0}$. Encore une fois, sur cette plage de champ magnétique (cf. (II.5)).

Remarque :

Ce test de décroissance de la vitesse n'a pas été réalisé à partir du modèle *B-φ*, car imposé une tension nulle impliquerait la réalisation d'un court-circuit sur l'alimentation. Autrement, il faudrait réfléchir à une alimentation réversible capable d'absorber le courant lors d'un freinage de type actif, sous une tension qu'elle imposerait, variable ou fixe.

3.3 Comparaison des dynamiques – utilisation du Gallium

Dans ce paragraphe, nous traitons rapidement le cas où le fluide utilisé est le gallium. Rapidement car il s'agit simplement de vérifier que les constantes de temps varient avec les caractéristiques du fluide, et à quelle hauteur. Aussi, seules les évolutions du moment cinétique et de la vitesse moyenne seront présentées, pour l'application du champ électromagnétique de référence, tension ou courant imposé.

- **Cas où la tension aux bornes des électrodes est imposée.**

Voici les évolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique lorsqu'un champ électromagnétique $E_0 = 1$ *et* $B_0 = 1$ est imposé en entrée, à partir d'une vitesse initiale nulle.

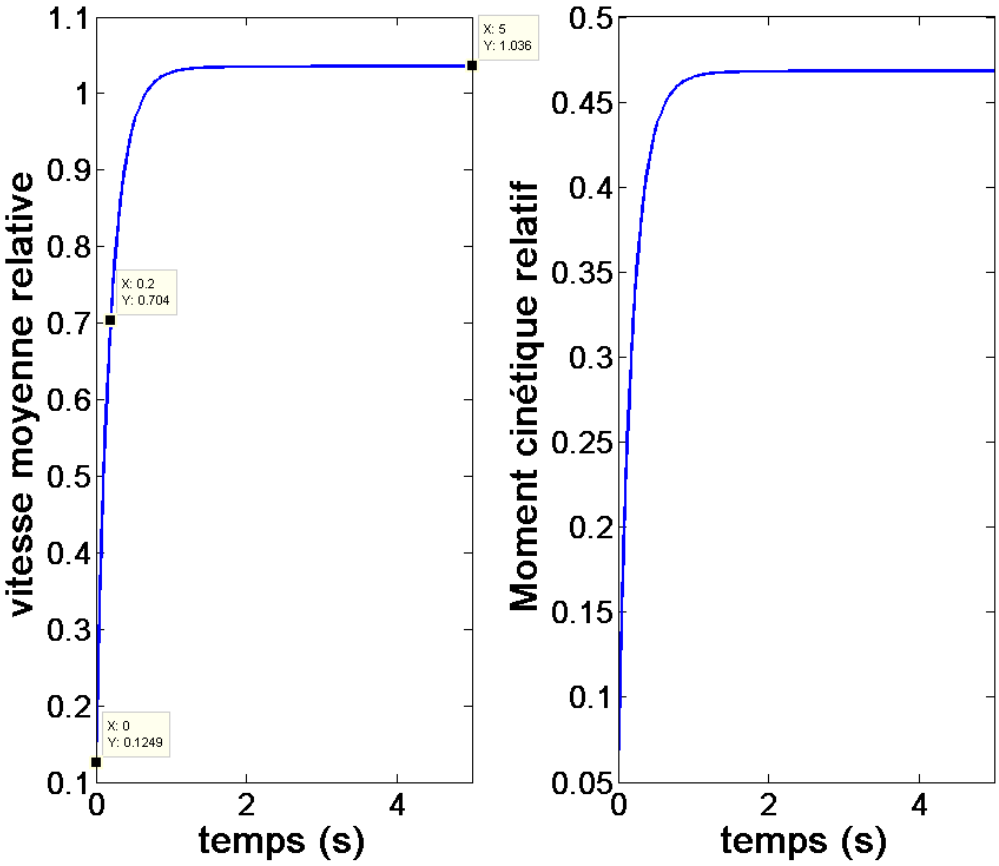


Fig. 118 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique
Gallium - $E_0 = 1$; $B_0 = 1$

Observations :

La dynamique est beaucoup plus rapide lorsque le Gallium est utilisé, à tension et champ magnétique constants.

$$\tau_{Hg} = 2.6s$$
$$\tau_{Ga} = 0.2s$$

Soit une dynamique plus de dix fois supérieure dans le cas du Gallium, comparativement au Mercure. Reprenons l'expression exhaustive de la constante de temps (III.3.1), qui peut s'écrire,

$$\tau(t) = \frac{1}{\frac{\upsilon}{r^2}.(1+H_a^2) - \frac{\upsilon \Delta v_\theta(r,z,t)}{v_\theta(r,z,t)}} \qquad \text{(III.3.4)}$$

Donnons la valeur du nombre de Hartmann dans les deux cas.

$$Ha_{Hg} = 18.2 \;\; ; \;\; Ha_{Hg}^2 = 331$$
$$Ha_{Ga} = 39.6 \;\; ; \;\; Ha_{Ga}^2 = 1568$$

Rappelons l'expression du nombre de Hartmann (I.4.16),

$$Ha^2 \equiv \frac{j.B}{\mu.\Delta v} \equiv \frac{\sigma B^2 L^2}{\mu}$$

Avec,

$$\mu_{Ga} = 0.0021\ Pa.s \ \ ; \ \ \sigma_{Ga} = 6.78.10^{6}\ S.m^{-1} \ \ ; \ \ \upsilon_{Ga} = 3.48.10^{-7}\ m^2.s^{-1}$$
$$\mu_{Hg} = 0.0015\ Pa.s \ \ ; \ \ \sigma_{Hg} = 1.044.10^{6}\ S.m^{-1} \ \ ; \ \ \upsilon_{Hg} = 1.14.10^{-7}\ m^2.s^{-1}$$

Et donc, à partir de (III.3.4), le rapport entre les deux constantes de temps peut s'approcher par :

$$\frac{\tau_{Ga}}{\tau_{Hg}} \simeq \frac{\upsilon_{Hg}.Ha_{Hg}^2}{\upsilon_{Ga}.Ha_{Ga}^2} = 0.069$$

Et à partir des simulations et des résultats trouvés sur les courbes ci-dessus, le rapport numérique entre ces deux constantes de temps vaut approximativement,

$$\frac{\tau_{Ga}}{\tau_{Hg_{num}}} = 0.077$$

Soit une erreur de l'ordre de 11.5%. Une certaine cohérence a donc été retrouvée. Et une constante de temps pour le Gallium bien plus de 10 fois plus petite que celle pour le Mercure.

Enfin, le nombre de Hartmann étant relativement élevé (>>1) dans chacun des cas, l'étude du paragraphe (II.5) a permis de montrer que le régime permanent atteint par la vitesse moyenne est proportionnel au rapport E_0/B_0, ce qui se vérifie bien ici.

- **Cas où le courant aux électrodes est imposé.**

Voici les évolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique lorsqu'un champ électromagnétique $I_0 = 1\ et\ B_0 = 1$ est imposé en entrée, à partir d'une vitesse initiale nulle.

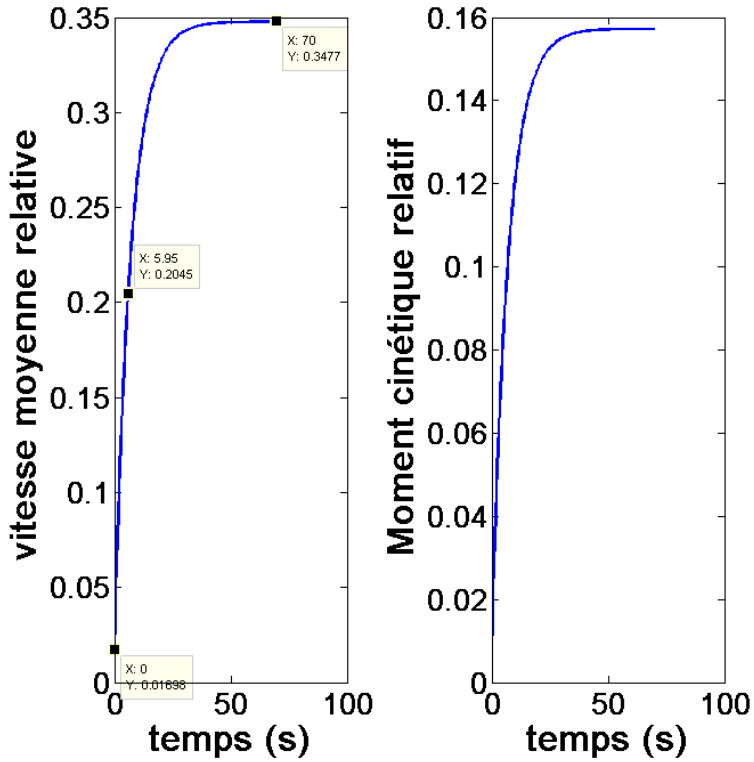


Fig. 119 Evolutions temporelles de la vitesse moyenne et du moment cinétique Gallium - $I_0 = 1$; $B_0 = 1$

Observations :

La dynamique est ici presque 10 fois plus rapide que lorsque le Mercure était utilisé. Avec,

$$\tau_{Hg} = 43.5s$$
$$\tau_{Ga} = 5.95s$$

Néanmoins, la valeur de la vitesse atteinte en régime permanent est environ d'un tiers de celle atteinte dans le cas du Mercure. Cela est dû au fait que la valeur de courant imposée a été calculée en fonction de la conductivité du mercure. Celle du gallium étant supérieure, le courant doit être augmenté afin d'augmenter la tension et donc le régime permanent atteint (II.5.1). L'expression exhaustive de la constante de temps dans le cas du modèle à partir du potentiel vecteur électrique est rappelée ici,

$$\tau(t) = \frac{1}{\frac{1}{r^2}.\upsilon - \upsilon\frac{\Delta v_\theta(r,z,t)}{v_\theta(r,z,t)}}$$

Nous avions remarqué, par les différents essais, que lorsque le champ magnétique imposé variait, la dynamique de la vitesse moyenne variait en $1/B_0$, dans le cas où le courant est imposé. Contrairement au cas où la tension est imposée, cas pour lequel la constante de temps varie en $1/B_0^2$. D'après l'étude menée ci-dessus, dans le cas où la tension est imposée, cette constante peut s'approcher par :

$$\tau(t) = \frac{1}{\frac{\upsilon}{r^2}.Ha^2}$$

Supposons donc que dans le cas où le courant est imposé, la constante de temps puisse s'approcher par,

$$\tau(t) = \frac{1}{\frac{\upsilon}{r^2}.Ha}$$

Ce qui rejoint en fait l'étude physique faite sur la figure (Fig. 104) et la dynamique imposée sur l'écoulement par la force de Lorentz en fonction de la variation du champ B_0, selon que le courant ou la tension est imposé.

Dès lors, le rapport entre les deux constantes pour le gallium et le mercure peut s'approcher par,

$$\frac{\tau_{Ga}}{\tau_{Hg}} \simeq \frac{\upsilon_{Hg}.Ha_{Hg}}{\upsilon_{Ga}.Ha_{Ga}} = 0.15$$

Ce qui correspond à une erreur relative absolue de 8% du rapport trouvé numériquement vis-à-vis de ce rapport approché,

$$\frac{\tau_{Ga}}{\tau_{Hg_{num}}} = 0.14$$

Cela semble donc correspondre et concorder à l'approximation théorique de la constante de temps. Bien que cela mériterait d'autres essais pour le confirmer.

Conclusion Chapitre 3 :

Les deux approches dynamiques ont été formulées, sous l'hypothèse d'une considération quasi-statique des équations de l'électromagnétisme. En effet, il est considéré que l'ensemble des grandeurs électromagnétiques, telles la répartition des charges dans le fluide, ou le champ magnétique induit, s'établit beaucoup plus rapidement que les grandeurs mécaniques représentées par la vitesse du fluide.

Ces formulations ont été appliquées dans le cadre de considérations 2D axisymétriques. Les systèmes d'équations ainsi obtenus ont permis une résolution du problème étudié à partir d'une méthode en Différences Finies, implicite temporellement. Cette méthode n'est pas la plus précise mais est suffisante ici pour approcher la dynamique de l'établissement de l'écoulement du fluide. Si tant est qu'il ne soit pas désiré une précision très grande sur les valeurs atteintes en régime permanent.

En ce qui concerne la montée en vitesse du fluide, celle-ci ne dépend pas de la valeur du courant ou du potentiel électrique imposé aux électrodes. Cette valeur modifie uniquement la valeur de la vitesse obtenue ou des autres grandeurs. Seule la valeur du champ magnétique permet une variation de la dynamique de l'écoulement, qui est d'autant plus rapide que le champ magnétique imposé est grand.

En revanche, la dynamique diffère fortement, selon que c'est le potentiel électrique ou le courant qui est imposé au niveau des électrodes. Le rapprochement a ainsi été fait avec les deux expressions des équations de Navier-Stokes utilisées, et différentes selon la formulation employée. D'ailleurs, des expressions exhaustives des constantes de temps ont été formulées.

La dynamique a également été observée dans le cas d'une décroissance en vitesse, à partir d'un régime en vitesse préétabli. Pour ce faire, le courant a été imposé nul au niveau des électrodes, ce qui correspond à un circuit ouvert. La formulation en *B-T* a donc été employée. En effet, il n'est pas possible de connaître le potentiel électrique à imposer. Et un potentiel nul serait équivalent à un court-circuit, ce qui n'est pas réalisable pratiquement. La dynamique de la décroissance évoluait bien en fonction de la valeur du champ magnétique.

A noter qu'un test sans champ magnétique aurait pu être réalisé (ce qui a en réalité été fait), mais la dynamique s'en retrouve fortement diminuée (lente). Puisque la présence d'un champ magnétique, qui implique l'existence d'une tension électrique aux bornes des électrodes et de courants internes dans le fluide, et des électrodes joue en vérité le rôle de frein MHD sur le fluide (fonctionnement en générateur).

Enfin, la dynamique a été observée dans le cas où le Gallium est utilisé à la place du Mercure (sa masse volumique est néanmoins plus faible, ce qui impactera le moment cinétique fourni par l'actionneur en régime permanent, ainsi que le couple de réaction). Celui-ci étant plus visqueux et meilleur conducteur, cela a pour effet d'augmenter le nombre de Hartmann. Le couple résistif sera donc certainement augmenté. Aussi, lorsque le courant est imposé, ce dernier doit être augmenté afin d'obtenir un régime permanent équivalent par rapport au cas du Mercure.

Cependant, si l'ensemble de cette étude permettra par la suite d'élaborer une commande, en couple de réaction par exemple, de l'actionneur, pour le pilotage du satellite, ces résultats restent purement numériques. Il serait donc bon de pouvoir y ajouter quelques résultats expérimentaux, validant, ou non, l'établissement du modèle 2D axisymétrique dynamique et les hypothèses considérées. Ceci fait l'objet de la section suivante.

Références

[1] – C. A. J. Fletcher, « Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Funadamental and General Techniques », *Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998).*

[2] – J. H. Ferziger, M. Peric, "Computational Methods for Fluid Dynamics", *3rd Edition*, *Springer (2001).*

[3] – H. P. Langtangen, K-A. Mardal et R. Winther, "Numerical Methods for Incompressible Viscous Flow", *Advances in Water Resources,* University of Oslo (2002).

[4] – E. Saatdjian, "Phénomènes de Transport et Leurs Résolutions Numériques", *Polytechnica – 1993.*

IV. Maquette MHD à Conduction – Mesures Expérimentales Dynamiques

Après avoir étudié numériquement la dynamique de l'établissement de l'écoulement MHD, ce chapitre porte sur la réalisation d'une maquette expérimentale permettant de réaliser des mesures de cette même dynamique, en vue de comparer et valider, ou non, les résultats obtenus par la modélisation numérique présentée au chapitre précédent. Pour ce faire, un prototype de roue inertielle MHD à conduction a été conçu.

1. Présentation du Banc Expérimental

1.1 La Maquette et son Prototype

La maquette présentée sur la photo (Fig. 120) présente le prototype d'actionneur MHD à Conduction, ainsi qu'une alimentation à courant continu. Précisons qu'il n'est pas présenté sur cette image l'appareil de mesure permettant de mesurer une différence de potentiel. Néanmoins, l'essentiel réside dans la présentation du prototype réalisé et de la méthode de mesure de la vitesse du fluide.

Le prototype est placé sur un support autorisant la rotation éventuelle de l'actionneur sur lui-même, en exerçant que très peu de résistance. Le prototype est néanmoins relié par les câbles d'alimentation de la source de courant, par le dessus.

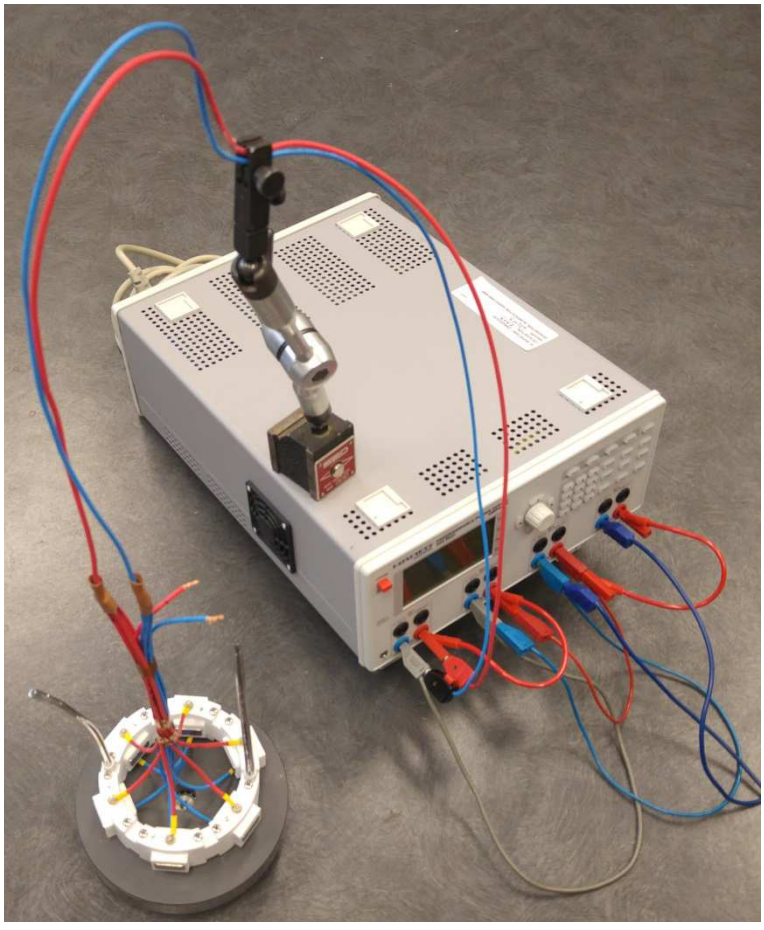


Fig. 120 Maquette expérimentale - dynamique d'un actionneur MHD à conduction

Le prototype réalisé est présenté sur la photo ci-dessous (Fig. 121). Il s'agit d'un actionneur inertiel MHD à Conduction, réalisé à partir d'une impression 3D. Il est constitué d'un canal torique en polyamide autour duquel sont fixées six paires d'aimants, de type NdFeB, sur les parois internes et

externes du canal, et six paires d'électrodes situées au-dessus et en-dessous du canal, qui constituent donc un ensemble de six pompes MHD à Conduction réparties régulièrement tout au long du canal.

Ainsi, les aimants imposent un champ magnétique constant mais non purement radial, et les électrodes, alimentées par une source en courant, imposent un courant axial dans le canal. Cette configuration de champ correspond donc à celle étudiée tout au long de ce mémoire de thèse, si ce n'est le caractère non radial de l'aimantation des aimants. Une force de Laplace est néanmoins créée orthoradialement.

Le fluide utilisé pour l'actionnement est le gallium, qui a été inséré au moyen des deux « tuyaux » gris métal visibles sur la photo.

Pour la mise en mouvement du fluide, cinq des six pompes sont alimentées, par les câbles d'alimentation. La sixième et dernière pompe, non alimentée, et dont les câbles à nu reliés aux électrodes peuvent ici être observés, permet de mesurer la vitesse du fluide. Elle fonctionne donc en mode générateur, de tension ici. Pour mesurer la différence de potentiel, un appareil de mesure de tension/courant très précis (KEYSIGHT 34461A, précision ~10µV) y est connecté.

En effet, lorsque le fluide présente une vitesse, la loi d'Ohm en MHD (III.1.7) nous montre qu'une tension proportionnelle à la vitesse du fluide (et au champ magnétique imposé) apparaît, le courant étant nul aux électrodes (équivalent circuit ouvert, impédance élevée de l'appareil de mesure (>MΩ)).

Ainsi, la différence de potentiel électrique qui apparaît entre les électrodes s'exprime par $(v.B)_{moy}.2w$. Néanmoins, le fonctionnement en générateur de tension du capteur (sur circuit ouvert) nécessite un étalonnage, qui n'a pas été réalisé à ce jour. De fait, nous présenterons les résultats de l'évolution temporelle en tension du capteur en valeurs relatives. Seule la dynamique pourra donc être comparée à celle fournie par la modélisation 2D et sa résolution numérique.

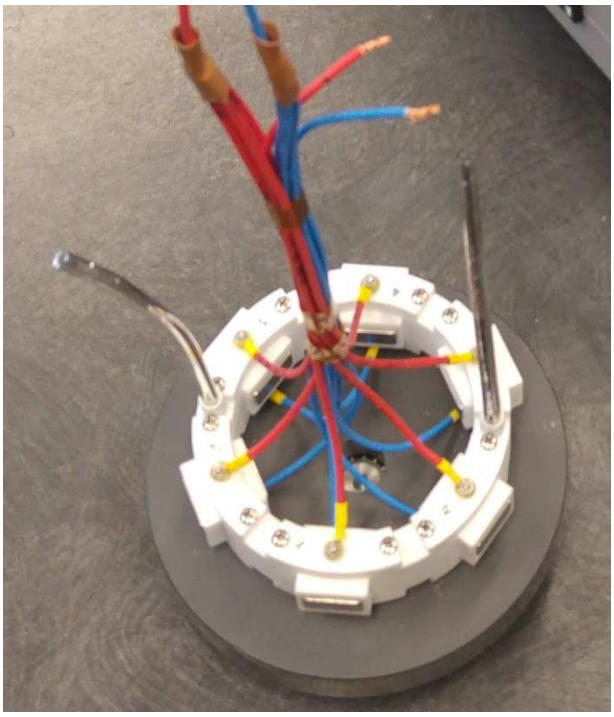


Fig. 121 Image représentant le prototype réalisé d'un actionneur inertiel MHD à Conduction

Lorsque les électrodes des cinq pompes motrices sont alimentées en courant, le fluide se met en mouvement de manière dynamique. Un couple de réaction est ainsi créé sur l'axe de l'actionneur et nous pouvons observer une rotation du prototype sur lui-même. Cette rotation est néanmoins limitée par la présence des câbles d'alimentation qui créent un couple de torsion sur l'axe. Ce couple de réaction s'annule lorsque la vitesse du fluide atteint son régime permanent. Alors, l'actionneur retourne à sa position initiale (couple de torsion des câbles d'alimentation).

Les dimensions du prototype sont les suivantes :

- Un rayon moyen de 48 mm
- Un entrefer magnétique de 12.7 mm
- La profondeur interne du canal torique est de 10.7 mm (épaisseurs des parois de 1 mm), et sa hauteur de 21.36 mm.
- Les aimants sont de dimensions 9 x 19 x 4 mm^3 (hauteur x largeur x profondeur)

1.2 Conditions Expérimentales – Adaptations à la Simulation Numérique

Il convient ici de préciser quels éléments des conditions expérimentales amènent à reconsidérer notre modélisation, ou bien à prendre du recul sur la comparaison qui peut être faite entre les résultats expérimentaux et numériques.

Dans un premier temps, le champ produit par les aimants, dans le cadre de l'expérimentation, n'est pas purement radial. En effet, il est particulièrement problématique de concevoir des aimants de forme cylindrique et dont l'aimantation est purement radiale. De plus, le champ est produit par six paires d'aimants localisées le long des parois interne et externe du canal. C'est pourquoi, contrairement à la modélisation numérique, le champ imposé dans le fluide ne sera pas constant ni purement radial. Enfin, les aimants ne recouvrent pas toute la surface des parois considérées. Aussi, le prototype n'est pas constitué de parties ferromagnétiques qui permettraient, au détriment de la masse totale de l'actionneur, de canaliser les lignes de champ produites et de limiter les fuites.

Ainsi, une simulation numérique des lignes de champ magnétique, dans le contexte de l'expérience, a été réalisée sous le logiciel *JMAG*. Nous en présentons les résultats ici. Ceci afin d'avoir une représentation du champ magnétique dans le domaine d'étude plus proche de la réalité.

Tout d'abord, voici la géométrie d'une pompe MHD reproduite sous *JMAG*, une condition de symétrie cyclique existant d'une pompe à l'autre (invariance de la géométrie et des sources dans le repère cylindrique). La géométrie est donc représentée sur 60° de l'actionneur. Les électrodes ne sont pas considérées.

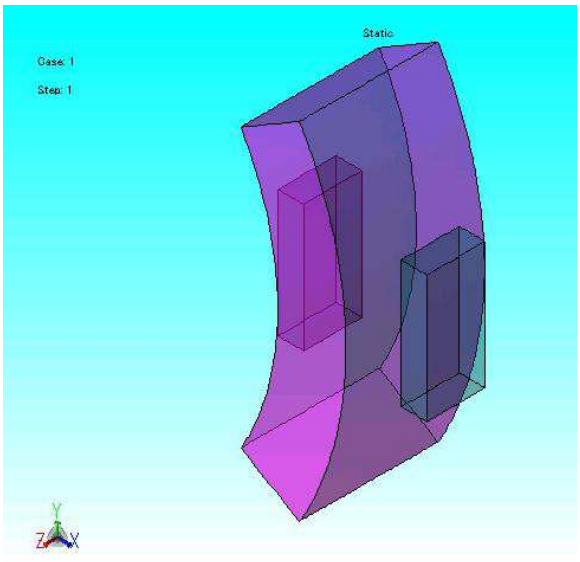


Fig. 122 Construction du domaine d'étude sous *JMAG* - Condition cyclique

Remarquons que, les deux aimants étant de mêmes dimensions, l'aimant externe recouvre un angle plus faible que celui interne. Le domaine considéré entre les deux aimants est celui du canal fluidique.

Les caractéristiques des aimants sont choisies de telles sorte que leur aimantation est de 1.12 Tesla, et que leur perméabilité magnétique relative est égale à 1.1.

Ensuite, afin de calculer les valeurs des composantes du champ magnétique dans le domaine d'étude, trois lignes sont tracées dans l'entrefer sur la position axiale nulle (au milieu des deux électrodes). L'une à rayon de 48 mm, correspondant au milieu de l'entrefer magnétique (rayon moyen), l'une à 45 mm plus proche de l'aimant interne, et l'autre à 51 mm plus près de l'aimant externe. Aussi, voici le maillage réalisé sous *JMAG* :

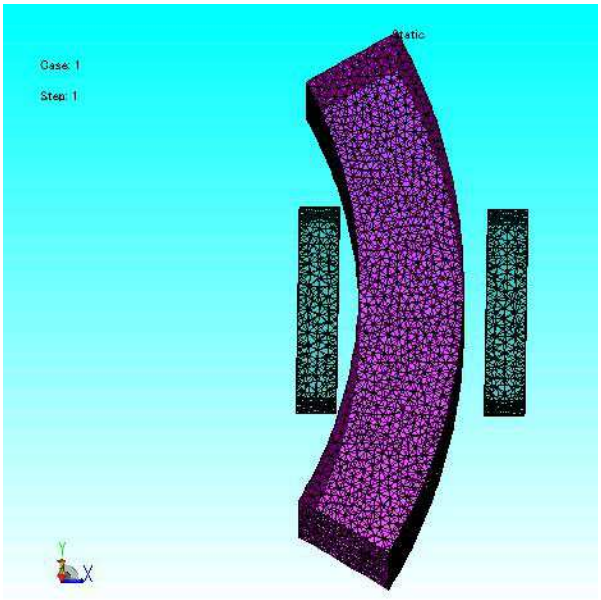


Fig. 123 Maillage du domaine d'étude sous *JMAG*

Enfin, après simulation, voici la représentation du champ magnétique dans le domaine d'étude :

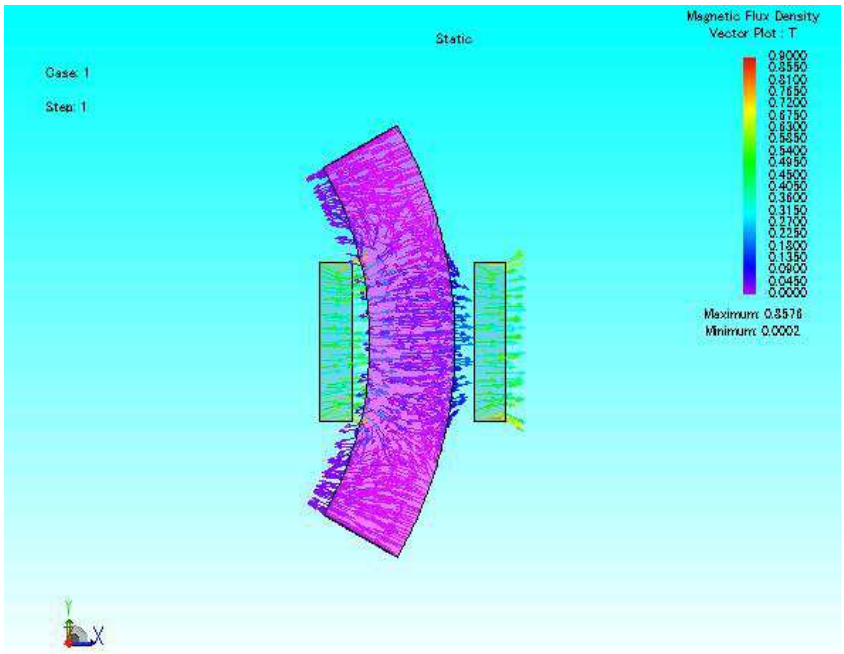


Fig. 124 Maillage du domaine d'étude sous *JMAG*

A première vue, nous pouvons constater que le champ magnétique n'est effectivement pas purement radial. Aussi, les boucles de lignes de champ se referment au travers du canal fluidique et font apparaître des valeurs de champ négatives (radialement) dans le fluide. Celles-ci pourraient créer des forces de Lorentz antagonistes à celles désirées pour la mise en mouvement du fluide. L'intensité du champ reste néanmoins maximale entre les deux aimants.

Pour compléter ces observations, voici les tracés des coordonnées radiale et tangentielle du champ magnétique sur les lignes d'entrefer explicitées plus haut :

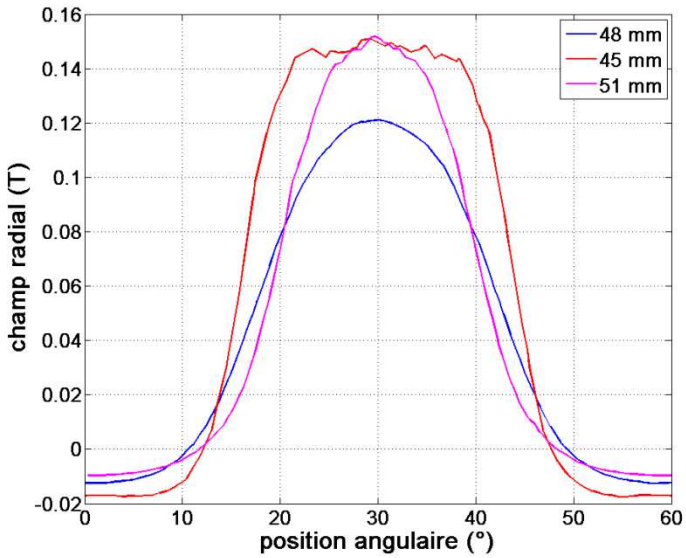


Fig. 125 Tracés de la coordonnée radiale du champ magnétique sur les trois lignes d'entrefer (r=45,48 et 51 mm et z=0)

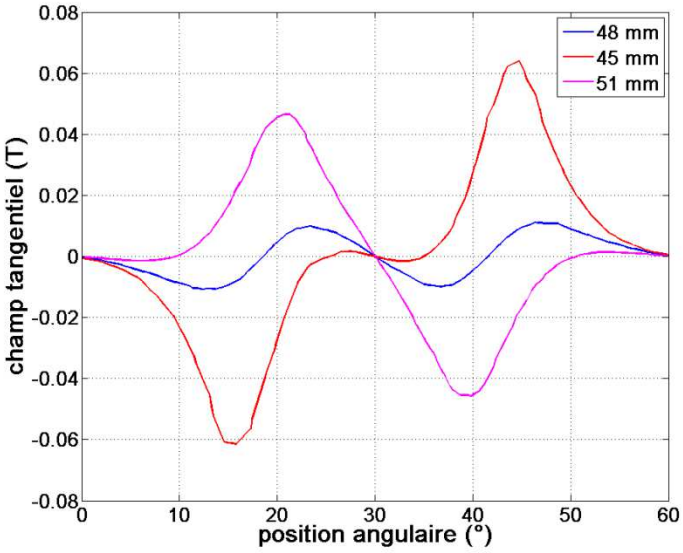


Fig. 126 Tracés de la coordonnée tangentielle du champ magnétique sur les trois lignes d'entrefer (r=45,48 et 51 mm et z=0)

Ces tracés montrent bien l'existence d'une coordonnée tangentielle du champ magnétique, afin de permettre le bouclage des lignes. Ceci est dû à l'absence de pièces ferromagnétiques permettant de canaliser les lignes de champ. Aussi, la coordonnée radiale du champ présente bien des valeurs négatives loin des aimants. Ainsi qu'un pic en intensité au milieu des aimants (à 30°). Le fait que l'aimant interne recouvre une largeur angulaire plus importante que celui externe se retrouve en comparant les courbes d'intensité du champ radial entre les lignes à 45mm et 51mm. En effet, la coordonnée radiale du champ magnétique atteint un maximum sur une largeur angulaire plus importante pour la ligne à 48mm, proche de l'aimant interne (Fig. 125). Aussi, l'intensité du champ radial est plus faible sur la ligne de milieu d'entrefer (à 48mm). En effet, les fuites et l'éloignement des aimants expliquent ce résultat, ainsi que l'absence de pièces ferromagnétiques.

Toutes ces informations montrent donc une opposition avec la considération faite lors de la modélisation 2D axisymétrique, qui considère un champ magnétique purement radial, évoluant en $\frac{1}{r}$, à partir d'un champ B_m imposé au milieu de l'entrefer et tout au long des parois interne et externe. De surcroît, l'existence d'une composante tangentielle du champ peut amener à l'apparition de forces de Lorentz locales axiales, créant des phénomènes convectifs sur le mouvement du fluide (dus à l'inversion du signe de la composante tangentielle du champ, cf. Fig. 126).

Remarquons aussi qu'il serait utile de déterminer avec *JMAG* l'évolution du champ magnétique axialement.

En second lieu, le courant imposé aux électrodes, réparti sur cinq paires d'électrodes (alimentées en parallèle), l'est donc très localement. Pour comparer les résultats expérimentaux à la modélisation numérique, le même courant global (courant par paires d'électrodes) sera imposé aux électrodes. Cependant, cela signifie que la modélisation considère une densité de courant répartie uniformément tout au long des surfaces supérieure et inférieure du canal et de fait beaucoup plus faible que celle de l'expérimentation, plus intense et locale. Pour autant, cela permet de respecter la condition essentielle

que d'un point de vue macroscopique, la force de Lorentz produite globalement dans le canal (I.2.5) sera équivalente dans les deux cas.

D'ailleurs, les électrodes constituant le prototype ne recouvre que 30°, en largeur angulaire, sur les 60° constituant un élément « pompe MHD ». Cette information essentielle permet de déterminer quelle valeur de champ magnétique imposer dans notre modèle 2D pour obtenir des résultats numériques « comparables ». En effet, nous avons vu à partir de la figure (Fig. 125), que le champ radial évolue avec la position angulaire et devient même négatif. Donc, afin de fixer une valeur pour notre modèle, le mieux semble d'intégrer l'intensité du champ suivant la position angulaire, afin d'en obtenir une moyenne sur l'ensemble du domaine d'étude. Cependant, étant donné que les électrodes ne recouvrent que 50% du domaine d'étude (30° de largeur angulaire, au milieu du domaine), seule cette partie du domaine sera le berceau des forces de Lorentz à l'origine de la mise en mouvement du fluide, par interaction entre le champ magnétique et le courant émis par les électrodes (III.1.8).

C'est pourquoi la valeur du champ magnétique radial imposée dans notre modèle est calculée à partir de l'intégration des tracés présentés (Fig. 125) sur les 30 degrés au milieu du domaine d'étude. Voici les résultats obtenus sur les différentes lignes d'entrefer :

$$B_{r_{moy}}(r = 48mm) = 0.088\ T$$
$$B_{r_{moy}}(r = 45mm) = 0.126\ T$$
$$B_{r_{moy}}(r = 51mm) = 0.098\ T$$

Par choix, étant donné l'intensité du champ plus faible au milieu de l'entrefer (au rayon moyen) comparée à celles obtenues sur les deux autres lignes d'entrefer, et compte tenu de la considération de la modélisation considérant une évolution de cette intensité linéaire et en $\frac{1}{r}$, nous imposerons, dans la résolution numérique à partir de la modélisation 2D axisymétrique, une valeur de champ au milieu de l'entrefer B_m égale à la valeur moyenne de ces moyennes, à savoir :

$$B_m = 0.104\ T$$

Dans notre modèle, nous considérons un champ purement radial, c'est pourquoi nous nous intéressons ici qu'à la composante radiale simulée sous *JMAG*.

L'ensemble de cette étude sert essentiellement le propos dans le sens où la correspondance entre la modélisation (et ses résultats numériques) et le prototype (et ses mesures), ne pourra être parfaite du faite des difficultés liées à la réalisation du prototypage, néanmoins surmontées par M. D. Harribey, Ingénieur Recherche au sein de l'équipe GREM3 du laboratoire, et du fait des hypothèses considérées pour la modélisation. La comparaison entre ces différents résultats fait l'objet du paragraphe suivant.

Toutefois, l'étude qui va suivre, et l'étude de cette thèse portant sur la modélisation 2D axisymétrique en Statique et Dynamique, sont tout autant d'éléments apportant des informations toutes nouvelles sur ce type d'actionneur inertiel MHD. Surtout en ce qui concerne la réalisation d'un prototype MHD à Conduction.

2. Comparaison Résultats Expérimentaux et Numériques

Sont donc présentés dans cette section les résultats expérimentaux et de simulations se rapportant à l'évolution temporelle de la vitesse moyenne du gallium dans le cadre de la maquette réalisée. Les

valeurs sont présentées en relatif. Le capteur (pompe MHD utilisée en fonctionnement générateur de tension) n'étant pas étalonné, la vitesse expérimentale ne peut être donnée. Ces résultats permettront de comparer la dynamique d'établissement de l'écoulement dans le canal.

La première courbe de mesure présente l'évolution temporelle de la tension mesurée, en relatif, pour un courant de 9A des cinq pompes motrices, connectées en parallèle, soit 1.8A par pompes.

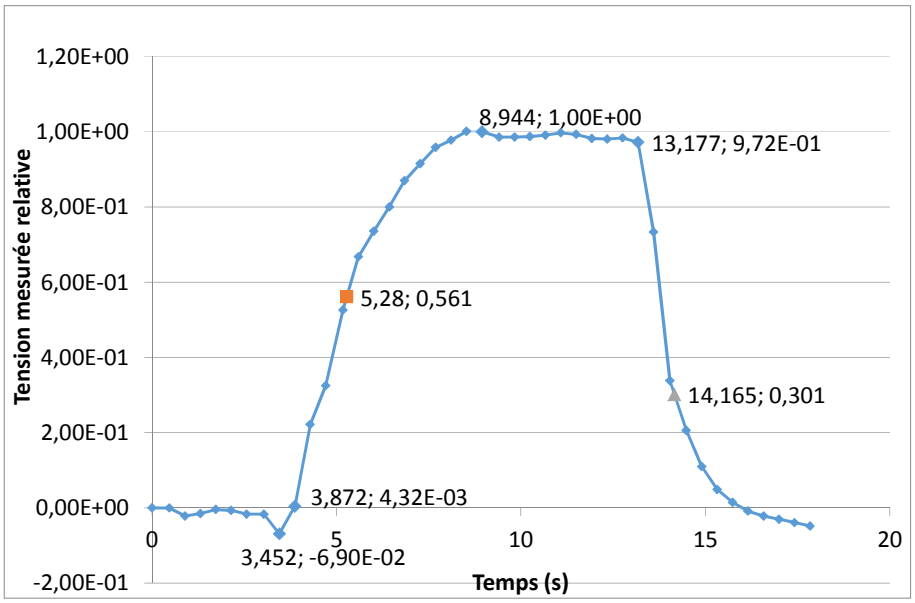


Fig. 127 Evolution temporelle de la tension mesurée, image de la vitesse moyenne - I=1.8A

Observations :

Nous nous devons ici de faire une remarque sans grand intérêt. En effet, nous pouvons constater que lors du démarrage de l'actionneur, environ au temps $t = 3.452s$, le premier point présente une valeur de tension relative négative. Or la vitesse étant initialement nécessairement nulle, ce point devrait présenter une tension supérieure aux points précédents, avant le démarrage de l'actionneur. Or ce n'est pas le cas pour les points aux temps strictement inférieurs à 3.452s. Nous pouvons supposer qu'il s'agit d'une tension de référence de l'appareil de mesure avant recalibrage automatique de l'appareil sur les tensions mesurées. D'ailleurs, après la montée en vitesse du fluide, lorsque l'alimentation de l'actionneur est coupée ($t \sim 13.18s$), la tension relative décroît et tend vers cette même valeur négative. La vitesse nulle correspond bien sur cette courbe à cette tension « négative ».

Concentrons-nous avec plus grande attention sur la forme de la courbe. Nous avons une mise sous tension des cinq pompes d'actionnement vers $t = 3.452\ s$ donc. De là, la montée en vitesse s'effectue avec un comportement de type exponentiel jusqu'au régime permanent atteint vers $t = 8.94\ s$. Cette observation correspond aux courbes de montée en vitesse exposées tout au long du paragraphe (III.3) et les résultats des simulations numériques.

Ensuite, aux alentours de $t = 13.17\ s$, l'alimentation de l'actionneur est coupée. Dès lors, nous observons une décroissance exponentielle également.

La constante de temps de la montée en vitesse est de l'ordre de 1.4-1.8s (en « visualisant » un point pour lequel la montée en vitesse commencerait réellement). Celle de la descente en vitesse est environ de 1s.

Ce résultat montre une différence avec ce qui était attendu à partir des résultats de la solution numérique dynamique, à savoir qu'ici, les dynamiques de la montée et de la descente en vitesse, sous un champ constant, semblent différentes. Toutefois, il est possible que cela soit dû à la précision des mesures ainsi qu'une mauvaise discrétisation temporelle des points relevés (pas assez de points relevés par unité de temps). Mauvaise précision possible notamment suite à l'observation faite sur cette première mesure au démarrage de l'actionneur pour laquelle la tension est négative, ce qui, à priori, n'a pas de sens avec la réalité physique du problème.

Alors, deux autres essais sont réalisés pour des courants différents. Un courant global de 18A soit 3.6A par paires d'électrodes. Et un dernier essai à 27A soit 5.4A par paires d'électrodes. Le champ magnétique produit par les aimants reste quant à lui nécessairement constant. Voici donc les deux courbes des mesures effectuées :

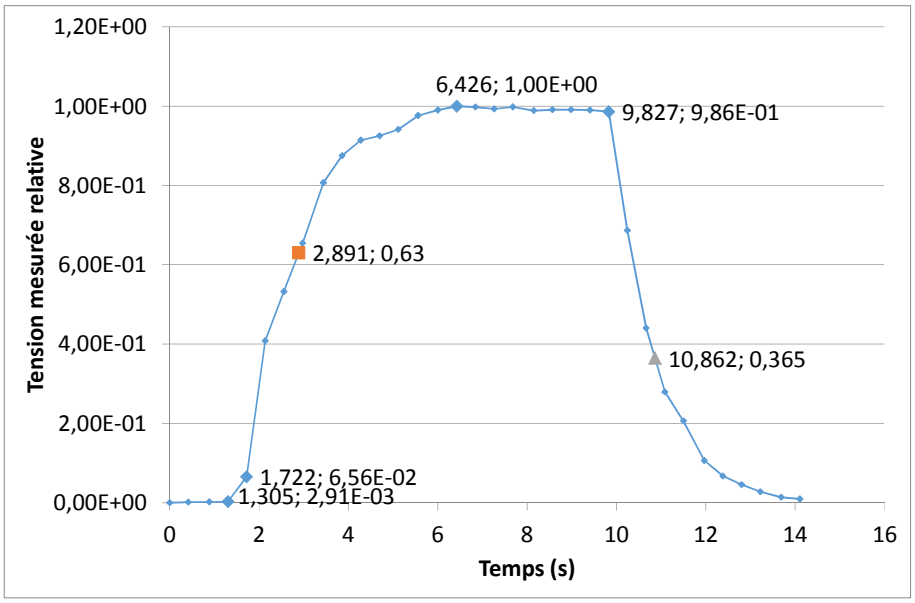


Fig. 138 Evolution temporelle de la tension mesurée, image de la vitesse moyenne - $I = 3.6\ A$

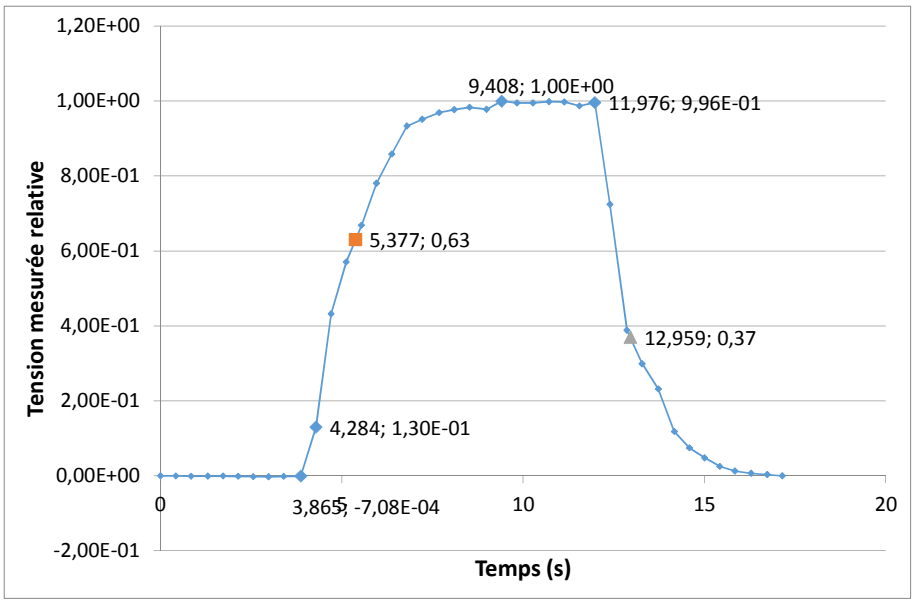


Fig. 149 Evolution temporelle de la tension mesurée, image de la vitesse moyenne - $I = 5.4\ A$

Nous pouvons observer que, malgré un manque de points relevés par unité de temps, ce qui donne l'impression que la montée en vitesse s'effectue avec un premier point d'inflexion juste après le démarrage, les courbes de montées et descentes en vitesse sont néanmoins bien de type exponentiel.

En ce qui concerne le cas à $I = 3.6A$, la montée s'effectue avec une constante de temps de l'ordre de 1.2-1.3s, et la descente avec une constante de temps proche de 1s (cf. Fig. 128).

Et pour ce qui est du cas à $I = 5.4A$, la montée s'effectue avec une constante de temps de l'ordre de 1.1-1.2s également, et la descente avec une constante de proche de 1s aussi.

Ainsi, tout comme l'avait suggéré la résolution numérique, la constante de temps semble ne pas évoluer avec une variation du courant imposé en entrée. Si ce n'est le cas à $I = 1.8A$, pour lequel la montée semble plus longue que pour les deux autres cas. Bien que la méthode utilisée pour évaluer les constantes de temps dépende fortement de la précision temporelle des mesures (nombre de points par unité de temps).

Elle n'évolue pas d'un cas à l'autre, mais semble en revanche constamment différente entre la montée et la descente en vitesse. Avec une différence de l'ordre 0.2-0.3s. Peut-être cette différence est-elle due à l'utilisation d'une des pompes comme capteur, méthode bien entendue intrusive sur l'écoulement. Car l'apparition d'une tension entre les électrodes implique un léger freinage de la vitesse du fluide, ce qui change donc la valeur de vitesse atteinte, mais surtout dans le cas qui nous intéresse ici, pourrait avoir une influence sur la dynamique de l'écoulement. Cela reste néanmoins qu'une hypothèse.

Enfin, nous comparons cette dynamique observée à partir de la résolution numérique et du modèle 2D axisymétrique. Pour cela, nous appliquons dans le modèle un courant égal à celui traversant chacune des paires d'électrodes constituant les cinq pompes MHD, et comme explicité au paragraphe (IV.1.2), un champ magnétique imposé purement radial et au milieu de l'entrefer égal à :

$$B_m = 0.104\,T$$

Voici, dans un des cas, ayant observé tout au long du paragraphe (III.3) que la dynamique proposée par la résolution numérique ne change pas lorsque le courant imposé varie, la dynamique de montée et descente en vitesse :

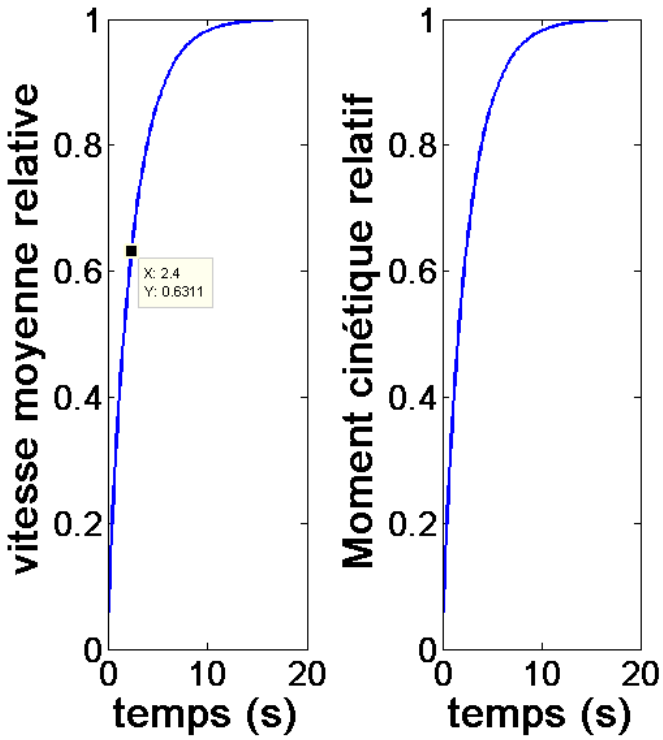


Fig. 130 Montée de la vitesse moyenne du Gallium - Résolution Numérique - Prototype - $B_m = 0.104\ T$

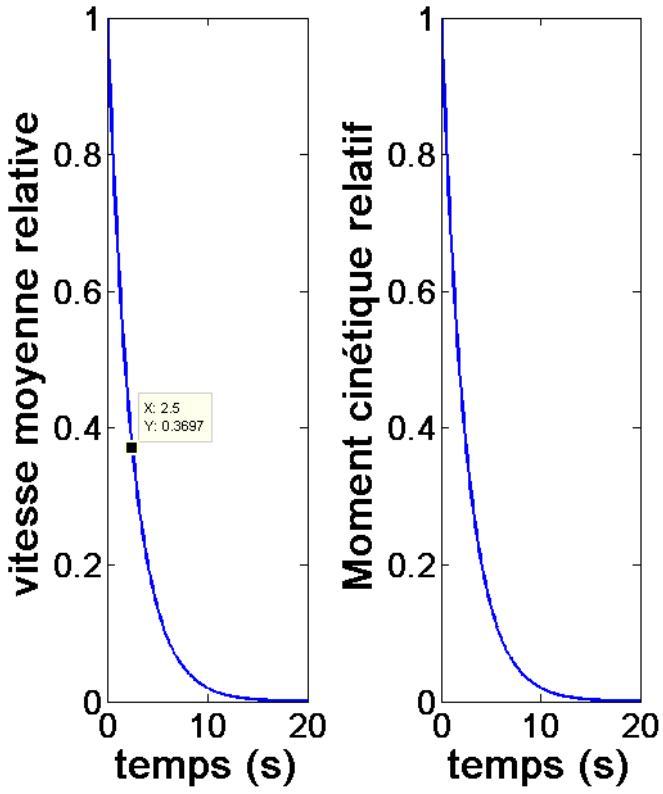


Fig. 131 Descente de la vitesse moyenne du Gallium - Résolution Numérique - Prototype - $B_m = 0.104\ T$

Observations :

Nous observons bien ici une dynamique quasi identique entre la montée et la descente en vitesse. Elle est de l'ordre de 2.4-2.5s. Elle est donc nettement supérieure à celle trouvée par les mesures (de

+90% à +140% d'erreur relative). Bien sûr, compte tenu de l'éloignement important entre les conditions de l'expérience et les hypothèses du modèle 2D, il est difficile de comparer ces résultats, et de valider ou non le modèle.

Néanmoins, des modifications pourraient y être apportées, comme la prise en compte de la géométrie contenant 6 pompes MHD distinctes, avec des forces de Lorentz plus localisées, ou la prise en compte d'un profil de champ magnétique se rapprochant plus de la réalité du prototype. Notamment la présence de composantes tangentielle et éventuellement axiale du champ magnétique. Et la géométrie non cylindrique des aimants. Ainsi que la surface réelle recouverte par les électrodes, etc.

Aussi, il serait intéressant de discuter l'ajout de pièces ferromagnétiques sur un tel actionneur. Enfin, la précision des mesures pourraient être grandement améliorée. Mais surtout, lorsque le capteur sera étalonné, ainsi que son impact sur l'écoulement mieux appréhendé, nous pourrons mesurer la vitesse moyenne atteinte par le fluide et mesurer ainsi la performance du modèle 2D en Statique également, ainsi que le comportement des diverses grandeurs lorsque le champ électromagnétique en entrée varie.

Malheureusement, la maquette expérimentale n'a été réalisée qu'en toute fin de rédaction de cette thèse.

Enfin, un prototype permettant de modifier la valeur du champ magnétique (à partir d'un électroaimant par exemple) serait très profitable pour observer et modifier la dynamique de l'établissement de l'écoulement lorsque le champ varie.

Conclusion Chapitre 4 :

La conception d'un prototype d'actionneur inertiel MHD à conduction a suivi l'étude numérique de la dynamique de l'actionneur. Ce prototype utilise le Gallium comme métal liquide. La conception de la maquette et sa géométrie implique des différences importantes vis-à-vis des considérations de la modélisation. Cela est dû aux difficultés importantes pour réaliser un tel actionneur, l'insertion des électrodes et des aimants entre autres, ainsi que pour l'obtention d'un champ magnétique purement radial. Aussi, pour mesurer la vitesse du fluide, une des six pompes MHD constituant le prototype est utilisée dans son fonctionnement générateur (de tension). Cette méthode de mesure est certainement intrusive et impacte donc la vitesse moyenne du Gallium dans le canal. Néanmoins, elle a permis d'avoir une idée de la dynamique réelle de l'établissement de la vitesse moyenne lors du démarrage de l'actionneur, et de la coupure de l'alimentation.

Ces observations constituent une première dans la conception de roue inertielle MHD (à conduction ici). Elles montrent bien un comportement de type exponentiel, comme attendu suite à la modélisation numérique. Malgré que ce comportement semble présenter une dynamique différente pour le démarrage et la coupure, contrairement aux conclusions apportées par les résultats numériques. Et que la comparaison n'est pas satisfaisante avec les dynamiques obtenues numériquement.

Toutefois, ces résultats sont à mettre au regard de la précision des mesures du point de vue de la discrétisation temporelle. Celle-ci pourra être améliorée par la suite, ainsi que l'étalonnage de la pompe utilisée comme capteur, afin de pouvoir mesurer la vitesse moyenne du fluide et la comparer

aux résultats donnés au chapitre II de ce mémoire. Enfin, les constantes de temps obtenues expérimentalement et numériquement restent du même ordre de grandeur (comprises entre 1s et 2.5s).

Finalement, cette étude de la dynamique des roues inertielles MHD à Conduction, à champ magnétique radial constitue une première étape, à l'image du couple dynamique fourni par l'actionneur, vers la réalisation d'une commande de l'actionneur. Afin de contrôler le couple de réaction transmis au satellite et donc son pointage pour des missions d'observations.

Conclusion Générale

Les moyens actuels utilisés pour réaliser le contrôle de l'attitude et de l'orbite de satellite ont été présentés dans le 1er chapitre de cette thèse. Cela a permis de mieux comprendre quels sont les différentes utilisations des roues inertielles actuelles pour effectuer ce contrôle. En effet, celles-ci servent à la fois au maintien des axes du satellite soumis à diverses perturbations, lorsque la roue tourne à vitesse constante, ainsi qu'à la modification de l'angle d'observation par accélération de la roue. De plus, la description des dispositifs actuels a permis de mettre en évidence les défauts d'usure et d'imprécision intrinsèquement liés. Et de fait, d'introduire la roue inertielle MHD comme une solution pour répondre à ces problématiques. C'est pourquoi un état de l'art sur les divers aspects de la Magnétohydrodynamique a été effectué.

De cet aperçu a découlé l'idée que, de par la viscosité naturelle du métal liquide et l'absence d'arbre mécanique, les roues MHD devraient autoriser une durée de vie fortement augmentée, ainsi qu'une précision de pilotage beaucoup plus importante pour des petits angles de déplacement. Alors, ce 1er chapitre s'est poursuivi par la description physique de la discipline qu'est la MHD. Celle-ci est décrit comme une interaction entre la physique de la Mécanique des Fluides et celle de l'Electromagnétisme, au travers de lois de couplage telles la loi d'Ohm généralisée en MHD, et l'application de la force de Lorentz qui est produite.

Ensuite, à partir de la présentation du système étudié qu'est notre actionneur, notamment sa géométrie impliquant une invariance du problème par rotation, un premier modèle 1D cylindrique a pu être appliqué, offrant une solution analytique statique. Cette solution, avec les fortes hypothèses d'invariance par translation suivant la coordonnée axiale de la roue et d'écoulement laminaire, permet d'appréhender le type de profil de l'écoulement dit de *Hartmann* engendré par l'interaction d'un champ magnétique radial et d'un champ électrique axial constants, entrainant l'apparition d'une force de Lorentz orthoradiale. L'écoulement est considéré orthoradial.

Dans le chapitre 2, nous avons développé deux formulations générales 3D en Régime Permanent pour cet actionneur. L'une utilise le potentiel scalaire électrique quand l'autre utilise le potentiel vecteur électrique. Elles ont été appliquées dans le cadre d'hypothèses axisymétriques afin de modéliser le problème en 2D. De plus, l'écoulement a été considéré purement orthoradial et seule la projection orthoradiale de l'équation de Navier-Stokes a été prise en compte. D'ailleurs, la composante azimutale de la force de Lorentz reste prépondérante.

Surtout, nous avons pu remarquer la dualité intrinsèque entre les deux modélisations en B-φ et T-Ω. En effet, les systèmes d'équations obtenus sont à la fois indépendants et entièrement déterminés (indépendance des variables T et φ pour le problème). Cette dualité est à l'image des possibilités pour la réalisation d'une alimentation pour un tel actionneur. Si l'alimentation est une source de tension, l'approche en φ est plus judicieuse. A l'inverse, si l'alimentation impose le courant, alors l'approche en T correspond mieux.

Ensuite, après avoir présenté la méthode par Différences Finies pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, et le traitement de la solution associée pour la détermination des grandeurs caractéristiques de l'actionneur, les différents modèles ont pu être résolus. Les résultats numériques montrent l'apport du 2D numérique vis-à-vis du 1D analytique, ce dernier ne prenant pas en compte l'existence de gradients de vitesse axiaux ce qui amène à négliger le couple résistif dû aux forces de viscosité et le couple moteur fourni par l'actionneur. Puis, un travail sur le maillage, à savoir

sa conception à partir d'épaisseurs de couches limites axiale et radiale, dépendants du nombre de Hartmann, a permis d'obtenir de meilleures solutions pour des temps de calculs beaucoup plus courts. Enfin, nous avons pu confirmer la dualité réelle entre les deux formulations présentées. Finalement, la résolution numérique en Régime Permanent a permis de tracer l'évolution des grandeurs caractéristiques atteintes en régime permanent par l'actionneur, suivant des variations du champ électromagnétique imposé en entrée. Il en résulte qu'elles évoluent de manière similaire avec les deux approches. En revanche, les valeurs atteintes évoluent différemment lorsque le champ magnétique varie, selon que ce soit le courant ou le potentiel électrique qui est imposé aux électrodes. Cette différence de comportement est due à la loi d'Ohm généralisée en MHD, et est à prendre en compte pour un éventuel dimensionnement, du point de vue du fonctionnement gyroscopique de la roue MHD. Particulièrement en ce qui concerne l'évolution du moment cinétique lorsque le champ magnétique varie. En effet, ce dernier peut présenter, selon le cas, un optimum local, ou bien une valeur maximale vers laquelle il tend.

Enfin, le chapitre 3 a été organisé similairement au chapitre 2. Si ce n'est que nous y avons traité le comportement dynamique de l'actionneur. Pour ce faire, les équations de l'électricité ont été considérées dans le cadre de l'approximation quasi statique. Mais le terme d'accélération a été pris en compte dans l'équation de Navier-Stokes. Les deux formulations en B-φ et B-T ont été établies. Les systèmes d'équations obtenus ont été résolus par Différence Finies et l'utilisation d'un schéma implicite pour la discrétisation temporelle.

Ainsi, nous avons pu observer numériquement l'établissement temporel de la vitesse du fluide. Nous avons pu en conclure que cette dynamique ne dépend que de la valeur du champ magnétique imposé. En effet, plus ce dernier est important, plus la dynamique est rapide. La valeur du courant ou de la tension modifie quant à elle la valeur atteinte par la vitesse. De plus, la dynamique diffère selon que c'est le courant ou la tension qui est imposé, à même valeur finale atteinte. Ici, le problème temporel n'est donc pas dual. Elle est plus lente lorsque le courant est imposé.

Bien sûr, le régime permanent atteint et la dynamique évoluent avec les caractéristiques du fluide utilisé (conductivité électrique, viscosité, masse volumique). Ainsi, le Gallium offre une dynamique plus importante que le Mercure, mais, lorsque le courant est imposé, le moment cinétique obtenu est beaucoup plus faible avec le Gallium.

Aussi, une des conclusions de ce dernier chapitre est que la méthode pour laquelle le courant est imposé semble plus judicieuse. En effet, compte tenu des courants induits dans le canal, il paraît, en première approche, difficile de ramener la vitesse à zéro en imposant une tension nulle aux électrodes (court-circuit). Mode de fonctionnement qui est pourtant essentiel pour l'application visée.

Enfin, la réalisation tardive d'un prototype, compte tenu des difficultés de réalisation, néanmoins surmontées, a permis de comparer la dynamique expérimentale à celle obtenue numériquement. Même si les résultats ne convergent pas, certains comportements semblent toutefois se confirmer, comme l'invariabilité de la dynamique lorsque la valeur imposée du courant varie, ainsi que la similitude proche entre les dynamiques de montée et descente en vitesse. La différence observée entre les résultats numériques et expérimentaux peut, quant à elle, s'expliquer par le contraste entre les considérations de la modélisation, comme l'imposition d'un champ magnétique constant et purement radial tout le long du canal, et les contraintes réelles de mise en œuvre de la technologie pour le prototypage. L'un et l'autre de ces deux aspects pourront néanmoins être améliorés par la suite.

Perspectives

L'ensemble des travaux réalisés pendant cette thèse ne sont que les prémisses, essentielles pourtant, pour la conception de roues inertielles et à réaction MHD à conduction. Aussi, ils sont pour nous un premier pas dans la voie de la compréhension des phénomènes complexes liés à la mise en mouvement d'un fluide par la force de Lorentz. Ainsi, nous présentons ici quelques pistes d'études et de réalisation pour la suite des travaux.

Tout d'abord, un étalonnage du capteur utilisé (pompe MHD en fonctionnement générateur) pour la mesure de vitesse du prototype devrait être réalisé rapidement. Ainsi, les valeurs des grandeurs caractéristiques calculées numériquement, notamment en régime permanent, pourront être comparées aux mesures. Et apporter un élément supplémentaire à la qualification de notre modèle 2D axisymétrique.

Aussi, l'utilisation du code actuel pour la résolution numérique doit permettre de compléter rapidement les résultats, plus particulièrement en ce qui concerne l'utilisation du Gallium et l'évolution des paramètres en régime statique de l'actionneur lorsque le champ électromagnétique imposé en entrée varie.

Alors, un point qui nous paraît essentiel serait d'étudier l'impact de l'évolution des dimensions géométriques de l'actionneur sur les grandeurs caractéristiques obtenues. Afin de dimensionner un prototype à l'aide de l'ensemble de ces résultats de modélisation et résolution numérique. Enfin, l'assemblage de l'ensemble de ces méthodes numériques en statique et dynamique, en s'accordant une certaine marge d'erreur de résolution pour limiter le temps de calcul, permet un dimensionnement optimisé de notre actionneur, selon le moment cinétique et le couple de réaction fournis. Et en laissant une marge de manœuvre aux paramètres d'entrée que sont le champ électromagnétique et les dimensions du canal torique.

D'ailleurs, ces résultats pourraient nous permettre d'envisager des géométries totalement différentes de celle actuellement utilisée. Comme l'augmentation conséquente du rayon moyen du canal, afin de tirer profit au maximum de l'avantage qu'offre la technologie MHD en ce sens qu'elle s'affranchit de la présence d'un arbre mécanique. Et de ce fait augmenter le moment cinétique ainsi que le couple à moindre vitesse moyenne (et donc champ et puissance électrique fournie). Toutefois, cela peut avoir un impact important sur la masse de fluide embarquée, à moins de réduire considérablement les dimensions de la section du canal torique…

Ensuite, il serait intéressant de concevoir un prototype permettant une meilleure canalisation des lignes de champs produites par les aimants, afin d'assurer la condition de cage de Faraday requise pour l'actionneur. Ceci pourrait être réalisé au moyen de pièces ferromagnétiques fixés encadrant le canal et sa rotation. Bien que cela implique un coût en masse supplémentaire et non négligeable.

D'ailleurs, d'autres géométries peuvent être pensées selon les difficultés de réalisation ; comme la superposition de plusieurs roues MHD, suivant la direction axiale.

Aussi, un prototype permettant de faire varier le champ magnétique imposé au fluide serait très profitable. Dans le sens où cela permettrait de vérifier la variabilité de la dynamique d'établissement de l'écoulement selon les variations du champ magnétique, mais aussi celles des autres grandeurs atteintes en régime permanent, comme le moment cinétique (pour lequel nous avons vu que la valeur

tend rapidement vers un maxima, lorsque le courant est imposé). Mais aussi pour le CNES dans la mesure où cela pourrait permettre de contrôler la dynamique de l'actionneur, et donc le couple de réaction fourni, autrement que par la modification du courant ou de la tension en entrée. Ce qui pourrait être très utile selon le mode de fonctionnement et les besoins pour manœuvrer le satellite.

Par ailleurs, nous avions observé une dynamique différente selon que la tension électrique ou le courant est imposé aux électrodes. Ceci pourrait être rapproché, au travers de la loi d'Ohm en MHD et d'une analogie électrique comme celle réalisée pour la modélisation 1D cylindrique, d'un comportement soit inductif soit capacitif du fluide conducteur.

Finalement, une modélisation 3D peut être envisagée. Cette dernière permettrait alors de prendre en compte l'existence de composantes méridionales pour ce type d'écoulement (vitesses axiale et radiale), du fait de la rotation du fluide et de l'existence d'une force inertielle centrifuge. Et donc de composantes axiale et radiale de la force de Lorentz. Cette modélisation, certainement très complexe, trouvera son intérêt surtout si la maquette ne permet de valider le modèle de manière suffisante. Aussi, un tel modèle nous autoriserait à prendre en compte le fait que le champ magnétique imposé par les aimants n'est pas purement radial. Ses différentes composantes pourraient être imposées sous forme de fonctions variant dans le repère cylindrique. Mais aussi, cela serait un moyen de faire concorder plus précisément la modélisation au prototype en considérant la présence locale et non globale des aimants et des électrodes le long du canal.

Pour Finir,

J'aimerais revenir ici sur cette idée du regard que l'on porte par l'observation, et pour la compréhension de la Terre, et à l'impact que peut avoir l'espèce humaine sur cet organe de Vie. Au travers des satellites, ou bien en y plongeant les mains, contemplant le monde environnant.

Le regard, ou l'interaction nécessaire à l'existence, voir et être vu, tout comme une particule quantique n'existe et ne peut être localisée que parce qu'elle est observée et interagit avec une autre particule quantique. Se plonger dans le regard de l'autre, interagir avec son environnement pour s'en sentir partie intégrante, vivant.

La conscience aussi, cet objet par lequel nous sommes capable de percevoir notre existence dans notre environnement, capable de prendre le recul sur notre corps, notre mental, notre esprit.

La question soulevée en introduction de ce manuscrit : Pourquoi a-t-on besoin d'aller dans l'espace pour observer et comprendre cet écosystème complexe qu'est la Terre, ou l'Univers ? Alors que nous sommes de la Terre, des poussières étoilées et des énergies cosmiques ? Nous faisons donc partie d'Elle. Le regard, porté aux travers des satellites, permet-il le recul nécessaire à la prise de conscience de notre existence, et de notre impact sur ce système fragile ? A l'image de ce que la Philosophie peut apporter à la Science. Ou la conscience à l'être.

La question, et la réponse à la question, sur le fonctionnement de cet organe synonyme de Vie qu'est la Terre, ne pourrait-elle se formuler comme suit : Comment, en tant qu'être vivant, ni plus ni moins, pourrions nous participer au bon fonctionnement interne de cet écosystème, si ce n'est en respectant notre condition d'humain, d'animal, d'organisme, d'être vivant participant du bon équilibre de notre planète. Et contemplant chaque instant présent que la Vie nous offre, chaque beauté

surprenante croisée sur notre chemin, dans notre environnement. Ecoutant aussi les signes intimes et primitifs par lesquels la Nature nous communique son humeur, son état d'esprit.

Descartes disait "Il est possible de parvenir à des connaissances qui soient fort utiles à la vie, [...] et ainsi nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature" (*Discours de la Méthode,* 1637). C'est pourtant cette volonté là qui a créé un déséquilibre sur la balance, et nous rend aujourd'hui dépendant d'Elle. Alors qu'en acceptant les principes simples qui sont ceux de la Vie, en respectant l'humain, l'animal, la plante, en écoutant et contemplant la beauté que la Terre nous offre tout autour de nous, nous pourrions nous libérer de cette aliénation, poussée par un désir toujours inassouvi, tout comme l'est la curiosité, qui peut être aussi bien contraignante que libératrice.

La Science a, sans nul doute, un rôle essentiel à jouer dans cette quête d'harmonie avec le système vivant, dans cette recherche de sens qui de tout temps motive les Hommes. Et elle se doit de l'accomplir ! Par, à la fois, une remise en question permanente des acquis et l'approfondissement des connaissances tout entières, nous pourrons alors, et avec autant de certitude, trouver les solutions adaptées aux défis qui sont ceux d'aujourd'hui. Toutefois, la Science ne peut en aucun cas être isolée des autres sciences.

Descartes a aussi dit : "Toute philosophie est comme un arbre, dont les racines sont la métaphysique ; le tronc est la physique, et les branches qui sortent de ce tronc sont toutes les autres sciences, qui se réduisent à trois principales, à savoir la médecine, la mécanique et la morale ; j'entends la plus haute et la plus parfaite morale, qui présupposant une entière connaissance des autres sciences est le dernier degré de la sagesse", dans *Principes de la Philosophie,* 1650.

"C'est une triste chose que de savoir que la nature nous parle et que le genre humain n'écoute pas"
Victor Hugo

"Tant de mains pour transformer le monde, et si peu de regards pour le contempler !"
Julien Gracq

"C'est toi, et toi seul, qui choisis le chemin que tu empruntes et, à tout moment, tu as le droit de changer de direction"
C.G. Jung

"Sapere aude ! (Ose savoir !)"
Kant - *Qu'est-ce que les Lumières ?*, 1784

Annexe 1

Analyse Vectorielle - Coordonnées Cylindriques

Dans ce document, nous nous attachons à rappeler les expressions des opérateurs de l'analyse vectorielle dans un système de coordonnées cylindrique.

Définition d'un vecteur *A* :

$$\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{u_r} + A_\theta \boldsymbol{u_\theta} + A_z \boldsymbol{u_z}$$

Opérateur Nabla en cylindriques :

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{u_r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{u_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{u_z} \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient :

$$\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \boldsymbol{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \boldsymbol{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{u_z}$$

Divergence :

$$\boldsymbol{\nabla . A} = div(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{r} . \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} . \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel :

$$\boldsymbol{\nabla \wedge A} = \boldsymbol{rot}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} . \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} . \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r} . \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} . \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Lapalcien Vectorielle :

$$\boldsymbol{\Delta A} = \boldsymbol{\nabla^2 A} - \boldsymbol{\nabla \wedge} (\boldsymbol{\nabla \wedge A}) = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} . \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} . \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Annexe 2
Ecriture sous forme matricielle – Modèle B-φ

Cette annexe porte sur la mise en forme matricielle de l'ensemble des équations discrétisées du problème pour la résolution

Afin de simplifier l'écriture des matrices, les coefficients suivants sont définis au niveau du nœud $n_0 \equiv (i,j)$:

$$\beta_{+_i} = \frac{2r_0 + h_2}{h_4.(h_2+h_4)} \quad ; \quad \beta_{-_i} = \frac{2r_0 - h_4}{h_2.(h_2+h_4)} \tag{1}$$

$$\gamma_{+_j} = \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)} \quad ; \quad \gamma_{-_j} = \frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)} \tag{2}$$

$$\alpha_{i,j} = \frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} - \frac{1}{r_0}.\left(1 + \frac{\sigma}{\mu}.B_0^2 R_m^2\right) \tag{3}$$

$$\alpha'_{i,j} = \frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} \tag{4}$$

$$\alpha'_{2_{1,j}} = \frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} + \frac{2r_0 - h_4}{h_2.(h_2+h_4)} \tag{5}$$

$$\alpha'_{4_{N_r-1,j}} = \frac{h_4 - h_2 - 2r_0}{h_2 h_4} - \frac{2r_0}{h_1 h_3} + \frac{2r_0 + h_2}{h_4.(h_2+h_4)} \tag{6}$$

$$\alpha''_{i,j} = \frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3} \quad ; \quad \gamma''_{+_j} = \frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)} \quad ; \quad \gamma''_{-_j} = -\frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)} \tag{7}$$

$$s_3 = -\frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\frac{h_1}{h_3.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \quad ; \quad ss_3 = \frac{2r_0}{h_3.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \tag{8}$$

$$s_1 = -\frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\frac{h_3}{h_1.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \quad ; \quad ss_1 = -\frac{2r_0}{h_1.(h_1+h_3)}.\frac{U}{2} \tag{9}$$

Les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) peuvent alors être réécrites :

$$\begin{aligned}\beta_{+_i}.v_4 + \beta_{-_i}.v_2 + \gamma_{+_j}.v_3 + \gamma_{-_j}.v_1 + \alpha_{i,j}.v_0 - \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.(\alpha''_{i,j}.\varphi_0 \\ + \gamma''_{+_j}.\varphi_3 + \gamma''_{-_j}.\varphi_1) = 0\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\beta_{+_i}.\varphi_4 + \beta_{-_i}.\varphi_2 + \gamma_{+_j}.\varphi_3 + \gamma_{-_j}.\varphi_1 + \alpha'_{i,j}.\varphi_0 \\ + B_0.R_m.\left(\alpha''_{i,j}.v_0 + \gamma''_{+_j}.v_3 + \gamma''_{-_j}.v_1\right) = 0\end{aligned} \tag{11}$$

Puis, dans les cas particulier induits par les conditions aux limites,

- cas où n_0 est situé sur la ligne axiale la plus proche de la paroi magnétique axiale située au niveau du rayon interne, soit pour $i = 1$ et $1 \leq j \leq N_z - 1$, alors les conditions aux limites donnent :

$$v_2 \equiv v_{\theta_{0,j}} = 0 \;\; et \;\; \varphi_2 \equiv \varphi_{0,j} = \varphi_0 \equiv \varphi_{1,j} \tag{12}$$

Alors, les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) s'écrivent :

$$\beta_{+_1}.v_4 + \gamma_{+_j}.v_3 + \gamma_{-_j}.v_1 + \alpha_{1,j}.v_0 - \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.(\alpha''_{1,j}.\varphi_0 + \gamma''_{+_j}.\varphi_3 + \gamma''_{-_j}.\varphi_1) = 0 \tag{13}$$

$$\beta_{+_1}.\varphi_4 + \gamma_{+_j}.\varphi_3 + \gamma_{-_j}.\varphi_1 + \alpha'_{2_{1,j}}.\varphi_0 + B_0.R_m.\left(\alpha''_{1,j}.v_0 + \gamma''_{+_j}.v_3 + \gamma''_{-_j}.v_1\right) = 0 \tag{14}$$

- Cas où n_0 se trouve sur la ligne axiale la plus proche de la paroi magnétique externe, soit pour $i = N_r - 1$ et $1 \leq j \leq N_z - 1$. Les conditions aux limites donnent :

$$v_4 \equiv v_\theta_{N_r,j} = 0 \;\; et \;\; \varphi_4 \equiv \varphi_{N_r,j} = \varphi_0 \equiv \varphi_{N_r-1,j} \tag{15}$$

Les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) s'écrivent alors,

$$\beta_{-_{N_r-1}}.v_2 + \gamma_{+_j}.v_3 + \gamma_{-_j}.v_1 + \alpha_{N_r-1,j}.v_0 - \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.(\alpha''_{N_r-1,j}.\varphi_0 + \gamma''_{+_j}.\varphi_3 + \gamma''_{-_j}.\varphi_1) = 0 \tag{16}$$

$$\beta_{-_{N_r-1}}.\varphi_2 + \gamma_{+_j}.\varphi_3 + \gamma_{-_j}.\varphi_1 + \alpha'_{4_{N_r-1,j}}.\varphi_0 + B_0.R_m.\left(\alpha''_{N_r-1,j}.v_0 + \gamma''_{+_j}.v_3 + \gamma''_{-_j}.v_1\right) = 0 \tag{17}$$

- Cas où n_0 est situé sur la ligne radiale adjacent à l'électrode située en $+w$, soit pour $1 \leq i \leq N_r - 1$ et $j = N_z - 1$. Alors, les conditions aux limites donnent,

$$v_3 \equiv v_{\theta_{i,N_z}} = 0 \;\; et \;\; \varphi_3 \equiv \varphi_{i,N_z} = -\frac{U}{2} \tag{18}$$

Les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) se réécrivent alors de la manière suivante :

$$\beta_{+_i}.v_4 + \beta_{-_i}.v_2 + \gamma_{-_{N_z-1}}.v_1 + \alpha_{i,N_z-1}.v_0 - \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.(\alpha''_{i,N_z-1}.\varphi_0 + \gamma''_{-_{N_z-1}}.\varphi_1) = s_3 \tag{19}$$

$$\beta_{+_i}.\varphi_4 + \beta_{-_i}.\varphi_2 + \gamma_{-_{N_z-1}}.\varphi_1 + \alpha'_{i,N_z-1}.\varphi_0 + B_0.R_m.\left(\alpha''_{i,N_z-1}.v_0 + \gamma''_{-_{N_z-1}}.v_1\right) = ss_3 \tag{20}$$

- Cas où n_0 est situé sur la ligne radiale adjacente à l'électrode située en $-w$, soit pour $1 \leq i \leq N_r - 1$ et $j = 1$. Alors, les conditions aux limites donnent,

$$v_1 \equiv v_{\theta_{i,0}} = 0 \;\; et \;\; \varphi_1 \equiv \varphi_{i,0} = +\frac{U}{2} \tag{21}$$

Les équations discrétisées (II.3.13) et (II.3.14) s'écrivent alors,

$$\beta_{+_i}.v_4 + \beta_{-_i}.v_2 + \gamma_{+_1}.v_3 + \alpha_{i,1}.v_0 - \frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.(\alpha''_{i,1}.\varphi_0 + \gamma''_{+_1}.\varphi_3) = s_1 \tag{22}$$

$$\beta_{+_i}.\varphi_4 + \beta_{-_i}.\varphi_2 + \gamma_{+_1}.\varphi_3 + \alpha'_{i,1}.\varphi_0 + B_0.R_m.\left(\alpha''_{i,1}.v_0 + \gamma''_{+_1}.v_3\right) = ss_1 \quad (23)$$

Alors l'équation (II.1.16) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A.X + B.Y = S \quad (24)$$

Avec,

$$X = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ . \\ . \\ . \\ v_{i,1} \\ . \\ . \\ . \\ v_{N_r-1,1} \\ v_{1,2} \\ . \\ . \\ . \\ v_{N_r-1,2} \\ v_{1,3} \\ . \\ . \\ . \\ v_{N_r-1,N_z-1} \end{pmatrix} \quad et \quad Y = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{i,1} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{N_r-1,1} \\ \varphi_{1,2} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{N_r-1,2} \\ \varphi_{1,3} \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{N_r-1,N_z-1} \end{pmatrix}$$

Et,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \beta_{+_1} & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{+_1} & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ \beta_{-_2} & \alpha_{2,1} & \beta_{+_2} & . & & . & \gamma_{+_1} & . & & & & & . \\ 0 & . & . & . & . & & . & . & . & & & & . \\ \vdots & . & . & . & \beta_{+_{N_r-2}} & . & & . & . & . & & & . \\ 0 & & . & \beta_{-_{N_r-1}} & \alpha_{N_r-1,1} & 0 & . & & . & \gamma_{+_1} & . & & . \\ \gamma_{-_2} & . & & . & 0 & \alpha_{1,2} & \beta_{+_1} & . & & 0 & \gamma_{+_2} & . & . \\ 0 & \gamma_{-_2} & . & & . & \beta_{-_2} & \alpha_{2,2} & \beta_{+_2} & . & & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & . & . & . & . & . & & . & \gamma_{+_{N_z-2}} \\ . & & . & . & . & & . & . & . & . & . & & 0 \\ . & & & . & . & . & & . & . & . & . & . & \vdots \\ . & & & & . & . & . & & . & . & . & . & 0 \\ . & & & & & . & . & . & & . & . & . & \beta_{+_{N_r-2}} \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & \gamma_{-_{N_z-1}} & 0 & \cdots & 0 & \beta_{-_{N_r-1}} & \alpha_{N_r-1,N_z-1} \end{pmatrix}$$

☆ : $(N_r - 1)$ termes

B

$$= -\frac{\sigma}{\mu}.B_0.R_m.\begin{pmatrix} \alpha''_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \gamma''_{+_1} & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha''_{2,1} & . & & . & \gamma''_{+_1} & . & . & . & . & . & . \\ \vdots & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & \alpha''_{N_r-1,1} & . & . & . & \gamma''_{+_1} & . & . & . & . \\ \gamma''_{-_2} & & . & . & \alpha''_{1,2} & . & . & . & \gamma''_{+_2} & . & . & . \\ 0 & \gamma''_{-_2} & & . & . & \alpha''_{2,2} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & . & . & . & . & . & . & \gamma''_{+_{N_z-2}} \\ . & & . & . & . & & . & . & . & . & . & 0 \\ . & & & . & . & . & & . & . & . & . & \vdots \\ . & & & & . & . & . & & . & . & \alpha''_{N_r-2,N_z-1} & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & \gamma''_{-_{N_z-1}} & 0 & \cdots & 0 & \alpha''_{N_r-1,N_z-1} \end{pmatrix}$$

Enfin,

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 \\ . \\ . \\ . \\ s_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ s_3 \\ . \\ . \\ . \\ s_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

De la même manière, l'équation (II.1.15) peut se mettre sous la forme :

$$AA.Y + BB.X = 0 \qquad (25)$$

Les matrices X et Y étant identiques à celles données précédemment, nous donnons la forme des restantes :

$$AA = \begin{pmatrix}
\alpha'_{2_{1,1}} & \beta_{+_1} & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{+_1} & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\
\beta_{-_2} & \alpha'_{2,1} & \beta_{+_2} & . & & . & \gamma_{+_1} & . & & & & & . \\
0 & . & . & . & . & & . & . & . & & & & . \\
\vdots & . & . & . & \beta_{+_{N_r-2}} & . & & . & . & . & & & . \\
0 & & . & \beta_{-_{N_r-1}} & \alpha'_{4_{N_r-1,1}} & 0 & . & & . & \gamma_{+_1} & . & & . \\
\gamma_{-_2} & . & & . & 0 & \alpha'_{2_{1,2}} & \beta_{+_1} & . & & 0 & \gamma_{+_2} & . & . \\
0 & \gamma_{-_2} & . & & . & \beta_{-_2} & \alpha'_{2,2} & \beta_{+_2} & . & & . & . & 0 \\
. & . & . & . & & . & . & . & . & . & & . & \gamma_{+_{N_z-2}} \\
. & & . & . & . & & . & . & . & . & . & & 0 \\
. & & & . & . & . & & . & . & . & . & . & \vdots \\
. & & & & . & . & . & & . & . & . & . & 0 \\
. & & & & & . & . & . & & . & . & . & \beta_{+_{N_r-2}} \\
0 & . & . & . & . & . & 0 & \gamma_{-_{N_z-1}} & 0 & \cdots & 0 & \beta_{-_{N_r-1}} & \alpha'_{4_{N_r-1,N_z-1}}
\end{pmatrix}$$

$$BB = B_0 . R_m . \begin{pmatrix}
\alpha''_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \gamma''_{+_1} & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & \alpha''_{2,1} & . & & . & \gamma''_{+_1} & . & . & . & . & . & . \\
\vdots & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & \alpha''_{N_r-1,1} & . & . & . & \gamma''_{+_1} & . & . & . & . \\
\gamma''_{-_2} & & . & . & \alpha''_{1,2} & . & . & . & \gamma''_{+_2} & . & . & . \\
0 & \gamma''_{-_2} & & . & . & \alpha''_{2,2} & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & & . & . & . & . & . & . & \gamma''_{+_{N_z-2}} \\
. & & . & . & . & & . & . & . & . & . & 0 \\
. & & & . & . & . & & . & . & . & . & \vdots \\
. & & & & . & . & . & & . & . & \alpha''_{N_r-2,N_z-1} & 0 \\
0 & . & . & . & . & . & 0 & \gamma''_{-_{N_z-1}} & 0 & \cdots & 0 & \alpha''_{N_r-1,N_z-1}
\end{pmatrix}$$

$$SS = \begin{pmatrix}
ss_1 \\ ss_1 \\ . \\ . \\ . \\ ss_1 \\
0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\
ss_3 \\ . \\ . \\ . \\ ss_3
\end{pmatrix}$$

Ainsi, le système d'équations matricielles suivant est obtenu :

$$\begin{cases} A.X + B.Y = S \\ AA.Y + BB.X = SS \end{cases}$$

Ce système d'équations matricielles est ensuite mis sous la forme d'une seule équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ BB & AA \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ SS \end{pmatrix} \quad (26)$$

Système qui se résout donc de la manière suivante, par une inversion de matrice :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ BB & AA \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S \\ SS \end{pmatrix} \quad (27)$$

Le code de calcul permettant cette résolution numérique a été développé sous *Matlab.*

Remarque importante :

La résolution numérique du système matriciel, les matrices sont construites creuses. Puisque étant constituées de trois à cinq diagonales uniquement, le reste des points étant nuls. Ainsi, la mémoire sollicitée par la résolution est beaucoup plus faible, et des matrices de tailles plus importantes peuvent être construites. Sachant que la taille des matrices correspond à résolution du maillage plus importante, et donc à la précision de la résolution également, du fait des schémas de discrétisations de type Euler centrés utilisés.

La solution obtenue par cette résolution numérique, est unique, et sous forme d'un vecteur contenant l'ensemble des valeurs des variables du problème, à savoir la vitesse et le potentiel électrique, en chaque nœud du maillage. Afin de pouvoir afficher l'ensemble des résultats, sous forme de courbes, dans le domaine d'étude, et afin de pouvoir exploiter ces résultats et déterminer les performances de l'actionneur, ce vecteur solution doit être retraité.

Annexe 3

Transformation des Vecteurs Variables Solutions en Matrices.

Code développé sous *Matlab*.

```
function SOL=treat_result_v(Sol,N_r,N_z)
%Traitement des résultats

    SOL=zeros(N_r-1,N_z-1);         %Le domaine considéré dans la résolution
ne comprend que les nœuds intérieurs au domaine d'étude, et non les parois.
    for i=1:N_z-1
        SOL(:,i)=Sol(1+(i-1)*(N_r-1):(N_r-1)*i);     %De sorte que à chaque
colonne de la matrice SOL correspond à une position axiale, et dans
laquelle est contenu l'ensemble des valeurs des vitesses en chaque nœud
suivant le rayon. Ainsi, une ligne de la matrice SOL correspond à une
position radiale, dans laquelle chaque valeur correspond à l'évolution de
la position axiale (soit une ligne axiale du domaine d'étude maillé).
    end

    for k=1:(N_r-1)
        SOL((N_r-1)+1-(k-1),:)=SOL((N_r-1)-(k-1),:);    %consiste à ajouter
une ligne supplémentaire en haut en décalant une à une chaque ligne vers le
bas
    end
    for k=1:N_z-1
        SOL(:,(N_z-1)+1-(k-1))=SOL(:,(N_z-1)-(k-1));    %Bis colonne
    end

    SOL(1,:)=zeros(1,N_z);        %Remplacer la première ligne par des
zéros (conditions aux parois pour la vitesse)
    SOL(N_r+1,:)=zeros(1,N_z);    %Ajouter une ligne en bas remplie de
zéros (Bis)
    SOL(:,1)=zeros(N_r+1,1);       %Ajout de la condition au limite de
vitesse nulle, électrode inférieur.
    SOL(:,N_z+1)=zeros(N_r+1,1);   %BIS électrode supérieure (selon le
repère présenté).
end
```

Modélisation Numérique en vue de la Conception d'un Actionneur SCAO Magnétohydrodynamique de Précision

Maël Mesurolle

Novembre 2015

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet R&T CNES. Elle concerne l'étude d'un actionneur appelé roue d'inertie, qui fait partie intégrante de l'ensemble SCAO (Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite). Les nouvelles roues proposées, dites Magnétohydrodynamique (MHD) à Conduction, présentent un volant d'inertie fluidique sous forme d'un canal torique, dans lequel un métal liquide conducteur à fort potentiel inertiel est mis en mouvement sous l'effet d'un champ électromagnétique. Contrairement aux roues actuelles, elles n'ont pas de roulements ni d'arbre mécanique ce qui permet un gain en espace, un éloignement idéal de la masse inertielle, et une durée de vie théoriquement illimitée. Aussi, de par la viscosité naturelle du fluide, elles ne présentent pas de non-linéarité autour de la vitesse nulle ce qui évite une perte de précision sur le contrôle du couple de réaction, et donc du pointage du satellite. Le travail réalisé pendant la thèse porte sur l'appréhension des phénomènes MHD consistant en un couplage entre les lois de la Mécanique des Fluides et celles de l'Electromagnétisme, au travers de la loi d'Ohm généralisée. A partir d'hypothèses axisymétriques, et dans le cadre des milieux incompressibles et d'un écoulement laminaire, un modèle générale 3D a pu être établie. Puis une formulation 1D cylindrique a permis une résolution analytique, et une autre en 2D axisymétrique, par résolution numérique en différences fines, a permis l'amélioration de la précision des résultats. Ce modèle a permis de comprendre que deux approches étaient possibles pour la conception et plus particulièrement la commande de l'actionneur. Cette résolution, faisant l'objet du développement d'un code numérique, a d'abord porté sur les équations en régime permanent, puis en temporel, afin de caractériser l'actionneur du point de vue de ses deux modes de fonctionnement. La réalisation d'un prototype a permis de quantifier la validité de la modélisation d'un point de vue dynamique.

Numerical Modeling to Design a Precision Magnetohydrodynamic Actuator AOCS

Maël Mesurolle

November 2015

Abstract

This thesis is part of a CNES R&T project. It's related to the study of an actuator called flywheel, which is part of AOCS (Attitude an Orbit Control System). The proposed new wheels, said Magnetohydrodynamic (MHD), are constituted by a fluid flywheel in the form of a ring channel, in which a conductive and high inertial potential liquid metal is driven through an electromagnetic field (Lorentz's force). Unlike current wheels, among others types DC brushless motor, MHD wheels, whose rotor is the fluid, have neither bearings nor mechanical shaft. This allows space saving, an ideal distance of the inertial mass, and a theoretically unlimited lifespan. Moreover, thanks to the natural viscosity of the fluid, they do not present a non-linearity around the zero speed which avoids a loss of precision in the reaction torque's control, and therefore the satellite pointing. The work for the thesis focuses on the apprehension of MHD phenomena. Indeed, MHD is a coupling between fluid mechanics' laws (Navier-Stokes, etc.) and Maxwell's equations, through the Lorentz force. From a number of assumptions, and as part of incompressible environment, a genral 3D model has been established. Then a 1D cylindrical formulation allowed an analytical resolution and another 2D axisymmetric one, by finite differences resolution, helped to improve results. This model allow us to understand that both approaches were possible for the design and especially the actuator control. The resolution, which is subjected to the development of a numerical code, first focused on the equations in steady state, then in dynamic, to characterize the actuator in terms of its two operating modes. The realization of a prototype has quantified the validity of the model from a dynamic point of view.