

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Génie Electrique

Présentée et soutenue par :

M. JULES GILLET

le mardi 1 décembre 2015

Titre :

Commande optimisée d'une machine asynchrone à double alimentation avec les composants SIC de haute tension dédiée à la propulsion navale

---

Ecole doctorale :

Génie Electrique, Electronique, Télécommunications (GEETS)

Unité de recherche :

Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie (LAPLACE)

Directeur(s) de Thèse :

MME MARIA PIETRZAK-DAVID

M. FREDERIC MESSINE

Rapporteurs :

M. FREDERIC GILLON, E.C. Lille

M. JEAN-PAUL HAUTIER, CER Paris

Membre(s) du jury :

MME SONIA CAFIERI, École Nationale de l'Aviation Civile, Présidente

MME MARIA PIETRZAK-DAVID, Toulouse INP, Membre

M. FREDERIC MESSINE, Toulouse INP, Membre

M. PIERRE MARTINON, INRIA, Membre

Résumé

La Machine Asynchrone à Double Alimentation, souvent utilisée en générateur, est depuis quelques années étudiée en mode moteur. Ce mode de fonctionnement est utilisé dans cette thèse dans le cadre de la propulsion navale.

Cette étude va tirer parti des nombreux avantages de ce moteur afin d'en réaliser sa commande optimale. L'objectif de cette thèse est donc d'optimiser la commande d'une MADA sur un démarrage afin de réduire les pertes Joule.

Tout d'abord, le fonctionnement en mode moteur est expliqué et justifié. Un modèle analytique de la machine est donné afin de permettre la poursuite de l'étude. Ce modèle est formulé afin de mettre en avant les possibilités d'action sur l'alimentation de la machine.

Dans un second temps, le domaine de l'optimisation mathématique est abordé, en partant du cas général pour aller vers le contrôle optimal. Le Principe du Maximum de Pontryagin ainsi que deux méthodes numériques sont présentées : le tir indirect, basée sur le PMP et la méthode du tir direct. Elles seront toutes les deux utilisées dans une première approche du problème de contrôle optimale étudié.

Un modèle simplifié de la machine est alors utilisé pour déterminer la méthode de résolution de problème de contrôle optimal la plus adéquate dans notre cas. Ce modèle utilisera une version simplifiée du modèle mécanique, en partant du principe que la vitesse de rotation du moteur est, au nombre de paire de pôle près, la même que la vitesse de rotation électrique.

L'étude se termine par la résolution du problème dans son ensemble, y compris un modèle réaliste de la partie mécanique de la MADA. Une méthode originale qui fait ses preuves ici, est présentée en ce sens. En effet, les relations de causalité dans les calculs des différentes grandeurs internes d'un moteur électrique sont mises en avant et utilisées afin de simplifier le problème. Le problème principal de contrôle optimal est alors divisé en deux sous-problèmes, qui résolu l'un après l'autre, donne une solution, c'est-à-dire une commande optimisé de la MADA.

Les simulations sont réalisées pour une machine de 4 kW. Les résultats de ces simulations vont prouver la validité de la méthode employée pour résoudre notre problème. Cette méthode pourra donc être utilisée afin de déterminer la commande optimale des MADAs utilisées pour la propulsion navale.

Mots clefs :

Machine asynchrone double alimentation – Commande – Optimisation - Propulsion navale

Commande optimale - Composants SIC

Abstract

The Doubly Fed Induction Machine is often used as a generator, however it is also studied in motor mode from some years ago. This mode is used here in the field of the marine propulsion.

This study will try to take advantages of the many benefits of this motor to achieve its optimal control. The objective of this thesis is to optimize the control of a DFIM start in order to reduce copper losses.

Firstly, the motor operation mode is explained and justified. A model of the machine is given to allow the continuation of the study. This model is shaped to highlight the options for the machine control.

Secondly, the field of mathematical optimization is discussed, starting from the general case to go to the optimal control. The Pontryagin Maximum Principle and two numerical methods are presented, the indirect shooting technique, based on the PMP and the direct shooting one. They will both be used in a first approach to our studied optimal control problem studied.

A simplified model of the machine is then used to determine the most appropriate optimal control problem resolution method in our case. This model will use a simplified version of the mechanical model, assuming that the engine speed is nearly the same than the speed of the electric rotation.

This study concludes with the resolution of the entire problem, including a realistic model of the mechanical part of the DFIM. An original method that is validated here, is presented. Indeed, causal relationships in the calculations of various internal variables of an electric motor are highlighted and used to simplify the problem. The main optimal control problem is then divided into two more simple optimal sub-problems. These ones are solved sequentially providing a solution which corresponds to the optimized control of the DFIM.

The simulations are performed for a 4 kW machine. The results of these simulations will prove the validity of the method to solve our problem. This method will be able to find the optimal control of the DFIMs used for marine propulsion.

Key words :

Double-Fed Asynchronous Machine – Control – Optimization - Naval propulsion -

Optimal control - SiC components

Table des matières

Introduction générale....9
1 Chapitre I : De la rame à la MADA....13
1.1 Introduction....14
1.2 Les différents moyens de propulsion navale....14
1.2.1 Utilisation de la nature....14
1.2.2 Transformation de la nature....15
1.3 La MADA....17
1.3.1 La machine synchrone....18
1.3.1.1 Description de la machine synchrone....18
1.3.1.2 Avantages et inconvénients de la machine synchrone....19
1.3.2 La machine asynchrone....19
1.3.2.1 Description de la machine asynchrone....19
1.3.2.2 Avantages et inconvénients de la machine asynchrone....21
1.3.3 La MADA....21
1.3.3.1 Principe de fonctionnement de la MADA....21
1.3.3.2 Avantages et inconvénients de la MADA....23
1.4 Présentation du modèle de la MADA....23
1.4.1 Hypothèses sur le fonctionnement de la MADA....24
1.4.2 Modèle mathématique de la MADA....25
1.4.2.1 Point de vue électrique :....25
1.4.2.2 D'un point de vue mécanique :....28
1.5 Conclusion....30
2 Chapitre II : La commande optimale....31
2.1 Introduction....32
2.2 L'optimisation....32
2.2.1 Principe....33
2.2.2 Les différents algorithmes....34
2.2.2.1 Active set....34
2.2.2.2 Sequential quadratic programming....34
2.2.2.3 Méthode de région de confiance....35
2.2.2.4 Méthode des points intérieurs....35
2.2.3 Exemple d'optimisation....36
2.3 La commande optimale....38
2.3.1 Qu'est-ce qu'une commande ?....38
2.3.2 Le principe du maximum de Pontryagin....40
2.3.2.1 Principe général....40
2.3.2.2 Application : la méthode du tir indirect....43
2.3.3 Le tir direct....44
2.3.4 Le tir semi-direct....45
2.3.5 Exemple....46
2.3.5.1 Présentation du problème....46
2.3.5.2 Résolution avec le PMP....47
2.3.5.3 Résolution avec la méthode du tir semi-direct....51
2.3.5.4 Comparatif des deux méthodes....54
2.4 Conclusion....55
3 Chapitre III : La commande optimale d'une MADA, modèle simplifié....57
3.1 Introduction....58

3.2 Objectif de l'étude....58
3.3 Formulation du problème de commande optimale....62
3.4 Application du principe du maximum de Pontryagin....66
3.5 Application du tir semi-direct sur un modèle simplifié....67
3.5.1 Explication de l'application de la méthode....67
3.5.1.1 Détermination du pas de discrétisation....67
3.5.1.2 Utilisation de MATLAB pour la résolution de notre problème....68
3.5.2 Résultats....69
3.6 Conclusion....71
4 Chapitre IV : La commande optimale d'une MADA, modèle complet....73
4.1 Introduction....74
4.2 Formulation du problème de commande optimale avec partie mécanique....74
4.3 Principe de causalité....77
4.4 Résolution des deux sous-problèmes....80
4.4.1 Résolution du sous-problème électromécanique....80
4.4.2 Résolution du sous-problème électrique....82
4.5 Résultats numériques....83
4.6 Conclusion....92
Conclusion générale....95
Bibliographie....97
Annexe I : les paramètre de la MADA....101
Annexe II : la transformée de Concordia....103
Annexe III : le tir semi direct appliqué à un exemple simple....107
Annexe IV : le tir indirect appliqué à un exemple simple....109
Annexe V : programme de résolution des deux sous-problèmes :....111

Introduction générale

Cette thèse s'inscrit dans le cadre un contrat appelé MADA SiC soutenu par la Direction Générale de l'Armement et plusieurs laboratoires et entreprises. En effet, dans un souci d'économie et d'efficacité énergétique, la DGA est à la recherche d'un moyen de propulsion maritime innovant et souhaite le comparer aux moyens actuellement mis en œuvre.

Le projet global porte sur deux problématiques :

- De nouveaux convertisseurs d'électronique de puissance comportant de nouveaux composants d'électronique de puissance haute tensions.

- La conception et réalisation d'un moteur électrique de forte puissance qui va fournir la puissance mécanique permettant au bateau de se déplacer.

Un consortium d'entreprises et de laboratoires s'est donc formé afin d'effectuer un démonstrateur permettant de montrer les performances de ce système innovant. Le système étudié est composé d'un Moteur Asynchrone à Double Alimentation (MADA) alimenté par deux convertisseurs statiques utilisant des composants au carbure de silicium SiC. Les partenaires de ce consortium sont, le laboratoire Ampère de Lyon, les entreprises ECA EN, Cirtem et IBS, et le laboratoire LAPLACE.

Suite aux différents travaux dédiés au pilotage de la MADA, la DGA a fait appel au LAPLACE pour qu'il étudie conçoive et réalise une commande temps réel de l'ensemble « variateur de vitesse / MADA ». Cette activité est en corrélation avec les recherches du groupe CODIASE (Commande et Diagnostic des Systèmes Électriques)

L'étude présentée dans cette thèse s'est déroulée en parallèle des travaux de Mustapha Debbou qui s'est concentré sur l'analyse de la commande rapprochée des onduleurs alimentant la MADA. Ainsi, les diverses modulations MLI des onduleurs ont été examinées en association avec un double contrôle vectoriel et un double contrôle direct du couple.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont été centré sur les différents types de commandes en recherchant leurs avantages et inconvénients tant sur le plan du fonctionnement que du rendement. L'objectif était donc à l'origine d'améliorer le fonctionnement du système.

Dans une premier temps, il s'agissait d'étudier un nombre suffisant de commandes existantes et de les comparer en terme de rendement, temps de réponse, qualité de fonctionnement, etc... Puis, dans un deuxième temps, il aurait fallu réaliser un superviseur de commande permettant d'appliquer la commande la plus adéquate au bon moment. Cette solution est rapidement apparue complexe à mettre en œuvre et surtout à réaliser expérimentalement.

Le choix de la réalisation d'une commande optimale pour une MADA fonctionnant en mode moteur, pour réduire les pertes Joule s'est alors imposé. En effet, dans le cadre de cette recherche, la commande optimale est toute indiquée. Le système est donné et nous devons en améliorer certains aspects avec comme seul degré de liberté, son alimentation.

Ce travail s'est alors réalisé en partenariat avec le groupe GREM3 du LAPLACE sur la partie optimisation à proprement parler.

L'objectif de ce manuscrit est de présenter de manière simple et méthodique les travaux menés au cours de cette thèse conduisant à la commande optimale d'une Machine Asynchrone à Double Alimentation.

C'est pourquoi, nous allons commencer, dans le premier chapitre par un état de l'art sur la propulsion navale, notre sujet d'étude principal. Nous en verrons l'historique ainsi que les évolutions majeures ayant conduit à l'utilisation de moteurs électriques pour propulser un navire. Dans ce même chapitre, nous verrons également pourquoi la Machine Asynchrone à Double Alimentation peut prétendre remplacer les actuels moteurs synchrones présents dans les bateaux.

Pour ce faire, nous détaillerons le fonctionnement des deux grands types des moteurs à courant alternatif que sont les machines synchrones (MS) et les machines asynchrones (MAS), pour avoir les bases de compréhension et pour finir par décrire le fonctionnement d'une MADA.

Nous terminerons ce chapitre par un modèle mathématique détaillé d'une MADA. Ce modèle va annoncer les difficultés dans le calcul de sa commande optimale. En effet, à la fin de ce chapitre nous signalerons les forts couplages magnétiques entre le rotor et le stator de la machine, rendant complexe le calcul des courants à partir des tensions et des fréquences d'alimentation.

Dans le deuxième chapitre, nous aborderons la commande optimale. Nous commencerons ce chapitre par une explication sur l'optimisation de manière générale avec son histoire son principe et les différentes méthodes qu'elle génère. Nous donnerons aussi un exemple mettant en exergue les techniques numériques pour résoudre un problème d'optimisation simple.

Nous entrerons ensuite dans le vif du sujet avec la commande optimale. Nous montrerons dans cette partie, ce qu'est une commande et pourquoi l'optimiser. Enfin nous présenterons deux méthodes pour résoudre un problème de commande optimale, le principe du maximum de Pontryagin et la méthode numérique du tir indirect qui en découle d'une part et d'autre part, la méthode numérique du tir direct. Ces deux méthodes seront détaillées car toutes deux sont utilisées par la suite dans notre étude. Nous donnerons, là encore, un exemple simple pour illustrer le fonctionnement de ces deux méthodes, ce qui nous permettra de procéder à leur comparaison.

Le troisième chapitre sera dédié à une étude préliminaire permettant de choisir la méthode pour résoudre notre problème. Ce chapitre formulera les objectifs de l'étude en détail. Nous pourrons ainsi poser le problème de manière formelle, comme un problème de contrôle optimal. Dans cette étude préliminaire, nous choisirons de nous limiter au modèle électrique de la MADA en utilisant une simplification du modèle mécanique. Ce choix nous permet de simplifier le problème en y soustrayant une équation différentielle. Nous allons d'abord appliquer le Principe du Maximum de Pontryagin à notre problème pour nous rendre compte de la grande complexité de cette tâche. Nous appliquerons par la suite la méthode du tir semi-direct qui portera ses fruits et nous donnera nos premiers résultats que nous détaillerons et critiquerons à la fin de ce chapitre.

Pour finir, le quatrième chapitre concernera le cœur de notre étude. Il présentera la méthode originale développée dans ce travail et utilisée pour résoudre le problème dans son ensemble, c'est-à-dire le problème comprenant l'équation mécanique de la MADA. Nous verrons que le problème ne peut plus être traité d'un seul bloc comme dans le chapitre précédent. Nous proposerons alors un décomposition de notre problème en deux sous-problèmes d'optimisation plus simples à aborder. Cette décomposition s’appuie sur les relations de causalité inhérentes au fonctionnement d'un moteur électrique à courant alternatif. Grâce à cette décomposition, nous pourrons résoudre nos deux nouveaux sous-problèmes pour obtenir des résultats satisfaisants que nous détaillerons à la fin de ce chapitre.

Pour conclure ce manuscrit, nous rappellerons, dans une conclusion générale, les différents travaux entrepris puis nous proposerons des perspectives d'améliorations.

1 Chapitre I : De la rame à la MADA

Sommaire

1 Chapitre I : De la rame à la MADA....13
1.1 Introduction....14
1.2 Les différents moyens de propulsion navale....14
1.2.1 Utilisation de la nature....14
1.2.2 Transformation de la nature....15
1.3 La MADA....17
1.3.1 La machine synchrone....18
1.3.2 La machine asynchrone....19
1.3.3 La MADA....21
1.4 Présentation du modèle de la MADA....23
1.4.1 Hypothèses sur le fonctionnement de la MADA....24
1.4.2 Modèle mathématique de la MADA....25
1.5 Conclusion....30

1.1 Introduction

Il nous paraît incontournable de procéder à un bref historique de la propulsion navale afin de contextualiser notre étude. Nous ancrons notre thèse sur ce point de départ. Cette brève revue nous amènera à définir plus spécifiquement l'objet sur lequel repose nos recherches : la Machine Asynchrone à Double Alimentation (MADA). Ce type de moteur est principalement utilisé dans la génération d'électricité mais pas dans le domaine de la propulsion. Il se révèle toutefois prometteur de par ses nombreux avantages que nous décrirons plus loin et notamment pour la propulsion navale.

Placer la MADA dans l'histoire de la propulsion navale, la décrire ainsi que définir son modèle permettra non seulement d'introduire notre travail mais également de poser les premières bases mathématiques nécessaires à notre étude. En effet, lors d'un démarrage, la MADA , comme les autres types de moteurs, demande une grande quantité d'énergie. Ce qu'on cherche ici, c'est minimiser cette énergie afin de rendre la MADA plus efficace.

Nous allons donc voir dans un premier temps un bref historique de la propulsion navale. Dans un second temps, nous présenterons la MADA. Et enfin, dans un troisième et dernier temps, nous nous focaliserons sur la description d'un modèle détaillé de cette machine électrique.

1.2 Les différents moyens de propulsion navale

Les techniques de propulsion navale sont intimement liées à l'évolution des intérêts de l'Homme pour l'exploration, le commerce et la défense de ses territoires. L'Homme, dans son désir de se déplacer, a innové et innove encore aujourd'hui. Nous verrons ici plus particulièrement, les avancées technologiques relatives à la propulsion navale.

Un navire, au même titre qu'un corps se déplaçant dans un fluide, est soumis à une force qui s'oppose à son mouvement. Pour compenser cette force résistante, il est donc nécessaire de produire une autre force afin que le navire puisse se déplacer.

A partir du néolithique (7000 av J. C.) les Hommes ont commencé à se déplacer sur l'eau au moyen d'embarcations [1]. Au départ, les raisons principales de ces déplacements étaient la chasse et la pêche. Assez rapidement, l'Homme a compris l'intérêt de la navigation pour d'autres objectifs, comme le commerce ou la guerre. Les navires se sont alors perfectionnés à mesure de l'évolution des technologies humaines.

Dans cette partie nous verrons que l'Homme passera donc de l'utilisation de la nature, comme ensemble de ce qui, dans le monde physique, n'apparaît pas comme (trop) transformé par lui-même, à la transformation de celle-ci, pour se mouvoir sur l'eau.

1.2.1 Utilisation de la nature

Le premier moyen de propulsion autonome utilisé fut la force humaine. Au moyen de rames, d'avirons ou de perches, les humains faisaient avancer des embarcations. Cette technique, qui remonte au néolithique, est encore utilisée de nos jours. Son but a évolué.

Passant d'un moyen de locomotion utilisé pour la pêche, les embarcations à rame sont aujourd'hui utilisées pour le loisir.



Figure 1.1 : Barque néolithique (env. 7000 av J. C.)

Afin de suppléer aux rameurs, l'Homme a trouvé une autre source d'énergie : le vent. Les premiers bateaux à voile sont apparus il y a plus de cinq mille ans. L'énergie éolienne est un moyen mécanique de produire la force nécessaire pour tracter une embarcation. La plus ancienne représentation d'un bateau à voile est une fresque murale datée de plus de 4000 ans avant J. C. [2].



Figure 1.2: Navire égyptien à voile

Grâce à ce moyen, les bateaux sont devenus plus gros et pouvaient aller plus loin. Cette technique a permis, entre autre, le peuplement de l'Océanie et la découverte de l'Amérique.

Ce moyen de propulsion est encore utilisé de nos jours mais tout comme la rame, il l'est principalement pour le loisir dans les pays industrialisés.

Même si ces techniques de propulsion ont pu être très efficaces et ont permis de grandes découvertes, elles ne sont pas assez efficientes pour des applications modernes.

1.2.2 Transformation de la nature

Après avoir utilisé la nature telle quelle, comme le vent ou la force humaine, l'Homme a réussi à la transformer afin d'en tirer de l'énergie notamment pour effectuer des

déplacements.

Le premier exemple est la machine à vapeur, le premier moteur dit thermique, dont l'apparition date du tout début du XVIIème siècle. Cette machine utilise le charbon pour transformer l'eau en vapeur qui, se faisant, pousse un piston et crée ainsi du mouvement. L'utilisation de telles machines pour propulser un bateau devra néanmoins attendre la fin du XVIIIème siècle. Comme exemple typique de bateaux à vapeur, nous pouvons citer les bateaux-mouches, qui sont aussi les premières embarcations utilisées pour le loisir.

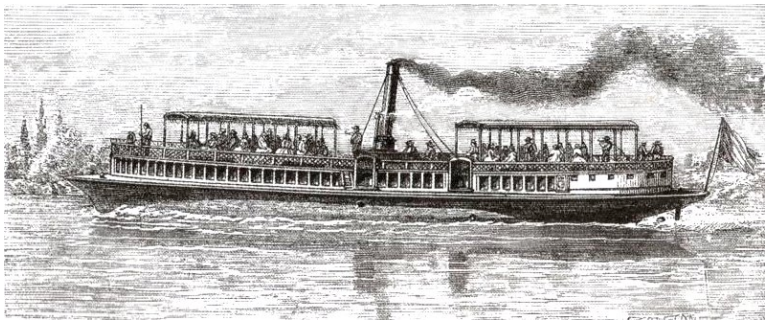

Figure 1.3: Bateau à vapeur

Les motorisations thermiques ont ensuite évolué pour être plus efficaces et utiliser des carburants plus facilement transportables que le charbon. Les moteurs à explosion ont alors fait leur apparition. Avec une puissance massique bien supérieure à leur prédécesseur à vapeur, ils comportent néanmoins quelques inconvénients notables, le principal étant leur rendement variable. Suivant leur vitesse de rotation, les moteurs thermiques n'ont pas le même rendement. En se préoccupant à la fois, d'économie d'énergie et d'autonomie on comprend à quel point cela peut-être dommageable.

Afin de remédier à ce problème, il existe plusieurs solutions. La boîte de vitesse (comme pour les voitures) en est une. Elle permet au moteur de tourner à des vitesses proches de son point de rendement maximum, tout en ayant une vitesse en sortie de boîte de vitesse variable sur une large plage d'utilisation.

Une autre solution, plus complexe mais plus efficace, est l'hybridation d'un moteur thermique et d'un moteur électrique :

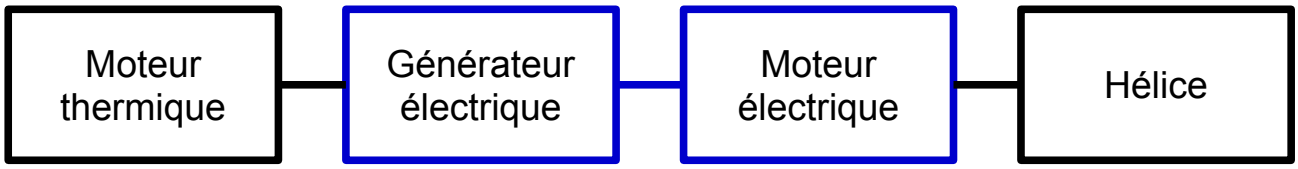

Figure 1.4: Hybridation

Dans cette configuration, le moteur thermique tourne toujours à la même vitesse. Il a donc toujours le même rendement. La variation de vitesse est assurée par le moteur électrique. A basse et moyenne vitesse, la chaîne a donc un rendement global constant et plus satisfaisant que le moteur thermique seul. Le principe est le même que dans les voitures hybrides, un moteur thermique fournit l'énergie qui est convertie en énergie électrique puis restituée sous forme mécanique par un moteur électrique, [3].

Un navire tout électrique serait, en théorie, réalisable. Malheureusement, les moyens de

stockage de l'électricité ne sont pas suffisamment performant et compact pour faire fonctionner tout un navire sur la durée de sa mission.

L’hybridation équipe maintenant la plupart des navires utilisant des moteurs thermiques et de taille suffisante pour embarquer tout le système. Les frégates militaires françaises en sont équipées de même que certains pétroliers ou porte-conteneurs.

Le défi devient alors non plus de trouver de nouvelles formes d'énergie, mais bien d'améliorer un système déjà existant. L'une des pistes d'étude dans ce domaine porte sur le moteur électrique produisant la force nécessaire à la propulsion. C'est celle dont il est question ici.

C'est pourquoi nous allons étudier un moteur asynchrone à double alimentation (MADA), qui jusqu'à aujourd'hui a presque toujours été utilisé en générateur, et dont on va étudier le fonctionnement en moteur.

1.3 La MADA

Dans la variété de moteur électrique existant, deux sont plus utilisés que les autres : les machines synchrones et les machines asynchrones. Ces deux machines, nous permettrons de décrire le fonctionnement d'une MADA. Nous détaillerons également les avantages et les inconvénients de chacun de ces moteurs.

1.3.1 La machine synchrone

1.3.1.1 Description de la machine synchrone

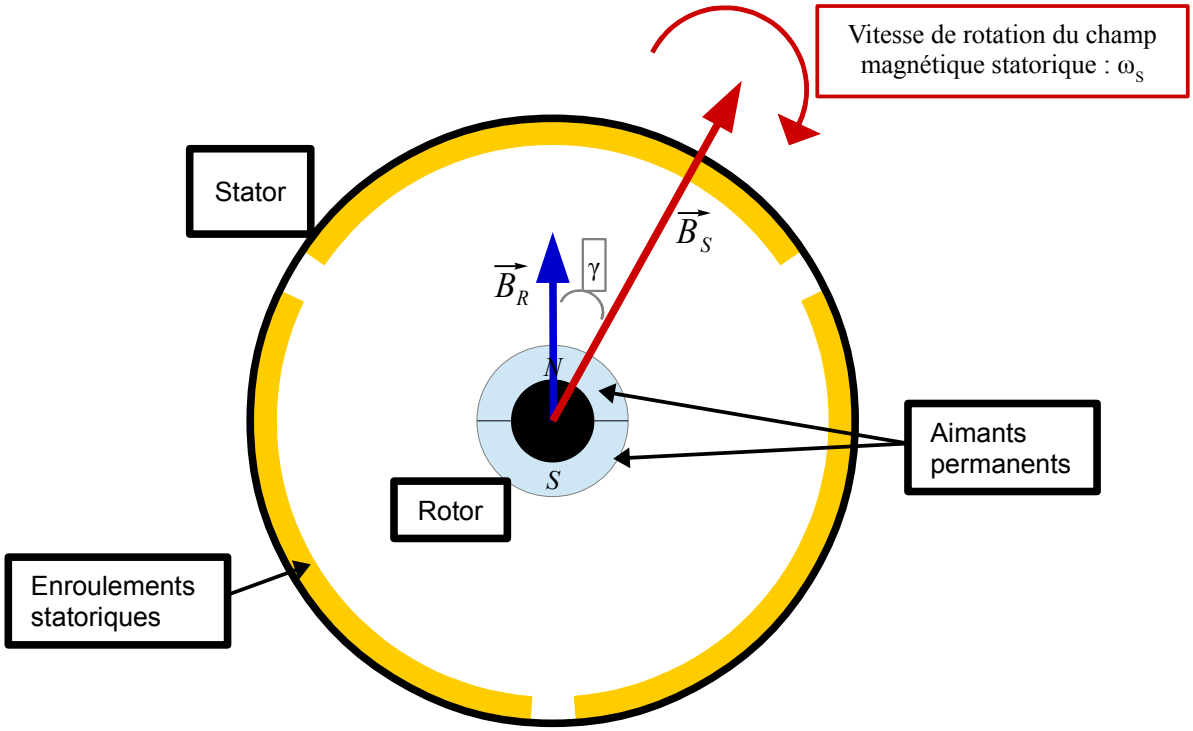

Figure 1.5: Schéma de principe d'une machine synchrone

Les machines synchrones ont pour avantage de pouvoir utiliser des aimants permanents afin de créer le champ magnétique. Ces aimants sont placés sur le rotor. Le champ magnétique créé par ces aimants, $\vec{B_R}$, est donc fixe par rapport au rotor. On vient ensuite créer un autre champ magnétique au stator, $\vec{B_S}$, par l'intermédiaire d'enroulements. Ces enroulements, alimentés par un système équilibré de tensions sinusoïdales, créent un champ magnétique qui va alors tourner par rapport au stator, à la vitesse ω_S. Le champ tournant du stator entraîne le champ du rotor et le rotor lui-même tournera à la vitesse ω_S. L'angle γ présent entre les deux champs permet la création du couple, [4].



Figure 1.6: Une machine synchrone

.

1.3.1.2 Avantages et inconvénients de la machine synchrone

La machine synchrone a plusieurs avantages :

- *Posséder des aimants permanents* : Ils permettent d'avoir le couple massique le plus élevé comparativement aux autres machines.

- *Un fonctionnement simple* : Le champ magnétique rotorique fixe permet un pilotage facile de cette machine, [5] [6].

- *L'absence de bagues et de balais* : Cela permet d'avoir des frottements internes faibles.

Mais aussi quelques inconvénients :

- *La fixation des aimants* : Fixer des aimants sur une pièce tournante peut s'avérer difficile, surtout si la vitesse de rotation est élevée.

- *Le prix* : Les aimants permanents coûtent cher, ce qui rend la machine synchrone à aimants permanents la plus chère des moteurs électriques.

1.3.2 La machine asynchrone

1.3.2.1 Description de la machine asynchrone

Les machines asynchrones se distinguent par leur simplicité de fabrication. Les plus aisées à produire sont les machines asynchrones à cage. Tout comme les machines synchrones à aimants permanents, elles n'ont ni collecteur ni balai. Leur architecture est très simple mais leur pilotage est plus compliqué que celui des moteurs synchrones, [7].

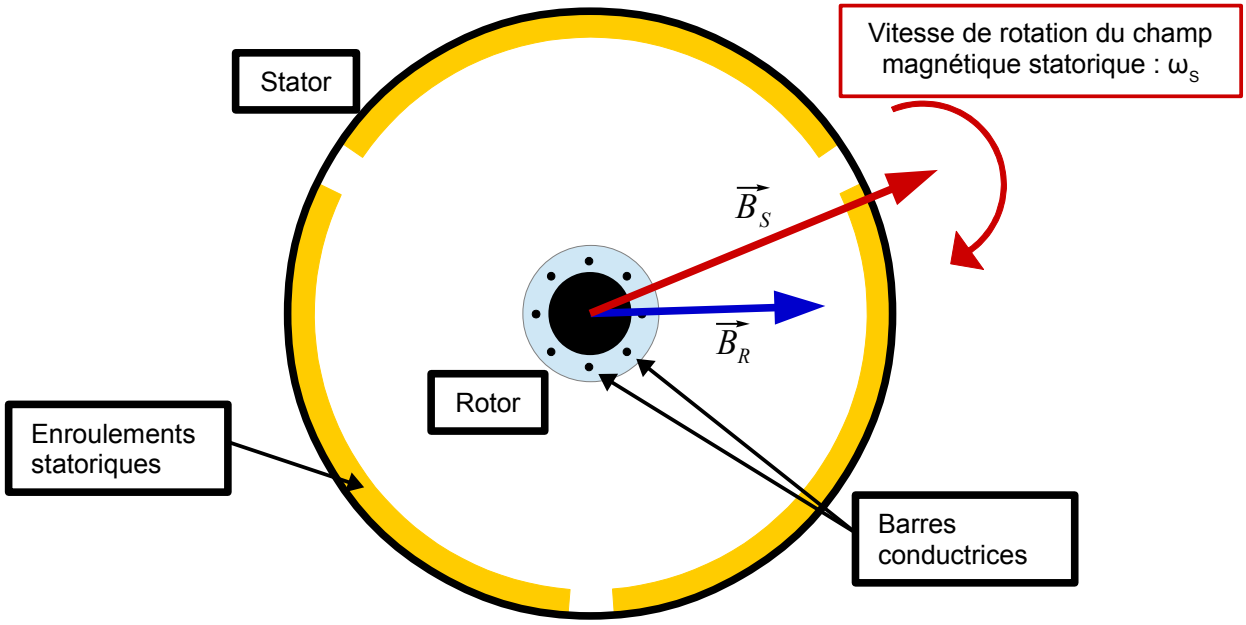

Figure 1.7: Schéma de principe d'une machine asynchrone

Ici le champ magnétique rotorique, $\vec{B_R}$, est créé par le champ tournant statorique à la différence des machines synchrones.

Le rotor de la machine asynchrone à cage comporte des barres conductrices également réparties autour du rotor. Le stator est bobiné et alimenté par un système équilibré de tensions. Le champ tournant résultant, noté $\vec{B_S}$, crée un courant induit dans les barres conductrices du rotor. Ce courant génère à son tour le champ magnétique $\vec{B_R}$ qui s'oppose à celui créé par le stator. Ainsi, les champs se repoussent et le rotor se met à tourner, [8], [9].

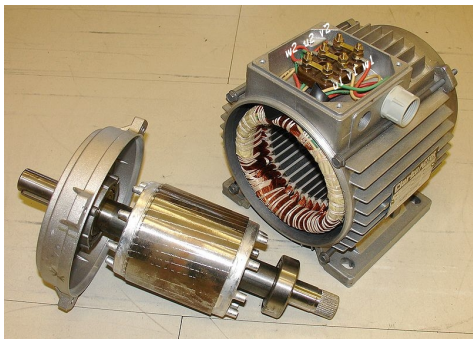

Figure 1.8: Une machine asynchrone

1.3.2.2 Avantages et inconvénients de la machine asynchrone

Les avantages de la machine asynchrone sont :

- *La simplicité de fabrication* : Les machines asynchrones à cage sont les plus simples et les moins chères à produire. Ces machines sont également plus robustes.

- *L'absence de bague et balai* : Cela permet d'avoir des frottements internes faibles.

Et son inconvénient majeur :

- *Le pilotage* : Le champ magnétique rotorique étant induit par celui du stator, sa gestion est ardue. Il faut donc développer des commandes complexes comme la commande vectorielle de flux pour pouvoir piloter ce type de moteur, [5], [10].

1.3.3 La MADA

La Machine Asynchrone à Double Alimentation (MADA) est une machine surtout utilisée en générateur mais très peu en mode moteur. La complexité de son fonctionnement prend souvent le pas sur les nombreux avantages qu'elle possède.

On trouve des références à partir des années 90 avec [11] et [12] qui montre des MADA en mode moteur et qui souligne leurs flexibilité ainsi que leur bonne performances dynamiques. A la fin des années 90, [13] présente un même dispositif de MADA en mode moteur. Dans cet article, les auteurs présentent une commande linéaire de la machine qui permet de maîtriser la fréquence minimale des courants ce qui diminue les contraintes thermiques des convertisseurs statiques qui alimentent la MADA et qui diminue les contraintes quant à leurs dimensionnement. D'autre références seront données sur la commande de MADA dans le chapitre II.

Nous allons voir dans cette partie son principe de fonctionnement, ses inconvénients mais également ses avantages.

1.3.3.1 Principe de fonctionnement de la MADA

Les machines synchrones et asynchrones peuvent être conçues avec des aimants pour l'une et un rotor à cage pour l'autre. Mais il existe une autre manière d'obtenir les caractéristiques de ces deux éléments. En effet, un champ magnétique fixe peut être créé par des bobines alimentées en courant continu. De même, la cage peut être remplacée par des bobines en court-circuit. Nous obtenons donc des machines dont le stator et le rotor sont bobinés. L'inconvénient majeur vient du fait que pour alimenter ou pour mettre en court-circuit ces bobines, il faut un collecteur et des balais, ce qui augmente les frottements liés au fonctionnement même de la machine. En effet, pour relier électriquement le rotor, qui par définition est une pièce en mouvement, on doit y fixer une partie conductrice appelée collecteur, sur laquelle viennent frotter des balais eux aussi conducteurs et fixes par rapport au stator. Le collecteur est relié électriquement aux bobines rotoriques, [14].

Un nouveau mode de fonctionnement devient cependant possible. Dans le cas des deux machines précédentes, seul le stator est alimenté par un système équilibré de tensions. Dans la configuration avec rotor bobiné, celui-ci peut aussi être alimenté par un système équilibré de tensions. Nous obtenons ainsi le fonctionnement en Moteur Asynchrone à Double Alimentation :

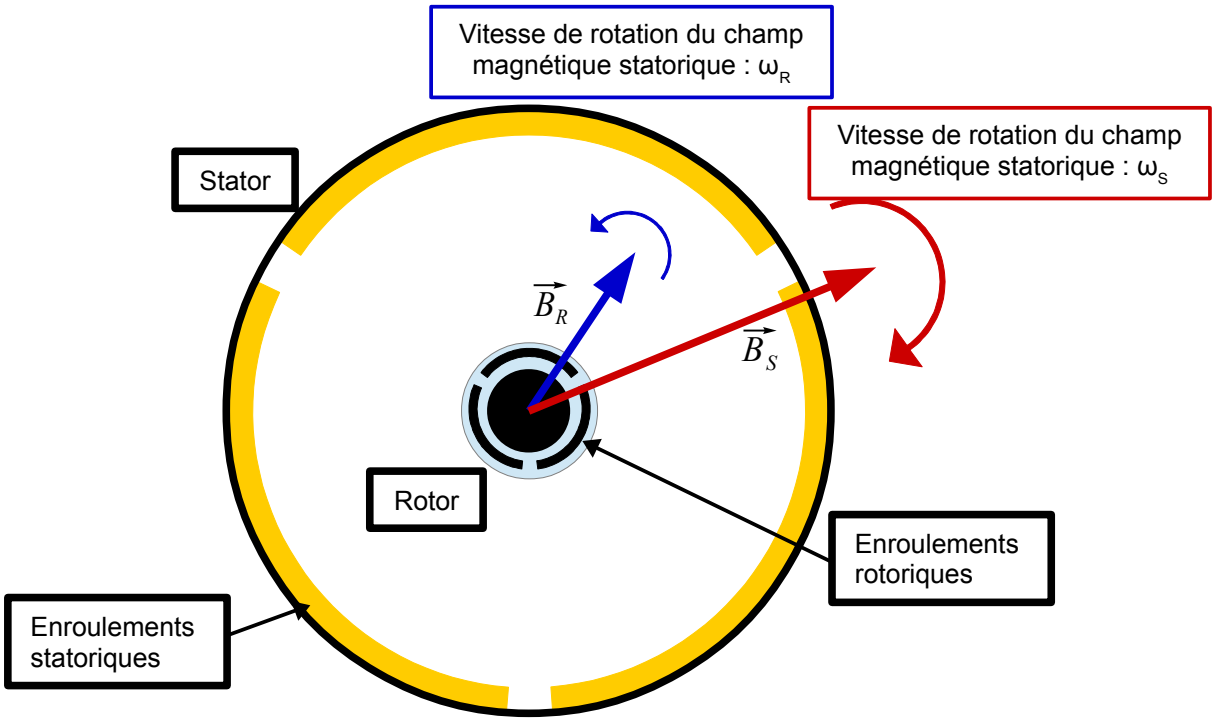

Figure 1.9: Schéma de principe d'une MADA

En faisant tourner les champs magnétiques $\vec{B}_R$ et $\vec{B}_S$ en sens opposé, on obtient une vitesse de rotation du rotor égale à la somme des vitesses des deux champs tournants. En d'autres termes :

$$\omega_{rotor} = \omega_S - \omega_R$$

Avec :

ω_{rotor} : La vitesse de rotation du rotor,

ω_S : La vitesse de rotation du champ magnétique statorique,

ω_R : La vitesse de rotation du champ magnétique rotorique (négative en mode moteur).

Cette configuration est souvent utilisée en générateur notamment pour les éoliennes, [15] [16]. Dans ce cas, c'est le pilotage de la fréquence de sortie qui est facilité par l'addition de la vitesse de rotation du rotor et de la fréquence d'alimentation des bobines rotoriques.

L'objectif est alors d'obtenir une fréquence de sortie du générateur fixe afin de raccorder ce dernier directement à un réseau électrique. Cependant, la vitesse du vent étant

fluctuante, la vitesse de rotation du rotor de la génératrice fluctuera également tout comme la fréquence des courants de sortie. Mais grâce à l'addition des fréquences dans cette machine, un pilotage de la fréquence d'excitation au rotor permet d'obtenir une fréquence de sortie constante.

1.3.3.2 Avantages et inconvénients de la MADA

Cette configuration comporte des avantages non négligeables :

- *Continuité de service* : Le rotor et le stator étant tous deux bobinés, en cas de défaillance d'un des deux convertisseurs, le stator ou le rotor peuvent être mis en court-circuit afin de transformer la MADA en machine asynchrone. On obtient ainsi une continuité de service.

- *Des convertisseurs statiques sous-dimensionnés en fréquence* : Les fréquences s'additionnant, les fréquences d'alimentation sont plus faibles que la fréquence de rotation du rotor. Il faut donc deux convertisseurs mais avec des fréquences nominales inférieures à la fréquence de rotation nominale de la machine. Cela permet d'avoir des convertisseurs moins gros et en double, ce qui, moyennant une stratégie appropriée, permet de continuer à faire tourner la MADA même si l'un des convertisseurs tombe en panne, [17].

- *Le fonctionnement à rotor bloqué* : Possible en ayant des fréquences électriques non nulles (en faisant tourner les deux champs dans le même sens). Pour cette configuration, la fréquence du champ rotorique est positive et égale à celle du champ statorique. Le rotor ne tourne donc pas mais les champs magnétiques, à leurs valeurs nominales, permettent la création d'un couple. On a donc un couple à vitesse nulle pour des fréquences d'alimentation non nulles. Les applications dans ce cas sont multiples, la traction, comme dans les voitures ou les trains, le levage etc...

Mais aussi quelques inconvénients :

- *Utilisation de bagues et balais* : Cette caractéristique augmente grandement les frottements internes de la machine.

- *Les forts couplages entre le rotor et le stator* : Il n'est pas présent dans les autres types de machines. Cela va poser un problème dans la commande de cette machine. Les commandes classiques vont être plus lourdes à mettre en place.

Nous allons voir ce phénomène en explicitant le modèle mathématique de la MADA dans la partie suivante.

1.4 Présentation du modèle de la MADA

Rappelons que l'objectif de cette étude est de trouver la commande optimale d'une MADA. Afin d'atteindre cet objectif, nous devons connaître le modèle de cette machine. Celui-ci doit être suffisamment précis afin de refléter au mieux la réalité cependant il ne devra pas

être trop complexe afin de pouvoir être utilisé au sein d'algorithmes d'optimisation de commande.

Pour ce faire, nous avons opté pour un modèle issu de la thèse de François Bonnet [18], qui a également servi dans l'article [19]. Ce modèle se base sur une machine asynchrone à rotor bobiné [20]. La différence notable est qu'au lieu de considérer les tensions rotoriques nulles, nous allons leur imposer des valeurs, [21] [22], [23].

Dans ce qui suit, nous allons poser les hypothèses qui permettent de rendre ce modèle suffisamment simple pour l'optimisation à laquelle nous procéderons par la suite.

1.4.1 Hypothèses sur le fonctionnement de la MADA

On considère une machine asynchrone triphasée à rotor bobiné comportant un stator fixe et un rotor mobile autour de l'axe de symétrie de la machine. Les encoches sont régulièrement réparties sur la face intérieure du stator. Elles contiennent trois enroulements identiques à Np paires de pôles. Les axes de ces bobines forment un angle électrique de 2π/3 entre eux.

Nous appliquerons les hypothèses simplificatrices habituelles dans la modélisation de moteurs électriques pour l'étude de cette machine :

- L'entrefer est considéré comme constant,
- L'effet d'encoche est négligé,
- La distribution spatiale des forces magnétomotrices est sinusoïdale,
- Le circuit magnétique n'est pas saturé et a une perméabilité constante,
- Les pertes magnétiques sont négligeables,
- Les influences de l'effet de peau et de la température sur les caractéristiques ne sont pas prises en compte.

Ces hypothèses nous donnent notamment les simplifications physiques suivantes :

- Addition des flux entre eux,
- Les inductances propres sont constantes,
- Les inductances mutuelles suivent une loi de variation sinusoïdale entre les enroulements statoriques et rotoriques en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques.

Ces hypothèses étant posées, nous pouvons donner les équations du modèle de la MADA.

1.4.2 Modèle mathématique de la MADA

Dans un moteur électrique, il existe trois types de dynamiques :

- Les variations thermiques qui représentent la dynamique la plus lente, de l'ordre de l'heure.

- Les variations mécaniques qui présentent une dynamique plus rapide, de l'ordre de la seconde.

- Les variations électriques, qui se trouvent être les plus rapides, de l'ordre de la milliseconde.

Nous allons donc, dans un premier temps, nous intéresser aux variations électriques, pour voir ensuite les variations mécaniques. Comme expliqué plus haut, les variations thermiques ne seront pas abordées ici. En effet ces dynamiques sont très longues à observer et nécessiteraient des temps de simulation bien trop importants. De plus sur les intervalles de temps que durent nos simulations (entre une et quelques secondes), l'influence de la température est négligeable.

1.4.2.1 Point de vue électrique :

Dans la perspective d'une optimisation de la commande de la MADA, nous allons tenter de réduire l'ordre du système en réduisant le nombre de variables dans les équations. Pour ce faire, nous allons exprimer le mode électrique de la MADA dans un repère diphasé ou base de Concordia (voir Annexe II) :

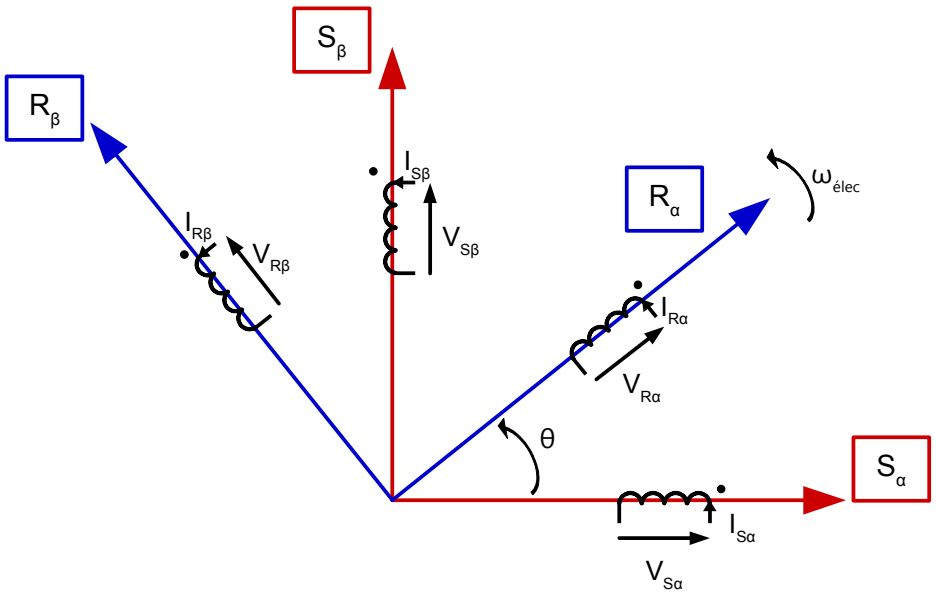

Figure 1.10: Repère diphasé

Nous avons donc :

- Les deux enroulements statoriques alignés sur les axes du repère (S_α, S_β) qui est fixe par rapport au stator,

- Les deux enroulements rotoriques alignés sur les axes du repère (R_α, R_β) qui est fixe par rapport au rotor et tournant à la vitesse $\omega_{élec}$ par rapport au repère (S_α, S_β),

- On note $I_{S\alpha}$ et $I_{S\beta}$ les courants dans les enroulements statoriques liés à (S_α, S_β),

- De même on note $I_{R\alpha}$ et $I_{R\beta}$ les courants dans les enroulements statoriques liés à (R_α, R_β),

- On note également $V_{S\alpha}$ et $V_{S\beta}$ les tensions aux bornes des enroulements statoriques,

- Enfin, on note $V_{R\alpha}$ et $V_{R\beta}$ les tensions aux bornes des enroulements rotoriques.

Pour finir, on note $\Phi_{S\alpha}$ et $\Phi_{S\beta}$ les flux créés par les courants $I_{S\alpha}$ et $I_{S\beta}$ et donc liés au repère fixe (S_α, S_β), ainsi que $\Phi_{R\alpha}$ et $\Phi_{R\beta}$, les flux créés par les courants $I_{R\alpha}$ et $I_{R\beta}$ et de fait, liés au repère mobile (R_α, R_β).

On exprime donc la relation entre les flux et les courants dans le repère $\alpha\,\beta$:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{S\alpha} \\ \Phi_{S\beta} \\ \Phi_{R\alpha} \\ \Phi_{R\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_S & 0 & M\cos(\theta) & -M\sin(\theta) \\ 0 & L_S & M\sin(\theta) & M\cos(\theta) \\ M\cos(\theta) & M\sin(\theta) & L_R & 0 \\ -M\sin(\theta) & M\cos(\theta) & 0 & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S\alpha} \\ I_{S\beta} \\ I_{R\alpha} \\ I_{R\beta} \end{bmatrix} \qquad 1.1$$

Avec :

L_S l'inductance cyclique statorique,

L_R l'inductance cyclique rotorique,

M l'inductance cyclique mutuelle entre le rotor et le stator,

$\Phi_{S\alpha}$ le flux statorique sur l'axe α,

$\Phi_{S\beta}$ le flux statorique sur l'axe β,

$\Phi_{R\alpha}$ le flux rotorique sur l'axe α,

$\Phi_{R\beta}$ le flux rotorique sur l'axe β,

$I_{S\alpha}$ le courant statorique sur l'axe α,

$I_{S\beta}$ le courant statorique sur l'axe β,

$I_{R\alpha}$ le courant rotorique sur l'axe α,

$I_{R\beta}$ le courant rotorique sur l'axe β.

Il existe une relation de proportionnalité entre les courants et les flux. On voit également apparaître le couplage fort qui existe entre le stator et le rotor. En effet, dans l'expression d'un des flux, apparaît trois des quatre courants, rotoriques comme statoriques.

Dans un souci de simplification, nous considérerons par la suite que :

$$\Phi_{SR\alpha\beta}=\begin{bmatrix}\Phi_{S\alpha}\\ \Phi_{S\beta}\\ \Phi_{R\alpha}\\ \Phi_{R\beta}\end{bmatrix} \quad \mathbf{I_{SR\alpha\beta}}=\begin{bmatrix}I_{S\alpha}\\ I_{S\beta}\\ I_{R\alpha}\\ I_{R\beta}\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{L}]=\begin{bmatrix}\mathrm{L_S} & 0 & \mathrm{M}\cos(\theta) & -\mathrm{M}\sin(\theta)\\ 0 & \mathrm{L_S} & \mathrm{M}\sin(\theta) & \mathrm{M}\cos(\theta)\\ \mathrm{M}\cos(\theta) & \mathrm{M}\sin(\theta) & \mathrm{L_R} & 0\\ -\mathrm{M}\sin(\theta) & \mathrm{M}\cos(\theta) & 0 & \mathrm{L_R}\end{bmatrix}$$

Et donc : $\Phi_{SR\alpha\beta}=[\boldsymbol{L}]\mathbf{I_{SR\alpha\beta}}$

Passons à présent à l'expression des tensions en fonction des courants :

$$\begin{bmatrix}V_{S\alpha}\\ V_{S\beta}\\ V_{R\alpha}\\ V_{R\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_S & 0 & 0 & 0\\ 0 & R_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & R_R & 0\\ 0 & 0 & 0 & R_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{S\alpha}\\ I_{S\beta}\\ I_{R\alpha}\\ I_{R\beta}\end{bmatrix}+\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Phi_{S\alpha}\\ \Phi_{S\beta}\\ \Phi_{R\alpha}\\ \Phi_{R\beta}\end{bmatrix} \qquad 1.2$$

avec :

$V_{S\alpha}$ le courant statorique sur l'axe α,

$V_{S\beta}$ le courant statorique sur l'axe β,

$V_{R\alpha}$ le courant rotorique sur l'axe α,

$V_{R\beta}$ le courant rotorique sur l'axe β,

R_S la résistance des enroulements statoriques,

R_R la résistance des enroulements rotoriques.

Cette formulation est classique pour une tension appliquée aux bornes d'une bobine à la différence près qu'il y en a quatre et qu'elles ont des inductances mutuelles.

Toujours en simplifiant, on considére que :

$$\mathbf{V_{SR\alpha\beta}}=\begin{bmatrix}V_{S\alpha}\\ V_{S\beta}\\ V_{R\alpha}\\ V_{R\beta}\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{R}]=\begin{bmatrix}R_S & 0 & 0 & 0\\ 0 & R_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & R_R & 0\\ 0 & 0 & 0 & R_R\end{bmatrix}$$

En combinant les équations 1.1 et 1.2, on obtient la relation suivante entre les tensions et

les courants :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}=[\mathbf{R}]\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}+\frac{d}{dt}[\boldsymbol{L}]\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta} \quad 1.3$$

En considérant, toujours selon les mêmes hypothèses, que le mode mécanique est bien plus lent que le mode électrique, on peut poser que la dérivée par rapport au temps *t* de *θ* est nulle.

On obtient donc :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}=[\mathbf{R}]\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}+[\boldsymbol{L}]\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta} \quad 1.4$$

Que l'on met sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}=-[\boldsymbol{L}]^{-1}[\mathbf{R}]\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}+[\boldsymbol{L}]^{-1}\mathbf{V}_{\mathbf{SR}\alpha\beta} \quad 1.5$$

On obtient ainsi une équation qui décrit la dynamique électrique du système du type : $\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}(u)$

Avec :

$\mathbf{X}=\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}$, $\mathbf{A}=-[\boldsymbol{L}]^{-1}[\mathbf{R}]$, $\mathbf{B}=[\boldsymbol{L}]^{-1}$, $\boldsymbol{\phi}(u)=\mathbf{V}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}$ et *u* la commande du système.

Cette formulation décrit la dynamique du système. Ceci sera utilisé pour définir le problème de contrôle optimal que nous allons considérer par la suite.

Par définition, nous avons l'équation des pertes Joule instantanées dans le moteur définies par l'équation suivante :

$$P_{Joule}(t)=3\mathrm{R}_S(I_{S\alpha}(t)^2+I_{S\beta}(t)^2)+3\mathrm{R}_R(I_{R\alpha}(t)^2+I_{R\beta}(t)^2) \quad 1.6$$

Ainsi que l'énergie Joule perdue par intégration des pertes Joule instantanées :

$$E_J=\int_0^{t_f}P_J(t)\,dt=\int_0^{t_f}3\mathrm{R}_S(I_{S\alpha}(t)^2+I_{S\beta}(t)^2)+3\mathrm{R}_R(I_{R\alpha}(t)^2+I_{R\beta}(t)^2)\,dt \quad 1.7$$

Ces équations nous permettrons de minimiser ces pertes par la suite.

Afin de terminer le modèle, nous allons maintenant nous intéresser à sa partie mécanique.

1.4.2.2 D'un point de vue mécanique :

Le lien entre la partie purement électrique et la partie purement mécanique se situe au niveau de la création du couple électromagnétique. En effet, l'interaction des champs magnétiques statorique et rotorique crée ce couple qui va permettre à la machine de

tourner.

En notant $\overrightarrow{\Phi_S}$ et $\overrightarrow{I_S}$, les vecteurs flux statorique et courant statorique exprimés dans un repère diphasé, le vecteur couple électromagnétique s'exprime par :

$\overrightarrow{C_{em}} = N_p(\overrightarrow{\Phi_S} \wedge \overrightarrow{I_S})$.

Afin d'exprimer le couple électromagnétique uniquement à l'aide des courants, on remplace $\overrightarrow{\Phi_S}$ par son expression en fonction de I_R et nous obtenons :

$$\overrightarrow{C_{em}} = N_p M (\overrightarrow{I_R} \wedge \overrightarrow{I_S}) \qquad 1.8$$

On peut ensuite prendre la norme de C_{em} pour avoir la valeur du couple électromagnétique :

C_{em} = (($M^2 pp^2$ *(($(\sqrt{6}(I_{R\alpha} L_R + I_{S\alpha} M\cos(\theta) + I_{S\beta} M\sin(\theta)))/6$ 1.9

- $(\sqrt{2}(I_{R\beta} L_R + I_{S\beta} M\cos(\theta) - I_{S\alpha} M\sin(\theta)))/2$)*

($(\sqrt{6}(I_{S\alpha} L_S + I_{R\alpha} M\cos(\theta) - I_{R\beta} M\sin(\theta)))/6$

+ $(\sqrt{2}(I_{S\beta} L_S + I_{R\beta} M\cos(\theta) + I_{R\alpha} M\sin(\theta)))$ /2)

-($(\sqrt{6}(I_{R\alpha} L_R + I_{S\alpha} M\cos(\theta) + I_{S\beta} M\sin(\theta)))/6$

+ $(\sqrt{2}(I_{R\beta} L_R + I_{S\beta} M\cos(\theta) - I_{S\alpha} M\sin(\theta)))$ /2)*

($(\sqrt{6}(I_{S\alpha} L_S + I_{R\alpha} M\cos(\theta) - I_{R\beta} M\sin(\theta)))/6$

- $(\sqrt{2}(I_{S\beta} L_S + I_{R\beta} M\cos(\theta) + I_{R\alpha} M\sin(\theta)))$ /2)) ^{2})/ $(L_R^2 L_S^2 (M^2/(L_R L_S) - 1)^2)$

+($M^2 pp^2$ *(($\sqrt{6}$ *($(\sqrt{6}(I_{S\alpha} L_S + I_{R\alpha} M\cos(\theta) - I_{R\beta} M\sin(\theta)))/6$

- $(\sqrt{2}(I_{S\beta} L_S + I_{R\beta} M\cos(\theta) + I_{R\alpha} M\sin(\theta)))/2$)* $(I_{R\alpha} L_R + I_{S\alpha} M\cos(\theta) + I_{S\beta} M\sin(\theta))$)/3

-($\sqrt{6}$ *($(\sqrt{6}(I_{R\alpha} L_R + I_{S\alpha} M\cos(\theta) + I_{S\beta} M\sin(\theta)))/6$

- $(\sqrt{2}(I_{R\beta} L_R + I_{S\beta} M\cos(\theta) - I_{S\alpha} M\sin(\theta)))$ /2)*

$(I_{S\alpha} L_S + I_{R\alpha} M\cos(\theta) - I_{R\beta} M\sin(\theta))$)/3) ^{2})/ $(L_R^2 L_S^2 (M^2/(L_R L_S) - 1)^2)$

+($M^2 pp^2$ *(($\sqrt{6}$ *($(\sqrt{6}(I_{S\alpha} L_S + I_{R\alpha} M\cos(\theta) - I_{R\beta} M\sin(\theta)))/6$

+ $(\sqrt{2}(I_{S\beta} L_S + I_{R\beta} M\cos(\theta) + I_{R\alpha} M\sin(\theta)))/2$)* $(I_{R\alpha} L_R + I_{S\alpha} M\cos(\theta) + I_{S\beta} M\sin(\theta))$)/3

-($\sqrt{6}$ *($(\sqrt{6}(I_{R\alpha} L_R + I_{S\alpha} M\cos(\theta) + I_{S\beta} M\sin(\theta)))/6$

+ $(\sqrt{2}(I_{R\beta}L_R+I_{S\beta}M\cos(\theta)-I_{S\alpha}M\sin(\theta)))/2$)*

$(I_{S\alpha}L_S+I_{R\alpha}M\cos(\theta)-I_{R\beta}M\sin(\theta))$)/3) ^{2})/ $(L_R^2L_S^2(M^2/(L_RL_S)-1)^2)$) $^{(1/2)}$

On applique ensuite le principe fondamental de la dynamique au rotor de la machine afin d'obtenir l'équation différentielle de la vitesse :

$$J\frac{d\Omega}{dt}=C_{em}-C_r$$

1.10

Avec :

- J l'inertie totale des pièces en mouvement ramenée au rotor,
- Ω la vitesse de rotation du moteur,
- C_{em} le couple électromagnétique,
- C_r le couple résistant. Ce dernier contient tous les couples négatifs appliqués au rotor de la machine à savoir, le couple de charge ainsi que le couple de frottement visqueux interne à la machine.

Nous avons à présent toutes les équations nécessaires pour caractériser la MADA. Ce modèle décrit fidèlement les différentes dynamiques sans pour autant rentrer dans les détails. Il est donc suffisamment complet sans être trop complexe pour réaliser la commande optimale de la MADA.

1.5 Conclusion

Dans cette première partie, nous avons pu montrer l'évolution des techniques de propulsion navale. Cette évolution a amené à de grandes innovations. Dans ce souci constant d'amélioration technique, la MADA vient essayer d'apporter une solution innovante par son fonctionnement. Son modèle étant posé nous allons essayer de profiter au maximum de ses capacités. Pour ce faire, nous pouvons soit réaliser une conception optimale de cette machine ou, à partir d'une MADA donnée, réaliser une optimisation de sa commande. Dans le cadre de notre étude, nous avons pris le parti de calculer la commande optimale de notre machine.

L'optimisation et la commande optimale, la deuxième thématique de cette thèse, seront donc abordées dans le chapitre suivant.

2 Chapitre II : La commande optimale

Sommaire

2 Chapitre II : La commande optimale....31
2.1 Introduction....32
2.2 L'optimisation....32
2.2.1 Principe....33
2.2.2 Les différents algorithmes....34
2.2.3 Exemple d'optimisation....36
2.3 La commande optimale....38
2.3.1 Qu'est-ce qu'une commande ?....38
2.3.2 Le principe du maximum de Pontryagin....40
2.3.3 Le tir direct....44
2.3.4 Le tir semi-direct....45
2.3.5 Exemple....46
2.4 Conclusion....55

2.1 Introduction

Depuis que l'Homme a créé l'outil il y a plus de deux millions d'années, il n'a cessé de tenter de l'améliorer. Dans un premier temps, ce perfectionnement consistait à remplacer un outil par un autre plus adapté et plus performant. De nos jours, cette constante recherche d'amélioration passe par l'optimisation des outils déjà en notre possession.

En effet, trouver des technologies entièrement nouvelles devient de plus en plus rare et complexe du fait de nombreuses années d'études déjà passées sur de nombreux systèmes. Si on veut créer un nouveau système, il faut qu'il soit optimisé afin de concurrencer ceux déjà existants et de le rendre le plus attractif possible ou encore de mieux répondre à de nouvelles normes comme la consommation électrique.

Dans ce chapitre, nous allons donc nous intéresser à l'optimisation d'une commande. Dans un premier temps nous allons voir ce qu'est l'optimisation, son principe de fonctionnement ainsi que certains algorithmes, puis nous allons étudier son application à la commande de systèmes.

2.2 L'optimisation

L'optimisation est une branche des mathématiques au même titre que les statistiques ou l'algèbre linéaire par exemple. Les prémisses de l'optimisation sont apparues au IIIème siècle avant notre ère [24]. Euclide a par exemple montré que le plus court chemin -un chemin parcourant une distance minimale- d'un rayon lumineux réfléchi sur un miroir entre le point A et C, est le chemin où l'angle d'incidence du rayon est égal à l'angle réfléchi. Ceci est représenté par le chemin en vert dans la figure suivante :

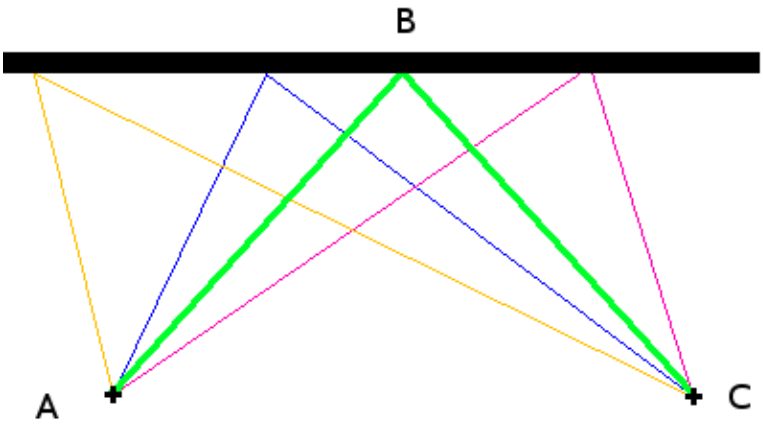

figure 2.1: Exemple d'une des première optimisation

Mais il faudra bien attendre le XIXème siècle, durant lequel les économistes vont montrer un intérêt croissant pour les mathématiques. En effet, les économistes s'en sont servis pour optimiser leurs modèles économiques. L'optimisation est reprend un essor et se développa pleinement.

2.2.1 Principe

Le principe mathématique de base de l'optimisation est simple : à partir d'une fonction $f(X)$ définie sur un ensemble $A \subset \Re^n$, l'objectif est de trouver les $X^* \in A$ pour lesquels, pour tout $X \in A$ sauf X^*, on a : $f(X^*) < f(X)$. On dit dans ce cas qu'on cherche à minimiser $f(X)$ que nous noterons $\min_{X \in A} f(X)$.

On appellera alors $f(X)$ la fonction objectif ou fonction coût. La variable sur laquelle on applique l'optimisation est X. L'ensemble A peut quant à lui être l'ensemble de définition de f ou alors l'espace des solutions, des valeurs admissibles de X. Cet ensemble représente souvent les contraintes appliquées à X, c'est à dire l'ensemble où les contraintes sont satisfaites.

Pour résoudre les problèmes d'optimisation, les différents algorithmes cherchent le point qui annule le gradient de la fonction objectif ou le point selle de Lagrange. Ils vérifient aussi que la dérivée seconde est strictement positive sur la solution, [25].

Nous présentons le cas d'une fonction à *n* variables X. Les fonctions à optimiser peuvent dépendre de n'importe quel nombre de variable, comme par exemple les dimensions d'un moteur électrique ou encore les nombreux paramètres d'un modèle économique [26]. Dans notre cas d'optimisation de commande, nous verrons que l'une des optimisations se fait sur 1200 variables.

De même, l'ensemble A est bien plus souvent représenté par des inégalités sur les différentes variables : $\forall i \, X_i \geq X_{min\,i}$ et $\forall i \, X_i \leq X_{max\,i}$ où X_{min} et X_{max} sont les limites de A. Ces inégalités sont aussi appelées contraintes puisqu'elles contraignent le système à respecter certaines limites. On peut aussi écrire ces contraintes sous la forme $X - X_{min} \geq 0$ et $X_{max} - X \geq 0$ puisque la plupart des algorithmes comparent les valeurs des contraintes par rapport à 0. Il existe également des contraintes d'égalité. Elles peuvent forcer des variables ou une relation entre des variables à une certaine valeur. On appellera par la suite $c(X) \geq 0$ les contraintes d'inégalité et $e(X) = 0$ les contraintes d'égalité, [27], [28].

Nous pouvons maintenant poser un problème d'optimisation sous sa forme générale :

$$\begin{aligned} &\min_X f(X) \\ &\text{sous les contraintes} \\ &c(X) \leq 0 \\ &e(X) = 0 \end{aligned}$$

Les exemples d'application de l'optimisation sont nombreux. Comme expliqué précédemment, l'économie s'est emparée de la question au siècle dernier afin d'optimiser ses modèles. Mais aujourd'hui, l'optimisation touche tous les domaines, comme le génie électrique, avec l'apparition de moteurs dont la conception a été optimisée, [29] [30] [31] [32].

Maintenant que le principe de l'optimisation est posé, nous allons présenter différents algorithmes permettant de résoudre un problème d'optimisation.

2.2.2 Les différents algorithmes

Nous avons été amené à utiliser le logiciel de calcul matriciel MATLAB afin de réaliser nos travaux. Ce logiciel intègre une fonction d'optimisation `fmincon` qui utilise quatre algorithmes différents pour résoudre des problème d'optimisation avec contraintes. Nous allons donc, dans un premier temps, les décrire. Puis, dans un second temps, choisir celui qui peut correspondre le mieux à notre problème.

2.2.2.1 Active set

Cet algorithme est intéressant, car il permet de réduire le nombre d'inégalité dans un problème.

Avec un jeu de contraintes de type $c_1(X)\geq 0 \cdots c_k(X)\geq 0$ cet algorithme détermine les contraintes actives et celles qui ne le sont pas. Si $c_i(X)=0$ alors cette contrainte est considérée comme active, elle peut être directement considérée comme une contrainte d'égalité. A l'inverse, si $c_i(X)>0$, elle est inactive donc non limitante et ne fera donc pas partie de l'active set : elle est tout simplement écartée du problème à résoudre. L'algorithme passe ainsi d'itérations avec un ensemble de contraintes inégalités (Active set) qui sont considérées comme contraintes d'égalités ou non.

Comme la solution d'un problème d'optimisation ne se situe pas forcément sur la frontière de son domaine de définition, cette méthode permet de dégager un sous-ensemble de contraintes active (limitantes) parmi les contraintes du problème et donc d'en réduire la difficulté, [33].

2.2.2.2 Sequential quadratic programming

Le principe de cette méthode est de résoudre plusieurs sous-problèmes d'optimisation qui sont des modèles quadratiques du problème principal. Les contraintes de ces sous-problèmes sont une linéarisation des contraintes principales, [34]. Le critère à minimiser est quant à lui approché de façon quadratique par un développement de Taylor à l'ordre 2.

Le but est de trouver plus facilement des pas de descente pour minimiser la fonction objectif et ainsi résoudre le problème.

Avec le cas général montré plus haut on a :

$$\begin{array}{l} \min\limits_{X} f(X) \\ \text{sous les contraintes} \\ c(X)\leq 0 \end{array} \quad \text{avec} \quad c(X)=[X-X_{min}\ ,\ X_{max}-X]$$

On calcule le Lagrangien du problème :

$$L(X,\lambda)=f(X)-\lambda^T c(X)$$

A une itération i , l'algorithme sqp définit une direction de recherche d_i comme une

solution au sous-problème quadratique suivant :

$$\min_d f(X_i)+\nabla f(X_i)^T d+\frac{1}{2}d^T\nabla^2_{xx}L(X_i,\lambda_i)d$$
$$\text{sous les contraintes}$$
$$c(X_i)+\nabla c(X_i)^T d\geq 0$$

Comme ce sous-problème est quadratique sous contrainte linéaire, on va le rendre convexe en remplaçant la matrice Hessienne par un matrice approchée $\mathbf{B}>0$. Il devient très facile a résoudre : cela revient à résoudre un système linéaire et on peut ainsi trouver la direction de recherche d_i .

La fonction de coût ainsi que les contraintes doivent être deux fois dérivables pour que cette méthode soit applicable.

2.2.2.3 Méthode de région de confiance

Voyons à présent cette méthode itérative qui, à partir d'un point, simplifie la fonction de coût sur une région dite de confiance. Sur cette région, l'approximation de la fonction est vraie d'où la notion de confiance. Cette région est un sous-ensemble de l'ensemble de définition de la fonction coût. La méthode va ainsi minimiser l'approximation sur la région de confiance. La taille de cette dernière peut être adaptée à chaque itération afin de faire suffisamment décroître la fonction coût.

Cette méthode peut être vue comme une technique de globalisation. Elle permet une très bonne convergence vers un minimum, au moins local, presque quelque soit le point de départ de l'optimisation. Cependant, elle est peu adaptée au problème de grande taille, [35].

2.2.2.4 Méthode des points intérieurs

Cette méthode des points intérieurs est efficace pour les problèmes convexes de grande taille, ce qui est notre cas.

Elle est itérative et son principe est simple :

L'algorithme déplace la solution dans la direction qui donne la meilleure diminution de la fonction de coût, tout en conservant cette solution dans le domaine admissible, [36].

Pour reprendre la formulation décrite plus haut : à partir d'un X^0 l'algorithme détermine un ΔX tel que $(X^0+\Delta X)\in A$ et que ce ΔX permette la plus grande diminution possible de $f(X)$. Pour être sûr que ΔX soit la meilleure amélioration de X , on projette le gradient de $f(X)$ sur les contraintes, l'ensemble A (gradient projeté).

On posera ensuite $X^1=X^0+\Delta X$ puis l'algorithme recherchera un autre ΔX sous les mêmes conditions que précédemment mais à partir de X_1.

Pour maintenir les X^i dans le domaine de définition de f , cet algorithme crée des

fonction dite barrière logarithmique. Ces fonctions génère un nouveau Lagrangien contenant des fonction logarithmique. Ce nouveau Lagrangien va devenir très grand en se rapprochant des valeurs limites des contraintes et donc pénaliser d'autant plus ces solutions. On force ainsi la recherche de solution à l'intérieur du domaine A .

Cette dernière méthode est la seule à nous donner des résultats concluants pour nos problèmes de commande optimale.

Les bases de l'optimisation étant posées nous allons à présent passer à un pan plus spécifique de cette branche des mathématiques qu'est la commande optimale.

2.2.3 Exemple d'optimisation

Pour illustrer notre propos nous allons présenter un exemple d'optimisation d'une fonction à deux variables.

Nous allons minimiser la fonction de Levi numéro 13 :

$$f(X)=\sin^2(3\pi X_1)+(X_1-1)^2(1+\sin^2(3\pi X_2))+(X_2-1)^2(1+\sin^2(2\pi X_2))$$ [37].

avec $X=[X_1\ X_2]$.

Nous connaissons le minimum de cette fonction, ce qui nous permettra de valider une solution. Ce minimum est $(1,1)$ avec $f(1,1)=0$.

Pour limiter l'espace des solutions nous bornerons les deux variables sur lesquelles nous allons agir, X_1 et X_2 , entre -10 et 10.

Le problème est donc :

$$\min_{X\in[-10;10]^2} f(X)=\sin^2(3\pi X_1)+(X_1-1)^2(1+\sin^2(3\pi X_2))+(X_2-1)^2(1+\sin^2(2\pi X_2))$$

Nous utilisons pour cette optimisation, la fonction `fmincon` de Matlab :

```
[vecteur solution, valeur de la solution, flag] = fmincon ('Fonction objectif',
vecteur initial, [], [], [], [], borne(s) inférieure(s), borne(s) supérieure(s),
'fonction de contrainte', option)
```

Avec :

- vecteur solution : C'est un vecteur contenant la solution de l'optimisation.
- valeur de la solution : C'est la valeur de la fonction objectif pour le vecteur solution.
- flag : C'est une variable qui rend compte de la réussite de l'optimisation. Selon sa valeur, nous pouvons déterminer si l'optimisation a réussie et dans quelle mesure.
- Fonction objectif : C'est la fonction qui, à partir du vecteur à optimiser, va donner la

grandeur à minimiser.

- vecteur initial : C'est le point de départ de l'optimisation.

- borne(s) inférieure(s) et borne(s) supérieure(s) : Ce sont les valeurs limites du vecteur à optimiser. Borner ce vecteur permet de réduire l'espace des solutions admissibles ce qui augmente les chances de réussite de l'optimisation.

- Fonction de contrainte : Cette fonction, à partir du vecteur à optimiser, calcule toutes les contraintes du problème.

- Option : C'est ici que nous pouvons régler toutes les tolérances sur le respect des contraintes ainsi que sur les conditions d'optimalité. Nous pouvons aussi choisir l'algorithme d'optimisation que la fonction va utiliser pour résoudre notre problème.

Dans ce cas à deux variables, utiliser la fonction de contrainte ou les bornes inférieures et supérieures est équivalent.

Pour prendre en compte la limitation de l'espace de définition de f, nous utiliserons la fonction de contrainte, laissant ainsi « vide » les bornes supérieures et inférieures. On mettra donc [] en langage MATLAB pour signifier qu'il n'y aura pas de bornes supérieures ou inférieures.

La fonction objectif est bien sûr la fonction f et les options sont laissées par défaut. Ces dernières n'ont pas d'impact sur le résultat dans cet exemple.

Nous choisissons un point de départ aléatoire mais inclus dans les bornes.

La fonction *f* possède une grande quantité de minima locaux et ce, même avec le domaine de définition réduit que nous avons imposé. Il faudra donc lancer la fonction fmincon plusieurs fois avec différentes valeurs de départ afin d'obtenir un résultat correct. Cette technique est communément appelée méthode multistart : ou on fait des statistiques en effectuant plusieurs optimisation locales en fonctions de plusieurs points de départs généralement tirés aléatoirement dans le domaine. On choisira le meilleur résultat parmi tout ceux obtenus avec nos différents points de départ.

Pour 400 points de départ différents, nous obtenons le résultat attendu avec $x^* = y^* = 1$ et $f(1,1) = 9.6782^{-16} \approx 0$.

Nous avons décidé de tracer les valeurs de la solution en fonction du lancer de `fmincon` :

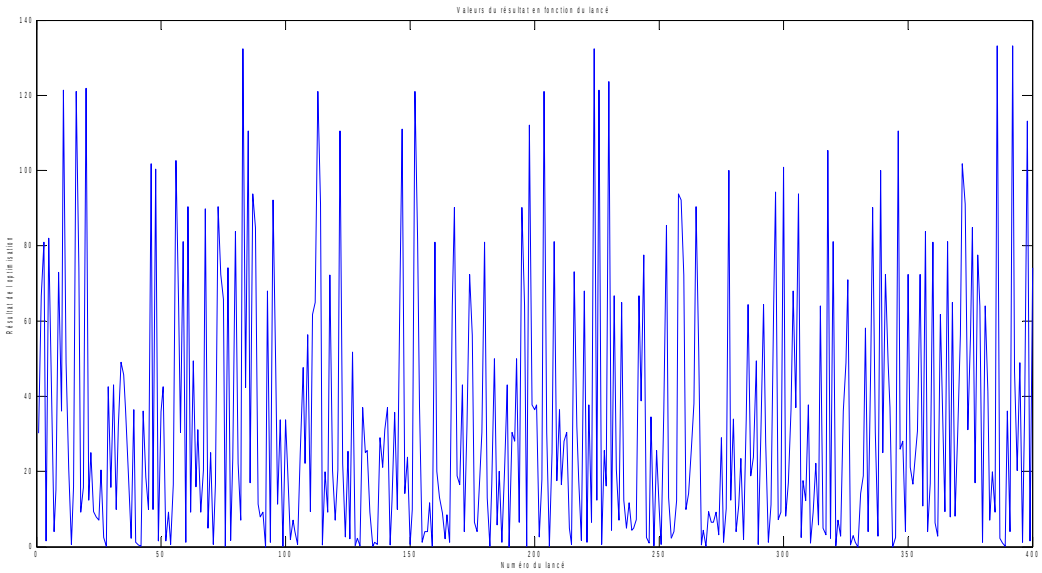

Figure 2.2: Résultats de l'optimisation lancée 400 fois

On voit des valeurs très disparates de solutions, entre 0 et 140. Ces valeurs correspondent toutes à des minima locaux. La fonction `fmincon` ne trouve le minimum global à $f(x^*, y^*) < 1^{-15}$ seulement 6 fois sur 400 lancers soit 1,5% et nous sommes dans le cas d'une fonction à optimiser à deux variables. On se rend compte directement de l'intérêt d'utiliser une telle méthode multistart.

2.3 La commande optimale

Dans cette partie nous allons voir l'application de l'optimisation à la commande d'un système. Pour ce faire, nous allons tout d'abord définir ce qu'est une commande pour voir ensuite quels sont les grands principes de la commande optimale.

2.3.1 Qu'est-ce qu'une commande ?

Définissons tout d'abord ce qu'est une commande dans son acception commune et générale. Le dictionnaire nous donne cette définition :

n.f. Action d'agir sur un mécanisme, [38].

Dans le cadre de l'automatique, la commande d'un système est la loi mathématique qui permet, en agissant sur certaines grandeurs dites de contrôle, d'obtenir un comportement souhaité de ce système.

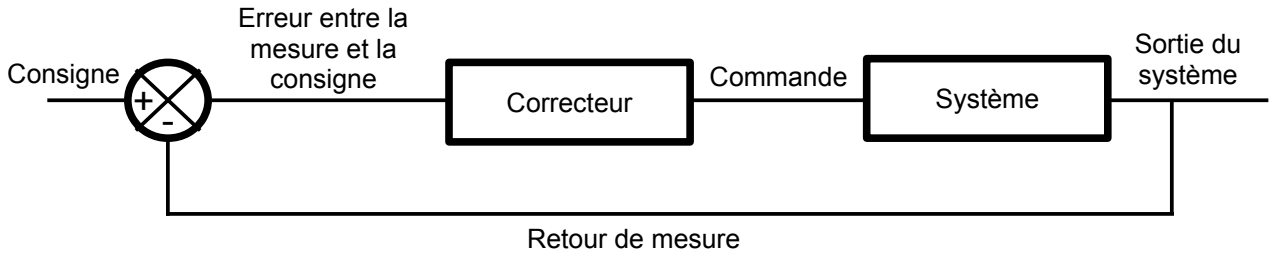

figure 2.3: Schéma de principe d'une commande en boucle fermée

Pour prendre un exemple dans le domaine du génie électrique, on peut commander la vitesse de rotation d'un moteur (Sortie du système) en l'alimentant avec le système de tension adéquat (Commande) calculé par un correcteur en fonction de la vitesse actuelle du moteur (Retour de mesure) et de la consigne.

Il existe également des commandes sans retour de mesure qui sont dites en boucle ouverte. Parmi ces commandes on pourra citer la commande en V/f constant.

Nous avons présenté ici le fonctionnement d'une commande dite en temps réel. En effet, à tout instant le correcteur calcule une commande de manière à ce que le système atteigne la consigne.

De très nombreux travaux portent déjà sur ces correcteurs comme [39] et [40] et en particulier sur la MADA comme les travaux de Mustafa Debbou [17], de François Bonnet [18], de George Salloum [41] ou encore de R. Ghosn [42] [43].

Cependant ici, nous avons étudié une autre forme de commande, une commande qui n'est pas en temps réel et qui se calcule donc *a priori* et que nous avons optimisé.

Tout d'abord, on modélise le système qu'on veut commander :

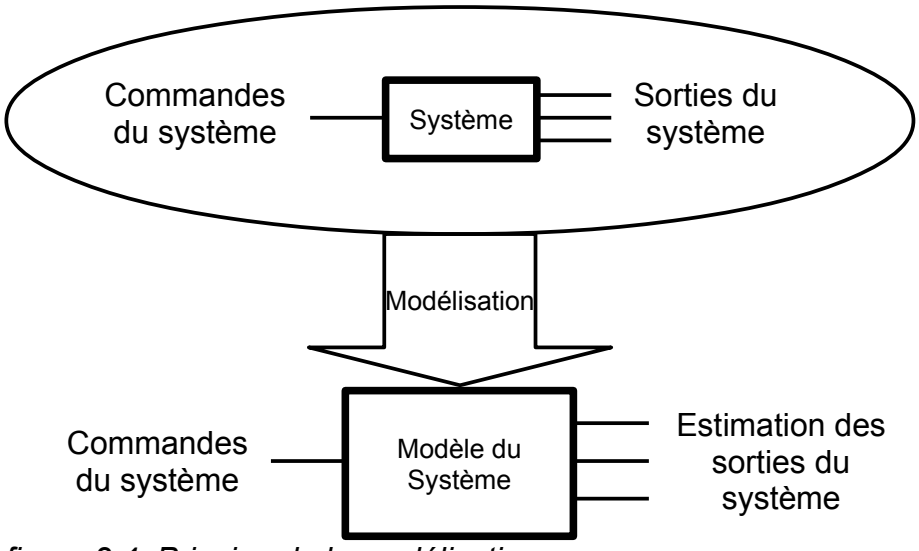

figure 2.4: Principe de la modélisation

Une fois le modèle du système donné par les équations du chapitre I, nous avons un outil mathématique permettant de prédire le comportement du système. Cet outil va permettre d'optimiser la commande sous certaines contraintes sur cette commande ainsi que sur

tout ou partie des sorties du système, pour obtenir un minimum d'une ou plusieurs de ces mêmes sorties.

Une fois cette optimisation réalisée, on peut appliquer la commande optimale au système :

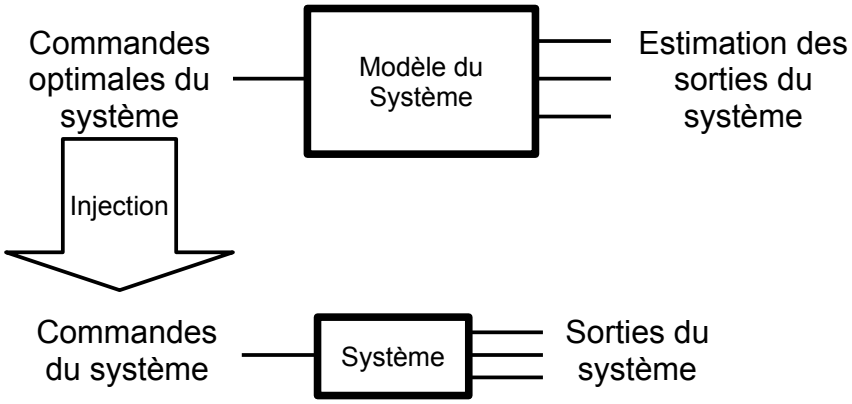

figure 2.5: Utilisation d'une commande optimale

Si la modélisation est suffisamment précise, on retrouvera bien le comportement simulé et donc optimal du système. Toutefois, comme cela est dit dans le chapitre précédent, un modèle trop précis peut rendre l'optimisation trop complexe à réaliser.

Le concept de commande optimale étant posé, nous allons donner les conditions nécessaires d'optimalité dans ce cas. Elles sont issues du principe du maximum de Pontryagin qu'on notera PMP par la suite, [44].

2.3.2 Le principe du maximum de Pontryagin[3]

2.3.2.1 Principe général

Ce principe nous donne une condition nécessaire d'optimalité locale, [45] [46] [47].

On considère le système d'équations aux dérivées ordinaires :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad . \qquad 2.1$$

La fonction f peut être convexe sur son ensemble de définition, mais ce n'est pas une condition nécessaire afin de trouver le minimum de la fonction. En effet, si f est concave, la solution se trouvera sur une des extrémités de son domaine de définition. Nous ne pourrons alors pas être sûr d'avoir un minimum global mais peut être seulement un minimum local.

On appellera $u(t)$ la fonction de contrôle qui peut être à plusieurs dimensions. Cette ou ces fonction(s) doit(vent) être définie(s) et bornée(s) sur un espace quelconque.

Pour rappel u et x sont à plusieurs dimensions :

3 Lev Pontryagin est un mathématicien russe né en 1908 à Moscou. Il perdit l'usage de ses yeux suite à un accident à l'age de 14 ans mais cela ne l'empêcha pas de formuler le principe du maximum dans les année 50 et d'être l'un des plus grands mathématiciens du siècle dernier.

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \quad .$$

On a donc n équation d'état :

$$f(t)=\begin{pmatrix} f_1(x(t),u(t)) \\ f_2(x(t),u(t)) \\ \vdots \\ f_n(x(t),u(t)) \end{pmatrix}$$

Prenons maintenant deux points distincts de l'espace de définition de f. Soient X_0 et X_1 que l'on appellera point de départ pour X_0 et point d'arrivée pour X_1. On va chercher à avoir le chemin le moins coûteux entre ces deux points. On définit la fonction de coût d'un contrôle $u(t)$ sur la plage de temps $[0,T]$:

$$C(T,u)=\int_0^T f_0(x(t),u(t))\,dt \qquad 2.2$$

On obtient alors un problème de contrôle optimal de la forme :

$$\begin{gathered} \min_{u,x,T} C=\int_0^T f_0(x(t),u(t))\,dt \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{x}(t)=f(x(t),u(t)) \\ x_{min}<x(t)<x_{max} \text{ et } u_{min}<u(t)<u_{max} \\ x(0)=X_0 \\ x(T)=X_f \end{gathered} \qquad 2.3$$

Le problème de contrôle optimal est donc de trouver une trajectoire entre X_0 et X_1 qui minimise la fonction de coût *C* avec le temps final T (fixé ou non) tout en respectant les contraintes sur x et u.

Dans notre cas, le temps final T sera fixe.

Nous pourrions rajouter à notre fonction de coût une fonction qui représenterait le coût terminal. Cette fonction peut représenter par exemple une fonction de pénalité en fonction du temps final si celui-ci n'est pas fixé. Cependant, dans notre cas, nous n'avons pas de coût terminal, nous expliciterons donc le principe du maximum de Pontryagin sans cette fonction.

Le principe du maximum de Pontryagin nous donne une condition nécessaire d'optimalité. On commence par poser le Hamiltonien de notre problème :

$H(x(t),z(t),u(t))=z_0 f_0(x(t),u(t))+\sum_{i=0}^{n} z_i(t) f_i(x(t),u(t))$ où les z_i sont les

covariables d'état qui vont nous permettre de résoudre notre problème.

La constante z_0 peut être choisie à 1 pour rechercher le minimum du Hamiltonien, ou à -1 pour en chercher le maximum. Dans notre cas $z_0=-1$.

Le cas où $z_0=0$ est un cas très particulier qui nécessite beaucoup de précautions comme dans [48].

On définit maintenant le système d'équation aux dérivées ordinaires qui régi les différentes variables :

$$\dot{x}(t)=\nabla_z H(x(t),z(t),u(t)) \quad , \qquad 2.4$$

$$\dot{z}(t)=-\nabla_x H(x(t),z(t),u(t)) \quad , \qquad 2.5$$

On peut alors trouver la commande u qui maximise le Hamiltonien :

$$u^*(x(t),z(t))=\underset{u\in U}{\operatorname{argmax}}\, H(x,z,u) \quad . \qquad 2.6$$

On peut également définir la valeur des covariables d'état aux extrémités d'après les conditions de transversalité suivantes :

$$z(0)\perp T_{x(0)}X_0 \quad , \quad z(T)\perp T_{x(T)}X_1$$

Ce vecteur permet de palier le manque de conditions initiales ou, dans notre cas, le manque de conditions finales si elles ne sont pas fixées. Dans notre cas, cela va générer : $z_i(T)=0$.

Puisque f et f_0 ne dépendent pas directement de t , le système est dit autonome et donc l'Hamiltonien H ne dépendra pas non plus de t. On a donc :

$$\forall t\in[0,T], H(x^*(t),z^*(t),u^*(t))=\text{Constante} \quad . \qquad 2.7$$

Remarque : La constante est nulle si le temps final T est non fixé.

On pose maintenant la définition suivante : Une extrémale du problème de contrôle optimal est un triplet $(x(t),z(t),u(t))$ solution des équations 2.4, 2.5, 2.6.

En résumé, la méthode du Principe du Maximum de Pontryagin peut se formuler de manière suivante :

- étape 1 : on calcule l'Hamiltonien du système et on fixe $z_0=-1$.
- étape 2 : on trouve la commande optimale en fonction de x et de u : $u^*(x(t),z(t))=\underset{u\in U}{\operatorname{argmax}}\, H(x,z,u)$
- étape 3 : on résout le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\dot{x}(t)=\nabla_z H(x(t),z(t),u^*(t))$$

$$\dot{z}(t)=-\nabla_x H(x(t),z(t),u(t))$$

La résolution de ce système nous donne $x^*(t)$ et $z^*(t)$

– étape 4 : on retrouve u^* avec $H(x^*(t),z^*(t),u^*(x^*(t),z^*(t)))=\text{Constante}$

Nous avons présenté ici une version simplifiée du principe du maximum de Pontryagin adaptée à la résolution de problème généraux de commande optimale. Il existe des versions plus générales comme dans [45] ou [48].

2.3.2.2 Application : la méthode du tir indirect

On réalise les étapes 1 et 2 à la main. C'est à partir de l'étape 3 que nous allons utiliser la méthode du tir indirect qui est en fait une méthode numérique de résolution de problèmes de commande optimale s'appuyant sur le principe du maximum de Pontryagin.

L'étape 3 concerne la résolution du système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\dot{x}(t)=\nabla_z H(x(t),z(t),u^*(t))$$

$$\dot{z}(t)=-\nabla_x H(x(t),z(t),u^*(t))$$

On se place ici dans le cas simple où les conditions initiales et finales sont connues :

$x(0)=X_0$ et $x(T)=X_f$.

On remarque que si on choisit une valeur pour $z(0)$, on peut résoudre ce système, en utilisant un intégrateur numérique de type Euler, RK2 ou RK4 avec pour condition initiale $x(0)=X_0$ et $z(0)=Z_0$.

Parmi toutes les valeurs des différentes variables que nous obtenons en résolvant notre système, la valeur finale de x est celle qui nous intéresse. En effet on doit avoir $x(T)=X_f$.

On définit alors une fonction S , dite de tir, qui va de $\Re^n$ dans $\Re^n$ et telle que :

$$S : Z_0 \underset{(Euler,\,RK2,\,RK4)}{\rightarrow} x(T)$$

On doit donc résoudre le système de n équations non linéaires à n inconnues suivant :

Trouver Z_0 tel que $S(Z_0)=X_f$

On peut par exemple utiliser la fonction `fsolve` de MATLAB pour trouver ce Z_0 . Cette fonction est basée sur un algorithme de Newton dépendant d'un point de départ.

Les avantages de cette méthode sont le nombre de variable réduit, il n'y en a que n et le problème ne dépend pas du temps et donc pas directement de la discrétisation non plus. Cette méthode est de plus très précise.

Les inconvénients sont la prise en compte difficile des contraintes sur x , la difficulté dans certains cas à trouver le u^* et sa grande sensibilité au point de départ pour Z_0 .

La présentation du principe du maximum de Pontryagin étant faite, nous pouvons passer à la description de la méthode du tir direct.

2.3.3 Le tir direct

Le principe de cette méthode est simple [48]. On discrétise le temps de 0 à T en intervalles réguliers par pas h. On peut déterminer le nombre de points N par $N = T/h$.

On se retrouve alors avec un problème d'optimisation statique de grande taille sous contraintes.

De plus, avec cette formalisation, la fonction de coût qui était une intégrale, devient ici une somme.

Prenons un problème de contrôle optimal continu simple :

On a une fonction f à valeur dans $\Re$:

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ avec $t \in [0, T]$.

Nous avons le point de départ $x(0) = X_0$ et le point d'arrivée $x(T) = X_1$.

On pose le coût de cette fonction sur [0,T] :

$$C = \int_0^T f(x(t), u(t))\, dt \qquad 2.9$$

Nous avons également des contraintes sur $x(t)$ et $u(t)$

$$\forall t \in [0, T]\; x_{min} < x(t) < x_{max} \text{ et } u_{min} < u(t) < u_{max} \qquad 2.10$$

On a donc le problème suivant :

$$\begin{aligned} &\min_u C = \int_0^T f(x(t), u(t))\, dt \\ &\text{sous les contraintes} \\ &\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ &x_{min} < x(t) < x_{max} \text{ et } u_{min} < u(t) < u_{max} \\ &x(0) = X_0 \\ &x(T) = X_f \end{aligned} \qquad 2.11$$

Appliquons maintenant la méthode du tir direct à ce problème :

L'espace de temps $[0,T]$ est divisé en N intervalles de durée h.

La fonction *f* reste inchangée mais l'expression de $\dot{x}$ elle change :

$x^{j+1}=x^j+hf\left(x^j,u^j\right)$ avec un intégrateur d'Euler. On pourrait utiliser un autre intégrateur comme RK2 ou RK4.

Les points de départ restent les mêmes. Il en va de même pour les contraintes sur les états initiaux et finaux ainsi que celles sur la durée du parcours. Cependant, la fonction de coût est approchée par :

$$C\approx\sum_{j=0}^{N} hf\left(x^j,u^j\right) \quad \text{avec} \quad x^j\approx x\left(t^j\right) \qquad 2.12$$

Le problème devient alors :

$$\begin{gathered}\min_{u,x} C=\sum_{j=0}^{N} hf\left(x^j,u^j\right)\\ \text{sous les contraintes}\\ x^{j+1}=x^j+hf\left(x^j,u^j\right)\\ x_{min}<x^j<x_{max}\ \text{et}\ u_{min}<u^j<u_{max}\\ x^0=X_0\\ x^N=X_f\end{gathered} \qquad 2.13$$

L'avantage de cette méthode est de s'adapter parfaitement à un traitement informatique d'un problème de contrôle optimal. De plus, cette méthode peut parfaitement intégrer les contraintes sur les variables d'état x et sur le contrôle u. Nous pouvons également, du fait de la discrétisation du problème, contraindre uniquement un point parmi les N, à une certaine valeur, ce qui sera très utile dans notre cas. Cependant, elle crée un problème d'optimisation statique à $N*(n+m)$ variables, où n est la dimension de x et m la dimension de u. Si l'intervalle $[0,T]$ est grand et/ou si h est petit, le nouveau problème peut être de très grande dimension, ce qui sera notre cas.

2.3.4 Le tir semi-direct

Cette méthode est identique à la méthode du tir direct à un seul détail près : Au lieu de considérer l'équation d'état $x^{j+1}=x^j+hf\left(x^j,u^j\right)$ comme une contrainte, on la calcule directement.

Le problème présenté en 2.13 devient alors :

$$\min_{u} C = \sum_{j=0}^{N} hf\left(x_{\mathrm{NUM}}^{j}, u^{j}\right) \text{ avec } x_{\mathrm{NUM}}^{j+1} = x_{\mathrm{NUM}}^{j} + hf\left(x_{\mathrm{NUM}}^{j}, u^{j}\right)$$

$$\text{sous les contraintes}$$

$$x_{min} < x_{\mathrm{NUM}}^{j} < x_{max} \text{ et } u_{min} < u^{j} < u_{max}$$

$$x^{0} = X_{0}$$

$$x^{N} = X_{f}$$

Cette différence apparemment minime permet de réduire le nombre de variables et de contraintes de notre problème. En effet, il n'y a plus que les u_i variable à optimiser au lieu des x_i et des u_i et une contrainte par pas de temps disparaît également. On réduit donc le nombre de variables et de contraintes de $N*n$ avec n la dimension de x .

Le reste du fonctionnement reste inchangé et les avantages demeurent les mêmes.

Cette méthode générant un problème de moins grande taille que celle du tir direct, nous choisirons celle-ci par la suite. De plus il est très facile de rajouter des contraintes sur les variables d'états ainsi que sur les commandes dans ces méthodes de tir direct.

2.3.5 Exemple

Nous allons ici calculer la commande optimale d'un système simplifié issu du sujet de cette étude. Cet exemple n'a pas pour vocation d'être réaliste mais d'illustrer les théories expliquées plus haut.

2.3.5.1 Présentation du problème

Nous allons prendre uniquement la partie mécanique d'un moteur. Nous utiliserons celle du moteur étudié cf 1.4.2.2. Son équation différentielle est :

$$J\frac{d\,\Omega}{dt} = C_{em} - C_{r}$$

On prendra $J = 0{,}0426$ et $C_r = f\,\Omega = 0{,}0027\,\Omega$

Mis sous forme d'équation d'état on obtient:

$\dot{\Omega} = \dfrac{(C_{em} - f\,\Omega)}{J}$ soit $\dot{X} = AX + B(u)$ avec $X = \Omega$, $A = \dfrac{-f}{J}$ et $B(u) = \dfrac{Cem}{J}$.

La commande u sera le couple électromagnétique C_{em} que nous piloterons directement. C'est bien sûr délicat à réaliser dans la réalité, mais nous sommes ici dans un exemple hypothétique.

L'objectif de notre optimisation est de faire passer Ω de 0 à 180 rad/s en 3 secondes tout en minimisant l'énergie de sortie du moteur à savoir

$E=\int_0^{t_{final}} P(t)\,dt=\int_0^{t_{final}} C_{em}(t)\Omega(t)\,dt$ avec la contrainte de ne dépasser ni la vitesse finale de 180 rad/s ni le couple maximal admissible par cette machine à savoir 71,4 Nm.

On a donc le problème suivant :

$$\min_{C_{em}} E=\int_0^{T_{final}} C_{em}(t)\Omega(t)\,dt$$
$$\text{sous les contraintes}$$
$$\dot{\Omega}=\frac{(C_{em}-f\,\Omega)}{J}$$
$$0<\Omega(t)<180\,\text{rad/s et } 0<C_{em}(t)<71{,}4\,\text{Nm}$$
$$\Omega(0)=0$$
$$\Omega(T)=180\,\text{rad/s}$$

Nous allons le résoudre de deux manières différentes. D'abord avec le principe du maximum de Pontryagin puis avec la méthode du tir semi-direct.

2.3.5.2 Résolution avec le PMP

Pour commencer, nous calculons l'Hamiltonien du système :

$$H=z_0(C_{em}\Omega)+z_1\left(\frac{C_{em}-f\,\Omega}{J}\right)$$

Comme nous cherchons à maximiser cet Hamiltonien par rapport au couple électromagnétique, on prendra $z_0=-1$, soit :

$$\max_{C_{em}} H=C_{em}\left(-\Omega+\frac{z1}{J}\right)-\frac{z_1 f\,\Omega}{J}$$

La première étape est terminée, passons maintenant à la deuxième étape.

Le seul terme dans cette équation qui dépend de C_{em} est $C_{em}(-\Omega+z_1/J)$. Pour maximiser le Hamiltonien par rapport à C_{em} , il faut donc maximiser ce terme.

Nous avons alors deux possibilités. Si $(-\Omega+z_1/J)>0$ alors $C_{em}=C_{em\,max}=71{,}4\,\text{Nm}$ et si $(-\Omega+z_1/J)<0$ alors $C_{em}=0$. Nous avons donc une commande de type bang bang [49], où la variable de commande ne peut prendre que deux valeurs, sa valeur maximale ou sa valeur minimale. Autrement dit :

$$u^*=C_{em}^*=\begin{cases}0 \text{ si } (-\Omega+z_1/J)<0\\ C_{em\,max} \text{ sinon}\end{cases}$$

Nous avons donc le contrôle optimal u^* de notre système. Il nous faut maintenant déterminer le signe de $(-\Omega+z_1/J)$ sur le parcours et donc les valeurs de $\Omega(t)$ et de $z_1(t)$, afin de connaître la valeur de C_{em} à tout instant.

Pour cela, il nous faut passer à l'étape 3 et résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{\Omega}(t)=\frac{C_{em}^{*}(t)-f\,\Omega(t)}{J}$$
$$\dot{z_1}(t)=C_{em}^{*}(t)+\frac{z_1(t)\,f}{J}$$

en sachant que $C_{em}^{*}=[0\,;C_{em\ max}]$, que $\Omega(0)=0\,\mathrm{rad/}s$ et que $\Omega(t_{final})=180\,\mathrm{rad/}s$

Nous allons résoudre ce système numériquement grâce à la méthode du tir indirect. Pour cela nous créons une fonction S qui à partir de la valeur de $z_1(0)$ va calculer, par la méthode d'Euler, les valeurs de $C_{em}(t)$, $\Omega(t)$ et de $z_1(t)$ pour tout $t\in[0\,;t_{final}]$. Cette fonction aura pour résultat la valeur de $\Omega(t)$ au temps final.

Comme S est une fonction de $\Re$ dans $\Re$, il est même possible de visualiser son résultat pour différentes valeurs de $z_1(0)$. Malheureusement, au vu du problème, cette fonction n'a que deux résultats pour des valeurs de $z_1(0)$ comprise entre -10^{50} et 10^{50} :

$$S=\begin{Bmatrix} 0 \text{ si } z_1(0)<0 \\ 4566 \text{ si } z_1(0)\geq 0 \end{Bmatrix}$$

Il nous est donc impossible de trouver le $z_1(0)$ tel que $\Omega(t_{final})=180\,\mathrm{rad/}s$ par cette méthode.

Cependant, le principe du maximum de Pontryagin nous a permis de déterminer que le couple électromagnétique C_{em} doit être soit égal à sa valeur maximale soit nul. Afin de minimiser l'énergie produite par le moteur sur un démarrage, nous pouvons dire qu'il faut que ce couple soit à sa valeur maximale le moins longtemps possible au cours des trois secondes de démarrage. De plus, pour maximiser son effet, le couple électromagnétique devra être à sa valeur maximale de manière continue. Nous pouvons donc déterminer *a priori* que le couple électromagnétique sera nul au début du démarrage puis passera à sa valeur maximale à partir d'un certain temps pour faire démarrer le moteur. Nous aurons donc un échelon de couple à un certain temps $t_{départ}$. Il nous faut maintenant déterminer ce temps.

Pour ce faire, il suffit de regarder l'équation d'état de notre problème en se plaçant dans le cas où $C_{em}=C_{em\ max}=71{,}4\ \mathrm{Nm}$:

$\dot{\Omega}=\frac{(71{,}4-f\,\Omega)}{J}$ où f et J sont des constantes.

On résout alors cette équation différentielle du premier ordre pour obtenir l'équation de Ω en fonction du temps :

$$\Omega(t)=\frac{-71,4}{f}e^{\frac{-f}{J}t}+\frac{71,4}{f}$$.

On cherche le temps de départ $t_{départ}$ de cette situation. Nous connaissons la vitesse finale que nous devons avoir, il nous faut juste trouver le temps qui au bout de $t_{final}-t_{départ}$ secondes donne une vitesse de rotation $\Omega=180\,\mathrm{rad}/s$. On a donc l'équation suivante :

$$\Omega(t_{final})=\frac{-71,4}{f}e^{\frac{-f}{J}(t_{fianl}-t_{départ})}+\frac{71,4}{f}=180\,\mathrm{rad}/s$$

Par cette méthode on détermine que $t_{départ}=2,8922\,s$. On obtient alors le profil de couple suivant :

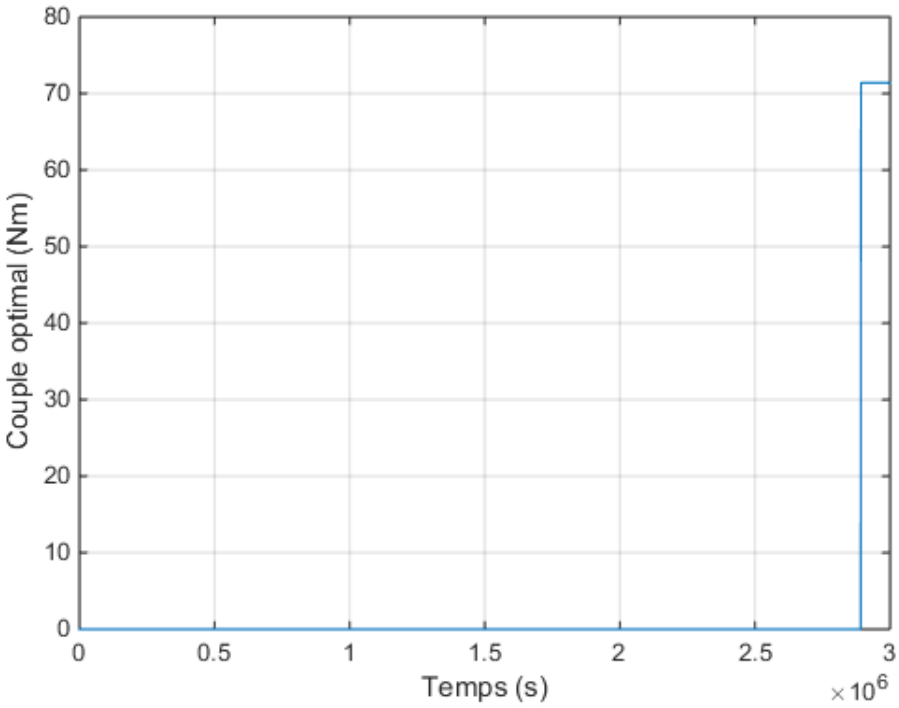

Figure 2.6: Couple optimal déterminé avec le PMP

Nous obtenons la vitesse de rotation optimale calculée avec cette méthode :

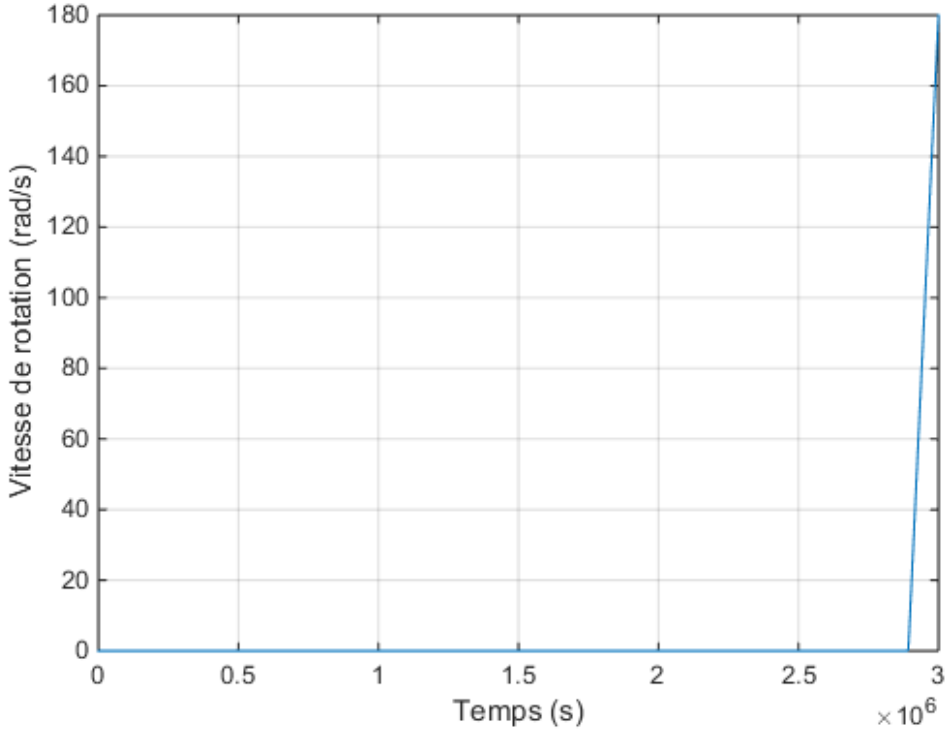

Figure 2.7: Vitesse de rotation optimale obtenue avec le PMP

On remarque que la vitesse atteint bien les 180 rad/s demandés.

On donne également la puissance fournie par la machine sur le parcours :

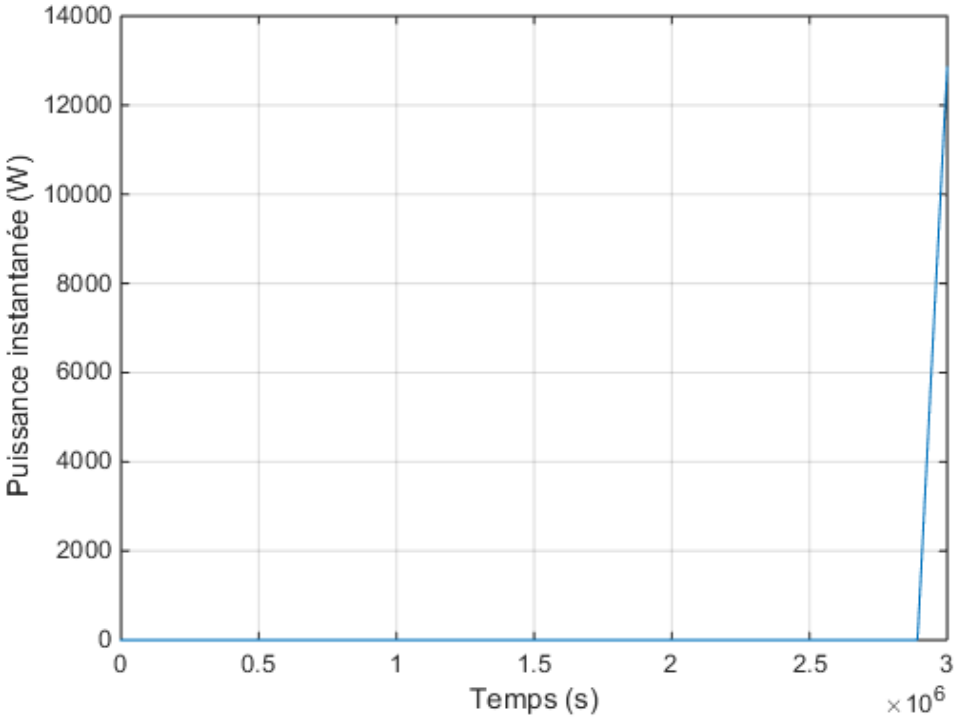

Figure 2.8: Puissance instantanée au cours d'un démarrage avec le PMP

On remarque que la puissance instantanée dépasse largement la puissance nominale de la machine qui est de 4kW.

Le programme ayant permis d'obtenir ces résultats est présent en Annexe III.

Nous allons maintenant résoudre ce même problème avec la méthode du tir semi-direct.

2.3.5.3 Résolution avec la méthode du tir semi-direct

La première étape de cette méthode consiste à discrétiser le problème. Nous obtenons grâce à la méthode d'Euler :

$$\min_{C_{em}} E = \sum_{i=0}^{N} h C_{em}^{i} \Omega_{\mathrm{NUM}}^{i} \text{ avec } \Omega_{\mathrm{NUM}}^{i+1} = \Omega_{\mathrm{NUM}}^{i} + h \frac{\left(C_{em}^{i} - f\,\Omega_{\mathrm{NUM}}^{i}\right)}{J}$$

$$\text{sous les contraintes}$$

$$\forall i \;\; 0 < \Omega_{\mathrm{NUM}}^{i} < 180\,\mathrm{rad/s} \text{ et } 0 < C_{em}^{i} < 71{,}4\,\mathrm{Nm}$$

$$\Omega^{0} = 0$$

$$\Omega_{\mathrm{NUM}}^{N} = 180\,\mathrm{rad/s}$$

Avec, tout comme pour le tir indirect, N = 300 et h = 10ms pour un temps final de 3 secondes.

Nous lançons ensuite la fonction `fmincon` de MATLAB avec un vecteur aléatoire de couple. Il n'est pas nécessaire de lancer plusieurs fois cette fonction puisqu'elle arrive à converger vers un minimum qui est à priori global au premier lancé.

```
[vecteur solution, valeur de la solution, flag] = fmincon ('Fonction objectif',
vecteur initial, [], [], [], [], borne(s) inférieure(s), borne(s) supérieure(s),
'fonction de contrainte', option)
```

Avec :

- vecteur solution : C'est le vecteur qui contient les valeurs du couple à chaque pas de temps.
- valeur de la solution : C'est la valeur d'énergie mécanique dépensée durant le démarrage.
- Fonction objectif : C'est la fonction qui calcul l'énergie mécanique dépensée à partir d'un vecteur de couple donné.
- vecteur initial : C'est le vecteur de couples aléatoires.
- Fonction de contrainte : Cette fonction assure que la vitesse atteint bien 180 rad/s, que le couple maximal ainsi que la vitesse maximale ne soit pas dépassés.
- Option : Nous choisissons ici l'algorithme du point intérieur, qui est prévu pour les problème de grande taille.

Le calcul est très rapide, en moins de trois minutes on obtient un résultat valide.

Tout d'abord, la vitesse de rotation optimale pour notre exemple :

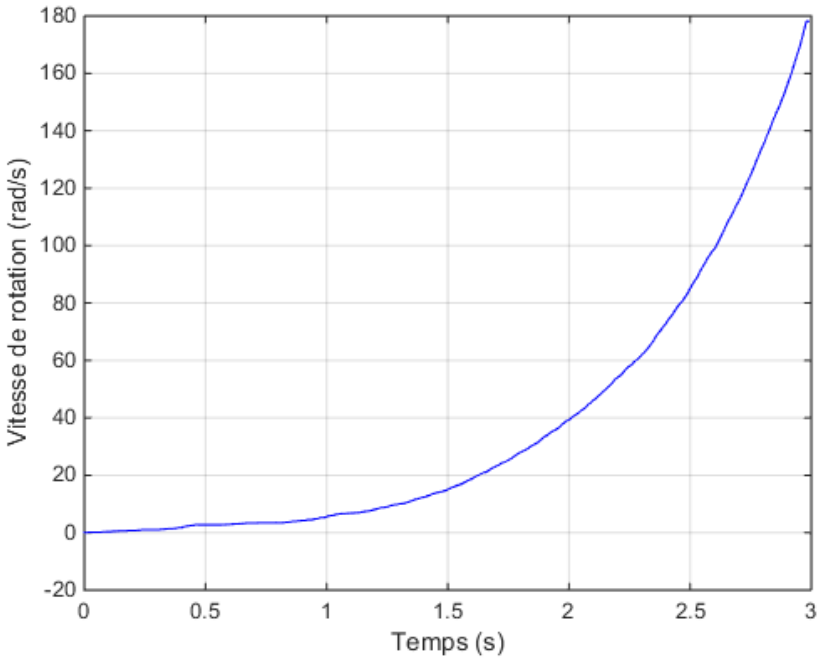

Figure 2.9: Vitesse de rotation optimale obtenue avec la méthode du tir semi-direct

Elle est presque nulle sur le début du démarrage puis augmente exponentiellement. Elle arrive bien à la valeur de consigne demandée à une tolérance de 10% près.

Ce profil de vitesse de rotation est obtenu en appliquant le couple optimal suivant :

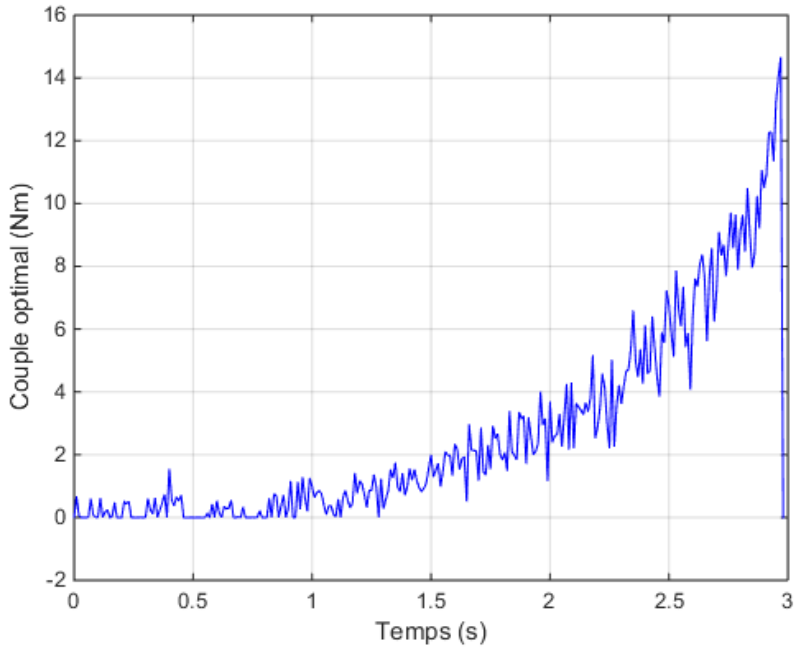

Figure 2.10: Couple optimal obtenu avec la méthode du tir semi-direct

On constate que la méthode du tir direct prend mal en compte les commandes de type bang bang mais arrive néanmoins à calculer la commande optimale d'un système de manière efficace et rapide tout en prenant en considération les contraintes ponctuelles comme la vitesse d'arrivée.

Nous avons décidé de montrer également la puissance instantanée sur le parcours :

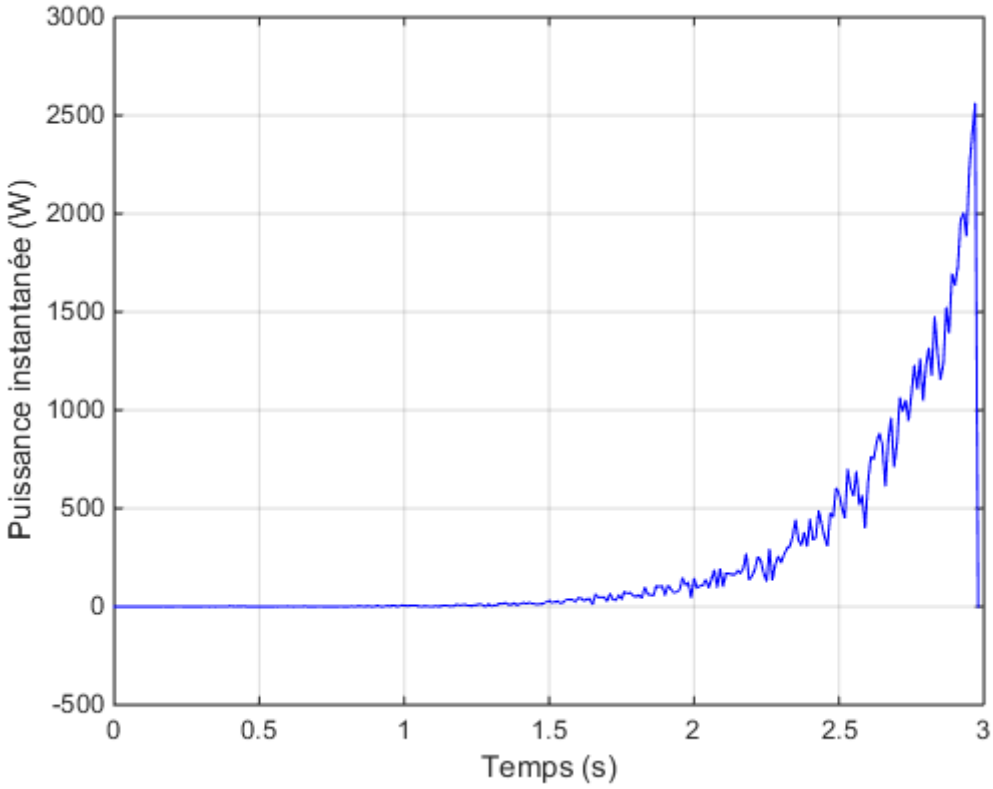

Figure 2.11: Puissance instantanée durant le démarrage

On peut voir que la puissance nominale du moteur de 4kW n'est pas dépassée.

Le programme ayant permis d'obtenir ces résultats est présent en Annexe IV.

2.3.5.4 Comparatif des deux méthodes

On voit que malgré la précision du principe du maximum de Pontryagin, son application est complexe. Dans notre cas, cette méthode gère difficilement la commande tout ou rien. De son coté, la méthode du tir semi-direct est plus simple à mettre en forme et est plus rapide à l'exécution.

Les deux méthodes sont complémentaires et donnent de l'information sur la solution : PMP nous dit que la solution et de type Bang-Bang et la méthode semi-directe que la solution est un couple nul au départ.

Pour ce qui est de l'efficacité des deux méthodes, elles donnent toutes deux un profil de vitesse satisfaisant, à savoir un démarrage en trois secondes du moteur pour atteindre la vitesse de 180 rad/s. Quant à l'énergie mécanique fournie, qui est censée être la plus basse possible, le principe du maximum de Pontryagin nous donne 693 Ws et la méthode du tir semi-direct 313 Ws. La méthode du tir semi-direct a été la plus efficace et la plus simple à mettre en place pour ce problème.

2.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons vu les aspects théoriques du deuxième thème de notre étude : l'optimisation.

Nous avons débuté ce chapitre par une explication sur ce qu'est l'optimisation de manière générale, avec en premier lieu, le principe de cette discipline. Nous avons ensuite décrit différents algorithmes permettant de réaliser une optimisation. Pour finir nous avons illustré notre propos avec un exemple simple de recherche de minimum sur une fonction de test à deux variables.

Nous avons ensuite vu l'application de l'optimisation au calcul de la commande d'un système : la commande optimale. Nous avons défini ce qu'est une commande pour ensuite montrer la possibilité de l'optimiser.

Nous avons décrit deux méthodes numériques efficaces pour calculer la commande optimale d'un système, le principe du maximum de Pontryagin et la méthode du tir semi-direct. Tout comme pour l'optimisation, nous avons présenté un exemple simple dans lequel nous avons utilisé les méthodes présentées.

Il existe toutefois une autre méthode numérique pour résoudre les problème de commande optimale : la programmation dynamique [50]. Si nous ne détaillons pas cette méthode c'est uniquement parce que nous ne l'avons pas utilisée dans notre étude.

Grâce au chapitre I et à celui-ci, nous avons les connaissances théoriques suffisantes pour mener à bien notre étude. Nous allons, dans le chapitre suivant, présenter une première approche de l'application de la méthode du tir semi-direct au calcul de la commande optimale d'une MADA.

3 Chapitre III : La commande optimale d'une MADA, modèle simplifié

Sommaire

3 Chapitre III : La commande optimale d'une MADA, modèle simplifié.....57
3.1 Introduction.....58
3.2 Objectif de l'étude.....58
3.3 Formulation du problème de commande optimale.....62
3.4 Application du principe du maximum de Pontryagin.....66
3.5 Application du tir semi-direct sur un modèle simplifié.....67
3.5.1 Explication de l'application de la méthode.....67
3.5.2 Résultats.....69
3.6 Conclusion.....71

3.1 Introduction

Après avoir vu le principe de fonctionnement et les intérêts d'une MADA ainsi que les différentes méthodes numériques d'optimisation de commande, nous allons maintenant relier ces deux domaines. En effet, la présentation de deux méthodes numériques d'optimisation de commande était générale. Nous allons à présent appliquer ces méthodes à une MADA. Un article a été publié sur ce sujet [51].

Ce chapitre va être dédié aux études préliminaires à notre travail, car si le résultat final est important, le cheminement qui nous y a mené l'est tout autant. Il nous permettra de comprendre les raisonnements qui nous ont poussé à utiliser une méthode originale que nous détaillerons dans le chapitre suivant.

Le but sera ici non pas d'obtenir des résultats viables mais bien de trouver une méthode qui nous permettra de les obtenir.

Pour débuter ce chapitre, nous ferons un point sur l'objectif de l'étude. Un point important puisqu'il conditionne toute la suite de ces travaux. Par la suite, nous rappellerons le modèle de la MADA et le mettrons en forme pour pouvoir l'utiliser dans un problème de commande optimale. Pour finir, nous appliquerons les deux méthodes vues précédemment. En premier, l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin, qui, nous le verrons, ne donnera pas satisfaction, puis la méthode du tir direct qui elle nous permettra d'obtenir nos premiers résultats numériques. Nous discuterons de ces derniers pour clore ce chapitre.

3.2 Objectif de l'étude

Nous avons à notre disposition une MADA alimentée par deux onduleurs de tension à composants IGBT. On donne le schéma de l’installation :

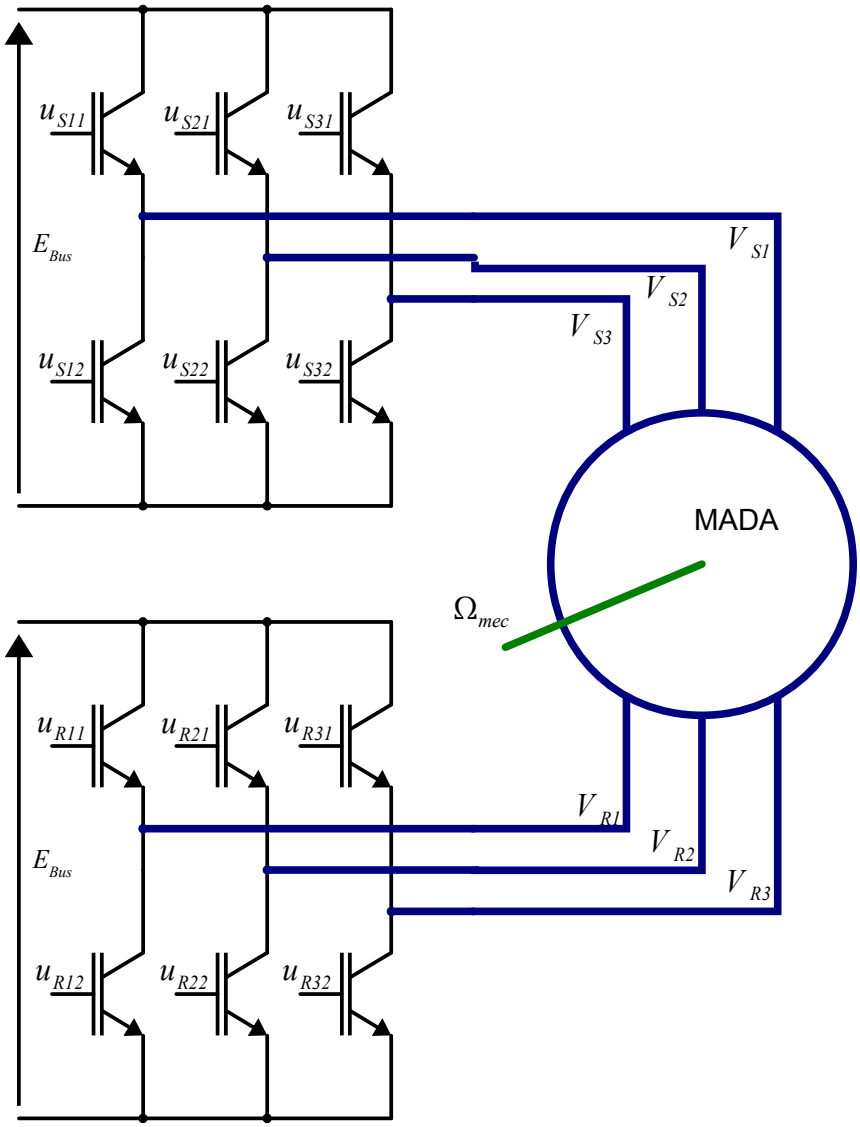

Figure 3.1: Schéma d'alimentation de la MADA

Nous voyons sur ce schéma les deux convertisseurs avec leurs commandes u_{S11} à u_{R32} correspondant aux signaux à envoyer pour piloter chacun des IGBTs ainsi que la tension du bus continu E_{bus} .

Les convertisseurs font partie intégrante de l'alimentation de la MADA. Cependant, ils ne feront pas l'objet d'une étude approfondie. Ils seront donc par la suite considérés comme des sources de tensions triphasées, équilibrées, commandables et parfaites. On les commandera par la tension efficace et la fréquence du système de tensions triphasées qu'ils génèrent et seront appelés Driver 3φ.

L'objectif de cette étude est d'améliorer les performances d'une MADA. Comme dit plus haut, il existe deux moyens de le faire. Soit en améliorant sa conception, soit en améliorant son fonctionnement. Ayant à notre disposition des MADAs déjà conçues, nous avons privilégié dans cette thèse la deuxième option : améliorer leur fonctionnement.

Mais qu'implique une amélioration des performances ? Il s'agit ici d'augmenter le rendement d'une MADA tout en conservant des caractéristiques dynamiques

satisfaisantes. Et qui dit augmentation du rendement, dit diminution des différentes pertes dans le moteur.

En résumé, il nous faut réduire les pertes de la MADA tout en assurant une certaine dynamique de fonctionnement.

Il existe trois types de pertes dans un moteur :

- Les pertes mécaniques, qui sont liées à la conception de la machine et qui seront intégrées dans la partie mécanique du modèle de celle-ci comme un couple résistant.

- Les pertes Joule, ce sont les pertes liées à l'échauffement des conducteurs qui composent les bobines de la machine. Elles dépendent uniquement des courants d'alimentation et de la résistance électrique de ces enroulements.

- Les pertes magnétiques ou pertes fer, elles sont liées au courant de Foucault induit dans les parties ferromagnétiques (le circuit magnétique) de la MADA. Ces pertes sont difficiles à évaluer et seul une caractérisation expérimentale permet d'obtenir une formule permettant de les calculer. On sait néanmoins qu'elles dépendent des champs magnétiques présents dans l'entrefer de la machine et de leurs fréquences.

Notre travail est certes appliqué à une MADA en particulier, mais nous avons la volonté d'être le plus théorique et général possible, nous ne pouvons donc pas intégrer les pertes fer dans nos calculs, celle-ci étant calculées à partir d'un modèle propre à chaque machine. Comme dit plus haut, les pertes mécaniques sont liées à la conception de la machine. Nous ne pouvons donc pas agir afin de les réduire. Il nous reste donc les pertes par effet Joule. C'est sur ces pertes, prépondérantes dans ce type de machine, que nous allons agir afin d'améliorer l'efficacité énergétique de la MADA.

Maintenant que que le critère à optimiser est défini, il nous reste à déterminer sur quelle(s) dynamique(s) nous voulons travailler. Encore une fois, nous avons le choix entre deux options :

- Un régime stationnaire, où la vitesse de rotation de la machine ne varie pas.

- Un régime transitoire, où la vitesse de rotation varie. Un démarrage de la machine est un bon exemple.

Si on analyse rapidement ces deux situations, on s'aperçoit vite que celle qui a vraiment un intérêt pour la commande optimale est le régime transitoire. En effet, en régime permanent la dérivée de la vitesse est nulle. En reprenant l'équation 1.9, on a :

$$0 = C_{em} - C_r$$

Le couple résistant C_r étant également constant, puisque fonction affine de la vitesse, on se retrouve donc avec le couple électromagnétique C_{em} qui doit être à la fois constant et égal au couple résistant.

Grâce à une formule du couple de la forme $C_{em} = \text{cste} \|\Phi_{Sn}\| \|\Phi_{Rn}\| \cos\theta$ avec θ, l'angle entre les deux flux, on peut facilement déduire qu'il faut maximiser $\cos\theta$ en le prenant proche de $\pi/2$ afin de maximiser l'influence des valeurs efficaces des flux.

L'optimisation d'un régime stationnaire est donc aisée et bien traitée par la plupart des commandes traditionnelles. Nous nous intéresserons donc à un régime transitoire, et pour coller à une réalité d'utilisation d'un moteur, nous allons étudier un démarrage. L'objectif est donc de minimiser les pertes Joule d'une MADA sur un démarrage.

Le principe est de trouver un chemin entre un point de départ, ici le moteur est à l'arrêt, et un point d'arrivée, le moteur tourne à sa vitesse nominale, qui va minimiser les pertes Joule dans la MADA. Contrairement aux commandes classiques, nous pouvons, grâce à l'optimisation, choisir ce chemin.

En effet, les commandes classiques ont des dynamiques définies *de facto*. Les chemins qu'elles empruntent sont définis à l'avance et elles ne prennent pas en compte leurs coûts. Ces commandes sont basées sur les performances dynamiques comme atteindre une consigne le plus vite possible, ou dans un temps donné, ou encore réagir rapidement à une variation d'une grandeur externe au système.

Ici nous laissons ces préoccupations de côté pour nous concentrer sur la performance énergétique de la machine. Toutefois, la question du temps final reste importante et sera traitée dans le chapitre suivant.

Dans cette étude préliminaire, nous allons utiliser le graphique suivant :

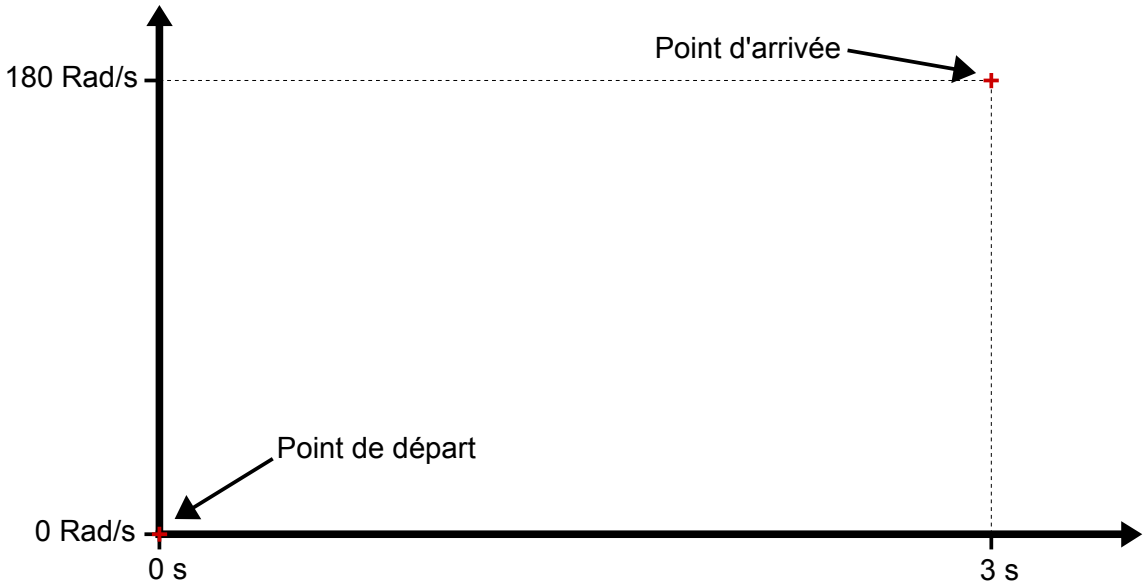

Figure 3.2: Point de départ de l'étude

Au point de départ, la machine est à l'arrêt et non alimentée, toutes les grandeurs électriques sont nulles. Au point d'arrivée la machine doit tourner à sa vitesse nominale, 180 rad/s.

Le temps final est fixé à 3 secondes. Cette valeur est arbitraire mais correspond tout de même à un temps de démarrage réaliste, ni trop long, ni trop court. Ce temps final sera

discuté dans le chapitre IV.

Bien entendu, nous travaillons sur un système physique et non pas purement théorique. Il y a donc des contraintes liées directement aux caractéristiques de la MADA :

- Les valeurs des courants sont limitées à leurs valeurs nominales. Nous évitons ainsi toute surchauffe de la machine. Cette limitation permet également de ne pas dépasser le couple maximal admissible pour ne pas détériorer les parties mécaniques de la machine.

- Les valeurs de tensions et de fréquences sont également limitées.

Mais, nous rajoutons aussi des contraintes liées au comportement souhaité du moteur :

- La vitesse finale doit être égale à la vitesse de rotation nominale de la machine.

- L'accélération au point d'arrivée doit être nulle. Nous avons établi cette contrainte à partir du constat qu'une fois à sa vitesse nominale, généralement, un moteur ne continu pas de monter en vitesse. Cette contrainte porte donc, selon l'équation 1.9, sur le couple de la machine au point final.

La perfection étant mathématiquement possible mais physiquement et numériquement inenvisageable, nous ajoutons des tolérances à toutes ces contraintes.

Nous allons réaliser un algorithme donnant une solution chiffrée à notre problème. Nous ne pouvons donc pas donner la commande optimale d'une MADA dans le cas général mais bien pour une MADA en particulier. Nous allons tout de même faire en sorte que notre programme puisse s'appliquer à toutes les MADAs en changeant simplement un fichier contenant ses paramètres.

L'objectif de l'étude est maintenant défini, il ne nous reste plus qu'à mettre en forme le modèle de la MADA avant de pouvoir réaliser la dernière étape de ce travail préliminaire : optimiser la commande de cette machine.

3.3 Formulation du problème de commande optimale.

Tout d'abord il convient de rappeler le modèle de la MADA ainsi que la formalisation utilisée pour la commande que nous allons optimiser.

Conscient que l'optimisation d'un trop grand nombre de variables est préjudiciable au temps de calcul et peut l'être aux résultats, nous avons décidé de trouver un moyen de réduire ce nombre. Pour ce faire, nous avons utilisé la commande en boucle ouverte classique qu'est la commande en V/f constant.

Le principe de cette commande est simple. On part du principe que les flux rotorique et statorique dans la machine sont constants et égaux à leurs valeurs nominales. Grâce à ce postulat, la relation entre les valeurs efficaces des tensions et les fréquences associées devient proportionnelle. En d'autre termes :

$V_S(t)=f_S(t)2\pi\Phi_{Sn}$ ou $V_S(t)=f_S(t)K_s$ et $V_R(t)=f_R(t)2\pi\Phi_{Rn}$ ou $V_R(t)=f_R(t)K_R$.

Sachant que dans notre machine les fréquences nominales sont liées, par conception, par un coefficient k, nous choisissons de garder ce rapport pour toutes les valeurs de fréquences. On a alors :

$$f_S(t)=k\,f_R(t) \quad .$$

Grâce à cette formulation, nous pouvons piloter la MADA en agissant uniquement sur la fréquence du système de tensions rotoriques. On passe donc de quatre variables de commande *a priori*, à une seule.

On a alors le schéma de principe suivant :

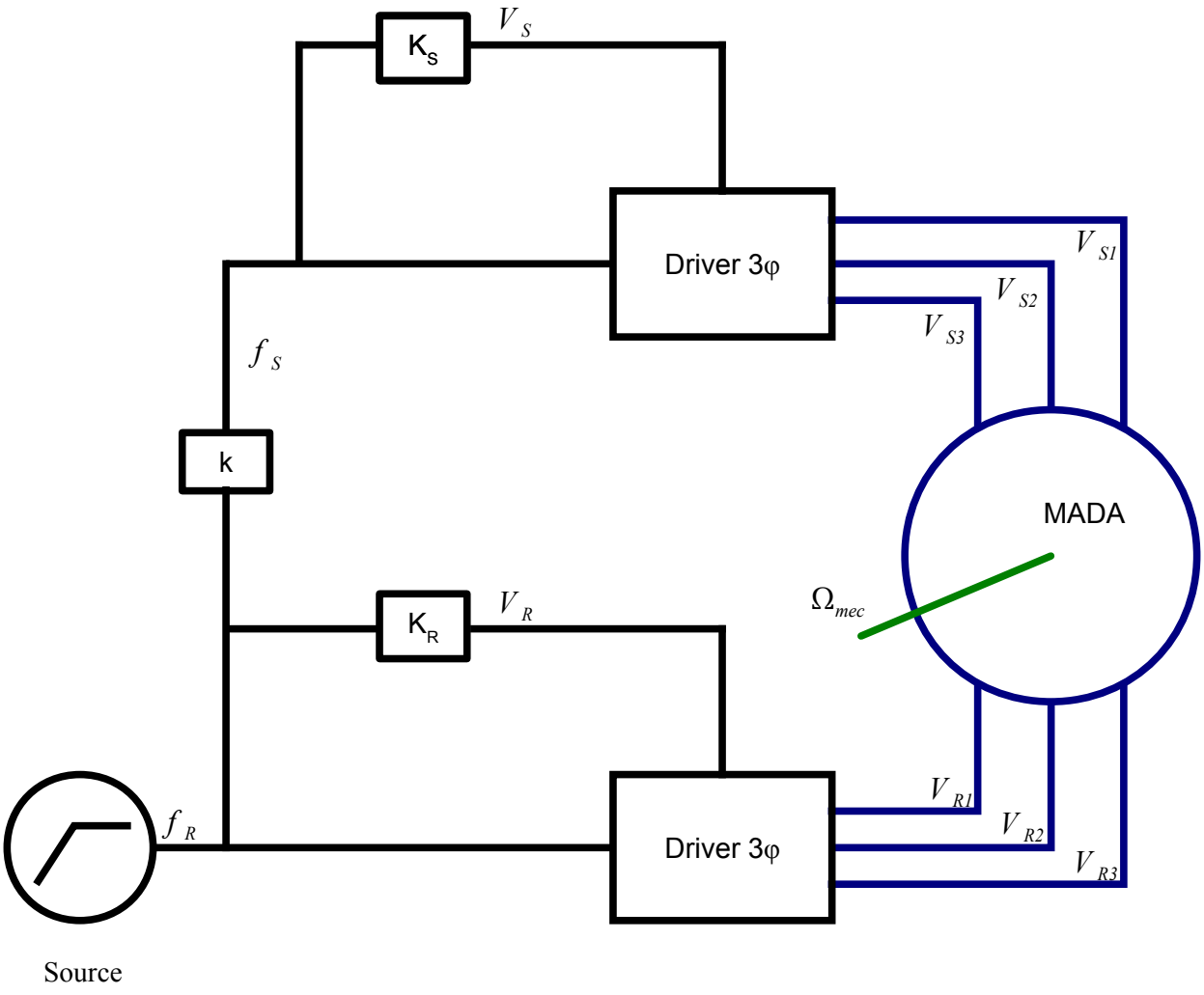

Figure 3.3: Schéma de principe du système

Nous sommes conscient que, comme dit plus haut, le principe de cette commande n'est déjà pas optimal. Mais nous allons voir qu'en première approche, nous obtenons des résultats satisfaisants.

Dans la commande en V/f constant, une fois les relations entre les différentes grandeurs de commande posées, on applique une rampe sur ces grandeurs. Dans notre cas nous

allons optimiser ces formes d'ondes pour réduire les pertes Joule.

En posant $f_R(t)=u(t)t$, on peut alors écrire toutes ces équations en fonction de la commande $u(t)$.

L'expression de $f_R(t)$ est formulée pour limiter les variations brusque de fréquence, la commande $u(t)$ définit un coefficient directeur de droite plutôt que la valeur de f_R directement. Ce coefficient sera amené à varier au cours du démarrage.

Avec les variables V_S, f_S, V_R et f_R, nous déduisons les deux systèmes triphasés alimentant la MADA :

$V_{S1}(t)=\sqrt{2}V_S(t)\sin(f_S(t)2\pi t)$,

$V_{S2}(t)=\sqrt{2}V_S(t)\sin(f_S(t)2\pi t-2\pi/3)$,

$V_{S3}(t)=\sqrt{2}V_S(t)\sin(f_S(t)2\pi t-4\pi/3)$,

$V_{R1}(t)=\sqrt{2}V_R(t)\sin(f_R(t)2\pi t)$,

$V_{R2}(t)=\sqrt{2}V_R(t)\sin(f_R(t)2\pi t-2\pi/3)$,

$V_{R3}(t)=\sqrt{2}V_R(t)\sin(f_R(t)2\pi t-4\pi/3)$.

Ces systèmes peuvent donc s'écrire de la manière suivante :

$V_{S1}(t)=\sqrt{2}K_s k\,u(t)t\sin(k\,u(t)2\pi t^2)$,

$V_{S2}(t)=\sqrt{2}K_s k\,u(t)t\sin(k\,u(t)2\pi t^2-2\pi/3)$,

$V_{S3}(t)=\sqrt{2}K_s k\,u(t)t\sin(k\,u(t)2\pi t^2-4\pi/3)$,

$V_{R1}(t)=\sqrt{2}K_R u(t)t\sin(u(t)2\pi t^2)$,

$V_{R2}(t)=\sqrt{2}K_R u(t)t\sin(u(t)2\pi t^2-2\pi/3)$,

$V_{R3}(t)=\sqrt{2}K_R u(t)t\sin(u(t)2\pi t^2-4\pi/3)$.

Ils ne dépendent alors plus que de *u(t)*.

On reprend alors les équations du modèle présentées au chapitre I avec ces systèmes triphasés de tension, moyennant une transformation de Concordia :

$\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{\mathbf{SR\alpha\beta}}=-[\boldsymbol{L}]^{-1}[\mathbf{R}]\mathbf{I}_{\mathbf{SR\alpha\beta}}+[\boldsymbol{L}]^{-1}\mathbf{V}_{\mathbf{SR\alpha\beta}}$ soit $\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{AX}+\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}(u)$.

Avec : $\mathbf{X}=\mathbf{I}_{\mathbf{SR\alpha\beta}}$, $\mathbf{A}=-[\boldsymbol{L}]^{-1}[\mathbf{R}]$, $\mathbf{B}=[\boldsymbol{L}]^{-1}$ et $\boldsymbol{\phi}(u)=\mathbf{V}_{\mathbf{SR\alpha\beta}}$.

La variable de commande u(t) étant bien sûr contenue dans $\boldsymbol{\phi}(u)=\mathbf{V}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}$.

Nous avons parlé dans l'introduction d'un modèle sans partie mécanique ou modèle simplifié. Cette appellation vient du fait que nous ne prenons pas en compte la partie mécanique du modèle de la MADA.

Cette approximation est posée de sorte à simplifier le problème. En effet, même si l'équation mécanique ne sert à calculer qu'une contrainte : la vitesse finale, elle alourdit les calculs. De plus, nous sommes encore dans un travail préliminaire afin de trouver une méthode rigoureuse et opérationnelle pour optimiser la commande d'une MADA et pas sur une recherche de résultat numérique viable pour l'application que nous voulons en faire dans le domaine de la propulsion navale.

Nous considérons donc que $\omega=2\pi(f_S(t)-f_R(t))$ pour la vitesse de rotation électrique de la machine et $\Omega=2\pi(f_S(t)-f_R(t))/pp=\omega/pp$ pour la vitesse de rotation mécanique. Cette hypothèse est bien entendu, trop simplificatrice. Néanmoins, nous la conserverons pour cette première approche.

Nous pouvons maintenant adapter l'équation 2.3 à notre problème :

$$\begin{aligned}
&\min_{u,x,T} C=\int_0^T f_0(x(t),u(t))\,dt\\
&\text{sous les contraintes}\\
&\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))\\
&x_{min}<x(t)<x_{max}\ \text{et}\ u_{min}<u(t)<u_{max}\\
&x(0)=X_0\\
&x(T)=X_f
\end{aligned}$$

Dans notre cas, C est l'énergie Joule dépensée au cours d'un démarrage. Logiquement, la fonction f_0 est l'expression des pertes Joule. Les x correspondent aux $\mathbf{X}$ (les courants) pour tout t et les u sont celles de la commande qui va permettre de calculer les valeurs des grandeurs d'entrée de la MADA à chaque instant.

Dans l'expression générique, nous avons des conditions initiales qui seront ici des courants nuls et le moteur à l'arrêt à $t=0\,\mathrm{s}$. Mais, nous avons également des conditions finales. Cependant dans notre cas, ces conditions finales portant sur les courants, il n'est pas utile de les contraindre. Nous aurons tout de même une condition finale sur la vitesse.

Nous avons donc le problème suivant :

$$\begin{aligned}
&\min_{u} E_{Joule}=\int_{t=0}^{t_{final}} P_{Joules}(\mathbf{X}(t),u(t))\,dt\\
&\text{sous les contraintes}\\
&\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}(u(t))\\
&\mathbf{X}_{\min}<\mathbf{X}(t)<\mathbf{X}_{\max}\ et\ \ u_{\min}<u(t)<u_{\max}\\
&\mathbf{X}(0)=[0;0;0;0]\\
&\Omega(t_{final})=188\,\mathrm{rad/s}
\end{aligned}$$

3.1

avec :

$$\mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix} I_{S\alpha}(t) \\ I_{S\beta}(t) \\ I_{R\alpha}(t) \\ I_{R\beta}(t) \end{bmatrix}$$

La fonction $P_{Joule}(t)$ est l'expression des pertes Joule :

$$P_{Joule}(t)=3\mathrm{R}_S(I_{S\alpha}(t)^2+I_{S\beta}(t)^2)+3\mathrm{R}_R(I_{R\alpha}(t)^2+I_{R\beta}(t)^2)$$

Et avec, comme dans le chapitre I :

$\mathbf{X}=\mathbf{I_{SR\,\alpha\beta}}$, $\mathbf{A}=-[\boldsymbol{L}]^{-1}[\mathbf{R}]$, $\mathbf{B}=[\boldsymbol{L}]^{-1}$ et $\boldsymbol{\phi}(u)=\mathbf{V_{SR\,\alpha\beta}}$

Cette formalisation étant posée, nous pouvons passer à la recherche d'une méthode pour optimiser la commande de notre machine.

3.4 Application du principe du maximum de Pontryagin

En tout premier lieu, nous avons décider d'appliquer le principe du maximum de Pontryagin à notre problème. Cette méthode est très largement appliquée pour résoudre de nombreux problèmes de commande optimale comme nous l'avons vu dans le chapitre II section 2.3.2. Cependant, pour l'appliquer, nous devons calculer le Hamiltonien de notre système qui est déjà très complexe :

$$H=-(3\mathrm{R}_S(I_{S\alpha}^2+I_{S\beta}^2)+3\mathrm{R}_R(I_{R\alpha}^2+I_{R\beta}^2))+\frac{1}{M^2-L_S L_R}$$

$$(+z_1(-L_R R_S I_{S\alpha}+R_R M I_{R\alpha}\cos\theta-R_R M I_{R\beta}-L_R k\Phi_{Sn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\sin(k\,2\pi u t^2)$$

$$+M\cos\theta\,\Phi_{Rn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\sin(2\pi u t^2)-M\sin\theta\,\Phi_{Rn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\cos(2\pi u t^2))$$

$$+z_2(-L_R R_S I_{S\beta}+R_R M I_{R\hat{b}eta}\cos\theta+R_R m I_{R\alpha}\sin\theta-L_R k\Phi_{Sn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\cos(k\,2\pi u t^2)$$

$$+M\sin\theta\,\Phi_{Rn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\sin(2\pi u t^2)+M\cos\theta\,\Phi_{Rn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\cos(2\pi u t^2))$$

$$+z_3(-L_S R_R I_{R\alpha}+R_S M I_{S\alpha}\cos\theta+R_S M I_{S\beta}\sin\theta-L_S\Phi_{Rn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\sin(2\pi u t^2)$$

$$+M\cos\theta\,k\Phi_{Sn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\sin(k\,2\pi u t^2)+M\sin\theta\,k\,\Phi_{Sn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\cos(k\,2\pi u t^2))$$

$$+z_4(-L_S R_R I_{R\beta}+R_S m I_{S\beta}\cos\theta-R_S M I_{S\alpha}\sin\theta-L_S\Phi_{Rn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\cos(2\pi u t^2)$$

$$-M\sin\theta\,k\Phi_{Sn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\sin(k\,2\pi u t^2)+M\cos\theta\,k\,\Phi_{Sn}2\pi\,sqrt3\,u\,t\cos(k\,2\pi u t^2))).$$

La suite du principe voudrait que nous dérivions cet Hamiltonien par rapport à la commande u, puis maximiser le Hamiltonien par rapport à cette commande pour trouver

un expression de la commande optimale u^* en fonction des z_i et des courants. Il aurait ensuite fallu, à partir d'un système d'équation différentielles aux dérivées ordinaires, trouver les z_i et les courants correspondant à la commande optimale u^*.

La commande est unique dans ce cas, mais qui, si nous n'avions pas utilisé le principe de la commande en V/f constant, aurait été un vecteur de quatre variables (V_S, f_S, V_R et f_R). Il aurait alors fallu dériver le Hamiltonien quatre fois, une par variable de contrôle.

Le procédé est donc complexe.

La complexité d'application de cette méthode dès son début, la difficulté de prise en compte des contraintes comme la vitesse finale, pourtant cruciales dans ce problème (cf chap. II) ainsi que la possibilité d'utiliser une autre méthode ont eu raison de notre volonté à appliquer le principe du maximum de Pontryagin à notre problème.

Nous avons donc décidé de nous tourner vers la méthode du tir semi-direct, qui, en plus d'être mieux adaptée à la résolution numérique d'un problème de contrôle optimal, nous permet une meilleure prise en charge des nombreuses contraintes de notre problème, notamment celle sur les variable d'état de notre système.

3.5 Application du tir semi-direct sur un modèle simplifié

Dans cette partie, comme son titre l'indique, nous allons appliquer la méthode du tir semi-direct à notre problème de commande optimale 3.1.

A partir de la formalisation décrite plus haut, nous allons appliquer un algorithme simple pour résoudre notre problème directement discrétisé en temps.

Nous allons donc décrire cet algorithme et discuter des résultats dans cette partie.

3.5.1 Explication de l'application de la méthode

Nous allons débuter cette partie par le choix des différentes constantes de notre problème.

Les paramètres de la MADA sont donnés en annexe I. La vitesse finale correspond à la vitesse nominale de la machine à savoir 180 rad/s. Le temps final est fixé à 3 secondes pour les raisons énoncées plus haut. Il reste un dernier paramètre important. En effet, la méthode du tir semi-direct étant basée sur la discrétisation du temps, on introduit alors le paramètre h qui va être le pas qui va servir à discrétiser le temps dans notre problème. Pour rappel, ce pas h va déterminer le nombre de point issus de la discrétisation : $N = t_{final}/h$; h doit être choisi judicieusement.

3.5.1.1 Détermination du pas de discrétisation.

Pour rappel, la MADA est alimentée par des convertisseurs statiques. Nous avons posé l'hypothèse que ces convertisseurs sont des sources de tensions triphasées idéales. Pour valider cette hypothèse, il faut créer une séparation de mode entre la MADA et les

convertisseurs. Il faut donc que le temps d'observation du système, le pas de temps, soit dix fois plus grand que la période de découpage des dits convertisseurs.

Les convertisseurs alimentant notre MADA ont une fréquence de découpage de 10kHz, leurs périodes de découpage sont donc de $1/10^4 = 0{,}1\,\mathrm{ms}$. Le plus petit pas de temps pour pouvoir les considérer comme idéaux est donc de 1 milliseconde.

On pourrait donc choisir 1 milliseconde comme pas de temps. On aurait une retranscription fidèle du comportement du moteur. Cependant, un pas si petit amènerait à devoir résoudre un problème d'optimisation de $3\mathrm{s}/1\mathrm{ms} = 3/10^{-3} = 3000\,\mathrm{points}$ ce qui le rendrait trop grand pour pouvoir être résolu dans un temps raisonnable notamment avec les outils issus de MATLAB.

Nous choisirons donc un compromis avec un pas de temps de 10 millisecondes, ceci donnera une erreur d'approximation apprécible pour notre problème. La méthode du tir semi-direct va donc optimiser un vecteur de $3\,\mathrm{s}/10\,\mathrm{ms} = 300\,\mathrm{points}$ correspondant à toutes les valeurs discrètes de la commande *u(t)* sur le parcours.

3.5.1.2 Utilisation de MATLAB pour la résolution de notre problème

Nous avons donc le problème suivant :

$$\min_{\mathrm{u}} E_{Joule} = \sum_{j=0}^{N} h\, P^{j}_{Joules}(\mathbf{X}_j, u_j) \text{ avec } \mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{X}_j + h(\mathbf{A}\mathbf{X}_j + \mathbf{B}\boldsymbol{\phi}(u_j))$$

$$\text{sous les contraintes}$$

$$\mathbf{X}_{\min} < \mathbf{X}_j < \mathbf{X}_{\max} \text{ et } u_{\min} < u_j < u_{\max}$$

$$\mathbf{X_0} = [0\,;0\,;0\,;0]$$

$$\Omega_{\mathrm{N}} = 188\,\mathrm{rad/s}$$

Nous avons utilisé le logiciel de calcul matriciel MATLAB pour trouver la solution à notre problème. Ce logiciel dispose d'une fonction appelée *fmincon* permettant de réaliser une optimisation. Elle est décrite de manière plus complète dans le chapitre II Elle permet de réaliser indistinctement tout type d'optimisation et est appelée comme suit :

```
[vecteur solution, valeur de la solution, flag] = fmincon ('Fonction objectif',
vecteur initial, [], [], [], [], borne(s) inférieure(s), borne(s) supérieure(s),
'fonction de contrainte', option)
```

Avec :

- vecteur solution : C'est le vecteur de commande u^* qui est la discrétisation de $u^*(t)$ par pas de temps h
- valeur de la solution : C'est la valeur de l'énergie Joule dépensée sur le démarrage E_{Joules}.
- Fonction objectif : C'est une fonction qui à partir d'un vecteur de commande u va nous donner l'énergie Joule dépensée sur le démarrage.

- vecteur initial : C'est un vecteur u_0 contenant un vecteur de commande aléatoire.

- Fonction de contrainte : A partir du vecteur de commande u, cette fonction calcule toutes les grandeurs internes de la machine et les compare à leurs valeurs limites.

- Option : Dans cette partie nous choisissons la méthode du point intérieur.

Malheureusement, la réussite d'une optimisation *via* cette fonction, appelée convergence de l'algorithme d'optimisation, dépend grandement du vecteur initial. Celui-ci étant aléatoire, il se peut que la fonction `fmincon` ne converge pas du tout comme dans l'exemple d'optimisation du chapitre II. Pour remédier à ce problème, nous lançons un multistart avec 1000 points de départs aléatoires.

Au bout d'une journée et demie environ, nous obtenons des résultats satisfaisants énergétiquement parlant. Nous allons les détailler et les commenter dans la section suivante.

3.5.2 Résultats

Nous allons présenter et commenter ici les résultats obtenus avec cette première approche du tir semi-direct.

Ces résultats sont obtenus en injectant les résultats de l'optimisation calculés avec MATLAB dans le logiciel de simulation SABER avec l'exacte configuration présentée plus haut.

Le comparatif a été fait avec la rampe classique appliquée dans le cas de la commande en V/f constant.

Nous pouvons d'ailleurs voir la différence entre la version classique et la version optimisée de cette commande sur la courbe suivante :

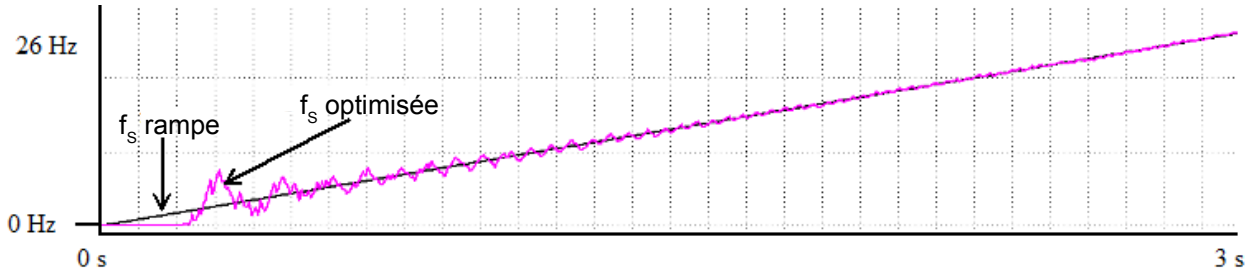

Figure 3.4: Comparaison de la fréquence des tensions statoriques

L'effet de l'optimisation sur la fréquence du système de tension statorique est notable. On remarque que cette fréquence, et par extension, la fréquence des tensions rotoriques ainsi que les valeurs efficaces des tensions statoriques et rotoriques, sont nulles au départ et n'augmentent qu'au bout d'un quart de seconde.

Regardons maintenant l'effet de cette modification sur la montée en vitesse de la MADA :

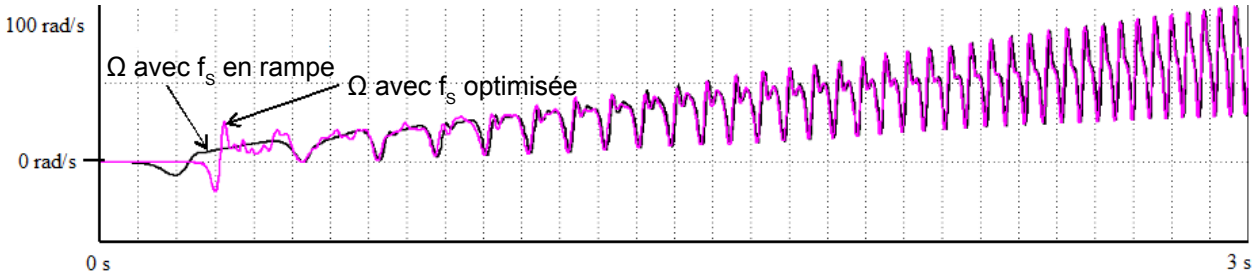

Figure 3.5: Comparaison des montées en vitesse

Le point positif est que le moteur démarre bien avec la commande optimisée. On remarque que le moteur reste à l'arrêt pendant 25 ms puis rejoint la dynamique de la commande classique ce qui correspond au temps pendant lequel la grandeur de commande reste nulle.

Il y a tout de même deux points négatifs et qui ne sont ni l'un ni l'autre négligeables :

- la consigne de vitesse finale n'est respectée par aucune des commandes,
- on constate des oscillations de vitesse très importantes.

Autant le premier point est un non respect du cahier des charges qui doit être corrigé, autant le deuxième peut conduire à des dégâts sur la machine elle-même.

Ces deux points viennent du fait que la commande en V/f constant est normalement utilisée pour des machines asynchrones.

De plus, nous avons négligé la partie mécanique du modèle dans le calcul de la commande optimale, le comportement de la machine se devait d'être différent par rapport à celui souhaité.

On peut malgré tout observer une amélioration de l'efficacité énergétique de la machine :

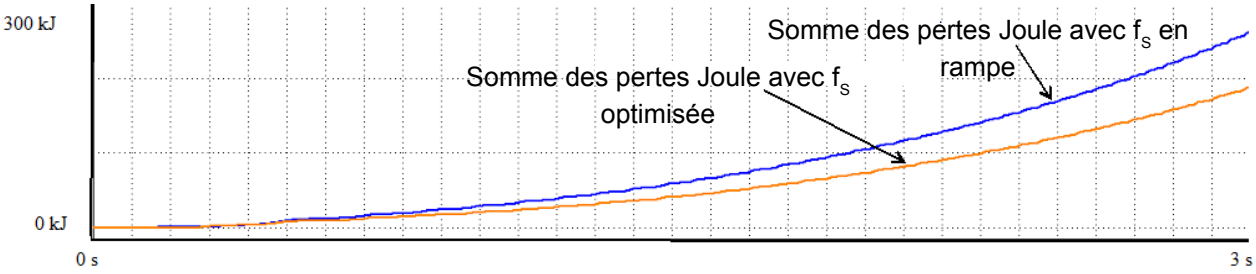

Figure 3.6: Comparaison de l'énergie Joule perdue au court d'un démarrage

On voit sur ces dernières courbes que malgré les approximations faites, la méthode du tir semi-direct a permis une diminution de 28% de l'énergie Joule perdue au cours d'un démarrage par rapport à une commande classique. Ce chiffre est important pour une première étude réaliser en négligeant une partie importante du modèle de la MADA.

En résumé, l'approximation faite ne permet pas d'obtenir des résultats exploitables pour une expérimentation. Cependant ils montrent que la méthode du tir semi-direct appliquée à notre problème de commande optimale, permet un démarrage de la MADA ainsi qu'une

diminution des pertes Joule au cours de ce démarrage.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons posé les jalons importants de notre étude.

Nous avons précisé son objectif, en donnant les détails de la mission que nous donnons à la commande de la MADA.

Nous avons mis en forme notre problème pour passer de la forme générique du chapitre I à une forme exploitable pour réaliser une optimisation de commande. Nous avons également explicité et justifié l'approximation faite de ne pas prendre en compte la partie mécanique du modèle de la MADA.

Nous avons ensuite appliqué le principe du maximum de Pontryagin à notre problème simplifié et soulevé les difficultés engendrées par celui-ci.

Nous avons appliqué la méthode du tir semi-direct à notre problème simplifié. Nous avons défini le pas de temps utilisé et décrit la fonction MATLAB qui nous permet de réaliser des optimisations de commande.

Pour finir, nous avons montré nos premiers résultats qui bien que discutables, montrent tout de même que le problème admet bien une solution et que pour l'obtenir, la méthode du tir semi-direct est efficace.

Ces travaux préliminaires nous auront permis de centrer notre étude autour de l'optimisation des pertes Joule d'un démarrage en trois secondes d'une MADA. Ils nous auront également permis de trouver la méthode qui nous permettra de réaliser cette optimisation. Il nous reste maintenant à optimiser la commande de notre moteur en prenant en compte la partie mécanique de son modèle. Ceci est le sujet de l'étude du chapitre suivant.

4 Chapitre IV : La commande optimale d'une MADA, modèle complet

Sommaire

4 Chapitre IV : La commande optimale d'une MADA, modèle complet....73
4.1 Introduction....74
4.2 Formulation du problème de commande optimale avec partie mécanique....74
4.3 Principe de causalité....77
4.4 Résolution des deux sous-problèmes....80
4.4.1 Résolution du sous-problème électromécanique....80
4.4.2 Résolution du sous-problème électrique....82
4.5 Résultats numériques....83
4.6 Conclusion....92

4.1 Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons vu tous les outils à notre disposition afin de mener à bien ce travail de thèse.

Dans le chapitre I, nous avons posé un modèle mathématique de la MADA. Nous en avons utilisé, jusqu'à maintenant, que la partie électrique.

Dans le chapitre II, nous avons décrit deux méthodes numériques pour calculer la commande optimale d'un système, la méthode du tir indirect, s'appuyant sur le principe du maximum de Pontryagin, et la méthode du tir semi-direct. Dans le chapitre III, nous avons utilisé ces deux techniques et déterminé que seule celle du tir semi-direct est adaptée à notre problème même dans le cas simplifié où la partie mécanique n'est pas prise en compte et avec une commande elle aussi simplifiée.

Nous allons dans ce chapitre décrire une nouvelle méthode originale d'optimisation de commande par décomposition en sous-problèmes en utilisant le modèle de la MADA en entier, comprenant sa partie mécanique, associé à la méthode du tir semi-direct et une méthode de moindres carrés. Le but étant toujours d'utiliser ce moteur dans un contexte de propulsion navale.

Nous allons donc voir une nouvelle mise en forme de notre problème ainsi que les difficultés que nous allons devoir surmonter. Par la suite, nous allons parler des solutions mises en œuvre, notamment la décomposition de notre problème de contrôle optimal en deux sous-problèmes. Pour finir nous discuterons des résultats obtenus, notamment, l'influence du temps final sur l'optimisation de la commande de la MADA.

4.2 Formulation du problème de commande optimale avec partie mécanique.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la commande en V/f constant n'est pas particulièrement adaptée à la commande d'une MADA. De plus, par principe, cette commande n'est pas optimale. En effet, elle force les flux de la machine à leur valeur nominale et régule le couple avec l'angle entre ces flux. Nous avons montré au chapitre III (3,2) que pour réduire la puissance consommée à couple égale il valait mieux faire l'inverse : fixer l'angle entre les flux et faire varier les flux pour obtenir le couple souhaité.

Même si elle nous a permis de réduire le nombre de variables de commande de quatre à une seule, et donc de faciliter la résolution du problème en utilisant une méthode semi-directe de tir, nous devons nous affranchir de cette simplification pour avoir une méthode opérationnelle et applicable dans le cas de la propulsion navale.

Nous laisserons donc libre les relations entre V_S, f_S, V_R, et f_R. On augmente le nombre de variables de commandes mais on s'offre également plus de possibilités dans la recherche de la commande optimale de la MADA.

La variable $u(t)$ devient alors un vecteur contenant toutes les variables de contrôle $u(t)=[V_S(t); f_S(t); V_R(t); f_R(t)]$.

On peut alors décrire le système grâce au schéma de principe suivant :

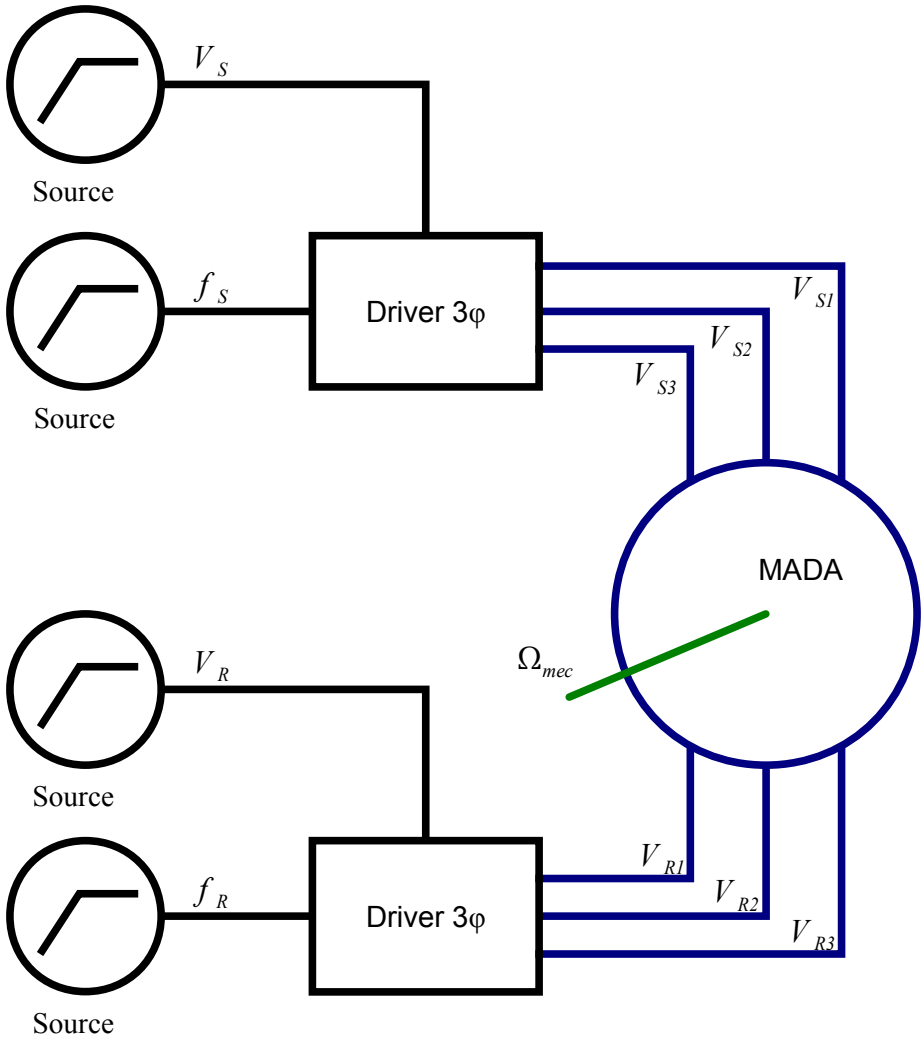

Figure 4.1: Schéma de principe du système

Pour poursuivre dans les changements, dans cette partie, nous prenons en considération la partie mécanique du modèle.

On calcule le couple $\overrightarrow{C_{em}} = N_p M (\overrightarrow{I_R} \wedge \overrightarrow{I_S})$ et on le norme.

Nous avons aussi l'équation du couple résistant qui est choisi comme une fonction affine de la vitesse. Il représente les pertes mécaniques de la machine à vide :

$C_r = K_{C_r} \Omega$.

Avec ces deux couples, nous pouvons calculer l'accélération de la machine soit la dérivée de la vitesse :

$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r$ soit $J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - K_{C_r} \Omega$.

Nous pouvons maintenant discrétiser cette équation par pas de temps h :

$$\Omega_{j+1} = \Omega_j + h\left(\frac{C_{em\,j} - K_{C_r j}\Omega_j}{J}\right)$$

avec $C_{em\,j} = N_p M\left(\overrightarrow{I_{R\,j}} \wedge \overrightarrow{I_{S\,j}}\right)$.

Cette équation différentielle, traitée numériquement par la méthode d'Euler, intervient dans la condition finale de vitesse ainsi que dans le calcul de l'angle mécanique et électrique entre les bobines de la machine. Cet angle permet ainsi de calculer les inductances mutuelles.

On gardera la même valeur de pas de temps h que dans le chapitre III, car les raisons qui nous ont poussé à le choisir restent inchangées ainsi que le même horizon temporel. Le problème est donc toujours divisé en 300 points.

Pour reprendre l'étude préliminaire du chapitre III, les différences sont :

- Ajout l'équation différentielle qui régi la vitesse de rotation de la MADA,

- Multiplication par 4 du nombre de variables à optimiser dû à l'indépendance des variables de contrôle, soit 1200 variables, un jeu de 4 variables par point sur 300 points.

Ces ajouts ont pour effet de mettre à mal la routine de la fonction d'optimisation de MATLAB, car même si cette routine MATLAB est prévue pour des problèmes de grandes tailles, sur un problème aussi complexe que le nôtre, elle ne va pas réussir à converger. L'algorithme présenté dans le chapitre précédant ne fonctionne donc pas sur le problème complet.

Nous avons alors deux solutions à notre disposition :

- Nous pouvons changer le solver, pour en utiliser un plus puissant. Cela impliquerait de changer de logiciel et de réécrire notre problème dans un langage différent sans garantie ni de convergence ni d'un temps de calcul raisonnable. Nous avions envisagé alors ipopt sous AMPL qui permet de résoudre des problème de plus grande taille et qui a montré son intérêt dans les méthodes numériques de contrôle optimal [52].

- Nous pouvons reformuler notre problème pour le rendre « optimisable » par la fonction fmincon de MATLAB et ainsi espérer un temps de calcul réduit ainsi qu'une bonne convergence.

C'est cette dernière option que nous avons choisi et que nous allons développer et justifier dans la partie suivante.

4.3 Principe de causalité

Pour rendre notre problème « optimisable », il convient de trouver d'où viennent les difficultés. Nous en avons deux majeures :

- Le fait de devoir calculer deux équations différentielles afin de décrire le plus fidèlement possible le comportement de la machine.

- Le nombre de variables à optimiser est trop important pour un problème d'optimisation de cette complexité ainsi générée après discrétisation du temps.

Si nous réduisions le nombre de variables de commande, nous nous retrouverions dans le cas du chapitre précédent. Exprimer l'une des variables de commande en fonction de l'une ou des autres, revient à limiter l'espace des solutions possibles et pourrait nous empêcher de trouver un minimum global ou pire, une solution faisable pour notre problème.

Nous devons donc adapter notre problème au modèle mathématique complexe de la MADA.

Pour ce faire, nous avons analysé le fonctionnement d'une MADA et décrit son fonctionnement en terme causal :

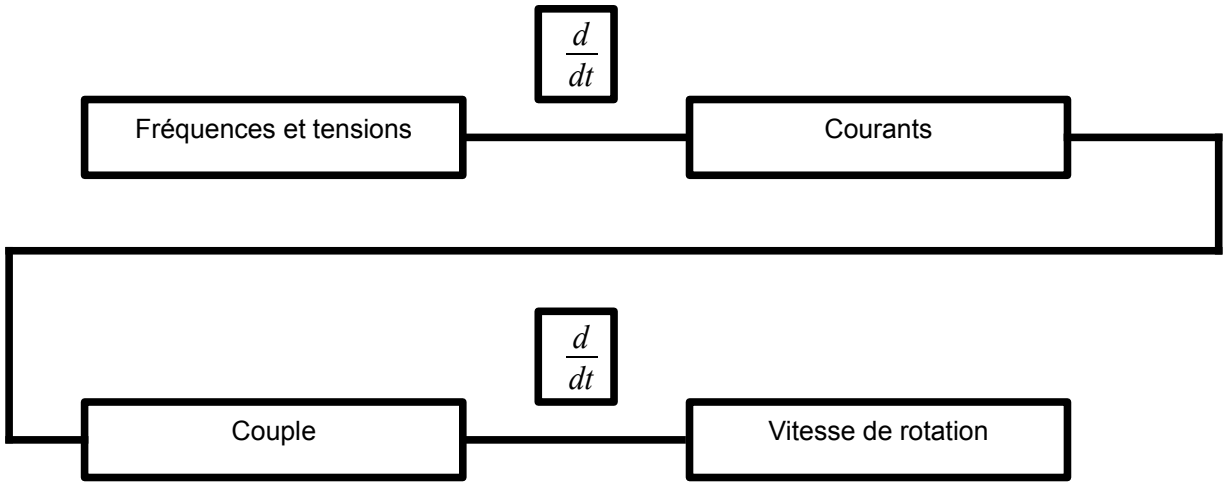

Figure 4.2: Relation de causalité dans une machine

A partir de la valeur efficace des tensions ainsi que de leurs fréquences, on peut calculer les courants, moyennant l'équation différentielle 1.4 issue du chapitre I :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}=[\mathbf{R}]\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}+[\boldsymbol{L}]\frac{d}{dt}\mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta} \quad .$$

Cette équation est simplement l'équation de l'établissement du courant dans une bobine soumise à une tension donnée. Une équation de la même forme régit la tension d'un circuit RL série :

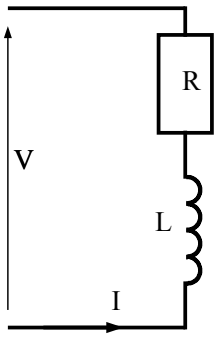

Figure 4.3: Un circuit RL série

Nous obtenons ainsi : $V = R\,I + L\frac{dI}{dt}$.

Une fois les courants obtenus, le calcul du couple est un simple produit vectoriel de ces courants, comme nous le donne l'équation 1.8 issue du chapitre I :

$\overrightarrow{C_{em}} = N_p M (\overrightarrow{I_R} \wedge \overrightarrow{I_S})$.

Bien que simple, la création d'un couple par l'intermédiaire de courants dans une machine électrique passe par plusieurs étapes.

Tout d'abord, les courants circulants dans les enroulements de la machine créent un champ magnétique traversant ceux-ci. Tout comme un courant créerait un champ magnétique en traversant une spire.

Comme le rotor et le stator sont alimentés, il se crée donc deux champs magnétiques à l'intérieur de la machine. Comme les courants d'alimentations sont alternatifs, les champs magnétiques seront tournants comme le souligne la figure 1.9 dans le chapitre I. Ces deux champs magnétiques, en cherchant à s'aligner, vont créer un couple dit électromagnétique proportionnel au cosinus de l'angle les séparant.

On appelle cette transformation une conversion électromécanique de l'énergie qui passe de la forme électrique à la forme mécanique.

Pour finir, on déduit la vitesse de rotation de la machine *via* l'équation différentielle :

$J\frac{d\,\Omega}{dt} = C_{em} - K_{C_r}\Omega$.

En pratique, si le couple électromagnétique est supérieur au couple résistant la machine accélère. Dans le cas contraire, la machine décélère.

En remarquant que cet enchaînement de calculs peut être décomposé. Par exemple, pour un couple donné, on peut calculer la vitesse de rotation de la machine et ce indépendamment du calcul des autres variables. On se propose de tirer partie de cette

constatation. On va alors de séparer notre problème en plusieurs sous-problèmes.

Rappelons que l'objectif de notre étude est de minimiser les pertes Joule durant un démarrage de la MADA. Les grandeurs directement impliquées dans le calcul de ces pertes sont les courants.

Nous allons donc optimiser les courants de sorte que les pertes Joule soit minimales et que le moteur démarre bien au bout du temps final.

On obtient alors le premier sous-problème d'optimisation :

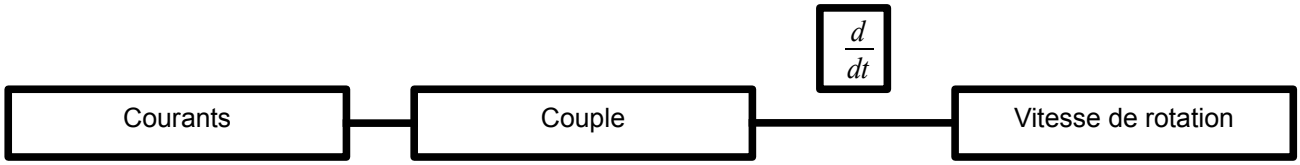

Figure 4.4: Partie électromécanique

On appellera ce sous-problème le sous-problème électromécanique.

Grâce à la méthode du tir semi-direct, nous allons trouver les courants satisfaisant nos contraintes tout en minimisant les pertes Joule.

Cependant, nos variables de contrôle ne sont pas les courants mais bien les tensions efficaces et les fréquences d'alimentation de la machine. Il faudra donc réaliser une deuxième optimisation afin de faire correspondre aux mieux nos variables de contrôle avec les courants trouvés précédemment. On obtient donc le deuxième sous-problème d'optimisation :

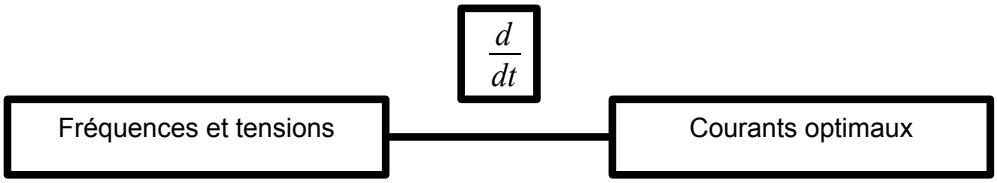

Figure 4.5: Partie électrique

On appellera ce sous-problème le sous-problème électrique.

Ce découpage causal est générique et peut s'appliquer à tout type de moteur puisque les relation de causalité ne dépendent pas du modèle du moteur mais bien du principe de fonctionnement d'un moteur électrique quelconque.

La séparation du problème principal en deux sous-problème soulève tout de même une question : avons nous équivalence entre ces deux moyens de résolution :

$$u^* = [V_S^*; f_S^*; V_R^*; f_R^*] \rightarrow I_{SR\alpha\beta}^* \rightarrow \Omega^* \iff u^* = [V_S^*; f_S^*; V_R^*; f_R^*] \rightarrow \Omega^* \quad ?$$

Pour répondre à cette question, nous devons essayer la résolution numérique des deux sous-problèmes. Si les deux formulations ne sont pas équivalentes, nous ne pourrons pas trouver de vecteur de commande u^* qui permette d'obtenir le vecteur $I_{SR\alpha\beta}^*$ qui permette

de minimiser les pertes Joule et de faire démarrer la MADA.

Mais si nous arrivions à trouver ce vecteur u^*, nous montrerions que ces deux manières d'aborder le problème sont équivalentes. En d'autre termes, nous montrerions que séparer un problème de contrôle optimal en plusieurs sous-problèmes, liés à la causalité du fonctionnement d'un moteur électrique, permet de résoudre ce problème d'un bloc.

Nous allons maintenant résoudre le sous-problème électromécanique puis le sous-problème électrique afin de tenter de résoudre le problème final.

4.4 Résolution des deux sous-problèmes

4.4.1 Résolution du sous-problème électromécanique

Cette partie consiste à trouver les courants qui minimisent les pertes Joule tout en assurant le démarrage de la MADA. On ne peut pas ici s'affranchir de temps de simulation du problème qui devra donc être traité de 0 seconde au temps final de 3 secondes.

On traitera donc ce sous-problème comme un problème de commande optimale où les commandes sont les courants circulant dans les enroulements de la MADA. L'objectif, comme les contraintes, sont les mêmes que pour le problème principal, seules les variables de contrôle changent. Au lieu des tensions et fréquences, on utilisera les courants.

On utilise tout comme dans le chapitre III, la méthode du tir semi-direct. Le problème sera donc de la même taille que le problème principal, à savoir 400 variables par seconde de temps simulé.

On obtient donc le problème suivant :

$$\min_{u} E_{Joules} = \sum_{j=0}^{N} h\, P^{j}_{Joules}(\mathbf{X}_j) \text{ avec } \Omega_{j+1} = \Omega_j + h\left(\frac{C_{em\,j} - K_{C_r\,j}\,\Omega_j}{J}\right)$$

$$\text{sous les contraintes}$$

$$\mathbf{X}_{\min} < \mathbf{X}_j < \mathbf{X}_{\max} \text{ et } u_{\min} < u_j < u_{\max}$$

$$\mathbf{X_0} = [0\,;0\,;0\,;0]$$

$$\Omega_N = 188\,\text{rad/s}$$

Avec toujours $P^{j}_{Joules} = 3R_S\left(I^2_{S\alpha\,j} + I^2_{S\beta\,j}\right) + 3R_R\left(I^2_{R\alpha\,j} + I^2_{R\beta\,j}\right)$ et $\mathbf{X} = \mathbf{I_{SR\,\alpha\beta}}$.

Le sous-problème semble être le même que le problème complet. En effet, nous avons 400 variables par seconde de temps simulé à optimiser, l'objectif est de minimiser les pertes Joule et les contraintes qui s'appliquent sont les mêmes, notamment la condition sur la vitesse finale qui n'a pas changée.

La différence majeure est dans le calcul qui mène aux pertes Joule et à la vitesse. Ici nous agissons directement sur les courants et ne sommes plus tributaires du calcul de ces derniers. On économise donc une équation différentielle délicate puisque toutes les

tensions efficaces et les fréquences interviennent dans chaque calcul de chaque courant.

De plus, l'équation différentielle restante, celle qui permet de calculer la vitesse de rotation à partir d'un couple donné et qui ralentie la résolution numérique, ne porte que sur une contrainte, ce qui simplifie également le problème. Nous obtenons donc un sous-problème qui sera simple à résoudre malgré ses 400 variables par seconde de temps simulé. Ce sous-problème est même plus simple et plus rapide à résoudre que le celui présenté au Chapitre III.

Ce problème sera résolu grâce à la fonction d'optimisation `fmincon` intégrée à MATLAB que nous avons présenté au chapitre III :

```
[vecteur solution, valeur de la solution, flag] = fmincon ('Fonction objectif',
vecteur initial, [], [], [], [], borne(s) inférieure(s), borne(s) supérieure(s),
'fonction de contrainte', option)
```

Avec :

- vecteur solution : Ici, ce sera le vecteur des courants idéaux $I^*_{RS\alpha\beta}=[I^*_{S\alpha};I^*_{S\beta};I^*_{R\alpha};I^*_{R\beta}]$, une matrice de dimension 400*nombre de seconde simulés.

- valeur de la solution : C'est, comme pour le problème principal, la valeur de l'énergie Joule dépensée sur le démarrage pour la matrice $I^*_{RS\alpha\beta}=[I^*_{S\alpha};I^*_{S\beta};I^*_{R\alpha};I^*_{R\beta}]$.

- Fonction objectif : Dans notre cas, comme pour le problème principal, c'est la fonction qui à partir d'un vecteur de commande $I_{RS\alpha\beta}=[I_{S\alpha};I_{S\beta};I_{R\alpha};I_{R\beta}]$ va nous donner l'énergie Joule dépensée sur le démarrage

- vecteur initial : ici c'est un vecteur $I_{RS\alpha\beta 0}=[I_{S\alpha 0};I_{S\beta 0};I_{R\alpha 0};I_{R\beta 0}]$ contenant une matrice de commande aléatoire qui sera tirée en respectant les limitation individuelle de chaque courant.

- borne(s) inférieure(s) de la commande et borne(s) supérieure(s) de la commande : nous intégrons ici les limitations de courants que nous donnons en Annexe 2.

- Fonction de contrainte : Cette fonction calcule le couple à chaque pas de temps, pour déduire la vitesse de rotation de la machine. Elle vérifie ainsi que nous ne sommes pas en sur-vitesse au cours du démarrage et que nous arrivons bien à la vitesse nominale en fin de parcours, en d'autres termes : $\forall i\ \Omega_i<\Omega_{max}$ et $\Omega_{final}=180\ \mathrm{rad/s}$.

- Option : Nous restons ici avec la méthode du point intérieur.

Nous devons dans ce cas aussi faire un multistart afin d'obtenir la convergence de la fonction `fmincon`. Le problème est délicat à résoudre mais dès les première itérations et en analysant les données de convergence comme la valeur de la fonction objectif et des contraintes, nous pouvons déterminer si un point de départ est viable. Nous lançons donc

l'optimisation 100 fois avec des points de départs aléatoires avec un critère d'arrêt strict. Seuls deux ou trois points sur 100 donnent une possible convergence de `fmincon`. Nous poursuivons ensuite l'optimisation avec ces deux ou trois points pour voir lequel donne la solution minimale de notre problème.

Au bout d'une heure par seconde de temps simulé, nous obtenons un résultat que nous détaillerons plus bas.

4.4.2 Résolution du sous-problème électrique

La partie électrique est ce qui fait à la fois la spécificité de la MADA mais aussi sa difficulté à la piloter. En effet, c'est là que nous allons retrouver les couplages entre le rotor et le stator.

Notre découpage a permis de simplifier la minimisation des pertes Joule, mais il a aussi permis d'avoir des courants optimaux sur toute la durée du démarrage. On peut donc dans cette partie, s'affranchir du temps puisqu'il est déjà pris en compte dans la résolution du sous-problème électromécanique.

Nous cherchons dans cette partie les tensions et fréquences à appliquer à la MADA de sorte à obtenir les courants optimaux calculés précédemment. Courants qui permettent eux-même d'avoir un comportement optimal de la MADA.

Nous pourrions calculer ces tensions et fréquences pour tout le démarrage en une fois. Mais cette opération est délicate et *a* priori génère un problème d'optimisation de trop grande taille pour être géré dans son ensemble comme nous l'avons signalé au début de ce chapitre. Et comme la question de la temporalité est déjà prise en considération dans le calcul des courants, nous pouvons ici calculer les deux couples tension fréquence à chaque pas de temps indépendamment des autres points.

Le nombre de variables passe donc de 400*nombre de secondes simulées à 4 mais le nombre de problèmes de 1 à 100*nombre de secondes simulées.

On obtient le problème suivant :

$$\sum_{i=0}^{N} \min_{V_{1..2}^i, f_{1..2}^i \in \Re^4} \left[\sum_{k=1..4} \left[\left(I_k^* - I_k\left(V_{1..2}, f_{1..2}\right)\right)^2 \right] \right]$$

$$\text{sous les contraintes}$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + h\left(\mathbf{A}\mathbf{X}_i + \mathbf{B}\left(u^i\right)\right)$$

Avec toujours $\mathbf{X} = \mathbf{I}_{\mathbf{SR}\alpha\beta}$.

Comme dit plus haut, ce problème pourrait être résolu de manière indépendante pour chacun des 300 pas de temps. Cependant, il ne faut pas oublier que chaque point est le point de départ du suivant. Un vecteur solution pour un point de temps peut donc être un mauvais point de départ pour le point suivant. Il faudra alors recalculer le point précédent.

La MADA ayant des symétries géométriques par conception, elle possède également des

symétries électriques. Il n'y a donc *a priori* pas unicité de la solution pour un pas de temps donné.

On a le point de départ des courant, $\mathbf{X}_i^* = [I_{S\alpha i}^*; I_{S\beta i}^*; I_{R\alpha i}^*; I_{S\beta i}^*]$ ainsi que le point d'arrivée, $\mathbf{X}_{i+1}^* = [I_{S\alpha i+1}^*; I_{S\beta i+1}^*; I_{R\alpha i+1}^*; I_{S\beta i+1}^*]$. On cherche donc le vecteur $u_i = [V_{Si}; f_{Si}; V_{Ri}; f_{Ri}]$ tel que à partir de $\mathbf{X}_i$ on arrive à $\mathbf{X}_{i+1}$ au bout du pas de temps h. Seulement, la solution pour passer d'un point à un autre n'est pas unique, il existe plusieurs vecteurs u_i pour passer de $\mathbf{X}_i^*$ à $\mathbf{X}_{i+1}^*$. De plus, ce vecteur conditionne également le point suivant. En effet, les contraintes imposent que les variations de tension et de fréquence soient limitées. Il est alors possible que pour un vecteur u_i donné, il n'existe pas de vecteur u_{i+1} qui permette de passer de $\mathbf{X}_{i+1}^*$ à $\mathbf{X}_{i+2}^*$. Il faut donc recalculer u_i pour pouvoir calculer u_{i+1}. On peut ainsi remonter de plusieurs points jusqu'à obtenir un résultat satisfaisant.

Autre point important, n'étant pas dans un monde idéal, il est possible, par le biais des tolérances, que le point d'arrivée soit différent du point calculé pour résoudre le sous-problème électromécanique : $\mathbf{X}_{i+1}(u_i) \neq \mathbf{X}_{i+1}^*$. Dans ce cas, pour calculer la commande suivante u_{i+1}, il faut prendre comme point de départ $\mathbf{X}_{i+1}(u_i)$ et conserver comme point d'arrivée $\mathbf{X}_{i+2}^*$. On tentera ainsi de corriger la déviation. Nous évitons se faisant de calculer une commande à partir d'un point de courant qui n'existera pas en réalité.

Avec ce découpage, le problème devient simple à résoudre. Dans un premier temps on trouve les courants optimaux en résolvant le premier sous-problème, puis, dans un second temps, on trouve les tensions et fréquences permettant d'obtenir les courants optimaux. Ces tensions et fréquences seront donc optimales. Elles permettrons de réduire les pertes Joule tout en faisant démarrer la MADA.

Remarque: si pour notre étude, on arrive à retrouver les u^* tels que les écarts quadratiques des 100*nombre de secondes simulées sous-problèmes électriques est très proche de zéro. On aura une équivalence entre les problèmes d'optimisation : si avec notre méthode de décomposition en sous-problèmes, nous trouvons l'optimum global ce serra aussi le minimum du problème principal et réciproquement.

Bien évidemment si on s'écarte trop de zéro notre méthode ne sera pas valide.

4.5 Résultats numériques

Nous allons présenter ici les résultats de notre étude. Ces résultats sont donnés pour une MADA de 4kW, dont les caractéristiques sont données en Annexe I, mais, au vu de la conception du programme, en changeant le fichier contenant les paramètres du moteur, nous pourrions calculer la commande optimale de n'importe quelle MADA. Notre méthode d'optimisation est donc générique pour tout type de MADA.

Tous les programme MATLAB ayant permis d'obtenir les résultats suivant sont en Annexe V.

Ayant un algorithme efficace pour la résolution de notre problème, nous l'avons testé pour

plusieurs valeurs de temps final. Cette recherche nous permet de déterminer non seulement la commande optimale pour chacun de ces temps mais nous montre aussi pour quel(s) temps final(aux) la commande est la plus efficace.

Après plusieurs essais pour différent temps finaux, nous obtenons la courbe suivante :

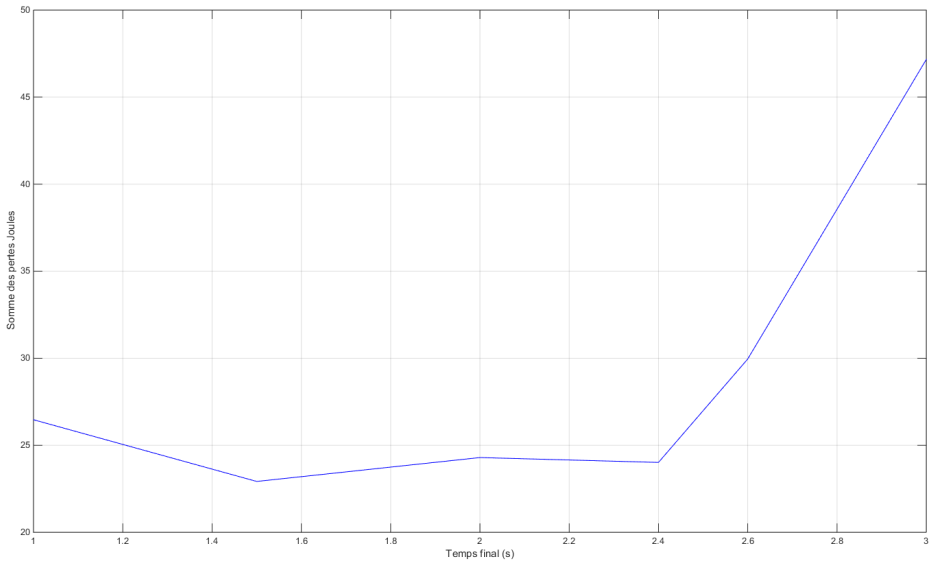

Figure 4.6: Somme des pertes Joule en fonction du temps final

Comme nous pouvons le constater en figure 4.6, pour des temps inférieurs à 1.4s la somme des pertes Joule augmentent et il en va de même pour pour les temps supérieurs à 2.4s

L'explication dans les deux cas est simple. Quand on se déplace vers un temps final petit, on a moins de marge de manœuvre pour optimiser la commande. C'est donc la dynamique qui prime. On essaye d'atteindre la vitesse de rotation nominale avant de réduire les pertes Joule sur le démarrage.

Pour un temps final plus grand, la problématique devient autre. En effet, l'optimisation des courants a été réalisée de la même manière pour tous les temps finaux. Après avoir satisfait la contrainte sur la vitesse finale, on essaye de minimiser les pertes Joule mais compte tenu de la taille croissante du problème avec le temps final qui augmente, le minimum est plus dur à trouver. C'est pourquoi sur le profil de vitesse on observe qu'avec un temps final plus long, le moteur se met à tourner à vitesse réduite pendant un certain temps ce qui explique une consommation, et donc des pertes, qui ne sont pas utiles jusqu'au moment où le moteur se met véritablement à démarrer.

Les profils des vitesses de rotation du moteur en fonction du temps final sont donnés en figure 4.7 :

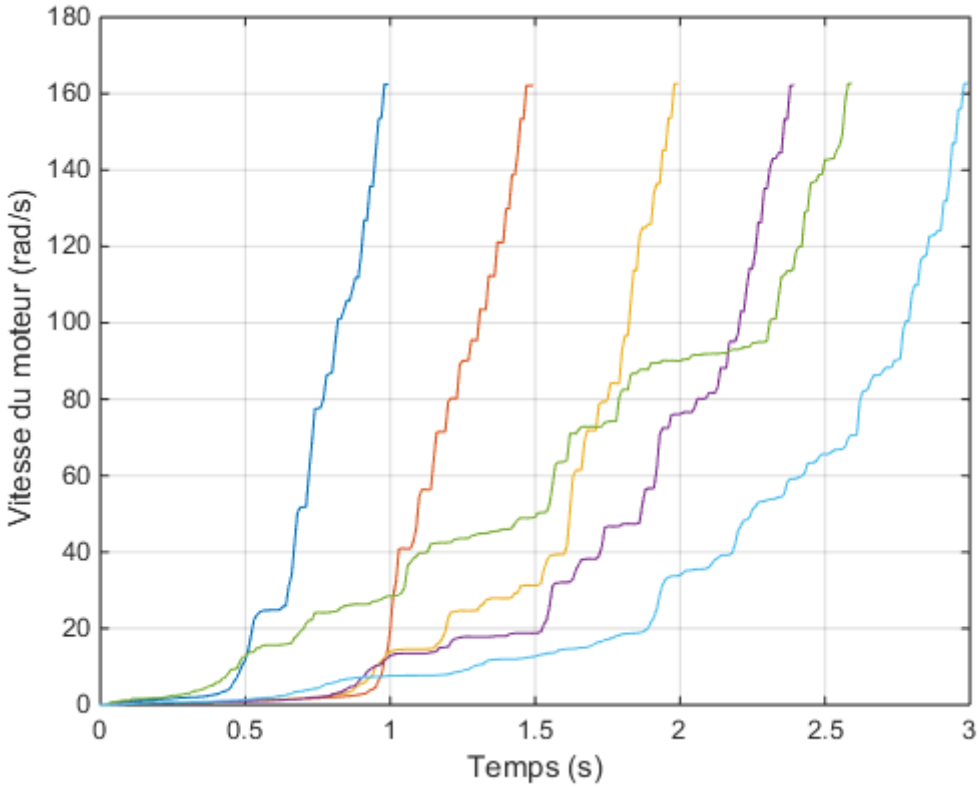

Figure 4.7: Profils des vitesses optimisés en fonction du temps final

On remarque sur la figure 4.7 que dans les cas avec un temps final plus long, la MADA démarre avec une vitesse de rotation faible pendant un moment puis accélère fortement pour atteindre sa vitesse de consigne. Cette mise en rotation n'est pas utile à ce moment-là et peut se mettre en place plus tard dans le démarrage. Néanmoins, elle consomme de l'énergie et donc génère des pertes Joule.

Les contraintes en fonction du temps final sont données sur la figure suivante :

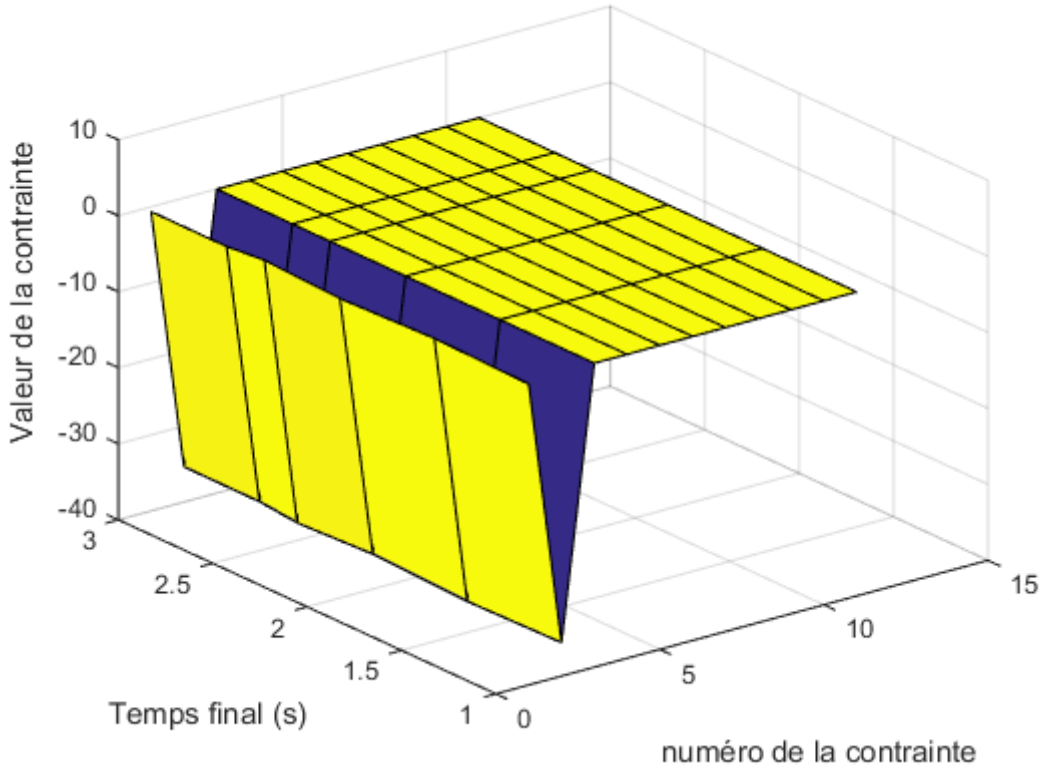

Figure 4.8: Valeurs des contraintes en fonction du temps final

On remarque sur la figure 4.8 que les contraintes sont toutes respectées pour tous les temps finaux. On remarque aussi que l'une d'entre elles est systématiquement très négative alors que les autres sont proches de 0. Cette contrainte correspond à la valeur maximale que peut atteindre la vitesse de rotation de la MADA, elle est inactive alors que les autres sont saturées.

Sur la figure 4.9 les contraintes correspondant aux bornes de la vitesse finale sont données en fonction du temps final :

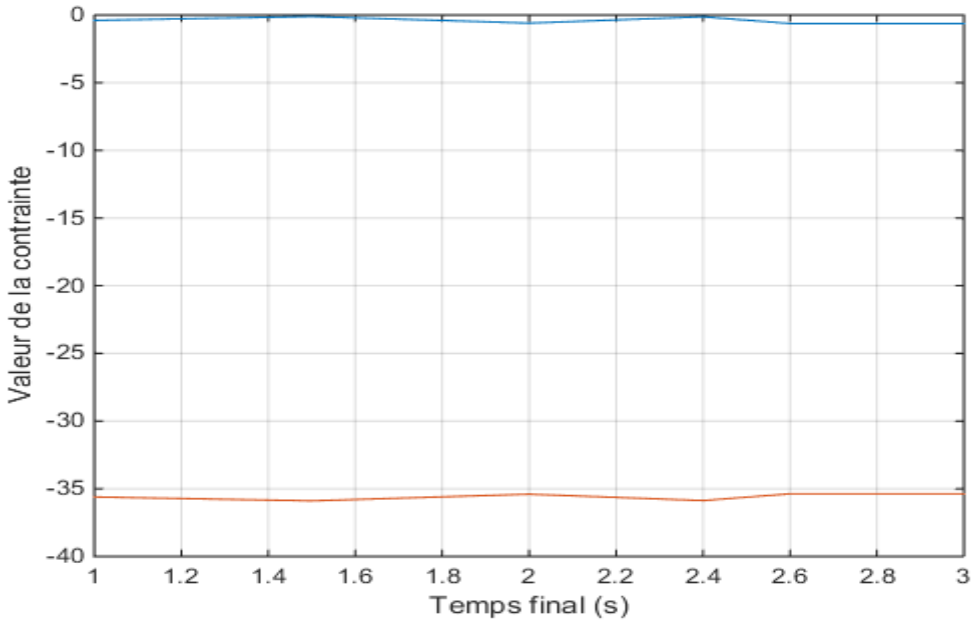

Figure 4.9: Valeurs des contraintes sur la vitesse finale en fonction du temps final

la solution minimale va donc à l'économie en choisissant la vitesse finale la plus basse admissible afin de minimiser l'énergie Joule perdue. En effet, atteindre une vitesse la plus basse possible permet de réduire l'énergie consommée et donc les pertes Joule.

En terme de temps de calcul, l'algorithme met environ une heure par seconde simulée pour calculer les courants optimaux. Ce temps de calcul long reflète la difficulté pour trouver une commande optimale. Ceci est notamment dû à la taille importante du problème.

Il existe un temps final de 1 seconde et demie où l'énergie Joule perdue est minimale. Nous choisissons donc ce temps pour compléter l'optimisation en calculant les tensions et fréquences permettant d'obtenir les courants optimaux.

Notre algorithme permettant de retrouver les courants optimaux grâce aux tensions et fréquences d'alimentation de la MADA nous donne un résultat en seize minutes.

Nous montrons les courbes de vitesse pour ce temps final :

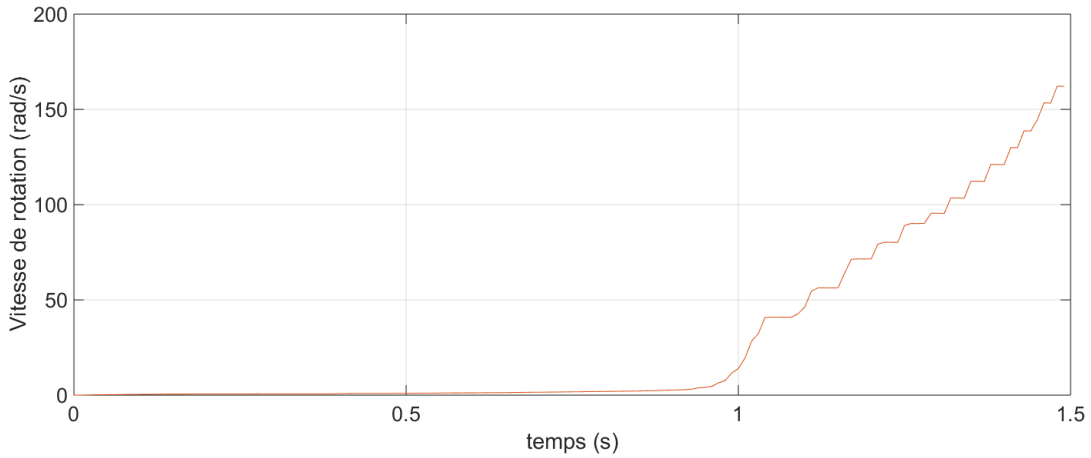

Figure 4.10: Vitesse de la machine

Nous avons tracé sur la figure 4.10 la réponse en vitesse calculée avec le modèle de la MADA suivant deux méthodes. En rouge, la réponse avec les courants optimaux obtenus précédemment et en bleu la réponse obtenue grâce aux tensions et fréquences que nous venons de calculer.

On constate que ces deux réponses sont confondues et rentrent donc dans le cahier des charges fixé au départ.

On donne sur la figure 4.11 l'écart entre la vitesse de rotation calculée avec les courants optimaux et celle calculée avec les tensions et fréquences optimales :

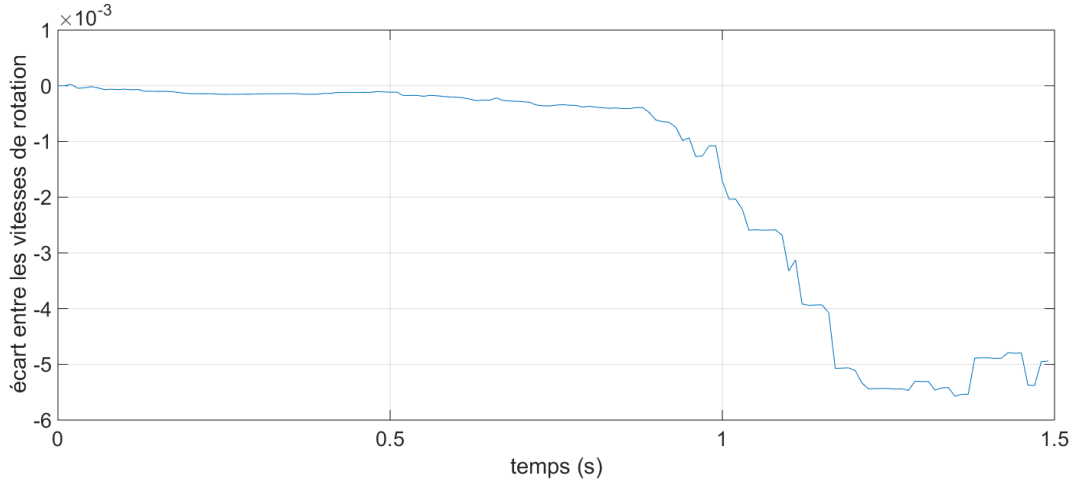

Figure 4.11: écart entre les vitesses de rotation

On constate sur cette figure 4.11 que l'écart maximal est à la fin du démarrage et qu'il atteint $-5{,}6.10^{-3}\ \mathrm{rad}/s$ ce qui fait 0,005% d'écart avec la vitesse finale calculée avec les courants optimaux. Cet écart maximum est à $t = 1{,}35\mathrm{s}$.

Nous remarquons que, comme dans notre étude préliminaire, le moteur ne démarre vraiment qu'au bout d'une seconde.

On peut noter en regardant la figure 4.12 que cette similarité de résultat se retrouve dans la réponse en couple de la machine :

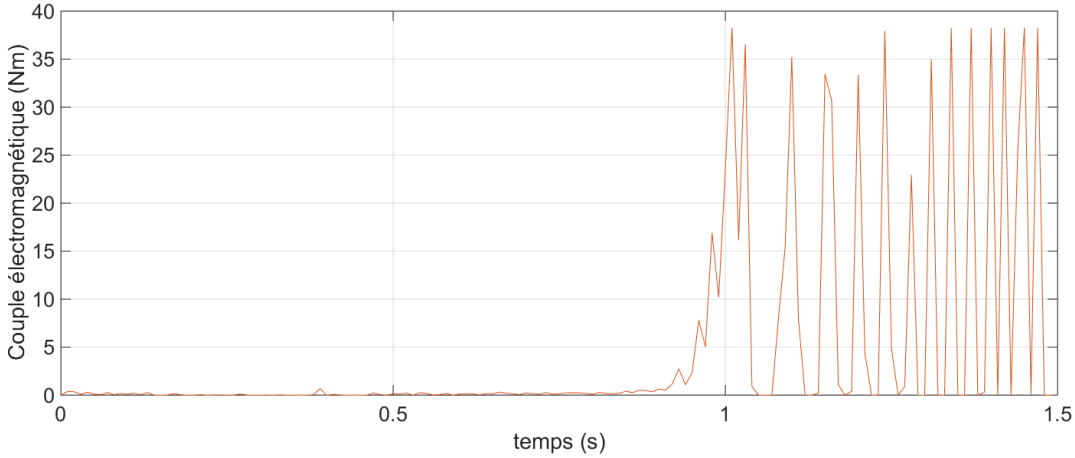

Figure 4.12: Couple optimal pour un démarrage

Ici encore les deux réponses sont confondues, ce qui nous permet d'avoir des réponses en vitesse identiques.

Tout comme pour la vitesse de rotation, nous donnons l'écart entre le couple issu des courants optimaux et celui issu des tensions et fréquences optimales sur la figure 4.13 :

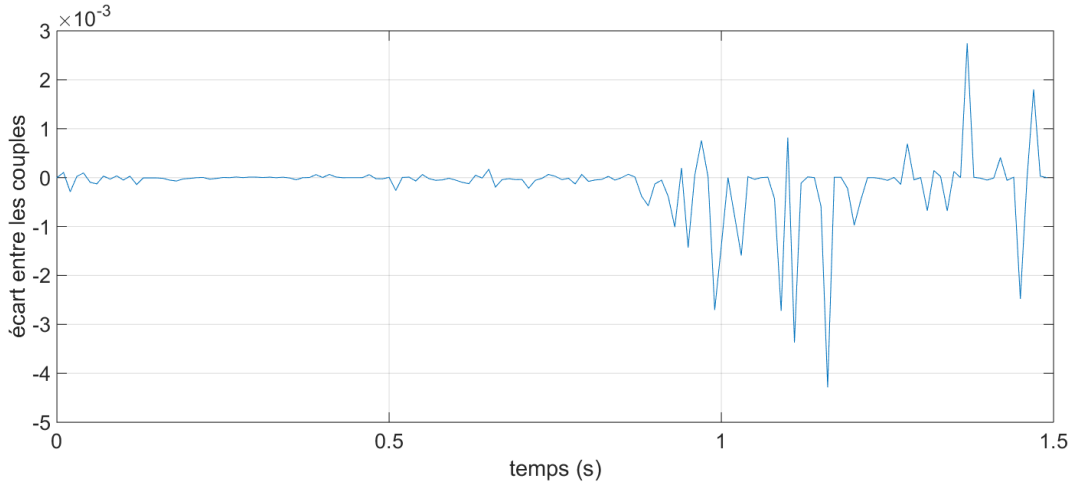

Figure 4.13: écart entre les couples

Sur la figure 4.13 encore l'écart maximal et d'environ $-4{,}3.10^{-3}$ Nm à $t = 1{,}16$ s et l'écart représente 0,014 % de la valeur du couple électromagnétique à ce temps là.

Si le couple calculé avec les courants optimaux est égal au couple calculé grâce aux tensions et fréquences optimales, c'est bien parce que notre algorithme a su trouver ces tensions et fréquences permettant d'obtenir les courants optimaux comme le montre la figure suivante :

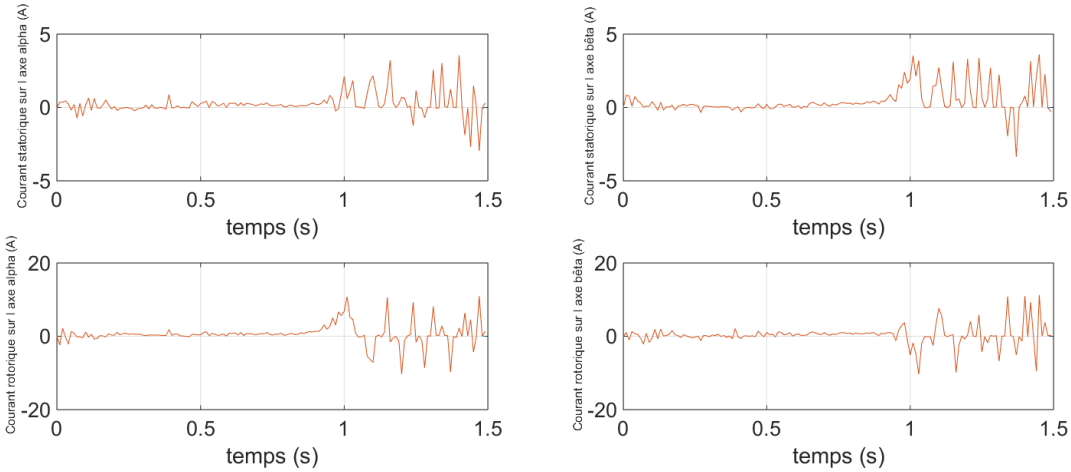

Figure 4.14: Courants optimaux

Comme les courbes sont aussi quasiment confondues sur la figure 4.14, on donne la différences entre les courants calculés avec les tensions et fréquences et ceux obtenus en résolvant le sous-problème électromécanique sur la figure 4.15 :

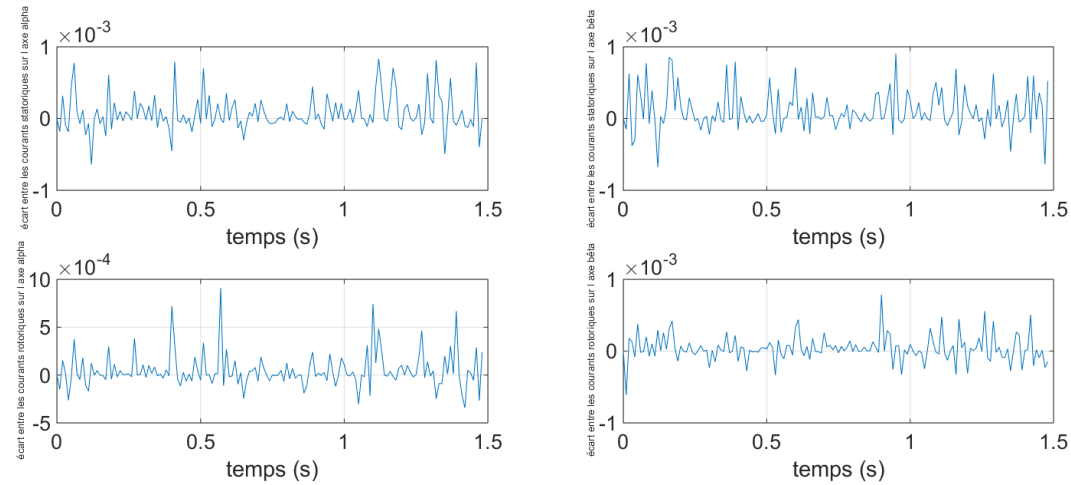

Figure 4.15: écarts entre les différents courants

On donne les écarts maximum relevés sur la figure 4.15 pour chaque courants dans le tableau suivant, en précisant à chaque fois la valeur absolue de l'écart, le pourcentage par rapport à la valeur de référence et le moment où a eu lieu cet écart :

Courant concerné	Valeur absolue de l'écart (A)	Pourcentage d'écart (%)	Temps de l'écart (s)
$I_{S\alpha}$	$8{,}3.10^{-4}$	1,27	1,12
$I_{S\beta}$	9.10^{-4}	0,23	0,95
$I_{R\alpha}$	$9{,}1.10^{-4}$	0,24	0,57
$I_{R\beta}$	$7{,}9.10^{-4}$	0,09	0,9

On voit là encore que le sous-problème électrique à été résolu avec succès puisque l'écart maximal en pourcentage est de 1,25%. Nous avons atteint notre objectif de trouver les tensions et fréquences optimales de sorte à obtenir les courants optimaux.

On a alors montré l'équivalence questionnée plus haut : résoudre les deux sous-problèmes successivement permet de résoudre notre problème principal. Il nous aura fallu un peu plus d'une heure et quarante cinq minutes pour calculer la commande optimale de notre MADA avec notre algorithme.

Pour finir, les tensions par phase ayant permis d'obtenir cette réponse en vitesse sont présentées sur la figure 4.16 et dans le tableau suivants :

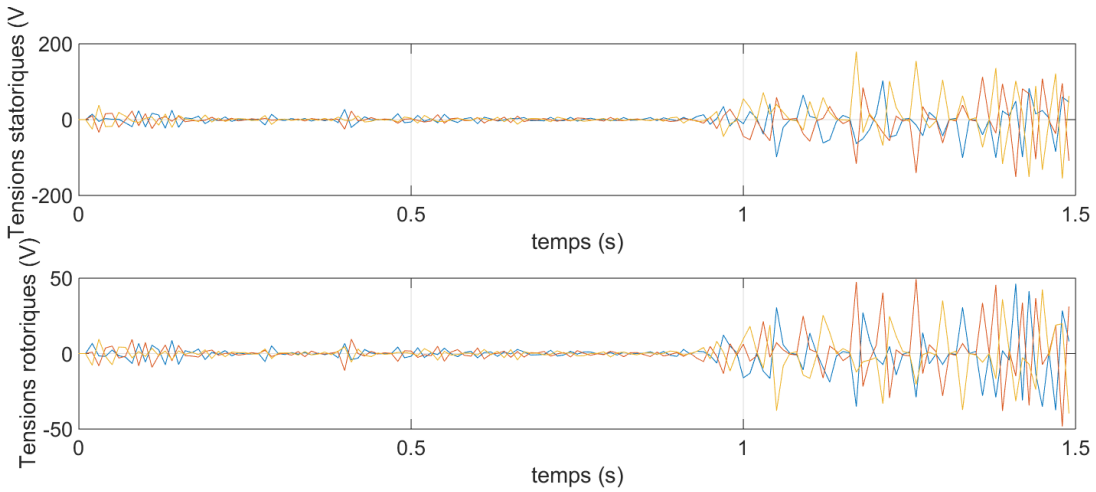

Figure 4.16: Tensions optimales

Dans le tableau suivant, nous donnons les valeurs exactes de la solution présentée en figure 4.16. Il contient les valeurs à chaque pas de temps des tensions optimales à appliquer à la MADA.

Temps (s)	Vs1 (V)	Vs2 (V)	Vs3 (V)	Vr1 (V)	Vr2 (V)	Vr3 (V)
0	0	0	0	0	0	0
0,01	-0	-0	-0	-0	-0	-0
0,02	14.401	10.561	-24.961	6.7145	1.0156	-7.7301
0,03	-4.6396	-33.575	38.214	-1.5463	-8.0336	9.5799
0,04	2.8678	15.642	-18.509	-1.8352	3.716	-1.8808
0,05	1.0001	16.603	-17.604	2.387	4.9814	-7.3684
0,06	0.827	-19.692	18.865	-1.3951	-2.9181	4.3132
0,07	-8.4649	-0.70571	9.1706	-2.3292	-1.7987	4.1278
0,08	-18.52	22.75	-4.2298	-6.5069	9.4371	-2.9302
0,09	23.512	-16.335	-7.1766	6.7918	-8.277	1.4852
0,1	-19.528	15.771	3.7568	-5.5752	7.4114	-1.8362
0,11	16.74	-23.592	6.8522	5.5585	-9.0795	3.521
0,12	12.253	2.2322	-14.485	2.5654	-1.2776	-1.2878
0,13	-22.623	7.9243	14.699	-7.392	5.7108	1.6812
0,14	24.623	-4.3092	-20.314	8.7141	-4.8191	-3.8949
0,15	-20.1	8.8269	11.273	-7.2061	5.4058	1.8004
0,16	4.6728	-5.5348	0.86203	1.9203	-1.3851	-0.5352
0,17	2.5873	-2.8223	0.23502	0.70793	-1.6227	0.91474
0,18	8.8945	-3.551	-5.3436	2.9905	-2.2939	-0.69665
0,19	-10.511	-1.4931	12.004	-3.9181	1.3945	2.5237
0,2	0.01934	6.2976	-6.3169	0.8577	2.4119	-3.2696
0,21	-2.3001	-2.1059	4.4061	-0.37848	-1.1913	1.5698
0,22	7.166	-2.3227	-4.8433	1.9577	0.14133	-2.099
0,23	-4.6719	3.7023	0.96957	-1.4293	0.36368	1.0656
0,24	0.67942	-3.2623	2.5829	0.44124	-1.0189	0.57764
0,25	-1.2338	-0.77129	2.0051	-0.33791	-0.41384	0.75174
0,26	0.16731	2.2419	-2.4092	-0.21509	0.58144	-0.36635
0,27	1.2419	-0.013348	-1.2285	0.14583	0.050553	-0.19638
0,28	-13.73	3.3571	10.373	-5.1354	2.1576	2.9778
0,29	13.914	-1.5884	-12.326	5.0861	-1.8874	-3.1987
0,3	1.1778e-17	-1.6001e-17	4.2229e-18	0.12915	-0.21343	0.084282
0,31	-2.6642	1.3259	1.3383	-0.72296	0.224	0.49896
0,32	3.1156	-1.6833	-1.4322	0.71727	-1.3192	0.6019
0,33	-1.4497	1.6124	-0.16271	-0.39855	1.3575	-0.95894
0,34	3.0729	-3.5118	0.43886	0.74413	-2.0556	1.3114
0,35	-3.8929	2.8323	1.0606	-0.82023	1.659	-0.83876
0,36	1.3466	0.26216	-1.6087	0.30428	0.024709	-0.32899
0,37	-2.9263	-0.48517	3.4114	-0.7107	-0.28654	0.99725
0,38	1.8662	1.126	-2.9922	0.40304	0.33871	-0.74175
0,39	-7.6961	1.0584	6.6376	-2.7162	1.1624	1.5539
0,4	26.854	-25.094	-1.7601	6.7375	-11.246	4.5089
0,41	-20.451	22.586	-2.1343	-3.9918	9.6106	-5.6189
0,42	-6.2758	-2.9667	9.2425	-3.0107	0.010974	2.9997
0,43	7.3992	-1.1288	-6.2704	2.6991	-1.5455	-1.1536
0,44	-0.85793	5.253	-4.3951	0.43668	1.5434	-1.9801
0,45	-0.21161	-0.48443	0.69603	5.1068e-17	-0.32099	0.32099
0,46	-0.73617	1.6947	-0.95848	-0.29888	0.66361	-0.36472
0,47	-1.3619	0.63938	0.72249	-0.17458	0.23208	-0.057499
0,48	15.844	-9.5893	-6.255	4.464	-5.192	0.72797
0,49	-8.0763	1.217	6.8592	-2.731	1.9014	0.82967
0,5	-6.1561	2.2139	3.9423	-1.7786	1.6819	0.09668
0,51	11.077	-1.9892	-9.0876	3.8534	-2.568	-1.2855
0,52	-4.7064	-6.1884	10.895	-2.6463	-0.66215	3.3085
0,53	2.4379	-3.7603	1.3224	0.50751	-1.4317	0.9242
0,54	-8.2563	13.1	-4.8437	-0.63984	4.8725	-4.2327
0,55	13.948	-9.2076	-4.7408	3.5727	-5.0607	1.488
0,56	-1.5461	2.5861	-1.04	-0.041048	1.0094	-0.96834
0,57	-7.6214	4.3141	3.3073	-2.0455	2.7211	-0.67553
0,58	2.5609	-2.4313	-0.12963	0.67179	-1.1638	0.49198
0,59	5.2045	-2.6947	-2.5099	1.4952	-1.6758	0.1806
0,6	-10.426	5.949	4.4768	-2.7364	3.7346	-0.99814
0,61	6.3005	-9.041	2.7405	0.72165	-3.5211	2.7994
0,62	2.2124	0.70115	-2.9135	1.1259	-0.34476	-0.78117
0,63	-3.6325	-2.625	6.2575	-1.7758	0.22136	1.5544
0,64	-1.0211	6.4915	-5.4704	1.0415	1.6228	-2.6643
0,65	3.2975	-7.8151	4.5177	-0.20717	-2.4351	2.6422
0,66	2.5475	9.2707	-11.818	2.7563	1.3652	-4.1215
0,67	5.3975	-5.2551	-0.14238	1.0932	-2.304	1.2107
0,68	-2.6293	-0.29677	2.9261	-0.92329	0.64516	0.27813
0,69	-2.0659	-0.78443	2.8503	-0.80238	0.43775	0.36462
0,7	-3.3751	2.9078	0.46733	-0.59214	1.4337	-0.84158
0,71	6.3767	-0.6793	-5.6974	2.2347	-1.703	-0.53174
0,72	-2.3106	-4.0498	6.3604	-1.6022	-0.19325	1.7954
0,73	-2.7064	0.00097066	2.7055	-0.86025	0.72859	0.13166
0,74	5.9545	-3.3911	-2.5634	1.5037	-2.2281	0.72441

Temps (s)	Vs1 (V)	Vs2 (V)	Vs3 (V)	Vr1 (V)	Vr2 (V)	Vr3 (V)
0,75	-4.0801	4.4972	-0.41702	-0.40863	1.9668	-1.5582
0,76	1.0155	3.2836	-4.2992	1.1223	0.27021	-1.3925
0,77	3.7689	-1.3649	-2.404	1.0593	-1.1432	0.083885
0,78	-4.0276e-13	-0.5426	0.5426	-0.087909	-0.042892	0.1308
0,79	0.78221	-3.6426	2.8604	-0.43294	-0.77231	1.2052
0,8	-2.0106	5.7401	-3.7295	0.74737	1.5041	-2.2514
0,81	-2.1276	-1.5583	3.6859	-1.0066	0.50437	0.50228
0,82	5.5376	-2.9371	-2.6004	1.0654	-2.0723	1.0068
0,83	-1.5123	0.042274	1.47	-0.38803	0.561	-0.17297
0,84	-1.3341	1.8547	-0.52055	0.10909	0.68758	-0.79666
0,85	1.3252	-1.1205	-0.20467	0.17686	-0.535	0.35814
0,86	5.3682	-2.0324	-3.3357	1.383	-1.8829	0.49987
0,87	-2.5955	0.52623	2.0693	-0.64221	0.86261	-0.2204
0,88	4.8064	-0.68231	-4.1241	1.3837	-1.5951	0.21135
0,89	0.35188	-4.9626	4.6107	-1.1022	-0.61502	1.7172
0,9	-3.0729	-3.4117	6.4846	-1.8329	0.70874	1.1242
0,91	5.8639	3.0711	-8.935	2.7651	-1.793	-0.97209
0,92	-1.0717	-0.58343	1.6551	-0.33092	0.34613	-0.015211
0,93	8.0369	-3.0526	-4.9844	1.558	-3.0483	1.4903
0,94	13.027	-9.2365	-3.7903	1.2486	-5.266	4.0174
0,95	-12.252	6.4001	5.8522	-1.3227	4.8343	-3.5116
0,96	2.7285	-23.959	21.231	-6.2115	-1.9353	8.1468
0,97	34.696	9.8865	-44.583	12.293	-13.224	0.93103
0,98	-16.418	27.452	-11.033	4.9364	6.5594	-11.496
0,99	41.21	-10.202	-31.008	6.7871	-16.11	9.3228
1	-10.741	-44.197	54.937	-16.042	6.2887	9.7533
1,01	21.233	-53.139	31.907	-13.051	-4.9947	18.046
1,02	39.254	39.047	-78.301	19.864	-22.521	2.6571
1,03	-38.482	-32.834	71.316	-11.611	21.337	-9.7257
1,04	41.7	-55.846	14.146	-16.471	-2.384	18.855
1,05	-98.588	58.719	39.869	30.655	7.142	-37.797
1,06	-20.438	0.91735	19.521	5.7463	2.5076	-8.2539
1,07	-0.72745	1.3119	-0.58446	0.26759	-0.40099	0.1334
1,08	-1.0128	3.7237	-2.7109	-0.41546	-0.93332	1.3488
1,09	64.705	-37.366	-27.339	-10.67	24.957	-14.287
1,1	8.8921	-56.878	47.986	13.552	2.7914	-16.344
1,11	36.067	-43.531	7.4647	8.4954	10.298	-18.793
1,12	-61.558	3.5065	58.051	-9.2964	-16.116	25.412
1,13	-53.308	34.418	18.89	-18.899	4.9781	13.92
1,14	-5.44	4.9078	0.5322	-1.6535	1.7354	-0.081867
1,15	11.16	-10.343	-0.81656	1.3712	-4.6569	3.2857
1,16	107.9	-50.867	-57.037	9.2852	-42.718	33.432
1,17	-62.907	-116.1	179.01	-35.065	47.467	-12.402
1,18	-50.078	84.443	-34.365	27.122	-21.811	-5.3109
1,19	-26.083	10.536	15.547	8.7363	-4.4415	-4.2948
1,2	14.84	-7.8533	-6.9867	-2.9532	5.4742	-2.521
1,21	103.04	-34.308	-68.729	-7.1903	40.495	-33.305
1,22	-46.295	-55.366	101.66	4.6711	-29.412	24.741
1,23	-41.225	9.2092	32.016	-14.083	2.5111	11.571
1,24	1.035	-3.8321	2.7971	-0.46627	-0.94443	1.4107
1,25	95.24	41.928	-137.17	31.522	-43.843	12.321
1,26	-14.281	-140.31	154.59	-28.778	49.346	-20.568
1,27	-42.308	34.288	8.0202	13.711	-13.112	-0.59938
1,28	19.218	2.765	-21.983	-6.6957	5.8401	0.85557
1,29	78.748	-2.7166	-76.031	-5.5357	31.569	-26.033
1,3	-43.018	-61.548	104.57	-7.2475	-27.916	35.164
1,31	0.73349	0.79402	-1.5275	0.36633	0.019189	-0.38552
1,32	98.908	-107.56	8.6468	-18.707	-31.558	50.265
1,33	-100.8	38.255	62.546	30.7	6.574	-37.274
1,34	-0.079179	-1.0053	1.0845	0.17344	0.32255	-0.49599
1,35	-31.724	-113.32	145.05	44.034	-19.009	-25.026
1,36	-39.644	112.77	-73.124	-27.9	33.705	-5.8042
1,37	-3.4547	0.96187	2.4928	-1.047	0.94466	0.10233
1,38	-100.67	-35.536	136.2	-28.898	45.586	-16.688
1,39	22.657	94.123	-116.78	1.894	-37.918	36.024
1,4	10.563	3.3302	-13.893	-4.273	2.2152	2.0578
1,41	48.768	-151.04	102.27	46.326	-14.893	-31.433
1,42	-98.427	81.383	17.044	-30.992	33.792	-2.8002
1,43	82.832	68.002	-150.83	41.267	-34.37	-6.8964
1,44	14.965	-103.96	88.998	-12.989	36.748	-23.759
1,45	24.066	108.11	-132.17	-35.18	-7.2625	42.442
1,46	182.54	-169.04	-13.507	60.205	0.60917	-60.814
1,47	-84.546	-36.797	121.34	-37.511	18.721	18.789
1,48	59.724	95.375	-155.1	28.436	-48.263	19.828
1,49	46.102	-107.59	61.485	8.4403	30.999	-39.439

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode originale pour résoudre un problème de commande optimale complexe.

En nous appuyant sur l'étude préliminaire présentée au chapitre III, nous avons redéfini notre problème. Nous avons vu que par une relation de causalité, l'enchaînement de calculs permettant de connaître les valeurs de toutes les grandeurs tant électriques que mécaniques, peut être divisé en deux parties distinctes. Cette séparation permet de créer deux sous-problèmes d'optimisation à résoudre l'un après l'autre. Un sous-problème électromécanique de commande optimale et un sous-problème électrique de type moindres carrés que nous pouvons résoudre pas à pas.

Nous avons montré que la résolution de ces deux sous-problèmes permet de résoudre notre problème principal avec efficacité et précision et que, par conséquent les deux formulations sont équivalentes dans le sens où on obtient une solution opérationnelle à notre problème.

Nous avons explicité les deux méthodes de résolutions qui nous ont permis de résoudre nos deux sous-problèmes. Une de ces méthodes étant celle du tir semi-direct qui a déjà fait ses preuves durant l'étude préliminaire que nous avons menée au chapitre III et l'autre étant basée sur une résolution successive de moindre carrés.

Pour finir, nous avons présenté les résultats finaux qui permettent de montrer la validité des méthodes utilisées au cours de cette étude.

Conclusion générale

Ce manuscrit présente les travaux réalisés au cours d'un doctorat dont le thème est : « optimisation de la commande d'une Machine Asynchrone à Double Alimentation alimentée par des composants d'électronique de puissance SiC ». Ce manuscrit décrit en quatre chapitres le cheminement qui nous a conduit au résultat final.

Nous avons justifié dans un premier chapitre l'utilisation d'une MADA comme moteur innovant pour une application de propulsion navale. Nous en avons aussi donné le modèle. Dans le deuxième chapitre, nous avons décrit le concept de contrôle optimale en donnant des méthodes numériques qui permettent de résoudre des problème, de commande optimale. Dans le troisième chapitre, nous présentons une étude préliminaire sur un modèle tronqué de la MADA. Pour finir, dans le quatrième chapitre nous avons développé une méthode originale de résolution de problèmes de commande optimale basée sur la séparation d'un problème en deux sous-problèmes liés, mais plus simples. A la fin de ce quatrième chapitre, nous avons donné les résultats numériques qui viennent justifier notre méthode.

Nous avons montré deux choses, la première est la décomposition possible et intéressante d'un problème de contrôle optimal appliqué à un moteur électrique. La deuxième est que la MADA, avec une commande optimisée, est un moteur qui en plus d'avoir des avantages matériels évidents, est aussi opérationnel sur un plan énergétique et dynamique grâce à une commande originale et innovante. La MADA pourra donc sans peine trouver son utilité dans la propulsion navale car son fonctionnement peut être amélioré de manière méthodologique.

Nous allons voir maintenant certaines pistes d'amélioration pour poursuivre ou compléter nos travaux.

Tout d'abord, le principe du maximum de Pontryagin n'est pas utilisé dans cette étude alors que cette méthode donne des résultats précis dans bons nombres d'autres cas [45]. De plus, si elle a été écarté ici ce n'est pas parce qu'elle ne peut pas donner de résultats mais bien parce qu'elle paraît *a priori* trop compliquée à utiliser. On pourrait imaginer la résolution du problème électromécanique par cette méthode puisque, même si l'application semble difficile comme le montre l'exemple de résolution de problème de commande optimale du chapitre II, l'essentiel des difficultés rencontrées dans nos travaux se porte sur la résolution du sous-problème électrique.

Concernant ce dernier, on pourrait également imaginer une méthode plus simple et plus efficace pour résoudre ce problème de moindres carrés, comme utiliser une fonction comme `lsqnonlin`, adaptée à la résolution de problèmes de moindres carrés non linéaires.

Nous remarquons que toutes nos intégrations numériques sont réalisées avec la méthode d'Euler qui s'avère être, à ce stade de notre étude, tout à fait satisfaisante. Il serait cependant judicieux d'étudier ce qu'un changement de méthode apporterait à la résolution de notre problème en vu d'une application au moins expérimentale. La méthode de Runge Kutta 4, par exemple, est reconnue pour être bien plus précise que celle d'Euler mais elle est cependant plus complexe à mettre en oeuvre aussi. On pourrait également voir si la

précision que cette méthode nous ferait gagner permettrait une meilleure convergence des algorithmes d'optimisation utilisés.

Nous n'avons étudié comme critère d'optimisation uniquement les pertes Joule. Même si ces pertes sont prépondérantes dans un moteur comme le nôtre, il serait également intéressant de caractériser les pertes fer pour pouvoir les intégrer dans nos objectifs à minimiser. Le problème de ces pertes est qu'elle dépendent du moteur considéré et que leur modèle ne peut s'obtenir que par expérimentation. Une méthode de résolution incluant la minimisation des pertes fer ne serait plus générique et ne s'appliquerait qu'au moteur étudié.

Notre étude est basée sur l'économie d'énergie. Ce qui peut être intéressant mais qui dans un contexte militaire peut ne pas avoir une grande importance. C'est pourquoi au lieu de minimiser les pertes et donc augmenter le rendement de la MADA, l'optimisation pourrait se situer dans l'amélioration des performances dynamiques de celle-ci en permettant d'obtenir un couple maximal le plus rapidement possible par exemple.

Nous avons également remarqué que nos calculs s'appuyaient sur des valeurs chiffrées des paramètres de la machine et ces valeurs sont fixes. Dans la réalité du fonctionnement d'un moteur, tout ces paramètres varient avec l'utilisation qui en est faite. Par exemple, l'échauffement causé par les pertes Joule allonge les fils de cuivre qui composent les bobinages. Il en résulte une modification de la résistance et de l'inductance de ceux-ci. Il pourrait être intéressant d'étudier l'influence de ces variations paramétriques sur nos résultats et pourquoi pas, prendre en compte leurs modèles dans le calcul de la commande optimale de la MADA.

Bibliographie

Toutes les images présentes dans ce manuscrit sont issues de **Wikimedia Commons**, une base libre de droit qui regroupe, entre autre, les photographies utilisées dans ce manuscrit.

[1] Barbara Ann Kipfer, *Encyclopedic Dictionary of Archaeology*, p. 73, Springer, 2000.

[2] Robert Carter, *Boat remains and maritime trade in the Persian Gulf during the sixth and fifth millennia BC*, Antiquity, volume 80, No.307, mars 2006

[3] G. Alix *Comparaison de concepts de moteur diesel en vue de leur hybridation*. Thèse de doct. Ecole centrale de Lyon, laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique. 2008.

[4] M. Kostenko, L. Piotrovski, *Machines électriques, t. II, Machines à courant alternatif*, Éditions de Moscou (MIR), p.766. 3e édition, 1979.

[5] J-P. Louis, C. Bergmann, *Commande numérique des machines - Systèmes triphasés : régime permanent*, Techniques de l'Ingénieur, D3642, nov. 1996.

[6] Jia Zeng, P. Degobert, J-P. Hautier, *Minimum Torque Ripple Control of Permanent Magnet Synchronous Motor in the Stationary Reference Frame*. IEEE International Conference on Electric Machines and Drives, 2005.

[7] B. de FORNEL, *Machines asynchrones Alimentation et caractéristiques*, Techniques de l'Ingénieur D3620 août 2004.

[8] J. Chatelain, *Machines électriques. Volume X du traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique*, Presse polytechnique romande, Éd. Georgi 1983.

[9] A. Fouillé, *Électrotechnique à l'usage des ingénieurs. T.2*, Machines électriques, Dunod 1969.

[10] J-P. Caron, J-P. Hautier, *Modélisation et commande de la machine asynchrone*, Technip, 1995.

[11] D. Lecocq, P. Lataire et W. Wymeersch, *Application of the double fed asynchronous motor (DFAM) in variable-speed drives*, Fifth European Conference on Power Electronics and Applications, pp. 419–425, 1993

[12] D. Lecocq, P. Lataire, *The indirect-controlled double fed asynchronous motor for variable-speed drives*, Proc. EPE, T. 3, pp 405–410, 1995.

[13] Y. Kawabata, E. Ejiogu, T. Kawabata, *Vector-controlled double-inverter-fed wound-rotor induction motor suitable for high-power drives*, IEEE Transactions on Industry Applications, pp 1058–1066, 1999.

[14] F. Poitiers, *Étude et commande de génératrices asynchrones pour l'utilisation de*

l'énergie éolienne, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2003.

[15] M. Marinelli, A. Morini, A. Pitto, F. Silvestro, *Modeling of doubly fed induction generator (DFIG) equipped wind turbine for dynamic studies*, Universities Power Engineering Conference, 2008.

[16] C. Hamon, *Doubly-fed Induction Generator Modeling and Control in DigSilent Power Factory*, Thèse de doctorat de KTH school of electrical engineering, 2010.

[17] M. Debbou, *Modélisation et commande d'un système innovant pour la propulsion navale*, Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 2014.

[18] F. Bonnet, *Contribution à l'Optimisation de la Commande d'une Machine Asynchrone à Double Alimentation utilisée en mode Moteur*, Thèse de Doctorat, INP Toulouse 2008.

[19] F. Bonnet, L. Lowinsky, M. Pietrzak-David, P-E. Vidal, *Doubly Fed Induction Machine speed drive for hydro-electric power station*, European Conference on Power Electronics and Applications, 2007.

[20] J-P. Caron, J-P. Hautier, *Modélisation et commande de la machine asynchrone,* Technip, 1995.

[21] P-E. Vidal, M. Pietrzak-David, F. Bonnet, *Mixed control strategy of a doubly fed induction machine*, Electrical Engineering (Archiv fur Elektrotechnik), 2007.

[22] P-E. Vidal, *Commande non-linéaire d'une machine asynchrone à double alimentation*, Thèse de Doctorat, INP Toulouse 2004.

[23] M. Debbou, T. Achour, J. Gillet, M. Pietrzak-David, *From simulation to real-time control for DFIM drive*, IEEE 11th International Workshop of Electronics, Control, Measurement, Signals and their application to Mechatronics (ECMSM), 2013

[24] S. Xhonneux, *Perception de l'optimisation en mathématiques et en économie au fil des siècles et l'enseignement du théorème de Lagrange*, Journées Nationales de l'APMEP, 2008.

[25] J-M. Borwein, A-S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, Springer, New York, 2000.

[26] N. Carre, *D'une idée à un business model innovant*, CCI entreprendre, 2015.

[27] J-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, pp 305-306. Springer-Verlag, 1993

[28] J-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis*, Springer-Verlag, Berlin. 2001

[29] S. Caeri, L. Liberti, F. Messine, B. Nogarede, *Optimal design of electrical machines : mathematical programming formulations*, COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, pp 977-996, 2013.

[30] E. Fitan, F. Messine, B. Nogarede, *A General Analytical Model of Electrical Permanent Magnet Machines Dedicated to Optimal Design*, COMPEL (Computations&Mathematics in Electrical&Electronic Engineering), Vol. 22, N. 4, pp 1037---1050, 2003.

[31] E. Fitan, F. Messine, B. Nogarede, *The Electromagnetical Actuators Design Problem : a General and Rational Approach*, IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 40, N. 3, pp. 1579-1590, 2004.

[32] S. Brisset, F. Gillon, S. Vivier, P. Brochet, *Optimization with experimental design : an approach using Taguchi's methodology and finite element simulations*, IEEE Transactions on Magnetics, Volume: 37, N. 5 pp 3530 – 3533, 2001.

[33] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, p 308, 2006.

[34] J-F. Bonnans, J-C. Gilbert, C. Lemarechal, C-A Sagastizábal, *Numerical optimization: Theoretical and practical aspects*, Springer-Verlag, 2006.

[35] A. R. Conn, N. I. M. Gould, Ph. L. Toint, *Trust-Region Methods*, MPS-SIAM Series on Optimization 1. SIAM and MPS, Philadelphia, 2000.

[36] B. Fortz, *Optimisation linéaire*, p 60, 2012.

[37] R. Oldenhuis, *Many test functions for global optimizers*, Mathworks, Retrieved 1, 2012.

[38] Dictionnaire Larousse en ligne

[39] S. Carriere, *Synthèse croisée de régulateurs et d'observateurs pour le contrôle robuste de la machine synchrone*, Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 2010.

[40] F. Colas, *Synthèse et réglage de lois de commande adaptées aux axes souples en translation Application aux robots cartésiens 3 axes*, Thèse de Doctorat, École centrale de Lille, 2007.

[41] G. Salloum, *Contribution à la commande robuste de la Machine Asynchrone à Double Alimentation*, Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 2007.

[42] R. Ghosn, *A MRAS sensorless speed control of a doubly fed induction machine*, ICEM, 2002.

[43] R. Ghosn, *Contrôle vectoriel de la machine asynchrone à rotor bobiné à double alimentation*, Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 2001.

[44] L-S. Pontryagin, V-G. Boltyanskii, R-V. Gamkrelidze, E-F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, 1962.

[45] O. Cots, *Contrôle optimal géométrique : méthodes homotopiques et applications*, Thèse de Doctorat, Université de Bourgogne, 2012.

[46] A. A. Agrachev, Y. L. Sachkov, *Control theory from the geometric view-point*,

Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol.87, Springer-Verlag, 2004.

[47] B. Bonnard, D. Sugny, *Optimal Control with Applications in Space and Quantum Dynamics*, of Applied Mathematics, vol. 5, AIMS,2012

[48] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Paris-Sud, 2013

[49] O. Radu, C. Carpen, *Contribution à la commande numérique Bang-Bang d'un moteur linéaire à réluctance variable, par DSPIC*, U.P.B. Sci. Bull., Series C, Vol. 72, Iss. 4, 2010

[50] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.

[51] J. Gillet, M. Pietrzak-David, F. Messine, *Optimization of the control of a doubly fed induction machine*, IEEE 11th International Workshop of Electronics, Control, Measurement, Signals and their application to Mechatronics (ECMSM), 2013.

[52] L. Cellier, *Évitement de conflits aériens par une régulation subliminale en vitesse : modélisation & résolution via le contrôle optimal*, Thèse de Doctorat, ENAC Université Paul Sabatier, Toulouse, 2015.

Annexe I : les paramètre de la MADA

Les paramètres utilisés dans cette études sont :

Nom	symbole	valeur
Nombre de paire de pôle	pp	2
Inductance cyclique statorique	L_S	0,163 H
Inductance cyclique rotorique	L_R	0,021 H
Inductance mutuelle cyclique	M	0,0825 H
Résistance statorique	R_S	1,417 Ω
Résistance rotorique	R_R	0,163 Ω
Tension nominale statorique (valeur efficace)	V_{Sn}	230 V
Tension nominale rotorique (valeur efficace)	V_{Rn}	130 V
Courant nominal statorique (valeur efficace)	I_{Sn}	8,4 A
Courant nominal rotorique (valeur efficace)	I_{Rn}	19 A
Puissance nominale de la MADA	P	4 kW
Facteur de répartition des fréquences	k	1,3
Flux nominal statorique	Φ_{Sn}	1,2 Wb
Flux nominal rotorique	Φ_{Sn}	0,7 Wb
Courant statorique maximal admissible (valeur efficace)	$I_{S\ max}$	$\sqrt{(3/2)}\,I_{Sn}$
Courant rotorique maximal admissible (valeur efficace)	$I_{R\ max}$	$\sqrt{(3/2)}\,I_{Rn}$

Dérivée de courant maximale entre deux pas de temps	dI_{max}	9 A
Frottement visqueux du rotor de la MADA	f	0,0027 Nm s/rad
Inertie du rotor de la MADA	J	0,0426 kg.m²
Couple nominal	C_n	25,5 Nm
Vitesse nominale	Ω_n	180 rad/s
Pas de temps	h	10 ms

Annexe II : la transformée de Concordia

Dans cette annexe nous allons présenté la méthode [35] [36] qui nous permet de réduire l'ordre de notre système de 6 à 4. En effet, la transformée de Concordia permet d'exprimer un système de variables triphasé comme un système de variables diphasé avec une composante homopolaire.

On commence par définir la sous-matrice de Clarke notée C_{32} par l'équation :

$$C_{32}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour particularité de pouvoir factoriser un système sinusoïdal triphasé équilibré direct à l'aide d'un système diphasé. Cette factorisation se fait comme suit :

$$X_{3\varphi}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=X_m\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \cos(\theta-2\frac{\pi}{3}) \\ \cos(\theta-4\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix}=X_m C_{32}\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

avec $X_{3\varphi}$ un système de variables triphasé sinusoïdal, dont X_m est l'amplitude maximale et θ la phase angulaire.

En posant $X_{2\varphi}=X_m\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$, on obtient $X_{3\varphi}=C_{32}X_{2\varphi}$.

Pour faire en sorte que le changement de repère soit réversible, il faut compléter la matrice C_{32} pour la rendre carrée et facilement inversible. Pour cela, on rajoute une matrice colonne C_{31} pour créer une matrice de Clarke C_3 .

Cette matrice colonne est choisie de sorte à être à la fois très simple et orthogonale aux colonnes de la matrice C_{32} :

$$C_{31}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On défini donc la matrice C_3 comme :

$$C_3=[C_{31}, C_{32}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

On préférera utiliser cette matrice de Clarke C_3 après normalisation. On obtient alors la matrice T_3 dite matrice de Concordia. Cette matrice est elle aussi la composition de deux sous-matrices :

$$T_3=[T_{31},T_{32}] \quad \text{où} \quad T_{31}=\frac{1}{\sqrt{3}}C_{31} \quad \text{et} \quad T_{32}=\sqrt{\frac{2}{3}}C_{32}$$

On défini l'inverse de la matrice de Concordia T_3 par :

$$T_3^{-1}=\begin{bmatrix} T_{31}^T \\ T_{32}^T \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant étudier la transformation triphasé diphasé à puissance constante puisque c'est celle que nous avons utilisé dans notre étude. Cette transformation permet d'avoir une image fidèle et complète d'un système triphasé tout en en réduisant l'ordre.

Pour effectuer ce changement de repère on utilise la matrice T_3 comme suit :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=T_3\begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad T_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3/2}} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$

Où x_1 , x_2 et x_3 sont les composantes du système exprimées dans un repère triphasé et x_α et x_β sont les composantes de ce même système exprimées dans un repère diphasé. La dernière composante x_0 est la composante homopolaire du système. Elle représente la partie continue du système. Dans le cas d'un système équilibré, cette composante est nulle.

On considère le système équilibré de tension suivant :

$$V_{123}=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}V_{eff}\cos(\theta) \\ \sqrt{2}V_{eff}\cos(\theta-2\frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{2}V_{eff}\cos(\theta-4\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

On lui applique la transformé de Concordia :

$$V_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} V_0 \\ V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix}=T_3^{-1}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}V_{eff}\cos(\theta) \\ \sqrt{2}V_{eff}\cos(\theta-2\frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{2}V_{eff}\cos(\theta-4\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Après calcul on obtient :

$$V_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} V_{eff} \sin(\theta) \\ \sqrt{2} V_{eff} \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Comme dit plus haut, la composante homopolaire est nulle. Nous n'avons plus que deux variable V_α et V_β au lieu de trois. On peut aisément faire la transformation inverse afin de retrouver le système triphasé d'origine.

Cette transformation nous permet de travailler sur un système à deux variables équivalent à un système à trois variables.

Annexe III : le tir semi direct appliqué à un exemple simple.

Programme principal :

```
clear all
close all
clc
global omegamax f J N Cmax h
f = 0.0027;
J = 0.0426;
Cmax = 2.8*25.5;
omegamax = 180;
N = 300;
h = 1/100;
O = optimset('Algorithm','interior-
point','MaxFunEval',10000000,'MaxIter',100000,'Display','iter');
u0(1:N) = 0 ;
tic
[U_sol,Emin,flag]=fmincon('fobjI',u0',[],[],[],[],[],[],'contI',O);
Topti = toc;
CemOpt = U_sol;
contMin = sum(contI(U_sol));
```

Fonction de coût :

```
function res = fobjI(u)
global  h f J N
    res = 0;
    omegaTmpO(1) = 0;
    for i=1:N
        omegaTmpO(i+1) = omegaTmpO(i) + h*(u(i) - f*omegaTmpO(i))/J;
        res = res + h*((u(i)*omegaTmpO(i)));
    end
end
```

Fonction de contrainte :

```
function [ineg,eg] = contI(u)
global h  omegamax f J  N Cmax
    CemTmp=u;
    omegaTmp(1) = 0;
```

```
for i=1:N-1
    omegaTmp(i+1) = omegaTmp(i) + h*(CemTmp(i) - f*omegaTmp(i))/J;
end
CCem1=0;
CCem2 = 0;
ComegaTmp1=0;
ComegaTmp2=0;
ComegaTmp3=omegamax*0.99-omegaTmp(N-1);      % omega final = consigne
ComegaTmp4=omegaTmp(N-1)-omegamax*1.01;      % omega final = consigne
for pas_C=1:N-1
    CCem1=CCem1+max(0,CemTmp(pas_C)-Cmax)^2;
    CCem2=CCem2+max(0,-CemTmp(pas_C))^2;
    ComegaTmp1=ComegaTmp1+max(0,omegaTmp(pas_C)-omegamax*1.1)^2;
    ComegaTmp2=ComegaTmp2+max(0,-omegaTmp(pas_C))^2;
end
ineg = [ComegaTmp1 ComegaTmp2 ComegaTmp3 ComegaTmp4 CCem1 CCem2 ];
eg = [];
```

Annexe IV : le tir indirect appliqué à un exemple simple.

Programme principal :

```
clear all
close all
clc
global omegamax f J Cmax
f = 0.0027;
J = 0.0426;
Cmax = 2.8*25.5;
omegamax = 180;
Tf = 3;
h = 0.000001;
N = Tf/h;
Diff = inf;
for t = 2.85:h:2.9
    essai = S2(t);
    if essai<Diff
        tOpt = t;
        Diff = essai;
    end
end
```

Fonction de calcul de la vitesse finale S2 :

```
function res = S2(t)
global f J omegamax Cmax
omegaF = -(Cmax/f)*exp(-f/J*(3-t)) + Cmax/f;
res = (omegaF-omegamax)^2;
end
```

Annexe V : programme de résolution des deux sous-problèmes :

Programme d'initialisation des paramètres :

```
global h pp Ls Lr M Rs Rr Vsn Vrn Isn Irn omegamax P k PHIsn PHIrn Ismax Irmax f
C0 J N tf Cmax dImax dVmax dfmax
% paramètre de la machine :
pp = 2;
Ls = 0.163;
Lr = 0.021;
M = 3/2*0.055;
Rs = 1.417;
Rr = 0.163;
Vsn = 230;
Vrn = 130;
Isn = 8.4;
Irn = 19;
P = 4000;
k = 1.3;
PHIsn = 1.2;
PHIrn = 0.7;
Ismax = sqrt(3/2)*8.4;
Irmax = sqrt(3/2)*19;
dImax = 10000;
dVmax = Vsn;
dfmax = 50000;
f = 0.0027;
C0 = 0;
J = 0.0426;
Cmax = 1.5*25.5;
omegamax = 180;
h = 1/100;
tf = h*N;
```

Programme principal :

```
close all
clear all
clc
global omega theta Imat Usol_mat N Cem
```

```
InitParam;
N = 150;
tic
mainI
time1 = toc;
save time1 time1
Imat = [[0;0;0;0] Imat];
resTmp = resultatI(Imat);
omega = resTmp(1,:);
theta = resTmp(2,:);
Cem = resTmp(3,:);
save omega omega
save theta theta
save Imat Imat
save Cem Cem
load Imat
load omega
load theta
load Cem
tic
mainUs
save Usol_mat Usol_mat
time2 = toc;
save time2 time2
```

Programme principal du sous-problème électromécanique :

```
global Ismax Irmax Imat N
O = optimset('Algorithm','interior-
point','MaxFunEval',1000000,'MaxIter',100000,'Display','iter');
contMin = 1;
ImatMin(1,1:N) = -Ismax;
ImatMin(2,1:N) = -Ismax;
ImatMin(3,1:N) = -Irmax;
ImatMin(4,1:N) = -Irmax;
ImatMax(1,1:N) = Ismax;
ImatMax(2,1:N) = Ismax;
ImatMax(3,1:N) = Irmax;
ImatMax(4,1:N) = Irmax;
u0 = rand(4,N);
for it = 1:1
    [U_sol,fsol,flag]=fmincon('fobjI',u0,[],[],[],[],ImatMin,ImatMax,'contI',O);
```

```
    if max(contI(U_sol))<contMin
        Imat = U_sol;
        contMin = max(contI(U_sol));
        u0 = U_sol;
    end
end
```

Fonction objectif du sous-problème électromécanique :

```
function res = fobjI(u)
global h Rs Rr N
    res = 0;
    X = u;
    for i=1:N
        IsaTmp(i) = X(1,i);
        IsbTmp(i) = X(2,i);
        IraTmp(i) = X(3,i);
        IrbTmp(i) = X(4,i);
  res = res + h*(3*Rs*(IsaTmp(i)^2+IsbTmp(i)^2)+3*Rr*(IraTmp(i)^2+IrbTmp(i)^2));
    end
end
```

Fonction de contrainte du sous-problème électromécanique :

```
function [ineg,eg] = contI(u)
global h pp Ls Lr M omegamax f C0 J dImax N Cmax Ismax Irmax
    X=u;
    thetaTmp = 0;
    omegaTmp(1:N) = 0;
    CemTmp(1:N) = 354;
    for i=1:N-1
        IsaTmp(i) = X(1,i);
        IsbTmp(i) = X(2,i);
        IraTmp(i) = X(3,i);
        IrbTmp(i) = X(4,i);
        CemTmp(i) = ((M^2*pp^2*(((6^(1/2)*(IraTmp(i)*Lr +
IsaTmp(i)*M*cos(thetaTmp) + IsbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 -
(2^(1/2)*(IrbTmp(i)*Lr + IsbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) -
IsaTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2)*((6^(1/2)*(IsaTmp(i)*Ls +
IraTmp(i)*M*cos(thetaTmp) - IrbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 +
(2^(1/2)*(IsbTmp(i)*Ls + IrbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) +
IraTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2) - ((6^(1/2)*(IraTmp(i)*Lr +
IsaTmp(i)*M*cos(thetaTmp) + IsbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 +
(2^(1/2)*(IrbTmp(i)*Lr + IsbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) -
IsaTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2)*((6^(1/2)*(IsaTmp(i)*Ls +
IraTmp(i)*M*cos(thetaTmp) - IrbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 -
```

```
(2^(1/2)*(IsbTmp(i)*Ls + IrbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) +
IraTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2))^2)/(Lr^2*Ls^2*(M^2/(Lr*Ls) - 1)^2) +
(M^2*pp^2*((6^(1/2)*((6^(1/2)*(IsaTmp(i)*Ls + IraTmp(i)*M*cos(thetaTmp) -
IrbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 - (2^(1/2)*(IsbTmp(i)*Ls +
IrbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) + IraTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2)*(IraTmp(i)*Lr +
IsaTmp(i)*M*cos(thetaTmp) + IsbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/3 -
(6^(1/2)*((6^(1/2)*(IraTmp(i)*Lr + IsaTmp(i)*M*cos(thetaTmp) +
IsbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 - (2^(1/2)*(IrbTmp(i)*Lr +
IsbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) - IsaTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2)*(IsaTmp(i)*Ls +
IraTmp(i)*M*cos(thetaTmp) - IrbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/3)^2)/(Lr^2*Ls^2*(M^2/
(Lr*Ls) - 1)^2) + (M^2*pp^2*((6^(1/2)*((6^(1/2)*(IsaTmp(i)*Ls +
IraTmp(i)*M*cos(thetaTmp) - IrbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 +
(2^(1/2)*(IsbTmp(i)*Ls + IrbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) +
IraTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2)*(IraTmp(i)*Lr + IsaTmp(i)*M*cos(thetaTmp) +
IsbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/3 - (6^(1/2)*((6^(1/2)*(IraTmp(i)*Lr +
IsaTmp(i)*M*cos(thetaTmp) + IsbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/6 +
(2^(1/2)*(IrbTmp(i)*Lr + IsbTmp(i)*M*cos(thetaTmp) -
IsaTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/2)*(IsaTmp(i)*Ls + IraTmp(i)*M*cos(thetaTmp) -
IrbTmp(i)*M*sin(thetaTmp)))/3)^2)/(Lr^2*Ls^2*(M^2/(Lr*Ls) - 1)^2))^(1/2);
        omegaTmp(i+1) = omegaTmp(i) + h*(CemTmp(i) - f*omegaTmp(i) - C0)/J;
        thetaTmp = thetaTmp + h*omegaTmp(i);
    end
    CdIsaTmp=0;
    CdIsbTmp=0;
    CdIraTmp=0;
    CdIrbTmp=0;
    CCem = 0;
    ComegaTmp1 = 0;
    ComegaTmp2 = 0;
    ComegaTmp3=omegamax*0.9-omegaTmp(N-1);      % omega final = consigne
    ComegaTmp4=omegaTmp(N-1)-omegamax*1.1;      % omega final = consigne
    CoupleTmp1=CemTmp(N-1)-f*omegaTmp(N-1)*1.02;    % acceleration finale nulle
    CoupleTmp2=f*omegaTmp(N-1)*0.98 - CemTmp(N-1); % acceleration finale nulle
    for pas_C=1:N-1
        if pas_C ==1
            CdIsaTmp = CdIsaTmp+max(0,((IsaTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
            CdIsbTmp = CdIsbTmp+max(0,((IsbTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
            CdIraTmp = CdIraTmp+max(0,((IraTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
            CdIrbTmp = CdIrbTmp+max(0,((IrbTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
        else
       CdIsaTmp = CdIsaTmp+max(0,((IsaTmp(pas_C-1)-IsaTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
       CdIsbTmp = CdIsbTmp+max(0,((IsbTmp(pas_C-1)-IsbTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
       CdIraTmp = CdIraTmp+max(0,((IraTmp(pas_C-1)-IraTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
       CdIrbTmp = CdIrbTmp+max(0,((IrbTmp(pas_C-1)-IrbTmp(pas_C))^2-(dImax)))^2;
        end
        CCem=CCem+max(0,CemTmp(pas_C)-Cmax)^2;
```

```
        ComegaTmp1=ComegaTmp1+max(0,omegaTmp(pas_C)-omegamax*1.1)^2;
        ComegaTmp2=ComegaTmp2+max(0,-omegaTmp(pas_C))^2;
    end
    ineg = [ ComegaTmp3 ComegaTmp4 CoupleTmp1 CoupleTmp2 CdIsaTmp CdIsbTmp
CdIraTmp CdIrbTmp CCem ComegaTmp1 ComegaTmp2];
    eg = [];
```

Programme principal du sous-problème électrique :

```
global  N i XPrec Uprec Usol_mat Vsn Vrn theta Cem h f C0 J omega
O =
optimset('Algorithm','sqp','MaxFunEval',10000000,'MaxIter',10000,'Display','off'
);
Usol_mat(1:N,1:4) = 0;
i = 1;
n = 0;
B = 0;
Fsol_mat(1:N) = 0;
flag_mat(1:N) = 0;
cont_sol_mat(1:N,1:4) = 0;
Imat_test(1:N,1:4) = 0;
Cem_test(1:N) = 0;
omega_test(1:N+1) = 0;
XPrec = [0;0;0;0];
Uprec = Usol_mat(i,:)';
while i<N
    u0 = rand(4,1).*[1.5*Vsn;1000;1.5*Vrn;1000];
    [U,fsol,flag]=fmincon('fobjUs',u0,[],[],[],[],[0;0;0;0],
[1.5*Vsn;1000;1.5*Vrn;1000],'contUs',O);
 if ((sum(contUs(U))<10^(-5)) && ~(sum(Uprec-U)==0) && fobjUs(U)<10^-6)
     Fsol_mat(i) = fsol;
     flag_mat(i) = flag;
     cont_sol_mat(i,:) = contUs(U);
     Imat_test(i,:) = CalcI(U);
     Cem_test(i) = calcCem(Imat_test(i,:));
     omega_test(i+1) = omega_test(i) + h*(Cem_test(i) - f*omega_test(i) - C0)/J;
     XPrec = CalcI(U);
     i = i+1;
     omega_test(i+1) = omega_test(i) + h*(Cem_test(i) - f*omega_test(i) - C0)/J;
     Usol_mat(i,:) = U;
     Uprec = U;
     n = 0;
     clc
```

```
    act = floor(((i-1)/(N)*100))
 else
    if n == 100
        if i>1
            i=i-1;
            n = 0;
            B = B+1;
        end
    else
        n = n+1;
    end
   end
end
```

Fonction de coût du sous-problème électrique :

```
function res = fobjUs(u)
global x0 h pp Ls Lr M Rs Rr Vsn Vrn Isn Irn omegamax P omega theta k PHIsn
PHIrn Ismax Irmax Isa Isb Ira Irb Cem f C0 J CemMax dImax Imat i N tf XPrec
X = XPrec;
Vs = u(1);
fs = u(2);
Vr = u(3);
fr = u(4);
t = h*(i-1);
thetaTmp = theta(i);
A = [(Lr*Rs)/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2 -Lr*Ls) 0 -
(M*Rr*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)
(M*Rr*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls);
    0 (Lr*Rs)/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)  -
(M*Rr*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)  -
(M*Rr*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls);
    -(M*Rs*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)  -
(M*Rs*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) (Ls*Rr)/
(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls) 0;
     (M*Rs*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls) -
(M*Rs*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls)  0
(Ls*Rr)/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls) ;];
PHIu=[(M*cos(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) - (Lr*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) - (2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs -
(2*pi)/3))/6 + (2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) + (M*sin(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);
```

```
      (Lr*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) + (2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs -
(2*pi)/3))/6 - (2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) - (M*cos(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) + (M*sin(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);

      (M*cos(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) - (Ls*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) - (2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr -
(2*pi)/3))/6 + (2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) - (M*sin(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);

      (Ls*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) + (2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr -
(2*pi)/3))/6 - (2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) - (M*cos(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) - (M*sin(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);];

if max(max(isnan(A)==1)) || max(isnan(PHIu)==1)

    res = 10^20;

else

X = X + h*(A*X+PHIu);

IsaTmp = X(1);

IsbTmp = X(2);

IraTmp = X(3);

IrbTmp = X(4);

res =(IsaTmp-Imat(1,i))^2+(IsbTmp-Imat(2,i))^2+(IraTmp-Imat(3,i))^2+(IrbTmp-
Imat(4,i))^2;

end

end
```

Fonction de contrainte du sous-problème électrique :

```
function [ineg,eg] = contUs(u)

global x0 h pp Ls Lr M Rs Rr Vsn Vrn Isn Irn omegamax P omega theta k PHIsn
PHIrn Ismax Irmax Isa Isb Ira Irb Cem f C0 J CemMax dImax Imat i N tf XPrec

X = XPrec;

Vs = u(1);

fs = u(2);

Vr = u(3);

fr = u(4);
```

```
thetaTmp = theta(i);

A = [(Lr*Rs)/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2 -Lr*Ls) 0 -
(M*Rr*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)
(M*Rr*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls);

     0 (Lr*Rs)/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)  -
(M*Rr*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)  -
(M*Rr*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls);

     -(M*Rs*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls)  -
(M*Rs*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) (Ls*Rr)/
(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls) 0;

     (M*Rs*sin(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls) -
(M*Rs*cos(thetaTmp))/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls)  0
(Ls*Rr)/(M^2*cos(thetaTmp)^2+M^2*sin(thetaTmp)^2-Lr*Ls) ;];

PHIu=[(M*cos(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) - (Lr*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) - (2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs -
(2*pi)/3))/6 + (2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) + (M*sin(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);

      (Lr*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) + (2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs -
(2*pi)/3))/6 - (2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) - (M*cos(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) + (M*sin(thetaTmp)*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);

      (M*cos(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) - (Ls*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) - (2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr -
(2*pi)/3))/6 + (2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) - (M*sin(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);

      (Ls*(Vr*sin(2*pi*fr - (4*pi)/3) + (2^(1/2)*6^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr -
(2*pi)/3))/6 - (2^(1/2)*3^(1/2)*Vr*sin(2*pi*fr))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 +
M^2*sin(thetaTmp)^2 - Lr*Ls) - (M*cos(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) +
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 -
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls) - (M*sin(thetaTmp)*(Vs*sin(2*pi*fs - (4*pi)/3) -
(2^(1/2)*6^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs - (2*pi)/3))/6 +
(2^(1/2)*3^(1/2)*Vs*sin(2*pi*fs))/3))/(M^2*cos(thetaTmp)^2 + M^2*sin(thetaTmp)^2
- Lr*Ls);];

if max(max(isnan(A)==1)) || max(isnan(PHIu)==1)

    ineg = [10^10 10^10 10^10 10^10 ];

    eg = [];

else

X = X + h*(A*X+PHIu);
```

```
IsaTmp = X(1);
IsbTmp = X(2);
IraTmp = X(3);
IrbTmp = X(4);
CIsa =  max(0,IsaTmp-Imat(1,i))^2;
CIsb =  max(0,IsbTmp-Imat(2,i))^2;
CIra =  max(0,IraTmp-Imat(3,i))^2;
CIrb =  max(0,IrbTmp-Imat(4,i))^2;
ineg = [CIsa  CIsb  CIra  CIrb   ];
eg = [];
end
```