ENSC-2015-N°573

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Christophe Rouzaud

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

Ébranlement de structures en béton armé soumises à un phénomène transitoire

Soutenue à Cachan le 30 mars 2015 devant le jury composé de :

Jean-François Deü	LMSSC, CNAM	Président de jury et Rapporteur
François Toutlemonde	IFSTTAR, Université Paris-Est	Rapporteur
Sergueï Potapov	EDF	Examinateur
Pierre Argoul	ENPC, Université Paris-Est	Examinateur
Michael Brun	LGCIE, INSA Lyon	Examinateur
Fabrice Gatuingt	LMT-Cachan, ENS de Cachan	Directeur de thèse
Guillaume Hervé	IRC-RENON, ESTP Paris	Co-encadrant
Olivier Dorival	Institut Clément Ader	Co-encadrant
Nadim Moussallam	AREVA	Co-encadrant (invité)

LMT-Cachan
ENS Cachan / CNRS / Université Paris Saclay
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Remerciements

La fin de la thèse approche et il est ainsi venu l'heure de coucher sur le papier ces dernières lignes. Lignes dont la fonction première sera bien sûr de remercier les personnes qui m'ont entouré au cours de ces dernières années, mais également d'essayer de donner un soupçon de vie à ce document scientifique. J'aimerais dans ce paragraphe pouvoir être exhaustif, énumérer tous ces gens qui m'ont aidé à me construire. Mais il est certain que je vais en oublier bien malgré moi. Je leur présente d'avance toutes mes excuses.

Avant tous et tout, je souhaite remercier ceux sans qui je ne serais rien du tout aujourd'hui : ma compagne, mes parents, mon frère, en somme ma famille. Ils ont su me soutenir, m'encourager, me donner l'envie d'avancer tout au long de mon cursus.

Je tiens évidemment à remercier les membres du jury (J.F. Deü, F. Toutlemonde, P. Argoul, M. Brun et S. Potapov) qui m'ont fait l'honneur d'être présents, de rapporter et de m'accorder ainsi un peu de leur temps.

Je profite donc de cette page pour remercier chaleureusement mes quatre encadrants :

– Guillaume Herve (mon "Obi-Wan" ou encore "Doc. Emmett Brown"), à qui je souhaiterais exprimer ma gratitude pour tout d'abord m'avoir initié au travers de mon TFE recherche d'école d'ingénieur et du benchmark IRIS à la dynamique rapide. Cette opportunité, qu'il m'a donné, m'a profondément marqué aussi bien dans ma vision de la recherche que dans mon intérêt pour les problématiques d'impact. Il m'a alors donné l'envie et la chance de réaliser cette thèse sur ces aspects. Je lui en suis donc très reconnaissant d'autant qu'en cinq ans sa gentillesse, son humour, en soit toute sa personnalité en ont fait une réel Ami.
– mon directeur de thèse, Fabrice Gatuingt, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié, sa gentillesse ainsi que sa grande disponibilité. La confiance qu'il m'a accordé pour le travail sur d'autres projets et l'encadrement d'étudiants m'a également beaucoup touché. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.
– mon co-encadrant du côté d'AREVA, Nadim Moussallam, pour toutes les connaissances qu'il m'a apportées par son encadrement scientifique, dont les orientations et commentaires m'ont permis d'apprendre la rigueur nécessaire et dont les idées, la culture ont constitué un soutien inestimable.
– Olivier Dorival pour la rigueur, la patience, la bonne humeur qu'il a déployées pour

m'aider dans le développement et l'implémentation de la TVRC, mais aussi dans sa capacité à suivre mes travaux même à longue distance.

Je souhaiterais remercier aussi Jean-Lou Lebrun, directeur de la recherche à l'ESTP, pour sa considération, ses explications, sa confiance qu'il m'a accordée pour participer au conseil de laboratoire et à différentes conférences internationales qui furent très enrichissantes, et avec qui j'ai apprécié travailler autant du point de vue humain, que du point de vue technique.

Je tiens également à remercier ceux qui ont contribués à la bonne ambiance du bureau aussi bien au sein de l'IRC que du LMT Cachan : L. Moutoussamy, A. Sauvageon (mon co-thésard ENS/ESTP), M. Vassaux, A. Hilaire, A. Nguyen et G. Mendoza (mes deux premiers et extraordinaires stagiaires devenus thésard), et plus généralement l'ensemble de ces deux équipes.

En conclusion, merci à vous tous.

Résumé

Dans le processus de conception d'une installation nucléaire de base, la sûreté des structures présente un aspect primordial. Le dimensionnement du génie-civil ainsi que la qualification des matériels aux sollicitations dynamiques doivent tenir compte des accélérations qu'ils subissent. Ces accélérations doivent intégrer les mouvements sismiques, et les mouvements d'ébranlement consécutifs à l'impact d'avion de fréquence de coupure plus élevée.

Les méthodologies actuelles permettant d'évaluer cet ébranlement reposent sur des analyses éléments finis transitoires par intégration directe ou projection sur la base modale, rarement non linéaires. Dans ces deux cas, pour parvenir à représenter de manière pertinente un contenu de moyenne fréquence, il convient de mettre en place un raffinement de maillage difficilement compatible avec la taille des modèles de ces structures de génie civil. Afin d'enrichir les méthodologies industrielles employées et de permettre une meilleure représentation du comportement de la structure à moyennes fréquences, une démarche couplant une analyse temporelle et non linéaire de la zone de choc avec une approche fréquentielle de traitement de l'ébranlement par l'utilisation de la TVRC (Théorie Variationnelle des Rayons Complexes) a été entreprise. L'objectif est ainsi d'utiliser l'efficacité numérique de la stratégie employée, notamment en moyennes fréquences, pour qualifier les structures nucléaires à l'impact d'avion.

Mots clés : installation nucléaire, dimensionnement, impact d'avion, ébranlement, approche fréquentielle, TVRC.

Abstract

In the design of nuclear engineering structures security and safety present a crucial aspect. Civil engineering design and the qualification of materials to dynamic loads must consider the accelerations which they undergo. These accelerations could integrate seismic activity and shaking movements consecutive to aircraft impact with higher cut-off frequency.

Current methodologies for assessing this shock are based on transient analyzes using classical finite element method associated with explicit numerical schemes or projection on modal basis, often linear. In both cases, to represent in meaningful way a medium-frequency content, it should implement a mesh refinement which is hardly compatible with the size of models of the civil engineering structures. In order to extend industrial methodologies used and to allow a better representation of the behavior of the structure in medium-frequency, an approach coupling a temporal and non-linear analysis for shock area with a frequency approach to treatment of shaking with VTCR (Variational Theory of Complex Rays) has been used. The aim is to use the computational efficiency of the implemented strategy, including medium frequency to describe the nuclear structures to aircraft impact.

Keywords : nuclear engineering structures, design, aircraft impact, shaking, frequency approach, VTCR.

Table des matières

Table des matières i

Table des figures v

Liste des tableaux xi

Introduction 1

1 Etat de l'art 5
- 1.1 Contexte industriel de la chute d'avion . . . 7
  - 1.1.1 Historique du cas de charge . . . 7
  - 1.1.2 Exigences de sûreté et contexte règlementaire . . . 9
  - 1.1.3 Base de dimensionnement de la protection à la chute d'avion . . . 11
- 1.2 Spécificité du choc lors d'un impact d'avion . . . 12
  - 1.2.1 Définition du choc dans le cadre de l'impact d'avion . . . 12
  - 1.2.2 La classification des chocs . . . 14
  - 1.2.3 Caractérisation dynamique de l'impact d'avion . . . 17
- 1.3 Nature des phénomènes induits, locaux et globaux . . . 19
  - 1.3.1 Phénoménologie locale des impacts mous . . . 19
  - 1.3.2 Analyse de la propagation des ondes dans la structure complète . 31
  - 1.3.3 Conclusions sur les phénomènes induits lors d'un choc mou . . . 34
- 1.4 Démarches méthodologiques usuelles . . . 34
  - 1.4.1 Modélisation du chargement . . . 35
  - 1.4.2 Traitement de la zone de choc . . . 39
  - 1.4.3 Description des méthodologies de traitement des vibrations induites par l'impact . . . 44

2 Application de la théorie variationnelle des rayons complexes au calcul vibratoire des structures 59
- 2.1 Développements et implémentation théoriques . . . 61
- 2.2 Description de la théorie variationnelle des rayons complexes . . . 61
  - 2.2.1 Problème de référence dans le cas général d'un assemblage de n sous-structures . . . 61
  - 2.2.2 La formulation variationnelle associée à la TVRC . . . 65

2.2.3 Définition des fonctions de forme à deux échelles 68
2.2.4 Discrétisation du problème 76
2.2.5 Comparaison TVRC/FEM au travers d'exemples simples 78
2.3 Une méthode de résolution adaptée à la TVRC 86
2.3.1 Le principe de résolution 86
2.3.2 Traitement d'exemples avec le solveur multi-grille 88
2.4 Une nouvelle approche de l'analyse large bande pour la TVRC 91
2.4.1 Les approximants de Padé 92
2.4.2 Dérivées successives du vecteur solution 94
2.4.3 Procédure pour la reconstruction de la réponse en fréquence en utilisant les approximants de Padé 95
2.4.4 Analyse multi-fréquentielle sur un exemple simple 97
2.5 Structure de l'algorithme de résolution fréquentielle 102
2.6 Conclusions du développement de la TVRC 103

3 Mise en œuvre de la TVRC dans un cadre industriel 105
3.1 Une stratégie d'étude dédiée à ce cas de charge 107
3.2 Définition des paramètres pilotant l'étendue de la zone non-linéaire 108
3.2.1 Choix de modélisation 109
3.2.2 Pré-analyse empirique de non perforation 112
3.2.3 Analyse de sensibilité 113
3.2.4 Utilisation des plans d'expérience par la méthode de Taguchi . . . 124
3.2.5 Conclusion sur la définition des paramètres de la structure pilotant la zone non-linéaire 131
3.3 Discrétisations et hypothèses liées à la stratégie 131
3.3.1 Discrétisation spatiale 131
3.3.2 Discrétisation fréquentielle 132
3.3.3 Reconstruction de la réponse temporelle 133
3.4 Prise en compte du béton armé et précontraint dans la TVRC 134
3.4.1 Modèles de comportements globaux 134
3.4.2 Homogénéisation du béton armé et précontraint dans un cadre linéaire et orthotrope 134
3.5 Conclusions sur la mise en œuvre de la stratégie de traitement de la chute d'avion 142

4 Validation de la stratégie mise en place 143
4.1 Validation au travers de cas simples 144
4.1.1 Description du chargement 144
4.1.2 Traitement d'une plaque en flexion 146
4.1.3 Traitement d'un portique 153
4.2 Application à un cas industriel 161
4.2.1 Description du cas d'étude 161
4.2.2 Définition et résultats aux bornes de la zone non-linéaire 166

4.2.3 Application du signal à la partie non endommagée de la structure 169
4.2.4 Conclusions de l'application de la stratégie à un cas industriel . . 177

Conclusions et Perspectives **179**

A Endommagement de l'avion suite à l'impact **183**
A.1 Philosophie de modélisation 183
A.2 Endommagement du fuselage 184
A.3 Endommagement du moteur et des ailes 187

B Autres méthodologies de calcul de l'effort d'impact **189**
B.1 Méthode de Stevenson 189
B.2 Méthode de Wolf 190

C Unicité de la formulation variationnelle complète **193**

D Récapitulatif des résultats de l'application au cas industriel **201**

Bibliographie **209**

Table des figures

1.1 Bref historique de l'aviation considérée dans le cas de charge de la chute d'avion. 7
1.2 Vue générale d'un avion de type Lockheed F-104 Starfighter. 8
1.3 Aviation légère prise en compte. 8
1.4 Exemple d'aviation militaire. 8
1.5 Bilan énergétique lors du choc. 14
1.6 Classification des chocs d'après [Kœchlin, 2007]. 15
1.7 Classification de différents essais d'impact présents dans la littérature. . . 16
1.8 Classification des domaines de la dynamique ([Toutlemonde, 1995]). . . . 19
1.9 Face arrière et coupe d'une dalle après impact ([Jonas *et al.*, 1982]). . . . 21
1.10 Evolution de la fissuration et formation du cône de cisaillement dans une poutre impactée [May *et al.*, 2005] et [May *et al.*, 2006]. 24
1.11 Expansion des ondes dans une poutre. 25
1.12 Diagramme de Lagrange pour un matériau élastique. 27
1.13 Modes de rupture dynamique d'une poutre [Brandes *et al.*, 1979]. 28
1.14 Evolution de la dégradation en flexion d'une poutre d'après [Gatuingt, 2009]. 29
1.15 Evolution de la dégradation en cisaillement d'une poutre d'après [Gatuingt, 2009]. 29
1.16 Régimes de vibrations à la suite d'un choc mécanique. 31
1.17 Spectres horizontaux au niveau des pieds de générateur de vapeur, séisme de dimensionnement et impact d'un Rafale à 220 m/s, [L'Huby et Barbe, 1992]. 33
1.18 Modèle d'impact d'avion impactant une cible rigide suivant les hypothèses de Riera. 36
1.19 Quelques diagrammes force-temps, d'après [Bangash, 1993]. 38
1.20 Méthode analytique CEB de calcul d'impact d'avion, d'après [CEB, 1988]. 40
1.21 Réponse type en fréquence d'une structure [Ohayon et Soize, 1989]. . . . 49

2.1 Géometrie d'un élément coque Ω_i. 62
2.2 Problème de référence. 63
2.3 Les trois familles d'ondes mécaniques dans un milieu continu 3D. 69
2.4 Description des rayons de type intérieur. 71

2.5 Description des rayons de type bord. 72
2.6 Description des rayons de coin. 73
2.7 C_{pres} cercle définissant les directions de propagation des ondes de pression. 75
2.8 C_{cis} cercle des directions de propagation des ondes de cisaillement. 75
2.9 Portrait d'amplitudes discrétisé par fonctions de Dirac. 77
2.10 Premier exemple de validation : description de la géométrie et des conditions limites. 79
2.11 Erreur TVRC et Cast3m. 82
2.12 Second exemple de validation : description de la géométrie et des conditions limites. 83
2.13 Résultats des différents solveurs en termes de déplacement effectif pour un cas simple de plaque en flexion. 89
2.14 Géométrie de l'exemple d'un dôme impacté. 90
2.15 Résultats des différents solveurs en termes de déplacement effectif pour un dôme impacté. 91
2.16 Exemple de test des approximants de Padé : description de la géométrie et des conditions aux limites. 97
2.17 FRF pour plusieurs jeux de paramètres L et M sur une plage de fréquence de 40 Hz. 98
2.18 Comparaison des temps de calcul pour les deux types d'analyse. 100
2.19 FRF sur une large bande fréquentielle, avec 20 Hz de largeur de bande. . . 101
2.20 FRF sur une large bande fréquentielle, avec un critère d'erreur de 10 %. . 101

3.1 Stratégie globale de calcul. 107
3.2 Diagramme effort/temps de l'impact d'un avion de type commercial. . . . 109
3.3 Modèle mathématique utilisé dans l'Eurocode 2 pour définir la loi de comportement du béton [EC2, 2005]. 110
3.4 Comparaison de la loi de comportement béton *Mat_Concrete_EC2* utilisée pour les coques avec un modèle volumique. 112
3.5 Diagramme effort/temps de l'impact d'un avion commercial divisé en deux surfaces (fuselage+aile). 115
3.6 Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps. . . . 115
3.7 Rayon maximum de la zone endommagée basé sur un critère en déformation équivalente (en mm). 116
3.8 Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps. 116
3.9 Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps. . . . 118
3.10 Rayon maximum de la zone endommagée basé sur un critère en déformation équivalente (en mm). 118
3.11 Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps. 119
3.12 Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps. . . . 120
3.13 Rayon maximum de la zone endommagée (en mm). 120
3.14 Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps. 121
3.15 Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps. . . . 122

3.16 Rayon maximum de la zone endommagée (en mm). 122
3.17 Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps. 123
3.18 Influence des paramètres sur la flèche de la dalle béton. 129
3.19 Influence des paramètres sur le rayon de la zone endommagée de la dalle béton. 129
3.20 Influence des paramètres sur la réaction maximale aux conditions limites de la dalle béton. 130
3.21 Recouvrement temporel ([Chevreuil, 2005]). 132
3.22 Modèle global d'une dalle plane en béton armé. 134
3.23 Coupe de la dalle en béton armé et vue en perspective. 136

4.1 Représentations temporelle du chargement. 144
4.2 Représentations fréquentielle du chargement. 145
4.3 Cumul du contenu fréquentiel. 145
4.4 Premier exemple de validation de l'approche fréquentielle : description de la géométrie et des conditions limites. 146
4.5 Déplacement temporel au Point P_1 suivant l'axe de chargement y. 147
4.6 Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_1 suivant l'axe de chargement y. 148
4.7 Spectre de réponse en accélération au Point P_1 suivant l'axe de chargement y. 148
4.8 Déplacement temporel au Point P_2 suivant l'axe de chargement y. 149
4.9 Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_2 suivant l'axe de chargement y. 149
4.10 Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe de chargement y. 150
4.11 Déplacement temporel au Point P_3 suivant l'axe de chargement y. 150
4.12 Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_3 suivant l'axe de chargement y. 151
4.13 Spectre de réponse en accélération au Point P_3 suivant l'axe de chargement y. 151
4.14 Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe de chargement y. 152
4.15 Deuxième exemple de validation de l'approche fréquentielle : description de la géométrie et des conditions limites. 153
4.16 Déplacement temporel au Point P_1 suivant l'axe de chargement z. 155
4.17 Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_1 suivant l'axe de chargement z. 155
4.18 Spectre de réponse en accélération au Point P_1 suivant l'axe de chargement z. 156
4.19 Déplacement temporel au Point P_1 suivant l'axe vertical y. 156
4.20 Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_1 suivant l'axe vertical y. 157

4.21 Spectre de réponse en accélération au Point P_1 suivant l'axe vertical y. . . 157
4.22 Déplacement temporel au Point P_2 suivant l'axe de chargement z. 158
4.23 Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_2 suivant l'axe de chargement z. 158
4.24 Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe de chargement z. 159
4.25 Déplacement temporel au Point P_2 suivant l'axe vertical y. 159
4.26 Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_2 suivant l'axe vertical y. 160
4.27 Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe vertical y. . . 160
4.28 Géométrie de la structure étudiée. 162
4.29 Efforts d'impact en fonction du temps pour les différents types d'avios. . 165
4.30 Contenus fréquentiels des efforts d'impact pour les différentes aviations. . 166
4.31 Géométrie de la structure étudiée pour le traitement de la zone non-linéaire. 167
4.32 Déplacements temporels aux bornes de la zone endommagée pour les deux aviations prises en compte. 167
4.33 Contenus fréquentiels des déplacements aux bornes de la zone endommagée pour les deux aviations prises en compte. 168
4.34 Cumul des contenus fréquentiels des déplacements aux bornes de la zone endommagée pour les deux aviations prises en compte. 168
4.35 Géométrie de la partie linéaire de la structure étudiée et emplacement des points d'intérêts. 169
4.36 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe de chargement. 171
4.37 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe vertical z. 172
4.38 Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe de chargement. 172
4.39 Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe vertical z. 173
4.40 Ecart normé moyen du déplacement résultant sur l'ensemble des points de post-traitement (P_1, P_2 et P_3) entre les approches temporelle et fréquentielle. 174
4.41 Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe de chargement dans le cas de l'avion commercial. 175
4.42 Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe de chargement dans le cas de l'avion militaire. 175
4.43 Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe vertical z dans le cas de l'avion commercial. 176
4.44 Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe vertical z dans le cas de l'avion militaire. 176
4.45 Comparaison du nombre de dégrés de liberté nécessaires au calcul pour les approches fréquentielle et temporelle. 177
4.46 Comparaison des temps nécessaires de calcul pour les approches fréquentiel et temporel. 178

A.1 Structure interne d'un Airbus 330 ([Cutler, 1999]). 185
A.2 Modes de déchirures en accordéon d'une feuille de métal par un objet contondant [Wierzbicki *et al.*, 2002]. 186

B.1 Schéma de principe de la méthode de Wolf. 191
B.2 Comparaison entre les résultats obtenus par la méthode de Riera et celle de Wolf [Bangash, 1993]. 192

D.1 Géométrie de la partie linéaire de la structure étudiée et emplacement des points d'intérêts. 201
D.2 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_1 suivant l'axe de chargement. 202
D.3 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_1 suivant l'axe vertical z. 202
D.4 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_2 suivant l'axe de chargement. 203
D.5 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_2 suivant l'axe vertical z. 203
D.6 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe de chargement. 204
D.7 Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe vertical z. 204
D.8 Déplacements temporels au point P_1 suivant l'axe de chargement. 205
D.9 Déplacements temporels au point P_1 suivant l'axe vertical z. 205
D.10 Déplacements temporels au point P_2 suivant l'axe de chargement. 206
D.11 Déplacements temporels au point P_2 suivant l'axe vertical z. 206
D.12 Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe de chargement. 207
D.13 Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe vertical z. 207

Liste des tableaux

1.1 Taux génériques d'accidents par catégorie et sous-catégorie d'aéronefs [DOE, 2006]. 10
1.2 Paramètres de la loi de Hooke dérivée par rapport au temps. 18
1.3 Vitesses de chargement et de déformation pour trois impacts d'avion différents d'après [Kœchlin, 2007]. 18
1.4 Scénario de perforation d'après les essais Meppen [Jonas *et al.*, 1982]. . . 23
1.5 Paramètres des ondes de membrane. 26
1.6 Paramètres des ondes de flexion. 26
1.7 Paramètres d'écaillage. 27
1.8 Différents schémas de Newmark 47

2.1 Paramètres matériau de la plaque d'acier simplement supportée. 79
2.2 Solution EF donnée par Cast3m (gauche), solution analytique et solution TVRC avec 180 DDLs (droite). 81
2.3 Propriétés mécaniques du béton composant l'exemple voile/plancher. . . . 82
2.4 Solution EF Cast3m obtenue avec 49400 DDLs et solution TVRC obtenue avec 2400 DDLs. 85
2.5 Algorithme de reconstruction de la réponse sur une plage de fréquence à l'aide des approximants de Padé. 96
2.6 Paramètres matériau de la plaque d'acier étudiée. 97
2.7 Solution EF donnée par Cast3m (gauche), solution TVRC avec 40 DDLs (droite). 98
2.8 Algorithme de résolution fréquentielle TVRC appliqué au champ des structures mécaniques. 102
2.9 Récapitulatif des développements TVRC mis en place pour le traitement des vibrations induites par un impact d'avion. 103

3.1 Paramètres de la formule de non perforation CEA-EDF. 113
3.2 Table de Box et Hunter à 3 facteurs. 125
3.3 Table de Taguchi L8 (2^7) 126
3.4 Valeurs des niveaux choisies pour le plan d'expérience. 127
3.5 Listes des essais et résultats obtenus pour le plan d'expérience. 128
3.6 Effet de chacune des variables sur les trois type de résultats. 128

4.1 Propriétés mécaniques du béton armé composant la plaque en flexion. . . 147
4.2 Propriétés mécaniques du béton composant le portique. 154
4.3 Propriétés mécaniques du béton composant la structure impactée. 161
4.4 Propriétés mécaniques du sol. 161
4.5 Paramètres normés pour chaque aviation. 163
4.6 Comparaison des paramètres, efforts de flambement (au-dessus) et distributions de masse (en-dessous), pour les différents types d'aviation. 164
4.7 Solutions TVRC du cas industriel étudié. 170

B.1 Paramètres de la méthode de Stevenson. 189
B.2 Paramètres de la méthode de Wolf. 191

Introduction

Dans le processus de conception d'une Installation Nucléaire de Base (INB), la sûreté des structures présente un aspect primordial. Le dimensionnement du génie civil, des supportages des chemins de câbles électriques et des tuyauteries, des ancrages ainsi que la qualification des matériels aussi bien mécaniques qu'électriques aux sollicitations dynamiques doivent tenir compte des accélérations qu'ils subissent. Ces accélérations doivent intégrer les mouvements sismiques dont la fréquence de coupure pour les planchers par exemple est de l'ordre de 30 à 50 Hz, et les mouvements d'ébranlement consécutifs à l'impact d'avions commerciaux. La fréquence de coupure de ce type de sollicitation peut être très supérieure, on peut dans ce contexte parler de moyenne fréquence (50 à 100 Hz).

Le risque d'impacts accidentels d'aéronefs a été pris en compte dans le dimensionnement des premières installations à caractère sensible. Les études probabilistes menées ainsi que les dispositions gouvernementales telles que l'aménagement de couloirs aériens adaptés plaçaient alors l'éventualité d'un impact d'avion commercial hors du cadre d'occurrence considéré. Les événements du 11 septembre 2001 ont eu pour conséquence directe d'impacter ces probabilités et dès lors, ce phénomène est devenu un cas de charge à prendre en considération. La problématique de l'impact d'avion sur une structure industrielle fait intervenir au même titre que le tir de projectile sur une cible deux phénomènes couplés l'un à l'autre : l'endommagement d'une zone localisée de la structure impactée autour de la zone d'impact, puis la propagation des vibrations induites par le choc dans l'ensemble restant de la structure ou ébranlement.

Les méthodologies actuelles permettant d'évaluer les effets d'ébranlement d'une structure de génie civil reposent sur des analyses éléments finis transitoires par intégration directe ou projection sur la base modale, rarement non linéaires. Les accélérations induites servent à établir les spectres de réponse d'oscillateurs simples. Dans les deux cas d'approche, pour parvenir à représenter de manière pertinente un contenu de moyenne fréquence, il convient de mettre en place un raffinement de maillage difficilement compatible avec la taille des modèles de ces structures de génie civil. Afin d'intégrer les insuffisances des modèles industriels employés, et pour garantir le respect des principes de sûreté, des marges de dimensionnement sont mises en place par :

- des dispositions constructives visant à raidir la structure et sa réponse, démarche pénalisante pour le génie civil et sa constructibilité,
- des coefficients de sécurité importants appliqués sur l'ensemble des spectres de plancher relevant homothétiquement les valeurs d'accélération en fréquence.

Afin de maîtriser ces marges de dimensionnement, le processus industriel nécessite d'être

enrichi par une démarche intégrant un meilleur traitement des non linéarités locales liées à la fissuration du béton armé dans la zone d'impact et une meilleure représentation fréquentielle du signal à moyenne fréquence.

L'aspect linéaire n'est pas remis en question dès lors que l'on se place hors de la zone de choc, néanmoins la non-linéarité de la partie de la structure impactée peut avoir une influence non négligeable. Une démarche couplée d'analyse, consistant à traiter dans une première phase les aspects non linéaires de la zone de choc doit faire dans un premier temps l'objet d'une étude paramétrique visant à déceler l'influence des non linéarités dans le signal d'ébranlement ainsi que ses dimensions. Cette première analyse doit ainsi permettre de déterminer d'une part la modification du signal source de l'ébranlement en termes d'amplitude et de fréquence et d'autre part l'étendue de la zone fissurée autour de la zone de chargement. Cette première étape ne pouvant être conduite expérimentalement à l'échelle de la problématique envisagée, une analyse de sensibilité peut être conduite au travers d'outils d'analyse de sensibilité en balayant de manière déterministe les différents paramètres identifiés. A l'issue de cette étape, la mise en œuvre d'une stratégie de traitement de l'ébranlement a été entreprise permettant la qualification des équipements nécessaires à la sûreté de l'enceinte. Cette stratégie de calcul fait intervenir de manière découplée l'étude éléments finis de la zone endommagée et l'analyse des ondes induites aux bornes de celle-ci. Le traitement de l'ébranlement peut alors être effectué au travers d'une approche dédiée au traitement fréquentiel des vibrations forcées et développée au sein du LMT-Cachan, la TVRC (Théorie Variationnelle des Rayons Complexes). La TVRC présente des avantages importants pour l'étude de problématiques à fort contenu fréquentiel comme cela est le cas pour l'impact d'avion.

La rédaction de ce travail de thèse reprend donc la problématique selon l'organisation en quatre chapitres qui suit.

Le premier chapitre présente le contexte général de l'étude. Il reprend l'historique et le contexte industriel de ce cas de charge. Suite à cela, l'accent sera mis sur les spécificités de ce type choc ainsi que sur les phénomènes mis en jeu aussi bien au niveau local que global lors d'un tel impact. Les démarches méthodologiques de traitement de ce chargement sont ensuite répertoriées dans le but de déterminer la plus appropriée à notre problématique.

Le deuxième chapitre rappelle les bases de la TVRC, méthode adaptée aux calculs moyennes fréquences qui permet de construire la solution approchée comme la superposition de modes de vibrations locaux. Dans la cadre de la description de la TVRC, une attention particulière sera apportée aux différents points importants nous permettant une application de cette méthode dans un domaine tel que le génie civil et en particulier dans une problématique d'ébranlement de structures.

Dans un troisième chapitre, la question de l'implantation numérique et de la mise en œuvre numérique de la stratégie est abordée. Le choix des paramètres de la méthode y est étudié.

La pertinence et la robustesse des travaux exposés dans les deux chapitres précédents sont éprouvées dans un quatrième chapitre par l'exposé des résultats des simulations menées sur des exemples simples. Pour finir, une comparaison avec une approche "classique", utilisant la méthode des éléments finis associée à un schéma d'intégration en

temps, met en évidence l'avantage d'utiliser la stratégie mise en place sur l'étude du cas "industriel" considéré.

Chapitre 1

Etat de l'art

Les structures en béton armé sont dimensionnées pour supporter, pendant leur durée de vie, des charges statiques mais également des charges dynamiques. Des chargements de quelques millisecondes peuvent être provoqués sur les structures en béton armé, par des explosions, la chute d'un avion, etc... Ces chargements provoquent des phénomènes vibratoires qui, s'ils sont de grande amplitude, sont susceptible d'endommager les composants et équipements se trouvant dans la structure. L'étude de la chute d'avion pour le domaine du génie civil nucléaire est étudiée depuis le début des années 70. Néanmoins la complexité des phénomènes mis en jeu dans ce type d'analyse couplée à la difficulté de sa mise en place expérimentale (coût, moyens de mesure, etc...) font de ce cas de charge l'un des plus difficiles à appréhender. Malgré l'importance de ces phénomènes pour le dimensionnement des structures, systèmes et composants d'une installation nucléaire, certains aspects ne sont pas toujours bien représentés dans les modélisations utilisées classiquement. Dans ce chapitre, l'historique et le contexte industriel de ce cas de charge sont développés. Suite à cela, nous nous intéresserons aux phénomènes mis en jeu lors d'un impact d'avion. Dans un premier temps, les phénomènes localisés au niveau de la zone d'impact sont étudiés en s'appuyant notamment sur [Hervé, 2005], [Kœchlin, 2007] ou encore [Shiu, 2008]. Une définition des différents phénomènes sera proposée. Dans un second temps le comportement global de la structure en béton sous l'impact est exposé. Les démarches méthodologiques, aussi bien locales que globales, de traitement de ce chargement sont ensuite répertoriées.

Sommaire

1.1 Contexte industriel de la chute d'avion 7

1.1.1 Historique du cas de charge 7

1.1.2 Exigences de sûreté et contexte règlementaire 9

1.1.3 Base de dimensionnement de la protection à la chute d'avion 11

1.2 Spécificité du choc lors d'un impact d'avion 12
1.2.1 Définition du choc dans le cadre de l'impact d'avion 12
1.2.2 La classification des chocs 14
1.2.3 Caractérisation dynamique de l'impact d'avion 17
1.2.3.1 Le taux de déformation 17
1.2.3.2 Comparaison du taux de déformation vis-à-vis des autres phénomènes 18
1.3 Nature des phénomènes induits, locaux et globaux 19
1.3.1 Phénoménologie locale des impacts mous 19
1.3.1.1 Processus de rupture sous impact mou 20
1.3.1.2 Analyse de ces phénomènes induits dans la zone d'impact 24
1.3.1.2.1 Origine du cône de cisaillement 24
1.3.1.2.2 Origine de l'écaillage 27
1.3.1.2.3 Modes de rupture de la cible 28
1.3.1.2.4 Remarques complémentaires et conclusions . . 30
1.3.2 Analyse de la propagation des ondes dans la structure complète . . 31
1.3.3 Conclusions sur les phénomènes induits lors d'un choc mou 34
1.4 Démarches méthodologiques usuelles 34
1.4.1 Modélisation du chargement 35
1.4.1.1 Modélisation réaliste de l'avion 35
1.4.1.2 Méthode analytique de Riera 36
1.4.1.3 Conclusions sur la modélisation du chargement 38
1.4.2 Traitement de la zone de choc 39
1.4.2.1 Méthodes analytiques de traitement des chocs mous . . . 39
1.4.2.2 Méthodes numériques de traitement des impacts 41
1.4.2.2.1 Méthode basée sur les éléments discrets 41
1.4.2.2.2 Méthode des éléments finis 42
1.4.2.3 Conclusions des méthodologies actuelles de traitement de la zone d'impact 43
1.4.3 Description des méthodologies de traitement des vibrations induites par l'impact 44
1.4.3.1 Approches temporelles 44
1.4.3.1.1 Discrétisation spatiale 44
1.4.3.1.2 Discrétisation temporelle 46
1.4.3.1.3 Conclusions 48
1.4.3.2 Approches fréquentielles 49
1.4.3.2.1 Découpage en plages fréquentielles 49
1.4.3.2.2 Méthodes issues des basses fréquences 51
1.4.3.2.3 Conclusions sur les approches fréquentielles . . 56
1.4.3.3 Bilan de l'état de l'art du traitement de l'ébranlement induit par la chute d'avion 57

1.1 Contexte industriel de la chute d'avion

La chute d'avion sur un bâtiment industriel est définie comme une agression externe liée à l'activité humaine. Elle doit notamment être prise en compte lors de la conception des centrales nucléaires. Outre la résistance au choc de la structure impactée, l'autre risque identifié est celui de l'indisponibilité des matériels nécessaires au retour et au maintien de l'installation à l'état sûr. L'objectif est donc de garantir que les fonctions de sûreté des systèmes et des matériels nécessaires au retour et au maintien de l'installation à l'état sûr ne sont pas affectées de manière critique. Tous les ouvrages de génie civil et les matériels nécessaires pour atteindre ces objectifs de sûreté doivent donc être protégés de l'impact et dimensionnés pour résister aux vibrations induites par celui-ci.

1.1.1 Historique du cas de charge

Le dimensionnement des centrales nucléaires à la chute d'avion a été pris en compte dès leur origine.

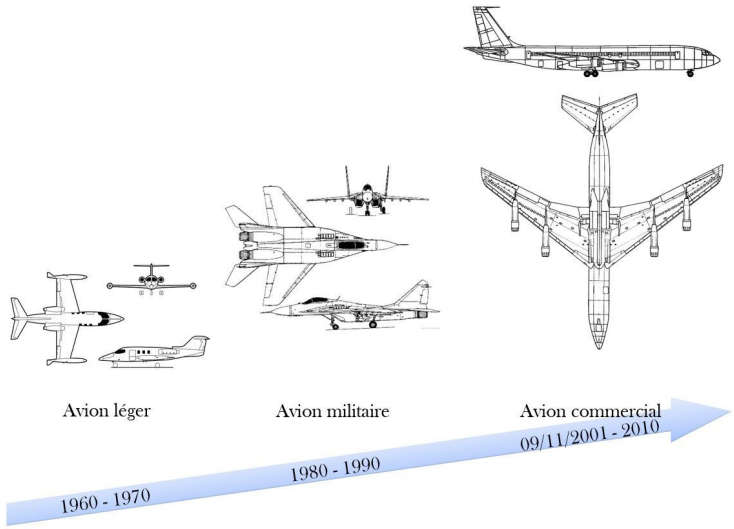


FIGURE 1.1: Bref historique de l'aviation considérée dans le cas de charge de la chute d'avion.

La prise en compte de ce cas de charge (voir la Figure 1.1) fait suite à une série d'incidents survenus dans les pays membres de l'OTAN (Organisation du Traité de l'Atlantique Nord) avec la chute de plus de 150 avions de type Lockheed F-104 Starfighter (Figure 1.2) dans les années 1960.

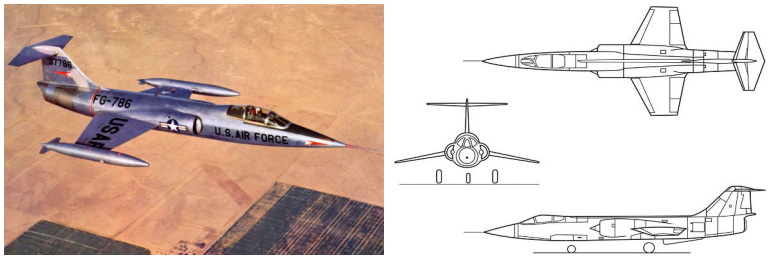


FIGURE 1.2: Vue générale d'un avion de type Lockheed F-104 Starfighter.

Suite à cela, en France, les enceintes du génie civil nucléaire ont été conçues pour résister aux impacts d'une aviation générale et légère (Figure 1.3), telle que le Cessna 210, monomoteur à hélice à l'avant, et le Learjet 23, biréacteur à l'arrière ([RCC-G, 1988]).



(a) Cessna 210 Centurion (b) Learjet 23

FIGURE 1.3: Aviation légère prise en compte.

En 1988 lorsque le 30 mars un Mirage F1 (voir la Figure 1.4) s'écrase en Allemagne de l'Ouest à moins de 2 *km* de deux centrales nucléaires, Isar et Niederaichbach, et que le lendemain, un Phantom F16 (voir la Figure 1.4) s'écrase à 15 *km* des deux réacteurs de Philippsburg, ce cas de charge est alors modifié. En effet, ces évènements ayant fait prendre conscience que la probabilité d'une chute accidentelle d'un avion militaire n'était pas négligeable, le dimensionnement des centrales nucléaires a été renforcé pour en tenir compte ([RCC-G, 1988]).



(a) Mirage F1 (b) Phantom F16

FIGURE 1.4: Exemple d'aviation militaire.

Jusque-là, le dimensionnement des centrales nucléaires était effectué sur des cas de charges de chute d'avion accidentelles et basés sur un taux de probabilité supérieur à 10^{-7}/an.tranche. Néanmoins après les attentats de New-York du 11 septembre 2001, les procédures classiques d'évaluation de ce risque ont été revues. Le cas de chute d'un avion commercial a ainsi été ajouté au dimensionnement des installations nucléaires.

La réglementation distingue alors les cas de charge de chutes d'avion en deux catégories : les agressions externes accidentelles dont la probabilité est supérieure à 10^{-7}/an.tranche et les actes de malveillance. Dans cette dernière catégorie, l'approche probabiliste est évidemment inopérante. La chute d'un avion commercial sur une installation nucléaire est généralement qualifiée de "hors dimensionnement", ou "beyond design", mais n'en est pas moins prise en compte dans la conception de celle-ci.

1.1.2 Exigences de sûreté et contexte règlementaire

En France les objectifs et les principes de sûreté concernant la chute d'avion sont définis dans la Règle Fondamentale de Sûreté (RFS) chapitre I.2.a [RFS, 2002]. Les objectifs de sûreté sont définis dans les Directives Techniques au paragraphe A.2.5 (contribution des agressions externes au risque global) et au paragraphe F.2.2 (protection contre la chute d'avion). L'ETC-C est le code de dimensionnement applicable aux ouvrages de génie civil. Il définit, pour les bâtiments qui doivent être dimensionnés vis-à-vis de ce cas de charge, et pour les combinaisons de chargements à prendre en compte, les critères à considérer.

Conformément aux termes de la RFS I.2.a, la prise en compte du risque de chute d'avion s'appuie sur la répartition du trafic aérien en trois familles d'avions qui sont l'aviation générale ou légère (avions de masse inférieure à 5,7 tonnes), l'aviation militaire et l'aviation commerciale. L'agression de chacune de ces familles est envisagée sur une "cible" constituée par l'ensemble des structures et équipements nécessaires aux trois fonctions de sûreté suivantes :

- arrêt du réacteur et évacuation de la puissance résiduelle,
- stockage du combustible usé,
- traitement et confinement des effluents radioactifs.

Pour chaque famille d'aviation, la probabilité d'agression est comparée au seuil de quelques 10^{-7}/an.tranche donné par la RFS I.2.a. La probabilité résultante (la somme des trois familles) ne doit pas dépasser quelques 10^{-6}/an.tranche. Le dépassement d'un des seuils fixés par la RFS nécessite la mise en place de mesures complémentaires de protection afin de ramener le risque à un niveau acceptable.

L'évaluation de la fréquence d'impact consiste à effectuer une évaluation prudente de la fréquence prévue par an d'un aéronef impactant une installation d'intérêt. Cette évaluation tient compte du site (dimensions, lieu, proximité d'un aéroport, ...) et des paramètres spécifiques qui influent sur la fréquence de l'impact de l'avion (nombre de vols, probabilité de collision, angle d'impact, vitesse d'impact, ...). Néanmoins aucune évaluation n'est faite sur la gravité de l'impact.

Les taux d'accidents génériques pour chaque catégorie d'aéronefs et sous-catégorie,

présentés dans le Tableau 1.1, ont été calculés sur la base d'un examen des rapports d'accidents publiées par la Federal Aviation Administration (FAA) et le National Transportation Safety Board (NTSB) des avions civils, et par l'armée américaine pour des avions militaires.

Avion	**Taux d'accidents génériques**	
	Au décollage (par décollage)	A l'atterrissage (par atterrissage)
Aviation légère		
Ailes fixes, moteur unique	$1,1.10^{-5}$	$2,0.10^{-5}$
Ailes fixes, moteurs multiples	$9,3.10^{-6}$	$2,3.10^{-5}$
Ailes fixes, turbopropulseurs	$3,5.10^{-6}$	$8,3.10^{-6}$
Ailes fixes, turbojets	$1,4.10^{-6}$	$4,7.10^{-6}$
Ailes fixes	$1,1.10^{-5}$	$2,0.10^{-5}$
Aviation commerciale		
Transporteur	$1,9.10^{-7}$	$2,8.10^{-7}$
Public	$1,0.10^{-6}$	$2,3.10^{-6}$
Aviation militaire		
Bombardiers et avions cargo	$5,7.10^{-7}$	$1,6.10^{-6}$
Avions de combat et d'entrainement	$1,8.10^{-6}$	$3,6.10^{-6}$

TABLE 1.1: Taux génériques d'accidents par catégorie et sous-catégorie d'aéronefs [DOE, 2006].

Dans l'analyse approfondie conduite et exigée par l'IFSN (Inspection fédérale de la sécurité nucléaire suisse) le rapport [HSK, 2003] contient des indications qualitatives. Les éléments suivants ont alors été pris en compte :

- les différents types d'avions en exercice dans le monde à ce moment et leurs réacteurs,
- les quantités de carburant,
- les différentes vitesses,
- ainsi que différentes conditions d'approche.

Il a en outre été postulé qu'un avion atteint sa cible de façon précise et à haute vitesse lors d'un crash intentionnel. Dans des simulateurs de vol, des pilotes de ligne expérimentés ont opéré des approches simulées vers les centrales nucléaires en considérant différentes hypothèses. Il est ressorti de ces simulations qu'une approche de la cible à haute vitesse était très compliquée à mettre en œuvre. Les analyses montrent que, lors du choc d'un avion sur un bâtiment, la vitesse de vol est plus décisive que le poids. La collision doit se produire avec une vitesse élevée afin qu'une perforation locale du bâtiment du réacteur soit possible. Lors d'une chute intentionnelle, il est aussi difficile d'atteindre le bâtiment du réacteur de façon si exacte que des dommages importants à l'intérieur s'ensuivent. L'IFSN a également recommandé d'introduire une hauteur de vol minimale pour les avions civils au-dessus d'installations nucléaires.

En conclusion, les analyses montrent un haut degré de protection des centrales nucléaires en cas de chute d'avion intentionnelle. Les nouvelles centrales nucléaires actuellement en construction sont encore mieux protégées face à des catastrophes aériennes. Cela signifie que la probabilité d'une fusion du cœur du réacteur à la suite d'un accident d'avion est extrêmement faible. En outre, des expériences et analyses plus récentes conduites au niveau international le confirment : les bâtiments réacteurs construits à partir de béton armé massif résistent à une charge nettement plus importante que ce qui a été considéré dans les études jusque-là.

Le paragraphe suivant, basé sur [RFS, 2002], a pour objectif de décrire l'approche réglementaire mise en œuvre à la conception en tenant compte des exigences exprimées par l'Autorité de Sûreté Nucléaire dans sa lettre de 1993 relative à la troisième génération de réacteurs de la filière à eau pressurisée.

1.1.3 Base de dimensionnement de la protection à la chute d'avion

L'approche de la protection contre la chute d'avion est d'abord déterministe et basée sur des cas de charge associés aux différentes familles d'avions. La protection est obtenue par un dimensionnement, vis-à-vis de ces cas de charge, des bâtiments classés de sûreté d'une installation nucléaire ou par séparation géographique des systèmes redondants, de manière à ce que la perte d'un système directement localisé au niveau de la chute d'avion soit toujours compensée par la disponibilité de l'autre système. Les équipements nécessaires au retour de l'installation à l'état sûr doivent quant à eux être protégés vis-à-vis des vibrations induites par cet impact dans les structures impactées.

La démarche générale d'amélioration significative de la sûreté a conduit à considérer le risque aérien dans sa totalité (à savoir militaire et commercial) indépendamment de la probabilité d'occurrence de l'événement, la protection de l'installation étant assurée soit par séparation géographique soit par l'existence d'un écran physique appelé "coque avion". A l'international, le contexte réglementaire de la chute d'avion se retrouve dans [ONR, 2014].

Dans le cadre de l'aviation militaire qui constitue le cas de charge historique, et de l'aviation commerciale qui constitue un cas de charge complémentaire introduit à la suite des événements du 11 septembre 2001, l'orientation retenue au niveau de la protection de l'installation vis-à-vis de l'impact direct est la suivante :

- Protection complète pour les bâtiments susceptibles de contenir du combustible. Cette protection est assurée par une "coque avion" : c'est le cas du bâtiment réacteur et du bâtiment combustible,
- Protection pour les bâtiments renfermant des systèmes de sauvegarde, soit par leur protection par la coque avion, soit par une séparation géographique suffisante des systèmes de sauvegarde redondants,
- Intégration de certains équipements, nécessaires au retour et au maintien à l'état sûr de l'installation, dans les bâtiments protégés par la coque avion : cela concerne notamment la salle de commande pour un réacteur.

L'exigence de protection vis-à-vis du risque aérien distingue les bâtiments protégés

par séparation géographique et ceux protégés par la "coque avion". Pour le dimensionnement de ces derniers, l'impact de l'avion est modélisé par des historiques d'effort. Ces historiques d'effort sont généralement représentatifs d'un impact d'avion sur une cible rigide.

Les historiques d'effort sont directement utilisés pour vérifier la résistance ultime locale des murs extérieurs à la perforation, ce avec une marge réduite par rapport au règles de dimensionnement standard (d'où le classement de l'impact "hors dimensionnement"). La démonstration de résistance peut éventuellement s'appuyer sur l'existence de murs ou parois situés sous la coque avion dans les bâtiments protégés. Outre la perforation, il est aussi nécessaire de démontrer qu'il n'y a pas pénétration ou création de missiles secondaires et que les déformations des armatures et du béton restent limitées. La démonstration de résistance des structures impactées s'appuie généralement sur des modèles locaux détaillés de la zone ou du mur impacté.

Les effets globaux de vibrations induites par la chute d'avion, nécessaire au dimensionnement des structures internes des bâtiments et des systèmes et composants de l'installation, sont quant à eux déterminés sur la base d'un modèle global de l'installation. Les historiques d'effort peuvent être directement appliqués à ces modèles globaux ou de nouveaux historiques peuvent être générés suite aux calculs locaux effectués. En prenant l'hypothèse de différents points d'impact de l'avion sur chaque mur extérieur de protection, les spectres de réponse en chaque point ou plancher de l'installation sont déterminés. Ces spectres de réponse sont ensuite utilisés pour le dimensionnement des systèmes et composants de l'installation. Le découplage des structures internes par rapport aux murs extérieurs des bâtiments impactés est une solution efficace de réduction de la sollicitation pour les équipements qui s'y trouvent.

Lorsqu'il n'est pas possible d'étudier les conséquences de l'agression sur une partie de cible, on prend en compte par conservatisme le bâtiment qui l'abrite. La formulation pour l'évaluation du risque introduit la notion de surface virtuelle du ou des bâtiments abritant les fonctions de sûreté : cette surface correspond à la projection de la surface apparente du bâtiment suivant les directions possibles de chute des avions.

1.2 Spécificité du choc lors d'un impact d'avion

1.2.1 Définition du choc dans le cadre de l'impact d'avion

La terminologie "choc" est utilisée pour décrire une interaction entre deux ou plusieurs corps, qui produit une modification brutale du comportement de ces corps. Dans la littérature mécanicienne, le choc, et indifféremment impact ou collision, est défini comme "une excitation vibratoire dont la durée est de l'ordre de grandeur ou inférieure à environ deux fois la période propre du système mécanique sollicité". En résumé, il y a choc lorsqu'un paramètre mécanique (force, position, vitesse, accélération, ...) fluctue brusquement (temps court par rapport à la période naturelle concernée) avec une forte amplitude en créant un régime transitoire dans l'un ou les deux systèmes mécaniques en cause.

Cette interaction, difficile à appréhender compte tenu de la brièveté du phénomène, a amené la communauté des mécaniciens à étudier les différents phénomènes engendrés par le choc et à proposer également une classification des multiples types d'impact. Les premières classifications de choc sont basées sur les observations possibles faites avant et après la collision, comme l'évolution de la vitesse, la rigidité, la présence de rebond, l'écrasement des corps ou encore la pénétration ou perforation d'un corps vis-à-vis de l'autre.

Au début du XXème siècle, le progrès en termes de méthodes expérimentales avec, entre autres, les barres d'Hopkinson [Hopkinson, 1914] a permis de mieux comprendre le comportement des matériaux dans des conditions dynamiques. L'ingénieur en électricité britannique Bertram Hopkinson a proposé pour la première fois de telles mesures en 1914. L'installation des barres d'Hopkinson utilisée aujourd'hui est basée sur une modification développée par Herbert Kolsky à Londres en 1949. Aujourd'hui encore et même si nous venons de fêter ses 100 ans d'existence, le fondement même des barres d'Hopkinson fait toujours l'objet de multiples publications, tel que [Georgin et Reynouard, 2003], [Brara et Klepaczko, 2006] et [Forquin *et al.*, 2008]. Le principe est basé sur la théorie de propagation des ondes dues à une impulsion de choc au travers d'un échantillon de matériau. Le procédé développé par [Zhao et Gary, 1996] permettant un dépouillement des données avec une précision suffisamment fine a donné un nouvel élan à ce type d'essai.

Comme nous venons de l'indiquer, le choc mécanique, proprement dit, synonyme physiquement de collision, est la rencontre, plus ou moins rude, d'au moins deux corps en mouvement, ou choc d'un corps contre un obstacle. Dans les Principes de philosophie ([Descartes, 1644]), Descartes énonce les lois des chocs entre deux corps. La question est de savoir, connaissant la vitesse des corps avant leur rencontre, quelle sera leur vitesse après. Pour cela, Descartes utilise pour la première fois la notion de quantité de mouvement. Néanmoins il commet une erreur en ne tenant pas compte du sens de déplacement. Dans [Huygens, 1652a] et [Huygens, 1652b], Huygens trouve la bonne réponse et corrige les erreurs de Descartes au moyen de l'utilisation astucieuse du principe de relativité. Huygens énonce alors de manière correcte la loi de conservation de la quantité de mouvement, ainsi que celle de l'énergie cinétique dans le cas d'un choc élastique. A la suite de cela et fort de ces approfondissements ce dernier traite les différentes configurations de chocs directs, base de la théorie des chocs, dans [Huygens, 1703]. Néanmoins ces modèles particulaires des chocs basés sur la conservation d'énergie cinétique ne sont pas suffisamment complets et précis pour décrire notre problématique d'impact d'avion. En effet, cette approche permet de décrire efficacement les chocs élastiques avec rebond. Néanmoins dans le cas de chocs anélastiques il est nécessaire de définir où l'énergie se dissipe et l'état d'endommagement des différents corps. Il est donc important d'avoir un modèle de classification des chocs permettant de tenir compte des déformations de chacun des corps et cela afin de différencier les chocs mous des chocs durs, que l'on peut définir comme l'impact d'un corps sur un autre, endommageant ce dernier sans être détérioré. L'impact d'avion pouvant être caractérisé par différents types d'impacts anélastiques, le modèle d'Eibl doit nous permettre de classer ces chocs.

L'analyse des bilans énergétiques décrit dans [Kœchlin, 2007] (voir la Figure 1.5)

permet de nous rendre compte des différents modes de dissipation d'énergie.

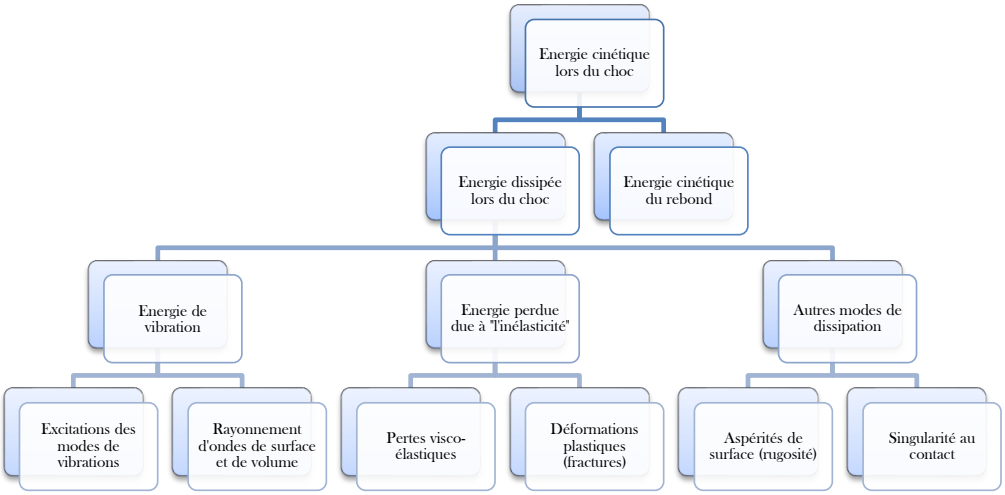


FIGURE 1.5: Bilan énergétique lors du choc.

Dans la littérature peu d'essais à taille réelle traitant d'un impact d'avion ont été menés, ce qui est compréhensible au vu des coûts d'une telle campagne expérimentale. Les quelques essais tels que ceux de Sugano présentés dans [Sugano *et al.*, 1993b] servent ainsi de référence. Ces essais ont montré que lors d'un impact d'avion sur une structure en béton armé, le projectile s'écrase complètement et les déplacements et déformations de la cible sont faibles comparés aux déplacements et déformations de l'avion.

En étudiant l'essai à l'échelle réelle [Sugano *et al.*, 1993b] et en comparant les classifications citées ci-dessus, nous arrivons à la remarque que l'impact d'un avion de type F4 sur le mur n'a pas créé de rebond. Cet exemple correspond à un impact mou selon Brossard ([Brossard, 1997]), mais comme le déplacement de la structure cible n'est pas négligeable dans ce test, il est considéré comme un impact dur selon Eibl ([Eibl, 1987] et repris par le Comité Euro-International du Béton dans [CEB, 1988]). Il est clair pour ce cas que le déplacement de la structure cible n'est pas un élément clé pour bien distinguer les types d'impacts.

Pour pallier cet inconvénient, [Koechlin et Potapov, 2009] ont proposé une autre définition pour distinguer impact mou et impact dur, prenant en compte à la fois les caractéristiques du matériau et la vitesse du projectile, valable dans le cas où le projectile s'écrase. Selon cette méthode, elle peut être utilisée pour classifier le type d'impact entre deux corps.

1.2.2 La classification des chocs

Comme vu dans la Figure 1.5, l'énergie produite lors d'un choc peut être partagée en deux types, l'énergie dissipée au cours de l'impact ou alors l'énergie due au rebond du projectile. Ainsi la somme de ces énergies nous permet de retrouver l'énergie cinétique de

départ. Dans le paragraphe précédent, nous avons pu voir que même si le modèle d'Eibl ([Eibl, 1987]) basé sur ce principe était intéressant notamment par son découplage entre le calcul de la force d'impact et le calcul de la réponse de la structure cible, celui-ci ne permet pas de distinguer clairement les impacts mous des impacts durs. En effet, une telle répartition ne permet pas de bien appréhender les chocs dits durs où un projectile rigide traverse une structure impactée moins solide, ni les chocs où le projectile s'écrase contre une cible souple mais tout de même résistante. La nature de la modélisation d'Eibl composée de masses et de ressorts est restrictive lorsque le projectile pénètre la cible. Il est donc nécessaire d'avoir un critère de distinction entre choc mou et dur non pas exclusivement sur les déplacements et la rigidité, mais également sur les seuils de rupture des deux matériaux qui composent notre problématique. C'est donc dans ce sens qu'en 2007, Koechlin nous propose, dans [Kœchlin, 2007], un critère permettant de différencier l'ensemble des types d'impacts : élastique, anélastique, avec rebond, durs et mous.

L'idée proposée est alors d'effectuer une comparaison entre le seuil de rupture de la cible σ_c et celui du projectile σ_p et ensuite de vérifier la capacité de la cible à résister à l'impact. La Figure 1.6 représente graphiquement cette classification.

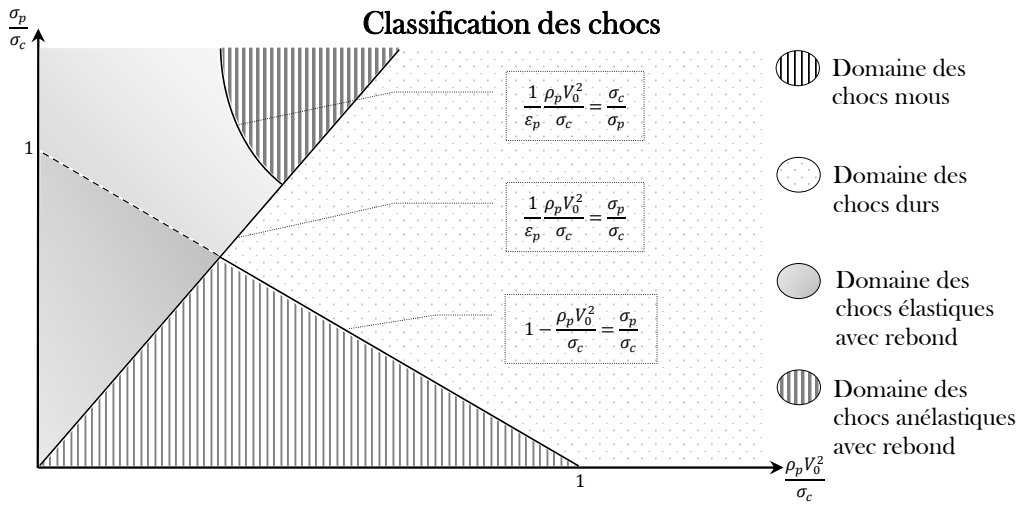


FIGURE 1.6: Classification des chocs d'après [Kœchlin, 2007].

En se référant aux résultats des différents impacts présents dans la littérature, on peut vérifier la cohérence de cette classification au travers de la Figure 1.7.

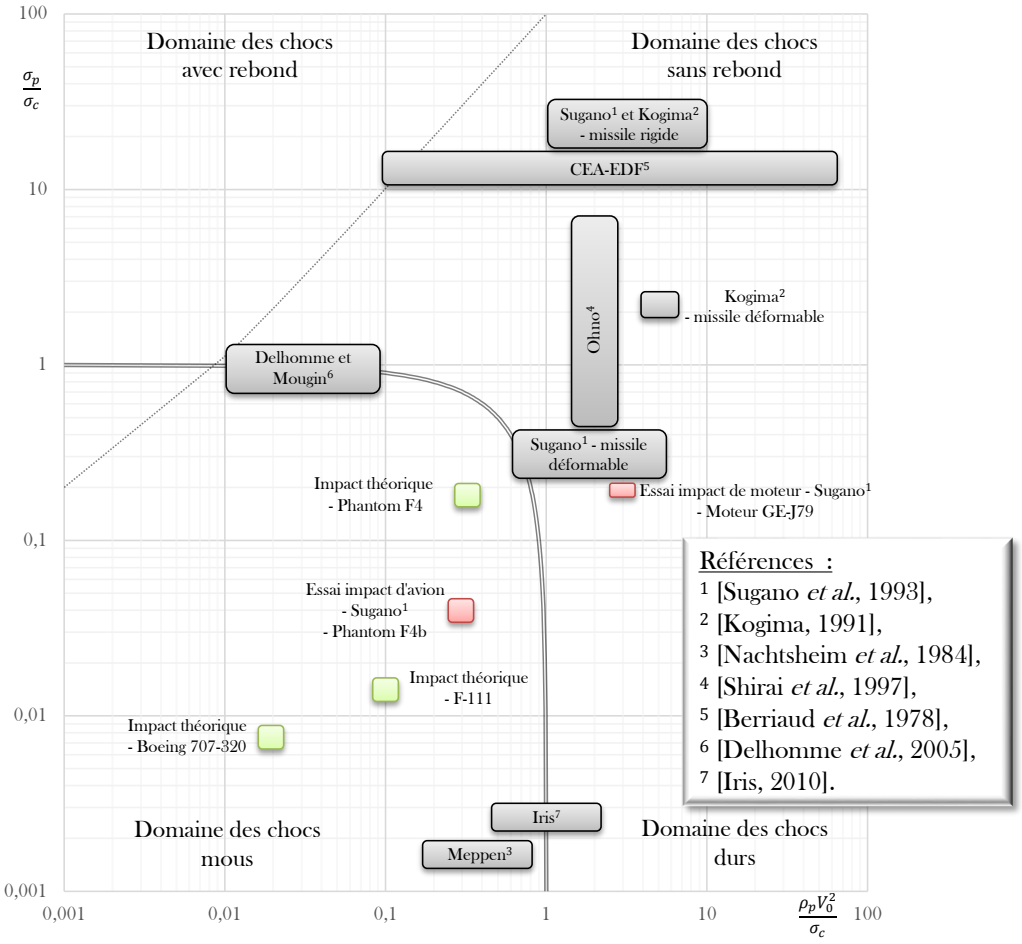


FIGURE 1.7: Classification de différents essais d'impact présents dans la littérature.

De là, on peut en conclure que l'impact d'avion amène en général à un choc mou que cela soit pour un avion commercial, militaire ou léger. Néanmoins si on décompose l'avion en une série de chocs des éléments qui le composent, fuselage, ailes et moteurs, certains d'entre eux peuvent correspondre à un choc dur. L'Annexe A nous permet une étude plus approfondie des phénomènes d'endommagement se développant au niveau de l'avion. Dans le cadre de cette thèse, nous considérerons l'impact d'avion comme un choc globalement mou. Usuellement les notions de choc dans l'impact d'avion font intervenir les hypothèses suivantes :

- déformation importante d'une partie de l'avion, notamment des ailes et du fuselage, faible déformation des réacteurs et absence générale de rebond,
- dimensionnement de la cible évitant la pénétration et la perforation,
- estimation sécuritaire de la force d'interaction supposant la cible rigide.

La classification de Koechlin prenant en compte les contraintes de rupture du projectile et de la cible semble tout de même correcte, néanmoins certaines remarques sont à prendre en compte vis-à-vis de son utilisation.

- L'approche de Koechlin peut être, à première vue, caractérisée comme locale. En

effet ni la géométrie du projectile, ni les effets de structure associés ne sont pris en compte. Cette remarque nous permet d'appliquer cette approche pour la comparaison d'impacts de projectiles ayant des modes de ruine différents.
- La géométrie de la cible et notamment son épaisseur n'entre pas dans cette répartition.
- La perforation de la cible n'est pas définie dans cette classification. Un choc mou et un choc dur peuvent être perforants ou non.
- Pour finir cette approche ne prend pas en compte l'influence du taux de déformation $\dot{\varepsilon}$. Néanmoins, il est possible de transformer l'équation délimitant les chocs durs et mous afin de délimiter les chocs durs des chocs mous :

$$\frac{\sigma_p(\dot{\varepsilon}_p)}{\sigma_c(\dot{\varepsilon}_c)} \frac{\rho_p V_0^2}{\sigma_c(\dot{\varepsilon}_c)} = 1 \tag{1.1}$$

La question de l'influence du taux de déformation sur le comportement du béton vis-à-vis du type d'impact que l'on considère se pose alors. La dynamique est un domaine complexe mais également varié étant donné qu'elle peut être divisée en dynamique lente, peu sensible à la vitesse de sollicitation et donc à la vitesse de déformation, et en dynamique rapide.

1.2.3 Caractérisation dynamique de l'impact d'avion

Le comportement dynamique des matériaux est généralement fonction de la vitesse de sollicitation [Gary et Toutlemonde, 2004]. Dans le cas des matériaux cimentaires comme le béton soumis à un chargement dynamique de compression, l'une des explications données par [Toutlemonde, 1995] concerne la forte influence sur l'effet de la vitesse de chargement du pourcentage d'eau présent. D'après [Forquin et Erzar, 2010] et [Rossi et Toutlemonde, 1996], cet effet sera négligeable pour un matériau sec. En traction dynamique l'effet de la vitesse de chargement sur un matériau cimentaire est très sensible. Deux phénomènes peuvent permettre d'expliquer cette sensibilité : l'état initial de fissuration ([Hild *et al.*, 2003]), pouvant être vu comme des défauts présent dans le matériau, et l'eau libre provenant des pores du matériau ([Toutlemonde, 1995] et [Erzar, 2010]).

Le paragraphe précédent nous a permis de différencier les types d'impacts. La caractérisation des domaines de la dynamique excités par notre impact est donc l'étape suivante. En effet, selon le domaine, la prise en compte du taux de déformation dans les lois de comportement est importante ou pas.

1.2.3.1 Le taux de déformation

En partant de la loi de Hooke d'élasticité unidimensionnelle et en la dérivant par rapport au temps, on peut évaluer l'ordre de grandeur des vitesses de déformations.

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} \tag{1.2}$$

avec

Paramètres	Sens physique	Unité
E	module d'Young de la cible	Pa
$\dot{\sigma}$	taux de contrainte	$Pa.s^{-1}$
$\dot{\varepsilon}$	vitesse de déformation	s^{-1}

TABLE 1.2: Paramètres de la loi de Hooke dérivée par rapport au temps.

Au droit de la surface d'impact, le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ est dépendant de $\dot{\sigma}$ lui-même directement lié à la vitesse de chargement. Dans [Abbas *et al.*, 1995], les données fournies nous permettent d'évaluer l'ordre de grandeur des taux de déformation dans le cas d'une cible ayant un module d'Young de 35000 MPa (Tableau 1.3) et impactée par trois projectiles différents : deux avions militaires, un Phantom F4 et un FB-111, et un avion commercial de type Boeing 707-320. L'aviation militaire engendre une vitesse de déformation bornée par $10^{-1}\ s^{-1}$ et dix fois plus élevée que l'avion civil.

Type d'avion	Unité	Boeing 707-320	Phantom F4	FB-111
Vitesse d'impact	$m.s^{-1}$	103	215	103
Vitesse de chargement dF/dt maximum	$MN.s^{-1}$	6000	11000	12000
Surface d'impact	m^2	28	7	7
Vitesse de déformation $d\varepsilon/dt$ $d\varepsilon/dt$	s^{-1}	0,006	0,045	0,049

TABLE 1.3: Vitesses de chargement et de déformation pour trois impacts d'avion différents d'après [Kœchlin, 2007].

1.2.3.2 Comparaison du taux de déformation vis-à-vis des autres phénomènes

Le taux de déformation déterminé dans le paragraphe précédent nous permet de comparer la chute d'avion à d'autres phénomènes dynamiques. Les classifications établies en fonction de la vitesse de déformation sont présentes en nombre dans la littérature (par exemple : [Zukas *et al.*, 1982], [CEB, 1988], [Bischoff et Perry, 1991], ou encore [Miyamoto et King, 1994]). Comme chaque auteur a sa vision personnelle des choses et présente des taux de déformation différents pour le domaine du séisme, du fluage ou des chocs durs, nous avons essayé de faire une rapide synthèse sur le schéma suivant en séparant ce qui relevait du chargement de ce qui était lié aux phénomènes physiques (Figure 1.8).

L'ordre de grandeur des vitesses de déformation trouvées pour les impacts d'avion place ce genre de choc dans la catégorie des taux de déformation intermédiaires. Il ne s'agit en tous cas pas de dynamique hyper rapide, comme la balistique, les impacts de missiles ou les chocs à hyper vitesses, ni non plus de dynamique lente comme la partie basse des chargements sismiques.

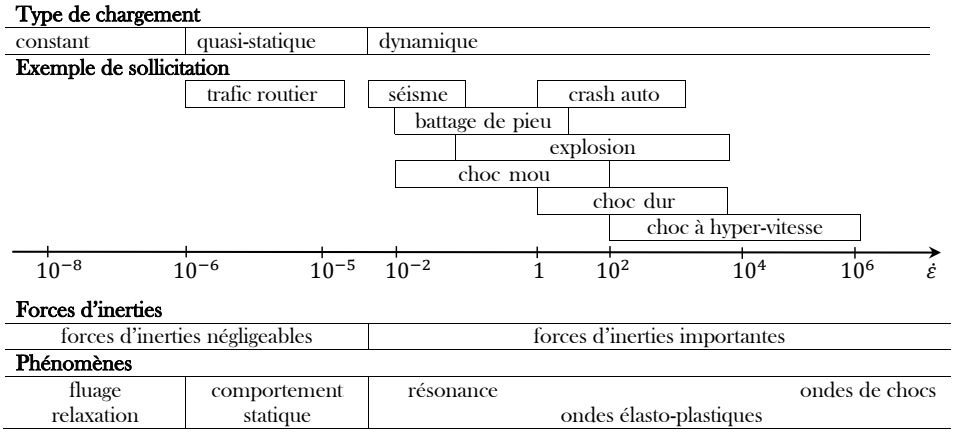


FIGURE 1.8: Classification des domaines de la dynamique ([Toutlemonde, 1995]).

Ce paragraphe nous a amené à caractériser le domaine de la dynamique excité lors de ce cas de charge. L'impact d'avion est ainsi un phénomène de dynamique rapide où les forces d'inerties sont loin d'être négligeables. Nous avons également vu que les impacts d'avion pouvaient être classés comme des chocs dits mous. Dans notre analyse de ce chargement, il est important de comprendre les différents phénomènes d'endommagement de la structure lorsqu'un avion l'impacte.

1.3 Nature des phénomènes induits, locaux et globaux

Dans les dépouillements des différents essais d'impact présentés dans la Figure 1.7, il a pu être remarqué que, indépendamment de la nature du choc, les phénomènes induits peuvent être classés suivant deux échelles : l'aspect endommagé de la cible localisé autour de la zone d'impact dans un rayon plus ou moins large suivant la sévérité du choc, et l'aspect global des vibrations se propageant dans la partie de la cible non endommagée. Les phénomènes liés à ces deux aspects seront exposés dans ce paragraphe.

1.3.1 Phénoménologie locale des impacts mous

Dans leur conception certaines structures en béton sont dimensionnées de manière à résister à des cas de charges impliquant une énergie cinétique importante. Sous ces chargements, la réponse de la structure peut être décomposée en une réponse dite globale, principalement engendrée par les modes propres de vibrations de la structure, et une réponse à l'échelle locale. L'impact d'avion est un phénomène dont l'endommagement de la structure est localisé autour de la zone de choc. Selon [Degen, 1980], l'endommagement est essentiellement lié aux modes de cisaillement et de flexion induits par l'impact. Cet endommagement intervient lorsque la capacité d'énergie potentielle de déformation est inférieure à l'énergie d'impact du projectile. Les phénomènes de dégradation de la cible sont générés par la propagation des ondes élastiques dues au choc.

Même si la différence entre chocs mous et durs peut être définie simplement, les différences en termes de phénomènes induits ne sont pas si nettes. Les essais de 2010 réalisés en Finlande par VTT dans le cadre du benchmark international IRIS, [IRIS, 2010], permettent de comparer ces deux catégories de chocs. Ces essais d'impact de missiles sur des dalles en béton armé montrent que suivant les configurations prises en compte, il est possible d'atteindre globalement soit une flexion de la cible, soit sa perforation. Dans la suite nous étudierons exclusivement les impacts mous comme cela est globalement le cas lors d'un impact d'avion, néanmoins, lorsqu'on est confronté à un choc dur, on peut dénombrer quatre phénomènes majeurs. Ces phénomènes décrits dans [Kennedy, 1976] sont fonction de la vitesse de l'impacteur ainsi que de l'épaisseur de la cible. On retrouve ainsi : la cratérisation (formation d'un cratère plus large que le projectile et générant un certain nombre d'écailles pouvant induire une éjection de morceaux sur la face avant de la cible), l'écaillage (éjection de morceaux de matériau provenant de la face arrière), la pénétration (endommagement de la cible sous le nez du projectile) et la perforation. La pénétration est observable quelque soit l'épaisseur de la cible impactée. Cette pénétration ([Buzaud, 1997] et [Vu, 2007]) peut alors déboucher sur la perforation de la cible suivant plusieurs paramètres comme la vitesse d'impact, l'épaisseur de la cible ou encore la résistance caractéristique de la cible en cisaillement. Au niveau industriel, le dimensionnement des structures soumises à un choc dur est mené au travers de méthodes empiriques définies à partir de résultats expérimentaux ([Gueraud *et al.*, 1977], [Fiquet et Dacquet, 1977] et [Goldstein *et al.*, 1977]) et en calculant les épaisseurs de juste écaillage ou de juste perforation. Les campagnes d'essai menées ont alors permis de relier statistiquement les paramètres des projectiles et des cibles aux phénomènes observés ([Yankelevsky, 1997]).

Les observations expérimentales lors d'un choc mou montrent que la phénoménologie de ce type d'impact est différente. On y retrouve bien sûr des phénomènes d'écaillage, de cratérisation et voire même de perforation mais intervenant de manière différente. Pour revenir à l'impact d'avion qui nous intéresse plus particulièrement, au-delà des phénomènes de chocs durs localisés générés par les réacteurs, ce type d'impact engendre globalement un choc mou à la fois sur une surface plus importante et également sur un temps plus long que les phénomènes de chocs durs. Dans le paragraphe suivant, on s'attachera à définir et expliquer les modes de rupture de la cible sous impact mou ainsi que les phénomènes mis en jeu.

1.3.1.1 Processus de rupture sous impact mou

Les nombreuses campagnes expérimentales de tirs de projectile sur des dalles cibles en béton armé ont permis de conduire à une même conclusion : la perforation suit un processus bien défini passant par la formation suivie du détachement d'une partie de la cible en forme de cône. Les essais Meppen ([Nachtsheim *et al.*, 1984]), tirant leur nom de la ville d'Allemagne de l'Ouest où ils furent lancés entre la fin des années 1970 et le début des années 1980, n'ont pas eu l'ampleur quantitative des essais CEA-EDF de 1974 comportant près de 90 tirs ou encore de ceux de Sugano en association avec le laboratoire SANDIA d'Albuquerque au Nouveau-Mexique composé de 75 tirs dont 1 impact d'avion

réel. Les essais Meppen ne comportent quant à eux "que" 21 tirs. Néanmoins, l'instrumentation soigneuse des dalles et le dépouillement rigoureux des résultats ont permis de les rendre essentiels à la compréhension des phénomènes induits par un choc mou. On y retrouve entre autres, comme on peut le voir sur la Figure 1.9, l'observation en coupe des dalles permettant ainsi l'analyse du réseau de fissures.

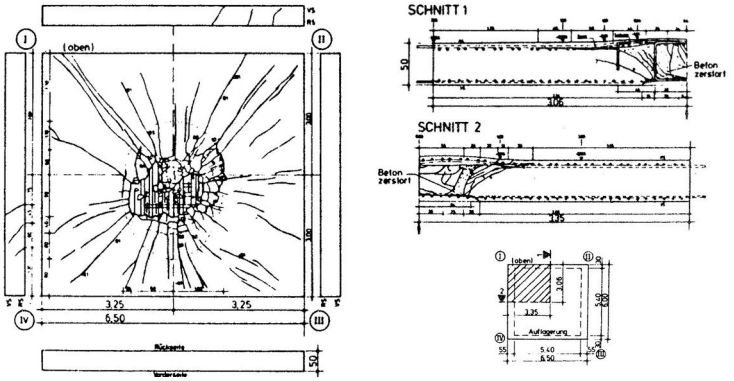


FIGURE 1.9: Face arrière et coupe d'une dalle après impact ([Jonas *et al.*, 1982]).

En analysant la dalle impactée sur la Figure 1.9, on peut voir sur la face opposée à l'impact apparaitre certains phénomènes :

- une fissuration de type radiale débouchant sur les extrémités de la dalle,
- un réseau de fissures autour de la zone centrale,
- et l'écaillage dans cette zone centrale.

Les coupes de la dalle permettent de retrouver :

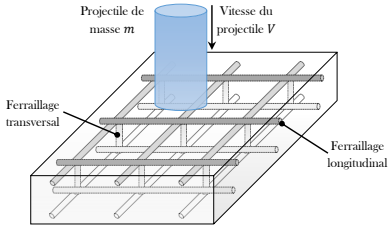
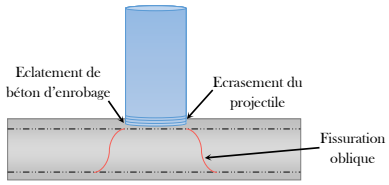
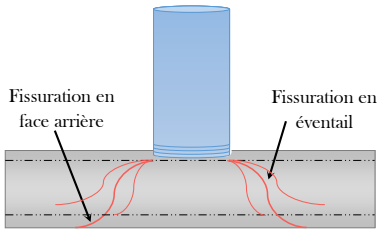
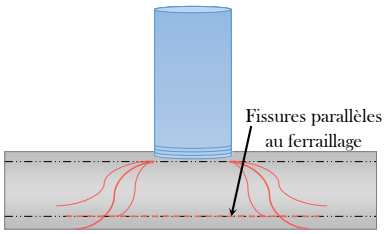
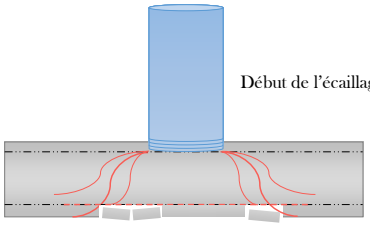
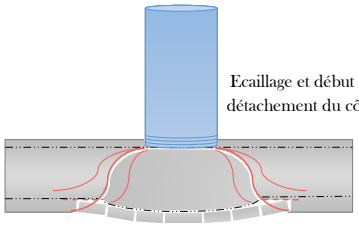
- une fissuration oblique, suivant une inclinaison plus ou moins importante suivant la distance avec le centre de l'impact, bornant ainsi un cône. On peut remarquer également que certaines de ces fissures suivent le ferraillage longitudinal arrière,
- une dégradation du béton à l'intérieur de ce cône,
- un enfoncement de la dalle et un éclatement du béton sur la zone d'impact en face avant, pouvant être relié à la cratérisation de la dalle.

Les dalles ayant subi un endommagement plus important permettent de visualiser :

- un déplacement important du cône,
- une rupture des aciers longitudinaux des faces avant et arrière et des aciers transversaux.

Le classement de la succession des évènements réalisé dans [Jonas *et al.*, 1982], [Nachtsheim *et al.*, 1984] et [Li *et al.*, 2005] permet d'établir un scénario de rupture en perforation des cibles. La démarche est d'associer les phénomènes observés systématiquement ensemble et d'établir des correspondances en fonction des niveaux de dégradation de la cible. Par exemple, le cône de fissuration est obtenu pour chacun des essais. L'écaillage quant à lui intervient toujours lorsqu'il y a association des fissures obliques et du réseau de fissuration en mailles débouchant sur la face arrière. De la même façon, il y a rupture des aciers longitudinaux de la face arrière lorsqu'on observe un important déplacement

du cône de béton. Par contre d'autres essais prouvent que l'inverse n'est pas vrai. Ainsi le scénario d'endommagement a pu être établi et associé au niveau d'endommagement final de chaque essai. De là un ordre événementiel bien défini se dégage et permet d'aboutir à un scénario de perforation se décomposant en huit étapes schématisées dans le Tableau 1.4 :

1. Avant contact le projectile arrive sur la cible avec une vitesse initiale.	2. Au début du choc, formation d'une fissuration oblique formant un cône dans l'épaisseur de la dalle.
	
3. Développement de la fissuration oblique ayant diverses inclinaisons. Certaines de ces fissures débouchent sur la face extrados.	4. Fissuration le long de l'interface acier-béton du ferraillage longitudinal extrados.
	
5. Formation d'écailles du béton en couverture qui finissent par se détacher de la dalle.	6. Désolidarisation du cône, délimité par la fissure oblique principale, et décollement d'écailles de béton.
	

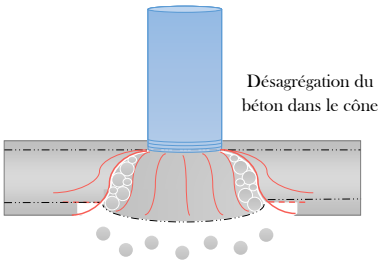
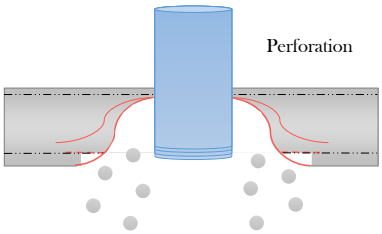
7. Destruction du béton à l'intérieur du cône. Les aciers longitudinaux arrière forment encore un filet retenant le cône.	8. Dissociation complète du cône, rupture des aciers transverses et du filet d'aciers longitudinaux arrière. Le projectile traverse alors la cible, ce qui conduit à la perforation de la dalle.
	

TABLE 1.4: Scénario de perforation d'après les essais Meppen [Jonas *et al.*, 1982].

En considérant que l'écaillage est un effet connexe, la phénoménologie de perforation sous choc mou nous conduit à réduire notre scénario en trois étapes : formation du cône, déplacement du cône et rupture des aciers reliant encore le cône permettant la désolidarisation du cône. En conclusion nous pouvons dire que le mode de rupture en cône caractérise la perforation lors d'un impact mou. Le Comité Européen du Béton dans [CEB, 1988] arrive à la même conclusion. On peut également utiliser les essais Meppen afin de confirmer que ce mode de rupture ne caractérise pas les chocs durs. En effet l'essai II-1, à la frontière entre un choc dur et mou selon la classification, présente un cône ayant une forme cylindrique. Les vues en coupes des dalles des essais II-9, II-4 et II-6 montrent que plus la vitesse est importante, plus on se rapproche d'un choc dur et moins les fissures sont obliques. En corrélation avec cette observation, les essais CEA-EDF ([Berriaud *et al.*, 1978]), Sugano ([Sugano *et al.*, 1993b]), Kojima ([Kojima, 1991]) ou encore Ohno ([Shirai *et al.*, 1997]) font état de la formation automatique d'un cône de perforation. On peut donc en conclure que le cône de perforation est le mode de rupture caractéristique des chocs mous.

Les essais Meppen nous ont permis d'établir que la présence d'un cône de perforation caractérise le mode de rupture sous choc mou. Ils ont également permis de définir le processus de perforation commençant par la formation d'une fissuration oblique et terminant par la rupture des aciers longitudinaux extrados ne retenant plus le cône de béton formé. Pour poursuivre dans notre compréhension de cette phénoménologie des chocs mous, l'étape suivante nous amène à définir l'origine de ce cône de perforation ainsi que de l'écaillage.

1.3.1.2 Analyse de ces phénomènes induits dans la zone d'impact

1.3.1.2.1 Origine du cône de cisaillement

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le premier phénomène à entrer en jeu est la propagation de fissures obliques dans l'épaisseur de la cible. L'expérimentation menée à l'université Heriot-Watt, à Edimbourg en Ecosse, et présentée dans [May *et al.*, 2005] et [May *et al.*, 2006], a permis de suivre l'évolution de cette fissuration au travers d'un impact sur une poutre de 20 *cm* d'épaisseur filmée à l'aide d'une caméra ultra-rapide à 4500 images par secondes. Dans ces essais, le projectile en chute libre impacte une poutre en béton armé de portée de 2,6 *m* simplement appuyée avec une force de 0,25 *MN* exercée pendant près de 10 *ms*. L'évolution de cette fissuration oblique dans la poutre est présentée dans la Figure 1.10.

Les premiers phénomènes à être observables sont la création d'une fissure verticale au droit de l'impact sur la face extrados de la poutre et d'une fissuration oblique à mi épaisseur de part et d'autres de l'axe d'impact. Ces fissures se propagent après un premier aller-retour de l'onde de choc initiale dans l'épaisseur. Cette onde de choc de compression traverse la poutre en 0,05 *ms*. Suite à cela la fissuration en cône s'étend progressivement vers les extrémités de la poutre. Un cône s'initie alors, délimité par une fissure oblique qui s'ouvre davantage que les autres. Le dernier phénomène généré est alors l'écaillage se produisant sur la face inférieure de la poutre.

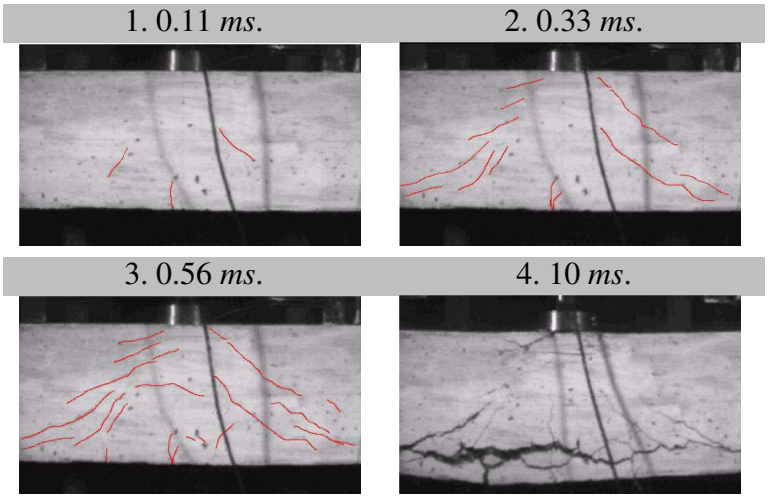


FIGURE 1.10: Evolution de la fissuration et formation du cône de cisaillement dans une poutre impactée [May *et al.*, 2005] et [May *et al.*, 2006].

Cette étude a permis de souligner deux points. Tout d'abord le cône de cisaillement apparaît à la suite d'une fissuration oblique s'initiant à mi-épaisseur de la cible après un temps correspondant à un aller-retour de l'onde de choc dans l'épaisseur et se propageant ensuite vers les extrémités. La seconde observation concerne l'écaillage. Ici on peut voir

que l'écaillage s'amorce en fin d'impact et non pas à la suite de la première réflexion de l'onde initiale de compression sur la face arrière de la cible.

Afin de mieux comprendre la propagation de la fissuration oblique, il est nécessaire d'étudier la diffusion des ondes de chocs au travers du matériau. Dans le domaine élastique et sous la condition que les appuis soient suffisamment éloignés, il est possible de distinguer chronologiquement trois types d'ondes (voir la Figure 1.11) : les ondes de compression dans l'épaisseur, les ondes de compression de membrane et les ondes de flexion et d'effort tranchant.

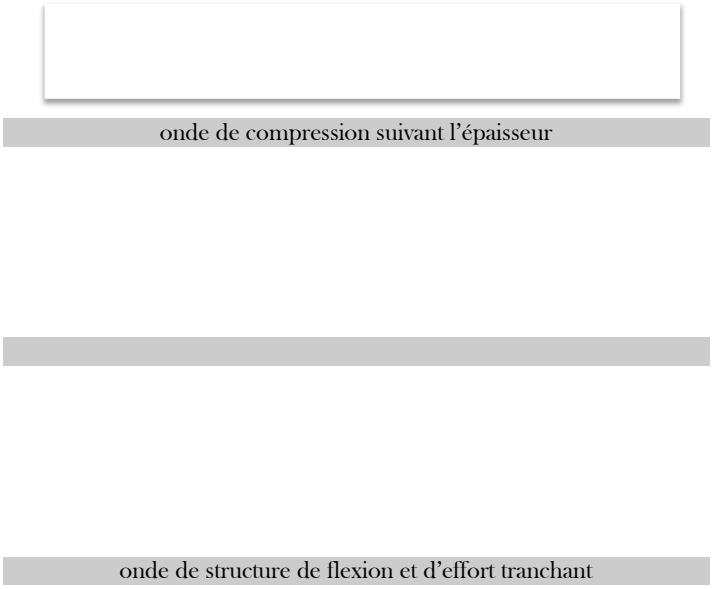


FIGURE 1.11: Expansion des ondes dans une poutre.

Dans un premier temps, l'impact génère une onde de compression se propageant dans l'épaisseur de la cible, suivant ici la direction z. Cette onde se disperse dans l'épaisseur de la cible jusqu'à atteindre le bord libre extrados pour s'y réfléchir. L'effet de Poisson produit à partir de cette onde de compression une faible onde membranaire de structure se propageant dans le plan moyen X de la cible et régie par l'équation d'équilibre dynamique suivante :

$$E\frac{\partial^2 u_x}{\partial X^2} - \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = f_x(X,t) \tag{1.3}$$

avec

Paramètres	Sens physique	Unité
E	module d'Young de la cible	Pa
ρ	masse volumique de la cible	$kg.m^{-3}$
u_x	déplacement horizontal (selon x)	m
f_x	chargement suivant l'axe x	N

TABLE 1.5: Paramètres des ondes de membrane.

La flexion locale au droit du choc crée des ondes de flexion et d'effort tranchant régies par :

$$EI\frac{\partial^4 u_z}{\partial X^4} - \rho S\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = f_z(X,t) \tag{1.4}$$

avec

Paramètres	Sens physique	Unité
I	inertie de la section de la cible	$kg.m^{-2}$
S	aire de la section de la cible	m^2
u_z	déplacement transversal (selon z)	m
f_z	chargement suivant l'axe z	N

TABLE 1.6: Paramètres des ondes de flexion.

Les ondes de flexion s'atténuent dans la structure, elles sont alors dites dispersives. Le long de la structure ces ondes subissent des changements de signe associés à une rotation du repère principal des contraintes. On observe alors un cisaillement maximal à mi-hauteur de la section. La répartition des contraintes due à ce dernier type d'onde de structure nous permet de conforter les observations faites expérimentalement avançant que la fissuration oblique s'initie à mi-épaisseur de la cible et se propage en forme de cône vers la face inférieure. Le cône de béton, aussi appelé cône de cisaillement, est ainsi produit par les ondes de structure de flexion. En 1982, Zukas émet le constat dans [Zukas *et al.*, 1982] que plus la vitesse de choc est lente, plus les phénomènes de pénétration et de perforation sont liés à la déformation globale de la structure impactée. Or ici le cône se forme avant que les ondes n'atteignent les appuis. Il s'agit d'une réponse locale déterminée en perforation par la nature de la cible, notamment au niveau dimensionnel.

Dans les essais effectués à l'université d'Edimbourg, le type de choc n'est pas celui d'un choc mou, mais le mode de rupture correspond à ce dernier. Ici le projectile ne s'écrase pas et un rebond a été observé. En effet, pour observer ce mode de ruine en cône, il est seulement nécessaire de s'éloigner des chocs durs. Il faut que le matériau constituant la cible soit capable de résister à la contrainte dynamique de l'impacteur afin d'observer les ondes de structures (voir [Dinic et Perry, 1990]). Les chocs avec rebond peuvent alors

être vus comme des chocs mous où l'énergie cinétique initiale du projectile est trop faible pour que celui-ci puisse s'écraser.

1.3.1.2.2 Origine de l'écaillage

En théorie, il est admis que l'écaillage provient de la réflexion de l'onde de choc sur la surface extrados de la cible. L'explication donnée dans [Suffis, 2004] énonce qu'une zone de la cible est soumise à de la traction. Cette zone est générée lorsque l'onde incidente de compression entrecroise l'onde réfléchie. L'écaillage intervient alors si le matériau constituant la cible a une résistance en traction plus faible qu'en compression (voir la Figure 1.12).

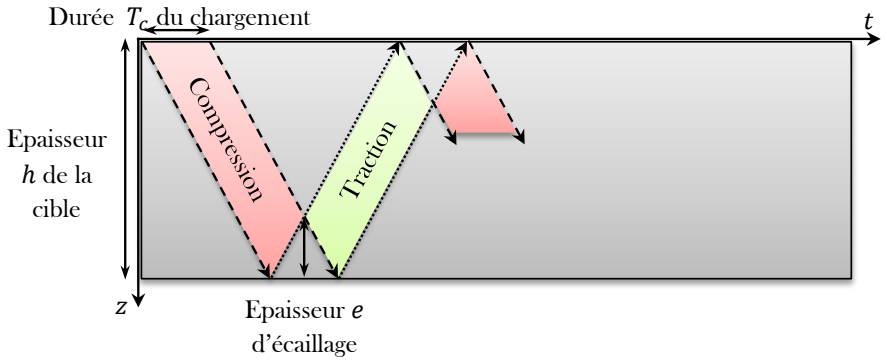


FIGURE 1.12: Diagramme de Lagrange pour un matériau élastique.

Une des conditions pour qu'il y ait un endommagement en écaillage est que :

$$e < h \tag{1.5}$$

où h est l'épaisseur de la cible et e l'épaisseur de l'écaillage. Cette condition peut également s'écrire de la façon suivante :

$$T_c < 2h\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{1.6}$$

avec

Paramètres	Sens physique	Unité
E	module d'Young de la cible	Pa
ρ	masse volumique de la cible	$kg.m^{-3}$
T_c	durée du chargement	s

TABLE 1.7: Paramètres d'écaillage.

Afin de vérifier que l'écaillage provient bien du croisement d'ondes incidentes et d'ondes réfléchies, il est possible de vérifier de manière analytique, au travers de l'essai de l'université d'Edimbourg décrit dans [May *et al.*, 2005] et [May *et al.*, 2006], la condition sur le temps de chargement que nous venons d'énoncer. Dans cet essai (où E = 35000 MPa, h = 0,2 m, ρ = 2500 kg/m) nous obtenons que le temps de chargement doit être inférieur à 0,1 ms pour qu'il y ait écaillage, ce qui ne semble pas être le cas. De manière générale, dans le cas de choc mou où la durée d'impact s'étend sur plusieurs dizaines de millisecondes, la condition d'écaillage définie par l'intersection des ondes incidentes et réfléchies n'est pas vérifiée. Il en découle donc que l'écaillage ne prend pas son origine dans le croisement de ces deux types d'ondes. Il semblerait que cet état d'endommagement soit plutôt une conséquence de la multifissuration engendrée par les contraintes d'effort tranchant et de flexion dans la cible. Cela expliquerait donc que l'écaillage se situe au niveau de l'interface entre les aciers longitudinaux de la face extrados et le béton, et qu'il n'intervient qu'après la fissuration oblique.

1.3.1.2.3 Modes de rupture de la cible

Les essais Meppen, bien que complets, ne permettent pas de souligner les différents modes de rupture possible de la cible. En effet ces essais n'ont fait intervenir que des ruptures en cisaillement. Néanmoins comme il a été montré dans [Brandes *et al.*, 1979] un mode de rupture en flexion doit également être considéré (voir la Figure 1.13).

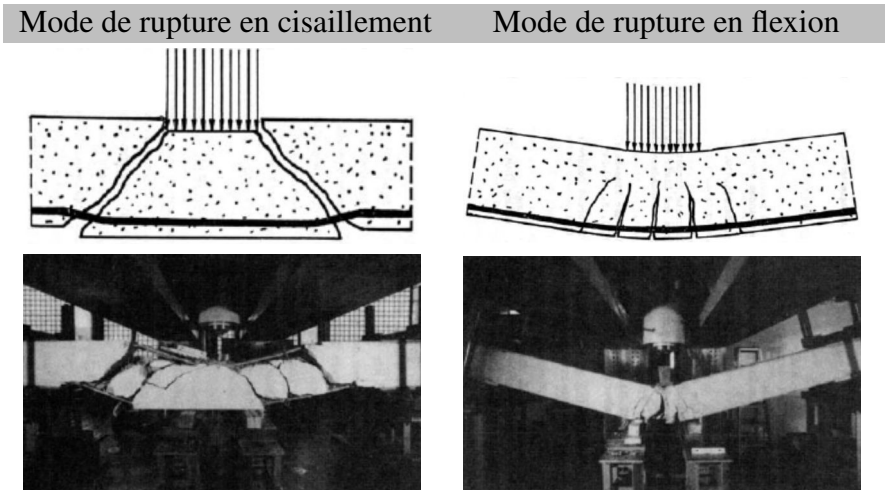
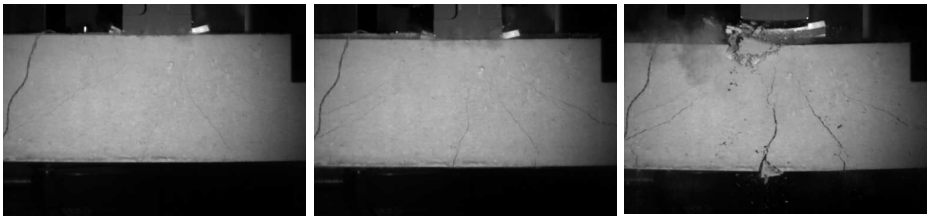


FIGURE 1.13: Modes de rupture dynamique d'une poutre [Brandes *et al.*, 1979].

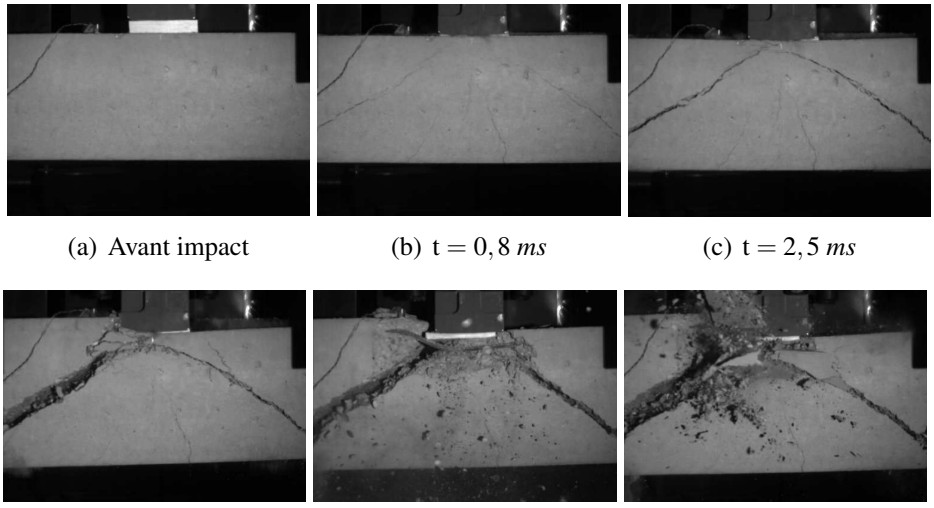
Dans [Gatuingt, 2009] et [Chambart, 2009], quatre essais d'impact sur poutres ont été réalisés. Le projectile utilisé est hémisphérique de masse 100 kg et de vitesse d'impact 8,43 m/s. Les quatre poutres ont la même section et le même ferraillage longitudinal. Dans ces essais, deux longueurs de poutre ont été testées. On observe selon le renfort, une rupture en flexion (voir la Figure 1.14) et une rupture par cône de cisaillement pour l'unique poutre sans cadres de ferraillage transversal (voir la Figure 1.15).



(a) t = 0,3 *ms* (b) t = 2,8 *ms* (c) t = 37,4 *ms*

FIGURE 1.14: Evolution de la dégradation en flexion d'une poutre d'après [Gatuingt, 2009].

On peut observer sur la Figure 1.14 l'apparition simultanée de plusieurs fissures de flexion (une fissure verticale au milieu de la poutre et des fissures de plus en plus inclinées à mesure que l'on s'éloigne du milieu). Avec le temps, ces fissures s'ouvrent mais aucune nouvelle fissure n'apparaît. Au moment du rebond (t = 37,4 *ms*) on remarque une forte dégradation locale du béton sous l'impact. Le post-traitement de ces essais par la corrélation d'images ([Hild et Roux, 2008]) permet de distinguer l'apparition rapide d'un cône de déplacements homogènes dont le déplacement est plus important et qui a tendance à vouloir se détacher. Il est probable que ce sont les armatures transversales qui empêchent son éjection. De plus, les fissures de flexion inclinées observées sur la Figure 1.14 ne correspondent pas aux limites de ce cône. Il semble donc que deux mécanismes entrent en compétition. La flexion l'emporte finalement car le chargement appliqué n'est pas suffisant pour rompre les cadres ou les plastifier.



(a) Avant impact (b) t = 0,8 *ms* (c) t = 2,5 *ms*

(d) t = 7,3 *ms* (e) t = 35,6 *ms* (f) t = 475,6 *ms*

FIGURE 1.15: Evolution de la dégradation en cisaillement d'une poutre d'après [Gatuingt, 2009].

La poutre sans cadre rompt du fait de la formation, sous la zone d'impact, d'un cône

de béton qui se détache et dont le déplacement provoque la plastification des armatures.

Pour l'impact sur la poutre (rupture en flexion), on a pu observer la création d'un cône de déplacement uniforme, qui ressemble au cône qui se détache lors de la rupture en cisaillement. Nous avons ainsi deux modes de rupture qui entrent en compétition. [Chambart, 2009] montre dans sa comparaison des résultats que l'élément qui détermine le mode de ruine est la présence ou non d'armatures d'effort tranchant. Les essais de tirs de projectiles sur des dalles en béton armé [IRIS, 2010] permettent d'appuyer cette conclusion. En effet la dalle présentant un ferraillage à l'effort tranchant amène à la ruine selon un faciès de rupture en flexion.

L'analyse de la phénoménologie intervenant lors de chocs mous présentée dans les paragraphes précédents doit être parachevée de quelques remarques complémentaires.

1.3.1.2.4 Remarques complémentaires et conclusions

Jusqu'à présent nous avons vu que le premier phénomène à être généré à la suite d'un impact est la fissuration oblique. Certaines recherches comme [Burlion, 1997] tendent à montrer que certains phénomènes peuvent être générés tels que la compactation dynamique ou encore l'éclatement du béton sur la surface intrados de la cible.

Une autre remarque peut également être formulée au sujet de la dissipation d'énergie. En effet, même si l'endommagement global de la cible peut être défini, il faut par ailleurs s'attendre à avoir d'autres phénomènes locaux pouvant être responsables d'une dissipation de l'énergie. Par exemple, dans [Delhomme *et al.*, 2005], il est montré que la dissipation d'énergie provoquée par la compactation du béton est de l'ordre de 5 % de l'énergie incidente. Au travers de ce paragraphe, nous avons montré que lors d'un choc défini comme mou un processus de perforation est respecté et caractérisé principalement par la formation d'un cône de cisaillement. Ce cône est la conséquence d'une fissuration liée aux ondes de structures d'effort tranchant. D'autres phénomènes peuvent néanmoins se produire :

- tout d'abord le mode de rupture en flexion, se différentiant de la perforation et du cisaillement par son faciès de fissuration ;
- l'écaillage, qui est le résultat de la multi-fissuration produite par les ondes de structures. Ces fissures se développent le long de l'interface acier-béton. C'est donc l'écaillage du béton correspondant au béton d'enrobage ;
- la désagrégation du béton se retrouve dans deux zones de la cible, dans un premier temps au niveau la surface d'impact, et dans un second temps à l'intérieur du cône de cisaillement ;
- la dernière étape essentielle dans la perforation de la cible est la plastification suivie de la rupture des aciers transversaux et longitudinaux. En effet les aciers longitudinaux situés au niveau de la face extrados jouent un rôle de filet retenant le cône de cisaillement. Lorsqu'il y a rupture de ces aciers, le cône est alors éjecté. La conséquence directe est donc la perforation de la cible.

Comme vu dans ce paragraphe, les différents phénomènes localisés d'endommagement de la cible suite à un impact mou sont expliqués par la propagation des ondes de

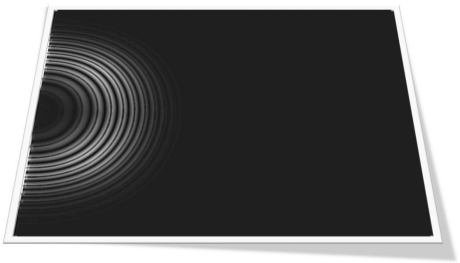
choc au travers de la zone d'impact. Toutefois même si la zone non-linéaire est localisée, les vibrations induites lors du choc se propagent dans le reste de la structure, pouvant ainsi affecter les équipements se trouvant à l'intérieur. Le paragraphe suivant présente cette phénoménologie de propagation d'ondes dans la partie linéaire de la structure.

1.3.2 Analyse de la propagation des ondes dans la structure complète

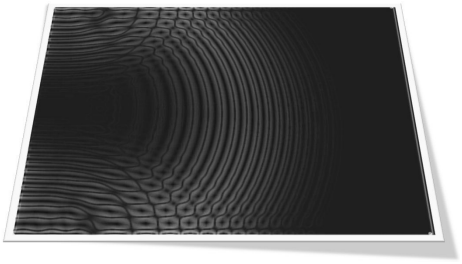
L'étude de l'ébranlement à la suite d'un impact se ramène à une étude de vibrations dans les structures. Lorsqu'une structure est soumise à un choc mécanique, comme c'est le cas dès qu'un projectile impacte une structure, plusieurs régimes de vibrations peuvent être distingués en fonction de l'aspect du champ de déplacement observé. Pour illustrer cela, nous pouvons considérer l'exemple d'une plaque sur laquelle un choc ponctuel est appliqué. Ainsi quatre régimes de vibrations, dont les durées sont dépendantes des caractéristiques matérielles et géométriques de la structure, peuvent être distingués (voir la Figure 1.16).



1) Dans un temps très court après l'impact.



2) Dans un temps court après l'impact.



3) Dans un temps moyen après l'impact.



4) Dans un temps long après l'impact.

FIGURE 1.16: Régimes de vibrations à la suite d'un choc mécanique.

1) Très peu de temps après l'impact, un premier régime de vibration est observé. Celui-ci est caractérisé par la propagation d'une onde dans un espace semi-infini 3-D (l'onde n'a encore subi aucune réflexion ni sur les bords de la structure, ni même dans l'épaisseur).
2) Peu de temps après le choc, le système de vibration est encore caractérisé par un phénomène de propagation d'onde. Les ondes sont désormais guidées par l'épaisseur de la plaque. Ce phénomène est généralement observable sur des structures

ayant une ou deux dimensions inférieures aux autres telles que les poutres, plaques et coques. Dans ce cas, la structure est souvent appelée "guide d'onde".

3) Dans un temps moyen après le choc, défini en fonction de la taille de la plaque, les ondes se propagent jusqu'aux bords de celle-ci, ce qui conduit alors à des phénomènes de réflexion d'onde. Les ondes réfléchies interfèrent avec l'onde directe, ce qui donne lieu à des ondes localisées dans certaines zones de la plaque.
4) Enfin, longtemps après le début de l'impact, les ondes se sont maintenant réfléchies plusieurs fois sur les bords de la plaque. Ces ondes interfèrent alors les unes avec les autres sur la totalité de la plaque.

Cela étant défini, il est utile de replacer le cas de charge de la chute d'avion vis-à-vis des chargements sismiques en termes de vibrations induites. En effet, dans ces deux cas de charge, des vibrations se propagent dans la structure pouvant potentiellement endommager les équipements.

Pour l'aviation légère de référence appliquée pour le dimensionnement des bâtiments réacteurs, le niveau des accélérations induites dans toute la structure par l'impact est largement couvert par celui du séisme de dimensionnement.

Cette conclusion n'est toutefois pas transposable à l'impact éventuel d'avions plus énergétiques, le niveau des accélérations dans les structures internes du bâtiment réacteur peut ainsi être plus élevé que pour le séisme. Le rapport de L'Huby et Barbe de 1992 pour les journées de la SFEN (Société Française d'Energie Nucléaire) ([L'Huby et Barbe, 1992]), centré sur le cas de l'impact d'un avion léger et militaire, évalue l'accélération maximale à 3,4 g à 7 Hz dans les parties hautes des structures internes pour le séisme, elle peut également atteindre 8,2 g à 60 Hz par exemple, au niveau des générateurs de vapeur, pour l'impact d'un Rafale à une vitesse de 220 m/s. Les fréquences correspondant aux pics des spectres de réponse [1] sont plus élevées pour l'impact d'avion que pour le séisme (3 à 7 Hz pour le séisme, plus de 50 Hz pour les impacts d'avions militaires à 150 m/s ou plus).

Ceci implique donc que, en cas d'impact d'avion militaire à vitesse élevée, le comportement des différents matériels accrochés à la structure de génie civil sera différent de son comportement sous séisme. Les équipements sensibles aux vibrations induites par une chute d'avion peuvent aussi être significativement différents de ceux sensibles aux sollicitations sismiques. Pour illustrer cela, la Figure 1.17 présente le spectre de réponse horizontal au niveau des pieds des générateurs de vapeur d'un REP 1300 MW (Réacteur à Eau Pressurisée), pour l'impact d'un Rafale à 220 m/s, et sa comparaison avec les enveloppes des spectres sismiques au même point (la sollicitation sismique est, dans cet exemple, représentative d'un site à sismicité modérée).

1. qui expriment la réponse d'un oscillateur, selon sa fréquence, en différents points de la structure ; ces spectres permettent de déterminer la réponse dynamique des divers matériels accrochés à la structure.

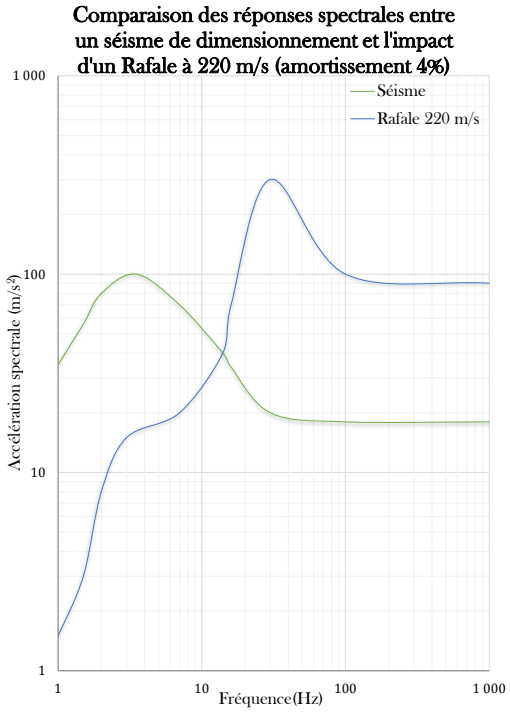


FIGURE 1.17: Spectres horizontaux au niveau des pieds de générateur de vapeur, séisme de dimensionnement et impact d'un Rafale à 220 m/s, [L'Huby et Barbe, 1992].

A partir de [EPRI, 2007], il est possible de comparer les spectres de réponse dus à la chute d'avion avec ceux observés pour des séismes proches et des sols très durs et peu altérés. En effet, la confrontation montre que si les niveaux d'accélérations ne sont pas du même ordre de grandeur, ces derniers ont un contenu fréquentiel plus élevé que le séisme de dimensionnement. De cette similitude avec un type de chargement sismique, on peut en déduire, comme décrit dans [IAEA, 2012], un critère de robustesse des équipements mécaniques internes basé sur le niveau de déplacement *SD* (Spectral Displacement) du spectre de réponse : $SD < 1mm$. [Vlaski, 2013] et [Hervé, 2014] proposent une extension à l'ensemble des catégories d'équipement en considérant que les vibrations ne sont pas transmises aux équipements dès lors que ce même critère est atteint. En effet, dans la littérature, il est considéré que les niveaux de pseudo déplacement, calculés à partir des spectres de réponse en accélération, ne seront pas nocifs pour les équipements si ils restent inférieurs à 1 *mm*. Les autorités américaines [NEI, 2013] placent quant à elles leur qualification des équipements suivant le niveau de la ZPA (Zero Period Acceleration).

Dans cette optique, il est ainsi nécessaire de bien caractériser et calculer les vibrations induites afin de spécifier au mieux les accélérations et déplacements résultants attendus au niveau des points d'ancrage des équipements. Il conviendra dans un deuxième temps de s'assurer que les matériels pourront subir sans dommage ces chargements, relativement élevés dans une gamme de fréquences différente de celle des séismes de dimensionnement.

1.3.3 Conclusions sur les phénomènes induits lors d'un choc mou

Dans le cadre de cette partie bibliographique, nous avons vu dans un premier temps que la caractérisation d'un impact sur une cible en béton n'était pas aisée. En effet, aussi bien du fait des différents comportements (dynamique, statique, compression, traction, etc...) de ce matériau hétérogène qu'est le béton, que des différents types de choc (mou, dur, élastique, avec rebond, etc...), l'étude de tels phénomènes demande à être appréhendée par différentes méthodes. Cela implique donc de déterminer en premier lieu le type de choc que l'on s'apprête à traiter. Le paragraphe 1.2.2 développé dans [Kœchlin, 2007] propose une méthode de caractérisation unifiée.

Le phénomène d'impact d'avion permet de resserrer légèrement le champ de possibilités. En effet, la chute d'avion doit être considérée comme un choc mou du fait notamment de la vitesse d'impact et de l'aspect massif de la structure impactée.

Au niveau de l'avion, deux types d'endommagement sont à prendre en compte dans une approche de premier ordre (voir Annexe A) : l'écrasement du fuselage et le broyage des ailes. Le reste de l'énergie cinétique peut ainsi être considéré comme étant transmis à la structure en particulier l'impact des moteurs.

Les phénomènes de dégradation de la cible sont engendrés par la propagation des ondes élastiques dues au choc. Une partie de ces ondes provoque alors un endommagement bien localisé autour de la zone d'impact. L'autre partie des ondes élastiques se propage dans l'ensemble restant non endommagé de la structure. Cette propagation correspond à l'ébranlement de la structure.

On peut en déduire que l'analyse de la chute d'avion sur un bâtiment peut être découplée, d'une part l'étude de la zone endommagée et donc non linéaire autour de l'aire d'impact de l'avion, et d'autre part l'étude des ondes d'ébranlement se propageant dans la partie restée linéaire de la structure. La propagation d'ondes dans la partie linéaire n'est en effet pas endommageante pour la structure en elle-même, néanmoins les vibrations induites peuvent engendrer des dysfonctionnements voire même la rupture de certains équipements nécessaires à l'arrêt et au maintien à l'état sûr d'une installation nucléaire. Il est donc important d'évaluer la manière dont le contenu fréquentiel est transféré et "filtré" dans la structure. Le projet IRIS 3, dont les essais seront lancés par VTT en Finlande en 2015 et où une structure est impactée par un projectile, s'inscrit dans ce sens. Un de ses objectifs est ainsi de quantifier expérimentalement les vibrations se propageant dans la maquette jusqu'à une masse fixée à celle-ci et simulant la présence d'un équipement. L'impact des différents types d'ancrages est étudié dans ces expériences.

Dans le paragraphe suivant, nous nous attarderons sur un état de l'art des méthodologies actuelles pour traiter la chute d'avion.

1.4 Démarches méthodologiques usuelles

L'étude en dynamique transitoire d'une structure, comme cela peut être le cas pour des problématiques d'impact d'avion sur une structure du génie civil, consiste à calculer la réponse soit directement dans le domaine temporel, soit en la reconstituant à partir d'un

calcul dans le domaine fréquentiel. L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur les méthodologies utilisées pour traiter la chute d'avion. Comme cela a pu être décrit tout au long du paragraphe 1.3, la chute d'avion amène à un endommagement localisé autour de la zone d'impact et à une propagation des vibrations induites dans le restant de la structure. Ces vibrations peuvent alors induire des niveaux d'accélérations non négligeables aux ancrages des équipements internes. Dans le paragraphe suivant, divisé en trois parties, nous étudierons les différentes modélisations possibles du chargement, les différentes approches de la zone d'impact et, pour finir, s'appuyant sur [Chevreuil, 2005] et [Riou, 2004], les méthodologies possibles mais non exhaustives pour analyser les vibrations induites. Cette dernière étape nous permettra de déterminer l'approche la plus efficace pour cette problématique. En effet les approches industrielles actuelles se heurtent à des limitations importantes en termes de coût de calcul lorsqu'elles sont utilisées pour simuler la réponse de bâtiments nucléaires complexes jusqu'à des fréquences de plus de 100 Hz. Des scénarios variables sont donc pris en compte de manière défavorable mais souvent en nombre limité.

1.4.1 Modélisation du chargement

Dans l'optique du calcul de chute d'avion, le chargement peut être défini de deux manières différentes, soit au travers d'un modèle généralement éléments finis de l'appareil, soit à partir d'un effort d'impact équivalent calculé analytiquement et appliqué sur la structure sur une surface donnée.

1.4.1.1 Modélisation réaliste de l'avion

La première approche bien que permettant une bonne représentativité du chargement présente de nombreux défauts. En effet, la modélisation de l'aéronef est coûteuse numériquement. De plus, la bonne représentation du chargement réel est entièrement liée à la finesse et la fidélité de la modélisation, souvent en éléments finis, qui est utilisée pour les calculs. L'approximation est ainsi en corrélation avec la discrétisation spatiale de l'avion. On notera néanmoins que cette approche permet de définir l'ensemble des éléments constituant l'appareil (fuselage et ailes souvent modélisés avec des éléments coques, moteurs et trains d'atterrissage modélisés à l'aide d'éléments solides, et kérosène modélisé au travers d'éléments discrets ou SPH, Smoothed Particle hydrodynamics) permettant ainsi de ne pas imposer a priori le type de choc. Bien que l'utilisation des éléments finis pour la description de l'avion semble la plus efficace notamment pour la représentation des différents modes de rupture locaux de l'appareil (Annexe A), certaines études comme celle menée pour U.S. Nuclear Regulatory Commission dans [Wilt *et al.*, 2011] emploie les SPH pour représenter l'intégralité d'un F-15 Eagle. Les SPH sont issus d'une méthode lagrangienne, et sont généralement utilisés pour simuler les flux de fluides. Cette approche bien que ne permettant pas de retranscrire l'endommagement local de l'avion semble toutefois permettre une bonne représentation de l'effort d'impact. Néanmoins, il est à noter que cette méthode n'est valable que si l'on considère l'écrasement complet de

l'avion contre la structure. L'étude réalisée dans [Lee *et al.*, 2014] pour la National Research Foundation (NRF) de Corée du Sud montre les différences pouvant résulter entre une modélisation de l'avion par une méthode FE (éléments finis), SPH ou mixte. De là, il apparait que la modélisation FE est la plus conservative et celle qui se rapproche le plus des résultats expérimentaux.

Pour la seconde approche, des efforts importants ont été dirigés vers la modélisation du signal d'impact équivalent d'un avion sur un bâtiment. On notera également l'utilisation intéressante dans [Hervé *et al.*, 2013] de l'effort d'impact équivalent dans le but de déterminer une modélisation générique de l'avion correspondant.

1.4.1.2 Méthode analytique de Riera

La méthodologie de Riera pour le calcul de l'effort d'impact est à la fois la plus ancienne et la plus couramment utilisée dans l'industrie pour représenter le chargement induit par une chute d'avion sur un bâtiment. Néanmoins les méthodes de Stevenson ([Stevenson, 1980]) et Wolf ([Wolf, 1978]) bien que non utilisées industriellement méritent tout de même de s'y intéresser. Elles seront présentées dans l'Annexe B.

L'approche de Riera [Riera, 1968] permet de définir l'effort d'impact équivalent d'un projectile, ou, dans notre cas, d'un avion sur une structure impactée. Cette méthode met en œuvre deux hypothèses importantes et non des moindres : le projectile s'écrase perpendiculairement à la cible et celle-ci est infiniment rigide. Ces hypothèses de calcul impliquent donc de se situer dans le cadre des chocs anélastiques mous (voir la Figure 1.18). L'approche de Riera a pu être validée par les essais de [Sugano *et al.*, 1993b] et des calculs dans [Wolf *et al.*, 1976]. Le paragraphe suivant et la Figure 1.18 décrivent donc la formulation de Riera.

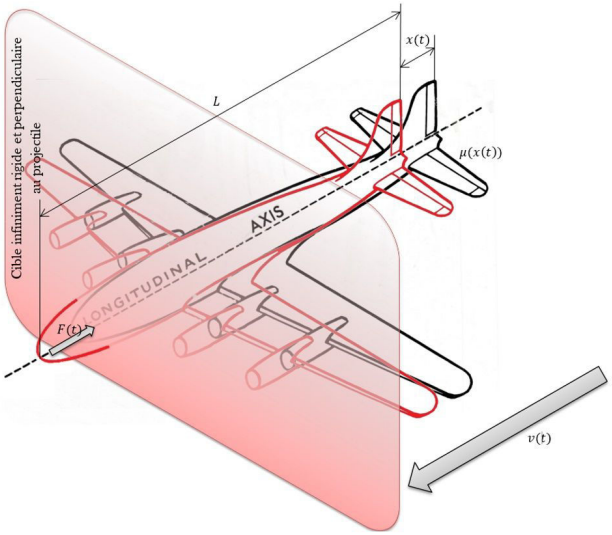


FIGURE 1.18: Modèle d'impact d'avion impactant une cible rigide suivant les hypothèses de Riera.

On s'intéresse à calculer l'effort d'impact d'un projectile défini par ses distributions de masse $\mu(X)$ et de force de flambage $P_f(X)$, avec X la position sur le projectile. Ce dernier impacte la cible rigide perpendiculairement avec une vitesse initiale $v(0)$. Dans son modèle, Riera décompose l'effort d'impact à partir du principe fondamental de la dynamique en deux termes venant du flambage et de l'effet inertiel dû à la masse et l'écrit donc de la manière suivante :

$$F(t) = P_f(x(t)) + \mu(x(t))v(t)^2 \tag{1.7}$$

avec

- $x(t)$ la distance du projectile écrasée, en partant de son point d'impact,
- $\mu(x(t))$ la masse par unité de longueur de la partie non détruite du projectile,
- $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ la vitesse de la partie non écrasée du projectile,
- $P_f(x(t))$ la force de flambage de la partie non détruite.

Etant donné que l'on se place sous choc mou, le système peut être découplé. Ainsi la réponse du projectile est indépendante de la réponse de la cible. Les équations non-linéaires pour $P_f(x(t))$ et $\mu(x(t))$ sont établies et des procédures numériques explicites sont adoptées pour les efforts appliqués à chaque instant de calcul. La décélération de la partie non détruite de masse $\mu(x(t))$ est posée dans l'équation (Equation 1.8) :

$$G_d = \ddot{x} = -\frac{P_f(x(t))_n}{\int_{(x(t))_n}^{L} \mu(x(t))dx(t)} \tag{1.8}$$

Le modèle de Riera permet d'avoir une formulation totalement explicite afin d'exprimer l'effort d'impact $F(t)$ à chaque pas de temps t.

Suite à cela, des formulations plus complètes de l'effort d'impact ont été publiées, telles que [Abbas *et al.*, 1995] ou encore [Sugano *et al.*, 1993b]. Les comparaisons de la méthode de Riera faites avec les essais de Sugano sur l'impact d'un Phantom F4 ont permis de démontrer l'importance de prendre en compte la masse effective de l'impact dans la force inertielle. Sugano relève alors la formulation suivante :

$$F(t) = P_f(x(t)) + \alpha\mu(x(t))v(t)^2 \tag{1.9}$$

où α est un coefficient dit de "masse effective à l'impact" compris entre 0,5 et 1. Les essais de Sugano l'ont identifié dans le cadre d'impact d'un avion militaire à 0,9.

Une seconde amélioration apportée est celle proposée par Abbas [Abbas *et al.*, 1995] et Sugano [Sugano *et al.*, 1993b] qui corrige la formulation de base afin de tenir compte du recul possible de la cible. Ainsi, la déformation du projectile $x_1(t)$ est toujours plus grande devant celle de la cible, mais cette dernière n'est plus considérée comme négligeable. On définit alors la force d'impact par :

$$F(t) = k_1 \left[x_1(t) + x_2(t)\right] \tag{1.10}$$

L'effort d'impact est alors calculé en résolvant un système masse-ressort couplé. Des comparaisons ont été faites entre le système masse-ressort et un modèle éléments finis

de la structure cible. Il en est ressorti que la force d'impact varie peu en fonction de la rigidité et donc du recul de la cible. En revanche l'énergie transmise à la structure impactée dépend de la raideur de la cible. La Figure 1.19 présente quelques exemples de forces d'impact équivalentes calculées via le modèle de Riera.

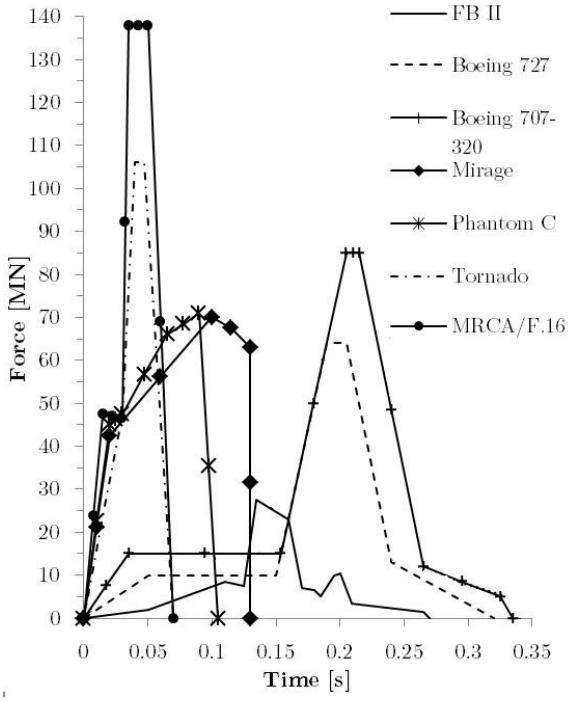


FIGURE 1.19: Quelques diagrammes force-temps, d'après [Bangash, 1993].

1.4.1.3 Conclusions sur la modélisation du chargement

Dans ce paragraphe, la modélisation de l'avion par éléments finis est apparue comme permettant de rester fidèle aux différentes natures de chocs se produisant lors de l'impact ; néanmoins cela demande une discrétisation fine et précise en termes de dimension et de loi de comportement des matériaux composant l'aéronef. Le coût numérique devient alors vite prohibitif pour éviter de fortes approximations liées à la modélisation.

Pour s'affranchir du modèle éléments finis de l'avion, des approches analytiques ont été mises en place visant ainsi à calculer un effort d'impact équivalent. Dans ce cadre, la méthode de Riera apparait comme étant la plus robuste et la plus simple à mettre en œuvre. En effet, elle permet de déterminer cet effort d'impact à partir de la distribution de masse et de l'effort de flambement. Cette approche est ainsi très efficace en terme de coût numérique, mais par ailleurs, ces méthodes de première approche ne prennent pas en compte les différents modes de rupture propres à l'appareil impactant la structure. Une des perspectives de ces méthodologies analytiques est donc d'y intégrer ces modes d'endommagement (broyage des ailes, écrasement du fuselage) présentés dans le paragraphe A avec pour objectif de réduire les conservatismes de la méthode classique de Riera. Mal-

gré ces manques, l'étude de la chute d'avion s'appuyant sur l'effort d'impact équivalent apparait comme étant l'approche la plus robuste. Le chargement décrit, l'étape suivante est le traitement de la zone de choc.

1.4.2 Traitement de la zone de choc

1.4.2.1 Méthodes analytiques de traitement des chocs mous

Dans la littérature, on peut classer les méthodes analytiques traitant des chocs en deux catégories.

En premier lieu, on peut retrouver les formules permettant de quantifier de manière prédictive certains phénomènes locaux, pouvant intervenir sur cible en béton armé, comme la pénétration avec la méthode McMahon, Meyers et Sen ou encore l'écaillage en suivant la méthode bayésienne de Rotz. Ces formules, répertoriées de manière non exhaustive dans [Bangash, 1993], découlent généralement de campagnes expérimentales.

En parallèle, il existe d'autres méthodes permettant de considérer le caractère plus global de la zone d'impact endommagée. L'une d'elles est la méthode développée dans [CEB, 1988] permettant un calcul simplifié du choc d'un avion sur un voile ou un plancher. Cette approche a trois degrés de liberté.

La modélisation est décrite par un modèle simplifié d'oscillateur élasto-plastique (voir la Figure 1.20) et repose sur deux hypothèses majeures :

- la structure est modélisable par trois masses, reliées entre elles par trois ressorts élasto-plastiques, munis d'amortissement,
- les lois de comportement des associations de matériaux acier et béton sont homogénéisées pour être adaptées en lois effort-déplacement aux ressorts modélisés sous forme de lois linéaires, bi-linéaires voire même "multi-linéaires".

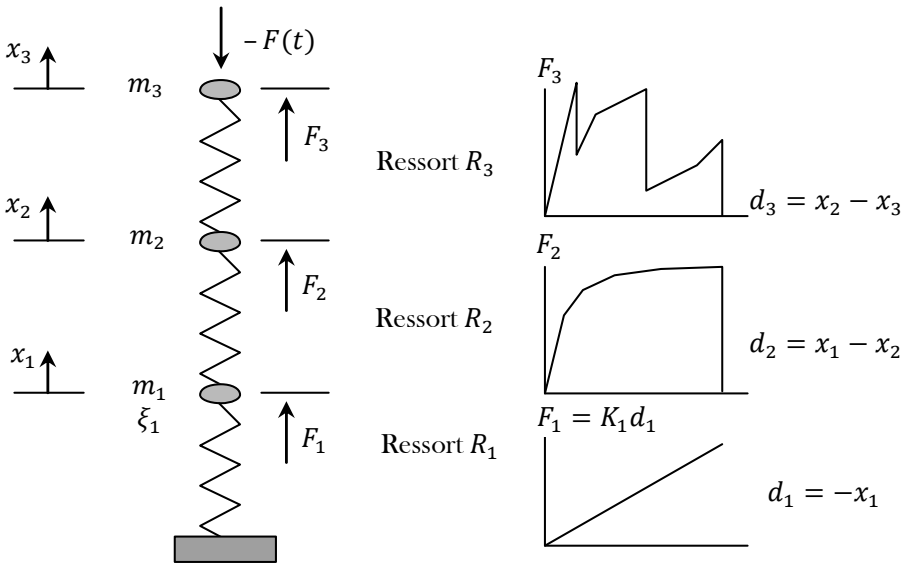


FIGURE 1.20: Méthode analytique CEB de calcul d'impact d'avion, d'après [CEB, 1988].

L'oscillateur comporte trois masses et trois ressorts représentant respectivement :

- la masse et la rigidité élasto-plastique (masse m_3 et ressort R_3) de la partie de la structure directement concernée par l'impact, sous la forme d'un cône de béton cisaillé. Le ressort R_3 correspond à la superposition des 3 contributions suivantes :
  - résistance du béton au poinçonnement,
  - résistance des armatures transversales,
  - résistance des armatures longitudinales en "filet".
- la masse et la rigidité élastique non linéaire (masse m_2 et ressort R_2) d'une zone de la structure qui est plastifiée en flexion sous l'effet de la force appliquée ;
- la masse et la rigidité du reste de la structure supposées demeurer dans le domaine élastique linéaire (masse m_1 et ressort R_1).

De plus, le comportement des oscillateurs prend en compte les hypothèses complémentaires suivantes :

- l'amortissement est pris en compte en ce qui concerne le ressort R_1 mais est négligé pour deux autres ressorts non linéaires ;
- le critère de rupture est intégré dans la loi de comportement des ressorts R_2 et R_3 ;
- les lois de comportement des ressorts R_2 et R_3 sont supposées symétriques (en cas de déplacements dans le sens opposé de l'impact) ;
- la loi de comportement du ressort R_3 est élasto-plastique pour la part due aux armatures transversales. Elle tient donc compte du retour élastique après plastification des épingles et du déplacement résiduel qui peut en découler. Les autres lois sont élastiques linéaires (R_1) ou non linéaires (R_2 et R_3 pour les parts dues au béton et aux armatures longitudinales).

Le système est ainsi soumis à un chargement $F(t)$ appliqué sur la masse m_3, correspon-

dant à la courbe d'effort d'écrasement sur cible rigide de l'avion. Le modèle permet de calculer l'effort vu par chacun des trois ressorts. Il permet également de vérifier la tenue du cône d'impact (non rupture des armatures longitudinales ou non rupture des armatures transversales) et de la paroi impactée.

Cette méthode "simplifiée" permet d'obtenir des résultats au niveau de la zone d'impact, cependant, de par ces nombreuses hypothèses fortes, elle n'autorise pas une application précise à la chute d'avion.

De manière plus générale l'ensemble de ces approches ne permettent pas une application dans un processus complet de chute d'avion. L'étude de la zone endommagée doit ainsi être effectuée au travers de méthodes numériques.

1.4.2.2 Méthodes numériques de traitement des impacts

Le traitement de la problématique d'impact peut être effectué en s'appuyant sur différents modèles de calculs en dynamique rapide. Aujourd'hui, deux types d'approches sont utilisées : les approches dites "continues" correspondant aux éléments finis et celles dites "discrètes". Le premier type d'approches est largement répandu et de nombreux modèles de comportement des matériaux ont été développés. Basée sur l'hypothèse des milieux continus elle peut néanmoins avoir des difficultés à traiter les fortes discontinuités pouvant apparaître lors d'un impact. Les méthodes discrètes, quant à elles, ne se fondent pas sur l'hypothèse d'un champ de déplacement continu. Elles sont ainsi de plus en plus utilisées dans le traitement des problèmes de dynamique rapide en particulier en cas d'érosion de l'impacteur ou de la cible, et projection d'éclats.

1.4.2.2.1 Méthode basée sur les éléments discrets

Les approches discrètes, comme la méthode des éléments discrets ([Cundall et Strack, 1979]) reposent sur une description du milieu en un réseau de points mobiles munis de masses associées et des géométries simples, par exemple des sphères. Les lois d'interactions entre les points dépendent du milieu modélisé (contact, loi cohésive, ...). Elles sont particulièrement adaptées aux milieux granulaires mais peuvent également être utilisées pour traiter des milieux continu ; l'apparition des discontinuités, fissuration par exemple, dans ces milieux est alors aisée à mettre en œuvre car il suffit de supprimer l'interaction entre les points concernés. A l'échelle macroscopique, une structure peut être supposée homogène et continue, mais son comportement à la rupture résulte de phénomènes discontinus. Dans de tels cas, les méthodes discrètes sont plus adéquates que les approches continues classiques pour modéliser et reproduire ces phénomènes ([Rousseau, 2009]).

Les approches par éléments discrets ont initialement été introduites dans [Cundall et Strack, 1979], pour les matériaux granulaires. Les développements qui ont suivi ont eu pour but d'adapter ce type de méthodes aux matériaux cohésifs et en particulier aux géomatériaux ([D'addetta *et al.*, 2001]).

Ces méthodes sont par ailleurs difficiles à mettre en œuvre pour traiter des structures de grande taille. En effet, pour prédire finement le comportement local, ces méthodes

doivent utiliser un nombre important d'éléments discrets ce qui conduit, à l'échelle de l'ouvrage, à un nombre excessif d'éléments et ainsi à des temps de calculs prohibitifs.

1.4.2.2.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est largement utilisée pour les calculs d'ouvrages et de structures du génie civil ([Dung Vu, 2013]). Elle est fondée, contrairement aux approches discrètes, sur la mécanique des milieux continus. En considérant que le comportement du matériau est homogène, cette approche permet d'étudier la réponse globale de la structure et la réponse locale du matériau. Néanmoins, le béton armé étant un matériau par définition hétérogène, il existe des lois d'homogénéisation de ce matériau sous la forme de macro-élément. On peut ainsi présenter l'exemple de la loi *GLRC_DAMAGE* (Global Reinforced Concrete Models) développée pour [Code-Aster, 2001] dans [Kœchlin et Moulin, 2002] ou encore la loi *Mat_Concrete_EC2* implémentée dans [Ls-Dyna, 1976] pour les éléments coques multi-feuillets. Ces lois présentent l'intérêt d'avoir un faible coût numérique par rapport à une modélisation complète 3-D. Pour modéliser le comportement à la rupture du béton, deux types de modèles ont été développés :

- approche continue de l'endommagement : les phénomènes non-linéaires sont traités à travers des variables d'endommagement, qui varient de 0 (pour le matériau sain) à 1 (pour le matériau complètement endommagé) ([Mazars, 1984]).
- théorie de la plasticité : le comportement non-linéaire est pris en compte par le biais de déformations plastiques qui respectent des lois d'écoulement et des critères en contrainte.

Cependant, lorsque la propagation des fissures joue un rôle prépondérant, les lois de comportement ne peuvent pas reproduire correctement les réponses des structures et les endommagements des matériaux. Pour résoudre ce problème de discontinuité, différentes solutions ont alors été proposées, [Wœstyn *et al.*, 2006] :

- pour suivre l'évolution d'une fissure, [Ortiz et Pandolfi, 1999] introduit une discontinuité sur l'interface reliant deux éléments finis couplée à un algorithme de maillage adaptatif. Cette méthode introduit néanmoins une dépendance au maillage utilisé ;
- une autre technique consiste à introduire la discontinuité en déplacement directement à l'intérieur des éléments finis (X-FEM (Extended Finite Element Method)) ([Sukumar et Belytschko, 2000]). La propagation d'une fissure en quasi-statique est bien modélisée par cette méthode mais des problématiques interviennent dès lors que l'on traite la multi-fissuration, de la dynamique ou encore des structures à grande échelle ;
- le processus d'érosion est une autre méthode souvent utilisée pour le traitement des problèmes dynamiques d'impact. Un élément fini de la structure sera supprimé lorsqu'un critère est atteint. Différents critères d'érosion peuvent être utilisés, souvent le seuil de déformation plastique de Von-Mises, [Ågårdh et Laine, 1999] ou de Tresca, sont retenus. Certains modèles élasto-endommageables utilisent soit un seuil de déformation principale en traction, soit le critère du modèle de Mazars,

[Mazars, 1984].

D'autres part deux aspects sont également important à noter pour les méthodes éléments finis. Au niveau dynamique, certaines lois de comportement permettent d'intégrer des effets de vitesse liés à un matériau tel que le béton. Le second aspect concerne la représentation des armatures qui peuvent être pris en compte au travers de macro-éléments de béton armé ou alors de manière explicite via des éléments représentant les armatures et liés aux éléments de béton par des lois de contact.

Deux méthodes d'intégration temporelle sont utilisées dans les codes éléments finis, la méthode d'intégration implicite (de type Newmark) et la méthode d'intégration explicite (généralement des différences centrées d'ordre 2). Si l'algorithme implicite est souvent utilisé pour modéliser les problèmes quasi-statiques et ceux de dynamique lente, les problèmes de dynamique rapide sont généralement traités avec une méthode explicite qui nécessite d'utiliser un très petit pas de temps d'intégration mais qui est plus efficace en termes de temps de calculs pour des chargements courts comme les impacts.

1.4.2.3 Conclusions des méthodologies actuelles de traitement de la zone d'impact

Pour illustrer ce paragraphe et les observations associées, le benchmark international IRIS (Improving Robustness Assessment Methodologies for structures impacted by missiles), [IRIS, 2010] et [IRIS, 2012], peut être mis en avant. Ce projet a été lancé dans le but d'obtenir un retour d'expérience sur la modélisation de projectiles impactant une dalle en béton armé. Il s'appuie sur des essais d'impact sur des dalles en béton armé, avec des projectiles cylindriques déformables (50 kg avec une vitesse variant de 100 à 200 m/s), réalisés en Finlande par le centre de recherche VTT (Technical research center of Finland) dans le cadre d'un Workshop international. C'est un projet organisé par un groupe de travail international OECD-NEA (Organisation for Economic Cooperation and Development - Nuclear Energy Agency) et piloté par l'IRSN. Réunissant près d'une vingtaine d'équipes venant des quatre coins du monde, ce benchmark a fait apparaitre qu'il existe beaucoup de possibilités pour simuler l'impact sur une structure en béton armé. Les méthodes continues, quoique très bien connues, semblent avoir encore des difficultés à modéliser correctement la fragmentation ou encore les impacts amenant à une perforation de la cible.

Les méthodes discrètes plus récentes et encore peu utilisées sont attractives car leur essence même est de modéliser les discontinuités. Parmi elles, les méthodes issues de la méthode des éléments distincts semblent faciles à mettre en œuvre (par l'utilisation de sphères) et sont prometteuses. Cependant le coût de calcul, dû à la fois à la recherche des contacts et à une discrétisation souvent fine, en contraint l'utilisation à de relativement petites applications.

Pour généraliser notre approche dans le cadre de problèmes proches , il est possible également de citer les méthodes d'analyse de dimensionnement de galeries pare-blocs, comme décrites dans [Zhang, 2006], ou encore la chute de charges et de conteneurs, [Sercombe, 1997]. Néanmoins ces méthodologies traitant dans ces deux cas de choc "dur" caractérisé par des phénomènes engendrés bien spécifiques ne sont pas applicable globa-

lement à la chute d'avion.

Dans notre cas de la chute d'avion, il semble donc plus efficace d'utiliser les éléments finis pour représenter la zone endommagée dès lors que l'objectif est d'obtenir la réponse globale de la structure comme cela peut être le cas dans une étude visant à qualifier l'ébranlement. Par ailleurs, le dimensionnement même des structures vise justement à assurer l'absence d'endommagement trop important.

1.4.3 Description des méthodologies de traitement des vibrations induites par l'impact

Les méthodologies actuelles de traitement de ces allers-retours d'ondes dans la structure font tout d'abord intervenir une discrétisation spatiale par éléments finis, puis soit une étude temporelle du problème, soit fréquentielle au travers d'une analyse modale. La première approche semble la plus efficace pour la chute d'avion. Néanmoins pour pouvoir prendre en compte l'ensemble du contenu fréquentiel généré par l'impact, l'approche éléments finis nécessite une discrétisation fine en relation directe avec le nombre d'onde présent dans la structure. Cet aspect peut alors vite être problématique en termes de coût numérique. En effet comme montré dans le paragraphe et en particulier au travers du rapport de [L'Huby et Barbe, 1992], l'impact d'avion sur une structure du génie civil (de première fréquence propre comprise entre 2 et 5 Hz) apporte un contenu fréquentiel (de 0 à 100 Hz) basses mais également moyennes fréquences ($\geq 40\ Hz$) non négligeable notamment en terme d'accélérations induites. En partant de cette remarque, ce paragraphe, basé sur la description plus complète faite dans [Chevreuil, 2005], vise à décrire les méthodes les plus utilisées afin d'en sélectionner la plus adaptée à notre cas d'étude.

1.4.3.1 Approches temporelles

La première étape de résolution, inhérente aux approches temporelles comme fréquentielles, est une discrétisation spatiale de la géométrie de la structure. Les différents types de discrétisation sont présentés dans le paragraphe suivant.

1.4.3.1.1 Discrétisation spatiale

Discrétisation par éléments finis

En analyse numérique, la méthode des éléments finis (FEM, Finite Element Method) est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles (EDP) ([Zienkiewicz et Taylor, 2000]). La méthode des éléments finis permet donc de résoudre de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée "suffisamment" fiable. De manière générale, cette EDP porte sur une fonction, définie sur un domaine. Elle comporte des conditions aux bords permettant d'assurer existence et unicité d'une solution. La discrétisation passe généralement par une redéfinition et une approximation de la géométrie, on considère donc le problème posé sur la géométrie approchée par un

domaine polygonal ou polyédrique par morceaux. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème ; dans la FEM, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine, les éléments finis. La description de géométries complexes pose peu de difficultés avec cette méthode. La formulation variationnelle permet d'obtenir un problème d'évolution à résoudre :

$$\underline{\underline{M}}\underline{\ddot{U}} + \underline{\underline{C}}\underline{\dot{U}} + \underline{\underline{K}}\underline{U} = \underline{F} \tag{1.11}$$

avec $\underline{\underline{M}}$ la matrice de masse, $\underline{\underline{C}}$ la matrice d'amortissement, $\underline{\underline{K}}$ la matrice de rigidité, $\underline{U}$ et $\underline{F}$ désignent les vecteurs des déplacements et des efforts généralisés, i.e. les quantités aux nœuds des éléments, et $\underline{\dot{U}}$ et $\underline{\ddot{U}}$ sont les dérivées première et seconde du déplacement soit la vitesse et l'accélération. Ces matrices sont symétriques par essence (sauf $\underline{\underline{C}}$).

La taille de ces matrices, et donc du système, est associée au nombre de degrés de liberté (DDL) nécessaire à la bonne représentation du phénomène étudié. Pour les problématiques de chocs, le champ à fort gradient rencontré nécessite, pour être représentatif, soit un raffinement du maillage de type *h*-raffinement, soit du degré des polynômes des fonctions de forme (*p*-raffinement). La taille du système à résoudre augmente donc avec ce champ à fort gradient.

Pour répondre à cet enrichissement local du modèle, les éléments finis adaptatifs ont été développés. En effet, il est intéressant d'avoir un maillage grossier dans les zones où la dynamique est lente, et un maillage plus fin dans celles où la dynamique est rapide et les déformations fortement variables. Ainsi l'approximation sera bonne, sans pour autant augmenter énormément la taille du système. Ces maillages permettent de rechercher la meilleure discrétisation, afin que l'erreur soit distribuée uniformément. Trois grandes classes de méthodes coexistent :

- les travaux de [Aubry *et al.*, 1999] et [Tie *et al.*, 2003] se basent sur un estimateur construit sur les résidus d'équilibre et défini dans [Babuška et Rheinboldt, 1978] ;
- un estimateur utilisant le lissage des contraintes ([Zienkiewicz et Zhu, 1987]) ;
- un estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement [Ladevèze et Pelle, 2001] et appliqué aux éléments finis adaptatifs dans [Coorevits, 1993].

Décomposition de domaine en dynamique transitoire

Les techniques de résolution par décomposition de domaine consistent à établir une partition du domaine initial en sous-domaines dans le but de se ramener à plusieurs calculs de taille plus modeste. En calcul de structures, les méthodes de décomposition de domaine sont un moyen naturel permettant d'exploiter des machines massivement parallèles, à mémoire distribuée. Le développement des méthodes de calcul est profondément lié à l'évolution de leur support, aussi les méthodes de décomposition de domaine ont connu un véritable essor récemment, accompagnant l'avènement des architectures parallèles pour les calculateurs scientifiques et industriels. Les méthodes de décomposition de domaine recherchent la solution d'un problème condensé aux interfaces.

La distinction entre les différentes méthodes de décomposition de domaine existantes

se situe dans la nature des raccords entre deux sous-structures. Les méthodes sans recouvrement se divisent en trois familles : les approches primales ([Roux, 1990], [Mandel, 1993]), duales ([Farhat et Roux, 1991], [Farhat et Géradin, 1994]) et mixtes ([Glowinski et Le Tallec, 1990], [Ladevèze et Simmonds, 1999], [Champaney *et al.*, 1997], [Lemoussu *et al.*, 2002], [Gupta *et al.*, 2005]). Le problème d'interface est généralement résolu de manière itérative exigeant un taux de convergence important pour la rendre efficace. L'avantage de ces méthodes est qu'elles ne nécessitent pas de construction explicite du complément de Schur, problème coûteux à résoudre. Afin d'améliorer la convergence pour plusieurs sous-structures, l'utilisation d'un problème grossier défini sur la structure complète permet de propager une information globale sur l'ensemble de la structure. Majoritairement sans recouvrement, certains travaux comme ceux de [Ben Dhia et Rateau, 2005] proposent une extension en dynamique de la méthode de partition avec recouvrement Arlequin.

1.4.3.1.2 Discrétisation temporelle

L'excitation d'une plage fréquentielle élevée dans les problématiques de chocs provoque un coût important de la méthode pour les techniques de bases réduites. L'intégration directe devient donc mieux adaptée au traitement de ces problèmes. La résolution de l'équation temporelle d'évolution (Equation 1.11) nécessite un découpage de l'intervalle d'étude en pas de temps Δt. La recherche du résultat à chacun de ces pas de temps successifs s'effectue au travers d'un schéma d'intégration en temps, où l'objectif est d'exprimer les inconnues au pas de temps $n+1$ en fonction de celles au pas de temps précèdent n. On peut néanmoins noter que, même sans être adaptées à l'étude des chocs, les méthodes asymptotiques numériques, [Cochelin et Compain, 2000], permettent de s'affranchir de ces schémas d'intégration.

Schémas de Newmark

Le schéma de Newmark permet la résolution numérique d'équations différentielles du second ordre. Il convient, non seulement pour des systèmes différentiels linéaires, mais aussi pour des systèmes fortement non-linéaires avec une matrice de masse et une force appliquée qui peuvent dépendre à la fois de la position et du temps. Dans ce second cas, le calcul nécessite à chaque pas une boucle d'itération. Ces avantages en font un des schémas les plus utilisés et robustes de la dynamique des structures.

Le principe de cette méthode consiste à déterminer par un développement limité des relations linéaires entre les inconnues du déplacement et de la vitesse au pas de temps $n+1$ à partir des mêmes grandeurs au pas de temps précédent n. Ce développement contient un terme d'erreur du troisième ordre proportionnel à la dérivée de l'accélération. Diverses hypothèses permettent de remplacer cette dérivée troisième par l'accélération au temps précédent en introduisant deux paramètres γ et β. Ils sont régis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \\ u_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \dot{u}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{u}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{u}_{n+1} \end{cases} \tag{1.12}$$

Les valeurs prises par γ et β (cf. Tableau 1.8) vont définir les propriétés du schéma. De ces deux paramètres dépendent les propriétés de l'algorithme, en particulier la stabilité, et son caractère implicite ou explicite. Le choix d'une méthode est généralement défini en fonction du contenu fréquentiel du chargement appliqué qui permet de déterminer la taille du pas de temps. Il ne faut cependant pas oublier que la discrétisation temporelle n'est pas dissociée de la discrétisation spatiale de la structure.

Schéma	γ	β
Différences centrées	$1/2$	0
Accélération linéaire	$1/2$	$1/12$
Accélération moyenne	$1/2$	$1/4$
Accélération moyenne modifiée	$1/2+\alpha$	$(1+\alpha)^2/4$

TABLE 1.8: Différents schémas de Newmark

Le schéma le plus simple est le schéma explicite des différences centrées, qui utilise une discrétisation centrée de la dérivée temporelle. Ce schéma est privilégié pour les faibles erreurs d'amplitude et de périodicité qu'il engendre. L'utilisation de ce type de schéma permet d'obtenir une matrice dynamique diagonale moins coûteuse dans son inversion. Il est donc adapté aux chargements dynamiques rapides et au traitement des problèmes non-linéaires. Cependant ce schéma est conditionnellement stable. Ainsi le respect de la condition de Courant, qui exprime le fait que le signal ne doit pas se propager de plus d'un élément pendant un pas de temps, peut s'avérer difficile à vérifier.

Le schéma de l'accélération moyenne est quant à lui un schéma implicite et inconditionnellement stable, mais en revanche il est coûteux en terme de calcul étant donné qu'il nécessite à chaque pas de temps l'inversion de la matrice dynamique qui est ici non-diagonale. Néanmoins ce schéma est largement utilisé dans le cas de la dynamique lente où les pas de temps sont grands.

Pour limiter les instabilités numériques liées aux hautes fréquences, il est possible d'introduire de l'amortissement numérique via les schémas de la famille de Newmark en utilisant $\gamma > 0.5$. Or, l'introduction de dissipation numérique dans les schémas de Newmark ne peut se faire sans altération de l'ordre de convergence. En effet on obtient dans ce cas des schémas d'une précision au premier ordre par rapport au temps. Afin d'obtenir une précision au second ordre, Hilber, Hughes et Taylor ([Hilber *et al.*, 1977]) ont proposé de pondérer les forces internes entre les instants t_n et t_{n+1}. Les relations de base entre les déplacements, les vitesses et les accélérations restent les mêmes que pour l'algorithme de Newmark (Equation 1.12). Par contre l'équation d'équilibre (Equation 1.11) se réécrit en pondérant les forces internes et externes entre les temps d'intégration à l'aide du paramètre α :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{U}}_{n+1} + (1-\alpha)\left(\underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}}_{n+1} + \underline{\underline{K}}\underline{U}_{n+1}\right) + \alpha\left(\underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}}_{n} + \underline{\underline{K}}\underline{U}_{n}\right) = (1-\alpha)\underline{F}_{n+1} + \alpha\underline{F}_{n} \quad (1.13)$$

Méthodes de Galerkin discontinues

Les méthodes de Galerkin discontinues (GD) ont été introduites en 1973, dans [Reed et Hill, 1973], où Reed et Hill ont utilisé une méthode GD pour résoudre les équations de transport du neutron (système hyperbolique). Les méthodes GD, comme toute méthode de résolution numérique, cherchent à résoudre de manière discrète la solution d'une équation aux dérivées partielles dont on cherche une solution approchée sur un domaine. On ajoute à l'équation des conditions aux bords permettant d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution, ainsi que des conditions initiales dans le cas d'une étude d'évolution temporelle (conformément au théorème de Cauchy-Lipschitz). De même que pour la méthode des éléments finis, la discrétisation du domaine passe par une redéfinition et une approximation de la géométrie, on considère donc le problème posé sur la géométrie approchée par un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème, espace défini à l'aide du maillage du domaine. Ces fonctions de base sont également choisies de façon à être interpolantes, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont les valeurs des grandeurs inconnues aux nœuds, mais on n'impose pas de raccord continu sur la frontières entre deux cellules ; le support des fonctions de base est restreint au seul élément sur lequel la fonction est définie. Par ailleurs, la discontinuité de l'approximation permet de n'imposer aucune contrainte sur le maillage et les discrétisations non-conformes sont donc autorisées. Ces propriétés font de la méthode de Galerkin discontinue une approche couramment utilisée pour traiter les discontinuités et les non-linéarités. Utilisée à l'ordre zéro, ie : champs pris constants sur les intervalles de temps, elle permet de s'affranchir des oscillations numériques occasionnées lors du traitement d'un front d'onde. Toutefois ce schéma dissipe énormément l'information et demande une discrétisation très fine pour bien représenter les irrégularités ([Leclère, 2001]).

1.4.3.1.3 Conclusions

Nous avons vu dans ce paragraphe que l'association éléments finis et schéma d'intégration a permis au travers de nombreux développements la résolution des problématiques de chocs. Même si certaines méthodes comme la décomposition de domaine permettent une réduction du temps de calcul, en dynamique transitoire, l'effort numérique à apporter peut être très variable d'un endroit à un autre de la structure selon que le champ varie fortement ou lentement à ces endroits. Une optimisation intéressante de cette approche, présentée dans [Combescure et Gravouil, 2002] et [Combescure *et al.*, 2003], est d'adapter chaque paramètre (discrétisation spatiale et temporelle, schéma numérique) de chaque sous-domaine. Cependant, pour les études d'impact, l'utilisation unique d'une intégration en temps rend ces méthodes coûteuses numériquement au vu de leur exigence de

discrétisation, notamment dans notre problématique où le contenu fréquentiel excité est important et où la structure peut développer jusqu'à 20-30 longueurs d'ondes suivant sa dimension caractéristique. De plus les schémas d'intégration peuvent présenter soit des oscillations numériques qui perturbent la solution soit une dissipation trop forte pour bien représenter la réponse. Le raffinement des maillages n'est pas non plus sans reproches puisqu'il peut être accompagné de difficultés numériques ([Ihlenburg et Babuška, 1995], [Deraemaeker *et al.*, 1999]) liés à la dispersion et la pollution.

Une alternative à cela est d'utiliser le domaine fréquentiel pour écrire le problème de référence. Le paragraphe qui suit présente différentes approches dans ce domaine.

1.4.3.2 Approches fréquentielles

L'avènement de la technique de Fast Fourier Transform (FFT), [Brigham, 1988], a permis une alternative dans le domaine fréquentiel au calcul en dynamique transitoire. Dans [Clough et Penzien, 1975], le système alors étudié restait linéaire. Cette approche fréquentielle démontre une grande efficacité lorsque les paramètres sont dépendants de la fréquence, notamment pour les études sismiques présentant un contenu fréquentiel important. En effet dans le cadre d'études sismiques, les propriétés de l'interaction sol/structure sont fortement dépendantes des fréquences d'excitation.

L'approche fréquentielle se base sur une réécriture du problème de référence sous la forme variationnelle dans le domaine fréquentiel. La transformée de Fourier est alors appliquée aux variables dépendantes du temps. La problématique à résoudre devient alors celle de la réponse d'une structure en vibrations forcées stationnaires sur une bande de fréquences, pouvant être découpée en plusieurs domaines.

1.4.3.2.1 Découpage en plages fréquentielles

Comme décrit dans la Figure 1.21, la fonction de réponse en fréquence d'une structure fait apparaître trois domaines pouvant être distingués de la manière suivante : basses, moyennes et hautes fréquences.

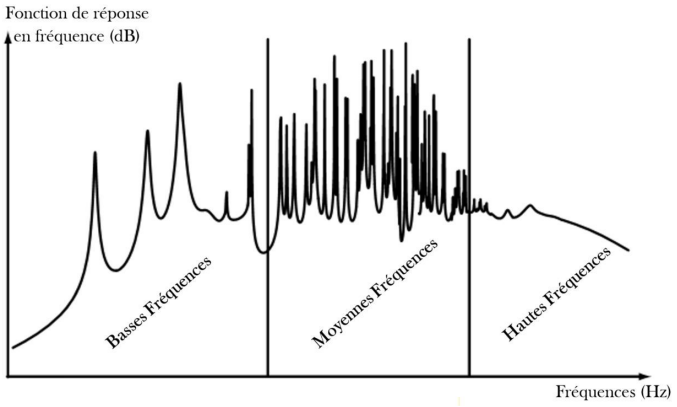


FIGURE 1.21: Réponse type en fréquence d'une structure [Ohayon et Soize, 1989].

Dans le domaine des basses fréquences (BF), les phénomènes vibratoires générés par l'excitation sont de relativement grande longueur d'onde en comparaison aux dimensions de la structure. Quelques oscillations sont observables. De plus la structure a un comportement qualifié de modal. On sous-entend par-là que les modes propres sont bien distincts les uns des autres. Par conséquent, le calcul de la fonction de réponse en fréquence dans ce domaine ne pose pas de problème en ce qui concerne la modélisation et la simulation numérique. Généralement, les méthodes les plus utilisées sont les méthodes basées sur les éléments finis (EF) [Zienkiewicz et Taylor, 2000]. Étant donné que le comportement est modal, il est moins coûteux de mener les calculs sur la base modale en les complétant éventuellement de modes statiques.

En ce qui concerne les hautes fréquences (HF), les phénomènes sont de très petite longueur d'onde, soit une centaine d'oscillations présentes sur une dimension de la structure. Ainsi il n'est plus adéquat de regarder les grandeurs locales mais plutôt les grandeurs moyennées en espace et en fréquence. L'approche la plus couramment utilisée est l'Analyse Statistique de l'Energie (SEA) [Lyon et Maidanik, 1962] qui donne le niveau énergétique vibratoire moyen par sous-structure. Il faut alors vérifier qu'un nombre suffisant de modes propres contribue dans la réponse pour que ces prévisions soient correctes. Cette méthode ne permet pas d'obtenir une solution prédictive étant donné qu'elle requiert la connaissance de facteurs de couplage mesurés. De plus on peut admettre que pour un ouvrage en béton ces hautes fréquences seront suffisamment amorties pour être négligées.

La dernière plage, les moyennes fréquences (MF), se situe entre les deux premiers domaines. Il n'existe pas de définition claire des moyennes fréquences. La plus satisfaisante à ce jour a été fournie par le professeur Bernhard de Purdue University [Wohlever et Bernhard, 1992] et [Bouthier et Bernhard, 1995]. Elle consiste à considérer les fréquences pour lesquelles les longueurs d'ondes sont plus importantes que les plus petites dimensions de la structure étudiée et plus faibles que les plus grandes dimensions de cette structure. Ici plusieurs dizaines d'oscillations apparaissent sur une dimension de la structure et la déformée est très sensible aux conditions aux limites et aux paramètres matériau de la structure. Un comportement modal est encore observable mais les modes propres sont difficilement distincts les uns des autres. Ces modes sont couplés par l'amortissement. Ainsi, les méthodes basées sur les éléments finis sont difficilement adaptables puisqu'elles exigent un raffinement du maillage spatial et conduisent à un problème de grande taille et à des difficultés numériques [Ihlenburg et Babuška, 1995], [Deraemaeker *et al.*, 1999]. Le calcul de la base modale est lui aussi hors de portée à cause de la densité modale nécessaire à la représentation des phénomènes. Les méthodes énergétiques utilisées pour les hautes fréquences sont, quant à elles, trop globales et ne décrivent pas assez précisément la solution.

Dans le cas des chocs d'une manière générale, la fonction de réponse en fréquence doit être prédite pour les plages des basses fréquences mais également pour les moyennes fréquences, ces dernières étant souvent négligées. Dans l'optique de maîtriser le contenu fréquentiel induit par l'impact d'un avion, il est nécessaire d'avoir une méthodologie de confiance permettant le calcul de la réponse sur cette plage de fréquences. Dans la suite du paragraphe, nous étudierons les approches permettant le calcul en basses et moyennes

fréquences. Compte tenu du faible sens physique de la solution locale en HF ainsi que la faible proportion d'énergie concernée, les méthodes issues de cette plage de fréquences ne seront pas étudiées.

1.4.3.2.2 Méthodes issues des basses fréquences

Les méthodes BF, généralement basées sur les éléments finis, utilisent les caractéristiques bien définies de cette plage fréquentielle telles qu'une grande longueur d'onde ou encore un faible nombre de modes propres bien distincts.

Approches basées sur les méthodes classiques utilisées temporellement

– **Méthodes des éléments finis**

En s'appuyant sur le système matriciel du problème à résoudre défini par l'Equation 1.11 dans l'approche temporelle et en la couplant à la transformée de Fourier, on obtient alors le système à résoudre en fréquentiel pour une sollicitation harmonique de pulsation ω :

$$\left[-\omega^2 \underline{\underline{M}} + i\omega \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}\right] \underline{U} = \underline{F} \tag{1.14}$$

Les matrices de masse $\underline{\underline{M}}$ et de rigidité $\underline{\underline{K}}$ sont symétriques et creuses avec une largeur de bande faible. La matrice d'amortissement $\underline{\underline{C}}$ quant à elle modélise les forces d'amortissement reposant en général sur des hypothèses simples, par exemple en supposant un amortissement de Rayleigh défini de la façon suivante :

$$\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{K}} + \beta \underline{\underline{M}} \tag{1.15}$$

Le calcul des premiers modes propres de la structure devient alors possible. La solution approchée de notre système est projetée sur la base de sous-espaces propres associés. Le principal avantage d'une telle approche dite modale, est de se ramener à la résolution d'un système diagonal de faible dimension en basses fréquences. En effet sur cette plage fréquentielle, seules quelques dizaines, voire quelques centaines de modes suffisent généralement à la bonne représentation de la solution. L'analyse modale basée sur la FEM demande tout de même un grand nombre de fonctions polynômes par morceaux pour bien représenter la solution. Dans [Ilhenburg et Babuška, 1995] et [Ihlenburg et Babuška, 1995], une définition de l'erreur commise en norme H_1 dans le cas de problèmes 2-D est donnée et peut être majorée par :

$$\varepsilon \leq C_1 \left(\frac{kh}{2p}\right)^{2p} + C_2 k \left(\frac{kh}{2p}\right)^{2p} \tag{1.16}$$

avec h la taille caractéristique des éléments, k le nombre d'onde qui dépend directement de la fréquence de sollicitation, et p le degré du polynôme des fonctions de forme.

Le premier terme de cette inéquation définit l'erreur engendrée par la représentation de la grandeur recherchée au travers d'une approximation polynomiale. Le second terme

traduit l'effet de pollution des éléments finis. En effet la discrétisation spatiale du problème initial génère une erreur dans l'estimation du nombre d'onde k. De là un déphasage entre la solution approchée et la solution exacte est observé.

De plus, la densité modale augmentant en général avec la fréquence, l'extraction de ces modes propres devient de plus en plus difficile et ainsi le nombre de modes propres nécessaire à la bonne représentation des résultats croît avec cette même fréquence. Pour finir, la solution, décrite à l'aide de grandeurs ponctuelles comme les déplacements généralisés, devient hypersensible aux variations des paramètres structuraux et des conditions limites. L'analyse modale est donc inadaptée aux moyennes fréquences.

Pour réduire les erreurs d'approximation et de dispersion, des estimateurs d'erreur a posteriori ont été développés pour évaluer l'erreur locale pour des structures [Ladevèze et Pelle, 2001] et pour l'acoustique [Bouillard et Ihlenburg, 1999], [Irimie et Bouillard, 2001]. Deux options sont alors possibles, le h-raffinement qui consiste à raffiner le maillage en réduisant h ou le p-raffinement qui consiste à augmenter le degré p des polynômes. Un compromis entre ces deux idées est également possible, donnant naissance aux hp-méthodes.

En basses fréquences, le premier terme de l'Equation 1.16 est prédominant. Afin de garder un niveau d'erreur constant, il suffit de garder kh constant. En effet pour cette plage de fréquence [Babuška *et al.*, 1995] et [Barbone *et al.*, 1998] démontrent que pour effectuer un calcul éléments finis avec une bonne précision, la taille de l'élément doit dépendre de la longueur d'onde. La règle ingénieur est souvent prise à 10 éléments par longueur d'onde. Pour les longueurs d'onde plus faibles des moyennes fréquences, on observe l'apparition de pollution ([Deraemaeker *et al.*, 1999]). La règle doit alors rendre constant le terme $k(kh)^{2p}$, ce qui accroît considérablement la taille du problème.

La seconde manière de limiter l'erreur consiste donc à augmenter le degré p des polynômes d'approximation. Cependant, un ordre p plus grand augmente la largeur de bande des matrices et nécessite un effort de calcul supplémentaire. Par ailleurs, l'ordre p ne peut pas être trop important car la FEM est vite confrontée à des problèmes numériques.

– **Méthodes de réduction**

L'utilisation de la FEM sur des problématiques moyennes fréquences aboutit à des problèmes de grandes dimensions. En effet, la base de modes propres n'est pas efficace dans cette plage de fréquences, car le nombre de modes à prendre en compte devient trop important dès que la fréquence augmente. L'utilisation d'un espace mieux adapté pour projeter la formulation variationnelle semble ainsi être une approche pertinente. Une approche, testée en vibro-acoustique ([Soize, 1998]), consiste à définir un opérateur d'énergie relatif à une bande de fréquences. Cependant, même si cette approche permet de réduire considérablement le nombre de DDLs, elle repose sur une description EF du modèle. Si le maillage n'est pas suffisamment fin, les modes propres de l'opérateur d'énergie ne possèderont pas assez de richesse pour redonner l'énergie de la solution réelle.

– **Méthodes de décomposition de domaine**

La décomposition de domaine est basée sur la résolution d'un gros problème par la résolution de plusieurs petits problèmes. Le coût numérique peut alors être diminué. L'efficacité de cette approche est d'autant plus grande qu'elle peut être couplée à la parallélisation. Il existe plusieurs techniques de sous structuration dynamique, comme la synthèse modale par composant (CMS, Component Modal synthesis) ([Hurty, 1965], [Bampton et Craig, 1968], [MacNeal, 1971], [Farhat et Géradin, 1994]), l'Automated Multilevel Substructuring (AMLS) ([Bennighof *et al.*, 2000]), la FETI ([Farhat et Roux, 1991], [Farhat *et al.*, 1998], [Tezaur *et al.*, 2001]) ou encore l'approche maîtres-esclaves développée dans [Guyan, 1965], [Irons, 1965] et [Sandberg *et al.*, 2001]. Cependant la qualité de la solution du problème initial dépend fortement du nombre de modes calculés pour chaque sous-structure. Ainsi dès que l'on monte en fréquence, le nombre de DDL du problème final reste encore trop élevé.

– **Bilan**

Nous avons vu que les éléments finis sont limités dans leur représentation de la solution au-delà des basses fréquences. Plusieurs points de vue permettent d'expliquer cela. L'explication la plus répandue consiste à affirmer que le problème du comportement vibratoire en moyennes et hautes fréquences se pose lorsque la description modale devient trop coûteuse numériquement. La caractérisation du domaine fréquentiel serait ainsi liée aux performances du calculateur. A la limite, le problème n'existerait pas avec des machines infiniment puissantes. Ceci revient à nier ou omettre une limitation rédhibitoire des éléments finis à savoir l'hypothèse de Basile qui consiste à considérer la matrice d'amortissement comme diagonale. Les couplages entre modes de résonances ne sont donc pas pris en compte. Or, ce qui caractérise en premier lieu les réponses vibratoires des structures dans le domaine des moyennes et hautes fréquences est le resserrement des modes de résonance et leur accumulation dans des bandes de fréquences étroites, ainsi que leur caractère très oscillant. Les échanges d'énergie entre modes ne peuvent plus être négligés.

Dans toutes les méthodes présentées, basées sur la méthode des éléments finis, la représentation polynomiale par morceau de la solution n'est pas adaptée à la description de phénomènes fortement oscillants que l'on retrouve en moyennes fréquences. Les méthodes qui suivent ont pour objectif de répondre à cela.

Eléments finis enrichis

Dans l'utilisation des éléments finis enrichis, la connaissance a priori de la forme de la solution recherchée est un élément primordial, notamment son aspect oscillatoire. L'idée est donc d'enrichir les fonctions de forme des éléments dans le but de reproduire ces oscillations. Les méthodes décrites dans la suite du paragraphe sont différentes l'une par rapport à l'autre de par la nature des fonctions ajoutées et leur implémentation dans la méthode.

– **Eléments finis hiérarchiques**

Les éléments finis hiérarchiques [Harari *et al.*, 1996] sont issus des p-méthodes [Dey, 2003]. Ces éléments finis correspondent à des grilles emboitées. L'amélioration apportée par cette approche permet une réutilisation à l'ordre $p+1$ des matrices de masse et raideur élémentaires issues de l'ordre p. Le temps de calcul est ainsi diminué, néanmoins l'enrichissement est limité. En effet lorsque l'ordre devient trop élevé des problèmes numériques apparaissent ([West *et al.*, 1997]). Deux améliorations ont alors été apportées ([Beslin et Nicolas, 1997]) et ([Leung et Chan, 1998]).

– **Eléments finis multiéchelles**

La technique des EF multiéchelles ([Hugues, 1995]) consiste à décomposer la solution du problème que l'on résout en une somme de deux fonctions. La première est appelée calculable et est associée à une grande échelle en temps, tandis que la seconde variable est définie comme non calculable et associée à une échelle fine. La méthode se décompose en deux étapes de calcul, qui s'appuient sur deux formulations variationnelles, chacune liée aux champs virtuels d'une des deux variables. La première étape consiste à exprimer l'échelle fine en fonction de l'échelle grossière. La deuxième étape consiste à réinjecter ce résultat dans la seconde formulation variationnelle. Cette approche, parfois appelée subgrid, permet d'améliorer la solution EF classique, qui ne fournirait que l'aspect grossier. La résolution du problème est effectuée par le biais de fonctions de Green s'annulant sur le bord des éléments grossiers et numériquement remplacées par des approximations polynomiales ([Oberai et Pinsky, 1998]). On notera également que la résolution multiéchelle est effectué élément par élément via l'approche RFB (Residual Free Bubbles) ([Franca *et al.*, 1997], [Franca et Macedo, 1998]). Cependant pour des problèmes 2-D ou 3-D, l'ajout de ces fonctions ne permet pas une bonne approximation de la solution à la frontière des éléments.

– **DEM**

La DEM (Discontinuous Enrichment Method) est une méthode dans laquelle les polynômes d'éléments finis standards sont enrichis par les fonctions discontinues. L'enrichissement au sein de chaque élément est engendré par multiplicateurs de Lagrange assurant la continuité et dédiés aux applications qui présentent de forts gradients ou des oscillations rapides [Farhat *et al.*, 2001], [Farhat *et al.*, 2003]. Cet enrichissement par des ondes propagatives est non nul sur les bords. En raison du caractère discontinu de l'enrichissement, celui-ci est éliminé de la formulation par condensation statique au niveau de l'élément, avant l'assemblage. Ainsi, le coût de la résolution du problème de la matrice est pratiquement indépendant de la dimension de l'enrichissement. Le problème alors condensé est exprimé en termes de champ polynôme et de multiplicateurs de Lagrange. Cette approche ne permet pas a priori de tenir compte des directions de propagation privilégiées. De plus les ondes provenant des bords sont négligées malgré leur nécessité pour l'étude de poutres et de plaques.

– **Bilan**

En moyennes fréquences, les méthodes d'enrichissement des éléments finis sont toutes basées sur l'introduction de fonctions oscillantes à celles de base. On notera au passage d'autres méthodes d'enrichissement, tel que la Cell discretization ([Greenstadt, 1999]), la Partition of Unity Method (PUM) ([Melenk et Babuška, 1997]) ou encore les méthodes des éléments finis généralisés GFEM (Generalized Finite Element Method) ([Strouboulis *et al.*, 2001]), et étendus XFEM (eXtended Finite Element Method) ([Moës *et al.*, 1999]). Néanmoins elles permettent une réduction de la taille des problèmes à traiter avec en contrepartie une intégration souvent coûteuse.

Autres méthodes

– **Méthodes des éléments de frontière**

La méthode des éléments finis de frontière (Boundary Element Method, BEM) est une méthode pour résoudre un problème aux limites linéaire posé sur un domaine, [Banerjee et Butterfield, 1981], [De Langre, 1991]. En effet elle se traduit par une équation posée sur la frontière du domaine réduisant ainsi le nombre de degrés de liberté du problème ainsi que l'effort de maillage. Cette méthode est fondée sur la connaissance de solutions élémentaires (les fonctions de Green) et sur le théorème de réciprocité. Par nature cette méthode est limitée à des domaines relativement homogènes pour lesquels il est possible de calculer cette solution élémentaire et particulièrement efficace dans le cas de domaines non-bornés.

– **Méthodes sans maillage**

Les "Meshless Methods" ont montré une grande efficacité dans la modélisation des problèmes à discontinuité comme la fissuration. Ces méthodes s'affranchissent des maillages fins coûteux, afin d'éviter les problèmes de dispersion de la FEM [Belytschko *et al.*, 1994]. La méthode Element Free Galekin Method (EFGM) est une approximation basée sur les moindres carrés mobiles (MLSM, Moving Least Squares Method) et formant une partition de l'unité [Lancaster et Salkauskas, 1981]. Cette approche ne requiert qu'un nuage de points sans connectivité entre eux. Son application aux problèmes de vibration a été mise en place dans [Bouillard et Suleaub, 1998] ainsi que [Suleau *et al.*, 2000] et montre que les erreurs de dispersion sont meilleures, à répartition identique des nœuds. Néanmoins, comme pour la méthode par éléments finis, le nombre de DDL est lié et augmente avec la fréquence étudiée.

– **Méthodes des éléments continus**

Cette méthode, [Fleuret et Duforet, 1997] et [Casimir et Duforet, 1997], s'appuie sur les solutions analytiques ou quasi-analytiques calculées pour des sous-domaines dit simples, tels que des poutres ou plaques rectangulaires. Ces solutions alors calculées permettent la construction des matrices de raideur et celles-ci une fois assemblées celle de la structure complète. Cette approche est performante pour l'ensemble des plages fréquentielles mais reste tout de même limitée aux géométries simples.

– **Méthodes de Trefftz**

Les méthodes de Trefftz consistent à convertir l'équation différentielle qui régit le problème sous une forme variationnelle à partir de laquelle les propriétés variables de champ peuvent être trouvées. Dans ces méthodes, les fonctions de base définies sur tous les sous-domaines vérifient exactement l'équation dynamique et la relation de comportement. La solution est alors représentée à partir d'une superposition de ces fonctions et déterminée de manière à satisfaire au mieux les conditions aux limites de chaque sous-domaine grâce à différentes méthodes telles que la collocation ou les moindres carrés. Leur nombre réduit de DDL nécessaire au calcul en moyennes fréquences en font une méthode efficace. La complétude de l'espace de Trefftz joue un rôle majeur dans cette méthode [Gourgeon et Herrera, 1981] et [Herrera, 1984], néanmoins ces approches amènent à des matrices de tailles plus faibles mais très mal conditionnées engendrées par la non orthogonalité des fonctions de base.

L'approche des T-éléments, [Jirousek et Wroblewski, 1996], [Qin, 2000], [Stojek, 1998], [Monk et Wang, 1999], [Harari *et al.*, 1999] et [Harari *et al.*, 2001], allie les méthodes de Trefftz aux éléments de la FEM. La méthode des T-éléments permet d'obtenir des problèmes mieux conditionnés sur des géométries complexes. L'enrichissement de manière adéquate des fonctions de base permet alors de prendre en compte les singularités de chargement ou encore géométriques.

On peut également citer la Wave Based Technique (WBT), développée en vibro-acoustique dans [Desmet, 1998], [Desmet *et al.*, 2002] et [Pluymers *et al.*, 2002], qui ne considère plus une discrétisation fine de la structure à la façon des T-éléments mais de manière plus grossière. Cette approche conduit à des matrices mieux conditionnées, mais cependant l'intégration numérique des bords est compliquée en moyennes fréquences et ce même conditionnement se dégrade en hautes fréquences.

1.4.3.2.3 Conclusions sur les approches fréquentielles

Dans le domaine fréquentiel, les nombreuses méthodes présentées permettent toutes une résolution des problèmes d'impact, néanmoins elles comportent encore, malgré leurs avancées, certaines limites, avec comme point commun la résolution en moyennes fréquences ($\geq 40\ Hz$ pour nos structures impactées).

Pour les méthodes issues des basses fréquences, l'idée générale est de représenter un champ très oscillant par une approximation polynomiale. Cette approximation amène en moyennes fréquences des difficultés numériques dans la gestion des problèmes de grande dimension. Dans ces approches, l'hypersensibilité des déplacements aux variations des paramètres peut également être un problème. Une des idées permettant d'améliorer ces techniques est d'y introduire des fonctions oscillantes. Cependant, la discrétisation des directions de propagations génère un mauvais conditionnement des matrices.

Les approches issues des hautes fréquences ($\geq 1000\ Hz$ pour des structures du génie civil), quant à elles, se basent sur la représentation via l'énergie d'une quantité à grande longueur d'onde et peu sensible aux variations structurales. La problématique de ces méthodes vient du fait qu'elles sont souvent trop globales et non prédictives étant donné

qu'elles s'appuient sur la connaissance de coefficients de couplage, coefficients pouvant être déterminés expérimentalement ou par calculs complémentaires.

Pour conclure, l'étude des moyennes fréquences nécessite pour être efficace d'être traitée au travers d'un outil devant être prédictif, où l'inconnue est le déplacement. Cet outil doit introduire des fonctions de base à deux échelles, une échelle rapide connue explicitement et représentant le caractère oscillant et une échelle lente sur laquelle le calcul se porte. Cette double échelle permet ainsi de réduire le nombre de DDL. Pour finir, la méthode doit pouvoir s'appliquer à toutes les géométries.

1.4.3.3 Bilan de l'état de l'art du traitement de l'ébranlement induit par la chute d'avion

Dans ce paragraphe, nous avons parcouru un ensemble de méthodes dans le but de définir une approche plus efficace que celles couramment utilisées pour le traitement des vibrations induites par l'impact. En effet les méthodes industrielles basées sur une discrétisation spatiale via les éléments finis permettent une bonne approximation de la réponse de la structure mais sont soumises à une finesse de maillage en corrélation avec le nombre d'ondes à représenter. La règle ingénieur généralement utilisée est de 10 éléments par longueur d'onde. De là il apparait donc que l'approche éléments finis est efficace en basses fréquences mais devient très vite coûteuse dès lors que l'on atteint une dizaine d'ondes dans la structure, soit le domaine des moyennes fréquences. Pour une enceinte du génie civil nucléaire, la plage des moyennes fréquences débute à partir de $40Hz$. A ce titre, il semble donc qu'une méthode basée sur une décomposition de domaine permettrait de s'affranchir de cette problématique.

Une fois la discrétisation spatiale définie, il reste alors à choisir le domaine d'étude : temporel ou fréquentiel. Naturellement, l'impact d'avion est un phénomène transitoire, dès lors l'analyse temporelle semble la plus efficace. Néanmoins l'utilisation d'une intégration en temps amène de par l'exigence de discrétisation un coût numérique important, d'autant plus que ces schémas d'intégration peuvent présenter soit des oscillations numériques qui perturbent la solution soit une dissipation trop forte pour bien représenter la réponse de la structure.

L'analyse fréquentielle peut ainsi être une alternative intéressante au calcul des problèmes d'impact, mais en portant une attention toute particulière à l'étude des moyennes fréquences. La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC), pouvant être apparentée aux méthodes de Trefftz, répond à ces besoins. En effet la TVRC s'appuie sur une décomposition spatiale en sous-domaine ce qui permet de s'affranchir des problématiques liées aux éléments finis. La solution est alors recherchée sous une combinaison de modes de vibration de ces sous-domaines définit par leur direction de propagation. Les bases de l'approche seront présentées dans le paragraphe suivant.

Chapitre 2

Application de la théorie variationnelle des rayons complexes au calcul vibratoire des structures

Etant apparentée aux méthodes de Trefftz, la théorie variationnelle des rayons complexes, ou TVRC, repose sur une décomposition du domaine spatial permettant de s'affranchir des problématiques éléments finis évoquées dans le chapitre précédent, et sur une approche fréquentielle du problème. La solution se présente alors sous la forme d'une somme de fonctions d'Herglotz (modes de vibration des sous-domaines) caractérisées par leur direction de propagation ainsi que leur amplitude associée. La TVRC doit ainsi nous permettre d'étudier efficacement la partie non endommagée de la structure soumise à une propagation d'ondes d'ébranlement. L'application de cette méthode s'inscrit donc à la suite de l'étude non linéaire de la zone endommagée par l'impact, ou le point de départ sera l'application dans la TVRC des déplacements récupérés aux bornes de cette aire non linéaire localisée au niveau de l'impact. L'objectif de ce chapitre est donc de détailler les différents principes de cette théorie, ainsi que l'ensemble des développements nécessaires pour son application au calcul des vibrations induites dans la partie linéaire retenue de la structure.

Sommaire

2.1 Développements et implémentation théoriques 61
2.2 Description de la théorie variationnelle des rayons complexes 61
2.2.1 Problème de référence dans le cas général d'un assemblage de *n* sous-structures 61
2.2.2 La formulation variationnelle associée à la TVRC 65
2.2.2.1 Cas simplifié de deux sous-structures en liaison parfaite . 65

2.2.2.2 Cas étendu et généralisé à n sous-structures 66
2.2.3 Définition des fonctions de forme à deux échelles 68
2.2.3.1 Définition des ondes de vibration de flexion 69
2.2.3.1.1 Les ondes de type intérieur 71
2.2.3.1.2 Les ondes de type bord 72
2.2.3.1.3 Les ondes de type coin 73
2.2.3.2 Définition des ondes de vibration de membrane 73
2.2.3.2.1 Les ondes de pression 74
2.2.3.2.2 Les ondes de cisaillement 75
2.2.4 Discrétisation du problème 76
2.2.5 Comparaison TVRC/FEM au travers d'exemples simples 78
2.2.5.1 Premier exemple de validation : une plaque simplement appuyée 78
2.2.5.2 Second exemple de validation : liaison voile/plancher . . 82
2.3 Une méthode de résolution adaptée à la TVRC 86
2.3.1 Le principe de résolution 86
2.3.2 Traitement d'exemples avec le solveur multi-grille 88
2.3.2.1 Cas d'une plaque en flexion 88
2.3.2.2 Cas d'un dôme impacté 90
2.4 Une nouvelle approche de l'analyse large bande pour la TVRC 91
2.4.1 Les approximants de Padé 92
2.4.2 Dérivées successives du vecteur solution 94
2.4.3 Procédure pour la reconstruction de la réponse en fréquence en utilisant les approximants de Padé 95
2.4.4 Analyse multi-fréquentielle sur un exemple simple 97
2.5 Structure de l'algorithme de résolution fréquentielle 102
2.6 Conclusions du développement de la TVRC 103

2.1 Développements et implémentation théoriques

Une fois que le signal temporel aux bornes de la zone non linéaire est obtenu dans la première étape de la stratégie, un processus FFT (transformée rapide de Fourier) transfère le problème dans le domaine des fréquences. Nous avons besoin de résoudre un problème de vibration forcée sur une gamme de fréquence qui comprend les gammes basses et moyennes fréquences. Les plages de basses et moyennes fréquences sont traitées en utilisant la théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC) ([Ladevèze *et al.*, 2001], ([Ladevèze et Chevreuil, 2005]). Les hautes fréquences qui disparaissent rapidement et qui ne contiennent pas beaucoup d'énergie ne sont pas comptabilisées.

Initialement développé sous Mathematica ([Mathematica, 1988]) puis sous le programme Cast3m ([Cast3m, 1980]), la résolution de problématiques de vibrations forcées par la TVRC sous ce dernier code de calcul présente de nombreux inconvénients, notamment dans son manque d'évolutivité et dans ses difficultés pour gérer les nombres complexes présents dans cette théorie. Au cours des travaux, [Chevreuil, 2005] et [Dorival *et al.*, 2006], une implantation sous la forme d'un code Matlab ([Matlab, 1980]) a été mise en place, permettant ainsi de s'affranchir des problèmes liés aux nombres complexes. Néanmoins la capacité d'évolution reste tout de même difficile. [Kovalevsky, 2011] a alors permis de résoudre ce dernier problème en développant un code également sous Matlab à forte capacité évolutive dans le domaine acoustique. Pour traiter notre problématique de chute d'avion, nous nous sommes alors appuyés sur ce code en l'adaptant au cadre de la mécanique.

De là, l'application à notre cas de charge du génie civil nucléaire a nécessité de réunir et d'implémenter plusieurs développements théoriques de la TVRC existants : les structures de type plaque ([Arnaud, 2000]) et coque ([Riou *et al.*, 2004]), les déformations de flexion ([Ladevèze, 1996]) et de membrane ([Sourcis, 2005]), les interfaces complexes ([Dorival *et al.*, 2006]) et enfin l'aspect dynamiquetransitoire ([Chevreuil, 2005]). L'adaptation de l'ensemble de ces théories a également impliqué une réécriture de la formulation variationnelle. La TVRC ainsi que ces différents développements seront explicités dans la suite de ce chapitre.

2.2 Description de la théorie variationnelle des rayons complexes

2.2.1 Problème de référence dans le cas général d'un assemblage de n sous-structures

Nous nous plaçons dans le cas des coques minces de Kirchhoff-Love (hypothèse s'adaptant aux structures du génie civil nucléaire), d'épaisseur h_i, de masse volumique ρ_i, qui vibrent à l'état de vibration harmonique stable à fréquence fixe $f = \frac{\omega}{2\pi}$, et où i désigne la sous-structure en question. Sous les hypothèses de Kirchhoff-Love, le déplacement est linéaire en z (variable d'épaisseur) et une perpendiculaire à la surface moyenne

reste perpendiculaire à la surface au cours du mouvement. Le déplacement $\underline{U_i}$ de la surface moyenne s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \underline{U_i}(x,y,z) &= \underline{u_i}(x,y) + w_i(x,y)\,\underline{e_{3_i}} + z\underline{\theta_i} \\ \underline{\theta_i}(x,y) &= -\underline{grad}\; w_i(x,y) - \underline{\underline{B_i}}\,\underline{u_i}(x,y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\underline{u_i}$ est le déplacement de la surface moyenne, w_i représente le déplacement hors plan et $\underline{\underline{B_i}}$ le tenseur de courbure. La surface moyenne de la coque est définie par deux paramètres indépendants α_i et β_i. La position d'un point sur la surface moyenne est définie par le vecteur de position $\underline{r_i}(\alpha_i,\beta_i)$ (voir la figure 2.1).

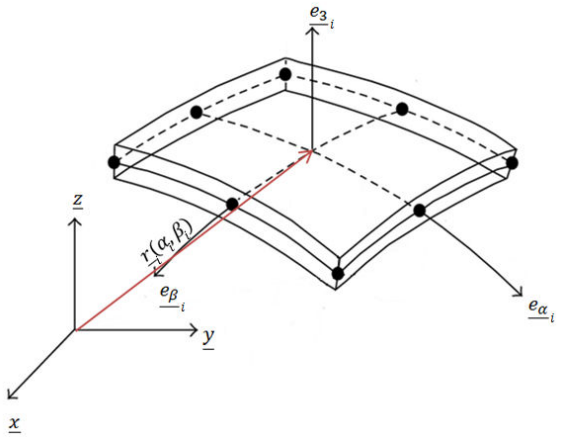


FIGURE 2.1: Géometrie d'un élément coque Ω_i.

Le plan tangent local à la coque en un point $\underline{r_i}(\alpha_i,\beta_i)$ est défini par deux vecteurs, $\frac{\partial \underline{r_i}}{\partial \alpha_i} = A_i \underline{e_{\alpha_i}}$ et $\frac{\partial \underline{r_i}}{\partial \beta_i} = B_i \underline{e_{\beta_i}}$ (les vecteurs $\underline{e_{\alpha_i}}$ et $\underline{e_{\beta_i}}$ sont de norme unitaire). Le vecteur $\underline{e_{3_i}}$ est défini par $\underline{e_{3_i}} = \underline{e_{\alpha_i}} \wedge \underline{e_{\beta_i}}$. Un choix simple des paramètres α_i et β_i consiste à les prendre égaux aux abscisses curvilignes le long des enveloppes des axes de courbure principaux. Les courbes $\alpha_i \mapsto \underline{r_i}(\alpha_i,\beta_{0i})$ et $\beta_i \mapsto \underline{r_i}(\alpha_{0i},\beta_i)$ sont les lignes de courbure, et forment un réseau de lignes orthogonales ([Laroze, 1980]). La base $\left(\underline{e_{\alpha_i}},\underline{e_{\beta_i}},\underline{e_{3_i}}\right)$ est alors orthogonale. Le tenseur de courbure s'écrit :

$$\underline{\underline{B_i}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{\alpha_i}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{\beta_i}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\left(\underline{e_{\alpha_i}},\underline{e_{\beta_i}},\underline{e_{3_i}}\right)} \tag{2.2}$$

où R_{α_i} et R_{β_i} sont les rayons de courbure des lignes de courbure.

Soit un domaine Ω décomposé en n coques Ω_i de frontière commune avec le domaine Ω_j, Γ_{ij}. Les actions de l'environnement sur Ω_i sont modélisées par les déplacements imposés hors plan w_i sur $\partial_w\Omega_i$ et de membrane $\underline{u_i}$ sur $\partial_{\underline{u}}\Omega_i$, des rotations imposées $w_{,\underline{n}_i}$ sur $\partial_{w_{,\underline{n}}}\Omega_i$, des efforts linéiques imposés de flexion K_i sur $\partial_K\Omega_i$ et de membrane (pression et cisaillement) $\underline{N_i}$ sur $\partial_{\underline{N}}\Omega_i$, et des moments linéïques imposés $\mathcal{M}_i$ sur $\partial_{\mathcal{M}}\Omega_i$.

La figure 2.2 montre les actions de l'environnement entre le domaine Ω_i et Ω_j.

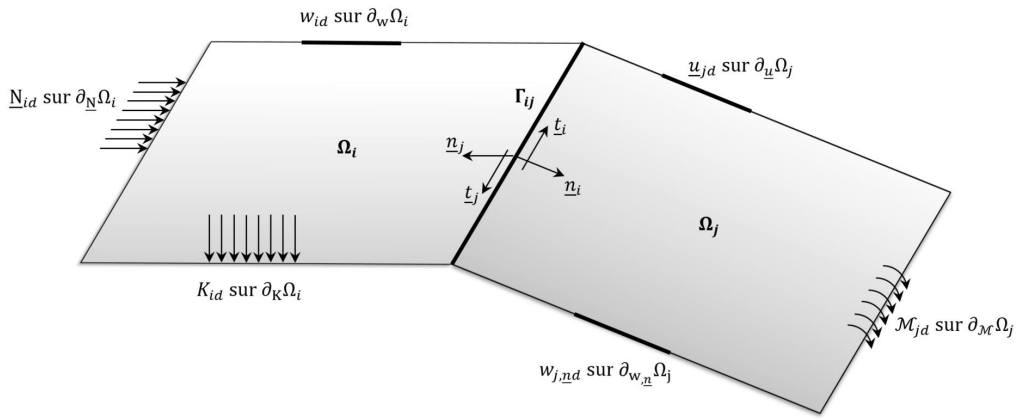


FIGURE 2.2: Problème de référence.

Le problème de référence à résoudre est : trouver $(\underline{u}_i, w_i, K_i, \underline{N}_i, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i)$ vérifiant :

– les équations cinématiques :

$$
\begin{aligned}
\underline{u}_i - \tfrac{1}{k_{tbi}(1+i\eta_{tbi})}\underline{N}_i &= \underline{u}_{id} && \text{sur } \partial_{\underline{u}}\Omega_i \\
w_i - \tfrac{1}{k_{tbi}(1+i\eta_{tbi})}K_i &= w_{id} && \text{sur } \partial_w\Omega_i \\
w_{i,\underline{n}} + \tfrac{1}{k_{rbi}(1+i\eta_{rbi})}\underline{n}_i^\top.\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i.\underline{n}_i &= w_{i,\underline{n}d} && \text{sur } \partial_{w,\underline{n}}\Omega_i \\
\underline{u}_i^\top.\underline{n}_i = -\alpha_{ij}\underline{u}_j^\top.\underline{n}_j + \left(1+\alpha_{ij}\right)w_j - \tfrac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\underline{N}_i^\top.\underline{n}_i - \alpha_{ij}\underline{N}_j^\top.\underline{n}_j + \left(1+\alpha_{ij}\right)K_j) && \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{u}_j^\top.\underline{n}_j = -\alpha_{ij}\underline{u}_i^\top.\underline{n}_i + \left(1+\alpha_{ij}\right)w_i - \tfrac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\underline{N}_j^\top.\underline{n}_j - \alpha_{ij}\underline{N}_i^\top.\underline{n}_i + \left(1+\alpha_{ij}\right)K_i) && \text{sur } \Gamma_{ij} \\
w_i = -\alpha_{ij}w_j + \left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{u}_j^\top.\underline{n}_j - \tfrac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-K_i - \alpha_{ij}K_j + \left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{N}_j^\top.\underline{n}_j) && \text{sur } \Gamma_{ij} \\
w_j = -\alpha_{ij}w_i + \left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{u}_i^\top.\underline{n}_i - \tfrac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-K_j - \alpha_{ij}K_i + \left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{N}_i^\top.\underline{n}_i) && \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{u}_i^\top.\underline{t}_i = -\beta_{ij}\underline{u}_j^\top.\underline{t}_j - \tfrac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\underline{N}_i^\top.\underline{t}_i - \beta_{ij}\underline{N}_j^\top.\underline{t}_j\right) && \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{u}_j^\top.\underline{t}_j = -\beta_{ij}\underline{u}_i^\top.\underline{t}_i - \tfrac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\underline{N}_j^\top.\underline{t}_j - \beta_{ij}\underline{N}_i^\top.\underline{t}_i\right) && \text{sur } \Gamma_{ij} \\
w_{i,\underline{n}} = \beta_{ij}w_{j,\underline{n}} - \tfrac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(\underline{n}_i^\top\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i - \beta_{ij}\underline{n}_j^\top.\underline{\underline{\mathcal{M}}}_j.\underline{n}_j\right) && \text{sur } \Gamma_{ij} \\
w_{j,\underline{n}} = \beta_{ij}\,w_{i,\underline{n}} - \tfrac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(\underline{n}_j^\top.\underline{\underline{\mathcal{M}}}_j.\underline{n}_j - \beta_{ij}\underline{n}_i^\top.\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i.\underline{n}_i\right) && \text{sur } \Gamma_{ij}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

où $\alpha_{ij} = \underline{n}_i^\top.\underline{n}_j$ et $\beta_{ij} = \underline{t}_i^\top.\underline{t}_j$

et où k_{rbi}, k_{tbi}, η_{rbi} et η_{tbi} sont respectivement la raideur en rotation et translation et l'amortissement en rotation et translation de la condition limite associée au sous-domaine Ω_i ([Dorival *et al.*, 2006], [Dorival *et al.*, 2008]).

k_{rii}, k_{tij}, η_{rij} et η_{tij} sont respectivement la raideur en rotation et translation et l'amortissement en rotation et translation de la frontière Γ_{ij} associée aux sous-domaines Ω_i et Ω_j.

– les équations d'équilibre sur Ω_i :

$$\begin{array}{rl}
\underline{N}_i - \underline{\underline{B}}_i \left(\underline{div}\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i \right) = -\rho_i \omega^2 h_i \underline{u}_i & \text{dans } \Omega_i \\
div \left(\underline{div}\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i \right) + Tr \left(\underline{\underline{N}}_i . \underline{\underline{B}}_i \right) = -\rho_i \omega^2 h_i w_i & \text{dans } \Omega_i \\
\underline{N}_i = \underline{\underline{N}}_i . \underline{n}_i - \underline{\underline{B}}_i . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i . \underline{n}_i = \underline{N}_{id} & \text{sur } \partial_{\underline{N}} \Omega_i \\
K_i = \underline{n}_i^\top . \underline{div}\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i + \left(\underline{t}_i^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i . \underline{n}_i \right)_{,t} = K_{id} & \text{sur } \partial_K \Omega_i \\
\underline{n}_i^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i . \underline{n}_i = \mathcal{M}_{id} & \text{sur } \partial_{\mathcal{M}} \Omega_i \\
\left[\left[\underline{t}_i^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i . \underline{n}_i \right] \right]_{\text{Coins anguleux de } \partial\Omega_i} = 0 &
\end{array} \tag{2.4}$$

– les équations d'équilibre sur Γ_{ij} :

$$\begin{array}{rl}
\underline{N}_i^\top . \underline{n}_i = \alpha_{ij} \underline{N}_j^\top . \underline{n}_j - \left(1 + \alpha_{ij}\right) K_j & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{N}_j^\top . \underline{n}_j = \alpha_{ij} \underline{N}_i^\top . \underline{n}_i - \left(1 + \alpha_{ij}\right) K_i & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
K_i = \alpha_{ij} K_j - \left(1 + \alpha_{ij}\right) \underline{N}_j^\top . \underline{n}_j & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
K_j = \alpha_{ij} K_i - \left(1 + \alpha_{ij}\right) \underline{N}_i^\top . \underline{n}_i & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{N}_i^\top . \underline{t}_i = \beta_{ij} \underline{N}_j^\top . \underline{t}_j & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{N}_j^\top . \underline{t}_j = \beta_{ij} \underline{N}_i^\top . \underline{t}_i & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{n}_i^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i . \underline{n}_i = -\beta_{ij} \underline{n}_j^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_j . \underline{n}_j & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\underline{n}_j^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_j . \underline{n}_j = -\beta_{ij} \underline{n}_i^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i . \underline{n}_i & \text{sur } \Gamma_{ij} \\
\sum_{i=1}^{n} \left(\underline{n}_i^\top . \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i . \underline{n}_i \right) \underline{t}_i = \underline{0} & \\
\sum_{i=1}^{n} \left(\underline{N}_i^\top . \underline{n}_i - K_i \right) = 0 &
\end{array} \tag{2.5}$$

– les relations de comportement :

$$\begin{array}{rl}
\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i = \frac{{h_i}^3}{12} \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP_i} : \underline{\underline{\mathcal{X}}} \left(w_i \right) & \text{dans } \Omega_i \\
\underline{N}_i = h_i \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP_i} : \underline{\underline{\gamma}} \left(\underline{u}_i \right) & \text{dans } \Omega_i
\end{array} \tag{2.6}$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP_i} = (1 + i\eta_i) \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i}$ est l'opérateur de Hooke en contraintes planes, ρ_i la masse volumique associée, η_i le taux d'amortissement structurel pour chaque sous-domaine et $\underline{\underline{\mathcal{X}}}$ et $\underline{\underline{\gamma}}$ les opérateurs définis par :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP_i} = (1 + i\eta_i) \begin{bmatrix} \frac{E_{\alpha_i}}{1 - \nu_{\alpha_i} \nu_{\beta_i}} & \frac{\nu_{\alpha_i} E_{\alpha_i}}{1 - \nu_{\alpha_i} \nu_{\beta_i}} & 0 \\ \frac{\nu_{\beta_i} E_{\beta_i}}{1 - \nu_{\alpha_i} \nu_{\beta_i}} & \frac{E_{\beta_i}}{1 - \nu_{\alpha_i} \nu_{\beta_i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{E_{\alpha_i} E_{\beta_i}}}{2(1 + \sqrt{\nu_{\alpha_i} \nu_{\beta_i}})} \end{bmatrix}_{\left(\underline{e}_{\alpha_i}, \underline{e}_{\beta_i}, \underline{e}_{3_i} \right)} \tag{2.7}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{X}}} \left(\underline{u}_i \right) = \underline{\underline{\varepsilon}} \left(\theta_i \right) - \left[\underline{\underline{B}}_i . \underline{\underline{\varepsilon}} \left(\underline{u}_i + w_i \underline{e}_{3_i} \right) \right]_{\text{sym}}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} \left(\underline{u}_i \right) = \underline{\underline{\varepsilon}} \left(\underline{u}_i + w_i \underline{e}_{3_i} \right)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est la partie symétrique de l'opérateur gradient, E_{α_i,β_i} le module d'Young, ν_{α_i,β_i} le coefficient de Poisson suivant les directions $\underline{e_{\alpha_i}}$ et $\underline{e_{\beta_i}}$, et h_i l'épaisseur de la coque.

2.2.2 La formulation variationnelle associée à la TVRC

2.2.2.1 Cas simplifié de deux sous-structures en liaison parfaite

En première approche pour présenter simplement la TVRC, nous avons choisi de nous concentrer sur un assemblage de deux sous-structures en liaison parfaite dont le déplacement de la surface moyenne pour la sous-structure i est $\underline{U_i}$ et la contrainte associée est notée $\underline{\underline{\sigma}}_i$.

Le premier ingrédient de la TVRC est une formulation faible globale des conditions aux limites en termes de déplacements et forces. La formulation faible peut dans ce cas être écrite comme suit :
Trouver $(\underline{U}_1, \underline{\underline{\sigma}}_1) \in S_{ad,1}$ et $(\underline{U}_2, \underline{\underline{\sigma}}_2) \in S_{ad,2}$ tels que :

$$\mathcal{A}\left(\left|\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array}\right., \left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array}\right.\right) = \mathcal{L}\left(\left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array}\right.\right) \tag{2.8}$$

où :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\left|\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array}\right., \left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array}\right.\right) = \mathcal{R}e\Bigg\{-i\omega\Bigg[&\int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_1} \delta\underline{\underline{\sigma}}_1.\underline{n}_1.\underline{U}_1^* d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_1} \underline{\underline{\sigma}}_1.\underline{n}_1.\delta\underline{U}_1^* d\mathcal{S} \\ &+ \int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_2} \delta\underline{\underline{\sigma}}_2.\underline{n}_2.\underline{U}_2^* d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_2} \underline{\underline{\sigma}}_2.\underline{n}_2.\delta\underline{U}_2^* d\mathcal{S} \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{12}} \left\{\begin{array}{l} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}_1.\underline{n}_1 + \underline{\underline{\sigma}}_2.\underline{n}_2\right).(\underline{U}_1 + \underline{U}_2)^* \\ +\left(\underline{\underline{\sigma}}_1.\underline{n}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2.\underline{n}_2\right).(\delta\underline{U}_1 - \delta\underline{U}_2)^* \end{array}\right\} d\mathcal{S}\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array}\right.\right) = \mathcal{R}e\Bigg\{-i\omega\Bigg[&\int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_1} \delta\underline{\underline{\sigma}}_1.\underline{n}_1.\underline{U}_{1d}^* d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_1} \underline{F}_{1d}.\delta\underline{U}_1^* d\mathcal{S} \\ &+ \int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_2} \delta\underline{\underline{\sigma}}_2.\underline{n}_2.\underline{U}_{2d}^* d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_2} \underline{F}_{2d}.\delta\underline{U}_2^* d\mathcal{S}\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.10}$$

où :

- la partie de l'intégrale en $\partial_{\underline{U}}\Omega_i$ permet de vérifier en moyenne les déplacements imposés sur Ω_i,
- la partie en $\partial_{\underline{F}}\Omega_i$ permet de satisfaire les efforts imposés sur Ω_i,
- et la partie en Γ_{ij} vérifie la transmission des conditions à la frontière Γ_{ij}.

$\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle d'une quantité et * sa partie conjuguée. Les espaces $\mathcal{S}^0_{ad,i}$ représentent les champs admissibles associés à des conditions homogènes sur la sous-structure Ω_i : $\underline{f}_{d,i} = \underline{0} \quad , \forall i = 1,\ 2$. Dans notre cas, $\mathcal{S}^0_{ad,i} \equiv \mathcal{S}_{ad,i} \quad , \forall i = 1,\ 2$.

Cette formulation peut également être élargie au cas plus global de n sous-structures en liaison parfaite ou non.

2.2.2.2 Cas étendu et généralisé à n sous-structures

La formulation faible prenant en compte n sous-structures avec des conditions de liaison généralisées peut être exprimée comme suit :
Trouver $(\underline{U}_i, \underline{\underline{\sigma}}_i) \in S_{ad,i}$ tels que :

$$\mathcal{A}\left(\left|\begin{array}{c} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{array}\right., \left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \dots \\ \delta s_n \end{array}\right.\right) = \mathcal{L}\left(\left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \dots \\ \delta s_n \end{array}\right.\right) \tag{2.11}$$

avec la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\left|\begin{array}{c} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{array}\right., \left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \dots \\ \delta s_n \end{array}\right.\right) = \mathcal{R}e\Bigg\{ -i\omega \Bigg[&\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_i} \delta\underline{\underline{\sigma}}_i.\underline{n}_i.\underline{U}_i^* \, d\mathcal{S} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_i} \underline{\underline{\sigma}}_i.\underline{n}_i.\delta\underline{U}_i^* \, d\mathcal{S} \\ &+ \int_{\Gamma_{ij}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}_i.\underline{n}_i\right).\left(\underline{U}_i\right)^* + \frac{1}{n} \sum_{i\neq j} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}_i.\underline{n}_i\right).\left(\underline{U}_j\right)^* \\ +\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{\underline{\sigma}}_i.\underline{n}_i\right).\left(\delta\underline{U}_i\right)^* - \frac{1}{n} \sum_{i\neq j} \left(\underline{\underline{\sigma}}_i.\underline{n}_i\right).\left(\delta\underline{U}_j\right)^* \end{array} \right\} d\mathcal{S} \Bigg] \Bigg\}\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}\left(\left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \dots \\ \delta s_n \end{array}\right.\right) = \mathcal{R}e\left\{ -i\omega \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_i} \delta\underline{\underline{\sigma}}_i.\underline{n}_i.\underline{U}_{id}^* \, d\mathcal{S} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_i} \underline{F}_{id}.\delta\underline{U}_i^* \, d\mathcal{S} \right] \right\} \tag{2.13}$$

Plus précisément, dans notre cas de coques minces de Kirchhoff-Love, les conditions aux limites sont satisfaites par la formulation faible pouvant être réécrite de la manière suivante :

Trouver $(\underline{u}_i, w_i, K_i, \underline{N}_i, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i) \in S_{ad,i}$ tel que :

$$\mathcal{A}\left(\left|\begin{array}{c} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \dots \\ \delta s_n \end{array}\right|\right) =$$

$$\mathcal{R}e\left\{-i\omega\left[\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_i}\left(\delta\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right).\left(w_{i,\underline{n}}+\frac{1}{k_{ri}(1+i\eta_{ri})}\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right)^* dl \\
-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_w\Omega_i}\delta K_i.\left(w_i-\frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}K_i\right)^* dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_i}\delta\underline{N}_i.\left(\underline{u}_i-\frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}\underline{N}_i\right)^* dl \\
+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\mathcal{M}}\Omega_i}\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right).\delta w^*_{i,\underline{n}}dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_K\Omega_i}K_i.\delta w^*_i dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{N}}\Omega_i}\underline{N}_i.\delta\underline{u}^*_i dl \\
-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[\left[(\underline{t}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i).\delta w^*_i\right]\right] \\
+\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right).\left(w_{i,\underline{n}}+\frac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right).\left(\beta_{ij}w_{j,\underline{n}}-\frac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(-\beta_{ij}\underline{n}_j\underline{\underline{\mathcal{M}}}_j\underline{n}_j\right)\right)^* dl \\
+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta w_{i,\underline{n}}\right)^*.\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right)dl+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta w_{j,\underline{n}}\right)^*.\left(\beta_{ij}\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right)dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta K_i\right).\left(w_i+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-K_i)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta K_i\right).\left(\alpha_{ij}w_j-\left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{u}_j\underline{n}_j+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\alpha_{ij}K_j+\left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{N}_j\underline{n}_j)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta w_i\right)^*.\left(K_i\right)dl-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta w_i\right)^*.\left(-\alpha_{ij}K_j+(1+\alpha_{ij})\underline{N}_j\underline{n}_j\right)dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{N}_i\underline{n}_i\right).\left(\underline{u}_i\underline{n}_i+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\underline{N}_i\underline{n}_i)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{N}_i\underline{n}_i\right).\left(\alpha_{ij}\underline{u}_j\underline{n}_j-\left(1+\alpha_{ij}\right)w_j+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\alpha_{ij}\underline{N}_j\underline{n}_j+\left(1+\alpha_{ij}\right)K_j)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{u}_i\underline{n}_i\right)^*.\left(\underline{N}_i\underline{n}_i\right)dl-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{u}_i\underline{n}_i\right)^*.\left(-\alpha_{ij}\underline{N}_j\underline{n}_j+(1+\alpha_{ij})K_j\right)dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{N}_i\underline{t}_i\right).\left(\underline{u}_i\underline{t}_i+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\underline{N}_i\underline{t}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{N}_i\underline{t}_i\right).\left(\beta_{ij}\underline{u}_j\underline{t}_j+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\beta_{ij}\underline{N}_j\underline{t}_j\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{u}_i\underline{t}_i\right)^*.\left(\underline{N}_i\underline{t}_i\right)dl-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\delta\underline{u}_i\underline{t}_i\right)^*.\left(-\beta_{ij}\underline{N}_j\underline{t}_j\right)dl
\end{array}\right]\right\}$$

$$\mathcal{L}\left(\left|\begin{array}{c} \delta s_1 \\ \dots \\ \delta s_n \end{array}\right|\right) = \mathcal{R}e\left\{-i\omega\left[\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_i}\left(\delta\underline{n}_i\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i\underline{n}_i\right).w^*_{i,\underline{n}d}dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_w\Omega_i}\delta K_i.w^*_{id}dl \\
-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_i}\delta\underline{N}_i.\underline{u}^*_{id}dl \\
+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\mathcal{M}}\Omega_i}M_{id}.\delta w^*_{i,\underline{n}}dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_K\Omega_i}K_{id}.\delta w^*_i dl \\
-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{N}}\Omega_i}\underline{N}_{id}.\delta\underline{u}^*_i dl
\end{array}\right]\right\} \tag{2.14}$$

Il est alors facile de prouver que la forme faible est équivalente au problème de référence, sous certaines conditions exposées dans l'annexe C.

La formulation faible précédente est projetée sur une base d'approximation des sous-espaces $\mathcal{S}_{ad,i}$ qui se compose de fonctions de forme satisfaisant exactement à la fois la relation de comportement (équation 2.6) et les équations d'équilibre dynamique (équations 2.4 et 2.5). Ces fonctions de forme qui seront définies dans le paragraphe 2.2.3 représentent des ondes de vibration locales des sous-domaines étudiés.

2.2.3 Définition des fonctions de forme à deux échelles

La TVRC est définie comme une méthode Trefftz dont la particularité se situe dans l'utilisation de fonctions d'onde de type Herglotz pour représenter le champ vibratoire. Ces fonctions sont une répartition intégrale des ondes planes dans toutes les directions. Ainsi, la TVRC utilise une approximation à deux échelles de $(\underline{U}_i^h, \underline{\underline{\sigma}}_i^h)$, présentant un sens mécanique fort, puisqu'elle se base sur une vérification des relations de comportement et équations d'équilibre. L'échelle rapide caractérisant le phénomène vibratoire est prise en compte analytiquement, tandis que l'échelle lente est calculée numériquement. Cette échelle lente est constituée par les amplitudes complexes des rayons de vibration. La solution est alors supposée convenablement décrite localement comme la superposition d'un nombre infini d'ondes locales pouvant être écrites de la manière suivante :

$$\underline{U}_i(\underline{X}_i, \underline{P}_i) = \int_{\underline{P}_i \in C_i} \underline{U_n}_i(\underline{P}_i)\, .e^{\underline{P}_i \cdot \underline{X}_i} \quad \text{sur } \Omega_i \tag{2.15}$$

Et par conséquence directe de la mécanique des milieux continus :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i(\underline{X}_i, \underline{P}_i) = \int_{\underline{P}_i \in C_i} \underline{\underline{C_n}}_i(\underline{P}_i)\, .e^{\underline{P}_i \cdot \underline{X}_i} \quad \text{sur } \Omega_i \tag{2.16}$$

où $\underline{X}_i$ représente le vecteur de position spatiale. $\underline{U_n}_i$ et $\underline{\underline{C_n}}_i$ contiennent les amplitudes des ondes de vibrations locales associées d'ordre n et désignent les amplitudes qui sont des fonctions qui varient lentement par rapport à l'espace. La partie exponentielle $e^{\underline{P}_i \cdot \underline{X}_i}$ contient la partie rapidement oscillante. $\underline{P}_i$ est un vecteur caractérisant la direction des ondes locales de vibration défini par le cercle C_i. Pour ces ondes locales, le champ $\left(\underline{U}_i, \underline{\underline{\sigma}}_i\right)$ est admissible dans $\mathcal{S}_{ad,i}$ s'il satisfait les équations d'équilibre dynamique et les relations de comportement. La combinaison de ces deux équations conduit à des fonctions de forme caractérisées par diverses expressions de $\underline{P}_i$.

En outre, il est connu que les ondes mécaniques se propageant dans un milieu élastique continu 3D sont divisées en trois familles (voir la figure 2.3) : les ondes P (pression), SH (cisaillement horizontale) et SV (cisaillement verticale) ([Graff, 1991]). La première correspond aux ondes polarisées longitudinalement, et les deux autres aux ondes polarisées transversalement. Nous cherchons donc des ondes admissibles pour notre problématique dans ces trois familles.

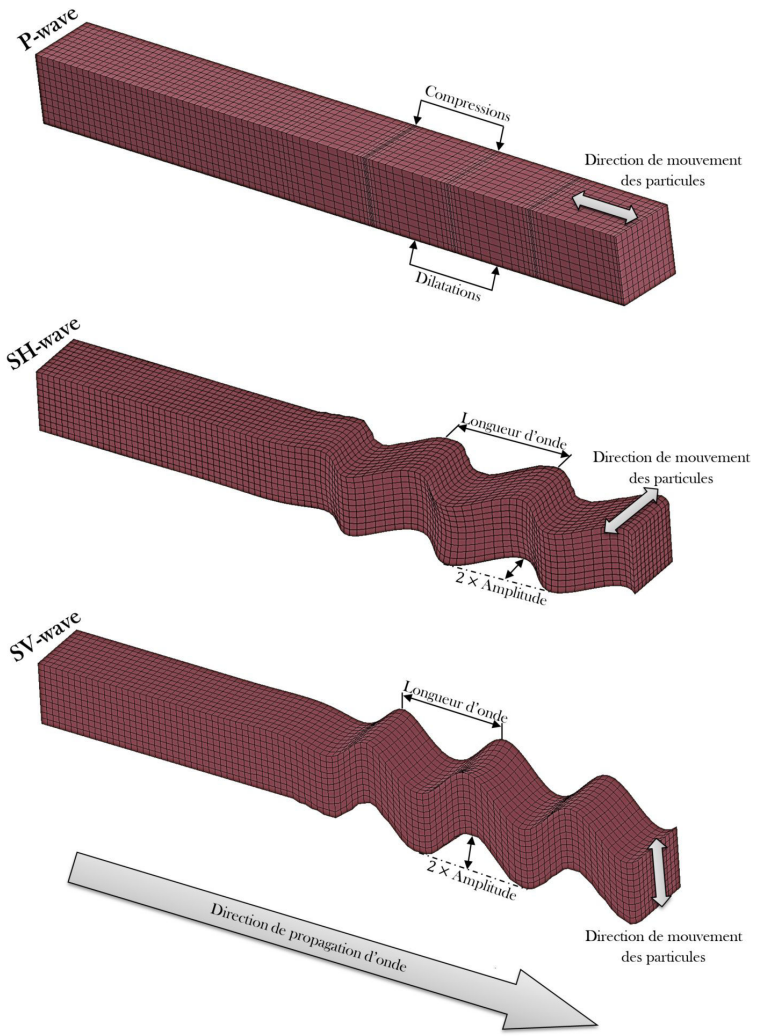


FIGURE 2.3: Les trois familles d'ondes mécaniques dans un milieu continu 3D.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allégerons les notations en considérant que les fonctions de forme sont définies sur le sous-domaine Ω_i. Ainsi l'indice i n'est plus nécessaire.

2.2.3.1 Définition des ondes de vibration de flexion

Considérons dans un premier temps les mouvements hors-plan de flexion de coques minces, selon la théorie de Kirchhoff-Love, le déplacement hors plan w de la surface moyenne de Ω est régi par l'équation d'onde suivante :

$$\frac{h^3}{12} div\left(\underline{div}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP} : \underline{\underline{\chi}}(w)\right)\right) + hTr\left(\left(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP} : \underline{\underline{\gamma}}(\underline{u})\right).\underline{\underline{B}}\right) = -\rho\omega^2 hw \quad \text{sur } \Omega \qquad (2.17)$$

En recherchant la solution de l'équation 2.17 sous la forme d'une onde définie par l'équation 2.15, nous pouvons distinguer deux types de solutions : les ondes propagatives et les ondes évanescentes. Les ondes propagatives apparaissent comme liées à l'intérieur du sous-domaine, les ondes évanescentes sont quant à elles liées aux bords et aux coins du sous-domaine.

Ainsi, nous pouvons obtenir l'équation de dispersion ([Riou *et al.*, 2004]) du vecteur d'onde $\underline{P}$:

$$(\underline{P}^T.\underline{P})^4 = \frac{12(1-\nu_\alpha\nu_\beta)\rho\omega^2}{(1+i\eta)E_{\alpha,\beta}h^2}(\underline{P}^T.\underline{P})^2 - \frac{12(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}{h^2}(\underline{P}^T.\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{R}}.\underline{P})^2 \tag{2.18}$$

où $\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice rotation ($\underline{\underline{R}}^T = -\underline{\underline{R}}$).
Les ondes de vibration régies par l'équation 2.15 représentent les solutions au premier ordre de l'équation (2.17), à condition de satisfaire l'équation 2.18. Néanmoins quelques observations doivent être faites :

- l'équation 2.18 est une extension à la dynamique de l'équation présentée dans [Steele, 1971] ;
- en faisant tendre les rayons de courbures de la coque vers l'infini - et ainsi tendre vers une formulation plaque - le tenseur de courbure $\underline{\underline{B}}$ se rapproche de $\underline{\underline{0}}$, on retrouve l'équation de dispersion des plaques :

$$(\underline{P}^T.\underline{P})^4 = \frac{12(1-\nu_\alpha\nu_\beta)\rho\omega^2}{(1+i\eta)E_{\alpha,\beta}h^2}(\underline{P}^T.\underline{P})^2 \tag{2.19}$$

- [Riou *et al.*, 2004] montre également que les déplacements de membrane du premier ordre dans la surface moyenne $\underline{u_1}$ sont entièrement déterminés par l'ordre 0 du déplacement hors plan $w_0 = w$. L'unique inconnue est donc w ;
- seuls les termes en w apparaissent dans le développement. Ainsi l'équation 2.18 est valable lorsque $\underline{\underline{\gamma}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u} + w\underline{e_3})$. Cette condition se valide au travers des équations régissant les différentes théories de coques telles que les théories de Kirchhoff, Love, Timoshenko, Reissner, Berry, Naghdi, Mushtari, Donnell, Koiter and Sanders ([Leissa, 1993]).

Les ondes du problème de flexion seront donc classées en trois groupes : intérieur, bord et coin. La première famille correspond à des ondes propagatives dans la direction $\underline{P}$. Les deux dernières sont des ondes évanescentes localisées aux bords et aux coins de la sous-structure.

Ces ondes complexes sont définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} w^h_{interieur}(\underline{X}, \underline{P}_{int}) = W^h_{interieur}(\underline{P}_{int}).e^{\underline{P}_{int}.\underline{X}}, & \text{sur } \Omega \\ w^h_{bord}(\underline{X}, \underline{P}_{bor}) = W^h_{bord}(\underline{P}_{bor}).e^{\underline{P}_{bor}.\underline{X}}, & \text{sur } \Omega \\ w^h_{coin}(\underline{X}, \underline{P}_{coi}) = W^h_{coin}(\underline{P}_{coi}).e^{\underline{P}_{coi}.\underline{X}}, & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

2.2.3.1.1 Les ondes de type intérieur

Pour les ondes intérieures, les vecteurs caractérisant leur propagation sont recherchés dans le plan moyen de la coque tels que :

$$\underline{P}_{int}(\varphi_{int}) = -i\underline{p}_{int}(\varphi_{int}) \begin{pmatrix} \cos\varphi_{int} \\ \sin\varphi_{int} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)} = -i \begin{pmatrix} p_{\alpha,int}(\varphi_{int}).\cos\varphi_{int} \\ p_{\beta,int}(\varphi_{int}).\sin\varphi_{int} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)} \tag{2.21}$$

Ces modes de vibration sont solutions de l'équation 2.18 si leurs amplitudes respectives $p_{\alpha/\beta,int}(\varphi)$ vérifient :

$$\begin{aligned} {p_{\alpha/\beta,int}}^4(\varphi_{int}) &= {p_{plaque,\alpha/\beta}}^4 - \left(\left(p_{coque,\alpha}.\sin\varphi_{int}\right)^2 + \left(p_{coque,\beta}.\cos\varphi_{int}\right)^2 \right)^2 \\ p_{plaque,\alpha/\beta} &= \left(\frac{12\rho\omega^2(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}{(1+i\eta)E_{\alpha/\beta}h^2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ p_{coque,\alpha/\beta} &= \left(\frac{12(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}{R^2_{\alpha/\beta}h^2} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{2.22}$$

L'équation 2.21 montre que $\underline{p}_{int}(\varphi_{int})$ doit appartenir à une courbe C_{int} définie par les propriétés du matériau, l'épaisseur et le rayon de la coque. En prenant en compte la totalité de la courbe C_{int}, toutes les directions de propagation des ondes sont prises en compte. Le rayon intérieur complexe correspond donc à une onde de flexion se propageant au travers du sous-domaine dans la direction $\underline{p}_{int}$. Quelques exemples de ces ondes sont observables sur la figure 2.4 pour $\varphi_{int} = 0°$, $45°$ et $90°$, sur un domaine de type coque ayant un seul axe de courbure.

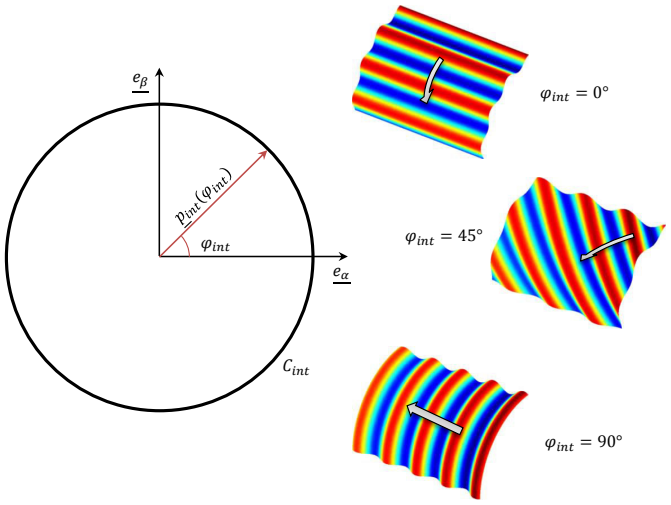


FIGURE 2.4: Description des rayons de type intérieur.

Il convient de noter qu'une onde propagative est définie par un vecteur d'onde avec une partie imaginaire très grande par rapport à la partie réelle. Dans le cas contraire, la partie réelle de l'onde est une fonction fortement décroissante, et l'onde devient alors évanescente. Dans le cas des ondes intérieures se caractérisant par $\underline{p}_{int}(\varphi_{int})$, cette condition est bien satisfaite. En effet, dans l'équation 2.21 la partie réelle est négligeable par rapport à la partie imaginaire.

2.2.3.1.2 Les ondes de type bord

Dans le cas des ondes de bord, les vecteurs d'ondes sont recherchés sous la forme :

$$\begin{gathered}\underline{P}_{bor}(\varphi_{bor}) = \underline{P}_{t,bor}(\varphi_{bor})\underline{t} + \underline{P}_{n,bor}(\varphi_{bor})\underline{n} \\ Re(\underline{P}_{n,bor}) \gg Im(\underline{P}_{n,bor})\end{gathered} \tag{2.23}$$

où $\underline{t}$ est le vecteur tangent au bord, et $\underline{n}$ le vecteur normal. Une forme explicite de ces ondes n'est pas facile à trouver. Les résultats de [Riou *et al.*, 2004] ont néanmoins montré que le choix des ondes de bord définies pour les plaques sont suffisantes pour représenter correctement la solution des éléments coques. Ce point est facilement compréhensible. En effet, les ondes de bord ont un effet uniquement sur le bord et non à l'intérieur de la structure. Or seule leur nature oscillatoire le long du bord est intéressante pour la recherche de la solution, ce qui est correctement représenté par les ondes de bord des plaques.

En suivant cela, [Ladevèze et Riou, 2005] donne la forme suivante :

$$\begin{gathered}\underline{P}_{n,bor}(\varphi_{bor}) = (1+i\eta)^{\frac{1}{4}}\left[\sqrt{1+\sin^2(\varphi_{bor})} - i\frac{\eta}{4}.\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\varphi_{bor})}}\right]\begin{pmatrix} p_{plaque,\alpha} \\ p_{plaque,\beta}\end{pmatrix}_{\left(\underline{e}_\alpha,\underline{e}_\beta\right)} \\ \underline{P}_{t,bor}(\varphi_{bor}) = i(1+i\eta)^{\frac{1}{4}}\sin\varphi_{bor}\begin{pmatrix} p_{plaque,\alpha} \\ p_{plaque,\beta}\end{pmatrix}_{\left(\underline{e}_\alpha,\underline{e}_\beta\right)}\end{gathered} \tag{2.24}$$

La figure 2.5 montre quelques exemples d'ondes de bord appliquées à un domaine de type coque.

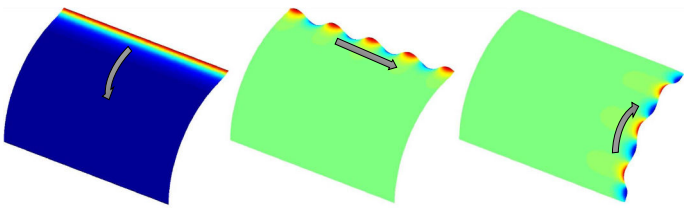


FIGURE 2.5: Description des rayons de type bord.

2.2.3.1.3 Les ondes de type coin

Enfin, les ondes de coin sont recherchées telles que $Re(\underline{P}_{coi}) \gg Im(\underline{P}_{coi})$, afin de satisfaire leur caractère évanescent. Encore une fois la forme explicite est difficile à trouver, mais les ondes de coin des plaques sont suffisantes pour permettre une bonne approximation de leurs effets ([Riou, 2004]).

$$\underline{P}_{coi}(\varphi_{coi}) = \underline{p}_{coi} \begin{pmatrix} \cos\varphi_{coi} \\ \sin\varphi_{coi} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta\right)} = \begin{pmatrix} p_{plaque,\alpha} . \cos\varphi_{coi} \\ p_{plaque,\beta} . \sin\varphi_{coi} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta\right)} \tag{2.25}$$

La figure 2.6 nous permet d'observer ce type d'ondes.

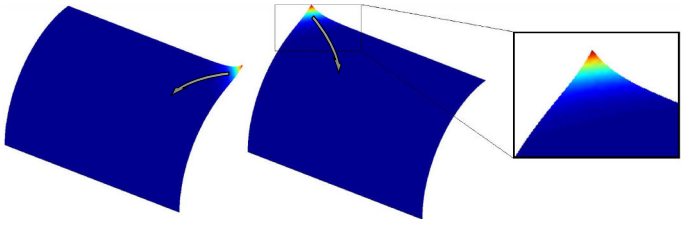


FIGURE 2.6: Description des rayons de coin.

On pourra noter que compte tenu des géométries de nos structures impactées associées aux conditions limites de notre chargement, l'utilisation des ondes de bords sont suffisantes pour représenter le caractère évanescent de la solution. Ainsi les ondes de coin ne seront pas pris en compte dans la suite de nos études.

2.2.3.2 Définition des ondes de vibration de membrane

Prenons le déplacement $\underline{u}$ défini dans le plan moyen d'une coque mince Ω par le modèle de Kirchhoff-Love. Les ondes de vibration doivent satisfaire l'équation 2.4 et l'équation 2.6 pour être valables. Le déplacement $\underline{u}$ vérifie alors l'équation de la dynamique suivante :

$$h\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP} : \underline{\underline{\gamma}}(\underline{u}) - \tfrac{h^3}{12}\underline{\underline{\underline{B}}}.\underline{div}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP} : \underline{\underline{\chi}}(w)\right) = -\rho\omega^2 h\underline{u} \quad \text{sur } \Omega \tag{2.26}$$

A nouveau la TVRC utilise des approximations $(\underline{u}^h, \underline{N}^h)$ avec un contenu mécanique fort. Localement on considère que la solution est bien décrite par la superposition d'un nombre fini d'ondes de vibration. Chacune d'elle peut être écrite pour des problèmes dans le plan telle que :

$$\begin{array}{l} \underline{u}(\underline{X}, \underline{P}) = \int_{\underline{P}\in\mathcal{C}} \underline{u_n}(\underline{P}) . e^{\underline{P}.\underline{X}} \quad \text{sur } \Omega \\ \underline{N}(\underline{X}, \underline{P}) = \int_{\underline{P}\in\mathcal{C}} \underline{N_n}(\underline{P}) . e^{\underline{P}.\underline{X}} \quad \text{sur } \Omega \end{array} \tag{2.27}$$

où $\underline{X}$ représente le vecteur position. $\underline{P}$ est le vecteur d'onde complexe, où la direction de propagation est définie par le cercle $\mathcal{C}_i$, associé aux ondes de vibrations dans le plan moyen de la coque. $\underline{u_n}$ et $\underline{N_n}$ sont les n vecteurs polynômes dans $\underline{X}$ dont les coefficients sont dépendants de $\underline{P}$. Pour être admissible les ondes $(\underline{u},\underline{N})$ doivent appartenir au champ $\mathcal{S}_{ad}$:

$$\begin{cases} \underline{N} - \underline{\underline{B}}\left(\underline{div}\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}\right) = -\rho\omega^2 h\underline{u}, & \text{sur } \Omega \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} = \frac{h^3}{12}\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP} : \underline{\underline{\mathcal{X}}}(w), & \text{sur } \Omega \\ \underline{N} = h\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP} : \underline{\underline{\gamma}}(\underline{u}), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.28}$$

Dans la suite, nous ne considérons que les polynômes d'ordre 0, pour $\underline{u_0} = \underline{u}$ et $\underline{N_0} = \underline{N}$, parce que la partie exponentielle (échelle rapide) varie rapidement par rapport à la partie polynomiale (échelle lente). Dans les études précédentes cette approximation s'est avérée suffisante. On peut distinguer deux familles : les ondes de pression et de cisaillement.

2.2.3.2.1 Les ondes de pression

Ce type d'onde correspond à des ondes de pression (traction-compression). Le champ de déplacement $\underline{u_0}_{pression}$ est considéré constant et colinéaire à $\underline{P}_{pres}$.

$$\underline{u}_{pression}\left(\underline{X},\underline{P}_{pres}\right) = \underline{u_0}_{pression}\left(\underline{P}_{pres}\right).e^{\underline{P}_{pres}.\underline{X}}, \quad \text{sur } \Omega \tag{2.29}$$

où

$$\begin{gathered} \underline{u_0}_{pression}\left(\underline{P}_{pres}\right) = u_{0pres}\begin{pmatrix} \cos\theta_{pres} \\ \sin\theta_{pres} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta}\right)} \\ \underline{P}_{pres}(\theta_{pres}) = i\underline{p}_{pres}(\theta_{pres}) = i(p_{\alpha,pres}.\cos(\theta_{pres})\underline{e_\alpha} + p_{\beta,pres}.\sin(\theta_{pres})\underline{e_\beta}) \end{gathered} \tag{2.30}$$

Ainsi l'équation 2.28 impose la relation suivante :

$$p^2_{\alpha/\beta,pres} = \frac{\rho\omega^2(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}{E_{\alpha/\beta}(1+i\eta)} \tag{2.31}$$

Ces ondes sont propagatives. Les équations 2.28 et 2.29 montrent que les directions de propagation $\underline{p}_{pres}(\theta_{pres})$ de ces ondes appartiennent au cercle C_{pres} dont les caractéristiques sont définies par les propriétés matériau du domaine. Ainsi en parcourant l'ensemble du cercle C_{pres} (voir la figure 2.7), toutes les directions de propagation des ondes sont prises en compte.

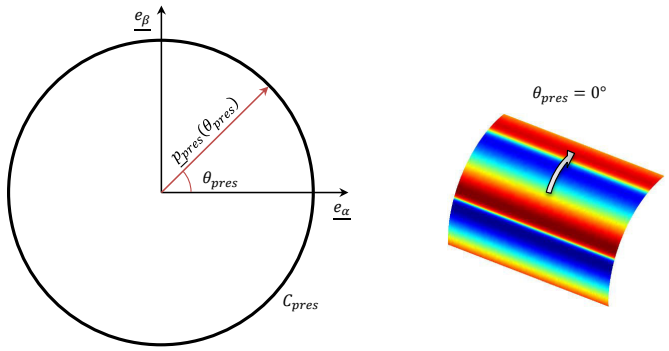


FIGURE 2.7: C_{pres} cercle définissant les directions de propagation des ondes de pression.

2.2.3.2.2 Les ondes de cisaillement

Ces ondes correspondent à des ondes de cisaillement dans le plan moyen de la coque. Le déplacement membranaire $\underline{u_0}_{cisaillement}$ est considéré comme étant constant et orthogonal à $\underline{P}_{cis}$ et $\underline{e_3}$.

$$\underline{u}_{cisaillement}\left(\underline{X},\underline{P}_{cis}\right) = \underline{u_0}_{cisaillement}\left(\underline{P}_{cis}\right).e^{\underline{P}_{cis}.\underline{X}}, \quad \text{sur } \Omega \tag{2.32}$$

où

$$\underline{u_0}_{cisaillement}\left(\underline{P}_{cis}\right) = u_{0cis}\begin{pmatrix} -\sin\theta_{cis} \\ \cos\theta_{cis} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta}\right)} \tag{2.33}$$

$$\underline{P}_{cis}(\theta_{cis}) = i\underline{p}_{cis}(\theta_{cis}) = i(p_{\alpha,cis}.\cos(\theta_{cis})\underline{e_\alpha} + p_{\beta,cis}.\sin(\theta_{cis})\underline{e_\beta})$$

L'équation 2.28 impose la relation suivante :

$$p^2_{\alpha/\beta,cis} = \frac{2\rho\omega^2(1+\sqrt{\nu_\alpha\nu_\beta})}{E_{\alpha/\beta}(1+i\eta)} \tag{2.34}$$

De la même façon que pour les ondes de pression, les ondes de cisaillement sont de type propagatives. $\underline{p}_{cis}(\theta_{cis})$ appartient alors au cercle noté C_{cis} (voir la figure 2.8).

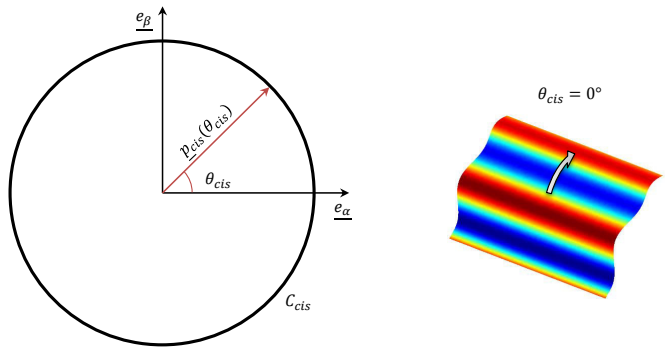


FIGURE 2.8: C_{cis} cercle des directions de propagation des ondes de cisaillement.

Les ondes de pression sont plus rapides que les ondes de cisaillement. En outre, les ondes de flexion ont une vitesse qui dépend de la fréquence et de l'épaisseur de la coque. Si un ensemble de sous-domaines non coplanaires est étudié, un couplage entre les ondes de flexion et les ondes de membrane apparaît. Il n'est significatif que dans le sens du membranaire vers la flexion. En effet, pour valider cet aspect [Sourcis, 2005] s'est intéressé à la quantité d'énergie apportée par chacun de ces types d'ondes ($E_{tot} = E_d + T$, où E_{tot} représente l'énergie totale, E_d l'énergie de déformation et T l'énergie cinétique), les ondes de flexion sont moins énergétiques que les ondes de membrane, parce que la vitesse et la force sont plus faibles en flexion qu'en traction. Nous pouvons donc conclure que les ondes de membrane excitent facilement un mode de flexion, mais l'effet inverse est insignifiant. Cette hypothèse est régulièrement adoptée dans les études portant sur des problématique de flexion.

2.2.4 Discrétisation du problème

Le déplacement d'un point quelconque de la sous-structure est généré par une base d'ondes complexes admissibles. Les inconnues sont ici les amplitudes généralisées $\underline{U}^h(\underline{P})$ de la base comprenant toutes les directions $\varphi_{int/bor/coi}$ (voir les figures 2.4, 2.5 et 2.6) et $\theta_{pres/cis}$ (voir les figures 2.7 et 2.8) dans $C_{int/bor/coi/pres/cis}$ et conduisant alors à une intégrale sur $C_{int/bor/coi/pres/cis}$.
Cette intégrale prend alors la forme suivante :

– pour le déplacement de flexion :

$$\begin{aligned} w^h(\underline{x}) = & \int_{\varphi_{int}\in C_{int}} W^h_{interieur}(\varphi_{int}) e^{\underline{P}_{int}(\varphi_{int}).\underline{x}} d\varphi_{int} \\ & + \int_{\varphi_{bor}\in C_{bor}} W^h_{bord}(\varphi_{bor}) e^{\underline{P}_{bor}(\varphi_{bor}).\underline{x}} d\varphi_{bor} \\ & + \int_{\varphi_{coi}\in C_{coi}} W^h_{coin}(\varphi_{coi}) e^{\underline{P}_{coi}(\varphi_{coi}).\underline{x}} d\varphi_{coi} \end{aligned} \tag{2.35}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{P}_{int}(\varphi_{int}) = -i \begin{pmatrix} p_{\alpha,int}(\varphi_{int}).\cos\varphi_{int} \\ p_{\beta,int}(\varphi_{int}).\sin\varphi_{int} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta}\right)} \\ \underline{P}_{bor}(\varphi_{bor}) = \left[\begin{array}{l} (1+i\eta)^{\frac{1}{4}} \left[\sqrt{1+\sin^2(\varphi_{bor})} - i\frac{\eta}{4}.\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\varphi_{bor})}} \right] \begin{pmatrix} p_{plaque,\alpha} \\ p_{plaque,\beta} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta}\right)} .\underline{t} \\ +i(1+i\eta)^{\frac{1}{4}} \sin\varphi_{bor} \begin{pmatrix} p_{plaque,\alpha} \\ p_{plaque,\beta} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta}\right)} .\underline{n} \end{array} \right] \\ \underline{P}_{coi}(\varphi_{coi}) = \begin{pmatrix} p_{plaque,\alpha}.\cos\varphi_{coi} \\ p_{plaque,\beta}.\sin\varphi_{coi} \end{pmatrix}_{\left(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta}\right)} \end{array} \right. \tag{2.36}$$

– pour le déplacement membranaire :

$$\begin{aligned}\underline{u}^h(\underline{x}) = &\int_{\theta_{pres}\in C_{pres}} \underline{u_0}^h_{pression}(\theta_{pres}).e^{\underline{P}_{pres}(\theta_{pres}).\underline{x}} d\theta_{pres} \\ &+ \int_{\theta_{cis}\in C_{cis}} \underline{u_0}^h_{cisaillement}(\theta_{cis}).e^{\underline{P}_{cis}(\theta_{cis}).\underline{x}} d\theta_{cis}\end{aligned} \tag{2.37}$$

avec

$$\begin{cases} \underline{u_0}^h_{pression}(\theta_{pres}) = u_{0pres}\begin{pmatrix}\cos\theta_{pres}\\ \sin\theta_{pres}\end{pmatrix}_{(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta})} \\ \underline{P}_{pres}(\theta_{pres}) = i(p_{\alpha,pres}.\cos(\theta_{pres})\underline{e_\alpha} + p_{\beta,pres}.\sin(\theta_{pres})\underline{e_\beta}) \\ \underline{u_0}^h_{cisaillement}(\theta_{cis}) = u_{0cis}\begin{pmatrix}-\sin\theta_{cis}\\ \cos\theta_{cis}\end{pmatrix}_{(\underline{e_\alpha},\underline{e_\beta})} \\ \underline{P}_{cis}(\theta_{cis}) = i(p_{\alpha,cis}.\cos(\theta_{cis})\underline{e_\alpha} + p_{\beta,cis}.\sin(\theta_{cis})\underline{e_\beta}) \end{cases} \tag{2.38}$$

Notons que l'espace admissible $\mathcal{S}_{ad}$ est de dimension infinie puisque, par exemple, pour les ondes intérieures, toutes les directions de propagation $\underline{p}$ sont prises en compte. Pour nous ramener à un problème de dimension finie pouvant être résolu numériquement, nous devons discrétiser $\mathcal{S}_{ad}$ en un espace de dimension finie $\mathcal{S}^h_{ad}$.

Les intégrales de l'équation 2.35 et l'équation 2.37 peuvent être discrétisées comme des fonctions de Dirac et ainsi on peut considérer l'amplitude approximative $\underline{U}^h(\underline{P}(\varphi))$. Les distributions angulaires des ondes planes pour tous les points de la sous-structure sont supposées être bien décrites par cette représentation discontinue.

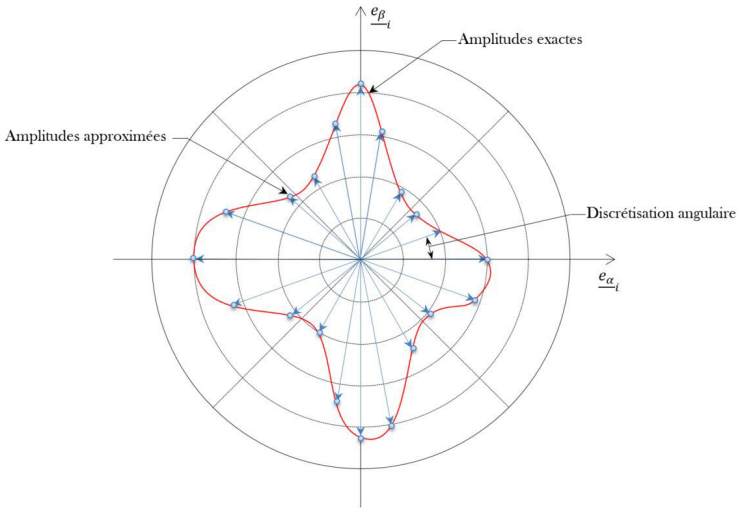


FIGURE 2.9: Portrait d'amplitudes discrétisé par fonctions de Dirac.

Le choix de la discrétisation angulaire et par conséquent le nombre de fonctions de base nécessaires pour résoudre ce type de problème est lié au nombre d'onde dans la

structure et sur chacun des bords. Mais ce choix est également lié aux types de conditions aux limites. Par exemple, le nombre n des ondes de flexion suivant la dimension caractéristique $l_{\alpha/\beta}$ du sous-domaine Ω peut être calculé en utilisant l'équation 2.39 :

$$n = \frac{2l_{\alpha/\beta}}{\lambda_{\alpha/\beta}} = \frac{\omega l_{\alpha/\beta}}{\pi c_{sv\alpha/\beta}} = l_{\alpha/\beta}\frac{\sqrt{\omega}}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\rho h}{D_{\alpha/\beta}}} \tag{2.39}$$

où $\lambda_{\alpha/\beta}$ est la longueur d'onde dans la direction $\underline{e_\alpha}$ ou $\underline{e_\beta}$, ω la pulsation, $c_{sv\alpha/\beta} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{D_{\alpha/\beta}}{\rho h}}$ la célérité des ondes de flexion, ρ la masse volumique, h l'épaisseur de la coque et $D_{\alpha/\beta}$ le module de flexion (pour une coque $D_{\alpha/\beta} = \frac{E_{\alpha/\beta}h^3}{12(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}$).

Le nombre de longueurs d'onde n dépend de la célérité des ondes : pour les ondes de pression, $c_{p\alpha/\beta} = \sqrt{\frac{E_{\alpha/\beta}}{\rho(1-\nu_\alpha\nu_\beta)}}$ et pour les ondes de cisaillement, $c_{sh\alpha/\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{2\rho(1+\sqrt{\nu_\alpha\nu_\beta})}}$.

Cette discrétisation est liée à plusieurs paramètres ; il est difficile de le définir analytiquement. On peut aussi utiliser une approche itérative ([Sourcis, 2005]) fondée sur un critère heuristique pour réduire les erreurs liées à la discrétisation et vérifier que les conditions aux limites sont respectées. Globalement, nous prenons un nombre d'ondes entre 20 et 100.

Pour valider les implémentations (éléments plaques et coques, liaisons entre plusieurs sous-domaines) dans notre code de calcul, le paragraphe suivant traite et compare la TVRC avec la méthode éléments finis sur deux exemples simples.

2.2.5 Comparaison TVRC/FEM au travers d'exemples simples

Le code TVRC développé repose sur celui implémenté dans [Kovalesky *et al.*, 2012] pour les problèmes acoustiques. Ici le but est de valider à partir d'exemples simples les développements effectués pour traiter les problèmes mécaniques. Le premier exemple traite d'un seul domaine de type plaque. Dans cet exemple, une comparaison est faite entre les résultats analytiques, éléments finis et TVRC. Le second exemple permet quant à lui une validation des différents éléments coques, avec un et deux axes de courbures, ainsi que les liaisons entre plusieurs sous-domaines.

2.2.5.1 Premier exemple de validation : une plaque simplement appuyée

Afin d'étudier la convergence de notre code TVRC pour des problèmes de plaques, de valider les fonctions de forme associées et de voir les différences avec une résolution par éléments finis, nous considérons l'exemple donné dans la figure 2.10 et traité également dans [Riou *et al.*, 2004]. Ici une plaque d'acier isotrope simplement appuyée, avec les propriétés mécaniques données dans le tableau 2.1, est soumise à un chargement ponctuel forcé de cisaillement à une fréquence de 2000 Hz.

Paramètres	Sens physique	Valeur et unité
E	module d'Young	210 GPa
ν	coefficient de Poisson	0.3
ρ	masse volumique	7800 kg/m^3
ξ	taux d'amortissement	0.01
h	épaisseur de la plaque	0.003 m

TABLE 2.1: Paramètres matériau de la plaque d'acier simplement supportée.

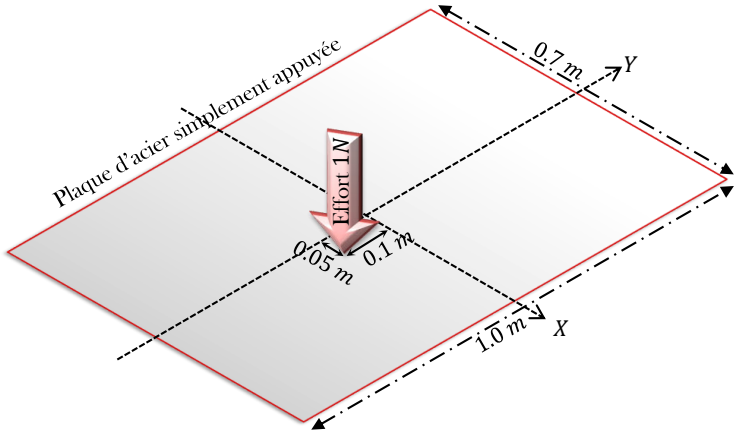


FIGURE 2.10: Premier exemple de validation : description de la géométrie et des conditions limites.

La solution analytique est obtenue en utilisant la base de vecteurs propres de la plaque, notés φ_{mn}, qui satisfont l'équation 2.4. Ainsi, le déplacement analytique hors plan de la plaque est donné par :

$$w_{analytical}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\varphi_{mn}(x,y) \tag{2.40}$$

où

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{F sin\left(\frac{m\pi x_F}{L_x}\right) sin\left(\frac{n\pi y_F}{L_y}\right)}{\frac{L_x L_y}{4}\rho h(w_{mn}^2 - w^2)} \\ \varphi_{mn} &= sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Pour obtenir la solution, la somme infinie doit alors être tronquée :

$$w^h_{analytical}(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{mn}\varphi_{mn}(x,y) \tag{2.42}$$

Les indices M et N sont choisis à partir des hypothèses suivantes : $M \gg \frac{L_x}{\pi}\sqrt[4]{\frac{12\omega^2\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}$ et $N \gg \frac{L_y}{\pi}\sqrt[4]{\frac{12\omega^2\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}$.

Une solution éléments finis obtenue par le code Cast3m [Cast3m, 1980] est donnée en prenant la règle "ingénieur" de 10 éléments linéaires par longueur d'onde. En effet [Babuška *et al.*, 1995] démontre que pour effectuer un calcul éléments finis avec une bonne précision, la taille de l'élément doit dépendre de la longueur d'onde. Dans de nombreux cas, les ingénieurs utilisent comme règle de base une discrétisation de 10 éléments par longueur d'onde. Dans [Barbone *et al.*, 1998], cette règle est confirmée pour les basses fréquences. Néanmoins en moyennes fréquences, l'apparition de pollution ([Deraemaeker *et al.*, 1999]) transforme cette règle. Le produit k^3h^2 doit alors rester constant (avec k la longueur d'onde et h la taille de l'élément), conduisant ainsi à une discrétisation encore plus coûteuse.

A la base des fonctions TVRC classiques doit être ajoutée la solution particulière (voir l'équation 2.43) correspondant à la solution d'une plaque infinie soumise à une force ponctuelle afin de prendre en compte ce genre de chargement.

$$w_{F,infinite}(x,y) = \frac{-iF}{8\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{12\omega^2\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}}\left[J_0(\sqrt[4]{\frac{12\omega^2\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}r) - iY_0(\sqrt[4]{\frac{12\omega^2\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}r) - \frac{2i}{\pi}K_0(\sqrt[4]{\frac{12\omega^2\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}r)\right] \tag{2.43}$$

où r est la distance jusqu'à x_F et J_0, Y_0 et K_0 sont les fonctions de Bessel à l'ordre 0. Étant donné que nous sommes seulement dans une problématique de flexion, dans ce cas, les ondes de vibration de membrane peuvent être négligées.

Le tableau 2.2 montre le déplacement hors-plan obtenu avec Cast3m, par résolution analytique (voir l'équation 2.42) ainsi qu'avec la TVRC.

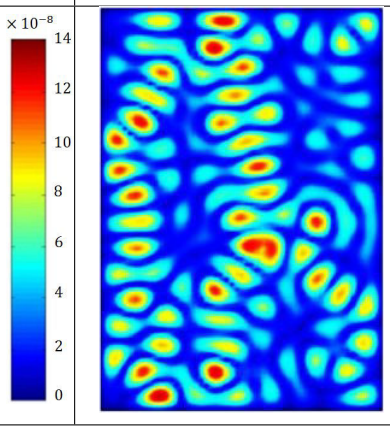
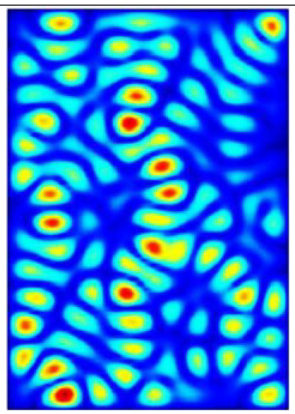
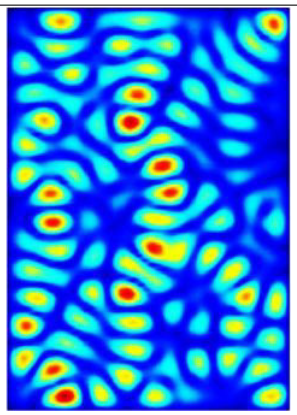
	Eléments finis - Cast3m	**Résultat analytique**	**TVRC**
	39000 DDLs ($\approx$ 10 éléments/longueur d'onde)	équation (2.42)	100 ondes intérieures 4*20 ondes de bord
déplacement hors plan (m)			

TABLE 2.2: Solution EF donnée par Cast3m (gauche), solution analytique et solution TVRC avec 180 DDLs (droite).

Les résultats précédents nous ont permis de voir que la solution donnée par la TVRC est très similaire à la solution analytique, même si le résultat est obtenu avec seulement 180 DDLs, grâce à sa capacité à saisir analytiquement les phénomènes d'ondes dans l'échelle rapide $\underline{X}$. Par rapport à la solution analytique de référence, on obtient une erreur moyenne de 21,4 % pour la solution éléments finis et 1,4 % pour la solution TVRC. On peut alors aisément constater l'efficacité de calcul de la TVRC dans un tel problème de vibrations des structures mécaniques. La figure 2.11 montre la proportion d'erreurs pour chacune de ces méthodes. Il convient de noter que la solution EF avec seulement 10 éléments par longueur d'onde a une carte d'erreurs inégalement répartie. En effet, en moyenne fréquence, les longueurs d'onde sont si petites et les ondes vibratoires sont si proches en certains endroits que l'analyse locale en un point donné devient difficile.

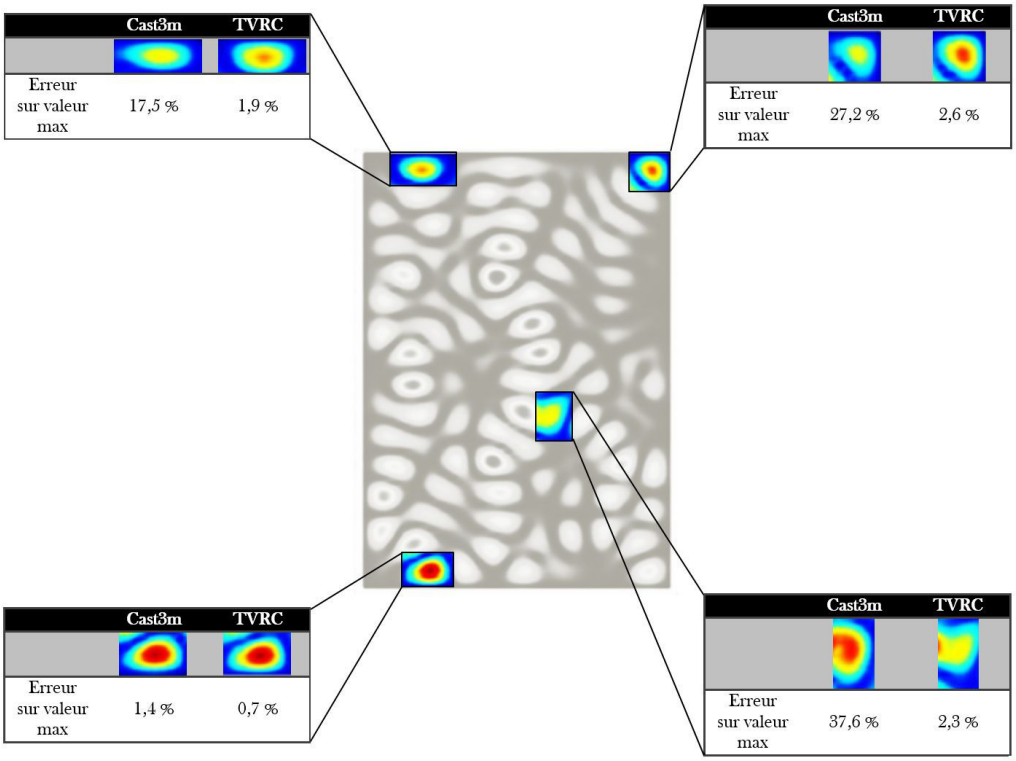


FIGURE 2.11: Erreur TVRC et Cast3m.

2.2.5.2 Second exemple de validation : liaison voile/plancher

Afin d'étudier la convergence de la méthode TVRC pour des problèmes de coque, de valider les fonctions de forme de ces types de structure et d'apprécier la formulation faible des conditions aux limites entre plusieurs sous-domaines, nous considérons maintenant une structure en béton, représentant une liaison voile/plancher, laquelle vibre de manière forcée à une fréquence de 200 Hz et dont les propriétés mécaniques sont exposées dans le tableau 2.3.

Paramètres	Sens physique	Valeur et unité
E	module d'Young	34 GPa
ν	coefficient de Poisson	0.2
ρ	masse volumique	2500 kg/m^3
ξ	taux d'amortissement	0.04

TABLE 2.3: Propriétés mécaniques du béton composant l'exemple voile/plancher.

La géométrie de notre structure est simplifiée à deux coques et une plaque circulaire de $0,15$ m d'épaisseur. Cette structure est soumise à un chargement hors-plan de flexion (voir la figure 2.12) sur l'un de ses bords libres. Cet exemple permet d'étudier un problème de flexion et de membrane de manière à ce que le transfert d'énergie se produise

dans l'interface de liaison. Une solution de référence est obtenue en utilisant le code EF Cast3m en prenant près de 10 éléments linéaires par longueur d'onde pour une bonne approximation du résultat conformément à la règle "ingénieur" citée dans le paragraphe 2.2.5.1.

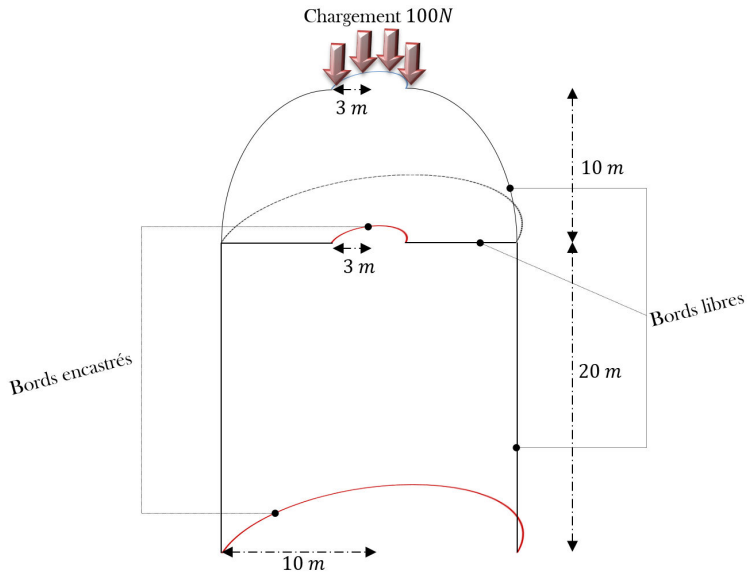
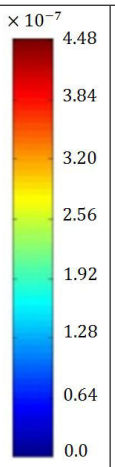
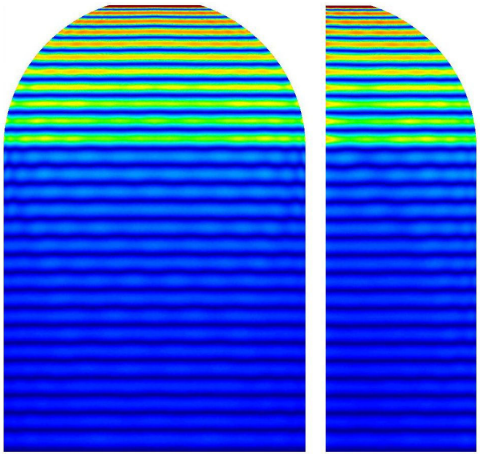
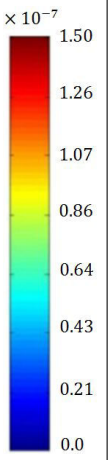
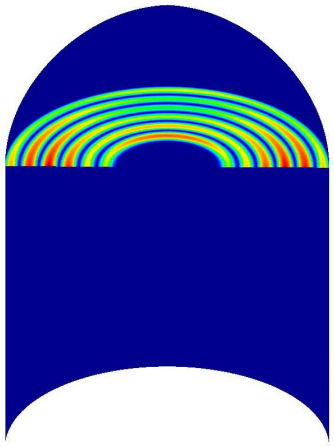


FIGURE 2.12: Second exemple de validation : description de la géométrie et des conditions limites.

Le tableau 2.4 présente les solutions de déplacement hors plan de chaque sous-domaine obtenues avec Cast3m et avec la méthode de la TVRC. On peut ainsi voir que les deux solutions sont très similaires. Il existe une différence de 3 % en moyenne pour le déplacement hors plan et 7 % sur le déplacement de membrane. Ici et comme dans le premier exemple traité, la solution TVRC a été obtenue avec beaucoup moins de degrés de liberté que la méthode éléments finis. Pour la solution TVRC, le tableau 2.4 montre la présence d'un déplacement de membrane engendré par l'interface de liaison. Compte tenu du système global de coordonnées utilisé par Cast3m, la représentation du déplacement de membrane dans ce cas est compliquée à extraire. Cependant, à la vue de la géométrie de référence et étant donné que les déplacements de membrane et hors plan sont totalement dépendants, on peut comprendre qu'un bon champ hors plan induit un champ de membrane correct.

Cast3m		
49400 DDLs (≈15 éléments/longueur d'onde)		
Déplacement hors plan du voile (m)		
Déplacement hors plan du plancher (m)		

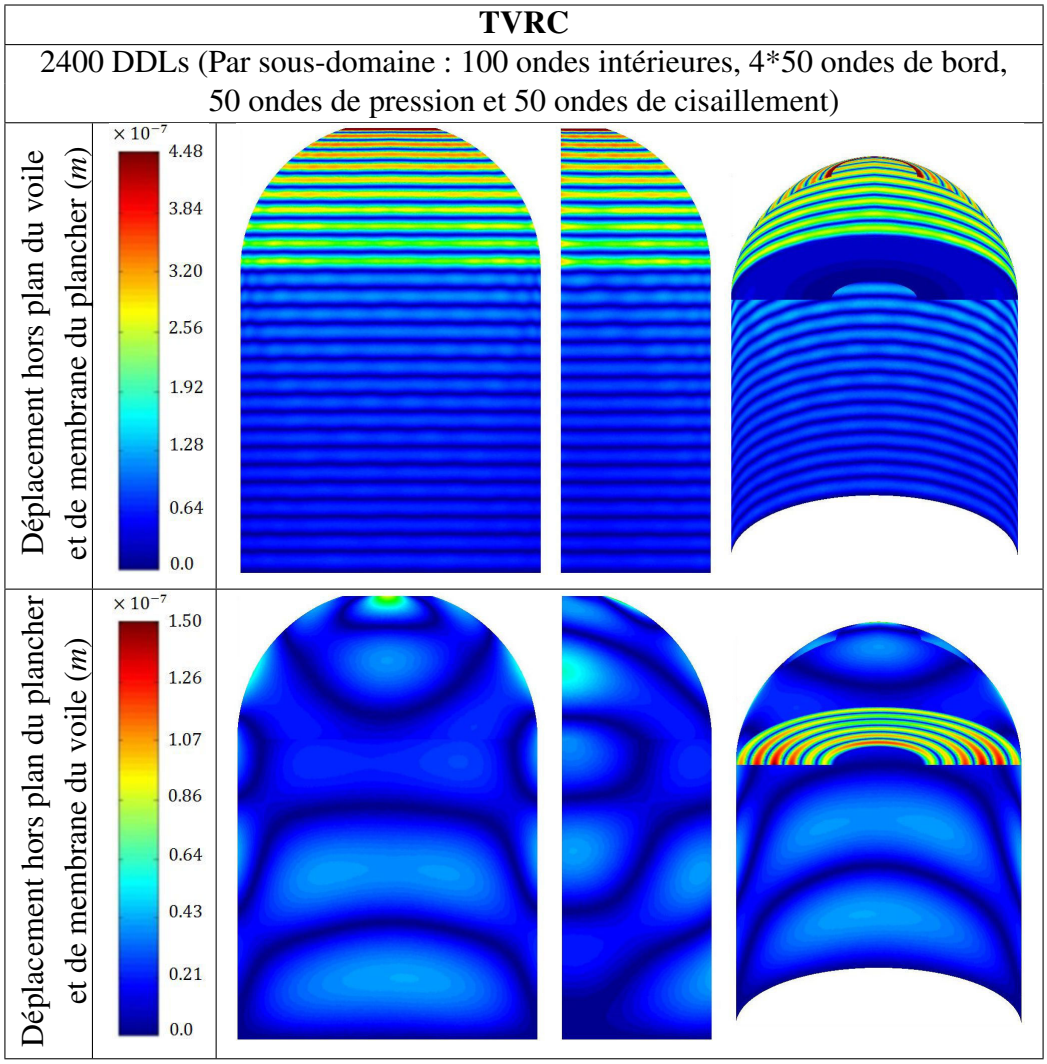


TABLE 2.4: Solution EF Cast3m obtenue avec 49400 DDLs et solution TVRC obtenue avec 2400 DDLs.

Au vu des deux exemples traités dans ce paragraphe, les résultants obtenus par la TVRC sont probants en comparaison avec la méthode des éléments finis. Néanmoins cette approche présente un système à résoudre avec un mauvais conditionnement lié à la non orthogonalité de la base des vecteurs d'ondes. Cette dépendance de la solution au conditionnement du système est d'autant plus importante que la taille de ce système est élevée. La TVRC nécessite ainsi une méthode de résolution adaptée afin de limiter les erreurs sur des structures de taille importante.

2.3 Une méthode de résolution adaptée à la TVRC

2.3.1 Le principe de résolution

Au vu de ces caractéristique, la TVRC se range dans la catégorie des méthodes de Trefftz. Les principales différences entre les multiples méthodes de Trefftz se situent dans le traitement des conditions aux limites et des conditions de continuité entre les éléments, ainsi que dans le type d'ondes utilisé dans l'espace admissible. Toutes ces méthodes conduisent à un système algébrique sensiblement plus petit que celui que l'on pourrait obtenir à l'aide des FEM standards ([Rouzaud *et al.*, 2015]). Cependant, comme d'autres stratégies numériques qui utilisent des fonctions oscillantes dans les espaces d'approximation, ces méthodes souffrent d'un mauvais conditionnement engendré par la non orthogonalité de la base des vecteurs d'ondes. Une conséquence directe à cela est le fait que pour chaque domaine dans la norme L^2, lorsque la taille de l'espace d'approximation tend vers l'infini, la résolution n'implique pas une convergence de l'amplitude des ondes utilisées pour décrire la solution. En d'autres termes, une propriété de coercivité est perdue lors de la discrétisation du problème en termes d'amplitudes au niveau du déplacement. L'objectif de ce paragraphe est de présenter une méthode de résolution, s'appuyant sur celle développée et détaillée dans [Kovalesky et Gosselet, 2014] pour des problèmes d'acoustique, par laquelle le conditionnement peut être contrôlé et les propriétés de coercivité être ainsi récupérées.

La principale caractéristique de cette méthode de résolution est la construction d'un espace d'approximation qui permet le contrôle du conditionnement du système algébrique. Elle permet ainsi une stabilité des amplitudes discrétisées des ondes. Enfin, l'espace optimisé d'approximation est utilisé pour définir le problème grossier d'un solveur multi-grille.

On suppose que pour chaque sous-domaine Ω_i un sous-espace d'approximation caractérisé sur la base $\underline{U}^h(x_i)$ est défini et est suffisamment grand pour que la solution soit bien représentée. La principale difficulté de la TVRC est de trouver la solution, le problème posé en termes d'amplitudes n'étant pas coercitif et résultant d'un système discret mal conditionné. Il est proposé ici de sélectionner les sous-espaces d'approximation plus petits générant des amplitudes de déplacement non négligeables. Cela conduit à piloter directement le conditionnement du système, tout en contrôlant également une légère diminution de la précision de la solution. Il est à noter que la sélection d'un sous-espace d'approximation plus petit peut être effectuée indépendamment sur chaque sous-domaine, en parallèle. Cette démarche est ainsi entièrement parallélisable.

Pour chaque sous-domaine Ω_i, le sous-espace admissible $\mathcal{S}^h_{ad,i}$ de $\mathcal{S}_{ad,i}$ est sélectionné de manière à vérifier la propriété suivante :

$$\forall \underline{A}_i \in \mathcal{S}^h_{ad,i}, \|\mathcal{H}_i[\underline{A}_i]\|^2_{H^1(\Omega_i)} \geq \sigma \|\underline{A}_i\|^2_{L^2(C)} \tag{2.44}$$

où $\underline{A}_i = \underline{U}(\underline{P}_i(\varphi_i))$ représente les amplitudes des ondes recherchées dans le sous-espace d'approximation. $\sigma > 0$ est un paramètre devant être défini par l'utilisateur (plus σ est

petit, plus $\mathcal{S}^h_{ad,i}$ est grand et plus le conditionnement est faible). $\mathcal{H}_i$ décrit la fonction d'Herglotz du domaine Ω_i définie sur le cercle $\mathcal{C}_i$ à la manière de l'équation 2.15.

Le sous-espace $\mathcal{S}^h_{ad,i}$ n'est pas pratique à mettre en œuvre numériquement. [Kovalesky et Gosselet, 2014] propose un moyen de s'en approcher. L'idée est d'utiliser la propriété d'interpolation des éléments finis pour obtenir une bonne estimation de la norme H^1 de l'équation 2.44. Considérons à titre d'exemple un maillage T_i du sous-domaine Ω_i. Soit $(x_i^j)_{1\leqslant j\leqslant N_i}$ les nœuds de T_i et ψ_i pouvant être associés à la matrice des fonctions de forme.

Ce maillage éléments finis est utilisé pour faire des interpolations et le calcul des normes, et non pour approcher la solution, il peut être ainsi choisi de sorte à être beaucoup plus grossier que celui recommandé pour les calculs éléments finis. De plus les maillages T_i n'ont pas besoin d'être compatibles aux interfaces et peuvent ainsi être définis indépendamment sur chaque sous-domaine.

Prenons $\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}$ la matrice associée au champ de déplacement généré par la base $\underline{A}_i$ évaluée au niveau des nœuds du maillage. Un champ de $\mathcal{S}^{N_i}(\Omega_i)$, où N_i représente la discrétisation éléments finis, s'écrit $\underline{U}_{A,i}\alpha_i$, son interpolation éléments finis est $\psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i$ et les propriétés classiques de l'interpolation éléments finis permettent d'assurer que la distance entre ces deux domaines peut être contrôlée. Il existe alors une constante c_i qui dépend du maillage, et qui peut être réduite par la diminution de la taille caractéristique de ce maillage ou l'augmentation du degré d'interpolation des fonctions de forme ([Brenner et Scott, 2008]) :

$$\|\underline{U}_{A,i}\alpha_i - \psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq c_i\|\alpha_i\|_C \tag{2.45}$$

où $\|\alpha_i\|_C$ correspond à la norme $L^2(C)$ de l'amplitude associée :

$$\|\alpha_i\|^2_C = \|\underline{A}_i\alpha_i\|^2_{L^2(C)} = {\alpha_i}^\top\underline{\underline{M}}^C_i\alpha_i \tag{2.46}$$

où $\underline{\underline{M}}^C_i$ est la $L^2(C)$-matrice de masse associée à la base $\underline{A}_i$. Dans le cas de l'espace $\mathcal{S}_{ad,i}$ défini par des impulsions de Dirac, nous prenons $\underline{\underline{M}}^C_i$ de manière à être égale à la matrice identité : $\underline{\underline{M}}^C_i = \underline{\underline{I}}$.

Soit $\underline{\underline{M}}_i = \underline{\underline{I}}$ la $H^1(\Omega_i)$-matrice de masse associée au maillage T_i, nous avons ainsi :

$$\|\psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i\|_{H^1(\Omega_i)} = {\alpha_i}^\top{\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}}^\top\underline{\underline{M}}_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i \tag{2.47}$$

L'approximation $\mathcal{S}^h_{ad,i}$ de $\mathcal{S}_{ad,i}$ définie par l'équation 2.44 est générée par les combinaisons d'amplitudes qui créent un champ de déplacement interpolé de norme suffisante. En d'autres termes, nous résolvons le problème suivant :

$$\text{Trouver } \alpha_i \in \mathbb{C}^{N_i}\ {\alpha_i}^\top{\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}}^\top\underline{\underline{M}}_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i \geqslant \sigma^2{\alpha_i}^\top\underline{\underline{M}}^C_i\alpha_i \tag{2.48}$$

Cela correspond à la sélection des vecteurs propres associés aux valeurs propres généralisées supérieures à σ pour le système de matrices hermitiennes définies positives $\left({\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}}^\top\underline{\underline{M}}_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}, \underline{\underline{M}}^C_i\right)$.

Soit $\tilde{\alpha}_i$ un tel vecteur propre, en supposant que $\sigma > c_i$ nous avons :

$$\begin{aligned} \|\underline{\underline{U}}_{A,i}\tilde{\alpha}_i\|_{H^1(\Omega_i)} &= \|(\underline{\underline{U}}_{A,i}\tilde{\alpha}_i - \psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\tilde{\alpha}_i) + \psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i\|_{H^1(\Omega_i)} \\ &\geqslant (\sigma - c_i)\|\tilde{\alpha}_i\|_C \end{aligned} \tag{2.49}$$

Cette inégalité montre que la stratégie de sélection permet de contrôler la perte de coercitivité dans la mesure où le maillage est choisi suffisamment fin pour rendre la constante c_i petite par rapport σ.

Si l'on considère maintenant la question de la perte de précision de l'approximation due au fait de travailler à l'intérieur de $\mathcal{S}^h_{ad,i}$ au lieu de $\mathcal{S}_{ad,i}$, nous avons alors besoin de définir la borne supérieure de la distance entre les deux espaces. Pour tout vecteur donné α_i, soit $\tilde{\alpha}_i$ sa $\underline{\underline{M}}^C_i$ projection orthogonale sur les vecteurs propres sélectionnés, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \|\underline{\underline{U}}_{A,i}\alpha_i - \underline{\underline{U}}_{A,i}\tilde{\alpha}_i\|_{H^1(\Omega_E)} &\leqslant \|\underline{\underline{U}}_{A,i}\alpha_i - \psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i\|_{H^1(\Omega_i)} \\ &+ \|\psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\alpha_i - \psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\tilde{\alpha}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \\ &+ \|\psi_i\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}\tilde{\alpha}_i - \underline{\underline{U}}_{A,i}\tilde{\alpha}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \\ &\leqslant c_i(\|\alpha_i\|_C + \|\tilde{\alpha}_i\|_C) + \sigma\|\alpha_i\|_C \\ &\leqslant (2c_i + \sigma)\|\alpha_i\|_C \leqslant 3\sigma\|\alpha_i\|_C \end{aligned} \tag{2.50}$$

L'erreur supplémentaire due à la troncature est donc directement contrôlée par σ (pour un maillage satisfaisant $\sigma > c_i$).

Considérations pratiques :

Dans la pratique, en raison du choix de la base $\underline{A}_i$, la matrice de masse des amplitudes $\underline{\underline{M}}^C_i$ est diagonale et facile à calculer. En ce qui concerne l'évaluation de la norme $H_1(\Omega_i)$, si le maillage T_i est suffisamment fin et régulier (ni trop, ni pas assez discrétisé), la matrice de masse $\underline{\underline{M}}_i$ n'a pas besoin d'être évaluée avec précision, elle peut ainsi être rangée voire même remplacée par un scalaire. Le sous-espace $\mathcal{S}^h_{ad,i}$ est alors déterminé par le calcul de la SVD de $\underline{\underline{U}}^{ef}_{A,i}$ tronqué à des valeurs plus grandes que le paramètre σ.

2.3.2 Traitement d'exemples avec le solveur multi-grille

Ce paragraphe s'inscrit dans la validation de la méthode de résolution décrite dans le paragraphe 2.3.1 ainsi que la comparaison de celle-ci avec des méthodes usuelles d'inversion de matrice sous Matlab comme le "pseudo inverse" basé sur une décomposition aux valeurs singulières ou encore le "backslash" basé dans notre cas sur une décomposition LU (une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U) du système complet.

2.3.2.1 Cas d'une plaque en flexion

En utilisant l'exemple simple d'une plaque d'acier en flexion décrit dans l'annexe 2.4.4, nous pouvons valider la méthode de résolution multi-grille et la comparer avec les

différentes méthodes de résolution disponibles pour la TVRC. La figure 2.13 présente les résultats au niveau du déplacement effectif de l'ensemble de la plaque soumise à une vibration forcée de 150 Hz. Pour comparer ces résultats nous avons utilisé la solution éléments finis raffinée avec près de 20 éléments par longueur d'onde comme référence. Les trois calculs présentés permettent une validation du solveur multi-grille présenté dans le paragraphe 2.3, avec les méthodes classiques de Matlab, le pseudo-inverse et le "backslash". On peut remarquer ici la bonne approximation de la solution pour ces trois calculs. Une autre observation peut également être faite sur la taille et le conditionnement du système à résoudre pour le solveur multi-grille. En effet ce solveur étant basé sur un choix préalable des vecteurs d'ondes ayant une énergie importante dans la solution, il est ainsi normal que le système soit plus petit et donc que le conditionnement en soit meilleur.

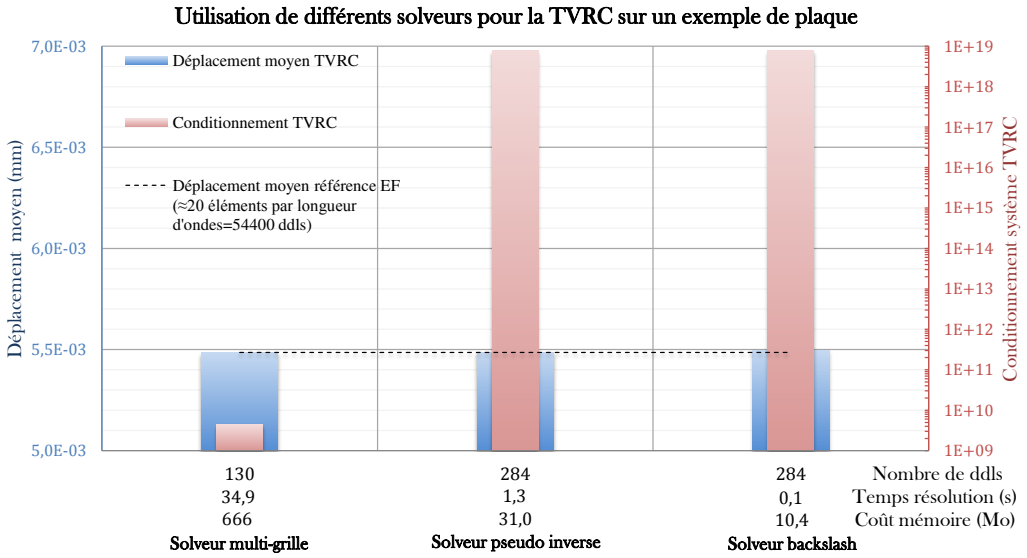


FIGURE 2.13: Résultats des différents solveurs en termes de déplacement effectif pour un cas simple de plaque en flexion.

En conclusion de ce premier exemple, on peut retenir que pour des cas simples faisant intervenir un faible nombre de sous-domaines, la solution TVRC reste équivalente quelle que soit la méthode de résolution choisie. On notera tout de même que le solveur multi-grille permet de résoudre un système moins important et donc mieux conditionné. Néanmoins, dans la mesure où elle nécessite la détermination d'une nouvelle base d'approximation et donc la construction d'un nouveau système de résolution, cette méthode est coûteuse en temps de calcul et stockage mémoire. L'exemple traité en suivant permet de montrer l'efficacité de la méthode dès que le système devient plus important.

2.3.2.2 Cas d'un dôme impacté

Cet exemple d'un dôme soumis à un impact est représenté sur la figure 2.14.

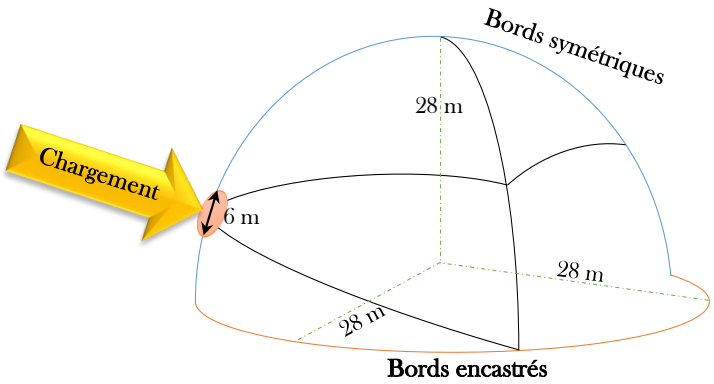


FIGURE 2.14: Géométrie de l'exemple d'un dôme impacté.

Ici le but est de montrer l'efficacité de la méthode de résolution multi-grille lorsque le système à résoudre devient plus important. En effet on s'intéresse ici au cas où le système initial à résoudre a un conditionnement suffisamment élevé ne permettant pas une résolution correcte au travers de méthodes directes telles que le "backslash". La figure 2.15 montre alors l'erreur commise par ce type de résolution vis à vis du conditionnement. La solution obtenue diverge avec l'augmentation du conditionnement du système. Une alternative à cela est l'utilisation du "pseudo inverse". Cette résolution reste alors efficace malgré le mauvais conditionnement, néanmoins on remarquera le coût important et critique en temps de calcul et mémoire de stockage. En effet ici le stockage des variables s'effectue dans la mémoire vive du système. Cette méthode de résolution est donc correcte mais est limitée à l'architecture du moyen de calcul. En comparaison à ces deux méthodes, la résolution multi-grille mise en place reste acceptable en terme d'erreur commise mais également au niveau du coût de calcul.

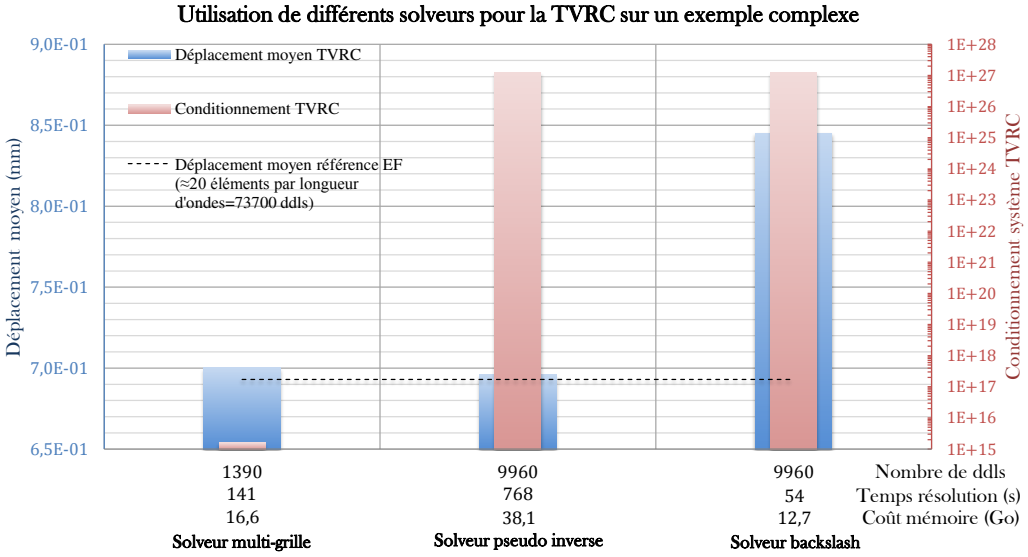


FIGURE 2.15: Résultats des différents solveurs en termes de déplacement effectif pour un dôme impacté.

En conclusion de cette étude, on peut retenir que pour des solveurs dits classiques ("backslash" par décomposition LU ou "pseudo inverse" par décomposition SVD) la robustesse de la méthode est liée au conditionnement du système à résoudre et à la puissance de calcul. La méthode multi-grille permettant une réduction intelligente de la base de résolution est ainsi efficace en ce sens-là.

Jusqu'à présent, nous avons étudié la TVRC pour une résolution à fréquence donnée. Néanmoins la question de l'efficacité d'une résolution fréquence à fréquence se pose sur une large plage de fréquence. Le paragraphe suivant s'inscrit dans ce cadre en proposant une approche de résolution multi fréquentielle au travers des approximants de Padé.

2.4 Une nouvelle approche de l'analyse large bande pour la TVRC

Avec la méthode de la TVRC, la stratégie proposée de traitement de la chute d'avion induit une résolution fréquence à fréquence pour la reconstitution de la solution du domaine fréquentiel vers le domaine temporel. Ce paragraphe est consacré à une approche complémentaire à la TVRC, basée sur les approximants de Padé, pour la reconstruction rapide de fonctions de réponse en fréquence. La réduction de modèle par les approximants de Padé s'appuie sur [Rumpler *et al.*, 2014].

L'approche de la TVRC proposée dans les paragraphes précédents offre une réduction substantielle de la taille des problèmes à résoudre. Néanmoins, l'utilisation de fonctions d'interface, qui induisent des ensembles d'équations couplées pour chaque sous-domaine, limite les améliorations de l'efficacité de calcul. Avec l'utilisation d'approximants de Padé pour la reconstruction de la solution, l'objectif est de réduire le nombre de fréquences

auxquelles la solution complète doit être calculée, et d'interpoler la solution entre ces fréquences. A cet effet, une reconstruction basée sur les approximants de Padé permet un bon complément, impliquant les calculs de la solution complète et ses dérivées à un nombre restreint de fréquences, et une reconstruction autour de ces points. Cette approche est facilitée par l'expression de la dépendance en fréquence sous la forme de fonctions scalaires en facteur des matrices globales.

Ce paragraphe est organisé autour d'une présentation générale de la méthode de reconstruction par approximants de Padé et de son application à la TVRC.

2.4.1 Les approximants de Padé

Tous les problèmes TVRC, de vibrations harmoniques à $f = \frac{\omega}{2\pi}$, étudiés dans cette thèse se présentent la forme générale suivante :

$$\underline{\underline{A}}(\omega)\underline{X}(\omega) = \underline{B}(\omega) \tag{2.51}$$

où $\underline{\underline{A}}(\omega)$ et $\underline{B}(\omega)$ représentent respectivement les formes bilinéaires et linéaires des équations 2.12 et 2.13, $\underline{X}(\omega)$ contient les amplitudes des fonctions d'ondes.

Dans un schéma de solution directe, le calcul de la solution complète de l'équation 2.51 en quelques points de fréquence seulement, couplé à une reconstruction d'une solution approchée entre ceux-ci, s'est révélée être une approche efficace [Avery *et al.*, 2007]. Ainsi, étant donnée une solution à une pulsation ω, et une fonction $\underline{X}(\omega)$ de ω, le développement en série de Taylor autour de ω donne la solution approchée suivante :

$$\underline{X}(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \underline{X}_T(\Delta\omega) = \sum_{i=0}^{T} \underline{x}_i (\Delta\omega)^i \tag{2.52}$$

T étant l'ordre de troncature du développement en série de Taylor. Le vecteur de coefficient $\underline{x}_i$ est donné par :

$$\underline{x}_i = \frac{\underline{X}^{(i)}(\omega_0)}{i!} \tag{2.53}$$

où $\underline{X}^{(i)}(\omega_0)$ est la dérivée i^{ime} de $\underline{X}$ par rapport à ω, en prenant $\omega = \omega_0$, et considérant que $\underline{X}^{(0)}(\omega_0) = \underline{X}(\omega_0)$. La détermination de ces T premières dérivées de $\underline{X}$ est alors requis de manière à estimer une solution approchée autour de ω_0.

Cependant, dans l'optique de l'expansion en série, il a été montré que, pour une fonction contenant des pôles, une expansion en tant que rapport de deux séries de puissance permet généralement une meilleure représentation (plus grand intervalle de convergence et meilleure vitesse de convergence) par rapport aux séries de Taylor, pour un ordre de troncature donné ([Orszag et Bender, 1978], [Baker Jr et Graves-Morris, 1996] et [Cochelin *et al.*, 2007]). Dans la suite, l'approximation à une fréquence donnée de $\underline{X}(\omega)$ est présentée, découlant de la méthodologie pour déterminer les approximants de Padé du système d'équations 2.51. A cet effet, les quantités de vecteurs des équations 2.51 à 2.53, de dimension N le nombre de degrés de liberté correspondant au nombre de fonctions

d'ondes, sont maintenant définies suivant leur j^{ime} composante scalaire (correspondant au DDL j).

A partir d'une solution en ω_0, $\underline{X}(\omega_0)$, la solution aux alentours est recherchée sous la forme d'une fraction de développements en séries de Taylor, pour chaque composante X_j du vecteur solution :

$$X_j(\omega_0+\Delta\omega) \approx \frac{P_{Lj}(\Delta\omega)}{Q_{Mj}(\Delta\omega)} \tag{2.54}$$

$P_{Lj}(\Delta\omega)$ et $Q_{Mj}(\Delta\omega)$ sont deux séries de Taylor, tronquées à l'ordre L et M respectivement, et définies comme :

$$\begin{array}{l} P_{Lj}(\Delta\omega) = \sum_{i=0}^{L} p_{ij}(\Delta\omega)^i \\ Q_{Mj}(\Delta\omega) = \sum_{i=0}^{M} q_{ij}(\Delta\omega)^i \end{array} \tag{2.55}$$

L'approximation de $X_j(\omega_0+\Delta\omega)$ est donnée par la détermination unique des coefficients p_{ij} et q_{ij}. Une approche efficace [Baker Jr et Graves-Morris, 1996] afin de déterminer ces coefficients est de les identifier aux coefficients d'un développement en série de Taylor $X_{L+Mj}(\Delta\omega)$ à l'ordre $L+M$ (équation 2.52), autorisant des pôles pour la fonction rationnelle ($Q_{Mj}(\Delta\omega)=0$), soit le système d'équations linéaires suivant à résoudre :

$$P_{Lj}(\Delta\omega) - X_{L+Mj}(\Delta\omega)Q_{Mj}(\Delta\omega) = 0 \tag{2.56}$$

où les coefficients d'ordre égal en $\Delta\omega$ sont extraits pour former un ensemble de $(L+M+1)$ équations. Avec la forme de l'équation 2.56, le système linéaire d'équations permet d'avoir zéro pour $Q_{Mj}(\Delta\omega)$, ce qui le rend plus apte à rendre compte d'une résonance dans la réponse fréquentielle d'origine. Cependant, ce système d'équations sous-déterminé 2.56 ne donne qu'une solution des $(L+M+2)$ coefficients à une constante multiplicative près. Par conséquent, ceux-ci sont généralement normalisés de sorte que le coefficient du dénominateur d'ordre zéro, q_{0j}, est pris à 1 ([Baker Jr et Graves-Morris, 1996]). Dans la suite de notre raisonnement, l'ensemble d'équations suivant peut alors être posé :

$$\left.\begin{array}{r} p_{0j} = x_{0j} \\ p_{1j} - x_{0j}q_{1j} = x_{1j} \\ \vdots \\ p_{Lj} - x_{L-1j}q_{1j} - \cdots - x_{0j}q_{Lj} = x_{Lj} \\ -x_{Lj}q_{1j} - x_{L-1j}q_{2j} - \cdots - x_{L-M+1j}q_{Mj} = x_{L+1j} \\ \vdots \\ -x_{L+M-1j}q_{1j} - x_{L+M-2j}q_{2j} - \cdots - x_{Lj}q_{Mj} = x_{L+Mj} \end{array}\right\} \tag{2.57}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} x_{ij} = 0 \text{ si } i<0 \\ q_{ij} = 0 \text{ si } i>M \end{array}\right. \tag{2.58}$$

De l'équation 2.53, donnant l'expression des coefficients x_{ij}, le système d'équations 2.57 peut être écrit explicitement en prenant en compte les $(L+M)$ dérivées premières de $X_j(\omega)$ à ω_0 :

$$i!p_{ij} - \left(\sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} k! X_j^{(i-k)}(\omega_0) q_{kj} \right) = X_j^{(i)}(\omega_0), \text{ pour } i = 0, ..., L+M \tag{2.59}$$

où

$$\begin{cases} p_{ij} = 0 \text{ si } i > L \\ q_{kj} = 0 \text{ si } k > M \end{cases} \tag{2.60}$$

et où le coefficient binomial est donné par :

$$\binom{i}{k} = \frac{i!}{k!(i-k)!} \tag{2.61}$$

Ce système peut se résoudre efficacement sous forme matricielle, pour chaque de DDL j, impliquant les dérivées jusqu'à l'ordre $L+M$ du vecteur solution,

$$\left[\underline{\underline{\mathcal{A}}}\right]_j \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_L \\ q_1 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} X(\omega_0) \\ \vdots \\ X^{(L)}(\omega_0) \\ X^{(L+1)}(\omega_0) \\ \vdots \\ X^{(L+M)}(\omega_0) \end{bmatrix}_j, \text{ pour } j = 1, ..., N \tag{2.62}$$

Basée sur la solution correspondant à une fréquence, $\underline{X}(\omega_0)$, cette méthode est définie dans la littérature comme l'approximation de Padé en un seul point. Elle peut facilement être étendue à plusieurs points, comme présenté par exemple dans [Avery *et al.*, 2007]. Le but étant d'estimer la combinaison d'une telle approche avec la TVRC, l'utilisation d'une approximation de Padé multipoints est considérée comme une extension naturelle de ce travail. De la même manière qu'une approximation de la solution utilisant le développement en série de Taylor, la résolution des systèmes d'équations 2.62 nécessite la détermination de la $(L+M)^{ime}$ dérivée du vecteur solution $\underline{X}(\omega)$ en ω_0. Cet aspect est développé dans la section suivante.

2.4.2 Dérivées successives du vecteur solution

Les $(L+M)$ dérivées successives de $\underline{X}$ à la pulsation ω peuvent être obtenues par l'équation 2.51 par rapport à ω. Ces dérivées successives peuvent être calculées par une formule de récurrence, entraînant la résolution d'un système linéaire à plusieurs seconds membres, ce qui est d'un point de vue numérique très efficace (une seule décomposition de la matrice de coefficients à effectuer). À l'ordre i, l'expression devient :

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \underline{\underline{A}}^{(i-k)}(\omega_0)\underline{X}^{(k)}(\omega_0) = \underline{B}^{(i)}(\omega_0), \text{ pour } i = 1,...,(L+M) \tag{2.63}$$

où les dérivées d'ordre zéro correspondent aux fonctions non différenciées. Extraire le terme d'ordre le plus élevé de la somme dans l'équation 2.63 conduit à l'expression récursive suivante de la dérivée de $\underline{X}$ d'ordre i en ω_0 :

$$\underline{\underline{A}}(\omega_0)\underline{X}^{(i)}(\omega_0) = \underline{B}^{(i)}(\omega_0) - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \underline{\underline{A}}^{(i-k)}(\omega_0)\underline{X}^{(k)}(\omega_0), \text{ pour } i = 1,...,(L+M) \tag{2.64}$$

Cela implique que les dérivées successives de $\underline{X}$ nécessaires pour la détermination de l'approximation de Padé peuvent être calculées de manière efficace en tant que solution d'un système d'équations de dimension N. En effet, la résolution peut être effectuée par des méthodes directes en utilisant une décomposition de la matrice du système. La factorisation est alors l'étape la plus fastidieuse numériquement. En ce qui concerne les multiples vecteurs secondaires, ils sont construits à partir de dérivées de la matrice du système et de dérivées d'ordre inférieur du vecteur solution.

2.4.3 Procédure pour la reconstruction de la réponse en fréquence en utilisant les approximants de Padé

Cette section résume les étapes de calcul de la solution approchée sur une plage de fréquence à l'aide des approximants de Padé. Elles peuvent être séparées en deux parties :

- en premier lieu, à une fréquence ω_0 donnée, la solution ainsi que ses dérivées aux ordres successifs $(L+M)$ est calculée selon l'équation 2.64. Cela implique, pour chaque fréquence autour de laquelle la solution doit être approchée, la résolution de $(L+M+1)$ problèmes de dimension N ;
- ensuite, la solution autour de ω_0 est reconstruite, impliquant la résolution de N problèmes de dimensions $(L+M+1)$ (équation 2.62) pour déterminer les approximants de Padé correspondant à chaque degré de liberté. Il s'ensuit N évaluations de la fraction rationnelle (équation 2.54) pour chaque $\Delta\omega$ où la solution à évaluer est approchée.

Compte tenu d'une discrétisation de l'espace des fréquences en intervalles associés à leur fréquence centrale, la procédure détaillée correspondant à un intervalle de fréquence est présentée dans l'algorithme du tableau 2.5.

	Algorithme d'une résolution multi-fréquences via les approximants de Padé
1.	Calculer la matrice et le second membre en ω_0 découlant de l'équation 2.51
2.	Résoudre l'équation 2.51 pour obtenir la solution $\underline{X}(\omega_0)$
3.	Pour $i = 1$ à $L+M$
4.	Résoudre l'équation 2.64 pour obtenir $\underline{X}^{(i)}(\omega_0)$
5.	fin
6.	Pour $j = 1$ à N
7.	Résoudre l'équation 2.62 pour obtenir les approximants de Padé
8.	Évaluer la solution multi-fréquences approchée autour de ω_0 (équation 2.54)
9.	fin

TABLE 2.5: Algorithme de reconstruction de la réponse sur une plage de fréquence à l'aide des approximants de Padé.

Trois points peuvent être examinés en ce qui concerne la description de la procédure donnée. Une première étape consiste à choisir les fréquences secondaires où la solution sera évaluée, à savoir la fixation d'une discrétisation appropriée de l'espace des fréquences. En second lieu, pour chaque fréquence grossière, l'ordre du polynôme d'expansion et la plage de fréquence autour de ω_0 doivent être choisis en conséquence, ce qui soulève la question des valeurs de L et M. En troisième lieu, on doit évaluer les conditions de l'efficacité d'un tel schéma d'approximation.

Bien que les second et troisième points soient examinés en détail dans [Avery *et al.*, 2007], pour des applications structurales ou acoustiques, le choix des fréquences secondaires n'a pas reçu beaucoup d'attention dans la littérature. Une suggestion est faite en ce sens dans [Rumpler *et al.*, 2014]. En ce qui concerne l'ordre des expansions polynomiales à examiner à la fois pour le numérateur (L) et le dénominateur (M) dans l'équation 2.54, la contrainte suivante, proposée dans [Avery *et al.*, 2007], réduit l'ensemble des possibilités tout en donnant des approximations satisfaisantes :

$$M = L + 1 \tag{2.65}$$

En outre, il existe une limite supérieure pour l'ordre maximal pouvant être défini, en raison du mauvais conditionnement de la matrice résultant du système d'équations 2.62. Par conséquent, en fonction de la discrétisation de fréquence choisie pour un balayage de la plage fréquentielle, l'approximation de Padé est normalement plus efficace si elle est capable de faire converger sur plusieurs incréments de fréquence autour de ω_{max}. Le temps alloué pour résoudre plusieurs systèmes linéaires différents de N équations nous amène à résoudre $(L+M+1)$ systèmes du second membre de N équations (1 décomposition, et $(L+M+1)$ solutions) ainsi que N systèmes de $(L+M+1)$ équations, avec $(L+M+1) \ll N$. Cette méthodologie de résolution s'est avérée extrêmement efficace lorsqu'elle est appliquée à des problématiques structurelles ou acoustiques importantes à champ unique, avec une discrétisation de l'espace des fréquences a priori ([Djellouli *et al.*, 2001], [Avery *et al.*, 2007]).

2.4.4 Analyse multi-fréquentielle sur un exemple simple

Dans cette étude permettant de comparer l'analyse multi-fréquence via les approximants de Padé vis-à-vis d'une résolution classique fréquence à fréquence, nous nous sommes placés dans le cas d'un problème de flexion appliqué à un seul sous-domaine de type plaque suivant la théorie de Kirchhoff-Love.

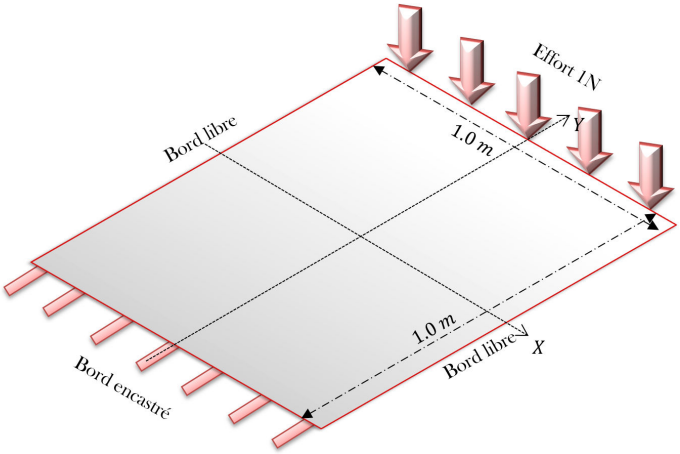


FIGURE 2.16: Exemple de test des approximants de Padé : description de la géométrie et des conditions aux limites.

Le cas présenté est l'étude d'une plaque encastrée sur l'un de ses bords, libre sur deux autres et sollicitée par un effort hors plan sur son dernier bord. La plaque est carrée et a pour dimensions : $1m * 1m * 0,7mm$. Un de ses bords est donc soumis à une densité linéique d'effort F_d unitaire, de direction perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque. La plage de fréquences de cette excitation est $[2\pi \times 0\ Hz\,;\ 2\pi \times 350\ Hz]$. En termes de paramètres matériaux et structurels, la plaque est en acier avec les paramètres du tableau 2.6.

Paramètres	Sens physique	Valeur et unité
E	module d'Young	210 GPa
ν	coefficient de Poisson	0.3
ρ	masse volumique	7800 kg/m^3
ξ	taux d'amortissement	0.01

TABLE 2.6: Paramètres matériau de la plaque d'acier étudiée.

Une comparaison entre une solution éléments finis obtenue par Cast3m [Cast3m, 1980] et la solution TVRC à $\omega = 2\pi * 150\ Hz$ est présentée sur le tableau 2.7.

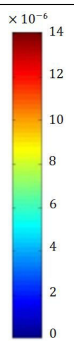
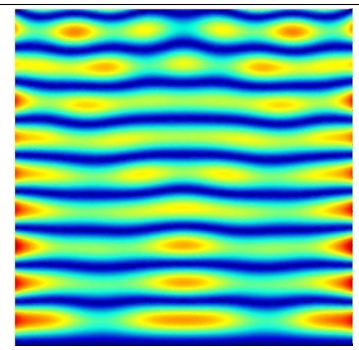
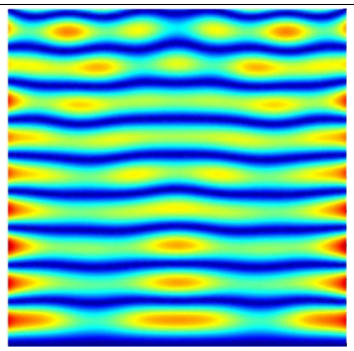
	Eléments finis - Cast3m	TVRC
	25200 DDLs (≈ 10 éléments/longueur d'onde)	20 ondes intérieures 4*5 ondes de bord
déplacement hors plan (m)			

TABLE 2.7: Solution EF donnée par Cast3m (gauche), solution TVRC avec 40 DDLs (droite).

Pour l'étude de l'efficacité de la résolution multi-fréquentielle via les approximants de Padé, la plaque en flexion décrite précédemment est étudiée pour une plage de fréquence de 40 Hz allant de 290 à 330 Hz. Dans cette première étude, le but est de comparer l'efficacité des approximants de Padé appliqués à la TVRC en termes de résultat mais également au niveau du temps de calcul vis-à-vis d'une résolution à chaque fréquence. Cette dernière, réalisée tous les 1 Hz, sera donc considérée comme la solution de référence. La figure 2.17 présente la convergence de la fonction de réponse en fréquence (FRF) solution pour plusieurs choix de jeux de paramètres L et M. Ici une seule analyse est effectuée avec comme fréquence centrale 310 Hz. On remarquera qu'en augmentant l'ordre L et M des approximants de Padé, la FRF converge bien vers la solution de référence.

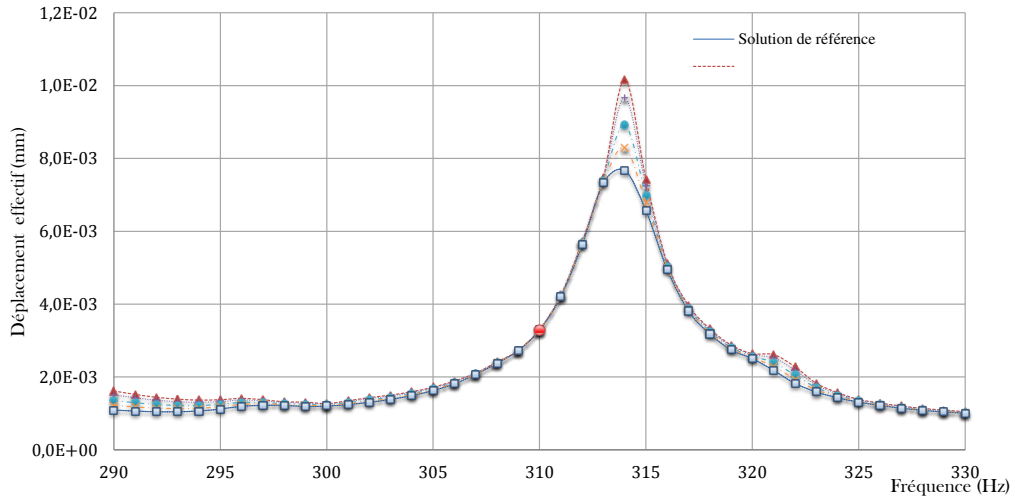


FIGURE 2.17: FRF pour plusieurs jeux de paramètres L et M sur une plage de fréquence de 40 Hz.

On a pu donc voir que l'application des approximants de Padé à la TVRC est efficace dès lors que l'ordre de ces approximants est suffisamment élevé pour pouvoir décrire la solution sur la plage fréquentielle. Néanmoins même si cette analyse ne nécessite d'inverser la matrice bilinéaire du système qu'une seule fois pour la fréquence centrale, celle-ci demande de calculer à chaque fréquence les dérivées successives de cette matrice ainsi que du second membre. On peut donc aisément imaginer que ces dérivées peuvent impliquer un coût numérique important si elles ne sont pas écrites de manière récursive. Ce coût augmente aussi en fonction des ordres L et M étant donné que l'ordre de dérivation est égal à $L+M$. La figure 2.18 présente une comparaison des temps de calcul pour l'analyse multi-fréquentielle avec deux jeux de paramètres et pour l'analyse dite classique. On remarquera que l'approche utilisant les approximants de Padé est d'autant plus intéressante que la plage fréquentielle étudiée est importante. En effet dans le cas d'une résolution fréquence par fréquence, le temps de calcul global sur ces 40 Hz est de 95 s, comprenant ainsi les temps d'assemblage et de résolution nécessaires à chaque fréquence. Pour l'analyse multi-fréquence, le temps de calcul est de 47 s pour des ordres $L = 1$ et $M = 2$, et 65 s pour des ordres $L = 5$ et $M = 6$. Dans ces deux cas, une part importante du temps de calcul est dédiée à la construction des dérivées successives. Une dernière remarque sur le temps de calcul peut également être faite. En effet, dans cette étude, la matrice à inverser est de taille plutôt faible étant donné que l'on traite un seul domaine. Ainsi l'inversion de cette matrice dans le cas d'un problème traitant de structures de type plaque est peu coûteuse numériquement. Néanmoins, pour des problèmes traitant un plus grand nombre de sous-domaines, le temps d'inversion sera beaucoup plus élevé, et ainsi l'analyse via les approximants de Padé sera d'autant plus efficace.

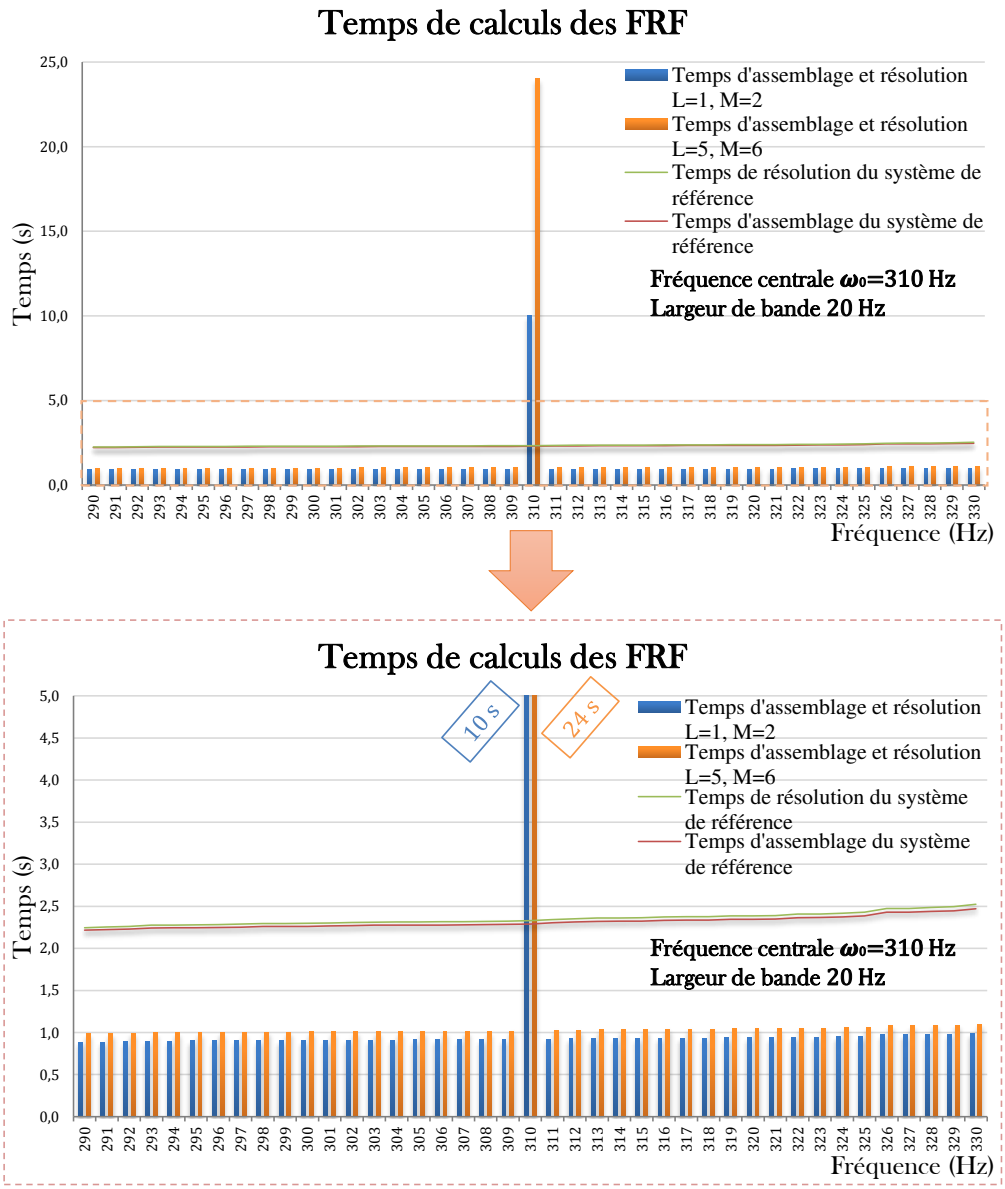


FIGURE 2.18: Comparaison des temps de calcul pour les deux types d'analyse.

Les figures 2.19 et 2.20 tracent la FRF calculée sur la plage de fréquences complètes, soit de 0 à 350 Hz. Ici nous avons choisi de prendre des ordres pour les approximants de Padé de $L = 4$ et $M = 5$ car ce jeu de paramètres présente le meilleur ratio erreur/temps de calcul au niveau de l'étude sur une bande réduite de fréquence. Une étude sur la discrétisation des analyses est présentée ici. Cette discrétisation est observable au travers des fréquences centrales choisies pour représenter la FRF solution. Dans un premier temps, figure 2.19, le choix des largeurs de bande est fixe (20 Hz) et défini donc de manière "a priori".

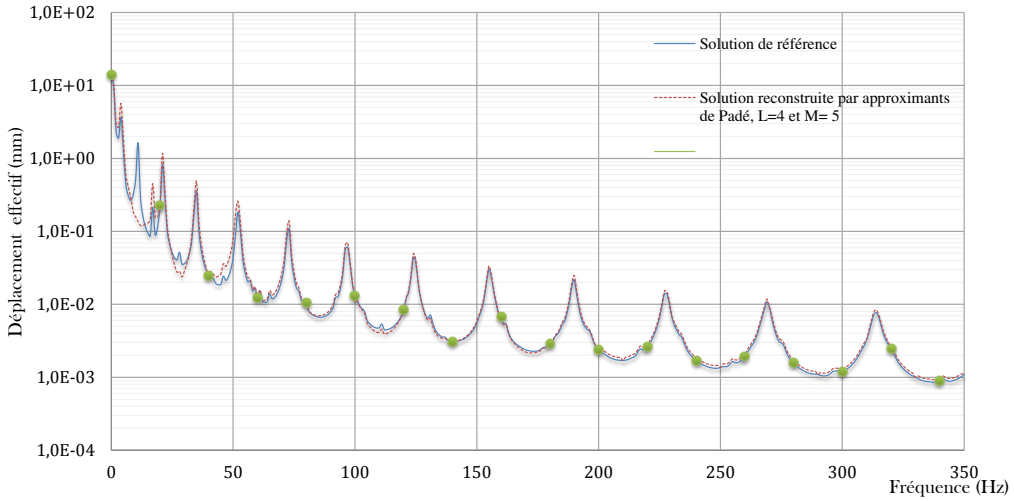


FIGURE 2.19: FRF sur une large bande fréquentielle, avec 20 Hz de largeur de bande.

La figure 2.20 présente cette fois une étude "a posteriori" où la largeur de bande est définie de façon à avoir une différence sur chaque fréquence inférieure à 10 %. Cette largeur de bande commence donc à 3 Hz pour finir à 20 Hz.

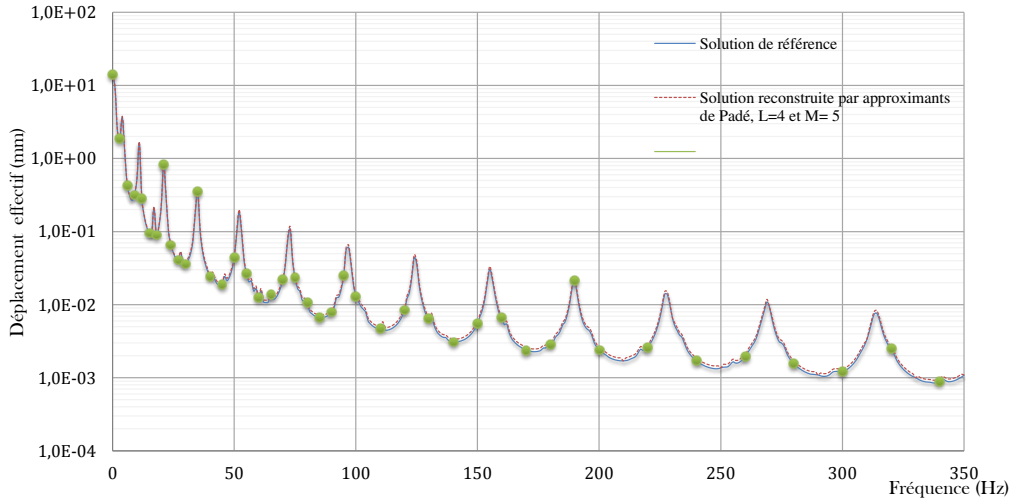


FIGURE 2.20: FRF sur une large bande fréquentielle, avec un critère d'erreur de 10 %.

On peut donc conclure de cette dernière étude que le choix de la discrétisation des analyses est dépendant du contenu fréquentiel que l'on cherche à représenter, même si le choix d'une largeur de bande fixe "a priori" semble globalement efficace dans notre exemple. On peut remarquer que celui peut induire tout de même des erreurs non négligeables lorsque le nombre de modes par bande de fréquence devient trop important.

L'approche d'une résolution multi-fréquentielle avec les approximants de Padé est donc efficace dans le traitement de problématique sur des structures plaques, néanmoins son extension aux coques reste plus complexe à mettre en œuvre numériquement. L'implémentation actuelle de cette résolution ne permet pas d'être aussi efficace pour les structures composées d'éléments coques.

2.5 Structure de l'algorithme de résolution fréquentielle

Pour finir notre description de la TVRC, nous présentons dans le tableau 2.8 l'algorithme permettant la résolution des problèmes de structures avec chargement temporel.

	Algorithme de résolution TVRC
1.	Lecture du signal de chargement temporel appliqué à la structure
2.	Définition du chargement fréquentiel équivalent par transformée de Fourier
3.	Lecture de la géométrie générée par gmsh ([Gmsh, 2009]), des conditions limites et d'interfaces, ainsi que des caractéristiques matériau associées
4.	Pour chaque matériau différent
5.	Définition des vecteurs d'ondes de flexion et de membrane (paragraphe 2.2.3)
6.	fin
7.	Pour chaque sous-domaine
8.	Pour chaque bord du sous-domaine
9.	Évaluer la discrétisation des rayons : intérieure, bord, coin, pression et cisaillement (paragraphe 2.2.4)
10.	fin
11.	fin
12.	Pour chaque sous-domaine
13.	Pour chaque bord du sous-domaine
14.	Construction de la matrice principale et du second membre (paragraphe 2.2.2)
15.	fin
16.	fin
17.	Résolution du système (paragraphe 2.3)
18.	Sauvegarde des résultats au format Paraview ([Paraview, 2002])
19.	Post-traitement et reconstruction temporelle des résultats

TABLE 2.8: Algorithme de résolution fréquentielle TVRC appliqué au champ des structures mécaniques.

2.6 Conclusions du développement de la TVRC

Au cours de ces travaux réalisés sur la TVRC, de nombreux développements ont été mis en place afin de pouvoir appliquer cette méthode fréquentielle pour des réponses temporelles de structures du génie civil nucléaire. Pour cela, je suis parti du code développé dans [Kovalevsky, 2011] pour des problèmes d'acoustique dans les habitacles automobiles. Le code que j'ai implémenté permet de prendre en compte dans le domaine de la mécanique quatre types de structures (plaques, plaques circulaires, coques cylindriques et sphériques), deux types de déformation (membranaire et flexion), des interfaces pouvant être rigides ou souples, coplanaires ou non, et enfin des conditions limites classiques et de type ressort. Le paragraphe 2.2.5 présente la validation sur deux exemples de traitement de problèmes de vibrations forcées au travers de la TVRC. Le tableau 2.9 récapitule l'ensemble des développements mis en place.

	Développements TVRC effectués
1.	Adaptation des coques cylindriques [Riou *et al.*, 2004] aux coques sphériques
2.	Couplage des déformations de membrane et de flexion
3.	Généralisation de la formulation variationnelle à n sous-domaines pouvant être coplanaires ou non
4.	Mise en place des conditions aux limites de types ressorts et de symétrie
5.	Implémentation d'une méthode de résolution adaptée aux systèmes mal conditionnés de la TVRC
6.	Développement de l'analyse multi-fréquentielle via les approximants de Padé sur des structures plaques

TABLE 2.9: Récapitulatif des développements TVRC mis en place pour le traitement des vibrations induites par un impact d'avion.

Suite à tout cela, nous avons pu observer que la TVRC n'échappait pas à une des caractéristiques associées aux méthodes de Trefftz, le mauvais conditionnement du système à résoudre. Pour corriger cela, nous proposons ici une méthode de résolution adaptée à notre problématique basée sur une approche multi-grille de l'espace d'approximation. Cette méthode de résolution permet ainsi de diminuer considérablement le mauvais conditionnement du système permettant ainsi une meilleure approximation de la solution. De plus, cette méthode, étant parallélisable, permet de résoudre des problèmes de grandes tailles comme cela pourrait être le cas sur des structures complexes du génie civil nucléaire.

En ce qui concerne l'analyse multi-fréquentielle au travers des approximants de Padé, le paragraphe 2.4.4 permet de comparer cette approche vis-à-vis d'une résolution fréquence par fréquence sur un cas simple d'une plaque d'acier en flexion. On remarquera que cette méthode de résolution large bande est efficace sur des domaines de type plaque, néanmoins l'application pour des coques semble être plus problématique. En effet, la méthode nécessite le calcul de dérivées successives qui est alors plus difficile à mettre

en œuvre numériquement pour la partie coque. Des développements complémentaires doivent ainsi être étudiés afin d'adapter efficacement l'approche des approximants de Padé aux structures comprenant des éléments coques. Cette approche de résolution multi-fréquentielle ne peut donc en l'état être appliquée à une structure du génie civil nucléaire d'une manière plus efficace qu'une résolution fréquence par fréquence.

Les conditions d'efficacité de la méthode peuvent perçues en plusieurs termes dimensionnels, énergétiques ou encore physiques. En effet tout d'abord la modélisation en coques "minces" semble pertinente par rapport aux modèles globaux éléments finis traitant de la chute d'avion utilisés usuellement.

Pour résumer, tous ces développements de la TVRC ont été mis en place avec l'objectif de permettre une résolution efficace du cas de charge d'impact d'avion. Néanmoins avant son application et sa confrontation aux méthodes industrielles de traitement de cette problématique, le chapitre suivant doit permettre de valider l'application de la TVRC aux structures mécaniques.

Chapitre 3

Mise en œuvre de la TVRC dans un cadre industriel

Au vu des difficultés numériques rencontrées lors de l'utilisation des méthodes classiques temporelles, la méthode proposée pour l'étude de la chute d'avion est une approche couplée alliant une part temporelle et une part fréquentielle dans laquelle le large contenu en fréquence dans la réponse transitoire est pris en compte. La transformée de Fourier est appliquée aux quantités qui dépendent du temps dans le problème dynamique de référence, ce qui nous ramène à calculer des fonctions de réponse en fréquence. L'efficacité de la méthode est améliorée en choisissant la technique de résolution adéquate en fonction de la distance avec la zone d'impact : les éléments finis associés à une intégration directe pour la détermination de la zone endommagée et la TVRC pour le calcul des vibrations induites par le choc. Les développements de la transformée de Fourier ont permis de rendre cette association possible. Ce chapitre décrit la mise en œuvre de la stratégie pour le traitement de la chute d'avion, ainsi que l'intégration de la TVRC dans cette dernière.

Sommaire

3.1 Une stratégie d'étude dédiée à ce cas de charge 107
3.2 Définition des paramètres pilotant l'étendue de la zone non-linéaire . . 108
3.2.1 Choix de modélisation 109
3.2.2 Pré-analyse empirique de non perforation 112
3.2.3 Analyse de sensibilité 113
3.2.3.1 Etude pour différentes surfaces de chargement 114
3.2.3.2 Etude pour différentes résistances en compression du béton 117
3.2.3.3 Etude pour différents taux de ferraillage de la dalle en béton armé 119

3.2.3.4 Etude pour différentes épaisseurs de la dalle en béton . . 121
3.2.3.5 Conclusion de l'étude de sensibilité 123
3.2.4 Utilisation des plans d'expérience par la méthode de Taguchi 124
3.2.4.1 Définition des plans d'expériences 124
3.2.4.2 Utilisation des plans d'expériences dans notre étude de sensibilité 127
3.2.4.3 Conclusion du plan d'expérience 130
3.2.5 Conclusion sur la définition des paramètres de la structure pilotant la zone non-linéaire 131
3.3 Discrétisations et hypothèses liées à la stratégie 131
3.3.1 Discrétisation spatiale 131
3.3.2 Discrétisation fréquentielle 132
3.3.3 Reconstruction de la réponse temporelle 133
3.4 Prise en compte du béton armé et précontraint dans la TVRC 134
3.4.1 Modèles de comportements globaux 134
3.4.2 Homogénéisation du béton armé et précontraint dans un cadre linéaire et orthotrope 134
3.4.2.1 Homogénéisation du béton armé d'armatures passives . . 135
3.4.2.1.1 Détermination de l'énergie libre 135
3.4.2.1.2 Paramètres de la loi 135
3.4.2.2 Identification des paramètres de comportement élastique linéaire 136
3.4.2.3 Homogénéisation du béton précontraint 139
3.4.2.4 Homogénéisation du béton armé et précontraint 141
3.5 Conclusions sur la mise en œuvre de la stratégie de traitement de la chute d'avion 142

3.1 Une stratégie d'étude dédiée à ce cas de charge

Pour résoudre notre problématique de vibrations induites par un choc et plus particulièrement dans notre cas, l'impact d'avion sur une structure en béton armé, et en supposant que la structure est suffisamment bien dimensionnée de manière à résister à ce chargement, la stratégie que l'on propose de mettre en œuvre est définie dans la figure 3.1.

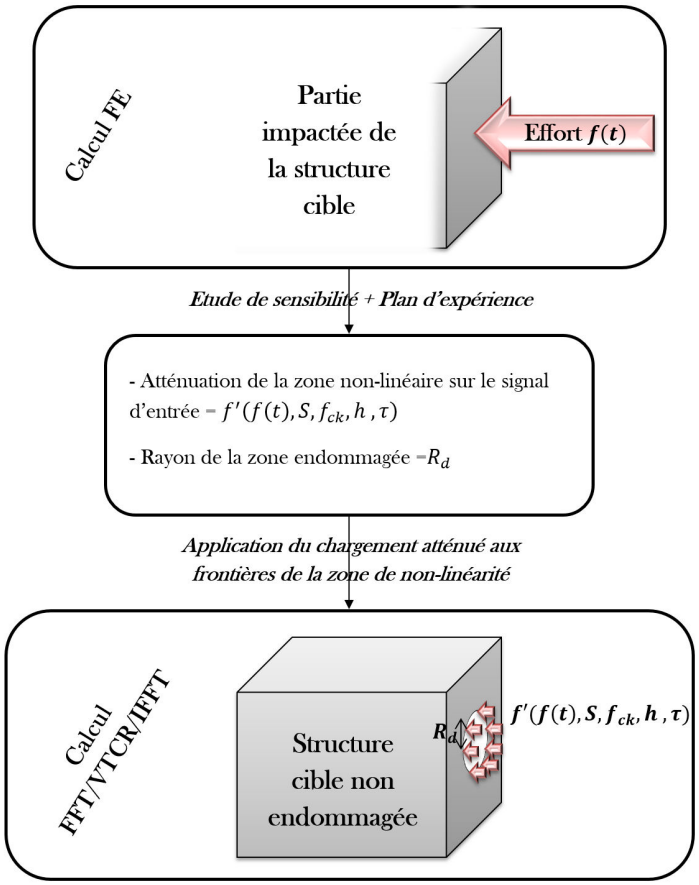


FIGURE 3.1: Stratégie globale de calcul.

Dans notre démarche, l'avion est remplacé par sa fonction force-temps équivalente calculée à l'aide de la méthode de Riera présentée dans le paragraphe 1.4.1.2. Cet effort est alors appliqué sur le modèle éléments finis de la partie impactée de la structure, cette étape nous permettant de calculer la réponse non linéaire et ainsi de définir la zone endommagée par le choc. Cette zone localisée au niveau du choc est définie par son rayon et l'atténuation induite sur le signal d'entrée aux bornes de cette zone. En complément à cela, une étude paramétrique, présentée dans le paragraphe 3.2, a été menée pour définir les paramètres du problème pilotant l'étendue de cette zone endommagée et pour apporter une estimation de l'étendue de cette zone.

Le signal atténué temporel peut ensuite être appliqué à la frontière de la zone définie dans la première étape sur le modèle linéaire du restant de la structure. Nous poserons l'hypothèse forte de non prise en compte d'une interaction entre les deux zones de la structure. La réponse de la structure est obtenue dans le domaine fréquentiel par un calcul via la TVRC. Ce calcul nécessite une transformation préalable du temporel vers le fréquentiel obtenue par transformée rapide de Fourier (FFT, Fast Fourier Transform). Ce changement de domaine nécessite une attention particulière décrite dans le paragraphe 3.3.

Après avoir résolu le problème dans le domaine des fréquences, la recomposition temporelle est effectuée par IFFT (transformée de Fourier rapide inverse). La TVRC assure un calcul efficace de la réponse de la structure dans le domaine fréquentiel.

Afin de pouvoir prendre en compte des structures orthotropes et hétérogènes, comme cela peut être le cas pour les enceintes du génie civil nucléaire en béton armé et précontraint, nous avons également mis en place une homogénéisation linéaire des lois de comportement (paragraphe 3.4).

3.2 Définition des paramètres pilotant l'étendue de la zone non-linéaire

La première étape préambule de notre approche consiste à conduire une étude paramétrique d'une dalle en béton armé subissant l'impact d'un projectile [Zhang, 2006] et [Zhang *et al.*, 2008]. La finalité de cette étape est d'identifier quels paramètres pilotent l'étendue de la zone non linéaire afin notamment d'avoir une estimation de ses dimensions et ainsi pouvoir choisir correctement la délimitation géométrique entre l'approche temporelle et fréquentielle. Dans ce cadre-là, plusieurs paramètres vont devoir être manipulés, et cela aussi bien au niveau de la modélisation du projectile que de la cible. La réponse non-linéaire de la structure est calculée par la méthode des éléments finis. Ici l'avion est remplacé par une fonction équivalente force-temps. Le chargement est défini en utilisant le modèle simple de Riera [Riera, 1980]. Pour cette étude, nous avons pris le parti de prendre en compte un avion de type commercial car pouvant être considéré comme celui amenant le plus grand endommagement. La figure 3.2 décrit le chargement normé utilisé.

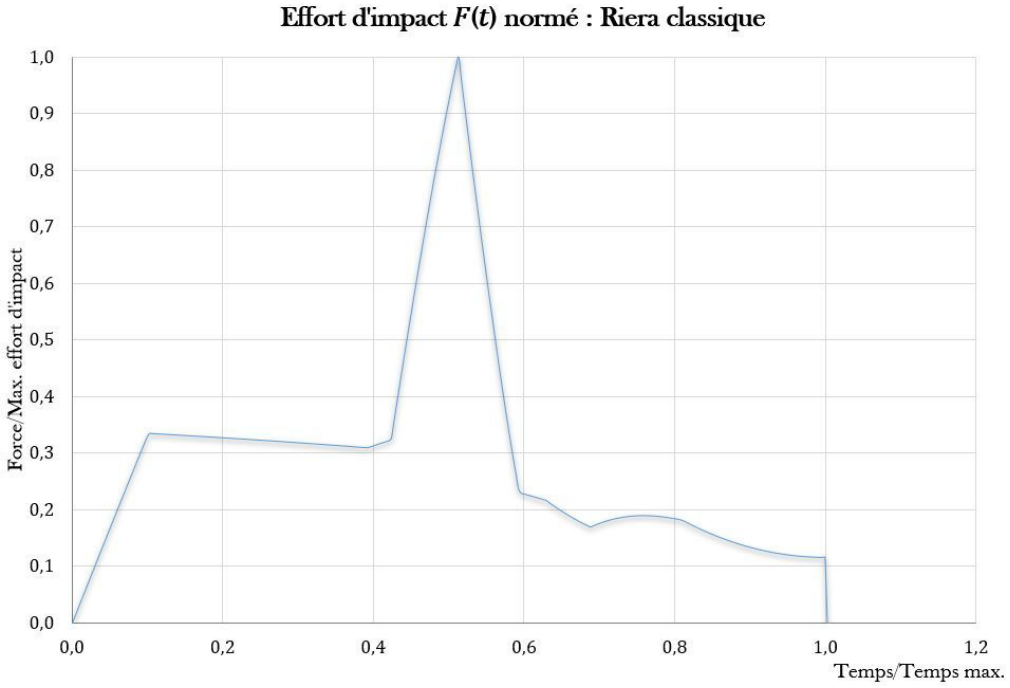


FIGURE 3.2: Diagramme effort/temps de l'impact d'un avion de type commercial.

Suite à cela, l'influence des différents paramètres sur l'étendue de la zone de non-linéarité est étudiée. Parmi ces variables, nous considérons :

- l'épaisseur h de la cible,
- le taux d'armatures longitudinales τ,
- la résistance f_{ck} du béton en compression,
- la surface de chargement S,
- la quantité de mouvement.

L'impact de chacun des paramètres entre eux sur les résultats sera étudié dans un second temps au travers de plans d'expérience s'appuyant sur les tables de Taguchi, tel que défini dans [Taguchi, 1986], [Souvay, 1994] et [Linder, 2005].

3.2.1 Choix de modélisation

Les calculs éléments finis sont menés via LS-Dyna [Ls-Dyna, 1976] utilisant une intégration temporelle explicite. Nous avons décidé de concentrer notre étude sur une dalle cible de type plaque ayant une géométrie carrée de 40 m * 40 m et dont les conditions aux limites sont définies comme encastrées sur chacun des bords. Cette considération géométrique est prise de manière à avoir une zone endommagée enveloppe par rapport aux autres géométries impactées possibles des structures du génie civil nucléaire (cylindrique pour l'enceinte ou sphérique pour le dôme). Dans un souci de respect des usages usuelles de modélisation, les dalles sont modélisées par des éléments coques couplés avec la loi de comportement du béton *Mat_Concrete_EC2*. L'enrobage des armatures reste constant

et est pris égal à 10 *cm* sur chacune des faces.

Cette loi de comportement ([Hallquist, 2006]) est utilisée pour des éléments coques de type QUA4. Le modèle comprend une fissuration du béton en traction et un écrasement en compression. En effet, les équations gouvernant notre loi de comportement ont été tirées de l'Eurocode 2. L'emploi de cette loi va permettre de prendre directement en compte le ferraillage longitudinal. Le principe général du *Mat_Concrete_EC2* est une conjugaison des deux matériaux acier et béton, l'acier étant défini en fonction de ratios. L'utilisation de cette loi de comportement est souvent associée à une modélisation de coques multi-feuillets permettant de définir différentes couches suivant l'épaisseur de la dalle cible. Chaque couche se verra attribuée un pourcentage d'acier convenable suivant chacun des axes. Par exemple, pour une couche de béton, le pourcentage d'acier sera nul. La loi de comportement du béton est définie suivant le type d'agrégats contenus dans le béton : silice ou calcaire. L'Eurocode 2 définit le béton à partir de ses paramètres mécaniques, résistance en compression et traction et déformation élastique et ultime.

Le comportement du matériau est contrôlée au travers des contraintes maximales du béton en compression et traction (contrainte maximale de traction provoquant la fissuration) et de la limite ultime du renforcement ε_{sy} en déformation. Ces trois paramètres combinés avec la densité du béton, le module d'élasticité de l'acier et le ratio de renforcement, permettent de modéliser le comportement du béton armé. La figure 3.3 et l'équation 3.1 représentent le comportement en compression du béton.

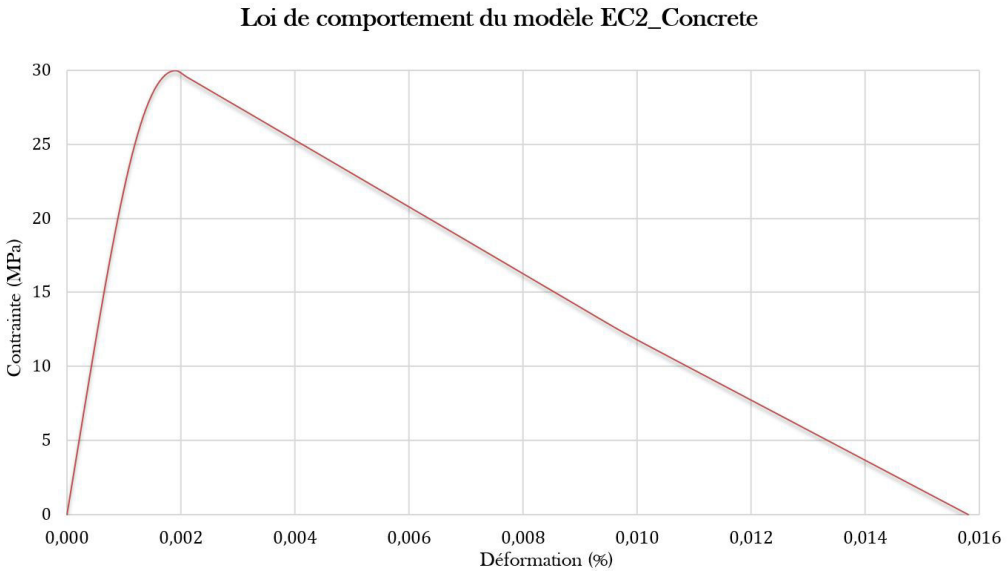


FIGURE 3.3: Modèle mathématique utilisé dans l'Eurocode 2 pour définir la loi de comportement du béton [EC2, 2005].

$$\sigma = F_{cmax}\left(\frac{3\varepsilon}{\varepsilon_{c1}(2+(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}})^3}\right) \tag{3.1}$$

où ε_{c1} est la déformation correspondant à la résistance à la compression F_{cmax}, et ainsi ε est la déformation équivalente en compression uniaxiale. Le module d'élasticité initial est donné par $E = \frac{3}{2}\frac{F_{cmax}}{\varepsilon_{c1}}$. En atteignant F_{cmax}, la contrainte σ diminue alors linéairement avec l'augmentation de la déformation, lorsque la déformation est égale ε_{cu} la contrainte devient nulle. Les déformations ε_{c1} et ε_{cu} sont par défaut prises de [EC2, 2005]. Elles prennent respectivement les valeurs de 0,0025 et 0,02. F_{cmax} donne la résistance en compression du béton s'appliquant. Le comportement est parfaitement élasto-plastique, jusqu'à l'apparition de la rupture, après quoi la contrainte diminue linéairement avec l'augmentation de pression jusqu'à la rupture finale. Par exemple, pour l'acier de renfort laminé à chaud la rupture commence à une déformation ε_{st} de 15% et se termine à ε_{su} =20%.

Ici le béton se fissure lorsque la contrainte en tension dans le plan de principale atteint la résistance maximale à la traction spécifiée F_{tmax}. La fissure s'initie alors et croît progressivement jusqu'à son ouverture complète. Par défaut elle suit une courbe de traction bi-linéaire.

Une étude comparative avec une loi de comportement définie pour les éléments volumiques a été effectuée (voir la figure 3.4). Le modèle de citemurray2007evaluation se base sur une surface de rupture fermée dans le repère d'axes hydrostatiques. Ce matériau est capable de représenter le comportement complexe du béton en prenant en compte :

- le comportement isotrope,
- le comportement différent en traction et en compression,
- les surfaces de plasticité (traction, cisaillement, compression),
- l'adoucissement en compression,
- l'endommagement en traction,
- les effets de la vitesse de déformation,
- l'érosion.

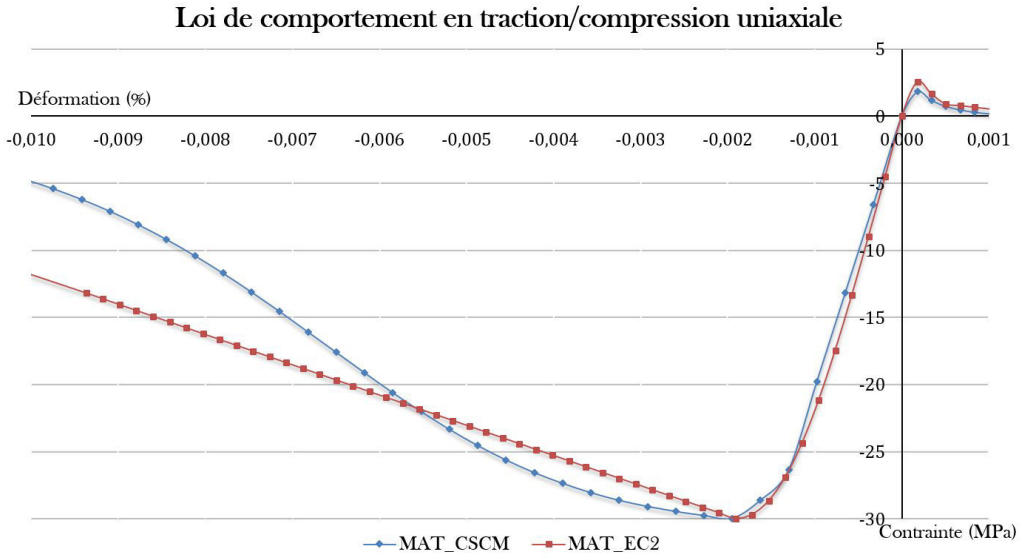


FIGURE 3.4: Comparaison de la loi de comportement béton *Mat_Concrete_EC2* utilisée pour les coques avec un modèle volumique.

3.2.2 Pré-analyse empirique de non perforation

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, l'impact d'avion amène globalement à un choc mou où ainsi l'avion a une déformation plus importante devant le voile impacté de la structure cible. Associé à cela une des hypothèses établit dans notre problématique d'ébranlement de structure est la résistance locale de l'enceinte. Cela implique donc la non perforation de la cible. Pour prédéterminer les jeux de paramètres permettant de satisfaire cette hypothèse, deux possibilités seront comparées : l'analyse non linéaire et dynamique éléments finis et les méthodes analytiques d'ingénierie.

Au niveau industriel, le dimensionnement des structures soumises à un choc dur est mené au travers de méthodes empiriques. Ces méthodes, permettant le calcul des épaisseurs de juste écaillage ou de juste perforation, sont calquées à partir de résultats expérimentaux et plus particulièrement des courbes d'essai de perforation, d'écaillage ainsi que de pénétration. Ces méthodes ont principalement été conduites par les institutions militaires de pays comme la France, le Royaume-Uni ou encore les Etats-Unis d'Amérique, à l'exception du Commissariat d'Energie Atomique (CEA) pour la France et de l'autorité d'énergie atomique anglaise (UKAEA, United Kingdom Atomic Energy Authority). En 1974, le CEA s'associe à EDF en lancant un programme d'études permettant d'observer les effets d'impact dynamique. Cette campagne expérimentale décrite dans [Gueraud *et al.*, 1977], [Fiquet et Dacquet, 1977] ainsi que [Goldstein *et al.*, 1977] distingue deux types d'essai : les essais de chute de bloc, dont la vitesse d'impact pilotée par les hauteurs initiales des projectiles est relativement faible, et des tirs de projectiles lancés à l'aide d'un canon à air avec une vitesse plus importante. Dans [Berriaud *et al.*, 1978] Berriaud regroupe les données expérimentales de ce projet et formule une loi de juste perforation.

Fullard reprendra plus tard cette formulation afin de tenir compte des armatures passives et l'énonce dans [Fullard *et al.*, 1991] comme décrit dans l'équation 3.2. L'épaisseur de juste perforation définit l'épaisseur de béton minimale à prendre en compte afin de se prémunir de tout risque de perforation.

$$e = 0,82 V_c^{\frac{3}{4}} . f_c^{\prime \frac{-3}{8}} . \rho^{\frac{-1}{8}} . \left(\frac{m}{\phi}\right)^{\frac{1}{2}} . r^{-0,202} \tag{3.2}$$

où

Paramètres	Sens physique	Unité
ρ	densité du béton	$kg.m^{-3}$
ϕ	diamètre du projectile	m
e	épaisseur de juste perforation	m
m	masse du projectile	kg
V_c	vitesse du projectile	$m.s^{-1}$
f'_c	contrainte limite en compression du béton	Pa
r	taux d'armature dans les deux directions du plan impacté	$\%$

TABLE 3.1: Paramètres de la formule de non perforation CEA-EDF.

En s'appuyant de [Hervé, 2005] et [Bangash, 1993], il est possible de dresser une liste détaillée mais certe non exhaustive de ces formules permettant d'obtenir la profondeur de pénétration d'un projectile, l'épaisseur de juste écaillage et de juste perforation.

Cependant, les formules CEA-EDF tout comme celles de l'UKAEA, mises en œuvre à partir des travaux du CEA-EDF, sont assez bien connues et peuvent être considérées comme des références pour les cas de chocs durs. Toutefois elles atteignent leurs limites pour des projectiles à la lisière de la distinction entre chocs dur et mou.

Une seconde possibilité de méthode empirique reste de s'appuyer sur un critère usuel de non-poinçonnement de la zone béton armé impactée, connaissant le pic d'effort et sa surface de répartition. Néanmoins l'aspect dynamique ne peut être pris en compte de manière robuste.

Malgré ces manques, l'étude analytique de la non perforation sera effectuée au travers de la formule CEA-EDF définit dans l'équation 3.2 et permettra d'appuyer les résultats issus de la simulation numérique.

3.2.3 Analyse de sensibilité

Les paramètres à étudier sont donc les suivants :
- la surface de chargement,
- la résistance caractéristique du béton de la dalle cible,
- le taux de ferraillage,
- l'épaisseur de la dalle béton.

Dans chacune des études, il est question de ne faire varier qu'un seul paramètre à la fois. Les résultats qui retiennent notre attention sont la flèche de la dalle béton, l'étendue de la zone endommagée et les réactions aux bords de la zone étudiée. Il est à noter que pour ce dernier type de résultat nous avons fait le choix de les comparer à la réponse d'une dalle non endommagée. Cette comparaison est effectuée, pour une raison de lisibilité, sur la première période de la courbe obtenue de 500 *ms*.

3.2.3.1 Etude pour différentes surfaces de chargement

Pour chacune des configurations, l'épaisseur prise en compte a été de 1,2 *m*. Le béton a une résistance de 40 *MPa*. Au niveau ferraillage, 2 nappes de HA32@20 *cm* dans les deux directions ont été considérées. Ici plusieurs surfaces de chargement ont été comparées. Les dimensions prises en compte sont les suivantes :

- 4 m^2,
- 8 m^2,
- 12 m^2,
- 15 m^2,
- 18 m^2,
- 21 m^2,
- 37 m^2,
- Fuselage ($\phi = 3,76m \Rightarrow$ Surface $= 11m^2$) + Ailes ($L = 29m$).

Les surfaces étudiées ont une géométrie de forme circulaire, à l'exception de la dernière. Cette dernière surface prise en compte a pour but de se rapprocher au mieux de la surface d'impact d'un avion de type commercial. Dans ce cas, l'historique de chargement est un peu différent. Ce dernier est représenté sur la figure 3.5.

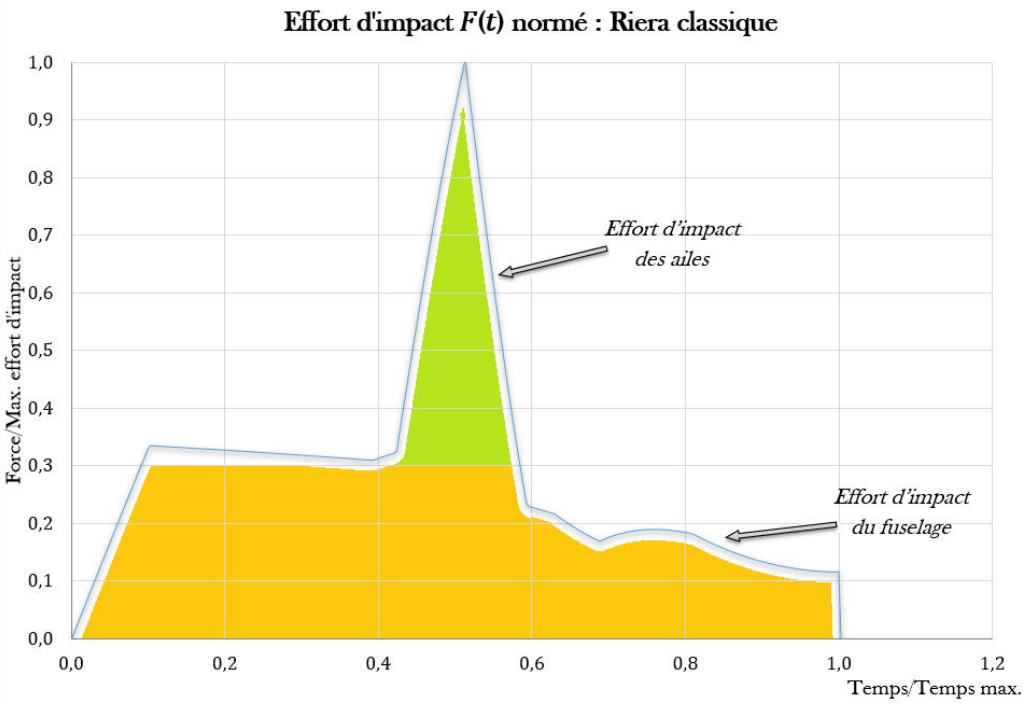


FIGURE 3.5: Diagramme effort/temps de l'impact d'un avion commercial divisé en deux surfaces (fuselage+aile).

Les trois figures 3.6, 3.7 et 3.8 présentent les résultats obtenus.

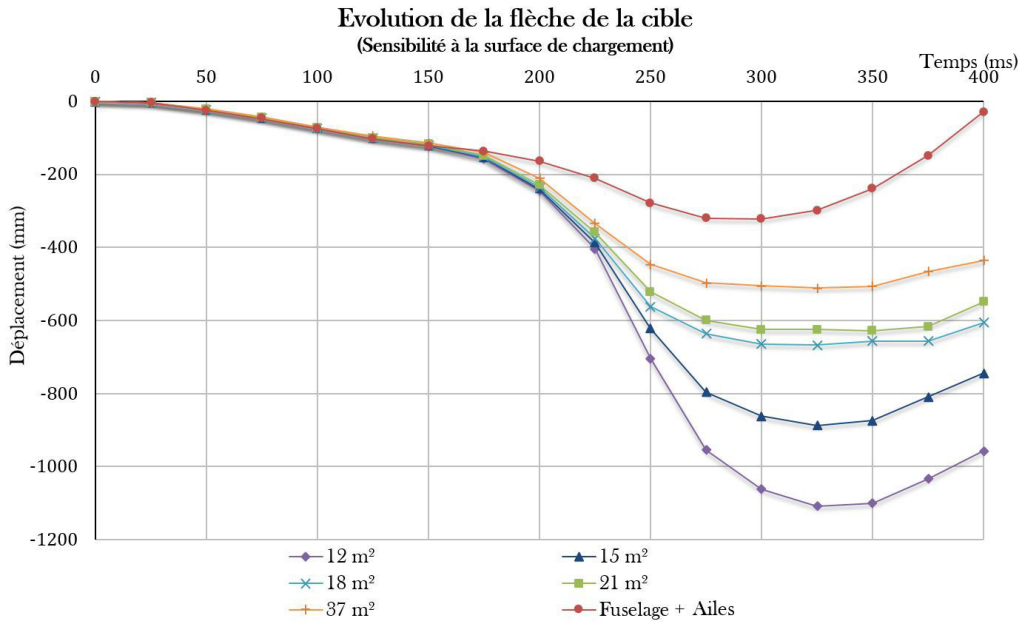


FIGURE 3.6: Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps.

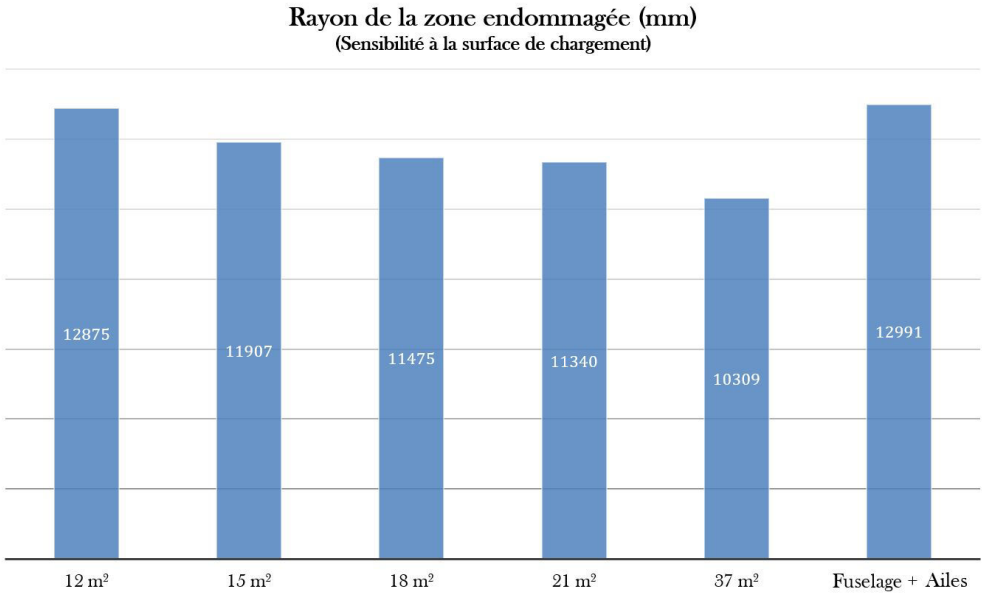


FIGURE 3.7: Rayon maximum de la zone endommagée basé sur un critère en déformation équivalente (en mm).

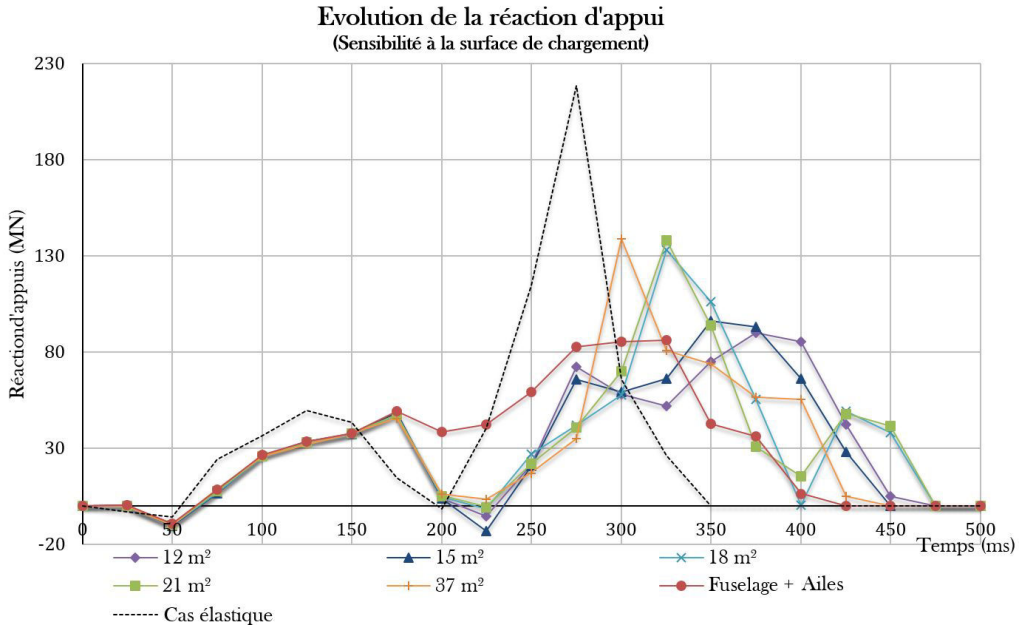


FIGURE 3.8: Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps.

Pour de faibles surfaces de chargement, 4 m^2 et 8 m^2, nous avons pu remarquer un effet de perforation de la dalle et corroborer par la formule de non perforation, celle-ci donnant une surface de chargement minimale de 10 m^2. Les résultats de ces deux surfaces

ne seront donc pas considérer.

Le déplacement maximal de la dalle diminue en augmentant la surface de chargement. Il semblerait tout de même que la flèche converge vers une valeur de 50 *cm*.

Au niveau de l'étendue de la zone de non linéarité, on peut se rendre compte que la surface de chargement n'a pas un impact considérable, cependant on trouve tout de même une diminution de cette zone en augmentant la surface chargée. L'endommagement plus élevé pour la surface "Fuselage+Aile" s'explique par l'envergure des ailes, et donc de la surface de chargement.

En termes de réaction d'appuis, on remarque une corrélation avec l'endommagement. En effet la zone endommagée dissipe une partie de l'effort appliqué, ce qui explique une diminution de l'effort aux conditions limites. Ici, le rayon d'endommagement est proche de 11 *m* et la réaction maximale se situe autour de 140 *MN*, correspondant à une perte de 35%.

La conclusion quant à cette étude peut être faite en deux points. Tout d'abord, la surface prise en compte doit être supérieure à 8 m^2 afin d'éviter le phénomène de perforation. Et enfin, les résultats ont tendance à converger assez rapidement à partir d'une surface de 18 m^2.

3.2.3.2 Etude pour différentes résistances en compression du béton

L'épaisseur prise en compte a été de 1,2 *m*. Au niveau ferraillage, 2 nappes de HA32@20 *cm* dans les deux directions ont été considérées. L'application d'un historique de chargement sur une surface de chargement minimale de 12 m^2 est prise en compte. Dans cette étude, le béton a une résistance de :

- 30 *MPa*,
- 40 *MPa*,
- 50 *MPa*,
- 60 *MPa*.

Ces valeurs ont été choisies dans le but de représenter des bétons ordinaires et couramment utilisés. On peut alors voir les résultats obtenus sur les figures 3.9, 3.10 et 3.11.

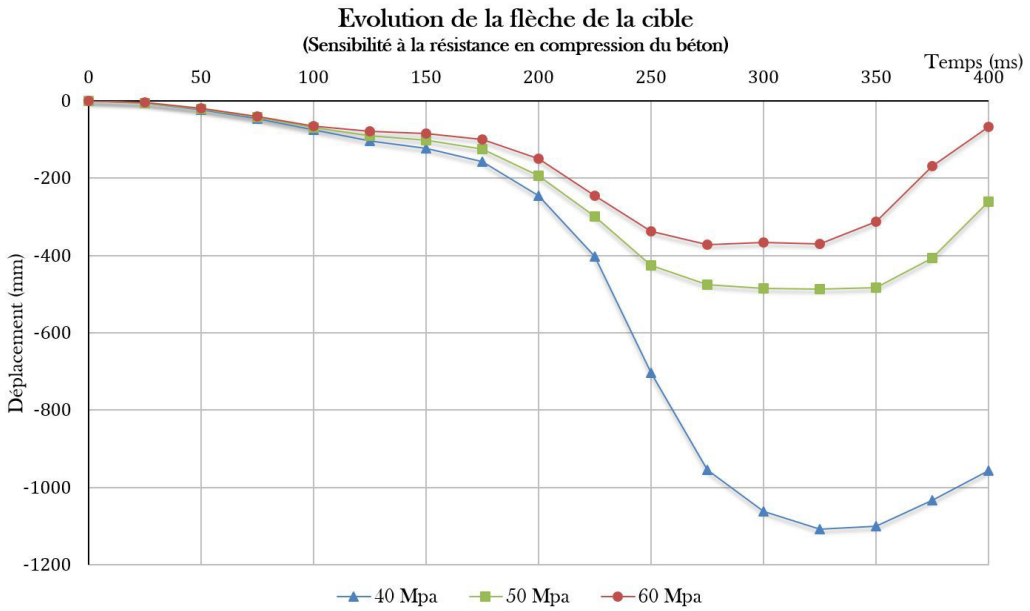


FIGURE 3.9: Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps.

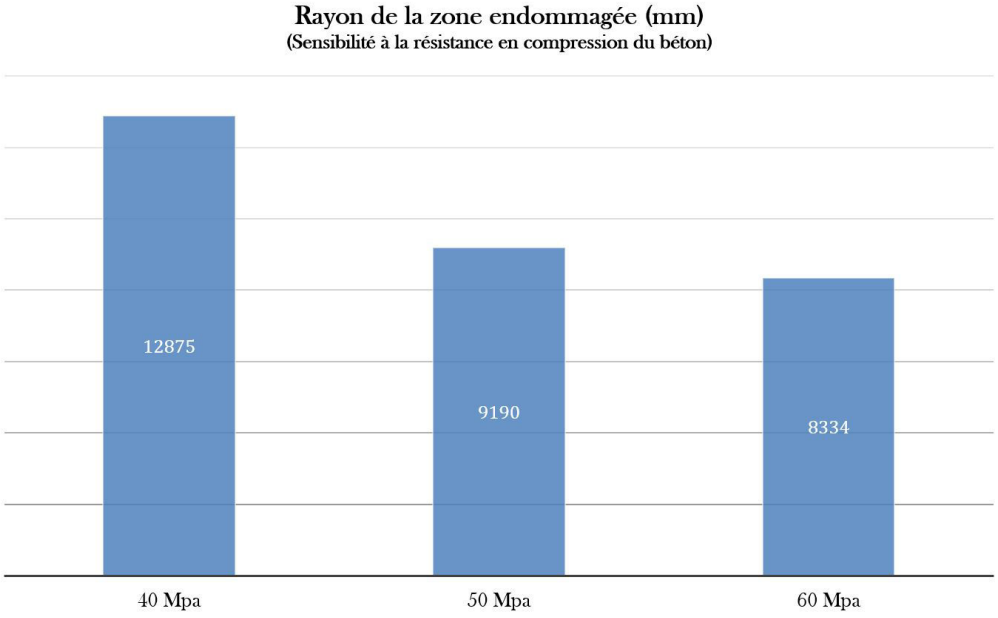


FIGURE 3.10: Rayon maximum de la zone endommagée basé sur un critère en déformation équivalente (en mm).

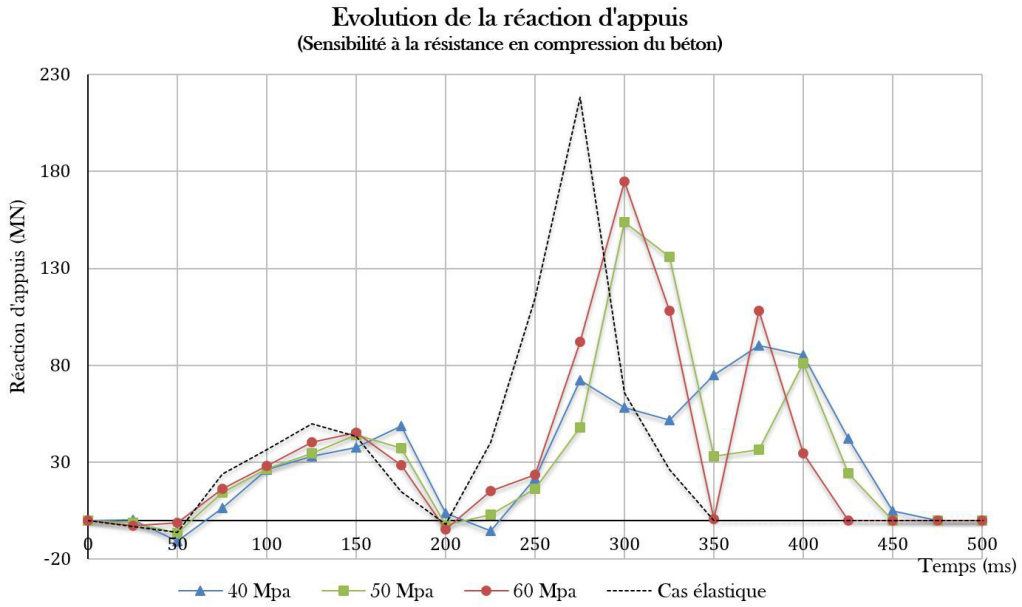


FIGURE 3.11: Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps.

Tout comme dans le paragraphe précédent, le calcul avec un béton ayant une résistance de 30 *MPa* conduit à un phénomène de perforation. On observe ici et assez logiquement qu'une augmentation de la résistance caractéristique a un effet important. Étant donné que nous nous situons dans un problème de dalle en flexion, on peut en conclure que la résistance en traction joue un rôle primordial. L'ensemble des résultats ont une tendance à converger à partir d'une résistance de 50 *MPa*. En effet, à partir de cette résistance, on obtient une flèche de 40 *cm*, un rayon de la zone endommagée de 8,5 *m* et une réaction maximale aux appuis de 170 *MN*, soit une perte d'environ 22 %.

3.2.3.3 Etude pour différents taux de ferraillage de la dalle en béton armé

Pour chacune des configurations, l'épaisseur prise en compte a été de 1,2 *m*. Dans cette étude, le béton a une résistance de 40 *MPa*. L'historique de chargement est appliqué sur une surface de chargement de 12 m^2. Au niveau ferraillage, quatre configurations sont à considérer :

- deux nappes de HA25@25 *cm* dans les deux directions, soit $0,2\ \%/m$ d'acier pour chaque direction,
- deux nappes de HA25@20 *cm* dans les deux directions, soit $0,25\ \%/m$ dans chaque direction,
- deux nappes de HA32@20 *cm* dans les deux directions, soit $0,4\ \%/m$ dans chaque direction,
- deux nappes de HA40@20 *cm* dans les deux directions, soit $0,63\ \%/m$ dans chaque direction.

Ces quatre configurations ont été choisies car elles sont courantes dans le domaine du génie civil nucléaire. Les résultats sont observables sur les figures 3.12, 3.13 et 3.14.

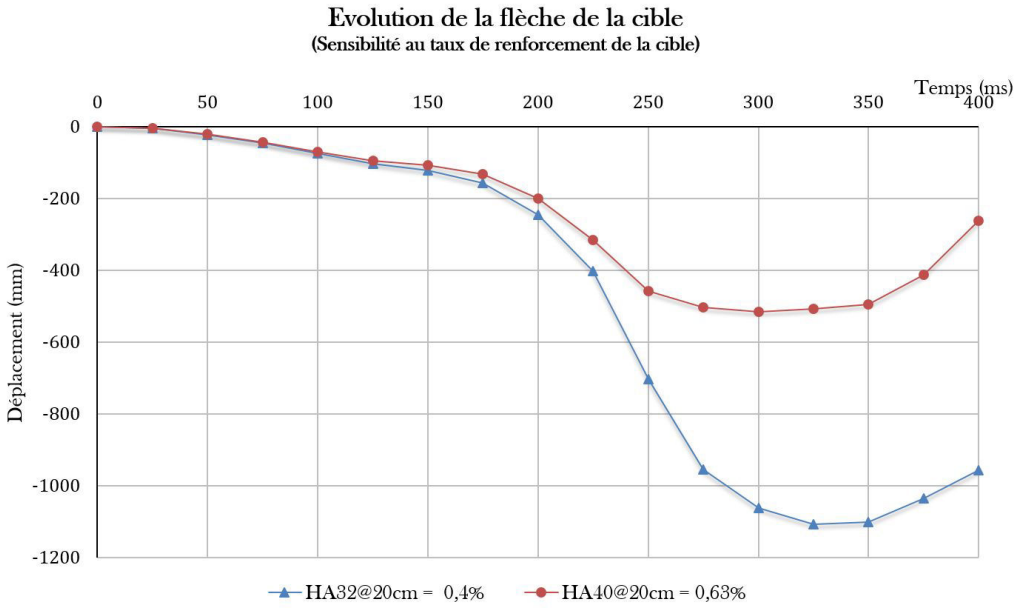


FIGURE 3.12: Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps.

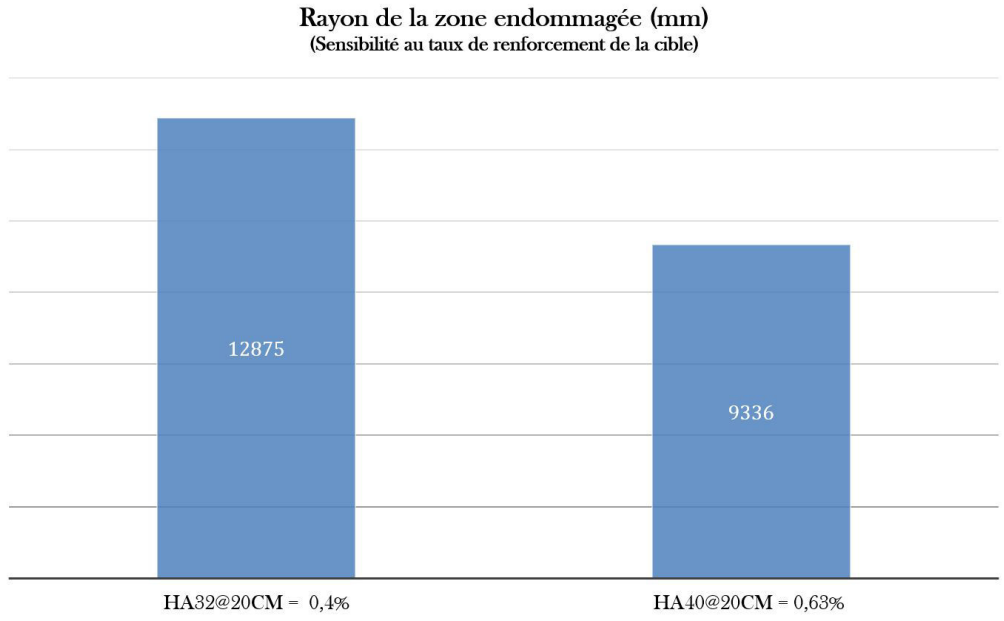


FIGURE 3.13: Rayon maximum de la zone endommagée (en mm).

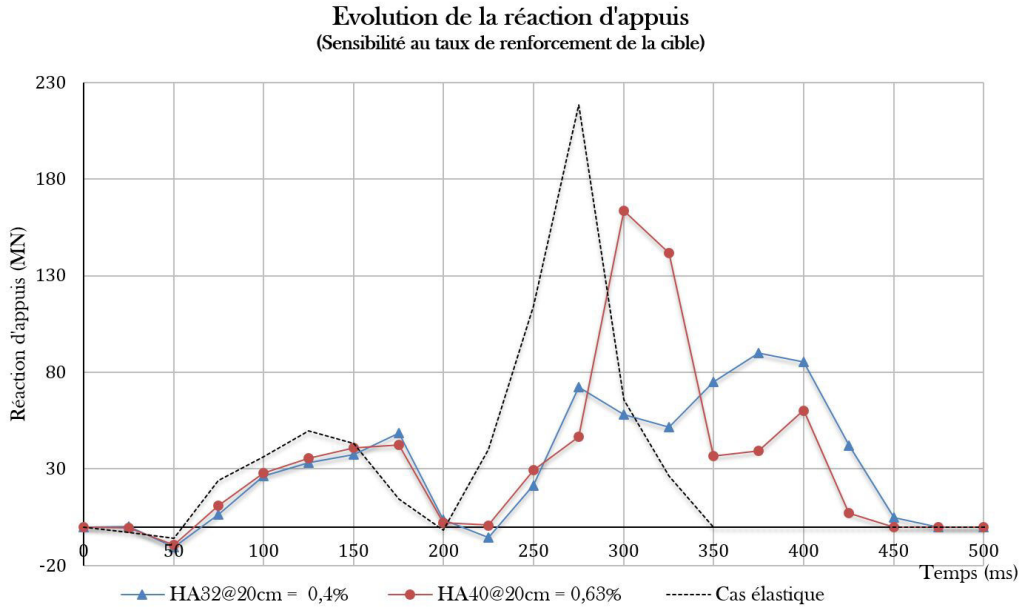


FIGURE 3.14: Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps.

Les deux premiers ratios d'acier ne sont pas à considérer car dans ces deux cas on retrouve une perforation de la dalle béton. Il ne reste donc plus que deux configurations, HA32@20 *cm* et HA40@20 *cm*.

On remarque ainsi une différence importante au niveau des résultats entre les deux dernières configurations. En effet la flèche est divisée par deux. Le rayon d'endommagement est diminué de plus de 3 *m*. Et la réaction maximale aux appuis est multipliée par deux. Ces résultats sont en accord avec l'importance observée pour la résistance maximale en traction du béton. Cela démontre bien que l'on se trouve avec un problème de flexion et que les paramètres influant sur la résistance à la flexion de la dalle ont un rôle non négligeable. Néanmoins dans le cas des différents ratios de ferraillage, les dispositions constructives ont une limite en termes de configurations possibles. Il serait ainsi difficile de concevoir un taux de ferraillage supérieur à celui des HA40@20 *cm* autre qu'avec plusieurs lits d'armature.

3.2.3.4 Etude pour différentes épaisseurs de la dalle en béton

Au niveau ferraillage, deux nappes de HA32@20 *cm* dans les deux directions ont été considérées. Ici, le béton a une résistance en compression de 40 *MPa*. L'effort est appliqué sur une surface de chargement de 12 m^2. Dans cette étude, les différentes configurations d'épaisseur de la dalle prises en compte sont :

- 0,6 *m*,
- 0,9 *m*,
- 1,2 *m*,
- 1,35 *m*,

– 1,5 *m*,
– 1,8 *m*,
– 2,1 *m*.

Les résultats sont observables sur les figures 3.15, 3.16 et 3.17.

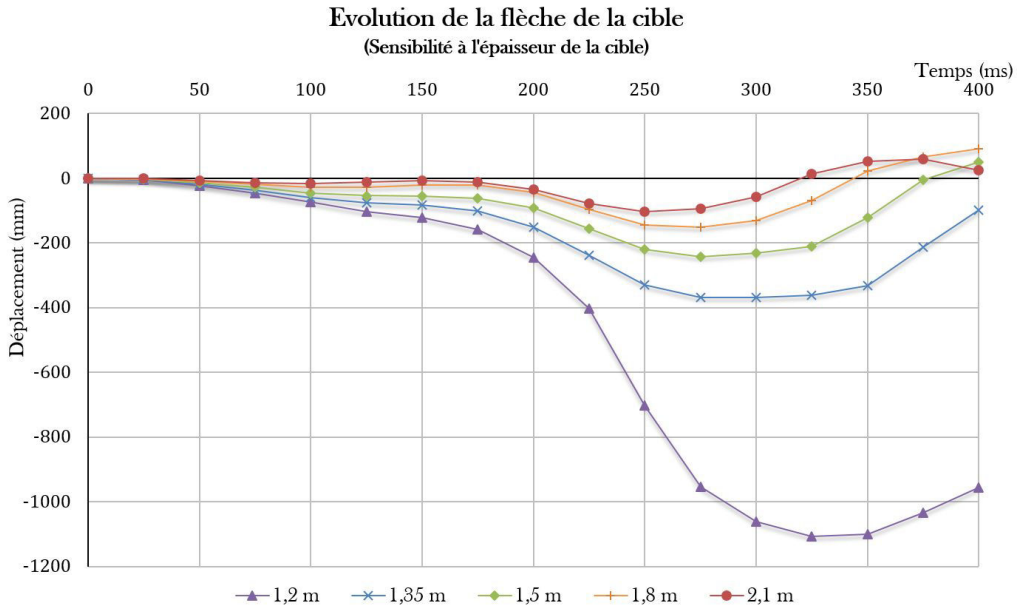


FIGURE 3.15: Evolution du déplacement maximal de la dalle en fonction du temps.

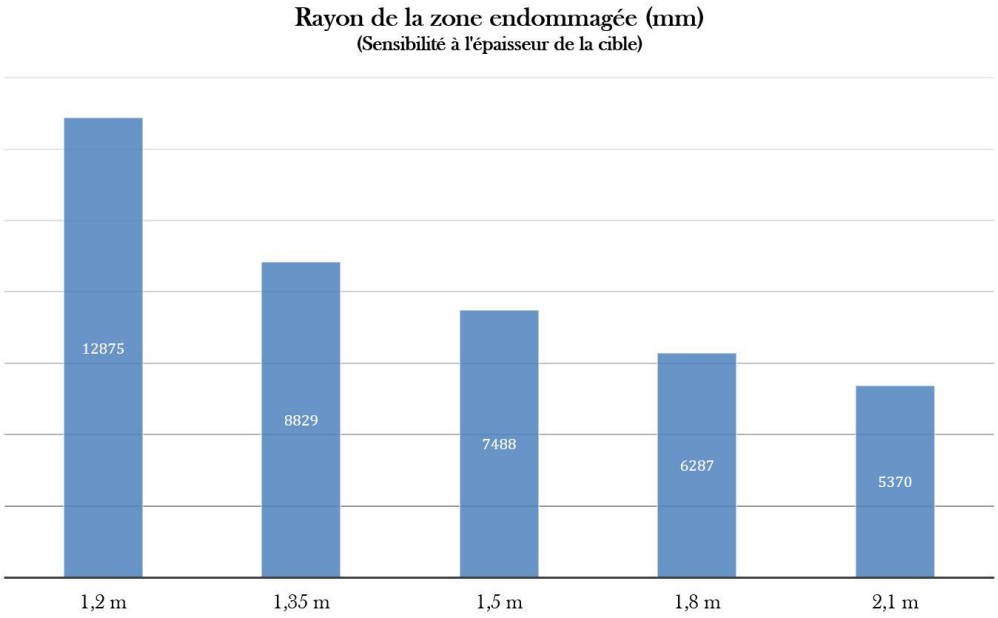


FIGURE 3.16: Rayon maximum de la zone endommagée (en mm).

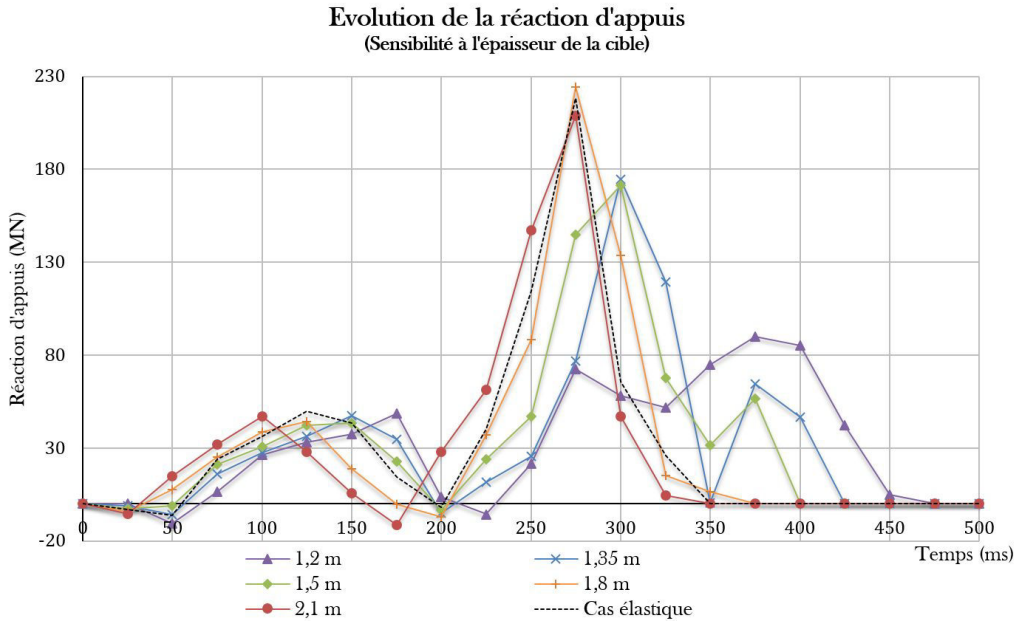


FIGURE 3.17: Evolution de l'effort aux limites en fonction du temps.

Comme pour les trois études précédentes, les deux premiers calculs ont mené à une perforation de la dalle béton. Ces deux calculs ne sont donc pas à prendre en compte.

Dans cette étude, on peut voir que les résultats au niveau de la flèche et de l'étendue de la zone de non-linéarité diminuent de façon presque constante. En terme de flèche, on peut dire qu'en augmentant l'épaisseur de la dalle ce déplacement maximum va diminuer, mais aussi que la dalle va avoir une amplitude de vibration moins élevée et que son déplacement résiduel va se rapprocher de zéro. Au niveau de la réaction maximale aux conditions limites, une dalle plus épaisse étant moins endommagée, il est normal de retrouver un effort aux frontières n'étant que peu diminué.

Ici, on peut conclure que l'épaisseur de la dalle a un impact important sur la zone de non-linéarité. Dans notre cas, les résultats ne semblent pas converger vers une valeur limite. On pourrait donc augmenter cette épaisseur et observer une diminution de cette zone non linéaire.

3.2.3.5 Conclusion de l'étude de sensibilité

Pour conclure vis-à-vis de cette étude de sensibilité, nous pouvons dire que nous avons pu déterminer les valeurs amenant à un calcul de type perforation en associant formulation analytique de non perforation des chocs durs et simulation numérique. Dans notre cas, nous n'avons pas porté d'attrait particulier à ces jeux de paramètre.

Les résultats obtenus sont en accord avec ce que l'on pouvait en toute logique attendre. Il est par ailleurs difficile de dégager une tendance directe entre paramètres d'entrée et résultats. Les simulations menant à un problème de flexion de la dalle ont permis de comparer l'effet des différentes valeurs prises par une variable.

Néanmoins la corrélation entre les différents paramètres est impossible à effectuer de cette façon. Le plan d'expérience décrit dans le paragraphe suivant vise à combler ce manque.

3.2.4 Utilisation des plans d'expérience par la méthode de Taguchi

Ce paragraphe a pour objectif de conclure notre étude de sensibilité en comparant l'effet des différents paramètres entre eux. Cela doit nous permettre d'identifier quels facteurs ont un impact plus important sur la flèche maximale de la dalle en béton, sur le rayon de zone endommagée et sur la réaction maximale au niveau des appuis.

3.2.4.1 Définition des plans d'expériences

On nomme plan d'expérience, [Linder, 2005], la suite ordonnée d'essais d'une expérimentation, chacune permettant d'acquérir de nouvelles connaissances en contrôlant un ou plusieurs paramètres d'entrée pour obtenir des résultats validant un modèle avec une bonne économie (nombre d'essais le plus faible possible, par exemple).

En effet, ce type de méthode est utilisé en particulier, dans le cadre de la conception d'un produit industriel. Le problème du concepteur est alors de trouver les "bonnes" valeurs de ces paramètres, c'est-à-dire celles qui feront que le produit aura le comportement attendu ; cela nécessite d'identifier l'influence des paramètres sur la réponse du produit. Le coût d'une étude expérimentale dépend donc du nombre et de l'ordre des essais effectués.

Les plans d'expériences consistent donc à sélectionner et ordonner les essais afin d'identifier, à moindres coûts, les effets des paramètres sur la réponse du produit. Il s'agit de méthodes statistiques faisant appel à des notions mathématiques simples. La mise en œuvre de ces méthodes comporte quatre étapes.

1) Recenser les paramètres du système. Ces paramètres correspondent à des grandeurs physiques du produit industriel, que l'on s'autorise à modifier.
2) Préciser les valeurs que l'on souhaite leur donner. Sur le produit réel, les paramètres peuvent varier de façon continue (avec une infinité de valeurs possibles) ou discrète (avec un nombre fini de valeurs possibles).
3) Définir un plan d'expériences, c'est-à-dire une série d'essais permettant d'identifier les coefficients du modèle.
4) Faire les essais, afin d'identifier les coefficients et conclure.

Les plans d'expériences sont définis en deux catégories : les plans complets et les plans réduits.

Plans complets

Cette première catégorie de plans d'expériences est destinée à fournir une information la plus complète possible sur des systèmes présentant relativement peu de facteurs.

Ces plans consistent à tester toutes les combinaisons possibles, en faisant varier tous les facteurs à tous leurs niveaux de manière exhaustive.

Plans réduits

En pratique, les plans complets ne sont utilisables que sur des systèmes avec très peu de facteurs, ou lorsque chaque essai prend très peu de temps. Par exemple, dans le cas d'un essai comprenant 5 facteurs à 3 niveaux, un plan complet demanderait d'effectuer $3^5 = 243$ essais... Des plans réduits consistent à sélectionner certaines combinaisons. Ils permettent naturellement de réduire les coûts mais diminuent également l'information disponible sur le comportement du système ; il faut donc s'assurer de la pertinence de la sélection par rapport au modèle à identifier. Différentes techniques de plans réduits ont été définies ([Box *et al.*, 1978] et [Taguchi, 1986]). Parmi les plus utilisées et robustes, nous avons répertorié les deux méthodes suivantes :

– *Méthode de Box et Hunter*

La méthode de Box et Hunter, [Box *et al.*, 1978], permet de construire soi-même des plans réduits à partir de plans complets. Elle s'adresse exclusivement aux modèles à deux niveaux par facteur et se base sur la définition suivante.

Soient x_i et x_j deux facteurs admettant chacun deux niveaux, notés +1 et -1. On appelle niveau de l'interaction entre x_i et x_j, et on note l_{ij}, le produit de leurs niveaux respectifs. Le niveau de l'interaction de deux facteurs exprime donc formellement si, lors d'un essai donné, les deux facteurs agissent "dans le même sens" ou non. La table 3.2 représente un exemple de table Box et Hunter dans un cas à 3 facteurs.

Essai	x_1	x_2	x_3	l_{12}	l_{13}	l_{23}	l_{123}
1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1
2	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$
3	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$
4	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1
5	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$
6	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1
7	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1
8	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

TABLE 3.2: Table de Box et Hunter à 3 facteurs.

– *Tables de Taguchi*

La construction d'un plan fractionnaire adapté à un modèle donné est souvent délicate pour un non-spécialiste. Pour cette raison, on trouve dans le commerce des recueils de plans réduits "prêts à l'emploi", chacun adapté à un ou plusieurs modèles donnés ; un des exemples les plus connus est celui des tables de Taguchi, conçues par le statisticien Genichi Taguchi, [Taguchi, 1986], dans le but de minimiser l'effet des aléas et des erreurs de mesure. Concrètement, une table de Taguchi se présente sous la forme d'un tableau associé à un ou plusieurs graphes linéaires ([Taguchi et Konishi, 1987]).

La table 3.3 présente la table de Taguchi pour 7 paramètres à 2 niveaux (-1 et 1).

Essai	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	1	1	1	1
3	-1	1	1	-1	-1	1	1
4	1	-1	-1	-1	-1	1	1
5	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	1	-1	1	1	-1	1	-1
7	1	1	-1	-1	1	1	-1
8	1	1	-1	1	-1	-1	1

TABLE 3.3: Table de Taguchi L8 (2^7)

Le plan d'expériences, comme les méthodes citées, donne directement la séquence d'essais à réaliser. Une fois ceux-ci effectués, il ne reste plus qu'à en exploiter les résultats afin d'identifier les coefficients du modèle. Pour cela, on utilise des techniques statistiques, fondées sur une propriété importante des plans d'expériences utilisés : l'orthogonalité.

Pour identifier les coefficients du modèle, l'idée est d'utiliser des calculs de moyennes sur des ensembles de résultats "équilibrés", c'est-à-dire orthogonaux : c'est la notion d'effet. On définit ainsi l'effet (total) d'un facteur x_i à un niveau A_i par :

la moyenne de tous les résultats pour lesquels $x_i = A_i$ **MOINS** la moyenne générale.

Il résulte immédiatement de cette définition que pour tout facteur x_i, la somme de ses effets à ses différents niveaux est nulle.

De la même manière, on définit l'effet de l'interaction entre x_i au niveau A_i et x_j au niveau A_j par :

la moyenne de tous les résultats pour lesquels $x_i = A_i$ et $x_j = A_j$
MOINS l'effet de x_i au niveau A_i
MOINS l'effet de x_j au niveau A_j
MOINS la moyenne générale.

Il en résulte de même que pour tous facteurs x_i et x_j, la somme des effets de leur interaction aux différents niveaux de l'un ou l'autre des deux facteurs est nulle.

En conclusion, les plans d'expériences offrent un moyen simple et efficace de réduire le coût et d'augmenter la robustesse des études expérimentales effectuées lors de la conception ou de la validation d'un produit industriel. Ils permettent d'utiliser toute la connaissance du produit dont le concepteur peut disposer a priori, offrent un cadre de modélisation rigoureux, et leur mise en œuvre ne nécessite que des connaissances mathématiques élémentaires. Cette ressource n'offre naturellement qu'un aperçu des possibilités de cette méthode ; nous donnons pour cette raison un certain nombre de références, permettant au lecteur d'approfondir ou de découvrir d'autres points de vue sur le sujet.

3.2.4.2 Utilisation des plans d'expériences dans notre étude de sensibilité

Comme vu dans les paragraphes précédents, nous avons fait le choix d'utiliser une dalle plane en éléments coques couplés à la loi de comportement du béton *EC2_Concrete*. Les conditions aux limites de cette dalle sont prises comme étant des encastrements. Les paramètres restant à faire varier sont donc les suivants :

- Surface de chargement : $S = 12; 15; 18; 21; 37 m^2$,
- Résistance en compression : $f_{ck} = 40; 50; 60 MPa$,
- Epaisseur de la dalle : $h = 1,2; 1,35; 1,5; 1,8; 2,1 m$,
- Taux de ferraillage : $\tau = 0,4; 0,63 \%/m$,
- Coefficient temps : $c_t = 0,5; 1$,
- Coefficient effort : $c_e = 0,5; 1$.

Dans les valeurs à prendre en compte, nous avons retiré celles impliquant une perforation de la dalle afin conserver une flèche cohérente et de s'affranchir de ce type de problème. Nous avons également ajouté deux autres variables : c_t (coefficient appliqué sur l'échelle de temps du chargement) et c_e (coefficient appliqué sur la valeur de l'effort du chargement). Ces deux valeurs sont des coefficients multiplicateurs qui vont nous permettre d'observer l'effet d'une modification de la quantité de mouvement imposée à la dalle cible sur les résultats. Dans le tableau 3.4, on peut observer les deux niveaux pris en compte pour chaque variable.

Variables Niveaux	$S(m^2)$	$f_{ck}(MPa)$	$h(m)$	$\tau(\%)$	c_t	c_e
-1	12	40	1,2	0,4	0,5	0,5
1	37	60	2,1	0,63	1	1

TABLE 3.4: Valeurs des niveaux choisies pour le plan d'expérience.

L'utilisation d'un plan d'expérience réduit de Taguchi avec des variables à deux niveaux, nous a permis de réduire le nombre d'essais à 8 au lieu de $2^6 = 64$. Cette méthode présente ainsi un gain de temps considérable. Le tableau 3.5 nous expose les valeurs prises pour chaque essai et les résultats obtenus. Nous avons également considéré que les paramètres n'ont pas d'interaction entre eux permettant ainsi d'utiliser la table L8 de Taguchi. En termes de résultats, nous avons considéré la flèche maximale de la dalle béton, le rayon de la zone endommagée et l'effort maximal aux conditions limites. Étant donné que cette dernière valeur est très fortement dépendante du chargement appliqué et que dans les huit essais cet effort est différent, nous avons choisis d'évaluer l'effet de chacune des variables sur le rapport réaction maximale obtenue sur la réaction maximale aux appuis dans le cas d'une dalle référence qui ne subirait pas d'endommagement. Ce rapport permet de prendre en compte le pourcentage d'effort restitué aux limites de la dalle.

Var. / Essais	S (m^2)	f_{ck} (MPa)	h (m)	τ (%)	c_t	c_e	Résultats	Flèche max. (mm)	Rayon d'end. (mm)	Réact. max. (MN)	Réact. max. /Réact. max. élast. (%)
1	12	40	1,2	12,56	0,5	0,5		-129	4380	123	95,2
2	12	40	1,2	15,71	1	1		-665	10441	134	61,4
3	12	60	2,1	12,56	0,5	1		-36,8	2261	159	72,8
4	12	60	2,1	15,71	1	0,.5		-22,5	1130	84,8	77,7
5	37	40	2,1	12,56	1	0,5		-38,9	1696	82,8	75,8
6	37	40	2,1	15,71	0,5	1		-46,5	2615	190	87,0
7	37	60	1,2	12,56	1	1		-552	11441	117	53,6
8	37	60	1,2	15,71	0,5	0,5		-80,3	2559	94,5	73,1
							Moy.	-196,4	4565,4	123,1	74,6

TABLE 3.5: Listes des essais et résultats obtenus pour le plan d'expérience.

En utilisant la formule donnée dans le paragraphe précédent sur les tables de Taguchi, on définit l'effet d'un facteur à un niveau par la moyenne de tous les résultats à ce niveau moins la moyenne générale. A partir de cela, on peut ainsi calculer l'influence de chaque paramètre sur les trois types de résultats (flèche, endommagement et réaction d'appuis). On obtient alors le tableau 3.6.

Niveaux	Flèche max. (mm)	Rayon d'end. (mm)	Réact. max. /Réact. max. élast. (%)	Flèche max. (mm)	Rayon d'end. (mm)	Réact. max. /Réact. max. élast. (%)
	$S(m^2)$			$f_{ck}(MPa)$		
-1	-16,9	-12,4	2,1	-23,5	217,6	5,3
1	16,9	12,4	-2,1	23,5	-217,6	-5,3
	$h(m)$			$\tau(\%)$		
-1	-160,2	2639,9	-3,8	7,2	379,2	-0,2
1	160,2	-2639,9	3,8	-7,2	-379,2	0,2
	c_t			c_e		
-1	123,2	-1611,7	7,5	128,7	-2124,2	5,9
1	-123,2	1611,7	-7,5	-128,7	2124,2	-5,9

TABLE 3.6: Effet de chacune des variables sur les trois type de résultats.

L'influence de chacun des paramètres sur chaque type de résultats peut alors être comparée. Cela nous permet d'acquérir les trois figures 3.18, 3.19 and 3.20.

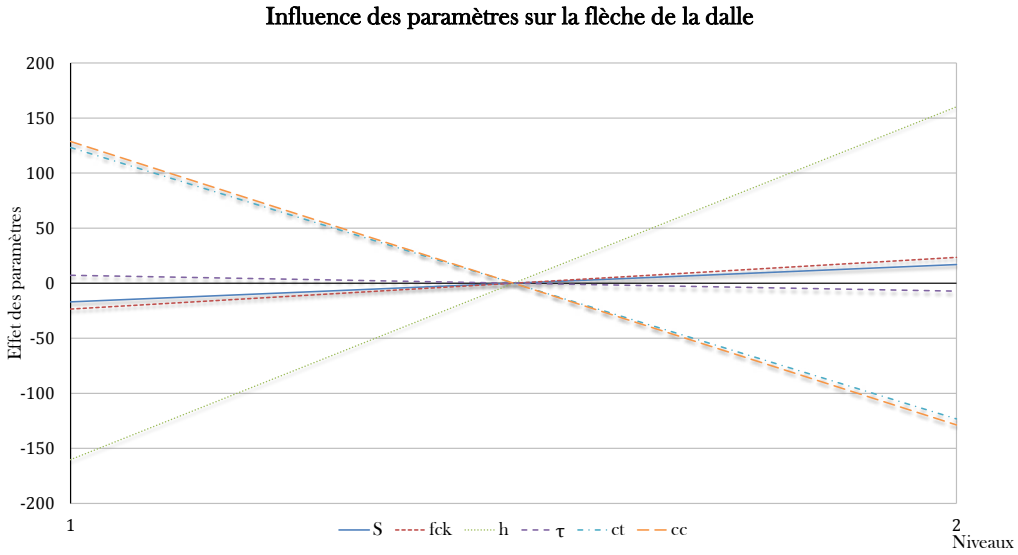


FIGURE 3.18: Influence des paramètres sur la flèche de la dalle béton.

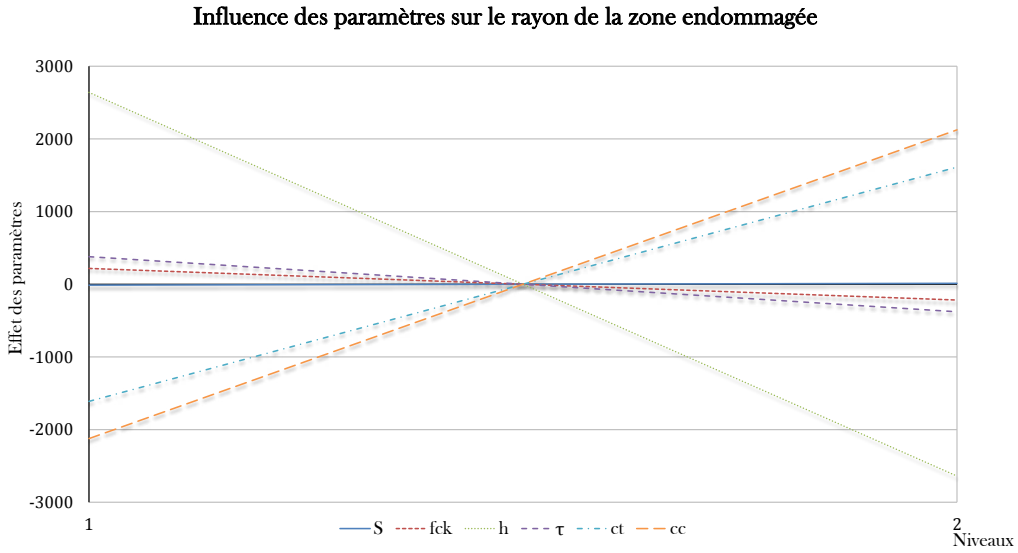


FIGURE 3.19: Influence des paramètres sur le rayon de la zone endommagée de la dalle béton.

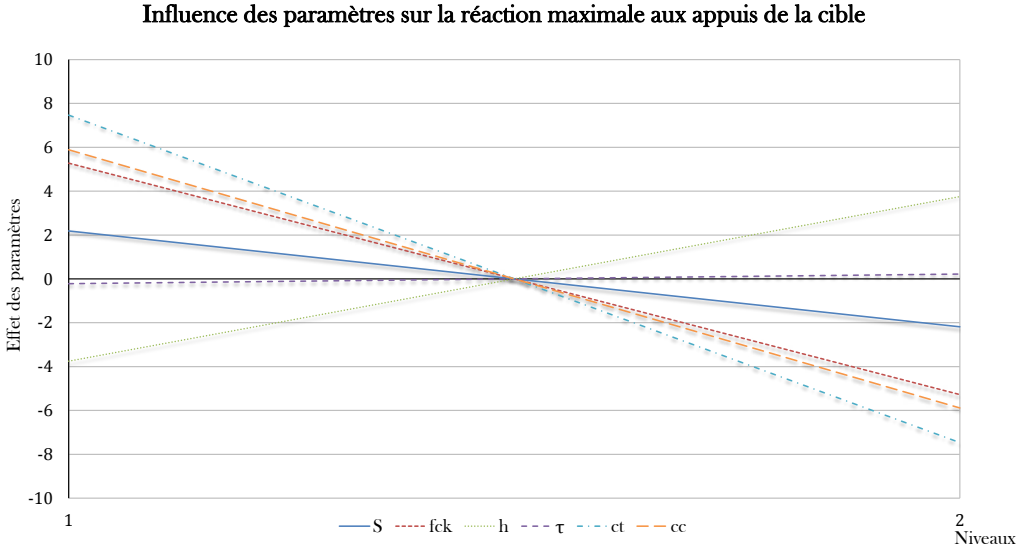


FIGURE 3.20: Influence des paramètres sur la réaction maximale aux conditions limites de la dalle béton.

On peut ainsi mieux se rendre compte de l'impact de chaque variable. Ces résultats nous permettent de conclure à une forte dépendance sur l'ensemble des résultats de la quantité de mouvement mise en jeu (c_t et c_e). On peut également voir que l'épaisseur de la dalle a un impact très important sur la flèche de la dalle et sur l'étendue de la zone endommagée. Pour de ce qui est de la restitution aux frontières de l'effort appliqué, la résistance caractéristique du béton et également l'épaisseur de la dalle ont un effet important.

3.2.4.3 Conclusion du plan d'expérience

La réalisation de ce plan d'expérience associé à la méthode nous a permis de comparer et de se rendre compte de l'impact de certains paramètres sur les résultats obtenus. Avec une telle étude nous avons donc hiérarchisé ces variables en fonction de leur importance sur la zone non linéaire engendrée. En effet, jusqu'à présent, les études menées nous permettaient de voir seulement les conséquences sur la dalle béton des différentes valeurs prises par une variable. Ainsi les paramètres ayant une forte importance sont la quantité de mouvement appliquée, l'épaisseur de la dalle béton et la résistance caractéristique du béton qui la compose.

Cependant les résultats obtenus sont fortement dépendants du choix des valeurs de niveaux prises par chaque variable. Par exemple, en augmentant la différence entre les 2 niveaux d'un paramètre, on va par la même occasion accroître son impact sur la réponse observée. Les choix de niveaux doivent ainsi respecter le domaine d'application. C'est dans ce cadre que les études réalisées précédemment permettent une estimation afin de conserver cette condition.

3.2.5 Conclusion sur la définition des paramètres de la structure pilotant la zone non-linéaire

En résumé vis-à-vis de cette étude de sensibilité, nous avons pu dans un premier temps observer, en se basant sur une variable, l'influence des différentes valeurs prises par celle-ci. Cela nous a fourni une information essentielle sur le type de problématique mise en jeu, la valeur limite entre le domaine de perforation et celui de flexion. Etant donné que dans le cadre de la thèse on se place dans un cas d'ébranlement de structures, nous nous sommes intéressés uniquement à des problèmes de flexion. De plus, on peut noter que la représentation de la perforation via une méthode telle que les éléments finis engendre divers problèmes du fait que cette problématique sort du cadre de la théorie des milieux continus.

Le dernier paragraphe a présenté les résultats obtenus en effectuant un plan d'expérience. Pour cela, nous nous sommes basés sur la méthode de Taguchi, permettant en limitant le nombre de simulations, d'obtenir l'influence entre les différents paramètres étudiés. De là, nous avons ainsi pu établir un ordre d'importance des variables.

Pour conclure, cette étude nous permet d'avoir une première estimation du rayon de la zone endommagée par l'impact d'un avion commercial sur une dalle plane. On conviendra naturellement que l'étendue de l'endommagement ne sera pas la même suivant la géométrie de la cible (plane, cylindrique ou sphérique), particulièrement liée à sa courbure. L'ensemble de ces géométries se retrouvant dans nos structures du génie civil nucléaire, nous admettrons que les résultats obtenus dans cette étude sur une dalle plane seront enveloppes à paramètres équivalent des deux autres géométries.

Les variables influençant l'étendue de la zone endommagée étant définies et cette dernière étant estimée, l'étape suivante est de déterminer les paramètres de discrétisation de notre problématique.

3.3 Discrétisations et hypothèses liées à la stratégie

3.3.1 Discrétisation spatiale

Comme suggéré dans le paragraphe 1.4.2.2 du chapitre 1, une méthode éléments finis classique est utilisée pour déterminer la zone non linéaire induite par l'impact. Le maillage est discrétisé selon la règle classique de maillage en éléments finis pour les vibrations permettant d'assurer une erreur relativement faible en phase et en amplitude, ce qui correspond à au moins 10 éléments linéaires par longueur d'onde qui sont requis pour le calcul. Cette discrétisation éléments finis sera donc prise de manière à pouvoir représenter correctement une vibration se propageant à la fréquence de coupure du signal d'entrée.

Pour des structures complexes, la TVRC se révèle être bien adaptée pour la prédiction de la FRF sur la plage des moyennes fréquences. Elle est performante car l'introduction d'approximations à deux échelles permet de n'utiliser que peu de DDL même pour des

fréquences élevées. Le calcul est mené en introduisant de manière fine les directions privilégiées de chaque plaque. La structure étudiée est alors divisée en sous-structures et des modes intérieurs, de pression, de cisaillement et des modes de bord sont utilisés par sous-structure pour décrire les vibrations induites dans la partie linéaire de la structure.

3.3.2 Discrétisation fréquentielle

Pour rendre la formulation fréquentielle plus commode, elle est formulée de manière numérique et utilise la FFT qui est une technique efficace permettant de calculer les transformées de Fourier discrètes. Or lors de leur utilisation, il est fait l'hypothèse que le chargement est périodique de période T_0. Le temps d'observation T doit être choisi méticuleusement de sorte que la réponse transitoire de la structure amortie s'éteigne avant la fin de cet intervalle de temps T : cela permet de minimiser les perturbations sur les conditions initiales de la réponse dues au recouvrement temporel.

Le recouvrement temporel, illustré sur la figure 3.21, est issu de la discrétisation de la réponse en fréquence, soit pour la FFT de la multiplication du signal continu par un peigne de Dirac de période $1/T$ qui se traduit par une convolution de la réponse temporelle avec un autre peigne de Dirac de période T : le signal de sortie est alors converti en un signal périodique de période T. Si à la fin de ce temps T le signal n'est pas nul, alors il vient perturber les conditions initiales de la période suivante.

Dans l'approche fréquentielle, une attention particulière doit donc être accordée au choix de l'échantillonnage fréquentiel intervenant dans le calcul de la FRF, cet échantillonnage dépendant directement du temps d'observation T. Les pulsations pour lesquelles la FRF est calculée doivent être choisies telles que $\omega_n = 2\pi n f_0$ avec $f_0 = 1/T_0$, et T_0 tel que la réponse de la structure soit négligeable à la fin de ce temps.

Si la structure est peu amortie ou bien si le chargement est long, alors l'échantillonnage fréquentiel est très fin et le calcul de la FRF d'autant plus coûteux.

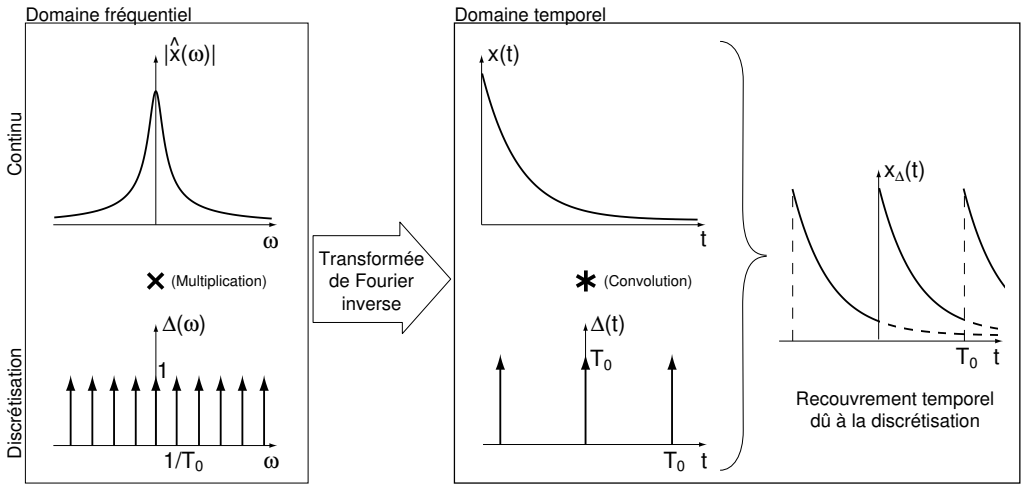


FIGURE 3.21: Recouvrement temporel ([Chevreuil, 2005]).

Des contraintes supplémentaires interviennent pour le choix de l'échantillonnage fréquentiel. En effet, le nombre de pas de fréquence N doit être une puissance de 2 pour pouvoir utiliser la FFT et bénéficier de son efficacité. De plus N doit être choisi de façon à bien décrire le chargement avec le pas de temps $T_e = T_0/N$. Selon le théorème de Nyquist-Shannon, la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ d'un signal doit être égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale f_{max} contenue dans ce signal pour le convertir à une forme numérique :

$$f_e \geq 2 f_{max} \tag{3.3}$$

Par exemple, un sinus verse est bien représenté avec au moins 7 pas de temps sur une période du sinus.

La transformée de Fourier rapide inverse (IFFT) est appliquée au spectre de la réponse en temps pour rétablir la solution dans le domaine temporel. Avant d'appliquer l'IFFT, le spectre calculé est multiplié par une fenêtre de Hanning dans le domaine fréquentiel afin d'éviter les oscillations dues au phénomène de Gibbs qui apparaîtraient dans le domaine temporel avec une fenêtre de type échelon ([Brigham, 1988]).

3.3.3 Reconstruction de la réponse temporelle

Pour reconstruire la réponse temporelle correctement et avoir les bonnes conditions initiales, il faut être très vigilant sur le choix de l'échantillonnage fréquentiel pour le calcul de la FRF, par conséquent il faut bien choisir le temps d'observation T_0 qui doit être tel que la réponse soit négligeable avant la fin de T.

La réponse temporelle s'obtient par l'équation 3.4 :

$$x_i(t)_{t\geq 0} = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{a} \underline{h}_{ij}(t-\tau).\underline{p}_j(\tau) \right) \mathrm{d}\tau \tag{3.4}$$

L'équation 3.4 est appelée intégrale de convolution généralement connue sous le nom d'intégrale de Duhamel. $\underline{p}_j(\tau)$ est le chargement j et $\underline{h}_{ij}(t-\tau)$ est la réponse impulsionnelle, i.e. elle exprime la réponse du système en i à une impulsion de valeur unité appliquée en j à l'instant $t = \tau$.

Ainsi, pour un chargement $\underline{p}_j(t)$ appliqué à une structure, la durée T_0 de la réponse est la somme de la durée T_p du chargement et de la durée T_h de la réponse impulsionnelle, T_h étant propre à la structure et indépendante des forces appliquées à celle-ci.

Dans ce chapitre, nous avons vu que la stratégie d'étude mise en place pour le traitement de la chute d'avion nécessite une attention particulière concernant les différentes discrétisations. De plus, dans l'optique d'appliquer la TVRC sur une structure en béton armé du génie civil, la méthode doit pouvoir prendre en compte ce type de matériau hétérogène et orthotrope. Pour cela, une définition des propriétés équivalentes élastiques du matériau a été développée au travers d'une homogénéisation décrite dans le paragraphe suivant.

3.4 Prise en compte du béton armé et précontraint dans la TVRC

Comme défini dans la présentation de la TVRC, les éléments coques pris en compte au travers de cette méthode sont dits "homogènes". Or dans notre cas nous nous intéressons au béton armé et précontraint qui est par définition hétérogène. Le paragraphe suivant présente une méthode permettant l'homogénéisation du béton armé dans sa phase élastique, ainsi que la précontrainte d'une manière découplée. Le premier paragraphe présente le principe des modèles de comportement globaux. La seconde partie dévoile l'homogénéisation du béton armé et précontraint.

3.4.1 Modèles de comportements globaux

Les modèles globaux permettent dans le cas de structures simplifiées (poutres ou coques) de décrire efficacement le comportement structural par pré-intégration du résultat d'une modélisation complète 3-D. Pour cela ces modèles expriment les grandeurs généralisées afin de trouver une relation entre déformations généralisées (extension $\underline{\underline{\gamma}}$, courbure $\underline{\chi}$, torsion $\underline{\underline{\tau}}$) et efforts généralisés (efforts membranaire $\underline{N}$, flexion $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$, efforts tranchants $\underline{T}$). Ces modèles sont alors préalablement calés via une analyse locale, comme l'analyse limite des sections, à partir des caractéristiques matérielles et géométriques. La figure 3.22 schématise cet aspect dans le cas d'une dalle plane en béton armé. Les différents couplages sont pris en compte au travers de l'analyse locale. On pourra prendre pour exemple la dépendance de la flexion vis-à-vis de l'effort normal appliqué.

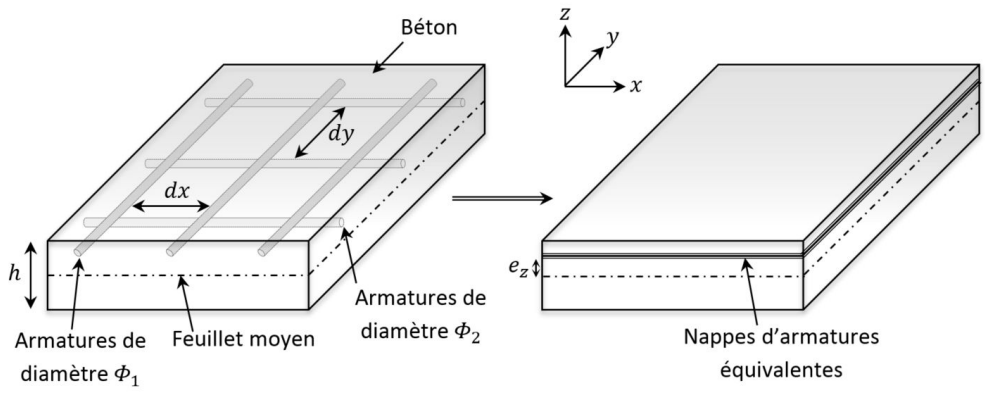


FIGURE 3.22: Modèle global d'une dalle plane en béton armé.

3.4.2 Homogénéisation du béton armé et précontraint dans un cadre linéaire et orthotrope

Ici nous nous sommes appuyés sur la formulation initiale du modèle global de béton armé de plaque *GLRC_DAMAGE*, établi par P. Kœchlin en 2002. Dans [Kœchlin et Mou-

lin, 2002], ce modèle a été développé avec l'objectif de l'appliquer en dynamique dans des cas d'impact avec ruine sur ouvrages en béton armé. Si on se replace dans la stratégie que l'on souhaite mettre en place, l'aspect non linéaire engendré par l'impact est traité via les éléments finis. Du fait de la forte localisation de notre phénomène, le reste de la structure peut être traité par une analyse linéaire via la TVRC. C'est donc dans ce dernier cadre que l'homogénéisation du béton armé est intéressante. En effet jusqu'à présent la TVRC ne permettait de prendre en compte que des cas élastiques, homogènes et généralement isotropes. Le développement suivant nous apporte une solution dans le cadre d'une étude d'un matériau hétérogène tel que le béton armé et précontraint. Pour rappel les hypothèses de la TVRC sont présentées dans le paragraphe 2.2.1.

3.4.2.1 Homogénéisation du béton armé d'armatures passives

Nous avons ainsi choisi dans le cadre d'une analyse linéaire élastique de coque en béton armé de prendre en compte : l'orthotropie induite par la disposition du réseau d'armatures d'acier. L'aspect couplage membrane-flexion en cas de nappes d'armatures inégales en intrados et extrados ne sera pas pris en compte dans les développements finaux.

3.4.2.1.1 Détermination de l'énergie libre

Les variables d'état globales de déformation définies dans le plan tangent à la plaque sont les suivantes :

- un tenseur de déformation membranaire : $\underline{\underline{\gamma}}$,
- un tenseur de courbure : $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{X}}}}}$.

Compte tenu des hypothèses de Kirchhoff-Love prises en compte dans la TVRC, les déformations de torsion et d'effort tranchant ne sont prises en compte. Les contributions élastiques de membrane et de flexion peuvent ainsi être cumulées pour former la densité surfacique d'énergie libre Φ_e^s définie comme :

$$\Phi_e^s = \frac{1}{2}\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{X}}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{H_f}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{X}}}}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{H_m}}}} : \underline{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{H_{mf}}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{X}}}}} \tag{3.5}$$

Les tenseurs $\underline{\underline{\underline{\underline{H_m}}}}$, $\underline{\underline{\underline{\underline{H_f}}}}$, $\underline{\underline{\underline{\underline{H_{mf}}}}}$ sont les tenseurs de raideurs dus respectivement à l'aspect membranaire, flexion et couplage membranaire/flexion. On supposera par la suite que :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{H_{mf}}}}} = 0 \tag{3.6}$$

Cette hypothèse demande donc une symétrie du domaine suivant son épaisseur.

3.4.2.1.2 Paramètres de la loi

Le but recherché au travers des modèles globaux est d'obtenir une représentation simplifiée des phénomènes. Le comportement élastique global est déterminé avec une très bonne précision à l'aide des méthodes d'homogénéisation. On considère une approche

pour homogénéiser le comportement élastique où l'hypothèse d'un milieu équivalent orthotrope est prise en compte.

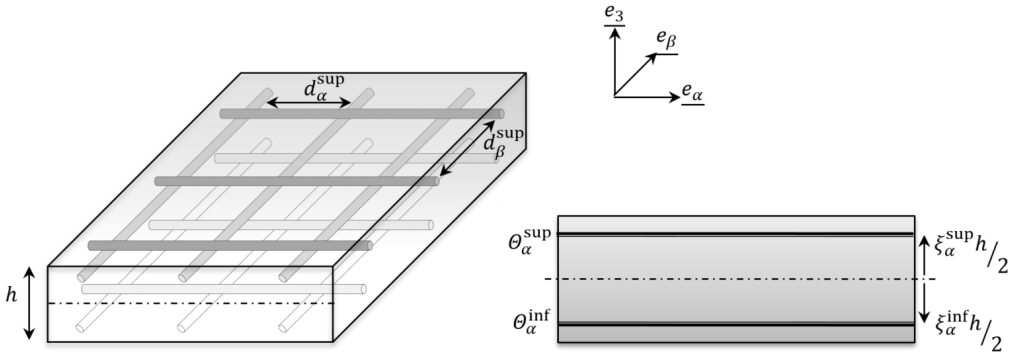


FIGURE 3.23: Coupe de la dalle en béton armé et vue en perspective.

Nous prendrons h comme étant l'épaisseur du domaine étudié. Nous définissons également $\Theta_\alpha^{sup} = \frac{A_\alpha^{sup}}{d_\alpha^{sup}}$ et $\Theta_\beta^{sup} = \frac{A_\beta^{sup}}{d_\beta^{sup}}$ les densités d'armatures dans chacune des deux directions, où A_α^{sup} (resp. A_β^{sup}) est l'aire de la section des aciers et d_α^{sup} (resp. d_β^{sup}) l'écartement entre les barres d'acier dans les directions $\underline{e_\alpha}$ et $\underline{e_\beta}$ de la nappe supérieure de ferraillage. Nous faisons de même pour la partie inférieure avec $\Theta_\alpha^{inf} = \frac{A_\alpha^{inf}}{d_\alpha^{inf}}$ et $\Theta_\beta^{inf} = \frac{A_\beta^{inf}}{d_\beta^{inf}}$.

Les positions des nappes d'acier dans l'épaisseur h sont définies comme adimensionnelles et vérifient :

$$\xi_{\alpha/\beta}^{sup} \in]0,1[\text{ et } \xi_{\alpha/\beta}^{inf} \in]-1,0[\tag{3.7}$$

La masse volumique ρ_{eq} homogénéisée de la coque en béton armé étudiée est prise en compte au travers de la somme des masses volumiques des armatures ρ_a et de béton ρ_b. On obtient donc :

$$\rho_{eq} = \rho_b + \frac{\rho_a}{h}\left(\Theta_\alpha^{sup} + \Theta_\beta^{sup} + \Theta_\alpha^{inf} + \Theta_\beta^{inf}\right) \tag{3.8}$$

3.4.2.2 Identification des paramètres de comportement élastique linéaire

Le comportement du béton armé dans une phase d'élasticité linéaire est considéré à l'échelle de la structure comme étant orthotrope dans le cas d'un ferraillage dissymétrique dans chacune des nappes. Nous pouvons également prendre en compte un couplage membrane-flexion dans le cas d'une dissymétrie d'armatures dans l'épaisseur de la coque. Nous souhaitons avoir une représentation homogénéisée la plus fidèle possible au comportement du béton armé. Dans notre approche, l'idée principale est d'identifier par comparaison le module d'Young et le coefficient de Poisson équivalents dans chacune des directions $\underline{e_\alpha}$ et $\underline{e_\beta}$ de la coque. Pour cela nous proposons une identification entre les

opérateurs de Hooke en contraintes planes dans le cas homogénéisé avec ceux construits en comportement élastique linéaire par l'approche orthotrope hétérogène. On construit la matrice élastique hétérogène à partir des caractéristiques élastiques du béton (E_b, ρ_b), de l'acier (E_a) ainsi que des caractéristiques géométriques de la section de béton armé. Cette matrice est construite en posant une hypothèse d'élasticité parfaite où le matériau n'est ainsi pas fissuré.

La loi élastique globale de la dalle de béton armé s'écrit avec les tenseurs de membrane $\underline{\underline{H_m}}$, de flexion $\underline{\underline{H_f}}$ et de couplage membrane-flexion $\underline{\underline{H_{mf}}}$. Cette loi est donnée dans le repère local orthogonal lié au ferraillage par :

$$\left| \begin{array}{c} \underline{\mathcal{M}} \\ \underline{N} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \underline{\underline{H_m}} & \underline{\underline{H_{mf}}} \\ \underline{\underline{H_{mf}}} & \underline{\underline{H_f}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \underline{\chi} \\ \underline{\gamma} \end{array} \right| \tag{3.9}$$

et donc

$$\left| \begin{array}{c} \underline{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha} \\ \underline{\mathcal{M}}_{\beta\beta} \\ \underline{\mathcal{M}}_{\alpha\beta} \\ \underline{N}_{\alpha\alpha} \\ \underline{N}_{\beta\beta} \\ \underline{N}_{\alpha\beta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} H^m_{1111} & H^m_{2211} & 0 \\ H^m_{1122} & H^m_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^m_{1212} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} H^{mf}_{1111} & H^{mf}_{2211} & 0 \\ H^{mf}_{1122} & H^{mf}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{mf}_{1212} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H^{mf}_{1111} & H^{mf}_{2211} & 0 \\ H^{mf}_{1122} & H^{mf}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{mf}_{1212} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} H^{f}_{1111} & H^{f}_{2211} & 0 \\ H^{f}_{1122} & H^{f}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{mf}_{1212} \end{pmatrix} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \underline{\chi}_{\alpha\alpha} \\ \underline{\chi}_{\beta\beta} \\ \underline{\chi}_{\alpha\beta} \\ \underline{\gamma}_{\alpha\alpha} \\ \underline{\gamma}_{\beta\beta} \\ \underline{\gamma}_{\alpha\beta} \end{array} \right| \tag{3.10}$$

Ici on considère que H^m_{ijkl} sont les raideurs de membrane, H^f_{ijkl} sont les raideurs de flexion et H^{mf}_{ijkl} sont les raideurs de couplage membrane-flexion. Le repère choisi étant le repère orthogonal au ferraillage, les termes d'orthotropie H_{ij12} sont nuls. Dans le cas où les deux grilles d'armatures sont symétriques dans l'épaisseur de la coque, nous obtenons un découplage entre membrane et flexion, ce qui se traduit par : $H^{mf}_{ijkl} = 0$.

Il est néanmoins nécessaire de vérifier dans chacune des directions que le couplage membrane est inférieur au membranaire et à la flexion : $H^m_{iiii} H^f_{iiii} > \left(H^{mf}_{iiii}\right)^2$. De la même manière nous devons avoir une distorsion inférieure à la raideur propre à chacune des directions : $H^m_{1111} H^m_{1111} > \left(H^m_{1212}\right)^2$, $H^f_{1111} H^f_{1111} > \left(H^f_{1212}\right)^2$, cela à cause du caractère défini-positif du tenseur d'élasticité.

Nous pouvons ainsi construire directement les coefficients par les relations suivantes :

$$\begin{cases} H^m_{1111} = \frac{E_b h}{1-\nu_b^2} + E_a \langle \Theta \rangle_\alpha \\ H^m_{2222} = \frac{E_b h}{1-\nu_b^2} + E_a \langle \Theta \rangle_\beta \end{cases}, \begin{cases} H^m_{1122} = \frac{\nu_b E_b h}{1-\nu_b^2} \\ H^m_{1212} = \frac{E_b h}{1-\nu_b} \end{cases}$$
$$\begin{cases} H^f_{1111} = \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} + \frac{E_a h^2}{4} \langle \xi^2 \Theta \rangle_\alpha \\ H^f_{2222} = \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} + \frac{E_a h^2}{4} \langle \xi^2 \Theta \rangle_\beta \end{cases}, \begin{cases} H^f_{1122} = \frac{\nu_b E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} \\ H^f_{1212} = \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b)} \end{cases} \quad (3.11)$$
$$\begin{cases} H^{mf}_{1111} = \frac{E_a h}{2} \langle \xi \Theta \rangle_\alpha \\ H^{mf}_{2222} = \frac{E_a h}{2} \langle \xi \Theta \rangle_\beta \end{cases}, \begin{cases} H^{mf}_{1122} = 0 \\ H^{mf}_{1212} = 0 \end{cases}$$

où nous posons pour simplifier :

$$\begin{aligned} &\langle \Theta \rangle_\alpha = \Theta^{sup}_\alpha + \Theta^{inf}_\alpha && ,\langle \Theta \rangle_\beta = \Theta^{sup}_\beta + \Theta^{inf}_\beta \\ &\langle \xi \Theta \rangle_\alpha = \xi^{sup}_\alpha \Theta^{sup}_\alpha + \xi^{inf}_\alpha \Theta^{inf}_\alpha && ,\langle \xi \Theta \rangle_\beta = \xi^{sup}_\beta \Theta^{sup}_\beta + \xi^{inf}_\beta \Theta^{inf}_\beta \\ &\langle \xi^2 \Theta \rangle_\alpha = \xi^{sup^2}_\alpha \Theta^{sup}_\alpha + \xi^{inf^2}_\alpha \Theta^{inf}_\alpha && ,\langle \xi^2 \Theta \rangle_\beta = \xi^{sup^2}_\beta \Theta^{sup}_\beta + \xi^{inf^2}_\beta \Theta^{inf}_\beta \end{aligned} \quad (3.12)$$

On prend ainsi l'hypothèse que les aciers n'apportent pas de raideur en distorsion membranaire de la plaque, ni en torsion.

Nous pouvons alors identifier, par comparaison dans le cas homogénéisé avec les opérateurs de Hooke en contraintes planes, les modules d'Young et coefficients de Poisson équivalents. On obtient ainsi :

– en membranaire :

$$\begin{pmatrix} H^m_{1111} & H^m_{2211} & 0 \\ H^m_{1122} & H^m_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^m_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_b h}{1-\nu_b^2} + E_a \langle \Theta \rangle_\alpha & \frac{\nu_b E_b h}{1-\nu_b^2} & 0 \\ \frac{\nu_b E_b h}{1-\nu_b^2} & \frac{E_b h}{1-\nu_b^2} + E_a \langle \Theta \rangle_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_b h}{1-\nu_b} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{E^m_\alpha h}{1-\nu^m_{\alpha\beta}\nu^m_{\beta\alpha}} & \frac{\nu^m_{\beta\alpha} E^m_\alpha h}{1-\nu^m_{\alpha\beta}\nu^m_{\beta\alpha}} & 0 \\ \frac{\nu^m_{\beta\alpha} E^m_\beta h}{1-\nu^m_{\alpha\beta}\nu^m_{\beta\alpha}} & \frac{E^m_\beta h}{1-\nu^m_{\alpha\beta}\nu^m_{\beta\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{E^m_\alpha E^m_\beta} h}{1-\sqrt{\nu^m_{\alpha\beta}\nu^m_{\beta\alpha}}} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

et donc par équivalence,

$$\begin{aligned} \nu^m_{\beta\alpha} &= \frac{h\nu_b E_b}{hE_b + (1-\nu_b^2) E_a \langle \Theta \rangle_\alpha} \\ \nu^m_{\alpha\beta} &= \frac{h\nu_b E_b}{hE_b + (1-\nu_b^2) E_a \langle \Theta \rangle_\beta} \\ E^m_\alpha &= \left(1 - \frac{h\nu_b E_b}{hE_b + (1-\nu_b^2) E_a \langle \Theta \rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_b}{hE_b + (1-\nu_b^2) E_a \langle \Theta \rangle_\beta}\right) \left[\frac{E_b}{1-\nu_b^2} + \frac{E_a}{h} \langle \Theta \rangle_\alpha\right] \\ E^m_\beta &= \left(1 - \frac{h\nu_b E_b}{hE_b + (1-\nu_b^2) E_a \langle \Theta \rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_b}{hE_b + (1-\nu_b^2) E_a \langle \Theta \rangle_\beta}\right) \left[\frac{E_b}{1-\nu_b^2} + \frac{E_a}{h} \langle \Theta \rangle_\beta\right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

– en flexion :

$$\begin{pmatrix} H^f_{1111} & H^f_{2211} & 0 \\ H^f_{1122} & H^f_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^f_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} + \frac{E_a h^2}{4}\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha & \frac{\nu_b E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} & 0 \\ \frac{\nu_b E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} & \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} + \frac{E_a h^2}{4}\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{E^f_\alpha h}{1-\nu^f_{\alpha\beta}\nu^f_{\beta\alpha}} & \frac{\nu^f_{\beta\alpha}E^f_\alpha h}{1-\nu^f_{\alpha\beta}\nu^f_{\beta\alpha}} & 0 \\ \frac{\nu^f_{\beta\alpha}E^f_\beta h}{1-\nu^f_{\alpha\beta}\nu^f_{\beta\alpha}} & \frac{E^f_\beta h}{1-\nu^f_{\alpha\beta}\nu^f_{\beta\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{E^f_\alpha E^f_\beta}h}{1-\sqrt{\nu^f_{\alpha\beta}\nu^f_{\beta\alpha}}} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \nu^f_{\beta\alpha} &= \frac{h\nu_b E_b}{hE_b+3(1-\nu_b^2)E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha} \\ \nu^f_{\alpha\beta} &= \frac{h\nu_b E_b}{hE_b+3(1-\nu_b^2)E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta} \\ E^f_\alpha &= \left(1-\frac{h\nu_b E_b}{hE_b+3(1-\nu_b^2)E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_b}{hE_b+3(1-\nu_b^2)E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta}\right)\left[\frac{E_b}{1-\nu_b^2}+\frac{3E_a}{h}\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha\right] \\ E^f_\beta &= \left(1-\frac{h\nu_b E_b}{hE_b+3(1-\nu_b^2)E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_b}{hE_b+3(1-\nu_b^2)E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta}\right)\left[\frac{E_b}{1-\nu_b^2}+\frac{3E_a}{h}\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta\right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

Remarque :

Dans un cas isotrope, on obtient les relations suivantes, en privilégiant le comportement moyen dans le plan, en moyennant sur les directions $\underline{e_\alpha}$ et $\underline{e_\beta}$, et en négligeant le couplage membrane-flexion :

$$\begin{aligned} \nu^m_{eq} &= \frac{2h\nu_b E_b}{2hE_b+(1-\nu_b^2)E_a\big(\langle\Theta\rangle_\alpha\langle\Theta\rangle_\beta\big)} \\ \nu^f_{eq} &= \frac{2h\nu_b E_b}{2hE_b+3(1-\nu_b^2)E_a\big(\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta\big)} \\ E^m_{eq} &= \frac{E_b\nu_b(1-\nu^{m\,2}_{eq})}{\nu^m_{eq}(1-\nu_b^2)}, E^f_{eq} = \frac{E_b\nu_b(1-\nu^{f\,2}_{eq})}{\nu^f_{eq}(1-\nu_b^2)} \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.4.2.3 Homogénéisation du béton précontraint

Le béton précontraint peut être vu d'une façon découplée. En effet, nous observons dans un premier temps l'effet de compression engendré par la précontrainte sur le béton. Dans [Orbovic *et al.*, 2009], le point de départ est la constatation que les formules existantes utilisées pour le dimensionnement des éléments structuraux en béton armé, sous un chargement d'impact, sont basées sur des essais effectués en tenant compte uniquement

des aciers longitudinaux ([Buzaud *et al.*, 2007] et [Sliter, 1980]). L'influence de la précontrainte longitudinale tout comme des aciers transversaux n'est ainsi pas prise en compte. Cependant, les clauses réglementaires ([ACI, 2005] et [CSA, 2004]) relatives au chargement conventionnel prennent en compte l'effet de ces paramètres. Par ailleurs, les critères de dimensionnement établis dans les formules empiriques sont fondés sur l'état d'endommagement de la structure en béton et notamment sur l'aspect visuel comme l'écaillage ou la perforation de la structure. L'objectif de la campagne d'essais, menée au laboratoire du VTT à Espoo en Finlande ([VTT, 2008]), est d'évaluer l'influence de la précontrainte longitudinale bidirectionnelle et des aciers transversaux à la résistance à l'effort tranchant des dalles en béton armé sous l'impact d'un missile. Les résultats obtenus ont été présentés en termes d'aire de la surface écaillée et de flèche résiduelle de la dalle. L'endommagement observé des dalles avec la précontrainte (sans acier transversaux) a été plus important que celui de la dalle de référence en béton armé. Les différents niveaux de précontrainte n'ont pas apporté de différences notoires. Ces essais ont ainsi montré que les aciers transversaux augmentent la résistance à l'effort tranchant des dalles sous l'impact de missiles. Ce résultat concorde avec les clauses réglementaires. Cependant, il a été observé que la disposition alliant précontrainte et aciers transversaux modifie le mode de rupture de la dalle. Le cône de poinçonnement (mode de rupture habituel) a été transformé en cylindre de poinçonnement avec la surface de base comparable à celle du missile. En conclusion, les essais effectués ont montré que l'introduction de la précontrainte longitudinale bidirectionnelle n'augmente pas la résistance à l'effort tranchant. Cet effort initial n'augmentant pas la raideur de notre coque sera négligée dans la suite de l'homogénéisation d'autant plus que ces résultats sont à nuancer avec l'adhérence ou non de la précontrainte.

Le second aspect concernant le ferraillage passif dû aux câbles de précontrainte est étudié de manière analogue aux armatures vues dans le paragraphe précédent. En considérant cela, on obtient ainsi :

– une masse volumique équivalente :

$$\rho_{eq} = \rho_b + \frac{\rho_p}{h}\left(\Theta^p_\alpha + \Theta^p_\beta\right) \tag{3.18}$$

– un comportement en membranaire :

$$\begin{aligned}
\nu^m_{\beta\alpha} &= \frac{h\nu_b E_{b\alpha}}{hE_{b\alpha}+(1-\nu_b^2)E_p\langle\Theta^p\rangle_\alpha} \\
\nu^m_{\alpha\beta} &= \frac{h\nu_b E_{b\beta}}{hE_{b\beta}+(1-\nu_b^2)E_p\langle\Theta^p\rangle_\beta} \\
E^m_\alpha &= \left(1-\frac{h\nu_b E_{b\alpha}}{hE_{b\alpha}+(1-\nu_b^2)E_p\langle\Theta^p\rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_{b\beta}}{hE_{b\beta}+(1-\nu_b^2)E_p\langle\Theta^p\rangle_\beta}\right)\left[\frac{E_{b\alpha}}{1-\nu_b^2}+\frac{E_p}{h}\langle\Theta^p\rangle_\alpha\right] \\
E^m_\beta &= \left(1-\frac{h\nu_b E_{b\alpha}}{hE_{b\alpha}+(1-\nu_b^2)E_p\langle\Theta^p\rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_{b\beta}}{hE_{b\beta}+(1-\nu_b^2)E_p\langle\Theta^p\rangle_\beta}\right)\left[\frac{E_{b\beta}}{1-\nu_b^2}+\frac{E_p}{h}\langle\Theta^p\rangle_\beta\right]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

– un comportement en flexion :

$$
\begin{aligned}
\nu^f_{\beta\alpha} &= \frac{h\nu_b E_{b\alpha}}{hE_{b\alpha}+3(1-\nu_b^2)E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha} \\
\nu^f_{\alpha\beta} &= \frac{h\nu_b E_{b\beta}}{hE_{b\beta}+3(1-\nu_b^2)E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta} \\
E^f_\alpha &= \left(1-\frac{h\nu_b E_{b\alpha}}{hE_{b\alpha}+3(1-\nu_b^2)E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_{b\beta}}{hE_{b\beta}+3(1-\nu_b^2)E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta}\right)\left[\frac{E_{b\alpha}}{1-\nu_b^2}+\frac{3E_p}{h}\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha\right] \\
E^f_\beta &= \left(1-\frac{h\nu_b E_{b\alpha}}{hE_{b\alpha}+3(1-\nu_b^2)E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha} * \frac{h\nu_b E_{b\beta}}{hE_{b\beta}+3(1-\nu_b^2)E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta}\right)\left[\frac{E_{b\beta}}{1-\nu_b^2}+\frac{3E_p}{h}\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta\right]
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

3.4.2.4 Homogénéisation du béton armé et précontraint

En couplant les deux paragraphes précédents, on peut ainsi homogénéiser le béton armé et précontraint. A partir de la définition dans les Eurocodes du module sécant d'élasticité du béton E_{cm} et de la résistance moyenne en compression du béton à 28 jours f_{cm}, nous avons :

$$
\begin{aligned}
E_{cm} &= 22000\left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0,3} \\
f_{cm} &= f_{ck}+8MPa
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

où f_{ck} est la résistance caractéristique (fractile 5 %) en compression du béton. On obtient ainsi :

– une masse volumique équivalente :

$$
\rho_{eq} = \rho_b + \frac{\rho_a}{h}\left(\Theta^{sup}_\alpha+\Theta^{sup}_\beta+\Theta^{inf}_\alpha+\Theta^{inf}_\beta\right)+\frac{\rho_p}{h}\left(\Theta^p_\alpha+\Theta^p_\beta\right) \tag{3.22}
$$

– un comportement en membranaire :

$$
\begin{aligned}
\nu^m_{\beta\alpha} &= \frac{h\nu_b E_{cm\alpha}}{hE_{cm\alpha}+(1-\nu_b^2)(E_a\langle\Theta\rangle_\alpha+E_p\langle\Theta^p\rangle_\alpha)} \\
\nu^m_{\alpha\beta} &= \frac{h\nu_b E_{cm\beta}}{hE_{cm\beta}+(1-\nu_b^2)(E_a\langle\Theta\rangle_\beta+E_p\langle\Theta^p\rangle_\beta)} \\
E^m_\alpha &= \left(1-\frac{h\nu_b E_{cm\alpha}}{hE_{cm\alpha}+(1-\nu_b^2)(E_a\langle\Theta\rangle_\alpha+E_p\langle\Theta^p\rangle_\alpha)} * \frac{h\nu_b E_{cm\beta}}{hE_{cm\beta}+(1-\nu_b^2)(E_a\langle\Theta\rangle_\beta+E_p\langle\Theta^p\rangle_\beta)}\right) \\
&\quad * \left[\frac{E_{cm\alpha}}{1-\nu_b^2}+\frac{E_a}{h}\langle\Theta\rangle_\alpha+\frac{E_p}{h}\langle\Theta^p\rangle_\alpha\right] \\
E^m_\beta &= \left(1-\frac{h\nu_b E_{cm\alpha}}{hE_{cm\alpha}+(1-\nu_b^2)(E_a\langle\Theta\rangle_\alpha+E_p\langle\Theta^p\rangle_\alpha)} * \frac{h\nu_b E_{cm\beta}}{hE_{cm\beta}+(1-\nu_b^2)(E_a\langle\Theta\rangle_\beta+E_p\langle\Theta^p\rangle_\beta)}\right) \\
&\quad * \left[\frac{E_{cm\beta}}{1-\nu_b^2}+\frac{E_a}{h}\langle\Theta\rangle_\beta+\frac{E_p}{h}\langle\Theta^p\rangle_\beta\right]
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

– un comportement en flexion :

$$
\begin{aligned}
\nu^f_{\beta\alpha} &= \frac{h\nu_b E_{cm\alpha}}{hE_{cm\alpha}+3(1-\nu_b^2)(E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha+E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha)} \\
\nu^f_{\alpha\beta} &= \frac{h\nu_b E_{cm\beta}}{hE_{cm\beta}+3(1-\nu_b^2)(E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta+E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta)} \\
E^f_\alpha = &\left(1-\frac{h\nu_b E_{cm\alpha}}{hE_{cm\alpha}+3(1-\nu_b^2)(E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha+E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha)} * \frac{h\nu_b E_{cm\beta}}{hE_{cm\beta}+3(1-\nu_b^2)(E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta+E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta)}\right) \\
&* \left[\frac{E_{cm\alpha}}{1-\nu_b^2}+\frac{3E_a}{h}\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha+\frac{3E_p}{h}\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha\right] \\
E^f_\beta = &\left(1-\frac{h\nu_b E_{cm\alpha}}{hE_{cm\alpha}+3(1-\nu_b^2)(E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\alpha+E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\alpha)} * \frac{h\nu_b E_{cm\beta}}{hE_{cm\beta}+3(1-\nu_b^2)(E_a\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta+E_p\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta)}\right) \\
&* \left[\frac{E_{cm\beta}}{1-\nu_b^2}+\frac{3E_a}{h}\langle\xi^2\Theta\rangle_\beta+\frac{3E_p}{h}\langle\xi^2\Theta^p\rangle_\beta\right]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

3.5 Conclusions sur la mise en œuvre de la stratégie de traitement de la chute d'avion

Dans ce chapitre, il a été vu que la stratégie mise en place permet de traiter la problématique d'impact d'avion sur une structure industrielle. Notre approche découplée consiste à considérer d'une part la zone endommagée localisée au niveau de l'impact au travers de la méthode éléments finis et d'autre part l'étude des vibrations induites à l'aide d'une méthodologie fréquentielle adaptée.

En parallèle de cela, une étude paramétrique associée à un plan d'expérience a été menée dans le but de déterminer l'influence des paramètres du problème sur la zone non-linéaire. En conclusion de cette étude, il est ressorti un ordre d'importance dans les variables étudiées.

La stratégie développée permet donc de traiter la chute d'avion dans son intégralité au travers d'une démarche découplée à la fois de manière temporelle mais également fréquentielle. Cette approche est donc efficace mais néanmoins demande une attention au niveau des différentes discrétisations : spatiale en particulier pour la méthode éléments finis afin de représenter les vibrations proche du premier mode propre de la structure, mais aussi temporelle et fréquentielle afin d'assurer une bonne continuité lors du changement de domaine.

Dans l'approche fréquentielle réalisée avec la TVRC, l'étude de l'ébranlement est faite sur une partie de la structure non endommagée dont les propriétés mécaniques restent ainsi élastiques. Dans l'optique d'appliquer cette méthodologie à une structure industrielle du génie civil en béton armé ou précontraint, l'idée a été d'utiliser des lois d'homogénéisation afin de déterminer les propriétés mécaniques du béton armé et précontraint pouvant ainsi être également orthotropes.

La stratégie proposée de traitement de la chute ayant été exposée et implémentée, il reste à prouver son efficacité vis-à-vis des méthodes "classiques" au travers d'exemples simples mais également industriels.

Chapitre 4

Validation de la stratégie mise en place

Les développements numériques ainsi que les différentes étapes de la stratégie et le choix des paramètres ayant été définis aux chapitres précédents, notre approche peut maintenant être appliquée au cas de la chute d'avion sur une structure type du génie civil nucléaire. Par ailleurs des comparaisons en termes de coûts de calcul sont réalisées entre la stratégie mise en place et les approches classiques. Une étape préalable sera tout de même développée ici permettant la validation de notre approche au travers de deux exemples simples.

Sommaire

4.1 Validation au travers de cas simples 144
4.1.1 Description du chargement 144
4.1.2 Traitement d'une plaque en flexion 146
4.1.2.1 Application au cas d'une plaque en flexion 146
4.1.2.2 Remarque complémentaire 152
4.1.3 Traitement d'un portique 153
4.2 Application à un cas industriel 161
4.2.1 Description du cas d'étude 161
4.2.1.1 Définition de la structure impactée 161
4.2.1.2 Signal d'impact : approche de Riera 162
4.2.2 Définition et résultats aux bornes de la zone non-linéaire 166
4.2.3 Application du signal à la partie non endommagée de la structure . 169
4.2.4 Conclusions de l'application de la stratégie à un cas industriel . . . 177

4.1 Validation au travers de cas simples

L'objectif est ici de valider notre approche fréquentielle originale via la TVRC en la comparant sur des exemples simples avec une approche temporelle dite "classique".

4.1.1 Description du chargement

Le chargement caractérisant l'impact et l'amplitude de son spectre obtenu par transformée de Fourier sont décrits dans les figures 4.1 et 4.2 : l'impact est alors modélisé dans ces exemples de validation par un sinus verse d'une durée $T = 100\ ms$.

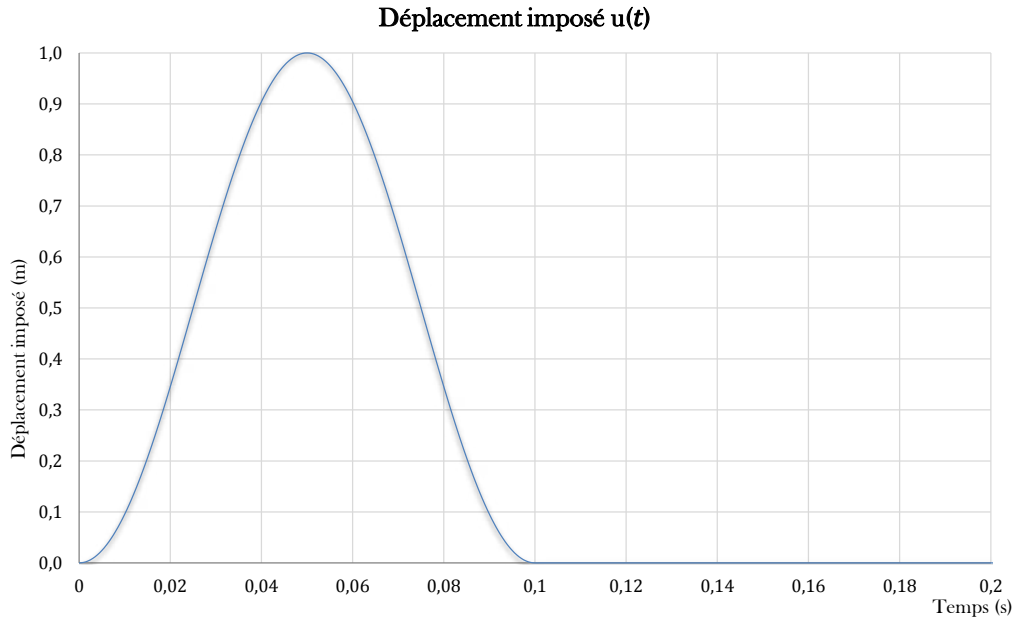


FIGURE 4.1: Représentations temporelle du chargement.

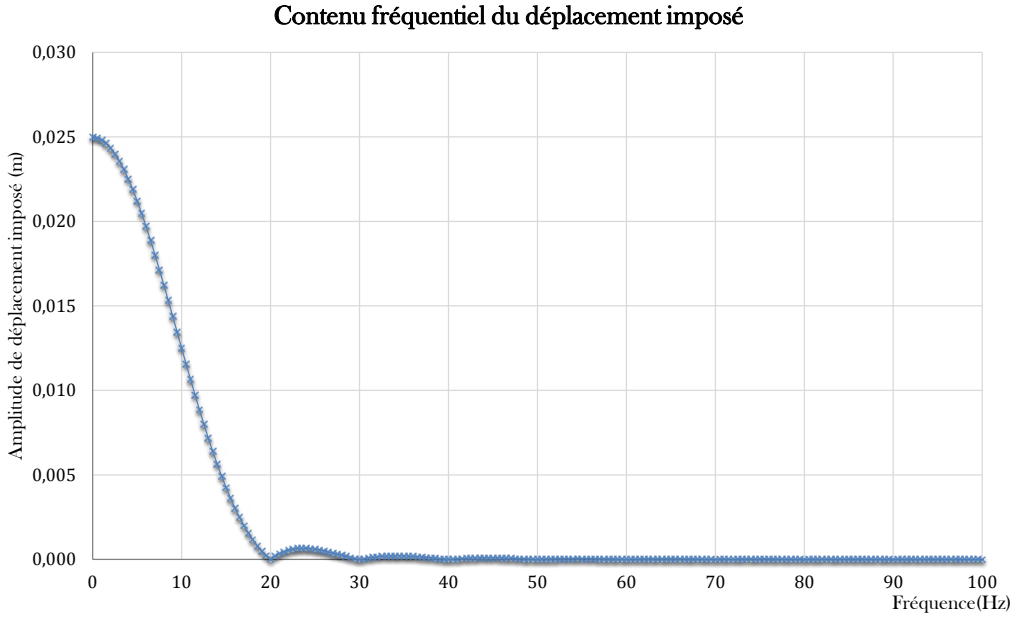


FIGURE 4.2: Représentations fréquentielle du chargement.

La figure 4.3 présente le cumul du spectre fréquentiel en fonction de la fréquence. On peut alors observer qu'à 50 Hz, 99,6 % du contenu fréquentiel ont déjà été atteints. On peut ainsi en conclure qu'au-delà de cette fréquence le contenu fréquentiel du chargement devient négligeable.

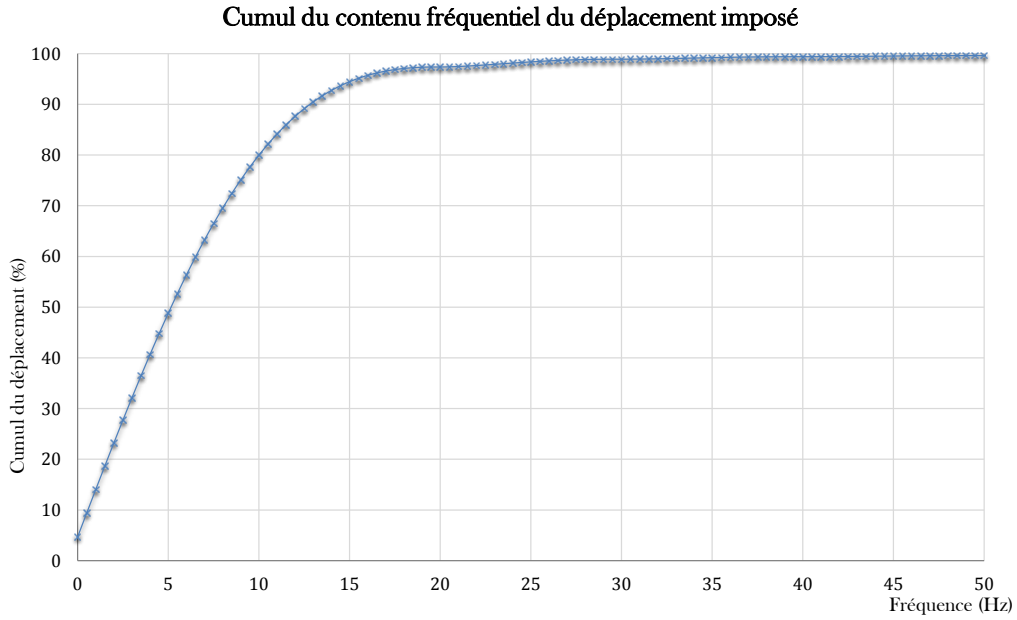


FIGURE 4.3: Cumul du contenu fréquentiel.

Le chargement étant défini, il reste donc à l'appliquer à nos deux cas test.

4.1.2 Traitement d'une plaque en flexion

4.1.2.1 Application au cas d'une plaque en flexion

Dans ce premier cas test de validation, le but est d'étudier les différentes approches au travers d'un exemple simple traitant d'un problème de plaque en flexion. Cet exemple permet d'appliquer notre méthode sur un seul domaine de type plaque suivant la théorie de Kirchhoff-Love. La figure 4.4 présente la description de la géométrie étudiée.

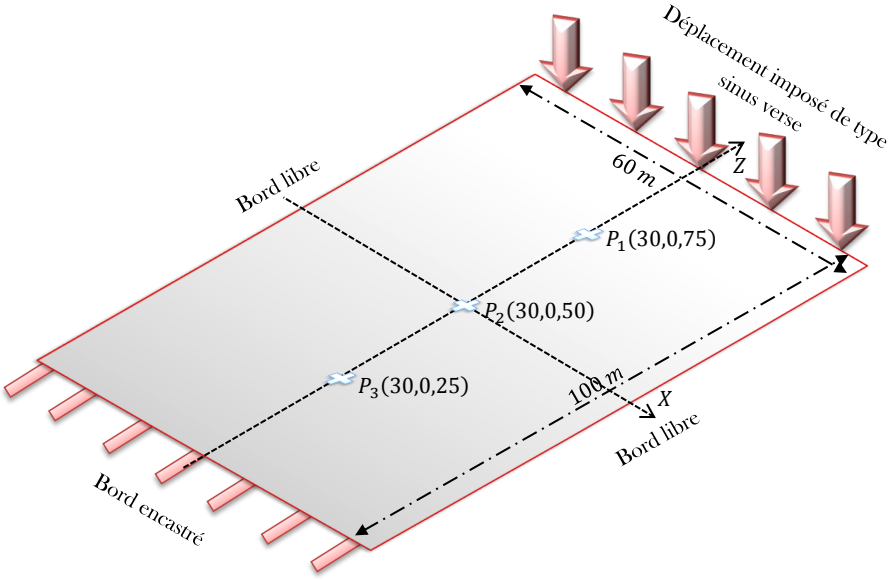


FIGURE 4.4: Premier exemple de validation de l'approche fréquentielle : description de la géométrie et des conditions limites.

Le cas présenté est l'étude d'une plaque encastrée sur l'un de ses bords, libre sur deux autres et imposée en déplacement hors plan sur son dernier bord. La plaque a pour dimensions : $100\,m * 60\,m * 1\,m$ d'épaisseur. Un de ses bords est donc soumis à un déplacement, de direction perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque. La plage de fréquences de cette excitation est $[2\pi \times 0\ Hz\,;\ 2\pi \times 100\ Hz]$. En terme de paramètres matériaux et structurels, la plaque est en béton armé dont les propriétés sont définies dans le tableau 4.1.

Paramètres	Sens physique	Valeur et unité
E	module d'Young	$31,4\ GPa$
ν	coefficient de Poisson	0.2
ρ	masse volumique	$2500\ kg/m^3$
ξ	taux d'amortissement	0.07

TABLE 4.1: Propriétés mécaniques du béton armé composant la plaque en flexion.

Une comparaison entre une solution éléments finis obtenue par LS-Dyna [Ls-Dyna, 1976] en utilisant les paramètres de modélisation définis dans le paragraphe 3.2.1 et la recomposition temporelle de la solution TVRC est alors présentée. La solution éléments finis est obtenue avec une taille de maillage de 25 cm, permettant d'avoir une représentation de 10 éléments par longueur d'onde pour une excitation de 100 Hz (6.10^5 DDLs). La solution TVRC est quant à elle obtenue à partir d'une base d'approximation maximale de 100 ondes intérieures et 49 ondes de bord par bord, soit au maximum près de 300 DDLs. Les trois paragraphes suivants présentent les résultats obtenus que sont les déplacements hors plan, le contenu fréquentiel et le spectre de réponse en accélération associés, aux trois points P_1, P_2 et P_3 illustrés dans la figure 4.4.

Résultats au point P_1

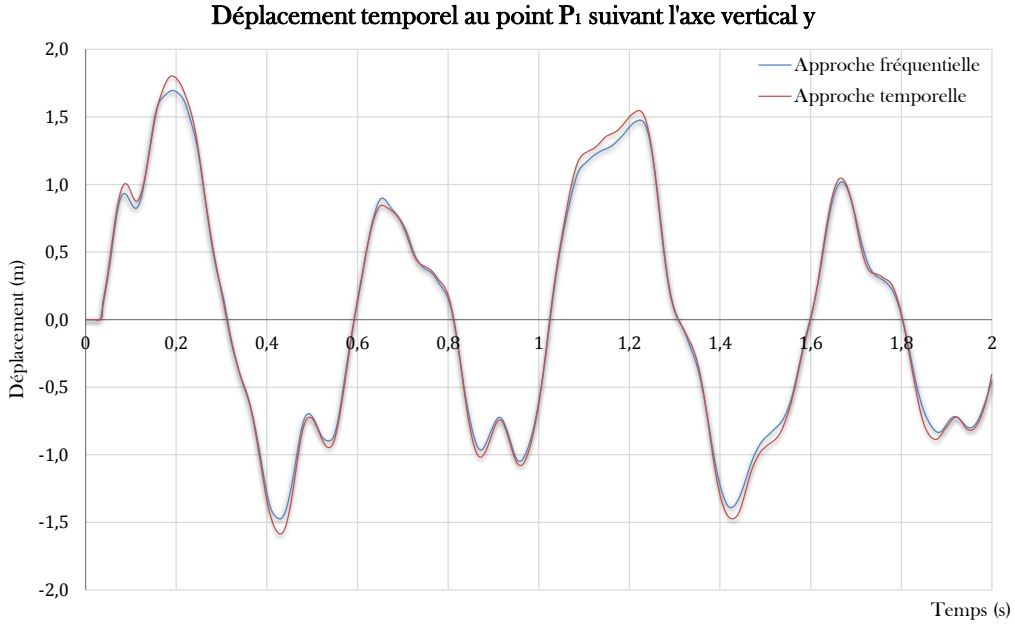


FIGURE 4.5: Déplacement temporel au Point P_1 suivant l'axe de chargement y.

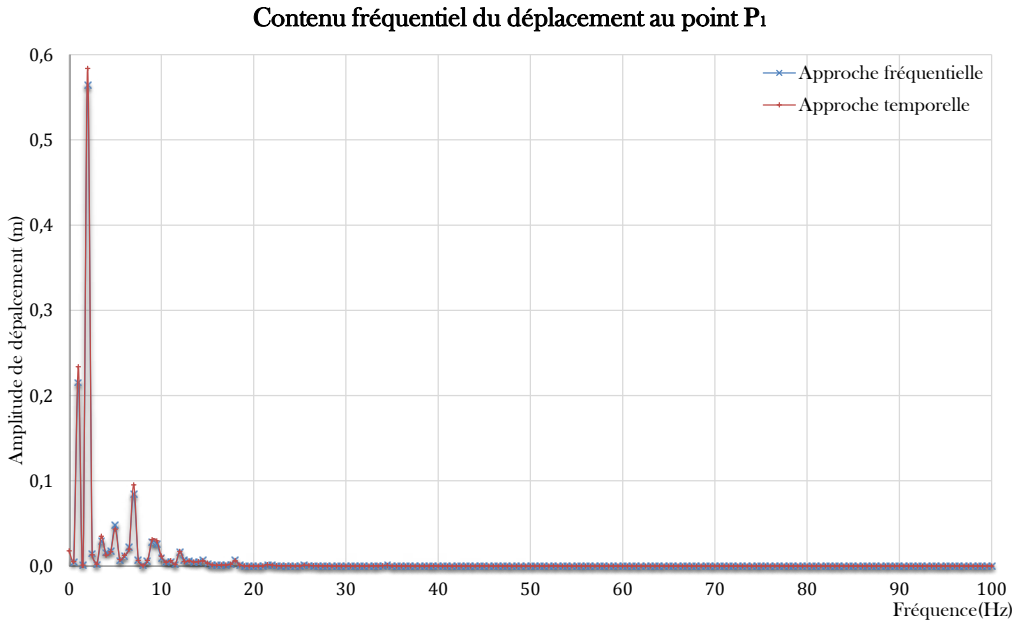


FIGURE 4.6: Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_1 suivant l'axe de chargement y.

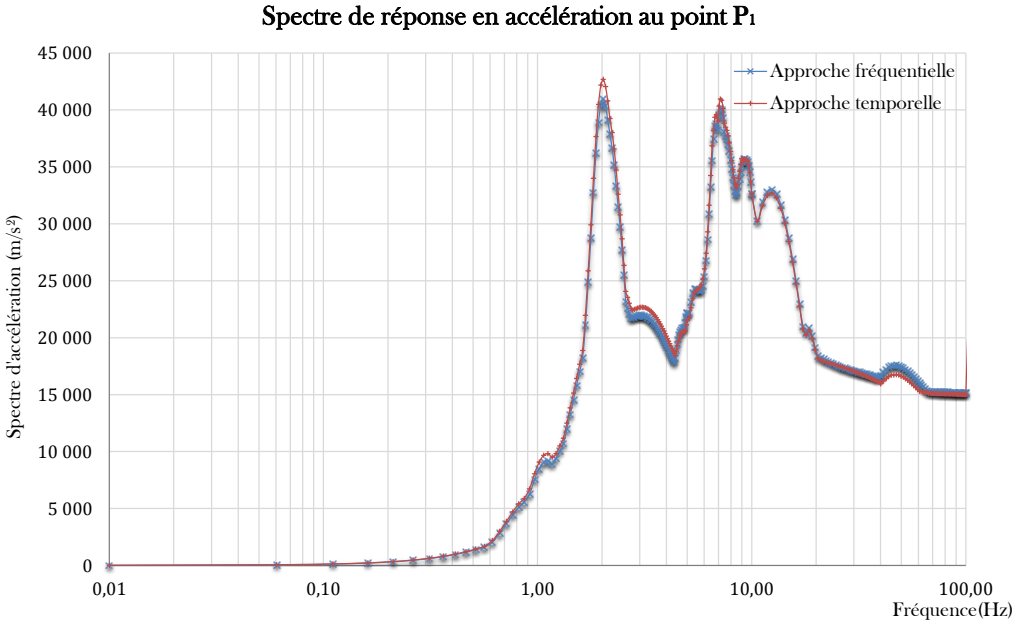


FIGURE 4.7: Spectre de réponse en accélération au Point P_1 suivant l'axe de chargement y.

Résultats au point P_2

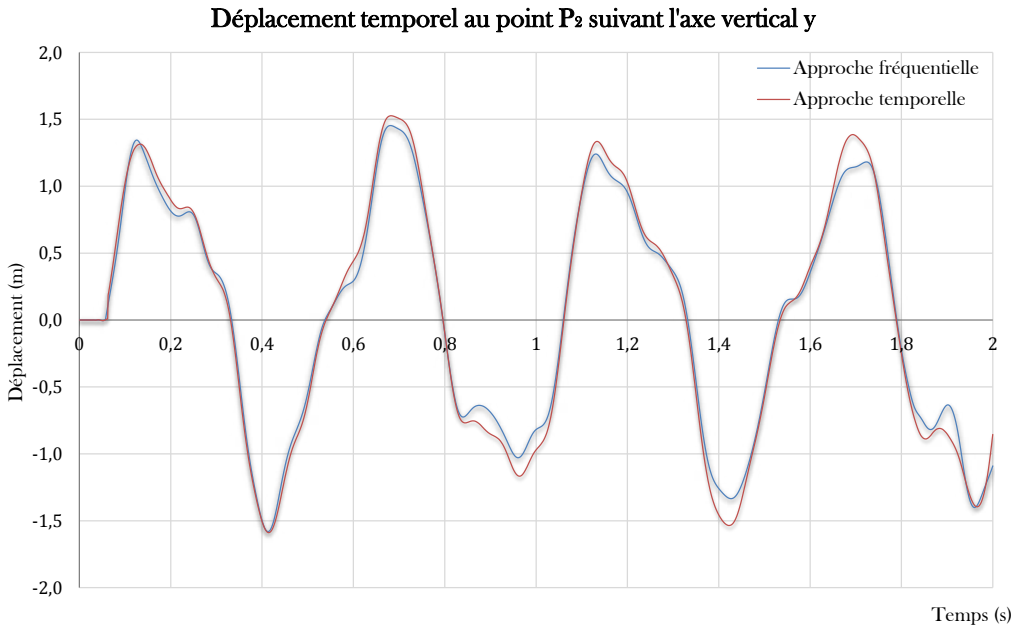


FIGURE 4.8: Déplacement temporel au Point P_2 suivant l'axe de chargement y.

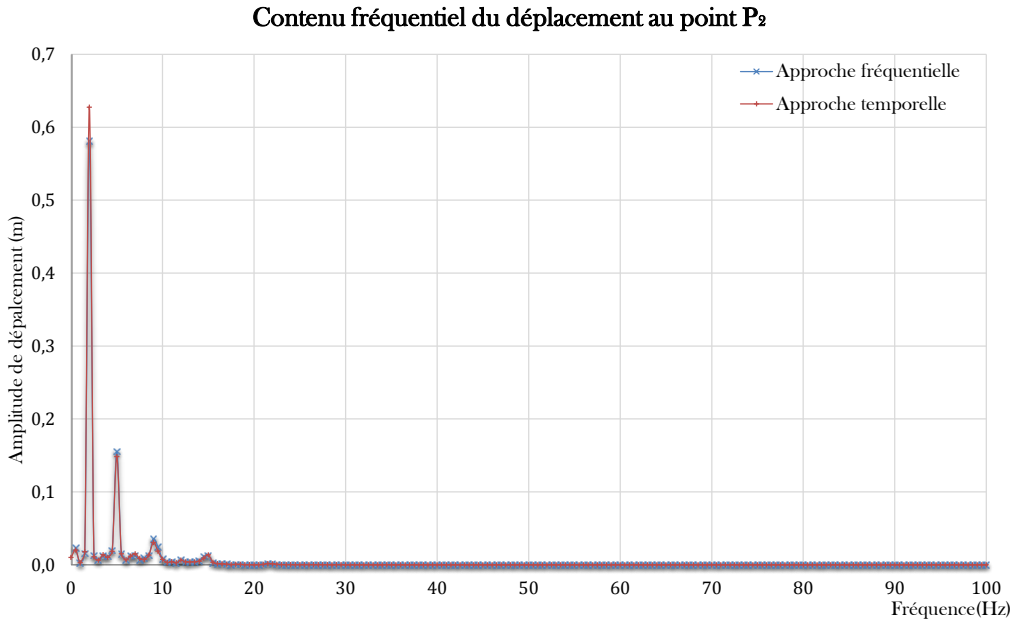


FIGURE 4.9: Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_2 suivant l'axe de chargement y.

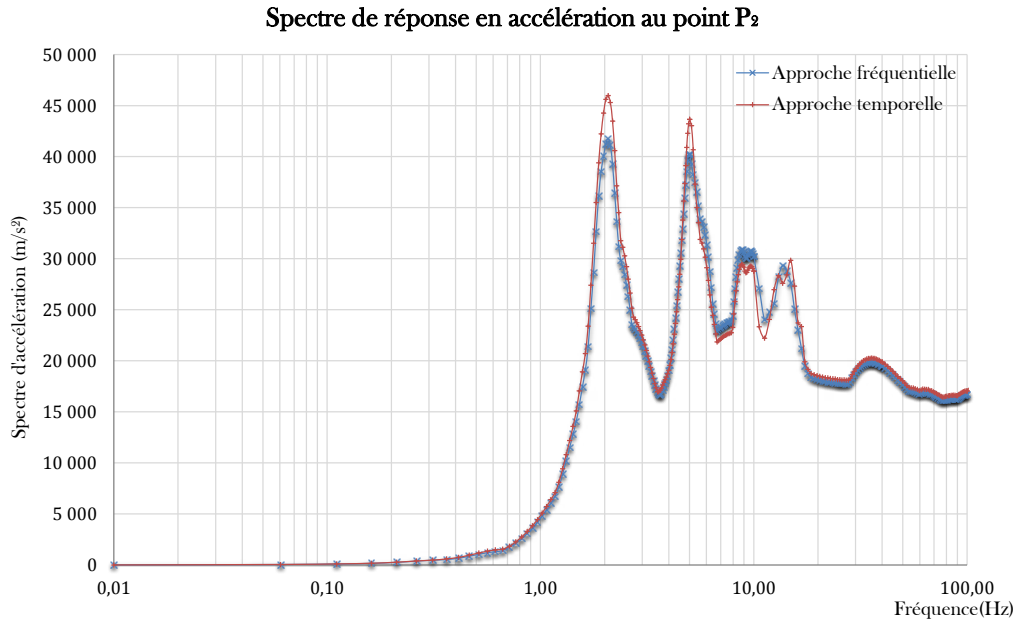


FIGURE 4.10: Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe de chargement y.

Résultats au point P_3

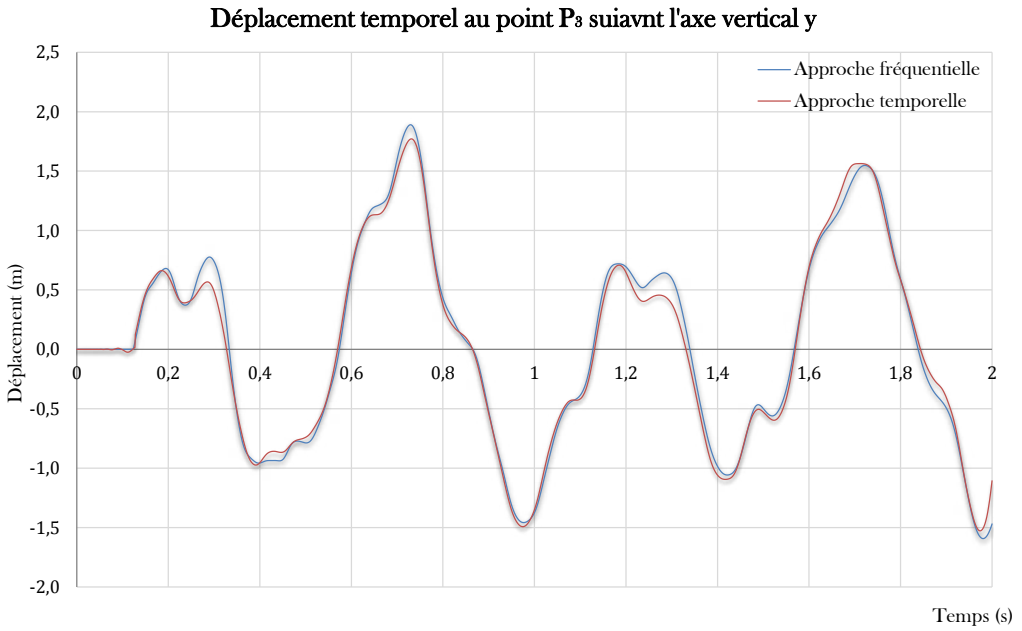


FIGURE 4.11: Déplacement temporel au Point P_3 suivant l'axe de chargement y.

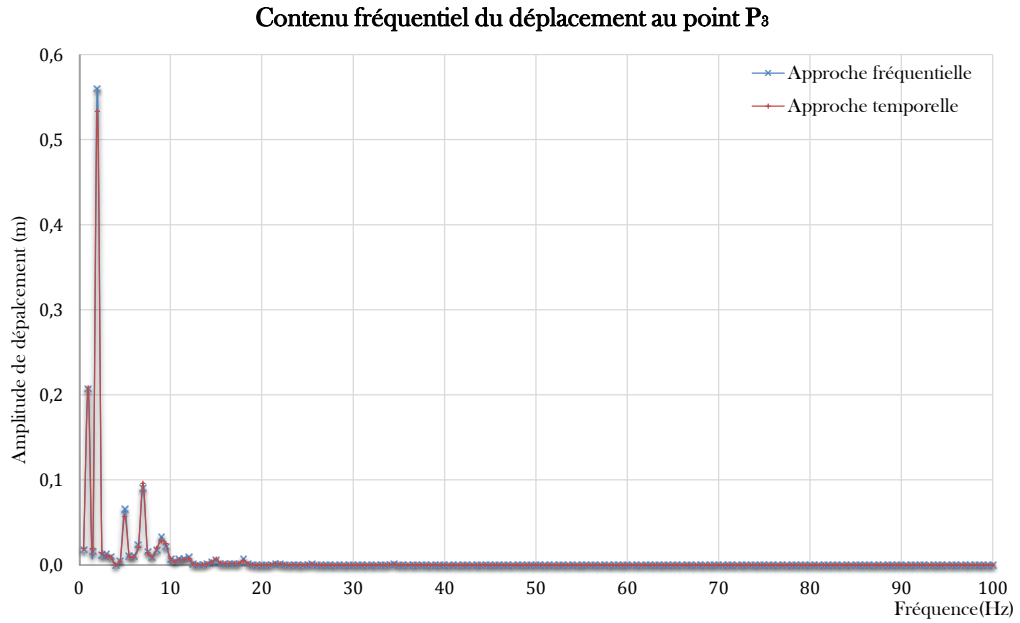


FIGURE 4.12: Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_3 suivant l'axe de chargement y.

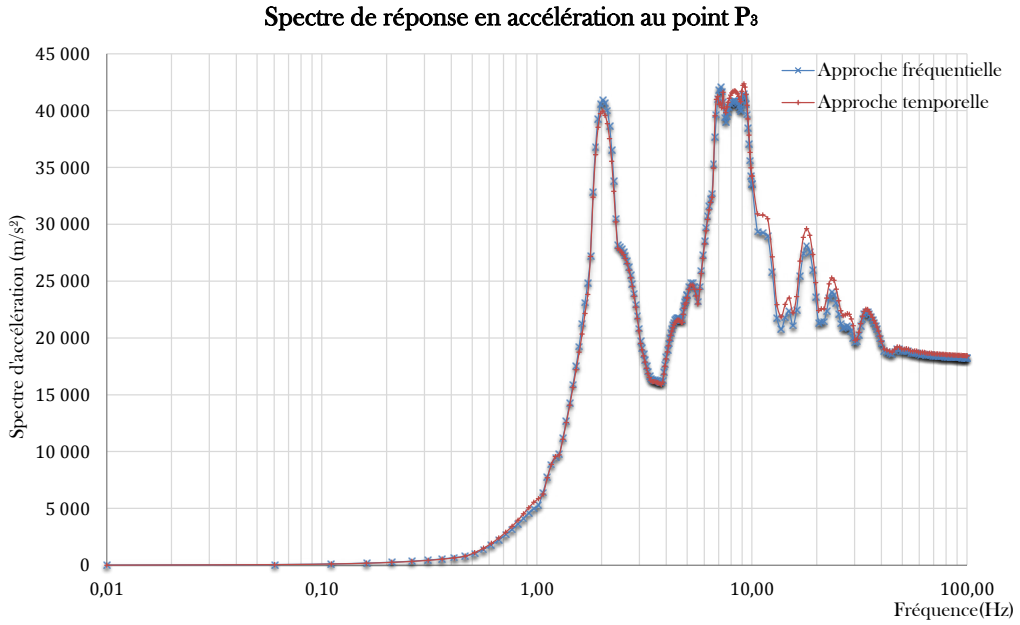


FIGURE 4.13: Spectre de réponse en accélération au Point P_3 suivant l'axe de chargement y.

En conclusion de ce premier exemple, on peut remarquer que l'approche mise en place au travers de la TVRC permet avec un faible coût numérique, notamment en terme de degrés de liberté (6.10^5 DDLs pour la méthode éléments finis comparés à 300 DDLs pour la

TVRC), d'obtenir la réponse d'une plaque avec une bonne précision et tout particulièrement au niveau du spectre de réponse en accélération. On notera que les faibles différences temporelles s'expliquent entre autres par la discrétisation fréquentielle engendrée par la transformée de Fourier nécessaire au passage temporel/fréquentiel.

4.1.2.2 Remarque complémentaire

Dans cette étude, l'analyse fréquentielle faite par la TVRC a été comparée à une approche temporelle classique par éléments finis dans laquelle la discrétisation spatiale a été prise suffisamment fine pour assurer la bonne représentation des vibrations d'une plage fréquentielle de 0 à 100 Hz. Ainsi avec une taille de maille du modèle éléments finis de 25 cm, les vibrations correspondant à une fréquence maximale de 100 Hz sont garanties par une dizaine d'éléments par longueur d'onde. Au delà de cette fréquence limite, la solution de cette approche temporelle se dégrade avec l'augmentation du nombre de longueurs d'onde présentes dans la structure et ainsi de la fréquence. Pour compléter cette première étude et observer cette problématique, nous avons comparé l'approche fréquentielle avec une analyse temporelle dont la décomposition spatiale est volontairement plus grossière. Ici nous avons pris une taille de maillage de 1 m permettant alors d'avoir 10 éléments par longueur d'onde pour une fréquence de 10 Hz. La figure 4.14 présente les résultats obtenus au niveau du point P_2 en termes de spectre d'accélération.

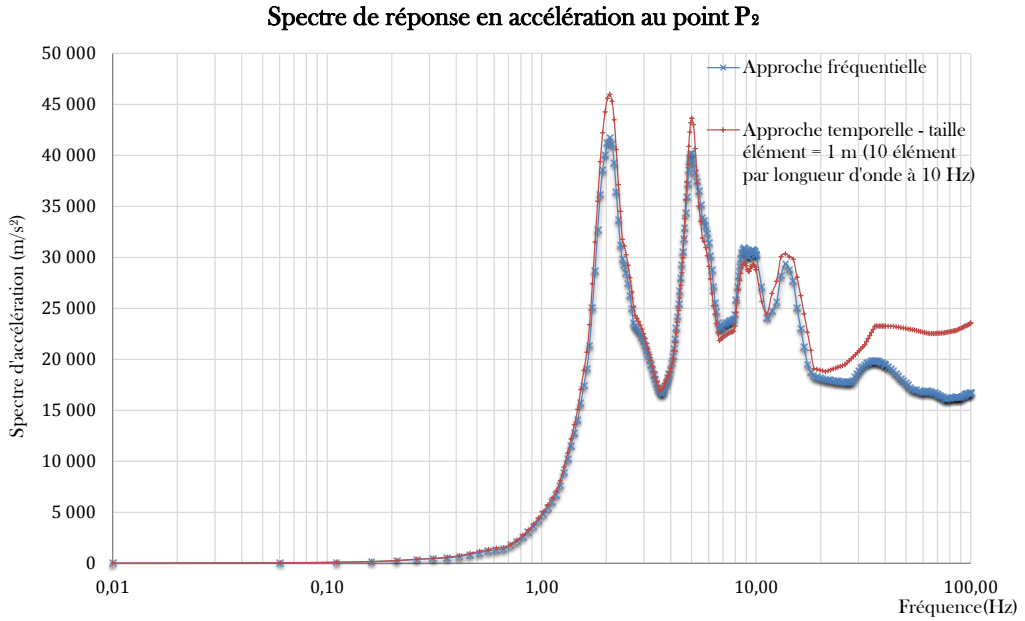


FIGURE 4.14: Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe de chargement y.

On remarque bien qu'au delà de la fréquence seuil de représentation la solution éléments finis se détériore petit à petit avec la fréquence. En effet, le nombre d'éléments finis permettant la description d'une longueur d'onde diminue au fur et à mesure que la

fréquence augmente. La conséquence directe de cette diminution est alors la mauvaise approximation des déplacements et ainsi des accélérations. Dans cet exemple, en prenant comme référence l'approche fréquentielle, on discerne pour la méthodologie temporelle une bonne approximation jusqu'à 10 Hz puis une surestimation du niveau d'accélération au delà de cette fréquence.

On peut en conclure que l'approximation éléments finis reste bonne tant que la discrétisation spatiale est suffisamment fine (10 éléments par longueur d'onde) pour décrire les vibrations du contenu fréquentiel de l'excitation. Au delà de ce seuil, les bons résultats ne sont plus garantis et peuvent être nettement surévalués. Cet aspect peut ainsi conduire à un surdimensionnement des équipements de la structure.

4.1.3 Traitement d'un portique

Dans ce second exemple de validation, le but est cette fois-ci d'étudier les différentes approches dans le cas d'un portique faisant intervenir les conditions de liaison entre plusieurs sous-domaines ainsi que leurs couplages. La figure 4.15 présente la géométrie traitée.

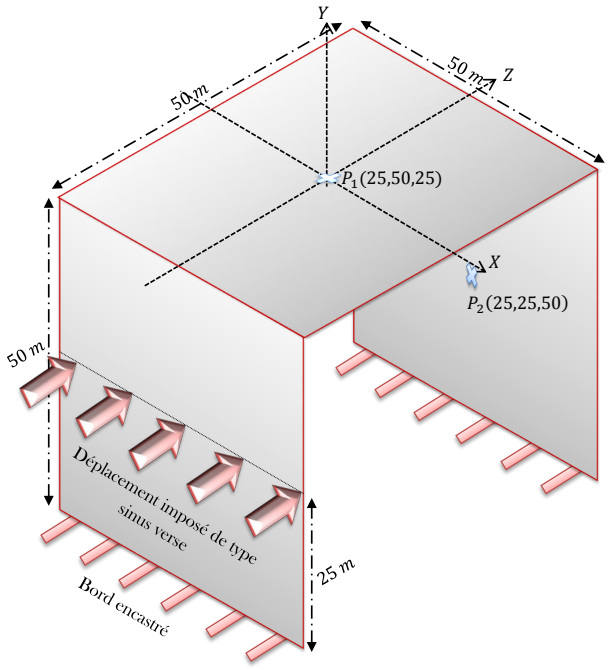


FIGURE 4.15: Deuxième exemple de validation de l'approche fréquentielle : description de la géométrie et des conditions limites.

Le cas présenté est donc l'étude d'un portique de dimensions 50 $m * 50$ $m * 50$ m et de 1 m d'épaisseur. Le chargement en déplacement est appliqué à mi-hauteur d'un des deux voiles. Le déplacement est perpendiculaire à la surface moyenne du voile en question. La plage de fréquences de l'excitation, étant la même que dans l'exemple précédent, reste

$[2\pi \times 0\ Hz\,;\ 2\pi \times 100\ Hz]$. En terme de paramètres matériaux et structurels, le portique est en béton armé avec les propriétés élastiques du tableau 4.2.

Paramètres	Sens physique	Valeur et unité
E	module d'Young	$31,4\ GPa$
ν	coefficient de Poisson	0.2
ρ	masse volumique	$2500\ kg/m^3$
ξ	taux d'amortissement	0.07

TABLE 4.2: Propriétés mécaniques du béton composant le portique.

Une comparaison entre une solution éléments finis obtenue par LS-Dyna [Ls-Dyna, 1976] en utilisant les paramètres de modélisation définis dans le paragraphe 3.2.1 et la recomposition temporelle de la solution TVRC peut alors être présentée. La solution éléments finis est obtenue avec une taille de maillage de 25 cm, soit $7,2.10^5$ DDLs. Cette taille de maille permet de représenter convenablement une vibration d'une fréquence de 100 Hz. La solution TVRC est quant à elle obtenue, comme dans le cas précédent, à partir d'une base d'approximation maximale de 100 ondes intérieures par sous-domaine, 49 ondes de bord par bord et par sous-domaine, et également 40 ondes de pression et 40 ondes de cisaillement par sous-domaine. L'approche TVRC conduit donc à un problème d'une taille maximale de 1520 DDLs. Les deux paragraphes qui suivent présentent les résultats obtenus pour les deux points d'intérêts P_1 et P_2 (illustrés dans la figure 4.15) en termes de déplacement hors plan, du contenu fréquentiel et de spectre de réponse en accélération associés pour les directions y (axe vertical) et z (direction de chargement).

Résultats au point P_1

– suivant l'axe de chargement z

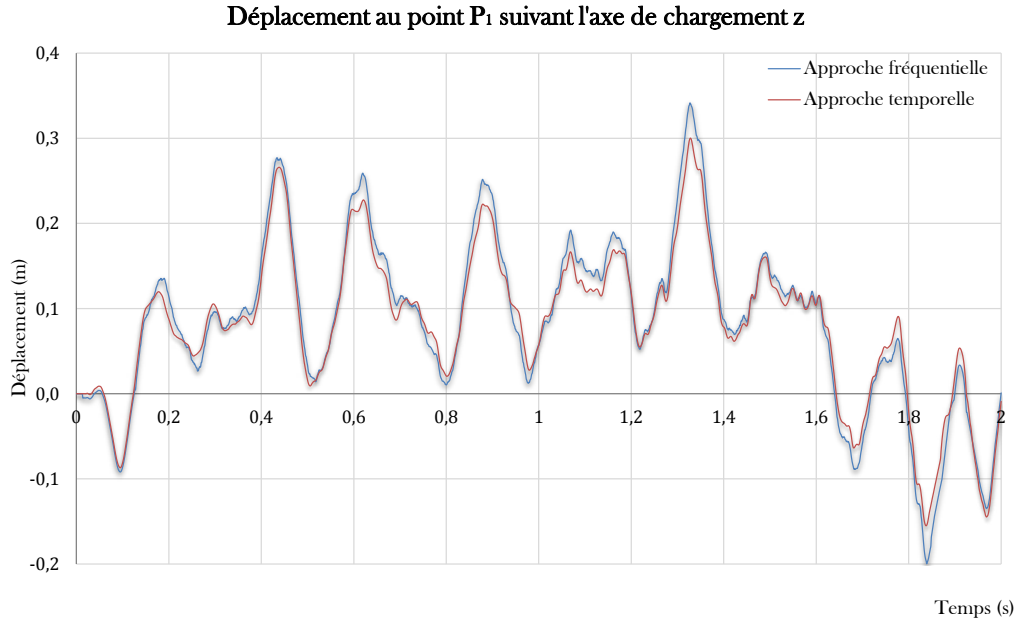


FIGURE 4.16: Déplacement temporel au Point P_1 suivant l'axe de chargement z.

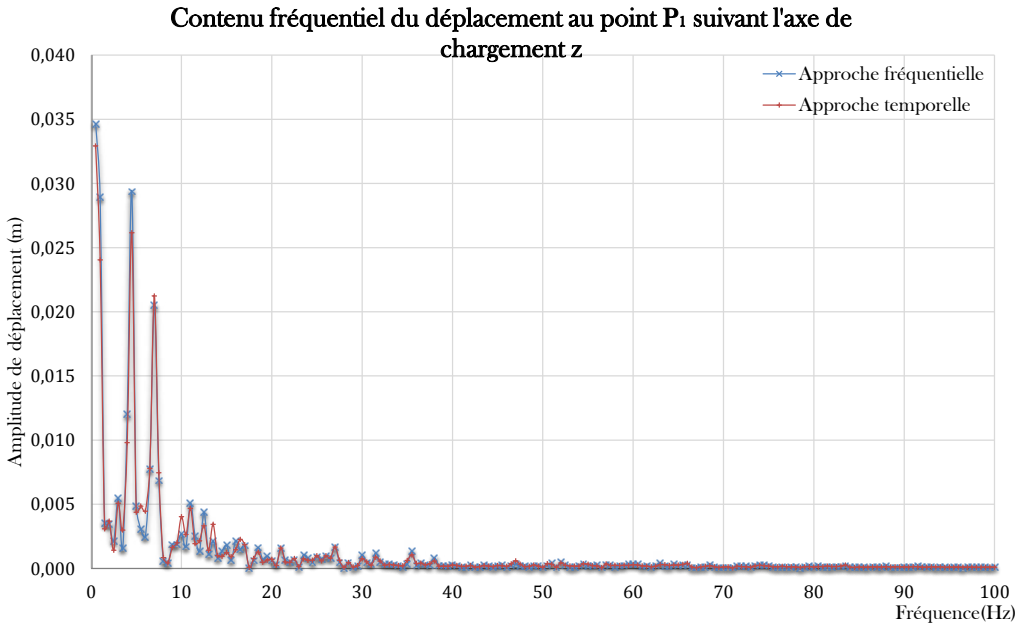


FIGURE 4.17: Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_1 suivant l'axe de chargement z.

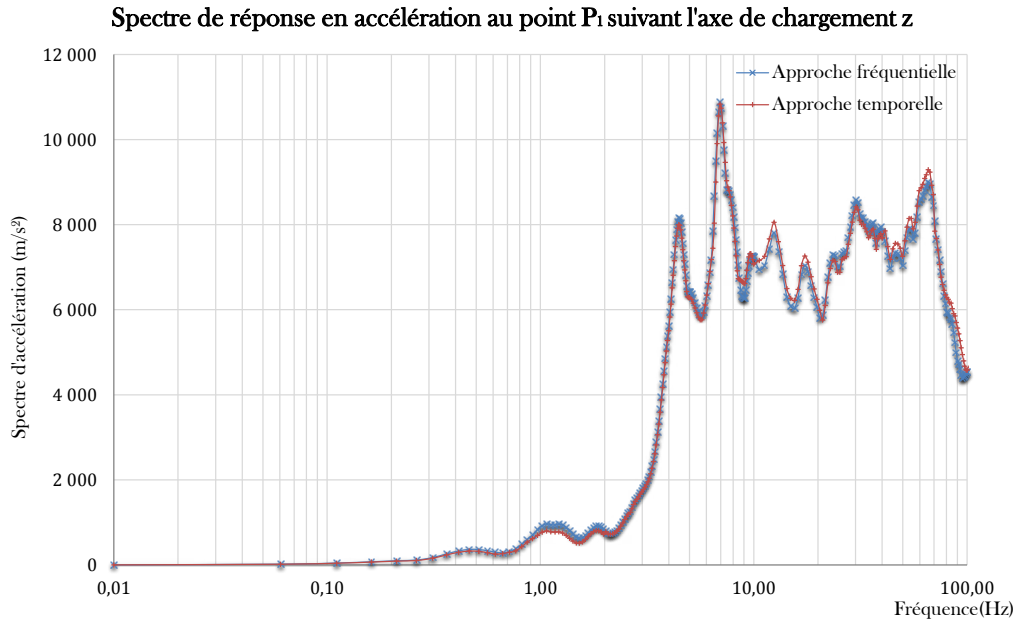


FIGURE 4.18: Spectre de réponse en accélération au Point P_1 suivant l'axe de chargement z.

– suivant l'axe vertical y

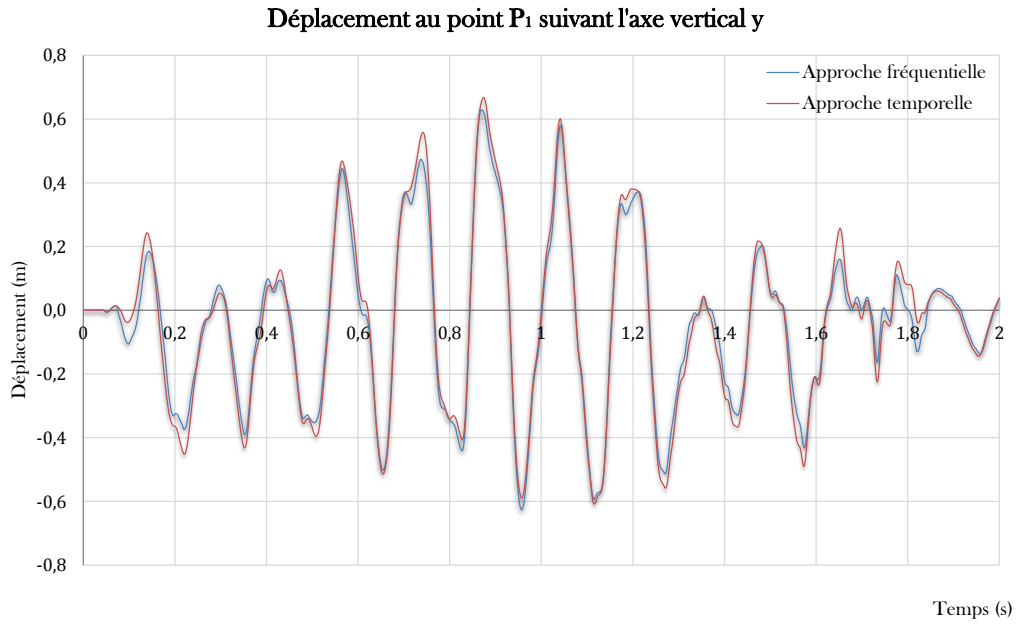


FIGURE 4.19: Déplacement temporel au Point P_1 suivant l'axe vertical y.

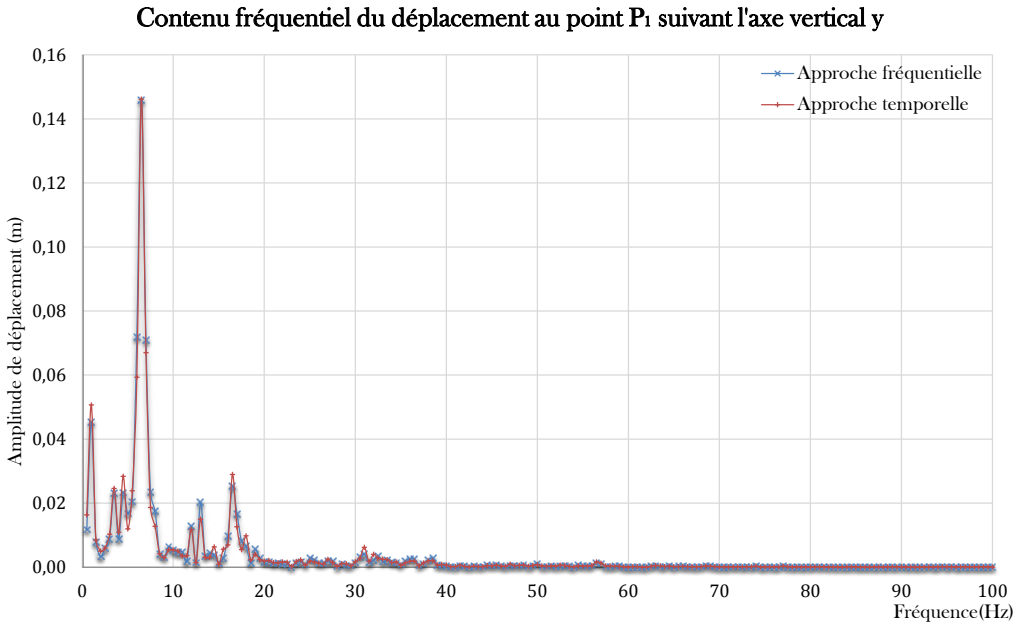


FIGURE 4.20: Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_1 suivant l'axe vertical y.

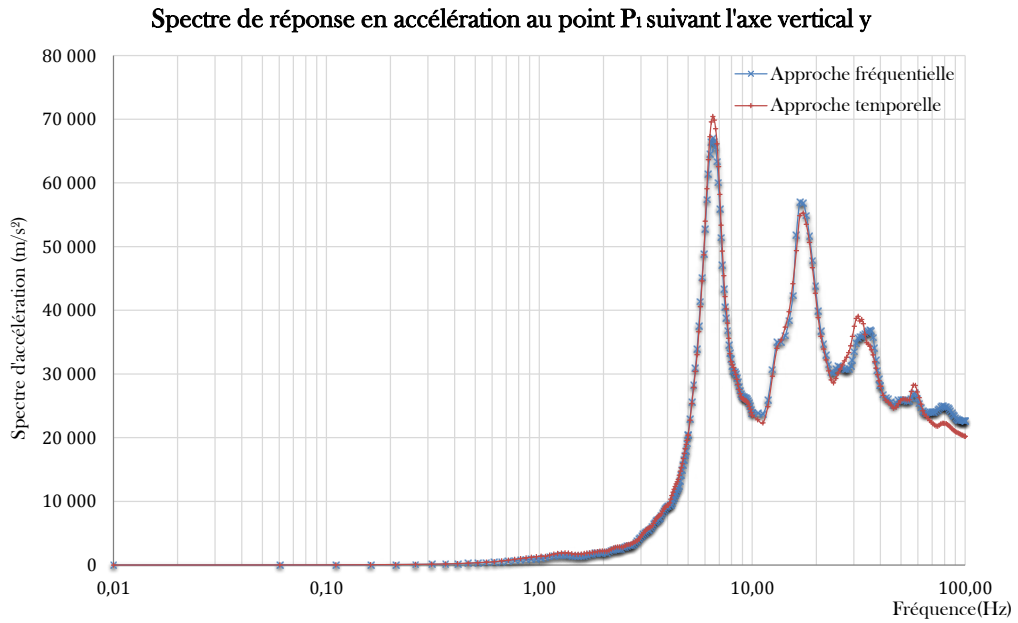


FIGURE 4.21: Spectre de réponse en accélération au Point P_1 suivant l'axe vertical y.

Résultats au point P_2

– suivant l'axe de chargement z

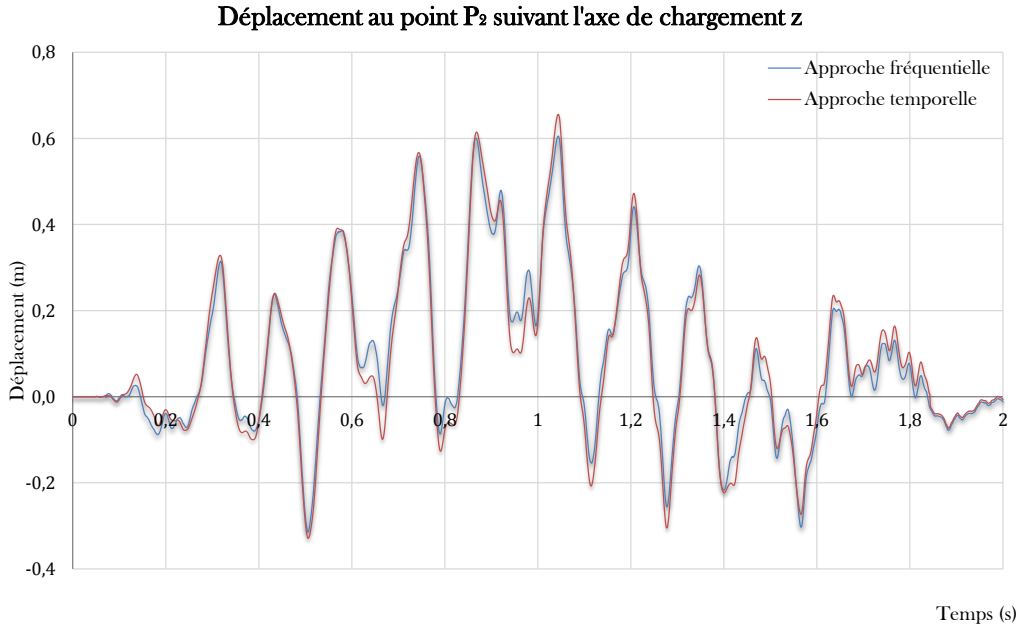


FIGURE 4.22: Déplacement temporel au Point P_2 suivant l'axe de chargement z.

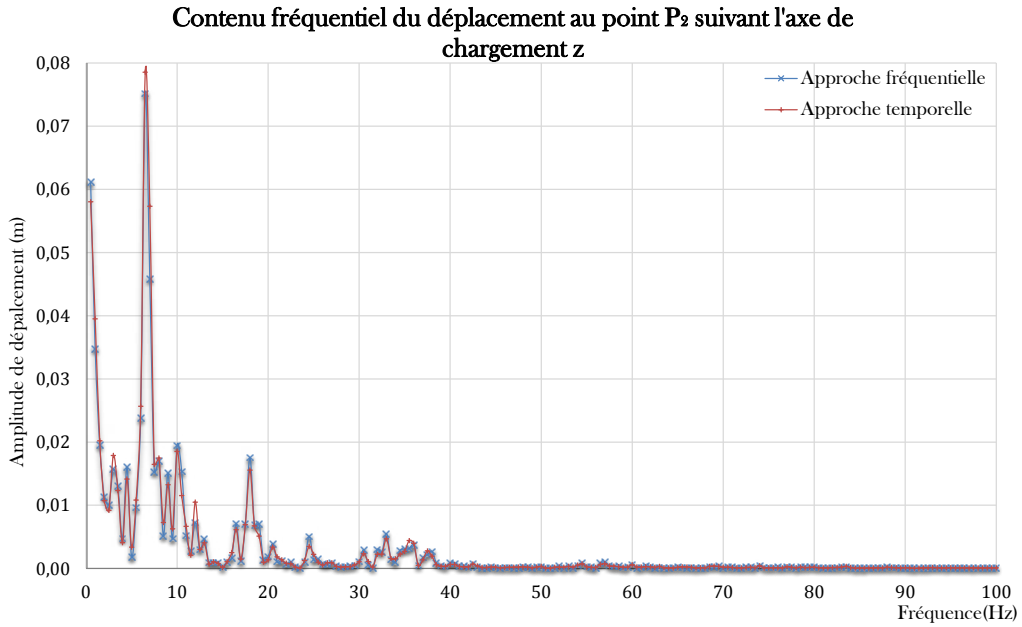


FIGURE 4.23: Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_2 suivant l'axe de chargement z.

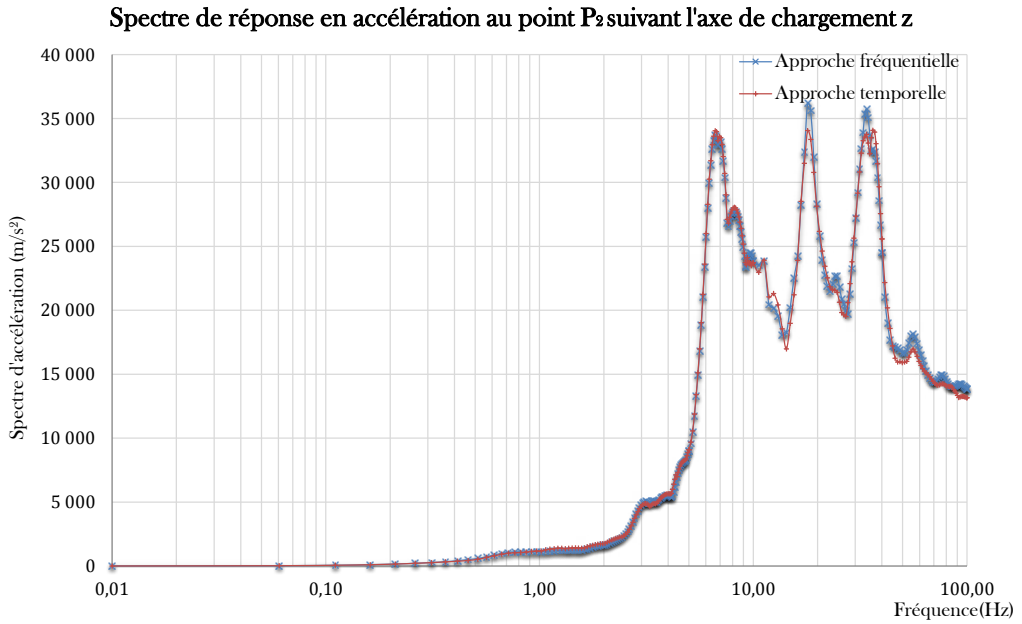


FIGURE 4.24: Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe de chargement z.

– suivant l'axe vertical y

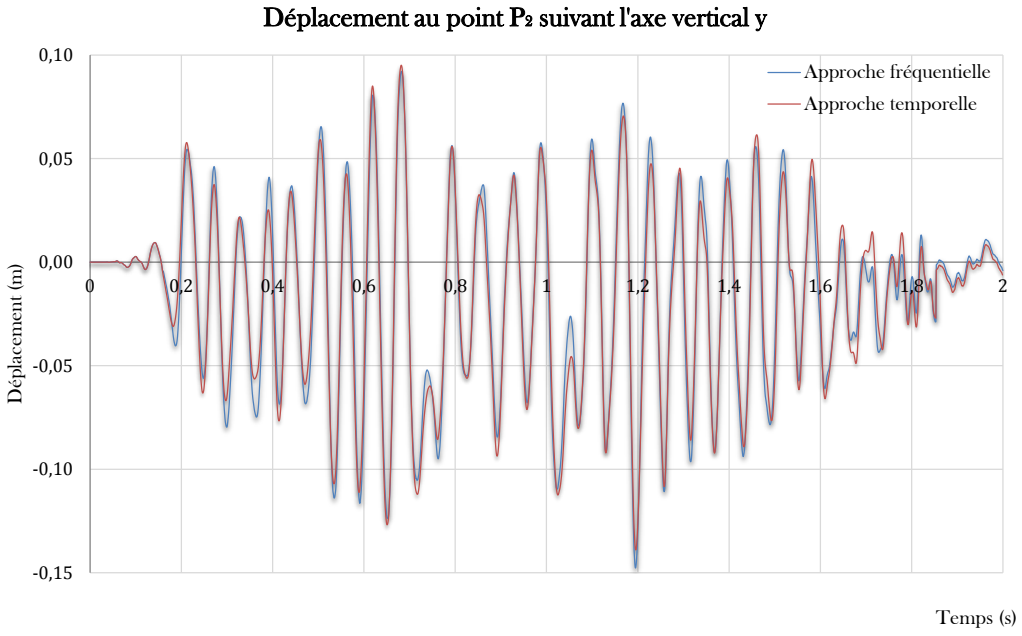


FIGURE 4.25: Déplacement temporel au Point P_2 suivant l'axe vertical y.

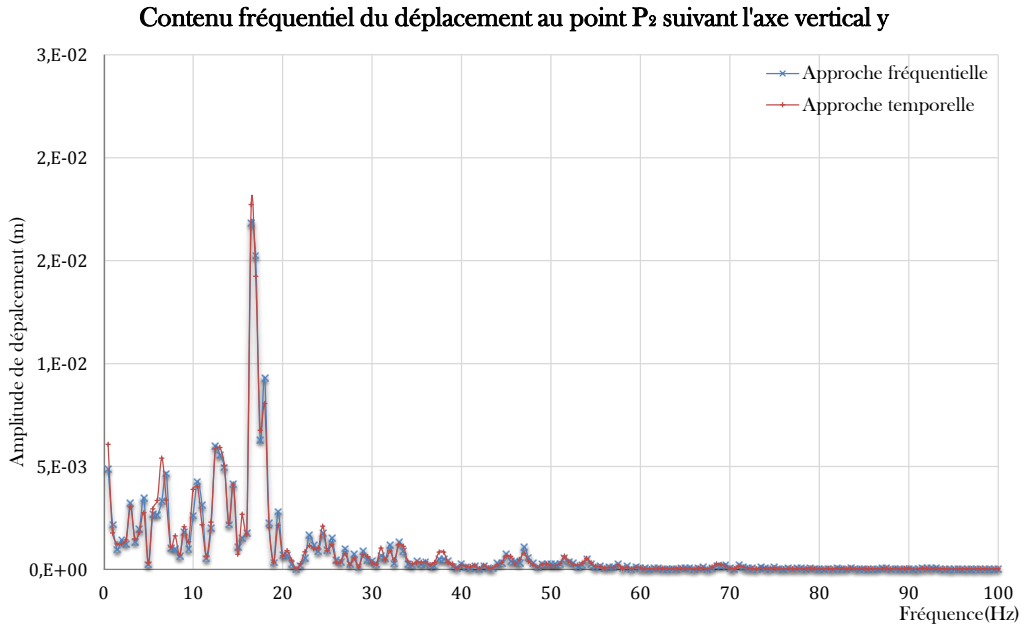


FIGURE 4.26: Amplitude du spectre fréquentiel en déplacement au Point P_2 suivant l'axe vertical y.

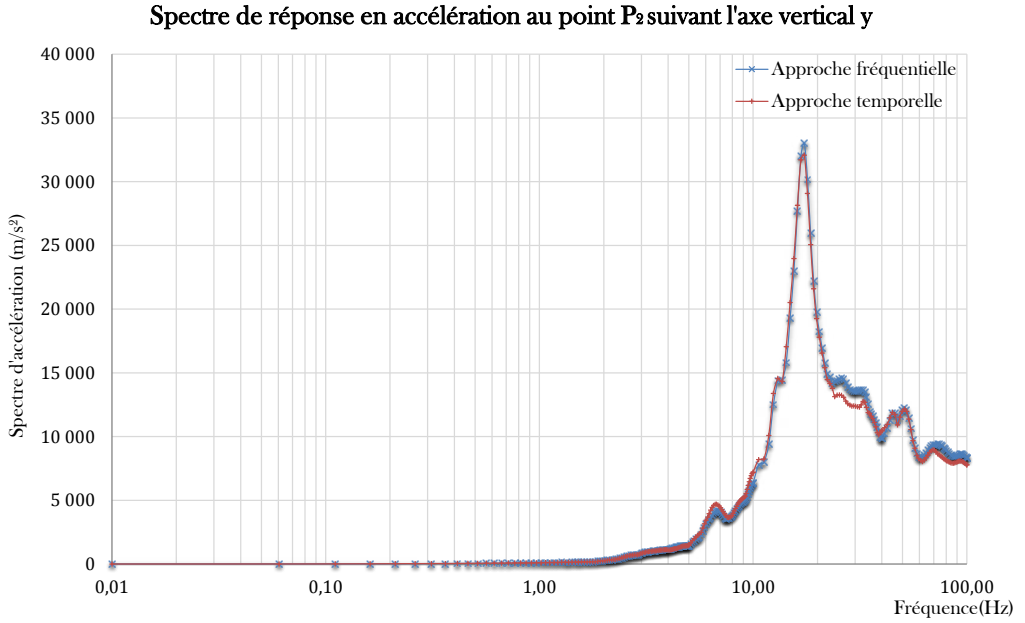


FIGURE 4.27: Spectre de réponse en accélération au Point P_2 suivant l'axe vertical y.

Avec ce deuxième exemple, nous avons pu mettre en évidence l'efficacité de notre approche fréquentielle via la TVRC par rapport à une approche temporelle "classique". En effet le coût numérique de la méthodologie mise en place est plus faible. On peut également remarquer la bonne approximation des déplacements dans les deux directions. On

peut ainsi conclure de cet exemple que les conditions de liaison entre les sous-domaines sont bien respectées.

Nous avons pu voir au travers des deux exemples présentés que notre approche fréquentielle est efficace et permet une bonne représentation des déplacements à faible coût numérique. Une fois validé, l'étape suivante est de l'appliquer au traitement de la chute d'avion sur un cas industriel et de la comparer à l'approche dite "classique".

4.2 Application à un cas industriel

4.2.1 Description du cas d'étude

4.2.1.1 Définition de la structure impactée

Considérons une structure en béton dont les propriétés mécaniques du béton sont décrites dans le tableau 4.3.

Paramètres	Sens physique	Valeur et unité
f_{ck}	résistance maximale du béton en compression	60 MPa
E	module d'Young	34 GPa
ν	coefficient de Poisson	0.2
ρ	masse volumique	2500 kg/m^3
ξ	taux d'amortissement	0.07

TABLE 4.3: Propriétés mécaniques du béton composant la structure impactée.

Dans cette étude, un amortissement hystérétique est utilisé. La structure (figure 4.28) est entièrement constituée de coques d'épaisseur de 1 m, hormis le radier qui, lui, a une épaisseur de 5 m. Il comprend quatre bâtiments carrés périphériques et un bâtiment central cylindrique avec un dôme pour couvrir ce dernier. Le bâtiment entier est armé de ferraillages HA40@20 cm dans les deux directions, soit 0.63 $\%/m$. Les propriétés mécaniques équivalentes élastiques de la structure béton armé sont alors calculées comme présenté dans le paragraphe 3.4. Le sol est quant à lui modélisé comme un demi-espace infini en utilisant les approximations standards (voir [Tsai *et al.*, 1975]). Il est inclus dans le système par le biais de raideurs et d'amortissements en translation et rotation. Dans notre exemple, le sol est décrit par les propriétés du tableau 4.4.

Paramètres	Sens physique	Valeur et unité
G	module de cisaillement	$7,76.10^8$ N/m^2
ν	coefficient de Poisson	0.33
ρ	masse volumique	2082 kg/m^3

TABLE 4.4: Propriétés mécaniques du sol.

L'interaction sol/structure est ainsi définie ici au niveau du radier dans chacune des trois directions en translation par une raideur de $5,808.10^{10}\ N/m$ et un amortissement de $8,348.10^{8}\ N.s/m$ et en rotation par une raideur de $1,104.10^{18}\ N.m/rad$ et un amortissement de $1,587.10^{10}\ N.m.s/rad$.

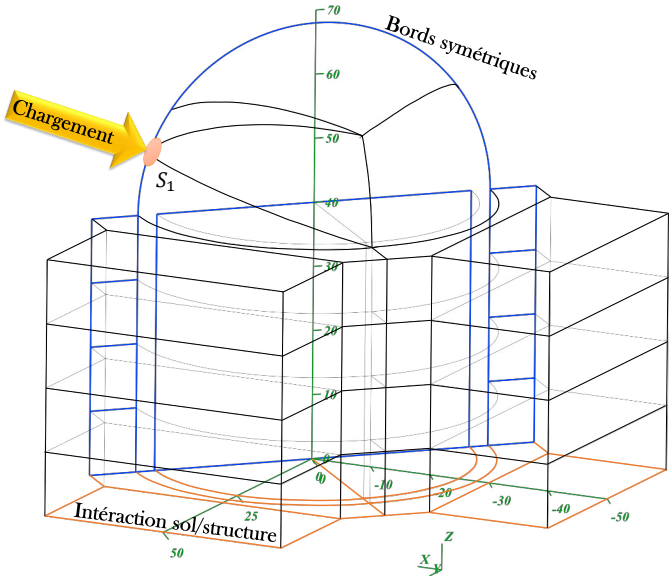


FIGURE 4.28: Géométrie de la structure étudiée.

La structure est soumise à un impact appliqué sur le dôme selon la normale de la surface S_1. Cet impact produit un endommagement localisé sur cette partie de la structure. Comme détaillé dans notre stratégie, le rayon de la zone de non-linéarité est dans un premier temps calculé par la FEM et suite à cela l'effort atténué aux bornes de la zone endommagée sera appliqué sur le reste de la structure. La force d'impact de l'avion appliquée sur S_1 est calculée par l'approche analytique de Riera, décrite dans le paragraphe 1.4.1.2.

4.2.1.2 Signal d'impact : approche de Riera

En utilisant la méthode de calcul de l'effort d'impact de Riera, il est alors possible de calculer cet effort pour trois avions typiques appartenant chacun à une catégorie d'aviation : légère, militaire et commerciale. Dans ce cadre là, le tableau 4.5 présente les paramètres normés pour chaque aviation en termes d'effort de flambement et de distribution de masse de l'appareil.

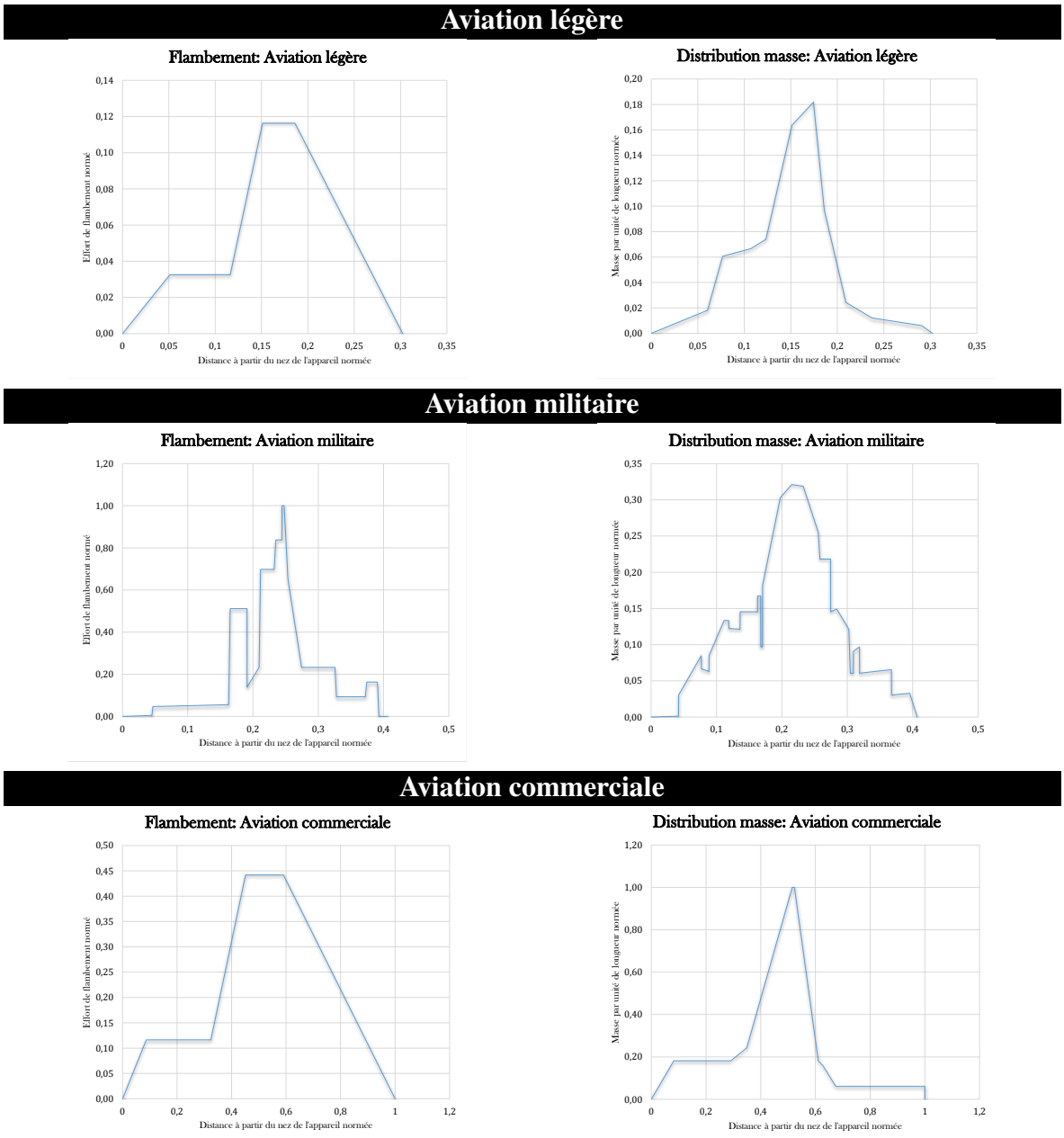


TABLE 4.5: Paramètres normés pour chaque aviation.

Le tableau 4.6 permet de comparer les distributions de flambement et de masse pour les différents types d'aviation.

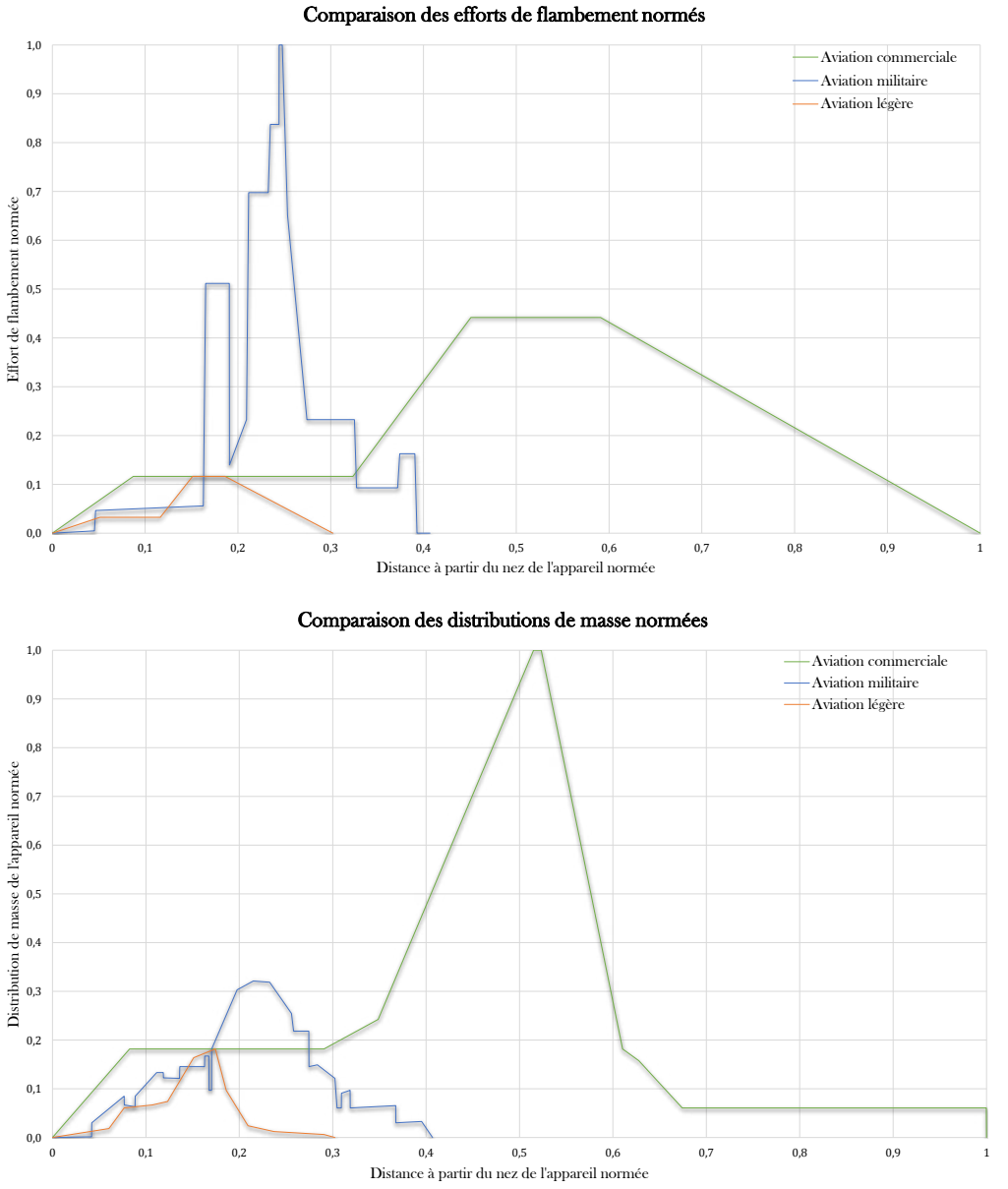


TABLE 4.6: Comparaison des paramètres, efforts de flambement (au-dessus) et distributions de masse (en-dessous), pour les différents types d'aviation.

Dans l'approche de calcul de l'effort d'impact définie dans le paragraphe 1.4.1.2, le paramètre jouant un rôle primordial est alors la vitesse d'impact de l'appareil. Dans le but de qualifier les structures nucléaires à l'impact d'avion, un choix a été de fixer cette valeur à une vitesse comprise entre la vitesse d'atterrissage et la vitesse de croisière de l'appareil. Cette vitesse d'impact est choisie de manière à rester plausible compte tenu des différents paramètres pouvant intervenir dans la difficulté d'approche de l'avion vers la structure. A partir de là, la figure 4.29 présente les différents efforts d'impact obtenus.

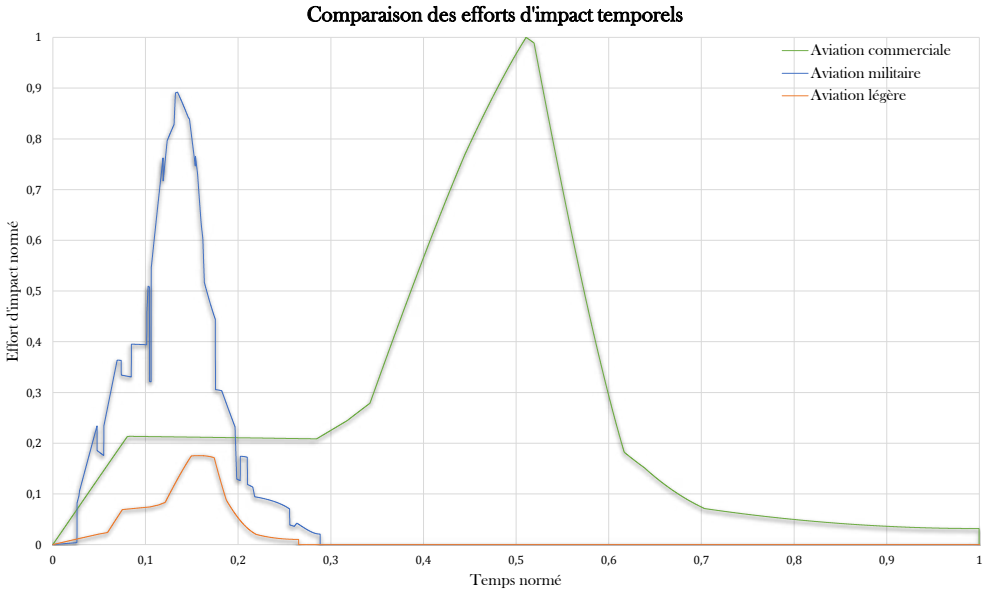


FIGURE 4.29: Efforts d'impact en fonction du temps pour les différents types d'avios.

Pour compléter cette comparaison, la figure 4.30 permet de décrire le contenu fréquentiel des efforts d'impact obtenus. L'observation dans le domaine fréquentiel permet de se rendre compte que l'aviation commerciale a un contenu très basses fréquences avec l'amplitude la plus forte. Néanmoins, cette remarque n'est plus correcte au-delà de 12 Hz (en basses et moyennes fréquences). En effet à partir de cette fréquence, c'est l'aviation militaire qui a l'amplitude la plus importante. On remarquera également que l'aviation légère impactant la cible est aussi supérieure à l'aviation commerciale sur une plage de fréquence de 33 à 43 Hz.

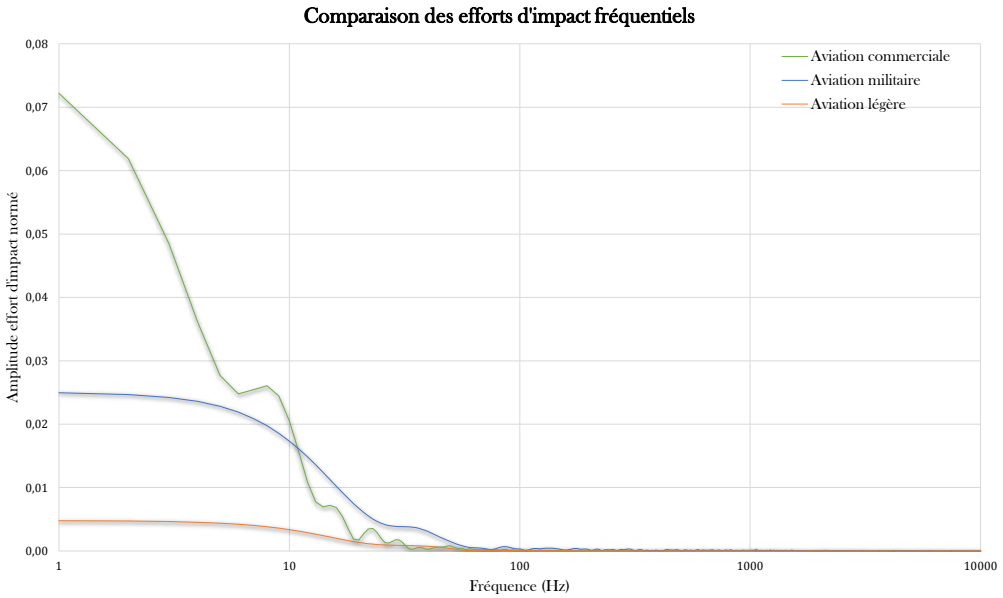


FIGURE 4.30: Contenus fréquentiels des efforts d'impact pour les différentes aviations.

En conclusion de cette étude comparative, on peut dire que l'aviation commerciale n'est pas forcément celle faisant intervenir les plus fortes amplitudes en moyennes fréquences. De plus les aviations commerciales et militaires enveloppent l'aviation légère. Il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte cette dernière pour qualifier nos structures à la chute d'avion. Dans la suite de notre étude, nous pourrons appliquer les signaux d'efforts d'impact commerciaux et militaires sur une partie de la structure dans le traitement de la zone non-linéaire.

4.2.2 Définition et résultats aux bornes de la zone non-linéaire

Pour rappel du paragraphe 3.2.1, dans la détermination de la zone non linéaire endommagée, nous employons LS-Dyna [Ls-Dyna, 1976] avec des éléments finis lagrangiens et une intégration temporelle explicite. Compte tenu de la géométrie initiale, nous avons décidé de concentrer notre étude sur le dôme de la structure et les conditions aux limites de celui-ci sont définies comme des contraintes en déplacements. Ces conditions limites ne prennent pas en compte des effets de couplage d'oscillateur avec la zone non endommagé et restant de la structure.

Le dôme a donc été modélisé par des éléments de coque, pour un modèle à faible coût de calcul. La loi constitutive de béton *Mat_Concrete_EC2*, mise en œuvre dans LS-Dyna et présentée dans le paragraphe 3.2.1, a été utilisée pour les éléments. La figure 4.31 présente la partie de la structure étudiée dans le traitement de la zone non-linéaire.

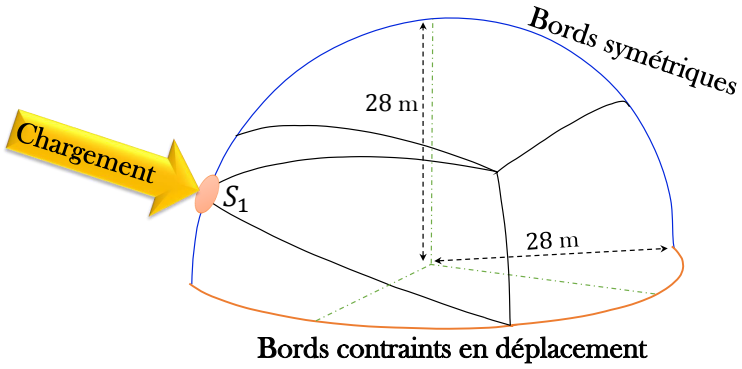


FIGURE 4.31: Géométrie de la structure étudiée pour le traitement de la zone non-linéaire.

Les historiques de chargement pris en compte correspondent à ceux, calculés par la méthode de Riera, des aviations commerciales et militaires présents dans la figure 4.29. Ces efforts équivalents sont appliqués sur une surface S_1 correspondant au fuselage de l'aéronef, soit 12 m^2 pour l'aviation commerciale et 2 m^2 pour l'aviation militaire.

Le maillage de dôme est construit de manière à pouvoir représenter jusqu'à une fréquence de 100 Hz, selon la règle technique de 10 éléments par longueur d'onde. Ainsi, la taille de maille est égale à 40 cm.

Ce calcul non linéaire permet ainsi d'obtenir le rayon de la zone endommagée, 10 m pour l'avion commercial et 5 m pour l'avion militaire, et le déplacement aux bornes de cette zone (cf. figure 4.32).

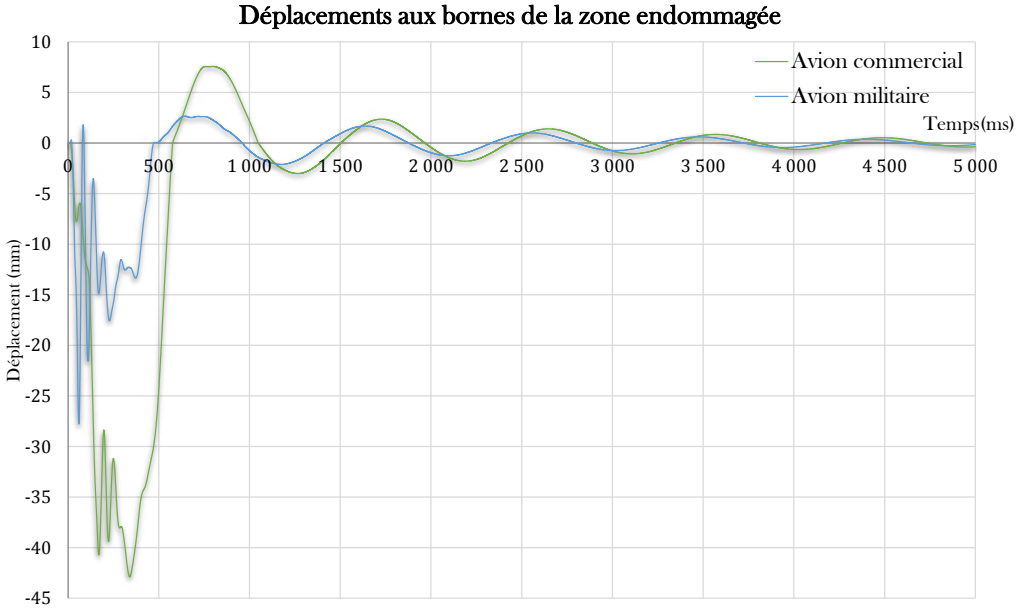


FIGURE 4.32: Déplacements temporels aux bornes de la zone endommagée pour les deux aviations prises en compte.

Les figures 4.33 et 4.34 présentent le contenu fréquentiel du déplacement aux bornes de la zone non-linéaire pour les deux cas étudiés ainsi que le cumul associé en pourcentage.

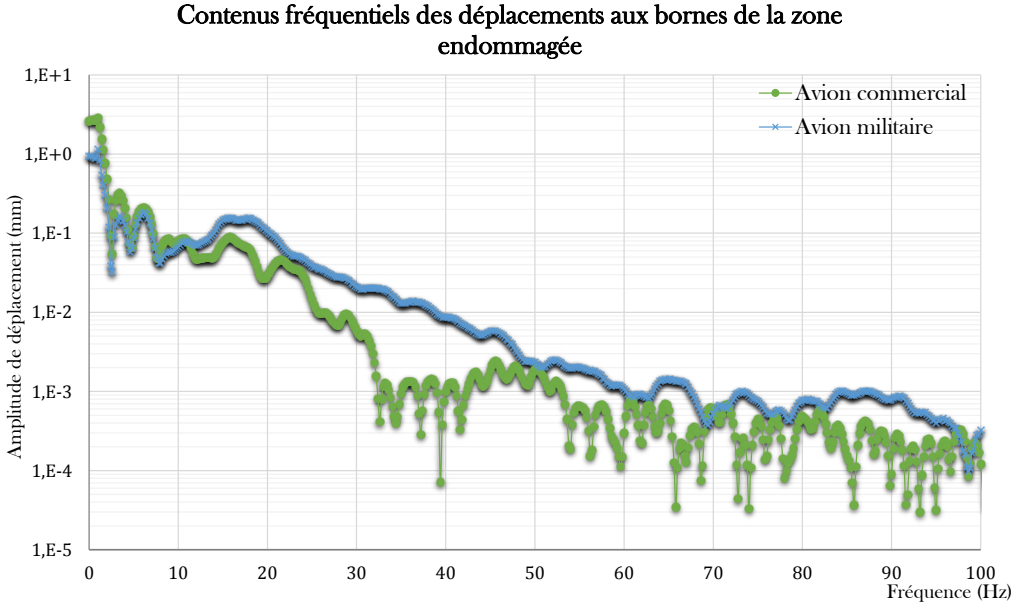


FIGURE 4.33: Contenus fréquentiels des déplacements aux bornes de la zone endommagée pour les deux aviations prises en compte.

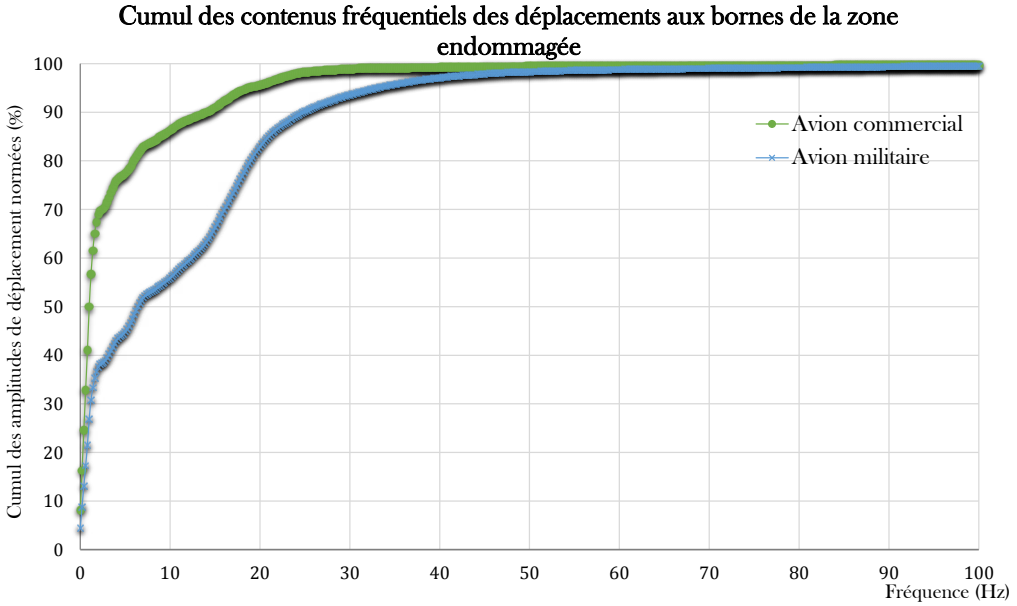


FIGURE 4.34: Cumul des contenus fréquentiels des déplacements aux bornes de la zone endommagée pour les deux aviations prises en compte.

Pour conclure quant au traitement de la zone non-linéaire, on peut retenir que la chute d'avion induit bien un endommagement localisé autour de l'aire d'impact. On peut également se rendre compte que l'aviation militaire a un contenu fréquentiel plus important que l'aviation commerciale. En effet, le cumul fréquentiel nous prouve que le cas de charge commercial atteint 95 % de sa quantité de déplacement à une fréquence de 20 Hz et 99,7 % à 100 Hz. En comparaison, l'avion militaire n'atteint 95 % qu'à 33 Hz et 99,5 % à 100 Hz. Une fois la zone endommagée déterminée, il reste alors à calculer les vibrations induites par l'impact dans le reste de la structure au travers de la TVRC.

4.2.3 Application du signal à la partie non endommagée de la structure

La détermination des paramètres contrôlant la zone non linéaire localisée à la surface d'impact nous permet d'étudier les vibrations induites dans le reste de la structure. Pour cela, nous utilisons une approche fréquentielle au travers de la méthode TVRC décrite au chapitre 2. Nous appliquons les déplacements aux bornes de la zone non-linéaire définies dans la figure 4.32. Pour étudier la réponse de la TVRC et son efficacité vis-à-vis d'une approche "classique" temporelle, nous définissons trois points (P_1, P_2 et P_3) sur la structure où nous reconstituerons les historiques de déplacements et étudierons les spectres d'accélérations correspondant. Ces points sont illustrés dans la figure 4.35.

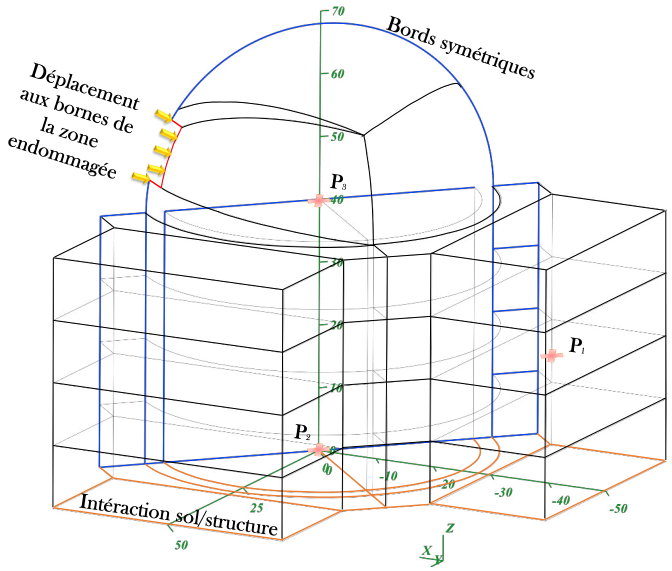


FIGURE 4.35: Géométrie de la partie linéaire de la structure étudiée et emplacement des points d'intérêts.

Près de cinq cents rayons de vibration par sous-structure sont suffisants pour représenter correctement la réponse fréquentielle. Le tableau 4.7 montre la solution obtenue pour quatre exemples de fréquences.

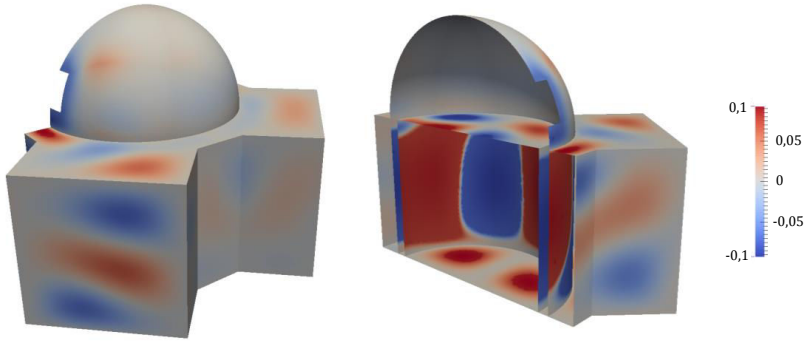
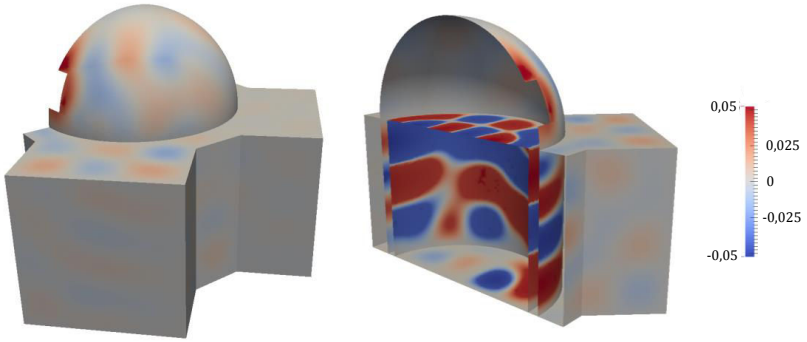
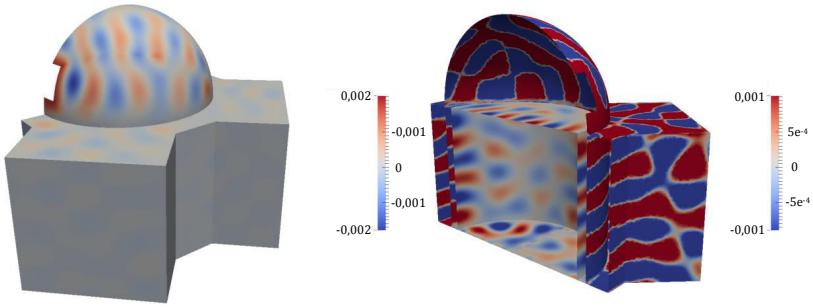
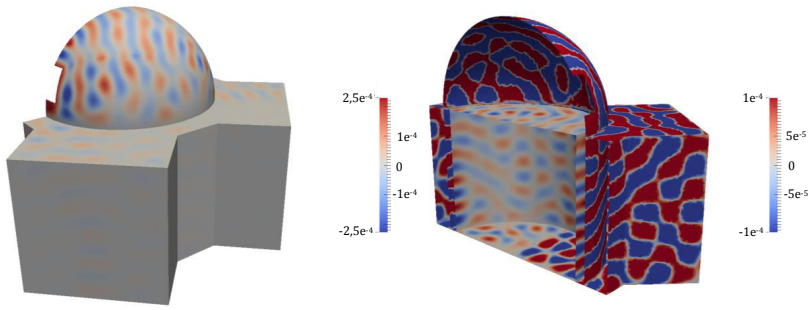
	Nombre de DDLs max / sous structures : 100 ondes intérieures 75 ondes de bord / bord, 50 ondes de pression et 50 ondes de cisaillement
Déplacement résultant (*mm*)	**10 Hz** 
	25 Hz 
	50 Hz 
	100 Hz 

TABLE 4.7: Solutions TVRC du cas industriel étudié.

À la suite du calcul TVRC, on peut récupérer l'amplitude et la phase en chaque point de la structure à chaque fréquence, et ainsi reconstruire la réponse temporelle par transformée de Fourier inverse (IFFT). Dans la suite du paragraphe nous décrirons les résultats obtenus pour le point P_3, néanmoins l'annexe D récapitule l'ensemble des résultats obtenus sur les trois points d'intérêts. Ainsi pour le point sélectionné P_3, les amplitudes fréquentielles de déplacement et les déplacements temporels suivant l'axe de chargement et l'axe vertical z sont décrits dans les figures 4.36, 4.37, 4.38 et 4.39.

Pour valider les résultats acquis avec notre approche fréquentielle, on les compare à l'approche "classique" temporelle réalisée au travers de la méthode éléments finis. Dans cette comparaison, un maillage raffiné a été défini à partir d'une taille de maille de 0,4 m, et composé de $5,56 * 10^6$ degrés de liberté. Si nous nous référons à la règle de l'ingénierie de 10 éléments par longueur d'onde, ce maillage permet de représenter une plage de fréquence limitée à 100 Hz.

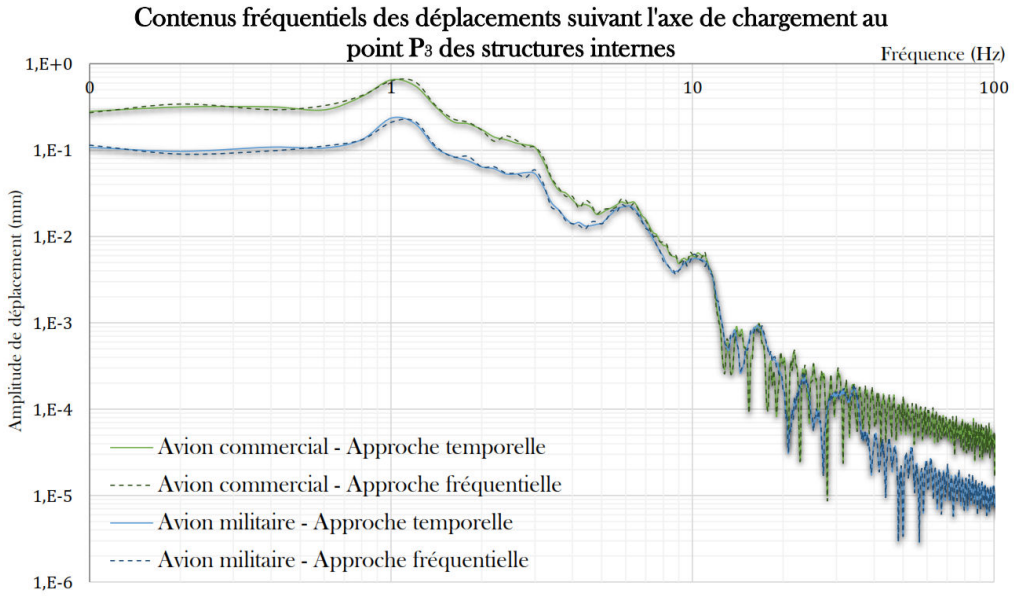


FIGURE 4.36: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe de chargement.

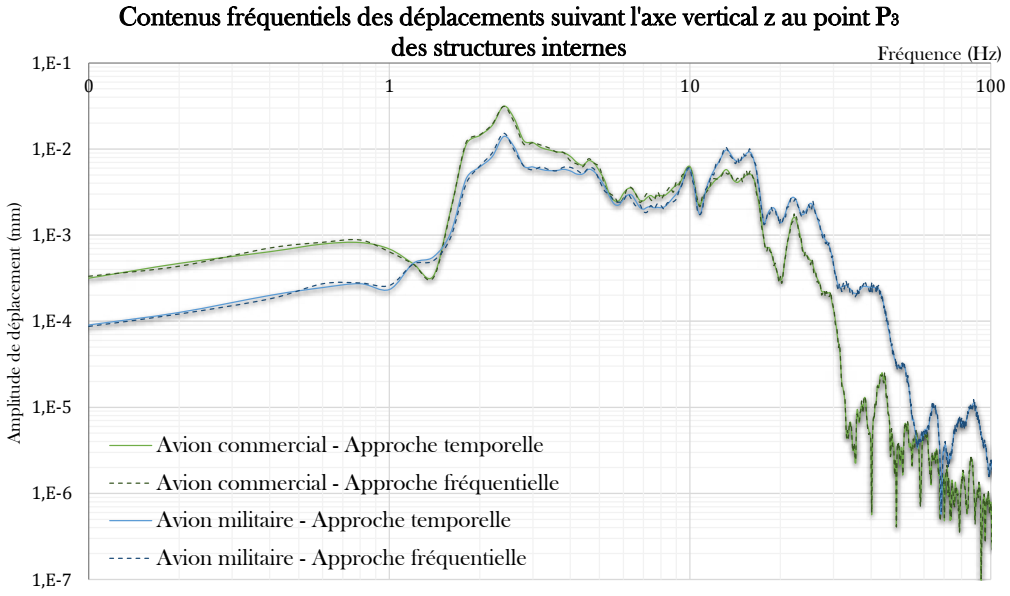


FIGURE 4.37: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe vertical z.

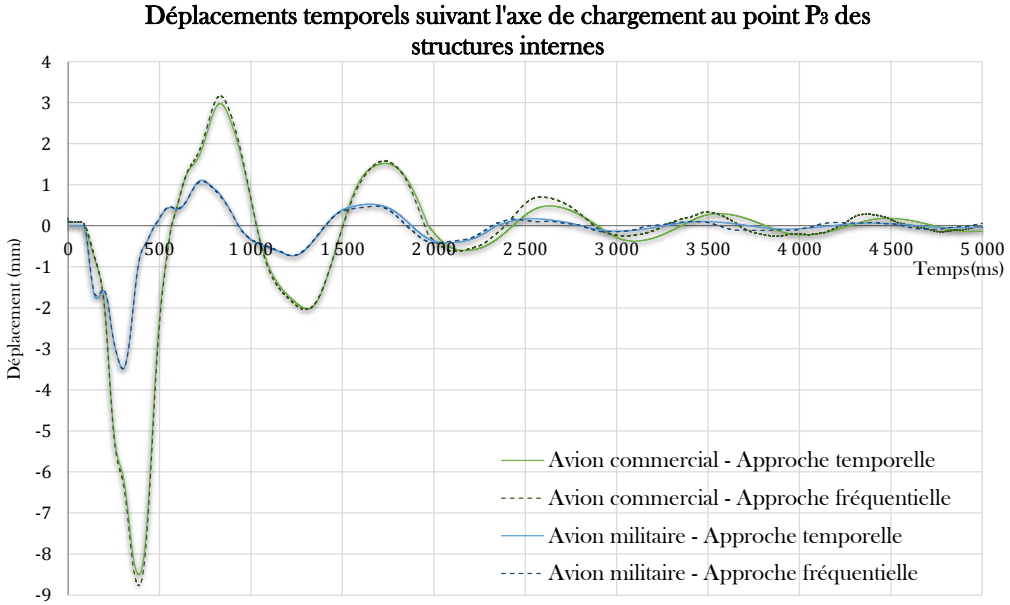


FIGURE 4.38: Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe de chargement.

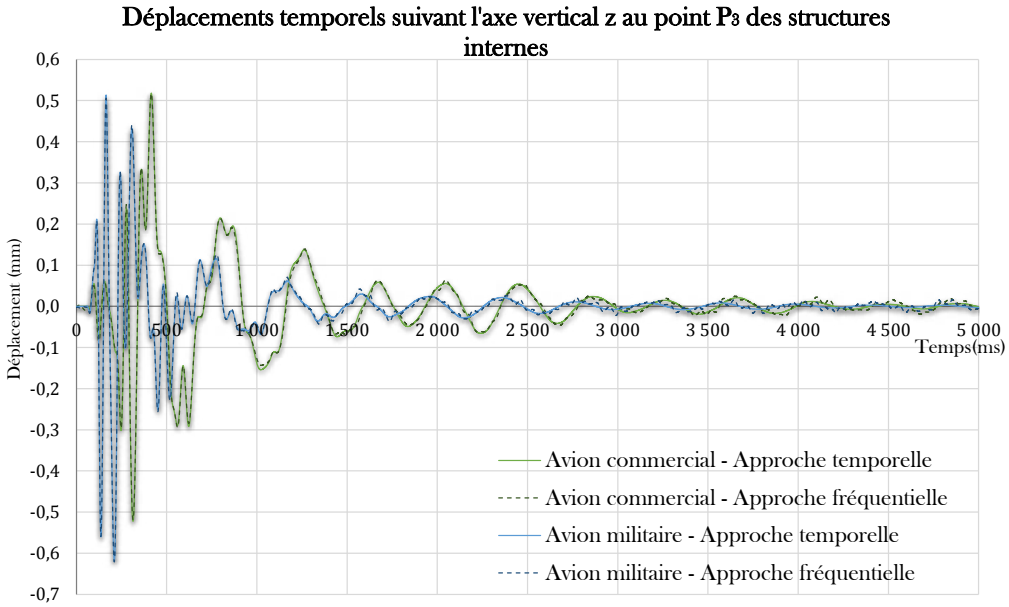


FIGURE 4.39: Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe vertical z.

De ces résultats, on observe la bonne correspondance entre les deux approches pour les deux catégories d'aviation. La figure 4.40 présente l'écart normé moyen pour l'ensemble des points de post-traitement sur le déplacement résultant des deux approches. On peut également remarquer que les amplitudes de déplacement dans le cas de l'avion commercial restent en partie supérieures à celles de l'avion militaire, et en particulier suivant l'axe de chargement. Cette observation est tout de même nuancée par le fait que pour les points P_2 et P_3 les amplitudes fréquentielles de déplacement hors plan suivant l'axe vertical de l'aviation commerciale au delà de 10 Hz sont cette fois-ci moins élevées par rapport à la seconde catégorie. Néanmoins les amplitudes de ce déplacement restent inférieures à $1 * 10^{-2}$ mm.

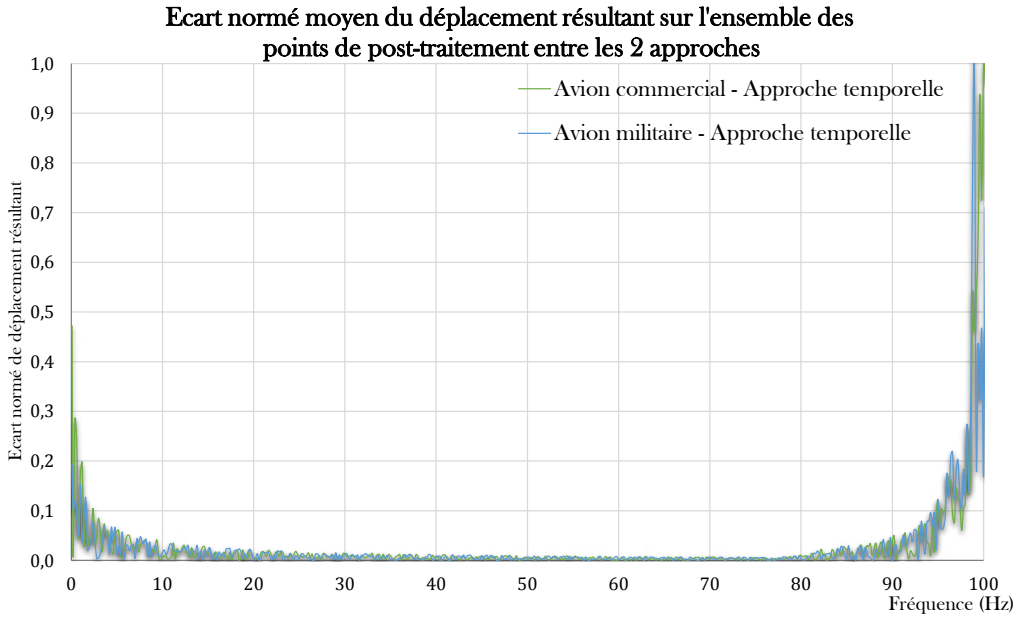


FIGURE 4.40: Ecart normé moyen du déplacement résultant sur l'ensemble des points de post-traitement (P_1, P_2 et P_3) entre les approches temporelle et fréquentielle.

L'écart normé corrobore notre observation de bonne correspondance des résultats entre les deux approches, notamment entre 10 et 90 Hz. Deux zones d'écarts plus importants se distinguent : très basses fréquences (0 - 5 Hz) et dans les 10 derniers pourcents de la plage fréquentielle étudiée. Deux raisons différentes permettent d'expliquer ces erreurs. Pour la plage très basses fréquences, la TVRC présente quelques difficultés pour représenter les solutions de longueurs d'ondes trop importantes se rapprochant de la réponse statique. Les erreurs sur la partie élevée de la plage fréquentielle s'expliquent par la représentation éléments finis qui génère des erreurs de par son nombre d'éléments par longueur d'onde. En effet dans cette plage de fréquence, on commence à atteindre les limites de notre discrétisation éléments finis.

Les figures 4.41, 4.42, 4.43 et 4.44 présentent les spectres de réponse en accélération correspondants pour les trois points d'intérêt, ainsi que les spectres en pseudo déplacement enveloppe. L'amortissement considéré pour ces spectres est de 7 %.

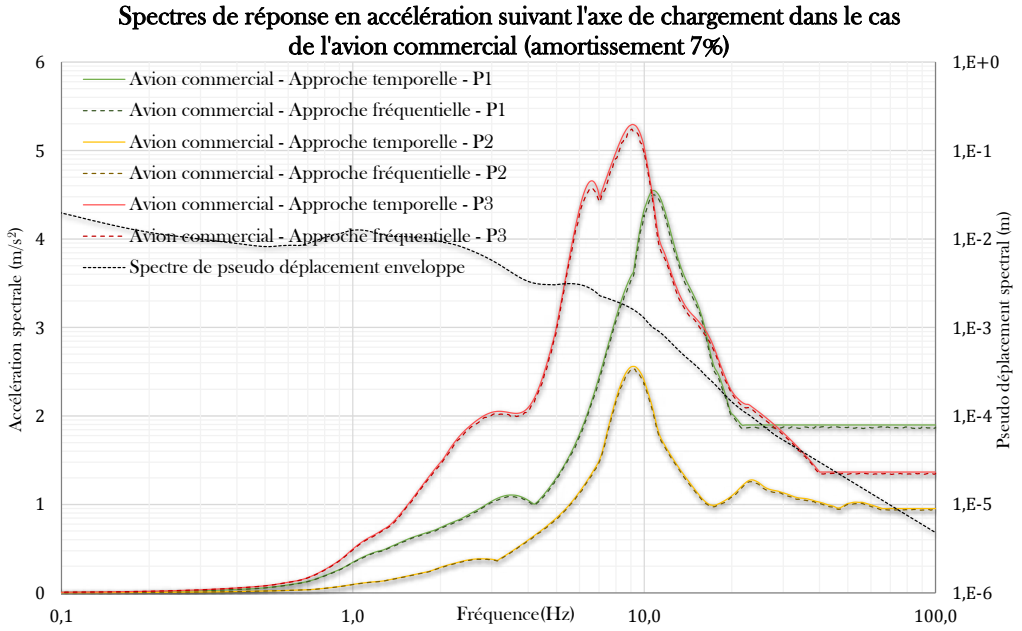


FIGURE 4.41: Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe de chargement dans le cas de l'avion commercial.

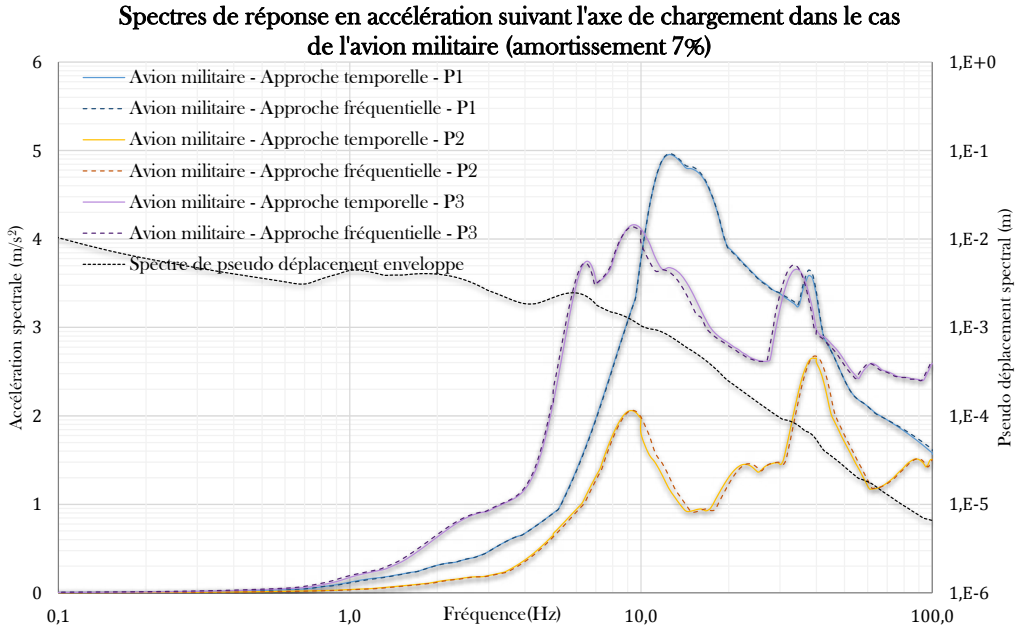


FIGURE 4.42: Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe de chargement dans le cas de l'avion militaire.

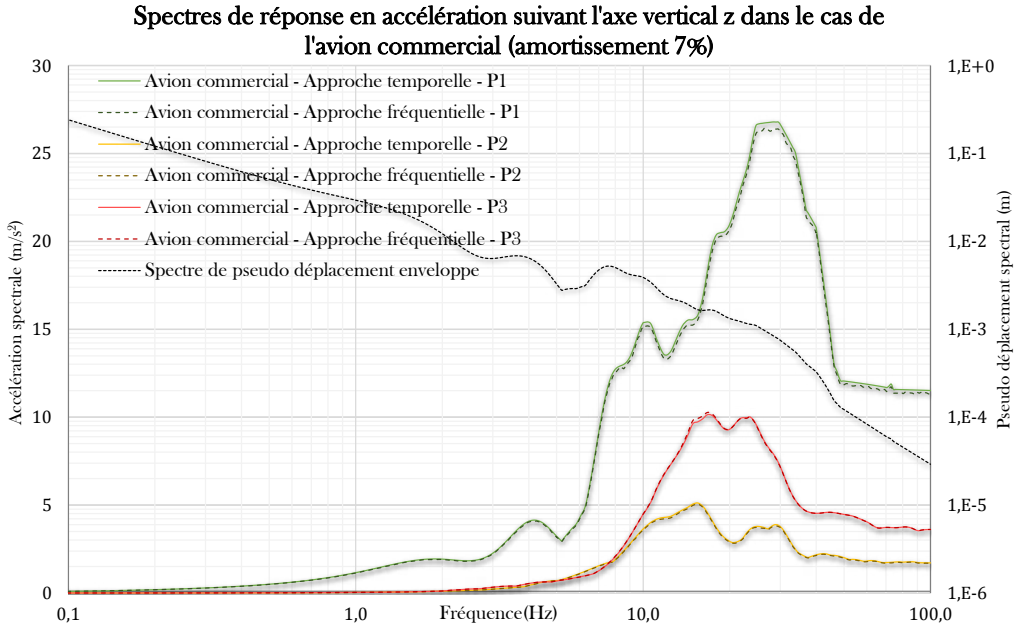


FIGURE 4.43: Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe vertical z dans le cas de l'avion commercial.

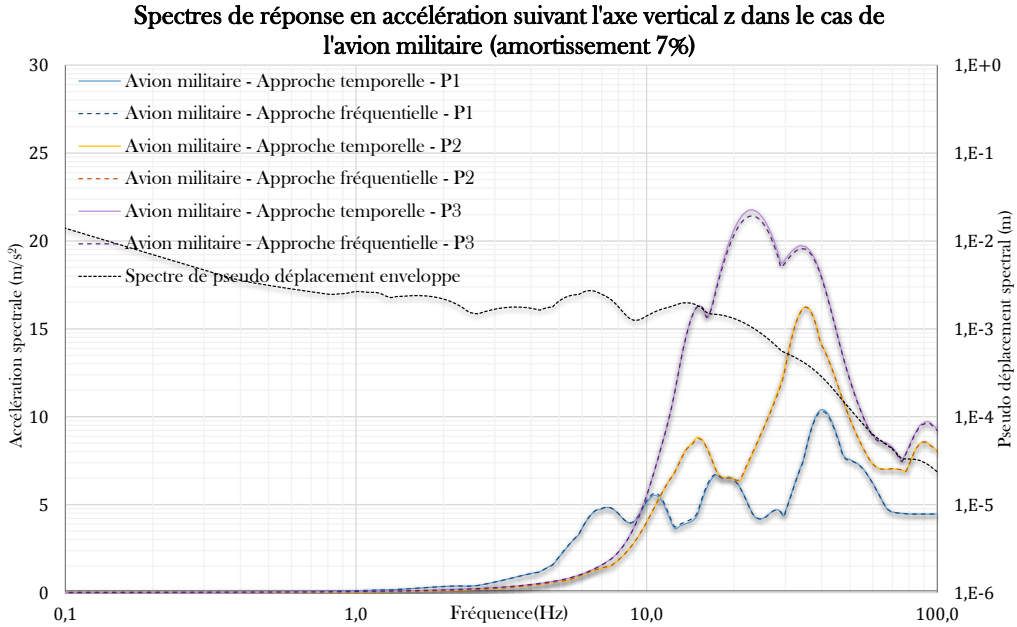


FIGURE 4.44: Spectres de réponse en accélération pour les trois points d'intérêt suivant l'axe vertical z dans le cas de l'avion militaire.

Suivant l'axe de chargement, on peut remarquer que le contenu très basses fréquences ($\leq 10\ Hz$), comme celui de l'avion commercial, est transmis à l'ensemble de la structure.

A l'inverse les accélérations spectrales de moyennes fréquences (comprises entre 10 et 100 Hz) sont en partie filtrées jusqu'aux structures internes. Ces remarques se valident par l'observation des pseudo déplacements spectraux qui deviennent inférieurs à 1 mm à partir de 10 Hz.

Les réponses spectrales suivant l'axe vertical z amènent à des accélérations spectrales en partie filtrées à basses fréquences et transmises à moyennes fréquences. Dans cette direction, le pseudo déplacement spectral associé devient inférieur à 1 mm à partir de 25 - 30 Hz.

4.2.4 Conclusions de l'application de la stratégie à un cas industriel

Nous pouvons donc conclure de ces résultats deux points importants. Premièrement, nous notons que l'approche fréquentielle nous permet de trouver, avec moins de degrés de liberté, des résultats similaires à ceux obtenus dans le cas d'un calcul par éléments finis suffisamment raffiné. Les figures 4.46 et 4.45 montrent les différences de temps de calcul CPU et en nombre de degrés de liberté pour ce problème entre les deux types de résolution. Ces figures permettent de comparer les deux approches en fonction de la fréquence cible étudiée. L'approche temporelle présente les résultats pour différentes densités de maillage. Cette densité doit être suffisante (10 éléments par longueur d'onde) pour représenter correctement la solution.

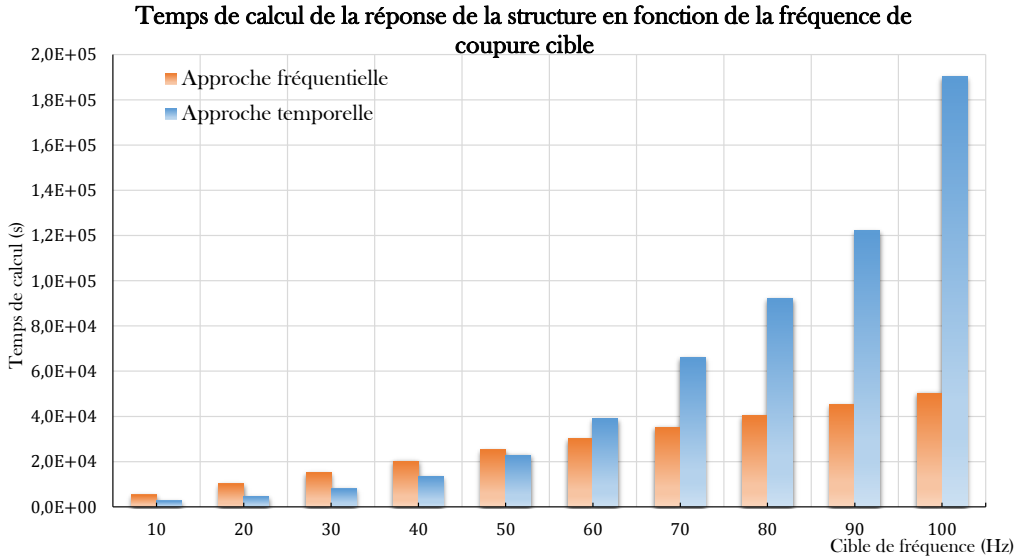


FIGURE 4.45: Comparaison du nombre de dégrés de liberté nécessaires au calcul pour les approches fréquentielle et temporelle.

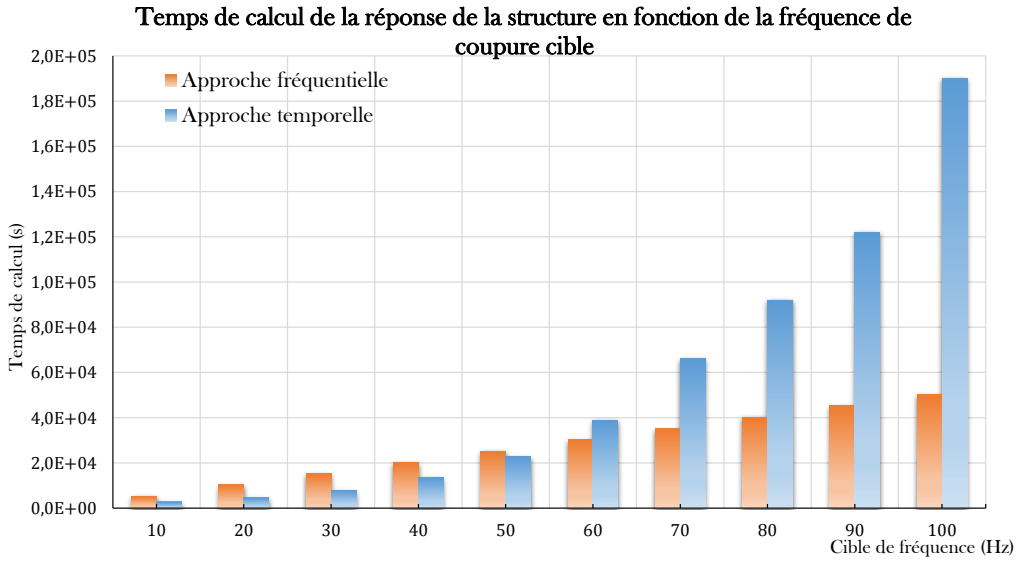


FIGURE 4.46: Comparaison des temps nécessaires de calcul pour les approches fréquentiel et temporel.

On peut conclure de cette comparaison que même si le nombre de degrés de liberté reste plus faible pour l'approche fréquentielle de la TVRC, la résolution de son système complexe et mal conditionné limite son efficacité en basses fréquences (ici jusqu'à 50 Hz) par rapport à une approche éléments finis. Néanmoins dès lors que le nombre de longueurs d'onde à traiter augmente significativement dans la structure, la FEM nécessite un raffinement de maillage de plus en plus élevé agissant directement sur le temps de calcul et devenant rapidement prohibitif. L'approche fréquentielle est donc une méthodologie efficace sur la plage des moyennes fréquences.

Les spectres de réponse ont pu permettre de conclure quant aux différences de vibrations induites par les deux types d'aviation considérés. On peut ainsi remarquer que l'aviation commerciale apporte à basses fréquences des déplacements et des accélérations plus élevés que l'avion militaire qui aura un contenu plus fort en moyennes fréquences. Néanmoins à partir de 30 Hz, les déplacements induits deviennent inférieurs à 1 mm et ne sont ainsi plus considérés comme nocifs pour les équipements ([IAEA, 2012], [Vlaski, 2013] et [Hervé, 2014]).

Conclusions et Perspectives

La sûreté de l'industrie nucléaire est une préoccupation primordiale que l'ensemble des acteurs s'attelle à prendre en compte. La simulation numérique est alors un atout essentiel pour tenir compte des divers risques, qu'il s'agisse d'incidents, d'accidents ou même d'actes malveillants. De là ces méthodes doivent constamment être développées dans l'optique d'être toujours plus fiables, plus robustes et de s'adapter à l'évolution de ces risques. Tel a ainsi été le défi majeur de la thèse dont l'objectif était de développer une stratégie de calcul présentant des coûts de calcul réduits et permettant la simulation des conséquences mécaniques et vibratoires d'un impact d'avion sur une structure industrielle. Un outil de calcul représentant une alternative aux méthodologies a également été implémenté avec l'objectif d'être employé dans un environnement industriel.

Le travail de thèse a consisté dans un premier temps à caractériser, comprendre et analyser les phénomènes se produisant au cours de l'impact d'avion, ainsi que les différentes méthodologies de calcul actuelles (Chapitre 1). Dans un deuxième temps, la stratégie de calcul, la théorie au centre de celle-ci et sa mise en œuvre ont été proposées (Chapitres 2 et 3). Pour clôturer cette étude, l'approche mise en place a été validée sur des exemples simples puis comparée à des méthodes classiques sur un cas industriel (Chapitre 4). Dans notre travail, nous avons ainsi apporté un aspect nouveau sur différents points théoriques et méthodologiques.

Apports scientifiques et méthodologiques

La partie bibliographique a permis de montrer que l'impact d'avion est un chargement faisant intervenir deux phénomènes dans la réponse de la structure impactée. En effet dans la zone de choc, un endommagement localisé peut être observé. Les vibrations engendrées par l'impact se propagent dans le restant de la structure pouvant amener des déplacements et des accélérations non négligeables pour les équipements mécaniques et électriques de l'installation. Dans ce paragraphe, un ensemble de méthodes a été entrevu dans le but de définir une approche plus efficace que celles industriellement utilisées pour le traitement de ces vibrations induites et ainsi pouvoir prendre en compte à faible coût numérique une partie importante du contenu fréquentiel des vibrations transmises. A ce titre, nous avons utilisé une approche couplée temporelle/fréquentielle pour calculer la réponse d'une structure soumise à un impact d'avion, cette approche nous permettant de coupler méthode temporelle éléments finis classique pour la détermination de la zone non-

linéaire endommagée engendrée par l'impact mais également et surtout la prise en compte du large contenu fréquentiel des vibrations induites au travers de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes apparentée aux méthodes de Trefftz qui constitue une technique dédiée et prédictive pour le calcul des vibrations forcées en moyennes fréquences.

Au cours des travaux d'implémentation de la TVRC sous l'environnement Matlab, [Matlab, 1980], de nombreux développements ont été mis en place en partant d'un code développé dans [Kovalevsky, 2011] pour des problématiques en acoustique. Une partie du travail a alors été de reprendre et réunir de nombreux travaux de thèse (plaques, coques cylindriques, déformation membranaire et flexion, interfaces souples) mais également d'y ajouter d'autres extensions (coques sphériques, couplage des déformations, conditions limites de type ressort, formulations variationnelles pour n sous-domaines, orthotropie). Pour corriger le mauvais conditionnement du système à résoudre, une méthode de résolution adaptée à notre problématique et basée sur une approche multi-grille de l'espace d'approximation a été proposée permettant de résoudre des problèmes de grandes tailles à l'instar des structures du génie civil nucléaire. L'analyse multi-fréquentielle au travers des approximants de Padé a également été traitée. Nous avons pu observer son efficacité pour les problème de large bande fréquentielle sur des structures plaques, néanmoins son déploiement aux éléments coques reste en l'état trop coûteux numériquement.

En parallèle de ces implémentations, une étude paramétrique associée à un plan d'expérience a été menée dans le but de déterminer l'influence des paramètres du problème sur la zone non-linéaire. L'orthotropie mise en place dans la TVRC a également été associée à des lois d'homogénéisation dans l'optique d'appliquer notre méthodologie à une structure industrielle du génie civil en béton armé ou précontraint. Et enfin l'accent a été mis sur la démarche pour maîtriser le calcul et ses paramètres au travers de deux exemples de validation.

La stratégie développée permet donc de traiter la chute d'avion dans son intégralité au travers d'une démarche découplée à la fois temporelle mais également fréquentielle. Cette approche est donc efficace mais néanmoins demande une attention au niveau des différentes discrétisations : spatiale en particulier pour la méthode éléments finis afin de représenter les vibrations à faible longueur d'onde, mais aussi temporelle et fréquentielle afin d'assurer une bonne continuité lors du changement de domaine.

L'application de notre stratégie sur un exemple industriel a permis de mettre en évidence son efficacité par rapport à une approche temporelle "classique" aussi bien en termes de coût numérique que de qualité de l'approximation. De par cet exemple, une comparaison des vibrations induites par les différents types d'aviation considérés dans les réglementations a pu être effectuée. Nous avons pu alors remarquer que l'aviation commerciale apporte à basse fréquence des déplacements et des accélérations plus élevés que l'avion militaire qui aura un contenu plus fort en moyennes fréquences. A cette observation peut être ajouté qu'à partir de 30 Hz, les déplacements induits restent inférieurs au seuil de nocivité pour les équipements mécaniques et électriques.

Perspectives

A titre de perspectives à ce travail de thèse, nous pouvons mentionner un certain nombre de points.

A ce stade, la méthodologie est efficace en comparaison aux démarches dites "classiques" sur une gamme de moyennes fréquences, mais reste numériquement plus coûteuse et peut générer des erreurs à basse fréquence. Cet aspect peut ainsi apparaître comme une perspective directe d'amélioration de notre stratégie, pouvant notamment être rendu possible par un raffinement de l'exploration dans l'espace des solutions approchées autour des modes locaux ou globaux de résonance.

Un aspect complémentaire à la stratégie peut également être l'intégration dans l'approche fréquentielle développée de masses rapportées importantes que constituent certains équipements, et les modalités de vérification des couplages locaux éventuels (oscillations de flexion des voiles ou planchers supports et risques de poinçonnement).

Dans le sens de perfectionnement du temps de calcul, la méthode de résolution multigrille mise en place permet une parallélisation de son algorithme. Il serait ainsi intéressant de tirer parti des architectures multi-cœur des processeurs, voire même des cartes graphiques.

En conséquence directe avec l'implémentation d'analyse multi-fréquentielle via les approximants de Padé, des développements complémentaires doivent ainsi être étudiés afin d'adapter efficacement cette approche à l'ensemble des structures et notamment des éléments coques.

Pour continuer le déploiement de la TVRC, une extension aux coques épaisses semble être une étape obligatoire d'autant que les structures du génie civil nucléaire peuvent comprendre des planchers de fortes épaisseurs vis-à-vis de ses deux autres dimensions. L'implémentation de tels éléments peut ainsi amener à tenir compte du cisaillement suivant l'épaisseur.

Une des faiblesses de la stratégie reste le couplage faible entre l'étude temporelle de la zone d'impact et l'étude fréquentielle des vibrations induites. Une amélioration passe donc par la mise en place de critères de choix de l'emplacement du "contour de raccordement" entre ces deux études. Une alternative est de s'affranchir de l'étude non-linéaire éléments finis. En effet jusqu'à présent seules les non-linéarités exprimées dans le domaine fréquentiel telles que l'amortissement sont prises en compte, la structure demeurant linéaire par ailleurs. L'extension aux non-linéarités exprimées dans le domaine temporel, telles que les relations de comportement en visco-plasticité, fait l'objet de futurs développements. Cet aspect pourrait être pris en compte dans le calcul par une démarche itérative actualisant un module d'élasticité fissuré en fonction de la courbure du sous-domaine traité. Une seconde possibilité peut être la mise en place d'abaques module d'élasticité-courbure et amortissement-courbure.

La dernière perspective concerne l'amortissement à prendre en compte dans le cas des problématiques d'impact. Au cours de ces travaux, il a été en effet remarqué un manque dans la littérature sur ce sujet. Cet aspect n'étant que peu développé dans les différentes campagnes d'essais d'impact de projectiles sur des dalles en béton armé, le projet [IRIS,

2015] tente de corriger cela en réservant une partie de son volet expérimental à la caractérisation de l'amortissement des vibrations induites par l'impact d'un projectile sur une structure en béton armé. Ce projet doit également apporter une amélioration de la problématique du fonctionnement sous vibration des ancrages et ainsi de justification physique des fréquences de coupure et du critère de non-nocivité des déplacements induits.

Annexe A

Endommagement de l'avion suite à l'impact

Nous avons vu dans notre état de l'art que les impacts d'avion pouvaient être classés à l'échelle structurelle de chocs dits mous, néanmoins en se plaçant plus localement à l'échelle des éléments constituant l'avion, des chocs durs peuvent intervenir. Dans notre analyse de ce chargement, il est important de comprendre les différents modes d'endommagement de l'avion en lui-même lorsqu'il impacte une structure aussi massive qu'une enceinte nucléaire.

A.1 Philosophie de modélisation

Dans ce paragraphe, l'objectif est définir les différents modes locaux présents dans l'endommagement de l'avion au cours de l'impact. Pour cela, cette analyse vise à découpler le problème mécanique d'impact en deux parties : les corps rigides et les corps déformables. On se place alors dans un cadre où le processus d'impact découle d'une interaction entre une structure suffisamment importante et rigide pour résister à l'impact et un aéronef lancé à une vitesse suffisamment élevée pour déformer ce dernier. Afin de rendre appréhendable ce problème mathématique, certaines hypothèses simplificatrices doivent être faites. Ces hypothèses découplent essentiellement les interactions d'impact et se superposent analytiquement. Tout d'abord, la structure impactée est traitée comme une barrière rigide et l'avion est considéré comme déformable.

L'interaction entre les éléments impactants et impactés est considérée par leurs forces de contact et les amplitudes de celles-ci nécessaires pour déformer instantanément l'un ou l'autre. Le corps nécessitant le moins de force pour son écrasement peut ainsi être traité comme déformable, tandis que l'autre est traité comme rigide. Cette méthode a été utilisée avec succès dans l'analyse d'une collision entre deux navires [Imonsen et Wierzbicki, 1997]. Néanmoins le problème de l'impact d'avion se produit à une vitesse beaucoup plus élevée.

Les premiers vrais "crash tests" d'avions ont été menés par Jerry Lederer à McCook

Field dans l'Ohio en 1924 [Waldock, 1997]. Le plus pertinent pour notre recherche est l'étude initiée par Riera en 1968 pour l'administration fédérale d'aviation [Riera, 1968] concernant l'évaluation de la sécurité de la centrale nucléaire de Three-Mile Island. Des crash-tests à taille réelle ont notamment été réalisés en prenant en compte un chasseur Phantom F-4D [Sugano *et al.*, 1993b] et un transporteur DC-8 [Johnson et Mamalis, 1978]. Plusieurs groupes de recherche ont également continué cet axe de recherche [Abbas *et al.*, 1995] et [Chadmail *et al.*, 1985].

L'un des traits distinctifs de toutes les analyses d'impact d'avion effectuées pour l'industrie nucléaire est que toutes les structures touchées (surtout pour les bâtiments en forme de dôme) ont été renforcées avec près de 1 *m* d'épaisseur de béton. Lors de l'impact, il y aura très peu d'endommagement local du dôme, endommagement pouvant être sous la forme d'écrasement ou d'écaillage et de fissuration de surface du béton. Lors de l'impact sur des structures métalliques de grande hauteur, la situation est néanmoins différente. En effet les poutres, les colonnes et les treillis pourraient alors se déformer plastiquement.

A.2 Endommagement du fuselage

Dans ce paragraphe, l'objectif est de déterminer le ou les différents modes de rupture du fuselage de l'avion lors d'un impact de ce dernier sur une structure suffisamment rigide telle qu'une structure du génie civil nucléaire. L'ensemble de l'appareil sera considéré comme étant composé de trois types de structures : le fuselage déformable, les moteurs rigides et les ailes déformables.

Supposons que la masse par unité de longueur du fuselage est la même pour l'ensemble de l'appareil.

Le fuselage est constitué d'un système d'anneaux et de raidisseurs attachés à une coque métallique. Le plancher séparant la zone des passagers du fret passe légèrement en dessous du diamètre du fuselage. A ce niveau d'analyse d'ingénierie de premier ordre, il n'est pas possible de prendre en compte de la contribution individuelle des anneaux, des raidisseurs et de la peau métallique.

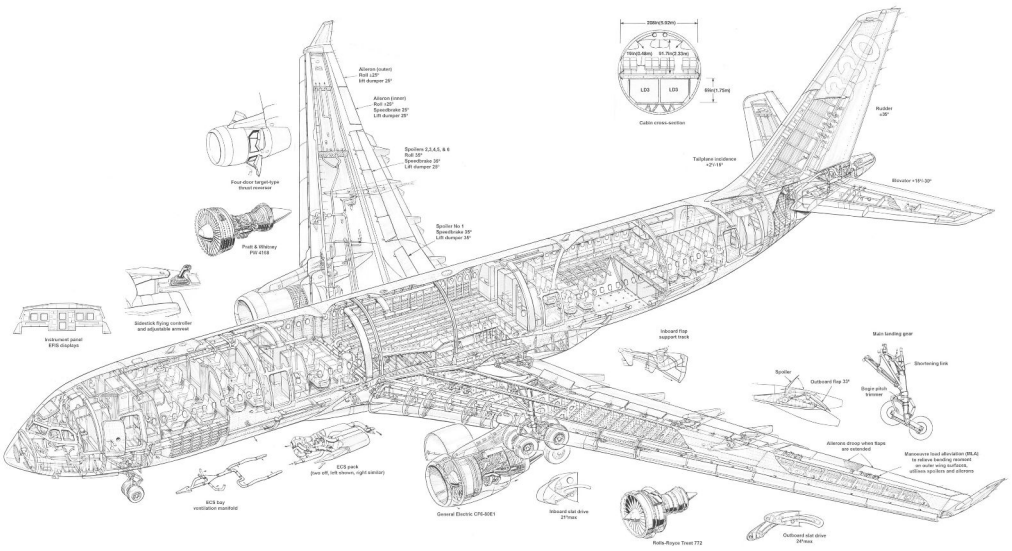


FIGURE A.1: Structure interne d'un Airbus 330 ([Cutler, 1999]).

Ici, ces éléments sont traités en une épaisseur équivalente, qui conserve la même masse que le fuselage réel, et définie dans l'équation A.1 :

$$m = \pi D t_{eq} \rho_{Al} \tag{A.1}$$

avec m la masse du fuselage équivalent par unité de longueur, D le diamètre du fuselage, t_{eq} l'épaisseur du fuselage équivalente et ρ_{Al} la masse volumique de l'alliage d'aluminium composant le fuselage.

L'écrasement quasi-statique d'un tube circulaire uniforme représentant le fuselage a été étudié par des dizaines de chercheurs, dont l'un des auteurs suivants. D'après Wierzbicki et al., [Wierzbicki *et al.*, 1992], l'expression de la force d'écrasement moyenne est donnée par l'équation A.2.

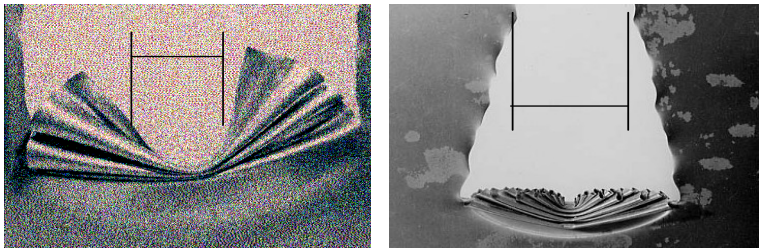
$$P_{fuselage} = 7,9 \sigma_{Al} t_{eq}^{1,5} D^{0,5} \tag{A.2}$$

où σ_{Al} est la limite élastique de l'alliage d'aluminium du fuselage.

En multipliant la force d'écrasement par la longueur totale du fuselage $l_{fuselage}$, l'énergie absorbée par l'écrasement du fuselage est donnée par : $E_{fuselage} = P_{fuselage}.l_{fuselage}$. On montrera par la suite que cette énergie est en faite plus petite.

A ce mode de rupture par écrasement pourrait également être ajouté un second mode de rupture du fuselage dépendant de la nature de la structure impactée. En effet, dans le cas de structure métallique, comme cela aurait pu être le cas dans l'attaque du World Trade Center, les poutres composant le bâtiment sont relativement étroites par rapport au diamètre du fuselage et peuvent ainsi couper celui-ci. Wierzbicki [Wierzbicki, 1995] a établi une solution approchée de la résistance plastique d'un objet contondant coupant une feuille mince, comme la paroi tubulaire du modèle de fuselage. Il a identifié ce que l'on appelle le mode déchirement "en accordéon", qui se compose de deux fentes divergentes

entourant une bande qui se replie progressivement d'avant en arrière. Une photographie de la structure endommagée induite par un poinçon rigide est représentée sur la figure A.2.



(a) Fissures parallèles (b) Fissures divergentes

FIGURE A.2: Modes de déchirures en accordéon d'une feuille de métal par un objet contondant [Wierzbicki *et al.*, 2002].

La force de déchirement moyenne du fuselage par une poutre de largeur w_0 peut être calculée à partir de l'équation A.3.

$$P_{dechirement} = 3\sigma_{Al} t_{eq}^{5/3} w_0^{1/3} \tag{A.3}$$

Les forces décrites ci-dessus sont des forces résultant de l'énergie dissipée dite "visible". Comme l'a souligné Riera [Riera, 1968], une autre contribution importante à la force de contact provient du transfert de quantité de mouvement et est donnée par l'équation A.4 :

$$P_{q.mouvement} = m_f V^2 \tag{A.4}$$

où m représente la masse par unité de longueur de la zone de fuselage déchirée et V est la vitesse instantanée de l'objet impactant.

Cette force doit être comparée avec la force nécessaire à un fuselage "rigide" pour se déchirer à travers une poutre déformable. La valeur la plus faible des deux sera alors prise dans le calcul global de la balance énergétique. Dans le cas où la force de déchirement du fuselage par un ou plusieurs objets est plus petite que la force de déformation des objets par le fuselage, on peut alors calculer l'énergie absorbée dans ce mode de rupture en déchirement en tant que produit de la force de déchirement par la longueur du fuselage.

Il convient de noter que, le fuselage interagissant avec la structure, il est probable que les débris matériau entassés en tête de l'avion élargissent la zone de contact. Par conséquent, il est possible que quelque part au cours de cette phase, la partie arrière de l'avion soit soumise plus à l'écrasement progressif que l'effort de déchirement. Toutefois, le passage d'un mode de défaillance à l'autre est hautement spéculatif.

A.3 Endommagement du moteur et des ailes

Les moteurs sont les seuls composants de l'appareil qui peuvent être considérés approximativement comme des corps rigides. Leur puissance dévastatrice est inégalée jusqu'à ce qu'ils rencontrent un objet de poids et de force similaire. Dans l'étude expérimentale dans laquelle un moteur d'un avion de transport frappe un épais mur de béton, le moteur lui-même a été écrasé et s'est endommagé, il n'est ainsi pas tout à fait rigide, [Sugano *et al.*, 1993a].

Les ailes d'un avion moderne sont des structures très complexes constituées de poutres de section ouverte, de nervures et d'une peau métallique renforcée par des longerons. Ensemble, ils forment une section en forme de boîte très rigide et solide. La détermination de la force de l'aile par rapport à la résistance de la structure nécessite une analyse par éléments finis détaillée. Afin de conserver le degré nécessaire de simplicité, deux modèles ont été mis au point dans [Wierzbicki *et al.*, 2002]. Dans un modèle, les matériaux de l'aile sont localisés sous la forme d'une boîte de type poutre. Dans le deuxième modèle, le rapport de rigidité est déterminé à la fois pour l'aile et la structure et est ensuite comparé.

Le principal élément de la structure de l'aile est le longeron, une poutre continue qui s'étend d'une extrémité de l'aile à l'autre. A des fins de modélisation, nous avons supposé la masse des ailes M_{ailes} sans les moteurs. Cette masse n'inclut pas la masse du carburant dans les réservoirs des ailes. En supposant que cette masse est maintenant distribuée uniformément sur toute la longueur de l'aile et que l'aile est modélisée comme une plaque mince d'épaisseur $t_{eq.ailes}$, l'épaisseur équivalente de l'aile peut être trouvée à partir de l'équation A.5 :

$$M_{ailes} = (10ct_{eq.ailes})L_{ailes}\rho_{Al} \tag{A.5}$$

avec c la hauteur moyenne du longeron et L_{ailes} l'envergure de l'aéronef.

L'interaction entre les ailes et la structure n'ayant pas été analysée dans la littérature avec un degré de précision plus élevé que notre analyse technique approximative, il n'est donc pas possible, à ce stade, de donner un compte rendu détaillé sur cette interaction.

Dans le modèle alternatif, le rapport de rigidité à la fois pour l'aile et la structure impactée est défini par $r = \frac{Masse}{Volume\ structurel}$. A noter que le volume de la structure est défini comme un volume fermé par la périphérie externe et non le volume de matériau. Dans le cas d'une enceinte nucléaire, la rigidité de la structure est beaucoup plus importante que celle des ailes. Dans ce cas, les ailes peuvent ainsi être considérées comme des corps déformables. Cependant le niveau relatif de résistance à l'écrasement ne peut être calculé, mais l'approche de l'énergétique reste toujours valide.

En supposant qu'un mode de broyage semble être le plus réaliste, l'énergie absorbée lors de ce processus est égal à $E_{ailes} = 4\pi M_{pl.ailes} l_{ailes}$, où $M_{pl.ailes}$ est le moment plastique de flexion de l'aile et l_{ailes} est l'envergure estimée de l'aile.

En conclusion, l'énergie d'endommagement induite par la désintégration de l'avion peut être résumée par l'équation A.6.

	Energie pour déchirer le fuselage (=0 dans le cas d'une enceinte en béton armé)	
+	Energie pour écraser le fuselage	(A.6)
+	Energie de broyage de l'aile	
=	Energie totale absorbée par l'avion	

L'avion présente donc dans notre cas deux modes de rupture important : l'écrasement du fuselage et le broyage de l'aile (en sachant que le déchirement du fuselage n'est pas pris en compte ici). Des essais expérimentaux, ont également fait apparaitre que les moteurs, seuls éléments de l'avion pouvant être considérés comme des corps rigides, sont en fait déformables devant la vitesse importante et la rigidité de la structure impactée. Ce dernier permet ainsi d'expliquer le fait qu'à l'échelle globale la chute d'avion peut être considérée comme un choc mou.

Annexe B

Autres méthodologies de calcul de l'effort d'impact

B.1 Méthode de Stevenson

Cette méthode, exposée dans [Stevenson, 1980], repose sur l'étude des restes non endommagés d'un Douglas DC-8 qui a été écrasé sur un mur rigide. Le DC-8 est un avion de ligne quadriréacteur de près de 46 m de long et 43 m d'envergure, moyen et long-courrier, construit dans les années 1960 par Douglas Aircraft Company. Une écriture simplifiée du principe fondamental de la dynamique a pu être posée, de la façon suivante :

$$F(t) = V\frac{\partial V}{\partial x}\left[k(l - x_c r) + m_c\right] \tag{B.1}$$

où les paramètres sont définis dans le tableau B.1.

Paramètres	Sens physique	Unité
V	vitesse de l'avion à l'instant t après l'impact	$m.s^{-1}$
x_{cr}	longueur détruite de l'appareil	m
k	masse par unité de longueur du fuselage	$kg.m^{-1}$
m_c	masse ponctuelle disposée aux ailes incluant les réacteurs	kg
F	force d'impact au niveau du point d'impact	N

TABLE B.1: Paramètres de la méthode de Stevenson.

Après intégration, l'équation (B.1) devient :

$$F(t) = \frac{1}{2}kV_0^2\frac{\frac{V(t)}{V_0}^2 - 1}{log\left(1 - \frac{x_c r(t)}{L + \frac{m_c}{k}}\right)} \tag{B.2}$$

avec V_0 étant la vitesse de l'avion au début de l'impact.

Dans cette méthode, l'avion est idéalisé sous forme d'un modèle 1D, l'impact est alors supposé perpendiculaire à un mur infiniment rigide. Dans cette méthode, la surface d'impact n'est pas prise en compte.

B.2 Méthode de Wolf

Le modèle de Wolf développé par [Ribora *et al.*, 1976], à partir de [Wolf, 1978], est antérieur à celui de Riera. Il idéalise l'avion et la cible à partir d'un système masse-ressort en 1D. En outre la cible n'est plus considérée comme infiniment rigide, mais est représentée par une masse m_t, une raideur k_t et un amortisseur de coefficient c_t. Dans ce modèle, la zone d'impact est définie arbitrairement. Le principe de la méthode d'idéalisation du projectile est présenté en figure B.1. La masse du fuselage est concentrée sur n nœuds. La masse m_w de la partie consacrée aux ailes de l'appareil est ajoutée aux nœuds du fuselage. Les nœuds n_i sont connectés par des ressorts k_i de longueur L_i. Par définition, les ressorts peuvent travailler aussi bien en traction qu'en compression. Néanmoins pour un ressort en contact avec la cible, seul le fonctionnement en compression est autorisé. Lorsqu'une masse s'écrase sur la cible, sa masse vient s'ajouter à celle de la cible et sa raideur associée est retirée. En traction, après avoir atteint un effort seuil R_{yi}, les ressorts deviennent parfaitement plastiques, avec une déformation à rupture ε_i. Lorsque la force de flambage R_{ti} est atteinte, le ressort est autorisé à s'écraser totalement à $\varepsilon_i = -1$. Quand le ressort k_j atteint la valeur de -1, les masses m_j et m_{j+1} s'impactent de manière parfaitement plastique. Ainsi, un nouveau nœud de masse $m_j + m_{j+1}$ se forme. La raideur du ressort k_j associé est alors supprimée.

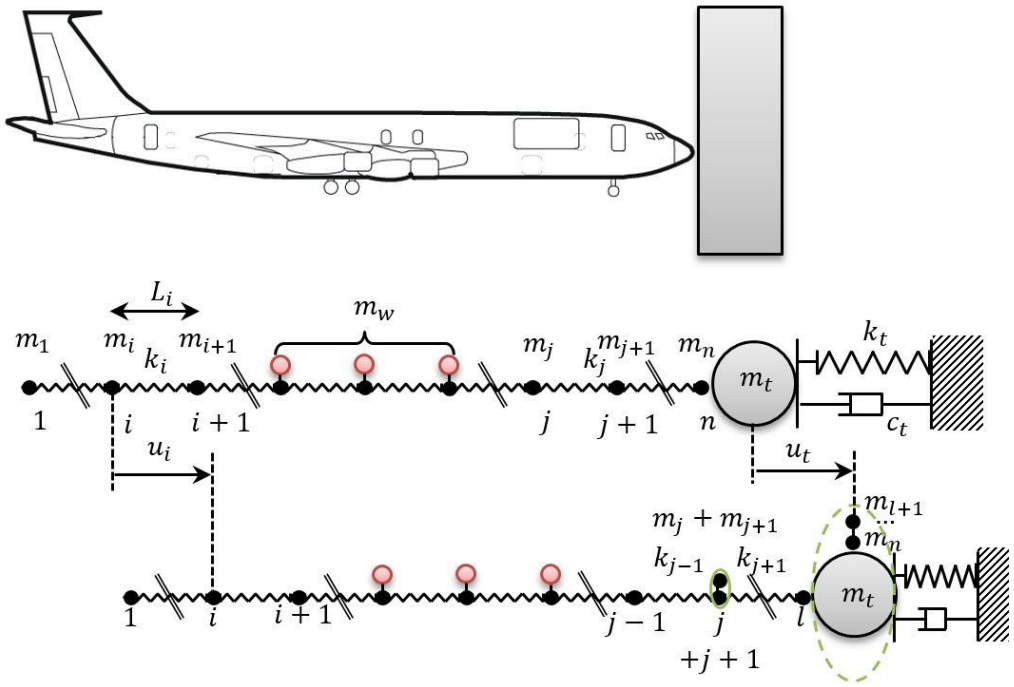


FIGURE B.1: Schéma de principe de la méthode de Wolf.

Pour une cible déformable, comme présentée dans la figure B.1, on peut écrire les relations ci-dessous définissant à l'instar de la méthode de Riera l'effort d'impact $F(t)$ du projectile et l'effort de flambement $R_B(t)$:

$$F(t) = R_B(t) + m(t)\left[\dot{u}_T(t) - \dot{u}_t(t)\right] \tag{B.3}$$

avec

$$R_B(t) = \left[m_T - m_b(t)\right]\ddot{u}_T(t) \tag{B.4}$$

où les paramètres sont définis dans le tableau B.2.

Paramètres	Sens physique	Unité
m_T	masse totale de l'avion	kg
m_b	masse de la portion qui a été écrasée	$kg.m^{-1}$
m	masse par unité de longueur de la partie écrasée près de la cible	$kg.m^{-1}$
$\dot{u}_T$	vitesse de l'avion	$m.s^{-1}$
$\dot{u}_t$	vitesse de la cible	$m.s^{-1}$

TABLE B.2: Paramètres de la méthode de Wolf.

La vitesse de la cible suite à l'écrasement d'une masse m_b est donnée par la relation :

$$\dot{u}_t = \frac{(m_b(t) + m_t)u_i^- + m_t u_i^-}{m_b + 2m_t} \tag{B.5}$$

La figure B.2 présente une comparaison des résultats obtenus avec la méthode de Riera et la méthode de Wolf dans le cas de l'impact d'un bombardier General Dynamics F-111.

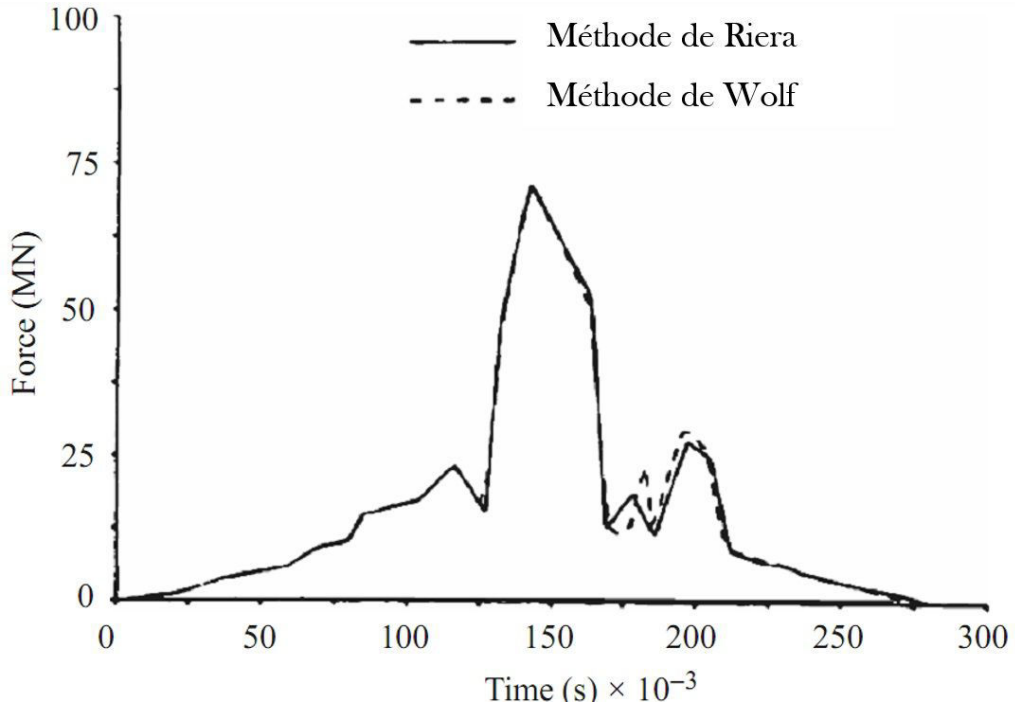


FIGURE B.2: Comparaison entre les résultats obtenus par la méthode de Riera et celle de Wolf [Bangash, 1993].

Annexe C

Unicité de la formulation variationnelle complète

Afin de valider la formulation variationnelle du problème décrite dans le paragraphe 2.2.2, nous démontrons l'unicité de la solution TVRC. Dans la suite nous considérerons que les liaisons sont rigides et donc que les raideurs en translation k_{ti} et en rotation k_{ri} tendent vers l'infini.
Soient deux solutions $s_a = (\underline{u}_a, w_a, K_a, \underline{N}_a, \underline{\underline{M}}_a)$ et $s_b = (\underline{u}_b, w_b, K_b, \underline{N}_b, \underline{\underline{M}}_b)$, par différence on construit :

$$\begin{cases} \overline{w} = w_a - w_b \\ \underline{\overline{u}} = \underline{u}_a - \underline{u}_b \\ \overline{K} = K_a - K_b \\ \underline{\overline{N}} = \underline{N}_a - \underline{N}_b \\ \underline{\underline{\overline{M}}} = \underline{\underline{M}}_a - \underline{\underline{M}}_b \end{cases} \qquad \overline{s} = (\underline{\overline{u}}, \overline{w}, \overline{K}, \underline{\overline{N}}, \underline{\underline{\overline{M}}}) \in \mathcal{S}_{ad,0} \tag{C.1}$$

Par différences des formulations variationnelles, on obtient : $\forall \delta s = (\delta \underline{u}, \delta w, \delta K, \delta \underline{N}, \delta \underline{\underline{M}}) \in \mathcal{S}_{ad,0}$,

$$
\mathcal{R}e\left\{ -i\omega \left[\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_i} \left(\delta \underline{n}_i \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i \underline{n}_i\right).\left(\overline{w}_{i,\underline{n}} + \frac{1}{k_{ri}(1+i\eta_{ri})} \underline{n}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i\right)^* dl \\
-\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_w \Omega_i} \delta K_i.\left(\overline{w}_i - \frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}\overline{K}_i\right)^* dl - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_i} \delta \underline{N}_i.\left(\underline{\overline{u}}_i - \frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}\underline{\overline{N}}_i\right)^* dl \\
+\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{\mathcal{M}}\Omega_i} \left(\underline{n}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i\right).\delta w^*_{i,\underline{n}} dl - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_K \Omega_i} \overline{K}_i.\delta w^*_i dl - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial_{\underline{N}}\Omega_i} \underline{\overline{N}}_i.\delta \underline{u}^*_i dl \\
-\sum_{i=1}^{n} \sum_{\text{coins de } \partial\Omega_i} \left[\left[(\underline{t}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i).\delta w^*_i \right]\right] \\
+\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{n}_i \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i \underline{n}_i\right).\left(\overline{w}_{i,\underline{n}} + \frac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(\underline{n}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{n}_i \underline{\underline{\mathcal{M}}}_i \underline{n}_i\right).\left(\beta_{ij}\overline{w}_{j,\underline{n}} - \frac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(-\beta_{ij}\underline{n}_j \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_j \underline{n}_j\right)\right)^* dl \\
+\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta w_{i,\underline{n}}\right)^*.\left(\underline{n}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i\right) dl + \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta w_{j,\underline{n}}\right)^*.\left(\beta_{ij}\underline{n}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i\right) dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta K_i\right).\left(\overline{w}_i + \frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\overline{K}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta K_i\right).\left(\alpha_{ij}\overline{w}_j - \left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{\overline{u}}_j \underline{n}_j + \frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\alpha_{ij}\overline{K}_j + \left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{\overline{N}}_j \underline{n}_j\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta w_i\right)^*.\left(\overline{K}_i\right) dl - \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta w_i\right)^*.\left(-\alpha_{ij}\overline{K}_j + (1+\alpha_{ij})\underline{\overline{N}}_j \underline{n}_j\right) dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{N}_i \underline{n}_i\right).\left(\underline{\overline{u}}_i \underline{n}_i + \frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\underline{\overline{N}}_i \underline{n}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{N}_i \underline{n}_i\right).\left(\alpha_{ij}\underline{\overline{u}}_j \underline{n}_j - \left(1+\alpha_{ij}\right)\overline{w}_j + \frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\alpha_{ij}\underline{\overline{N}}_j \underline{n}_j + \left(1+\alpha_{ij}\right)\overline{K}_j\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{u}_i \underline{n}_i\right)^*.\left(\underline{\overline{N}}_i \underline{n}_i\right) dl - \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{u}_i \underline{n}_i\right)^*.\left(-\alpha_{ij}\underline{\overline{N}}_j \underline{n}_j + (1+\alpha_{ij})\overline{K}_j\right) dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{N}_i \underline{t}_i\right).\left(\underline{\overline{u}}_i \underline{t}_i + \frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\underline{\overline{N}}_i \underline{t}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{N}_i \underline{t}_i\right).\left(\beta_{ij}\underline{\overline{u}}_j \underline{t}_j + \frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\beta_{ij}\underline{\overline{N}}_j \underline{t}_j\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{u}_i \underline{t}_i\right)^*.\left(\underline{\overline{N}}_i \underline{t}_i\right) dl - \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i\neq j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\delta \underline{u}_i \underline{t}_i\right)^*.\left(-\beta_{ij}\underline{\overline{N}}_j \underline{t}_j\right) dl
\end{array} \right] \right\} = 0
\tag{C.2}
$$

On reprend l'équation C.2 avec $\delta s = \overline{s}$:

$$\mathcal{R}e\left\{-i\omega\left[\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_i}\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\left(\overline{w}_{i,\underline{n}}+\frac{1}{k_{ri}(1+i\eta_{ri})}\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right)^* dl \\
-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_w\Omega_i}\overline{K}_i.\left(\overline{w}_i-\frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}\overline{K}_i\right)^* dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_i}\underline{\overline{N}}_i.\left(\underline{\overline{u}}_i-\frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}\underline{\overline{N}}_i\right)^* dl \\
+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\mathcal{M}}\Omega_i}\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\overline{w}^*_{i,\underline{n}}dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_K\Omega_i}\overline{K}_i.\overline{w}^*_i dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{N}}\Omega_i}\underline{\overline{N}}_i.\underline{\overline{u}}^*_i dl \\
-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[\left[(\underline{t}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i).\overline{w}^*_i\right]\right] \\
+\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\left(\overline{w}_{i,\underline{n}}+\frac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\left(\beta_{ij}\overline{w}_{j,\underline{n}}-\frac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(-\beta_{ij}\underline{n}_j\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_j\underline{n}_j\right)\right)^* dl \\
+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{w}_{i,\underline{n}}\right)^*.\left(\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right)dl+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{w}_{j,\underline{n}}\right)^*.\left(\beta_{ij}\underline{n}_i\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right)dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{K}_i\right).\left(\overline{w}_i+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\overline{K}_i)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{K}_i\right).\left(\alpha_{ij}\overline{w}_j-\left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{\overline{u}}_j\underline{n}_j+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\alpha_{ij}\overline{K}_j+\left(1+\alpha_{ij}\right)\underline{\overline{N}}_j\underline{n}_j)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{w}_i\right)^*.\left(\overline{K}_i\right)dl-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{w}_i\right)^*.\left(-\alpha_{ij}\overline{K}_j+(1+\alpha_{ij})\underline{\overline{N}}_j\underline{n}_j\right)dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{N}}_i\underline{n}_i\right).\left(\underline{\overline{u}}_i\underline{n}_i+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\underline{\overline{N}}_i\underline{n}_i)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{N}}_i\underline{n}_i\right).\left(\alpha_{ij}\underline{\overline{u}}_j\underline{n}_j-\left(1+\alpha_{ij}\right)\overline{w}_j+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}(-\alpha_{ij}\underline{\overline{N}}_j\underline{n}_j+\left(1+\alpha_{ij}\right)\overline{K}_j)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{u}}_i\underline{n}_i\right)^*.\left(\underline{\overline{N}}_i\underline{n}_i\right)dl-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{u}}_i\underline{n}_i\right)^*.\left(-\alpha_{ij}\underline{\overline{N}}_j\underline{n}_j+(1+\alpha_{ij})\overline{K}_j\right)dl \\
-\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{N}}_i\underline{t}_i\right).\left(\underline{\overline{u}}_i\underline{t}_i+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\underline{\overline{N}}_i\underline{t}_i\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{N}}_i\underline{t}_i\right).\left(\beta_{ij}\underline{\overline{u}}_j\underline{t}_j+\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(-\beta_{ij}\underline{\overline{N}}_j\underline{t}_j\right)\right)^* dl \\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{u}}_i\underline{t}_i\right)^*.\left(\underline{\overline{N}}_i\underline{t}_i\right)dl-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{\overline{u}}_i\underline{t}_i\right)^*.\left(-\beta_{ij}\underline{\overline{N}}_j\underline{t}_j\right)dl
\end{array}\right]\right\}=0 \tag{C.3}$$

On peut alors réécrire l'équation C.3 sous la forme suivante :

$$\mathcal{R}e\left\{-i\omega\left[\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_i}\left(\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\overline{w}_{i,\underline{n}}{}^{*}dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_w\Omega_i}\overline{K}_i.\overline{w}_i{}^{*}dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_i}\overline{\underline{N}}_i.\overline{\underline{u}}_i{}^{*}dl\\
+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\mathcal{M}}\Omega_i}\left(\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\overline{w}^{*}_{i,\underline{n}}dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_K\Omega_i}\overline{K}_i.\overline{w}^{*}_i dl-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{N}}\Omega_i}\overline{\underline{N}}_i.\overline{\underline{u}}^{*}_i dl\\
\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_i}\left(\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\left(\frac{1}{k_{ri}(1+i\eta_{ri})}\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right)^{*}dl\\
+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_w\Omega_i}\overline{K}_i.\left(\frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}\overline{K}_i\right)^{*}dl+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_i}\overline{\underline{N}}_i.\left(\frac{1}{k_{ti}(1+i\eta_{ti})}\overline{\underline{N}}_i\right)^{*}dl\\
-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[\left[(\underline{t}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i).\overline{w}^{*}_i\right]\right]\\
+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\overline{w}_{i,\underline{n}}{}^{*}dl\\
-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{K}_i\right).\overline{w}_i{}^{*}dl\\
-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{\underline{N}}_i\right).\overline{\underline{u}}_i{}^{*}dl\\
+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\left(\frac{1}{k_{rij}\left(1+i\eta_{rij}\right)}\left(\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i-\beta_{ij}\underline{n}_j\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_j\underline{n}_j\right)\right)^{*}dl\\
+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{K}_i\right).\left(\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(\overline{K}_i+\alpha_{ij}\overline{K}_j\right)\right)^{*}dl\\
+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{\underline{N}}_i\underline{n}_i\right).\left(\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(\overline{\underline{N}}_i\underline{n}_i+\alpha_{ij}\overline{\underline{N}}_j\underline{n}_j\right)\right)^{*}dl\\
-\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{K}_i+\left(1+\alpha_{ij}\right)\overline{K}_j\right).\left(\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(\overline{K}_i+\left(1+\alpha_{ij}\right)\overline{K}_j\right)\right)^{*}dl\\
+\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\int_{\Gamma_{ij}}\left(\overline{\underline{N}}_i\underline{t}_i\right).\left(\frac{1}{k_{tij}\left(1+i\eta_{tij}\right)}\left(\overline{\underline{N}}_i\underline{t}_i+\beta_{ij}\overline{\underline{N}}_j\underline{t}_j\right)\right)^{*}dl
\end{array}\right]\right\}=0 \tag{C.4}$$

On suppose que le problème est bien posé :

$$\left\{\begin{array}{l}
\partial_{w,\underline{n}}\Omega_i\cup\partial_{\mathcal{M}}\Omega_i\cup\Gamma_{ij}=\partial\Omega_i\\
\partial_w\Omega_i\cup\partial_K\Omega_i\cup\Gamma_{ij}=\partial\Omega_i\\
\partial_{\underline{u}}\Omega_i\cup\partial_{\underline{N}}\Omega_i\cup\Gamma_{ij}=\partial\Omega_i
\end{array}\right. \tag{C.5}$$

L'équation C.4 devient, en considérant des liaisons infiniment rigides en rotation et translation, soit k_{tij}, k_{rij}, k_{ti} et k_{ri} tendant vers l'infini :

$$\mathcal{R}e\left\{-i\omega\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}
\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{n}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right).\overline{w}_{i,\underline{n}}{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\overline{K}_i.\overline{w}_i{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\overline{\underline{N}}_i.\overline{\underline{u}}_i{}^{*}dl\\
-\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[(\underline{t}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i).\overline{w}^{*}_i\right]
\end{array}\right]\right\}=0 \tag{C.6}$$

Par définition, on a : $K_i=\underline{n}_i.\underline{\underline{div}}\,\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i+\left(\underline{t}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i\right)_{,t}$ et $\underline{N}_i=\overline{\underline{\underline{N}}}_i\underline{n}_i-\overline{\underline{\underline{B}}}_i\overline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}_i\underline{n}_i$, ce qui donne :

$$\mathcal{R}e\left\{-i\omega\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{n_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}\right).\overline{w}_{i,\underline{n}}{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\underline{n_i}.\underline{div}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}.\overline{w}_i{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}\right)_{,t}.\overline{w}_i{}^{*}dl\\ -\int_{\partial\Omega_i}\underline{\underline{N}_i}\underline{n_i}.\underline{\overline{u}_i}{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}-\underline{\underline{B_i}}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}.\underline{\overline{u}_i}{}^{*}dl\\ -\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}).\overline{w}_i^{*}\right]\end{array}\right]\right\}=0 \tag{C.7}$$

On a :

$$\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\underline{n}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{grad}\overline{w}^{*}=\underline{n}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\left[\underline{n}\left(\underline{grad}\overline{w}^{*}.\underline{n}\right)+\underline{t}\left(\underline{grad}\overline{w}^{*}.\underline{t}\right)\right]=\underline{n}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}_{,n}+\underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}_{,t}\\ \underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}_{,t}=\left(\underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}\right)_{,t}-\left(\underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\right)_{,t}\overline{w}^{*}\end{array}\right.\\ \Rightarrow\underline{n}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{grad}\overline{w}^{*}=\underline{n}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}_{,n}+\left(\underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}\right)_{,t}-\left(\underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\right)_{,t}\overline{w}^{*}\\ \Rightarrow\underline{n}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{grad}\overline{w}^{*}-\left(\underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}\right)_{,t}=\underline{n}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\overline{w}^{*}_{,n}-\left(\underline{t}\underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}\right)_{,t}\overline{w}^{*}\\ \Rightarrow\int_{\partial\Omega_i}\underline{n_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{grad}\overline{w}_i^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}\overline{w}_i^{*}\right)_{,t}dl=\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{n_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}\right)_{,t}\overline{w}^{*}_{i,n}dl-\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}\right)_{,t}\overline{w}_i^{*}dl\end{array} \tag{C.8}$$

avec [Arnaud, 2000], on a :

$$\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}.\overline{w_i}^{*}\right)_{,t}dl=-\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}).\overline{w}_i^{*}\right] \tag{C.9}$$

On obtient donc au final :

$$\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{n_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}\right).\overline{w}_{i,\underline{n}}{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\left(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}\right)_{,t}.\overline{w_i}{}^{*}dl=\int_{\partial\Omega_i}\underline{n_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{grad}\overline{w_i}{}^{*}dl+\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}).\overline{w}_i^{*}\right] \tag{C.10}$$

De plus, en utilisant l'identité vectorielle :

$$\int_{\Omega_i}Tr\left[\underline{\underline{N}_i}\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\overline{u}_i^{*}})\right]d\Omega_i=\int_{\partial\Omega_i}\underline{\underline{N}_i}\underline{n_i}.\underline{\overline{u}_i^{*}}dl-\int_{\Omega_i}div\left[\underline{\underline{N}_i}\right]\underline{\overline{u}_i^{*}}d\Omega_i \tag{C.11}$$

L'équation C.7 devient :

$$\begin{array}{l}\mathcal{R}e\left\{-i\omega\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}-\int_{\partial\Omega_i}\underline{n_i}.\underline{div}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}.\overline{w_i}{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\underline{n_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{grad}\overline{w_i}{}^{*}dl\\ +\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}).\overline{w}_i^{*}\right]\\ -\int_{\Omega_i}Tr\left[\underline{\underline{N}_i}\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\overline{u}_i^{*}})\right]d\Omega_i-\int_{\Omega_i}div\left[\underline{\underline{N}_i}\right]\underline{\overline{u}_i^{*}}d\Omega_i-\int_{\partial\Omega_i}-\underline{\underline{B_i}}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}.\underline{\overline{u}_i}{}^{*}dl\\ -\sum_{\text{coins de }\partial\Omega_i}\left[(\underline{t_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}).\overline{w}_i^{*}\right]\end{array}\right]\right\}=0\\ \Rightarrow\mathcal{R}e\left\{-i\omega\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}-\int_{\partial\Omega_i}\underline{n_i}.\underline{div}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}.\overline{w_i}{}^{*}dl-\int_{\partial\Omega_i}\underline{n_i}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{grad}\overline{w_i}{}^{*}dl\\ -\int_{\Omega_i}Tr\left[\underline{\underline{N}_i}\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\overline{u}_i^{*}})\right]d\Omega_i-\int_{\Omega_i}div\left[\underline{\underline{N}_i}\right]\underline{\overline{u}_i^{*}}d\Omega_i-\int_{\partial\Omega_i}-\underline{\underline{B_i}}\underline{\underline{\mathcal{M}}_i}\underline{n_i}.\underline{\overline{u}_i}{}^{*}dl\end{array}\right]\right\}=0\end{array} \tag{C.12}$$

La théorie de la divergence permet d'écrire :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_i} \underline{n}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^* dl = \int_{\Omega_i} div\left[\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^*\right] d\Omega_i \\ \int_{\partial\Omega_i} \underline{n}_i . \underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \overline{w}_i{}^* dl = \int_{\Omega_i} div\left[\underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \overline{w}_i{}^*\right] d\Omega_i \\ \int_{\partial\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i . \overline{\underline{u}}_i{}^* dl = \int_{\Omega_i} -div\left[\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \overline{\underline{u}}_i{}^*\right] d\Omega_i \end{cases} \tag{C.13}$$

On a également :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_i} div\left[\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^*\right] d\Omega_i = \int_{\Omega_i} div\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^* d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i : \underline{\underline{grad\,grad}}\,\overline{w}_i{}^* d\Omega_i \\ \int_{\Omega_i} div\left[\underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \overline{w}_i{}^*\right] d\Omega_i = \int_{\Omega_i} div\left[\underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right] \overline{w}_i{}^* d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^* d\Omega_i \\ \int_{\Omega_i} -div\left[\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \overline{\underline{u}}_i{}^*\right] d\Omega_i = \int_{\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i div\left[\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right] \overline{\underline{u}}_i{}^* d\Omega_i + \int_{\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,[\overline{\underline{u}}_i{}^*] d\Omega_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{\partial\Omega_i} \underline{n}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^* dl = \int_{\Omega_i} div\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^* d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i : \underline{\underline{grad\,grad}}\,\overline{w}_i{}^* d\Omega_i \\ \int_{\partial\Omega_i} \underline{n}_i \underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \overline{w}_i{}^* dl = \int_{\Omega_i} div\left[\underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right] \overline{w}_i{}^* d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i . \underline{grad}\,\overline{w}_i{}^* d\Omega_i \\ \int_{\partial\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{n}_i . \overline{\underline{u}}_i{}^* dl = \int_{\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i div\left[\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right] \overline{\underline{u}}_i{}^* d\Omega_i + \int_{\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,[\overline{\underline{u}}_i{}^*] d\Omega_i \end{cases} \tag{C.14}$$

L'équation C.12 devient :

$$\mathcal{R}e\left\{ -i\omega \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \int_{\Omega_i} \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i : \underline{\underline{grad\,grad}}\,\overline{w}_i{}^* d\Omega_i - \int_{\Omega_i} div\left[\underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right] \overline{w}_i{}^* d\Omega_i \\ -\int_{\Omega_i} Tr\left[\underline{\underline{\overline{N}}}_i \underline{\underline{\gamma}}(\overline{\underline{u}}_i^*)\right] d\Omega_i - \int_{\Omega_i} div\left[\underline{\underline{\overline{N}}}_i\right] \overline{\underline{u}}_i^* d\Omega_i \\ -\int_{\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i div\left[\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right] \overline{\underline{u}}_i{}^* d\Omega_i - \int_{\Omega_i} -\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i \underline{grad}\,[\overline{\underline{u}}_i{}^*] d\Omega_i \end{bmatrix} \right\} = 0 \tag{C.15}$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i = \frac{h_i{}^3}{12}(1+i\eta_i) \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i} : \underline{\underline{\mathcal{X}}}(\overline{w}_i) \\ \underline{\underline{\overline{N}}}_i = h_i(1+i\eta_i) \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i} : \underline{\underline{\gamma}}(\overline{\underline{u}}_i) \\ \underline{\underline{\mathcal{X}}}(\overline{w}_i) = -\underline{\underline{grad\,grad}}\,\overline{w}_i - \left[\underline{\underline{B}} \underline{\underline{\gamma}}(\overline{\underline{u}}_i)\right]_{sym} \\ \underline{div}\,\underline{\underline{\overline{N}}}_i - \underline{\underline{B}}_i \left(\underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right) = -\rho_i \omega^2 h_i \overline{\underline{u}}_i \\ div\left(\underline{div}\,\underline{\underline{\overline{\mathcal{M}}}}_i\right) + Tr\left(\underline{\underline{\overline{N}}}_i . \underline{\underline{B}}_i\right) = -\rho_i \omega^2 h_i \overline{w}_i \end{cases} \tag{C.16}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_{CP_i} = (1+i\eta_i) \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i}$ et η_i est l'amortissement structural du sous-domaine associé.
On introduit alors C.16 dans C.15 :

$$\mathcal{R}e\left\{ -i\omega \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} -\int_{\Omega_i} \frac{h_i{}^3}{12}(1+i\eta_i) \underline{\underline{\mathcal{X}}}(\overline{w}_i) : \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i} : \underline{\underline{\mathcal{X}}}(\overline{w}_i^*) d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \rho_i \omega^2 h_i \overline{w}_i . \overline{w}_i{}^* d\Omega_i \\ -\int_{\Omega_i} h_i(1+i\eta_i) \underline{\underline{\gamma}}(\overline{\underline{u}}_i{}^*) : \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i} : \underline{\underline{\gamma}}(\underline{u}_i) d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \rho_i \omega^2 h_i \overline{\underline{u}}_i \overline{\underline{u}}_i{}^* d\Omega_i \end{bmatrix} \right\} = 0 \tag{C.17}$$

Or $\int_{\Omega_i} \rho_i \omega^2 h_i \overline{w}_i . \overline{w}_i{}^* d\Omega_i$ et $\int_{\Omega_i} \rho_i \omega^2 h_i \underline{\overline{u}}_i \underline{\overline{u}}_i{}^* d\Omega_i$ sont réels.
L'équation C.17 devient donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} -\omega \frac{h_i{}^3}{12} \eta_i \int_{\Omega_i} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{X}}}}}(\overline{w}_i) : \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{X}}}}}(\overline{w}_i^*) d\Omega_i \\ -\omega h_i \eta_i \int_{\Omega_i} \underline{\underline{\gamma}}(\underline{\overline{u}}_i) : \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i} : \underline{\underline{\gamma}}(\underline{\overline{u}}_i^*) d\Omega_i \end{bmatrix} = 0 \tag{C.18}$$

L'amortissement structural η_i de chaque sous-domaine étant strictement positif ($\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{0i}$ défini positif) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{X}}}}}(\overline{w}_i) = 0 \quad &\Rightarrow \begin{cases} \overline{\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{M}}}}}}_i = 0 \\ \overline{w}_i = 0 \end{cases} \\ \underline{\underline{\gamma}}(\underline{\overline{u}}_i) = 0 \quad &\Rightarrow \begin{cases} \overline{\underline{\underline{N}}}_i = 0 \\ \underline{\overline{u}}_i = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{C.19}$$

Les mouvements de corps rigide sont bloqués puisque l'on est en vibration ($\omega > 0$). On peut noter que dans le cas de liaison souple en translation et rotation, l'unicité de la solution est vérifiée dans les cas suivants : $\forall\, i = 1, \ldots, n$ et $\forall\, j \neq i$

$$\begin{cases} \eta_i > 0 \\ k_{ri} \eta_{ri} \geq 0 \\ k_{ti} \eta_{ti} \geq 0 \\ k_{rij} \eta_{rij} \geq 0 \\ k_{tij} \eta_{tij} \geq 0 \end{cases} \tag{C.20}$$

Annexe D

Récapitulatif des résultats de l'application au cas industriel

Dans le paragraphe 4.2, l'étude d'un cas industriel de chute d'avion a été développée. Cette étude nous a permis de confronter les résultats obtenus par une approche temporelle et industrielle éléments finis avec ceux relevés par notre stratégie fréquentielle au travers de la TVRC. Cette annexe récapitule les résultats fréquentiels et temporels acquis au niveau des points P_1, P_2 et P_3 mis en évidence sur la structure étudiée dans la figure D.1.

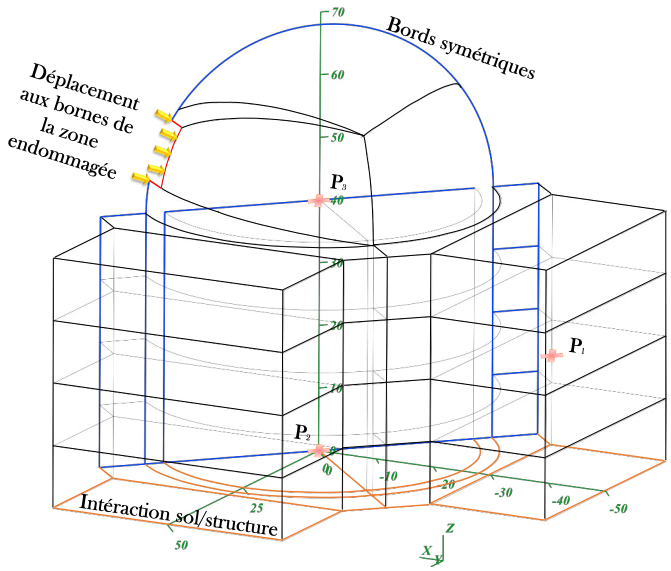


FIGURE D.1: Géométrie de la partie linéaire de la structure étudiée et emplacement des points d'intérêts.

Les figures D.2, D.3, D.4, D.5, D.6 et D.7 présentent les résultats en termes d'amplitudes du contenu fréquentiel pour chacune des deux aviations au niveau des trois points d'intérêts.

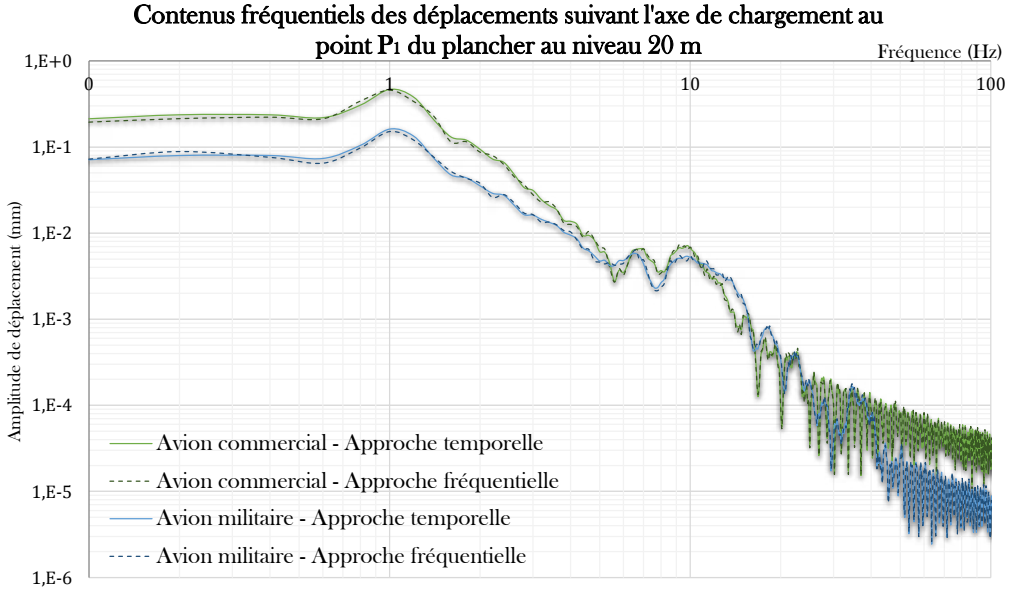


FIGURE D.2: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_1 suivant l'axe de chargement.

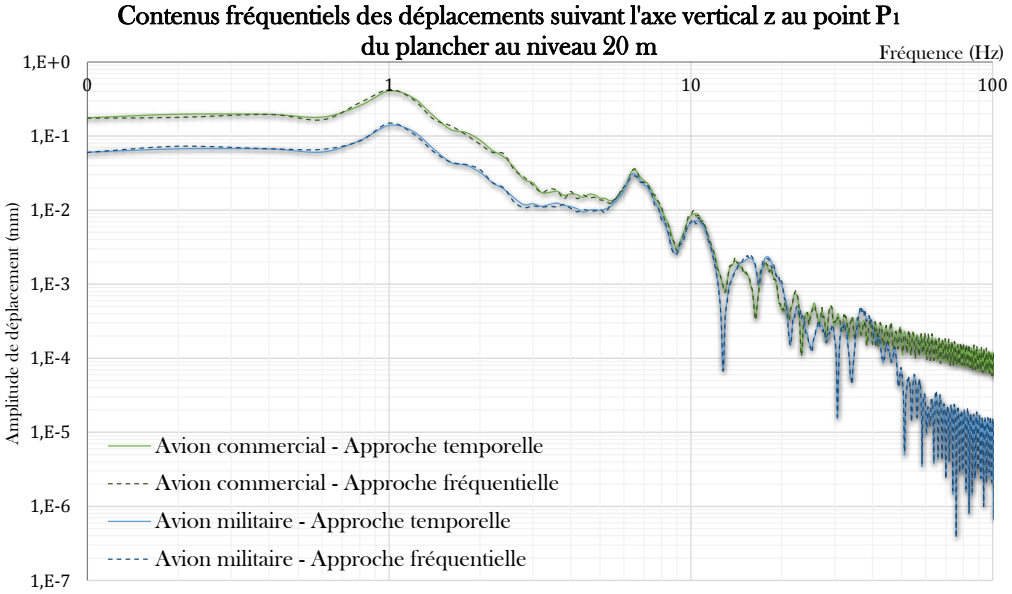


FIGURE D.3: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_1 suivant l'axe vertical z.

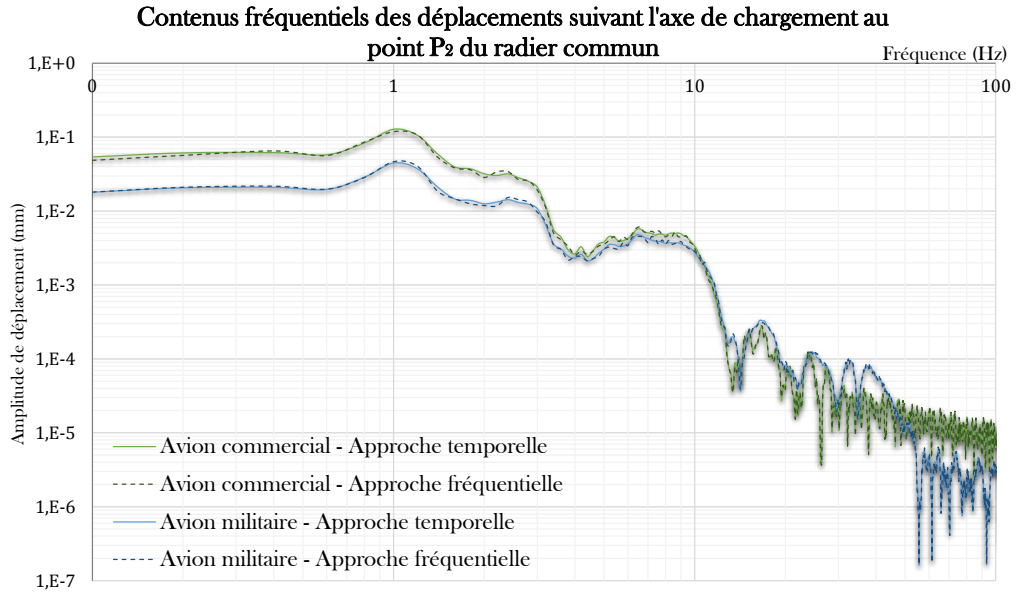


FIGURE D.4: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_2 suivant l'axe de chargement.

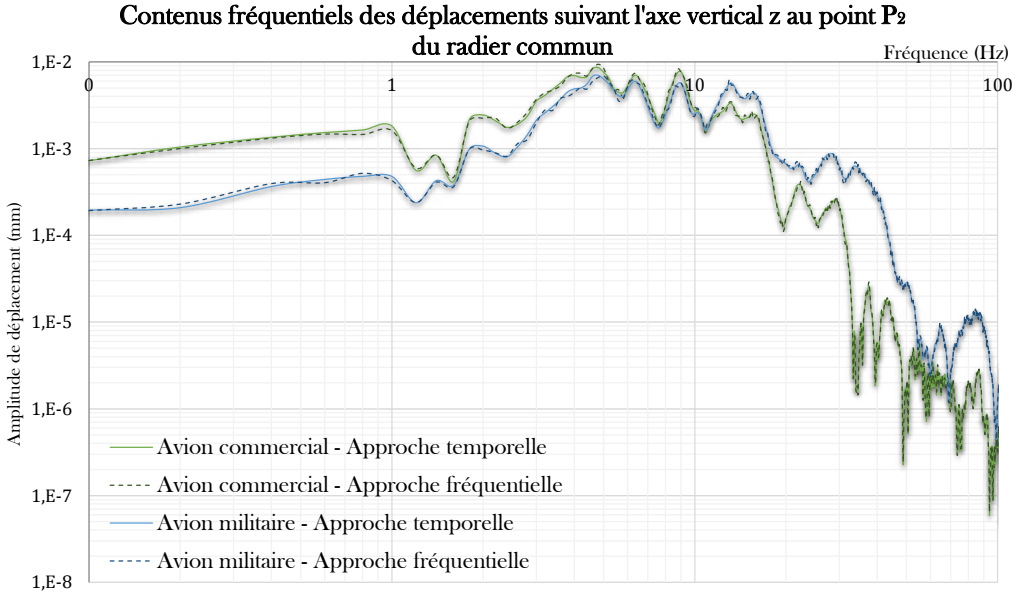


FIGURE D.5: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_2 suivant l'axe vertical z.

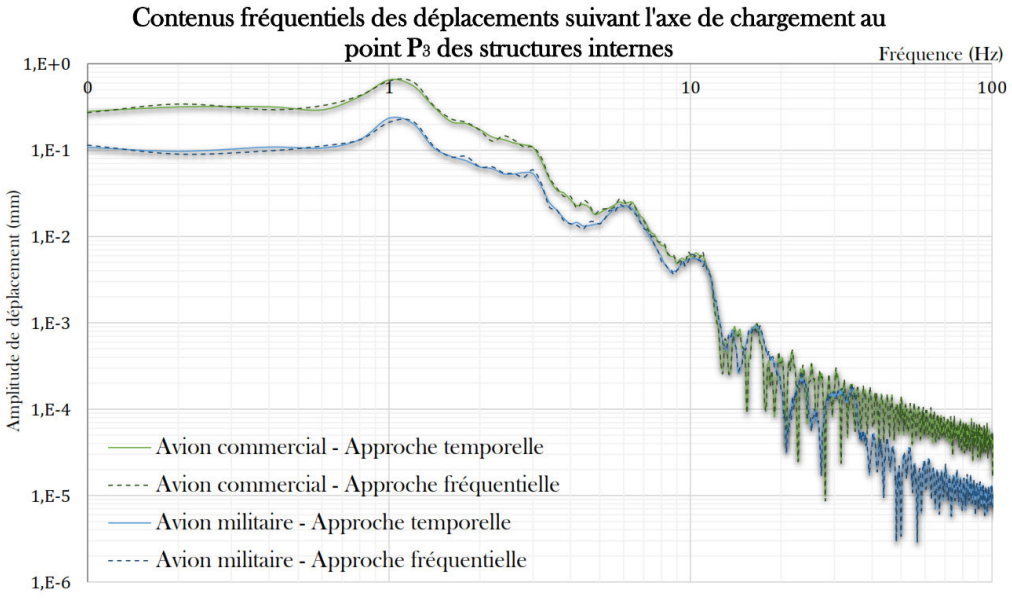


FIGURE D.6: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe de chargement.

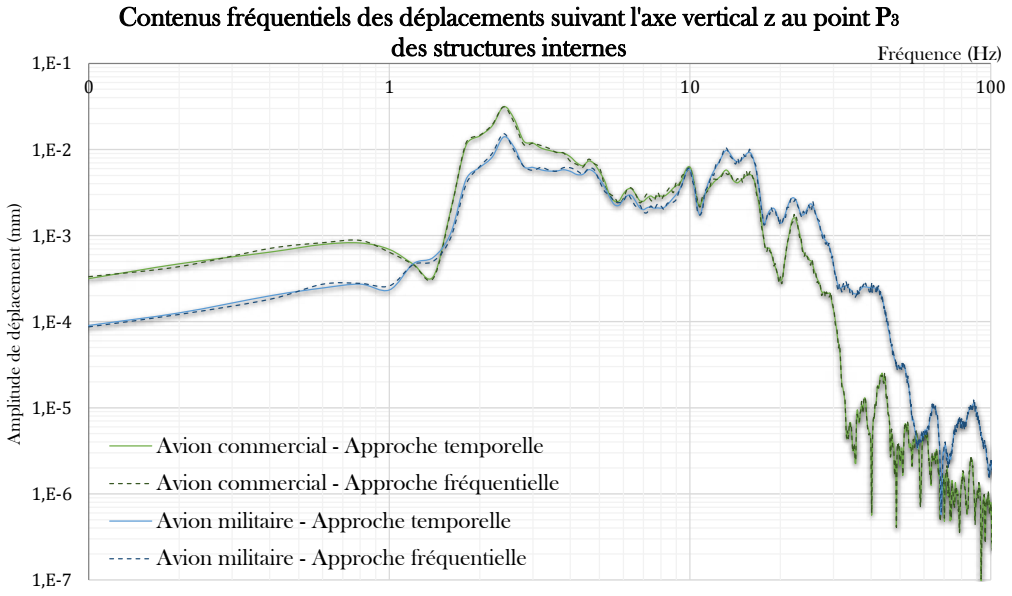


FIGURE D.7: Amplitudes du contenu fréquentiel des deux aviations au point P_3 suivant l'axe vertical z.

Les figures D.8, D.9, D.10, D.11, D.12 et D.13 présentent les résultats en termes de déplacements temporels au niveau des trois points d'intérêts.

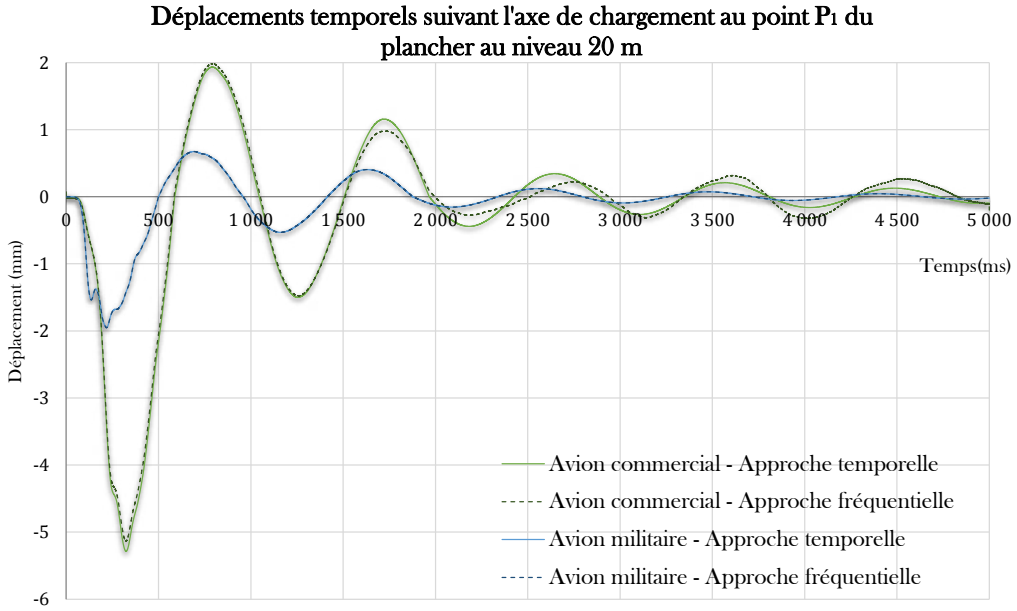


FIGURE D.8: Déplacements temporels au point P_1 suivant l'axe de chargement.

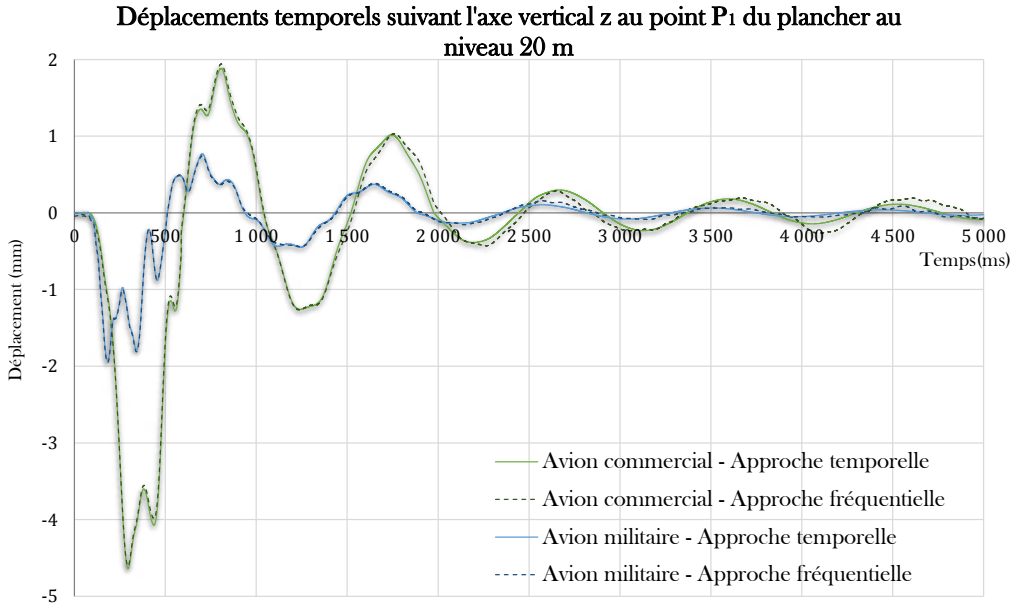


FIGURE D.9: Déplacements temporels au point P_1 suivant l'axe vertical z.

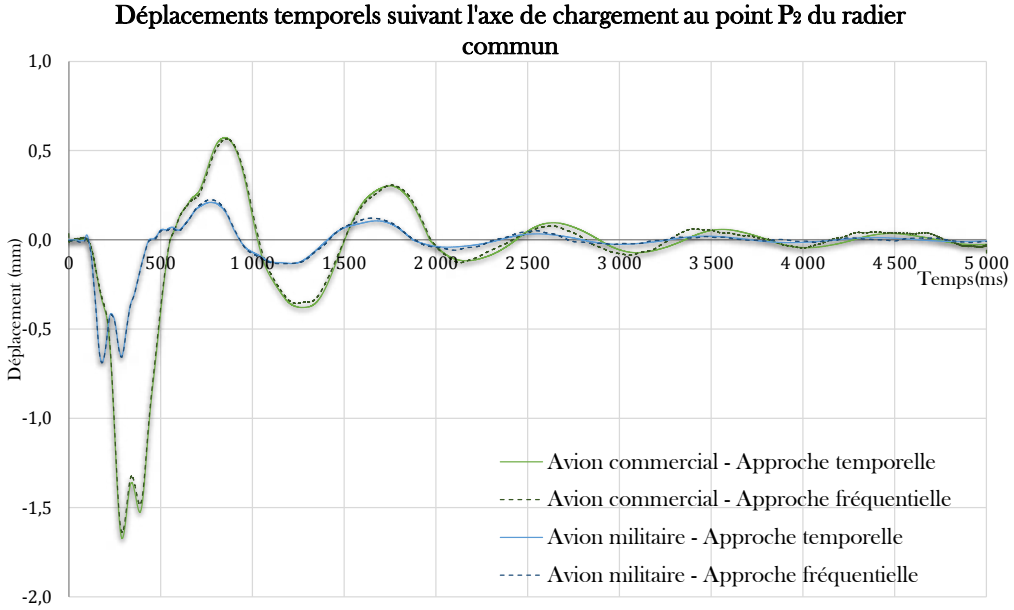


FIGURE D.10: Déplacements temporels au point P_2 suivant l'axe de chargement.

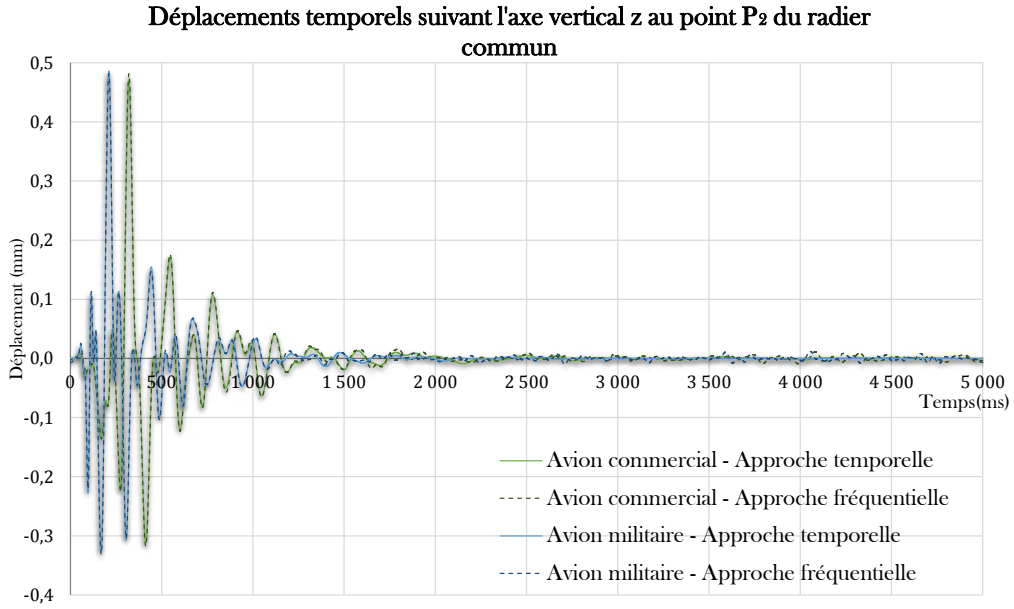


FIGURE D.11: Déplacements temporels au point P_2 suivant l'axe vertical z.

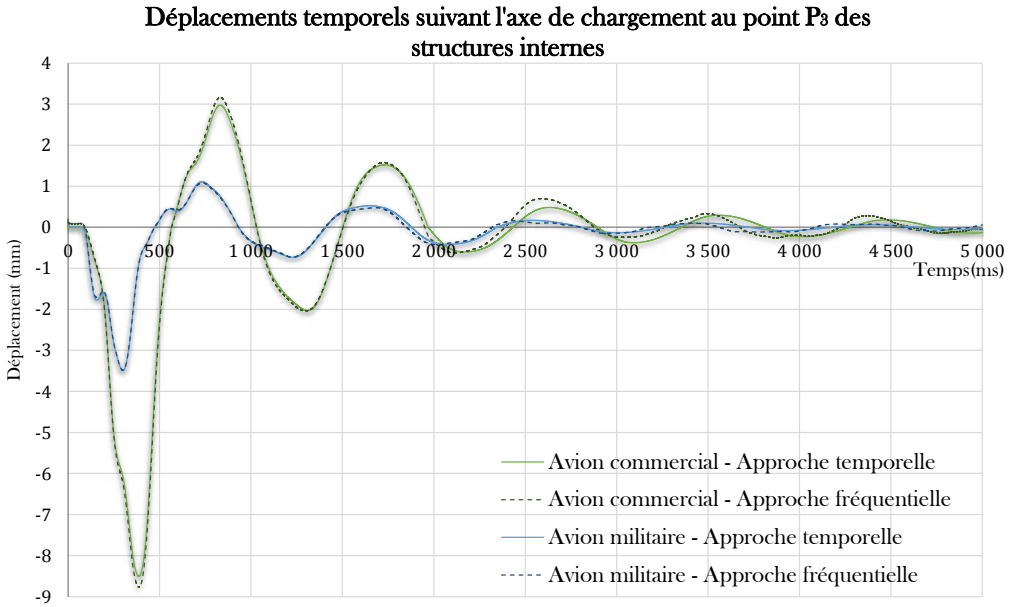


FIGURE D.12: Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe de chargement.

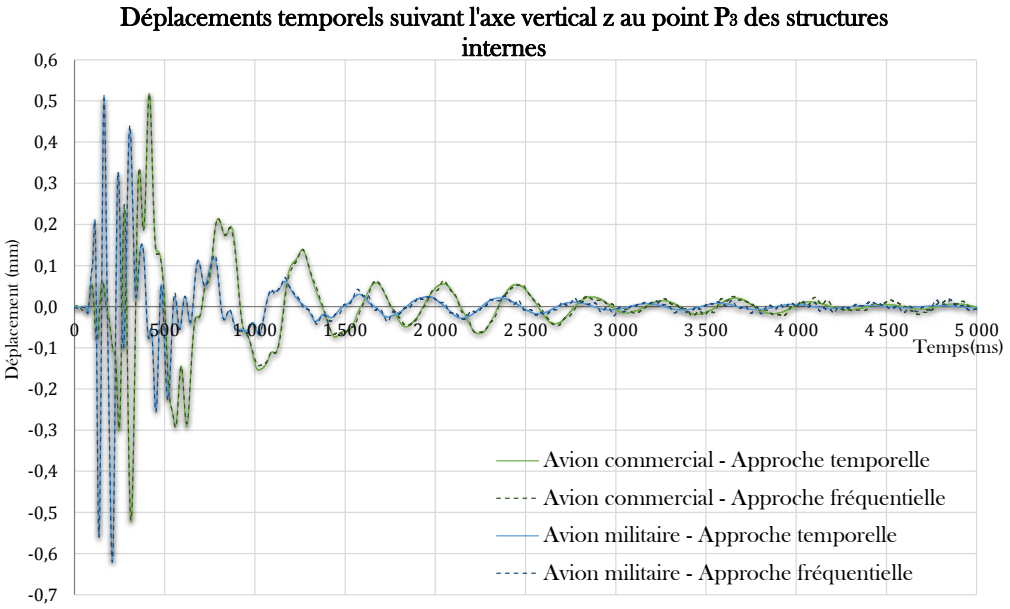


FIGURE D.13: Déplacements temporels au point P_3 suivant l'axe vertical z.

Bibliographie

[Abbas *et al.*, 1995] ABBAS, H., PAUL, D., GODBOLE, P. et NAYAK, G. (1995). Reaction-time response of aircraft crash. *Computers & structures*, 55(5):809–817.

[ACI, 2005] ACI (2005). Building code requirements for structural concrete (ACI 318-05) and commentary (ACI 318R-05). American Concrete Institute.

[Ågårdh et Laine, 1999] ÅGÅRDH, L. et LAINE, L. (1999). 3d FE-simulation of high-velocity fragment perforation of reinforced concrete slabs. *International Journal of Impact Engineering*, 22(9):911–922.

[Arnaud, 2000] ARNAUD, L. (2000). *Modélisation et simulation des vibrations moyennes frequences par la théorie variationnelle des rayons complexes*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Aubry *et al.*, 1999] AUBRY, D., LUCAS, D. et TIE, B. (1999). Adaptive strategy for transient/coupled problems applications to thermoelasticity and elastodynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 176(1):41–50.

[Avery *et al.*, 2007] AVERY, P., FARHAT, C. et REESE, G. (2007). Fast frequency sweep computations using a multi-point padé-based reconstruction method and an efficient iterative solver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(13): 2848–2875.

[Babuška *et al.*, 1995] BABUŠKA, I., IHLENBURG, F., PAIK, E. T. et SAUTER, S. A. (1995). A generalized finite element method for solving the helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128(3):325–359.

[Babuška et Rheinboldt, 1978] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. C. (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615.

[Baker Jr et Graves-Morris, 1996] BAKER JR, G. et GRAVES-MORRIS, P. (1996). *Padé approximants*, volume 59. Cambridge University Press.

[Bampton et Craig, 1968] BAMPTON, M. C. et CRAIG, JR, R. R. (1968). Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319.

[Banerjee et Butterfield, 1981] BANERJEE, P. K. et BUTTERFIELD, R. (1981). *Boundary element methods in engineering science*, volume 17. McGraw-Hill London.

[Bangash, 1993] BANGASH, M. (1993). *Impact and explosion : analysis and design*. Blackwell Scientific Publication.

[Barbone *et al.*, 1998] BARBONE, P., MONTGOMERY, J., MICHAEL, O. et HARARI, I. (1998). Scattering by a hybrid asymptotic/finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164:141–156.

[Belytschko *et al.*, 1994] BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y. et GU, L. (1994). Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2): 229–256.

[Ben Dhia et Rateau, 2005] BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2005). The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11):1442–1462.

[Bennighof *et al.*, 2000] BENNIGHOF, J., KAPLAN, M., MULLER, M. et KIM, M. (2000). Meeting the NVH computational challenge : automated multi-level substructuring. *In Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, San Antonio, Texas*, pages 909–915. Citeseer.

[Berriaud *et al.*, 1978] BERRIAUD, C., SOKOLOVSKY, A., GUERAUD, R., DULAC, J. et LABROT, R. (1978). Comportement local des enceintes en béton sous l'impact d'un projectile rigide : Local behaviour of reinforced concrete walls under missile impact. *Nuclear engineering and Design*, 45(2):457–469.

[Beslin et Nicolas, 1997] BESLIN, O. et NICOLAS, J. (1997). A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 202(5):633–655.

[Bischoff et Perry, 1991] BISCHOFF, P. et PERRY, S. (1991). Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Materials and structures*, 24(6):425–450.

[Bouillard et Ihlenburg, 1999] BOUILLARD, P. et IHLENBURG, F. (1999). Error estimation and adaptivity for the finite element method in acoustics : 2D and 3D applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 176(1):147–163.

[Bouillard et Suleaub, 1998] BOUILLARD, P. et SULEAUB, S. (1998). Element-free galerkin solutions for Helmholtz problems : fomulation and numerical assessment of the pollution effect. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 162(1):317–335.

[Bouthier et Bernhard, 1995] BOUTHIER, O. et BERNHARD, R. (1995). Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):149–164.

[Box *et al.*, 1978] BOX, G. E., HUNTER, W. G., HUNTER, J. S. *et al.* (1978). *Statistics for experimenters*. John Wiley and sons New York.

[Brandes *et al.*, 1979] BRANDES, K., LIMBERGER, E., HERTER, J., JAEGER, T. et BOLEY, B. (1979). Experimental investigation of reinforced concrete behaviour due to impact load. *Proceedings of the 5th SMiRT, Berlin, Germany*, 7.

[Brara et Klepaczko, 2006] BRARA, A. et KLEPACZKO, J. (2006). Experimental characterization of concrete in dynamic tension. *Mechanics of materials*, 38(3):253–267.

[Brenner et Scott, 2008] BRENNER, S. C. et SCOTT, R. (2008). *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer.

[Brigham, 1988] BRIGHAM, E. O. (1988). *The Fast Fourier Transform and its applications*. Prentice Hall.

[Brossard, 1997] BROSSARD, J.-P. (1997). Mécanique générale - dynamique : théorie classique du choc. *Techniques de l'ingénieur - Sciences fondamentales*, (A1668).

[Burlion, 1997] BURLION, N. (1997). *Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Buzaud, 1997] BUZAUD, E. (1997). Caractérisation du comportement mécanique du micro béton MB50 sous chargement quasi-statique. *In Poccedings Résultats d'essais du colloque GEO*.

[Buzaud *et al.*, 2007] BUZAUD, E., CAZAUBON, C. et CHAUVEL, D. (2007). Assessment of empirical formulae for local response of concrete structures to hard projectile impact. *In Concrete under severe conditions. Environment and loading*.

[Casimir et Duforet, 1997] CASIMIR, J. et DUFORET, C. (1997). Eléments continus de poutres courbes en analyse harmonique. *In Poccedings du 3ème colloque national en calcul de structure, Giens, France*, pages 87–92.

[Cast3m, 1980] CAST3M (1980). `http://www-cast3m.cea.fr/`.

[CEB, 1988] CEB, éditeur (1988). *Concrete Structures under Impact and Impulsive Loading, Synthesis Report*. Comité Euro-International du Béton. Bulletin d'information 187.

[Chadmail *et al.*, 1985] CHADMAIL, J., KRUTZIK, N. et DUBOIS, T. (1985). Equivalent loading due to airplaine impact taking into account the non-linearities of impacted reinforced concrete buildings. *Nuclear engineering and design*, 85(1):47–57.

[Chambart, 2009] CHAMBART, M. (2009). *Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine.* Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Champaney *et al.*, 1997] CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19(4):253–263.

[Chevreuil, 2005] CHEVREUIL, M. (2005). *Sur une nouvelle approche en calcul dynamique transitoire, incluant les basses et les moyennes fréquences*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Clough et Penzien, 1975] CLOUGH, R. et PENZIEN, J. (1975). Structural dynamics.

[Cochelin et Compain, 2000] COCHELIN, B. et COMPAIN, C. (2000). An asymptotic numerical method for non-linear transient dynamics. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 9(1-3):113–128.

[Cochelin *et al.*, 2007] COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (2007). Méthode asymptotique numérique : une technique de résolution des équations non linéaires. *Hermes Science Publishing, Paris, Londres*, pages 121–135.

[Code-Aster, 2001] CODE-ASTER (2001). `http://www.code-aster.org/`.

[Combescure et Gravouil, 2002] COMBESCURE, A. et GRAVOUIL, A. (2002). A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(11):1129–1157.

[Combescure *et al.*, 2003] COMBESCURE, A., GRAVOUIL, A. et HERRY, B. (2003). An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains. *Computers & structures*, 81(12):1211–1222.

[Coorevits, 1993] COOREVITS, P. (1993). *Maillage adaptatif anisotrope : application aux problemes de dynamique*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[CSA, 2004] CSA (2004). Design of concrete structures (CSA A23.3-04). Canadian Standards Association.

[Cundall et Strack, 1979] CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1):47–65.

[Cutler, 1999] CUTLER, J. (1999). *Understanding aircraft structures*. Blackwell Science.

[D'addetta *et al.*, 2001] D'ADDETTA, G., KUN, F., RAMM, E. et HERRMANN, H. (2001). From solids to granulates-discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials. *In Continuous and discontinuous modelling of cohesive-frictional materials*, pages 231–258. Springer.

[De Langre, 1991] DE LANGRE, E. (1991). Formulation de transfert de plaques en flexion par équations intégrales. *Test de validation et de performances, Rapport technique DMT/90/395, CEA*.

[Degen, 1980] DEGEN, P. P. (1980). Perforation of reinforced concrete slabs. *Journal of the structural division*, 106(7):1623–1642.

[Delhomme *et al.*, 2005] DELHOMME, F., MOMMESSIN, M., MOUGIN, J. et PERROTIN, P. (2005). Behavior of a structurally dissipating rock-shed : experimental analysis and study of punching effects. *International Journal of Solids and Structures*, 42(14):4204–4219.

[Deraemaeker *et al.*, 1999] DERAEMAEKER, A., BABUŠKA, I. et BOUILLARD, P. (1999). Dispersion and pollution of the fem solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4):471–499.

[Descartes, 1644] DESCARTES, R. (1644). *Principia philosophiae*. Apud Ludovicum Elzevirium.

[Desmet, 1998] DESMET, W. (1998). *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*. Thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, Belgique.

[Desmet *et al.*, 2002] DESMET, W., VAN HAL, B., SAS, P. et VANDEPITTE, D. (2002). A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software*, 33(7):527–540.

[Dey, 2003] DEY, S. (2003). Evaluation of p-FEM approximations for mid-frequency elasto-acoustics. *Journal of Computational Acoustics*, 11(02):195–225.

[Dinic et Perry, 1990] DINIC, G. et PERRY, S. (1990). Shear plug formation in concrete slabs subjected to hard impact. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(1):343–350.

[Djellouli *et al.*, 2001] DJELLOULI, R., FARHAT, C. et TEZAUR, R. (2001). A fast method for solving acoustic scattering problems in frequency bands. *Journal of Computational Physics*, 168(2):412–432.

[DOE, 2006] DOE, U. (2006). Accident analysis for aircraft crash into hazardous facilities. *DOE standard DOE-STD-3014-2006*.

[Dorival *et al.*, 2006] DORIVAL, O., ROUCH, P. et ALLIX, O. (2006). A substructured version of the variational theory of complex rays dedicated to the calculation of assemblies with dissipative joints in the medium-frequency range. *Engineering Computations : International Journal for Computer-Aided Engineering*, 23(7):729–748.

[Dorival *et al.*, 2008] DORIVAL, O., ROUCH, P. et ALLIX, O. (2008). A substructured Trefftz method for updating joint models in the medium-frequency range. *Computational Mechanics*, 42(3):381–394.

[Dung Vu, 2013] DUNG VU, X. (2013). *Vulnérabilité des dalles en béton sous impact : caractérisation, modélisation et validation.* Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble 1.

[EC2, 2005] EC2 (2005). *Eurocode 2 - Calcul des structures en béton*. NF EN 1992-1-1. Partie 1-2 : Calcul du comportement au feu.

[Eibl, 1987] EIBL, J. (1987). Soft and hard impact. *In Proceedings of the First International Conference on Concrete for Hazard Protection, Edinburgh*.

[EPRI, 2007] EPRI (2007). Program on technology innovation : The effects of high-frequency ground motion on structures, components, and equipment in nuclear power plants. Rapport technique, EPRI Report 1015108.

[Erzar, 2010] ERZAR, B. (2010). *Ecaillage, cratérisation et comportement en traction dynamique de bétons sous impact : approches expérimentales et modélisation*. Thèse de doctorat, Université de Metz.

[Farhat *et al.*, 1998] FARHAT, C., CHEN, P.-S., MANDEL, J. et ROUX, F. X. (1998). The two-level FETI method part II : Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 155(1):153–179.

[Farhat et Géradin, 1994] FARHAT, C. et GÉRADIN, M. (1994). On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures. *Computers & Structures*, 51(5):459–473.

[Farhat *et al.*, 2001] FARHAT, C., HARARI, I. et FRANCA, L. P. (2001). The discontinuous enrichment method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(48):6455–6479.

[Farhat *et al.*, 2003] FARHAT, C., HARARI, I. et HETMANIUK, U. (2003). A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11):1389–1419.

[Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227.

[Fiquet et Dacquet, 1977] FIQUET, G. et DACQUET, S. (1977). Study of the perforation of reinforced concrete slabs by rigid missiles-experimental study, part II. *Nuclear Engineering and Design*, 41(1):103–120.

[Fleuret et Duforet, 1997] FLEURET, J. et DUFORET, C. (1997). Eléments continus de plaques en régime harmonique. *In Poccedings du 3ème colloque national en calcul de structure, Giens, France*.

[Forquin et Erzar, 2010] FORQUIN, P. et ERZAR, B. (2010). Dynamic fragmentation process in concrete under impact and spalling tests. *International Journal of Fracture*, 163(1-2):193–215.

[Forquin *et al.*, 2008] FORQUIN, P., GARY, G. et GATUINGT, F. (2008). A testing technique for concrete under confinement at high rates of strain. *International Journal of Impact Engineering*, 35(6):425–446.

[Franca *et al.*, 1997] FRANCA, L. P., FARHAT, C., MACEDO, A. P. et LESOINNE, M. (1997). Residual-free bubbles for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(21):4003–4009.

[Franca et Macedo, 1998] FRANCA, L. P. et MACEDO, A. P. (1998). A two-level finite element method and its application to the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(1):23–32.

[Fullard *et al.*, 1991] FULLARD, K., BAUM, M. et BARR, P. (1991). The assessment of impact on nuclear power plant structures in the united kingdom. *Nuclear Engineering and Design*, 130(2):113–120.

[Gary et Toutlemonde, 2004] GARY, G. et TOUTLEMONDE, F. (2004). *Comportement dynamique du béton. Aspects expérimentaux*. Hermes.

[Gatuingt, 2009] GATUINGT, F. (2009). *Dimensionnement de structures sous impacts : du comportement des matériaux à la simulation numérique*. Thèse de doctorat, Habilitation à diriger des recherches, École normale supérieure de Cachan.

[Georgin et Reynouard, 2003] GEORGIN, J. et REYNOUARD, J. (2003). Modeling of structures subjected to impact : concrete behaviour under high strain rate. *Cement and Concrete Composites*, 25(1):131–143.

[Glowinski et Le Tallec, 1990] GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method. *In third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, pages 224–231. SIAM.

[Gmsh, 2009] GMSH (2009). `http://geuz.org/gmsh/`.

[Goldstein *et al.*, 1977] GOLDSTEIN, S., BERRIAUD, C. et LABROT, R. (1977). Study of the perforation of reinforced concrete slabs by rigid missiles-experimental study, part III. *Nuclear Engineering and Design*, 41(1):121–128.

[Gourgeon et Herrera, 1981] GOURGEON, H. et HERRERA, I. (1981). *Boundary methods - C-complete systems for the biharmonic equations*. Springer.

[Graff, 1991] GRAFF, K. (1991). *Wave motion in elastic solids*. Dover New York.

[Greenstadt, 1999] GREENSTADT, J. (1999). Solution of wave propagation problems by the cell discretization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 174(1):1–21.

[Gueraud *et al.*, 1977] GUERAUD, R., SOKOLOVSKY, A., KAVYRCHINE, M. et ASTRUC, M. (1977). Study of the perforation of reinforced concrete slabs by rigid missiles-general introduction and experimental study, part I. *Nuclear Engineering and Design*, 41(1):91–102.

[Gupta *et al.*, 2005] GUPTA, J. S., ALLIX, O., BOUCARD, P.-A., FANGET, A. et HÉREIL, P.-L. (2005). Fracture prediction of a 3D C/C material under impact. *Composites science and technology*, 65(3):375–386.

[Guyan, 1965] GUYAN, R. J. (1965). Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2):380–380.

[Hallquist, 2006] HALLQUIST, J. (2006). *LS-DYNA theory manual*. Livermore Software Technology Corporation.

[Harari *et al.*, 1999] HARARI, I., BARAI, P. et BARBONE, P. E. (1999). Numerical and spectral investigations of trefftz infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4):553–577.

[Harari *et al.*, 2001] HARARI, I., BARAI, P., BARBONE, P. E. et SLAVUTIN, M. (2001). Three-dimensional infinite elements based on a Trefftz formulation. *Journal of Computational Acoustics*, 9(02):381–394.

[Harari *et al.*, 1996] HARARI, I., GROSH, K., HUGHES, T., MALHOTRA, M., PINSKY, P., STEWART, J. et THOMPSON, L. (1996). Recent developments in finite element methods for structural acoustics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 3(2-3):131–309.

[Herrera, 1984] HERRERA, I. (1984). *Boundary methods : an algebraic theory*. Pitman Advanced Pub. Program.

[Hervé, 2005] HERVÉ, G. (2005). *Simulation du comportement sous impact de structures en béton armé*. École normale supérieure de Cachan.

[Hervé, 2014] HERVÉ, G. (2014). Improvement of the evaluation of high frequency content in the calculation of impact floor response spectra. *In Proceedings of the 2nd TINCE, Technical Innovation in Nuclear Civil Engineering, Cachan, France*.

[Hervé *et al.*, 2013] HERVÉ, G., ROUZAUD, C., BARRÉ, F. et SECOURGEON, E. (2013). Optimizing the analysis of airplane crash induced spectra by means of generic airplane methodology. *In Proceedings of the 22nd SMiRT, San Francisco, USA*.

[Hilber *et al.*, 1977] HILBER, H. M., HUGHES, T. J. et TAYLOR, R. L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3):283–292.

[Hild *et al.*, 2003] HILD, F., DENOUAL, C., FORQUIN, P. et BRAJER, X. (2003). On the probabilistic–deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials. *Computers & structures*, 81(12):1241–1253.

[Hild et Roux, 2008] HILD, F. et ROUX, S. (2008). Correli Q4 : A software for finite-element displacement field measurements by digital image correlation. *Internal report*, (269).

[Hopkinson, 1914] HOPKINSON, B. (1914). A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 213:437–452.

[HSK, 2003] HSK (2003). *Stellungnahme der HSK zur Sicherheit der schweizerischen Kernkraftwerke bei einem vorsätzlichen Flugzeugabsturz*. HSK-AN-4626.

[Hugues, 1995] HUGUES, T. (1995). Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-Toneumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 127(387-401):216.

[Hurty, 1965] HURTY, W. C. (1965). Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA journal*, 3(4):678–685.

[Huygens, 1652a] HUYGENS, C. (1652a). *Huygens Christiaan : oeuvres complètes - Lettre du 17 janvier 1652 à G. van Gutschoven*, volume 1. M. Nijhoff.

[Huygens, 1652b] HUYGENS, C. (1652b). *Huygens Christiaan : oeuvres complètes - Lettre du 29 octobre 1652 à Fr. van Schooten*, volume 1. M. Nijhoff.

[Huygens, 1703] HUYGENS, C. (1703). Huygens christiaan : oeuvres complètes - de motu corporum ex percussione. 16.

[IAEA, 2012] IAEA (2012). Safety assessment of NPP structures against human induced external events. Rapport technique, Safety report series, DD1086 Draft, Rev. : R1-1.

[Ihlenburg et Babuška, 1995] IHLENBURG, F. et BABUŠKA, I. (1995). Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number part I : The h-version of the FEM. *Computers & Mathematics with Applications*, 30(9):9–37.

[Ilhenburg et Babuška, 1995] ILHENBURG, F. et BABUŠKA, I. (1995). Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3745–3774.

[Imonsen et Wierzbicki, 1997] IMONSEN, B. C. et WIERZBICKI, T. (1997). Plasticity, fracture and friction in steady state plate cutting. *International journal of impact engineering*, 19(8):667–691.

[Irimie et Bouillard, 2001] IRIMIE, S. et BOUILLARD, P. (2001). A residual a posteriori error estimator for the finite element solution of the Helmholtz equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(31):4027–4042.

[IRIS, 2010] IRIS (2010). Improving robustness assessment methodologies for structures impacted by missile. NEA/CSNI/R.

[IRIS, 2012] IRIS (2012). Improving robustness assessment methodologies for structures impacted by missile. NEA/CSNI/R.

[IRIS, 2015] IRIS (2015). Improving robustness assessment methodologies for structures impacted by missile. NEA/CSNI/R.

[Irons, 1965] IRONS, B. (1965). Structural eigenvalue problems-elimination of unwanted variables. *AIAA journal*, 3(5):961–962.

[Jirousek et Wroblewski, 1996] JIROUSEK, J. et WROBLEWSKI, A. (1996). T-elements : state of the art and future trends. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 3(4):323–434.

[Johnson et Mamalis, 1978] JOHNSON, W. et MAMALIS, A. G. (1978). Crashworthiness of vehicles, part 3 : Aircraft impact. *London : Mechanical Engineering Publications*, 65.

[Jonas *et al.*, 1982] JONAS, W., RÜDIGER, E., GRIES, M., RIECH, H. et RÜTZEL, H. (1982). Kinetische grenztragfähigkeit von stahlbetonplatten. *Berichte zum Forschungsvorhaben RS1*, 65.

[Kennedy, 1976] KENNEDY, R. (1976). A review of procedures for the analysis and design of concrete structures to resist missile impact effects. *Nuclear Engineering and Design*, 37(2):183–203.

[Kœchlin, 2007] KŒCHLIN, P. (2007). *Modèle de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou*. Thèse de doctorat, École Polytechnique.

[Kœchlin et Moulin, 2002] KŒCHLIN, P. et MOULIN, S. (2002). Modèle de comportement global des plaques en béton armé sous chargement dynamique en flexion : loi GLRC améliorée : modélisation de la fissuration par endommagement. *Note HT-62/02/021/A*.

[Koechlin et Potapov, 2009] KOECHLIN, P. et POTAPOV, S. (2009). Classification of soft and hard impacts - application to aircraft crash. *Nuclear Engineering and Design*, 239(4):613–618.

[Kojima, 1991] KOJIMA, I. (1991). An experimental study on local behavior of reinforced concrete slabs to missile impact. *Nuclear engineering and design*, 130(2):121–132.

[Kovalesky et Gosselet, 2014] KOVALESKY, L. et GOSSELET, P. (2014). Optimized approximation space for Trefftz-discontinuous Galerkin methods, application to the variational theory of complex rays. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

[Kovalesky *et al.*, 2012] KOVALESKY, L., LADEVÈZE, P. et RIOU, H. (2012). The Fourier version of the variational theory of complex rays for medium-frequency acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225-228:142–153.

[Kovalevsky, 2011] KOVALEVSKY, L. (2011). *La théorie variationnelle des rayons complexes version Fourier*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *Comptes rendus de l'académie des sciences série IIb - Mécanique physique chimie astronomie*, 322(12):849–856.

[Ladevèze *et al.*, 2001] LADEVÈZE, P., ARNAUD, L., ROUCH, P. et BLANZÉ, C. (2001). The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18:193–214.

[Ladevèze et Chevreuil, 2005] LADEVÈZE, P. et CHEVREUIL, M. (2005). A new computational method for transient dynamics including the low- and the medium-frequency ranges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(4):503–527.

[Ladevèze et Pelle, 2001] LADEVÈZE, P. et PELLE, J. P. (2001). *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*. Hermès Science.

[Ladevèze et Riou, 2005] LADEVÈZE, P. et RIOU, H. (2005). Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(27):3167–3191.

[Ladevèze et Simmonds, 1999] LADEVÈZE, P. et SIMMONDS, J. G. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer.

[Lancaster et Salkauskas, 1981] LANCASTER, P. et SALKAUSKAS, K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of computation*, 37(155): 141–158.

[Laroze, 1980] LAROZE, S. (1980). *Résistance des matériaux et des structures*. Tome 1 : Milieux continus, plaques et coques, Eyrolles, Paris.

[Leclère, 2001] LECLÈRE, J.-M. (2001). *Modélisation parallèle de la propagation d'ondes dans structures par éléments finis adaptatifs*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.

[Lee *et al.*, 2014] LEE, K., JUNG, J.-H. et HONG, J.-W. (2014). Advanced aircraft analysis of an F-4 Phantom on a reinforced concrete building. *Nuclear Engineering and Design*, 273:505–528.

[Leissa, 1993] LEISSA, A. W. (1993). *Vibration of plates*. Published for the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics.

[Lemoussu *et al.*, 2002] LEMOUSSU, H., BOUCARD, P.-A. et LADEVÈZE, P. (2002). A 3D shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in Engineering Software*, 33(7):517–526.

[Leung et Chan, 1998] LEUNG, A. et CHAN, J. (1998). Fourier p-element for the analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 212(1):179–185.

[L'Huby et Barbe, 1992] L'HUBY, Y. et BARBE, B. (1992). Performance of PWR buidings in case of airplane crush. Rapport technique, CEA Centre d'Etudes de Fontenay-aux-Roses, 92 (France). Dept. d'Evaluation de Surete, Inst. de Protection et de Surete Nucleaire.

[Li *et al.*, 2005] LI, Q., REID, S., WEN, H. et TELFORD, A. (2005). Local impact effects of hard missiles on concrete targets. *International Journal of Impact Engineering*, 32(1):224–284.

[Linder, 2005] LINDER, R. (2005). *Les plans d'expériences : un outil indispensable à l'expérimentateur*. Presses des Ponts.

[Ls-Dyna, 1976] LS-DYNA (1976). `http://www.lstc.com/`.

[Lyon et Maidanik, 1962] LYON, R. H. et MAIDANIK, G. (1962). Power flow between linearly coupled oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5): 623–639.

[MacNeal, 1971] MACNEAL, R. H. (1971). A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4):581–601.

[Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in numerical methods in engineering*, 9(3):233–241.

[Mathematica, 1988] MATHEMATICA (1988). `http://www.wolfram.com/mathematica/`.

[Matlab, 1980] MATLAB (1980). `http://www.mathworks.com/`.

[May *et al.*, 2005] MAY, I. M., CHEN, Y., OWEN, D. R. J., FENG, Y. et BERE, A. T. (2005). Behaviour of reinforced concrete beams and slabs under drop-weight impact loads. *In Proceedings of the 6th Asia-Pacific Conference on Shock and Impact Loads on Structures*.

[May *et al.*, 2006] MAY, I. M., CHEN, Y., OWEN, D. R. J., FENG, Y. et THIELE, P. J. (2006). Reinforced concrete beams under drop-weight impact loads. *Computers and Concrete*, 3(2-3):79–90.

[Mazars, 1984] MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6.

[Melenk et Babuška, 1997] MELENK, J. et BABUŠKA, I. (1997). Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4:607–632.

[Miyamoto et King, 1994] MIYAMOTO, A. et KING, M. (1994). Shock and impact on structures. *Chapter 5 - Concrete structures under soft impact loads, International Series on Computational Engineering*, pages 107–204.

[Moës *et al.*, 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Solids and Structures*, 46(1):131–150.

[Monk et Wang, 1999] MONK, P. et WANG, D.-Q. (1999). A least-squares method for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175(1):121–136.

[Nachtsheim *et al.*, 1984] NACHTSHEIM, W., STANGENBERG, F., van EXEL, C. et GURSKI, B. (1984). Analysen und auswertungen zu den meppener plattenversuchen - anprall deformierbarer projektile auf stahlbetonplatten.

[NEI, 2013] NEI (2013). Methodology for performing aircraft impact assessments for new plat designs (NEI 07-13). Nuclear Energy Institute.

[Oberai et Pinsky, 1998] OBERAI, A. A. et PINSKY, P. M. (1998). A multiscale finite element method for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154(3):281–297.

[Ohayon et Soize, 1989] OHAYON, R. et SOIZE, C. (1989). *Structural acoustics and vibration*. Academic Press.

[ONR, 2014] ONR, O. f. N. R. (2014). Safety assessment principles (saps). Rapport technique, Technical Assessment Guides (TAGs).

[Orbovic *et al.*, 2009] ORBOVIC, N., ELGOHARY, M., LEE, N. et BLAHOIANU, A. (2009). Tests on reinforced concrete slabs with pre-stressing and with transverse reinforcement under impact loading. *In Proceedings of the 20th SMiRT, Espoo, Finland*.

[Orszag et Bender, 1978] ORSZAG, S. A. et BENDER, C. (1978). Advanced mathematical methods for scientists and engineers. *Mac Graw Hill*.

[Ortiz et Pandolfi, 1999] ORTIZ, M. et PANDOLFI, A. (1999). Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(9):1267–1282.

[Paraview, 2002] PARAVIEW (2002). `http://www.paraview.org/`.

[Pluymers *et al.*, 2002] PLUYMERS, B., DESMET, W., VANDEPITTE, D. et SAS, P. (2002). Application of the wave based prediction technique for the analysis of the coupled vibro-acoustic behaviour of a 3D cavity. *In Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA2002, Leuven, Belgium*, pages 891–900.

[Qin, 2000] QIN, Q.-H. (2000). *The Trefftz finite and boundary element method*. Computational Mechanics.

[RCC-G, 1988] RCC-G (1988). *Règles de conception et de construction du génie civil des ilots nucléaires REP*. Editions AFCEN, France.

[Reed et Hill, 1973] REED, W. H. et HILL, T. (1973). Triangular mesh methods for the neutron transport equation. *Los Alamos Report LA-UR-73-479, New mexico*.

[RFS, 2002] RFS (2002). *Règle Fondamentale de Sûreté - Développement et utilisation des études probabilistes de sûreté*. Autorté de Sûreté Nucléaire.

[Ribora *et al.*, 1976] RIBORA, B., ZIMMERMAN, T. et WOLF, J. (1976). Dynamic rupture analysis of RC shells. *Nuclear Engineering and Design*, 37:269–277.

[Riera, 1968] RIERA, J. D. (1968). On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces. *Nuclear Engineering and Design*, 8(4):415–426.

[Riera, 1980] RIERA, J. D. (1980). A critical reappraisal of nuclear power plant safety against accidental aircraft impact. *Nuclear Engineering and Design*, 57(1):193–206.

[Riou, 2004] RIOU, H. (2004). *Sur le calcul des vibrations moyennes et hautes fréquences par la théorie variationnelle des rayons complexes*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Riou *et al.*, 2004] RIOU, H., LADEVEZE, P. et ROUCH, P. (2004). Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272(1):341–360.

[Rossi et Toutlemonde, 1996] ROSSI, P. et TOUTLEMONDE, F. (1996). Effect of loading rate on the tensile behaviour of concrete : description of the physical mechanisms. *Materials and Structures*, 29(2):116–118.

[Rousseau, 2009] ROUSSEAU, J. (2009). *Modélisation numérique du comportement dynamique de structures sous impact sévère avec un couplage éléments discrets/éléments finis.* Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble 1.

[Roux, 1990] ROUX, F.-X. (1990). Méthodes de résolution par sous-domaine en statique. *La Recherche Aérospatiale*, 1:37–48.

[Rouzaud *et al.*, 2015] ROUZAUD, C., GATUINGT, F., DORIVAL, D. et KOVALEVSKY, L. (2015). A new way for the simulation of the impact on reinforced concrete structures. *Engineering Computations*.

[Rumpler *et al.*, 2014] RUMPLER, R., GÖRANSSON, P. et DEÜ, J.-F. (2014). A finite element approach combining a reduced-order system, padé approximants, and an adaptive frequency windowing for fast multi-frequency solution of poro-acoustic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(10):759–784.

[Sandberg *et al.*, 2001] SANDBERG, G. E., HANSSON, P.-A. et GUSTAVSSON, M. (2001). Domain decomposition in acoustic and structure–acoustic analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(24):2979–2988.

[Sercombe, 1997] SERCOMBE, J. (1997). *Modélisation du comportement du béton en dynamique rapide. Application au calcul des conteneurs à haute intégrité*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.

[Shirai *et al.*, 1997] SHIRAI, T., KAMBAYASHI, A., OHNO, T., TANIGUCHI, H., UEDA, M. et ISHIKAWA, N. (1997). Experiment and numerical simulation of double-layered RC plates under impact loadings. *Nuclear Engineering and Design*, 176(3):195–205.

[Shiu, 2008] SHIU, W. (2008). *Impact de missiles rigides sur structures en béton armé : analyse par la méthode des éléments discrets*. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble 1.

[Sliter, 1980] SLITER, G. E. (1980). Assessment of empirical concrete impact formulas. *Journal of the Structural Division*, 106(5):1023–1045.

[Soize, 1998] SOIZE, C. (1998). Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 17(4):657–685.

[Sourcis, 2005] SOURCIS, B. (2005). La TVRC et l'intégration des effets de membrane dans les plaques. Mémoire de D.E.A., École normale supérieure de Cachan.

[Souvay, 1994] SOUVAY, P. (1994). *Les plans d'expériences, Méthode Taguchi*. AFNOR.

[Steele, 1971] STEELE, C. (1971). A geometric optics solution for the thin shell equation. *International Journal of Engineering Science*, 9(8):681–704.

[Stevenson, 1980] STEVENSON, J. (1980). Current summary of international extreme load design requirements for nuclear power plant facilities. *Nuclear Engineering and Design*, 60(2):197–209.

[Stojek, 1998] STOJEK, M. (1998). Least-squares Trefftz-type elements for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(5): 831–849.

[Strouboulis *et al.*, 2001] STROUBOULIS, T., COPPS, K. et BABUŠKA, I. (2001). The generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(32):4081–4193.

[Suffis, 2004] SUFFIS, A. (2004). *Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon.

[Sugano *et al.*, 1993a] SUGANO, T., TSUBOTA, H., KASAI, Y., KOSHIKA, N., OHNUMA, H., VON RIESEMANN, W., BICKEL, D. et PARKS, M. (1993a). Local damage to reinforced concrete structures caused by impact of aircraft engine missiles. part 1 : Test program, method and results. part 2 : Evaluation of test results. *Nuclear Engineering and Design*, 140(3):407–423.

[Sugano *et al.*, 1993b] SUGANO, T., TSUBOTA, H., KASAI, Y., KOSHIKA, N., ORUI, S., VON RIESEMANN, W., BICKEL, D. et PARKS, M. (1993b). Full-scale aircraft impact test for evaluation of impact force. *Nuclear Engineering and Design*, 140(3):373–385.

[Sukumar et Belytschko, 2000] SUKUMAR, N. et BELYTSCHKO, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1741–1760.

[Suleau *et al.*, 2000] SULEAU, S., DERAEMAEKER, A. et BOUILLARD, P. (2000). Dispersion and pollution of meshless solutions for the Helmholtz equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(5):639–657.

[Taguchi, 1986] TAGUCHI, G. (1986). *Introduction to Quality Engineering*. Asian Productivity Organisation.

[Taguchi et Konishi, 1987] TAGUCHI, G. et KONISHI, S. (1987). *Orthogonal arrays and linear graphs : tools for quality engineering*. American Supplier Institute Allen Park, MI.

[Tezaur *et al.*, 2001] TEZAUR, R., MACEDO, A. et FARHAT, C. (2001). Iterative solution of large-scale acoustic scattering problems with multiple right hand-sides by a domain decomposition method with Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(10):1175–1193.

[Tie *et al.*, 2003] TIE, B., AUBRY, D. et BOULLARD, A. (2003). Adaptive computation for elastic wave propagation in plate/shell structures under moving loads. *Revue Européenne des Éléments*, 12(6):717–736.

[Toutlemonde, 1995] TOUTLEMONDE, F. (1995). *Résistance au choc des structures en béton : du comportement du matériau au calcul des ouvrages*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.

[Tsai *et al.*, 1975] TSAI, N., NIEHOFF, D., SWATTA, M. et HADJIAN, A. (1975). The use of frequency-independent soil-structure interaction parameters. *Nuclear engineering and design*, 31(2):168–183.

[Vlaski, 2013] VLASKI, V. (2013). Reduction of external hazard (fast impact) induced vibrations. *In Proceedings of the 1st TINCE, Technical Innovation in Nuclear Civil Engineering, Cachan, France*.

[VTT, 2008] VTT (2008). *Impact Project - VTT Database*.

[Vu, 2007] VU, X. H. (2007). *Caractérisation expérimentale du béton sous fort confinement : influences du degré de saturation et du rapport eau/ciment*. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble 1.

[Waldock, 1997] WALDOCK, W. D. (1997). A brief history of crashworthiness. *In 1997 SAFE Association Symposium, Phoenix, AZ.*

[West *et al.*, 1997] WEST, L., BARDELL, N., DUNDON, J. et LOASBY, P. (1997). Some limitations associated with the use of k-orthogonal polynomials in hierarchical version of the finite element formulation.

[Wierzbicki, 1995] WIERZBICKI, T. (1995). Concertina tearing of metal plates. *International journal of solids and structures*, 32(19):2923–2943.

[Wierzbicki *et al.*, 1992] WIERZBICKI, T., BHAT, S. U., ABRAMOWICZ, W. et BRODKIN, D. (1992). Alexander revisited - a two folding elements model of progressive crushing of tubes. *International Journal of Solids and Structures*, 29(24):3269–3288.

[Wierzbicki *et al.*, 2002] WIERZBICKI, T., XUE, L. et HENDRY-BROGAN, M. (2002). Aircraft impact damage of the world trade center towers. Rapport technique, Impact and Crashworthiness Lab Report.

[Wilt *et al.*, 2011] WILT, T., CHOWDHURY, A. et COX, P. (2011). Response of reinforced concrete structures to aircraft crash impact. *Center for Nuclear Waste Regulatory Analyses in SouthWest Research Institute, San Antonio, Texas*.

[Wœstyn *et al.*, 2006] WŒSTYN, S., DELAPLACE, A. et KŒCHLIN, P. (2006). Analyse de la rupture dynamique du béton par un modèle discret. *Revue Européenne de Génie Civil*, 10(10):1281–1308.

[Wohlever et Bernhard, 1992] WOHLEVER, J. et BERNHARD, R. (1992). Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1):1–19.

[Wolf, 1978] WOLF, J. (1978). *Numerical methods for unconstrained optimization : An introduction*. Van Nostrand Reinhold.

[Wolf *et al.*, 1976] WOLF, J., BUCHER, K. et SKRIKERUD, P. (1976). Response of equipment subjected to aircraft impact. *Nuclear Engineering and Design*, 47(1):169–193.

[Yankelevsky, 1997] YANKELEVSKY, D. (1997). Local response of concrete slabs to law velocity missile impact. *International Journal of Impact Engineering*, 19(4):331–343.

[Zhang, 2006] ZHANG, Y. (2006). *Analyse et dimensionnement d'ouvrages de protection contre les chutes de blocs*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.

[Zhang *et al.*, 2008] ZHANG, Y., TOUTLEMONDE, F., LUSSOU, P. et HUMBERT, P. (2008). Analyse, dimensionnement et optimisation d'ouvrages de protection contre les chutes de blocs. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 12(9-10):1041–1061.

[Zhao et Gary, 1996] ZHAO, H. et GARY, G. (1996). On the use of shpb techniques to determine the dynamic behavior of materials in the range of small strains. *International Journal of Solids and Structures*, 33(23):3363–3375.

[Zienkiewicz et Taylor, 2000] ZIENKIEWICZ, O. C. et TAYLOR, R. L. (2000). *The finite element method : Solid mechanics*, volume 2. Butterworth-Heinemann.

[Zienkiewicz et Zhu, 1987] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineerng analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357.

[Zukas *et al.*, 1982] ZUKAS, J. A., NICHOLAS, T., SWIFT, H. F., GRESZCZUK, L. B. et CURRAN, D. R. (1982). *Impact dynamics*. Wiley.