ANNÉE 2015

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Physique
Ecole doctorale SDLM

présentée par

Nicolas Barré

préparée à l'unité de recherche IPR – UMR6251
Institut de Physique de Rennes
Université de Rennes 1

Étude de la sélection des structures transverses stationnaires dans les Lasers

Thèse soutenue à Rennes le 11/12/2014

devant le jury composé de :

Gian–Luca Lippi
PR INLN/ Rapporteur

François Sanchez
PR LPHIA/ Rapporteur

Daniel Hennequin
CR PhLAM/ Examinateur

Mélanie Lebental
MCF LPQM/ Examinatrice

Jean–François Morizur
PhD CAILABS/ Invité

Marc Brunel
PR UR1/ Directeur de thèse

Marco Romanelli
MCF UR1/ Co-directeur de thèse

Remerciements

Pour commencer, je tiens à remercier mes directeurs de thèse Marc Brunel et Marco Romanelli de m'avoir proposé ce sujet de thèse original, peu évident à traiter de prime abord, et de m'avoir attribué une confiance totale dans la réalisation de cette étude. Je les remercie également de m'avoir poussé à communiquer autant que possible sur mes travaux de recherche même lorsque mes doutes sur l'intérêt de mes résultats m'auraient plutôt naturellement conduit à les garder pour moi. J'ai ainsi pu acquérir des expériences, comme la participation à une conférence internationale, que je n'aurais pas pu connaître autrement.

Ensuite, même s'il ne s'y attend probablement pas tant il se fait souvent discret, je tiens à remercier Marc Vallet pour les discussions intéressantes et rafraîchissantes que j'ai souvent eu avec lui au détour d'un couloir, et parfois même dans son bureau les jours où j'avais de la chance... Plus sérieusement, j'ai pris beaucoup de plaisir à discuter avec lui des effets de polarisation sur le profil spatial de la lumière, comme le phénomène de réfraction conique, et la possibilité de faire laser ou non ce type de profils en cavité.

Il serait trop long de remercier individuellement tous les membres du département d'optique avec qui j'ai partagé ces trois années de thèse au sein de l'Institut de physique de Rennes. Au risque de décevoir, je leur propose donc un remerciement global qu'ils devront se partager de manière équitable. Ceux qui veulent du rabe peuvent toujours me contacter par *mail*.

Pour continuer, je tiens à remercier les membres du jury d'avoir accepté d'examiner mon travail, et surtout de m'avoir fait passer un bon moment lors de la soutenance en faisant preuve d'une grande bienveillance à laquelle je ne m'attendais pas à ce point. On se fait souvent une montagne de cet évènement que représente la soutenance de thèse, mais finalement cela passe très vite et tout le monde semble heureux à la fin, notamment ceux qui participent au pot.

Je tiens également à remercier tous les membres de l'équipe CAILabs où je travaille actuellement d'être venus m'encourager lors de cet évènement. De plus, je remercie Guillaume et Jean-François qui m'ont permis d'effectuer une mission au sein de l'équipe lors de ma dernière année de thèse, me donnant ainsi une énorme bouffée d'oxygène et de nouveauté pour compléter mes connaissances sur le façonnement de la lumière avec des techniques tout à fait nouvelles pour moi.

Enfin, je remercie très sincèrement tous mes proches et amis qui ont vu l'envers du décor lors de ces trois années de thèse pas forcément évidentes, et qui ont toujours été là pour compenser et soulager mes baisses de moral et de motivation. Je pense dans un premier temps à mes parents qui n'ont pas toujours compris mes choix mais qui m'ont toujours poussé à m'accrocher et à ne jamais abandonner. Je pense également à mes amis Paul, Benjamin, Antoine, Christophe, avec qui il fait bon discuter de projets idéalistes ou simplement boire un coup quand le monde semble contre soi.

Cette page était la plus simple à lire, je vous souhaite bon courage pour la suite.

Table des matières

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Structures transverses des faisceaux lasers **5**
1.1 Faisceaux lasers et modes de propagation 6
1.1.1 L'équation paraxiale et ses solutions 6
1.1.2 Modes propres d'une cavité vide 11
1.1.3 Modes propres d'une cavité avec gain ou pertes linéaires 15
1.2 Laser à cavité non–dégénérée et modes transverses d'ordre unique 21
1.2.1 Observations expérimentales de modes Hermite, Laguerre et Ince–Gauss . 22
1.2.2 Construction des modes d'ordre supérieur à l'aide d'opérateurs 28
1.2.3 Quelques curiosités 37
1.3 Laser à cavité dégénérée 43
1.3.1 Propriétés de base 43
1.3.2 Observations expérimentales issues de la littérature 46
1.3.3 Construction des modes géométriques 49

2 Méthodes de calcul de profils transverses stationnaires d'un laser **57**
2.1 Critère analytique de sélection de modes 58
2.1.1 Intégrale de recouvrement mode–gain 58
2.1.2 Quelques prédictions 62
2.2 Méthode de Fox–Li 72
2.2.1 Modélisation des éléments optiques et choix de la distribution initiale . . . 72
2.2.2 Évaluation de la méthode dans le cas non–dégénéré 75
2.2.3 Zones de dégénerescence 83
2.3 Calcul de profils transverses stationnaires 91
2.3.1 Adaptation de la méthode de Fox–Li pour un gain saturé 92
2.3.2 Calcul de profils transverses dans le cas monomode 97
2.3.3 Calcul de profils transverses multimodes 106

3 Observations expérimentales et comparaisons avec la théorie **113**
3.1 Laser plan–concave stable en cavité étendue 113
3.1.1 Montage expérimental 114
3.1.2 Cavité non–dégénérée et pompe parallèle à l'axe optique 120
3.1.3 Cavité non–dégénérée et pompe inclinée sur l'axe optique 124
3.1.4 Étude de la dégénérescence particulière autour de $L = R_c/2$ 127
3.2 Laser plan–concave en configuration *microchip* 134
3.2.1 Montage et observations expérimentales 135
3.2.2 Discussion 137
3.3 Laser plan–concave en limite de stabilité 139
3.3.1 Observations expérimentales dans un laser néodyme–YAG 139
3.3.2 Observations expérimentales dans un laser titane–saphir 140
3.3.3 Résultats de simulations et discussion 142

Conclusion générale et perspectives **147**

A Largeur des zones de dégénérescence **153**
A.1 Zones de dégénérescence dans le régime linéaire 153
A.2 Zones de dégénérescence dans le régime stationnaire 155

B Vortex tournants en z **159**
B.1 Composition de vortex de même hélicité 159
B.2 Composition de vortex d'hélicités différentes 161
B.3 Phase de Gouy et rotation d'un réseau de vortex 162

Publications personnelles **163**

Bibliographie **165**

Introduction générale

Depuis l'invention du laser et la possibilité qu'il offre de générer des faisceaux lumineux monochromatiques, cohérents et d'excellente qualité spatiale, la lumière visible a pu être étudiée en tant que pur objet physique telle que la décrivent l'équation de Helmholtz ou l'équation de propagation de Huygens–Fresnel. Plusieurs solutions de ces équations possédant des caractéristiques particulières ont été étudiées au fil des années. Par exemple, on a pu montrer qu'il existait des solutions exactes non diffractantes de l'équation de Helmholtz [1], à géométrie cylindrique. En toute rigueur, ces solutions possèdent une énergie infinie mais il est possible d'en obtenir des approximations que l'on nomme faisceaux de Bessel. La première génération d'un faisceau de Bessel a été obtenue lors d'une expérience de diffraction d'un faisceau laser par une ouverture annulaire [2]. De nos jours, des faisceaux de Bessel de bien meilleure qualité peuvent être obtenus en transformant un faisceau gaussien fondamental à l'aide d'une lentille conique ou *axicon*. Il semble que l'approximation d'un faisceau de Bessel invariant par propagation soit encore meilleure avec l'utilisation de deux *axicons* [3]. De part leurs capacités d'auto régénération et de propagation de manière quasiment invariante sur des distances de plusieurs centimètres, ces faisceaux originaux trouvent des applications en microscopie [4] ou dans la réalisation de pinces optiques pour la manipulation de particules [5, 6].

Récemment, des nouvelles solutions exactes non diffractantes de l'équation de Schröedinger possédant une symétrie axiale ont été découvertes [7]. De part l'analogie formelle existant entre l'équation paraxiale de propagation des ondes et l'équation de Schröedinger en remplaçant la coordonnée temporelle par l'axe de propagation du faisceau, ces solutions existent également dans le domaine de l'optique des lasers. De même que pour les faisceaux de Bessel, ces solutions possèdent une énergie infinie mais peuvent être approximées par des faisceaux d'énergie finie que l'on nomme faisceaux d'Airy. En plus de la propriété de très faible diffraction commune avec les faisceaux de Bessel, les faisceaux d'Airy possèdent la propriété étonnante d'être accélérés au cours de leur propagation. Cette accélération se manifeste par le fait que le lobe principal d'intensité maximale du faisceau ne se propage pas en ligne droite mais suit une trajectoire parabolique [8]. Évidemment, lorsque le faisceau est d'énergie finie, le centre de masse de l'énergie, lui, se déplace en ligne droite [9] afin de ne pas violer les lois de conservation de la physique. Ces faisceaux originaux ont pu être observés pour la première fois en appliquant un masque de phase cubique à un faisceau gaussien fondamental [10] à l'aide d'un SLM (*Spatial Light Modulator*).

Au delà de ces propriétés étonnantes, Allen *et coll.* ont montré que les faisceaux Laguerre–Gauss particuliers possédant des vortex, ou singularités de phase, possèdent un moment angulaire

orbital pouvant exercer un couple sur un milieu matériel [11]. De tels faisceaux peuvent être obtenus à partir de modes Hermite–Gauss usuels transformés au travers d'un couple de lentilles cylindriques adaptées [12]. Il est intéressant de souligner que la présence de vortex conférant un moment orbital à un faisceau laser peut tout à fait s'additionner à la propriété de non diffraction des faisceaux de Bessel [13]. Expérimentalement, en injectant un mode Laguerre–Gauss possédant un moment angulaire orbital au travers d'un *axicon*, on obtient un faisceau de Bessel d'ordre supérieur possédant le même moment angulaire orbital [14].

Comme nous l'avons montré, les modes transverses originaux auxquels nous venons de faire référence sont traditionnellement obtenus par le façonnement de faisceaux lasers usuels à l'aide d'éléments optiques positionnés hors cavité. Concernant la formation des modes transverses à l'intérieur d'une cavité laser, les familles de modes usuels Hermite–Gauss et Laguerre–Gauss sont connues depuis longtemps et certains de ces modes ont été observés dès les premiers instants du laser [15]. Cependant, la compréhension exacte de la sélection des modes stationnaires dans un laser demeure un sujet d'actualité, notamment depuis la dérivation analytique et quelques observations expérimentales d'une nouvelle famille de modes Ince–Gauss [16, 17]. Dans les cavités laser conventionnelles constituées de miroirs plans ou concaves et ne contenant aucun autre élément optique en cavité, ce sont les gains et les pertes qui vont jouer un rôle essentiel dans la sélection de ces structures transverses, parmis l'ensemble des faisceaux gaussiens représentant des modes propres de la cavité. Il est également possible de construire des cavités à l'aide de miroirs déformables réalisés sur mesure, possédant des bases de modes propres différentes des familles de modes usuelles [18]. Certaines approches naïves ont pourtant été suivies en raisonnant comme si il était possible de construire un mode intracavité de la même manière que l'on façonne un mode gaussien à l'aide d'éléments optiques hors cavité. C'est le cas de l'expérience de Khilo *et coll.* réalisée en 2001 qui consiste à simplement insérer un *axicon* à l'intérieur d'une cavité plan–concave pour y générer un faisceau de Bessel [19]. Les résultats expérimentaux obtenus sont de qualité plutôt discutable et peu convaincants, fait reconnu par les auteurs eux-mêmes. Même si nous aborderons dans cette thèse uniquement la formation des modes transverses dans une cavité plan–concave, nous espérons que les raisonnements développés dans ce manuscrit permettront de convaincre le lecteur qu'une telle expérience n'a aucune chance de donner des résultats probants. En revanche, l'approche ultérieure développée par Litvin *et coll.* [20], s'appuyant sur une cavité à miroirs asphériques de sorte que le faisceau de Bessel visé soit réellement un mode propre de la cavité, est tout à fait convaincante et ne demanderait qu'à être réalisée expérimentalement. Concernant la génération de faisceaux d'Airy, il n'existe à notre connaissance aucune expérience ayant abouti à leur formation directe intracavité. Néanmoins, une expérience originale a été réalisée par Porat *et coll.* consistant à utiliser un réseau de diffraction modulé par une phase cubique en tant qu'un des miroirs de la cavité [21]. Ainsi, l'odre 0 de diffraction reste un faisceau gaussien et constitue réellement le mode laser en cavité, tandis que l'ordre 1 de diffraction est un faisceau d'Airy sortant du laser avec un angle particulier. Cette expérience a été reprise par l'équipe de Forbes *et coll.* en utilisant un SLM mais nécessite une puissance de pompe autrement plus importante [22]. Il existe par ailleurs une étude théorique faite par Longhi concernant la possibilité d'émission d'un faisceau d'Airy par une cavité laser *microchip* aux faces non parallèles [23]. Cette prédiction théorique basée sur une étude analytique dans laquelle le passage

de une à deux dimensions transverses est loin d'être évident reste néanmoins à être confirmée expérimentalement ou par une simulation numérique.

Enfin, la question de la formation des modes transverses dans les lasers a parfois été associée à l'étude de l'émergence de *patterns*, s'inscrivant dans le vaste domaine des phénomènes non linéaires en physique. Dans le cas de l'optique, de tels *patterns* peuvent par exemple être observés en propageant un faisceau laser incident à travers un milieu non linéaire saturable, conduisant à une filamentation du faisceau en champ proche et à l'observation de motifs aux structures variées en champ lointain, après une propagation en espace libre [24]. Certaines observations de motifs hexagonaux en utilisant un milieu Kerr et un miroir de renvoi on également été rapportées [25]. La possibilité d'observer de tels *patterns* directement issus d'un laser reste une question ouverte, même si la seule manifestation connue des effets Kerr opérant dans un milieu actif en cavité étendue est le fonctionnement du laser en régime impulsionnel. Cependant, certaines observations réalisées dans un VECSEL (*Vertical–Cavity Surface–Emitting Laser*) par Hegarty *et coll.* [26] pourraient mettre en jeu de telles non linéarités. Les effets de dégénérescence de modes dûs à la taille très courte de ce type de cavité constitueraient alors un élément clef de la compréhension de telles observations.

C'est dans le contexte de compréhension générale de la sélection des modes transverses dans une cavité possédant du gain et des pertes que nous abordons cette thèse. Par souci de simplicité et afin de pouvoir nous confronter aux expériences expérimentales, nous nous limitons toutefois au cas de cavités plan–concave, constituées d'un miroir plan et d'un miroir sphérique. Il faut voir les travaux de cette thèse comme une synthèse complète et un approfondissement de la compréhension de toutes les observations qu'il est possible de réaliser dans une cavité plan–concave pompée longitudinalement [27, 28], y compris dans des configurations dégénérées et au delà de la limite de stabilité géométrique de la cavité.

Le plan de cette thèse se déroule en trois chapitres et deux annexes. Le premier chapitre constitue en grande partie un état de l'art concernant la structure transverse des faisceaux lasers, contenant entre autres une description des familles de modes usuels et des modes propres des cavités plan–concave non–dégénérées ou dégénérées. Il contient cependant déjà quelques critiques vis-à-vis de l'utilisation courante de familles de modes usuels comme références absolues pour la description des modes pouvant osciller en cavité, ainsi qu'une méthode de construction de modes transverses d'ordre supérieur à l'aide d'opérateurs qui n'est pas présente dans la littérature.

Le second chapitre développe un critère analytique permettant de comprendre très intuitivement la sélection des modes transverses dans les configurations de cavité non–dégénérées. Quelques conclusions issues de l'utilisation de ce critère diffèrent par ailleurs notablement de certaines affirmations présentes dans la littérature. Nous développerons dans ce même chapitre une méthode numérique de type Fox–Li afin de comprendre la sélection de modes s'opérant avant l'intervention de la saturation du gain dans le milieu amplificateur. Cette méthode viendra confirmer la validité du critère analytique développé précédemment. Par la suite, nous montrerons comment la prise en compte de la saturation dans le modèle pose des questions concernant la pertinence physique des modes stationnaires calculés. À l'aide de ce modèle numérique, nous mettrons en avant une description raffinée et nouvelle des zones de dégénérescence apparaissant dans la cavité à la fois dans les régimes linéaire et saturé, ainsi que les observations originales de

modes transverses qui peuvent y prendre place. Afin de posséder un modèle totalement cohérent vis-à-vis des différentes situations de pompage pouvant exister, nous seront également amenés à développer et à discuter d'un modèle multimode transverse.

Le troisième chapitre contient essentiellement des observations expérimentales ainsi que leur confrontation au modèle numérique simple que nous avons développé. Nous verrons alors que le rôle des effets thermiques doit absolument être pris en compte pour reproduire correctement les profils transverses observés, particulièrement dans les zones de dégénérescence. À la fin de ce chapitre, une étude du fonctionnement du laser au delà de la limite de stabilité nous permettra de combiner toutes les connaissances acquises au cours de cette thèse concernant le guidage par le gain, les effets de dégénérescence ainsi que les effets thermiques, afin de reproduire et d'interpréter convenablement les observations expérimentales réalisées. Nous insisterons notamment sur le fait que les interprétations usuelles en termes de lentille thermique sphérique permettant de changer la stabilité géométrique de la cavité sont complètement dépassées.

Enfin, cette thèse contient deux courtes annexes dont la première est une étude purement numérique concernant la largeur des zones de dégénérescence dans les régimes linéaire et saturé du laser. Nous montrons que dans le premier cas ces largeurs dépendent uniquement du gain petit signal tandis qu'elles dépendent uniquement des pertes dans le second. La seconde annexe contient une description de modes originaux constitués de multiples vortex, et ayant la propriété de se propager en tournant autour de l'axe de propagation. Ces modes constituent une curiosité apparaissant lors de la mise en oeuvre d'un algorithme de Fox–Li naïf prenant en compte la saturation dans une situation de pompage gros, mais ne peuvent en aucun cas constituer les états stationnaires d'un laser.

Chapitre 1

Structures transverses des faisceaux lasers

Ce premier chapitre a pour objectif d'introduire les structures tranverses des faisceaux lasers, c'est à dire les profils d'intensité et de phase des ondes dans des plans orthogonaux à la direction de propagation. Dans l'ensemble de cette thèse, nous nous intéresserons uniquement à la description et au calcul de champs lasers stationnaires, ce qui simplifiera considérablement notre analyse sans pour autant nuire à la description des phénomènes observés. L'objet principal de notre étude étant la formation des structures transverses au sein même d'une cavité laser, nous serons amenés à définir la notion de modes propres des cavités, dans lesquelles les conditions aux limites imposées ne permettent l'oscillation que d'une classe restreinte de solutions de l'équation des ondes. Considérant uniquement des champs stationnaires, nous verrons rapidement que la connaissance de la distribution du champ électrique dans un plan transverse donné permet de connaître la distribution de ce même champ dans n'importe quel autre plan. Nous pourrons alors nous intéresser à l'évolution des profils d'intensité et de phase lors du passage d'un plan transverse à un autre, permettant ainsi de caractériser et classifier certaines structures transverses particulières. Par exemple, certaines distributions du champ électrique ont la propriété de se propager sans changer de forme, à la divergence et à une phase sphérique près. Bien que cette propriété apparaisse au premier abord très restrictive, la classe des solutions qui la respectent est très riche et constitue la majeure partie des profils transverses que l'on peut observer dans un laser à cavité stable et aux miroirs sphériques. Les modes Hermite–Gauss et Laguerre–Gauss constituent des exemples bien connus de ces distributions invariantes par propagation.

De manière générale, un champ électromagnétique peut présenter des profils d'intensité et de phase très différents en fonction des plans dans lesquels on les observe, comme le démontre n'importe quelle expérience de diffraction ou d'interférence. Pour s'en convaincre il suffit par exemple de se remémorer la figure des franges d'interférence obtenues en laissant diffracter une distribution initiale constituée de deux disques de faible rayon séparés dans l'espace, comme dans l'expérience des trous d'Young. Bien que moins usuelles, de telles distributions sont tout à fait accessibles au champ issu d'une cavité laser conventionnelle, mais pour les introduire nous aurons besoin d'expliciter la notion de dégénérescence de cavité.

1.1 Faisceaux lasers et modes de propagation

Les faisceaux lasers possèdent la propriété de se propager de manière cohérente, avec une fréquence bien définie, dans une direction privilégiée. Ceci va nous amener à simplifier considérablement l'équation générale de Helmholtz de propagation des ondes électromagnétiques. L'équation de propagation simplifiée que nous allons dériver et utiliser par la suite s'appelle l'équation paraxiale et est parfaitement adaptée à la description des faisceaux lasers. Partant de cette nouvelle équation, nous allons introduire dans un premier temps les modes propres d'une cavité Fabry–Perot vide constituée de deux miroirs d'extension supposée infinie. Nous généraliserons ensuite cette notion de modes propres aux cas de cavités présentant un gain ou des pertes linéaires, tout en faisant très attention à l'interprétation physique que l'on en fera.

1.1.1 L'équation paraxiale et ses solutions

Dans le cadre de notre étude, nous nous restreignons aux champs scalaires et ne tiendrons jamais compte des effets de polarisation. L'équation de d'Alembert du champ scalaire $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ est :

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

où ∇^2 désigne l'opérateur laplacien et c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Nous avons annoncé que nous nous intéressons uniquement aux champs stationnaires, ce qui nous amène à considérer les champs de la forme $\mathbf{E}(x,y,z,t) = E(x,y,z)e^{\mathrm{i}\omega t}$, où ω est la pulsation de l'onde. En injectant cette expression dans l'équation (1.1), nous obtenons l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \tag{1.2}$$

où $k = \omega/c$.

L'approximation paraxiale consiste à privilégier une direction de l'espace dans laquelle les variations de phase de l'onde sont beaucoup plus rapides que dans les autres directions, et les variations d'amplitude sont lentes. Cette direction particulière est alors assimilée à la direction de propagation, que l'on note z. Pour cela, on cherche une solution de la forme

$$E(x,y,z) = u(x,y,z)e^{-\mathrm{i}kz}, \tag{1.3}$$

permettant d'introduire une longueur d'onde spatiale dans le vide $\lambda_0 = 2\pi/k$ dans la direction z. En injectant cette expression dans l'équation (1.2), on obtient l'équation suivante pour l'amplitude $u(x,y,z)$ du champ :

$$\nabla_\perp^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\mathrm{i}k\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{1.4}$$

où $\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est l'opérateur laplacien transverse.

Sous l'hypothèse des variations lentes en z de l'amplitude $u(x,y,z)$, on a :

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \ll \left|2k\frac{\partial u}{\partial z}\right| \text{ et } \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \ll \left|\nabla_\perp^2 u\right|. \tag{1.5}$$

On néglige alors le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ devant chacun des autres dans l'équation (1.4), obtenant ainsi l'équation paraxiale de propagation des ondes :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\mathrm{i}}{2k}\nabla_\perp^2 u. \tag{1.6}$$

Une dérivation et une discussion plus complète sur la validité de l'équation paraxiale peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Siegman [29].

Solutions générales de l'équation paraxiale

L'intérêt de l'équation paraxiale est que, contrairement à l'équation de Helmholtz, celle-ci possède des solutions analytiques exactes, s'avérant très utiles pour décrire les faisceaux lasers au cours de leur propagation et de leur passage par différents éléments optiques (dioptres, miroirs, lentilles).

La recherche de solutions de l'équation paraxiale en coordonnées rectangulaires conduit à la famille de modes les plus connus appelés modes de Hermite-Gauss (HG) :

$$u_{m,n}(x,y,z) = u_{0_{m,n}} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}} e^{-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{\mathrm{i}(n+m+1)\Psi_G(z)}, \tag{1.7}$$

où les (H_n) sont les polynômes d'Hermite d'ordre n, définis de manière récursive par :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{n+1}(x) &= 2x\mathrm{H}_n(x) - \frac{\mathrm{dH}_n}{\mathrm{d}x}(x), \\ \mathrm{H}_0(x) &= 1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ces solutions portent le nom de faisceaux gaussiens car leur amplitude est modulée par une gaussienne dans les plans transverses à la direction z de propagation. Dans l'expression (1.7), les $u_{0_{m,n}}$ sont des constantes de normalisation, $w(z)$ représente la largeur du faisceau, $R(z)$ le rayon de courbure du front d'onde et $\Psi_G(z)$ la phase de Gouy du faisceau. Ces paramètres sont connus par les expressions suivantes :

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \tag{1.9}$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \tag{1.10}$$

$$\Psi_G(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right), \tag{1.11}$$

où

$$z_R = kw_0^2/2. \tag{1.12}$$

Le paramètre z_R est appelé la longueur de Rayleigh et w_0 le col du faisceau (ou *waist*), correspondant à la largeur minimale que possède le faisceau dans le plan transverse ($z = 0$). Chacun de ces modes possède un ordre $p = m+n$ définissant des classes de modes aux propriétés de propagation semblables. Le mode d'ordre $p = 0$ (unique) est appelé le mode fondamental et est souvent utilisé pour illustrer les propriétés principales des faisceaux gaussiens, représentées sur la figure 1.1.

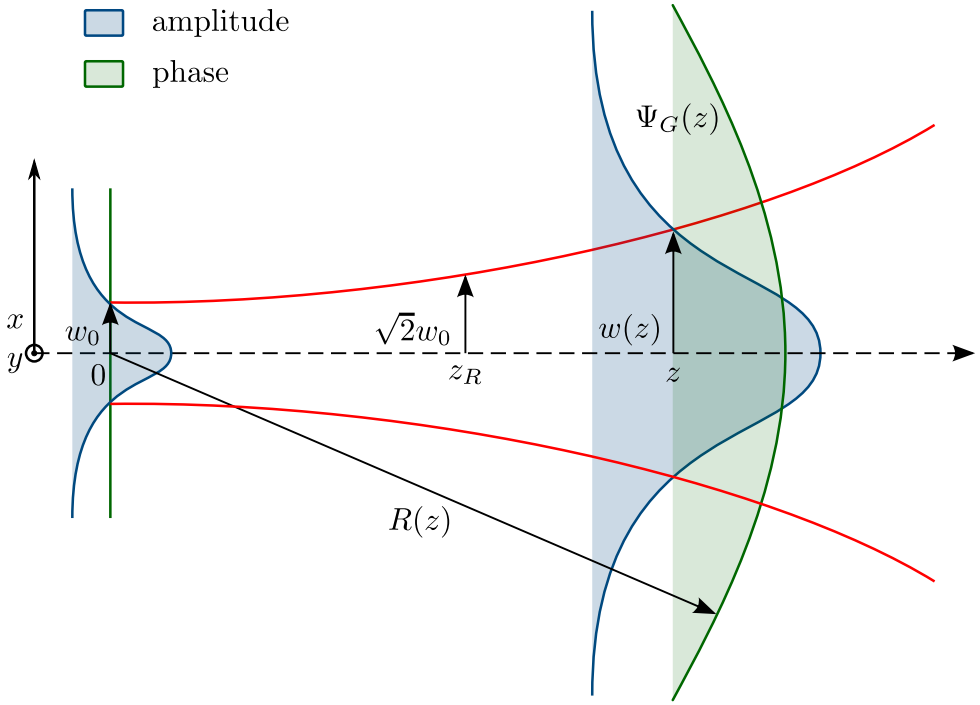


FIGURE 1.1 – Propriétés d'un faisceau gaussien.

Cette famille de modes Hermite-Gauss constitue une base de solutions de l'équation paraxiale. Ces modes ont également la propriété d'être orthogonaux au sens du produit scalaire hermitien pris dans un plan transverse quelconque :

$$\forall z,\ \iint u^*_{m,n}(x,y,z)u_{m',n'}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \delta_{m,m'}\delta_{n,n'}, \tag{1.13}$$

pour un choix convenable des constantes de normalisation $u_{0_{m,n}}$ et $u_{0_{m',n'}}$.

Une des propriétés importantes d'un mode d'ordre p est de se propager en z avec une amplitude conservant sa forme à une homothétie près, comme le montre l'équation (1.7). On parle de mode invariant de forme par propagation. La phase en revanche devient sphérique et accumule une composante constante égale à $(p+1)\Psi_G(z)$, commune à tous les modes de même ordre p. Ainsi toute combinaison linéaire de modes d'ordre p constituera toujours un mode d'ordre p invariant de forme par propagation, tandis qu'une combinaison linéraire de modes d'ordres dif-

férents possèdera des profils transverses de formes potentiellement très différentes en fonction de la distance z de propagation.

Différentes bases de solutions

Nous venons de présenter la famille la plus connue des modes Hermite-Gauss en coordonnées cartésiennes (x,y), dont nous notons les éléments $\mathrm{HG}_{m,n}$. On peut remarquer que les zéros du champ, ou lignes nodales, suivent des droites du repère cartésien, et qu'un mode $\mathrm{HG}_{m,n}$ présente m lignes nodales verticales et n lignes nodales horizontales. Ces modes sont invariants de forme par propagation et permettent de décomposer linéairement toute solution de l'équation paraxiale. Il faut noter que le choix de w_0 en $z = 0$ pour former une famille complète et orthogonale de modes est totalement arbitraire. Pour w_0 donné il existe $p + 1$ modes $\mathrm{HG}_{m,n}$ d'ordre $p = m + n$ linéairement indépendants. Les modes d'ordre p définissant des sous-espaces stables par combinaisons linéaires, on peut envisager de fabriquer de nouvelles bases orthogonales en effectuant des transformations linéaires unitaires au sein de chaque sous-espace d'ordre p.

La deuxième base de solutions de l'équation paraxiale la plus connue est la famille de modes Laguerre-Gauss (LG), qui s'obtient naturellement en résolvant l'équation paraxiale en coordonnées cylindriques (r,θ,z), telles que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Leurs expressions analytiques en coordonnées cylindriques sont les suivantes :

$$u^e_{n,l}(r,\theta,z) = u_{0_{n,l}} L^l_n\left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right)\cos(l\theta)e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}e^{-\mathrm{i}k\frac{r^2}{2R(z)}}e^{\mathrm{i}(2n+l+1)\Psi_G(z)}, \quad (1.14)$$

$$u^o_{n,l}(r,\theta,z) = u_{0_{n,l}} L^l_n\left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right)\sin(l\theta)e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}e^{-\mathrm{i}k\frac{r^2}{2R(z)}}e^{\mathrm{i}(2n+l+1)\Psi_G(z)},\ n,l>0, \quad (1.15)$$

où les (L^l_n) sont les polynômes de Laguerre généralisés et les exposants o et e signifient respectivement *odd* et *even*, selon que le mode présente une ligne nodale horizontale $y = 0$ ou non. L'ordre de ces modes est donné par $p = 2n + l$, et ceux-ci présentent n lignes nodales circulaires et l lignes nodales radiales. Nous désignons désormais ces modes par les notations $\mathrm{LG}^e_{n,l}$ et $\mathrm{LG}^o_{n,l}$. Souvent, dans la littérature, la distinction entre modes pairs et impairs n'est pas faite car il est possible de travailler avec des modes de type vortex $\mathrm{LG}_{n,l} = \mathrm{LG}^e_{n,l} + \mathrm{iLG}^o_{n,l}$ et leurs conjugués. La dérivation complète des relations de passage entre les modes LG et HG est réalisée dans un article de Kimel et Elias [30].

Une troisième base de solutions connue est la famille des modes Ince-Gauss (IG), qui s'obtient en résolvant l'équation paraxiale en coordonnées elliptiques (ξ,η,z), reliées aux coordonnées cartésiennes par $x = f_0\frac{w(z)}{w_0}\cosh\xi\cos\eta$ et $y = f_0\frac{w(z)}{w_0}\sinh\xi\sin\eta$. Cette nouvelle famille a été introduite plus récemment (2004) par Bandres *et coll.* [16, 31], et permet de décrire une transition continue entre les modes HG et LG. En effet, le choix d'un repère de coordonnées elliptiques introduit un paramètre libre continu f_0, de position d'un des foyers des ellipses et hyperboles dans le plan du waist. Pour caractériser ces modes on utilise plus communément le paramètre sans dimension $\epsilon = 2f_0^2/w_0^2$, appelé ellipticité du mode. Leurs expressions analytiques en coordonnées

elliptiques sont données par :

$$u^e_{p,m}(r,\theta,z) = u^e_{0_{p,m}} C^m_p(\mathrm{i}\xi,\epsilon) C^m_p(\eta,\epsilon) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{-\mathrm{i}k\frac{r^2}{2R(z)}} e^{\mathrm{i}(p+1)\Psi_G(z)},\ 0 \leq m \leq p, \quad (1.16)$$

$$u^o_{p,m}(r,\theta,z) = u^o_{0_{p,m}} S^m_p(\mathrm{i}\xi,\epsilon) S^m_p(\eta,\epsilon) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{-\mathrm{i}k\frac{r^2}{2R(z)}} e^{\mathrm{i}(p+1)\Psi_G(z)},\ 1 \leq m \leq p, \quad (1.17)$$

où (C^m_p) et (S^m_p) sont les polynômes de Ince, respectivement pairs et impairs. Selon cette nomenclature, l'ordre du mode est donné directement par l'indice p, tandis que m correspond au nombre de lignes nodales hyperboliques. Le nombre de lignes nodales elliptiques est alors de $(p-m)/2$, contraignant p et m à avoir la même parité. Les modes Ince-Gauss pairs et impairs sont notés respectivement $\mathrm{IG}^e_{p,m}$ et $\mathrm{IG}^o_{p,m}$. La figure 1.2 montre comment cette nouvelle famille de modes IG permet de passer continuement des modes LG aux modes HG en faisant simplement varier leur ellipticité de zéro à l'infini.

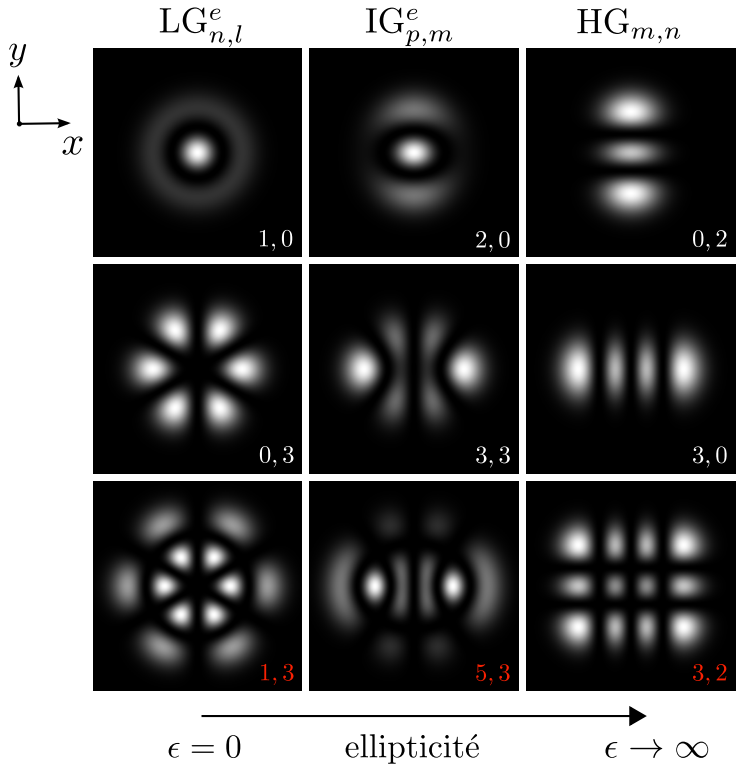


FIGURE 1.2 – Transition entre les modes LG et HG, par les modes IG.

Propagation des faisceaux gaussiens

Tout mode invariant de forme par propagation est entièrement déterminé par la connaissance de la longueur de Rayleigh z_R reliée à w_0 par l'équation (1.12) et la distance au waist z. La longueur d'onde λ_0 étant donnée, la connaissance de ces deux grandeurs suffit en effet à calculer la taille du faisceau $w(z)$ (1.9), le rayon de courbure du front d'onde $R(z)$ (1.10) et la phase de Gouy $\Psi_G(z)$ (1.11) en tout plan transverse à la position z. Un paramètre appelé rayon de

courbure complexe du faisceau et noté q est alors introduit :

$$\tilde{q} = z + \mathrm{i}z_R. \tag{1.18}$$

Étant donné un système optique quelconque pouvant être décrit par une matrice ABCD dans le cadre de l'optique géométrique [32], le rayon de courbure complexe après la traversée du système est donné par [32, 33] :

$$\tilde{q}' = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \tag{1.19}$$

Cette équation très simple nous permettra de caractériser les modes propres de la cavité plan–concave dans la sous–section suivante. Cependant, si on souhaite calculer la transformation appliquée à un champ électrique arbitraire par un système optique ABCD, l'utilisation de cette équation peut s'avérer laborieuse à cause de la nécessité de prendre en compte à la main l'évolution de la phase de Gouy de chaque mode de base constituant le champ initial. Pour traiter un tel problème, on préfère utiliser une intégrale de Huygens–Fresnel généralisée, valable dans le cadre de l'approximation paraxiale, dont l'équation pour l'évolution de l'amplitude complexe du champ entre le plan initial (x_0,y_0,$z_0 = \text{cste}$) et le plan final (x,y,$z = \text{cste}$) est la suivante [34] :

$$u(x,y,z) = \iint K(x,x_0)K(y,y_0)u(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0, \tag{1.20}$$

où

$$K(r,r_0) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{B\lambda_0}} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{B\lambda_0}\left(Ar^2 - 2rr_0 + Dr_0^2\right)} \tag{1.21}$$

est appelé le noyau de propagation à une dimension. Cette méthode de propagation des champs stationnaires se prête bien à une implémentation numérique et est à la base de l'algorithme de calcul des modes propres de cavité que nous présenterons à la fin de cette section.

L'intégrale (1.20) peut être vue comme un opérateur linéaire $\mathbf{M}_K$ permettant de propager une distribution de champ d'un plan initial vers un autre, permettant une notation plus générique :

$$u(z) = \mathbf{M}_K u(z_0), \tag{1.22}$$

où les coordonnées transverses (x,y) ne sont plus nécessaires à la compréhension.

Cet opérateur de propagation sera très utile par la suite lorsque l'on souhaitera écrire l'opérateur d'aller–retour d'une onde dans une cavité étendue dans le but de calculer ses modes propres, la propagation dans le vide jouant un rôle de première importance.

1.1.2 Modes propres d'une cavité vide

Les modes propres d'une cavité sont les solutions de l'équation des ondes tenant compte des conditions aux limites imposées par les miroirs ainsi que tous les éléments intracavité. Nous nous intéressons tout d'abord aux modes propres d'une cavité vide, dont les miroirs la constituant sont supposés d'extension infinie.

Stabilité d'une cavité

Par souci de simplification des expressions analytiques présentées, nous considérerons uniquement des configurations de cavités plan–concave, constituées d'un miroir plan et d'un miroir sphérique concave. Les deux miroirs sont supposés parfaitement réfléchissants, la longueur de la cavité est L et le rayon de courbure du miroir sphérique est R_c.

Une telle cavité peut être décrite par la matrice ABCD $M_{cav} = M_L M_{R_c} M_L$ où M_L est la matrice ABCD de propagation d'une longueur L dans le vide et M_{R_c} est la matrice ABCD du miroir sphérique. Dans cette description, la cavité est vue dépliée évitant ainsi d'avoir à changer la direction de propagation après réflexion sur un des miroirs. Ceci permet de continuer à utiliser l'équation paraxiale (1.6) sans changement de signe. On a donc :

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{R_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_c} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{cav} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_c} & 2L\left(1 - \frac{L}{R_c}\right) \\ -\frac{2}{R_c} & 1 - \frac{2L}{R_c} \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

La notion de stabilité d'une cavité repose sur un critère d'optique géométrique, selon lequel une cavité est stable si tout rayon lumineux initialement introduit reste confiné indéfiniement à l'intérieur de cette cavité au cours de ses aller–retours successifs, comme l'illustre la figure 1.3.

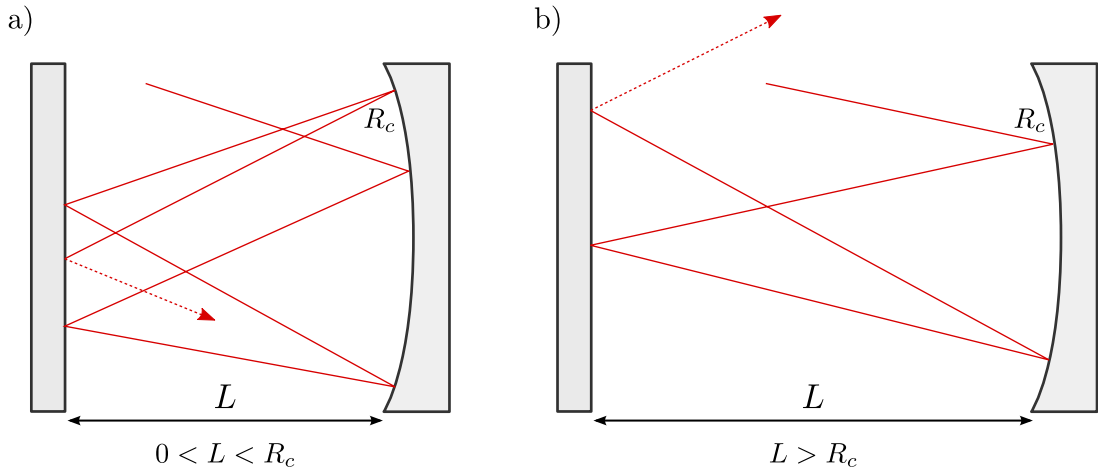


FIGURE 1.3 – Représentation schématique du trajet d'un rayon lumineux quelconque dans une cavité stable (a) et instable (b).

La matrice M_{cav} étant de déterminant égal à un, ses valeurs propres σ_+ et σ_- sont nécessairement inverses l'une de l'autre, soit réelles, soit exponentielles complexes. Dans le premier cas, on voit qu'une des valeurs propres de M_{cav}^N va diverger, conduisant à la sortie des rayons lumineux de la cavité pour un nombre d'aller–retours N suffisamment grand. Dans le second cas, les valeurs propres de M_{cav}^N restent des exponentielles complexes quelque soit N, conduisant à un confinement des rayons dans la cavité. Mathématiquement, ceci impose que le discriminant de l'équation aux valeurs propres $\det(M_{cav} - \sigma_\pm I) = 0$ doit être négatif. Ceci conduit immédiatement à la condition de stabilité :

$$0 < L < R_c. \tag{1.24}$$

Condition de bouclage sur l'amplitude

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, nous cherchons les modes propres d'une cavité plan–concave parmi la famille des faisceaux gaussiens. Pour cela, on considère un faisceau gaussien de rayon de courbure complexe $\tilde{q} = z + \mathrm{i}z_R$ au niveau du miroir plan. En vertu de l'équation (1.19) et de l'expression de M_{cav} (1.23), le nouveau rayon de courbure complexe du faisceau au niveau du miroir plan après un aller–retour dans la cavité s'écrit :

$$\tilde{q}' = \frac{(R_c - 2L)\tilde{q} + 2L(R_c - L)}{-2q + Rc - 2L}. \tag{1.25}$$

La condition de bouclage sur l'amplitude imposant de plus $\tilde{q} = \tilde{q}'$, on a :

$$\tilde{q}^2 = -L(R_c - L). \tag{1.26}$$

La condition de stabilité (1.24) impose de plus que q soit imaginaire pur, soit $\tilde{q} = \mathrm{i}z_R$, avec

$$z_R = \sqrt{L(R_c - L)}. \tag{1.27}$$

Tout mode propre gaussien de cette cavité possède donc son waist au niveau du miroir plan. De plus, on peut calculer le rayon de courbure complexe d'un tel mode propre au niveau du miroir sphérique en appliquant la règle de propagation (1.19) avec la matrice de propagation M_L définie précédemment (1.23). On trouve tout simplement $\tilde{q}_L = L + \mathrm{i}z_R$. L'équation (1.10) permet d'en déduire le rayon de courbure du front d'onde au niveau du miroir sphérique, qui est $R(L) = R_c$. Les fronts d'ondes des modes propres de la cavité épousent donc parfaitement les courbures des miroirs qui la constituent. Ceci est un résultat très général qui s'applique aussi bien pour des cavités concave–concave que pour des cavités aux miroirs asphériques [18].

Le raisonnement précédent montre que tout mode gaussien d'ordre unique de waist localisé sur le miroir plan et caractérisé par une longueur de Rayleigh z_R donnée par (1.27), revient égal à lui même à une phase près lorsqu'on lui applique l'opérateur d'aller–retour de la cavité (1.22) avec la matrice M_{cav} (1.23). Nous verrons bientôt comment assurer une condition de bouclage sur la phase du champ physique E, mais nous souhaitons avant cela discuter de ce qui se passe dans le cas de combinaisons linéaires de modes gaussiens d'ordres différents satisfaisant aux critères précédents.

Notons $\mathbf{M}_{cav}$ l'opérateur d'aller–retour défini par la cavité. Pour tout mode u_p d'ordre p de waist localisé sur le miroir plan et de longueur de Rayleigh z_R donnée par (1.27), on a :

$$\mathbf{M}_{cav} u_p = e^{\mathrm{i}2(p+1)\Psi_G(L)} u_p, \tag{1.28}$$

où $\Psi_G(L) = \arctan(L/z_R)$ est la phase de Gouy accumulée par le mode entre le miroir plan et le miroir sphérique (ou inversement). On peut donc voir u_p comme un vecteur propre de $\mathbf{M}_{cav}$, justifiant ainsi son appellation de mode propre de la cavité.

Considérons une nouvelle distribution u de l'amplitude complexe du champ au niveau du miroir plan, définie comme une combinaison linéaire de deux modes d'ordres p et p' différents,

$p' > p$:

$$u = u_p + u_{p'}. \tag{1.29}$$

L'opérateur d'aller–retour $\mathbf{M}_{cav}$ agit de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_{cav} u = e^{\mathrm{i}2\Psi_G(L)} \left(e^{\mathrm{i}2p'\Psi_G(L)} u_p + e^{\mathrm{i}2p\Psi_G(L)} u_{p'} \right), \tag{1.30}$$

où contrairement à (1.28), l'amplitude u donnée par (1.29) n'est plus un vecteur propre de $\mathbf{M}_{cav}$ dans le cas général. Pour que u soit de nouveau un vecteur propre de $\mathbf{M}_{cav}$, la phase de Gouy doit vérifier la condition suivante :

$$\Psi_G(L) = \frac{k}{p' - p}\pi = \frac{k}{N}\pi,\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.31}$$

Réciproquement, pour tout $N > 0$, lorsque $\Psi_G(L)$ vérifie l'équation (1.31), toute combinaison linéaire de modes propres de base dont les ordres sont égaux modulo N définit un nouveau mode propre de $\mathbf{M}_{cav}$. Les longueurs particulières pour lesquelles l'équation (1.31) est satisfaite sont appelées longueurs de dégénérescence et sont données par :

$$L = R_c \sin^2 \left(\frac{k}{N}\pi \right), (k,N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \tag{1.32}$$

où on a utilisé la relation (1.27).

Nous verrons par la suite la mise en évidence expérimentale de ces longueurs de dégénérescence et l'exploitation que le laser en fait pour construire le mode propre le mieux adapté au profil du gain dans le milieu actif.

Condition de bouclage sur la phase

Nous venons de présenter les conditions nécessaires pour qu'une amplitude complexe u définie au niveau du miroir plan soit un vecteur propre de l'opérateur d'aller–retour $\mathbf{M}_{cav}$ défini par la cavité. Les miroirs étant sans pertes, la valeur propre associée est toujours une exponentielle complexe, signifiant que l'amplitude complexe u revient égale à elle même seulement à une phase près. Cependant, un véritable mode stationnaire du champ électrique E doit revenir rigoureusement égal à lui même après un aller–retour dans la cavité. D'après la définition de u introduite dans l'équation (1.3), pour un mode d'ordre p, ceci revient à imposer une pulsation particulière au champ telle que

$$e^{\mathrm{i}2\left(-\frac{\omega_p L}{c} + (p+1)\Psi_G(L)\right)} = 1, \tag{1.33}$$

soit

$$\begin{aligned} \omega_p &= \left(q + \frac{(p+1)}{\pi} \arctan \left(\frac{L}{\sqrt{L(R_c - L)}} \right) \right) \frac{\pi c}{L} \\ &= \left(q + \frac{(p+1)}{\pi} \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{L}{R_c}} \right) \right) \frac{\pi c}{L}, \qquad q \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

L'équation (3.6) montre que les fréquences propres $\nu_p = \omega_p/2\pi$ associées à un mode d'ordre p donné sont discrètes et régulièrement espacées d'un intervalle

$$\Delta\nu_L = \frac{c}{2L}, \tag{1.35}$$

appelé l'intervalle spectral libre du résonateur. De plus, deux modes transverses d'ordres adjacents sont eux aussi séparés d'un intervalle caractéristique

$$\Delta\nu_T = \frac{\Psi_G(L)}{\pi}\Delta\nu_L. \tag{1.36}$$

Ces propriétés sont représentées sur la figure 1.4 ci dessous.

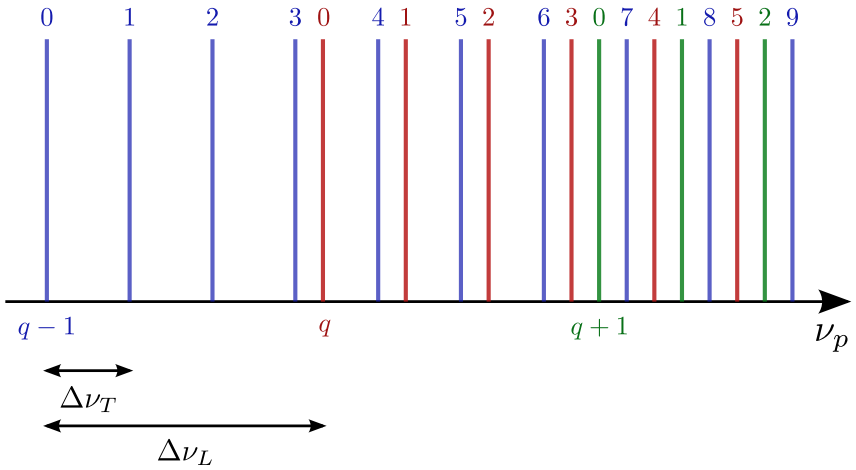


FIGURE 1.4 – Fréquences propres des modes transverses d'un résonateur plan–concave.

Comme précedemment, on constate qu'une dégénérescence en fréquences s'opère lorsque la phase de Gouy $\Psi_G(L) = \frac{k}{N}\pi$, $(k,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. $\Delta\nu_T$ est alors également une fraction rationnelle de $\Delta\nu_L$, entraînant des fréquences propres identiques pour des classes de modes transverses d'ordres égaux modulo N.

1.1.3 Modes propres d'une cavité avec gain ou pertes linéaires

Nous venons de présenter les modes propres stationnaires d'une cavité vide dont les miroirs sont parfaitement réfléchissants et d'extension infinie. De manière générale, nous avons montré que leurs profils transverses sont obtenus en calculant les modes propres de l'opérateur d'aller–retour $\mathbf{M}_{cav}$ défini par la cavité, tandis que leurs fréquences propres sont déterminées de manière indépendante par une condition de bouclage sur la phase du champ réel.

Nous nous intéressons ici au calcul de modes stationnaires d'une cavité dans laquelle un gain et des pertes sont introduits par l'intermédiaire d'un milieu actif pompé et d'une réflectivité partielle du miroir de sortie. Nous nous limitons ici à l'introduction d'un gain et de pertes linéaires. En toute rigueur, pour qu'un mode propre u de $\mathbf{M}_{cav}$ soit stationnaire, le gain et les pertes doivent être telles que le module $|\sigma_u|$ de la valeur propre associée à u soit égal à un. Pourtant, nous

nous autorisons ici à considérer des modes propres dont les valeurs propres sont différentes de un, que nous appelons modes propres du régime linéaire. Pour donner un sens physique à ces modes, nous supposons qu'il existe un régime d'amplification linéaire au début de l'oscillation laser, dans lequel la saturation du gain par l'intensité du mode en cours d'établissement n'a pas encore eu lieu. La valeur de $|\sigma_u|$ peut alors être interprétée comme un facteur d'amplification du mode à chaque aller–retour dans la cavité.

Selon cette vision, il est possible de faire quelques prédictions élémentaires sur la possibilité ou non d'oscillation d'un mode propre u de la cavité. Lorsque $|\sigma_u| < 1$, il n'y a pas d'oscillation envisageable du mode, le seuil d'oscillation laser étant obtenu pour $|\sigma_u| = 1$. En revanche lorsque $|\sigma_u| > 1$ le mode u est amplifié à chaque aller–retour dans la cavité et son oscillation devient possible. Évidemment en pratique une amplification infinie est impossible et tout mode de valeur propre $|\sigma_u| > 1$ finira par saturer le gain, atteignant ainsi un état stationnaire. Une question se pose toutefois dans le cas où plusieurs modes propres ont une valeur propre de module supérieur à un. Il est légitime de se demander quels modes vont alors osciller ? L'hypothèse qui est faite le plus fréquemment est que le mode propre de valeur propre la plus grande va osciller en premier, saturant le gain et empêchant ainsi les autres modes d'osciller dans le cas où le gain restant serait insuffisant. Une autre manière d'éviter le problème est de se placer juste au dessus du seuil et de faire l'hypothèse qu'il n'y a alors plus qu'un seul mode dont le module de la valeur propre est supérieur à un.

Ce modèle linéaire bien que limité dans ses prédictions est néanmoins une étape incontournable avant la prise en compte de la saturation qui sera faite dans le second chapitre. Nous présentons donc ici deux méthodes différentes, une semi–analytique et une purement numérique, permettant de calculer les modes propres d'une cavité avec gain et pertes linéaires, et leurs valeurs propres associées.

Approche semi–analytique

Un algorithme se fondant sur la décomposition sur une base de modes propres de la cavité vide a été proposé par Martel *et coll.* [35]. Les modes propres de la cavité avec gain linéaire s'obtiennent alors en diagonalisant une matrice représentant l'opérateur d'aller–retour de la cavité.

Afin de développer cette approche, nous nous appuyons sur le modèle de cavité plan–concave décrit par la figure 1.5 dans laquelle la distribution de gain $g_0(x,y)$ dépend des coordonnées d'espace x et y mais est fortement localisée dans une tranche de largeur ϵ supposée très petite devant la longueur de Rayleigh z_R. Les pertes sont quant-à elles entièrement dues à la réflectivité partielle en intensité ($R < 1$) du miroir de sortie M_2. De cette manière, il est toujours possible de considérer la base des modes propres de la cavité vide afin de développer l'opérateur d'aller–retour $\mathbf{M}_{cav}$.

Dans l'article [35] les auteurs utilisent la base de modes Laguerre–Gauss pour développer le champ dans la cavité, compte tenu de la configuration à symétrie de révolution qu'ils considèrent. Dans notre cas, nous considérons la base $(u_{m,n})$ des modes Hermite–Gauss introduite précédemment, permettant un raisonnement tout à fait général.

Toute distribution de champ u dans la cavité peut se décomposer sur la base des modes

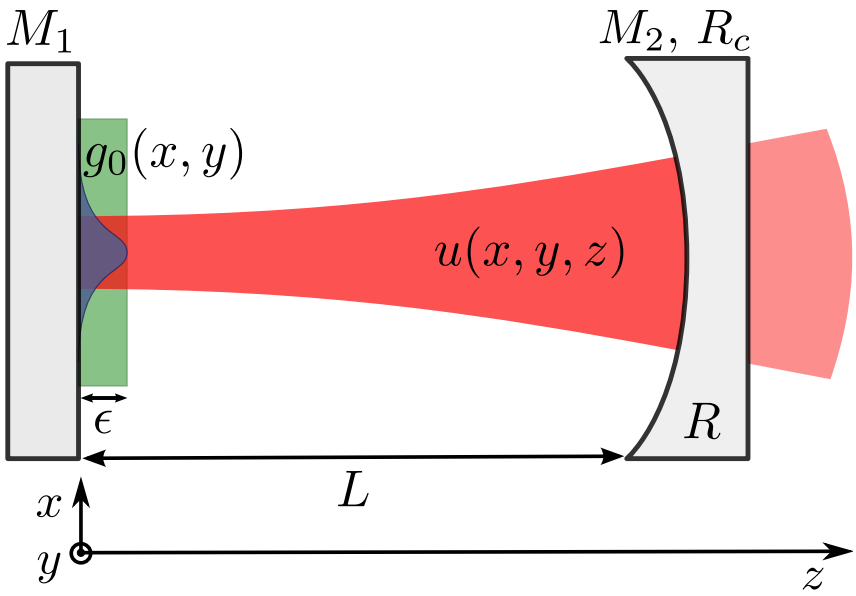


FIGURE 1.5 – Cavité plan–concave avec gain et pertes linéaires localisées en z.

$(u_{m,n})$ et s'écrire

$$u = \sum_{m,n} c_{m,n} u_{m,n}, \tag{1.37}$$

où les $c_{m,n}$ sont des coefficients complexes. On peut alors représenter u sous la forme d'un vecteur colonne (infini)

$$U = \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{1,0} \\ \cdots \\ c_{m,n} \\ \cdots \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

où les $c_{m,n}$ sont ordonnés de manière à ce que les couples de coefficients (m,n) tels que $m+n = p$, $p \in \mathbb{N}$, soient adjacents avec m croissant et n décroissant pour p fixé.

Il reste à développer la matrice $\mathbf{M}_{cav}$ dans la base des modes $(u_{m,n})$ de manière a pouvoir écrire le vecteur u' image de u après un aller–retour dans la cavité sous la forme $U' = \mathbf{M}_{cav} U$. La diagonalisation de $\mathbf{M}_{cav}$ fournira alors la base des modes propres de la cavité ainsi que les valeurs propres associées. Pour cela, nous devons exprimer la famille des $(u_{m',n'})$ images des $(u_{m,n})$ après un aller–retour dans la cavité :

$$u_{m',n'} = \sum_{q,r} \left(\iint u^*_{q,r}(x,y) u_{m,n}(x,y) \sqrt{R} e^{2g_0(x,y)\epsilon} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \right) e^{\mathrm{i}2(m+n+1)\Psi_G(L)} u_{q,r}, \tag{1.39}$$

L'équation (1.39) donne directement les coefficients de la matrice $\mathbf{M}_{cav}$ dans la base des $(u_{m,n})$:

$$\mathbf{M}_{cav} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}2\Psi_G(L)}\sqrt{R}\int |u_{0,0}|^2 e^{2g_0\epsilon} & \cdots & e^{\mathrm{i}2(m+n+1)\Psi_G(L)}\sqrt{R}\int u^*_{0,0}u_{m,n}e^{2g_0\epsilon} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{\mathrm{i}2\Psi_G(L)}\sqrt{R}\int u^*_{m,n}u_{0,0}e^{2g_0\epsilon} & \cdots & e^{\mathrm{i}2(m+n+1)\Psi_G(L)}\sqrt{R}\int |u_{m,n}|^2 e^{2g_0\epsilon} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

dont les coefficients $\mathbf{M}_{cav}[q+r,m+n]$ sont plus généralement donnés par

$$\mathbf{M}_{cav}[q+r,m+n] = e^{\mathrm{i}2(m+n+1)\Psi_G(L)}\sqrt{R}\int u^*_{q,r}u_{m,n}e^{2g_0\epsilon}. \quad (1.41)$$

L'expression (1.41) montre que le gain couple des modes $u_{q,r}$ et $u_{m,n}$ d'ordres différents par l'intermédiaire d'une intégrale de recouvrement avec sa distribution spatiale. Lorsque le gain est uniforme, *i.e.* $g_0(x,y) = \alpha$, les termes de couplage disparaissent et la matrice (1.40) n'a plus que des coefficients diagonaux proportionnels à $\sqrt{R}e^{2\alpha\epsilon}$ et à l'exponentielle complexe de la phase de Gouy de chaque mode. Dans ce cas, les sous–espaces de même ordre p sont dégénérés, c'est-à-dire que toutes les combinaisons linéaires d'ordre p ont la même valeur propre.

La matrice (1.40) n'étant pas hermitique, il est difficile de dire si elle diagonalisable [36]. Cependant, on peut imaginer que pour un gain g_0 faible la situation diffère peu de la propagation libre. De plus, on peut penser qu'un gain même minime peut permettre de lever la dégénérescence des valeurs propres des modes d'un même sous-espace d'ordre p. Une étude mathématique plus approfondie permet de montrer que dans le pire des cas l'opérateur que nous avons représenté par la matrice (1.40) possèdera au moins une valeur propre non nulle [36, 37].

En pratique, si l'on souhaite calculer les modes propres d'un tel système, on doit restreindre la décomposition à un nombre fini de modes de base et donc tronquer la matrice $\mathbf{M}_{cav}$ pour pouvoir la diagonaliser numériquement, d'où la qualification de méthode semi–analytique. Bien que laissant quelques questions en suspens, cette méthode simple a le mérite de bien faire apparaître le changement physique intervenant lorsque l'on introduit un gain dépendant des coordonnées d'espace dans le système, que sont principalement la levée de dégénérescence potentielle des valeurs propres et le couplage entre modes intervenant via les coefficients hors–diagonaux.

Cependant la décomposition d'un champ quelconque sur une base de modes propres est une opération lourde en pratique, d'autant plus que l'on souhaite obtenir une bonne précision et donc utiliser un nombre de modes de base significativement élevé. Une autre méthode pour pallier ce problème est une approche de type Fox–Li, quant-à elle totalement numérique, que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

Approche de type Fox–Li

L'algorithme historique de Fox et Li [38] (1961) a été utilisé pour calculer les modes propres d'un résonateur ouvert dont la sélection entre modes transverses s'opère uniquement au travers des pertes par diffraction sur les miroirs. Dans ce cas, ce sont donc les pertes dépendant de l'espace qui lèvent la dégénérescence sur le module de la valeur propre qui serait le même pour tous les modes dans le cas de miroirs d'extension infinie. Nous proposons ici d'adapter légèrement la

formulation originale en considérant que les miroirs sont toujours d'extension infinie (ou d'extension suffisament grande pour que ceux-ci ne permettent de discriminer que des modes d'ordres très élevés), et en introduisant un gain $g_0(x,y)$ localisé dans l'espace comme dans le paragraphe précédent. Le principe et la validité de la méthode demeurent inaltérés par ces modifications.

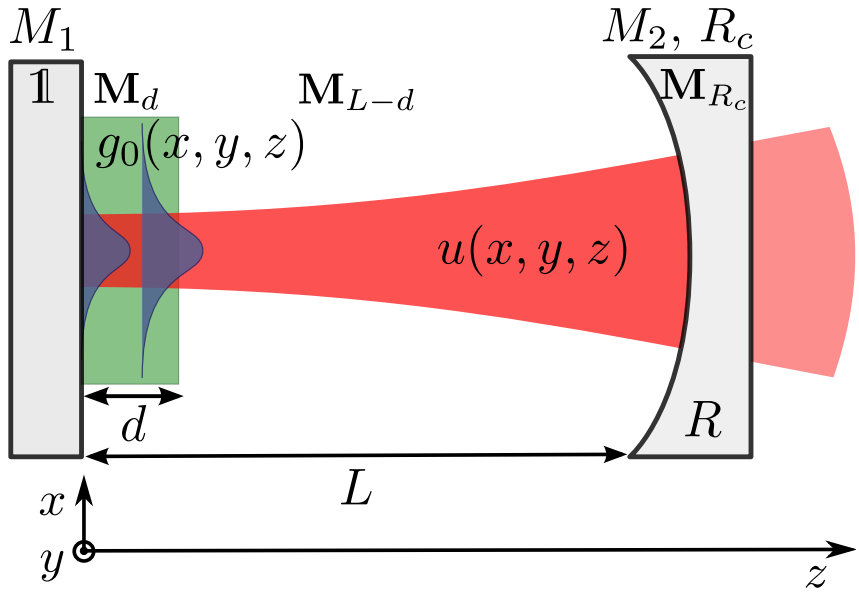


FIGURE 1.6 – Cavité plan–concave avec gain et pertes linéaires, modélisée sous la forme d'une composition d'opérateurs successifs.

Chaque élément constituant la cavité est représenté par un opérateur linéaire comme le montre la figure 1.6. Contrairement au cas précédent, il s'agit ici d'une méthode purement numérique et nous n'avons plus besoin d'effectuer d'hypothèse restrictive sur la taille du milieu actif. Si nécessaire, celui-ci peut sans difficultés être découpé en succession de feuilles de gain séparées par des propagations sur des longueurs suffisamment courtes pour être considérées comme infinitésimales. Le cristal amplificateur est ainsi représenté par un opérateur $\mathbf{M}_d$, la propagation dans le vide par un opérateur $\mathbf{M}_{L-d}$ et le miroir sphérique par un opérateur $\mathbf{M}_{R_c}$ permettant d'écrire $\mathbf{M}_{cav}$ comme la combinaison $\mathbf{M}_d\mathbf{M}_{L-d}\mathbf{M}_{R_c}\mathbf{M}_{L-d}\mathbf{M}_d$. Les opérateurs associés aux différents éléments optiques sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_d &= \exp\left(\int_0^d g_0(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathbf{M}_K[d/n] \\ \mathbf{M}_{L-d} &= \mathbf{M}_K[L-d] \\ \mathbf{M}_{R_c} &= \sqrt{R}\exp\left(\mathrm{i}2\pi\frac{x^2+y^2}{\lambda_0 R_c}\right), \end{aligned} \tag{1.42}$$

où $\mathbf{M}_K[z]$ est l'opérateur de propagation d'une longueur z dans le vide définie par (1.22) et n est l'indice du cristal à la longueur d'onde λ_0 considérée.

La méthode de Fox et Li consiste alors à appliquer itérativement un grand nombre de fois

l'opérateur linéaire $\mathbf{M}_{cav}$ à un champ initial aléatoire u_{init} dont l'intégrale de recouvrement avec le mode propre recherché (supposé exister) est non nulle. De cette manière, le mode propre de la cavité de valeur propre la plus grande présent initialement dans u_{init} finit par représenter la quasi–totalité du champ donné par $\mathbf{M}_{cav}^N u_{init}$, pour N suffisamment grand. Pour obtenir les modes propres associées à des valeurs propres de module de plus en plus petit, il suffit de retrancher de la distribution initiale la projection sur les modes propres déjà calculés. Il est également préférable de les retrancher régulièrement après un certain nombre d'itérations, de manière à ce qu'ils ne réapparaissent pas par l'intermédiaire des termes de couplage mis en évidence dans le paragraphe précédent. Il est intéressant de noter que l'algorithme peut ne pas converger, ou converger très lentement, dans les cas où deux valeurs propres associées à des modes propres différents possèderaient un module identique, ou très proche.

Cette approche simple à mettre en oeuvre sera étendue à la présence d'un effet de saturation du gain dans le second chapitre de cette thèse. Dans ce cadre, nous aurons alors plus d'outils en notre possession pour tenter de répondre à une des questions soulevées dans le paragraphe précédent, à savoir que se passe-t-il expérimentalement dans le cas où plusieurs modes ont des valeurs propres de module supérieur à un dans le régime linéaire ?

Discussion physique

Jusqu'à présent, nous avons travaillé uniquement avec des équations de propagation stationnaires du champ électrique mais nous avons tout de même introduit la notion d'un régime linéaire dans lequel des modes de la cavité sont amplifiés de manière continue au cours du temps. Afin de justifier ce raisonnement, nous allons montrer que sous une certaine approximation l'équation paraxiale stationnaire permet effectivement de décrire la propagation temporelle d'un champ dans la direction z avec une vitesse c. Pour cela, nous devons repartir de l'équation de d'Alembert (1.1) et chercher une solution sous la forme

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = v(x,y,z,t)e^{\mathrm{i}k(ct-z)}. \tag{1.43}$$

L'amplitude $v(x,y,z,t)$ du champ introduite satisfait alors à l'équation suivante :

$$\nabla_\perp^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\mathrm{i}k\frac{\partial v}{\partial z} - 2\mathrm{i}\frac{k}{c}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{1.44}$$

généralisant ainsi l'équation (1.4). De même que nous l'avions fait pour cette précédente équation, nous appliquons l'approximation de l'enveloppe lentement variable en z et également en t, en négligeant les termes $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ devant chacun des autres dans l'équation (1.44). Nous obtenons ainsi une nouvelle équation paraxiale faisant intervenir une dérivée temporelle supplémentaire du champ :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\mathrm{i}}{2k}\nabla_\perp^2 v - \frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{1.45}$$

Considérons une fonction $f : r \longmapsto f(r)$ quelconque et u une solution de (1.6). Nous pouvons alors montrer que $v(x,y,z,t) = f(z-ct)u(x,y,z)$ est une solution de (1.45). Nous venons donc

de décrire une onde se propageant vers les z positifs à la vitesse c, obtenue en translatant la fonction f le long d'une solution de l'équation paraxiale stationnaire. De la même manière, on peut décrire les ondes se propageant vers les z négatifs en cherchant une solution de l'équation de d'Alembert de la forme $\mathbf{E}(x,y,z,t) = v(x,y,z,t)e^{ik(ct+z)}$ où $v(x,y,z,t) = f(z+ct)u(x,y,z)$.

Selon ces hypothèses, il est alors possible de propager une forme quelconque de paquet d'onde dans la direction z au cours du temps en le découpant en tranches infinitésimales de champs transverses et en propageant indépendamment ces champs à l'aide de l'équation paraxiale stationnaire (1.6). La méthode de Fox–Li acquiert alors un statut physique, et non plus uniquement mathématique, pour décrire la formation d'un mode propre d'une cavité avec gain à partir d'un bruit. Pour se représenter l'émergence d'un mode transverse de valeur propre la plus grande, on peut commencer par supposer l'existence d'un état initial dans lequel la cavité est remplie d'un bruit aléatoire. On découpe alors cette cavité en tranches de champs transverses supposées indépendantes. D'après les paragraphes précédents, on sait qu'après un certain nombre d'aller–retours dans la cavité, chaque tranche représentera principalement le mode propre de la cavité de valeur propre la plus grande, l'énergie du mode pouvant être variable selon chaque tranche (en fonction des conditions initiales). Nous avons négligé le fait qu'à chaque aller–retour dans la cavité chaque tranche de champ subit l'addition d'un nouveau bruit aléatoire de faible intensité, mais ceci ne complexifie pas tellement le raisonnement. À partir d'un certain temps, la saturation du gain va opérer sur les tranches dont l'intensité est devenue suffisante, rééquilibrant ainsi les intensités entre les différentes tranches et conduisant à l'établissement d'un mode stationnaire.

1.2 Laser à cavité non–dégénérée et modes transverses d'ordre unique

L'étude précédente nous a permis de définir des bases de modes transverses solutions de l'équation paraxiale dans lesquelles toute solution stationnaire peut être décomposée. Nous avons vu que les modes propres d'une cavité vide peuvent être constitués uniquement de modes de base d'ordre identique dont la taille et la position du waist sont bien déterminés, lorsque la longueur de la cavité n'appartient pas à l'ensemble des longueurs de dégénérescence définies par (1.32). Dans le cas où on rajoute un gain dans la cavité, nous avons vu qu'un couplage (1.41) apparaît entre les différents modes de base. Cependant lorsque le gain est faible, nous pouvons supposer que la situation diffère peu du cas de la cavité vide, et qu'en l'absence de dégénérescence seuls des modes d'ordre unique peuvent être sélectionnés. Nous aurons l'occasion de discuter plus précisément de l'effet du gain sur la dégénérescence de la cavité dans les chapitres suivants.

L'objectif de cette partie est de donner un aperçu de la grande variété des modes d'ordre unique dont l'oscillation est potentiellement accessible à un laser à cavité non–dégénérée. Dans un premier temps nous présenterons quelques expériences marquantes ayant conduit à l'observation de modes d'ordre supérieur dans les lasers à état solide, par un choix adéquat de la distribution spatiale du gain. Ensuite, nous décrirons une manière élégante de construire des modes d'ordre unique en appliquant successivement des opérateurs particuliers au mode fondamental gaussien. Nous montrerons ainsi comment retrouver les familles de modes Hermite et Laguerre–Gauss, et

comment des nouvelles familles de modes peuvent être construites. Nous terminerons par la présentation de quelques modes d'ordre uniques n'appartenant pas aux familles usuelles des modes Hermite, Laguerre ni même Ince–Gauss, dont certains ont été déjà observés expérimentalement.

1.2.1 Observations expérimentales de modes Hermite, Laguerre et Ince–Gauss

Comme nous l'avons vu précédemment, une cavité plan–concave stable possède une infinité de modes propres solutions de l'équation paraxiale, dont la position et la taille du waist sont entièrement déterminées par la géométrie de la cavité (rayon de courbure du miroir sphérique et longueur de la cavité). La sélection d'un mode transverse particulier, quant-à elle, est réalisée par le choix d'un profil de gain (ou de pertes) dépendant de l'espace. Nous discuterons plus précisément dans le chapitre 2 d'un critère quantitatif permettant de comparer l'efficacité d'un profil de gain vis-à-vis de l'excitation d'un ensemble de modes transverses considérés. Pour le moment, nous nous contentons de présenter diverses observations qui ont eu lieu dans des lasers à état solide pompés longitudinalement, pour des configurations différentes de la pompe.

Le profil de pompe le plus couramment utilisé dans le cadre d'un pompage longitudinal est celui issu d'une diode laser fibrée [27]. Dans le cadre du pompage d'un milieu actif quatre niveaux de type Néodyme–YAG (Nd:YAG), la diode de pompe utilisée émet autour de 808 nm et les diamètres de cœur des fibres sont typiquement de l'ordre de la centaine de micromètres. Dans ces conditions, le profil de pompe est de type *flat–top* ou super–gaussien très divergent, avec plus ou moins de *speckle* en fonction du diamètre de la fibre. Si on souhaite disposer d'un profil de pompe gaussien très régulier et de faible diamètre à 808 nm il est également possible d'utiliser un laser titane–saphir (Ti:Sa) accordable en tant que laser de pompe.

Les modes Hermite–Gauss

La sélection de modes au sein d'un laser peut se faire par le choix d'un profil de gain adéquat, mais également par l'introduction de pertes contrôlées de manière à empêcher l'oscillation de certains modes. Une solution simple pour créer un mode Hermite–Gauss est d'introduire un fil de cuivre très fin à l'intérieur de la cavité, de manière à forcer la création d'une ligne nodale. La position du fil dans le plan transverse permet alors de changer l'ordre du mode [39]. Le gain doit évidemment être suffisant pour compenser les pertes introduites par la présence du fil.

Une cavité plan–concave dispose par construction d'un axe privilégié, appelé axe optique de la cavité, autour duquel la cavité est invariante par rotation. Si on brise la symétrie du profil de pompe vis-à-vis de cet axe optique, on doit s'attendre à observer des modes d'ordre supérieur, le mode fondamental gaussien pouvant même ne plus avoir de recouvrement significatif avec le profil de gain. L'observation de modes de type Hermite–Gauss a ainsi pu être réalisée en éloignant progressivement le profil de pompe issu d'une diode laser fibrée par rapport à l'axe optique de la cavité, d'une position Δx dans le plan transverse [40]. Le mode Hermite–Gauss le plus favorisé par le gain semble être celui dont le lobe principal recouvre au mieux le profil de gain, conduisant à l'augmentation de l'ordre du mode par paliers au fur et à mesure que l'on augmente Δx. Un

critère quantitatif permettant de prédire les positions Δx_n particulières de transitions entre deux modes y a également été étudié.

Si on ne prend aucune précaution particulière dans la conception de la cavité (introduction d'un étalon), le laser a tendance à osciller naturellement sur plusieurs fréquences différentes [29]. On parle alors de fonctionnement multimode longitudinal. Cependant, ce type de laser peut tout à fait être monomode transverse si le mode considéré sature convenablement le gain dans l'espace. C'est le cas si le lobe principal d'un mode Hermite–Gauss recouvre totalement le profil de la pompe par exemple. Dans l'expérience décrite précédemment, il peut exister des positions de la pompe où un mode Hermite–Gauss d'ordre n donné ne suffit pas à saturer totalement le profil du gain. Si le gain restant est suffisant, un second mode Hermite–Gauss d'ordre $n+1$ va alors osciller à une fréquence différente pour saturer la zone du gain inutilisée. C'est ce qui est observé dans l'expérience de Kubodera *et coll.* [41], où la taille de la zone de transition entre deux modes Hermite–Gauss d'ordres différents est étudiée en fonction de la puissance de pompe. Plus la puissance de pompe augmente, plus les zones où deux modes Hermite–Gauss d'ordre consécutifs oscillent simultanément sont larges. Pour avoir également réalisé l'expérience, que nous présenterons brièvement au chapitre 3, on peut affirmer que lorsque le profil de la pompe reste de taille inférieure au waist w_0 de la cavité les transitions entre modes sont très abruptes, même lorsque l'on pompe significativement au dessus du seuil.

Si on regarde de manière plus attentive le profil des modes observés dans l'article de Y.F. Chen *et coll.* [40], on constate que ceux ci présentent des lignes nodales plus hyperboliques que réellement droites, et s'apparentent donc plus à des modes Ince–Gauss de type $\mathrm{IG}^{e}_{p,p}$ qu'à des modes Hermite–Gauss. À l'époque, les modes Ince–Gauss n'avaient pas encore été dérivés formellement, et les auteurs ont donc interprété leurs observations à partir de familles de modes qu'ils connaissaient. Ceci est intéressant car nous verrons plus loin que les modes Ince–Gauss peuvent eux aussi être considérés comme des cas particuliers appartenant à une famille plus grande. Les familles de modes usuels que nous utilisons ont plus un rôle de description et de classification des observations expérimentales qu'elles ne traduisent une réalité physique profonde. En effet, si on souhaite faire une description rigoureuse d'un mode que l'on observe, la base de modes utilisée importe peu mais la connaissance de l'ensemble des coefficients de la décomposition du mode sur cette base est essentielle. La seule chose qui ait un vrai sens physique et qui apporte une réelle information est de savoir si le mode observé est d'ordre unique, et donc se propage de manière invariante par propagation, ou non. Dans le cas où un mode observé est d'ordre unique, on pourra toujours construire une base de modes exotiques le contenant, sans que cette base ne traduise une réalité physique quelconque.

Les modes Laguerre–Gauss

La famille de modes Laguerre–Gauss, à géométrie cylindrique, a elle aussi fait l'objet de nombreuses observations dans les lasers à état solide pompés longitudinalement [42]. Nous ne discuterons pas ici des expériences ayant été réalisées avec des lasers pulsés de type *Q–switch* ou des lasers dont le milieu actif est un système trois niveaux comme l'Ytterbium–YAG (Yb:YAG). En effet, d'une part, le cadre de notre étude ne nous permet pas d'analyser des phénomènes tran-

sitoires qui ont lieu dans les lasers pulsés. D'autre part, les milieux actifs trois niveaux possédant de la réabsorption sont souvent utilisés dans une situation de pompage fort et introduisent une complexité qui nuirait à la compréhension générale de la formation des modes dans un laser.

Si on se restreint aux observations ayant été réalisées dans des lasers à milieu actifs Nd:YAG ou Nd:YVO_4 (quatre niveaux), les cas d'études deviennent alors assez restreints. L'expérience historique la plus connue ayant permis d'observer des modes à géométrie cylindrique possédant des anneaux de type $LG_{n,0}$ est celle de Flood *et coll.* [43]. Dans cette expérience, un barreau de Nd:YAG est pompé longitudinalement dans l'axe optique d'une cavité plan–concave à l'aide d'un laser à colorant permettant d'obtenir un faisceau de pompe très propre spatialement et de rayon très petit ($w_0 \simeq 30\,\mu$m). La particularité de cette expérience est également que la longueur de cavité est très proche de la limite de stabilité, à savoir $L \simeq R_c$. Les modes qui sont observés possèdent alors des anneaux au même titre que les modes Laguerre–Gauss de type $LG_{n,0}$, et le nombre d'anneaux augmente en même temps que la longueur de cavité. Les auteurs ont pourtant noté que ces modes n'étaient pas rigoureusement des modes de type Laguerre–Gauss, et que leur divergence était plus faible, faisant penser aux faisceaux de Bessel. Cependant, cet article a largement été cité depuis sa publication et contribue à répandre l'idée qu'un pompage petit implique l'excitation de modes Laguerre–Gauss. Nous verrons par la suite que cette idée est fausse, et que l'apparition des anneaux est en réalité entièrement liée à l'opération du laser en limite de stabilité, que nous relierons à une notion de dégénérescence forcée au chapitre 3.

Un autre type d'observations ayant été réalisées est celui de modes Laguerre–Gauss de type $LG_{0,l}$, nécessitant une géométrie de pompe annulaire. Une telle géométrie peut être obtenue de différentes manières, comme par exemple en défocalisant convenablement un profil *flat–top* issu d'une diode fibrée multimode conventionnelle, comme le montre l'expérience de Y.F. Chen *et coll.* [44]. Le profil de pompe ainsi obtenu possède malgré tout quelques irrégularités (probablement à cause du speckle initial), et permet d'obtenir des modes de type $LG^e_{0,l}$, l variant en fonction de l'ajustement de la pompe. Le même type de modes a pu être obtenu selon le même principe par Bisson *et coll.* [45] en utilisant cette fois une technique d'optique diffractive pour générer le profil de pompe annulaire. On peut se demander pourquoi, étant donnée la géométrie cylindrique de la pompe, les modes obtenus sont de type $LG^e_{0,l}$ possédant des lignes nodales radiales, alors que les modes de type vortex $LG_{0,l} = LG^e_{0,l} + iLG^o_{0,l}$ semblent mieux adaptés. Une première explication vient des irrégularités présentes dans les profils de pompe générés, qui brisent la symétrie de révolution du système. Une autre expérience plus récente qui utilise un guide d'onde annulaire pour générer un faisceau de pompe plus régulier permet en effet d'obtenir des modes dont les profils d'intensité sont bien à géométrie cylindrique [46]. Une seconde explication réside dans le fait que les lasers utilisés n'opèrent sans doute pas trop au dessus du seuil, sinon le gain non saturé par les pétales manquant au mode $LG^e_{0,l}$ devrait inéluctablement faire apparaitre le mode complémentaire $LG^o_{0,l}$.

Les modes Ince–Gauss

Les modes Ince–Gauss constituent une nouvelle famille de modes solutions de l'équation paraxiale dont la dérivation a été réalisée par Bandres *et coll.* [31] en résolvant l'équation paraxiale

en coordonnées elliptiques. Contrairement aux repères cartésien et cylindrique, le choix d'un repère de coordonnées elliptiques introduit un paramètre libre f_0 déterminant la position des foyers. Les modes ainsi obtenus sont alors paramétrés par une variable $\epsilon = 2f_0^2/w_0^2$, appelée ellipticité, permettant de passer continûment des modes Laguerre–Gauss aux modes Hermite–Gauss, de la même manière que f_0 permet de passer continûment du repère de coordonnées cylindrique (lorsque $f_0 = 0$) au repère de coordonnées cartésiennes (lorsque $f_0 \longrightarrow +\infty$).

Ces modes ont été observés récemment dans des lasers de type Nd:YVO_4 pompés longitudinalement [17, 47], bien que les conditions de pompage soient loin d'être rigoureusement décrites. Certains profils légèrement disymétriques dans la figure 2(a) de l'article [17], reproduits dans la figure 1.7 suivante, incitent fortement à penser que certaines observations ont été réalisées pour des longueurs de cavité proches de longueurs de dégénérescence, comme nous le justifierons plus loin. Quoiqu'il en soit, il ne faut pas voir dans le paramètre ϵ un sens physique particulier. Dans tous les cas les modes observés dépendent de la géométrie particulière du profil de pompe, et la détermination de ϵ est encore une fois une manière de faire correspondre une observation expérimentale à un mode d'une famille connue.

Vortex optiques et moment angulaire orbital

Un vortex optique est défini comme un zéro d'intensité isolé dans le profil transverse d'un faisceau lumineux, entraînant une singularité de phase. Autour de ce zéro d'intensité, la phase peut varier d'un nombre entier l de fois 2π. Le nombre l correspond à l'ordre de la singularité et définit par la même occasion la charge topologique du vortex. Cette charge topologique peut être positive ou négative suivant que la phase augmente ou diminue lorsqu'elle parcourt un chemin fermé dans le sens trigonométrique autour de la singularité.

Les vortex optiques les plus connus sont les modes de la famille Laguerre–Gauss définis par :

$$\mathrm{LG}^{+}_{n,l} = \mathrm{LG}^{e}_{n,l} + \mathrm{i}\mathrm{LG}^{o}_{n,l} \tag{1.46}$$

$$\mathrm{LG}^{-}_{n,l} = \mathrm{LG}^{e}_{n,l} - \mathrm{i}\mathrm{LG}^{o}_{n,l}, \tag{1.47}$$

avec $l \geq 0$, $\mathrm{LG}^{+}_{n,l}$ possèdant une charge topologique l et $\mathrm{LG}^{-}_{n,l}$ possédant une charge topologique $-l$. Souvent, ces deux types de modes sont regroupées au sein d'une même notation :

$$\mathrm{LG}^{*}_{n,l} = \mathrm{LG}^{e}_{n,l} + \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(l)\mathrm{LG}^{o}_{n,l}, \tag{1.48}$$

avec $l \in \mathbb{R}$.

De la même manière que nous venons de le faire pour les modes Laguerre–Gauss, il est aisé de créer des nouvelles familles de modes vortex en superposant en quadrature de phase des modes transverses quelconques dont les lignes nodales se croisent, donnant ainsi lieu à des singularités isolées.

Allen *et coll.* ont montré que les modes Laguerre–Gauss de type $\mathrm{LG}^{*}_{n,l}$ portent un moment angulaire orbital de $l\hbar$ par photon [11], ce qui rend ces faisceaux très intéressants pour le transfert de moment angulaire à des particules microscopiques. Par ailleurs, Plick *et coll.* ont montré que les modes Ince–Gauss portant des vortex possèdent un moment orbital fractionnaire par photon [48].

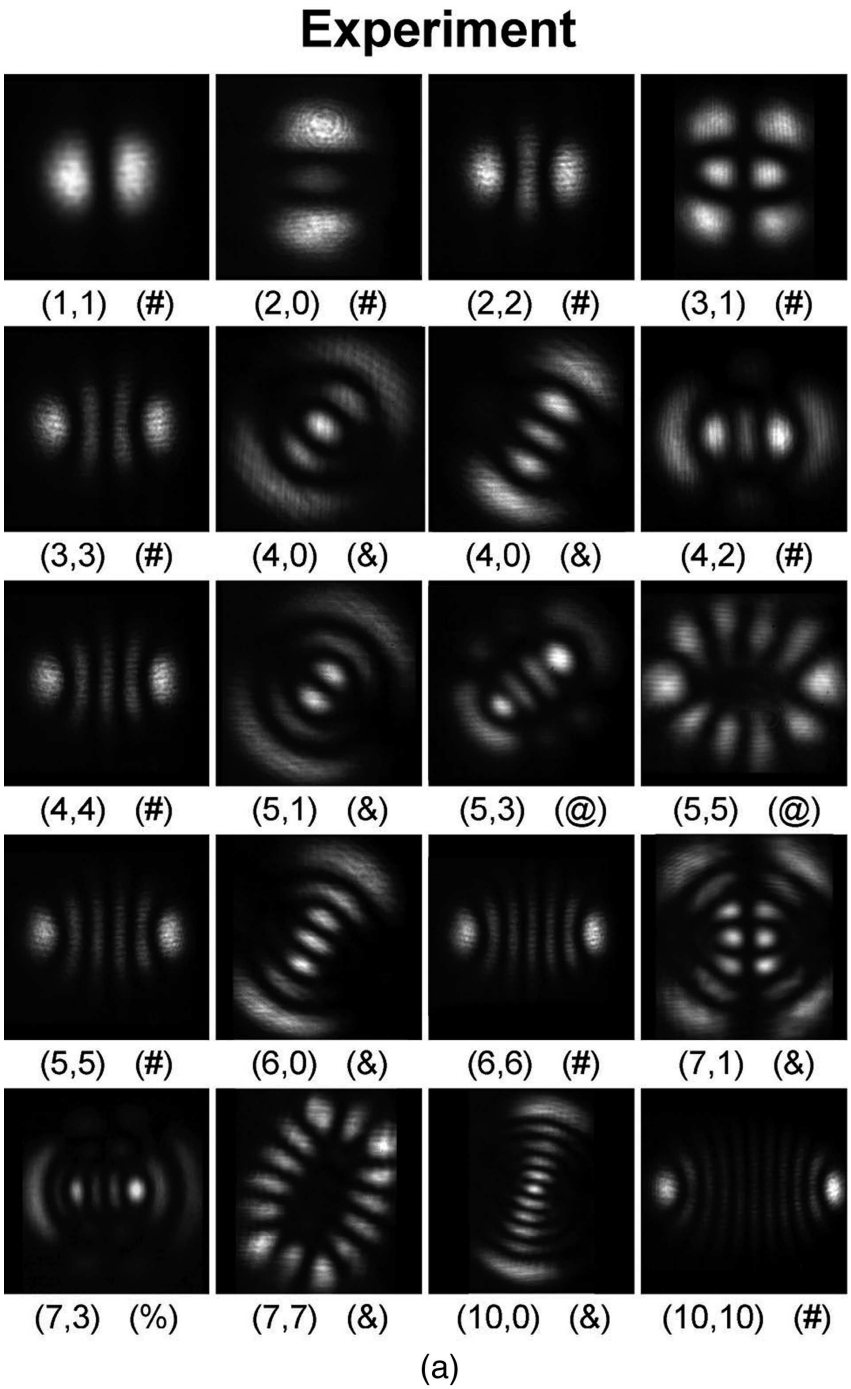


FIGURE 1.7 – Modes observés dans l'article [17] présentant une disymétrie, notamment les modes (5,3) (@) et (7,3) (%).

De tels modes ont été observés récemment [49, 50]. En plus du moment angulaire orbital, certains faisceaux de type vortex peuvent avoir une polarisation radiale ou azimutale [51] leur conférant un moment cinétique de spin.

Une manière simple de générer des modes vortex à partir de modes Hermite–Gauss consiste à utiliser des lentilles cylindriques [12, 50]. Le principe repose sur la théorie des faisceaux astigmates [52] qui généralise la notion de faisceaux gaussiens en traitant de manière indépendante deux directions orthogonales x' et y' du plan transverse. Chaque direction du plan transverse porte un faisceau gaussien à une dimension dont le waist, le rayon de courbure du front d'onde et la phase de Gouy lui sont propres. En créant un astigmatisme sur un faisceau gaussien, en le laissant se propager sur une certaine distance, puis en corrigeant l'astigmatisme, il est donc possible de changer les coefficients de la décomposition du mode initial sur la base de modes Hermite–Gauss afin d'obtenir le nouveau mode souhaité. Cette méthode ne permet évidemment pas de changer l'ordre du mode.

Une autre méthode couramment utilisée pour créer un vortex est de faire passer un mode gaussien fondamental à travers un masque de phase hélicoïdal [53, 54]. Ceci permet de créer une dépendance angulaire en $\exp \mathrm{i}l\theta$ (l dépendant du masque de phase) autour du maximum de la gaussienne après son passage à travers cet élément optique. Le vortex n'existe alors pas encore, mais il apparait au fur et à mesure de la propagation du faisceau. L'inconvénient de cette methode est que bien que le mode généré possède une singularité d'intensité et de phase en champ lointain, il ne s'agit pas d'un mode pur invariant de forme par propagation comme le sont les modes de type $\mathrm{LG}^{*}_{n,l}$.

En ce qui concerne la génération intracavité de modes de type vortex, il faut être très prudent car Forbes *et coll.* [55] ont montré que l'observation d'un mode au profil d'intensité annulaire peut être en réalité due à la superposition incohérente de modes $\mathrm{LG}^{e}_{n,l}$ et $\mathrm{LG}^{o}_{n,l}$ complémentaires, oscillant à des fréquences différentes. À ce titre, le résultat de l'article [46] peut être questionné car il n'est à aucun moment prouvé que le mode obtenu possède réellement une singularité de phase comme l'exige la définition même d'un vortex.

Afin de mettre en évidence expérimentalement une singularité de phase dans le profil transverse d'un faisceau laser, il est nécessaire d'utiliser une méthode interférométrique [56, 57]. La figure 1.8 représente la phase typique que possèdent des modes de type vortex après une propagation sur une certaine distance. Lorsque le vortex est bien centré la phase réalise une forme de spirale, tandis que lorsque les vortex sont excentrés on observe des fourches témoignant des singularités de phase.

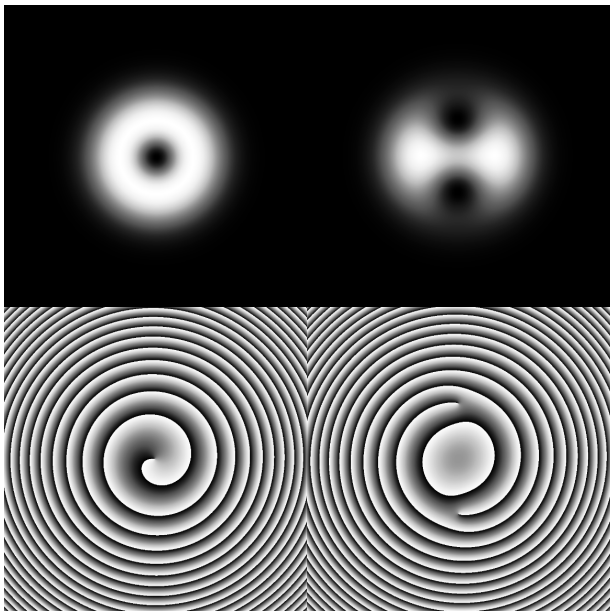


FIGURE 1.8 – Profils d'intensité et de phase de modes portant des singularités de phase.

1.2.2 Construction des modes d'ordre supérieur à l'aide d'opérateurs

La méthode que nous allons développer ici est similaire à celle décrite dans l'article [58], et consiste à construire des modes transverses d'ordre supérieur à partir du mode fondamental gaussien en lui appliquant successivement une série d'opérateurs linéaires adéquats. À la différence de [58], nous travaillerons dans l'espace réel et non dans l'espace de Fourier. Il n'y a en effet aucun intérêt à travailler dans l'espace de Fourier lorsque l'on considère des faisceaux gaussiens d'ordre unique car l'application de la transformée de Fourier n'a alors pour effet que de changer le facteur d'échelle et modifier la phase sphérique du mode. Cette méthode a été retrouvée de manière indépendante au début de cette thèse, aussi nous efforcerons nous à donner un maximum de détails sur les intuitions et raisonnements qui ont conduit aux résultats présentés.

Bien qu'élégante et assez originale dans le cadre de l'étude des modes transverses en optique, cette méthode n'est pas nouvelle puisqu'elle est utilisée abondamment en Mécanique Quantique. En effet lorsque l'on étudie les solutions de la fonction d'onde associée à une particule piégée dans un potentiel harmonique, on découvre assez vite les opérateurs de création et d'annihilation de Dirac. L'opérateur de création de Dirac est celui qui permet de passer de l'état fondamental à des états de plus en plus excités, et s'écrit :

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right), \tag{1.49}$$

où q représente une coordonnée de position adimensionnelle.

Lorsque l'on sait que les solutions de l'oscillateur harmonique sont les polynômes de Hermite multipliés par une enveloppe gaussienne, on se doute bien que ce type d'opérateur va également pouvoir s'appliquer au cas des modes transverses de l'équation paraxiale qui est tout à fait

analogue. Nous allons dans un premier temps dériver les opérateurs permettant de transformer le mode fondamental gaussien en chacun des modes de la famille Hermite–Gauss, puis nous montrerons comment ces opérateurs peuvent être combinés pour construire les modes de la famille Laguerre–Gauss. Enfin, nous verrons quels degrés de liberté sont accessibles pour combiner ces opérateurs afin de construire des modes d'ordre unique arbitraires, n'appartenant pas forcément à l'une des familles de bases usuelles présentées jusqu'à présent.

Construction des modes Hermite–Gauss

Par souci de simplicité, nous chercherons uniquement à construire la famille de modes Hermite–Gauss dans le plan transverse dans lequel se situe le waist w_0. L'expression analytique des modes Hermite–Gauss donnée en (1.7) suggère de considérer les variables adimensionnelles $\hat{x} = \frac{\sqrt{2}x}{w_0}$ et $\hat{y} = \frac{\sqrt{2}y}{w_0}$, permettant d'exprimer un mode $\mathrm{H}_{m,n}$ dans le plan transverse $z = 0$ de la manière suivante :

$$\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y}) = h_{0_{m,n}} H_m(\hat{x})\, H_n(\hat{y})\, e^{-\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2}{2}}, \tag{1.50}$$

où $h_{0_{m,n}}$ est une constante de normalisation égale à

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}, \tag{1.51}$$

de sorte que $\iint |\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y})|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Les polynômes de Hermite qui interviennent dans l'expression (1.50) satisfont à la relation de récurrence suivante :

$$H_{n+1}(\hat{x}) = \left(2\hat{x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\right) H_n(\hat{x}), \tag{1.52}$$

où l'opérateur apparaissant dans le terme de droite ressemble déjà fortement à l'opérateur de création (1.49). Nous sommes donc amenés à rechercher des opérateurs $A_{\hat{x}}$ et $A_{\hat{y}}$ permettant respectivement d'augmenter l'ordre du polynôme d'Hermite dans la direction x et dans la direction y, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_{\hat{x}} &= \alpha\hat{x} - \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}} \\ A_{\hat{y}} &= \alpha\hat{y} - \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{y}}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

En appliquant $A_{\hat{x}}$ à (1.50), on obtient :

$$A_{\hat{x}}\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y}) = h_{0_{m,n}} \left[\left((\alpha+\beta)\hat{x} - \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\right) H_m(\hat{x})\right] H_n(\hat{y})\, e^{-\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2}{2}}, \tag{1.54}$$

ce qui par identification avec l'opérateur contenu dans (1.52) donne $\alpha = \beta$ et

$$A_{\hat{x}}\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y}) = \beta h_{0_{m,n}} H_{m+1}(\hat{x})\, H_n(\hat{y})\, e^{-\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2}{2}}. \tag{1.55}$$

On aimerait utiliser la liberté sur le paramètre β restant pour construire un opérateur général qui conserve la normalisation du mode telle que $\iint |A_{\hat{x}}\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y})|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint |\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y})|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$. Malheureusement ce n'est pas possible à cause des termes en $\frac{1}{\sqrt{m!}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ qui imposeraient alors à β de dépendre de m et n. Le mieux que l'on puisse faire est de définir $A_{\hat{x}}$ et $A_{\hat{y}}$ exactement comme l'opérateur de création (1.49), tout en admettant qu'il faudra renormaliser à la main les modes obtenus après application d'un de ces opérateurs.

Si on définit $A_{\hat{x}}$ et $A_{\hat{y}}$ de la même manière que les opérateurs de création (1.49)

$$\begin{aligned} A_{\hat{x}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\right) \\ A_{\hat{y}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{y}}\right), \end{aligned} \tag{1.56}$$

on obtient

$$\begin{aligned} A_{\hat{x}}\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w_0}\frac{1}{\sqrt{2^{m+1}m!}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_{m+1}(\hat{x})\, H_n(\hat{y})\, e^{-\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2}{2}} \\ A_{\hat{y}}\mathrm{H}_{m,n}(\hat{x},\hat{y}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w_0}\frac{1}{\sqrt{2^m m!}}\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}n!}} H_m(\hat{x})\, H_{n+1}(\hat{y})\, e^{-\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2}{2}}, \end{aligned} \tag{1.57}$$

conduisant à diviser le mode obtenu par un facteur $\sqrt{m+1}$ ou $\sqrt{n+1}$ respectivement après l'application de $A_{\hat{x}}$ sur un mode d'ordre m en x ou après l'application de $A_{\hat{y}}$ sur un mode d'ordre n en y, si on souhaite conserver la normalisation (1.51).

Une propriété immédiate des opérateurs $A_{\hat{x}}$ et $A_{\hat{y}}$ est qu'ils commutent entre eux. Il existe donc en général plusieurs façons de composer ces opérateurs pour contruire un mode d'ordre supérieur, le nombre de combinaisons possibles étant d'autant plus grand que l'ordre du mode visé est élevé. Ceci est représenté par la figure 1.9, dont les différents profils de modes ont été obtenus à l'aide du logiciel *Maxima* en partant du mode fondamental gaussien, avec la méthode formelle que nous venons de présenter.

Construction des modes Laguerre–Gauss

Nous allons montrer comment il est possible de construire les différents modes de la famille Laguerre–Gauss à l'aide d'opérateurs permettant de construire les lignes nodales circulaires d'une part, et radiales d'autre part, en raisonnant uniquement sur des arguments de symétrie. Nous ne tiendrons pas compte de la normalisation des modes obtenus à l'aide de ces opérateurs. La famille de modes Hermite–Gauss étant une base de solutions de l'équation paraxiale, les opérateurs recherchés peuvent toujours s'écrire sous la forme de combinaisons linéaires et compositions des opérateurs $A_{\hat{x}}$ et $A_{\hat{y}}$ définis précédemment.

Un opérateur permettant de construire par applications successives les modes $\mathrm{LG}_{n,0}$, c'est à dire contenant uniquement des lignes nodales circulaires, doit satisfaire à deux propriétés. Tout d'abord, la présence d'une ligne nodale circulaire compte pour deux dans l'ordre du mode. L'opérateur recherché doit donc être une combinaison linéaire de $A_{\hat{x}}^2$, $A_{\hat{y}}^2$ et $A_{\hat{x}}A_{\hat{y}}$. Ensuite,

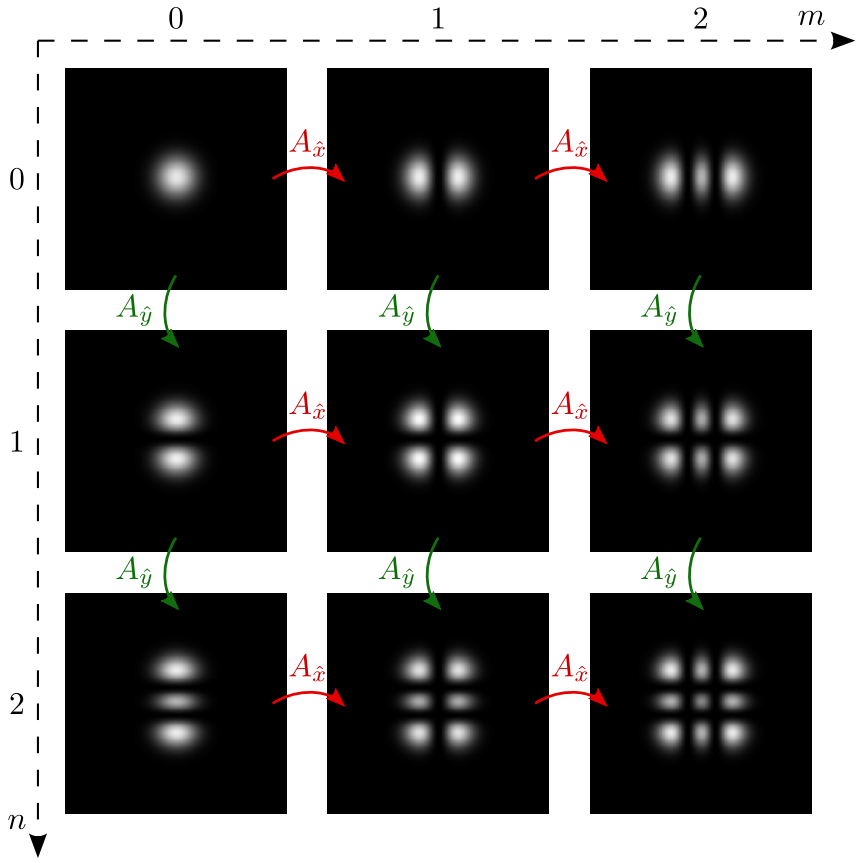


FIGURE 1.9 – Différents chemins de compositions possibles des opérateurs de création $A_{\hat{x}}$ et $A_{\hat{y}}$ pour créer les modes Hermite–Gauss d'ordre supérieur à partir du mode fondamental.

l'application de cet opérateur à un mode ne dépendant pas de θ en coordonnées circulaires (r,θ) doit conduire à un mode toujours indépendant de θ. Le seul candidat possible est alors de la forme :

$$L_{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_{\hat{x}}^2 + A_{\hat{y}}^2\right). \tag{1.58}$$

En coordonnées circulaires adimensionnelles $(\hat{r},\theta)$, les opérateurs de dérivation par rapport aux coordonnées adimensionnelles $(\hat{x},\hat{y})$ du repère cartésien sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial \hat{r}} - \frac{\sin\theta}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial \hat{r}} + \frac{\cos\theta}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{1.59}$$

permettant d'écrire l'opérateur $L_{\hat{r}}$ défini en (1.58) sous la forme :

$$L_{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\hat{r} - \frac{\partial}{\partial \hat{r}}\right)^2 + \frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\hat{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1\right]. \tag{1.60}$$

Même si $L_{\hat{r}}$ dépend de θ, on voit d'après (1.60) que l'application de $L_{\hat{r}}$ à un mode indépendant de θ ne dépendra toujours pas de θ, ce qui est la propriété recherchée. La figure 1.10 montre comment les applications successives de $L_{\hat{r}}$ au mode fondamental gaussien conduit à la construction des modes $\mathrm{LG}_{n,0}$, les figures étant toujours issues d'un calcul formel réalisé avec *Maxima*.

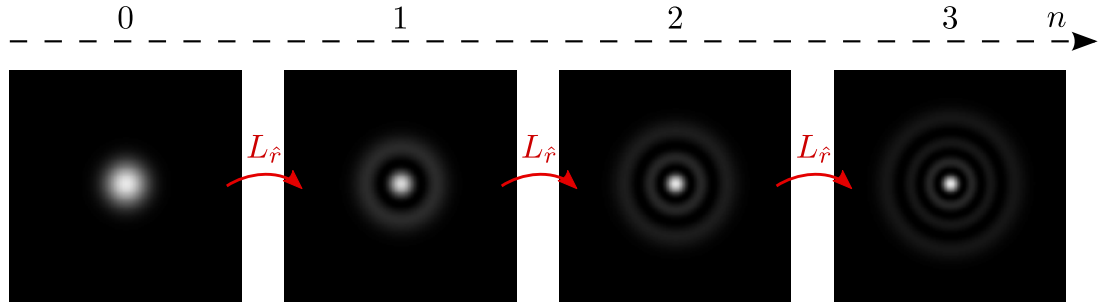


FIGURE 1.10 – Construction des modes $\mathrm{LG}_{n,0}$ par applications successives de l'opérateur $L_{\hat{r}}$ au mode fondamental gaussien.

Maintenant que nous savons construire des lignes nodales circulaires à l'aide de l'opérateur $L_{\hat{r}}$, nous souhaitons trouver un nouvel opérateur permettant de construire les lignes nodales radiales afin de pouvoir générer l'intégralité de la famille des modes Laguerre–Gauss. Les lignes nodales radiales ont par définition une direction privilégiée dans le plan, conduisant à introduire l'opérateur $A_{\hat{x}\hat{y}(\alpha)}$ défini par :

$$A_{\hat{x},\hat{y}}(\alpha) = \sin\alpha A_{\hat{x}} + \cos\alpha A_{\hat{y}}, \tag{1.61}$$

de sorte que α représente l'angle de la ligne nodale que l'on souhaite créer, dans le repère de coordonnées circulaires (r,θ).

Pour des raisons de symétrie, nous introduisons donc les opérateurs L_l^e et L_l^o définis par :

$$L_l^e = \prod_{k=0}^{l-1} A_{\hat{x},\hat{y}}\left(\frac{\pi}{2l} + k\frac{\pi}{l}\right) \tag{1.62}$$

$$L_l^o = \prod_{k=0}^{l-1} A_{\hat{x},\hat{y}}\left(k\frac{\pi}{l}\right), \tag{1.63}$$

où le signe produit désigne la composition des opérateurs $A_{\hat{x},\hat{y}}(\alpha)$. Ces opérateurs étant commutatifs entre eux, le produit peut s'effectuer dans un ordre quelconque.

Le logiciel de calcul formel *Maxima* permet encore une fois de vérifier que les opérateurs L_l^e et L_l^o permettent bien de créer des lignes nodales radiales. Nous rappelons que les modes dits impairs dénotés par l'exposant o diffèrent des modes dits pairs dénotés par l'exposant e par la présence d'une ligne nodale horizontale $y = 0$. Quelques exemples d'applications de ces opérateurs au mode fondamental gaussien sont représentés sur la figure 1.11.

L'opérateur $L_{\hat{r}}$ permettant de créer des lignes nodales circulaires commute avec les opéra-

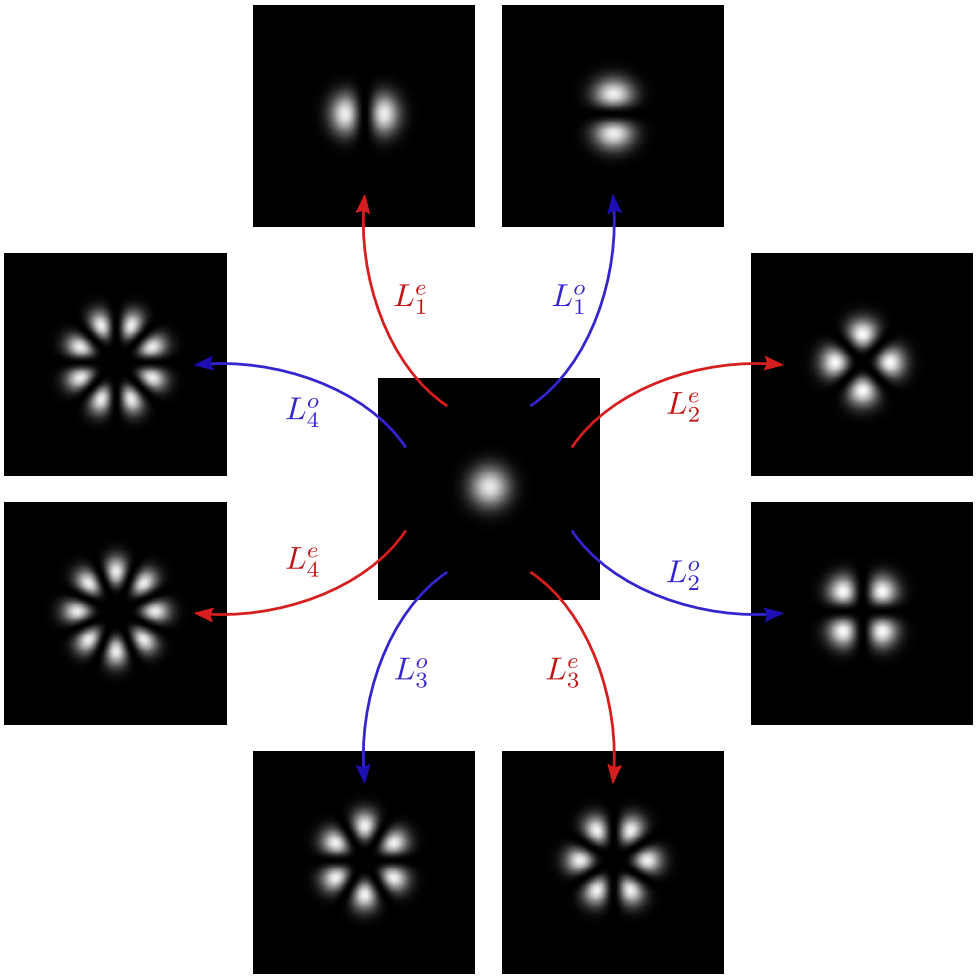


FIGURE 1.11 – Construction des modes $\mathrm{LG}^e_{0,l}$ et $\mathrm{LG}^o_{0,l}$ par application des opérateurs L^e_l et L^o_l, respectivement, au mode fondamental gaussien.

teurs L^e_l et L^o_l permettant de créer des lignes nodales radiales, et leurs compositions permettent de construire respectivement les familles de modes $\mathrm{LG}^e_{n,l}$ et $\mathrm{LG}^o_{n,l}$, comme représenté sur la figure 1.12.

L'article [58] fait référence uniquement aux modes Laguerre–Gauss de type vortex $\mathrm{LG}^+_{n,l}$ et $\mathrm{LG}^-_{n,l}$ définis en (1.46) et (1.47). On constate que les opérateurs de création associés ont des expressions beaucoup plus simples que les précédentes. On a en effet :

$$L^+_{n,l} = L^l_+ L^n_{\hat{r}} = L^l_+ (L_+ L_-)^n \tag{1.64}$$

$$L^-_{n,l} = L^l_- L^n_{\hat{r}} = L^l_- (L_+ L_-)^n, \tag{1.65}$$

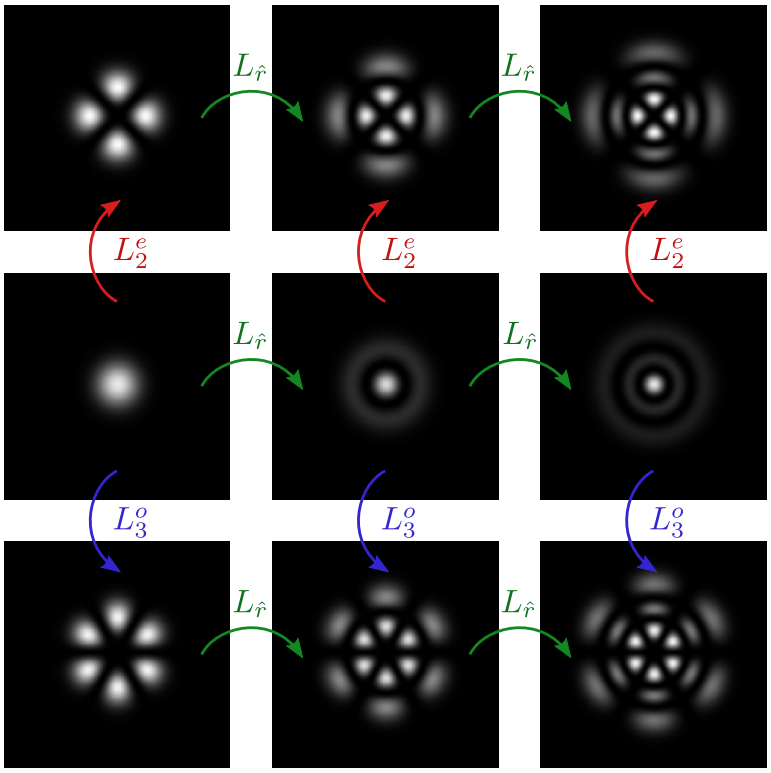


FIGURE 1.12 – Construction des modes $\mathrm{LG}^e_{n,l}$ et $\mathrm{LG}^o_{n,l}$ par application des opérateurs L^e_l, L^o_l et $L_{\hat{r}}$ au mode fondamental gaussien.

où

$$L_+ = A_{\hat{x}} + \mathrm{i}A_{\hat{y}} \tag{1.66}$$
$$L_- = A_{\hat{x}} - \mathrm{i}A_{\hat{y}}. \tag{1.67}$$

Il est intéressant de remarquer que les opérateurs L_+ et L_- ainsi définis ont la même forme que les opérateurs de moments cinétiques J_+ et J_- en Mécanique Quantique [59]. J_+ et J_- sont des opérateurs permettant d'obtenir un nouvel état quantique dont le moment cinétique a été augmenté ou diminué de $\hbar$, respectivement. De plus, d'après [11], un faisceau lumineux contenant un vortex d'ordre l possède un moment angulaire orbital de $l\hbar$ par photon. L_+ et L_- contribuent donc à augmenter le moment angulaire orbital d'un mode de $\hbar$ par photon, ce qui consolide l'analogie. Cependant, contrairement aux opérateurs J_+ et J_-, l'application conjointe de L_+ et L_- ne permet pas de retrouver l'état initial, mais crée une ligne nodale circulaire ($L_+L_- = L_{\hat{r}}$). L'analogie porte donc uniquement sur le moment angulaire orbital porté par les états considérés. La construction des modes $L_{n,l}$ à l'aide des opérateurs L_+ et L_- est illustrée dans la figure 1.13 dont les profils d'intensité ont encore une fois été obtenus à l'aide du logiciel de calcul formel *Maxima*.

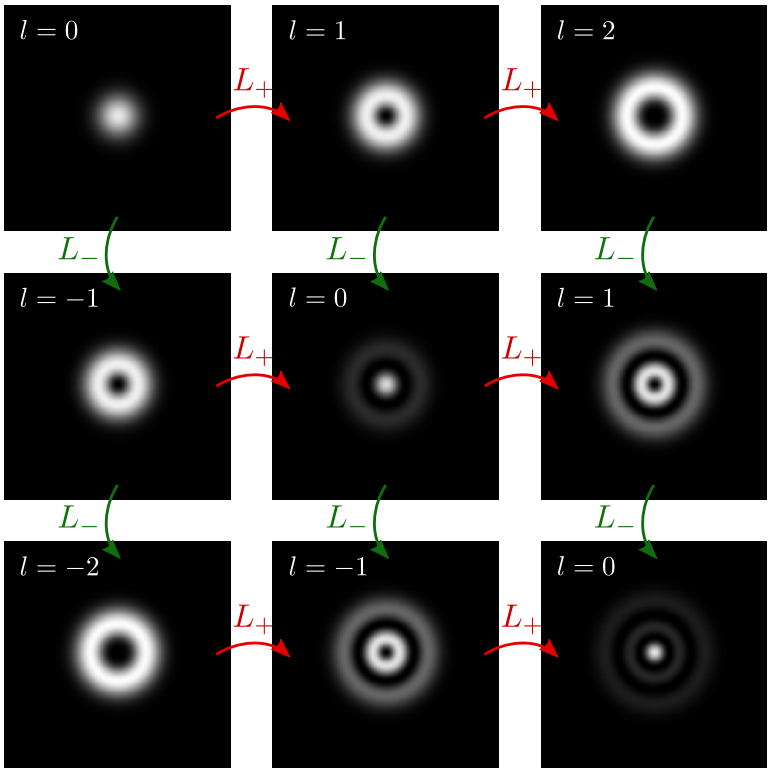


FIGURE 1.13 – Différents chemins de compositions possibles des opérateurs de création L_+ et L_- pour créer les modes Laguerre–Gauss $\mathrm{LG}_{n,l}$ à partir du mode fondamental.

Construction des modes Ince-Gauss

Comme nous l'avons introduit précédemment, les modes Ince–Gauss sont des bases de solutions de l'équation paraxiale dont les lignes nodales sont elliptiques ou hyperboliques. Lorsque la taille du waist w_0 est fixée, chaque base de modes Ince–Gauss est paramétrée par une ellipticité notée ϵ pouvant varier de zéro à l'infini, permettant de passer continûment de la base de modes Laguerre-Gauss à la base de modes Hermite–Gauss. Nous allons voir ici comment il est possible de modifier l'opérateur $L_{\hat{r}}$ afin de créer des lignes nodales elliptiques, et l'opérateur L_l^e afin de créer des lignes nodales hyperboliques, en les paramétrant par des variables adéquates. Nous procéderons ici de manière encore plus intuitive que précédemment et la vérification des résultats annoncés ne se fera que numériquement sur quelques cas particuliers.

La manière la plus intuitive de généraliser l'opérateur $L_{\hat{r}}$ défini en (1.58) est de le paramétrer de la manière suivante :

$$L_{\hat{r}}(\beta) = \cos\beta A_{\hat{x}}^2 + \sin\beta A_{\hat{y}}^2, \tag{1.68}$$

retrouvant ainsi l'opérateur $L_{\hat{r}}$ originel lorsque $\beta = \pi/4$.

La figure 1.14 montre comment l'application de l'opérateur $L_{\hat{r}}$ permet de créer les modes Ince–Gauss contenant uniquement des lignes nodales elliptiques, notés $\mathrm{IG}_{p,0}^e$. Lorsque β varie de 0 à $\pi/4$, on passe continûment des modes $\mathrm{HG}_{0,p}$ de la famille Hermite–Gauss aux modes $\mathrm{LG}_{p/2,0}$ de la famille Laguerre–Gauss. Le paramètre β joue un rôle analogue à l'ellipticité ϵ, bien que le

lien formel entre ces deux paramètres soit loin d'être évident.

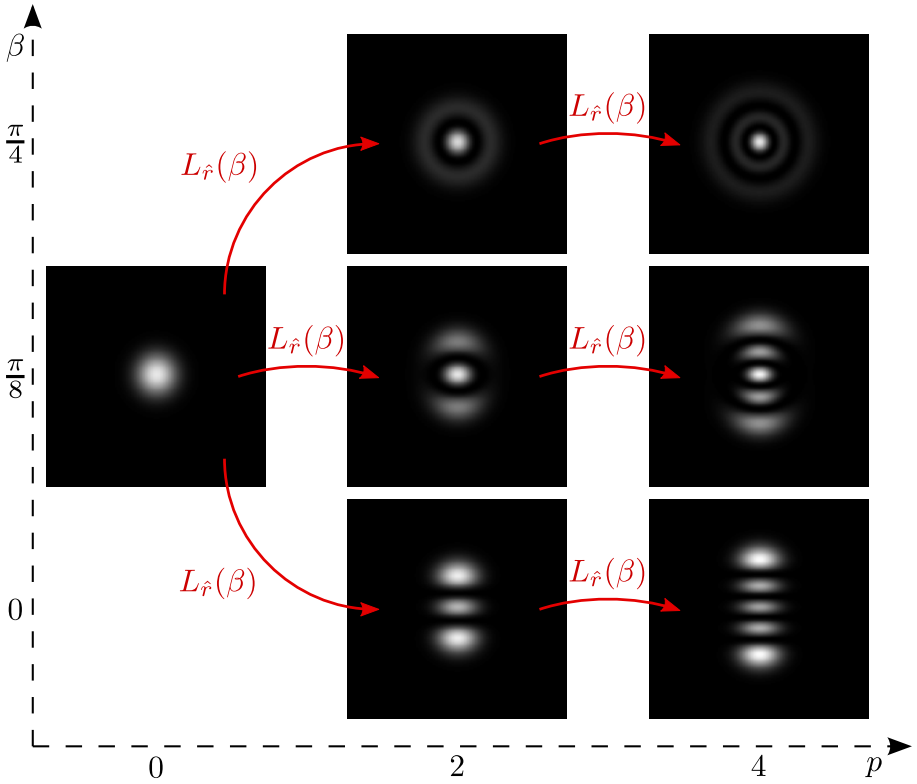


FIGURE 1.14 – Création des modes $\mathrm{IG}^e_{p,0}$ d'ordre p contenant uniquement des lignes nodales elliptiques par application successives de l'opérateur $L_{\hat{r}}(\beta)$ au mode fondamental gaussien pour β variant de 0 à $\pi/4$.

Nous allons désormais modifier l'opérateur L^e_l défini en (1.62) de manière à créer les modes Ince–Gauss contenant uniquement des lignes nodales hyperboliques, mais sans la ligne nodale $y = 0$, notés $\mathrm{IG}^e_{p,p}$. L'idée qui nous guide est de réussir à réaliser une transition continue entre les modes Laguerre–Gauss de type $\mathrm{LG}^e_{0,l}$ que l'on obtient par l'application de l'opérateur L^e_l, et les modes Hermite–Gauss de type $\mathrm{HG}_{l,0}$. On remarque que si on remplace le terme π/l dans l'équation (1.62) par un nouveau paramètre γ, les conditions extrêmes $\gamma = 0$ et $\gamma = \pi/l$ conduisent bien à la création des modes $\mathrm{HG}_{l,0}$ et $\mathrm{LG}^e_{0,l}$, respectivement. Si on se contente de cela, on obtient bien les modes $\mathrm{IG}^e_{p,p}$ recherchés, mais leur orientation dans le plan n'est pas maîtrisée. Afin qu'ils soient toujours orientés de manière à ce que leurs lignes nodales coupent toutes la droite d'équation $y = 0$, on doit définir le nouvel opérateur $L^e_p(\gamma)$ de la manière suivante :

$$L^e_p(\gamma) = \prod_{k=0}^{p-1} A_{\hat{x},\hat{y}} \left(\frac{\gamma}{2}(2k + 1 - p) + \frac{\pi}{2} \right). \tag{1.69}$$

On peut vérifier dans la figure 1.15 que cet opérateur permet de passer des modes $\mathrm{HG}_{p,0}$ aux modes $\mathrm{LG}^e_{0,p}$ en faisant varier continûment le paramètre γ de 0 à π/p. Les modes intermédiaires semblent bien posséder des lignes nodales hyperboliques et doivent donc bien correspondre aux

modes $\mathrm{IG}^e_{p,p}$. Le paramètre γ joue alors encore le même rôle que l'ellipticité ϵ, même si nous ne savons toujours pas comment il serait possible de relier ces deux paramètres de manière formelle.

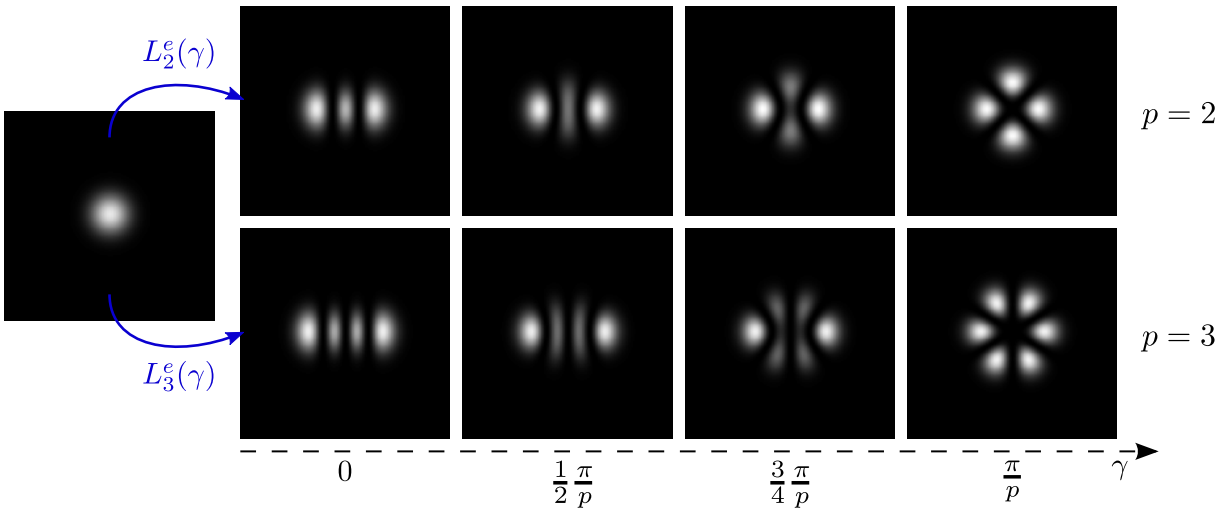


FIGURE 1.15 – Création des modes $\mathrm{IG}^e_{p,p}$ d'ordre p contenant uniquement des lignes nodales hyperbolique par application de l'opérateur $L^e_p(\gamma)$ au mode fondamental gaussien.

Si on souhaite construire les modes de la famille $\mathrm{IG}^o_{p,1}$ et $\mathrm{IG}^o_{p,p}$, il suffit de composer les opérateurs $L_{\hat{r}}(\beta)$ et $L^e_p(\gamma)$, respectivement, avec l'opérateur $A_{\hat{y}}$ permettant de créer une ligne nodale horizontale $y = 0$.

Si nous nous intéressons désormais à la possibilité de combiner les opérateurs présentés précédemment de manière à obtenir tous les modes $\mathrm{IG}_{p,m}$ pouvant contenir à la fois des lignes nodales elliptiques et hyperboliques, nous sommes confronté à un problème. En effet, nous ne connaissons pas le lien existant entre les paramètres β et ϵ, ni entre les paramètres γ et ϵ. Nous ne connaissons donc pas a fortiori le lien entre β et γ nécessaire si on souhaite rester à l'intérieur de la famille des modes Ince–Gauss lorsque l'on combine ces opérateurs. En effet, l'ensemble des modes pouvant être engendrés par deux paramètres libres est beaucoup plus grand que la famille des modes Ince–Gauss engendrée par un paramètre unique. La connaissance de la relation entre les paramètres β et γ permettant de construire uniquement des modes Ince–Gauss reste une question ouverte, et nous montrerons dans la section suivante comment un choix arbitraire de ces deux paramètres peut aboutir à des géométries de lignes nodales inattendues.

1.2.3 Quelques curiosités

Nous venons de présenter certains opérateurs permettant de construire les faisceaux invariants de forme par propagation appartenant aux familles de modes les plus usuelles, à savoir les modes Hermite, Laguerre et Ince–Gauss. Nous pressentons bien qu'il existe énormément de manières de construire de nouveaux opérateurs permettant de construire de nouvelles familles de modes invariants de forme par propagation totalement exotiques. Dans cette section, nous souhaitons tout d'abord revenir sur la difficulté que nous avons eu dans la partie précédente pour construire des modes Ince–Gauss contenant à la fois des lignes nodales elliptiques et hyperboliques. Nous

allons discuter d'un critère numérique permettant d'associer une valeur du paramètre β à une valeur de γ de manière univoque afin de retrouver les modes Ince–Gauss que nous souhaitons. Par la même occasion, nous montrerons qu'un choix arbitraire de β et γ peut conduire à des formes de lignes nodales tout à fait inattendues. Nous présenterons également quelques modes étranges invariants de forme par propagation ayant été observés récemment, que l'on ne peut absolument pas classer parmi les familles de modes connues.

Combinaison des opérateurs $L_{\hat{r}}(\beta)$ et $L_p^e(\gamma)$

Supposons que l'on souhaite construire un mode $\mathrm{IG}_{5,3}^e$ d'ordre 5, contenant une ligne nodale elliptique et trois lignes nodales hyperboliques. On peut en toute généralité fixer le paramètre β et chercher γ telle que les lignes nodales restent bien elliptiques et hyperboliques. Le paramètre β étant compris entre 0 et $\pi/4$, on peut pour l'exemple le fixer à $\beta = \pi/8$, ce qui devrait correspondre à un bon intermédiaire entre les modes Hermite–Gauss et Laguerre–Gauss. L'opérateur permettant de construire la ligne nodale elliptique est donc $L_{\hat{r}}(\pi/8)$. Étant donné que le mode que l'on souhaite construire possède trois lignes nodales hyperboliques, l'opérateur devant les générer est $L_3^e(\gamma)$, avec γ compris entre 0 et $\pi/3$. La figure 1.16 représente l'évolution des profils d'intensité et de phase des modes créés en combinant les opérateurs précédents.

D'après la figure 1.16 le mode Ince–Gauss recherché est obtenu pour la valeur particulière $\gamma = \pi/5{,}5$, β étant fixé à $\pi/8$. A priori rien ne permet de prédire cette valeur, d'autant plus qu'elle varie en fonction de β et de la géométrie du mode recherché. Un critère numérique permettant de détecter un mode Ince–Gauss parmi les modes générés par la combinaison d'opérateurs $L_{\hat{r}}(\beta)$ et $L_p^e(\gamma)$ est de compter le nombre χ d'intersections des lignes nodales. Dans le cas d'un mode Ince–Gauss de type $\mathrm{IG}_{p,m}^e$ on a $\chi = 2m$, et dans le cas d'un mode de type $\mathrm{IG}_{p,m}^o$ ($m \geq 1$) on a $\chi = 3m - 1$. Dans le cas où γ est arbitraire, on observe une grande variété de la forme des lignes nodales. Les courbes ouvertes ne sont plus des hyperboles et les courbes fermées ne sont plus des ellipses. Dans le cas présent, les courbes fermées ressemblent à s'y méprendre à la famille des ovales de Cassini [60] qui sont des quartiques du plan d'équation

$$\left((x-a)^2 + y^2\right)\left((x+a)^2 + y^2\right) - b^4 = 0,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.70}$$

dont une représentation est donnée par la figure 1.17.

Pour avoir une idée des équations polynomiales associées au lignes nodales observées, considérons tout d'abord le cas particulier du mode Ince–Gauss $\mathrm{IG}_{5,3}^e$. L'équation de la ligne nodale elliptique est d'ordre 2 en x et en y, de même que l'équation des deux branches d'hyperboles. L'équation polynomiale associée aux lignes hyperboliques et à la ligne elliptique, produit des équations précédentes, est donc d'ordre 4 en x et en y. La ligne nodale verticale rajoute un à l'ordre du mode, ce qui fait bien un total de 5. Sur les autre images, la courbe fermée ne peut donc pas être décrite par l'équation des ovales de Cassini (1.70), d'ordre 4 en x et y, car les lignes nodales ouvertes restantes ne pourraient alors pas exister dans un mode d'ordre 5. La seule possibilité est que toutes les lignes nodales, à l'exception de la ligne nodale verticale, doivent être décrites par la même équation polynomiale d'ordre 4, non factorisable en sous–équations d'ordres inférieur. Ceci peut se voir dans le cas particulier de l'encadré vert sur la figure 1.16, où on peut

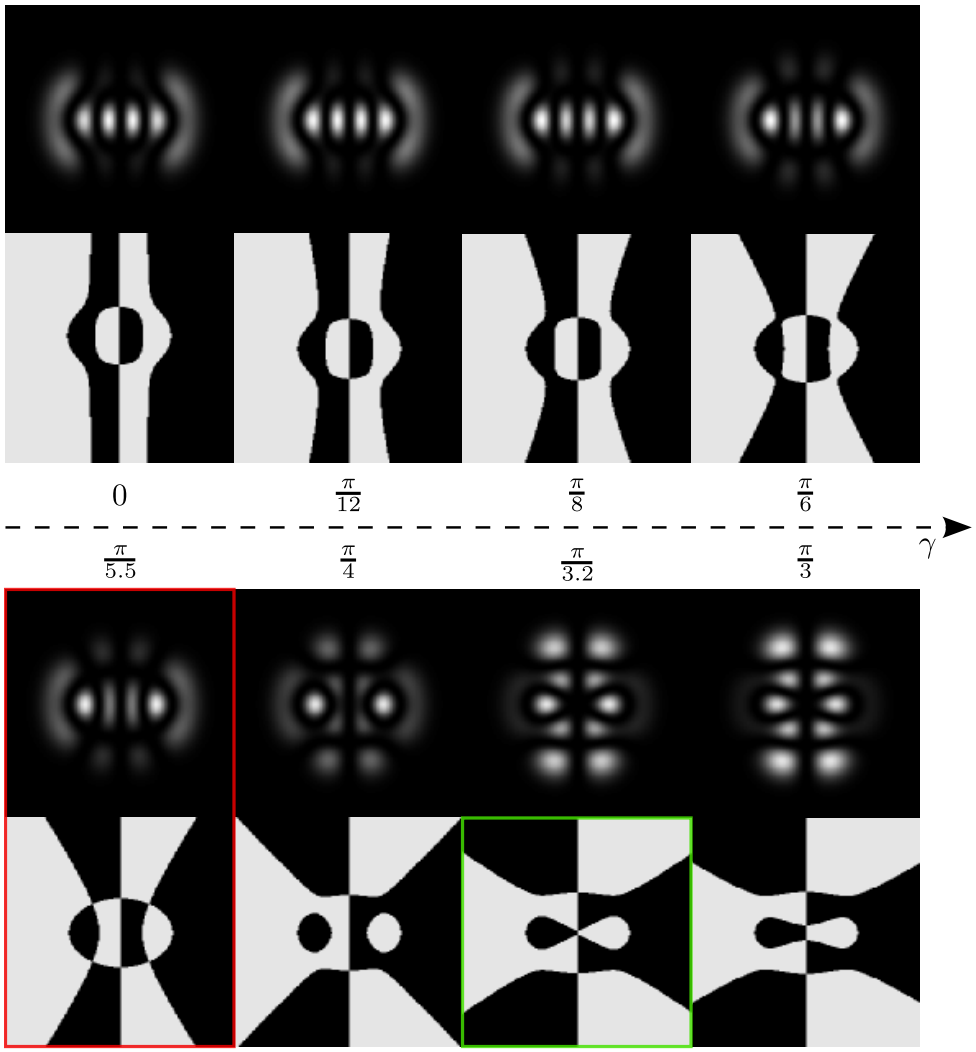


FIGURE 1.16 – Évolution du profil d'intensité et de phase du mode généré par l'opérateur $L_{\hat{r}}(\pi/8)L_3^e(\gamma)$ en fonction du paramètre γ.

reconnaître la courbe du *diable*, ou de Cramer [60], d'équation

$$y^4 - x^4 - (a^2 + b^2)y^2 - (a^2 - b^2)x^2 = 0, \tag{1.71}$$

dont une représentation est donnée dans la figure 1.18.

On peut modifier légèrement l'équation (1.71) en rajoutant un paramètre c tel que :

$$y^4 - x^4 - (a^2 + b^2)y^2 - (a^2 - b^2)x^2 + c = 0. \tag{1.72}$$

On obtient alors les courbes de la figure 1.19, ressemblant très fortement aux lignes nodales observées dans la figure 1.16.

Finalement, nous pouvons dire que les opérateurs $L_{\hat{r}}(\beta)$ et $L_p^e(\gamma)$ nous permettent de construire

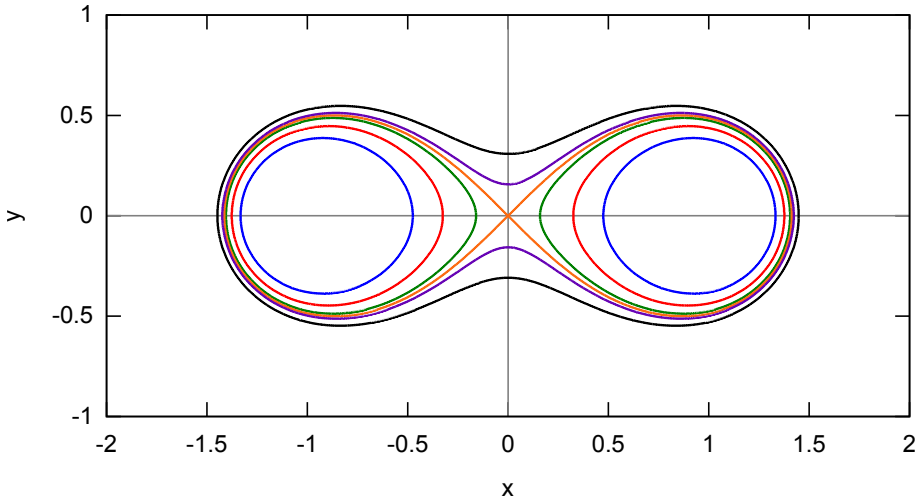


FIGURE 1.17 – Ovales de Cassini pour $a = 1$ et b variant de 0,6 à 1,2. Le cas particulier $a = b$ correspond à la courbe en huit appelée lemniscate de Bernoulli.

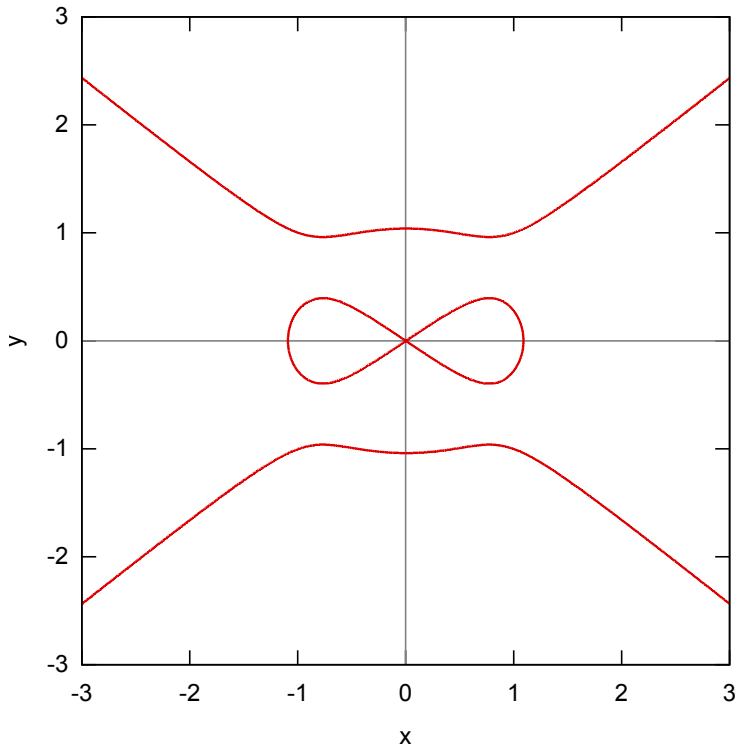


FIGURE 1.18 – Courbe du *diable*, ou de Cramer, obtenue pour $a = 0{,}5$, $b = 1{,}2$ et $y = y/0{,}8$.

un sur–ensemble des modes Ince–Gauss dont la forme des lignes nodales semblent pouvoir explorer une grande variété de courbes algébriques du plan, les lignes elliptiques et hyperboliques étant des cas particuliers. Ce qui est remarquable dans tout cela est que ces modes aux formes étranges sont également invariants de forme par propagation.

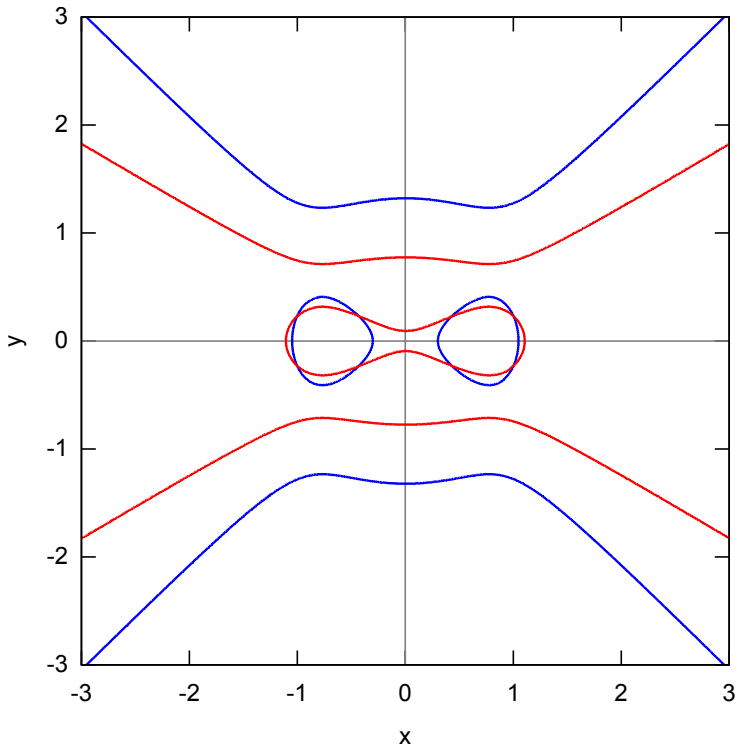


FIGURE 1.19 – Courbe du *diable* avec paramètre additionnel, obtenue pour $a = 0{,}5$, $b = 1{,}2$. Pour la courbe bleue $c = -0{,}1$ et pour la courbe rouge $c = 0{,}04$, $y = y/0{,}6$.

Modes aux lignes nodales serpentantes

Nous nous proposons ici de construire une famille d'opérateurs permettant de reproduire qualitativement certains modes aux lignes nodales serpentantes ayant déjà été observés dans l'article [61]. Dans cet article, les conditions exactes et rigoureuses de l'apparition de ces modes ne sont pas réellement discutées, mais nous y reviendrons lorsque nous aurons introduit quelques notions essentielles pour la prédiction de la formation des modes transverses dans un laser au chapitre 2.

Définissons l'opérateur $S_n(\alpha)$ de la manière suivante :

$$S_n(\alpha) = A_{\hat{x},\hat{y}}(\alpha)^2 A_{\hat{x}}^n, \tag{1.73}$$

où α est un paramètre réel fixé.

Nous avons représenté les premières applications de $S_n(\alpha)$ au mode fondamental gaussien dans la figure 1.20, pour une valeur du paramètre $\alpha = 0{,}25$. Ces modes ressemblent très fortement aux modes Ince–Gauss de type $\mathrm{IG}^e_{p,p}$ contenant uniquement des lignes nodales hyperboliques, à la différence que leurs branches sont légèrement déformées et serpentantes. Nous reconnaissons sans équivoque les modes de la figure 3 observés dans l'article [61], reproduits dans la figure 1.21. On peut encore une fois insister sur le fait que ces modes sont bien invariants de forme par propagation.

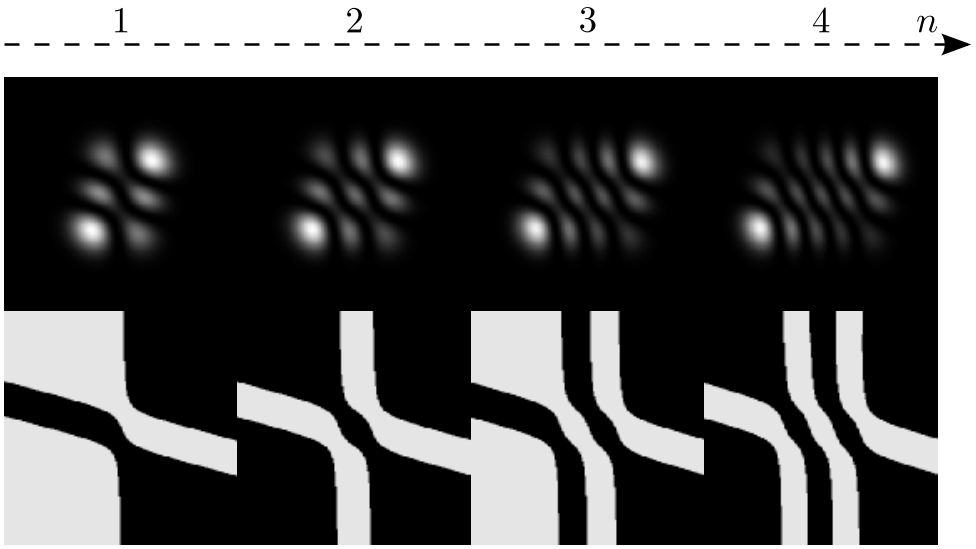


FIGURE 1.20 – Modes aux lignes nodales serpentantes obtenus par application de l'opérateur $S_n(0{,}25)$ sur le mode fondamental gaussien.

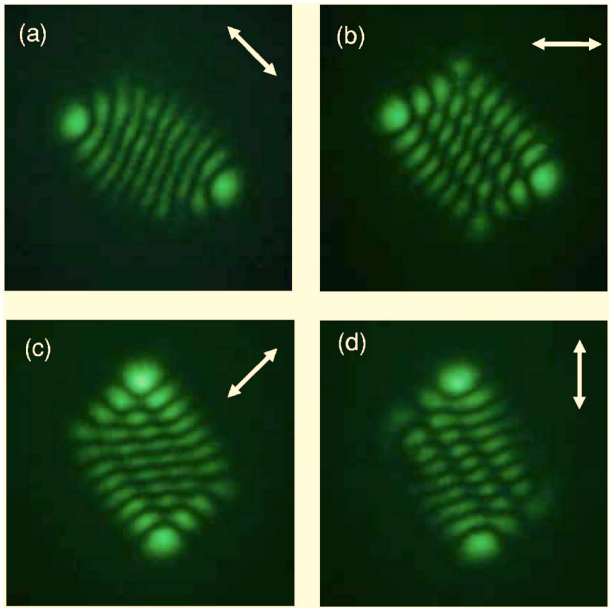


FIGURE 1.21 – Modes observés dans l'article [61] possédant des lignes nodales serpentantes.

On peut remarquer qu'il serait facile de compléter la famille $S_n(\alpha)$ pour construire une base complète de modes orthogonaux permettant de décrire l'ensemble des solutions de l'équation paraxiale. À l'aide de cette approche utilisant des opérateurs de création pour la construction de modes d'ordre supérieur, on peut aisément imaginer construire un grand nombre de nouvelles familles complètes et orthogonales de modes solutions de l'équation paraxiale. Aucune de ces familles de modes n'a pourtant un caractère absolu pour la description des observations des structures transverses dans les lasers. L'utilisation de différentes familles de modes pour décrire

des observations expérimentales tient pour une grande part d'une volonté de classification de la part des expérimentateurs. Nous verrons plus loin que le fait d'utiliser des profils de pompe réguliers, à géométrie cylindrique, est en réalité le seul élément responsable de l'observation des modes usuels de type Hermite, Laguerre et Ince–Gauss qui constituent la quasi–totalité de la littérature sur les modes transverses ayant été observés dans des lasers à cavité étendue, aux miroirs sphériques.

1.3 Laser à cavité dégénérée

L'étude précédente réalisée dans des conditions de cavités non–dégénérées suggère que les modes observés sont toujours des solutions de l'équation paraxiale d'ordre unique, malgré la présence d'un gain qui introduit un couplage entre les différents modes de base accessibles. Dans ces conditions de non–dégénérescence, les couplages introduits par le gain seraient donc efficaces uniquement entre les modes de base de même ordre. Dans le cas d'une cavité dégénérée d'ordre N ($\Psi_G(L) = k\pi/N$), on s'attend à ce que les couplages entre modes puissent opérer sur des ensembles plus grands, notamment sur des modes d'ordres égaux modulo N qui possèdent alors la même phase de Gouy (modulo 2π) après un aller–retour dans la cavité.

Dans cette partie, nous présenterons tout d'abord les propriétés essentielles d'une cavité dégénérée et nous présenterons quelques trajectoires de rayons géométriques dans ce type de cavité. Ceci nous permettra d'introduire des expériences qui ont été réalisées dans certaines configurations de dégénérescence, et qui ont donné lieu à l'observation de modes dits géométriques. Sous certaines conditions, l'énergie de ces modes semble en effet suivre les mêmes trajectoires que les rayons géométriques dans la cavité, tout en combinant les particularités liées au caractère ondulatoire des faisceaux lumineux. Certaines observations concernant l'évolution de la puissance en cavité à dégénérescence et la largeur de ces zones de dégénérescence seront également présentées. Pour terminer, nous montrerons comment il est possible de construire des modes géométriques en partant de distributions initiales de champs dont l'amplitude reproduit le profil de la pompe, et en sommant leurs aller–retours successifs dans la cavité. Nous tenterons alors de reproduire de manière analytique les différents modes correspondant aux observations expérimentales ayant été décrites au préalable.

1.3.1 Propriétés de base

Les cavités Fabry–Perot dégénérées ont suscité l'intérêt dès les premiers instants du Laser [62]. Une étude plus détaillée sur la géométrie des modes transverses dans ce type de cavités est réalisée dans la thèse de Dingjan [63]. Nous allons tout d'abord montrer qu'une cavité dégénérée d'ordre N possède la propriété d'être auto–imageante pour tout faisceau faisant un nombre N d'aller–retours dans la cavité. Nous présenterons ensuite quelques trajectoires de rayons géométriques possibles à certaines longueurs de dégénérescence, qui nous seront utiles par la suite pour l'interprétation des profls transverses des modes oscillant dans de telles cavités.

Système auto–imageant

Nous repartons ici de l'expression de la matrice ABCD M_{cav} donnée par (1.23) décrivant notre cavité plan–concave. La recherche des valeurs propres σ_+ et σ_- de M_{cav} conduit directement à l'équation suivante :

$$\sigma_\pm^2 - 2\sigma_\pm \left(1 - 2\frac{L}{R_c}\right) + 1 = 0. \tag{1.74}$$

On en déduit l'expression des valeurs propres :

$$\sigma_\pm = \left(1 - 2\frac{L}{R_c}\right) \pm 2\mathrm{i}\sqrt{\frac{L}{R_c}\left(1 - \frac{L}{R_c}\right)}. \tag{1.75}$$

En posant $L/R_c = \sin^2\alpha$, ce qui est possible car la condition de stabilité implique $0 < L/R_c < 1$, on parvient à simplifier cette expression de la manière suivante :

$$\sigma_\pm = e^{\pm \mathrm{i}2\alpha}. \tag{1.76}$$

On retrouve bien le fait que les valeurs propres σ_+ et σ_- sont complexes conjuguées l'une de l'autre et que le déterminant de M_{cav} vaut un. De plus, on déduit de (1.76) que $M_{cav}^N = \mathbb{I}$ si et seulement si $\alpha = k\pi/N, k \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, on a :

$$M_{cav}^N = \mathbb{I} \iff L = R_c \sin^2\left(\frac{k}{N}\pi\right), k \in \mathbb{N}, \tag{1.77}$$

ce qui correspond rigoureusement à la condition de dégénérescence de la cavité donnée par (1.32).

La relation (1.19) permet d'affirmer que lorsque $M_{cav}^N = \mathbb{I}$, tout faisceau gaussien d'ordre unique retrouve son waist original après N aller–retours dans la cavité. De plus, nous avons vu qu'à dégénérescence la phase de Gouy sur un aller vaut $\Psi_G(L) = k\pi/N$. La phase de Gouy sur N aller–retours est donc un multiple de 2π, ce qui signifie qu'après N aller–retours dans la cavité tout mode d'ordre unique revient égal à lui même en phase, et ce quel que soit l'ordre du mode. Par linéarité ceci est également valable pour toute combinaison linéaire de modes d'ordres uniques, et donc pour toutes les distributions possibles de champ puisque ces derniers forment une base.

On a donc montré que la notion de dégénérescence est équivalente à une propriété auto–imageante de la cavité, à la fois en amplitude et en phase, pour N aller–retours d'un faisceau quelconque dans cette cavité. Nous nous servirons de cette propriété par la suite pour développer une methode permettant de construire des modes propres d'une cavité dégénérée en partant d'une distribution initiale de champ quelconque.

Trajectoires géométriques

D'un point de vue de l'optique géométrique, la condition $M_{cav}^N = \mathbb{I}$ s'interprète immédiatement comme l'existence de trajectoires fermées des rayons qui bouclent sur eux mêmes après N aller–retours dans la cavité. Nous allons présenter quelques trajectoires possibles, en fonction de la

position et l'angle d'incidence du rayon initial, dans des situations de dégénérescences distinctes pour lesquelles $L = R_c/2$ ($\Psi_G(L) = \pi/4$), $L = 3R_c/4$ ($\Psi_G(L) = \pi/3$), et $L = R_c/4$ ($\Psi_G(L) = \pi/6$). Par souci de simplicité nous supposerons que les trajectoires des rayons considérés ont lieu dans un plan.

Les tracés de rayons correspondant aux dégénérescences d'ordre $N = 4$, $N = 3$ et $N = 6$ sont réprésentés dans les figures 1.22, 1.23 et 1.24, respectivement.

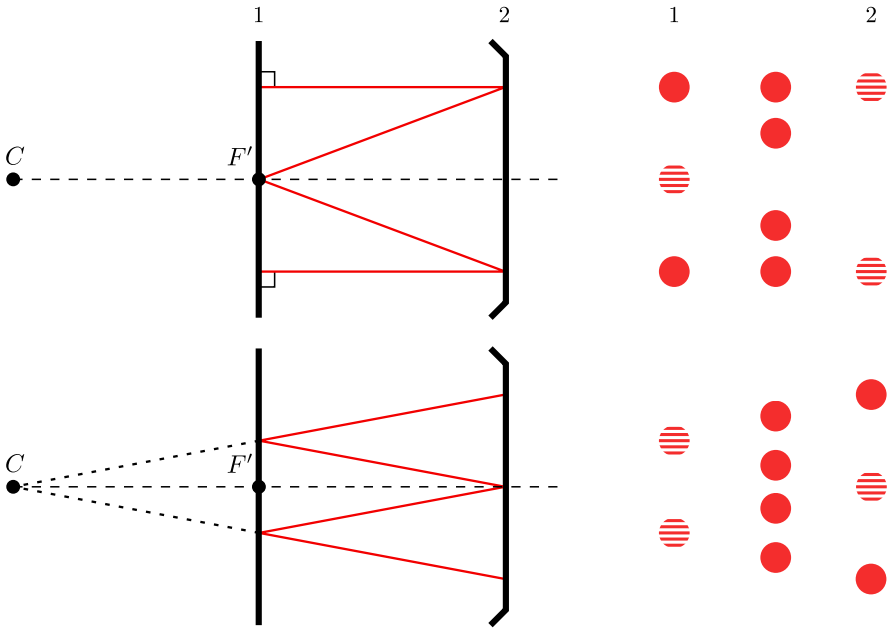


FIGURE 1.22 – Trajectoires géométriques particulières lorsque $L = R_c/2$ (ordre 4), ainsi que les profils d'intensité des modes attendus sur le miroir plan (1), sur le miroir sphérique (2), et dans un plan intermédiaire.

La première chose évidente à remarquer est que les dégénérescences d'ordre pair conduisent à des trajectoires symétriques par rapport à l'axe optique, ce qui n'est pas le cas des dégénérescences d'ordre impair. Ceci se traduira évidemment dans la symétrie du profil transverse observé dans un laser, et nous verrons qu'une disymétrie dans le profil d'intensité d'un mode transverse témoigne obligatoirement d'une configuration dégénérée ou proche de dégénérescence d'ordre impair.

La seconde chose à remarquer est que les impacts sur le miroir plan n'ont pas la même géométrie que les impacts sur le miroir sphérique, ce qui conduira à des profils transverses différents au niveau de ces deux plans. D'une manière générale, un mode transverse issu d'une cavité dégénérée ne sera plus invariant de forme par propagation, ce qui est évident étant donné qu'il combine plusieurs modes d'ordres différents.

Si on cherche maintenant à associer un profil transverse à chacun de ces rayons, on peut raisonner sur un profil gaussien pour plus de simplicité. Si le waist de ce mode gaussien est bien choisi, celui-ci peut rester à peu près le même au cours des différents aller–retours dans la cavité. On peut alors prédire l'allure que possèderait le champ dans chaque plan en supposant que l'intersection de deux rayons ayant des angles différents donne lieu à des franges d'interférence.

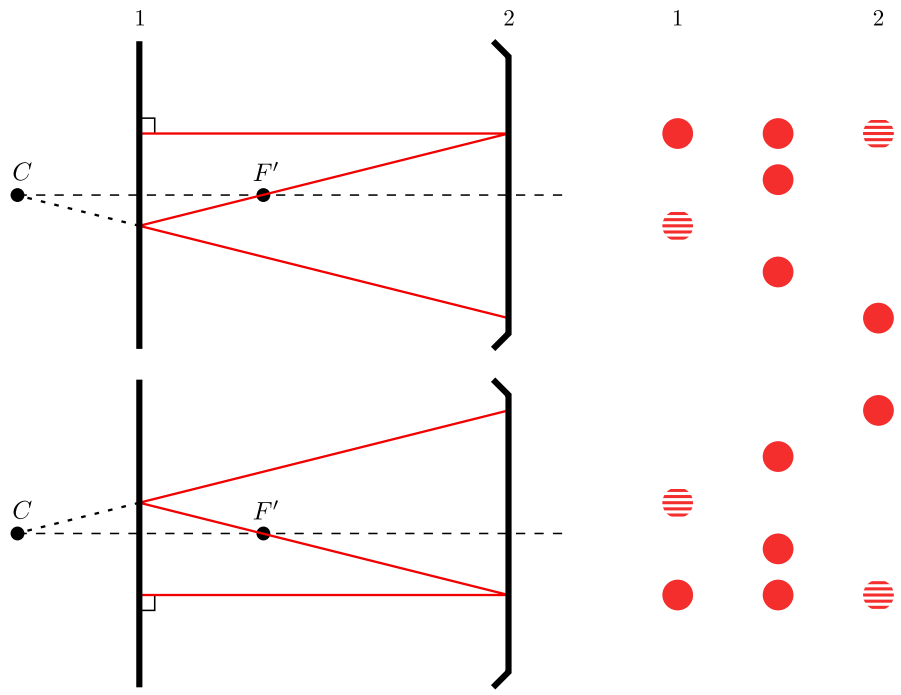


FIGURE 1.23 – Trajectoires géométriques particulières lorsque $L = 3R_c/4$ (ordre 3), ainsi que les profils d'intensité des modes attendus sur le miroir plan (1), sur le miroir sphérique (2), et dans un plan intermédiaire.

On obtient donc des profils transverses constitués à la fois de motifs gaussiens et de franges d'interférence, représentés sur les figures 1.22, 1.23 et 1.24. Des modes ainsi construits en partant de trajectoires de rayons géométriques et en leur associant un profil transverse sont appelés modes géométriques [64]. Nous verrons d'ici peu que de tels modes ont effectivement été observés expérimentalement, et que l'analyse géométrique se prête très bien à leur description. Cependant le raisonnement qui vient d'être fait ici est purement qualitatif, et nous donnerons une méthode rigoureuse pour construire ces modes à la fin de cette section.

Enfin, il reste à remarquer que les profils transverses obtenus par l'application de ce raisonnement géométrique peuvent être très différents en fonction du choix du rayon initial et de la distribution initiale de champ attachée à ce rayon. La question de savoir comment prédire le bon motif à partir des conditions expérimentales (notamment la position et le profil du gain) a été très peu discutée, et nous verrons que ce problème ne peut pas réellement trouver de solution satisfaisante. À défaut, on est malgré tout capable de constater a posteriori que les observations expérimentales entrent dans la catégorie des modes géométriques.

1.3.2 Observations expérimentales issues de la littérature

Le comportement d'un laser opérant à une dégénérescence de la cavité vide est sensiblement différent du cas non–dégénéré étudié précédemment où on observe toujours des modes propres d'ordre unique. Comme nous l'avons souligné précédemment, à dégénérescence le laser possède

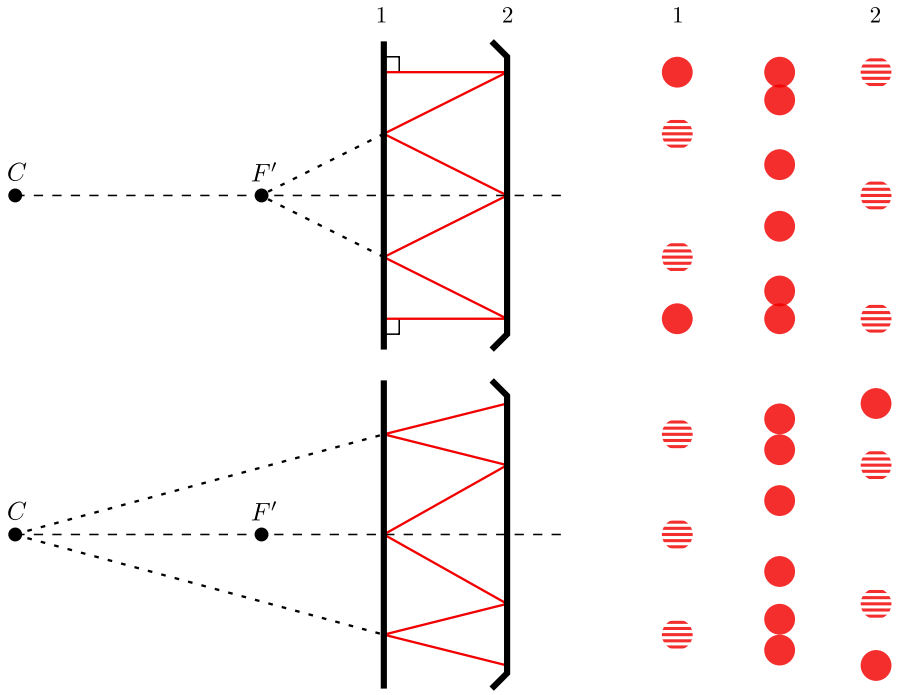


FIGURE 1.24 – Trajectoires géométriques particulières lorsque $L = R_c/4$ (ordre 6), ainsi que les profils d'intensité des modes attendus sur le miroir plan (1), sur le miroir sphérique (2), et dans un plan intermédiaire.

plus de degrés de liberté pour sélectionner un mode propre puisqu'il peut combiner plusieurs modes d'ordres différents sous réserve qu'ils soient tous congrus au même entier modulo l'ordre de la dégénérescence. Les modes issus de trajectoires géométriques que l'on vient de présenter sont seulement des cas particuliers de modes propres accessibles au laser à dégénérescence mais nous allons voir que ceux-ci ont fait l'objet de plusieurs études et observations. Un autre aspect des faisceaux ayant été étudiés à dégénérescence concerne la puissance qu'ils sont capables d'extraire du milieu actif. En effet, de nombreuses observations témoignent d'une augmentation significative de la puissance de fonctionnement des lasers autour des points de dégénérescence de la cavité vide, s'expliquant facilement par un meilleur accord du profil transverse du mode propre sélectionné avec le profil du gain dans le milieu actif.

Modes géométriques

Certains auteurs ont cherché à tirer parti du grand nombre de degrés de liberté disponibles à dégénérescence pour montrer qu'il était possible de forcer la formation de modes transverses d'intérêt en insérant des filtres en transmission ou en phase dans la cavité. C'est par exemple le cas de Colombeau *et coll.* [65] qui ont exploité le comportement d'une cavité concave–concave confocale, dégénérée d'ordre 2, pour construire des modes semblables à des réseaux de franges issues de l'interférence entre deux disques de champs séparées dans l'espace.

D'autres auteurs se sont également intéressés à la formation des modes transverses dans des

cavités dégénérées plus simples ou la sélection de modes s'effectue uniquement par le profil de gain utilisé. L'appellation de modes géométriques a ainsi été introduite par Dingjan *et coll.* [64] qui ont observé des modes transverses ressemblant parfaitement aux modes représentés sur la figure 1.22, obtenus dans une cavité plan–concave dégénérée d'ordre 4 où $L = R_c/2$, dans une situation de pompage excentré par rapport à l'axe optique de la cavité. Par la suite, ces modes ont également été étudiés analytiquement et expérimentalement à plusieurs reprises par Y.F. Chen *et coll.* [66, 67].

Enfin, C.H. Chen *et coll.* ont observé des modes géométriques dans un laser constitué d'une cavité plan–concave dégénérée d'ordre 3 où $L = 3R_c/4$, dans le cas où la pompe est cette fois-ci alignée sur l'axe optique. Dans leur article [68], les auteurs montrent à l'aide d'une étude numérique que le profil transverse observé expérimentalement peut être retrouvé en sommant trois aller–retours successifs d'une distribution gaussienne suivant approximativement le profil de la pompe dans le milieu actif. Ils remarquent également que le faisceau ainsi construit semble posséder trois waists de tailles différentes et à des positions différentes, ce qu'ils parviennent à confirmer expérimentalement. Nous montrerons toutefois à la fin de cette partie qu'une plus grande rigueur s'impose lorsque l'on souhaite construire un mode géométrique à partir d'une distribution de champ initiale, et que les résultats obtenus ne peuvent s'interpréter physiquement que de manière très qualitative.

Puissance de sortie et largeurs de dégénérescences

Un autre aspect expérimental lié à la formation des modes transverses à dégénérescence est la puissance que ceux-ci parviennent à extraire de la cavité en comparaison des situations non–dégénérées. Nous avons déjà émis l'hypothèse que le mode que l'on doit s'attendre à observer en sortie de laser est celui qui a la valeur propre la plus grande dans le régime linéaire. De plus, il est évident que plus la valeur propre associée à un mode est grande, plus l'intensité lumineuse du faisceau devra être importante afin de saturer le gain et atteindre le régime stationnaire. Ainsi, on peut facilement expliquer que les dégénérescences de la cavité conduisent à une sélection de modes qui tentent de profiter au mieux du milieu actif et donc d'en extraire le maximum de puissance. La seule chose qui n'est pas évidente et qui ne sera discutée que dans le chapitre suivant est que les modes propres de la cavité avec un gain linéaire se transforment sensiblement lorsque l'on ajoute de la saturation dans le modèle, et ce particulièrement lorsque la cavité est dégénérée. En première approximation, nous pouvons néanmoins ignorer ce fait et raisonner comme si la valeur propre d'un mode dans le régime linéaire était directement liée à la puissance de sortie du laser dans le régime stationnaire.

L'augmentation de la puissance de sortie du laser à dégénérescence a d'abord été observée dans une cavité concave–concave confocale par Couderc *et coll.* [69]. Dans cette expérience, il est montré que le mode laser se construit de manière à occuper du mieux qu'il peut le volume pompé dans le milieu actif. L'étude extensive de la puissance de sortie d'un laser constitué d'une cavité plan–concave a été réalisée par Zhang *et coll.* autour d'un grand nombre de dégénérescences partielles de la cavité [70]. Cette augmentation de puissance est également mise en évidence par un modèle analytique développé par Y.F. Chen *et coll.* [67] initialement dans le but d'étudier la

formation des modes géométriques aux longueurs des dégénérescences les plus notables.

Les courbes de puissances mesurées en faisant varier la longueur de cavité autour des dégénérescences sont bien évidemment continues. Physiquement, il existe donc une transition douce entre les situations non–dégénérées où seuls des modes d'ordre unique sont observés et les points exacts de dégénérescence où des modes géométriques prennent place. Les profils transverses que l'on peut observer dans ces zones de transition que l'on peut qualifier de semi–dégénérées n'ont cependant jamais été étudiés. Nous consacrerons une partie du chapitre 2 à l'étude numérique de telles zones de dégénérescence, dont l'origine physique réside exclusivement dans le couplage entre modes de cavité exercé par le milieu actif. Cette étude sera également l'occasion de montrer qu'il existe des modes propres semi–dégénérés qui combinent un nombre très restreint de modes d'ordres uniques et qui ne peuvent pas être décrits par des modes géométriques. Avant cela, nous souhaitons conclure ce chapitre en présentant une méthode rigoureuse permettant de construire des modes géométriques à partir d'une distribution initiale de champ arbitraire, complétant ainsi le travail de C.H. Chen *et coll.* [68].

1.3.3 Construction des modes géométriques

Dans cette partie, nous allons montrer comment il est possible de construire un mode propre d'une cavité dégénérée à partir d'une distribution de champ quelconque. Nous étudierons également quels types de modes sont obtenus lorsque la distribution choisie est une gaussienne, approchant ainsi le profil de gain le plus couramment utilisé dans les lasers pompés longitudinalement. Nous verrons que cette méthode permet de rendre compte qualitativement de quelques observations expérimentales mais qu'elle laisse une grande indétermination quant-au choix rigoureux de la distribution initiale employée, plus particulièrement sur le choix de la phase, et quant-à l'ordre du mode qui va être sélectionné par le laser.

Construction d'un mode propre à partir d'une distribution arbitraire du champ

Considérons une dégénérescence d'ordre N telle que la matrice ABCD de la cavité vérifie $M_{cav}^N = \mathbb{I}$ et la phase de Gouy $\Psi_G(L) = k\pi/N$, $k \in \mathbb{N}$. L'opérateur d'aller–retour $\mathbf{M}_{cav}$ décrivant l'évolution d'un champ u dans la cavité vérifie alors $\mathbf{M}_{cav}^N u = u$. De plus, si u_p est un mode propre de la cavité d'ordre unique congru à p modulo N, on a :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \mathbf{M}_{cav}^q u_p = u_p e^{2\mathrm{i}q(p+1)\frac{k\pi}{N}}. \tag{1.78}$$

Définissons alors l'opérateur $\mathbf{M}_p$ par :

$$\mathbf{M}_p = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} \mathbf{M}_{cav}^q e^{-2\mathrm{i}q(p+1)\frac{k\pi}{N}}. \tag{1.79}$$

Considérons cette fois-ci un mode propre de la cavité u_r d'ordre unique congru à r modulo N. L'application de l'opérateur $\mathbf{M}_p$, en vertu de (1.78), donne :

$$\mathbf{M}_p u_r = \left(\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \left(e^{2\mathrm{i}(r-p)\frac{k\pi}{N}} \right)^q \right) u_r = \delta_{r,p} u_r, \tag{1.80}$$

où $\delta_{r,p}$ désigne le symbole de Kronecker, valant un si $r = p$ et zéro sinon.

L'opérateur $\mathbf{M}_p$ défini en (1.79) est alors un projecteur sur le sous-espace vectoriel engendré par les modes propres d'ordres uniques congrus à p modulo N. Comme nous l'avons déjà montré précédemment, toute combinaison linéaire de modes propres d'ordres uniques congrus à p modulo N est toujours un mode propre de la cavité. Ainsi, quel que soit le champ u choisi initialement, l'ensemble des modes propres de la cavité formant une base, $\mathbf{M}_p u$ est un mode propre de la cavité constitué uniquement de modes propres d'ordres uniques congrus à p modulo N. Pour un choix de distribution initiale u il y a donc a priori N manières de construire un mode propre géométrique de la cavité, pour N valeurs différentes de p. La question de savoir lequel de ces modes sera observé en pratique, en plus du problème du choix de la distribution initiale du champ, ne sera réellement abordée qu'au chapitre 2 et vérifiée expérimentalement dans le chapitre 3.

Exemples de constructions de modes géométriques

On suppose ici que la distribution initiale nous permettant de construire les modes géométriques est gaussienne de waist w_g, suivant le profil du gain. Pour simplifier, nous allons attribuer à cette distribution initiale un front d'onde plan, et commenter les profils des modes obtenus en regards des observations expérimentales précédentes.

Pour commencer, nous allons considérer la dégénérescence particulière $L = R_c/2$, d'ordre 4, dans le cas où la pompe est alignée sur l'axe optique. Ce cas simple peut être étudié de manière analytique et est très instructif. La matrice ABCD de la cavité $M_{cav}(R_c/2)$ est donnée par (1.23) :

$$M_{cav}(R_c/2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R_c}{2} \\ -\frac{2}{R_c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.81}$$

Afin de construire un mode u_p d'ordre congru à p modulo 4, $p \in \{0,1,2,3\}$, nous devons d'après (1.79) sommer 4 contributions dont la distribution initiale choisie et 3 aller–retours successifs dans la cavité. Nous notons $u_{p,n}$ chacune de ces contributions, de sorte que

$$u_p(x,y,0) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} u_{p,n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{w_{g_n}} e^{-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}_n}} e^{\mathrm{i}n\Psi_G} e^{-\mathrm{i}n(p+1)\frac{\pi}{2}}, \tag{1.82}$$

où $\tilde{q}_n = z_n + \mathrm{i}z_{R_n}$ et $w_{g_n} = 2z_{R_n}/k$ sont le rayon de courbure complexe et le waist de la $n^{\text{ième}}$ contribution, et Ψ_G est la phase de Gouy sur un aller–retour.

Par hypothèse, on a $\tilde{q}_0 = \mathrm{i}z_{R_0}$ avec $z_{R_0} = kw_g^2/2$, et d'après (1.19) on a $\tilde{q}_1 = \mathrm{i}\frac{R_c^2}{4z_{R_0}}$. De plus, comme $M_{cav}^2(R_c/2) = -\mathbb{I}$, on a $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_0$ et $\tilde{q}_3 = \tilde{q}_1$. On remarque que pour cette dégénérescence particulière le front d'onde des réflections successives est toujours plan au niveau du plan transverse initial.

Concernant la phase de Gouy sur un aller–retour, on a :

$$\Psi_G = \arctan\left(\frac{L}{z_{R_0}}\right) + \arctan\left(\frac{4z_{R_0}L}{R_c^2}\right) = \arctan\left(\frac{R_c}{2z_{R_0}}\right) + \arctan\left(\frac{2z_{R_0}}{R_c}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{1.83}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} u_p(x,y,0) &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\frac{1}{w_{g_n}} e^{-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}_n}} e^{-\mathrm{i}np\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left(1+e^{-\mathrm{i}p\pi}\right)\left(\frac{1}{w_g}e^{-\frac{x^2+y^2}{w_g^2}} + \frac{1}{w'_g}e^{-\mathrm{i}p\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2+y^2}{{w'_g}^2}}\right), \end{aligned} \tag{1.84}$$

où $w'_g = \frac{\lambda_0 R_c}{2\pi w_g}$.

Ceci conduit uniquement à deux solutions non triviales, voire une seule si $w_g = w_0$:

$$u_0(x,y,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w_g}e^{-\frac{x^2+y^2}{w_g^2}} + \frac{1}{w'_g}e^{-\frac{x^2+y^2}{{w'_g}^2}}\right), \tag{1.85}$$

$$u_2(x,y,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w_g}e^{-\frac{x^2+y^2}{w_g^2}} - \frac{1}{w'_g}e^{-\frac{x^2+y^2}{{w'_g}^2}}\right). \tag{1.86}$$

L'annulation des modes u_1 et u_3 est la conséquence du fait que la distribution gaussienne initiale possède une projection nulle sur l'ensemble des modes d'ordres congrus à 1 ou 3 modulo 4. Par contre, nous verrons que le choix d'une gaussienne excentrée par rapport à l'axe optique comme distribution initiale n'est pas incompatible avec la construction de modes géométriques d'ordres impairs.

Les équations (1.9), (1.10) et (1.11) permettent de remonter facilement aux expressions de $u_0(x,y,z)$ et $u_2(x,y,z)$ valables partout à l'intérieur de la cavité ($z \in [0,L]$). Les profils d'intensité associés aux champs proches et lointains de u_0 et u_2 sont représentés respectivement sur les figures 1.25 et 1.26. Dans les deux cas, la longueur d'onde a été fixée à $\lambda_0 = 1{,}064\,\mu$m, le waist de la gaussienne initiale à $w_g = 30\,\mu$m et le rayon de courbure du miroir de sortie à $R_c = 10\,$cm. Les distributions de champs proches de u_0 et u_2 semblent peu différer du mode fondamental gaussien mais conduisent pourtant à des champs lointains sensiblement différents. Nous verrons de plus par la suite que la distribution de champ u_0 correspond le mieux à ce qui est observé expérimentalement.

La construction analytique des profils transverses géométriques est plus fastidieuse lorsque la distribution initiale n'est plus centrée sur l'axe optique. Nous proposons donc à partir de maintenant de présenter quelques profils transverses obtenus pour des pompes excentrées à l'aide d'une méthode numérique de propagation des faisceaux, telle que l'intégrale de Huygens–Fresnel (1.20).

Nous avons représenté sur la figure 1.27 différents modes géométriques construits à partir d'une distribution initiale gaussienne de waist $w_g = 30\,\mu$m et de position $x_g = 300\,\mu$m excentrée par rapport à l'axe optique. Les différents profils obtenus correspondent à des modes d'ordre congru à p modulo 4, pour $p \in \{0,1,2,3\}$. Le rayon de courbure R_c et la longueur d'onde λ_0 sont

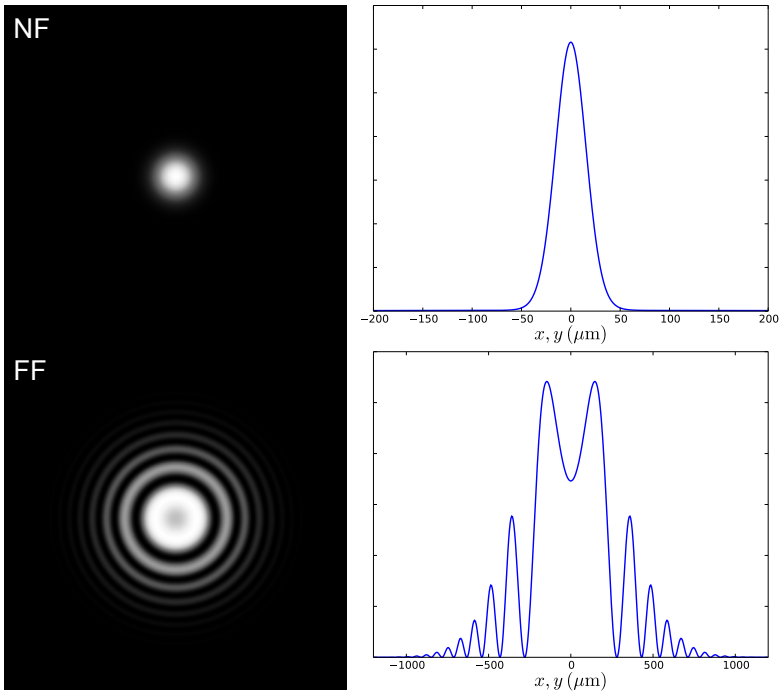


FIGURE 1.25 – Profils d'intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) du mode géométrique $u_0(x,y,z)$, pour $\lambda_0 = 1{,}064\,\mu$m, $w_g = 30\,\mu$m et $R_c = 10\,$cm.

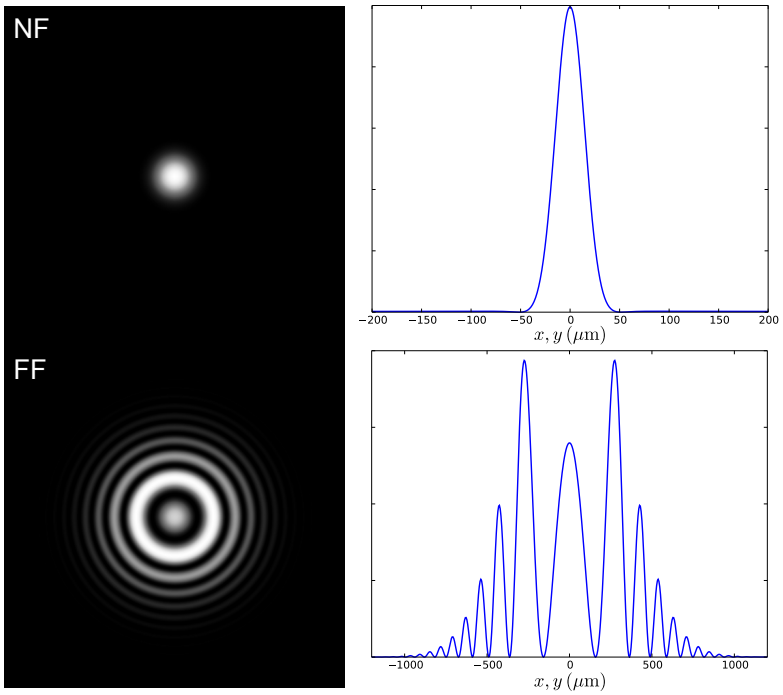


FIGURE 1.26 – Profils d'intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) du mode géométrique $u_2(x,y,z)$, pour $\lambda_0 = 1{,}064\,\mu$m, $w_g = 30\,\mu$m et $R_c = 10\,$cm.

les mêmes que précédemment.

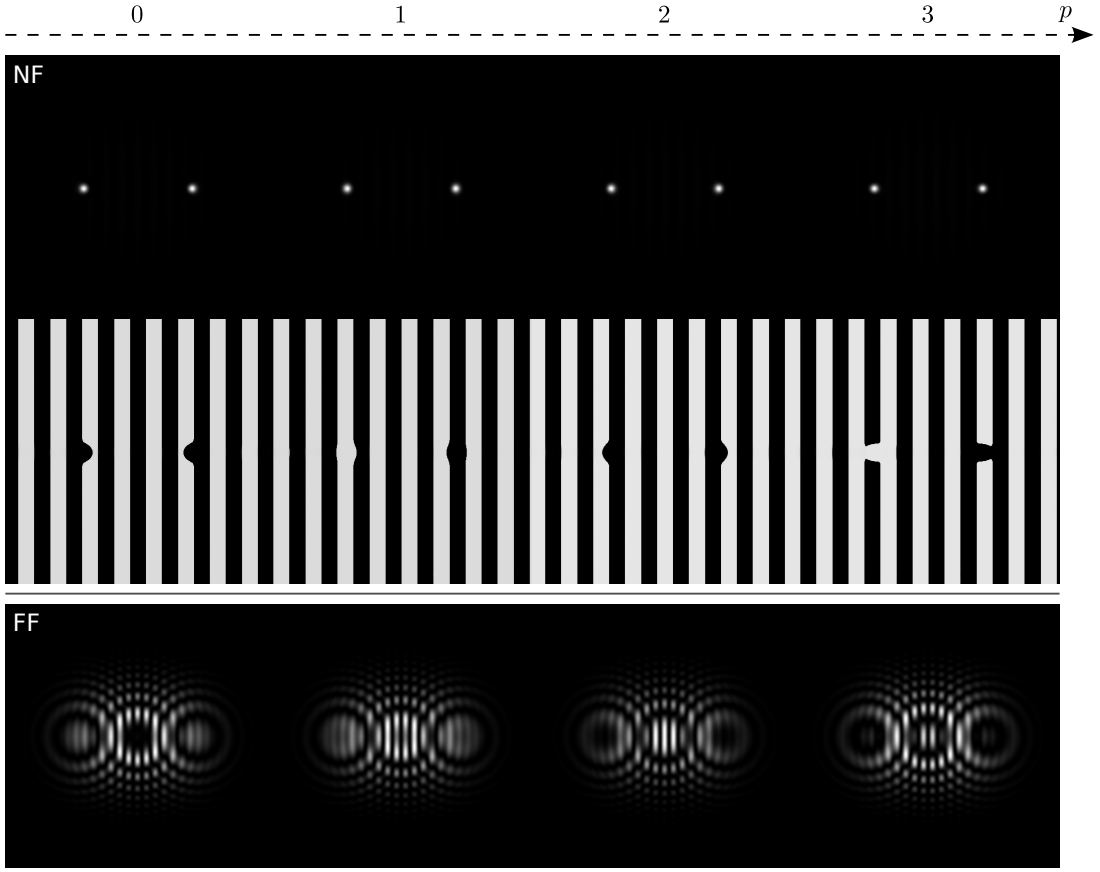


FIGURE 1.27 – Profils d'intensité et de phase des modes géométriques d'ordre congru à p modulo 4, sur le miroir plan (NF) et le miroir sphérique (FF), construits à partir d'une distribution initiale excentrée ($w_g = 30\,\mu$m, $x_g = 300\,\mu$m).

On constate que les profils d'intensité au niveau du miroir plan semblent très similaires, et qu'il est nécessaire d'avoir recours aux profils de phase pour les différencier. En revanche les profils d'intensité au niveau du miroir sphérique sont sensiblement différents et mettent tout de suite en évidence la présence d'une ligne nodale verticale en $x = 0$ lorsque p est impair. Ces profils ne ressemblent pas aux modes obtenus en utilisant les trajectoires géométriques de la figure 1.22. Nous verrons pourtant dans la suite que ces modes s'observent très facilement en sortie de laser dans ces mêmes conditions de dégénérescence.

Pour obtenir des profils semblables à ceux décrit précédemment, il faut en réalité utiliser une distribution initiale plus large afin que le faisceau diverge peu au cours de ses aller–retours successifs, et plus excentrée afin que les interférences au niveau des différents points d'impacts soient bien séparables. La figure 1.28, obtenue pour $w_g = 150\,\mu$m et $x_g = 300\,\mu$m, permet en effet de retrouver des profils d'intensité fidèles à la prédiction géométrique de la figure 1.22.

Afin de construire les différents types de trajectoires possibles, il est nécessaire de rajouter une phase linéaire de la forme $e^{\mathrm{i}k_x x}$ à la distribution gaussienne initiale. Le choix de k_x peut être

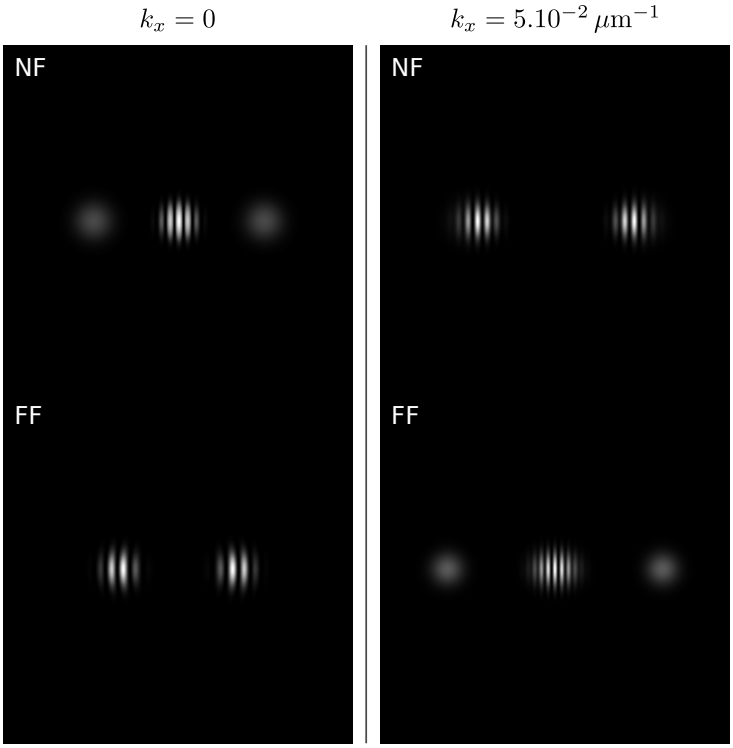


FIGURE 1.28 – Profils d'intensité de modes géométriques, sur le miroir plan (NF) et le miroir sphérique (FF), pour une distribution initiale large et très excentrée ($w_g = 150\,\mu$m, $x_g = 500\,\mu$m) possédant une phase linéaire $e^{\mathrm{i}k_x x}$.

totalement arbitraire et ne saurait être rattaché aux conditions de pompage expérimentales. On peut se demander pourquoi l'expérience de Dingjan *et coll.* [64] favorise le cas où le choix de la distribution initiale nécessite une valeur de k_x non nulle de manière à observer des franges en lieu et place d'un profil fidèle à la pompe. Dans leur article, les auteurs invoquent le fait que la configuration sélectionnée par le laser est celle qui minimise le nombre d'impacts différents sur chacun des miroirs, sans autre explication. En ce qui nous concerne, nous pouvons apporter une réponse plus physique à cette question en remarquant que chaque gaussienne constituant le mode contient ici un quart de l'énergie totale du mode. Lorsque deux gaussiennes interfèrent avec des angles différents donnant lieu à des franges d'interférence, il n'en reste pas moins que ce profil d'interférences renferme la moitié de l'énergie totale du mode. Il est alors naturel de penser que le pompage sera plus efficace en apportant de l'énergie à la moitié du mode plutôt qu'à un quart du mode comme ça serait le cas lorsque $k_x = 0$. Il est vrai qu'une partie de la pompe est inutilisée lorsque celle-ci recouvre un profil de franges d'interférences, mais dans le régime de gain linéaire tout du moins ceci n'a aucune importance.

Synthèse

Cette partie nous a permis d'étudier les modes propres d'une cavité dégénérée d'ordre N, que nous désignons sous le terme de modes géométriques en référence à [64], et de montrer que ceux-

ci peuvent être obtenus en sommant N aller–retours successifs dans la cavité d'une distribution initiale de champ donnée. L'expérience de C.H. Chen *et coll.* [68] tend à montrer que lorsque l'on considère une distribution de gain, le mode propre sélectionné par la cavité peut être construit en sommant N aller–retours d'une distribution de champ suivant le profil du gain et possédant un front d'onde plan. D'une part, ceux-ci oublient de mentionner qu'à partir d'une distribution initiale donnée il existe N manières de construire un mode propre géométrique de la cavité, et qu'il est nécessaire de comparer les valeurs propres associées à chacun de ces modes pour connaître celui qui a le plus de chances de laser. D'autre part, leur méthode ne s'applique pas à l'expérience menée par Dingjan *et coll.* [64], où il est nécessaire d'ajouter une phase linéaire à la distribution initiale suivant le profil de la pompe pour produire un mode géométrique semblable aux observations expérimentales. Encore une fois, cette phase linéaire doit être choisie en sorte de maximiser la valeur propre associée au mode ainsi construit, et il n'y a aucun moyen de la prédire sans faire une étude exhaustive. Le mieux que nous puissions affirmer est que les modes qui sont observés à dégénérescence semblent bien appartenir à la catégorie des modes géométriques. Cependant, la question de savoir s'il existe une distribution de champ « plus simple » que le mode lui-même dont on puisse sommer les aller–retours successifs pour retrouver le mode en question, est en elle même mal formulée et difficile à formaliser. On peut parfois trouver qualitativement une telle distribution a posteriori en procédant avec un peu d'intuition, mais il n'existe pas d'argument physique permettant de justifier un lien entre des conditions expérimentales données et le choix d'une distribution initiale de champ permettant de construire le mode sélectionné par le laser.

Jusqu'ici, nous avons opposé deux situations bien distinctes, la première où la cavité est non–dégénérée et la seconde où la longueur de la cavité correspond exactement à une longueur de dégénérescence. Cependant, les diverses observations expérimentales réalisées en faisant varier continûment la longueur de la cavité témoignent d'une largeur non négligeable des courbes de puissance de sortie du laser autour des points de dégénérescence. On est en droit de s'interroger sur les propriétés des modes que l'on doit pouvoir observer dans des situations de semi–dégénérescence. Ces propriétés feront l'objet d'études numériques dans le chapitre 2 à suivre, et seront confirmées par des observations expérimentales dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Méthodes de calcul de profils transverses stationnaires d'un laser

L'objectif de ce second chapitre est de développer des méthodes permettant de calculer les profils transverses stationnaires d'un laser étant données des géométries de cavités et de pompes quelconques. Comme nous l'avons vu précédemment les modes propres du régime linéaire peuvent être nombreux, peut être même potentiellement une infinité, mais seulement un nombre fini de ces modes possède une valeur propre de module supérieur à un. Comme nous allons le voir, il est possible d'élaborer une méthode de calcul permettant d'associer un mode stationnaire à chaque mode propre du régime linéaire de valeur propre de module plus grand que un. En général, le mode stationnaire obtenu et le mode linéaire initial partageront la même phase de Gouy après un aller–retour dans la cavité, témoignant d'une conservation de l'ordre du mode dans le processus algorithmique de construction du mode stationnaire. Considérant que cette conservation de l'ordre du mode au cours de la saturation puisse se produire également dans les expériences réelles, nous accordons une importance d'autant plus grande aux capacités de prédictions du régime linéaire et commençons donc ce chapitre en développant un critère analytique de sélection de modes que nous confronterons ensuite à des simulations et plus tard aux expériences. Le calcul des modes propres du régime linéaire occupe par conséquent une grande place dans ce chapitre puisque ceux-ci servent d'une part de conditions initiales pour la construction des modes stationnaires et permettent d'autre part de faire des prédictions intéressantes sur les profils transverses auxquels ont doit s'attendre dans le régime stationnaire. Dans le cas où un seul mode stationnaire peut laser, nous ferons l'hypothèse que celui-ci sera obtenu en utilisant le mode propre linéaire de valeur propre la plus grande comme condition initiale. Cette hypothèse sera par la suite confirmée expérimentalement à de nombreuses reprises au chapitre 3. Nous noterons au passage que cette hypothèse amènera à contredire parfois une heuristique communément admise stipulant que la sélection du mode stationnaire s'effectue selon un critère de maximisation de la puissance de sortie du laser. En effet, il se trouvera certaines situations où le mode stationnaire associé au mode linéaire de valeur propre la plus grande aura après la saturation du gain une puissance inférieure à un autre mode stationnaire possible. Toutefois lorsqu'un mode stationnaire sature le gain du laser et que le gain non–saturé est suffisant, un nouveau mode peut commencer

à osciller et ces deux modes doivent alors s'adapter mutuellement au gain pour coexister. Nous proposerons à la fin de ce chapitre un algorithme fondé sur cette représentation de la réalité permettant de calculer un profil stationnaire composé de plusieurs modes longitudinaux différents possédant des structures transverses différentes.

2.1 Critère analytique de sélection de modes

Nous présentons ici une expression analytique permettant de calculer la valeur propre associée à un mode propre d'une cavité avec gain et pertes linéaires. Le calcul de cette expression fait intervenir une intégrale de recouvrement entre la distribution d'intensité normalisée du mode propre considéré et le profil de gain, et nécessite une connaissance *a priori* du mode propre dont on veut calculer la valeur propre associée. Le pouvoir de prédiction de ce critère apparaît donc à première vue limité, mais dans nos hypothèses d'étude nous rappelons que les modes propres de la cavité avec gain restent des modes propres de la cavité vide avec une très bonne approximation. Le critère analytique que nous allons développer peut par conséquent nous permettre d'évaluer une compétition potentielle entre différents modes de la cavité vide, en présence du profil de gain considéré. Après la dérivation de l'intégrale de recouvrement mode–gain, nous présenterons donc quelques prédictions qui en résultent et qui vont à l'encontre de certaines idées reçues sur l'excitation de modes d'ordre supérieur dans les lasers.

2.1.1 Intégrale de recouvrement mode–gain

Nous allons développer ici une expression analytique permettant de calculer la valeur propre associée à un mode propre d'une cavité vide en présence d'un gain et de pertes linéaires, en supposant que l'introduction d'un gain dépendant de l'espace ne modifie pas significativement les modes propres de cette cavité. Il est bien entendu que ce type de raisonnement ne s'applique que dans des conditions où le gain dans le milieu actif est faible et où la propagation dans le vide joue un rôle essentiel, comme c'est le cas pour les cavités étendues pompées longitudinalement.

Système étudié

Par souci de simplicité, nous nous restreignons ici à l'étude d'une cavité plan–concave contenant un milieu actif d'indice n et d'épaisseur d localisé sur le miroir plan représenté par la figure 2.1. Cependant tous les raisonnements qui vont suivre pourraient tout à fait être généralisés à tout type de cavité dont on connait une base de modes propres, et ceci peu importe la position du milieu actif. La cavité de longueur L considérée est supposée pompée longitudinalement, et on note $g_0(x,y,z)$ le profil de gain. Les pertes s'effectuent uniquement par l'intermédiaire du miroir sphérique M_2 de rayon de courbure R_c et de coefficient de réflexion en intensité R. On a noté Π_0 le plan particulier correspondant à la surface du miroir plan M_1 et Π_d le plan correspondant à la face de sortie du milieu actif. Le champ paraxial intracavité est quant-à lui toujours noté $u(x,y,z)$.

La présence d'un milieu d'indice n et d'épaisseur d dans la cavité ne modifie en rien les propriétés des modes propres présentées au chapitre 1, sous réserve de travailler avec une longueur

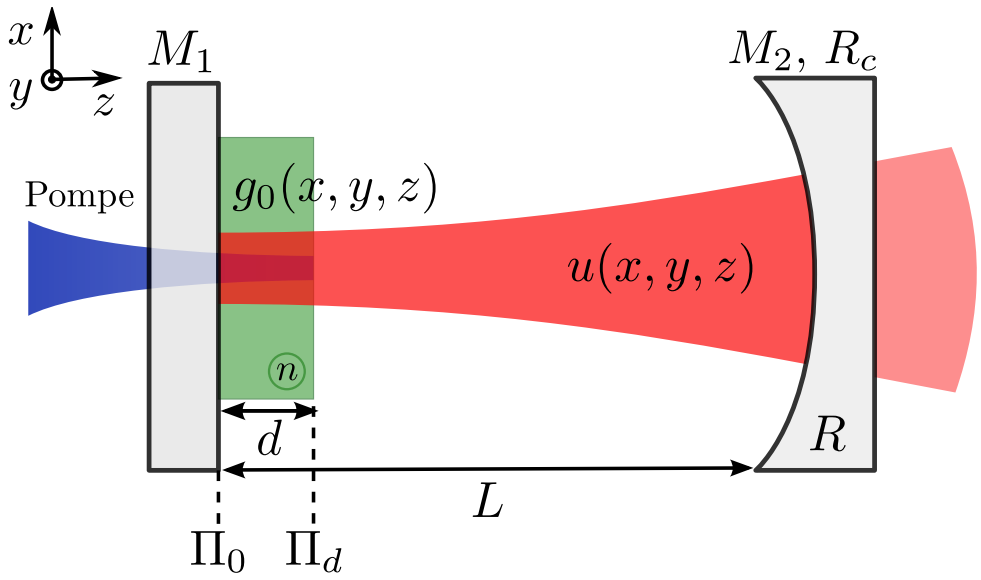


FIGURE 2.1 – Cavité plan–concave contenant un milieu actif d'indice n et d'épaisseur d pompé longitudinalement.

de cavité équivalente donnée par :

$$\tilde{L} = L - \left(\frac{n-1}{n}\right) d. \tag{2.1}$$

La longueur de Rayleigh équivalente s'écrit alors :

$$z_R = \sqrt{\tilde{L}(R_c - \tilde{L})}, \tag{2.2}$$

de manière tout à fait identique à l'équation (1.27), et le waist des modes propres de la cavité est toujours localisé sur le miroir plan et donné par :

$$w_0^2 = \frac{\lambda_0}{\pi} z_R, \tag{2.3}$$

où λ_0 est la longueur d'onde longitudinale dans le vide du mode considéré.

De même, les expressions de la largeur du faisceau $w(z)$, du rayon de courbure du front d'onde $R(z)$ et de la phase de Gouy $\Psi_G(z)$ restent données par les expressions (1.9), (1.10) et (1.11) respectivement, sous réserve d'y introduire la longueur de Rayleigh équivalente.

Enfin, nous supposons que la longueur d du milieu actif est petite devant la longueur de Rayleigh, de manière à ce que le champ dans la cavité évolue peu entre l'entrée et la sortie du milieu actif. De cette manière, en l'absence de pompage, le champ $u(x,y,l)$ dans le milieu actif, $0 \leq l \leq d$, pourra être assimilé au champ $u(\Pi_0)$ au niveau du miroir plan.

Équation paraxiale dans le milieu actif

Nous cherchons ici à montrer que lorsque le gain n'est pas trop fort il est possible de découpler l'action de propagation du champ dans le milieu actif de l'effet d'amplification. Pour cela, il est nécessaire de partir d'une équation de propagation amplifiée du champ dans le milieu actif que l'on construit à partir de l'équation paraxiale (1.6) en supposant que dans une tranche infinitésimale de milieu actif dz la propagation et l'amplification possèdent effectivement deux contributions indépendantes et que l'amplification consiste uniquement en la multiplication du champ par le profil transverse du gain $g_0(x,y,z)$ à la position z considérée. On obtient donc l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\mathrm{i}}{2k}\nabla_\perp^2 u + g_0(x,y,z)u, \tag{2.4}$$

où $k = 2\pi/\lambda$ avec $\lambda = \lambda_0/n$ étant la longueur d'onde dans le milieu d'indice n.

Considérons le champ u défini par :

$$u(x,y,z) = v(x,y,z)e^{\int_0^z g_0(x,y,l)\,\mathrm{d}l}, \tag{2.5}$$

où v est une solution de l'équation paraxiale dans un milieu d'indice n.

Sous une certaine approximation, on peut montrer que u peut être considérée comme une solution approchée de l'équation (2.4). En effet, en dérivant l'équation (2.5), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\mathrm{i}}{2k}\left(\nabla_\perp^2 v\right) e^{\int_0^z g_0(x,y,l)\,\mathrm{d}l} + g_0(x,y,z)u. \tag{2.6}$$

On suppose alors que les variations du profil de gain $g_0(x,y,z)$ sont suffisamment lentes dans les plans transverses afin que le terme en exponentielle dans l'équation (2.6) puisse être associé à v dans le laplacien transverse. Sous cette condition, u définie par (2.5) est bien une solution de l'équation (2.4) et les distributions transverses du champ à l'entrée et à la sortie du milieu actif, lorsque celui-ci se propage de M_1 vers M_2, sont liées par la relation :

$$u(\Pi_d) = \exp\left(\int_0^d g_0(x,y,l)\,\mathrm{d}l\right)\mathbf{M}_K\left[d/n\right]u(\Pi_0), \tag{2.7}$$

où on rappelle que $\mathbf{M}_K\left[d/n\right]$ représente l'opérateur de propagation d'un champ de longueur d'onde λ_0 dans le vide d'une distance d/n.

Nous avons donc montré que sous la condition d'un profil transverse de gain lentement variable, la propagation amplifiée d'un champ traversant un milieu actif linéaire peut être décrite par deux actions indépendantes, à savoir la propagation à travers un milieu d'indice n et de longueur d suivie de la multiplication par le profil de gain exponentiel intégré sur toute la longueur du cristal.

Dérivation de l'intégrale de recouvrement mode–gain

L'équation (2.7) indique que l'opération de multiplication du mode par le profil de gain moyen doit s'effectuer après propagation du mode dans le cristal. Nous supposons ici que cette multiplication peut également s'effectuer avant l'opération de propagation, ce qui est justifié par le fait que lorsque $d \ll z_R$ le profil du mode évolue très peu au cours de sa propagation dans le cristal. Ceci nous permet d'exprimer l'opérateur d'aller–retour dans la cavité avec gain $\mathbf{M}_{cav}(g_0)$ en fonction de l'opérateur d'aller–retour dans la cavité vide $\mathbf{M}_{cav}$ de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_{cav}(g_0) = e^{\tilde{g}_0}\mathbf{M}_{cav}, \tag{2.8}$$

où on a introduit le gain intégré sur un aller–retour $\tilde{g}_0(x,y) = 2\int_0^d g_0(x,y,l)\,\mathrm{d}l$.

Considérons maintenant la base $(u_{m,n})$ de modes Hermite–Gauss étant des modes propres de la cavité vide, satisfaisant l'équation :

$$\mathbf{M}_{cav}u_{m,n} = \sqrt{R}e^{2\mathrm{i}(m+n+1)\Psi_G(\tilde{L})}u_{m,n}. \tag{2.9}$$

Tout mode propre $u = \sum c_{m,n}u_{m,n}$ de la cavité avec gain doit alors satisfaire l'équation :

$$\sqrt{R}e^{\tilde{g}_0}\sum c_{m,n}e^{2\mathrm{i}(m+n+1)\Psi_G(\tilde{L})}u_{m,n} = \sigma_u u, \tag{2.10}$$

où σ_u est la valeur propre associée au mode propre u.

On suppose désormais que les différentes phases de Gouy présentes dans la somme de l'équation (2.10) s'accordent suffisamment de telle manière que :

$$\exists p \in \mathbb{N} \,/\, \sum c_{m,n}e^{2\mathrm{i}(m+n+1)\Psi_G(\tilde{L})}u_{m,n} = e^{2\mathrm{i}(p+1)\Psi_G(\tilde{L})}u + b, \tag{2.11}$$

où $b(x,y)$ est une fonction de faible amplitude vérifiant $\int |b|^2 \ll \int |u|^2$.

Maintenant, en appliquant l'opération $\int u^*$ de part et d'autre de l'égalité (2.10) et en négligeant le terme faisant intervenir la fonction $b(x,y)$, on obtient l'expression de la valeur propre σ_u :

$$\sigma_u = \sqrt{R}e^{2\mathrm{i}(p+1)\Psi_G(\tilde{L})}\iint_{\Pi_0}\frac{|u(x,y)|^2}{\|u\|^2}e^{\tilde{g}_0(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.12}$$

Dans le cas où $\tilde{g}_0$ est faible, ce qui sera toujours le cas en pratique, on peut remplacer le terme en exponentielle présent dans (2.12) par son développement limité à l'ordre 1, ce qui donne une nouvelle expression de σ_u faisant intervenir l'intégrale de recouvrement mode–gain entre le profil de gain linéaire intégré et le profil d'intensité du mode normalisé :

$$\sigma_u = \sqrt{R}e^{2\mathrm{i}(p+1)\Psi_G(\tilde{L})}\left(1 + \iint_{\Pi_0}\frac{|u(x,y)|^2}{\|u\|^2}\tilde{g}_0(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right). \tag{2.13}$$

Nous allons utiliser cette intégrale de recouvrement mode–gain comme le critère significatif nous permettant d'effectuer des prédictions quant-aux modes qui seront susceptibles d'osciller dans diverses configurations de pompage. En effet, on voit immédiatement que le module de la

valeur propre σ_u dépend directement de la valeur de cette intégrale.

2.1.2 Quelques prédictions

Dans un premier temps, nous allons voir comment généraliser l'intégrale de recouvrement mode–gain afin d'obtenir la condition de stationnarité d'un mode nous permettant de calculer sa puissance de sortie. Nous verrons également comment utiliser l'intégrale de recouvrement mode–gain afin de calculer la puissance de pompe nécessaire pour atteindre le seuil d'oscillation laser. Nous montrerons que les résultats obtenus sont en parfait accord avec des résultats présents dans la littérature [71, 72] bien que le point de départ de la méthode que nous utilisons soit très différent. Nous nous intéresserons ensuite à l'excitation de modes d'ordre supérieur à l'aide d'une pompe gaussienne centrée puis désalignée, dans des situations où la cavité est non–dégénérée puis dégénérée. Dans le cas d'une cavité non–dégénérée, nous comparerons les valeurs propres associées aux différentes familles de modes d'ordre unique et montrerons comment les modes d'ordre le plus bas possible sont toujours favorisés par le laser, empêchant par conséquent l'observation de modes aux lignes nodales fermées comme les modes Laguerre–Gauss. Dans le cas d'une cavité dégénérée, nous verrons que la maximisation de l'intégrale de recouvrement mode–gain permet de faire une sélection parmi la variété de modes géométriques accessibles, et que celle-ci est en accord avec les observations expérimentales présentées dans le chapitre précédent.

Puissance de sortie et seuil d'oscillation laser

L'influence de la taille de la pompe sur la puissance de sortie, le seuil d'oscillation et l'efficacité d'un laser a été étudiée depuis longtemps [72, 73, 74, 75]. Il a également été montré que l'effet de saturation de la pompe peut jouer un rôle [76] sur la puissance de seuil. En ce qui nous concerne, nous nous intéressons uniquement à l'estimation de la puissance de sortie et de la puissance de pompe au seuil en utilisant le modèle le plus simple possible. Pour cela, nous devons introduire le gain saturé dans l'équation (2.13) pour avoir accès à l'intensité du laser. De plus, la condition de stationnarité implique que $|\sigma_u| = 1$, ce qui donne le résultat suivant :

$$\iint\limits_{\Pi_0} |\tilde{u}(x,y)|^2 \frac{\tilde{g}_0(x,y)}{1 + \frac{\|u\|^2}{u_{sat}^2}|\tilde{u}(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1-\sqrt{R}}{\sqrt{R}}, \tag{2.14}$$

où on a noté $\tilde{u} = u/\|u\|$ le mode normalisé et u_{sat} l'amplitude de saturation. L'intensité du mode u est donnée par $I_u = \frac{1}{2}\epsilon_0 c|u|^2$ et sa puissance par $P_u = \frac{1}{2}\epsilon_0 c\|u\|^2$.

Il est intéressant de constater que l'intégrale (2.14) est très similaire à un résultat obtenu par Kubodera et Otsuka dans une toute autre configuration, utilisant les équations cinétiques du laser en trois dimensions pour le calcul de la puissance de sortie des états stationnaires dans un *microchip* [71]. L'intégrale obtenue dans [71] fait intervenir le recouvrement entre le profil d'intensité du mode normalisé et le profil du gain saturé dans le milieu actif en trois dimensions. Celle-ci exprime simplement le fait que le gain est égal aux pertes dans le fonctionnement du laser en régime stationnaire.

En supposant la distribution normalisée $\tilde{u}$ de l'état stationnaire connue, l'équation (2.14)

permet de calculer la puissance de sortie du laser $P_{out} = (1-R)P_u$ dépendant de $\|u\|^2$. Notons $\mathbf{I}(\|u\|^2)$ l'intégrale décrivant le terme de gauche de l'équation (2.14) dépendant de $\|u\|^2$. $\mathbf{I}(\|u\|^2)$ est une fonction continue strictement décroissante de $\|u\|^2$. Il existe donc une valeur unique de $\|u\|^2$ pour laquelle l'équation (2.14) est satisfaite. Pour évaluer $\|u\|^2$, on peut procéder par dichotomie en partant de deux valeurs $\|u\|_a^2$ et $\|u\|_b^2$ telles que $\mathbf{I}(\|u\|_a^2) < (1-\sqrt{R})/\sqrt{R}$ et $\mathbf{I}(\|u\|_b^2) > (1-\sqrt{R})/\sqrt{R}$. On peut par exemple choisir :

$$\|u\|_a^2 = u_{sat}^2 \frac{\sqrt{R}}{1-\sqrt{R}} \iint_{\Pi_0} \tilde{g}_0(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2.15}$$

$$\|u\|_b^2 = 0. \tag{2.16}$$

Nous verrons que cette méthode d'évaluation de l'intensité du laser présente un très bon accord avec la méthode de Fox–Li avec gain saturé que nous allons introduire dans la dernière section de ce chapitre.

La condition nécessaire pour qu'un mode propre puisse osciller est que dans le régime linéaire $|\sigma_u| \geq 1$. Cette condition s'exprime de la manière suivante :

$$\iint_{\Pi_0} |\tilde{u}(x,y)|^2 \tilde{g}_0(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \frac{1-\sqrt{R}}{\sqrt{R}}, \tag{2.17}$$

De plus, si on écrit le gain sous la forme $\tilde{g}_0(x,y) = G_0\tilde{g}(x,y)$ où $\tilde{g}(x,y)$ est une distribution normalisée, l'égalité dans (2.17) donne la valeur de G_0 la plus petite acceptable pour démarrer l'oscillation laser. Ce résultat est tout à fait similaire à ce qui a été montré dans l'article [72] et nous sera utile par la suite pour choisir des valeurs du paramètre G_0 pertinentes pour réaliser des simulations.

Prédictions dans le cas non–dégénéré

Nous nous intéressons ici à la sélection de modes d'ordre supérieur à l'aide d'une pompe gaussienne en nous appuyant sur des résultats donnés par l'intégrale de recouvrement mode–gain. Comme expliqué précédemment nous considérons que la maximisation de l'intégrale de recouvrement mode–gain est le bon critère pour déterminer quel mode est susceptible de laser dans une configuration de pompage donnée. De plus, dans la situation non–dégénérée dans laquelle nous nous plaçons, seuls des profils transverses correspondant à des modes d'ordre unique sont potentiellement excitables.

Pour commencer, nous étudions le cas où la pompe est centrée sur l'axe optique de la cavité. Dans ce cas, par symétrie les seuls modes à considérer sont ceux de la famille Laguerre–Gauss de type $\mathrm{LG}_{n,0}$, dont nous avons représenté les premiers profils d'intensité normalisée sur la figure 2.2.

La première chose à remarquer est que tous les modes $\mathrm{LG}_{n,0}$ possèdent un maximum commun en $r = 0$. Si le profil de gain était une distribution de Dirac centrée en $r = 0$, l'intégrale de recouvrement mode–gain prédirait alors la même valeur propre pour tous les modes $\mathrm{LG}_{n,0}$. En revanche, plus l'ordre du mode $\mathrm{LG}_{n,0}$ est élevé, plus celui-ci décroit rapidement autour de son

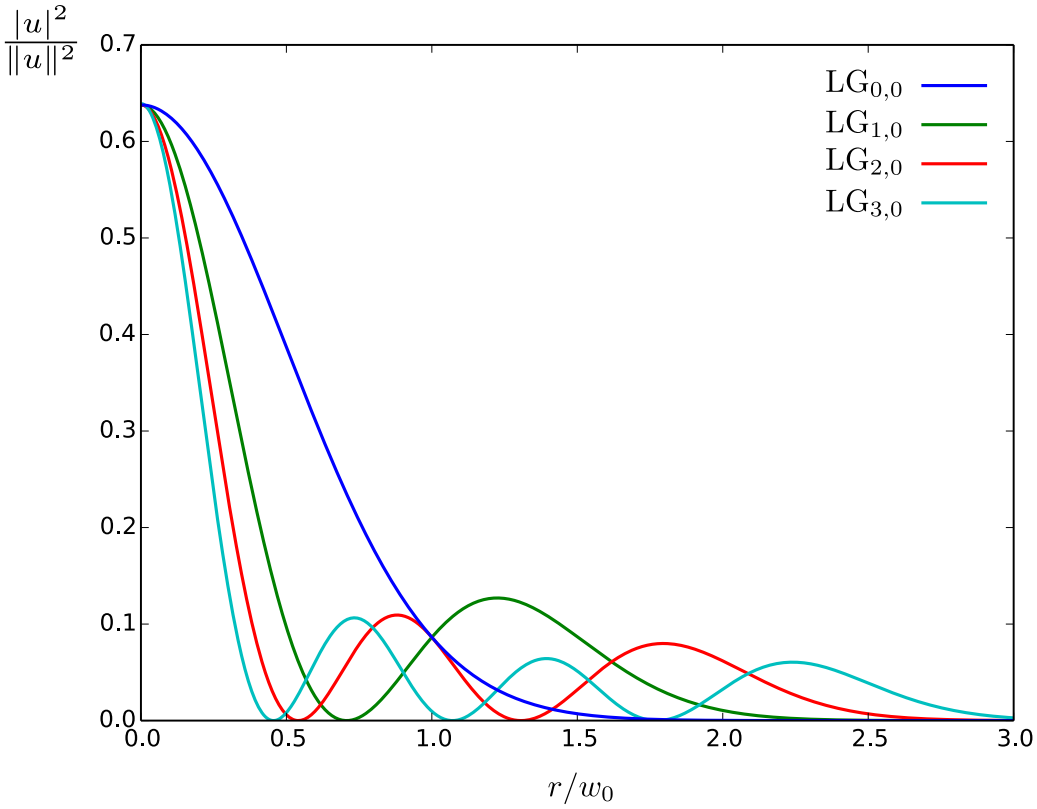


FIGURE 2.2 – Distributions radiales des premiers profils d'intensité normalisés des modes $\mathrm{LG}_{n,0}$.

maximum. De ce fait, pour toute pompe gaussienne centrée autour de $r = 0$, l'intégrale de recouvrement mode–gain est maximisée par le mode fondamental gaussien. Ceci vient contredire l'idée communément admise depuis l'expérience de Flood *et coll.* [43] que l'excitation de modes Laguerre–Gauss d'ordre supérieur peut se faire à l'aide d'un profil de pompe suffisamment petit de telle sorte qu'il suive le lobe principal du mode souhaité. L'excitation de modes Laguerre–Gauss d'ordre supérieur à l'aide d'une pompe gaussienne aussi petite soit elle est en réalité impossible dans une situation de cavité non–dégénérée, et nous montrerons au chapitre 3 en quoi l'expérience de Flood *et coll.* est particulière et permet l'observation de modes présentant des anneaux qui, soit dit en passant, ne sont pas des modes d'ordre unique invariants de forme par propagation, comme l'avaient déjà remarqué les auteurs eux-mêmes.

Le problème de l'excitation de modes d'ordres supérieurs avec une pompe gaussienne désalignée par rapport à l'axe optique de la cavité est difficile à traiter en toute généralité. Cependant, afin de nous convaincre que les modes d'ordre le plus bas possible sont toujours favorisés, nous allons étudier la compétition entre quelques modes Ince–Gauss présentant une ligne nodale elliptique et d'autres n'en possédant pas, comme représentés sur la figure 2.3. Pour cela, on suppose que la pompe est désalignée selon l'axe x de manière à ce que sa distribution soit localisée dans un des lobes principaux du mode Ince–Gauss avec une ligne nodale elliptique que l'on souhaite exciter.

La figure 2.4 représente la situation où l'on souhaite exciter le mode $\mathrm{IG}^e_{3,1}$ d'ordre 3 possédant

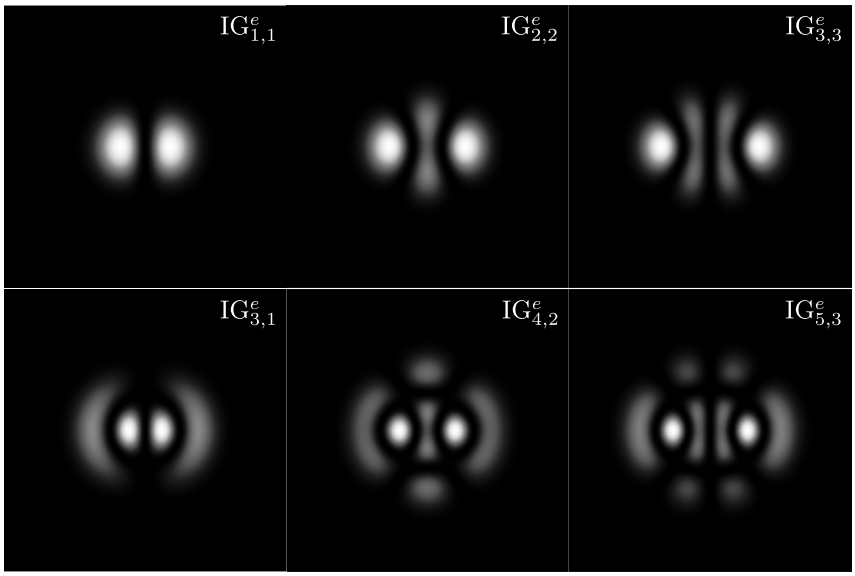


FIGURE 2.3 – Profils transverses en intensité des premiers modes Ince–Gauss. En haut : avec des lignes nodales hyperboliques. En bas : avec une ligne nodale elliptique.

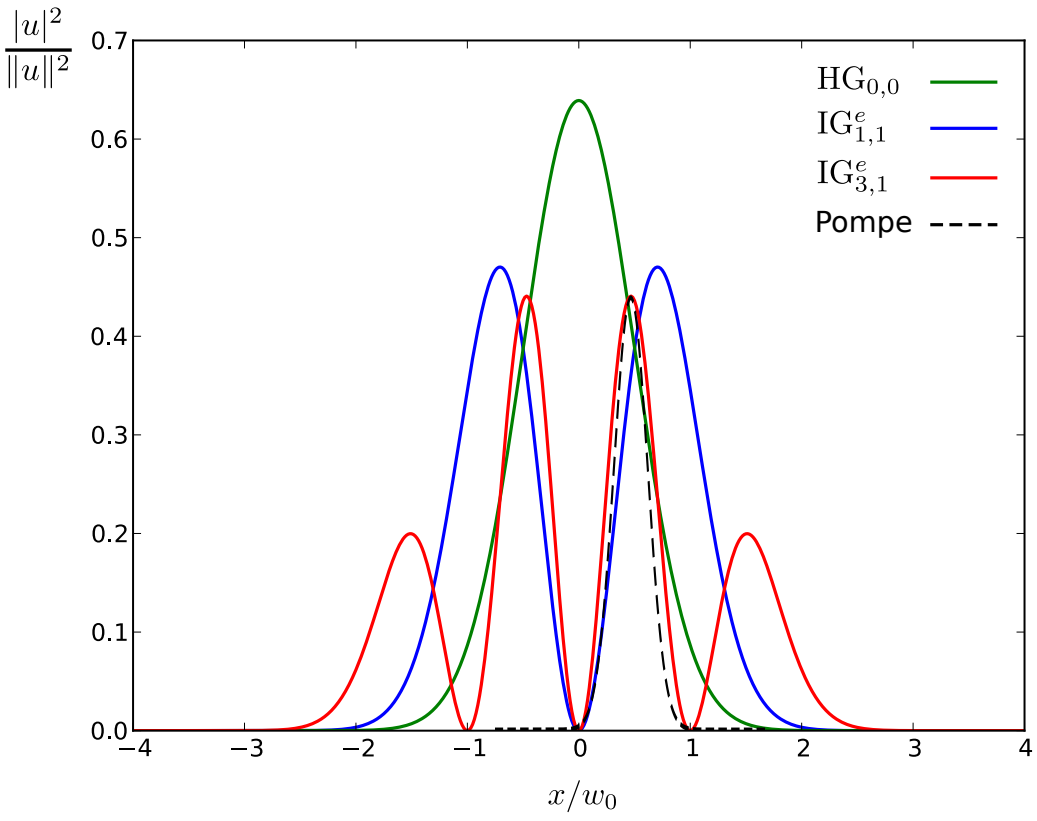


FIGURE 2.4 – Coupe selon l'axe x des profils d'intensité normalisés des modes $\mathrm{HG}_{0,0}$, $\mathrm{IG}^e_{1,1}$ et $\mathrm{IG}^e_{3,1}$.

une ligne nodale elliptique et une ligne nodale verticale en $x = 0$. Dans ce cas particulier, ni le mode fondamental gaussien ni le mode $\mathrm{IG}^e_{1,1}$ (ou $\mathrm{HG}_{1,0}$) ne recouvrent totalement les lobes principaux du profil d'intensité normalisé du mode $\mathrm{IG}^e_{3,1}$. Cependant, si la pompe n'est pas extrêment fine, de largeur inférieure à $0{,}1\,w_0$, l'intégrale de recouvrement mode–gain est maximisée par le mode fondamental gaussien.

La figure 2.5 représente la situation où l'on souhaite exciter le mode $\mathrm{IG}^e_{4,2}$ d'ordre 4 contenant une ligne nodale elliptique et deux lignes nodales hyperboliques. On constate dans ce cas que les lobes principaux du mode $\mathrm{IG}^e_{4,2}$ sont totalement recouverts par ceux du mode $\mathrm{IG}^e_{1,1}$ contenant uniquement une ligne nodale verticale. L'intégrale de recouvrement mode–gain est alors maximisée par le mode $\mathrm{IG}^e_{1,1}$, et ce quel que soit la taille de la pompe.

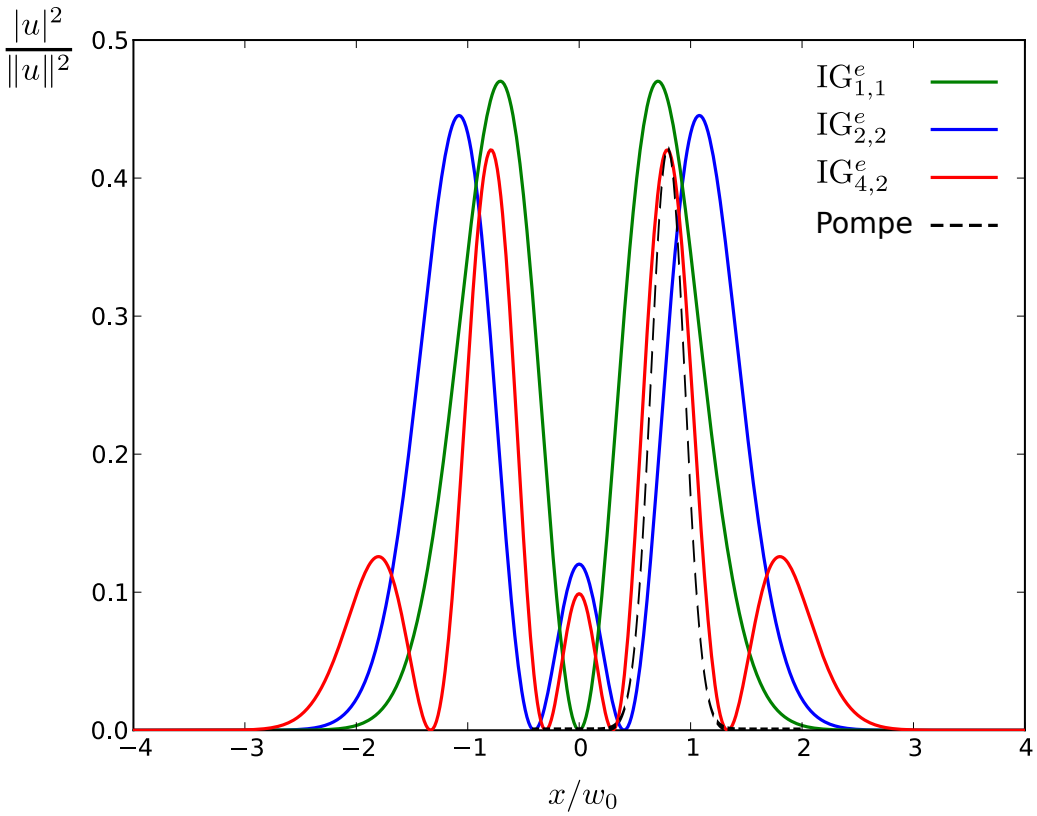


FIGURE 2.5 – Coupe selon l'axe x des profils d'intensité normalisés des modes $\mathrm{IG}^e_{1,1}$, $\mathrm{IG}^e_{2,2}$ et $\mathrm{IG}^e_{4,2}$.

Enfin, la figure 2.6 représente la situation où l'on souhaite exciter le mode $\mathrm{IG}^e_{5,3}$ d'ordre 5 contenant une ligne nodale elliptique, une ligne nodale verticale en $x = 0$ et deux lignes nodales hyperboliques. Cette fois-ci, les lobes principaux du mode $\mathrm{IG}^e_{5,3}$ sont intégralement recouverts par ceux du mode $\mathrm{IG}^e_{2,2}$ contenant uniquement deux lignes nodales hyperboliques. L'intégrale de recouvrement mode–gain est alors maximisée par le mode $\mathrm{IG}^e_{2,2}$ et le mode $\mathrm{IG}^e_{5,3}$ n'a donc aucune chance de laser. Ceci vient contredire l'étude de Chu et Otsuka [77] qui présentent une simulation numérique de type Fox–Li dans laquelle ils parviennent à exciter le mode $\mathrm{IG}^e_{5,3}$ en définissant un profil de pompe suivant la forme elliptique d'un des lobes principaux de ce mode. Même

si notre raisonnement a été fait avec une pompe gaussienne, on voit bien que sa forme exacte importe peu et que l'intégrale de recouvrement mode–gain maximisera toujours le mode dont le profil d'intensité normalisé recouvre le mieux la pompe. Nous pensons donc que les simulations réalisées dans l'article [77] sont incorrectes, et nous en apporterons des preuves supplémentaires par la suite sous la forme de nos propres simulations qui seront parfaitement validées par des expériences.

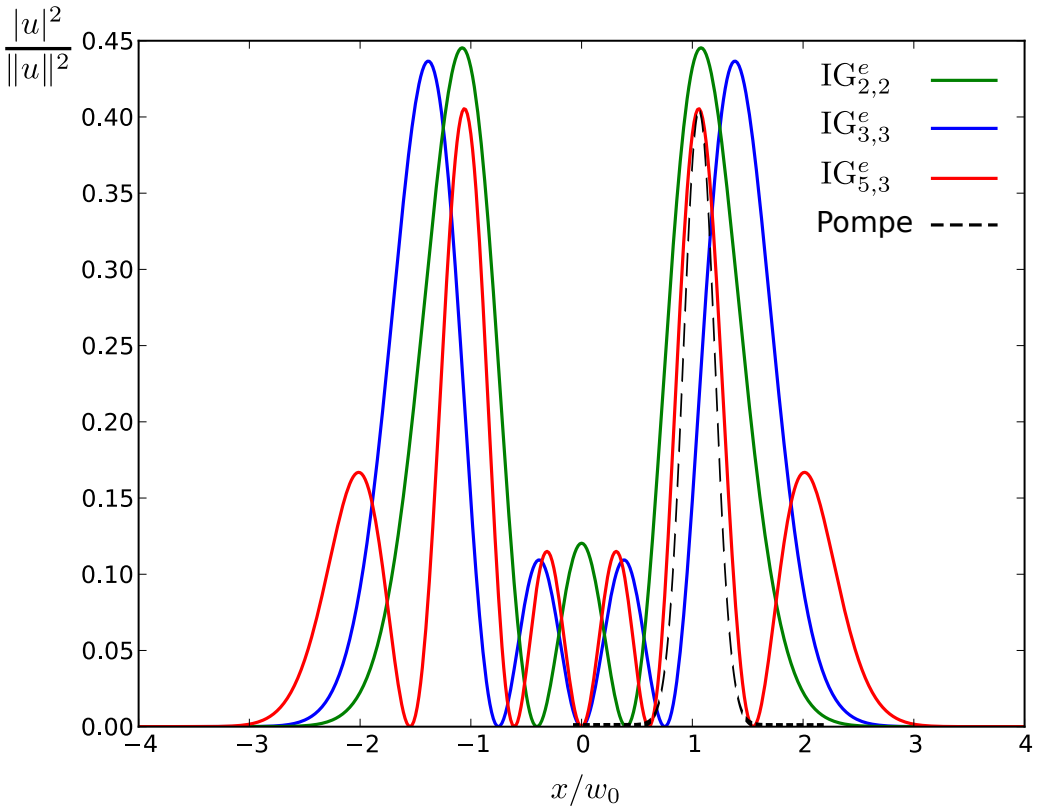


FIGURE 2.6 – Coupe selon l'axe x des profils d'intensité normalisés des modes $\mathrm{IG}^e_{2,2}$, $\mathrm{IG}^e_{3,3}$ et $\mathrm{IG}^e_{5,3}$.

De manière générale, un mode d'ordre de plus en plus élevé possède des lobes principaux de plus en plus fins, décroissant de plus en plus rapidement, et d'amplitude maximale de plus en plus faible. C'est pourquoi nous affirmons, en nous appuyant sur le critère analytique de l'intégrale de recouvrement mode–gain, qu'il est impossible d'exciter des modes d'ordre supérieur autres que les modes $\mathrm{IG}^e_{n,n}$ avec une pompe Gaussienne aussi petite soit-elle [BRB13, BRB14]. Nous verrons par la suite que cette affirmation est bien confirmée par les simulations numériques de calculs d'états stationnaires, ainsi que par les expériences que nous réaliserons.

Prédictions dans le cas dégénéré

Nous nous proposons ici d'utiliser l'intégrale de recouvrement mode–gain afin de déterminer quel mode particulier parmi la grande variété de modes géométriques possibles a la valeur

propre la plus grande dans le régime linéaire. À titre d'illustration, nous étudions la sélection des modes géométriques présentés au chapitre 1 à la longueur de dégénérescence $\tilde{L} = R_c/2$. Comme précédemment, nous choisissons $R_c = 10$ cm et travaillons à la longueur d'onde $\lambda_0 = 1{,}064\,\mu$m.

Pour commencer, nous considérons le cas où la pompe est une gaussienne de waist w_p alignée sur l'axe optique de la cavité. Le profil de pompe $g_0(x,y)$ dans le plan transverse est proportionnel à l'intensité de cette gaussienne. Nous rappelons que les modes géométriques que l'on peut construire en partant d'une distribution initiale gaussienne de waist w_g sont les modes u_0 d'ordre 0 modulo 4 et u_2 d'ordre 2 modulo 4 dont les expressions sont données par (1.85) et (1.86) respectivement. On souhaite alors savoir quelle famille de modes sera favorisée par la pompe et quelle est la taille w_g de la distribution initiale qui maximise l'intégrale de recouvrement mode–gain. Pour cela, nous avons représenté l'évolution de l'intégrale de recouvrement mode–gain pour les deux familles de modes u_0 et u_2 en fonction de w_g sur la figure 2.7, et ceci pour différentes tailles de pompe w_p.

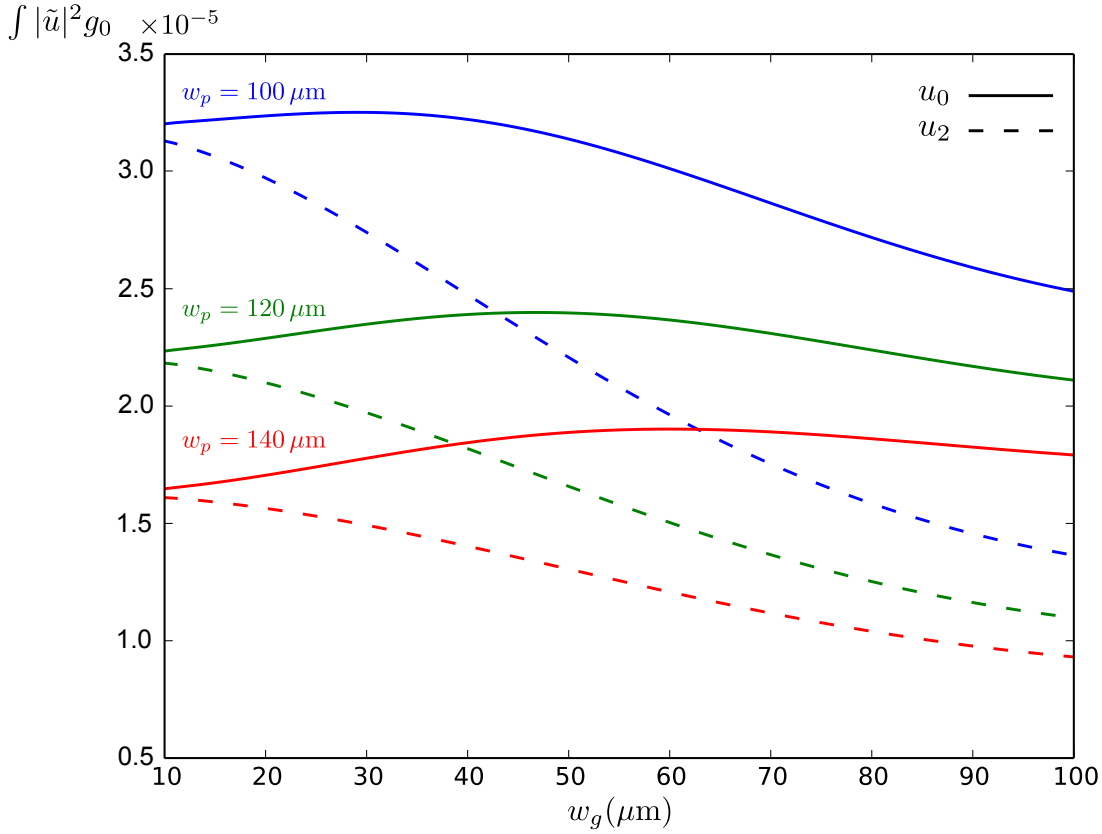


FIGURE 2.7 – Évolution de l'intégrale de recouvrement mode–gain en fonction de la taille de la distribution gaussienne initiale utilisée pour construire le mode géométrique à $\tilde{L} = R_c/2$.

La première chose que l'on constate est que l'intégrale de recouvrement mode–gain est toujours maximale pour la famille u_0. On en déduit que les modes que l'on pourra observer en pratique dans un laser à dégénérescence d'ordre 4 auront des profils transverses semblables à ceux de la figure 1.25. De plus, on constate que le waist w_g initial qui maximise l'intégrale de re-

couvrement mode–gain est toujours beaucoup plus petit que le waist w_p de la pompe. Ce résultat peut paraitre surprenant *a priori* mais il s'explique en réalité très facilement. Par exemple, si il n'y avait aucune contrainte posée par la cavité sur le profil tranverse du mode dans le milieu actif (dégénérescence totale d'ordre 1), on peut montrer que pour un profil de gain donné l'intégrale de recouvrement mode–gain serait maximisée par un mode suivant une distribution de Dirac positionnée à l'endroit où le gain est maximum. Ceci est une propriété importante du régime linéaire mais n'est absolument plus valable lorsque la saturation du gain entre en jeu. Dans ce cas, au contraire, la distribution du mode dans le milieu actif a tendance à vouloir occuper du mieux possible la région pompée. Nous verrons effectivement que l'introduction de la saturation dans le modèle va systématiquement conduire à un élargissement du profil transverse du mode stationnaire dans le milieu actif, dans le cas où la cavité est dégénérée. Dans le cas où la cavité n'est pas dégénérée en revanche, nous verrons que l'effet de la saturation se traduira par la possibilité d'excitation d'un second mode transverse à une fréquence différente.

Nous allons maintenant étudier la prédiction de l'intégrale de recouvrement mode–gain dans le cas où la pompe est une gaussienne de waist w_p positionnée à une distance x_p dans la direction x par rapport à l'axe optique de la cavité. La distribution de champ initiale permettant de construire un mode géométrique adapté doit donc également être une gaussienne centrée en $x_g = x_p$. Nous nous intéressons plus particulièrement à expliquer le résultat obtenu dans l'expérience de Dingjan *et coll.* [64], dans laquelle le mode géométrique obtenu est constitué de deux réseaux de franges dans le milieu actif, dont un des deux est contenu dans le profil de pompe. Nous avons vu au chapitre 1 qu'une phase linéaire $e^{ik_x x}$ appliquée à la distribution initiale utilisée pour construire le mode géométrique peut amener à ce résultat pour une valeur particulière de k_x. Nous souhaitons vérifier ici que la valeur de k_x qui maximise l'intégrale de recouvrement mode–gain correspond effectivement à un mode géométrique constitué de deux réseaux de franges en champ proche.

Pour cela, nous considérons une situation de pompage particulière pour laquelle $x_p = 500\,\mu$m et $w_p = 150\,\mu$m. Nous avons représenté sur la figure 2.8 l'évolution de l'intégrale de recouvrement mode–gain en fonction de la phase linéaire de la distribution initiale permettant de construire le mode géométrique, et ce pour différentes valeurs du waist w_g de la distribution initiale. On constate que quel que soit w_g, l'intégrale de recouvrement mode–gain atteint toujours sa valeur maximale pour une valeur du vecteur d'onde transverse $k_x = 5{,}85\,10^{-2}\,\mu\text{m}^{-1}$.

Afin de déterminer la valeur optimale de w_g nous étudions l'évolution de l'integrale de recouvrement mode–gain en fonction de w_g pour $k_x = 5{,}85\,10^{-2}\,\mu\text{m}^{-1}$. La figure 2.9 représentant cette évolution nous permet d'estimer le waist optimal $w_g = 130\,\mu$m. Encore une fois, on constate que le waist optimal pour le choix de la distribution initiale est plus petit que la taille de la pompe, mais ceci ne sera plus vrai lorsque nous tiendrons compte de la saturation du gain.

Il reste donc à vérifier que le mode géométrique construit avec les paramètres calculés $w_g = 130\,\mu$m et $k_x = 5{,}85\,10^{-2}\,\mu\text{m}^{-1}$ est bien constitué de deux réseaux de franges en champ proche. C'est effectivement le cas comme le montre la figure 2.10 représentant les profils transverses en champ proche des modes géométriques calculés pour quelques valeurs de k_x. L'application de l'intégrale de recouvrement mode–gain permet donc bien d'expliquer les résultats obtenus par Dingjan *et coll.*, sans rien invoquer d'autre qu'une maximisation de l'amplitude du profil transverse normalisé du mode géométrique à l'intérieur de la distribution de la pompe.

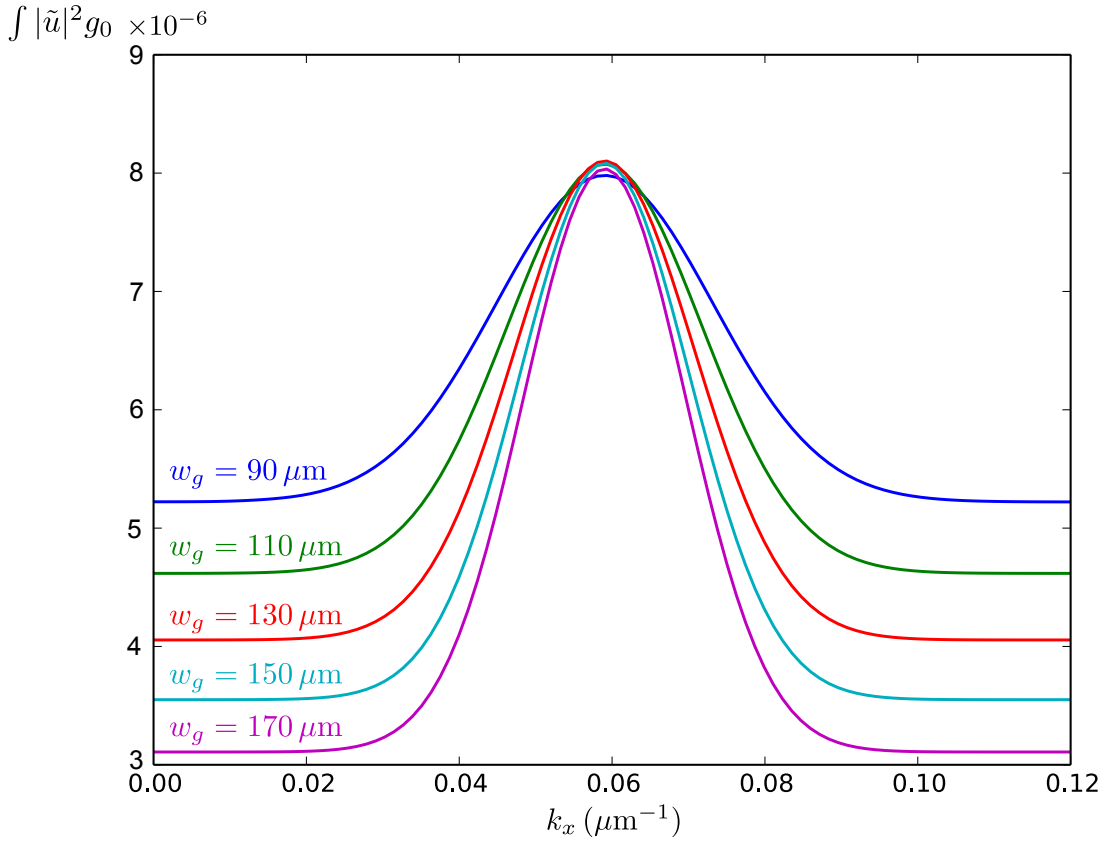


FIGURE 2.8 – Évolution de l'intégrale de recouvrement mode–gain en fonction de la phase linéaire $e^{ik_x x}$ associée à la distribution gaussienne initiale pour différentes valeurs de w_g. Ici, $w_p = 150\,\mu$m et $x_p = x_g = 500\,\mu$m.

L'intégrale de recouvrement mode–gain que nous venons de présenter est un critère de sélection de modes extrêmement simple mais qui permet de faire des prédictions extrêmement précises, à la fois dans des situations de cavité non–dégénérée dans laquelle le laser sélectionne un mode d'ordre unique, et également dans des situations de cavité dégénérée où le laser sélectionne un mode géométrique particulier. L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle ne fournit pas directement le profil transverse du mode propre recherché, mais qu'elle permet au contraire de comparer entre elles les valeurs propres de tous les modes propres potentiellement excitables.

La méthode numérique de choix pour le calcul du mode propre de valeur propre la plus élevée d'un opérateur linéaire est la méthode de Fox–Li que nous allons présenter en détail dans la section suivante. Nous verrons que les valeurs propres calculées à l'aide de la méthode de Fox–Li sont en parfait accord avec le résultat de l'intégrale de recouvrement mode–gain, ce qui constituera une vérification supplémentaire de la validité et de la cohérence des deux méthodes.

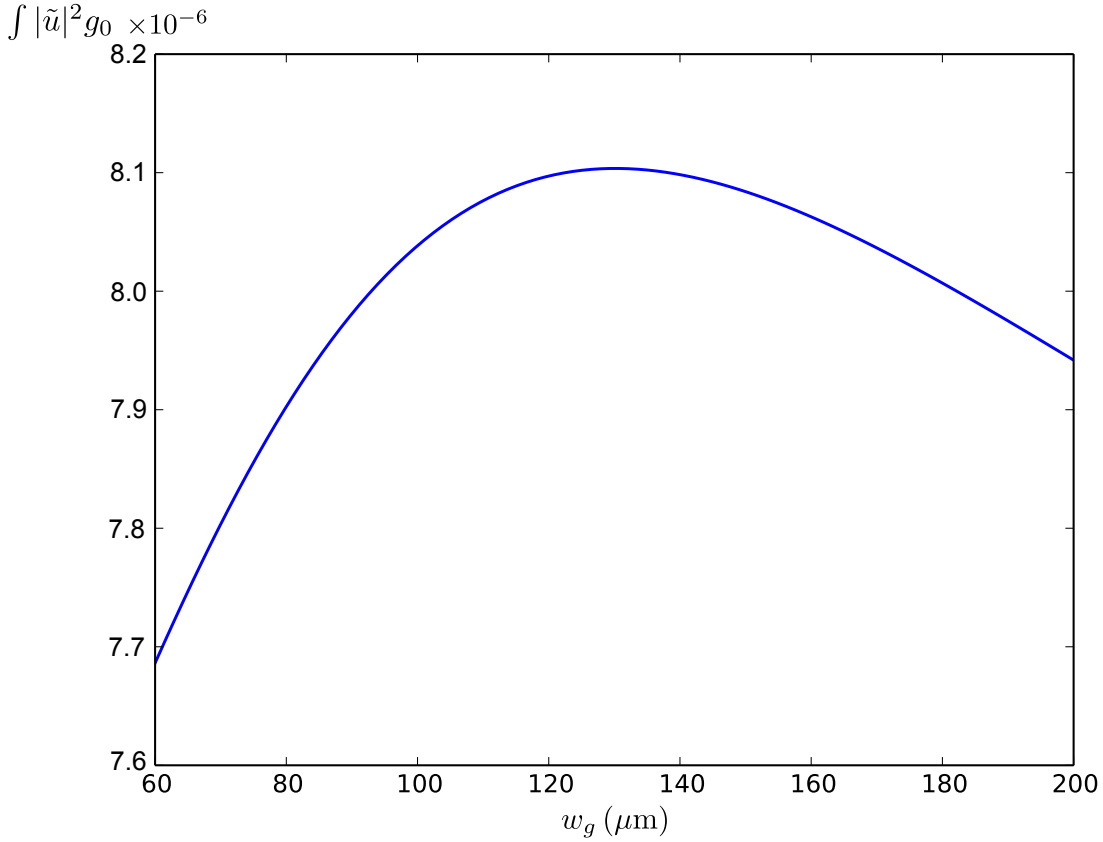


FIGURE 2.9 – Évolution de l'intégrale de recouvrement mode–gain en fonction de w_g, pour $k_x = 5{,}85\,10^{-2}\,\mu\text{m}^{-1}$ et $w_p = 150\,\mu$m.

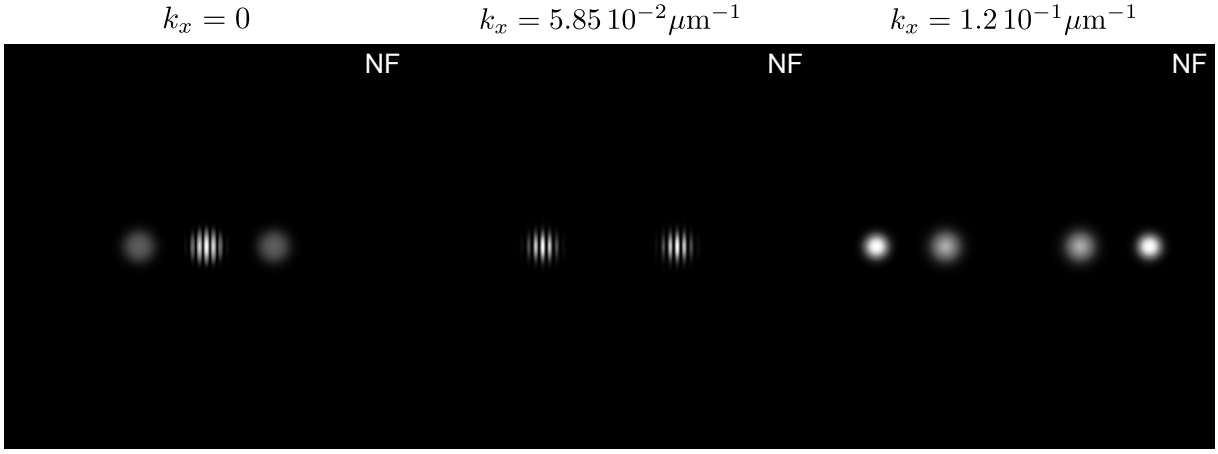


FIGURE 2.10 – Profils transverses des champs proches (NF) des modes géométriques construits avec différentes phases linéaires initiales $e^{\mathrm{i}k_x x}$. Ici, $w_g = 150\,\mu$m et $x_g = 500\,\mu$m.

2.2 Méthode de Fox–Li

Nous avons déjà présenté brièvement au chapitre 1 le principe général de la méthode de Fox–Li permettant de calculer le mode propre associé à la valeur propre la plus grande d'un opérateur linéaire. Le but de cette section est dans un premier temps de présenter une méthode numérique opérationnelle implémentant l'algorithme de Fox–Li, en détaillant précisément les éléments essentiels de la simulation que sont les matrices de transfert des différents éléments optiques traversés par la lumière dans le laser. Une part essentielle de la simulation réside également dans le choix adéquat d'une distribution initiale de champ que nous détaillerons. Dans un second temps, il sera important pour nous d'évaluer la méthode que nous avons implémenté, à la fois en termes de performances à l'aide d'un critère de convergence mais également en termes de réalité physique en comparant les résultats de la simulation à des résultats théoriques attendus. Enfin, nous présenterons quelques résultats que nous n'aurions pas pu prévoir sans l'utilisation de cette méthode, concernant l'existence de zones de dégénérescence étendues dans lesquelles il existe des modes propres du laser qui ne sont ni des modes d'ordre unique ni des modes géométriques. Nous tenterons alors de caractériser la largeur de ces zones de dégénérescence en fonction de la puissance de pompe, ainsi que les profils transverses des modes que l'on y observe.

2.2.1 Modélisation des éléments optiques et choix de la distribution initiale

Les éléments optiques que l'on doit modéliser sont le milieu actif, que l'on considère comme un milieu diélectrique isotrope d'indice n, une certaine longueur de propagation dans le vide et le miroir sphérique. On rappelle que l'on ne tient pas compte de la polarisation de la lumière dans notre modélisation.

Milieu actif

Nous avons vu que l'équation de propagation dans un milieu actif d'indice n avec un profil de gain non–saturé est donnée par l'équation (2.4).

La première solution envisageable pour résoudre cette équation sur la courte distance d que représente l'épaisseur du cristal est de découper le cristal en tranches transverses très fines de largeur δd et d'appliquer une méthode de différences finies. Le problème de cette méthode est qu'elle est très coûteuse en temps de calcul car elle nécessite de calculer un grand nombre de tranches de champ.

Nous avons vu précédemment que lorsque le gain n'est pas trop fort, la propagation à travers une épaisseur Δd non–nécessairement infinitésimale de milieu actif peut être bien approximée par l'application des opérations successives de propagation du champ sur une longueur Δd et de multiplication par un profil de gain moyen. En pratique, on se contentera même de définir une tranche de champ unique en choisissant $\Delta d = d$, sans que les résultats n'en soient particulièrement affectés. C'est d'ailleurs l'hypothèse que nous avons fait lorsque nous avons dérivé l'intégrale de recouvrement mode–gain. Il reste à définir une méthode numérique efficace pour propager un champ de longueur d'onde λ_0 d'un plan transverse dans un autre sur une distance d en tenant compte d'un indice n.

Jusqu'à présent, nous avons raisonné uniquement en utilisant l'intégrale de Huygens–Fresnel (1.20) pour décrire les opérations de propagation des champs. Cependant, d'un point de vue numérique, il est beaucoup plus efficace d'utiliser des méthodes basées sur la transformation de Fourier rapide (FFT), comme c'est le cas de la méthode *Angular Spectrum* bien décrite dans le livre de Goodman [78]. Cette méthode consiste simplement à faire une transformation de Fourier du champ à propager, à multiplier la distribution obtenue dans l'espace de Fourier par une distribution de phase sphérique particulière, et à prendre la transformée de Fourier inverse du résultat. Formellement, on peut décrire la propagation d'un champ u de longueur d'onde λ_0 sur une distance d dans un milieu d'indice n par l'opérateur $\mathcal{P}_z$ défini par :

$$\mathcal{P}_z u = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-\lambda^2\left(f_x^2+f_y^2\right)}}\mathcal{F}u\right), \tag{2.18}$$

où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ représentent les transformées de Fourier directe et inverse respectivement, $\lambda = \lambda_0/n$ est la longueur d'onde dans le milieu d'indice n considéré et (f_x,f_y) sont les coordonnées fréquentielles dans l'espace de Fourier transverse à deux dimensions.

Il est important de souligner que l'expression (2.18) définit un opérateur de propagation $\mathcal{P}_z$ rigoureusement exact pour un champ scalaire classique. En ce qui nous concerne, nous décidons de nous restreindre à l'approximation paraxiale et travaillerons avec l'opérateur plus simple suivant :

$$\mathcal{P}_z u = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{\mathrm{i}\pi\lambda z\left(f_x^2+f_y^2\right)}\mathcal{F}u\right). \tag{2.19}$$

La matrice de transfert du milieu actif est donc entièrement décrite par l'opérateur $\mathcal{C}_d$ défini par :

$$\mathcal{C}_d u = \exp\left(\int_0^d g_0(x,y,l)\,\mathrm{d}l\right)\mathcal{P}_d u. \tag{2.20}$$

En pratique, le champ à propager est échantillonné dans les deux directions du plan transverse à des pas Δx et Δy, et les transformations de Fourier continues sont remplacées par des transformées de Fourier discrètes (TFD) implémentées par l'algorithme FFT.

Propagation sur une grande distance

Dans les lasers que nous étudions, il peut y avoir un facteur d'échelle important entre la distribution du mode en champ proche sur le miroir plan et celle sur le miroir sphérique, d'autant plus si le laser approche la limite de stabilité. Dans une simulation, on choisit en général une grille définie par des pas Δx et Δy ainsi qu'un nombre de points $N_x \times N_y$ adapté pour avoir un bon échantillonnage du mode de cavité au niveau du miroir plan. La transformation de Fourier discrète nécessite ensuite de travailler à pas constant avec un nombre de points fixé. Ainsi, même si le mode est bien défini sur le miroir plan, la grille peut être trop petite pour le représenter sur le miroir sphérique, obligeant à augmenter le nombre de points et à rendre les calculs beaucoup plus longs, voire à saturer la mémoire. Afin de résoudre ce problème dans le cadre de la propagation de faisceaux gaussiens sur des longues distances, Sziklas et Siegman [79] ont développé une méthode de propagation avec grossissement de la grille utilisée, permettant de multiplier les pas

d'échantillonnage Δx et Δy par un coefficient réel positif α, tout en conservant le nombre de points dans la grille. Cette méthode peut aussi bien être utilisée pour grossir les dimensions de la grille en utilisant un coefficient $\alpha > 1$, que pour réduire ses dimensions en utilisant un coefficient $\alpha < 1$. Formellement, cette méthode peut être décrite par l'application d'un opérateur $\mathcal{P}_z^\alpha$ à un champ u de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_z^\alpha u = \frac{1}{\alpha} e^{-\mathrm{i}\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda(z_0+z)}} \mathcal{P}_{m_z} \left(e^{\mathrm{i}\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda z_0}} u \right), \tag{2.21}$$

où $z_0 = z/(\alpha - 1)$ et $\mathcal{P}_{m_z}$ est l'opérateur de propagation paraxial défini en (2.19) pour la distance $m_z = z/\alpha$.

L'opérateur $\mathcal{P}_z^\alpha$ défini par (2.21) est valable dans l'approximation paraxiale, et on constate que lorsque α tend vers 1 on retrouve bien l'opérateur $\mathcal{P}_z$ défini en (2.19).

En général, afin de modéliser les opérations d'aller–retour en espace libre du champ dans la cavité, on aura recours à deux opérateurs $\mathcal{P}_z^{\alpha_+}$ pour la propagation du miroir M_1 vers le miroir M_2 et $\mathcal{P}_z^{\alpha_-}$ pour la propagation de M_2 vers M_1, avec des valeurs de grossissements définies par :

$$\alpha_+ = \frac{w(L)}{w_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{z_R}\right)^2} \tag{2.22}$$

$$\alpha_- = \frac{1}{\alpha_+}. \tag{2.23}$$

De cette manière, les champs obtenus occuperont la même taille relative dans les grilles définissant les plans des miroirs M_1 et M_2.

Miroir sphérique

On cherche ici à modéliser un miroir sphérique de rayon de courbure R_c ayant un coefficient de réflexion en intensité R, toujours dans le cadre de l'approximation paraxiale. Les formules classiques de l'optique de Fourier [78] conduisent à considérer un tel miroir comme un masque de phase agissant sur un champ u comme un opérateur $\mathcal{M}_{R_c}$ défini par :

$$\mathcal{M}_{R_c} u = \sqrt{R} e^{2\mathrm{i}\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda R_c}} u. \tag{2.24}$$

Si on reprend l'expression des modes Hermite–Gauss définis en (1.7), on voit effectivement qu'un tel masque de phase va venir compenser la phase sphérique accumulée par les modes gaussiens au cours de leur propagation. En général, dans nos simulations, nous rajouterons toujours un diaphragme un peu plus petit que la taille de la grille choisie au niveau du miroir sphérique afin d'éviter des phénomènes de repliement de Fourier pouvant apparaître dans les toutes premières itérations de la méthode à cause de la forte dispersion angulaire de la distribution initiale aléatoire.

Il est nécessaire de souligner que tout déphasage à la réflexion qui peut se produire dans des conditions physiques réelles est ici totalement ignoré car l'ajout d'une phase constante n'a aucune importance dans le calcul des modes propres de la cavité, pour la même raison qu'on ne

tient pas compte du terme en e^{2ikL}. En effet, nous rappelons que nous considérons k comme un paramètre libre qui va venir compenser la phase d'un mode propre quelconque de la cavité afin que la phase totale soit un multiple de 2π. Ainsi, le miroir plan peut quant-à lui être totalement ignoré puisqu'il n'a aucun effet sur la phase qui dépende des directions transverses.

Choix de la distribution initiale

Le choix de la distribution initiale de champ est un élément important dans le cadre d'une simulation Fox–Li. Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre 1, il est nécessaire que la distribution initiale utilisée ait une projection sur le mode propre recherché sinon celui-ci ne pourra jamais apparaître. La première idée qui vient à l'esprit est de définir une distribution initiale de champ possédant une phase totalement aléatoire dans l'espace et une amplitude constante partout, de manière à ce que tous les vecteurs d'onde possibles soient présents dans le domaine de Fourier. Cependant, si nous faisons ce choix nous aurons un problème lié à la méthode de transformée de Fourier discrète que nous utilisons. En effet, il est bien connu que la transformée de Fourier discrète d'une fonction possédant des discontinuités crée un phénomène d'oscillation de Gibbs à proximité de ces discontinuités. Ainsi, le choix d'une telle distribution aléatoire conduit inéluctablement à un effet d'*aliasing* du mode qui ne disparaît pas au cours des différentes itérations de la méthode. Une solution à ce problème serait de définir une distribution de champ suffisamment aléatoire pour contenir un grand nombre de fréquences spatiales différentes mais suffisamment régulière à l'échelle des pas Δx et Δy de la simulation. En d'autres termes nous voulons être capable de générer une distribution de *speckle* dont nous pouvons choisir la taille des zones de champ élémentaires.

Pour cela, nous mettons en oeuvre une méthode très simple qui consiste dans un premier temps à définir une distribution de champ d'amplitude gaussienne suffisamment large possédant une phase totalement aléatoire. Ensuite, il s'agit de supprimer les composantes hautes fréquences de cette distribution en appliquant un filtre adéquat dans le domaine de Fourier. Une telle distribution $S(x,y)$ peut être décrite formellement de la manière suivante :

$$S(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\frac{f_x^2+f_y^2}{f_s^2}}\mathcal{F}\left(e^{\mathrm{i}\,\mathrm{rand}_{[0,2\pi]}(x,y)}e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}\right)\right), \tag{2.25}$$

où la fonction $\mathrm{rand}_{[0,2\pi]}(x,y)$ génère un nombre aléatoire entre 0 et 2π selon une loi uniforme pour chaque couple de valeurs (x,y), w est la taille de la distribution dans l'espace réel et f_s est inversement proportionnel à la taille moyenne d'un grain de *speckle* comme le montre la figure 2.11.

2.2.2 Évaluation de la méthode dans le cas non–dégénéré

Nous cherchons ici à évaluer les performances et la fiabilité de la méthode de Fox–Li dans le cas du calcul du mode propre de valeur propre la plus élevée d'une cavité plan–concave. Nous nous restreignons ici au cas où la cavité est non–dégénérée et où la pompe est alignée sur l'axe optique de la cavité. Nous allons tout d'abord présenter un critère de convergence de la méthode

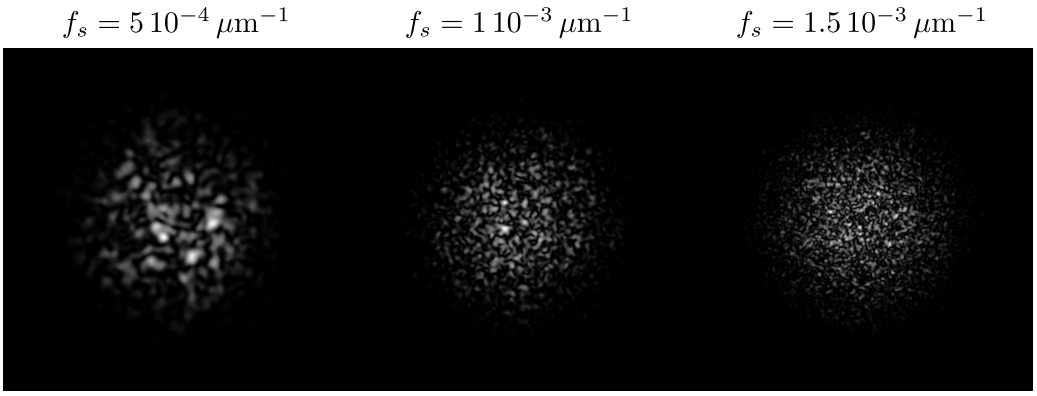


FIGURE 2.11 – Distributions de *speckle* générées pour $w = 1000\,\mu$m et différentes valeurs de f_s.

qui nous permettra d'évaluer la vitesse de convergence en fonction de la puissance de pompage. Nous comparerons ensuite la taille et la phase de Gouy du mode propre calculé par rapport à la théorie des modes propres de cavité plan–concave présentée au chapitre 1. Finalement, nous comparerons les résultats obtenus à l'aide de cette méthode aux prédictions faites par l'intégrale de recouvrement mode–gain introduite précédemment.

Critère de convergence et vitesse de convergence de la méthode

L'algorithme de Fox–Li consiste à appliquer itérativement l'opérateur d'aller–retour de la cavité $\mathbf{M}_{cav}$ à une distribution de champ jusqu'à ce que celle-ci converge vers un point fixe de l'algorithme qui est en fait un mode propre de la cavité. Il est important de définir un critère numérique précis afin de déterminer quand l'algorithme atteint effectivement son point fixe, à une marge d'erreur ϵ près. Un bon critère pour déterminer si une distribution de champ est un mode propre de la cavité est de vérifier que le coefficient de corrélation de ce champ pris à deux aller–retours successifs dans la cavité vaut un. Si on note u_n la distribution du champ transverse pris au niveau du miroir plan après n applications de l'opérateur $\mathbf{M}_{cav}$, l'algorithme doit s'arrêter lorsque :

$$\Delta(u_n,u_{n+1}) = 1 - \frac{|\int u_n^* u_{n+1}|^2}{\int |u_n|^2 \int |u_{n+1}|^2} < \epsilon, \tag{2.26}$$

où ϵ représente une marge d'erreur suffisamment petite. En pratique on choisira $\epsilon = 10^{-6}$ dans nos simulations.

Une fois que l'algorithme a convergé, u_n peut être considéré comme un mode propre de la cavité et on a $u_{n+1} = \mathbf{M}_{cav} u_n = \sigma_u u_n$. La valeur propre σ_u du mode est alors donnée par :

$$\sigma_u = \frac{\int u_{n+1}^* u_n}{\int |u_n|^2}. \tag{2.27}$$

Afin d'évaluer la vitesse de convergence de la méthode en fonction de la puissance de pompe, nous considérons une situation de pompage gaussien telle que :

$$\tilde{g}_0(x,y) = G_0 e^{-2\frac{x^2+y^2}{w_p^2}}, \tag{2.28}$$

où on rappelle que $\tilde{g}_0(x,y)$ est le gain moyen transverse sur un aller–retour, G_0 est proportionnel à la puissance de pompe et w_p est le waist moyen du faisceau de pompe dans le milieu actif.

D'après l'équation (2.17), on en déduit que la valeur de G_0 au seuil de l'oscillation laser pour le mode fondamental gaussien est donnée par :

$$G_{0_{th}} = \frac{1-\sqrt{R}}{\sqrt{R}\int e^{-2\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} e^{-2\frac{x^2+y^2}{w_p^2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \tag{2.29}$$

où w_0 est le waist des modes propres de la cavité vide.

Pour notre première simulation, on choisit un miroir de sortie de rayon de courbure $R_c = 10\,\mathrm{cm}$ et de coefficient de réflexion en intensité $R = 0{,}98$, une longueur de cavité $L = 4\,\mathrm{cm}$, un waist de pompe $w_p = 60\,\mu\mathrm{m}$, et on néglige l'épaisseur du milieu actif. On a alors $w_0 = 128{,}8\,\mu\mathrm{m}$ avec $\lambda = 1{,}064\,\mu\mathrm{m}$, et $G_{0_{th}} = 2{,}8\,10^{-2}$. Pour représenter le champ au niveau du miroir plan, on utilise une grille de dimensions $3000 \times 3000\,\mu\mathrm{m}^2$ et un nombre de points de 512×512. Le pas élémentaire est alors $\Delta x = \Delta y = 5{,}85\,\mu\mathrm{m}$.

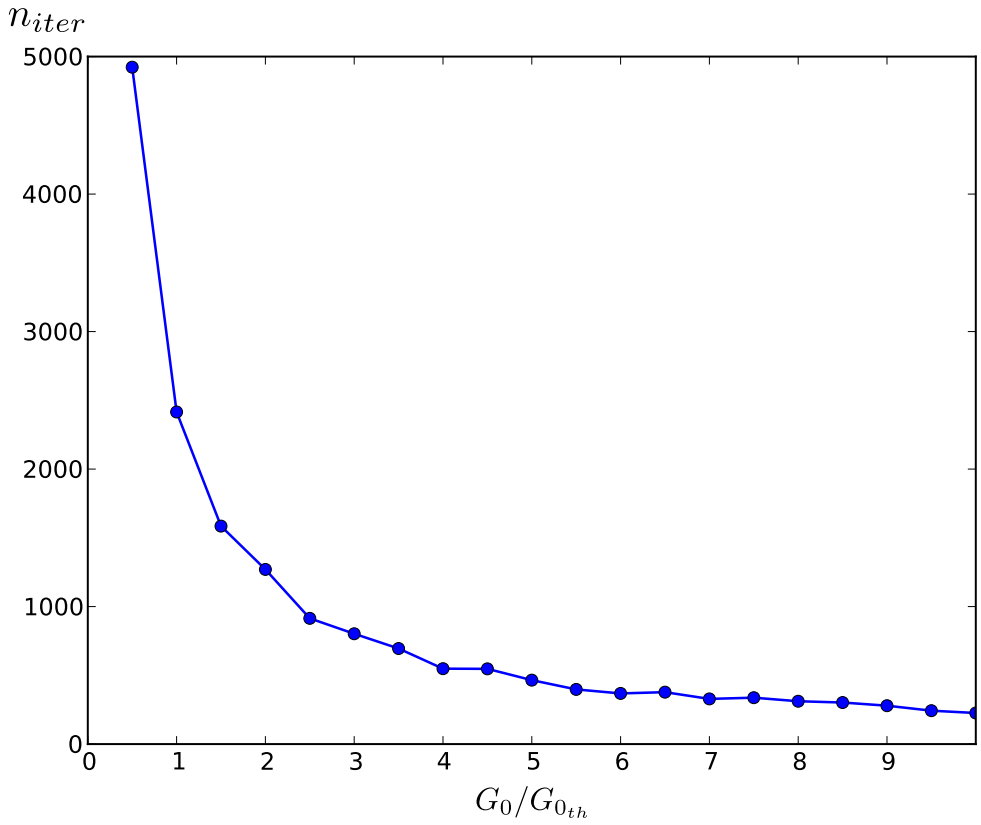


FIGURE 2.12 – Nombre d'itérations de la méthode de Fox–Li pour atteindre la convergence à $\epsilon = 10^{-6}$ en fonction de la puissance de pompe rapportée à la puissance de seuil.

Nous avons représenté sur la figure 2.12 le nombre d'itérations nécessaire à la méthode de Fox–Li pour converger dans ces conditions, en fonction de la puissance de pompe rapportée à la puissance de seuil. On constate une décroissance exponentielle du nombre d'itérations nécessaires au fur et à mesure que la puissance de pompe augmente. De plus, on tient à souligner que dans le cas du régime linéaire il n'est pas nécessaire d'avoir $G_0 > G_{0_{th}}$ pour pouvoir calculer un mode propre de la cavité. Étant donné la taille des miroirs que nous avons choisis, on constate qu'en l'absence de gain il faudrait un temps extrêmement long à la méthode pour être capable de sélectionner un mode propre.

La figure 2.13 représente une courbe de convergence de l'erreur $\Delta(u_n,u_{n+1})$ définie en (2.26) en fonction du nombre d'itérations de la méthode. Nous avons représenté l'erreur en échelle logarithmique afin de mettre en évidence que la réduction de l'ordre de grandeur de l'erreur est asymptotiquement linéaire en fonction du nombre d'itérations.

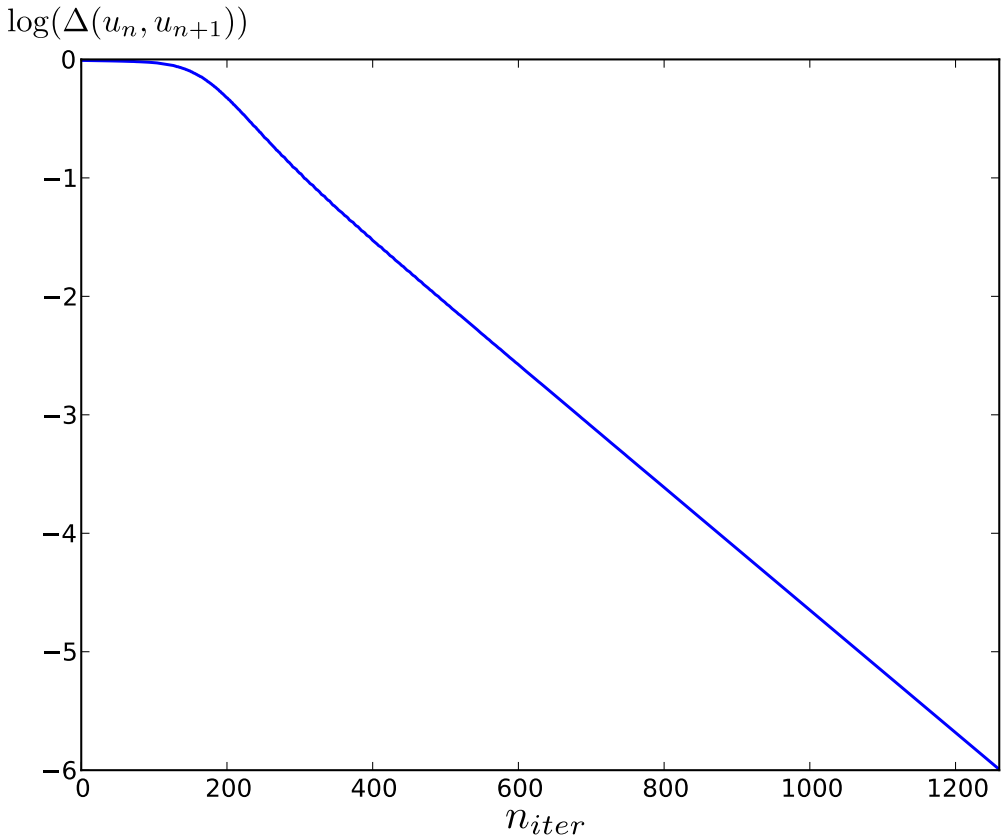


FIGURE 2.13 – Courbe de convergence de l'algorithme vers son point fixe en fonction du nombre d'itérations, pour $G_0 = 2G_{0_{th}}$.

En ce qui concerne le mode propre calculé par l'algorithme, il est tout de même important de mentionner que l'on obtient bien une gaussienne de waist w_0 avec une précision de plus de 99,9% lorsque G_0 reste proche de $G_{0_{th}}$.

Comparaison à la théorie des modes de cavité plan–concave

Nous allons maintenant vérifier que les modes calculés par l'algorithme de Fox–Li correspondent bien aux modes propres de la cavité vide que nous avons présentés au chapitre 1. Pour cela, nous allons estimer le waist w_0 des modes calculés ainsi que leur phase de Gouy $\Psi_G(L)$. Pour le calcul de $\Psi_G(L)$, il suffit d'évaluer la phase de la valeur propre σ_u obtenue en utilisant la relation (2.27). Pour le calcul de w_0, nous supposerons que le mode propre obtenu est bien une gaussienne et nous normaliserons sa valeur maximale à un. Ensuite, une intégration de l'amplitude du mode dans le plan du miroir M_1 fournira une bonne estimation de w_0. Cette manière d'estimer w_0 numériquement est beaucoup plus précise que le calcul de la largeur à $1/e$ qui dépend beaucoup trop des valeurs des pas Δx et Δy utilisés.

La figure 2.14 représente l'estimation du waist obtenue avec la méthode de Fox–Li lorsque l'on fait varier la longueur L de la cavité. Nous avons également représenté les points correspondant à la valeur théorique $w_0 = \frac{\lambda}{\pi} z_R$. La méthode de Fox–Li a été appliquée pour un paramètre de pompe $G_0 = 2G_{0_{th}}$ et différentes tailles de pompes w_p.

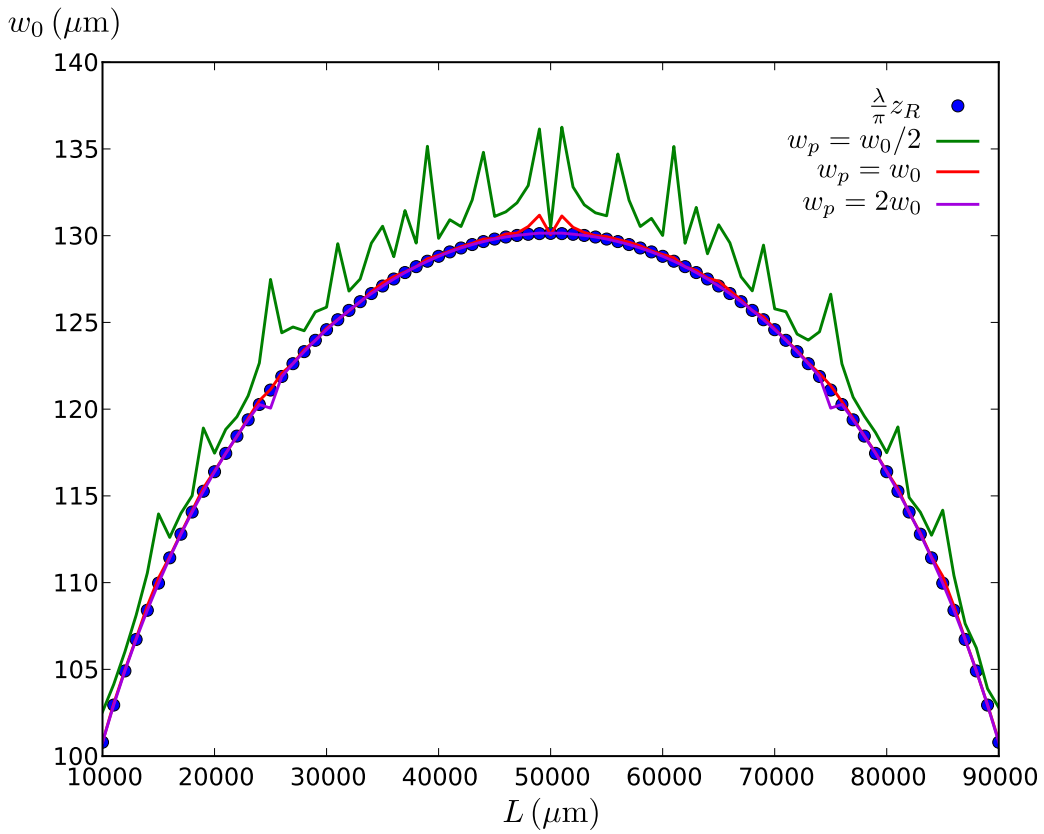


FIGURE 2.14 – Comparaison de la valeur du waist w_0 obtenu avec la méthode de Fox–Li pour différentes tailles de pompe w_p avec la valeur théorique, en fonction de la longueur L de la cavité.

On constate que tant que la pompe n'est pas plus petite que la taille du waist théorique, le waist estimé est en parfait accord avec la valeur théorique. En revanche, lorsque la pompe est plus petite, on voit que la valeur du waist estimé s'écarte légèrement de la valeur théorique

avec parfois des pics plus importants. La courbe obtenue est toutefois parfaitement symétrique par rapport à la longueur de cavité $L = R_c/2$. Les pics obtenus traduisent le fait que le mode calculé n'est plus rigoureusement un mode d'ordre unique et correspondent à des longueurs de dégénérescences partielles de la cavité. Nous reviendrons de manière plus précise sur ce point dans la section 2.2.3 suivante.

La figure 2.15 représente l'estimation de la phase de Gouy Ψ_G déduite de la valeur propre σ_u calculée par la méthode de Fox–Li en fonction de la longueur de la cavité. Les différents points représentent la valeur théorique $\Psi_G = \arctan(L/z_R)$ de la phase de Gouy attendue pour un mode fondamental gaussien. Cette fois-ci, nous avons représenté uniquement le cas le plus défavorable précedent où $w_p = w_0/2$, toujours pour une puissance de pompe $G_0 = 2G_{0_{th}}$.

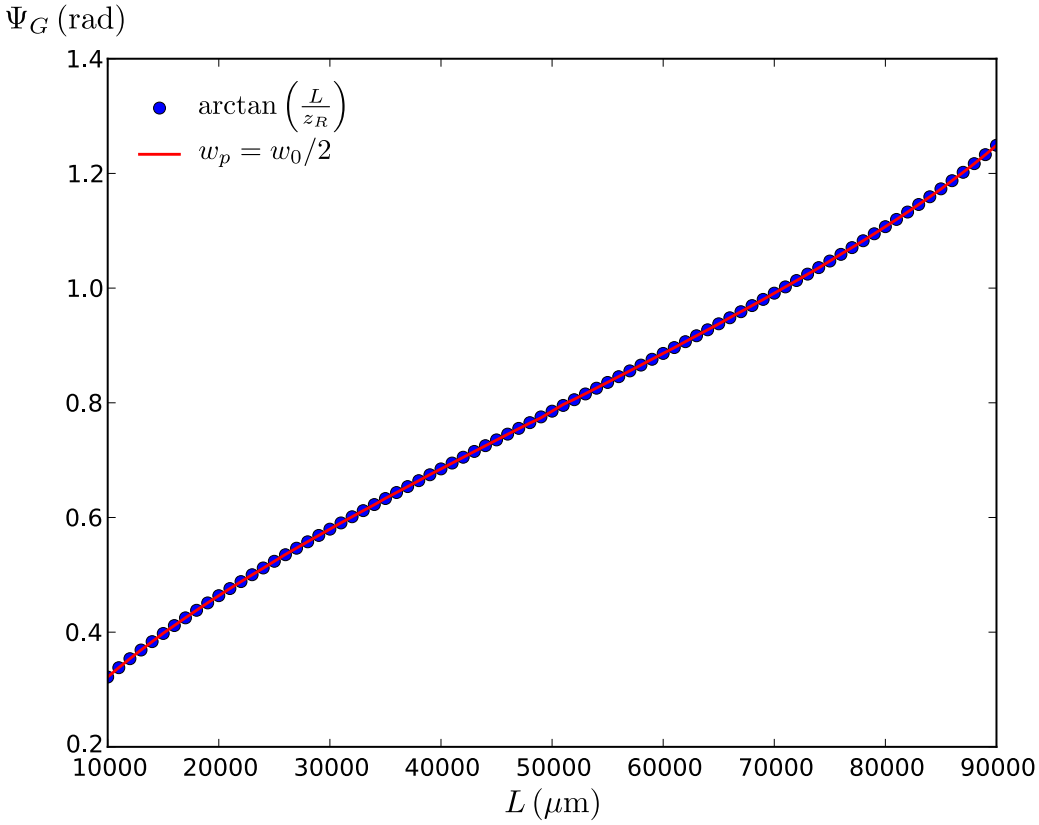


FIGURE 2.15 – Comparaison de la valeur de la phase de Gouy Ψ_G obtenue avec la méthode de Fox–Li et la valeur théorique, en fonction de la longueur L de la cavité.

On observe un accord parfait entre la phase de Gouy calculée et la phase de Gouy théorique, même si le mode propre associé n'est pas rigoureusement le mode fondamental gaussien comme nous l'avons vu précédemment dans le cas où $w_p = w_0/2$. Ceci tend à confirmer l'hypothèse que nous avons faite lorsque nous avons dérivé l'intégrale de recouvrement mode–gain, à savoir que les seuls modes qui interviennent dans la décomposition d'un mode propre d'une cavité avec gain linéaire sont les modes de la cavité vide qui reviennent quasiment en phase entre eux après un aller–retour dans la cavité. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que l'intégrale de

recouvrement mode–gain fournit effectivement une excellente estimation de la valeur propre du mode calculé avec la méthode de Fox–Li.

Comparaison à l'intégrale de recouvrement mode–gain

Nous voulons comparer les valeurs propres calculées avec la méthode de Fox–Li par la formule (2.27) et celles estimées par l'intégrale de recouvrement mode–gain à l'aide de l'équation (2.13). Afin d'estimer la valeur propre en utilisant l'intégrale de recouvrement mode–gain, nous avons besoin de connaître *a priori* le mode propre associé. Nous utiliserons deux estimations du mode propre différentes, la première étant le mode fondamental gaussien de la cavité vide que l'on note u_0, et la seconde étant le mode retourné par l'algorithme de Fox–Li lui-même que l'on note u_{FL}.

La figure 2.16 représente l'erreur commise sur la valeur propre σ_I calculée à partir de l'intégrale de recouvrement mode–gain en utilisant les modes propres u_0 et u_{FL}, par rapport à la valeur propre σ_{FL} calculée par l'algorithme de Fox–Li, et ce en fonction de la puissance de pompe G_0 rapportée à la puissance de seuil $G_{0_{th}}$. Nous utilisons ici une longueur de cavité $L = 4\,\text{cm}$ et une taille de pompe $w_p = w_0/2$. On a toujours $R_c = 10\,\text{cm}$ et $R = 0{,}98$.

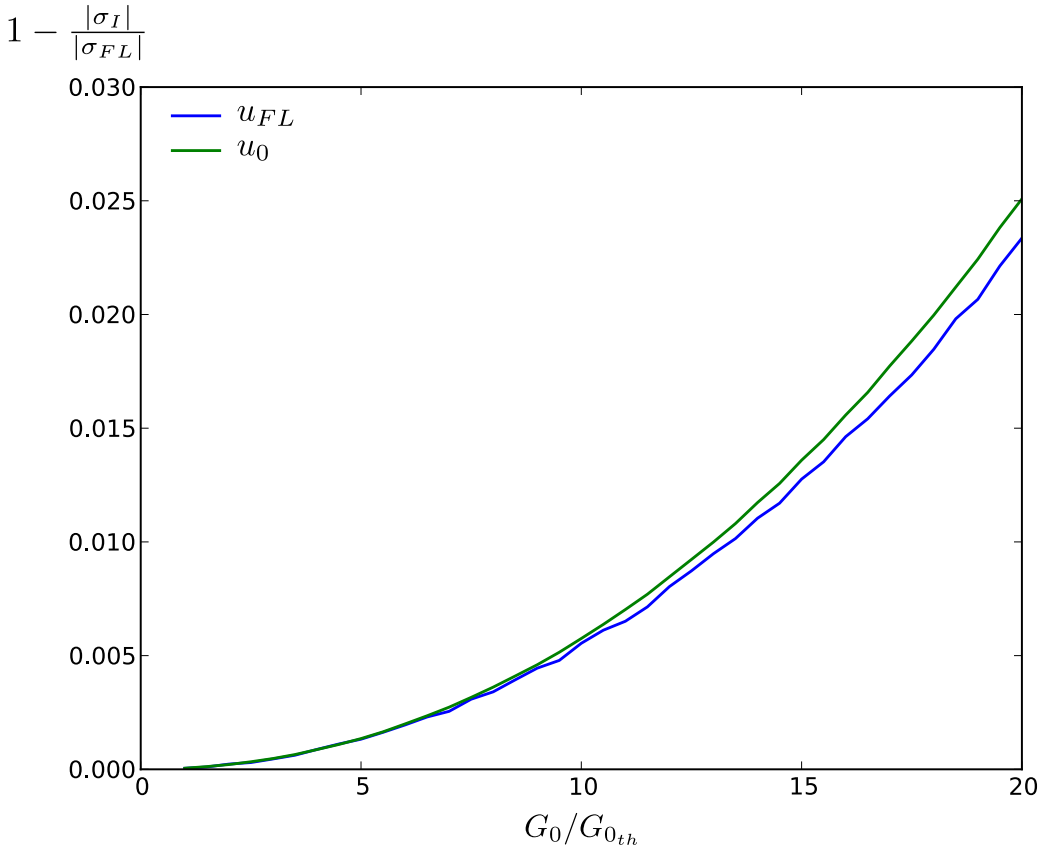


FIGURE 2.16 – Erreur de σ_I par rapport à σ_{FL} en fonction de la puissance de pompe relative $G_0/G_{0_{th}}$.

On constate que l'estimation de σ_I à partir du mode u_{FL} est un peu plus précise que celle obtenue à partir du mode de cavité vide u_0, mais la différence ne se fait réellement sentir qu'à partir d'une puissance de pompe égale à 10 fois la puissance de seuil. Cette différence est en accord avec la décroissance de la corrélation entre u_{FL} et u_0 que l'on observe sur la figure 2.17 lorsque la puissance de pompe augmente. Cependant, les deux estimations de σ_I commettent une erreur quadratique par rapport à la valeur propre σ_{FL} en fonction de G_0. Cette erreur reste néanmoins inférieure à 2,5 %, même lorsque la puissance de pompe atteint 20 fois la puissance de seuil.

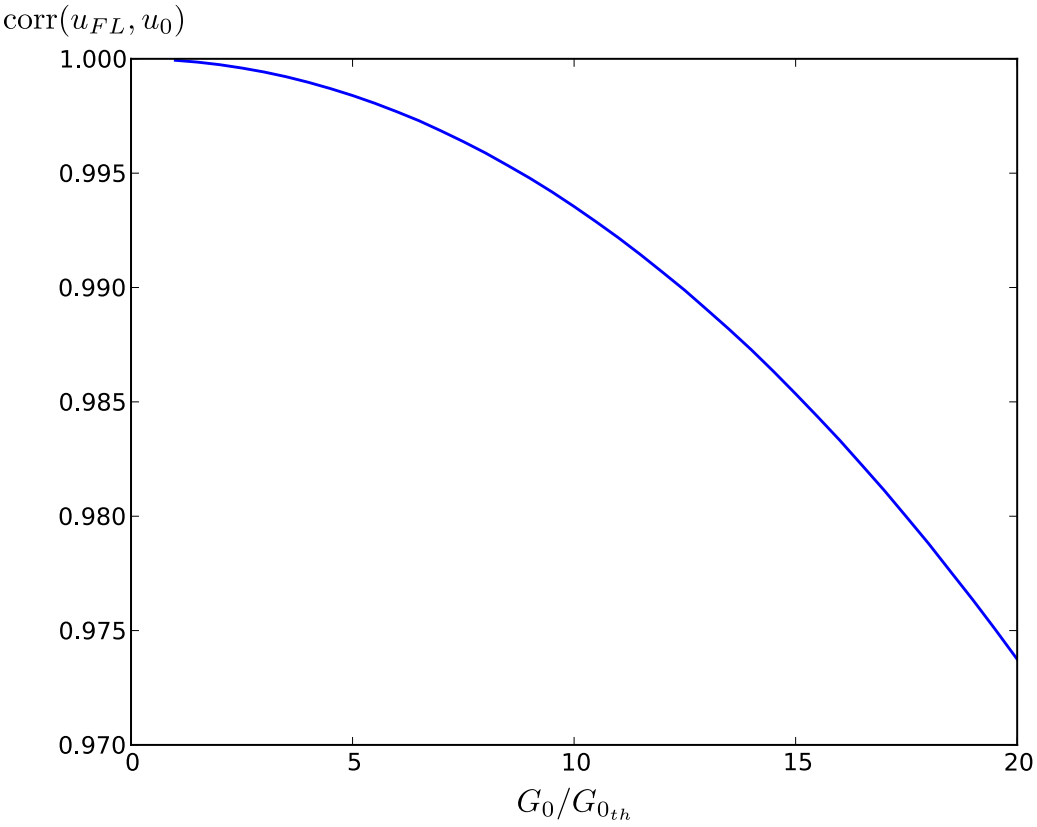


FIGURE 2.17 – Corrélation entre les modes u_{FL} et u_0 en fonction de la puissance de pompe relative $G_0/G_{0_{th}}$.

On pourrait penser que cette erreur quadratique est dûe au développement limité du gain exponentiel qui a été tronqué à l'ordre 1 pour obtenir l'intégrale de recouvrement mode–gain, mais cette erreur persiste même en utilisant la formule exacte. Nous avons représenté la déviation relative de la phase associée à la valeur propre calculée par l'algorithme de Fox–Li par rapport à la phase de Gouy théorique accumulée sur un aller–retour par le mode fondamental gaussien sur la figure 2.18. On constate une évolution quadratique de cette erreur, traduisant la limite de l'hypothèse faite qu'un mode propre d'une cavité avec gain linéaire se décompose uniquement en modes de la cavité vide revenant égaux en phase après un aller–retour. Lorsque le gain est suffisamment important, la fonction $b(x,y)$ que nous avions introduite lors de la dérivation de

l'intégrale de recouvrement mode–gain n'est plus totalement négligeable.

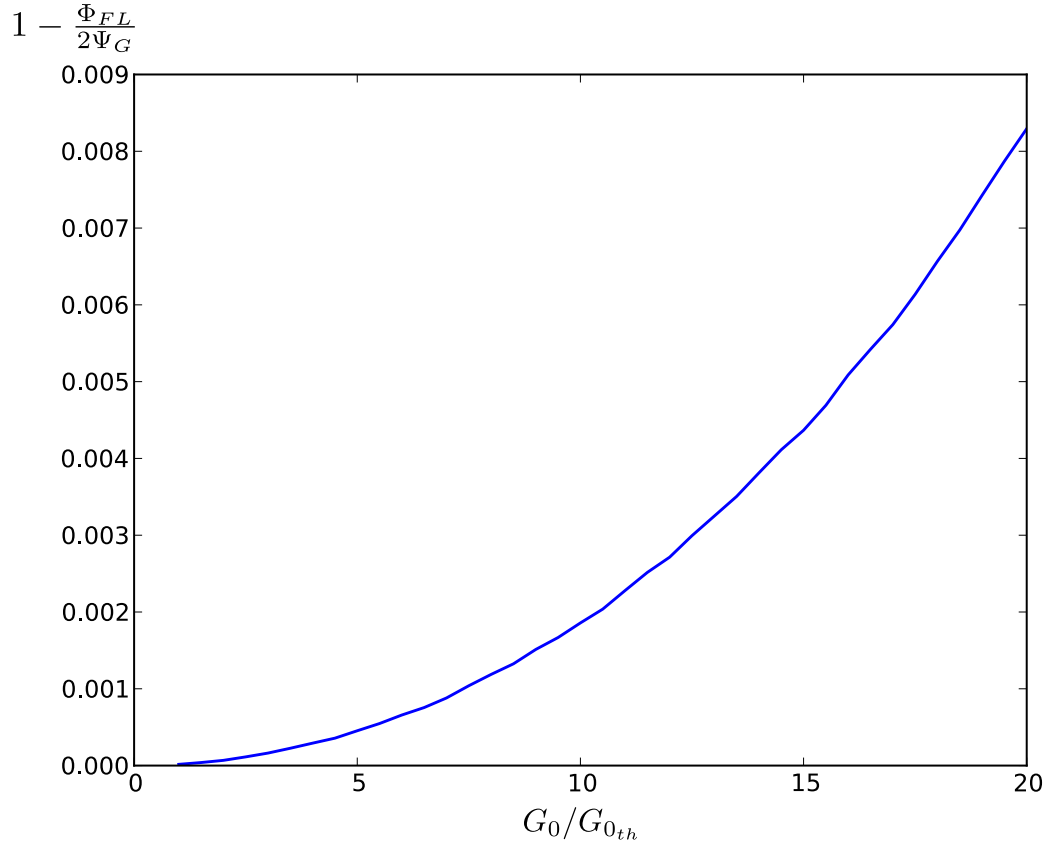


FIGURE 2.18 – Erreur entre la phase de la valeur propre calculée par Fox–Li et la phase de Gouy théorique en fonction de la puissance de pompe relative $G_0/G_{0_{th}}$.

Dans les conditions dans lesquelles nous travaillons en pratique, la puissance de pompe est toujours largement inférieure à 10 fois la puissance de seuil du laser. Dans ce cas nous voyons d'après les figures 2.16 et 2.18 que l'erreur sur le module de la valeur propre commise par l'intégrale de recouvrement mode–gain sera inférieure à 0,5 % et l'erreur sur la phase sera inférieure à 0,2 %. Les prédictions faites précédemment reposant sur l'utilisation de l'intégrale de recouvrement mode–gain restent donc largement valables.

2.2.3 Zones de dégénerescence

Nous nous attachons ici à mettre en évidence les zones de dégénérescence de modes apparaissant autour des points de dégénérescence de la cavité vide lorsque l'on ajoute un milieu amplificateur. Ces zones particulières sont caractérisées par la présence de modes propres qui ne sont plus des modes d'ordre unique invariants de forme par propagation. Nous verrons qu'aux points de dégénérescences exactes la méthode de Fox–Li prédit bien l'apparition de modes géométriques tels que nous les avons décrits au chapitre 1 et sélectionnés en accord avec la règle de maximisation de l'intégrale de recouvrement mode–gain. De plus, nous verrons que dans des

conditions particulières de dégénérescence partielle il est possible d'observer des modes qui ressemblent fortement aux mode Laguerre–Gauss ou aux modes Ince–Gauss en champ lointain, mais qui ne sont pas invariants de forme par propagation.

Mise en évidence des zones de dégénérescence

Afin de caractériser les zones de dégénérescence de la cavité, nous devons introduire un critère nous permettant d'estimer à quel point un mode est dégénéré ou non. Pour cela, nous considérerons qu'un mode est totalement non dégénéré si il est le mode propre de la cavité vide qui maximise l'intégrale de recouvrement mode–gain. Nous noterons un tel mode u_0, comme précédemment. Afin de déterminer si un mode u_{FL} calculé par l'algorithme de Fox–Li est dégénéré, nous pouvons simplement évaluer la corrélation corr(u_{FL},u_0).

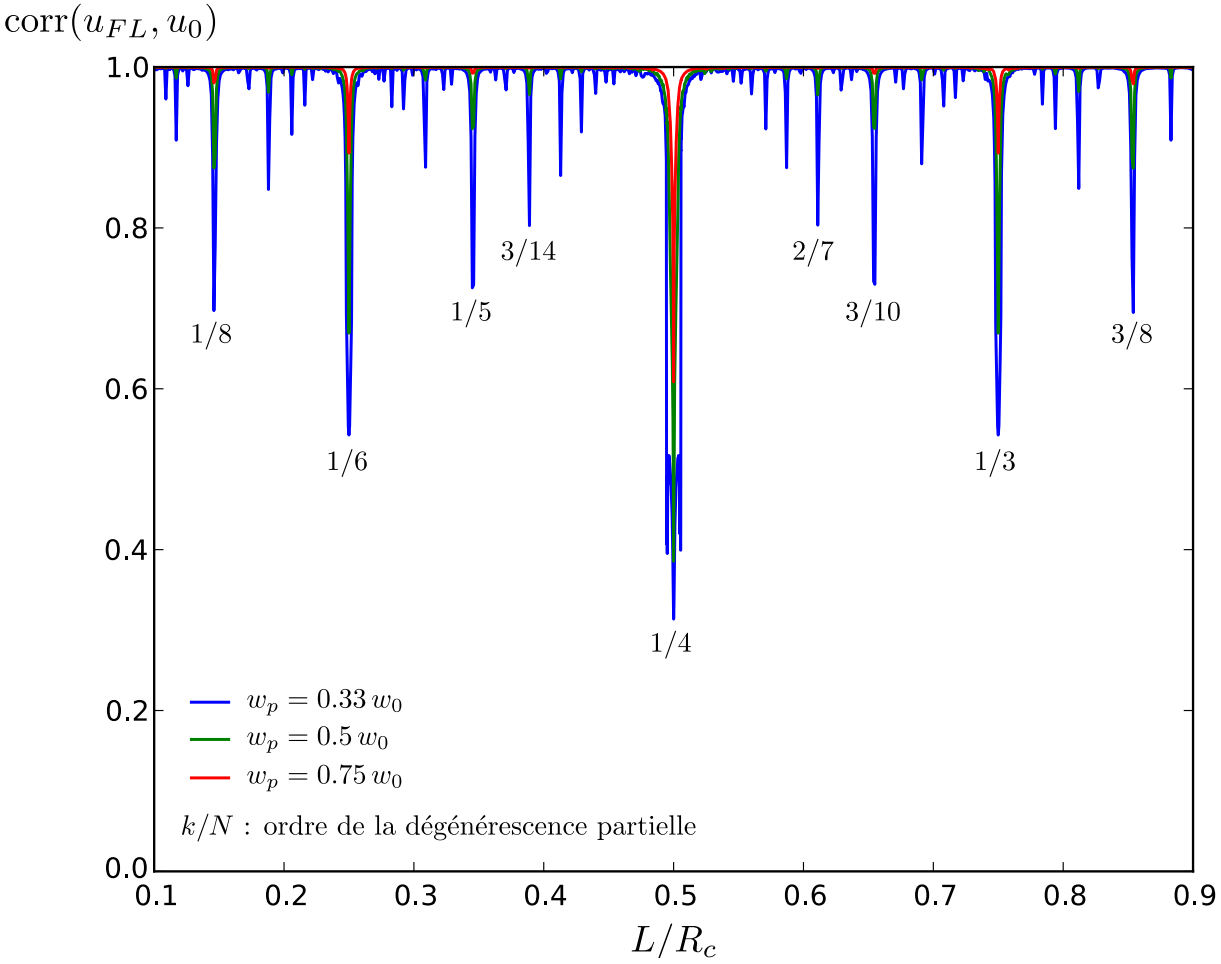


FIGURE 2.19 – Corrélation entre les modes u_{FL} et u_0 en fonction de la longueur de cavité rapportée au rayon de courbure du miroir de sortie, la pompe étant alignée sur l'axe optique.

Dans un premier temps, nous étudions le cas où la pompe est alignée sur l'axe optique de la cavité. Dans ce cas, le mode u_0 de référence est le mode fondamental gaussien. Nous avons

représenté sur la figure 2.19 l'évolution de la corrélation entre les modes u_{FL} et u_0 en fonction de la longueur de cavité, et ce pour différentes tailles de pompes w_p. La puissance de pompe a été fixée à $G_0 = 2G_{0_{th}}$.

On constate que le coefficient de corrélation chute uniquement autour de longueurs particulières représentant des longueurs de dégénérescences partielles de la cavité dont les principales sont $L = R_c/4$, $L = R_c/2$ et $L = 3R_c/4$. Ces dégénérescences partielles sont d'autant plus exacerbées que la pompe est petite et donc que le couplage entre deux modes d'ordres différents est important. En dehors des zones de dégénérescence, on constate que le coefficient de corrélation est très proche de 1, ce qui confirme que dans le cas aligné et en l'absence de dégénérescence le mode fondamental gaussien l'emporte toujours sur les autres même si la pompe est très petite.

Une autre particularité des courbes de la figure 2.19 est qu'elles présentent une symétrie autour de la longueur $L = R_c/2$, à la fois dans la position des pics de dégénérescence ainsi que dans leur amplitude. La symétrie de position des longueurs de dégénérescence s'explique facilement à l'aide de la formule (1.32) impliquant que toute longueur de dégénérescence L d'ordre k/N est associée à une autre longueur de dégénérescence $L' = R_c - L$ d'ordre $|N - 2k|/2N$. De plus, nous savons qu'une dégénérescence d'ordre N possède des modes propres se décomposant obligatoirement sur des modes d'ordre unique égaux modulo N. Dans le cas d'une pompe à symétrie de révolution alignée sur l'axe optique de la cavité, il ne peut pas y avoir de mode d'ordre impair dans la décomposition des différents modes propres. Ainsi, si N est impair, les modes d'ordres égaux modulo N dans la décomposition du mode propre dégénéré sont en réalité égaux modulo $2N$. D'autre part, si N est pair, le rapport $|N - 2k|/2N$ se simplifie et l'ordre de la dégénérescence associée à la longueur $L' = R_c - L$ est également N. Pour finir, la taille w_0 du waist de cavité est symétrique par rapport à $R_c/2$ et est donc identique en L et en L'. Nous voyons donc que les modes propres associés aux longueurs de dégénérescence L et L' doivent être rigoureusement égaux, ce qui justifie théoriquement la symétrie observée dans les courbes de la figure (1.32).

Dans un second temps, nous nous intéressons au cas où la pompe est désalignée d'une longueur x_p dans la direction x par rapport à l'axe optique de la cavité. Nous choisissons ici $x_p = 1{,}1\, w_0$ qui, en l'absence de dégénérescence, favorise un mode Ince–Gauss de type $\mathrm{IG}^e_{2,2}$ comme nous l'avons montré précédemment à l'aide de la figure 2.6. Comme précédemment, nous avons représenté sur la figure 2.20 l'évolution de la corrélation entre u_{FL} et u_0 en fonction de la longueur de cavité, pour différentes tailles de pompe w_p et pour $G_0 = 2G_{0_{th}}$. Le mode u_0 considéré est le mode $\mathrm{IG}^e_{2,2}$ construit avec l'opérateur $L^e_p(\gamma)$ défini en (1.69) pour un paramètre γ maximisant l'intégrale de recouvrement mode–gain. Exceptionnellement, le mode u_0 est remplacé par le mode $\mathrm{HG}_{1,0}$ pour quelques points seulement autour de la dégénérescence en $L = R_c/2$ où le mode propre calculé par l'algorithme de Fox–Li possède une projection nulle sur le mode $\mathrm{IG}^e_{2,2}$.

Cette fois-ci, on constate une disymétrie de la courbe autour de la longueur $L = R_c/2$. De plus, si on compare deux à deux les longueurs de dégénérescences L et $L' = R_c - L$, on remarque que la dégénérescence la plus importante est bien celle dont l'ordre est le plus petit. Comme précédemment, le coefficient de corrélation entre le mode calculé par Fox–Li et le mode maximisant l'intégrale de recouvrement mode–gain est toujours très proche de 1 sauf au niveau des dégénérescences partielles de la cavité. L'impossibilité d'exciter des modes d'ordre unique

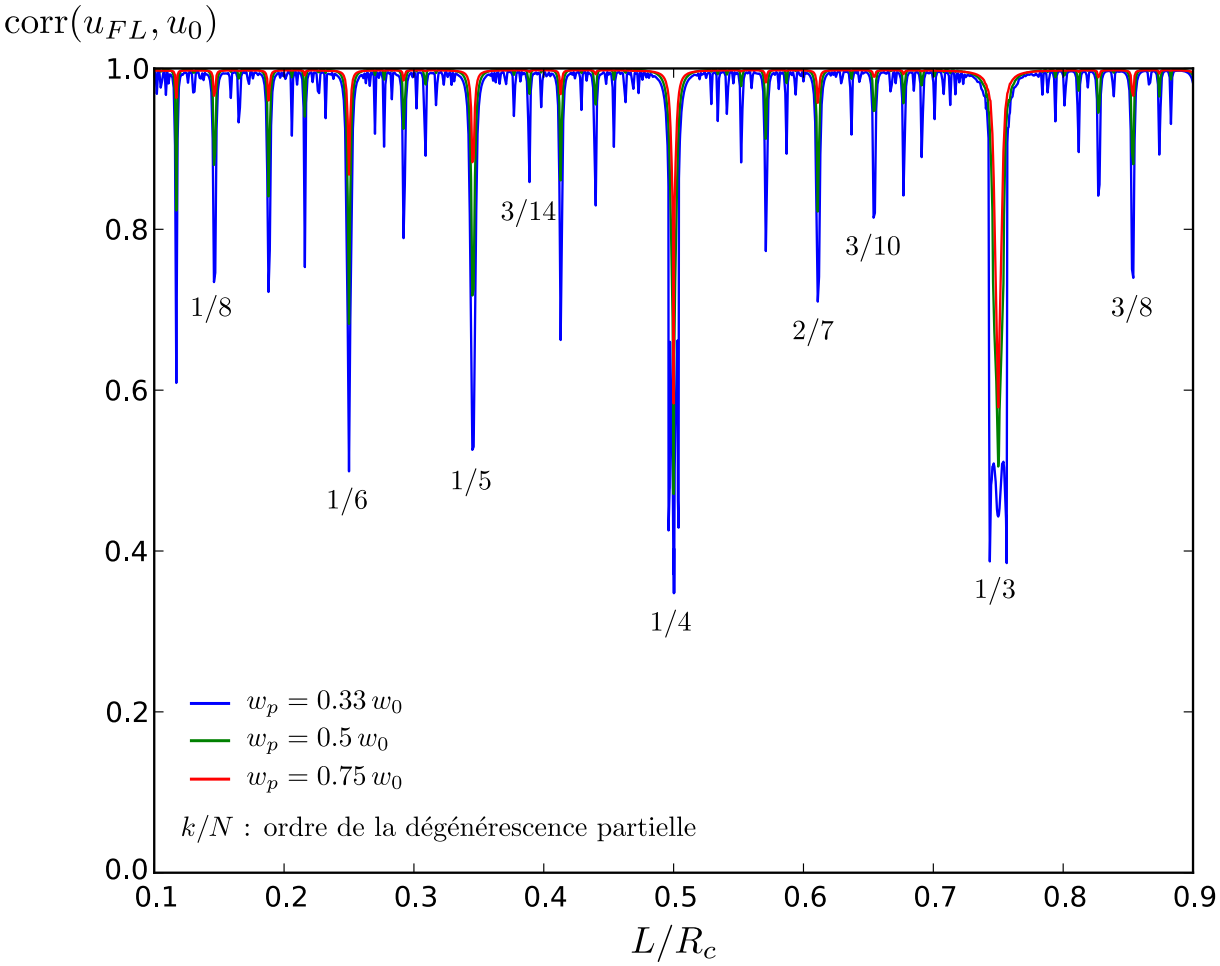


FIGURE 2.20 – Corrélation entre les modes u_{FL} et u_0 en fonction de la longueur de cavité rapportée au rayon de courbure du miroir de sortie, la pompe étant désalignée d'une longueur $x_p = 1{,}1\,w_0$ par rapport à l'axe optique de la cavité.

avec des lignes nodales circulaires ou elliptiques avec une pompe gaussienne est donc également vérifiée numériquement par la méthode de Fox–Li.

Enfin, les figures 2.19 et 2.20 permettent de mettre en évidence les largeurs des zones de dégénérescence de la cavité. En effet, nous avions annoncé que contrairement à la cavité vide, la présence d'un gain dans la cavité induit un couplage entre des modes d'ordres différents conduisant à des zones de dégénérescence étendues et non ponctuelles. Cependant, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence un critère analytique précis permettant d'estimer les largeurs associées aux différentes zones de dégénérescence. Dans l'annexe A, nous expliquons cependant comment on peut mesurer de manière non-arbitraire ces largeurs de dégénérescences à partir des courbes de corrélations précédentes, et nous montrons que dans le cas d'un gain linéaire celles-ci sont proportionnelles à la puissance de pompe G_0.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux profils transverses des modes calculés par l'algorithme de Fox–Li à quelques longueurs particulières de dégénérescence.

Modes géométriques

Lorsque la cavité possède une longueur de dégénérescence exacte, l'algorithme de Fox–Li converge vers des modes géométriques tels qu'on les a décrit au chapitre 1. La figure 2.21 représente les profils transverses en intensité des modes géométriques obtenus en $L = R_c/2$ dans une situation de pompage petit, avec $w_p = 0{,}75\, w_0$, aligné sur l'axe optique de la cavité.

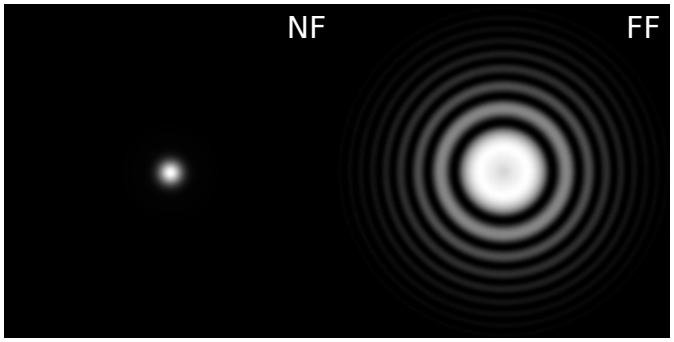


FIGURE 2.21 – Profils transverses en intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) du mode géométrique calculé par l'algorithme de Fox–Li à $L = R_c/2$ pour une pompe alignée sur l'axe optique de taille $w_p = 0{,}75\, w_0$.

Comme l'avait prédit l'analyse de la figure 2.7 s'appuyant sur l'intégrale de recouvrement mode–gain, nous obtenons bien un mode géométrique se décomposant sur des modes de la cavité vide d'ordres congrus à 0 modulo 4. On observe également que plus la pompe est petite, plus la taille du mode sur le miroir plan est petite et plus le nombre d'anneaux du mode sur le miroir sphérique est important.

La figure 2.22 représente les profils du mode géométrique obtenu en utilisant les mêmes paramètres de cavité, mais cette fois avec une pompe excentrée par rapport à l'axe optique d'une distance $x_p = 2{,}5\, w_0$.

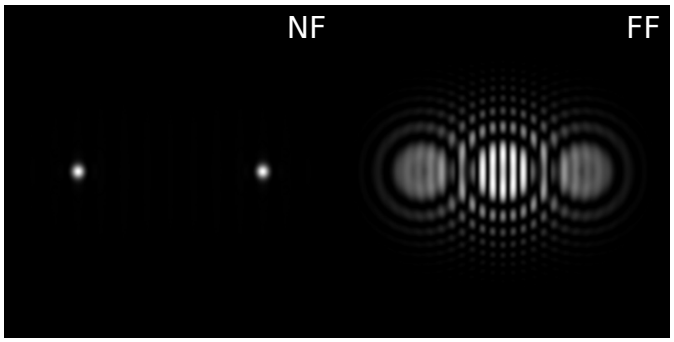


FIGURE 2.22 – Profils transverses en intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) du mode géométrique calculé par l'algorithme de Fox–Li à $L = R_c/2$ pour une pompe de taille $w_p = 0{,}75\, w_0$ désalignée de $x_p = 2{,}5\, w_0$ selon l'axe x.

On obtient alors des modes géométriques semblables à ceux que l'on avait construit au chapitre 1 dans la figure 1.27 en utilisant une distribution initiale gaussienne de waist inférieur à w_0.

Dans cette configuration désalignée, l'ordre le plus bas du mode propre de cavité vide intervenant dans la décomposition du mode géométrique peut être quelconque et dépend sensiblement de la valeur de x_p.

Lorsque l'on s'écarte de la longueur de dégénérescence exacte, le mode en champ proche devient de plus en plus gros et les anneaux en champ lointain disparaissent progressivement, mais il semble que le mode observé puisse toujours être décrit par un mode géométrique. Ce mode géométrique en revanche n'est plus celui qui maximise l'intégrale de recouvrement mode–gain, même si son intégrale de recouvrement reste plus élevée que celle de tout mode propre d'ordre unique de la cavité vide. Cette transition continue entre mode d'ordre unique et mode géométrique s'observe bien tant que la taille de pompe n'est pas trop petite. Dans le cas contraire, lorsque $w_p < 0{,}5\, w_0$, il est possible d'observer des modes que l'on ne peut pas décrire en termes de modes géométriques, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Dans une situation de pompage plus gros et désaligné, on obtient bien les modes géométriques observés par Dingjan *et coll.* [64] et par Y.F. Chen *et coll.* [66, 67]. La figure 2.23 représente les profils transverses des modes géométriques observés en $L = R_c/2$ et $L = 3R_c/4$ pour une pompe de taille $w_p = 2\, w_0$ et de position $x_p = 2{,}5\, w_0$.

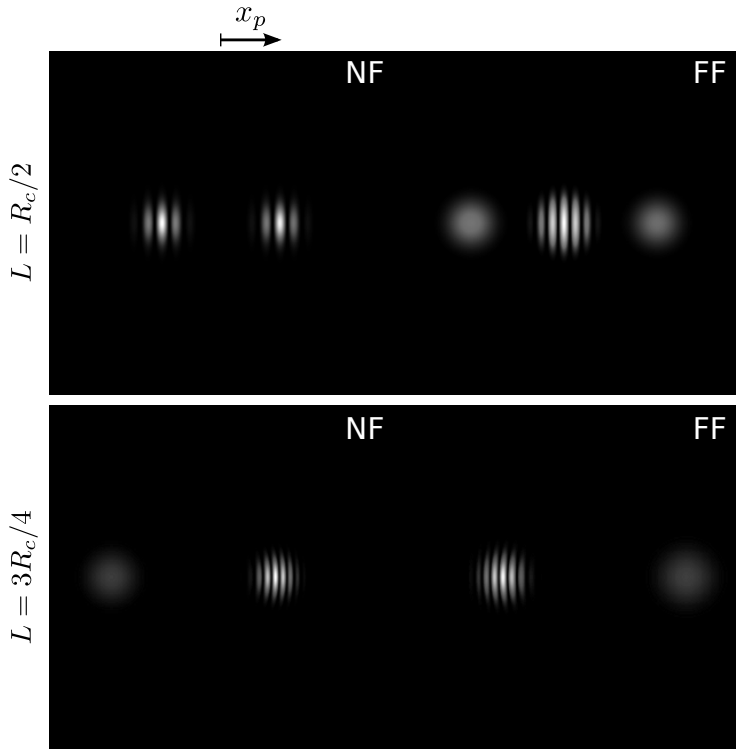


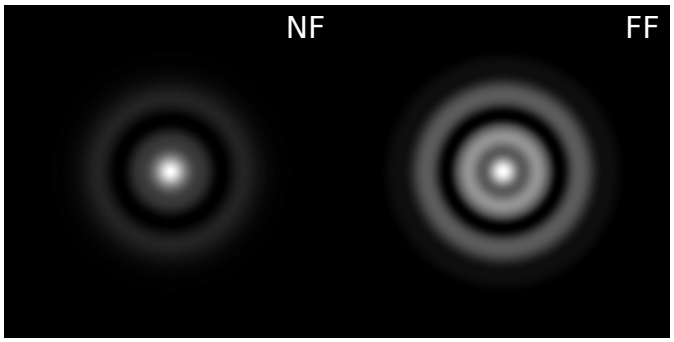
FIGURE 2.23 – Profils transverses en intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) des modes géométriques calculés par l'algorithme de Fox–Li à $L = R_c/2$ et $L = 3R_c/4$ pour une pompe de taille $w_p = 2\, w_0$ désalignée de $x_p = 2{,}5\, w_0$ selon l'axe x.

Le réseaux de franges d'interférences apparaît toujours en champ proche dans la zone pompée, représentant bien la situation maximisant l'intégrale de recouvrement mode–gain. Ces modes sont

en revanche très sensibles à la longueur de cavité et disparaissent très vite dès que l'on s'éloigne un peu de la dégénérescence exacte.

Modes quasi–LG et quasi–IG

Lorsque la pompe est très petite par rapport au waist de la cavité vide, les figures 2.19 et 2.20 mettent en évidence l'apparition de pics de dégénérescences secondaires autour des pics de dégénérescences principales en $L = R_c/2$ et $L = 3R_c/4$. Dans le cas où la pompe est alignée sur l'axe optique de la cavité, les pics secondaires autour de $L = R_c/2$ témoignent de l'apparition de modes particuliers dont les profils transverses ainsi que la décomposition sur une base de modes propres de la cavité vide sont représentés sur la figure 2.24.



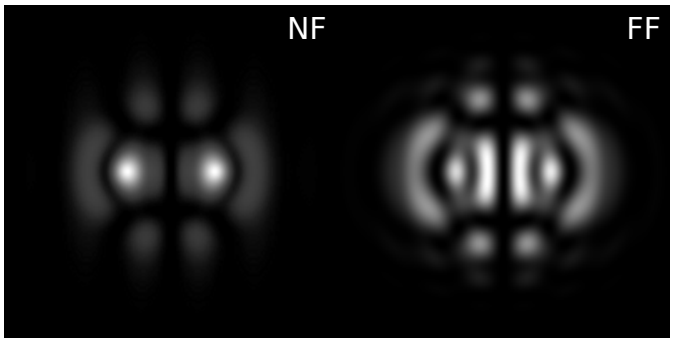
$LG_{0,0}$	$LG_{2,0}$	$LG_{4,0}$	$LG_{6,0}$	autres
16.7 %	73.8 %	7.1 %	1.4 %	1 %

FIGURE 2.24 – Profils transverses en intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) d'un mode quasi–LG observé en $L = 49440\,\mu$m et $L = 50560\,\mu$m pour $w_p = 0{,}33\,w_0$.

Le mode observé ressemble très fortement à un mode Laguerre–Gauss de type $LG_{2,0}$ sur le miroir sphérique, c'est pourquoi nous lui donnons l'appellation de mode quasi–LG. Lorsque l'on regarde sa décompostion sur la base de modes propres de la cavité vide, on constate que tous les modes intervenant sont d'ordre congru à 0 modulo 4 bien que l'on ne soit pas à la dégénérescence exacte. De plus, le mode $LG_{2,0}$ l'emporte largement dans la décomposition, ne permettant pas d'identifier ce mode à un mode géométrique décrit précédemment.

Dans le cas où la pompe est désalignée d'une position $x_p = 1{,}1\,w_0$, les pics secondaires autour de $L = R_c/2$ sont associés à l'apparition d'un mode ressemblant fortement à un mode Ince–Gauss de type $IG^e_{5,3}$ sur le miroir sphérique, que nous qualifions de quasi–IG [BRB14]. Nous avons représenté le mode obtenu dans la figure 2.25.

L'ordre le plus bas intervenant dans la décomposition de ce mode est l'ordre 1, et les ordres suivants sont tous congrus à 1 modulo 4. Il n'y a pas d'ordre 2 dans cette décomposition, c'est pourquoi nous avons pris la corrélation avec le mode $HG_{1,0}$ pour tracer les points correspondants dans la figure 2.20. Comme nous l'avons bien précisé au chapitre 1, lorsque p est plus grand que 2, la famille des modes d'ordre p est bien plus grande que la famille des modes Ince–Gauss. Chaque ordre de la décomposition du mode de la figure 2.25 ne peut donc pas être identifié à un

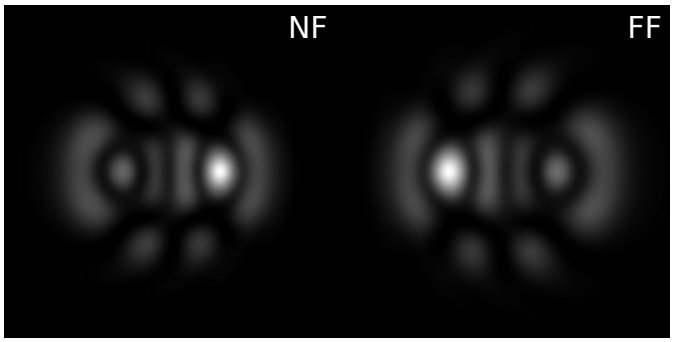


$p=1$	$p=5$	$p=9$	$p=13$	autres
17.9 %	69.7 %	8.1 %	2.8 %	1.5 %

FIGURE 2.25 – Profils transverses en intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) d'un mode quasi–IG observé en $L = 49440\,\mu$m et $L = 50560\,\mu$m, pour $w_p = 0{,}33\,w_0$ et $x_p = 1{,}1\,w_0$.

mode Ince–Gauss. Pourtant, il s'avère que la projection sur les modes d'ordre 5 est très proche du mode $\mathrm{IG}^e_{5,3}$.

Le même type d'observation peut être fait dans les pics de dégénérescences secondaires autour de $L = 3R_c/4$. Nous avons représenté sur la figure 2.26 le mode quasi–IG obtenu dans les mêmes conditions que précédemment, possédant lui aussi une projection très importante sur un mode $\mathrm{IG}^e_{5,3}$. Cette fois-ci, les ordres intervenant dans la décomposition du mode sont congrus à 2 modulo 3, respectant bien l'ordre 3 de la dégénérescence $L = 3R_c/4$. Le fait que l'ordre de la dégénérescence soit impair se traduit ici par une disymétrie du profil d'intensité autour de l'axe $x = 0$, le mode possédant une décomposition à la fois sur des ordres impairs et pairs.



$p=2$	$p=5$	$p=8$	$p=11$	autres
18.3 %	71.8 %	7.6 %	1.4 %	0.9 %

FIGURE 2.26 – Profils transverses en intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) d'un mode quasi–IG observé en $L = 74350\,\mu$m et $L = 75650\,\mu$m, pour $w_p = 0{,}33\,w_0$ et $x_p = 1{,}1\,w_0$.

Il est important de souligner que les deux longueurs de dégénérescence $L = R_c/2$ et $L = 3R_c/4$ que nous avons mis en évidence ici le sont uniquement à titre d'illustration. En effet, pour des

désalignements x_p différents, il est également possible d'observer des modes quasi–IG à d'autres longueurs de dégénérescence de la cavité. On peut d'ailleurs remarquer que les auteurs Schwarz *et coll.* [17] ont observé certains de ces modes en pensant observer des modes Ince–Gauss dans une cavité plan–concave pompée longitudinalement. L'observation d'une disymétrie dans certains de leurs profils d'intensité est en effet une preuve indiscutable d'une superposition de modes d'ordres différents à la fois pairs et impairs, et donc de la proximité d'une dégénérescence de la cavité.

Cette étude des zones de dégénérescence en situation de pompage petit nous a donc permis de mettre en évidence l'existence de modes particuliers que nous avons qualifié de quasi-LG et quasi-IG qui peuvent être confondus expérimentalement avec des modes LG ou des modes IG si on ne fait pas attention à observer à la fois le champ proche et le champ lointain du mode pour montrer qu'ils ne sont pas des modes d'ordre unique. En dehors de ces situations particulières, les seules observations que l'on peut faire dans un tel laser sont donc des modes d'ordre unique hors dégénérescence et des modes géométriques à dégénérescence. De plus, si la pompe est gaussienne ou suffisamment régulière et ne possédant qu'un maximum, il n'est pas possible d'exciter des modes exotiques possédant des lignes nodales circulaires ou elliptiques. Ceci a été prédit à la fois de manière analytique par l'utilisation de l'intégrale de recouvrement mode–gain, et également de manière numérique par une méthode de Fox–Li. Afin que nos conclusions restent valides pour des expériences réelles effectuées bien au delà du seuil de l'oscillation laser, il nous reste encore à développer une méthode permettant de construire des états stationnaires s'établissant suite à une saturation du gain, à partir des modes propres de la cavité avec gain linéaire. Ceci est l'objet de la section suivante qui sera la dernière de ce chapitre.

2.3 Calcul de profils transverses stationnaires

Jusqu'à présent, nous avons porté une attention particulière à l'étude des modes propres d'une cavité avec gain et pertes linéaires dans différentes conditions de pompage et de dégénérescence. Le but de cette section est de proposer une méthode permettant de construire un état stationnaire du laser en partant des solutions calculées par l'algorithme de Fox–Li linéaire. Nous verrons que tout mode propre du régime linéaire dont le module de la valeur propre est plus grand que 1 peut potentiellement donner naissance à un mode stationnaire. Nous partirons donc toujours du mode propre dont la valeur propre est la plus grande, qui est le seul choix non–arbitraire possible. La validation de ce choix pourra uniquement se faire par l'expérience, au chapitre 3. Dans un premier temps, nous devrons donc adapter la méthode de Fox–Li en introduisant un gain saturé dans les équations. Nous verrons que certaines précautions et adaptations de l'algorithme s'imposent pour le forcer à converger vers des solutions physiques. Nous mènerons ensuite une étude similaire à celle qui a été réalisée dans le régime linéaire concernant l'établissement de modes d'ordre unique en l'absence de dégénérescence et des modes quasi-LG, quasi-IG et géométriques dans les zones de dégénérescence. Nous mettrons notamment en évidence l'effet des dégénérescences sur la puissance de sortie du laser. Cette étude sera tout d'abord menée dans le cas monomode, justifié lorsque le profil de gain est suffisamment petit pour que le mode stationnaire sélectionné le sature intégralement. Nous verrons toutefois que si le profil de pompe est trop gros, un mode transverse ne suffit pas à le saturer dans toutes les régions de l'espace. Nous introduirons alors

une méthode permettant de calculer successivement les modes transverses dont la combinaison permet de saturer intégralement le gain, conduisant à un état stationnaire multimode transverse.

2.3.1 Adaptation de la méthode de Fox–Li pour un gain saturé

Nous avons bien insisté précédemment sur le fait que l'algorithme de Fox–Li n'a de justification théorique que lorsque l'opérateur représentant la cavité est linéaire et possède au moins une valeur propre. Cependant, pour calculer un état stationnaire nous devons remplacer l'expression du gain linéaire par un gain saturé dans l'opérateur décrivant la cavité. Le problème devient alors de trouver un invariant de l'opérateur non–linéaire ainsi construit. La première idée qui vient à l'esprit est d'essayer malgré tout d'appliquer cet opérateur non–linéaire un grand nombre de fois à une distribution initiale en espérant que celle-ci converge vers un point fixe. Nous verrons que cette méthode naïve pose des problèmes de convergence dans certaines situations, même si elle converge effectivement dans des cas très simples. Nous serons donc amené à apporter une modification majeure à l'algorithme, à savoir de faire interférer le champ avec lui même d'une manière bien précise afin de stabiliser le profil du mode entre deux applications successives de l'opérateur non–linéaire, tout en gardant l'algorithme le plus compatible avec la conception physique que nous nous faisons de l'établissement d'un mode stationnaire en cavité.

Modélisation du gain saturé

L'expression la plus simple pour le gain saturé intervenant dans le régime stationnaire du laser peut être obtenue à partir des équations cinétiques [29]. En tout point du milieu actif, le profil de gain saturé $g(x,y,z)$ peut s'écrire :

$$g(x,y,z) = \frac{g_0(x,y,z)}{1 + \frac{I(x,y,z)}{I_{sat}}}, \tag{2.30}$$

où $g_0(x,y,z)$ est le profil de gain linéaire introduit précédemment, $I(x,y,z)$ est l'intensité totale de l'onde au point considéré et I_{sat} est une intensité de saturation dépendant des différents paramètres de la transition atomique responsable de l'amplification de l'onde par émission stimulée.

À l'intérieur de la cavité, le mode $u(x,y,z)$ doit être considéré comme la somme d'une onde $u^+(x,y,z)$ se propageant vers l'avant et d'une onde $u^-(x,y,z)$ contrapropageante. En moyenne, l'intensité totale $I(x,y,z)$ est donc la somme des intensités $I^+(x,y,z)$ et $I^-(x,y,z)$ associées à ces deux ondes.

Il est important de noter que l'expression simplifiée (2.30) ne tient pas compte du désaccord potentiel entre la fréquence du mode amplifié et la fréquence de résonance exacte de l'amplification [80]. De plus, tout effet d'amplification est nécessairement associé à un effet de dispersion pouvant être déduit des relations de Kramers–Kronig [81] que nous ne prendrons pas en compte dans notre modélisation du milieu actif. Nous nous limitons également aux systèmes à quatre niveaux idéaux et négligeons les pertes par réabsorption qui se traduiraient par un terme supplémentaire d'absorption saturée dans le modèle [82].

Un algorithme de Fox–Li basé sur l'expression (2.30) du gain saturé a été développé par Endo *et coll.* [83] à partir d'un article de Bhowmik [84]. Dans l'article [83], les auteurs découpent

le gain en N tranches transverses et définissent les intensités moyennes des ondes se propageant vers l'avant et vers l'arrière au niveau de la tranche i de la manière suivante :

$$\tilde{I}_i^+ = (1-R)\sum_{k=0}^{q} R^k I_i^+(q-k), \tag{2.31}$$

$$\tilde{I}_i^- = (1-R)\sum_{k=0}^{q} R^k I_i^-(q-k), \tag{2.32}$$

où R est le coefficient de réflection du miroir de sortie et $I_i^{\pm}(q)$ sont les intensités des ondes à la $q^{\text{ième}}$ itération. Ils définissent alors le gain saturé dans la tranche i de la manière suivante :

$$g_i(x,y) = \frac{g_{i0}(x,y)}{1+\frac{\tilde{I}_i^+ + \tilde{I}_i^-}{I_{sat}}}, \tag{2.33}$$

où $g_{i0}(x,y)$ est le profil de gain linéaire associé à la tranche i.

Cette modélisation est étrange car elle fait intervenir un effet mémoire en prenant en compte les intensités des itérations précédentes dans le calcul du gain saturé de l'itération courante. De plus les auteurs n'apportent pas de justification théorique au choix des intensités moyennes définies par (2.31) et (2.32). La seule explication que nous trouvons est que les auteurs ont tenu à faire de l'algorithme de Fox–Li un algorithme physique en procédant par analogie avec le calcul du champ stationnaire d'une cavité Fabry–Perot, en remplaçant les champs par des intensités.

D'un point de vue purement physique, nous montrerons dans le prochain paragraphe en quoi il est impossible de considérer l'algorithme de Fox–Li adapté avec un gain saturé comme un processus physique de construction du mode stationnaire dans un laser. D'un point de vue algorithmique, nous allons tout de suite montrer en quoi la définition des intensités moyennes $\tilde{I}_i^+$ et $\tilde{I}_i^-$ est inutile et absurde.

Supposons que l'algorithme converge vers un point fixe. Alors, il existe un nombre d'itérations r pour lequel :

$$\forall q > r,\ I_i^{\pm}(q) = I_i^{\pm}.$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{I}_i^{\pm} &= (1-R)\sum_{k=0}^{q-r} R^k I_i^{\pm} + (1-R)\sum_{k=q-r+1}^{q} R^k I_i^{\pm}(q-k) \\ &= I_i^{\pm} - R^{q-r+1} I_i^{\pm} + (1-R)\sum_{k=q-r+1}^{q} R^k I_i^{\pm}(q-k).\end{aligned}$$

Puisque $R<1$, on voit clairement que lorsque $q \longrightarrow +\infty$, $\tilde{I}_i^{\pm} \longrightarrow I_i^{\pm}$. Le gain saturé pour une tranche devient alors équivalent à celui que l'on avait défini en (2.30). Le point fixe de l'algorithme est donc le même lorsque l'on utilise les intensités $\tilde{I}_i^{\pm}$ ou $I_i^{\pm}$ pour saturer le gain. La seule raison qui pourrait pousser à utiliser les expressions plus compliquées (2.31) et (2.32) est si celles-ci permettaient d'accélérer la convergence, or c'est tout le contraire. En effet, le fait d'utiliser

cet algorithme ralentit considérablement la convergence et fait apparaître des oscillations de la puissance de sortie en fonction du nombre d'itérations qui mettent beaucoup de temps à s'amortir. Le fait d'utiliser un tel algorithme avec effet mémoire est donc totalement inutile et contre-productif.

Pour le type de lasers que nous étudions dans lesquels le milieu actif est plus petit que la longueur de Rayleigh, le fait de découper le milieu actif en différentes tranches est un raffinement dont nous n'avons pas besoin. Nous supposons donc que $I^+ = I^- = \frac{1}{2}I$, avec $I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c|u|^2$, et réduisons le cristal à une tranche de gain localisée sur le miroir plan, dont le profil linéaire $g_0(x,y,z)$ a été moyenné sur la longueur du cristal. L'expression du gain saturé que nous utilisons est donc la suivante :

$$\tilde{g}(x,y) = \frac{\tilde{g}_0(x,y)}{1 + \frac{|u(x,y)|^2}{u_{sat}^2}}, \tag{2.34}$$

correspondant bien au gain introduit dans l'intégrale (2.14), avec $u_{sat}^2 = \frac{I_{sat}}{\epsilon_0 c}$.

Problèmes de convergence de la méthode « naïve »

La méthode « naïve » que nous proposons d'étudier dans un premier temps n'est rien d'autre que la méthode de Fox–Li dans laquelle on remplace le gain linéaire $\tilde{g}_0(x,y)$ par le gain saturé $\tilde{g}(x,y)$ défini en (2.34).

Un état stationnaire est caractérisé par un mode qui doit être invariant par application de l'opérateur d'aller–retour non–linéaire de la cavité, à la fois en terme de distribution spatiale que de puissance totale du mode. Le critère de convergence défini en (2.26) portant sur la corrélation entre deux aller–retours successifs du mode dans la cavité reste valable, mais il faut lui adjoindre un nouveau critère portant sur la puissance totale du mode. Si on note toujours u_n le mode obtenu après n aller–retours d'une distribution initiale aléatoire dans la cavité, le critère de stabilité en puissance s'exprime de la manière suivante :

$$\left| 1 - \frac{\int |u_{n+1}|^2}{\int |u_n|^2} \right| < \zeta, \tag{2.35}$$

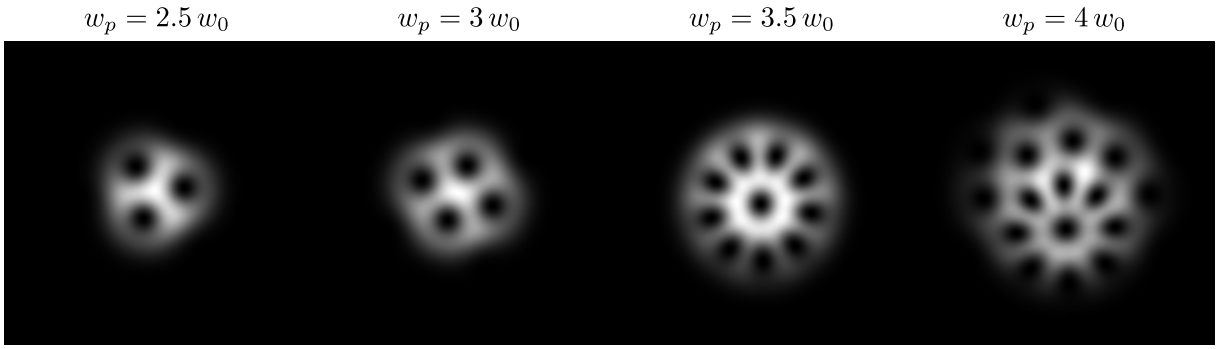
où ζ est la marge d'erreur que l'on autorise pour la convergence de la puissance, non–nécessairement identique à celle portant sur la corrélation. En pratique, on choisira également $\zeta = 10^{-6}$ dans nos simulations.

On pourrait penser que le critère de corrélation est suffisant pour caractériser la convergence vers un état stationnaire, mais ça n'est pas forcément le cas lorsque la saturation est trop lente pour modifier significativement le profil du mode sur un aller–retour. Inversement, le critère sur la puissance n'est pas suffisant non plus à lui seul, comme nous allons le voir dans quelques instants. On considère donc que l'algorithme a convergé uniquement lorsque les critères (2.26) et (2.35) sont satisfaits simultanéments.

Dans les situations de pompage petit ($w_p \leq w_0$) et hors des zones de dégénérescence, cet algorithme converge toujours et fournit un état stationnaire ayant un profil transverse très proche de celui calculé par l'algorithme de Fox–Li linéaire. En revanche, dans les zones de dégénérescence

il arrive parfois que l'algorithme ne converge pas, notamment lorsque la pompe est désalignée.

Dans les situations de pompage gros ($w_p > w_0$) en revanche l'algorithme ne converge presque jamais, que ce soit à l'intérieur ou en dehors des zones de dégénérescence. La situation la plus intéressante afin de nous enseigner ce qu'est réellement capable de calculer l'algorithme de Fox–Li est celle d'un pompage gros, aligné sur l'axe optique de la cavité, dans une situation non–dégénérée. Nous choisissons comme précédemment un miroir de sortie de rayon de courbure $R_c = 10\,\text{cm}$ et de coefficient de réflexion en intensité $R = 0{,}98$, ainsi qu'une longueur de cavité $L = 4\,\text{cm}$. La puissance de pompe est fixée par $G_0 = 4G_{0_{th}}$, $G_{0_{th}}$ correspondant à la puissance de pompe minimale nécessaire pour exciter le mode fondamental gaussien. Lorsque $w_p > 1{,}5\,w_0$, le critère de convergence de la corrélation (2.26) n'est jamais satisfait bien que la puissance parvienne à se stabiliser avec une erreur inférieure à $\zeta = 10^{-6}$. Dans cette expérience particulière nous décidons donc d'abandonner le critère de convergence de la corrélation au profit d'un critère de convergence de variation de la corrélation. L'algorithme parvient alors à converger au sens de ce nouveau critère, et nous obtenons les modes de la figure 2.27 pour différentes tailles de pompe w_p.



w_p	$2.5\,w_0$	$3\,w_0$	$3.5\,w_0$	$4\,w_0$
P_{out}	42.5 mW	52.4 mW	68.4 mW	86 mW

FIGURE 2.27 – Vortex tournants obtenus en pompage gros par l'algorithme de Fox–Li avec gain saturé ainsi que leurs puissances associées, pour différentes tailles de pompe w_p.

Les modes représentés sur la figure 2.27 peuvent aussi bien décrire le champ proche que le champ lointain à une rotation près. En effet, ils ont la propriété de se propager avec un profil transverse tournant en fonction de z au rythme de la phase de Gouy, comme nous l'expliquons dans l'annexe B. Ceci explique pourquoi l'algorithme ne converge pas lorsque l'on utilise le critère de convergence de la corrélation. En effet, comme la cavité n'est pas dégénérée, l'angle de la rotation correspondant à la phase de Gouy accumulée sur un aller–retour n'est pas un multiple de 2π et le mode ne se superpose donc pas à lui-même après un aller–retour dans la cavité. Les modes obtenus ne sont donc pas des modes physiques pouvant exister à l'intérieur de la cavité.

Cet exemple montre bien que l'algorithme de Fox–Li saturé ne peut pas représenter le processus physique de construction d'un mode stationnaire dans un laser. En effet, l'ajout de la saturation dans le modèle ne permet plus de garantir que l'algorithme convergera vers un mode revenant égal à une phase près après un aller–retour dans la cavité. À partir de là, il faut aban-

donner l'idée de pouvoir construire un algorithme basé sur les équations stationnaires du laser et qui puisse en même temps simuler l'évolution physique d'une distribution de champ au cours du temps à l'intérieur de la cavité. Le mieux que l'on puisse faire est d'élaborer un algorithme qui à partir d'une distribution de champ donnée converge bien vers un état stationnaire possible du laser, sans preuve rigoureuse que cet état stationnaire corresponde effectivement à l'état que le laser choisira expérimentalement. Pour cela, nous allons être amené à forcer la convergence de l'algorithme en faisant interférer le champ avec lui-même après un aller–retour dans la cavité.

Interférences du champ avec lui-meme

Une méthode simple pour forcer la convergence de l'algorithme de Fox–Li saturé est de faire interférer le champ avec lui-même après un aller–retour dans la cavité et ainsi définir le nouveau champ à propager. Si on note toujours $\mathbf{M}_{cav}$ l'opérateur non–linéaire représentant l'action de la cavité avec gain saturé sur un champ u_n, on définit u_{n+1} par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + e^{\mathrm{i}\theta}\mathbf{M}_{cav}u_n\right), \tag{2.36}$$

où θ est un paramètre libre qui va permettre de faire interférer les deux distributions avec une phase relative particulière permettant d'orienter la sélection d'un mode d'ordre donné.

Nous rappelons que nous cherchons un état stationnaire u de $\mathbf{M}_{cav}$ vérifiant :

$$\mathbf{M}_{cav}u = e^{\mathrm{i}\Phi}u, \tag{2.37}$$

où Φ est une phase arbitraire qui contraindra ensuite les valeurs possibles de la longueur d'onde λ_0 de sorte que $\Phi + 2k(L + (n-1)d)$ soit un multiple de 2π.

Comme dans le cas linéaire les modes de la cavité vide jouent un rôle très important et on peut s'attendre à ce que les états stationnaires vérifient toujours $\Phi \simeq 2(p+1)\Psi_G$ avec une très bonne approximation. On voit alors que si on choisit $\theta = -2(p+1)\Psi_G$, toute solution stationnaire d'ordre p de l'opérateur $\mathbf{M}_{cav}$ est également un point fixe de l'équation (2.36). L'opération d'interférence introduite s'avère donc totalement transparente lorsque l'état stationnaire recherché est trouvé, ce qui est tout à fait indispensable à la cohérence de la méthode. En pratique, on observe que le choix de $\theta = -2(p+1)\Psi_G$ permet bien à la méthode de converger et conduit à l'émergence d'un mode stationnaire d'ordre p. Nous sommes ainsi capables de construire tous les états stationnaires du laser ayant suffisamment de gain pour émerger en choisissant différentes valeurs du paramètre p.

L'inconvénient de devoir fixer la valeur de θ à l'avance est que si on ne choisit pas une valeur correspondant rigoureusement à l'opposé de la phase Φ d'un état stationnaire possible, l'algorithme peut converger vers un mode non physique. Par exemple, si on choisit $\theta = -\Psi_G + \delta\phi$ même avec $\delta\phi$ petit, l'opération d'interférence (2.36) n'est pas totalement transparente et l'algorithme va converger vers un mode fondamental gaussien ayant une puissance inférieure à celle du véritable état stationnaire à cause des interférences destructives causées par la légère déviation de phase $\delta\phi$.

Une solution à ce problème est de calculer θ à chaque itération de l'algorithme tel qu'il

maximise la cohérence entre les termes u_n et $e^{\mathrm{i}\theta}\mathbf{M}_{cav}u_n$, en tendant vers $-\Phi$ lorsque u_n tend vers un état stationnaire u vérifiant (2.37). À chaque itération de l'algorithme, nous choisissons la valeur θ_n de θ qui maximise la fonction suivante :

$$\mathcal{E}_n(\theta) = \frac{1}{2}\int \left| |u_n|^2 + e^{\mathrm{i}\theta} u_n^* \mathbf{M}_{cav} u_n \right| . \tag{2.38}$$

Lorsque u_n tend vers un état stationnaire u, on a :

$$\mathcal{E}_n(\theta) \longrightarrow \int |u|^2 \left| \frac{1 + e^{\mathrm{i}(\theta+\Phi)}}{2} \right|,$$

qui est bien maximisée pour $\theta_\infty = -\Phi\,[2\pi]$. On a alors $\mathcal{E}_n(\theta_\infty) = \int |u|^2$ qui représente l'énergie du mode stationnaire u.

Cette méthode d'auto-détermination de θ à chaque nouvelle itération est extrêmement sensible au mode utilisé en tant que condition initiale. Il n'y a donc aucun sens à utiliser une distribution initiale aléatoire comme pour l'algorithme linéaire. Cependant, il paraît être un bon choix physique de prendre comme condition initiale le mode propre de la cavité avec gain linéaire qui possède la valeur propre la plus grande. Grâce à notre nouvel algorithme, nous allons être capable de voir comment la saturation du gain transforme très progressivement le mode propre favorisé dans le régime linéaire, l'évolution du profil transverse étant bien stabilisé par l'effet d'auto-interférence du mode. Nous avons bien conscience que l'ajout de cet effet d'interférence dans la simulation ainsi que le choix de la distribution initiale relèvent d'une recette algorithmique *ad hoc*, et nous devrons attendre le chapitre 3 pour avoir une confirmation expérimentale de la procédure de calcul d'état stationnaire que nous venons de définir.

2.3.2 Calcul de profils transverses dans le cas monomode

Nous proposons ici d'utiliser l'algorithme de Fox–Li adapté avec l'interférence du champ avec lui-même afin de calculer les profils transverses stationnaires dans différentes configurations de pompage et de dégénérescence, en nous limitant toutefois au cas d'un seul mode transverse saturant le gain. Nous montrerons que le choix du mode initial conditionne totalement la convergence de l'algorithme avec gain saturé vers un mode stationnaire donné. Dans la situation de cavité non–dégénérée, nous verrons que l'algorithme converge toujours vers des modes propres d'ordre unique de la cavité vide. De plus, dans des situations de pompage gros, nous mettrons en évidence le fait que le mode propre de valeur propre la plus grande dans le régime linéaire n'est pas nécessairement celui qui extrait le plus de puissance du laser. Cette observation motivera d'ailleurs l'étude d'états stationnaires composés de plusieurs modes transverses dans la dernière partie de ce chapitre. Nous étudierons ensuite le cas d'une dégénérescence exacte et montrerons en quoi les prédictions de l'algorithme de Fox–Li linéaire sont insuffisantes pour décrire les modes transverses observés après la saturation du gain. Enfin, nous reviendrons sur une zone de dégénérescence particulière que nous comparerons au cas d'une cavité avec gain linéaire, et montrerons qu'une situation de dégénérescence peut conduire à une diminution de la puissance totale du

laser, ce qui est assez contre-intuitif.

Situation non–dégénérée

L'ajout de l'interférence du champ avec lui même sur un aller–retour dans l'algorithme de Fox–Li entraîne une convergence vers un mode dépendant fortement de la distribution initiale de champ choisie. En utilisant comme conditions initiales des modes propres de la cavité vide d'ordres différents, on peut voir que chacun de ces modes donne naissance à un état stationnaire différent. Dans le cas d'une cavité non–dégénérée, les modes stationnaires obtenus présentent un excellent accord avec les modes propres de la cavité vide, comme c'était le cas dans le régime de gain linéaire. Dans le cas d'une pompe alignée sur l'axe optique, on observe sur la figure 2.28 la corrélation entre les modes Laguerre–Gauss u_0 utilisés comme conditions initiales et les modes u_{FL} calculés par l'algorithme de Fox–Li avec saturation du gain. La puissance de pompe est fixée à deux fois le seuil pour chacun des modes considérés, la taille de la pompe est $w_p = w_0$ et l'intensité de saturation est donnée par $I_{sat} = 1{,}25\,10^7\ \mathrm{W.m^{-2}}$ correspondant à celle d'un milieu actif Nd:YAG pompé à 808 nm et émettant à 1064 nm.

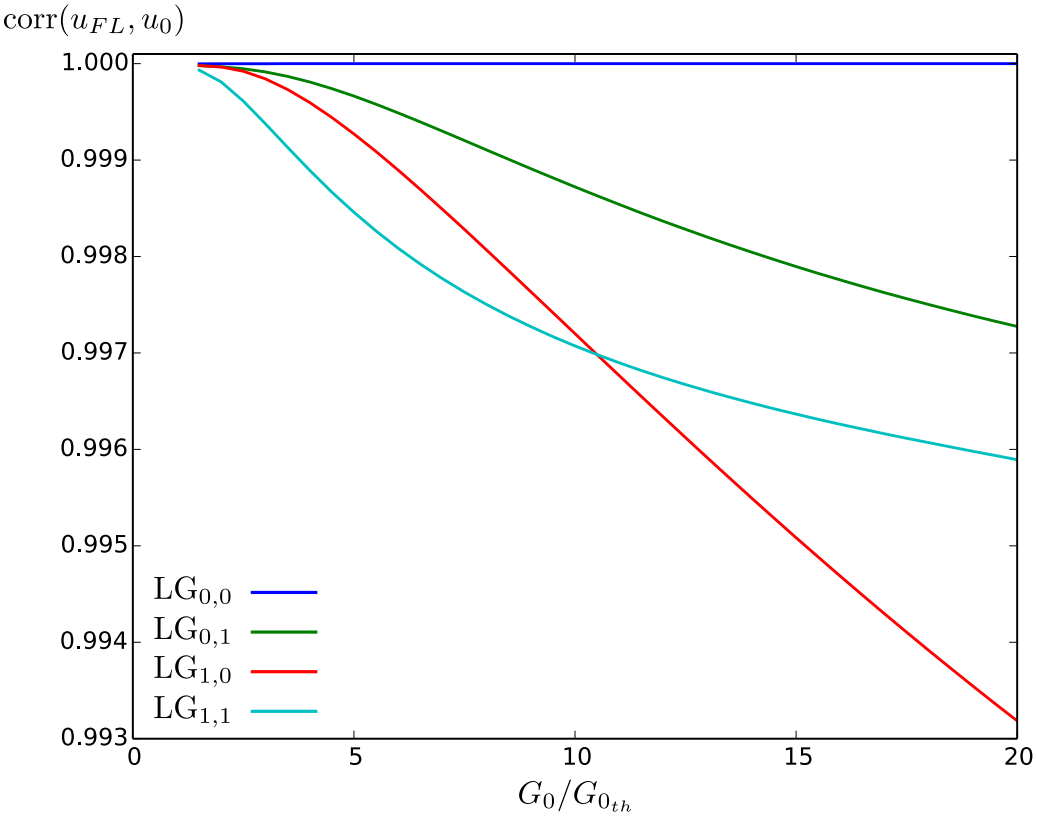


FIGURE 2.28 – Corrélation entre les modes calculés par Fox–Li et les modes LG utilisés comme conditions initiales de l'algorithme en fonction de la puissance de pompe.

Même pour une puissance de pompe correspondant à 20 fois la puissance de seuil, la corrélation entre le mode stationnaire et le mode propre de la cavité vide est supérieure à 99%.

Cette corrélation est bien meilleure que celle obtenue précédemment pour un gain linéaire (voir figure 2.17). Ceci s'explique par le fait que les pertes sont très faibles ($R = 0{,}98$) et qu'en régime stationnaire le gain saturé compense les pertes et est donc plus faible que le gain linéaire.

En pratique, afin de calculer l'état stationnaire que l'on suppose être sélectionné par le laser, nous utiliserons toujours comme condition initiale le mode propre de valeur propre la plus grande calculé par l'algorithme de Fox–Li linéaire. Dans le cas où la pompe est alignée sur l'axe optique de la cavité, on voit d'après la figure 2.29 que pour une puissance de pompe donnée le mode fondamental gaussien a toujours la valeur propre la plus grande, quelle que soit la taille de la pompe.

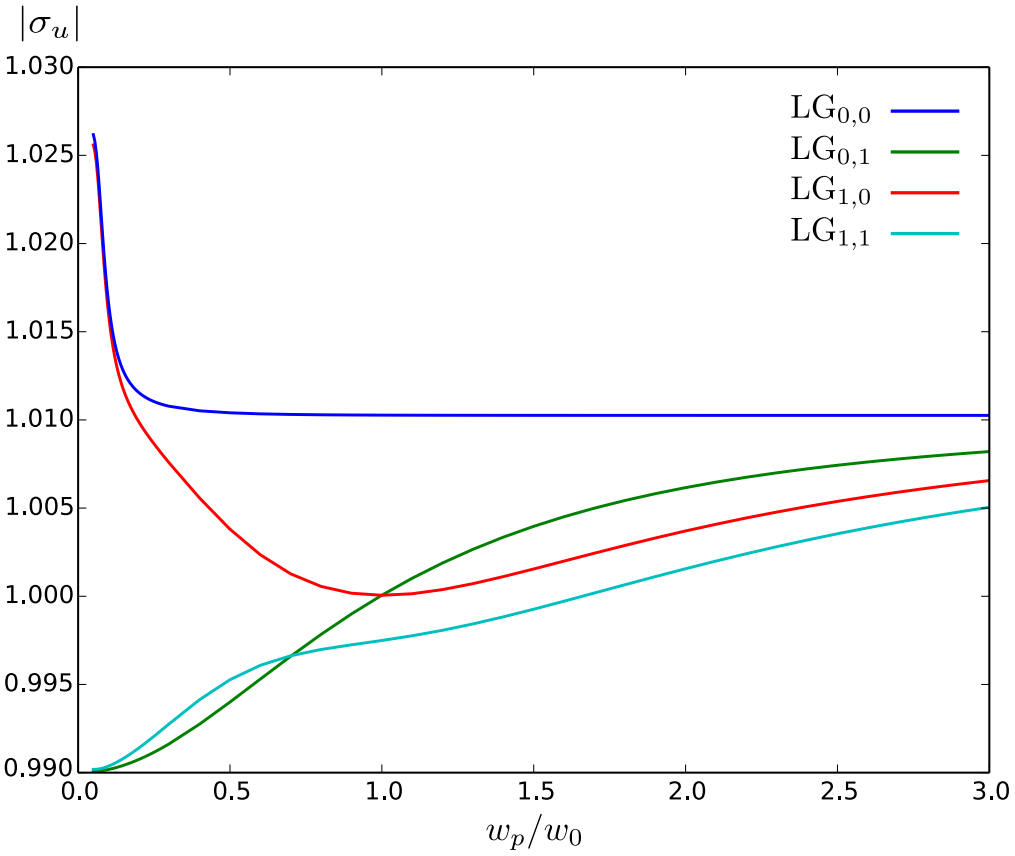


FIGURE 2.29 – Module des valeurs propres de différents modes LG en fonction de la taille de pompe, la puissance de pompe étant fixée à 2 fois le seuil pour le mode $LG_{0,0}$.

La puissance de pompe étant fixée à 2 fois le seuil du mode fondamental gaussien, seul ce mode ainsi que le mode $LG_{1,0}$ peuvent potentiellement laser lorsque la pompe est petite. Cependant, d'après notre critère de sélection, le mode fondamental va saturer le gain en premier et c'est le seul que l'on observera en pratique. En augmentant la taille de la pompe, les valeurs propres des modes $LG_{0,1}$ et $LG_{1,1}$ possédant un vortex en leur centre (voir figure 1.13) finissent par obtenir une valeur propre plus grande que un, bien que toujours inférieure à la valeur propre du mode fondamental. Ces modes ne seront donc jamais utilisés pour démarrer l'algorithme de Fox–Li saturé, et nous ne sommes donc pas censés pouvoir les observer en pratique dans une

telle configuration de pompage.

Cependant, si on s'intéresse à la puissance de sortie des états stationnaires associés à ces différents modes, on constate que lorsque la taille de la pompe est suffisamment importante, ce sont les modes d'ordres les plus élevés qui extraient le plus de puissance du milieu actif. Les puissances de sortie associées aux modes Laguerre–Gauss précédents en fonction de la taille de la pompe sont représentées sur la figure 2.30. À titre de vérification, les puissances de sorties calculées par la méthode décrite dans la section 2.1.2 présentent seulement 2% d'erreur en moyenne par rapport aux valeurs calculées par l'algorithme de Fox–Li saturé.

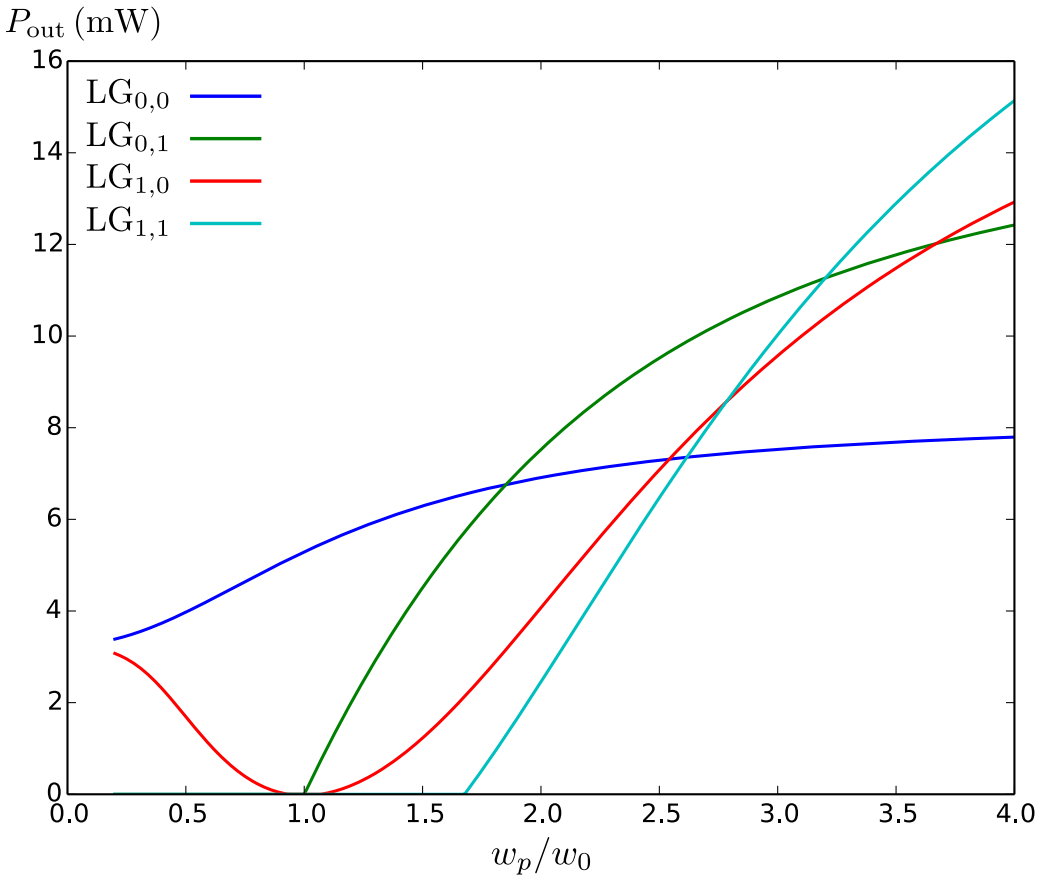


FIGURE 2.30 – Puissance de sortie de différents modes LG en fonction de la taille de la pompe, la puissance de pompe étant fixée à 2 fois le seuil pour le mode $\text{LG}_{0,0}$.

La procédure de calcul des états stationnaires d'un laser telle que nous l'avons décrite ne permet donc pas de sélectionner des modes d'ordre élevé en situation de pompage gros, qui exploiteraient pourtant mieux le milieu actif en régime saturé. Nous résoudrons ce paradoxe en introduisant plus loin des états stationnaires constitués de plusieurs structures transverses portées par des modes longitudinaux différents. Ceci permettra d'exploiter les zones du gain non saturées par le premier mode ayant atteint son état stationnaire. Évidemment, l'état stationnaire des modes ayant commencé à laser pourra être perturbé par la naissance d'un nouveau mode commençant son oscillation, conduisant à un nouvel état stationnaire à plusieurs modes. Cette

vision des choses sera difficile à confirmer rigoureusement de manière expérimentale. En revanche, il sera facile de montrer expérimentalement qu'une situation de pompage gros et aligné sur l'axe optique de la cavité n'entraînera jamais l'observation d'un mode ou d'une superposition de modes possédant un vortex central.

Situation dégénérée

Précédemment, nous avons évoqué le fait que la maximisation de la valeur propre d'un mode propre dans le régime linéaire va dans le sens de la minimisation de la taille de la distribution de champ dans le milieu actif, localisée autour du maximum du gain non-saturé. Cependant, l'utilisation optimale de la pompe dans le régime saturé va au contraire dans le sens d'un élargissement du mode de manière à recouvrir au mieux la distribution du gain. Afin d'illustrer les différences entre les modes géométriques prédits par l'analyse linéaire et ceux calculés par l'algorithme de Fox–Li saturé, nous proposons d'étudier les modes obtenus à la dégénérescence $L = R_c/2$ dans trois situations de pompage différentes.

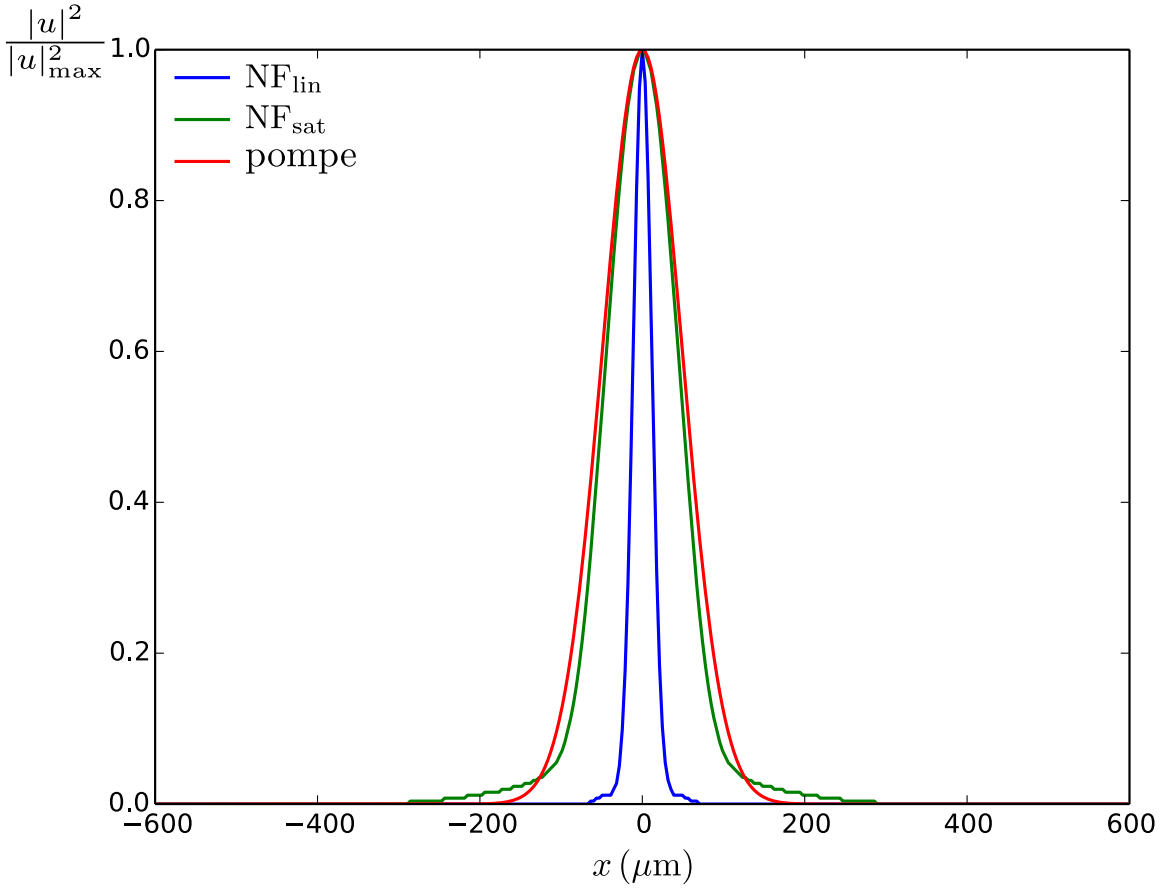


FIGURE 2.31 – Profils transverses en $L = R_c/2$ du mode linéaire ($\mathrm{NF}_{\mathrm{lin}}$), du mode saturé ($\mathrm{NF}_{\mathrm{sat}}$) et du profil de pompe alignée de taille $w_p = 0{,}75\, w_0$.

La première situation que nous considérons est celle d'une pompe alignée sur l'axe optique

de la cavité, de taille $w_p = 0{,}75\,w_0$. La figure 2.31 représente une coupe selon l'axe x des profils transverses de la pompe, du mode linéaire et du mode saturé observés dans le milieu actif. On constate effectivement que le profil du mode linéaire est beaucoup plus petit que celui du mode saturé, qui tend à reproduire la pompe bien que n'étant pas parfaitement gaussien. En champ lointain, ceci se traduira par l'observation d'un faible nombre d'anneaux dans le profil du mode saturé en comparaison du mode linéaire déjà représenté sur la figure 2.21.

La seconde situation que nous considérons est celle d'une pompe désalignée par rapport à l'axe optique d'une distance $x_p = 2\,w_0$, toujours de taille $w_p = 0{,}75\,w_0$. Les profils transverses obtenus sont cette fois-ci représentés sur la figure 2.32. On constate encore une fois un élargissement du mode saturé par rapport au mode linéaire, mais ne pouvant atteindre la taille du profil de pompe des pics secondaires naissent de part et d'autre du pic principal. Il est alors plus difficile de trouver une distribution initiale permettant de décrire le mode saturé en terme de mode géométrique.

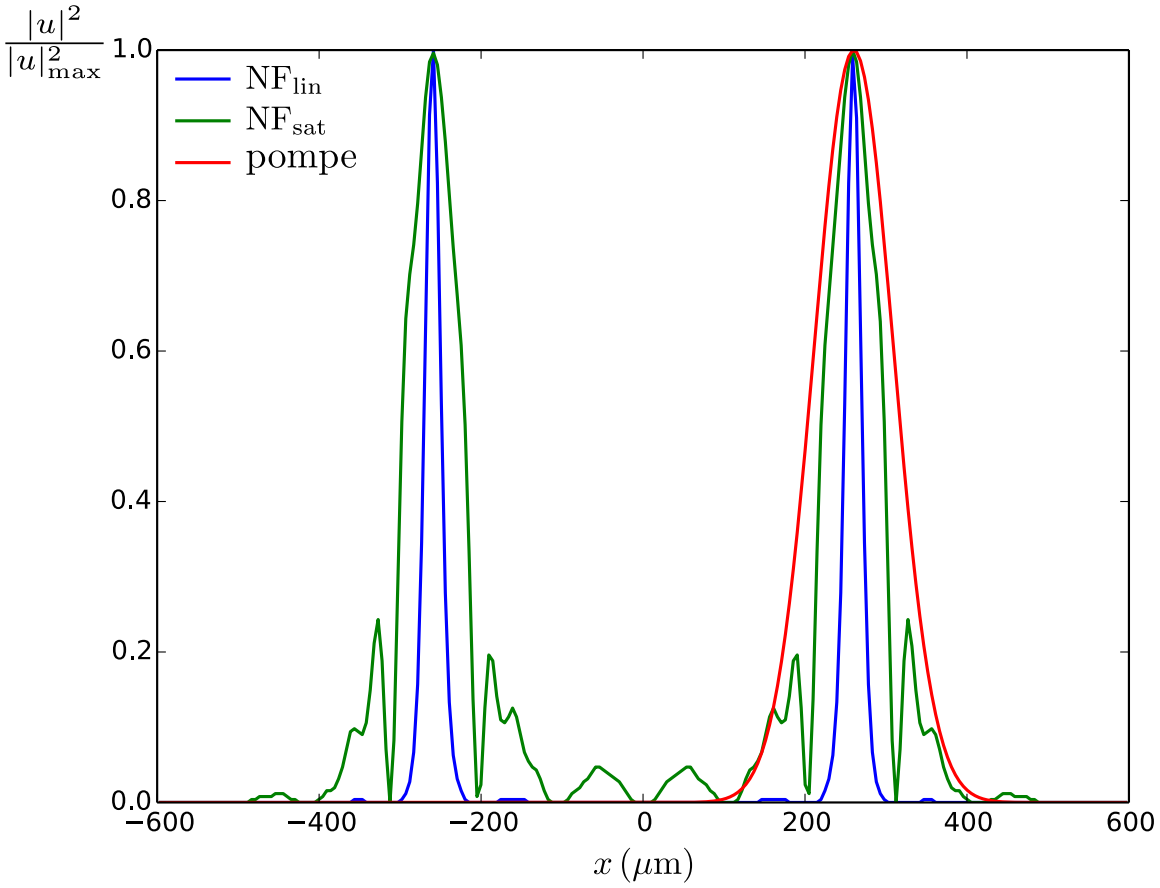


FIGURE 2.32 – Profils transverses en $L = R_c/2$ du mode linéaire ($\mathrm{NF}_{\mathrm{lin}}$), du mode saturé ($\mathrm{NF}_{\mathrm{sat}}$) et du profil de pompe de taille $w_p = 0{,}75\,w_0$ désalignée avec $x_p = 2\,w_0$.

Enfin, nous considérons une dernière situation de pompage gros et désaligné avec $w_p = 1{,}5\,w_0$ et $x_p = 3\,w_0$. Les profils transverses associés sont représentés par la figure 2.33. Comme décrit précédemment, le mode linéaire est constitué de deux réseaux de franges d'interférences dont un est recouvert par le profil de pompe. Cette fois-ci, le mode saturé n'est pas tellement différent si

ce n'est que l'intensité des franges est rééquilibrée de manière à ce que le gain soit saturé partout le mieux possible.

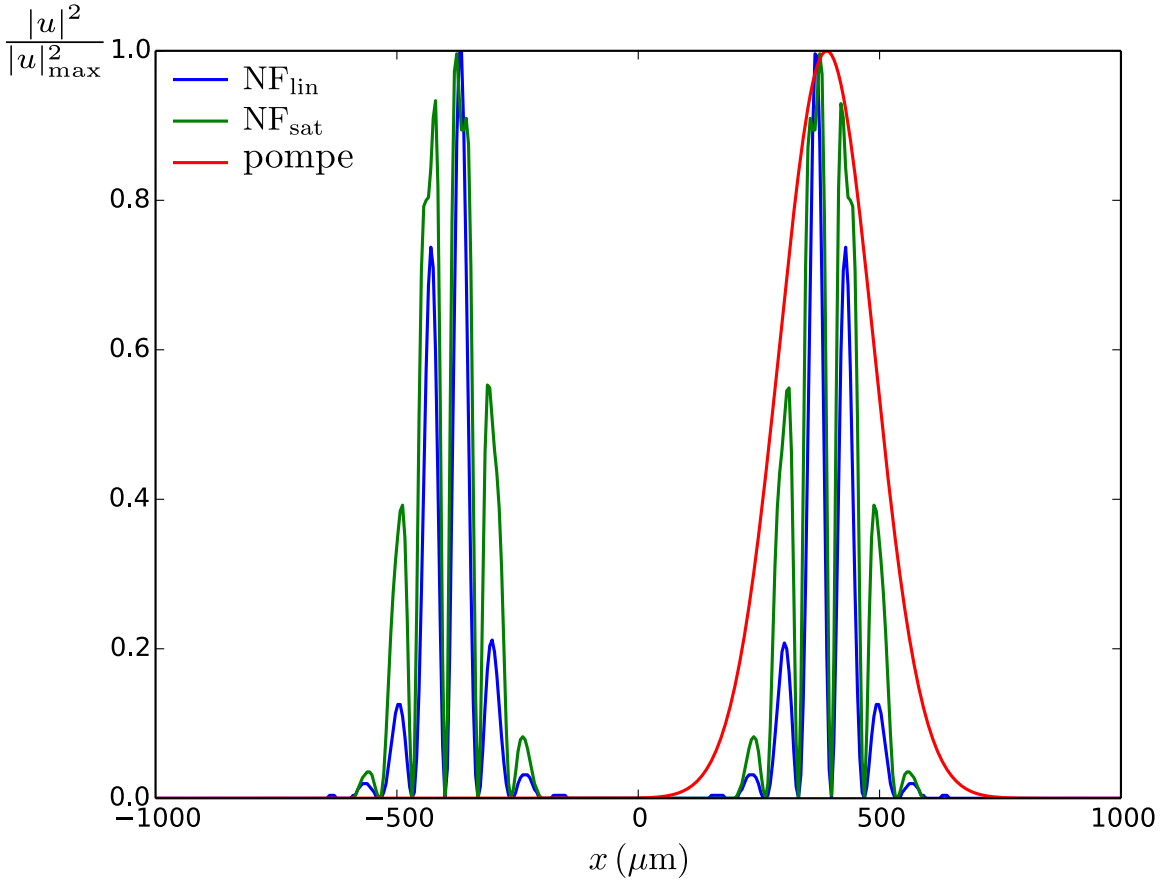


FIGURE 2.33 – Profils transverses en $L = R_c/2$ du mode linéaire (NF$_{\text{lin}}$), du mode saturé (NF$_{\text{sat}}$) et du profil de pompe de taille $w_p = 1{,}5\,w_0$ désalignée avec $x_p = 3\,w_0$.

Ces illustrations rapides mettent en évidence le fait que l'étude du régime linéaire est insuffisante pour décrire dans le détail les modes stationnaires observés à dégénérescence. La description de ces modes en termes de modes géométriques simples devient alors assez qualitative. Dans ce cas, l'utilisation de l'équation (2.14) pour calculer la puissance du mode stationnaire à partir du profil obtenu avec le modèle linéaire donne de très mauvais résultats. Nous allons voir que dans une situation de dégénérescence partielle, l'utilisation du régime linéaire pour prédire le mode que l'on observera après saturation est encore bien plus hasardeuse.

Étude d'une zone de dégénérescence

Nous allons comparer ici les prédictions faites par les algorithmes de Fox–Li linéaire et saturé autour de la zone de dégénérescence $L = R_c/2$, en nous limitant au cas où la pompe est alignée sur l'axe optique de la cavité. Dans chaque simulation, la puissance de pompe est fixée par $G_0 = 4\,G_{0_{th}}$, où on rappelle que dans le cas aligné $G_{0_{th}}$ est la valeur minimale du gain nécessaire

pour exciter le mode fondamental gaussien.

La figure 2.34 représente l'évolution de la valeur propre du mode calculé par l'algorithme de Fox–Li linéaire dans la zone de dégénérescence $L = Rc/2$, pour différentes tailles de pompe w_p.

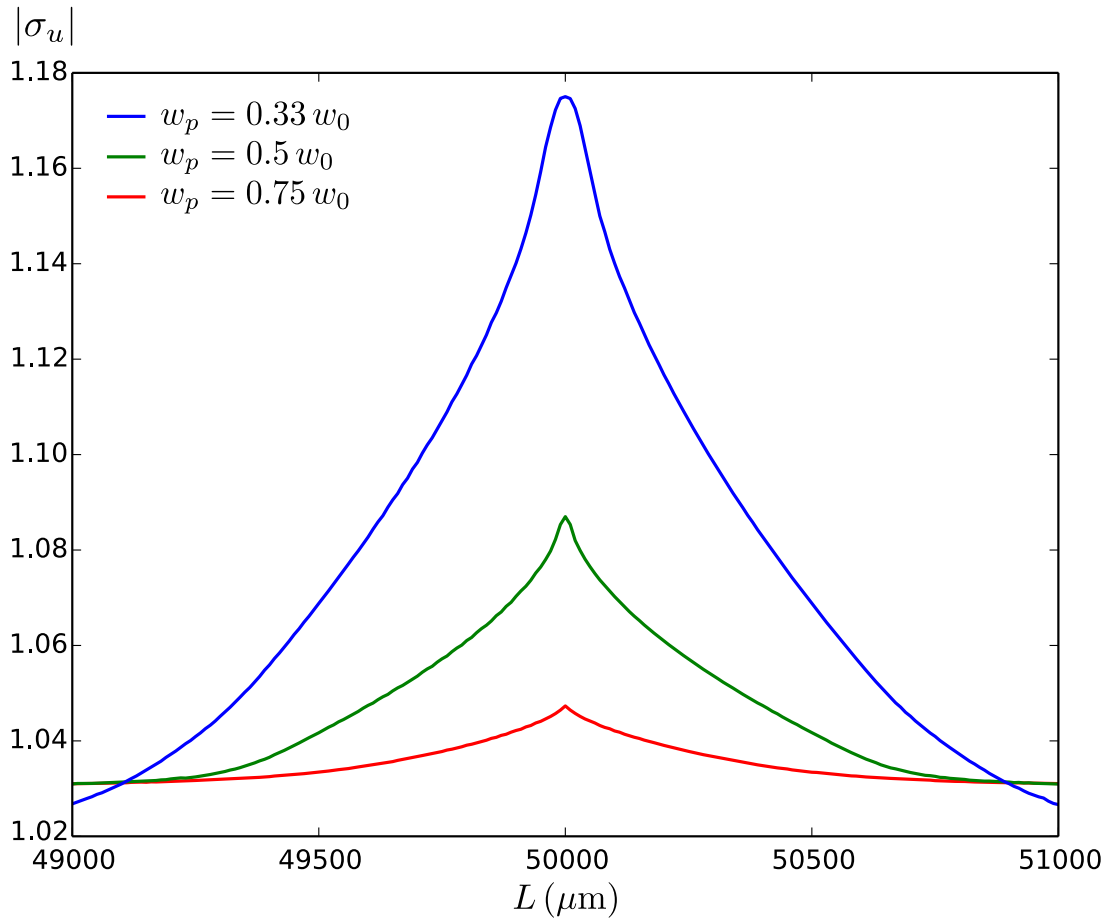


FIGURE 2.34 – Évolution de la valeur propre du mode calculé par Fox–Li linéaire autour de la dégénérescence $L = R_c/2$ pour une pompe alignée de taille w_p.

Le seuil d'oscillation est défini tel que la valeur propre du mode fondamental gaussien soit de module un. Pour une puissance de pompe 4 fois supérieure au seuil, la valeur de l'intégrale de recouvrement mode–gain est 4 fois plus grande que sa valeur au seuil. D'après l'équation (2.13), la valeur propre du mode fondamental gaussien est alors telle que $|\sigma_u| = 4 - 3\sqrt{R} \simeq 1{,}03$. C'est exactement la valeur obtenue en sortie de dégénérescence dans les situations de la figure 2.34 où $w_p = 0{,}5\,w_0$ et $w_p = 0{,}75\,w_0$. En revanche, dans le cas où $w_p = 0{,}33\,w_0$, la zone de dégénérescence possède une extension plus grande, et il existe des régions dans lesquelles la valeur propre du mode dégénéré est plus petite que celle du mode fondamental. Les modes ayant un tel comportement sont les modes quasi–LG et quasi–IG introduits précédemment. Une situation de dégénérescence partielle peut donc représenter une contrainte pour le laser, qui doit alors fonctionner dans une situation non optimale. Nous allons voir que lorsque l'on rajoute la saturation, ceci se traduit par une diminution de la puissance de sortie du laser.

Pour cela, nous avons représenté sur la figure 2.35 l'évolution de la puissance de sortie du laser en fonction de la longueur de la cavité dans les mêmes situations de pompage que précédemment.

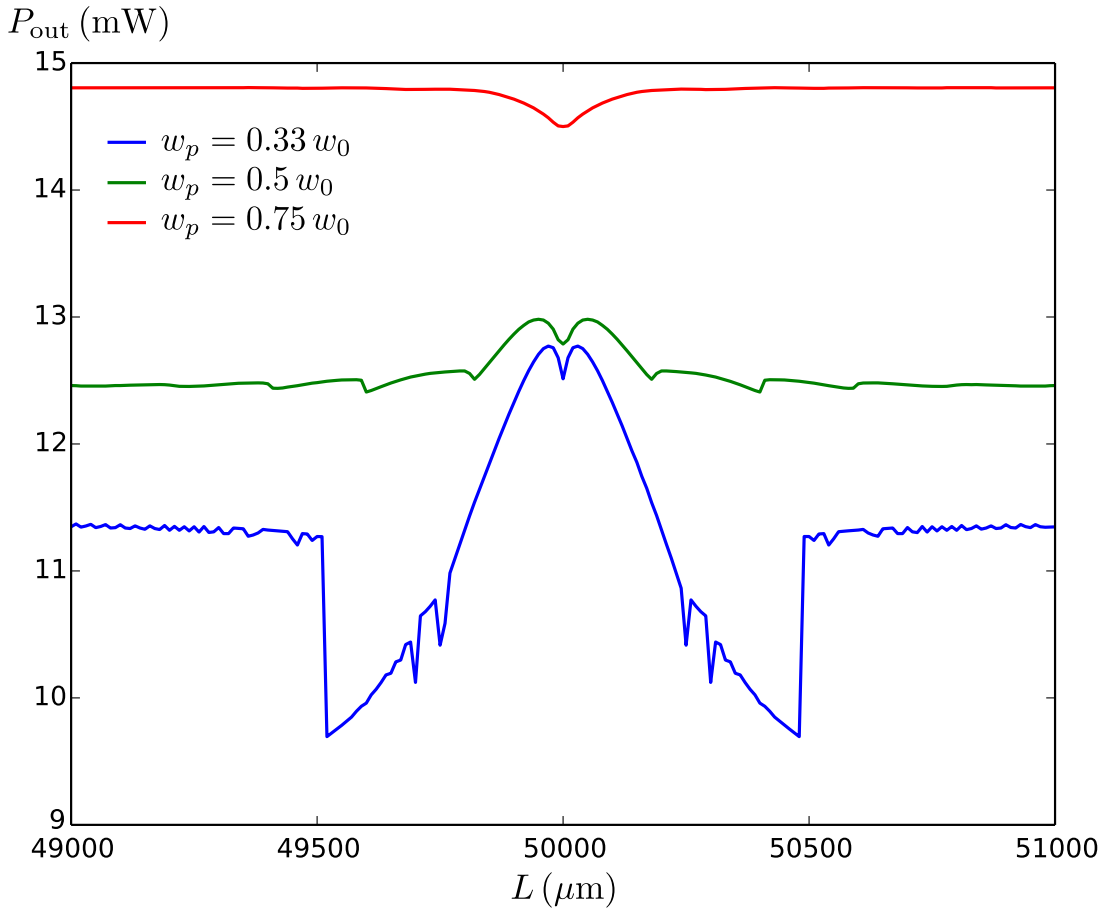
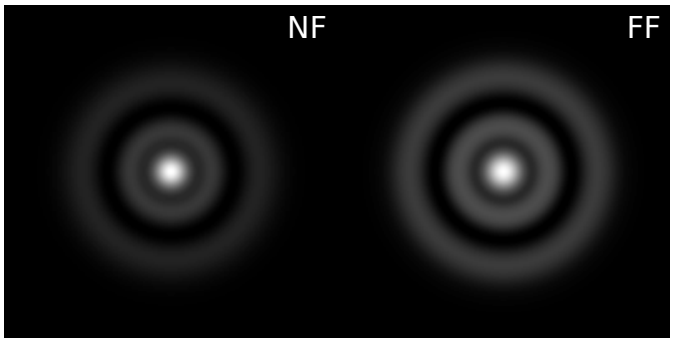


FIGURE 2.35 – Évolution de la puissance de sortie du laser autour de la dégénérescence $L = R_c/2$ pour une pompe alignée de taille w_p.

La première chose que l'on constate est que les zones de dégénérescence avec saturation sont plus étroites que dans le cas linéaire. Ceci était prévisible étant donné que nous avions déjà remarqué précédemment que dans le régime linéaire, la largeur des zones de dégénérescence dépend de la puissance de pompe G_0. Dans le régime stationnaire, le gain saturé compense les pertes et est donc plus petit que le gain linéaire. On s'attend donc à la fois à ce que les zones de dégénérescence avec saturation soient moins larges, mais également qu'elles dépendent uniquement des pertes R et pas de G_0. Ceci est étudié plus précisément dans l'annexe A.

La seconde chose importante que l'on observe est la baisse importante de la puissance du laser dans les zones de dégénérescence partielle dans le cas du pompage le plus petit avec $w_p = 0{,}33\,w_0$. Ces zones correspondent précisément à l'observation de modes quasi–LG que l'on a représenté sur la figure 2.36. Dans le cas où la pompe est désalignée, on note également une baisse de puissance dans une zone correspondant à l'observation de modes quasi–IG.

Dans les situations de dégénérescence, nous avons donc montré que la prédiction du régime



$LG_{0,0}$	$LG_{2,0}$	$LG_{4,0}$	$LG_{6,0}$	autres
5.6 %	88.5 %	4.9 %	0.6 %	0.4 %

FIGURE 2.36 – Profils transverses en intensité sur le miroir plan (NF) et sur le miroir sphérique (FF) d'un mode quasi–LG saturé observé en $L = 49550\,\mu$m et $L = 50450\,\mu$m pour $w_p = 0{,}33\,w_0$.

linéaire n'est pas suffisante pour décrire les observations faites en régime stationnaire. En effet, dans le cas présent, la zone de dégénérescence partielle d'observation des modes quasi-LG en régime linéaire devient une zone non–dégénérée dès lors que l'on introduit la saturation. De plus, la zone d'observation de modes quasi–LG en régime stationnaire correspond à une zone d'observation de modes géométriques dans le régime linéaire.

Enfin, on observe un dernier comportement curieux dans le cas de la dégénérescence exacte en régime stationnaire. En effet, alors que la valeur propre du mode propre du régime linéaire est toujours maximale en ce point, la puissance extraite par le laser en régime stationnaire subit une légère baisse. Ceci est dû au fait qu'à dégénérescence exacte, le mode est le plus petit possible dans le milieu actif, parfois même un peu plus petit que le profil de pompe. Or, le mode qui maximise la puissance de sortie du laser doit avoir en champ proche une taille légèrement plus grosse que la pompe, ce qui est obtenu pour un leger écart de la longueur de la cavité par rapport à la dégénérescence exacte.

Dans cette partie, nous nous sommes limités à des situations de pompage petit où $w_p < w_0$ de manière à ce qu'un mode transverse unique suffise à saturer entièrement le profil de gain. Dans la partie suivante, nous allons développer une méthode permettant de construire des états stationnaires comportant plusieurs modes transverses, qui sont nécessaires dans les situations de pompage gros où $w_p > w_0$.

2.3.3 Calcul de profils transverses multimodes

Jusqu'à présent, nous avons considéré uniquement des états stationnaires constitués d'un unique mode transverse. Le fait qu'une ou plusieurs fréquences puissent être associées à un tel mode transverse n'entre pas en considération dans notre modélisation et ne pourra jamais être pris en compte par une méthode de type Fox–Li. La seule chose que l'on peut dire, et qui a été montrée au chapitre 1, est que l'ensemble des fréquences possibles pour un mode transverse est discret et dépend de sa phase de Gouy sur un aller–retour. Pour simplifier, nous supposerons que chaque mode transverse considéré est associé à une fréquence unique. Dans un premier temps,

nous montrerons que certaines situations de pompage nécessitent effectivement d'introduire des états stationnaires à plusieurs modes transverses. En effet, dans le cas où le gain saturé par le premier mode transverse permet toujours à l'algorithme de Fox–Li linéaire de trouver un mode propre de valeur propre supérieure à 1, on ne peut pas se satisfaire d'un état stationnaire à un mode. Nous présenterons donc une méthode permettant d'introduire successivement les modes transverses nécessaires à la saturation complète du gain. Dans un second temps, nous appliquerons notre méthode à des situations de cavités non–dégénérées et vérifierons que les situations de pompage petit ne nécessitent la plupart du temps qu'un mode transverse pour leur description. Nous présenterons également des combinaisons de modes transverses que l'on peut observer dans différentes situations de pompage gros. Pour terminer, nous appliquerons notre méthode aux situations de cavités dégénérées et montrerons que dans certains cas une modélisation multimode transverse s'avère également nécessaire.

Construction successive des modes transverses

Afin de développer un algorithme de Fox–Li intégrant la notion de plusieurs modes transverses évoluant simultanément, nous devons faire deux hypothèses essentielles. La première hypothèse porte sur la manière dont les modes présents partagent le milieu à gain, et la seconde sur la nécessité ou pas d'introduire un nouveau mode dans la simulation, et lequel.

Concernant la première hypothèse, le plus simple et le plus raisonnable est de supposer que le gain agit de manière totalement symétrique vis-à-vis de tous les modes présents. Si on note (u_i), $i \in \{1,\ldots,n\}$, l'ensemble des modes présents dans le laser, nous généralisons l'expression du gain saturé (2.34) de la manière suivante :

$$\tilde{g}(x,y) = \frac{\tilde{g}_0(x,y)}{1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} |u_i(x,y)|^2}{u_{sat}^2}}. \tag{2.39}$$

L'expression (2.39) est similaire à l'expression du gain utilisé par Kubodera *et coll.* [41] dans le cadre d'une modélisation multimode.

Supposons que la simulation ait calculé un état stationnaire constitué de n modes (u_i) et que nous devions décider s'il est nécessaire d'ajouter un mode ou non. Pour cela, nous utilisons l'algorithme de Fox–Li linéaire avec l'expression du gain saturé (2.39) ne faisant pas intervenir le mode u_{n+1} recherché. Lorsque l'algorithme converge, le mode propre u_{n+1} calculé possède une valeur propre σ_u. Si $|\sigma_u| \geq 1$, alors le mode u_{n+1} sera utilisé, ainsi que les n modes précédents, comme point de départ d'un nouvel algorithme de Fox–Li à $n+1$ modes. Si $|\sigma_u| < 1$, alors l'état stationnaire à n modes précédent est considéré comme l'état stationnaire du laser que l'on devra confronter à l'expérience.

Un algorithme de Fox–Li à n modes est équivalent à n algorithmes de Fox–Li à un mode à la différence que ceux-ci partagent le gain à travers l'expression (2.39). Les n modes introduits comme conditions initiales de l'algorithme sont donc susceptibles d'évoluer, tout comme dans l'algorithme à un mode. Lorsqu'un état stationnaire à n modes est trouvé et qu'on y ajoute un nouveau mode, les intensités et les profils de tous les modes sont remis en jeu.

Physiquement, nous conservons la même hypothèse que précédemment à savoir que c'est le régime linéaire qui va déterminer l'apparition des différents modes et leurs profils initiaux avant l'intervention de la saturation du gain. Évidemment, il est tout à fait possible de développer des méthodes alternatives conduisant à des résultats différents, mais nous montrerons au chapitre 3 que nous avons de bonnes raisons de penser que les différents modes transverses constituant l'état stationnaire apparaissent bien dans l'ordre que nous supposons.

Enfin, des modes transverses d'ordres différents seront nécessairement associés à des fréquences différentes dans la cavité. Ainsi, le profil transverse que l'on observera en sortie de laser en pratique sera la superposition incohérente de l'ensemble des modes transverses portés par les différentes fréquences, ceci étant dû à un moyennage dans le temps par la caméra effectuant la mesure. Les profils transverses multimodes que nous présenterons désormais seront donc obtenus en prenant la somme des intensités des différents modes transverses constituant le mode stationnaire considéré.

Situation non–dégénérée

Nous considérons ici la même situation de non–dégénérescence que précédemment, à savoir une longueur de cavité $L = 4\,\text{cm}$ pour un rayon de courbure du miroir de sortie $R_c = 10\,\text{cm}$. Dans un premier temps, nous souhaitons vérifier si une situation de pompage petit où $w_p < w_0$ entraîne bien la présence d'un unique mode transverse dans l'état stationnaire du laser. Nous définissons la puissance de pompe telle que $G_0 = 4G_{0_{th}}$ où $G_{0_{th}}$ correspond à la puissance nécessaire pour que le mode fondamental gaussien ait une valeur propre égale à un.

Dans le cas où la pompe est alignée sur l'axe optique de la cavité, le premier mode calculé par l'algorithme de Fox–Li multimode est le mode fondamental gaussien, et ce quelle que soit la taille de la pompe. Après saturation, le second mode de valeur propre la plus grande est encore le mode fondamental gaussien, mais sa valeur propre est plus petite que un, bien que très proche à 10^{-4} près. Afin de vérifier la robustesse du mode fondamental gaussien vis-à-vis de la présence d'autres profils transverses, nous avons effectué d'autres simulations dans lesquelles nous avons forcé le premier mode saturé à être un des modes $\text{LG}_{0,1}$, $\text{LG}_{1,0}$ ou $\text{LG}_{1,1}$, pour des tailles de pompe w_p comprises entre $0{,}33\,w_0$ et $0{,}75\,w_0$. Dans tous les cas, le second mode calculé par l'algorithme multimode est le mode fondamental gaussien. De plus, après application de l'algorithme avec les deux modes alors en compétition, un rééquilibrage des puissances s'opère menant à une puissance nulle pour les modes Laguerre–Gauss et à une puissance identique à la première simulation pour le mode fondamental gaussien.

Dans le cas où la pompe est désalignée par rapport l'axe optique de la cavité, le premier mode excité est toujours un mode de type $\text{IG}^e_{n,n}$ dont l'ordre dépend de la position x_p de la pompe. Dans la majorité des cas, lorsque qu'un des lobes principaux du mode $\text{IG}^e_{n,n}$ recouvre bien le profil de la pompe, on observe effectivement un mode transverse unique. Toutefois, il existe des zones de transitions dans lesquelles on peut voir coexister des modes $\text{IG}^e_{n,n}$ et $\text{IG}^e_{n+1,n+1}$. Même pour une taille de pompe $w_p = 0{,}75\,w_0$ ces zones de transitions sont assez étroites, de l'ordre de 10 à 15 μm sur la valeur de x_p. Nous avons représenté sur la figure 2.37 la superposition en intensité des deux modes Ince–Gauss obtenus lorsque $w_p = 0{,}75\,w_0$ et $x_p = 175\,\mu\text{m}$.

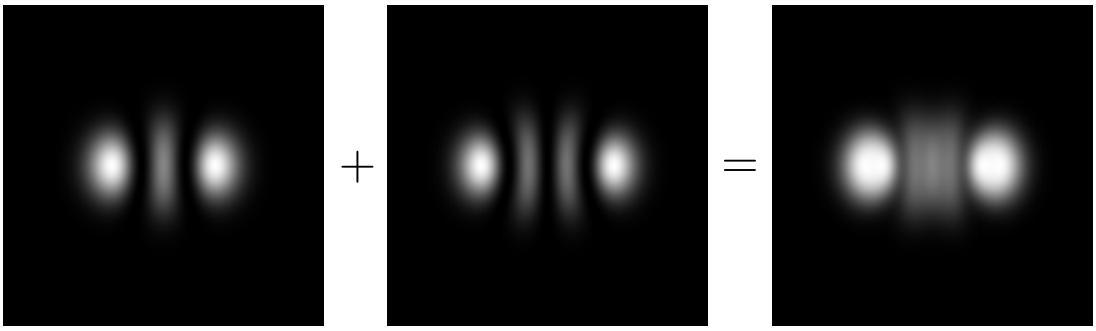


FIGURE 2.37 – Somme en intensité des modes $\mathrm{IG}^e_{2,2}$ et $\mathrm{IG}^e_{3,3}$ obtenus dans une zone de transition pour $w_p = 0{,}75\,w_0$ et $x_p = 175\,\mu$m, ainsi que les puissances de sortie associées.

Au milieu d'une zone de transition entre modes les puissances associées à chacun des modes sont équilibrées, tandis que lorsque x_p se rapproche de l'une des bornes de la zone, une des deux intensités diminue avant de s'annuler totalement.

Nous considérons maintenant une situation de pompage gros telle que $w_p = 2{,}5\,w_0$, la pompe étant à nouveau alignée sur l'axe optique de la cavité. Le premier mode prédit par la simulation est toujours le mode fondamental gaussien. Après saturation de la gaussienne, le second mode prédit par l'algorithme de Fox–Li linéaire est un mode $\mathrm{LG}^e_{0,3}$, comme le montre la figure 2.38.

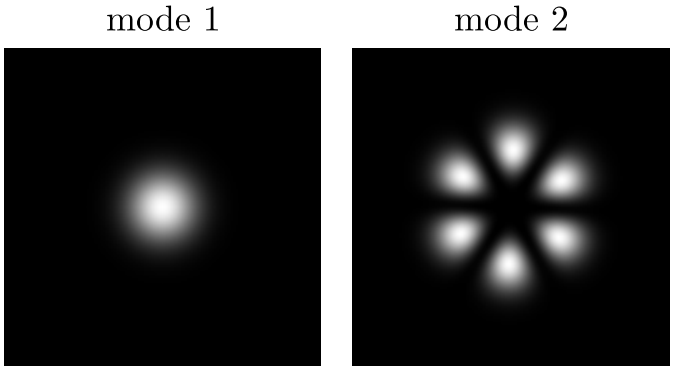


FIGURE 2.38 – Modes initiaux calculés par l'algorithme de Fox–Li multimode dans le cas d'une pompe alignée de taille $w_p = 2{,}5\,w_0$.

Le mode $\mathrm{LG}^e_{0,3}$ prédit par la simulation dépend en réalité de la distribution initiale aléatoire utilisée. En effet, toute rotation du mode $\mathrm{LG}^e_{0,3}$ autour de l'axe optique est un nouveau mode propre dont la valeur propre reste la même. En fonction de la distribution initiale de champ utilisée, on peut donc obtenir n'importe quelle rotation du mode $\mathrm{LG}^e_{0,3}$ autour de l'axe optique.

Après saturation de la gaussienne et du mode Laguerre–Gauss, la simulation transforme le mode $\mathrm{LG}^e_{0,3}$ en mode de type vortex $\mathrm{LG}^{\pm}_{0,3}$. D'un point de vue de l'intensité totale, la brisure de symétrie est donc corrigée grâce à la saturation du gain. Cependant, le fait que le vortex obtenu tourne dans un sens ou dans l'autre demeure aléatoire dans la simulation. Dans la réalité, on peut supposer que ce vortex d'ordre 3 n'existera jamais à une fréquence bien définie, mais

sera partagé entre deux modes $\mathrm{LG}^e_{0,3}$ et $\mathrm{LG}^o_{0,3}$ portés par des fréquences différentes. Le profil d'intensité résultant d'une telle combinaison de modes est représenté sur la figure 2.39.

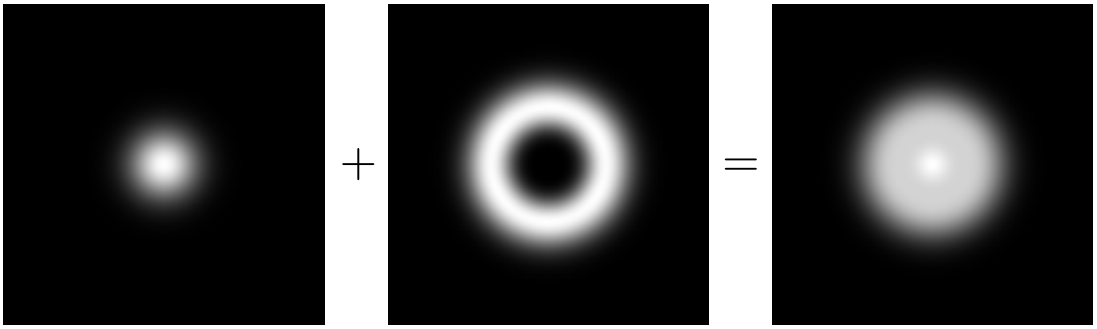


FIGURE 2.39 – Mode stationnaire calculé par l'algorithme de Fox–Li multimode dans le cas d'une pompe alignée de taille $w_p = 2{,}5\, w_0$.

Concernant la puissance de sortie de l'état stationnaire à deux modes, on remarque que celle-ci est de 43,3 mW, ce qui est légèrement supérieur à la puissance extraite par le réseau vortex tournants non physique de la figure 2.27 qui était de 42,5 mW pour la même taille de pompe. Ceci nous conforte dans le fait que la méthode de Fox–Li multimode que nous avons introduite nous conduit bien à un état stationnaire maximisant la puissance de sortie du laser.

Dans cette situation de pompage gros, nous avons comme précédemment essayé de vérifier la robustesse du mode obtenu lorsque l'on impose à la simulation de démarrer en utilisant un premier mode différent de la gaussienne. En utilisant les modes $\mathrm{LG}_{0,1}$, $\mathrm{LG}_{1,0}$ et $\mathrm{LG}_{1,1}$ comme points de départ de la simulation, on obtient cette fois-ci des états stationnaires différents, comportant 3 ou 4 modes. Cependant, dans le meilleur des cas la puissance de sortie du laser s'élève à 43,2 mW, ce qui est légèrement inférieur à la simulation originale. Ceci ne représente pas une preuve absolue, mais nous conforte tout de même encore un peu dans la validité de la procédure que nous utilisons pour construire des états stationnaires à plusieurs modes.

Situation dégénérée

Nous allons enfin montrer que lors d'une dégénérescence exacte les situations de pompage gros conduisent encore une fois à l'apparition de plusieurs modes transverses constituant l'état stationnaire. Nous nous limiterons à l'étude de la dégénérescence d'ordre 4 intervenant lorsque $L = R_c/2$, les autres situations étant tout à fait similaires.

Dans le cas où la pompe est alignée sur l'axe optique de la cavité, nous pouvons toujours distinguer les situations de pompage petit où $w_p \leq w_0$ et de pompage gros où $w_p > w_0$. Lorsque $w_p \leq w_0$, nous avons déjà vu que le profil du mode dans le milieu actif suit bien le profil de la pompe. Par conséquent, la situation est encore plus favorable que dans le cas de cavité non–dégénérée, et il n'y a effectivement qu'un seul profil transverse constituant l'état stationnaire du laser. Dans le cas où $w_p \leq 2{,}5\, w_0$, le premier mode calculé par Fox–Li sature en général suffisamment le gain pour ne laisser aucune place à un nouveau profil transverse. En revanche,

lorsque $w_p > 2{,}5\,w_0$ le premier mode apparaissant dans le milieu actif ressemble fortement au mode avec des anneaux sur le miroir sphérique observé dans le cas du pompage petit, et est complété par des modes transverses supplémentaires conduisant à un profil moyen plus uniforme.

Lorsque l'on désaligne la pompe par rapport à l'axe optique de la cavité, la situation de pompage petit mène toujours à l'observation d'un mode transverse unique constituant l'état stationnaire. En effet, il n'existe plus de zones de transitions entre modes comme dans le cas non–dégénéré puisque le laser possède suffisamment de degrés de liberté pour créer un mode suivant le profil de la pompe dans le milieu actif, quel que soit le désalignement x_p. La seule situation où la question de l'apparition d'un second mode transverse se pose est la situation de pompage gros dans laquelle le mode dans le milieu actif est constitué de franges d'interférences. On peut alors se demander si un réseau de franges complémentaires ne va pas venir saturer le gain restant. C'est effectivement ce qui se produit dès que la puissance de pompe dépasse un peu la puissance de seuil du laser, comme le montre la figure 2.40.

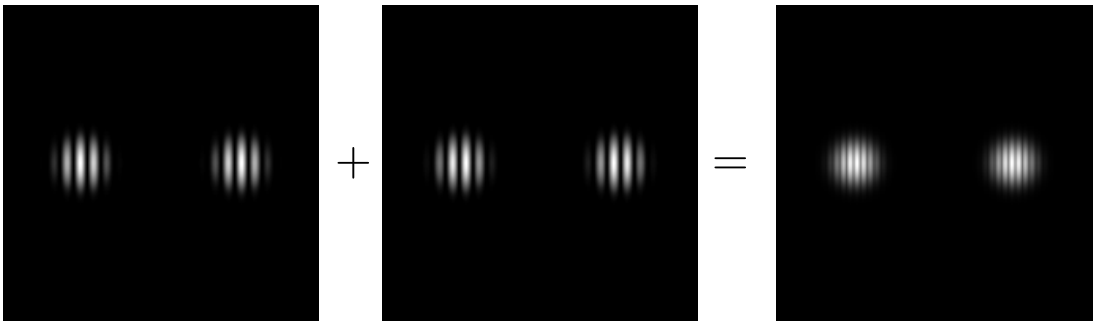


FIGURE 2.40 – Somme en intensité dans le milieu actif des deux modes géométriques constituant l'état stationnaire du laser en $L = R_c/2$, pour une pompe désalignée de taille $w_p = 1{,}5\,w_0$ avec $x_p = 3\,w_0$.

Le mode stationnaire final est constitué de deux modes transverses dont les franges se combinent avec des puissances égales. On observe toutefois toujours des franges dans le profil moyen résultant, même si celles-ci sont plus fines et que l'intensité ne retombe pas à zéro entre deux maxima. Le profil d'intensité totale sur le miroir sphérique reste quant-à lui inchangé car les deux modes possèdent le même profil d'intensité en champ lointain bien que leurs franges en champ proche ne se superposent pas. Ceci explique que des observations de modes géométriques avec des franges ont pu être réalisées en pratique, même si l'état stationnaire est en réalité constitué de plusieurs modes transverses. De plus, il faut toujours faire attention à l'interprétation des images prises à l'aide d'une caméra car en jouant sur la saturation de l'intensité du mode lors de la capture on peut parfaitement révéler la structure de franges dans la superposition des deux modes en champ proche, comme si elles étaient bien séparées comme dans le cas monomode. Évidemment les franges observées apparaissent alors plus petites que ce qu'elles sont dans le cas monomode.

Ceci termine l'étude théorique de ce second chapitre afin de laisser place au troisième et dernier chapitre de cette thèse concernant les observations expérimentales que l'on peut réaliser

dans un laser à cavité plan–concave. Ces expériences seront mises en regard avec des simulations numériques qui tenteront de valider le modèle simple de formation des états stationnaires dans un laser que nous avons développé jusqu'à présent.

Chapitre 3

Observations expérimentales et comparaisons avec la théorie

Ce troisième chapitre est consacré aux observations expérimentales qu'il est possible de réaliser dans un laser constitué d'une cavité plan–concave et d'un milieu amplificateur collé au miroir plan. Nous considèrerons trois configurations de cavité différentes, à savoir une configuration de cavité stable permettant d'étudier les situations dégénérées et non–dégénérées présentées précédemment, une configuration de cavité très courte permettant d'étudier le cas du pompage gros, et une dernière configuration de cavité en limite de stabilité permettant de mettre en évidence des effets originaux de dégénérescence. Chacune des expériences présentées se verra confrontée au modèle numérique développé dans le chapitre 2. Toutefois, il est difficile de maîtriser parfaitement tous les paramètres expérimentaux que l'on doit rentrer dans la simulation, comme le profil exact de la pompe ou surtout les effets thermiques, qui conditionnent fortement la formation des modes transverses. Ceci aura des conséquences sur certaines mesures concernant la largeur des zones de dégénérescence ou la puissance exacte de sortie du laser qui seront difficiles à reproduire fidèlement par la simulation. En revanche, concernant les profils d'intensité des modes observés, nous verrons que l'accord entre expérience et simulation est toujours très bon. Nous montrerons que d'un point de vue qualitatif, le modèle développé dans le chapitre 2 permet de comprendre le comportement du laser dans toutes les configurations considérées, que celles-ci fassent intervenir la notion de dégénérescence, une combinaison de plusieurs modes transverses ou même des effets thermiques.

3.1 Laser plan–concave stable en cavité étendue

Dans la plupart de nos expériences, nous utiliserons un laser dont le milieu actif est un cristal d'Yttrium Aluminium Garnet dopé par des ions néodyme (Nd:YAG). Ce milieu actif a l'avantage de quasiment se comporter comme un système 4 niveaux idéal dont le pic d'absorption se situe autour de 808 nm et l'émission stimulée autour de 1064 nm [85].

Dans toute cette partie, nous nous placerons en situation de pompage petit, c'est-à-dire que le *waist* w_p du mode de pompe sera plus petit que le *waist* w_0 du mode de cavité. Nous réservons

l'étude du pompage gros où $w_p > w_0$ pour la partie suivante faisant intervenir des cavités courtes.

3.1.1 Montage expérimental

Nous présentons ici le montage expérimental que nous utilisons dans la première partie de ce chapitre, comprenant à la fois la cavité laser utilisée ainsi que le système permettant d'imager les profils transverses des modes au niveau de chacun des deux miroirs. Nous montrons également comment le profil de pompe tridimensionnel dans le cristal peut se ramener à un profil transverse gaussien de *waist* w_p avec une bonne approximation, tant que la pompe est bien parallèle à l'axe optique de la cavité. Nous étendrons cette étude plus loin dans le cas d'une pompe inclinée par rapport à l'axe optique de la cavité.

Cavité laser et profil de pompe

Le montage expérimental représenté sur la figure 3.1 est constitué d'une cavité plan–concave avec un miroir de sortie sphérique de rayon de courbure $R_c = 20$ cm et de coefficient de réflexion en intensité $R = 0{,}98$. Le miroir plan est parfaitement réfléchissant à la longueur d'onde d'émission et traité antireflet à la longueur d'onde de pompe. L'épaisseur du cristal collé au miroir plan est $d = 1{,}1$ mm et, s'agissant de YAG, son indice à 1064 nm est $n_0 = 1{,}81$. Concernant la cavité, le seul degré de liberté que nous autorisons est la translation du miroir de sortie dans la direction z, permettant de régler la longueur L de la cavité. Pour cela, nous avons utilisé un montage en cage qui constitue le meilleur moyen expérimentalement de pouvoir translater le miroir de sortie sans décaler son centre par rapport à l'axe de la pompe. Le cristal de YAG est pompé longitudinalement par une diode laser fibrée dont le diamètre de la fibre est $\varnothing = 120\,\mu$m. Le faisceau de pompe est d'abord collimaté par une première lentille de focale 4 cm puis focalisé par une seconde lentille de focale 2 cm, conduisant à un grandissement $\gamma = 1/2$.

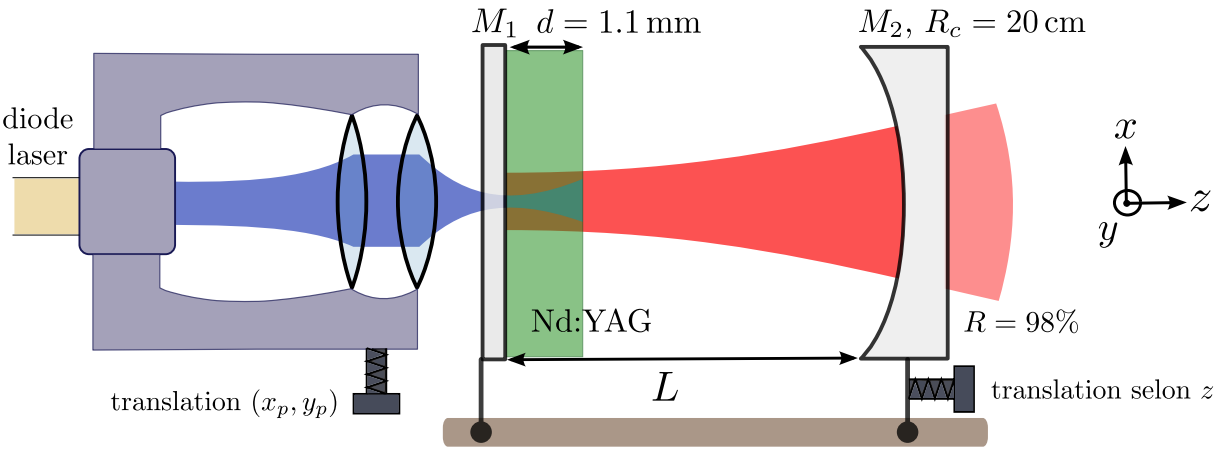


FIGURE 3.1 – Cavité laser expérimentale.

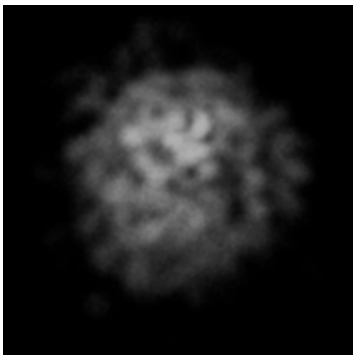
Le faisceau de pompe que nous utilisons est fortement multimode et se prête beaucoup mieux à une modélisation géométrique qu'à une modélisation ondulatoire paraxiale. En effet, la divergence de ce faisceau est très grande et nous l'avons mesuré à $\Theta = 0{,}117$ radians. Le profil transverse du

faisceau de pompe dans un plan transverse après collimation est représenté sur la figure 3.2 (a). Celui-ci présente des irrégularités en raison de l'aspect multimode de la pompe que nous pouvons moyenner en sommant différentes rotations du mode autour de son centre. Ceci conduit au profil moyen représenté sur la figure 3.2 (b) qui s'ajuste très bien avec un profil super–gaussien de la forme :

$$p(x,y) = p_0 e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{\sigma_0^2}\right)^r}, \tag{3.1}$$

où σ_0 représente la largeur et r l'ordre de la super–gaussienne. Si on néglige le bruit, le profil transverse de la pompe peut donc être considéré comme une super–gaussienne d'ordre $r = 1{,}6$.

(a)



(b)

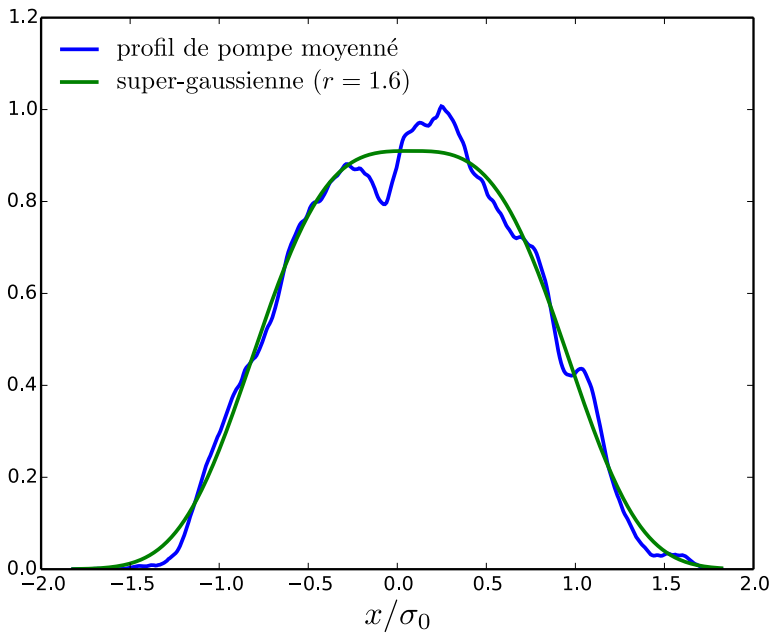


FIGURE 3.2 – (a) Profil transverse d'intensité de la pompe utilisée. (b) Coupe selon l'axe x du profil de pompe moyenné et ajustement super-gaussien calculé.

On souhaite désormais calculer le profil transverse de pompe intégré sur la longueur d du cristal afin de l'utiliser dans des simulations Fox–Li. Pour cela, nous supposons que le profil transverse de la pompe est invariant de forme par propagation, et nous tenons également compte de l'absorption exponentielle du faisceau dans le cristal de la forme $e^{-\alpha z}$. Nous avons mesuré que la pompe est transmise à 46% à travers le cristal de longueur $d = 1{,}1$ mm, ce qui donne un coefficient $\alpha = \frac{1}{d}\ln\left(\frac{100}{46}\right) = 7{,}06\,10^{-4}\,\mu\text{m}^{-1}$. Pour le moment, nous considérons uniquement le cas où le faisceau de pompe se propage parallèlement à l'axe z. Le profil de pompe intégré sur la longueur du cristal est donc de la forme :

$$\tilde{p}(x,y) = p_0 \int_0^d \frac{e^{-\alpha z}}{\sigma^2(z)} e^{-\left(\frac{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}{\sigma^2(z)}\right)^r} \mathrm{d}z, \tag{3.2}$$

où (x_p,y_p) définit la position de la pompe dans le plan transverse, et l'expression de la largeur

$\sigma(z)$ est donnée par :

$$\sigma(z) = \sigma_0 + z\tan(\Theta_c), \tag{3.3}$$

où σ_0 est la largeur de la pompe juste avant l'entrée dans le cristal et Θ_c est la divergence de la pompe dans le cristal. On suppose ici que la focalisation de la pompe a lieu avant la face d'entrée du cristal. Le grandissement de la pompe étant de γ, la divergence avant l'entrée dans le cristal est donc de $\frac{\Theta}{\gamma}$. L'indice du cristal à la longueur d'onde de la pompe de 808 nm est $n_1 = 1{,}82$. À l'intérieur du cristal, on a donc $\Theta_c = \frac{\Theta}{n_1\gamma} = 0{,}129$ radians.

Le profil de pompe le plus petit que l'on puisse obtenir est lorsque la pompe est focalisée au niveau de la face d'entrée du cristal. Dans ce cas, on peut supposer que $\sigma_0 = \gamma\varnothing/2 = 30\,\mu$m. Nous avons représenté sur la figure 3.3 le profil de pompe intégré sur la longueur du cristal pour une telle valeur de σ_0, ainsi que le profil gaussien de waist w_p à $1/e^2$ qui ajuste au mieux la pompe, dans le cas où celle-ci est alignée sur l'axe optique de la cavité ($x_p = y_p = 0$).

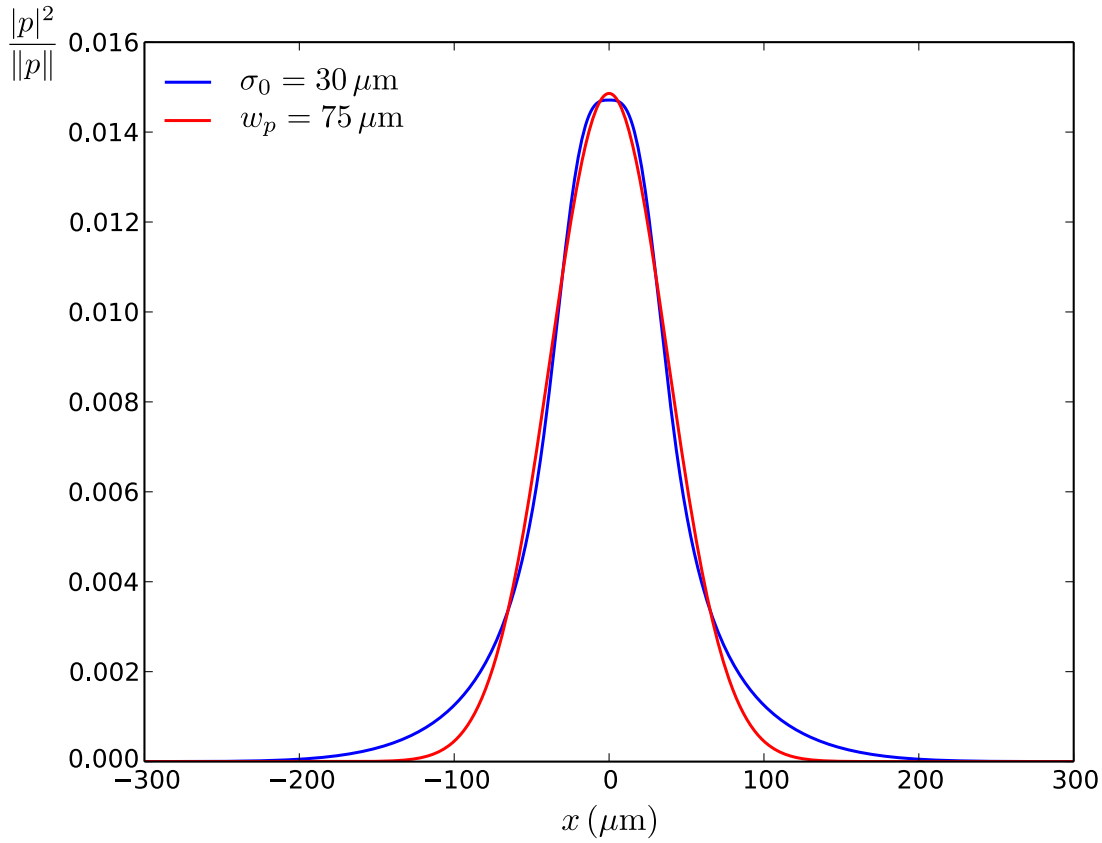


FIGURE 3.3 – Coupe selon l'axe x du profil transverse de la pompe intégré sur la longueur d du cristal à partir d'une super-gaussienne de largeur σ_0, et profil de pompe gaussien de largeur w_p à $1/e^2$ associé.

On constate que le profil obtenu peut être considéré comme gaussien avec une bonne approximation, celle-ci étant d'autant meilleure que la largeur σ_0 de départ est grande. Dans le cas du pompage aligné sur l'axe optique de la cavité, on considèrera donc le même type de profil de

gain que nous avons utilisé dans le chapitre 2, à savoir :

$$\tilde{g}_0(x,y) = G_0 e^{-2\frac{x^2+y^2}{w_p^2}}, \tag{3.4}$$

où G_0 est un paramètre proportionnel à la puissance de pompe et w_p est le *waist* du faisceau de pompe équivalent. D'après la figure 3.3, on sait déjà que notre montage expérimental ne nous permettra jamais de construire un profil de pompe de *waist* $w_p < 75\,\mu$m. De plus, la divergence du faisceau de pompe étant très importante, le moindre écart par rapport au réglage optimal de la lentille de focalisation conduit à une taille de pompe w_p beaucoup plus importante.

Système imageur

Tout mode transverse est entièrement caractérisé par la connaissance de ses profils d'intensité et de phase dans un plan transverse quelconque. Idéalement, afin de pouvoir comparer les modes expérimentaux aux modes simulés, on souhaiterait donc être capable de mesurer à la fois l'intensité et la phase du mode sélectionné par le laser. La mesure de l'intensité nécessite simplement la projection du mode sur un écran et une caméra infrarouge tandis que la mesure de la phase est plus compliquée.

Il existe différentes techniques interférométriques permettant de mesurer la phase d'un faisceau laser [86], mais celles-ci nécessitent un faisceau de référence qui doit être cohérent avec le faisceau à mesurer. Une technique pour construire le faisceau de référence consiste à prélever une partie du faisceau à mesurer pour les faire interférer ensuite. Dans notre cas, cela supposerait de prélever une partie du mode sortant de la cavité sans altérer son profil, puis de transformer le mode prélevé en mode gaussien de grande taille de manière à ce qu'il soit localement proche d'une onde plane avant de le faire interférer avec le mode original. Cette dernière étape parait difficile à réaliser techniquement et n'est pas robuste vis-à-vis des différents modes transverses que l'on souhaite observer dans différentes configurations de cavité. Nous abandonnons donc l'idée de mesurer la phase du mode par une méthode interférométrique.

Il est également possible de mesurer le profil de phase d'un mode à partir de deux profils d'intensité pris dans des plans transverses différents. L'algorithme historique de Gerchberg–Saxton [87] utilise par exemple les profils d'intensité obtenus dans des plans transverses conjugués pour la transformation de Fourier. En pratique, il suffit de considérer le plan focal objet et le plan focal image d'une lentille convergente. Cet algorithme converge toujours par construction mais n'est pas très robuste vis-à-vis de la distribution de phase initiale imposée. De plus, la corrélation entre le mode calculé et le mode recherché peut être très mauvaise si on utilise un profil de phase initial trop différent du profil de phase recherché.

Afin de pouvoir comparer les modes expérimentaux à la simulation, nous faisons donc un compromis et renonçons à mesurer leur phase. En revanche, nous décidons de comparer leurs profils d'intensité au niveau du miroir plan et du miroir sphérique. Afin d'obtenir une résolution correcte des images prises par la caméra, nous souhaitons que les modes observés soient suffisamment étendus spatialement avant d'être projetés sur un écran. Pour cela, nous considérons le système simple de la figure 3.4 constitué de deux lentilles convergentes dont la position de la

seconde peut varier d'une distance Δ autour du *waist* du faisceau créé par la première lentille. L'observation du profil d'intensité du mode s'effectue ensuite en champ lointain, à une distance où le mode est suffisamment gros. À cette distance, le mode a nécessairement acquis une phase sphérique importante mais celle-ci importe peu puisque nous sommes uniquement intéressés par le profil d'intensité du mode. Ce profil d'intensité dépend uniquement de la phase de Gouy accumulée par le faisceau dans le système imageur. Ceci peut se voir facilement en faisant une décomposition sur les modes de base de la cavité vide. Ainsi, si la phase de Gouy accumulée depuis le le miroir plan est congrue à $0\,[2\pi]$ l'image sur l'écran correspondra au profil d'intensité du mode au niveau du miroir plan. D'autre part, si la phase de Gouy accumulée depuis le miroir plan est congrue à $\arctan(L/z_R)\,[2\pi]$ l'image sur l'écran reflètera l'intensité du mode au niveau du miroir sphérique.

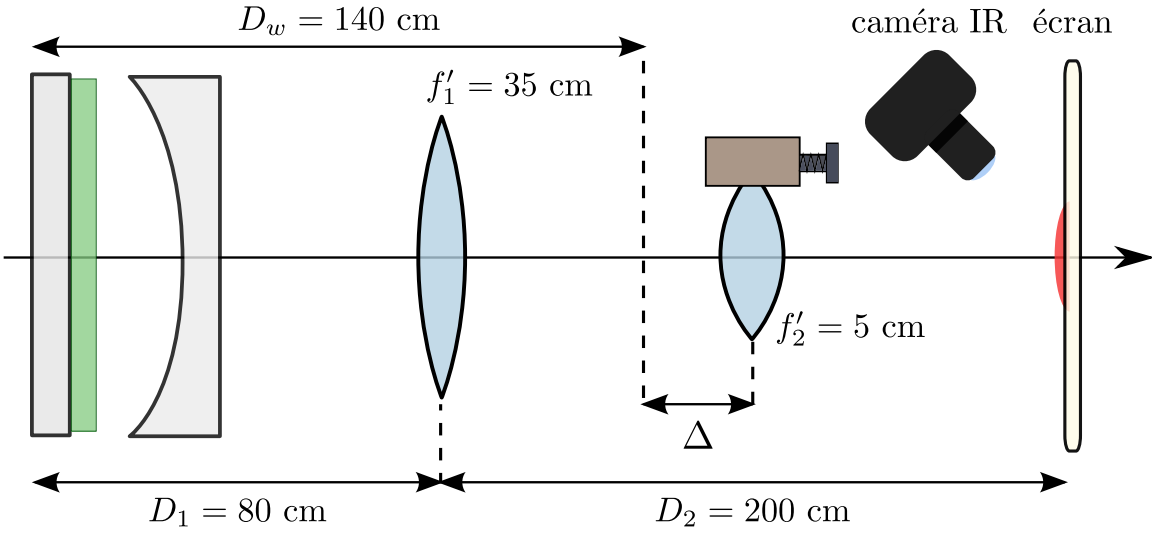


FIGURE 3.4 – Schéma de principe du système imageur utilisé.

D'après la figure 3.4, la première lentille de focale $f_1' = 35$ cm est située à une distance $D_1 = 80$ cm du miroir plan. Avec un tel choix, nous allons montrer que la phase de Gouy accumulée dans le système est largement suffisante pour imager les profils d'intensité des modes pour une longueur de cavité variant entre 4 et 16 cm. Nous pourrons ainsi couvrir les trois zones de dégénérescence principales en $L = R_c/4$, $L = R_c/2$ et $L = 3R_c/4$. Si L varie entre 0 et 4 cm, le *waist* w_0 sur le miroir plan varie entre 164 et 184 μm. Dans les deux cas, la première lentille focalise les faisceaux dans des plans quasiment identiques, à 60 cm de celle-ci. Ceci définit une distance moyenne entre *waists* $D_w = 140$ cm. C'est autour de ce plan commun que la position de la seconde lentille va être translatée d'une longueur Δ variable. La focale de cette seconde lentille ($f_2' = 5$ cm) est choisie suffisamment courte pour que le faisceau diverge suffisamment après une seconde focalisation afin de ne pas avoir à placer l'écran trop loin. Nous avons représenté sur la figure 3.5 l'évolution de la phase de Gouy accumulée depuis le miroir plan jusqu'à l'écran lorsque la position de la seconde lentille varie sur une plage de 16 cm autour de la position D_w.

On constate que pour les deux longueurs de cavité considérées l'image du profil d'intensité au niveau du miroir plan s'obtient pour $\Delta \simeq 6{,}4$ cm. Afin d'obtenir l'image de l'intensité du

mode au niveau du miroir sphérique, la phase de Gouy totale accumulée doit être égale à la phase de Gouy accumulée à l'intérieur de la cavité entre le miroir plan et le miroir sphérique, soit $\Psi_G = \arctan(L/z_R)$. Lorsque $L = 10$ cm la phase de Gouy accumulée atteint $\pi/4$ pour $\Delta \simeq 14{,}2$ cm et lorsque $L = 15$ cm elle atteint tout juste $\pi/3$ pour $\Delta \simeq 20$ cm. Cependant, dans le cas d'un mode dégénéré, on peut utiliser une astuce qui consiste à remarquer que le profil d'intensité du mode au niveau du miroir sphérique peut également être obtenu lorsque la phase de Gouy totale accumulée est $\Psi_G = -\arctan(L/z_R)$. On peut alors également choisir $\Delta \simeq 1{,}4$ cm dans le cas où $L = 10$ cm et $\Delta = -0{,}4$ cm dans le cas où $L = 15$ cm.

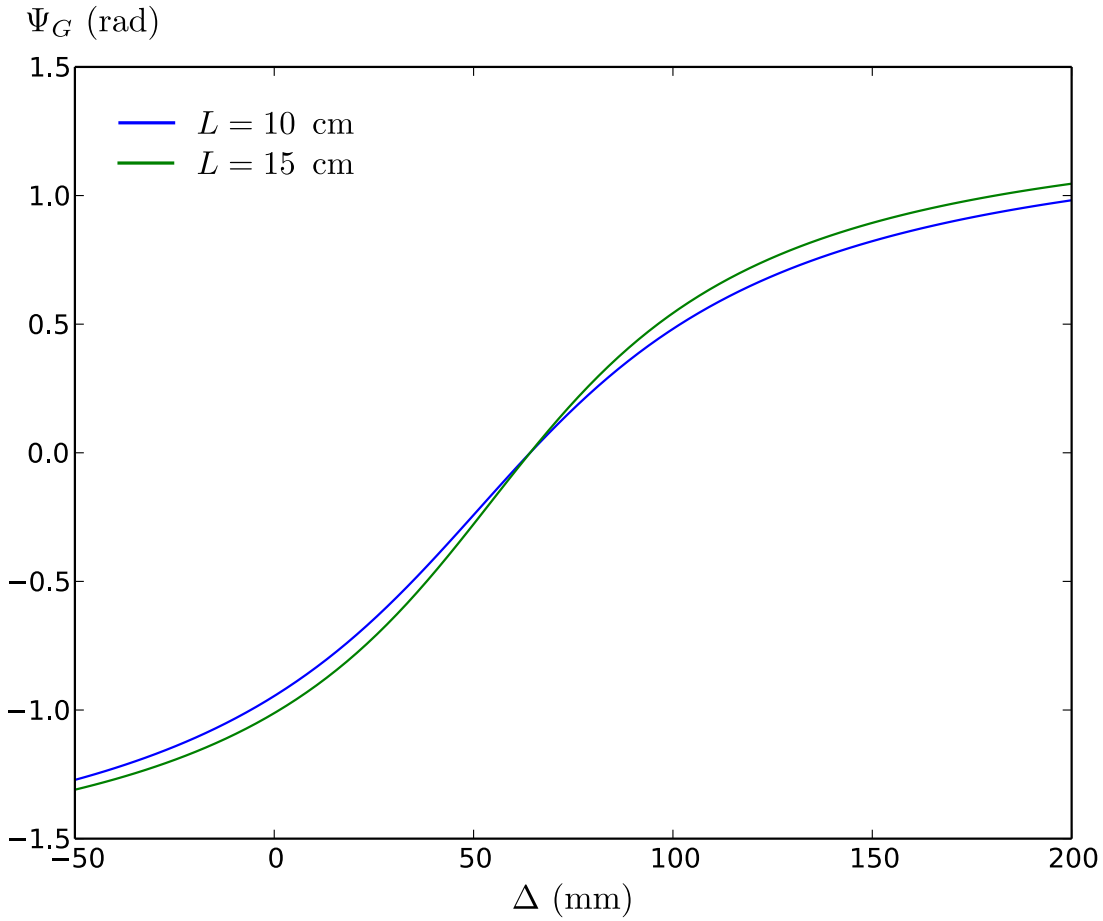


FIGURE 3.5 – Phase de Gouy accumulée à partir du miroir plan du laser au travers du système imageur en fonction de la position relative Δ de la seconde lentille, pour deux longueurs de cavité différentes.

Le système imageur que nous avons présenté nous permet donc de déterminer visuellement si un mode observé est dégénéré ou non en comparant les profils d'intensité obtenus sur le miroir plan et sur le miroir de sortie. Il nous permet même de visualiser continûment l'évolution du profil d'intensité à l'intérieur de la cavité simplement en translatant la seconde lentille. Les observations basées uniquement sur des images de profils d'intensité restent évidemment qualitatives, mais la singularité des profils transverses observés peut néanmoins rendre leur comparaison à la

simulation très convaincante.

3.1.2 Cavité non–dégénérée et pompe parallèle à l'axe optique

On considère ici une situation de cavité non–dégénérée avec $L = 16$ cm ainsi qu'un pompage longitudinal parallèle à l'axe optique. Comme nous l'avons vu précédemment, on peut modéliser le profil de pompe expérimental par un profil transverse gaussien *waist* $w_p < w_0$.

Transitions entre modes

La première expérience que nous avons réalisé consiste à déplacer la pompe parallèlement à l'axe optique d'une position x_p et à mesurer les positions pour lesquelles une transition entre modes d'ordre supérieur se produit, comme dans l'expérience de Y.F. Chen *et coll.* [88]. On peut fixer $y_p = 0$ sans perte de généralité car la pompe étant parallèle à l'axe optique, seule la distance du centre de la pompe à l'axe optique compte dans la sélection du mode à une rotation près. La figure 3.6 représente les positions expérimentales et simulées des différentes transitions entre modes, et la figure 3.7 représente les profils transverses expérimentaux et simulés associés.

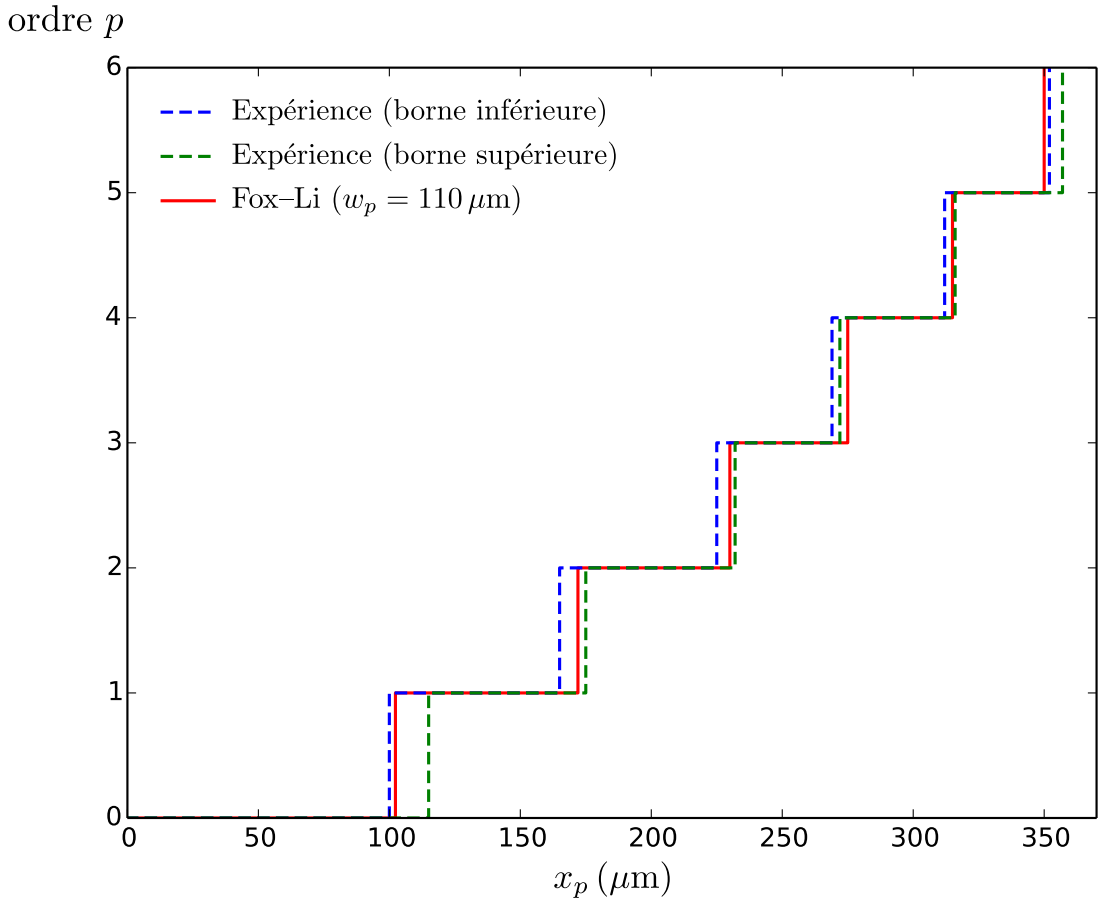


FIGURE 3.6 – Transitions entre différents modes Ince–Gauss de type $\mathrm{IG}^e_{p,p}$ en fonction du désalignement x_p de la pompe, pour une longueur de cavité $L = 16$ cm.

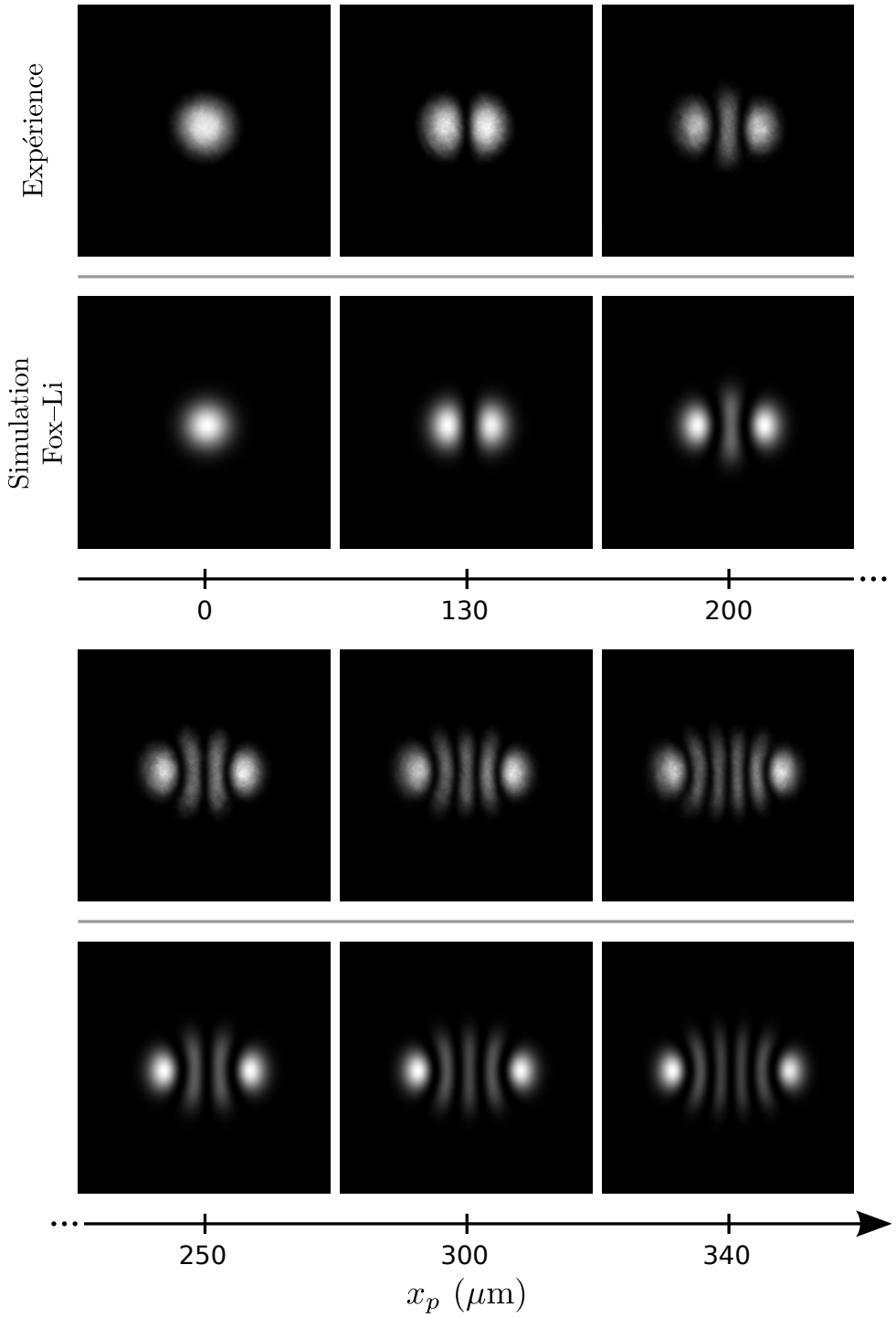


FIGURE 3.7 – Modes Ince–Gauss d'ordre supérieur obtenus pour différents désalignements de la pompe.

Expérimentalement, il existe des zones de transitions dans lesquelles on observe une superposition de deux modes transverses d'ordres différents, ce qui a déjà été mis en évidence par

Kubodera *et coll.* [41]. La présence d'une borne inférieure et d'une borne supérieure sur la figure 3.6 met en évidence les zones dans lesquelles nous n'avons pas été capable d'identifier expérimentalement un mode transverse d'ordre unique. Du point de vue de la simulation, nous nous sommes limités à l'observation des positions de transitions entre modes dans le cas d'un état stationnaire contenant un unique mode transverse. De plus, nous avons remarqué que les positions exactes des transitions entre modes dépendent de la taille de la pompe que l'on rentre dans la simulation. Dans le cas de l'expérience réalisée, il s'avère que le choix de $w_p = 110\,\mu$m est la valeur qui reproduit au mieux les résultats expérimentaux.

Concernant la comparaison des profils transverses expérimentaux et simulés de la figure 3.7, on peut dire que l'accord semble vraiment parfait. De plus, l'analyse des profils transverses simulés montre qu'il s'agit bien de modes Ince–Gauss de type $\mathrm{IG}^{e}_{p,p}$.

Puissance de sortie du laser

Nous voulons comparer ici la puissance de sortie du laser en fonction de la puissance de pompe obtenue par l'expérience à celle calculée par la simulation Fox–Li. Dans la simulation, nous n'avons pas développé de modèle pour calculer l'amplitude du profil de gain g_0 en fonction du faisceau de pompe incident. La seule chose que nous ayons supposé est que g_0 est proportionnel à l'intensité du faisceau de pompe dans le cristal. C'est le paramètre G_0 sans dimension qui joue pour nous le rôle de la puissance de pompe car on suppose qu'il lui est proportionnel. Afin de pouvoir comparer l'expérience à la simulation, il faut donc s'accorder au moins sur un point de mesure. Le plus simple est de s'accorder sur la puissance de pompe définissant le seuil de l'oscillation laser. Ainsi, la puissance de pompe expérimentale divisée par la puissance de seuil est une grandeur sans dimension correspondant exactement au rapport $G_0/G_{0_{th}}$, où $G_{0_{th}}$ désigne la valeur de G_0 pour laquelle la valeur propre du mode calculé par l'algorithme de Fox–Li linéaire vaut 1.

La figure 3.8 représente la comparaison entre expérience et simulation de la puissance de sortie du laser en fonction de la puissance de pompe rapportée à la puissance de seuil. Concernant l'expérience nous nous plaçons dans les mêmes conditions que précédemment tandis que dans la simulation nous avons considéré différentes valeurs de w_p. On constate que la taille de pompe permettant d'ajuster au mieux les points expérimentaux est $w_p = 160\,\mu$m. Ceci n'est pas en accord avec la valeur de w_p calculée précédemment pour les transitions entre modes. On peut attribuer ce désaccord principalement à trois sources d'erreurs indépendantes. La première est l'erreur que l'on commet sur le calcul de pompe moyen à l'intérieur du cristal. La seconde est l'utilisation d'une valeur de l'intensité de saturation $I_{sat} = 1{,}25\,10^7\ \mathrm{W.m^{-2}}$ ne correspondant peut être pas à la valeur qu'il faudrait rentrer dans le modèle pour décrire notre milieu actif. Enfin, la troisième est la possible existence de pertes intracavité [89] dues à des facteurs multiples (poussières, traitement anti-reflet vieillissant...). Étant donné que les mesures expérimentales semblent bien décrire une droite, nous pensons qu'il est inutile de raffiner le modèle de gain saturé que nous utilisons, comme cela est suggéré par Casperson dans l'article [90] pour tenir compte du *hole burning* longitudinal et de l'élargissement homogène du gain. En effet, si la fréquence d'oscillation d'un mode devait entrer en compte significativement dans l'expression

du gain saturé associé à ce mode, les points de mesure expérimentaux ne formeraient plus une simple droite.

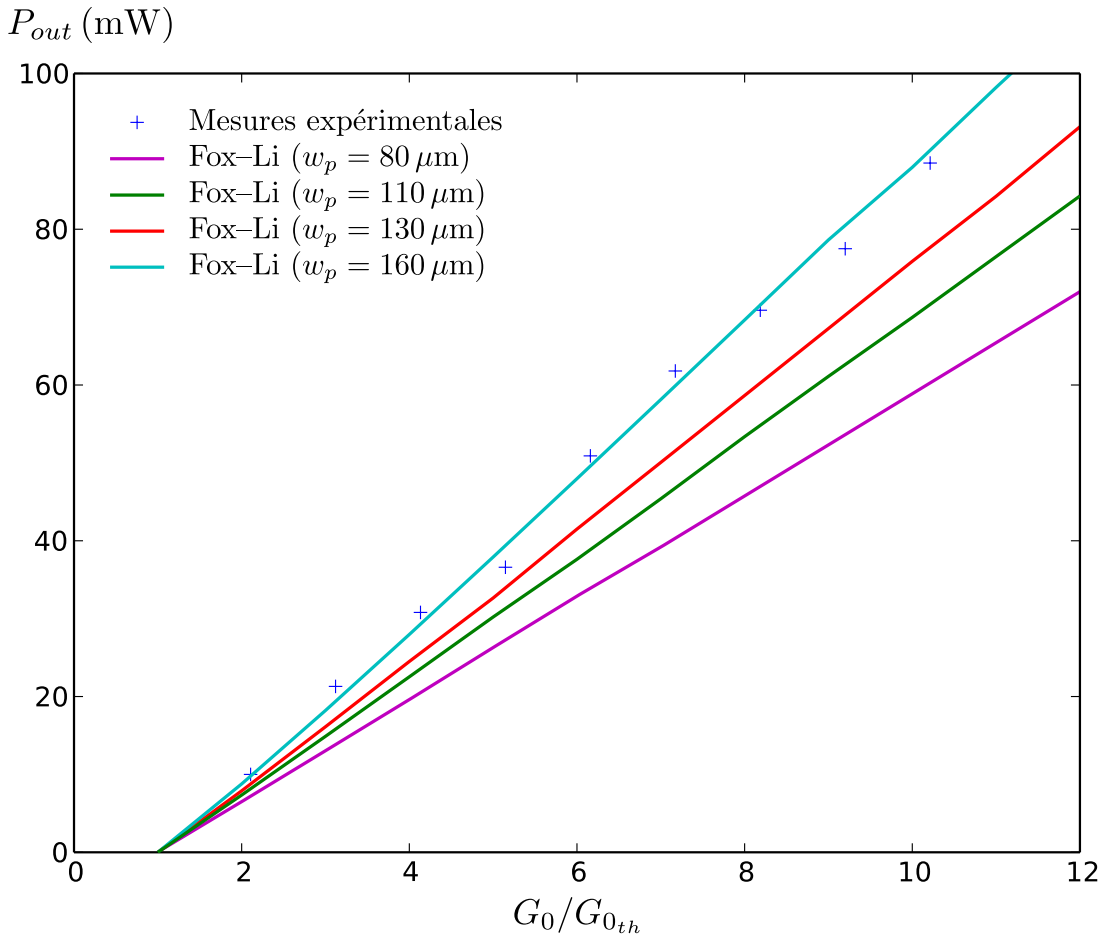


FIGURE 3.8 – Comparaison entre une expérience et différentes simulations Fox–Li de la puissance de sortie du laser en fonction de la puissance de pompe rapportée à la puissance de seuil.

Ainsi, même si en l'état la simulation ne s'accorde pas parfaitement avec les puissances de sortie expérimentales, nous pensons qu'il s'agit principalement d'une question de calibration des paramètres du modèle, et non un problème de fond du modèle lui-même. Étant donné que le calcul des positions de transitions entre modes sont en très bon accord avec l'expérience, nous pensons que le désaccord vient soit de pertes intracavité, soit de l'utilisation d'une valeur de I_{sat} inadaptée. En toute rigueur, la mesure de la valeur de I_{sat} ne peut pas se faire sans tenir compte du profil de pompe utilisé et du mode transverse sélectionné par le laser. Une fois que ceux-ci sont connus, une manière de calculer I_{sat} est de mesurer la puissance de sortie du laser, d'en déduire la puissance intracavité et de chercher à satisfaire l'équation de stationnarité (2.14). En se basant sur les mesures de la figure 3.8, si on suppose que $w_p = 110\,\mu$m est la bonne taille du profil de pompe, cela conduirait à une valeur corrigée de l'intensité de saturation $I_{sat} = 1{,}58\,10^7\,\mathrm{W.m^{-2}}$. Cette valeur paraît très éloignée de la valeur théorique connue pour le Nd:YAG, c'est pourquoi

nous penchons également pour l'existence de pertes intracavité non maîtrisées, probablement dues à des défauts du cristal.

3.1.3 Cavité non–dégénérée et pompe inclinée sur l'axe optique

Nous allons maintenant étudier le cas d'une pompe inclinée par rapport à l'axe optique de la cavité dans le but d'observer de nouveaux modes d'ordre supérieur. Nous tenterons ensuite de reproduire ces expériences par la simulation en y intégrant un profil de gain tenant compte d'une propagation du faisceau de pompe avec un angle dans le milieu actif.

Observations expérimentales de modes transverses aux lignes nodales serpentantes

Nous considérons toujours une configuration de cavité non–dégénérée, mais nous positionnons sa longueur à $L = 9$ cm afin d'avoir un *waist* w_0 le plus grand possible par rapport à la taille du profil de pompe. Afin d'incliner l'axe de propagation de la pompe par rapport à l'axe optique, nous jouons sur le décentrage de la lentille de focalisation de la pompe. Ensuite, pour différentes positions de la pompe, nous observons les modes de la figure 3.9.



FIGURE 3.9 – Observations expérimentales de modes aux lignes nodales serpentantes pour différents désaligements de la pompe inclinée sur l'axe optique de la cavité.

Lorsque la pompe est suffisamment désalignée, on observe des modes ressemblant fortement aux modes $\mathrm{IG}^e_{p,p}$ mais contenant des lignes nodales serpentantes, semblables à ceux que nous avons construits au chapitre 1. En revanche, les premiers modes observés sont toujours les mêmes, à savoir le mode fondamental gaussien, le mode $\mathrm{HG}_{1,0}$ et un mode $\mathrm{IG}^e_{2,2}$. Ceci est cohérent puisque jusqu'à l'ordre 2 il n'y a aucun autre type de mode possible qui soit invariant de forme par propagation.

Ces observations viennent renforcer l'analyse s'appuyant sur l'intégrale de recouvrement mode–gain que nous avons faite au chapitre 2, montrant que les modes d'ordre supérieur possédant des lignes nodales circulaires ou elliptiques n'ont vraiment aucune chance d'être favorisés tant que le profil de pompe est trop régulier. Ceci nous conduit à être assez critique vis-à-vis des articles récents annonçant l'observation de modes d'ordre supérieurs originaux dans des lasers pompés axialement [17, 47, 61]. Ces observations sont probablement le fait de conditions expérimentales mal contrôlées. Par exemple il nous est également arrivé d'observer certains modes Ince–Gauss différents de ceux que la simulation prédit, mais ces observations n'étaient absolument pas robustes vis-à-vis d'une légère translation du cristal dans le plan transverse, ce qui

devrait n'avoir aucun effet. Notre hypothèse est que le milieu actif peut posséder localement certains défauts, comme des défauts d'absorption de la pompe ou de vieillissement du traitement antireflet, qui peuvent produire un profil de gain moyen (voire d'absorption) différent de celui attendu.

Construction d'un profil de pompe moyen

Afin de construire un profil transverse moyen intégrant les effets de l'inclinaison de la pompe par rapport à l'axe optique de la cavité, on peut reprendre l'approche géométrique précédente en décidant de décaler progressivement en z le centre des super–gaussiennes représentant les profils d'intensité dans chaque plan à l'intérieur du cristal. Ceci conduit à l'expression analytique suivante pour le profil de pompe :

$$\tilde{p}(x,y) = p_0 \int_0^d \frac{e^{-\alpha z}}{\sigma^2(z)} e^{-\left(\frac{x_c^2(z)+y_c^2(z)}{\sigma^2(z)}\right)^r} \mathrm{d}z, \tag{3.5}$$

où la largeur $\sigma(z)$ est toujours définie par l'expression (3.3), et avec

$$\begin{aligned} x_c(z) &= x - x_p + z\tan\theta\cos\phi \\ y_c(z) &= y - y_p + z\tan\theta\sin\phi, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où θ désigne l'angle d'inclinaison du faisceau de pompe par rapport à l'axe z et ϕ l'angle de rotation du faisceau autour de z.

La raison pour laquelle nous avons utilisé l'optique géométrique plutôt que l'optique cohérente pour décrire la propagation du faisceau de pompe est que celui-ci diverge bien plus qu'un faisceau gaussien classique. Une astuce pour augmenter la divergence d'un faisceau gaussien dans la simulation est de lui attribuer une longueur d'onde plus grande. Si on souhaite que notre faisceau gaussien possède la même divergence Θ_c que celle du faisceau de pompe dans le cristal, on peut lui attribuer une longueur d'onde fictive $\lambda_c = \pi\sigma_0\Theta_c$, où σ_0 désigne la taille minimale du faisceau de pompe dans le cristal. Ensuite, il est possible de construire le profil de pompe moyen associé en propageant numériquement ce faisceau tranche par tranche sur toute la longueur du cristal, en tenant compte de l'absorption et en sommant les profils transverses en intensité obtenus dans chaque tranche. Afin de modéliser l'inclinaison du faisceau, il suffit de multiplier le profil super–gaussien initial par une phase linéaire de la forme $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda_c}\delta}$, avec

$$\delta = (x\cos\phi + y\sin\phi)\tan\theta. \tag{3.7}$$

Nous avons représenté sur la figure 3.10 les profils transverses de gain obtenus à l'aide de chacune des deux approches, pour des valeurs de $\theta = 0{,}45$ radians et $\phi = 0$. On constate que ces profils sont qualitativement très proches, ce qui nous conforte dans notre approche et nous permettra d'utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux méthodes pour générer un profil de gain issu d'un faisceau de pompe incliné.

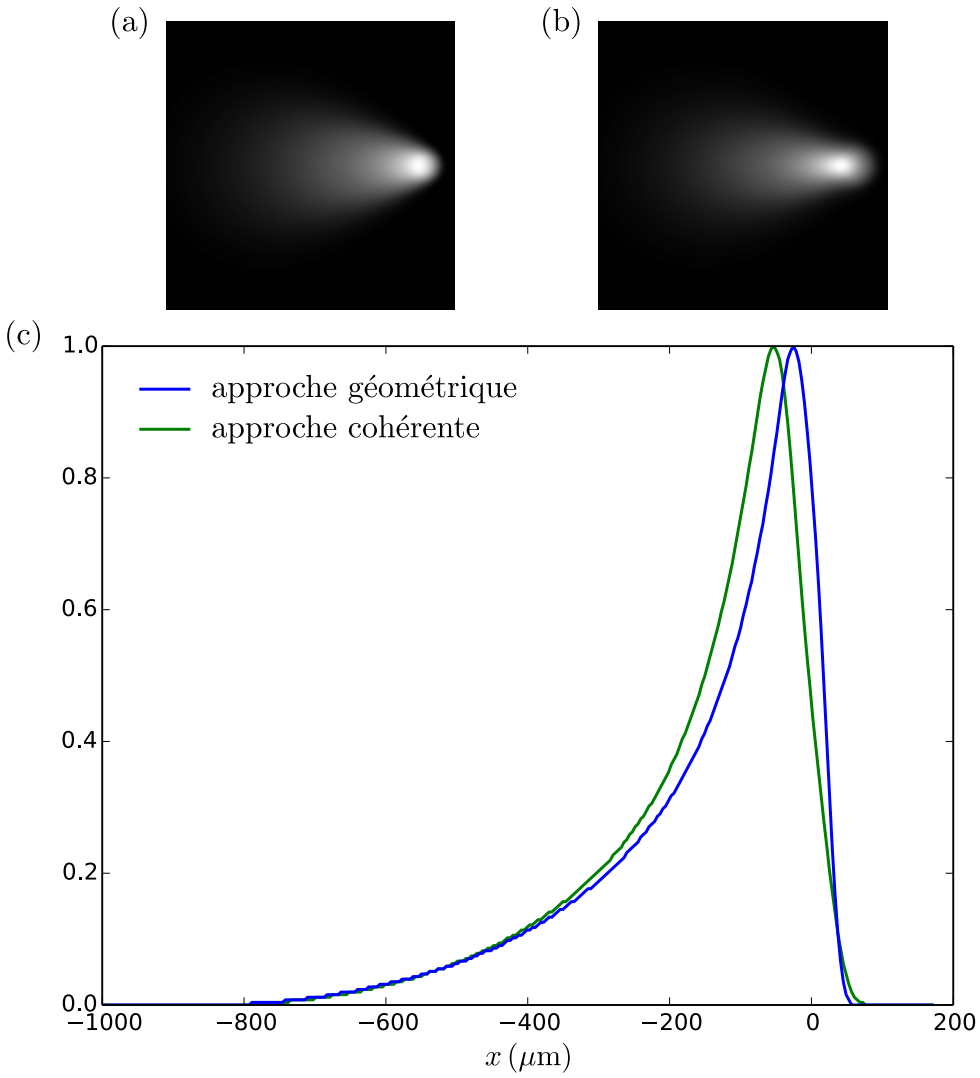


FIGURE 3.10 – (a) Profil transverse de la pompe calculé par l'approche géométrique.
(b) Profil transverse de la pompe calculé par propagation d'un faisceau cohérent.
(c) Comparaison d'une coupe selon l'axe x des profils normalisés obtenus par chacune des deux méthodes.

Résultats de simulation

Nous utilisons ici un profil de gain issu de l'approche cohérente, calculé pour $\theta = 0{,}45$ radians et $\phi = \pi/6$. le profil transverse obtenu est donc le même que celui de la figure 3.10 (b) à une rotation de $\pi/6$ près. La figure 3.11 représente les modes calculés par la simulation Fox–Li pour différentes positions de la pompe, revenant simplement à translater le profil de gain calculé d'un vecteur (x_p,y_p) dans le plan transverse. Les modes obtenus possèdent bien la même géométrie de lignes nodales serpentantes que celles observées expérimentalement. On vérifie également que l'utilisation du profil de gain calculé par l'approche géométrique donne bien les mêmes résultats.

La reproduction de cette expérience par la simulation avec une bonne fidélité valide le choix

que nous avons fait initialement de nous limiter à une seule feuille de gain et de moyenner le profil du gain sur toute la longueur du cristal. Ainsi, même pour des profils de pompe assez complexes, nous pensons que la méthode que nous utilisons est tout à fait en mesure de fournir un bon accord entre l'expérience et la simulation.

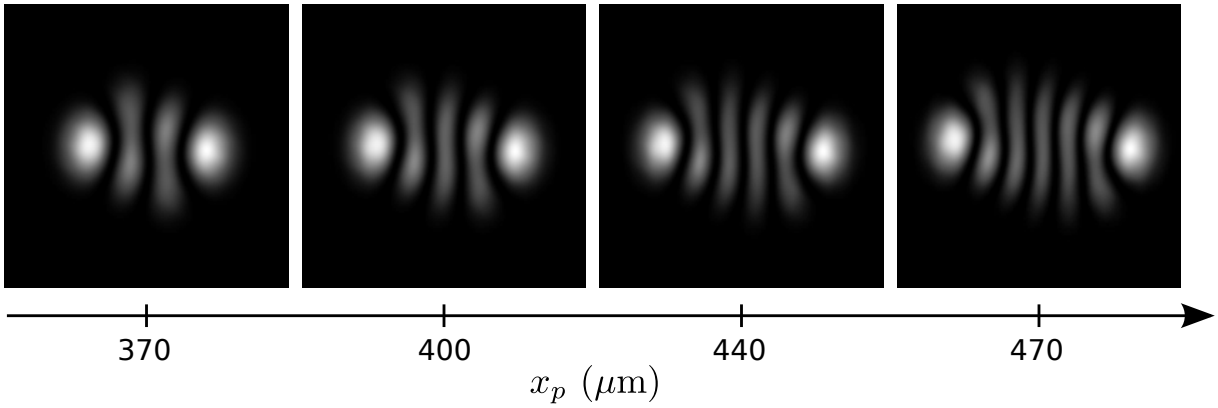


FIGURE 3.11 – Modes aux lignes nodales serpentantes obtenues par la simulation Fox–Li avec une pompe inclinée par rapport à l'axe optique pour différents désalignements x_p ($y_p = -70\,\mu$m).

3.1.4 Étude de la dégénérescence particulière autour de $L = R_c/2$

Nous allons étudier ici l'évolution de la puissance de sortie dans la zone de dégénérescence située autour de $L = R_c/2$, ainsi que les différents modes transverses que l'on y observe. Nous verrons qu'à dégénérescence il est nécessaire de prendre en compte les effets thermiques dans la simulation sous peine de ne pas être capable de reproduire de manière acceptable les observations expérimentales.

Observations expérimentales dans un laser Nd:YAG

Nous avons cherché à mesurer l'évolution de la puissance de sortie du laser autour de la dégénérescence en $L = R_c/2$ de manière à vérifier les prédictions faites au chapitre 2 sur la figure 2.35. La figure 3.12 représente donc la puissance de sortie du laser en fonction d'une variation ΔL de la longueur de la cavité prise à partir d'une longueur de référence proche de $L = R_c/2$. Expérimentalement, il est difficile de savoir rigoureusement quand la longueur de la cavité correspond à une longueur de dégénérescence exacte, mais nous pouvons supposer que cette position se situe autour de $\Delta L = 4{,}7$ mm lorsque la puissance de sortie du laser devient maximale.

On constate que la figure 3.12 ne reproduit absolument pas la courbe de la figure 2.35. On observe en effet expérimentalement une brisure de la symétrie de la courbe de puissance ainsi que des modes observés autour de la longueur $L = R_c/2$. Avant d'expliquer d'où vient probablement cette disymétrie, nous pouvons néanmoins observer quelques points communs avec la courbe théorique de la figure 2.35.

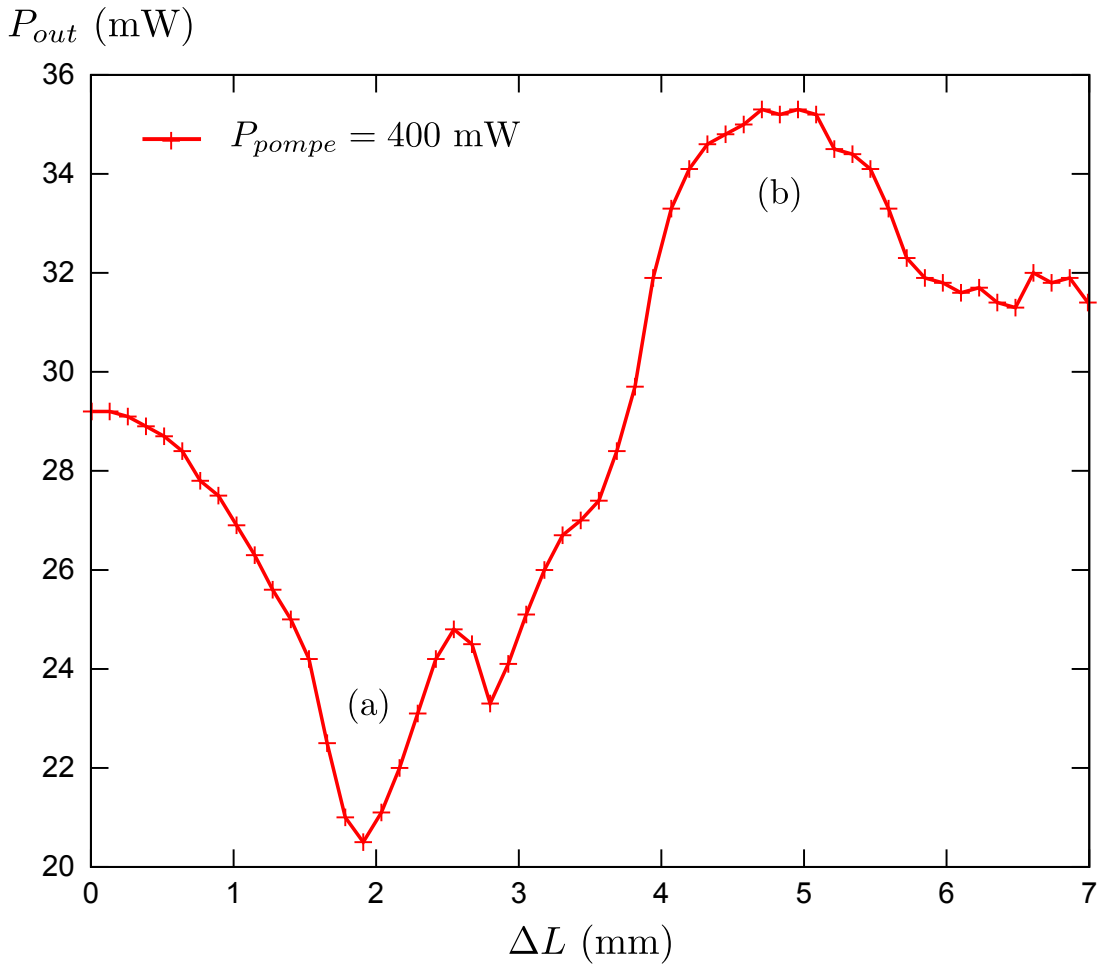


FIGURE 3.12 – Puissance de sortie en fonction de la variation ΔL de la longueur de cavité. (a) Zone d'observation de modes quasi–LG. (b) Zone d'observation de modes géométriques.

Le premier point commun est qu'il existe une première zone, notée (a) sur la figure 3.12, dans laquelle on observe bien des modes quasi–LG. De plus, lorsque l'on désaligne la pompe par rapport à l'axe optique de la cavité, on observe également des modes quasi–IG comme le montre la figure 3.13. Sur cette figure, les différences observées entre les profils transverses des modes sur le miroir plan et sur le miroir sphérique mettent bien en évidence l'effet de la dégénérescence. De plus, cette zone d'observation de modes quasi–LG et quasi–IG se traduit par une baisse significative de la puissance de sortie du laser, de même que sur la figure 2.35. Le second point commun est qu'il existe une seconde zone, notée (b) sur la figure 3.12, dans laquelle on observe des modes géométriques, comme le montre la figure 3.14. De plus, cette zone est bien associée à une augmentation de la puissance de sortie du laser comme dans la simulation de la figure 2.35.

Il faut néanmoins noter une incohérence concernant la taille de la pompe nécessaire pour observer des modes quasi–LG et quasi–IG dans la simulation. En effet, nous avons vu que l'observation de tels modes ne peut se faire qu'en pompage très petit, lorsque $w_p \simeq 0{,}33\, w_0$. Or, étant donné les paramètres de la cavité, on a ici $w_0 = 184\,\mu$m et une taille de pompe de l'ordre de

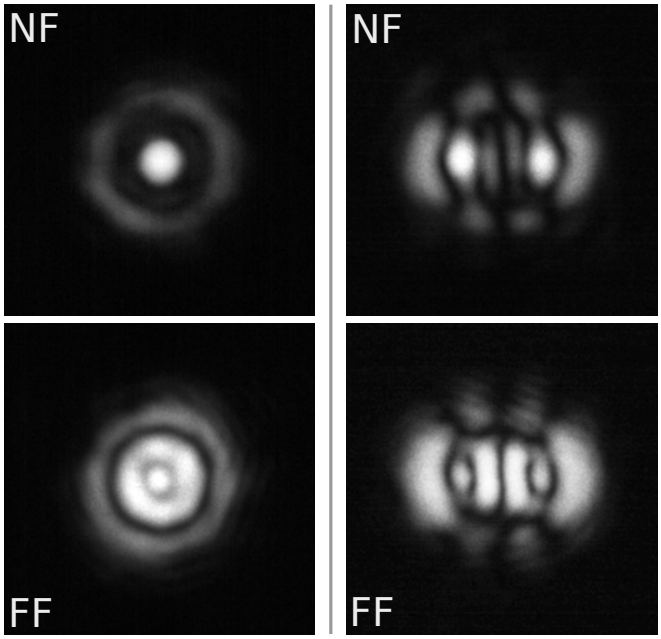


FIGURE 3.13 – Observations expérimentales de modes quasi–LG et quasi–IG en champ proche (NF) et champ lointain (FF).

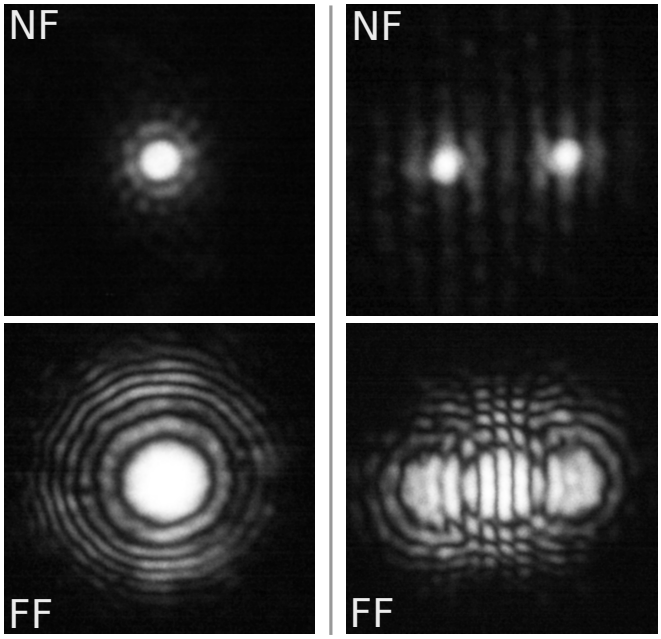


FIGURE 3.14 – Observations expérimentales de modes géométriques en champ proche (NF) et champ lointain (FF).

110 μm correspondant plutôt à un rapport $w_p = 0{,}6\, w_0$. Nous allons voir que la prise en compte d'un effet thermique modifiant localement l'indice de réfraction du cristal permet d'expliquer à la fois la disymétrie de la courbe de puissance de la figure 3.12 ainsi que la possibilité d'observer des modes quasi–LG et quasi–IG sans que la taille de la pompe soit nécessairement très petite par rapport au *waist* de cavité.

Résultats de la simulation Fox–Li

L'absorption de la pompe par le milieu actif induit nécessairement des effets thermiques qui vont venir modifier localement l'indice de réfraction à l'intérieur de la zone pompée. Dans la littérature, on parle généralement de lentille thermique, mais nous allons voir que dans le cas d'un pompage longitudinal la modélisation des effets thermiques par une lentille sphérique est tout à fait insuffisante pour reproduire les observations faites à dégénérescence.

Historiquement, les lasers Nd:YAG utilisaient un milieu actif en forme de barreau plutôt long qui était pompé par *flashs*. En considérant le milieu actif comme un cylindre infini dont l'énergie est apportée de manière uniforme lors du pompage et dont la dissipation thermique se fait uniquement par la surface courbe du cylindre, un calcul simple montre que le profil de température à l'équilibre à l'intérieur du cylindre est parabolique [85]. Si on considère que la variation de l'indice du cristal en fonction de la température est linéaire autour de la température moyenne considérée, le profil d'indice dans le barreau de YAG est également parabolique. Dans ce cas, considérer l'effet thermique comme équivalent à une lentille sphérique conduit à des résultats satisfaisants [91]. En revanche, le milieu actif que nous utilisons est plutôt fin et est pompé longidudinalement. L'énergie de la pompe, et donc la source de l'échauffement, est alors très localisée. De plus, la dissipation de l'énergie se fait cette fois-ci principalement par les faces d'entrée et de sortie du cristal qui sont très étendues devant la taille de la pompe. La modélisation est donc totalement différente du cas précédent, et conduit plutôt à des profils thermiques localisés autour du profil de la pompe, avec un maximum à l'endroit où le faisceau laser de pompe est le plus intense [92].

Par souci de simplicité, nous allons considérer que le profil de température induit par la pompe est gaussien de *waist* $w_{th} > w_p$. On suppose également que la variation de l'indice de réfraction du cristal est proportionnel au profil de température à l'intérieur du cristal. Pour le milieu actif Nd:YAG que nous utilisons, le facteur de proportionnalité est connu et vaut $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T} = 7{,}3\,10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ [93]. Ce facteur est positif, ce qui correspond très localement à un effet de lentille convergente. L'effet thermique que nous introduisons dans la simulation est donc décrit par un opérateur $\mathcal{M}_{th}$ agissant sur un champ u de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_{th}u = \exp\left(-\mathrm{i}p_0 e^{-2\frac{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}{w_{th}^2}}\right) u, \tag{3.8}$$

où p_0 est un paramètre sans dimension dépendant de $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}$ et de la puissance de pompe, introduit de manière phénoménologique.

Nous avons représenté sur la figure 3.15 l'évolution de la puissance de sortie du laser dans la

zone de dégénérescence autour de $\tilde{L} = R_c/2$, calculée par la simulation Fox–Li avec et sans prise en compte des effets thermiques. La taille de la pompe a été fixée à $w_p = 110\,\mu$m et l'étendue de l'effet thermique à $w_{th} = 140\,\mu$m. De plus, nous avons choisi un paramètre $p_0 = 0{,}02$. Le choix de ces valeurs est arbitraire et nous recherchons avant tout un effet qualitatif n'ayant pas les moyens de mesurer les effets thermiques se produisant dans l'expérience. En faisant un développement limité de l'expression (3.8) autour du centre de la pompe et en comparant l'expression obtenue avec celle d'une phase sphérique (2.24), on peut tout de même assurer que le choix des valeurs de p_0 et w_{th} est raisonnable car il conduit à un rayon de courbure d'environ 2,5 m, ce qui correspond à un effet relativement petit. On vérifie d'ailleurs que la prise en compte d'un tel effet thermique hors dégénérescence ne modifie pas le résultat des simulations précédentes. En revanche, à dégénérescence la courbe de la figure 3.15 montre un effet important sur la puissance de sortie du laser.

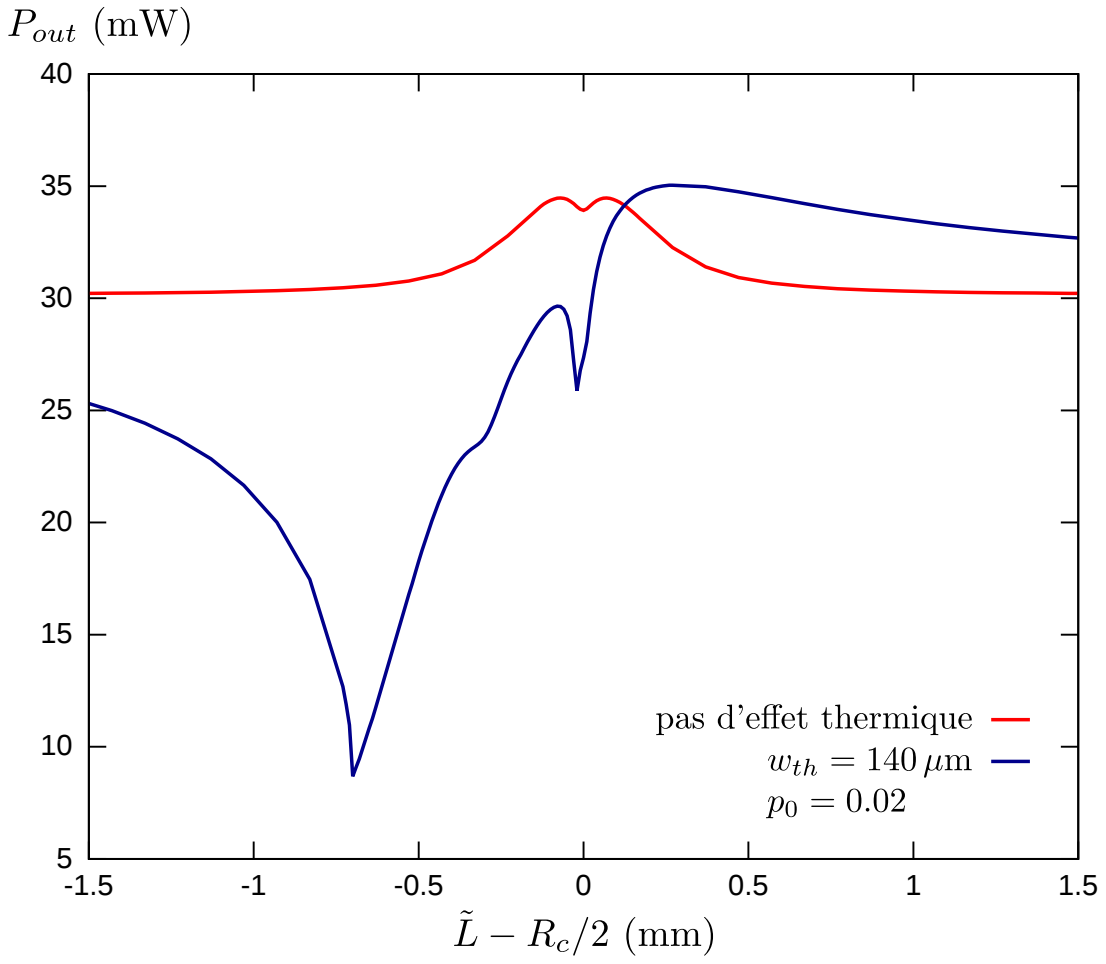


FIGURE 3.15 – Puissance de sortie autour de $\tilde{L} = R_c/2$ calculée par la simulation Fox–Li avec et sans effet thermique, pour une pompe alignée taille $w_p = 110\,\mu$m.

Tout d'abord, nous retrouvons la disymétrie de la courbe de puissance lorsque l'on tient compte des effets thermiques. Celle-ci présente alors également un minimum à gauche de la

dégénérescence exacte, autour duquel on observe des modes quasi–LG. De plus, en désalignant la pompe on observe dans cette région des modes quasi–IG comme le montre la figure 3.16. La comparaison entre les profils expérimentaux de la figure 3.13 et ceux issus de la simulation semble bien valider notre modélisation. Ensuite, nous retrouvons également des modes géométriques autour de la dégénérescence exacte comme le montre la figure 3.17. Cette figure est à mettre en regard des résultats expérimentaux de la figure 3.14, présentant encore une fois un très bon accord qualitatif.

Il y a tout de même un point que la simulation a énormément de mal à retranscrire fidèlement, concernant la largeur de la zone de dégénérescence observée. En effet, avec les paramètres choisis dans la simulation, la largeur de la dégénérescence obtenue est presque 4 fois plus petite que celle observée dans l'expérience. On constate que l'augmentation de w_{th} et p_0 permet d'augmenter la largeur de dégénérescence observée en déplaçant le minimum de puissance vers la gauche, mais pas dans des proportions suffisantes pour reproduire l'expérience. Nous pensons que ce désaccord est dû en partie à la présence de pertes intracavité que l'on ne contrôle pas. En effet, ceci serait tout à fait compatible avec l'augmentation de la largeur des zones de dégénérescence, comme permet de le voir l'étude de l'annexe A. Une seconde raison de ce désaccord entre l'expérience et la simulation est probablement une modélisation un peu trop simple des effets thermiques, qui nécessitent peut-être une prise en compte plus rigoureuse de l'évolution du profil de température dans la direction longitudinale z dans le cristal.

Quoi qu'il en soit, la disymétrie de la courbe de puissance que nous avons mise en évidence grâce à la simulation n'est possible que lorsque le masque de phase modélisant les effets thermiques est bien localisé autour du profil de la pompe. En effet, l'introduction d'une lentille sphérique convergente à la place du miroir plan conduit simplement à translater vers la gauche la courbe de puissance obtenue en l'absence d'effets thermiques, sans laisser place à aucune observation possible de modes quasi–LG ou quasi–IG.

Observations expérimentales dans un laser Nd:YLF

Il est intéressant de remarquer que changer le signe de la phase dans l'expression (3.8) revient simplement à inverser la symétrie de la courbe de puissance de la figure 3.15 autour de $\tilde{L} = R_c/2$. Notre simulation prédit alors que pour une lentille thermique divergente les modes quasi-LG et quasi–IG doivent s'observer à droite de la dégénérescence exacte, après les modes géométriques.

Afin de mettre ceci en évidence expérimentalement, il est nécessaire d'utiliser un cristal dont l'indice de réfraction diminue avec la température. C'est le cas du milieu actif Nd:YLF dont la variation de l'indice avec la température vaut $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T} \simeq -5\,10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ [93]. Celui-ci doit être pompé à 797 nm afin d'émettre à la longueur d'onde de 1053 nm. Nous ne pouvons donc plus utiliser la diode de pompe fibrée à 808 nm du montage expérimental 3.1. À la place, nous utilisons un laser titane–saphir accordable que nous focalisons dans le cristal à l'aide d'une lentille unique de focale 10 cm. Cette fois-ci, nous estimons un *waist* moyen de la pompe à l'intérieur du cristal de $w_p = 40\,\mu$m.

Par manque de temps, il n'a pas été possible d'obtenir une courbe de puissance significative autour de la dégénérescence $\tilde{L} = R_c/2$ dans cette configuration. La seule chose que nous pouvons

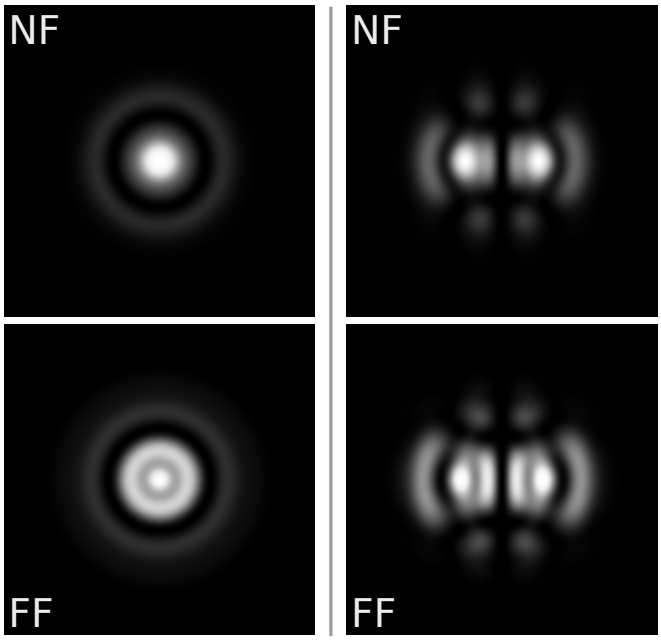


FIGURE 3.16 – Modes quasi–LG et quasi–IG en champ proche (NF) et champ lointain (FF) issus d'une simulation Fox–Li.

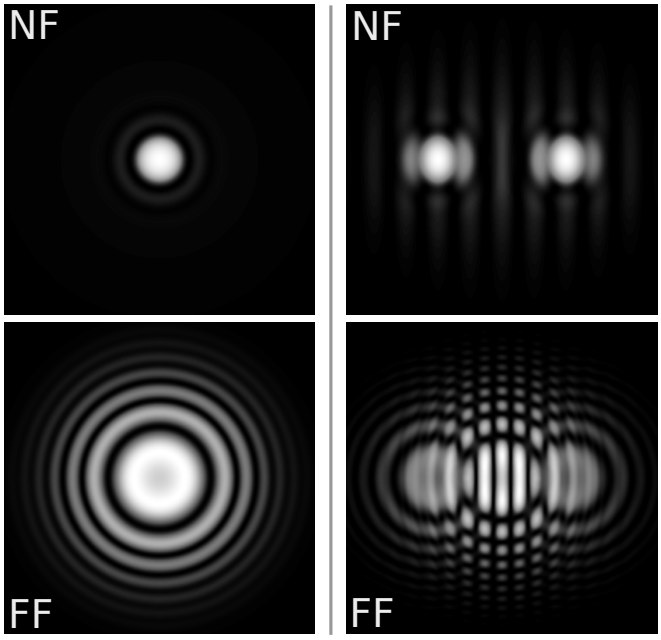


FIGURE 3.17 – Modes géométriques en champ proche (NF) et champ lointain (FF) issus d'une simulation Fox–Li.

affirmer avec certitude est que nous observons toujours une disymétrie dans l'apparition des profils transverses autour de la dégénérescence. En revanche, cette fois-ci les modes quasi–IG apparaissent pour des longueurs de cavité plus grandes que les modes géométriques, dont les profils d'intensité ont été représentés sur la figure 3.18.

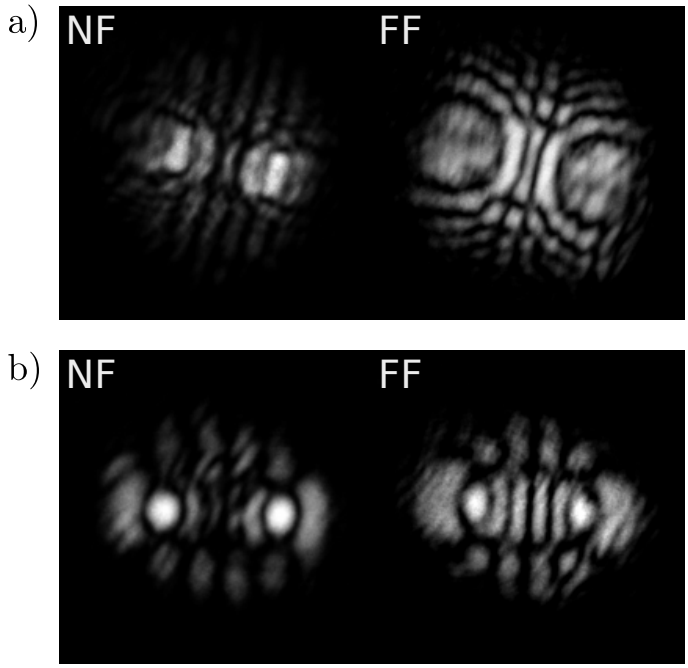


FIGURE 3.18 – Observations expérimentales de modes géométriques (a) et de modes quasi–IG (b) en champ proche (NF) et champ lointain (FF) dans un laser Nd:YLF, autour de la longueur de dégénérescence $\tilde{L} = R_c/2$. Ici, les modes quasi–IG sont obtenus pour $\tilde{L} > R_c/2$, contrairement au cas du Nd:YAG où ils étaient obtenus pour $\tilde{L} < R_c/2$.

Cette expérience constitue une preuve solide du fait que la disymétrie de la courbe de puissance autour de la longueur de dégénérescence $\tilde{L} = R_c/2$ provient bien des effets thermiques. De plus, notre simulation constitue une vérification du fait que le profil d'évolution de la température à l'intérieur du cristal doit être fortement localisé autour du profil de pompe, celui-ci conditionnant fortement les profils transverses observés à dégénérescence.

3.2 Laser plan–concave en configuration *microchip*

Dans cette partie, nous considérons une configuration de cavité très courte de manière à diminuer le *waist* de cavité afin d'atteindre une situation de pompage gros où $w_p > w_0$. Nous allons voir que ce type de configuration est favorable à l'apparition d'états stationnaires constitués de plusieurs modes transverses oscillant à des fréquences différentes. Nous verrons également que certains profils en intensité semblent présenter des vortex, bien qu'on ne puisse pas parler rigoureusement de vortex puisque pris indépendamment aucun des modes transverses constituant l'état stationnaire ne possède de singularité de phase.

3.2.1 Montage et observations expérimentales

Le montage considéré est identique à celui de la figure 3.1 à la différence que la longueur de cavité est fixée à 4 mm, conduisant à un *waist* $w_0 = 97\,\mu$m. De plus, nous utilisons cette fois-ci au choix deux jeux de lentilles de collimation et de focalisation conduisant à des grandissements de la pompe $\gamma = 1/2$ ou $\gamma = 1$. La pompe que nous utilisons est toujours la même, à savoir une diode laser fibrée de diamètre de fibre $\varnothing = 120\,\mu$m. Cette configuration correspond bien entendu à une situation de cavité non–dégénérée dans laquelle nous nous attendons à observer des profils transverses invariants de forme par propagation.

Dans ce type de configuration, certains auteurs ont observé des structures transverses ressemblant à des réseaux de vortex invariants de forme par propagation [94, 95, 96], même si l'origine de ces observations est souvent mal comprise. Afin de reproduire certaines de ces observations expérimentales, nous sommes contraints d'autoriser un maximum de degrés de liberté concernant le pompage, à savoir l'inclinaison de la pompe, sa translation ainsi que sa défocalisation par rapport au *waist* optimal dans le milieu actif. Ainsi, il est impossible de dire que nous contrôlons parfaitement nos paramètres expérimentaux, et nous pensons qu'il en est nécessairement de même pour les expériences citées ci-dessus. Après de nombreux tâtonnements, pour un grandissement de la pompe $\gamma = 1/2$, nous parvenons à observer expérimentalement des réseaux de vortex dont quelques-uns sont recensés sur la figure 3.19. Sur cette figure, nous avons reporté à la fois le profil d'intensité observé au seuil de l'oscillation laser ainsi que celui observé bien au dessus du seuil, dans différentes configurations de pompage.

La première chose que nous remarquons est que le mode observé au seuil va déterminer en partie le type de réseau de vortex qu'il va être possible d'observer en pompage plus intense. En effet, ce mode semble toujours être présent dans l'état stationnaire multimode obtenu bien au dessus du seuil de l'oscillation laser. Ainsi, nous n'avons par exemple jamais pu mettre en évidence une situation dans laquelle le mode fondamental gaussien est observé au seuil et se trouve chassé par d'autres modes d'ordre supérieur en augmentant la puissance de pompe. La seconde chose que l'on peut également remarquer est qu'il semble impossible d'observer un réseau de vortex au seuil de l'oscillation laser. En effet, à chaque fois que nous avons observé un réseau de vortex, nous avons toujours réussi à observer un mode de base contenant des lignes nodales en baissant suffisamment la puissance de pompe. L'apparition de ces profils transverses multimodes ne peut donc pas être expliqué par le régime de gain linéaire du laser, et nécessite absolument l'intervention de la saturation du gain. Ceci tend à confirmer la vision que nous avons développé au chapitre 2 concernant l'ordre d'apparition des modes déterminé par le régime linéaire et l'apparition d'un nouveau mode intervenant uniquement après la saturation des modes déjà présents.

Nous avons également réalisé quelques expériences en utilisant un grandissement $\gamma = 1$ de la pompe en sortie de fibre, conduisant à une taille de pompe dans le milieu actif environ deux fois plus grande que précédemment. Lorsque la pompe est suffisamment bien alignée avec l'axe optique, on observe tout de même une sorte de *pattern* représenté sur la figure 3.20. L'observation d'un mode fondamental gaussien au seuil témoigne bien d'un centrage relativement bon de la pompe.

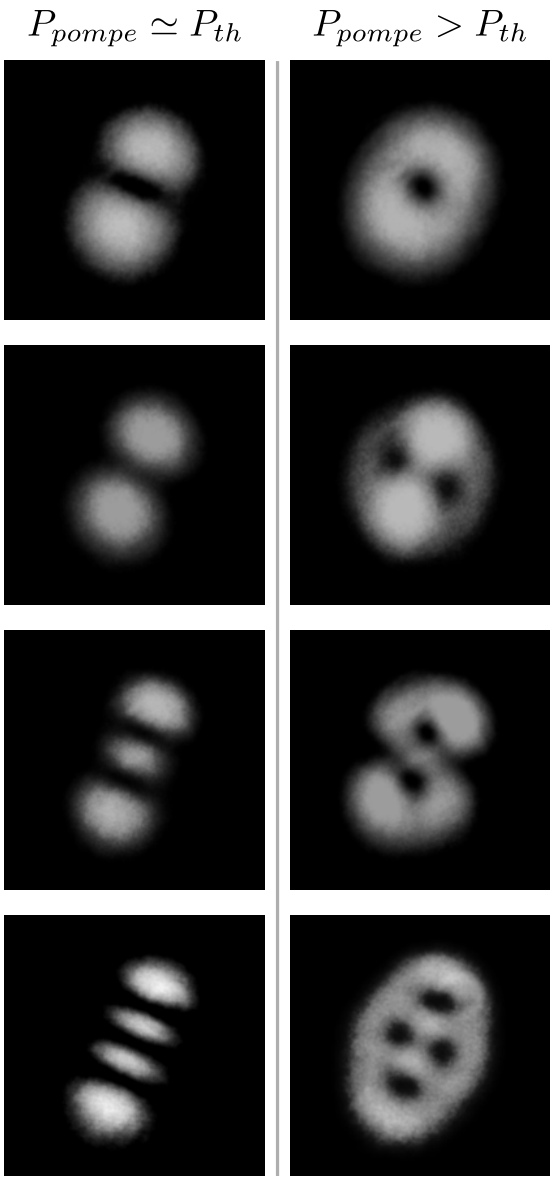


FIGURE 3.19 – Profils d'intensité observés au seuil du laser en pompage gros, ainsi que des réseaux de vortex observés lorsque la puissance de pompe P_{pompe} dépasse la puissance de seuil P_{th}. Le grandissement de la pompe est $\gamma = 1/2$.

L'observation réalisée sur la figure 3.20 n'est pas sans rappeler les observations expérimentales de Dangoisse, Louvergneux *et coll.* dans un laser à CO_2 [97, 98]. Toutefois, à la différence de leurs expériences, nous observons toujours le mode fondamental gaussien initial dans le profil d'intensité multimode du laser. La différence majeure entre les structures que nous observons et celles de l'article [98] est que ces dernières sont en réalité non stationnaires. L'hypothèse simplificatrice concernant l'ordre d'apparition des modes que nous avons effectué précédemment ne semble donc pas s'appliquer dans le cas des lasers à gaz dans lesquels la dynamique des modes transverses semble plus complexe.

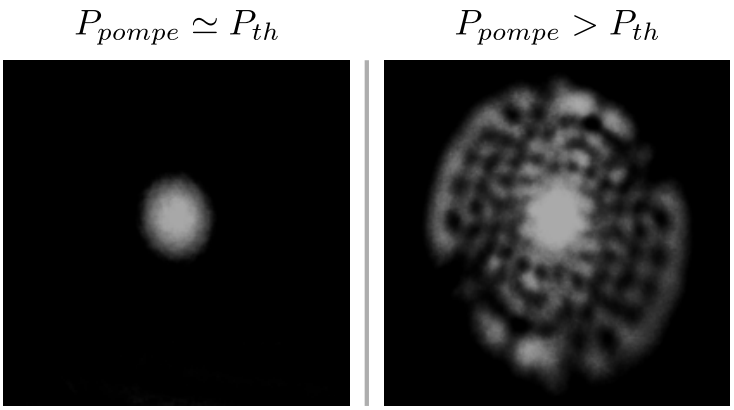


FIGURE 3.20 – Profil d'intensité observé au seuil du laser en pompage gros, et lorsque la puissance de pompe P_{pompe} dépasse la puissance de seuil P_{th}. Le grandissement de la pompe est $\gamma = 1$.

3.2.2 Discussion

Nous avons tenté de reproduire par la simulation Fox–Li multimode des résultats semblables aux observations des figures 3.19 et 3.20, en y introduisant uniquement la notion de pompage gros et incliné par rapport à l'axe optique. Malheureusement nous n'avons jamais réussi à observer de tels réseaux de vortex. Ceci n'est pas si étonnant étant donné le temps nécessaire qu'il faut passer sur l'expérience à effectuer des réglages fins et difficilement reproductibles pour observer des modes présentant des vortex bien visibles, qui ne soient pas recouverts par des modes transverses supplémentaires. La seule manière de reproduire par la simulation les expériences réalisées serait de construire un profil de pompe sur mesure, ce qui ne fait absolument pas partie de nos motivations concernant la compréhension générale de la formation des modes transverses stationnaires dans un laser.

Toutefois, il est assez facile de reconstruire les modes observés sur la figure 3.19 à l'aide de modes usuels sommés en intensité, comme le montre la figure 3.21. Ceci montre bien que le mode apparaissant au seuil sur la figure 3.19 est effectivement toujours présent dans le mode stationnaire final.

Une question se pose toutefois concernant la raison de l'apparition de ces vortex. Il est évident que deux modes possédant des lignes nodales que l'on superpose en intensité possèdera des zéros d'intensité aux positions où les lignes nodales se croisent. Cependant, pour que ces zéros soient bien visibles, il est nécessaire que les lignes nodales des modes mis en jeu se croisent à des endroits où leur intensité est suffisament importante. Nous avons du mal à imaginer comment cela pourrait se produire avec un profil de pompe régulier, même incliné ou excentré par rapport à l'axe optique. Nous pensons en réalité que les irrégularités de la pompe mises en évidence sur la figure 3.2 (a) jouent en la faveur de l'apparition de ces vortex. En effet, ces irrégularités sont d'autant plus importantes que la pompe est défocalisée et nous pensons qu'un profil de pompe possédant plusieurs maxima et minima locaux peut tout à fait imposer la position des zéros d'intensité du profil multimode. Cette hypothèse semble confirmée par l'utilisation d'une pompe fibrée de diamètre $\varnothing = 400\,\mu$m présentant un profil beaucoup plus régulier pour laquelle de tels

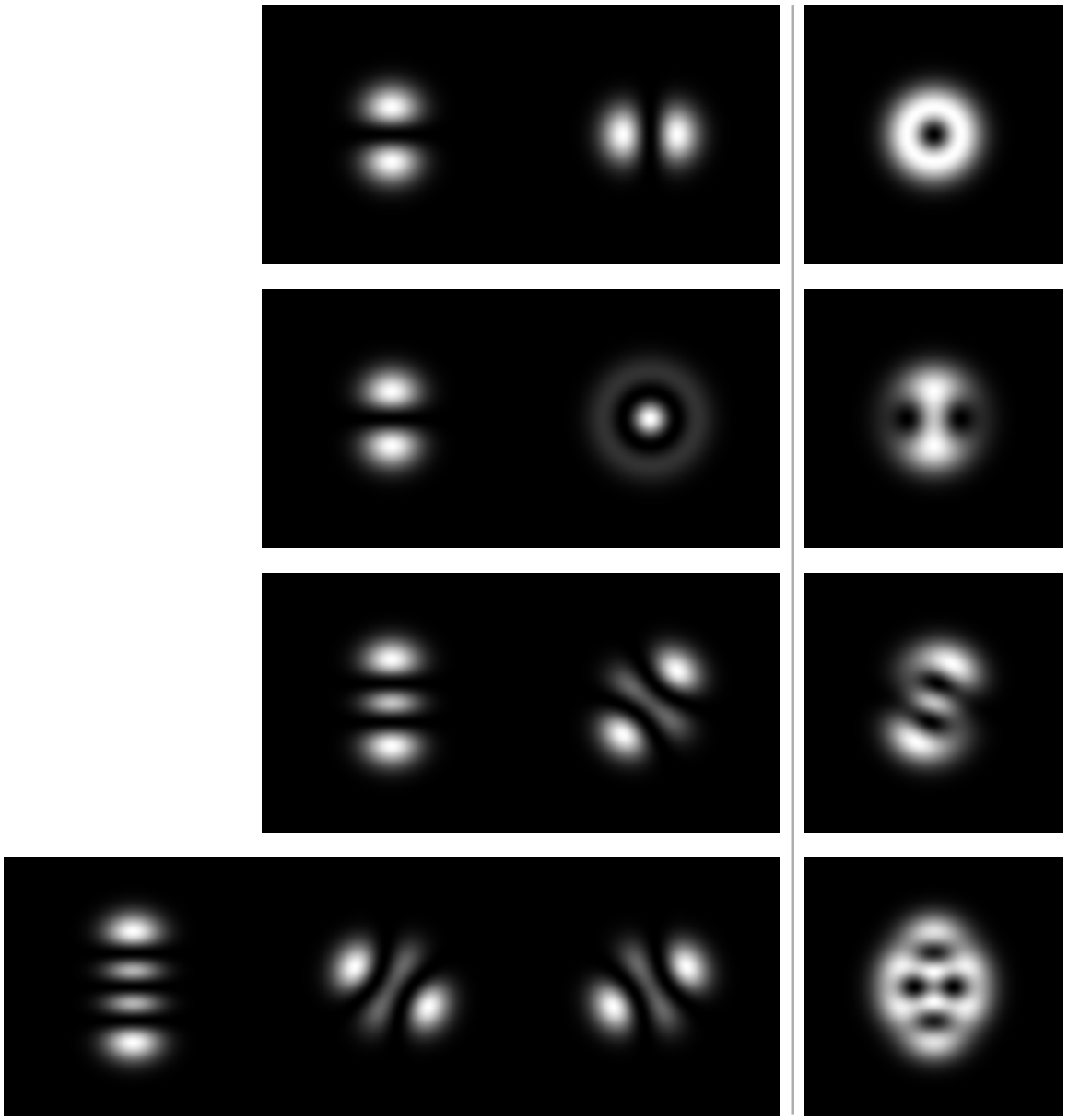


FIGURE 3.21 – Reconstructions des profils d'intensité observés sur la figure 3.19 obtenues en sommant les profils d'intensité de différents modes usuels.

vortex ne sont jamais observés.

Nous pensons donc que toutes les observations de profils transverses exotiques effectuées dans des lasers solides pompés par diode, et même dans tout type de laser de manière générale, sont à considérer avec beaucoup de précautions. Ils sont dans tous les cas probablement dûs à des conditions aux limites non-maîtrisées comme des irrégularités du profil de pompe, des défauts de traitement des faces des éléments optiques intracavité ou même des effets de diaphragme.

3.3 Laser plan–concave en limite de stabilité

Nous nous intéressons ici aux situations particulières dans lesquelles le laser opère à la limite de stabilité de la cavité vide, lorsque $L \simeq R_c$ et parfois même $L > R_c$. Dans les conditions de pompage précédentes où le *waist* de la pompe se situe autour de 100 μm, le laser se comporte de manière tout à fait attendue à savoir que le mode fondamental devient de plus en plus gros sur le miroir sphérique au fur et à mesure que la longueur de cavité augmente, puis le laser passe naturellement en situation de pompage gros et fortement multimode avant de finir par s'éteindre. Dans ces conditions de pompage, le laser cesse toujours de fonctionner pour une longueur de cavité $L < R_c$. En revanche, nous allons observer un comportement tout à fait différent en divisant par deux voire par trois la taille de la pompe. En effet, nous verrons que la forte intensité de la pompe ainsi que les effets thermiques induits permettent de forcer le laser à osciller sur une grande variété de modes quasi–LG avant la limite de stabilité, et sur un mode gaussien au delà de la limite de stabilité. L'interprétation de ces observations ne peut alors plus se faire en termes de modes de la cavité vide, bien que l'intervention d'une dégénérescence forcée puisse constituer une explication assez convaincante.

3.3.1 Observations expérimentales dans un laser néodyme–YAG

Nous reprenons ici le montage de la figure 3.1 en remplaçant la diode de pompe et le doublet de lentilles associé par un laser titane–saphir accordable de *waist* 475 μm et une lentille de focalisation unique de focale $f^{'} = 10$ cm. N'utilisant qu'une lentille de focalisation, la taille et la divergence du faisceau dans le milieu actif va dépendre fortement de la distance d_1 entre la position du *waist* du laser de pompe et la position de cette lentille de focalisation. Expérimentalement, on choisit une distance $d_1 = 180$ cm conduisant à un faisceau focalisé à une distance $d_2 = 10{,}4$ cm après la lentille avec un *waist* de $w_c = 25$ μm. On positionne ensuite la face d'entrée du cristal à une distance d_2 de la lentille de focalisation. La divergence du faisceau de pompe dans le cristal est donnée par $\Theta_c = \frac{\lambda_0}{\pi n_c w_c}$, avec $\lambda_0 = 808$ nm et $n_c = 1{,}82$. L'épaisseur du cristal étant $d = 1{,}1$ mm, ceci conduit à un profil de pompe intégré approximativement gaussien de *waist* $w_p = 28$ μm.

Nous avons représenté sur la figure 3.22 les profils transverses observés en limite de stabilité au fur et à mesure que l'on augmente la longueur de la cavité, dans des situations de pompage aligné et désaligné, pour une puissance de pompe de 2 W. Lorsque l'on approche la limite de stabilité, le premier mode qui vient remplacer le mode fondamental gaussien dans le cas aligné est un mode quasi–LG proche du $LG_{1,0}$. Ensuite, lorsque l'on augmente la longueur de la cavité, le nombre d'anneaux des modes quasi–LG augmente, jusqu'à remplir totalement le miroir de sortie. Lorsque le mode transverse devient tellement grand que le miroir de sortie contribue à le diaphragmer, on peut observer des *patterns* étranges contenant des motifs hexagonaux. Enfin, lorsque l'on franchit la limite de stabilité le mode se refocalise pour donner une gaussienne faiblement divergente. L'observation de ce faisceau gaussien peut alors se faire sur plusieurs millimètres après la limite de stabilité, en fonction de la puissance de pompe.

Dans le cas désaligné, avant la limite de stabilité, il est possible d'observer des modes quasi–IG

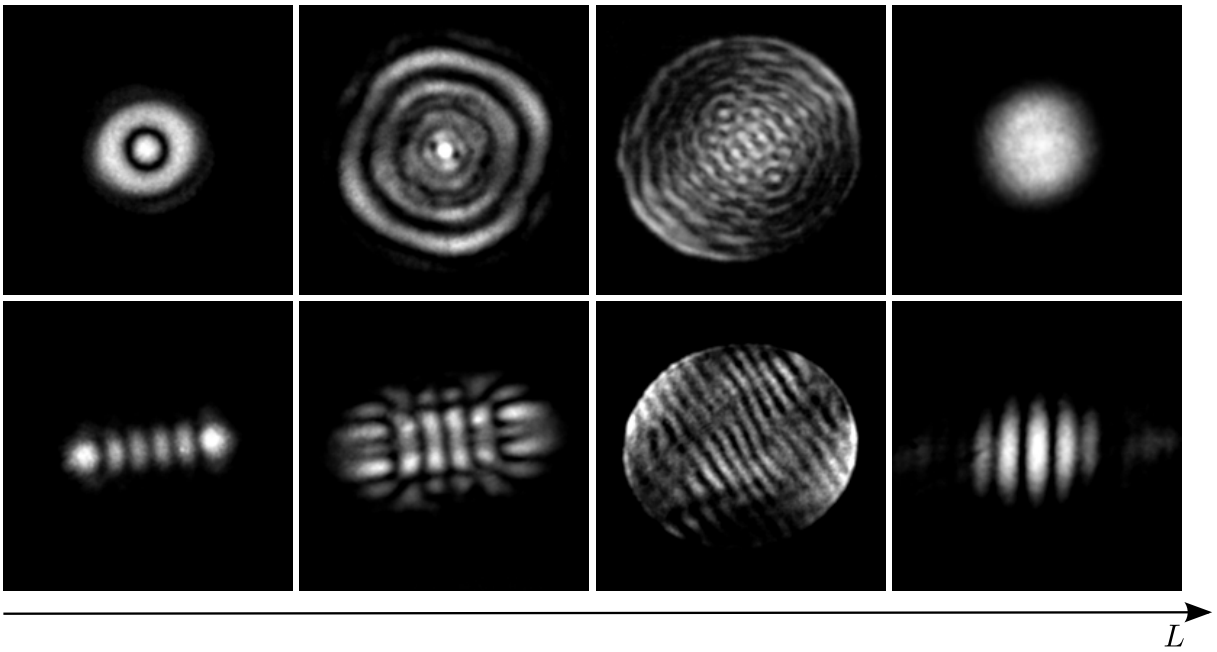


FIGURE 3.22 – Profils transverses observés en champ lointain dans un laser Nd:YAG en limite de stabilité, pour un pompage aligné (en haut) et désaligné (en bas).

même si la plupart du temps les profils transverses des modes observés sont trop originaux pour pouvoir être classifiés. Au delà de la limite de stabilité, le désalignement du faisceau gaussien observé conduit à l'apparition de franges d'interférences semblables à celles du mode géométrique qui serait observé dans un laser constitué de deux miroirs sphériques identiques en configuration confocale [99]. Ceci est un indice important qui nous guide vers une interprétation évoquant une dégénérescence forcée de la cavité. En effet, l'observation de franges d'interférence en champ lointain implique un champ proche constitué de deux distributions localisées séparées dans l'espace, ce qui est uniquement possible si la cavité est dégénérée d'ordre 2.

3.3.2 Observations expérimentales dans un laser titane–saphir

Nous allons montrer ici que les observations réalisées précédemment sont très générales et peuvent également prendre place dans d'autres lasers. Pour cela, nous considérons un laser constitué d'un milieu actif titane–saphir (Ti:Sa) d'épaisseur 5 mm collé au miroir plan et pompé à 532 nm par un faisceau laser focalisé dans le cristal avec un *waist* équivalent $w_p = 50\,\mu$m.

Le milieu actif Ti:Sa possède un pic d'absorption à 488 nm et sa bande d'absorption est large, entre 400 et 600 nm. Son pic d'émission stimulée se situe à 795 nm et sa bande d'émission est également très large, entre 660 et 1050 nm [100]. Il existe également des pertes par réabsorption non-résonnantes dans l'infrarouge [100, 101], celles-ci pouvant être supposées uniformes et indépendantes du taux de pompage [102].

Expérimentalement, nous observons un comportement étrange de ce laser par rapport au laser Nd:YAG étudié précédemment. En effet, celui-ci ne lase jamais avant la limite de stabilité, même

en pompage très fort (5W), sauf aux longueurs de dégénérescence particulières $L = R_c/2$ et $L = R_c/4$. Ce comportement étrange peine à s'expliquer par la simulation, même en tenant compte de pertes par réabsorption du faisceau laser dans les régions non pompées du cristal. En revanche expérimentalement, dès que l'on atteint la limite de stabilité ce laser possède un comportement similaire au laser Nd:YAG. Nous avons représenté sur la figure 3.23 un exemple de modes quasi–LG d'ordre élevé et de *patterns* que l'on observe dans ce laser Ti:Sa pour une puissance de pompe de 4,5 W. Ces observations sont tout à fait semblables à celles de la figure 3.22.

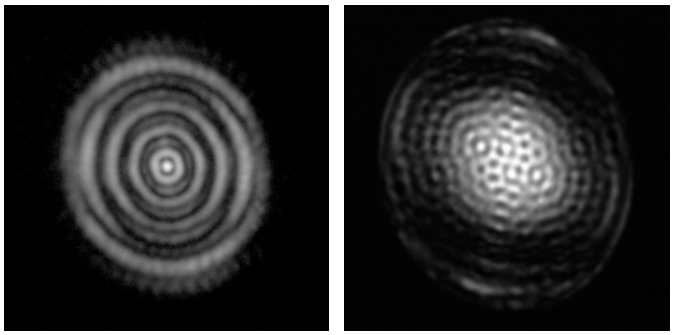


FIGURE 3.23 – Modes quasi–LG et *patterns* observés dans un laser titane–saphir en limite de stabilité.

Lorsque l'on dépasse la limite de stabilité, le faisceau se refocalise pour former un mode gaussien comme décrit précédemment. De plus, lorsque l'on désaligne le faisceau de pompe par rapport à l'axe optique de la cavité, on retrouve le profil de franges observées en champ lointain, issues de l'interférence entre deux structures séparées spatialement dans le milieu actif, dont une est localisée au niveau du profil de pompe. Un de ces modes transverses expérimentaux est représenté sur la figure 3.24. De même que dans l'expérience avec le milieu actif Nd:YAG, le faisceau gaussien refocalisé s'observe sur une plage de plusieurs millimètres au delà de la limite de stabilité. En revanche, la plage d'observation du motif de franges d'interférences de la figure 3.24 est plus restreinte.

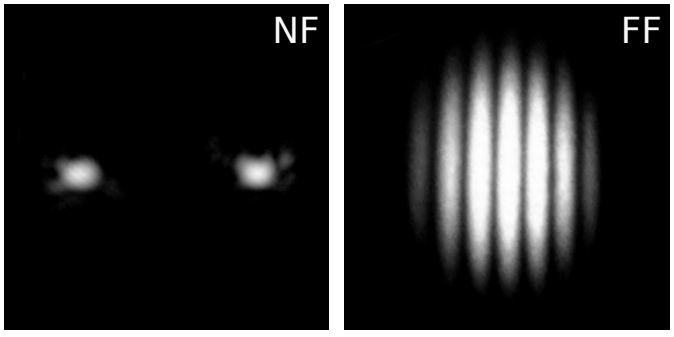


FIGURE 3.24 – Structures localisées en champ proche (NF) et profil d'interférences résultant en champ lointain (FF) observés dans un laser titane–saphir au delà de la limite de stabilité.

Concernant toutes les expériences que nous avons réalisé en limite de stabilité, à la fois dans le laser Nd:YAG et dans le laser Ti:Sa, il est important de remarquer que tous les profils

transverses observés présentent une symétrie centrale, même dans le cas des *patterns* possédant une structure complexe. Ceci témoigne du rôle important que joue toujours la cavité même dans une telle configuration en imposant aux modes stationnaires de combiner uniquement des modes de base possédant la même parité. Ceci constitue un élément supplémentaire allant dans le sens d'un comportement de cavité dégénérée d'ordre 2, même si d'un point de vue de l'optique géométrique la cavité considérée est instable. Nous allons voir à l'aide de notre simulation que ce comportement peut s'expliquer facilement à l'aide de la notion de guidage par le gain et des effets thermiques.

3.3.3 Résultats de simulations et discussion

La condition de cavité en limite de stabilité que nous souhaitons étudier n'est plus en accord avec l'hypothèse simple que nous avons faite jusqu'à présent, supposant que les profils transverses des modes propres du laser évoluent peu à l'intérieur du milieu actif ($d \ll z_R$). Nous ne pouvons donc plus nous contenter d'utiliser une seule feuille de gain contenant le profil de la pompe intégré sur la longueur d du cristal. Au contraire, il est cette fois-ci absolument nécessaire de prendre en compte la propagation du faisceau à l'intérieur du milieu actif en le découpant en différentes tranches. Dans la simulation, nous avons toutefois constaté que deux feuilles de gain positionnées sur les faces d'entrée et de sortie du cristal suffisent à reproduire qualitativement les observations expérimentales. Les résultats que nous présentons ici sont issus de cette modélisation minimaliste.

Nous reprenons donc la simulation Fox–Li que nous avons développée précédemment en utilisant deux feuilles de gain et deux feuilles de phase modélisant les effets thermiques, positionnées au niveau des faces d'entrée et de sortie du cristal. Le *waist* de la pompe dans chacune des feuilles de gain est fixé à $w_p = 45\,\mu$m. Concernant la modélisation des effets themiques, nous reprenons le profil de phase gaussien défini en (3.8) avec $w_{th} = w_p$ et $p_0 = 0{,}2$. Nous notons que la valeur de p_0 utilisée ici est nettement plus importante que celle que nous avons utilisée avec la diode de pompe fibrée, mais celle-ci est cohérente avec la diminution significative de la taille du faisceau de pompe et l'augmentation de la puissance de pompe nécessaires pour parvenir aux observations expérimentales en limite de stabilité. De plus, nous devons tenir compte de la taille importante du mode sur le miroir sphérique et donc des effets de diaphragme qui peuvent en résulter. Pour cela, la propagation avec grossissement que nous avons décrite au chapitre 2 utilisant l'équation (2.21) est absolument indispensable. En effet, la grille que nous utilisons au niveau du miroir plan mesure 2 mm de côté tandis que celle que nous utilisons au niveau du miroir sphérique mesure 3 cm de côté. De cette manière, nous pouvons modéliser un diaphragme de diamètre 1 pouce, soit 2,54 cm, pour tenir compte de l'extension réelle finie du miroir de sortie. Nous avons représenté sur la figure 3.25 les profils transverses obtenus à l'aide de cette simulation Fox–Li pour différentes longueurs de la cavité.

La première chose que l'on constate est que bien que l'on soit dans une situation de pompage fort et très petit avec une lentille thermique importante, il existe toujours des longueurs de cavité pour lesquelles des modes invariants de forme par propagation de type $\mathrm{IG}^e_{n,n}$ peuvent être observés. Ensuite, au fur et à mesure que l'on se rapproche de la limite de stabilité, nous observons des modes quasi–LG avec de plus en plus d'anneaux dans le cas aligné, et des modes

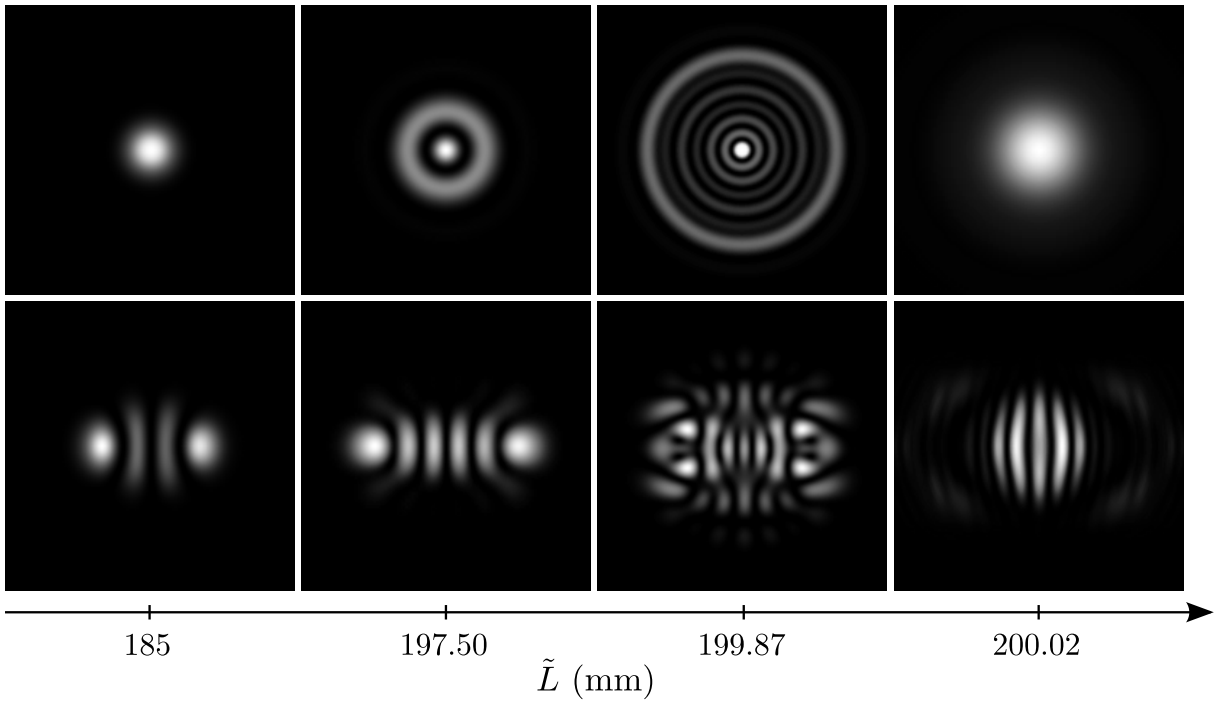


FIGURE 3.25 – Profils transverses en champ lointain issus d'une simulation Fox–Li en limite de stabilité faisant intervenir une pompe de taille $w_p = 50\,\mu$m ainsi qu'un effet thermique ($w_{th} = w_p$ et $p_0 = 0{,}2$), pour un pompage aligné (en haut) et désaligné (en bas).

qui peuvent être assez exotiques dans le cas désaligné. Qualitativement, ce comportement est tout à fait semblable à celui des expériences que nous avons décrites dans les lasers Nd:YAG et Ti:Sa. Enfin, lorsque l'on franchit la limite de stabilité, le faisceau se refocalise comme dans l'expérience pour former une gaussienne dans le cas aligné et des franges d'interférences dans le cas désaligné. Sur la figure 3.25, les franges d'interférences observées ne sont pas parfaites, mais il est possible d'obtenir un résultat vraiment similaire à celui de la figure 3.24 en augmentant simplement l'effet thermique, comme le montre la figure 3.26.

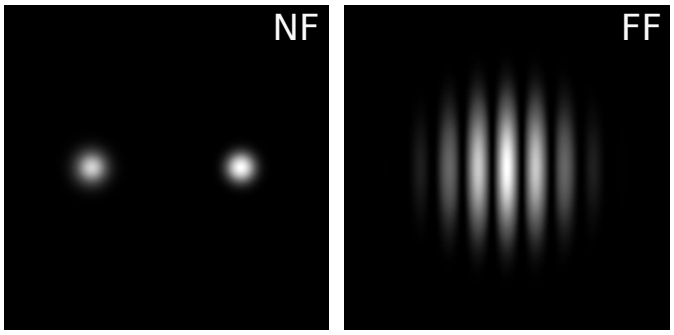


FIGURE 3.26 – Modes transverses sur le miroir plan (NF) et profil et sur le miroir sphérique (FF) obtenus dans une simulation Fox–Li au delà de la limite de stabilité, avec une pompe désalignée et des effets thermiques importants.

Nous n'observons pas de *patterns* dans la simulation donnant les modes de la figure 3.25, même lorsque le mode remplit totalement le miroir de sortie au point d'être diaphragmé. En fait, il manque un élément essentiel nécessaire à l'observation de ces structures hexagonales qui est le décentrage du diaphragme du miroir sphérique par rapport à l'axe optique de la cavité. Un tel décentrage peut être obtenu involontairement expérimentalement si le miroir sphérique a été incliné pour faire coincider l'axe optique de la cavité avec l'axe de la pompe alors que la hauteur du centre du miroir était légèrement différente de celle du faisceau de pompe. Pour un décentrage du diaphragme de 2 mm seulement dans la simulation, nous obtenons les *patterns* de la figure 3.27 dans lesquels on retrouve bien les motifs hexagonaux recherchés.

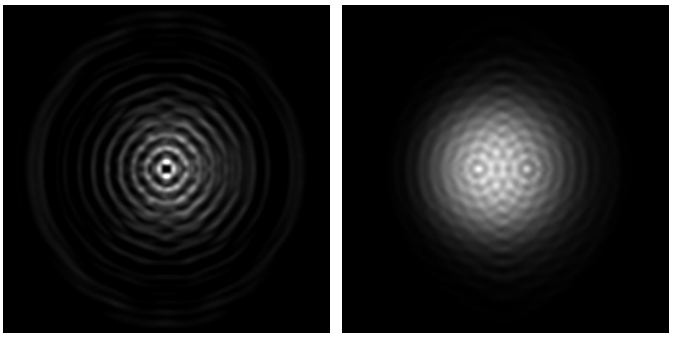


FIGURE 3.27 – Patterns en champ lointain issus d'une simulation Fox–Li en limite de stabilité pour un miroir sphérique dont les bords constituent un diaphragme décentré par rapport à l'axe optique de la cavité.

Tous les modes que nous avons observé en simulation présentent également une symétrie centrale dans leurs profils d'intensité. Ceci signifie que les modes de base invariants par propagation qui les composent ont tous la même parité. Cette contrainte est importante et ne peut être attribué qu'à la présence de la cavité dont la longueur est proche de $L = R_c$. L'interprétation que nous en faisons est que la présence des effets thermiques et du gain contribuent à forcer une dégénérescence qui ne pourrait pas avoir lieu autrement. En effet, lorsque $L \simeq R_c$ avec $R_c = 20$ cm, un faisceau gaussien de *waist* de taille inférieure ou égale à $50\,\mu m$ accumule une phase de Gouy de l'ordre de π sur un aller–retour dans la cavité et revient avec un *waist* peu différent de sa taille initiale et un front d'onde peu différent d'un front d'onde plan. Ceci correspond presque à une situation de dégénérescence d'ordre 2. On peut alors supposer que de la même manière que le gain et les effets thermiques contribuent à élargir les zones de dégénérescences, ils peuvent également apporter une modification suffisante au faisceau pour forcer une dégénérescence qui n'est pas rigoureusement atteinte pour des modes dans la cavité vide. On se retrouve alors dans une situation originale où la cavité peut être vue comme étant dégénérée d'ordre 2 sans toutefois imposer de taille aux modes de base, celle-ci étant imposée par la géométrie de la pompe et des effets thermiques.

Il est important de souligner que dans cette expérience, la présence des effets thermiques est essentielle pour permettre au laser de fonctionner au delà de la limite de stabilité en donnant naissance à un faisceau gaussien dans le cas aligné et à des franges d'interférences dans le cas désaligné. De plus, comme précédemment la modélisation des effets thermiques par une lentille

sphérique ne permet absolument pas d'expliquer ces observations. La prise en compte d'une variation de température suivant approximativement le profil de la pompe est encore une fois absolument nécessaire pour pouvoir reproduire convenablement dans la simulation les résultats observés expérimentalement.

Finalement, cette étude nous permet d'apporter une interprétation physique à l'expérience historique de Flood *et coll.* [43] (1989). Nous rappelons que dans cette expérience, les auteurs étudient également une cavité en limite de stabilité contenant un barreau de Nd:YAG comme milieu actif. À la différence de notre expérience, le milieu actif est collé au miroir sphérique qui joue le rôle du miroir d'entrée. L'expérience met donc en jeu une situation de pompage extrêmement petit, d'autant plus que la longueur de cavité augmente et que la taille du mode sur le miroir sphérique grossit. Les auteurs observent alors des modes comportant des anneaux dont le nombre augmente avec la longueur croissante de la cavité. Ils sont pourtant prudents et soulignent bien que ces modes présentent des différences notables avec les modes de Laguerre–Gauss usuels et sont parfois plus proches des faisceaux de Bessel. En regardant le profil de leurs faisceaux, on comprend qu'ils observent en réalité des modes quasi–LG très semblables à ceux de notre expérience, et que la bonne interprétation pour l'apparition de ces modes est une dégénérescence d'ordre 2 forcée par la limite de stabilité et la petite taille de la pompe.

Pour conclure ce chapitre, nous avons donc reproduit l'expérience de Flood *et coll.* à l'aide d'une simulation Fox–Li, en utilisant la géométrie de cavité et de pompe décrite dans l'article [43]. Nous n'avons pas introduit d'effets thermiques dans la simulation car ceux-ci ne sont pas nécessaires à l'interprétation des résultats obtenus dans cette expérience. En limite de stabilité, la simulation permet d'observer comme dans l'expérience originale des modes possédant de plus en plus d'anneaux en champ lointain au fur et à mesure que la longueur de la cavité augmente et se rapproche de la limite de stabilité. Nous avons représenté sur la figure 3.28 un exemple de mode quasi–LG que l'on observe en limite de stabilité, en champ proche et en champ lointain.

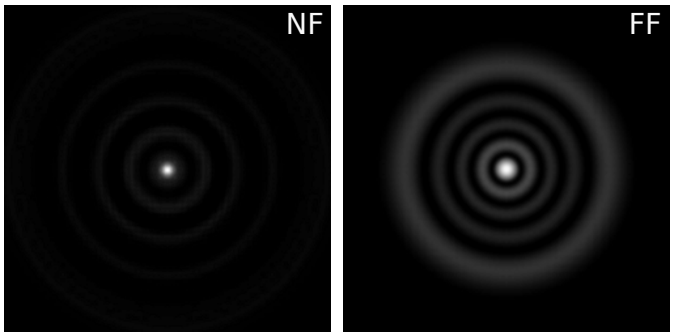


FIGURE 3.28 – Modes quasi–LG observés sur le miroir sphérique (NF) et sur le miroir plan (FF) dans une cavité concave–plan en limite de stabilité, à l'aide d'une simulation Fox–Li.

En champ proche, les anneaux ne sont quasiment pas visibles et la taille du lobe principal du mode correspond à la taille de la pompe. La taille du *waist* des modes de la cavité vide n'a alors plus aucune pertinence pour décrire le mode observé. Comme dans nos expériences, ceci peut être interprété comme la manifestation d'une dégénérescence d'ordre 2 forcée par un pompage petit en limite de stabilité où $L \simeq R_c$.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse nous a permis d'étudier la formation des structures transverses stationnaires dans les lasers pompés longitudinalement en nous appuyant sur le cas particulier d'une cavité plan–concave sans que cela ne nuise toutefois à la généralité des conclusions apportées. Nous avons montré que le problème de la formation des modes transverses dans une telle cavité peut être résumé en deux situations très différentes, en fonction que la cavité soit dégénérée ou non. Lorsque l'épaisseur du milieu actif est petite devant la longueur de Rayleigh des modes propres de la cavité vide, nous avons montré que les modes propres sélectionnés dans une cavité non–dégénérée sont toujours invariants de forme par propagation. La résolution du problème de la sélection d'un mode transverse par la cavité peut alors se réduire à la maximisation d'une intégrale de recouvrement mode–gain faisant intervenir un mode propre de la cavité vide d'ordre unique et le profil de gain non saturé. Nous avons de plus montré que dans ce cas l'introduction de la saturation ne vient pas modifier significativement le mode propre sélectionné dans le régime linéaire. En revanche, le cas d'une cavité dégénérée est plus compliqué à traiter car les modes propres de la cavité peuvent être beaucoup plus riches. En effet, ceux-ci ne sont plus contraints d'être d'ordre unique mais peuvent combiner différents modes dont les ordres sont égaux modulo l'ordre de la dégénérescence. Par ailleurs, nous avons montré que le fait d'introduire un gain dans la cavité transforme les dégénérecences ponctuelles de la cavité vide en des zones de dégénérescence étendues laissant place à l'observation d'une grande variété de profils transverses. Pour simplifier, on peut diviser en deux catégories le type de profils transverses qu'il est possible d'observer autour d'une longueur de dégénérescence de la cavité vide. Lorsque la taille de la pompe n'est pas trop petite, les modes sélectionnés par la cavité sont très bien décrits par des modes géométriques dont le profil transverse est obtenu en sommant un nombre fini d'aller–retours successifs dans la cavité d'une distribution initiale suivant le profil de la pompe. Lorsque la taille de la pompe devient très petite par rapport à la taille du *waist* de la cavité vide et que l'on s'éloigne de la longueur de dégénérescence exacte, un deuxième type d'observation peut être réalisé faisant intervenir des modes que nous avons qualifié de quasi–LG ou quasi–IG. Ces modes possèdent en effet des profils transverses très proches de modes Laguerre–Gauss ou Ince–Gauss en champ lointain mais changent en réalité de forme au cours de leur propagation. De plus, bien que ces modes ne s'observent pas à dégénérescence exacte, nous avons pu vérifier que les ordres des modes les composant étaient parfaitement compatibles avec l'ordre de la dégénérescence la plus proche.

Un des premiers résultats que nous avons vérifié à la fois analytiquement, numériquement et expérimentalement est l'impossibilité d'exciter des modes transverses d'ordre supérieur unique

contenant des lignes nodales fermées en utilisant un profil de pompe possédant un seul maximum local. Les seuls modes d'ordre supérieur que l'on peut espérer exciter avec un tel profil de pompe sont des modes Ince–Gauss de type $\mathrm{IG}^{e}_{n,n}$ contenant uniquement des lignes nodales droites ou hyperboliques, ou des modes $\mathrm{IG}^{e}_{n,n}$ déformés contenant des lignes nodales serpentantes. Ceci remet sérieusement en cause la méthode numérique développée par Chu et Otsuka dans l'article [77]. De plus, nous pensons que les observations de modes Ince–Gauss qui ont été réalisée récemment dans la littérature [17, 47] sont soit dûs à des conditions expérimentales mal contrôlées et donc non reproductibles, soit à l'effet d'une dégénérescence partielle et à l'observation de modes quasi–IG en réalité. L'effet d'une dégénérescence partielle est d'ailleurs avéré dans une bonne partie des observations réalisées dans l'article [17]. En effet, le fait que certains profils d'intensité présentent une disymétrie assez notable est le signe caractéristique d'une dégénérescence d'ordre impair.

Une deuxième chose que nous avons mis en évidence concerne l'extrême sensibilité de la formation des profils transverses à dégénérescence vis-à-vis de petits effets sur la phase du mode à chaque aller–retour dans la cavité. Nous avons en effet montré qu'un petit effet de lentille thermique non sphérique pouvait modifier substantiellement les observations effectuées à dégénérescence sans que cela ne perturbe par ailleurs la formation des modes dans les situations non–dégénérées. Ainsi, nous avons démontré que la présence d'une lentille de phase gaussienne reproduisant qualitativement les effets thermiques dans le milieu actif permettait d'expliquer l'apparition de modes quasi–LG et quasi–IG dans des situations de dégénérescences partielles sans que la taille de la pompe n'ait besoin d'être très petite par rapport au *waist* de la cavité. Expérimentalement, nous avons utilisé deux milieux actifs différents, le Nd:YAG et le Nd:YLF, dans lesquels la lentille thermique est convergente ou divergente respectivement, afin de mettre en évidence une disymétrie dans l'observation des modes quasi–IG autour de la longueur de dégénérescence $L = R_c/2$ dans chacun des deux cas. Cette expérience permet de montrer qu'une modélisation rigoureuse des effets thermiques dans le milieu actif est réellement critique pour expliquer les profils transverses observés à dégénérescence, et que leur modélisation par une lentille sphérique comme on le rencontre souvent dans la littérature est tout à fait inadaptée dans le cas d'un pompage longitudinal.

Enfin, nous avons étendu notre étude à des cas de cavité à la limite et même au delà de la stabilité. Ceci nous a permis de montrer que même dans des situations exotiques comme celles-ci, la présence de la cavité conditionne fortement la formation des modes transverses. Nous avons ainsi mis en évidence le fait que le fonctionnement d'un laser dans une cavité instable cache la notion de dégénérescence forcée. De la même manière que le gain et les effets thermiques localisés permettent de transformer les longueurs discrètes de dégénérescence de la cavité vide en des zones de dégénérescence étendues, ceux-ci permettent de forcer une dégénérescence qui ne pourrait pas avoir lieu sinon. Nous avons donc pu mettre en évidence expérimentalement et par la simulation l'appartition de modes quasi–LG contenant un grand nombre d'anneaux au fur et à mesure que l'on se rapproche de la limite de stabilité. La notion de dégénérescence forcée nous permet donc d'interpréter les observations originales de Flood *et coll.* comme étant des modes quasi–LG, mettant définitivement un terme à l'idée reçue que cette expérience avait engendrée, à savoir qu'une situation de pompage petit peut contribuer à la sélection de modes Laguerre–Gauss d'ordre supérieur.

Même si la méthode de Fox–Li que nous avons développé et utilisé pour nos simulations permet d'expliquer les résultats expérimentaux de manière plutôt convaincante, de nombreuses questions restent en suspens liées à l'utilisation de cette méthode. Dans cette thèse, nous avons tenté de calculer les états stationnaires sélectionnés par le laser en ignorant au maximum la dynamique temporelle intervenant dans la formation des modes. Pourtant, la connaissance de cette dynamique temporelle est en réalité essentielle, car après avoir montré au chapitre 2 que l'algorithme de Fox–Li saturé ne pouvait pas être considéré comme un algorithme physique, nous avons montré que l'adaptation de cet algorithme pour forcer sa convergence requérait un choix à faire quant-au mode stationnaire visé. Le choix que nous avons fait repose sur la connaissance du mode propre de valeur propre la plus grande calculé par l'algorithme de Fox–Li linéaire. Ce choix a été guidé par la démonstration que nous avons faite au chapitre 1 que l'algorithme de Fox–Li linéaire pouvait lui en revanche être interprété comme reproduisant qualitativement la dynamique temporelle au début de l'oscillation laser, avant même que l'on puisse parler de mode longitudinal. On peut d'ailleurs noter que selon notre vision des choses, la notion de mode transverse existe dans le laser bien avant la notion de mode longitudinal qui elle n'a de sens que lorsque l'état stationnaire est atteint. Connaissant le mode transverse que l'on suppose être sélectionné majoritairement dans un régime d'amplification linéaire de l'oscillation laser, nous avons ensuite émis l'hypothèse que le mode stationnaire qui allait en résulter devait pouvoir être obtenu à partir de celui-ci par des modifications suffisament douces entre chaque aller–retour dans la cavité. Nous avons alors introduit un critère d'interférence du champ avec lui-même après un aller retour dans la cavité interdisant par exemple au mode de changer d'ordre au cours de la simulation. Sans cela, la simulation Fox–Li peut très bien transformer un mode fondamental gaussien sélectionné par le régime linéaire en vortex d'ordre 1 apparaissant avec la saturation, ce qui ne semble pas physique et n'est d'ailleurs jamais observé expérimentalement. En effet, il est très simple de vérifier expérimentalement que si un mode gaussien apparaît au seuil de l'oscillation laser, celui-ci ne disparaît jamais en augmentant la puissance de la pompe. De manière plus générale, nous avons observé que l'augmentation de la puissance de pompe bien au dessus du seuil ne semble jamais faire disparaître le mode transverse ayant été le premier à apparaître au seuil. Ce qui se produit en revanche est l'apparition de modes transverses supplémentaires afin de compenser le surplus de gain non saturé par le premier mode. Ceci nous a donc guidé dans la conception d'un algorithme de Fox–Li multimode en imaginant une dynamique très simple dans laquelle le premier mode oscillant a le temps de saturer le gain avant de donner place à un nouveau régime linéaire dans lequel un second mode saturera une partie du gain restant et ainsi de suite. Cette vision très idéalisée de la compétition entre modes nous a permis d'expliquer quelques observations simples faisant intervenir au maximum deux ou trois modes transverses différents mais nous ne pensons évidemment pas qu'elle soit très robuste et pertinente lorsque la pompe devient très grosse et que le mode stationnaire contient un grand nombre de modes transverses différents.

Pour aller plus loin dans notre compréhension de la sélection des modes dans un laser, il serait intéressant de développer un modèle permettant de tenir compte à la fois des aspects spatiaux et temporels de l'établissement des états stationnaires. Ayant montré que la cavité jouait toujours un rôle essentiel dans la sélection des modes transverses dans un laser, il serait

illusoire de se lancer dans une telle étude de la dynamique de formation des modes en considérant uniquement les équations régissant les interactions entre la lumière et la matière dans le milieu actif. Les seules études qui puissent être menées en faisant abstraction de la cavité concernent soit la dynamique d'un état stationnaire dont on connaît à l'avance les modes transverses qui le constituent, soit l'établissement d'un mode stationnaire dans un laser à cavité plan–plan très courte de type *microchip* ou VCSEL. Ce type d'études analysant l'évolution dynamique des populations de modes de cavité en s'appuyant sur les équations de Maxwell–Bloch a largement été développé dans des articles théoriques des années 90 [103, 104, 105]. Dans tous les cas, le problème complet de la formation des modes transverses au cours du temps à partir d'un bruit dans un laser et de l'émergence d'un état stationnaire dans lequel les fréquences longitudinales deviennent bien définies me paraît être à l'issue de cette thèse un problème très difficile à poser et à aborder.

En conclusion de cette étude, nous pouvons dire que l'excitation de modes d'intérêt comme les modes Laguerre–Gauss portant un moment angulaire orbital, ou les faisceaux de Bessel faiblement diffractants est difficilement accessible à une cavité laser conventionnelle constituée de miroirs plans ou sphériques, peu importe le profil de la pompe. En revanche, si on introduit des degrés de liberté supplémentaires pour la confection de la cavité en considérant des miroirs dont le profil de phase peut être façonné sur mesure, le principe de propagation inverse de la lumière par conjugaison de phase exploité convenablement [18] peut permettre de concevoir des cavités permettant l'oscillation de nombreux modes exotiques. L'étude que nous avons mené dans cette thèse reste alors tout à fait d'actualité et se généralise très facilement à ce nouveau type de cavité. Par exemple, nous avons pu vérifier à l'aide de notre méthode de simulation qu'il est tout à fait possible en principe de concevoir une cavité permettant l'oscillation des modes contenant des vortex présentés dans l'annexe B, même en utilisant une pompe gaussienne. Curieusement, cette méthode n'est pas très utilisée dans la littérature, même si on peut noter quelques exemples illustrant des succès de son application pour l'obtention de profils de faisceaux carrés [106], super-gaussiens [107], *flat–top* [108] ou des faisceaux de Bessel [20].

Enfin, il ne serait pas possible de terminer ce manuscrit sans évoquer l'existence d'une nouvelle technologie de façonnement de faisceaux lasers hors cavité développée par l'entreprise CAILabs. Celle-ci s'appuie principalement sur les résultats de la thèse de Jean-François Morizur réalisée au Laboratoire Kastler Brossel sous la direction de Nicolas Treps. Cette technique repose sur un résultat de la théorie des groupes [109] montrant que toute transformation unitaire du champ peut être réalisée par l'intermédiaire d'une succession de transformées de Fourier et de passages par des masques de phase adaptés. Ainsi, au delà d'une transformation d'un mode quelconque en un autre qui est triviale avec cette technologie, il est possible de transformer un système de plusieurs modes orthogonaux en un nouveau système de modes orthogonaux [110], ce qui rend cette approche unique en son genre. À titre d'exemple, CAILabs développe un multiplexeur spatial qui prend en entrée 6 modes fondamentaux gaussiens séparés dans l'espace et les transforme en 6 modes d'ordre supérieur orthogonaux constituant des modes propres d'une fibre FMF [111] (*Few–Mode Fiber*) parfaitement superposés et prêts à y être injectés. Au cours des derniers mois de ma thèse, j'ai eu la chance de participer au développement de ce premier prototype de multiplexeur utilisant 6 modes transverses, dans le cadre d'une mission de deux mois dans l'entreprise CAILabs. Les

résultats obtenus sont extêmement prometteurs et permettent d'envisager de multiplier par 6 le débit dans une fibre optique FMF en utilisant les modes transverses comme nouveaux vecteurs de transmission de l'information. Évidemment, un démultiplexeur procédant à l'opération inverse est également développé. Celui-ci permet de séparer les différents modes spatiaux ayant été combinés, puis de les injecter à nouveau dans des fibres monomodes.

Annexe A

Largeur des zones de dégénérescence

Nous rappelons que les longueurs de dégénérescence d'une cavité Fabry–Pérot stable sont les longueurs particulières pour lesquelles les modes propres de la cavité peuvent être constitués de modes de base d'ordres égaux modulo l'ordre de la dégénérescence. Pour une cavité avec gain ou pertes uniformes, ces longueurs de dégénérescence sont discrètes, de même que pour une cavité vide. En revanche, lorsque le gain ou les pertes dépendent des coordonnées transverses (x,y), on observe des zones de dégénérescences étendues autour des longueurs de dégénérescence exactes de la cavité vide. Nous allons montrer ici qu'il existe une différence fondamentale entre la largeur des zones de dégénérescence avec ou en l'absence de la saturation du gain. En effet, nous allons voir que dans le régime linéaire où le gain est non saturé, la largeur des zones de dégénérescence dépend uniquement du gain petit-signal, tandis que dans le régime stationnaire elles dépendent uniquement des pertes.

A.1 Zones de dégénérescence dans le régime linéaire

Nous considérons ici une cavité plan–concave constituée d'un miroir plan parfaitement réfléchissant et d'un miroir de sortie sphérique de rayon de courbure $R_c = 10\,\text{cm}$ et de coefficient de réflexion en intensité $R = 0{,}98$. Nous nous limitons à l'étude de la dégénérescence d'ordre 4 atteinte lorsque $L = R_c/2$. De plus, le milieu actif supposé fin est apposé sur le miroir plan et pompé sur l'axe optique de la cavité par un faisceau de pompe gaussien de taille $w_p = 0{,}75\,w_0$, où w_0 désigne le *waist* des modes propres de la cavité vide. La puissance de pompe est proportionnelle à une grandeur G_0 sans dimension et $G_{0_{th}}$ désigne la puissance de pompe au seuil nécessaire pour faire osciller le mode fondamental gaussien. Enfin, nous notons u_0 le mode fondamental gaussien de la cavité vide, et u_{FL} le mode propre de la cavité avec gain calculé par l'algorithme de Fox–Li.

Une bonne manière de mettre en évidence une zone de dégénérescence est de représenter la corrélation entre le mode fondamental gaussien supposé osciller en l'absence de dégénérescence et le mode propre calculé par l'algorithme de Fox–Li, en fonction de la longueur L de la cavité. La figure A.1 met en évidence la zone de dégénérescence s'étendant autour de $L = R_c/2$ à l'aide de cette méthode, pour différentes puissance de pompe. Afin de donner une mesure non-ambigüe

des différentes largeurs ΔW de ces zones, on trace les tangentes des courbes de corrélation au niveau des points d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule, et on regarde leurs intersections avec la droite $y = 1$ en haut du repère.

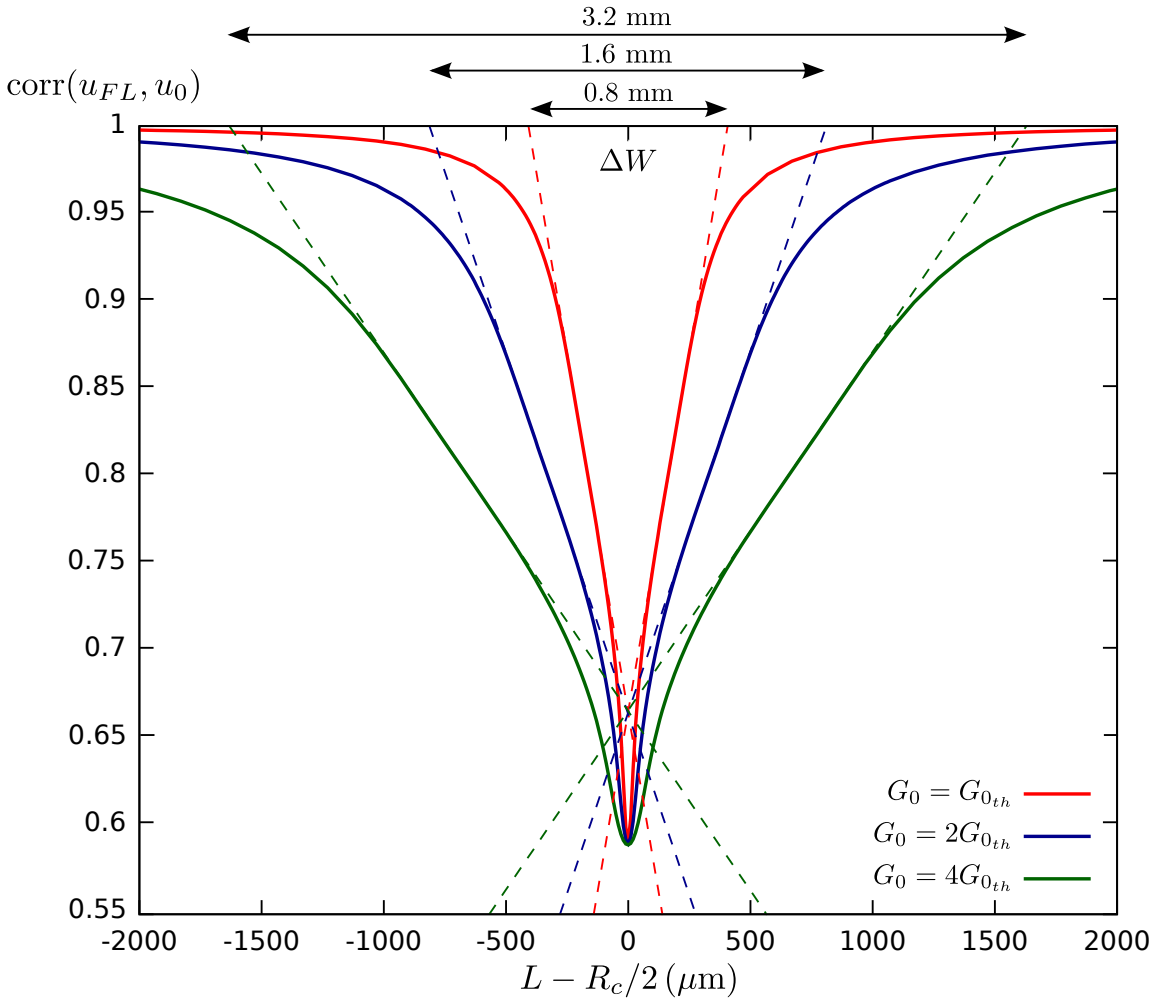


FIGURE A.1 – Mesure des largeurs de dégénérescence ΔW autour de $L = R_c/2$ pour différentes puissances de pompe avec un gain linéaire de largeur $w_p = 0{,}75\, w_0$.

Cette mesure permet déjà de remarquer que la largeur ΔW des zones de dégénérescence augmente avec la puissance de pompe G_0. De plus, la figure A.2 met en évidence que cette augmentation est parfaitement linéaire, même pour des puissances de pompe atteignant quelques dizaines de fois le seuil.

Pour un gain nul, on retrouve par extrapolation que la largeur de dégénérescence doit bien être nulle. Cependant, nous n'avons pas trouvé de théorie permettant de prédire la valeur du facteur de proportionnalité entre ΔW et G_0. Celui-ci dépend en effet également de la taille de la pompe, d'une manière que l'on ne sait pas modéliser.

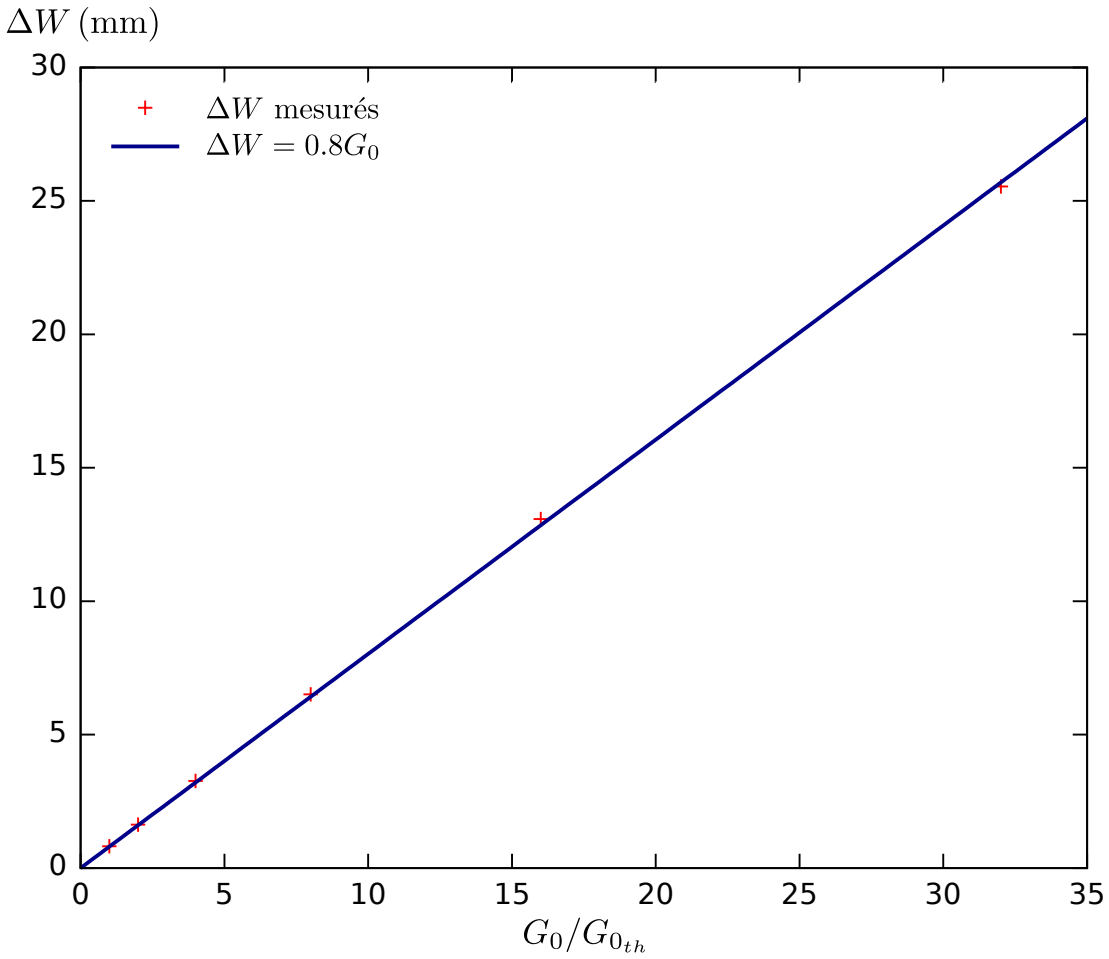


FIGURE A.2 – Dépendance de la largeur de dégénérescence ΔW autour de $L = R_c/2$ en fonction de la puissance de pompe G_0 pour un gain linéaire de largeur $w_p = 0{,}75\, w_0$.

A.2 Zones de dégénérescence dans le régime stationnaire

Nous reprenons ici la même configuration de cavité que précédemment, à la différence du fait que nous nous autoriserons à faire varier le coefficient de réflexion en intensité R du miroir de sortie. Dans le régime linéaire, l'existence des zones de dégénérescence est due au couplage exercé par le gain entre les différents modes de cavité. Il est naturel de penser qu'il en sera de même dans le régime stationnaire en remplaçant le gain linéaire par le gain saturé. Or, dans le régime stationnaire, le gain saturé compense exactement les pertes. Nous allons donc montrer que dans le régime stationnaire la largeur des zones de dégénérescence ne dépend plus de la puissance de pompe G_0, mais uniquement des pertes R.

Pour commencer, nous avons donc représenté sur la figure A.3 l'évolution de la corrélation entre le mode propre u_{FL} calculé par l'algorithme de Fox–Li saturé et le mode fondamental gaussien u_0 de la cavité vide, autour de la longueur de dégénérescence $L = R_c/2$ pour différentes puissances de pompe G_0.

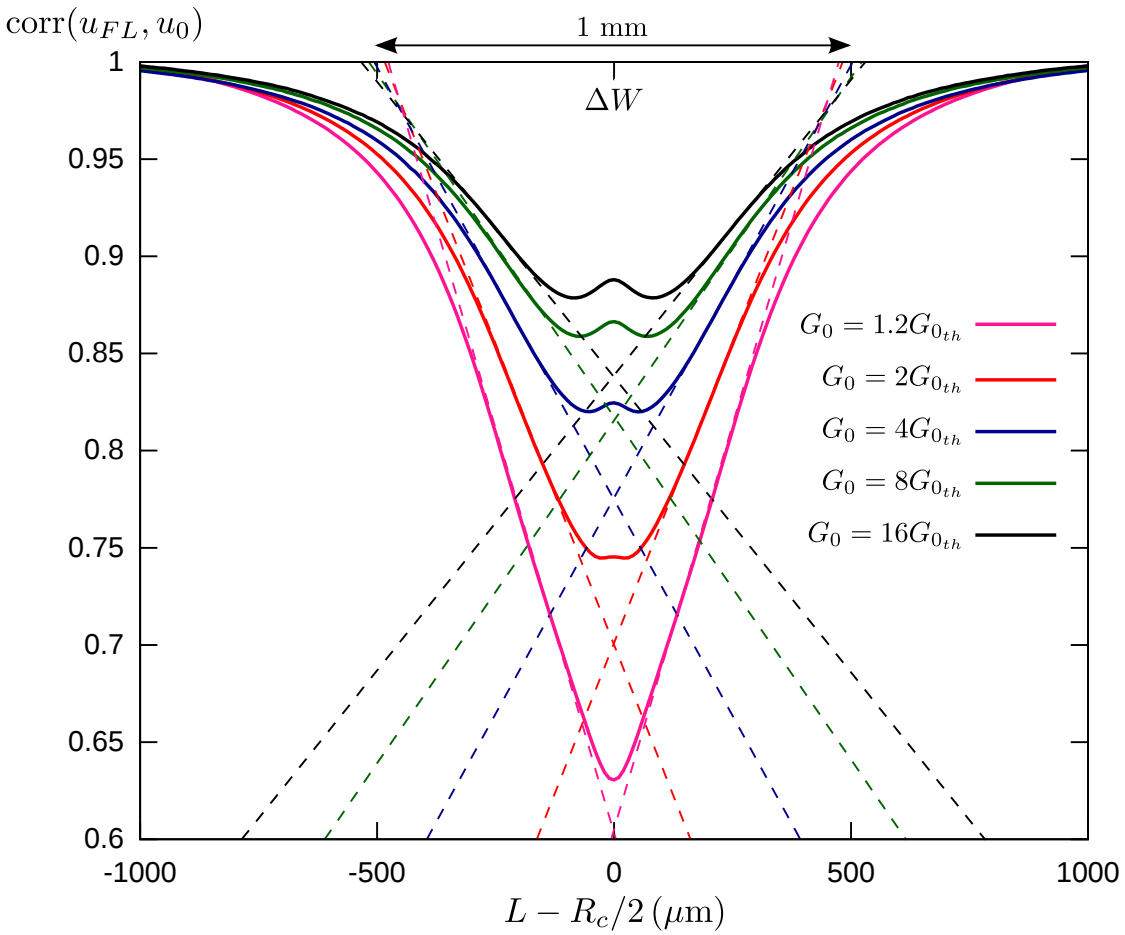


FIGURE A.3 – Mesure des largeurs de dégénérescence ΔW autour de $L = R_c/2$ pour différentes puissances de pompe avec un gain saturé de largeur $w_p = 0{,}75\,w_0$ et un miroir de sortie de coefficient de reflexion en intensité $R = 0{,}98$.

On constate que la largeur de dégénérescence ΔW évolue très peu dans les différentes situations, même si l'effet de la saturation induit des effets importants sur le coefficient de corrélation lorsque la puissance de pompe augmente. En revanche, nous pouvons voir sur la figure A.4 que la largeur de la zone de dégénérescence augmente lorsque l'on diminue le coefficient de réflexion R du miroir de sortie. La diminution de R va bien de pair avec l'augmentation du gain saturé.

Afin de déterminer la forme de la dépendance de ΔW en fonction de R, on peut s'inspirer de l'équation de stationnarité (2.14). Le bon paramètre à considérer semble être $\alpha = \frac{1-\sqrt{R}}{\sqrt{R}}$. La figure A.5 représente la dépendance de la largeur de dégénérescence ΔW autour de $L = R_c/2$ en fonction de R, et semble être parfaitement interpolée par une combinaison linéaire particulière de α et α^2.

Encore une fois, nous n'avons pas de modèle pour expliquer la relation entre ΔW et R, celle-ci dépendant par ailleurs toujours de la taille de la pompe. Cependant, on peut voir sur la figure A.5 que l'extrapolation des points de mesure conduit à une largeur de dégénérescence nulle pour un coefficient de réflexion $R = 1$, ce qui correspond bien à une situation où le gain est nul.

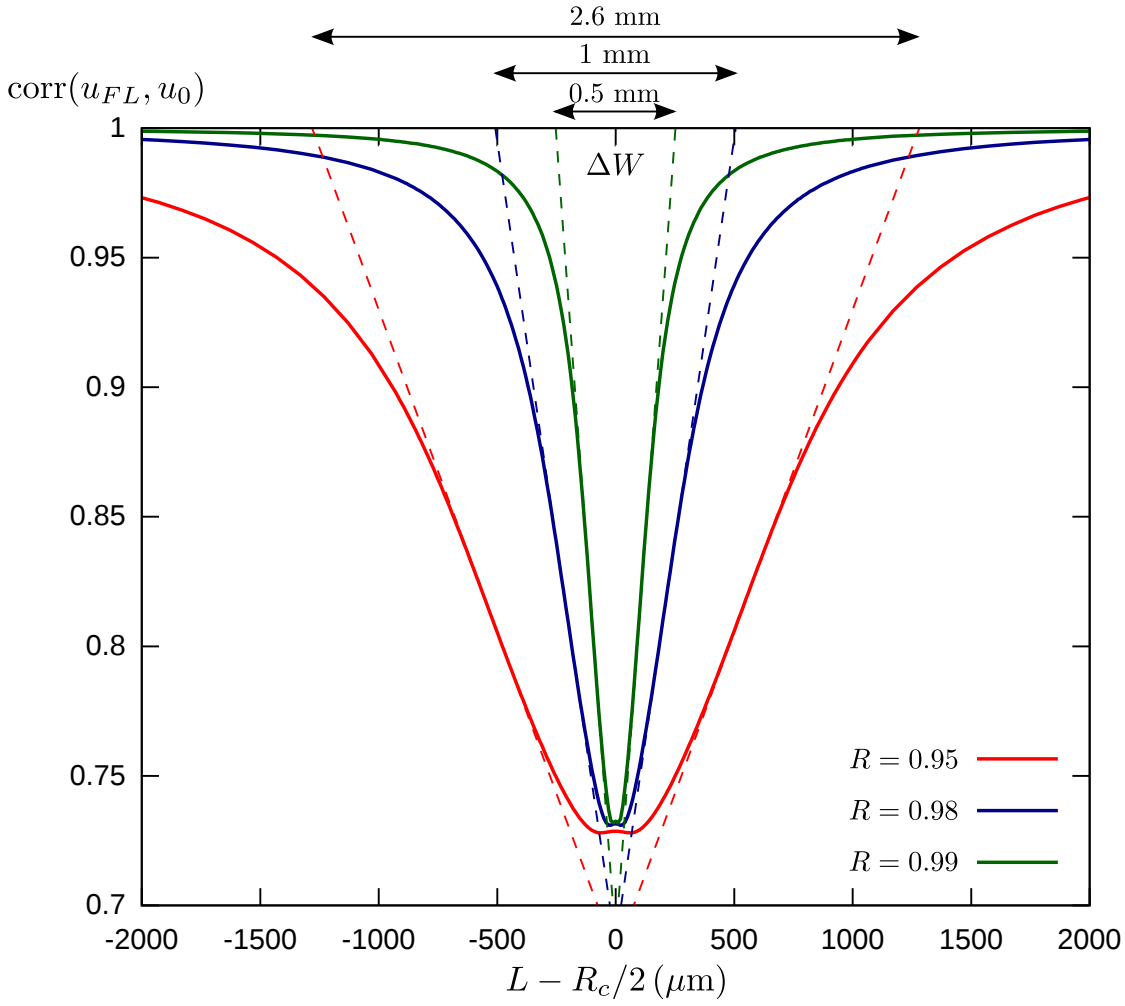


FIGURE A.4 – Mesure des largeurs de dégénérescence ΔW autour de $L = R_c/2$ pour différents coefficients de réflexion en intensité R du miroir de sortie, pour un gain saturé de largeur $w_p = 0{,}75\, w_0$.

.

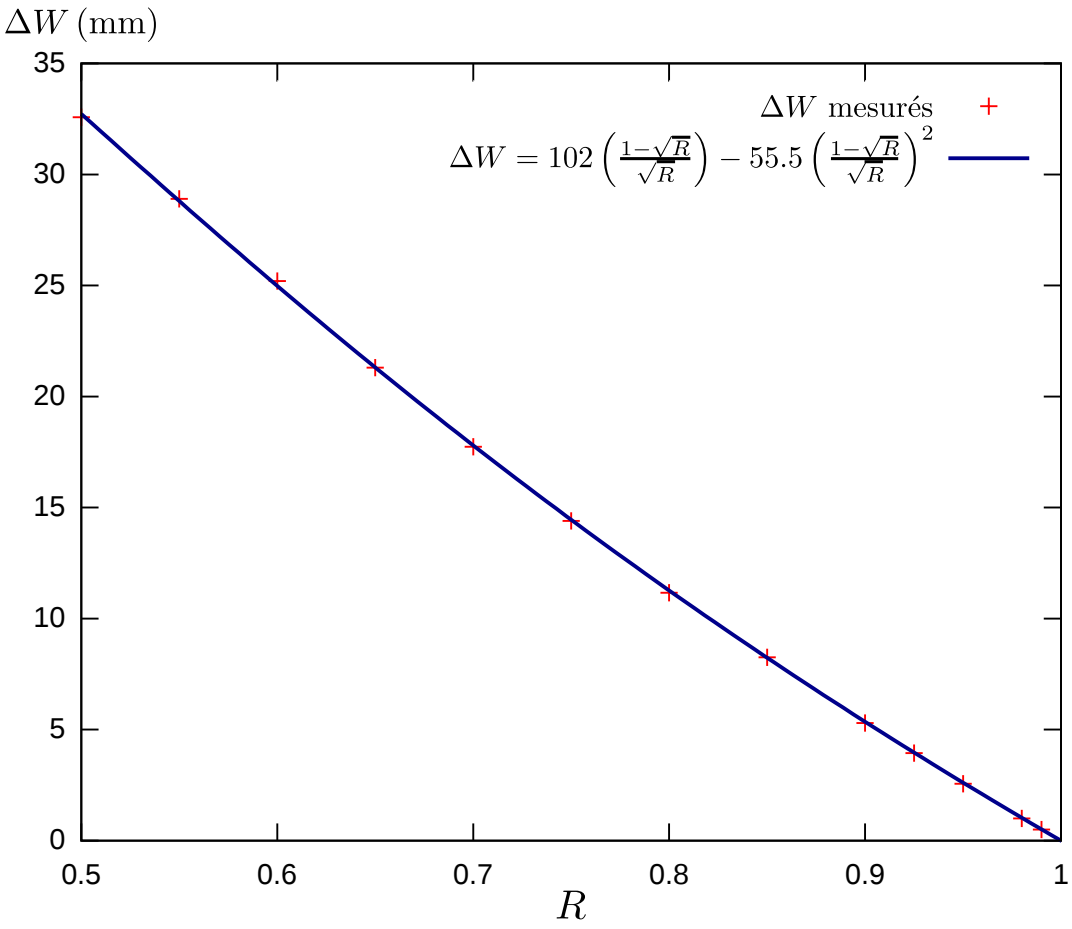


FIGURE A.5 – Dépendance de la largeur de dégénérescence ΔW autour de $L = R_c/2$ en fonction du coefficient de réflexion en intensité R du miroir de sortie, pour un gain saturé de largeur $w_p = 0{,}75\, w_0$.

Annexe B

Vortex tournants en z

Nous rappelons qu'un vortex optique est défini comme étant un zéro isolé du champ autour duquel, sur un contour fermé, la phase varie continûment d'un multiple de 2π. Nous dirons qu'un vortex a une hélicité positive si la phase croit lorsque l'on parcourt ce contour dans le sens trigonométrique et une hélicité négative dans le cas contraire. De plus, on définit l'ordre d'un vortex comme étant le degré minimal du terme polynomial intervenant dans le développement limité du champ autour de cette singularité. Dans cette annexe, nous montrons comment une superposition cohérente de vortex d'ordres différents localisés au même endroit peut conduire à un mode constitué de vortex multiples tournant dans le plan transverse au rythme de la phase de Gouy en fonction de la distance z de propagation. Dans un premier temps, nous montrons que la manière la plus simple de construire un réseau de vortex où la position des zéros est parfaitement connue est de superposer de manière cohérente des vortex de même hélicité. Nous montrons ensuite qu'une combinaison arbitraire de vortex d'hélicités différentes conduit en général à l'apparition de lignes nodales et non de vortex, mais qu'il existe toutefois un type de combinaison particulière nous permettant de nous ramener au cas précédent. Enfin, nous montrons comment les réseaux de vortex obtenus se comportent vis-à-vis de la propagation et illustrerons sur quelques exemples leur rotation observée dans le plan transverse.

B.1 Composition de vortex de même hélicité

La famille de vortex que nous considérons ici est un sous-ensemble des modes Laguerre–Gauss contenant un vortex mais aucune ligne nodale circulaire. Dans un repère de coordonnées cylindriques (r,θ,z), un vortex d'ordre $p \geq 0$ et d'hélicité $h = \pm 1$ possède l'expression suivante :

$$v_p^h(r,\theta,z) = r^p e^{hip\theta} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{-ik\frac{r^2}{2R(z)}} e^{i(p+1)\Psi_G(z)}, \tag{B.1}$$

où la normalisation ne nous intéresse pas ici, et où $w(z)$, $R(z)$ et $\Psi_G(z)$ sont donnés par les expressions (1.9), (1.10) et (1.11) respectivement. On remarque que le mode d'ordre 0 est le mode fondamental gaussien et ne contient en réalité pas de vortex.

Étant donné que nous nous intéressons ici à la composition de vortex de même hélicité, nous

pouvons travailler sans perte de généralité avec des vortex d'hélicité positive $h = 1$. De plus, nous nous limitons à la composition de vortex dont les *waist* sont identiques et pouvons donc nous restreindre à une étude dans le plan $z = 0$. La propragation de ces superpositions de modes pourra être étudiée par la suite à l'aide de l'expression (B.1).

Nous introduisons donc des fonctions permettant de décrire des vortex élémentaires d'ordre p dans le plan $z = 0$:

$$v_p(r,\theta) = \left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^p e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}, \tag{B.2}$$

où w_0 est la taille du vortex dans le plan $z = 0$.

On s'intéresse désormais au profil transverse d'une combinaison arbitraire de vortex élémentaires (B.2) définie par :

$$v(r,\theta) = e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \sum \alpha_p \left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^p, \tag{B.3}$$

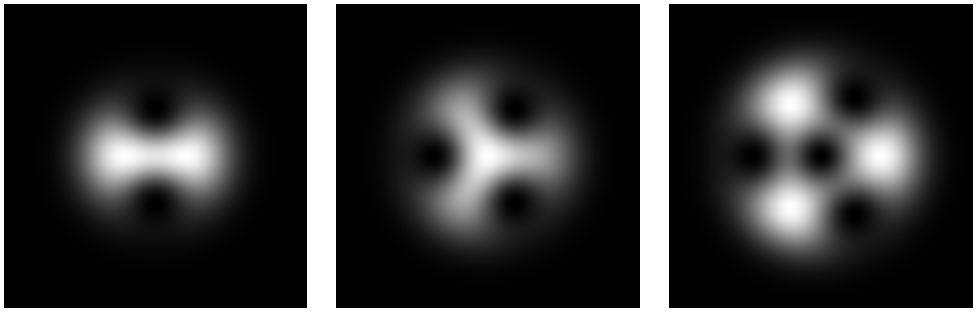
où $\forall p, \alpha_p \in \mathbb{C}$.

On remarque évidemment qu'une telle combinaison de modes possède toujours une enveloppe gaussienne de *waist* w_0. De plus, résoudre l'équation $v(r,\theta) = 0$ revient à chercher les zéros du polynôme à coefficients complexes $P(X) = \sum \alpha_p X^p$, où on a simplement posé $X = re^{\mathrm{i}\theta}$. Un tel polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$ et peut s'écrire de la manière suivante :

$$P(X) = P_0 \sum (X - X_k)^{d_k}, \tag{B.4}$$

où $X_k = r_i e^{\mathrm{i}\theta_k} \in \mathbb{C}$ est la $k^{\text{ème}}$ racine du polynôme et $d_k \in \mathbb{N}$ est son ordre.

L'expression (B.3) ne contient donc aucune ligne nodale, mais est en revanche un réseau de vortex avec une enveloppe gaussienne dont les zéros sont situés aux positions (r_k,θ_k) dans le plan complexe. Réciproquement, si on souhaite créer un réseau de vortex dont les zéros sont à des positions bien déterminées, il suffit de construire l'expression (B.4) de son choix et de la multiplier par une fonction gaussienne. En développant l'expression obtenue on peut également retrouver les poids α_p intervenant dans la décomposition en vortex élémentaires (B.2). La figure B.1 représente des réseaux de vortex obtenus à partir d'expressions polynomiales simples.



$1 + X^2$ $1 + X^3$ $X + X^4$

FIGURE B.1 – Réseaux de vortex créés à partir de polynômes simples.

B.2 Composition de vortex d'hélicités différentes

Dans la plupart des cas, la combinaison de vortex d'ordres différents et d'hélicités différentes ne conduit pas à un réseau de vortex mais à un mode contenant à la fois des vortex et des lignes nodales, voire uniquement des lignes nodales. Il existe toutefois un cas particulier où la recherche des zéros du champ peut se ramener à la résolution d'une équation polynomiale à un seul paramètre comme précédemment. Il s'agit du cas de la combinaison de deux vortex uniquement, menant à l'expression :

$$v(r,\theta) = \alpha \left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^n e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} + \beta \left(re^{-\mathrm{i}\theta}\right)^m e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}, \tag{B.5}$$

avec α et $\beta \in \mathbb{C}$, et $n < m$ par exemple.

L'expression (B.5) peut s'écrire de la manière suivante :

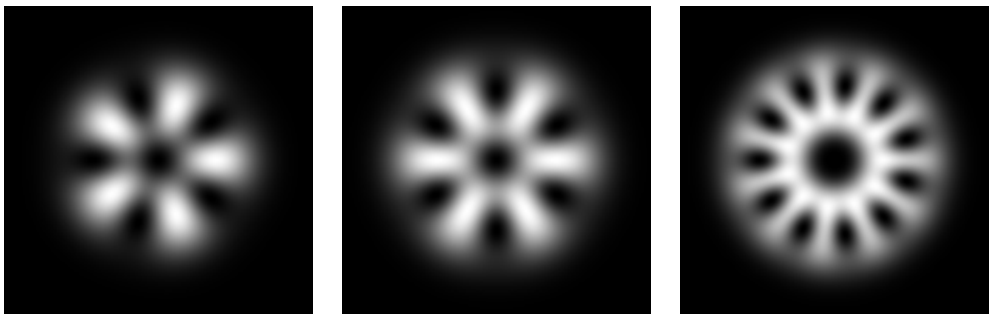
$$v(r,\theta) = r^n e^{\mathrm{i}n\theta} e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \left(\alpha + \beta \left(re^{-\mathrm{i}\frac{m+n}{m-n}\theta}\right)^{m-n}\right), \tag{B.6}$$

mettant en évidence une singularité d'ordre n en $r = 0$, et permettant de poser $X = re^{-\mathrm{i}\frac{m+n}{m-n}\theta}$ puis de rechercher les racines du polynôme $P(X) = \alpha + \beta X^{m-n}$. Dans le cas où α et β sont non nuls, $P(X)$ possède exactement $m - n$ racines s'écrivant :

$$X_k = \sqrt[m-n]{\rho} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\phi}{m-n} + k\frac{2\pi}{m-n}\right)},\ k \in \{0,\ldots,m-n-1\}, \tag{B.7}$$

où on a noté $-\frac{\alpha}{\beta} = \rho e^{\mathrm{i}\phi}$.

On en déduit que les racines non triviales du mode $v(r,\theta)$ de l'équation (B.6) sont toutes situées à la même distance $r = \sqrt[m-n]{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|}$ du centre du mode. De plus, en identifiant les expressions X_k données par (B.7) avec le terme en $re^{-\mathrm{i}\frac{m+n}{m-n}\theta}$ de (B.6), on trouve de nouvelles possibilités pour θ conduisant au final à $n + m$ racines données par $r_k = r$ et $\theta_k = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\phi}{m+n} + k\frac{2\pi}{m+n}\right)}$, $k \in \{0,\ldots,m+n-1\}$.



(n,m) $(1,4)$ $(1,5)$ $(2,9)$

FIGURE B.2 – Réseaux de vortex créés à partir de deux vortex d'hélicités différentes.

La figure B.2 représente différents réseaux de vortex créés à partir de deux vortex de base (B.2)

d'hélicités différentes. On remarque dans ce cas que l'intensité du champ autour des vortex excentrés n'est plus à géométrie cylindrique mais plutôt elliptique à cause du terme en $e^{-\mathrm{i}\frac{m+n}{m-n}\theta}$ dans l'équation (B.6).

L'expression de $v(r,\theta)$ que nous avons définie en (B.5) représente donc bien un réseau de vortex, comportant un vortex d'ordre n d'hélicité positive en $r = 0$ et $m + n$ vortex simples d'hélicités négatives, disposés de manière régulière autour du centre du mode.

B.3 Phase de Gouy et rotation d'un réseau de vortex

Les réseaux de vortex que nous avons présenté sont constitués de vortex de base d'ordres différents. Ils doivent donc nécessairement subir une déformation lors de de leur propagation. Nous allons donc utiliser l'expression (B.1) afin d'obtenir les expressions $v(r,\theta,z)$ des réseaux de vortex étudiés précédemment.

Dans le cas d'une combinaison de vortex de même hélicité, l'expression $v(r,\theta)$ donnée en (B.3) se transforme en :

$$v(r,\theta,z) = e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{-\mathrm{i}k\frac{r^2}{2R(z)}} e^{\mathrm{i}\Psi_G(z)} \sum \alpha_p \left(r e^{\mathrm{i}(\theta+\Psi_G(z))} \right)^p. \tag{B.8}$$

Nous ne nous intéressons pas ici à l'évolution de la taille du *waist* et à l'apparition de la phase sphérique qui est commune à tous les modes d'ordre unique. Ce qui nous intéresse est la déformation du mode due à la phase de Gouy des différents vortex de base le constituant. L'expression (B.8) fait intervenir la phase de Gouy Ψ_G au même niveau que la position angulaire des vortex dans le plan complexe. Ceci signifie que la position des vortex subit simplement une rotation de $\Psi_G(z)$ autour du centre du mode au fur et à mesure que celui-ci se propage. Le réseau de vortex (B.8) est donc également invariant de forme par propagation, à une rotation près. De plus, le sens de la rotation dépend de l'hélicité des vortex de base utilisés pour construire le mode.

Dans le cas d'une combinaison de deux vortex d'hélicités différentes, l'expression $v(r,\theta)$ donnée en (B.5) se transforme en :

$$v(r,\theta,z) = e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{-\mathrm{i}k\frac{r^2}{2R(z)}} e^{\mathrm{i}\Psi_G(z)} r^n e^{\mathrm{i}n(\theta+\Psi_G(z))} \left(\alpha + \beta \left(r e^{\mathrm{i}\left(\Psi_G(z) - \frac{m+n}{m-n}\theta\right)} \right)^{m-n} \right). \tag{B.9}$$

Cette fois-ci, les vortex excentrés tournent au rythme de $\frac{m-n}{m+n}\Psi_G(z)$ autour du centre du mode au fur et à mesure de la propagation. L'angle maximum de rotation est donc plus petit que précédemment. De plus, le vortex central tourne lui aussi, mais dans un sens différent et au rythme de $\Psi_G(z)$. Du point de vue de l'intensité du mode, le réseau de vortex semble lui aussi se propager sans déformation, à une rotation près.

Publications personnelles

[BRB13] Nicolas Barré, Marco Romanelli et Marc Brunel, « High-order modes excitation and cavity degeneracy », *in Laser Science XXIX*, p. LTh4F–2, Optical Society of America, 2013.

[BRB14] Nicolas Barré, Marco Romanelli et Marc Brunel, « Role of cavity degeneracy for high-order mode excitation in end-pumped solid-state lasers », *Opt. Lett.*, vol. 39, n° 4, p. 1022–1025, Feb 2014.

[RBBV12] Marco Romanelli, Nicolas Barré, Marc Brunel et Marc Vallet, « Localized spatial structures in a titanium-sapphire laser », *in EOSAM*, 2012.

Bibliographie

[1] J. Durnin, « Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, n° 4, p. 651–654, 1987.

[2] J. Durnin, J. J. Miceli et J. H. Eberly, « Diffraction-free beams », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 1499–1501, 1987.

[3] Y. Ismail, N. Khilo, V. Belyi et A. Forbes, « Shape invariant higher-order Bessel-like beams carrying orbital angular momentum », *Journal of Optics*, vol. 14, n° 8, p. 085703, 2012.

[4] F. O. Fahrbach, P. Simon et A. Rohrbach, « Microscopy with self-reconstructing beams », *Nature Photonics*, vol. 4, n° 11, p. 780–785, 2010.

[5] J. Arlt, V. Garces-Chavez, W. Sibbett et K. Dholakia, « Optical micromanipulation using a bessel light beam », *Opt. Commun.*, vol. 197, n° 4, p. 239–245, 2001.

[6] D. G. Grier, « A revolution in optical manipulation », *Nature*, vol. 424, n° 6950, p. 810–816, 2003.

[7] M. V. Berry et N. L. Balazs, « Nonspreading wave packets », *American Journal of Physics*, vol. 47, n° 3, 1979.

[8] G. A. Siviloglou et D. N. Christodoulides, « Accelerating finite energy Airy beams », *Opt. Lett.*, vol. 32, n° 8, p. 979–981, 2007.

[9] I. M. Besieris et A. M. Shaarawi, « A note on an accelerating finite energy Airy beam », *Opt. Lett.*, vol. 32, n° 16, p. 2447–2449, 2007.

[10] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu et D. N. Christodoulides, « Observation of accelerating Airy beams », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 213901, 2007.

[11] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw et J. P. Woerdman, « Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes », *Phys. Rev. A*, vol. 45, p. 8185–8189, 1992.

[12] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. van der Veen et J. P. Woerdman, « Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum », *Opt. Commun.*, vol. 96, n° 1–3, p. 123–132, 1993.

[13] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt et K. Dholakia, « Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam », *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 4, n° 2, p. S82, 2002.

[14] J. Arlt et K. Dholakia, « Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon », *Opt. Commun.*, vol. 177, n° 1–6, p. 297 – 301, 2000.

[15] H. Kogelnik et T. Li, « Laser beams and resonators », *Appl. Opt.*, vol. 5, n° 10, p. 1550–1567, 1966.

[16] M. A. Bandres et J. C. Gutiérrez-Vega, « Ince Gaussian beams », *Opt. Lett.*, vol. 29, n° 2, p. 144–146, 2004.

[17] U. T. Schwarz, M. A. Bandres et J. C. Gutiérrez-Vega, « Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators », *Opt. Lett.*, vol. 29, n° 16, p. 1870–1872, 2004.

[18] P. A. Bélanger et C. Paré, « Optical resonators using graded-phase mirrors », *Opt. Lett.*, vol. 16, n° 14, p. 1057–1059, 1991.

[19] A. N. Khilo, E. G. Katranji et A. A. Ryzhevich, « Axicon-based bessel resonator : analytical description and experiment », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 18, n° 8, p. 1986–1992, 2001.

[20] I. A. Litvin, N. A. Khilo, A. Forbes et V. N. Belyi, « Intra-cavity generation of Bessel-like beams with longitudinally dependent cone angles », *Opt. Express*, vol. 18, n° 5, p. 4701–4708, 2010.

[21] G. Porat, I. Dolev, O. Barlev et A. Arie, « Airy beam laser », *Opt. Lett.*, vol. 36, n° 20, p. 4119–4121, 2011.

[22] S. Ngcobo, I. Litvin, L. Burger et A. Forbes, « A digital laser for on-demand laser modes », *Nat. commun.*, vol. 4, n° 2289, 2013.

[23] S. Longhi, « Airy beams from a microchip laser », *Opt. Lett.*, vol. 36, n° 5, p. 716–718, 2011.

[24] R. S. Bennink, V. Wong, A. M. Marino, D. L. Aronstein, R. W. Boyd, C. R. Stroud, S. Lukishova et D. J. Gauthier, « Honeycomb pattern formation by Laser-beam filamentation in atomic sodium vapor », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 113901, 2002.

[25] G. D'Alessandro et W. J. Firth, « Spontaneous hexagon formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, p. 2597–2600, 1991.

[26] S. P. Hegarty, G. Huyet, P. Porta, J. G. McInerney, K. D. Choquette, K. M. Geib et H. Q. Hou, « Transverse-mode structure and pattern formation in oxide-confined vertical-cavity semiconductor lasers », *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 16, n° 11, p. 2060–2071, 1999.

[27] T. Y. Fan et R. L. Byer, « Diode laser-pumped solid-state lasers », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 24, n° 6, p. 895–912, 1988.

[28] R. L. Byer, « Diode Laser-Pumped Solid-State Lasers », *Science*, vol. 239, p. 742–747, 1988.

[29] A. E. Siegman, *Lasers*. University Science Books, 1986.

[30] I. Kimel et L. R. Elias, « Relations between Hermite and Laguerre Gaussian modes », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 29, n° 9, p. 2562–2567, 1993.

[31] M. A. Bandres et J. C. Gutiérrez-Vega, « Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 21, n° 5, p. 873–880, 2004.

[32] H. Kogelnik, « Imaging of optical modes-resonators with internal lenses », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, n° 3, p. 455–494, 1965.

[33] D. Marcuse, *Light transmission optics*. Van Nostrand Reinhold New York, 1972.

[34] S. A. Collins Jr., « Lens-System Diffraction Integral Written in Terms of Matrix Optics », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 60, n° 9, p. 1168, 1970.

[35] G. Martel, C. Labbé, F. Sanchez, M. Fromager et K. Aït-Ameur, « Non-gaussian fundamental laser mode oscillation in end-pumped Nd :YVO_4 microchip laser », *Opt. Commun.*, vol. 201, n° 1–3, p. 117–127, 2002.

[36] H. Hochstadt, « On the eigenvalues of a class of integral equations arising in laser theory », *SIAM Rev.*, vol. 8, n° 1, p. 62–65, 1966.

[37] D. J. Newman et S. P. Morgan, « Existence of eigenvalues of a class of integral equations arising in laser theory », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 43, n° 1, p. 113–126, 1964.

[38] A. G. Fox et T. Li, « Resonant Modes in a Maser Interferometer », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 40, n° 2, p. 453–488, 1961.

[39] T. G. Polanyi et W. R. Watson, « Gaseous optical maser with external mirrors », *J. Appl. Phys.*, vol. 34, n° 3, p. 553–560, 1963.

[40] Y. F. Chen, T. M. Huang, C. F. Kao, C. L. Wang et S. C. Wang, « Generation of Hermite-Gaussian modes in fiber-coupled laser-diode end-pumped lasers », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 33, n° 6, p. 1025–1031, 1997.

[41] K. Kubodera, K. Otsuka et S. Miyazawa, « Stable $LiNdP_4O_{12}$ miniature laser », *Appl. Opt.*, vol. 18, n° 6, p. 884–890, 1979.

[42] Y. Senatsky, J-F. Bisson, J. Li, A. Shirakawa, M. Thirugnanasambandam et K. Ueda, « Laguerre-Gaussian modes selection in diode-pumped solid-state lasers », *Opt. Rev.*, vol. 19, p. 201–221, 2012.

[43] C. J. Flood, G. Giuliani et H. M. van Driel, « Preferential operation of an end-pumped Nd:YAG laser in high-order Laguerre-Gauss modes », *Opt. Lett.*, vol. 15, n° 4, p. 215–217, 1990.

[44] Y. F. Chen, Y. P. Lan et S. C. Wang, « Generation of Laguerre-Gaussian modes in fiber-coupled laser diode end-pumped lasers », *Appl. Phys. B*, vol. 72, n° 2, p. 167–170, 2001.

[45] J. F. Bisson, Y. Senatsky et K. Ueda, « Generation of Laguerre-Gaussian modes in Nd:YAG laser using diffractive optical pumping », *Laser Phys. Lett.*, vol. 2, n° 7, p. 327, 2005.

[46] J. W. Kim et W. A. Clarkson, « Selective generation of Laguerre-Gaussian (LG_{0n}) mode output in a diode-laser pumped Nd:YAG laser », *Opt. Commun.*, vol. 296, p. 109–112, 2013.

[47] T. Ohtomo, K. Kamikariya, K. Otsuka et S-C. Chu, « Single-frequency Ince-Gaussian mode operations of laser-diode-pumped microchip solid-state lasers. », *Opt. Express*, vol. 15, n° 17, p. 10705, 2007.

[48] W. N. Plick, M. Krenn, R. Fickler, S. Ramelow et A. Zeilinger, « Quantum orbital angular momentum of elliptically symmetric light », *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 033806, 2013.

[49] J. B. Bentley, J. A. Davis, M. A. Bandres et J. C. Gutiérrez-Vega, « Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display », *Opt. Lett.*, vol. 31, n° 5, p. 649–651, 2006.

[50] T. Ohtomo, S-C. Chu et K. Otsuka, « Generation of vortex beams from lasers with controlled Hermite- and Ince-gaussian modes », *Opt. Express*, vol. 16, n° 7, p. 5082–5094, 2008.

[51] Q. Zhan, « Cylindrical vector beams : from mathematical concepts to applications », *Adv. Opt. Photon.*, vol. 1, n° 1, p. 1–57, 2009.

[52] J. A. Arnaud et H. Kogelnik, « Gaussian light beams with general astigmatism », *Appl. Opt.*, vol. 8, n° 8, p. 1687–1693, 1969.

[53] M. W. Beijersbergen, R. P. C. Coerwinkel, M. Kristensen et J. P. Woerdman, « Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate », *Optics Commun.*, vol. 112, n° 5–6, p. 321–327, 1994.

[54] K. Sueda, G. Miyaji, N. Miyanaga et M. Nakatsuka, « Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses », *Opt. Express*, vol. 12, n° 15, p. 3548–3553, 2004.

[55] I. A. Litvin, S. Ngcobo, D. Naidoo, K. Aït-Ameur et A. Forbes, « Doughnut laser beam as an incoherent superposition of two petal beams », *Opt. Lett.*, vol. 39, n° 3, p. 704–707, 2014.

[56] A. G. White, C. P. Smith, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, R. McDuff, C. O. Weiss et C. H. R. Tamm, « Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser », *Journal of Modern Optics*, vol. 38, n° 12, p. 2531–2541, 1991.

[57] D. Rozas, Z. S. Sacks et G. A. Swartzlander Jr, « Experimental observation of fluidlike motion of optical vortices », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, n° 18, p. 3399, 1997.

[58] J. Enderlein et F. Pampaloni *J. Opt. Soc. Am. A.*

[59] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique.* Hermann, 1986.

[60] H. Khelif, *Le jardin des courbes.* ellipses, 2010.

[61] T. H. Lu, Y. F. Chen et K. F. Huang, « Generation of polarization-entangled optical coherent waves and manifestation of vector singularity patterns », *Phys. Rev. E*, vol. 75, n° 2, p. 026614, 2007.

[62] J. A. Arnaud, « Degenerate optical cavities », *Appl. Opt.*, vol. 8, n° 1, p. 189–196, 1969.

[63] J. Dingjan, *Multi-mode optical resonators and wave chaos.* Universiteit Leiden, 2003.

[64] J. Dingjan, M. P. van Exter et J. P. Woerdman, « Geometric modes in a single-frequency Nd:YVO_4 laser », *Opt. Commun.*, vol. 188, n° 5–6, p. 345–351, 2001.

[65] B. Colombeau, M. Vampouille, V. Kermene, A. Desfarges et C. Froehly, « Spatial shaping of coherent waves inside a confocal laser », *Pure Appl. Opt.*, vol. 3, n° 5, p. 757, 1994.

[66] Y. F. Chen, C. H. Jiang, Y. P. Lan et K. F. Huang, « Wave representation of geometrical laser beam trajectories in a hemiconfocal cavity », *Phys. Rev. A*, vol. 69, p. 053807, 2004.

[67] Y. F. Chen, J. C. Tung, P. Y. Chiang, H. C. Liang et K. F. Huang, « Exploring the effect of fractional degeneracy and the emergence of ray-wave duality in solid-state lasers with off-axis pumping », *Phys. Rev. A*, vol. 88, p. 013827, 2013.

[68] C-H. Chen, P-T. Tai, W-F. Hsieh et M-D. Wei, « Multibeam-waist modes in an end-pumped Nd:YVO_4 laser », *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 20, n° 6, p. 1220–1226, 2003.

[69] V. Couderc, O. Guy, A. Barthelemy, C. Froehly et F. Louradour, « Self-optimized resonator for optical pumping of solid-state lasers », *Opt. Lett.*, vol. 19, n° 15, p. 1134–1136, 1994.

[70] Q. Zhang, B. Ozygus et H. Weber, « Degeneration effects in laser cavities », *The Eur. Phys. J.*, vol. 6, n° 3, p. 293–298, 1999.

[71] K. Kubodera et K. Otsuka, « Single-transverse-mode $LiNdP_4O_{12}$ slab waveguide laser », *J. Appl. Phys.*, vol. 50, n° 2, p. 653–659, 1979.

[72] P. Laporta et M. Brussard, « Design criteria for mode size optimization in diode-pumped solid-state lasers », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 27, n° 10, p. 2319–2326, 1991.

[73] D. G. Hall, R. J. Smith et R. R. Rice, « Pump-size effects in Nd:YAG lasers », *Appl. Opt.*, vol. 19, n° 18, p. 3041–3043, 1980.

[74] D. G. Hall, « Optimum mode size criterion for low-gain lasers », *Appl. Opt.*, vol. 20, n° 9, p. 1579–1583, 1981.

[75] F. Sanchez et A. Chardon, « Pump size optimization in microchip lasers », *Opt. Commun.*, vol. 136, n° 5–6, p. 405–409, 1997.

[76] F. Sanchez, M. Brunel et K. Aït-Ameur, « Pump-saturation effects in end-pumped solid-state lasers », *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 15, n° 9, p. 2390–2394, 1998.

[77] S-C. Chu et K. Otsuka, « Numerical study for selective excitation of Ince-Gaussian modes in end-pumped solid-state lasers », *Opt. Express*, vol. 15, n° 25, p. 16506–16519, 2007.

[78] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.

[79] E. A. Sziklas et A. E. Siegman, « Mode calculations in unstable resonators with flowing saturable gain. 2 : Fast Fourier transform method », *Appl. Opt.*, vol. 14, n° 8, p. 1874–1889, 1975.

[80] L. W. Casperson, « Saturation and power in a high-gain gas laser », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 9, n° 2, p. 250–252, 1973.

[81] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, vol. 1. Wiley-VCH, 1998.

[82] W. P. Risk, « Modeling of longitudinally pumped solid-state lasers exhibiting reabsorption losses », *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 5, n° 7, p. 1412–1423, 1988.

[83] M. Endo, M. Kawakami, K. Nanri, S. Takeda et T. Fujioka, « Two-dimensional simulation of an unstable resonator with a stable core », *Appl. Opt.*, vol. 38, n° 15, p. 3298–3307, 1999.

[84] A. Bhowmik, « Closed-cavity solutions with partially coherent fields in the space-frequency domain », *Appl. Opt.*, vol. 22, n° 21, p. 3338–3346, 1983.

[85] W. Koechner, *Solid-State Laser Engineering*. Springer, 1996.

[86] Katherine Creath, « Phase-measurement interferometry techniques », *Progress in optics*, vol. 26, n° 26, p. 349–393, 1988.

[87] R. W. Gerchberg et W. O. Saxton, « A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures », *Optik*, vol. 35, p. 237, 1972.

[88] Y. F. Chen, T. M. Huang, C. F. Kao, C. L. Wang et S-C. Wang, « Generation of Hermite-Gaussian modes in fiber-coupled laser-diode end-pumped lasers », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 33, n° 6, p. 1025–1031, 1997.

[89] D. Findlay et R. A. Clay, « The measurement of internal losses in 4-level lasers », *Phys. Lett.*, vol. 20, p. 277–278, 1966.

[90] L. W. Casperson, « Laser power calculations : sources of error », *Appl. Opt.*, vol. 19, n° 3, p. 422–434, 1980.

[91] L. M. Osterink et J. D. Foster, « Thermal effects and transverse mode control in a nd:yag laser », *Appl. Phys. Lett.*, vol. 12, n° 4, p. 128–131, 1968.

[92] M. Lax, « Temperature rise induced by a laser beam », *J. Appl. Phys.*, vol. 48, n° 9, p. 3919–3924, 1977.

[93] R. L. Aggarwal, D. J. Ripin, J. R. Ochoa et T. Y. Fan, « Measurement of thermo-optic properties of $Y_3Al_5O_{12}$, $Lu_3Al_5O_{12}$, $YAIO_3$, $LiYF_4$, $LiLuF_4$, BaY_2F_8, $KGd(WO_4)_2$, and $KY(WO_4)_2$ laser crystals in the 80–300K temperature range », *J. Appl. Phys.*, vol. 98, n° 10, p. 103514, 2005.

[94] W. Kong, A. Sugita et T. Taira, « Generation of Hermite-Gaussian modes and vortex arrays based on two-dimensional gain distribution controlled microchip laser », *Opt. Lett.*, vol. 37, n° 13, p. 2661–2663, 2012.

[95] K. Otsuka et S-C. Chu, « Generation of vortex array beams from a thin-slice solid-state laser with shaped wide-aperture laser-diode pumping », *Opt. Lett.*, vol. 34, n° 1, p. 10–12, 2009.

[96] Y. F. Chen et Y. P. Lan, « Transverse pattern formation of optical vortices in a microchip laser with a large fresnel number », *Phys. Rev. A*, vol. 65, p. 013802, 2001.

[97] D. Dangoisse, D. Hennequin, C. Lepers, E. Louvergneaux et P. Glorieux, « Two-dimensional optical lattices in a CO_2 laser », *Phys. Rev. A*, vol. 46, p. 5955–5958, 1992.

[98] E. Louvergneaux, D. Hennequin, D. Dangoisse et P. Glorieux, « Transverse mode competition in a CO_2 laser », *Phys. Rev. A*, vol. 53, p. 4435–4438, 1996.

[99] S. Menard, M. Vampouille, B. Colombeau et C. Froehly, « Highly efficient phase locking and extracavity coherent combination of two diode-pumped Nd:YAG laser beams », *Opt. Lett.*, vol. 21, n° 24, 1996.

[100] P. F. Moulton, « Spectroscopic and laser characteristics of Ti:Al_2O_3 », *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 3, n° 1, p. 125–133, 1986.

[101] R. L. Aggarwal, A. Sanchez, M. M. Stuppi, R. E. Fahey, A. J. Strauss, W. R. Rapoport et C. P. Khattak, « Residual infrared absorption in as-grown and annealed crystals of Ti:Al_2O_3 », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 24, n° 6, p. 1003–1008, 1988.

[102] A. J. Alfrey, « Modeling of longitudinally pumped CW Ti:Sapphire laser oscillators », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 25, n° 4, p. 760–766, 1989.

[103] F. Prati, M. Brambilla et L. A. Lugiato, « Pattern formation in lasers », *La Rivista Del Nuovo Cimento Series 3*, vol. 17, n° 3, p. 1–85, 1994.

[104] O. Hess et T. Kuhn, « Maxwell-Bloch equations for spatially inhomogeneous semiconductor lasers. I. Theoretical formulation », *Phys. Rev. A*, vol. 54, p. 3347–3359, 1996.

[105] O. Hess et T. Kuhn, « Maxwell-Bloch equations for spatially inhomogeneous semiconductor lasers. II. Spatiotemporal dynamics », *Phys. Rev. A*, vol. 54, p. 3360–3368, 1996.

[106] J. R. Leger, D. Chen et Z. Wang, « Diffractive optical element for mode shaping of a Nd:YAG laser », *Opt. Lett.*, vol. 19, n° 2, p. 108–110, 1994.

[107] P. A. Bélanger, R. L. Lachance et C. Paré, « Super-Gaussian output from a CO_2 laser by using a graded-phase mirror resonator », *Opt. Lett.*, vol. 17, n° 10, p. 739–741, 1992.

[108] I. A. Litvin et A. Forbes, « Intra-cavity flat-top beam generation », *Opt. Express*, vol. 17, n° 18, p. 15891–15903, 2009.

[109] Z. I. Borevich et S. L. Krupetskii, « Subgroups of the unitary group that contain the group of diagonal matrices », *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 17, n° 4, p. 1951–1959, 1981.

[110] J-F. Morizur, L. Nicholls, P. Jian, S. Armstrong, N. Treps, B. Hage, M. Hsu, W. Bowen, J. Janousek et H-A. Bachor, « Programmable unitary spatial mode manipulation », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 27, n° 11, p. 2524–2531, 2010.

[111] I. Kaminow, T. Li et A. E. Willner, *Optical Fiber Telecommunications Volume VIA : Components and Subsystems*. Academic press, 2013.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de la sélection des structures transverses stationnaires dans les lasers. Nous nous attachons à décrire expérimentalement et à expliquer numériquement à l'aide d'une méthode de type Fox–Li les observations de modes transverses qui peuvent être réalisées dans un laser à état solide pompé longitudinalement. Ainsi, nous sommes amenés à explorer en profondeur le comportement des cavités non–dégénérées dans différentes situations de pompage, ainsi que les notions de dégénérescence exacte et de dégénérescence partielle. Nous sommes également amenés à étudier, bien que de manière assez qualitative, le rôle important des effets thermiques dans la formation des modes transverses dans les zones de dégénérescence de la cavité.

Ces questions ont fait l'objet de multiples investigations depuis l'avènement du laser, mais nous mettons toutefois en évidence que de sérieux problèmes d'interprétations d'observations expérimentales persistent dans la littérature scientifique contemporaine. Une idée fausse assez répandue stipule par exemple qu'il est possible d'exciter un mode Laguerre–Gauss ou Ince–Gauss d'ordre élevé en utilisant un faisceau de pompe suffisamment petit afin qu'il recouvre parfaitement le lobe principal du mode visé. Nous montrons analytiquement, numériquement et vérifions expérimentalement que ceci est impossible dans une situation non–dégénérée, et expliquons comment certaines observations réalisées proches d'une dégénérescence peuvent contribuer à propager cette idée erronée.

Bien que le modèle que nous utilisons n'élude pas les questions importantes concernant le rôle de la dynamique temporelle dans la formation des modes transverses dans un laser, sa pertinence réside dans sa simplicité et sa capacité à reproduire de manière très satisfaisante toutes les observations expérimentales. Ainsi, toutes les observations de modes transverses qu'il est possible de réaliser dans un laser peuvent être comprises à travers ce modèle, qui ne nécessite comme ingrédients principaux qu'une cavité, un gain saturé, des effets thermiques et éventuellement des effets de diaphragme. De plus, le modèle simple que nous présentons peut s'étendre sans difficulté à l'étude de cavités instables ou de cavités à miroirs asphériques qui offrent des possibilités nouvelles pour l'excitation de modes transverses originaux.

Abstract

The main concern of this thesis is the selection of stationary transverse structures in lasers. Throughout the manuscript, we get involved into describing the observations that can be realized in a longitudinally pumped solid–state laser, from both experimental and numerical perspectives using Fox–Li simulations. We explore in detail, on the one hand, the particular behavior of non–degenerate cavities in various pumping situations, and on the other hand the exact and partial degeneracy situations. We also investigate the very influential role played by thermal effects concerning the formation of transverse structures in degeneracy regions, although this study is limited to a more qualitative description.

These problems have been of great interest since the early development of laser, however we show in this manuscript that the contemporary scientific litterature still suffers from misinterpretations concerning experimental observations of transverse modes that can occur in lasers. For instance, there still remains the widespread belief that it is possible to excite a high-order Laguerre–Gaussian or Ince–Gaussian mode by strongly focusing the pump beam inside the active medium so that it matches the principal lobe of the targeted mode. We demonstrate analytically, numerically and experimentally that this idea is unfounded and show how some experiments that occur near a cavity degeneracy are misleading and can contribute to spread this misconception.

Even if the model we use is unable to deal with some very significant issues concerning the mode formation in the time domain and the build–up of the laser oscillation, we believe that its strength lies into its simplicity and its ability to reproduce every experimental observation in a very accurate way. Hence, we managed to explain and interpret all the experimental observations we have realized given a very few assumptions including the presence of a cavity, a saturated gain, thermal effects and eventually diaphragm effects. Moreover, the simple model that we present can be extended without any difficulty to the case of unstable resonators, or to resonators built from graded–phase mirrors which offer new possibilities towards the excitation of original transverse modes.

Numéro d'ordre : 00000