

## THÈSE

Pour l'obtention du grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS  
UFR des sciences fondamentales et appliquées  
XLIM-SIC  
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers)  
Secteur de recherche : Informatique et applications

Présentée par :  
Jean Serge Dimitri Ouattara

### **Reconnaissance de primitives discrètes multi-échelles**

Directeur(s) de Thèse :  
Eric Andres, Théodore Tapsoba

Soutenue le 04 décembre 2014 devant le jury

Jury :

Président	<b>Rémy Malgouyres</b>	Professeur des Universités, Université d'Auvergne
Rapporteur	<b>Rémy Malgouyres</b>	Professeur des Universités, Université d'Auvergne
Rapporteur	<b>Isabelle Debled-Rennesson</b>	Professeur des Universités, Université de Nancy
Membre	<b>Eric Andres</b>	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	<b>Théodore Tapsoba</b>	Professeur, Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso
Membre	<b>Gaëlle Largeteau-Skapin</b>	Maître de conférences, Université de Poitiers
Membre	<b>Yukiko Kenmochi</b>	Chargée de recherche CNRS, ESIEE de Paris

**Pour citer cette thèse :**

Jean Serge Dimitri Ouattara. *Reconnaissance de primitives discrètes multi-échelles* [En ligne]. Thèse Informatique et applications. Poitiers : Université de Poitiers, 2014. Disponible sur Internet <<http://theses.univ-poitiers.fr>>

# THÈSE

pour l'obtention du Grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS**  
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)  
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

**École Doctorale:** Sciences et Ingénierie pour l'Information et Mathématiques  
**Secteur de recherche :** Informatique et Applications

Présentée par :

**Jean Serge Dimitri OUATTARA**

\*\*\*\*\*

## RECONNAISSANCE DE PRIMITIVES DISCRÈTES MULTI-ÉCHELLES

\*\*\*\*\*

**Directeur de thèse :** Eric Andres

**Co-Directeur de thèse :** Théodore M. Y. Tapsoba

\*\*\*\*\*

Soutenue le 04 décembre 2014  
devant la Commission d'Examen

\*\*\*\*\*

### Jury

Mme. Debled-Rennesson Isabelle, Professeure, LORIA, Université de Lorraine,  
M. Malgouyres Remy, Professeur, LIMOS, Université d'Auvergne,

Rapporteur  
Rapporteur

Mme. Kenmochi Yukiko, Chargée de recherche, Département Informatique, ESIEE Paris,

Examinatrice

M. Andres Eric, Professeur, XLIM-SIC, Université de Poitiers,

M. Tapsoba Théodore M. Y., Professeur, Université de Bobo-Dioulasso,

Mme. Largeteau-Skapin Gaëlle, Maître de Conférences, XLIM-SIC, Université de Poitiers,

Directeur de thèse  
Co-Directeur de thèse  
Co-Encadrante de thèse



*À mon grand père  
pour m'avoir appris à toujours aller de l'avant ...*



---

---

# Remerciements

---

Avant tout, je tiens à remercier Isabelle et Rémy qui ont accepté d'être rapporteurs sur ce document ainsi que Yukiko qui a accepté de participer à ce jury. J'ai beaucoup d'admiration pour le travail de recherche que vous faites et je travaillerai à emprunter un chemin similaire.

Je tiens ensuite à rendre un grand hommage à tous ces enseignants qui ont d'abord permis l'ouverture d'un troisième cycle à l'Université de Bobo-Dioulasso, qui l'ont animé et ont formé par la suite des doctorants qui y sont issus. Il s'agit, entre autres, d'Eric, Annie, Dominique, Patrick, Geneviève, Théodore, Sado, Mesmin, Loé, etc.

Je remercie tout particulièrement Eric, qui m'a suivi depuis le DEA, Gaëlle et Rita qui m'ont suivi durant toute cette thèse. Tout ce que j'ai appris de bien en géométrie discrète c'est grâce à eux. Je les remercie surtout pour leur tolérance car ce ne fût pas toujours facile de travailler avec moi. Je remercie aussi Théodore qui m'a guidé sur les relations entre reconnaissance de droites et algèbre en général ; j'espère et travaille à pouvoir apporter de nouveaux outils pour des recherches futures.

Je tiens également à remercier mes aînés Abdoulaye, Marc, Aurélie, Idrissa, Tiguiane et Moustapha qui m'ont été d'une grande aide. Merci aussi à des personnes avec qui j'ai échangé de temps en temps, mais qui m'ont donné des idées comme Laurent, Isabelle (Sivignon), et Jacques-Olivier.

Je remercie tout le personnel du laboratoire XLIM-SIC pour leur accueil et leur disponibilité à toutes les fois que j'ai eu à les solliciter. Je remercie tous les doctorants qui ont participé et participent à rendre l'ambiance au laboratoire de bonne camaraderie et d'amitié. Un grand merci à James, Syntyche, Kaoutar, Samy, et Al-bekaye qui m'ont beaucoup soutenu. Un peu à cheval entre le Burkina et Poitiers, je n'ai pas pu être très proche de tous mais je nourris l'espoir et travaille à ce que nous puissions collaborer après nos thèses dans le cadre de recherches ou d'autres projets.

Je remercie aussi tous ceux qui ont animé des séminaires ou GT de l'équipe Informatique Graphique ou auxquels elle était conviée. Si cela peut servir de témoignage, les différents exposés m'ont grandement ouvert les yeux et aidés à mieux cerner certaines notions et concepts.

Je ne saurai finir sans dire merci également aux proches et amis qui m'ont soutenu durant cette thèse : Évariste, Samuel, Félix, Sabine, Haby, Nouhoun, Idriss, Valentin, Yelkabo, Roberte, Justine, Romaric, Armand, Innocent ... sans eux je n'aurais pas eu la quiétude nécessaire pour me concentrer. À ma famille, et particulièrement à mon fils et ma femme, sur qui mon absence a le plus pesé, je dis merci pour votre courage et confiance.



---

---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels sur la géométrie discrète</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Notions de base . . . . .	8
1.2.1 Notations et définitions . . . . .	8
1.2.2 Notion de voisinage . . . . .	13
1.2.3 Notion de courbe discrète . . . . .	14
1.3 Primitives discrètes . . . . .	15
1.3.1 Modèles de discrétisation . . . . .	16
1.3.2 Hyperplans discrets . . . . .	18
1.3.3 Hypersphères discrètes . . . . .	20
1.4 Aperçu sur les primitives discrètes . . . . .	22
1.4.1 Droite discrète . . . . .	22
1.4.2 Sous-segment discret . . . . .	25
1.5 Conclusion . . . . .	31
<b>2 Reconnaissance de sous-segments discrets</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	34
2.2 État de l'art sur la reconnaissance de sous-segment discret . . . . .	35
2.2.1 Rappels sur les droites et les sous-segments discrets naïfs . . . . .	35
2.2.2 Approche de reconnaissance de Debled-Rennesson et Reveilles . . . . .	36
2.2.3 Approches reposant sur un parcours dans l'arbre de Stern-Brocot . . . . .	37
2.2.4 Approche basée sur un parcours dans le diagramme de Farey . . . . .	39
2.2.5 Récapitulatif des approches existantes . . . . .	41
2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret . . . . .	42
2.3.1 Notations et définitions . . . . .	42
2.3.2 Évolution des restes arithmétiques d'un sous-segment . . . . .	44
2.3.3 Relations entre restes arithmétiques et points d'appuis . . . . .	46
2.3.4 Algorithmes de recherche des points d'appuis . . . . .	54
2.3.5 Algorithme principal de reconnaissance de sous-segment . . . . .	63
2.3.6 Comparaison avec les approches précédentes . . . . .	65
2.3.7 Optimisation : mutualisation des recherches des restes minimum et maximum . . . . .	68

## TABLE DES MATIÈRES

---

2.3.8	Cas particulier d'un sous-segment ayant deux points d'appuis de la droite . . . . .	70
2.4	Perspectives d'extensions en dimension 3 . . . . .	73
2.4.1	Sous-segment discret de dimension 3 . . . . .	73
2.4.2	Morceaux de plan de dimension 3 . . . . .	74
2.5	Conclusion . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Espace dual et reconnaissance de primitives discrètes</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.2	Espace dual et préimage . . . . .	79
3.2.1	Transformations duales . . . . .	79
3.2.2	Préimage généralisée . . . . .	81
3.2.3	Médiatrice généralisée et centre généralisé . . . . .	84
3.3	Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance . . . . .	89
3.3.1	Calcul des duaux de la médiatrice généralisé et du centre généralisé . . . . .	89
3.3.2	Préimage généralisée basée frontières . . . . .	108
3.3.3	Modification de l'algorithme de reconnaissance de droite . . . . .	113
3.4	Conclusion . . . . .	115
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>117</b>
	<b>Publications</b>	<b>121</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>123</b>
	<b>Table des Figures</b>	<b>129</b>
	<b>Liste des Tableaux</b>	<b>131</b>

---

---

# Introduction Générale

---

## Introduction Générale

Les travaux dans le domaine de la géométrie discrète ont comme objectifs d'élaborer des modèles de description du contenu des images numériques (appelé par la suite objets discrets), de proposer des algorithmes d'extraction, de détermination de caractéristiques analytiques, et de transformation de ces objets discrets [Bresenham 65, Chassery 91, Dorst 84, Dorst 91, Freeman 61, Freeman 74, Kim 83, Reveillès 91, Rosenfeld 74, Troesch 93]. Nous nous intéressons à une représentation d'objet discret particulière qualifiée de multi-échelles. Dans cette représentation, l'objet discret est considéré suivant différentes échelles correspondant chacune à un niveau spécifique de raffinement de l'objet discret. Cette représentation permet également de modéliser certains phénomènes que les représentations classiques ne permettent pas [Coeurjolly 05a, Rodriguez 11, Saïd 10, Saïd 09, Saïd 11, Vacavant 08]. La notion de multi-échelle peut être définie de plusieurs manières, ici nous en envisageons quelques unes ; nous étudions plus particulièrement les objets de base comme la droite, et le cercle (appelés dans la suite primitives), définies dans ce contexte.

Nos travaux associent l'objet discret de dimension  $n$  à un ensemble de points d'un sous-espace de  $\mathbb{Z}^n$  que nous appelons espace discret ou espace image [Coeurjolly 05a, Dexet 06a, Vacavant 08] dans certains contextes. Ces points sont appelés points entiers ou points discrets. On considère ainsi un objet discret comme un ensemble de points discrets d'un espace discret. Les autres points de l'espace discret constituent le complémentaire de l'objet.

Pour décrire l'objet discret, on peut lister tous les points discrets ; cette méthode est appelée description en extension ou matricielle. Mais cela nécessite un espace de stockage assez conséquent et nécessite de recalculer souvent l'ensemble des éléments de l'objet discret. C'est pourquoi nous choisissons de définir les objets discrets par des inéquations, ce qu'on appelle description analytique. Ces inéquations correspondent aux contraintes d'appartenance d'un point au contour de l'objet, c'est à dire l'ensemble de ses points discrets adjacents à son complémentaire. Le contour peut être décomposé en un ensemble de primitives discrètes notamment les sous-segments et les arcs.

En dimension 2, l'espace discret est souvent associé à un pavage fait à base de carrés centrés sur les points discrets qu'on appelle pixels [Dexet 06a]. Dans un tel espace de représentation, il existe des modèles pour définir les pixels qui font partie de l'objet en fonction de la définition d'un objet euclidien. Parmi celles-ci nous nous intéresserons particulièrement aux modèles analytiques de discrétisation

[Andres 93, Andres 94, Andres 02, Andres 03, Andres 08, Andres 00, Coeurjolly 02]. Quand on s'intéresse à définir l'équivalent euclidien d'un objet discret, on parle de reconstruction [Andres 00, Andres 03, Breton 03a, Chernyaev 95, Coeurjolly 04, Coeurjolly 06a, Dexet 06a, Dexet 06b, Dexet 06c, Vacavant 08]. Cela peut passer par une étape de reconnaissance qui permet de déterminer à quelle primitive un ensemble de points discrets correspond ainsi que les caractéristiques de cette dernière [Coeurjolly 02, Damaschke 95, Debled-Rennesson 95, Debled-Rennesson 96, Dexet 06a, Rodriguez 11, Rodriguez 10, Roussillon 09, Vittone 99].

Généralement on commence par introduire la discrétisation d'objets euclidiens pour introduire des travaux en géométrie discrète. Il est important de préciser aussi au début que la géométrie discrète et la géométrie euclidienne ne respectent pas toujours les mêmes lois, ou théorèmes : deux droites discrètes parallèles peuvent avoir plusieurs points communs tandis que deux droites discrètes sécantes peuvent ne pas avoir de point commun. C'est pourquoi, après des notions de base en géométrie discrète, nous introduisons d'abord, les travaux sur la définition d'objets discrets.

L'espace discret usuel (constitué de pixels carrés) est par définition associé à une grille régulière (à mailles carrées). Nous nous intéressons également aux objets discrets multi-échelles dont la différence avec les objets discrets classiques est liée à leurs espaces de représentation : l'espace de représentation des objets discrets multi-échelles utilise les grilles irrégulières [Coeurjolly 05a, Vacavant 08]. Un objet discret multi-échelles est obtenu soit par des regroupements ou subdivisions de certains pixels de grilles classiques soit par le plongement d'un objet euclidien dans une grille irrégulière. Nous présentons essentiellement les études sur la description analytique des objets discrets, basées sur les modèles de discrétisation [Andres 00, Andres 03, Breton 03a, Coeurjolly 02, Coeurjolly 05a, Dexet 06a]. Ces modèles, en plus de donner une représentation analytique des objets discrets, sont extensibles en toute dimension. Chaque modèle ne peut définir que certaines catégories de primitives discrètes et/ou ne peut s'appliquer qu'à certaines primitives du monde continu. À l'exception du modèle Supercouverture [Coeurjolly 02, Coeurjolly 05a], ces modèles ne sont applicables que dans les espaces discrets classiques qu'on appelle espaces discrets réguliers. L'intérêt de l'extension des modèles de discrétisation sur des grilles irrégulières est d'abord un intérêt d'accélération de calcul et d'optimisation de ressources. Par ailleurs certains phénomènes physiques, comme ceux décrits par Vacavant (Simulation de radiothérapie grâce à une modélisation par RLE, distinction de caractères ambigus dans une plate-forme de reconnaissance de plaques minéralogiques) [Vacavant 08], ne peuvent pas être représentés dans les espaces discrets classiques.

La reconnaissance s'intéresse à comment déterminer si un ensemble de points discrets correspond à une primitive discrète donnée. L'une des primitives les plus étudiées en reconnaissance est sans doute la droite discrète [Breton 03a, Buzer 06, Buzer 07, Dexet 06a]. Comme techniques de reconnaissance de droite discrète, nous utilisons des approches basées sur les transformées duales comme les transformées de Hough [Hough 62] dont un panorama est fait par Maître dans [Maitre 85]. Les transformations duales, que nous considérons, sont celles utilisées par Dexet [Dexet 06a, Sere 13] et associent l'espace discret à un autre espace appelé espace de paramètres. Les transformations de Hough ont fait l'objet de nombreuses études et il existe pour la reconnaissance de plusieurs types de primitives (droites, cercles, ...) où chaque

---

primitive nécessite un espace dual particulier, le nombre de paramètres variant suivant la forme à reconnaître. Pour les droites, nous nous intéressons à une extension proposée par Dexet [Dexet 06a] qui permet de définir en toute dimension un lien avec les modèles analytiques discrets et ce même pour les droites discrètes multi-échelles. Cette extension de Dexet [Dexet 06a] appelée préimage généralisée est la base des approches de reconnaissance de droites que nous utilisons.

À partir des paramètres d'une droite discrète, déterminer les paramètres d'un de ses sous-segments discrets constitue l'objet d'autres approches de reconnaissance [Debled-Rennesson 96, De Vieilleville 06, Said 09, Saïd 11, Lachaud 13, Sivignon 12]. Cela permet par exemple de faire des transformations d'échelle sur une partie connexe d'une droite discrète sans avoir à les impacter sur toute la droite. Dans nos travaux sur la reconnaissance de sous-segment discret, nous supposons avoir en entrée des informations sur une droite discrète le contenant. L'originalité de ces travaux est qu'ils simplifient la reconnaissance de sous-segment en dimension 2 par rapport aux approches existantes et qu'il offre une perspective d'extension en dimension 3.

Nous nous intéressons aussi à la reconnaissance d'autres primitives discrètes comme les arcs et cercles discrets en dimension 2 ou les sphères discrètes en dimension 3. Pour les arcs ou cercles discrets, il existe une approche basée sur ce qu'on appelle les médiatrices généralisées [Rodriguez 10, Richard 11, Rodriguez 11] semblable à la reconnaissance basée sur la préimage généralisée. En effet, cette approche peut associer aussi un espace dual à l'espace discret. Puis elle définit un polygone dual de la médiatrice généralisée dans cet espace. Les droites traversants tous les polygones associés à un ensemble de pixels de l'espace discret correspondent aux duaux des centres candidats d'éventuels arcs de cercles discrets qui passent par tous ces pixels. Cette approche est aussi applicable pour la reconnaissance de sphère discrète.

Nous étudions finalement la préimage généralisée et le centre généralisé d'objets discrets multi-échelles. Suite aux travaux sur le centre généralisé, nous présentons nos travaux sur la reconnaissance d'arcs de cercles discrets par une approche basée sur le calcul du centre généralisé.

## Organisation du mémoire

Le manuscrit est organisé en trois grandes parties :

- Une introduction à la géométrie discrète où nous présentons les notions de bases. Nous commençons par introduire les notions de points discrets et les relations de voisinage avant de présenter les hyperplans, les hypersphères discrets, et les outils de reconnaissance associés.
- Une présentation des travaux que nous avons menés sur la reconnaissance de sous-segments discrets en dimension 2. Nous y faisons un état de l'art des approches existantes et présentons en détail l'approche que nous proposons avant de discuter de son extension en dimension 3 sur les sous-plans.
- Une présentation de nos travaux sur la reconnaissance dans les espaces duaux. Dans cette partie, nous présentons d'abord les calculs nécessaires à la construction du dual du centre généralisé utilisé dans la reconnaissance d'arcs, de cercles et de sphères discrets. Nous présentons ensuite une simplification dans le calcul de la préimage généralisée utilisée dans la reconnaissance de droites

discrètes dans les espaces réguliers et irréguliers isothétiques.

### Introduction à la géométrie discrète

Dans ce chapitre (Chapitre 1, Page 7) nous revenons d'abord sur les notions de bases nécessaires aux différents travaux que nous allons présenter. Ce sont les notions de point discret, de voisinage et d'espace discret [Dexet 06a]. Nous présentons ensuite les notions d'hyperplans [Andres 00, Debled-Rennesson 95, Reveillès 91] et d'hypersphères discrets [Rodriguez 11] avant de présenter les modèles de discrétisation classiques [Andres 00]. Puis nous présentons brièvement les notions et outils nécessaires aux approches de reconnaissance de droites et de cercles discrets.

### Travaux sur la reconnaissance de sous-segments discrets en dimension 2

Ce chapitre (Chapitre 2, Page 33) fait la synthèse de nos travaux sur la reconnaissance de sous-segment discret.

Nous présentons d'abord des approches de reconnaissance de sous-segment discret en mettant en exergue les outils utilisés. La première approche est celle proposée par Debled-Rennesson et Reveilles [Debled-Rennesson 96]. Elle permet d'énoncer les premières propriétés arithmétiques sur la dilatation de sous-segment discret et d'introduire les notions de points d'appuis et de points faiblement extérieurs entre autres. Ensuite il y a deux travaux de Saïd et Lachaud qui font le lien entre des propriétés introduites par Debled-Rennesson et Reveilles et des calculs dans l'arbre de Stern-Brocot [Lachaud 13, Saïd 09, Saïd 11]. Il y a enfin les travaux de Sivignon qui font le lien entre la reconnaissance de sous-segment et la détermination dans un espace dual d'un point spécifique en utilisant le diagramme de Farey [Sivignon 12]. Nous présentons ensuite une nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret. Cette partie est une version détaillé d'un article [] qui fait la synthèse de notre approche de reconnaissance de sous-segment. Nous détaillons les bases mathématiques de l'approche que nous proposons. Il s'agit d'établir le lien entre les points discrets du sous-segment ayant des restes arithmétiques minimaux ou maximaux sur la droite discrète et les points d'appuis du sous-segment. Une fois cela fait, nous présentons les algorithmes pour calculer les points de restes maximal et minimal sur une suite finie de restes d'une droite discrète. Puis nous présentons l'algorithme général de reconnaissance de sous-segments discrets en dimension 2 qui en découle. Nous avons aussi fait des expérimentations et des comparaisons avec des algorithmes existants (présentés au chapitre 2) et nous en présentons quelques résultats. Enfin nous discutons de l'optimisation de notre approche et de son extension en dimension 3.

### Travaux sur la reconnaissance de primitives discrètes sur des espaces duaux

Nous commençons par introduire les notions de transformée de Hough [Maitre 85], de transformations duales, de préimage généralisée [Dexet 06a], de médiatrice généralisée [Rodriguez 10] et de centre généralisé [Richard 11]. Puis nous abordons des

---

travaux sur le calcul du dual du centre généralisé afin d'améliorer la reconnaissance d'arcs et de cercles discrets. Enfin, nous présentons des travaux sur l'amélioration du calcul de la préimage généralisée par l'utilisation de la notion de frontière.

### **Travaux sur le calcul du dual du centre généralisé**

Dans cette partie (Chapitre 3, Section 3.3.1, Page 89 ), nous présentons d'une part comment calculer le dual de la médiatrice généralisée afin de simplifier la détermination du centre généralisé. Cela est une version détaillée d'une partie de travaux publiés dans [Richard 11]. Comme il existe des approches sur le calcul de la visibilité en  $\mathcal{O}(n \log(n))$  où  $n$  est le nombre de polygones cela permet de ramener la complexité de calcul du centre généralisé préalable de  $\mathcal{O}(n^4)$  à  $\mathcal{O}(n^3 \log(n))$  où  $n$  représente le nombre de pixels.

### **Travaux sur l'amélioration du calcul de la préimage généralisée**

Dans cette partie (Chapitre 3, Section 3.3.2, Page 108 ), nous proposons des améliorations possibles dans le calcul de la préimage généralisée. Pour une simplification et une plus grande rapidité en temps de calcul, nous introduisons la notion de frontière, qui permet de diminuer le nombre d'éléments à prendre en compte dans le calcul de la préimage généralisée. Nous utilisons cette notion pour vérifier certaines propriétés de la préimage généralisée de droites discrètes multi-échelles avant de présenter un nouvel algorithme de reconnaissance de droite discrète.



---

# Chapitre 1

---

## Rappels sur la géométrie discrète

---

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Notions de base</b>	<b>8</b>
1.2.1	Notations et définitions	8
1.2.2	Notion de voisinage	13
1.2.3	Notion de courbe discrète	14
<b>1.3</b>	<b>Primitives discrètes</b>	<b>15</b>
1.3.1	Modèles de discrétisation	16
1.3.2	Hyperplans discrets	18
1.3.3	Hypersphères discrètes	20
<b>1.4</b>	<b>Aperçu sur les primitives discrètes</b>	<b>22</b>
1.4.1	Droite discrète	22
1.4.2	Sous-segment discret	25
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

---

### 1.1 Introduction

Pour représenter une scène du monde continu, il faut généralement faire une projection de la scène sur un plan et obtenir une *image*. Et en fonction de la scène, on peut par exemple donner des couleurs aux points du plan en question. En informatique, le procédé est assez similaire quoiqu'il faut d'emblée poser une contrainte d'échantillonnage et de quantification ; on ne peut pas y représenter le continu ou l'infinitésimal. Ainsi, que ce soit par acquisition (appareil photo numérique, scanner, ...) ou par synthèse (logiciel de CAO, DAO, ...) une *image numérique* est une donnée finie et composée d'éléments dénombrables. Les traitements informatiques que l'on peut faire sur cette donnée sont couramment appelés *traitement et analyse des images* ou classés dans le domaine de *l'informatique graphique*. Nous nous intéressons à des études fondamentales sur l'image numérique permettant de caractériser son contenu (objets de la scène projetée) par des descriptions analytiques. Ces études relèvent de la *géométrie discrète* en analogie avec la géométrie euclidienne.

Pour faire simple, la géométrie discrète est la géométrie sur des sous-espaces de  $\mathbb{Z}^n$ . Mais elle est beaucoup plus vaste que cela et se décline suivant plusieurs axes.

Comme premier axe, nous pouvons citer les travaux qui portent sur la définition de ce qui est discret et des méthodes pour construire des objets de cette nature que nous appelons études sur la *discrétisation* [Andres 00, Andres 93, Andres 02, Cohen-Or 95, Dorst 84, Freeman 61, Freeman 74, Kim 83, Reveillès 91, Rosenfeld 74, Vittone 99]. Ensuite il y a des travaux qui portent sur la caractérisation du contenu des images par des descriptions analytiques correspondant à des objets connus que nous appelons *reconnaissance* d'objets discrets [Ballard 81, Buzer 06, Buzer 07, Damaschke 95, Debled-Rennesson 95, Debled-Rennesson 96, Dexet 06a, Dexet 06b, Kovalesky 90, Lachaud 13, Maitre 85, Mertzius 99, Provot 05, Richard 11, Rodriguez 11, Rodriguez 10, Saïd 09, Saïd 11, Sivignon 12, De Vieilleville 06]. Il y a enfin les travaux qui s'intéressent à la définition des équivalents euclidiens des objets discrets que nous appelons *reconstruction* [Breton 03a, Breton 03b, Chernyaev 95, Coeurjolly 04, Coeurjolly 06a, Coeurjolly 06b, Cohen-Or 95, Dexet 06c, Hilaire 06, Ho 05, Lewiner 03, Sivignon 05]. Nous nous intéressons essentiellement à la discrétisation et à la reconnaissance.

Les travaux sur la discrétisation se déclinent en plusieurs familles mais nous pouvons les regrouper en deux principales : ceux sur la *définition en extension* des objets discrets où on liste tous les éléments composant l'objet discret [Foley 90, Kaufman 93] et ceux sur la *définition analytique* des objets discrets où on s'intéresse à des inéquations caractérisant les objets discrets [Reveillès 91, Debled-Rennesson 95, Andres 00]. Nous utilisons les définitions analytiques parce que, d'une part, elles nécessitent moins d'espace en terme de stockage de données. D'autre part elles sont facilement exploitables et plus efficaces dans des traitements informatisés car elles permettent la déduction de résultats de transformations sur l'image sans recalculer les résultats pour tous ses éléments. Nous nous intéressons à une représentation particulière du contenu des images numériques dites *multi-échelles* [Coeurjolly 05a, Vacavant 08]. Cela permet de considérer différentes parties du contenu à différentes précisions.

Les travaux sur la reconnaissance se déclinent aussi en plusieurs sous-axes et ce suivant les outils utilisés, par exemple suivant le type de contenu à caractériser. En ce qui nous concerne, nous ne nous intéressons pas à reconnaître un objet particulier, mais des objets basiques comme les droites, les cercles, les segments, ... que nous appelons *primitives*. Ces primitives peuvent être utilisées pour caractériser des objets plus complexes mais cela n'est pas le but de nos travaux.

Dans ce chapitre nous commençons par présenter, dans la deuxième section, les notions de base utilisées dans la définition d'objets discrets. Puis nous présentons brièvement les primitives discrètes que nous étudierons dans les chapitres suivants. Nous présentons ainsi, dans la troisième section, les modèles de discrétisations et deux types de primitives discrètes : les hyperplans et les hypersphères discrets. Dans la quatrième section, nous présentons, quelques outils et propriétés sur la droite discrète et sous-segment discret qui permettent d'élaborer des outils de reconnaissance de ces primitives.

## 1.2 Notions de base

Dans cette section, nous présentons les notions de base pour la suite du chapitre. Après quelques notations et définitions, nous introduisons les notions d'espace

discret, de point discret, de voisinage et de courbe discrète.

### 1.2.1 Notations et définitions

Dans la suite,  $[1, \dots, n]$  représente l'ensemble des entiers allant de 1 à  $n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous associons le monde continu à l'espace euclidien défini sur l'ensemble des réels  $\mathbb{R}^n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  désigne la dimension (finie) considérée.

**Définition 1.2.1** (Espace discret de dimension  $n$ ). *Un espace discret de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est une partition de  $\mathbb{R}^n$ .*

Le terme *discret* est utilisé en opposition au terme *continu* et implique la présence de discontinuité entre deux éléments voisins de la partition. L'espace discret peut être aussi considéré comme un pavage de l'espace euclidien et chaque région de ce pavage est appelé *pavé*. Lorsque les pavés sont uniformes, le pavage est dit *régulier*; il est *irrégulier* sinon. En dimension 2, il existe seulement trois types de pavages réguliers basés sur une translation d'un polygone régulier identique : le pavage à base d'hexagones, le pavage à base de triangles et le pavage à base de carrés [Roussillon 09]<sup>1</sup>. Il existe par contre plusieurs pavages irréguliers : kd-tree, grille anisotrope, grille engendrée par un Run Length Encoding ou RLE pour faire court, grille irrégulière isothétique, ... Une classification a été faite par Vacavant [Vacavant 08] que nous illustrons dans la Figure 1.1.

Dans la suite nous notons  $\mathbb{D}^n$  un espace discret de dimension  $n$ . À chaque pavé de  $\mathbb{D}^n$ , nous associons un point de  $\mathbb{R}^n$  que nous appelons point discret. Le point discret est défini comme suit :

**Définition 1.2.2** (Point discret de dimension  $n$ ). *Un point discret  $p$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est un point isolé de  $\mathbb{R}^n$  appartenant à un pavé  $P$  d'un espace discret  $\mathbb{D}^n$ . Et  $p$  représente  $P$  et vice et versa.*

Lorsque deux points discrets ont des pavés qui sont incidents ils sont dits *voisins*. Nous reviendrons dans la Sous-section 1.2.2 (Page 13) sur une définition plus formelle de la notion de voisinage. Il existe une représentation duale du pavage de l'espace discret appelée *grille* ou *maille* [Roussillon 09] défini comme suit :

**Définition 1.2.3** (Grille). *Une grille  $\mathbb{G}^n$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est une représentation duale d'un espace discret  $\mathbb{D}^n$ . Elle est construite en reliant les points discrets de  $\mathbb{D}^n$  à leurs voisins.*

La Figure 1.2 illustre un pavage d'un espace discret et une grille correspondant au dual de ce pavage.

---

1. Les pavages à base de losanges ou de rectangles sont décomposables en pavages à base de triangles et de carré respectivement

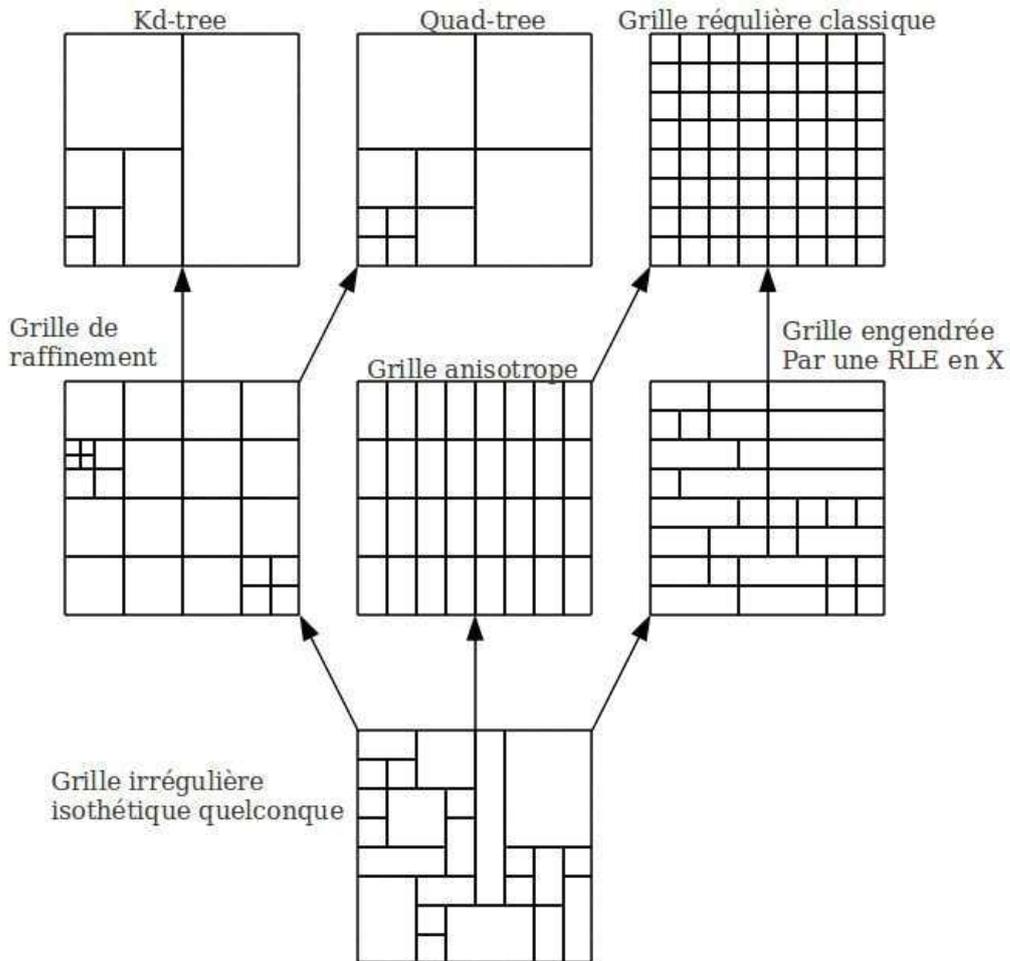


FIGURE 1.1 – Exemples de classifications de pavages irréguliers en dimension 2.

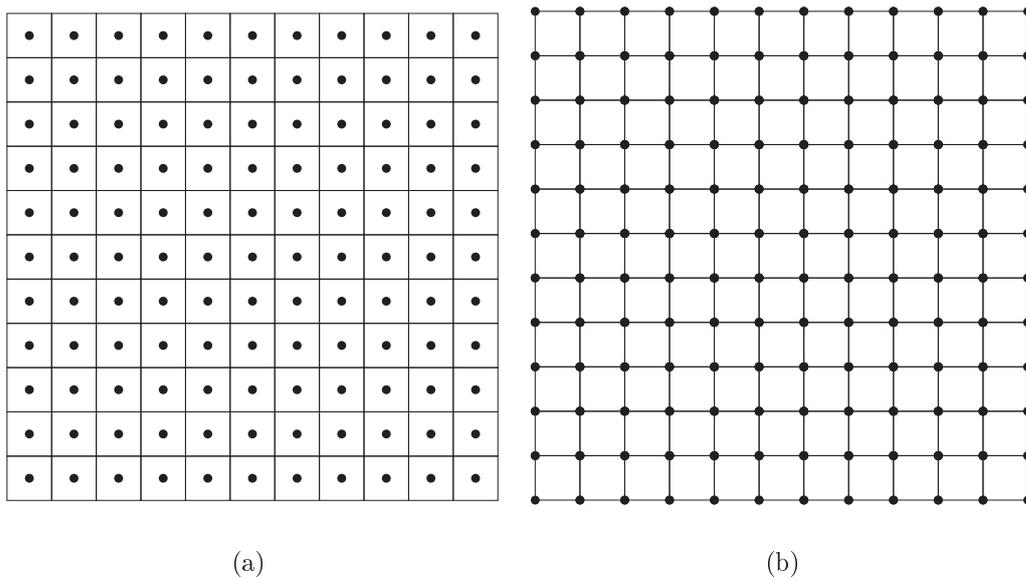


FIGURE 1.2 – Exemple de pavage régulier en dimension 2 par carré (a) et grille correspondante au dual du pavage (b).

Un ensemble de pavés d'un espace discret constitue un objet discret défini comme suit :

**Définition 1.2.4** (Objet discret). *Un objet discret est un ensemble de points discrets.*

La notion d'objet discret est une abstraction de toute ou une partie d'une *image discrète*. En effet, pour représenter une scène dans un espace discret, il faut associer à chacun de ses pavés une valeur (luminosité ou triplet de valeurs RGB) qui est fonction de projections de la scène sur le pavé. Ce procédé est détaillé dans [Roussillon 09] et produit une image discrète. Dans l'image discrète, en fonction des valeurs associées aux pavés, nous pouvons définir le *fond* et le *contenu* de l'image comme l'ensemble des pavés dont les valeurs associées sont respectivement en bas ou en haut d'un certain seuil [Roussillon 09]. Dans nos travaux nous supposons que le contenu de l'image est déjà déterminé et qu'il est décomposé en composantes n'ayant pas de pavés voisins d'une composante à l'autre (voir les travaux sur la segmentation et fenêtrage [Roussillon 09] pour plus de détails). Un objet discret noté  $X$  représente alors le contenu d'une telle fenêtre. Les pavés appartenant au fond de la fenêtre constituent le *complémentaire* de l'objet discret noté  $\overline{X}$ . Le *bord* ou *contour* de l'objet discret est l'ensemble des pavés de l'objet discret qui sont voisins à des pavés de son complémentaire. Si le bord permet de subdiviser l'image discrète en pavés de l'objet discret constituant son *intérieur* et en pavés du complémentaire constituant son *extérieur*, l'objet discret est dit *simple* ; sinon il est dit *complexe*. Le lecteur peut se référer à la thèse de Roussillon [Roussillon 09] pour plus de détails sur ces notions.

Dans la suite, nous nous intéressons surtout au pavage par carrés en dimension 2. Ce pavage permet d'associer l'image discrète à une matrice dont les cellules représentent alors ses pavés. Nous pouvons alors associer une base orthonormée  $(e_1, e_2)$  à l'espace discret et en déduire un couple d'entiers pour chaque pavé qui représente ses coordonnées dans la base. Ainsi nous pouvons associer au pavé une description plus formelle comme la notion d'*hypercube* définie comme suit :

**Définition 1.2.5** (Hypercube). *Un hypercube de dimension  $n$  de centre  $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  et de taille  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , est l'ensemble des points  $p$  de coordonnées  $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\forall i \in [1, \dots, n], c_i - \frac{\alpha}{2} \leq p_i \leq c_i + \frac{\alpha}{2}$ .*

Comme nous nous intéressons aux pavages par carrés, nous utilisons la notion d'hypervoxel définie comme suit :

**Définition 1.2.6** (Hypervoxel). *Un hypervoxel est un hypercube de taille unitaire ( $\alpha = 1$ ) et de centre  $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ .*

L'hypervoxel est communément appelé **pixel** en dimension 2 et **voxel** en dimension 3 (voir Figure 1.3). Le lecteur peut se référer à la thèse de Dexet [Dexet 06a] pour plus de détails sur les hypervoxels et leurs représentations.

Dans la suite nous associons à un point discret un hypervoxel dont il est le centre de gravité. Comme espaces discrets à pavages irréguliers nous nous intéressons à ceux à *pavages irréguliers isothétiques* [Coeurjolly 05a]. Dans ces espaces les pavés ne se chevauchent pas et leurs côtés sont parallèles aux axes du repère orthonormé associé à l'espace discret. La définition de pavé pour un espace discret à pavage irrégulier isothétique a été introduite par Coeurjolly [Coeurjolly 05a] comme suit :

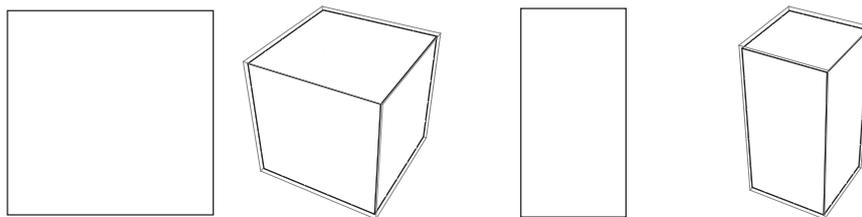


FIGURE 1.3 – Représentation de pavés classiques des objets discrets. De gauche à droite on a un pixel, un voxel, un pavé et un hexaèdre.

**Définition 1.2.7** (Pavé). *Un pavé de centre  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et de tailles de côtés  $(l_p^{x_1}, l_p^{x_2}, \dots, l_p^{x_n}) \in \mathbb{R}_+^n$ , est l'ensemble des points  $p$  de coordonnées  $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\forall i \in [1, \dots, n], x_i - \frac{l_p^{x_i}}{2} \leq p_i \leq x_i + \frac{l_p^{x_i}}{2}$ .*

**Remarque 1.2.1.** *Un hypervoxel est un pavé vérifiant  $\forall i \in [1, \dots, n], l_p^{x_i} = 1$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ .*

Cette dernière définition de pavé (Définition 1.2.7) permet de représenter des objets discrets dont les pavés n'ont pas les mêmes tailles de côtés. Cela est utile dans certains domaines où il est nécessaire d'avoir une représentation d'une ou des parties de l'objet discret avec une précision différente de celle de l'espace discret de référence. Un tel objet discret est dit *multi-échelles*. Pour des détails sur les pavages irréguliers et/ou l'intérêt des objets discrets multi-échelles le lecteur peut se référer aux travaux de Coeurjolly [Coeurjolly 05a] et de Vacavant [Vacavant 08].

Une autre notion liée aux pavés que nous allons utiliser dans la suite est la notion de boule discrète fermée définie comme suit :

**Définition 1.2.8** (Boule discrète fermée). *La boule discrète basée sur la norme  $\alpha$  notée  $\mathcal{B}_{d_\alpha}(C, r)$  où  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$  représente le centre et  $r \in \mathbb{R}_+^*$  le rayon est définie comme suit :*

$$\mathcal{B}_{d_\alpha}(C, r) = \{P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|P - C\|_\alpha \leq r\}$$

Dans la suite, les pavés d'un espace discret à pavage régulier  $\mathbb{D}^n$  sont considérés comme des boules de rayon  $\frac{1}{2}$  et de normes 1 ou  $\infty$ , centrés sur des points de  $\mathbb{Z}^n$ .

Avec ces différentes notions sur les espaces et les points discrets nous pouvons introduire la géométrie discrète comme suit :

**Définition 1.2.9** (Géométrie discrète). *La géométrie discrète est l'étude d'ensembles de pavés ou de points discrets visant à construire des objets discrets ou à caractériser tout ou partie de l'objet discret comme un objet géométrique connu.*

La géométrie discrète repose sur plusieurs domaines scientifiques parmi lesquels nous pouvons citer l'arithmétique, la combinatoire, la topologie, l'algorithmique et la géométrie euclidienne. Nous présentons dans la sous-section suivante des notions topologiques liées au voisinage.

### 1.2.2 Notion de voisinage

La notion de voisinage permet de caractériser l'incidence entre pavés de deux points discrets. Dans un espace discret régulier, Andres [Andres 00] définit le k-voisinage de la façon suivante :

**Définition 1.2.10** (k-voisinage [Andres 00]). *Soit  $k \in [0, n - 1]$ . Deux points discrets  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$  et  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$  sont dits k-voisins si*

$$\begin{cases} \forall i \in [1, n], |p_i - q_i| \leq 1 \\ k \leq n - \sum_{i=1}^n |p_i - q_i| \end{cases}$$

En d'autres termes, en dimension 2 et 3 deux points discrets  $p$  et  $q$  sont *0-voisins* si les hypervoxels  $P$  et  $Q$  de centre  $p$  et  $q$  ont un sommet commun. Ils sont *1-voisins* si  $P$  et  $Q$  ont une arête commune. En dimension 3,  $p$  et  $q$  sont *2-voisins* si  $P$  et  $Q$  ont une face commune. De manière générale, en dimension  $n$ , deux points discrets sont k-voisins si les hypervoxels qui leur sont associés partagent une cellule topologique de dimension au moins  $k$  [Roussillon 09].

Dans la littérature, en dimension 2, on appelle 8-connextité et 4-connextité respectivement la 0-connextité et la 1-connextité. Et en dimension 3, on désigne par 26-connextité, 18-connextité et 6-connextité, respectivement, le 0-voisinage, le 1-voisinage et le 2-voisinage. Cela est lié au nombre de k-voisins possibles que peut avoir un point discret. Nous utiliserons les termes de 0-connextité (ou 0-voisinage), 1-connextité (ou 1-voisinage) et de 2-connextité (ou 2-voisinage) car ils sont similaires en toute dimension et définissent la dimension de la cellule topologique commun aux hypervoxels associés aux points discrets k-voisins.

La Figure 1.4 illustre les types de voisinages sur les hypervoxels d'un espace discret régulier en dimension 2 et 3.

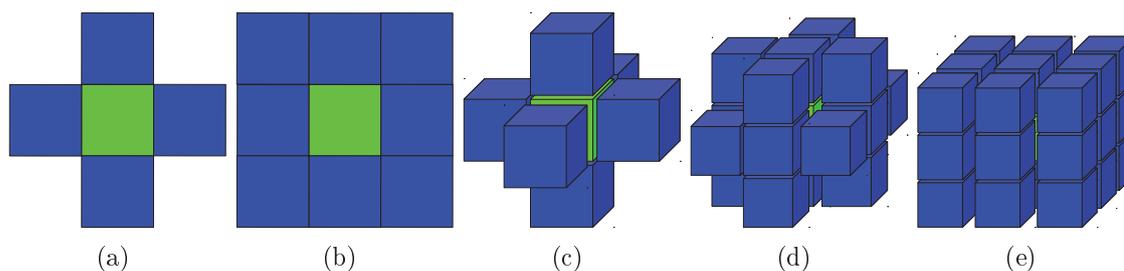


FIGURE 1.4 – Exemples de voisinages en dimension 2 et 3. (a) Un pixel en vert clair et ses quatre 1-voisins. (b) Un pixel en vert clair et ses huit 0-voisins. (c) Un voxel en vert clair et ses six 2-voisins. (d) Un voxel en vert clair et ses dix-huit 1-voisins. (e) Un voxel en vert clair et ses vingt et six 0-voisins.

Lorsque les pavés n'ont pas les mêmes tailles de côtés, ces notions de voisinage ne sont plus valides. Mais il existe, dans ces cas, une façon alternative de définir la notion de voisinage. Dans une grille irrégulière isothétique, Coeurjolly définit le voisinage comme suit :

**Définition 1.2.11** (ve-voisinage, e-voisinage [Coeurjolly 05a]). Soit  $P(x_p, y_p)$  et  $Q(x_q, y_q)$  deux pavés d'une grille irrégulière isothétique, en dimension 2, ayant des côtés de tailles  $(l_p^x, l_p^y)$  et  $(l_q^x, l_q^y)$  respectivement.  $P$  et  $Q$  sont dits *ve-voisins* si

$$\begin{cases} |x_p - x_q| = \frac{l_p^x + l_q^x}{2} \\ |y_p - y_q| \leq \frac{l_p^y + l_q^y}{2} \end{cases}$$

ou si

$$\begin{cases} |y_p - y_q| = \frac{l_p^y + l_q^y}{2} \\ |x_p - x_q| \leq \frac{l_p^x + l_q^x}{2} \end{cases}$$

$P$  et  $Q$  sont dits *e-voisins* si nous considérons un **ou exclusif** et des inégalités strictes dans les définitions de *ve-voisinage*.

En dimension 2, nous pouvons assimiler la notion de *ve-voisinage* au 0-voisinage et la notion d'*e-voisinage* au 1-voisinage. Pour certains travaux que nous présentons dans le Chapitre 3, nous allons scinder l'*e-voisinage* en deux notions : le *v-voisinage* et le *h-voisinage*. Si  $P$  et  $Q$  sont *e-voisins*, soit ils sont *v-voisins* et

$$\begin{cases} |x_p - x_q| = \frac{l_p^x + l_q^x}{2} \\ |y_p - y_q| < \frac{l_p^y + l_q^y}{2} \end{cases}$$

soit ils sont *h-voisins* et

$$\begin{cases} |y_p - y_q| = \frac{l_p^y + l_q^y}{2} \\ |x_p - x_q| < \frac{l_p^x + l_q^x}{2} \end{cases}$$

En d'autres termes, deux pavés sont *h-voisins* si leurs côtés adjacents sont portés par une droite horizontale (h). Ils sont *v-voisins* si leurs côtés adjacents sont portés par une droite verticale (v). Ils sont *e-voisins* s'ils sont *h-voisins* ou *v-voisins* et ils sont *ve-voisins* s'ils sont *e-voisins* ou s'ils ont un sommet commun comme l'illustre la Figure 1.5.

### 1.2.3 Notion de courbe discrète

Dans cette sous-section nous nous intéressons particulièrement à des objets discrets dans des espaces discrets réguliers. Mais les notions que nous définissons peuvent s'étendre sur les grilles irrégulières isothétiques en remplaçant la notion de *k-voisinage* par celle de *ve-voisinage* ou de *e-voisinage*. Nous considérons qu'un objet discret est composé de points discrets. Pour caractériser l'incidence entre deux points discrets, nous avons défini la notion de *k-voisinage*. Pour caractériser un ensemble de points discrets *k-voisins* deux à deux, nous introduisons ci-après les notions de *k-chemin*, et de *k-courbe* discrète reprises dans [Dexet 06a].

**Définition 1.2.12** (*k-chemin*). Un ensemble de  $m \in \mathbb{N}^*$  points discrets  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{D}^n$  constitue un *k-chemin* si pour  $k \in [0, n - 1]$ ,  $\forall i \in [1, m - 1]$ ,  $p_i$  et  $p_{i+1}$  sont *k-voisins*.

**Définition 1.2.13** (*k-connexité*). Un objet discret  $X$  est dit *k-connexe* si pour deux points discrets quelconques de  $X$  il existe un *k-chemin* qui les relie.

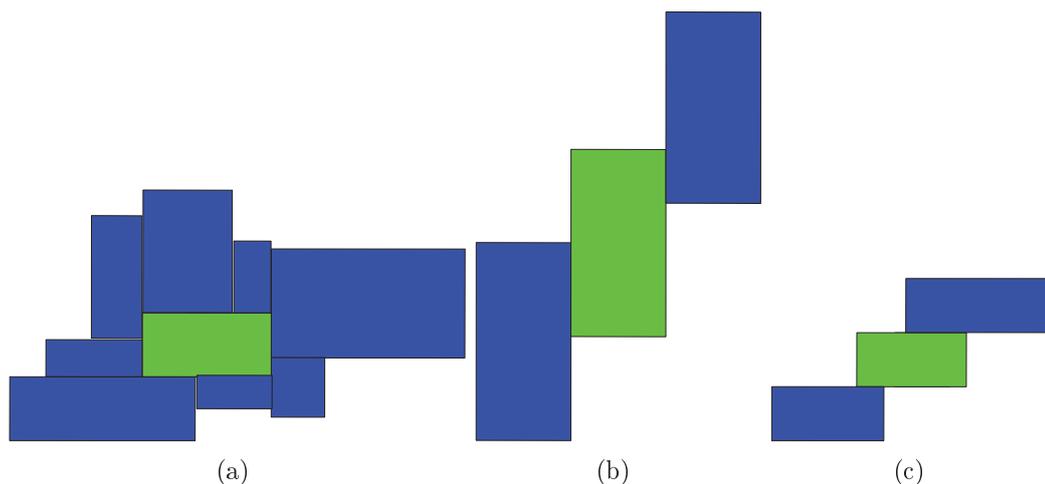


FIGURE 1.5 – Exemples de voisinages entre pavés. (a) Un pavé en vert clair et ses v-voisins. (b) Un pavé en vert clair et des pavés v-voisins. (c) Un pavé en vert clair et des pavés h-voisins.

**Définition 1.2.14** (*k*-courbe). Dans un espace discret  $\mathbb{D}^n$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour  $k \in [0, n - 1]$ ,  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{D}^n$  une suite de  $m \in \mathbb{N}^*$  points discrets est une *k*-courbe si  $\mathcal{C}$  est un *k*-chemin tel que  $\forall i \in [2, m - 2]$ ,  $p_i$  a exactement deux *k*-voisins.

$\mathcal{C}$  est dite fermée si, en plus,  $p_1$  et  $p_m$  sont *k*-voisins. Elle est dite ouverte sinon. Si  $\mathbb{D}^n$  est régulier,  $\mathcal{C}$  est dite régulière sinon elle est dite irrégulière.

Le lecteur peut se référer à [Breton 03a, Dexet 06a, Roussillon 09, Rodriguez 11] pour plus de détails sur les définitions et notions sur les espaces discrets et les points discrets. Dans la suite, nous nous intéressons aux contours des objets discrets. Ce contour peut être décomposé en figures géométriques de bases (segment, arc de cercle) que nous appelons *primitives discrètes*. Dans la Section suivante, nous présentons succinctement des primitives discrètes que nous étudions dans les chapitres suivants. Nous nous intéressons à une façon particulière de les définir qu'on appelle modèles de discrétisation. Nous introduisons ensuite les notions d'hyperplans et d'hypersphères discrets qui sont des généralisations de la notion de segment de droite et d'arcs de cercles dans les espaces discrets.

## 1.3 Primitives discrètes

Pour rappel un objet discret est un ensemble de points discrets. Il est alors possible de le définir par énumération des points discrets qui le composent. Cette façon de définir un objet discret est appelé *représentation en extension*. Il existe différentes approches de ce type ; notamment la définition par le *code de Freeman* [Lipkin 70, Freeman 74] et la *description matricielle* d'un objet discret. Le code de Freeman associe des directions à chaque déplacement possible d'un point discret à un de ses voisins (8 directions pour le 0-voisinage et 4 directions pour le 1-voisinage en dimension 2) puis décrit l'objet discret comme la suite des directions prises dans le parcours de son contour. La description matricielle consiste à associer des cellules

d'une matrice aux points discrets de l'objet discret. Les cellules peuvent comporter des informations sur les coordonnées par rapport à un repère orthonormé associé à l'espace discret ou la couleur perçue sur le pavé. Cette dernière définition a l'avantage d'être complète mais a l'inconvénient de nécessiter un dispositif de stockage important. En plus, en cas de transformations géométriques, il faut recalculer chaque élément de la matrice. C'est une des raisons pour laquelle nous préférons la *description analytique* ou *représentation en compréhension* qui définit un objet discret par un ensemble d'inéquations que doivent respecter ses points discrets. Cette description rend plus facile l'étude de transformations géométriques (rotation, symétrie, ...) et l'analyse des objets discrets. Pour plus de détails sur ces différentes méthodes de représentation le lecteur peut se référer à [Breton 03a, Dexet 06a, Roussillon 09].

Nous nous intéressons particulièrement à la définition analytique d'objet discret à partir d'objets euclidiens appelée *discrétisation*. Les objets discrets issus de discrétisation ayant des propriétés (topologiques entre autres) identiques peuvent être regroupés dans une même classe que nous appelons *modèle* [Reveillès 91, Cohen-Or 95, Andres 00, Coeurjolly 05a, Andres 03]. La méthode utilisée pour obtenir des objets discrets répondant à un modèle donné est appelée *modèle de discrétisation*. Il existe plusieurs modèles de discrétisations et Roussillon en fait une brève synthèse dans sa thèse [Roussillon 09]. Parmi ceux-ci, nous nous intéressons à la *Square Quantization* [Freeman 74] encore appelée *modèle Supercouverture* [Cohen-Or 95, Andres 00] et une version avec des conventions d'orientations appelée *modèle Standard* [Andres 03]. Nous présentons brièvement comment faire la discrétisation d'objet euclidien, d'un point de vue géométrique, avec ces modèles de discrétisations dans la sous-section suivante avant d'introduire des définitions analytiques de primitives discrètes répondant à ces modèles.

### 1.3.1 Modèles de discrétisation

#### Modèle naïf

Dans la discrétisation avec le modèle naïf, il faut associer à chaque point discret, une boule discrète fermée de norme 1 et de rayon  $\frac{1}{2}$ . L'objet discret obtenu correspond à l'ensemble des points discrets dont les boules associées sont incidents à l'objet euclidien. L'objet discret obtenu est 0-connexe et nous appliquons cette discrétisation dans les espaces réguliers. La Figure 1.6 est une illustration d'un objet discret obtenu par discrétisation suivant le modèle Naïf. Cette discrétisation n'est pas applicable comme telle dans des grilles irrégulières isothétiques car la Définition 1.2.8 (Page 12) n'y est pas valide.

#### Modèle Supercouverture

Pour faire la discrétisation suivant ce modèle, il faut associer à chaque point discret une boule discrète fermée de norme infinie et de rayon  $\frac{1}{2}$ . Puis l'objet discret obtenu dans un espace discret régulier est l'ensemble des points discrets dont les boules associées sont incidentes à l'objet euclidien. La Figure 1.7 donne une illustration d'un objet discret obtenu par discrétisation suivant ce modèle. Cette discrétisation peut présenter des irrégularités ou des bruits qu'on appelle **k-bulle** lorsque l'objet euclidien passe par un sommet de boule. Cela parce qu'il faut alors sé-

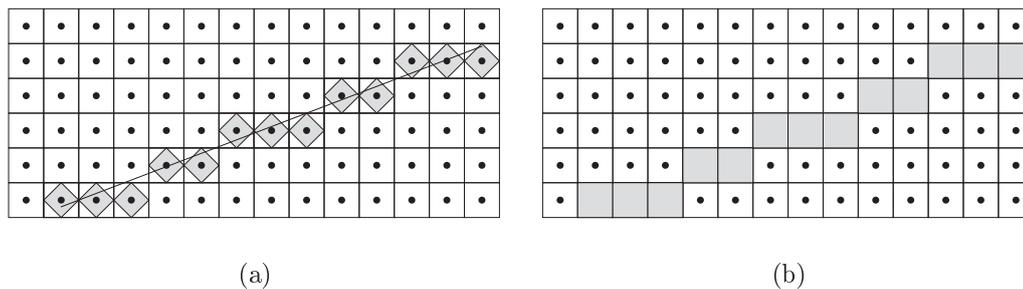


FIGURE 1.6 – (a) Discretisation d’un segment de la droite  $(5, 13, 0)$  suivant le modèle naïf. (b) Le segment discret obtenu est 0-connexe.

lectionner tous les 1-voisins du point discret correspondant comme faisant partie de la discrétisation. L’objet discret produit est 1-connexe dans les espaces réguliers. La

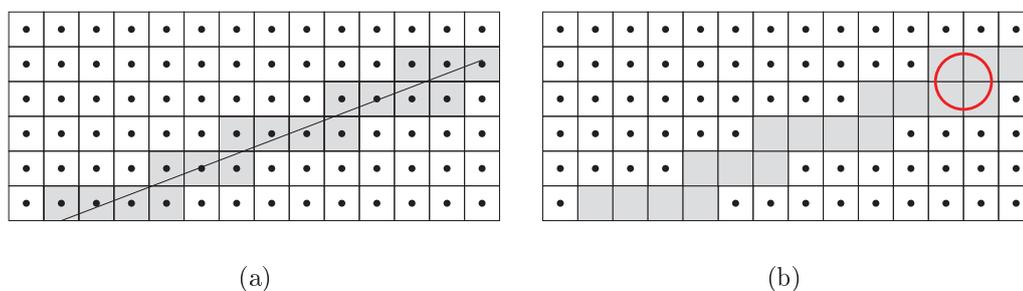


FIGURE 1.7 – (a) Discretisation d’un segment de la droite  $(5, 13, 0)$  suivant le modèle Supercouverture. (b) Le segment discret obtenu est 1-connexe mais possède une bulle (cercle rouge).

discrétisation par ce modèle peut s’appliquer dans une grille irrégulière isothétique [Coeurjolly 05a]. Dans ce cas, au lieu d’associer des boules fermées de norme infinie aux points discrets, on associe plutôt des pavés. L’objet discret est alors l’ensemble des pavés incidents à l’objet euclidien.

### Modèle Standard

La discrétisation, par le modèle standard, d’un objet euclidien dans un espace régulier est l’ensemble des points discrets dont les boules infinies associées sont incidentes à cet objet euclidien. Il y a une exception quand l’objet euclidien passe par un sommet de boule. Dans ce cas, le point discret associé peut ou ne pas être dans la discrétisation, en fonction de la convention d’orientation choisie. La Figure 1.9 donne une illustration d’un objet discret obtenu par discrétisation suivant ce modèle. Cette discrétisation a l’avantage de ne pas produire de **k-bulle** et l’objet discret produit est 1-connexe dans les espaces réguliers. Il n’y a pas de version de ce modèle applicable dans les espaces discrets irréguliers.

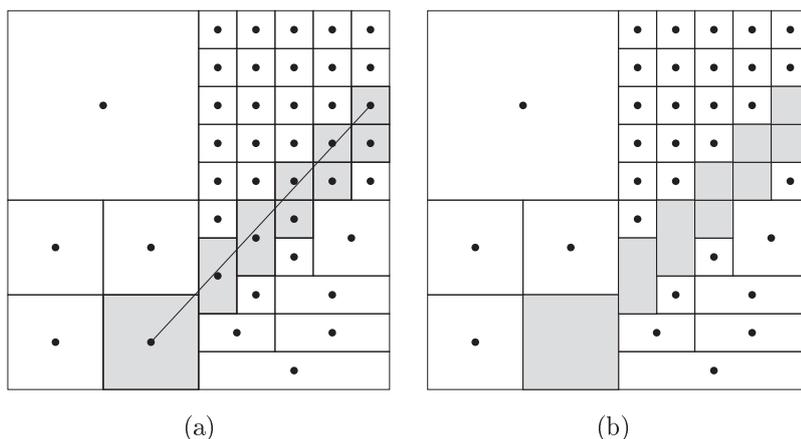


FIGURE 1.8 – (a) Discretisation d'un segment de droite dans une grille irrégulière isothétique suivant le modèle Supercouverture. (b) Segment discret irrégulier obtenu.

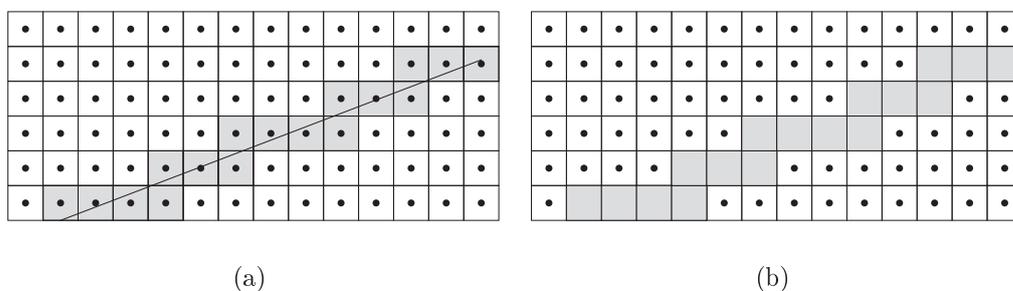


FIGURE 1.9 – (a) Discretisation d'un segment de la droite  $(5, 13, 0)$  suivant le modèle Standard. (b) Le segment discret obtenu est 1-connexe et ne possède pas de bulle.

### 1.3.2 Hyperplans discrets

La première définition analytique de l'hyperplan discret a été proposée par Reveilles [Reveillès 91] comme suit :

**Définition 1.3.1** (Hyperplan analytique discret). *L'hyperplan analytique discret de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{R}^2$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des points discrets  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant  $\mu \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i < \mu + \omega$*

Andres a ensuite défini l'hyperplan analytique discret [Andres 00] comme suit :

**Définition 1.3.2** (Hyperplan analytique discret fermé). *L'hyperplan analytique discret fermé de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{R}^2$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des points discrets  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant  $\mu \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \mu + \omega$*

Le paramètre  $\mu$  est une constante de translation et correspond au décalage affine (ordonnée à l'origine). Le paramètre  $\omega$  représente l'épaisseur arithmétique. La valeur  $\sum_{i=1}^n a_i x_i - \mu$  est appelée *reste arithmétique*.

L'épaisseur arithmétique permet de définir pour quel type de connexité un hyperplan analytique discret peut constituer un bord (entre intérieur et extérieur), on dit qu'il est *k-séparable* [Andres 00]. Lorsque l'hyperplan discret n'est pas *k-séparable*, il possède un *k-tunnel* que nous définissons comme suit :

**Définition 1.3.3** (k-tunnel [Andres 00]). Soit  $\mathbb{H}$  un hyperplan analytique discret de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{Z}^2$  et  $(a_1, b_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ .  $\mathbb{H}$  possède un k-tunnel s'il existe deux pavés  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  et  $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$  k-voisins et tels que  $\sum_{i=1}^n a_i p_i < \mu$  et  $\sum_{i=1}^n a_i q_i \geq \omega + \mu$ . Sinon on dit que  $\mathbb{H}$  est **k-séparant**.

Le Théorème 1.3.1 montre que l'épaisseur arithmétique permet un contrôle optimal de la k-séparabilité d'un hyperplan analytique discret.

**Théorème 1.3.1** (k-séparabilité d'un hyperplan analytique discret [Andres 00]). Soit  $\mathbb{H}$  un hyperplan analytique discret de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{Z}^2$  et  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  avec  $0 \leq a_i \leq a_{i+1}, \forall i \in [1, \dots, n-1]$ . Alors :

- Si  $\omega \geq \sum_{i=k+1}^n |a_i|$  alors  $\mathbb{H}$  est **k-séparateur**;
- Si  $\omega < \sum_{i=k+1}^n |a_i|$  alors  $\mathbb{H}$  possède des **k-tunnels**;
- Si  $\omega = \sum_{i=k+1}^n |a_i|$  alors  $\mathbb{H}$  est **k-minimal** c'est à dire qu'il est l'hyperplan d'épaisseur minimale k-séparant.

Particulièrement, un hyperplan discret 0-connexe est 1-séparable et un hyperplan discret 1-connexe est 0-séparable [Andres 00]. Dans la suite nous présentons quelques définitions analytiques d'hyperplans discrets obtenus par les modèles de discrétisations présentées dans la sous-section 1.3.1.

### Hyperplan discret Naïf

Le modèle naïf produit des hyperplans Naïfs et Naïfs fermés définies analytiquement par Reveillès [Reveillès 91] (Définition 1.3.4) et Andres [Andres 00] (Définition 1.3.5) respectivement.

**Définition 1.3.4** (Hyperplan naïf). L'hyperplan Naïf de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{R}^2$  et  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des points discrets  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant :

$$-\frac{\omega}{2} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i - \mu < \frac{\omega}{2}$$

avec  $\omega = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$

**Définition 1.3.5** (Hyperplan naïf fermé [Andres 00]). L'hyperplan naïf fermé de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{R}^2$  et  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des points discrets  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant :

$$-\frac{\omega}{2} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i - \mu \leq \frac{\omega}{2}$$

avec  $\omega = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$

### Hyperplan discret Supercouverture

Le modèle Supercouverture produit un hyperplan discret Supercouverture [Cohen-Or 95, Andres 00] définie comme suit :

**Définition 1.3.6** (Hyperplan discret Supercouverture [Andres 00]). *L'hyperplan discret Supercouverture de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{R}^2$  et  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des points discrets  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant :*

$$-\frac{\omega}{2} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i - \mu \leq \frac{\omega}{2}$$

avec  $\omega = \sum_{i=1}^n |a_i|$

### Hyperplan discret Standard

Le modèle Standard produit l'hyperplan discret Standard défini comme suit :

**Définition 1.3.7** (Hyperplan standard [Andres 03]). *L'hyperplan standard de paramètres  $(\mu, \omega) \in \mathbb{R}^2$  et  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des points discrets  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant :*

$$-\frac{\omega}{2} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i - \mu < \frac{\omega}{2}$$

avec  $\omega = \sum_{i=1}^n |a_i|$ ,  $a_1 \geq 0$  ou  $a_1 = 0$  et  $a_2 \geq 0$  ou ... ou  $\forall i \in [1, \dots, n-1]$ ,  $a_i = 0$  et  $a_{i+1} \geq 0$

### 1.3.3 Hypersphères discrètes

Dans cette sous-section nous nous intéressons particulièrement à la notion de cercle analytique discret. Les notions et définitions que nous introduisons sont facilement extensibles aux arcs et sphères discrets. Ces cercles discrets sont aussi obtenus par discrétisation de cercles euclidiens grâce aux modèles de discrétisation de la sous-section 1.3.1.

#### Cercles d'Andres

La première définition de cercle discret analytique a été faite par Andres comme suit :

**Définition 1.3.8** (Cercle d'Andres [Andres 94]). *Un ensemble de points discrets  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  est un cercle analytique discret d'Andres noté  $\mathcal{C} = (x_0, y_0, R, \omega)$  de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , de rayon  $R \in \mathbb{R}$  et d'épaisseur  $\omega \in \mathbb{R}$  si chaque point discret vérifie  $(R - \frac{\omega}{2})^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < (R + \frac{\omega}{2})^2$*

**Remarque 1.3.1.** *En remplaçant les inégalités de la définition 1.3.8 par  $(R - \frac{1}{2})^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R + \frac{1}{2})^2$  nous définissons le cercle discret suivant le modèle Pythagoricien [Rodriguez 11].*

La propriété de connexité suivante découle de la définition 1.3.8.

**Propriété 1.3.1** (Connexité des cercles d'Andres [Andres 94]).  *$\mathcal{C}$  un cercle analytique discret est  $\theta$ -connexe si son épaisseur  $\omega \geq 1$ .*

### Cercles Supercouvertures et Standards

La définition analytique du cercle Supercouverture a d'abord été faite par Andres [Andres 00]. Puis Andres et Roussillon en ont donnée une définition simple [Andres 11].

**Définition 1.3.9** (Description analytique d'un cercle Supercouverture [Andres 11]).  
 Un ensemble de points discrets  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  représente un cercle analytique Supercouverture noté  $\mathcal{C}_\infty(x_0, y_0, R) = ((\mathcal{C} \oplus B_{d_\infty}(1)) \cap \mathbb{Z}^2)$  de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ , de rayon  $R \in \mathbb{R}$  si et seulement si chaque point discret vérifie :

$$\begin{cases} |y - y_0| \leq \frac{1}{2} \\ |(|x - x_0| - R)| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} |x - x_0| \leq \frac{1}{2} \\ |(|y - y_0| - R)| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } R^2 - \frac{1}{2} - (|x - x_0| + |y - y_0|) \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2 - \frac{1}{2} + (|x - x_0| + |y - y_0|)$$

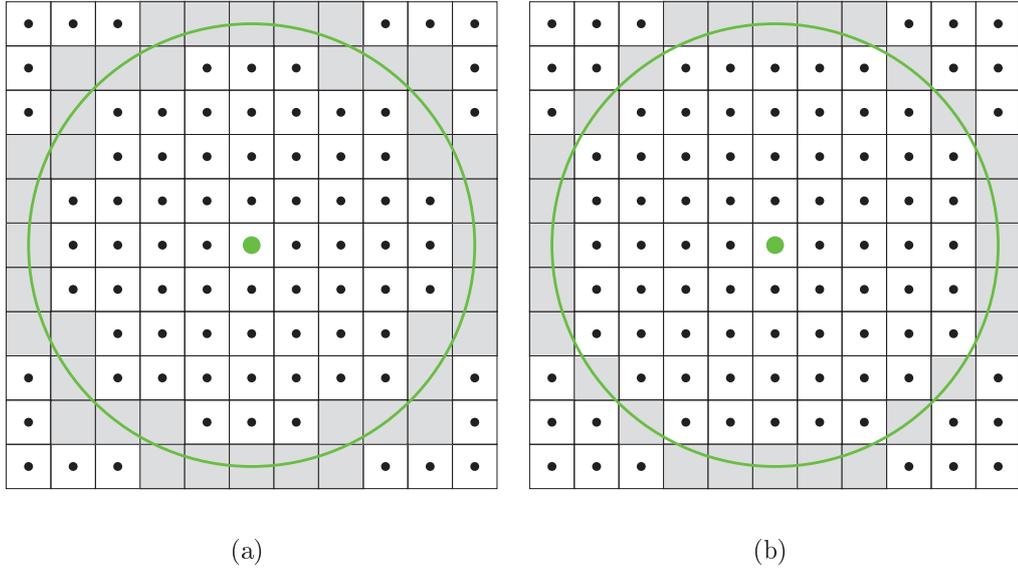


FIGURE 1.10 – Exemple de cercle discrets. (a) Cercle Supercouverture de rayon 5 et de centre (5, 5). (b) Cercle Naïf de rayon 5 et de centre (5, 5)

La Figure 1.10 (a) donne une illustration du cercle discret Supercouverture. Il peut y avoir aussi des bulles avec les cercles Supercouvertures d'où l'introduction de cercles standards [Andres 03, Andres 11]. Par contre ici cela renvoie à deux notions :

- le cercle standard supérieur, noté  $\mathcal{C}_\infty^+(x_0, y_0, R)$ , est obtenu en retirant la frontière extérieure de la bande correspondante à  $\mathcal{C} \oplus B_\infty(1)$ .
- le cercle standard inférieur, noté  $\mathcal{C}_\infty^-(x_0, y_0, R)$ , obtenu en retirant la frontière intérieure.

## Cercles naïfs

La définition de cercle naïf est faite comme suit :

**Définition 1.3.10** (Description analytique d'un cercle naïf fermé [Andres 11]). *Un ensemble de points discrets  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  représente un cercle analytique naïf fermé noté  $\mathcal{C}_1(x_0, y_0, R) = ((\mathcal{C} \oplus B_1(1)) \cap \mathbb{Z}^2)$  de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ , de rayon  $R \in \mathbb{R}$  si et seulement si chaque point discret vérifie :*

$$\begin{cases} \|(x - y) - (x_0 - y_0)\| \leq \frac{1}{2} \\ \left| \|x + y - (x_0 + y_0)\| - R\sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \frac{1}{2} \\ \left| \|x - y - (x_0 - y_0)\| - R\sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ou

$$R^2 - \frac{1}{4} - \max(|x - x_0|, |y - y_0|) \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2 - \frac{1}{4} + \max(|x - x_0|, |y - y_0|)$$

La Figure 1.10 (b) donne une illustration du cercle discret suivant le modèle naïf fermé.

Nous avons présenté des primitives discrètes de base. Nous nous focalisons dans la suite sur trois primitives discrètes : la droite discrète, le sous-segment discret et le cercle discret. Les travaux sur ces trois primitives peuvent être étendus à d'autres objets discrets plus complexes car elles constituent les éléments de base, que nous appelons primitives, des bords des objets discrets.

Dans la suite, sans perte de généralité, nous étudions ces primitives discrètes suivant un seul modèle qui est souvent le modèle naïf. Par ailleurs, quand cela est possible nous n'étudions ces primitives que dans le premier octant du repère orthonormé associé à l'espace discret en dimension 2. Il est possible ensuite, par des symétries, d'étendre nos travaux aux autres octants [Debled-Renesson 95].

## 1.4 Aperçu sur les primitives discrètes

### 1.4.1 Droite discrète

En posant  $\mu = c$ ,  $\omega = b$ ,  $a = a_1$ ,  $-b = a_2$  avec  $0 \leq a \leq b$  et  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ , nous pouvons définir une droite discrète naïve en dimension 2 dans le premier octant comme l'ensemble des points discrets  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $0 \leq ax - by - c < b$ . Nous notons  $\mathcal{D}(a, b, c)$  la droite discrète dont les caractéristiques sont alors entières et correspondent à  $(a, b, c)$ .

Une première propriété d'une telle droite  $\mathcal{D}$  est qu'elle possède exactement un point discret, noté  $P_D(x)$ , d'abscisse  $x$ . L'ordonnée de  $P_D(x)$  est alors  $y = \lfloor \frac{ax-c}{b} \rfloor$ .

Nous pouvons aussi définir une droite discrète comme l'ensemble des points discrets délimités par une droite d'appui inférieure  $\mathcal{D}_L : ax - by - c = b - 1$  et une droite d'appui supérieure  $\mathcal{D}_U : ax - by - c = 0$  [Debled-Renesson 95]. Les points d'appuis supérieurs (respectivement inférieurs) sont les points discrets de la droite discrète qui sont sur la droite d'appui supérieure (respectivement inférieure). Un point faiblement extérieur supérieur (respectivement inférieur) est un point de  $D$

TABLE 1.1 – Répartition des points de l'espace discret en fonction des droites d'appuis d'une droite discrète [Debled-Rennesson 95]

Position	Superieur	Inferieur
Point strictement extérieur	$ax - by - c < -1$	$ax - by - c > b$
Point faiblement extérieur	$ax - by - c = -1$	$ax - by - c = b$
Point d'appui	$ax - by - c = 0$	$ax - by - c = b - 1$
Point strictement intérieur	$0 < ax - by - c < b - 1$	

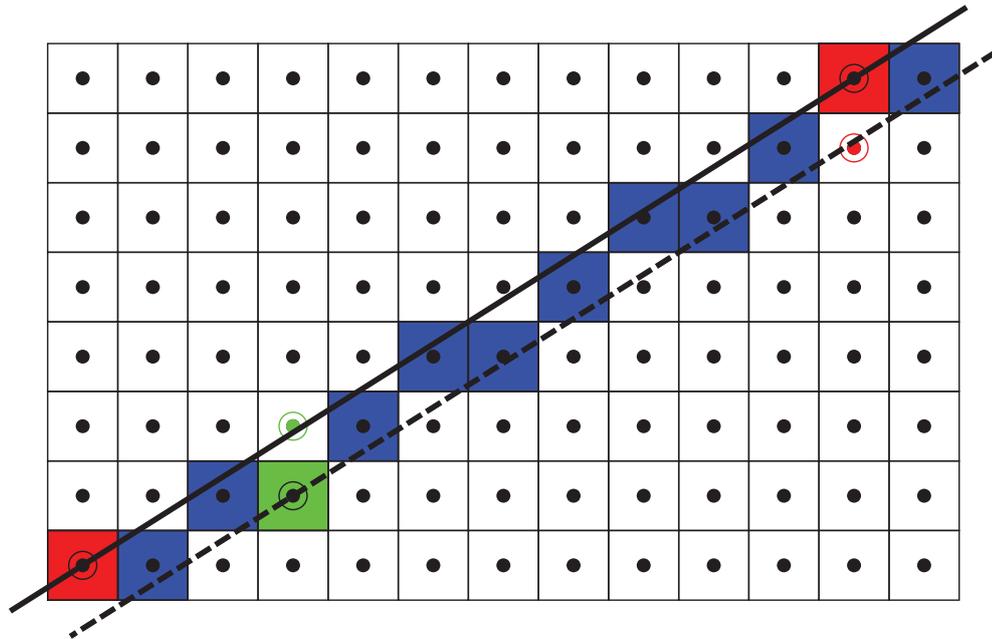


FIGURE 1.11 – Répartition des points de  $\mathbb{Z}$  en fonction des droites d'appuis supérieure (ligne continue) et inférieure (ligne discontinue) de  $\mathcal{D}(3, 8, 0)$ . Les points d'appuis supérieurs (inférieurs) sont associés aux pixels en rouge (vert). Les points faiblement extérieurs supérieurs (inférieurs) sont associés aux points encadrés en vert (rouge). Les points fortement intérieurs sont associés aux pixels en bleu et les points fortement extérieurs sont associés aux points en noirs.

qui vérifie  $ax - by - c = -1$  (respectivement  $ax - by - c = b$ ). La Table 1.1 donne plus de détails sur ces notions et la Figure 1.11 en donne une illustration.

**Propriété 1.4.1** (Alternance des points d'appuis [Debled-Rennesson 95]). *Les points d'appuis supérieurs et inférieurs alternent sur une droite discrète de telle sorte qu'entre deux points d'appuis supérieurs (respectivement inférieurs) consécutifs il y a un point d'appui inférieur (respectivement supérieur).*

Pour déterminer les points d'appuis d'une droite discrète, il faut d'abord déterminer les coefficients de Bézout  $x_0$  et  $y_0$  de ses caractéristiques  $a$  et  $b$ , c'est à dire déterminer les solutions de l'équation  $ax_0 - by_0 = 1$ . Puis on détermine un premier point d'appui supérieur en multipliant  $x_0$  et  $y_0$  par le facteur  $c$  pour avoir  $U_0(x_{u_0}, y_{u_0})$  tel que  $ax_{u_0} - by_{u_0} = c$ . Ensuite il est facile de montrer que  $a(x_{u_0} + b) - b(y_{u_0} + a) = c$  et d'en déduire la Propriété 1.4.1.

De la même manière, on peut déduire une relation entre points d'appuis inférieurs et points faiblement extérieurs supérieurs et entre points d'appuis supérieurs et points faiblement extérieurs inférieurs. En effet si  $ax - by - c = 0$  alors  $ax - b(y - 1) - c = b$  et si  $ax - by - c = b - 1$  alors  $ax - b(y + 1) - c = -1$ . Cela implique que si  $U(x_u, y_u)$  est un point d'appui supérieur, alors  $LU(x_u, y_u - 1)$  est un point faiblement extérieur inférieur. Et si  $L(x_l, y_l)$  est un point d'appui inférieur, alors  $LL(x_l, y_l + 1)$  est un point faiblement extérieur supérieur (voir sur la Figure 1.11). Dans la suite,  $FE$  est une fonction qui prend en entrée un point d'appui et donne en sortie le point faiblement extérieur correspondant.

**Définition 1.4.1** (Palier). *Un palier d'une droite discrète est un ensemble de points discrets connexes deux à deux de la droite discrète ayant la même ordonnée.*

Sur une droite discrète ou un sous-segment discret il y a deux types de paliers : les paliers courts ( $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$  pixels) et les paliers longs ( $\lceil \frac{b}{a} \rceil$  pixels) [Troesch 93]. Il existe des relations intéressantes entre l'ordre d'apparition de paliers courts et longs dans une droite discrète, les caractéristiques de cette droite et la combinatoire [De Vieilleville 06]. L'une des relations intéressantes, est que les points d'appuis supérieurs (inférieurs) sont toujours en début (fin) de palier [Reveillès 91] (voir sur la Figure 1.11).

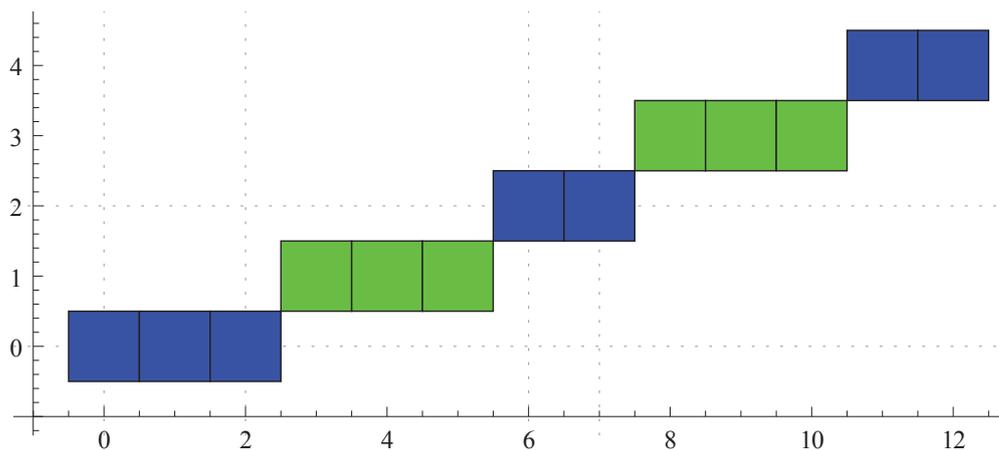


FIGURE 1.12 – Illustration de l'alternance de paliers d'une droite discrète de caractéristiques  $(5, 13, 0)$  par l'alternance de couleurs. On remarque que le palier long a  $\lceil \frac{13}{5} \rceil = 3$  pixels et que le palier court a  $\lfloor \frac{13}{5} \rfloor = 2$  pixels.

Nous utilisons la notation  $\{ \frac{a}{b} \}$  pour  $a \bmod b$  (reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ ) [Reveillès 91]. On peut facilement démontrer que le reste arithmétique  $ax - by - c = \{ \frac{ax-c}{b} \}$ .

Finalement plusieurs droites discrètes peuvent contenir un même ensemble de points discrets connexes (courbe discrète). Par exemple les droites discrètes de caractéristiques  $(7, 11, 0)$  et  $(5, 8, 1)$  ont les mêmes points discrets dans l'intervalle  $[1, 7]$  comme l'illustre la Figure 1.13. Parmi ces droites, celle qui a les caractéristiques minimales [Debled-Rennesson 95] d'un point de vue de l'épaisseur arithmétique définit les caractéristiques de la courbe discrète qui est alors appelée *sous-segment discret*. Nous expliquons davantage la notion de sous-segment discret dans la sous-section suivante.

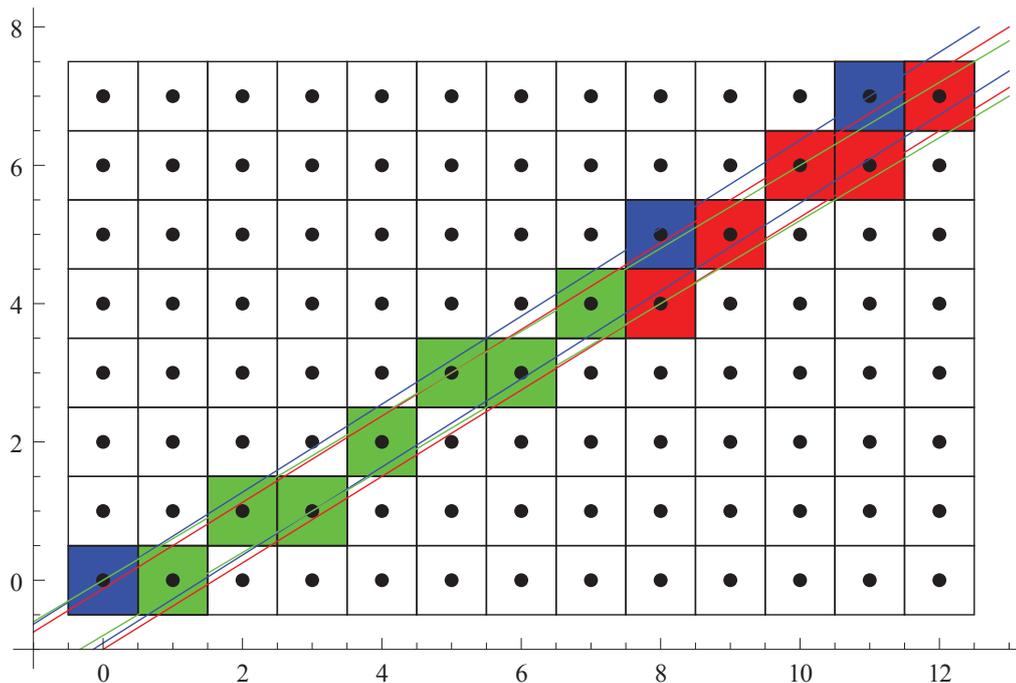


FIGURE 1.13 – Les droites discrètes de caractéristiques  $(7, 11, 0)$  (droites d’appuis en bleu) et  $(5, 8, 1)$  (droites d’appuis en rouge) ont les mêmes points discrets (en vert) dans l’intervalle  $[1, 7]$ .

### 1.4.2 Sous-segment discret

Parce qu’un  $k$ -chemin peut appartenir à plusieurs droites discrètes, on définit généralement un sous-segment discret comme une partie d’une de ces droites.

**Définition 1.4.2** (Sous-Segment Discret). *Un Sous-Segment Discret  $\mathcal{S}(D, u, v)$  associé à la droite discrète  $D = \mathcal{D}(a, b, c)$  et ayant pour extrémités les points discrets d’abscisses  $u$  et  $v$  est le sous-ensemble de  $D$  dont les points ont des abscisses dans l’intervalle  $[u, v]$ .*

Dans la suite, nous associons un intervalle d’abscisses de  $D$  au sous-segment discret  $\mathcal{S}$ . La suite de restes arithmétiques pour un sous-segment  $\mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  est noté  $\mathcal{R}_{a,b,c}(u, v)$ . Nous définissons rigoureusement la notion de *caractéristiques minimales* (voir la Définition 1.4.3).

**Définition 1.4.3** (Caractéristiques minimales d’un sous-segment discret). *Les caractéristiques minimales d’un sous-segment discret sont les caractéristiques de la droite discrète le contenant, et ayant l’épaisseur arithmétique minimale. Dans le cas de la droite discrète naïve il s’agit de celle ayant le paramètre  $b$  minimal.*

Il est facile de prouver qu’il existe une seule droite discrète ayant le  $b$  minimal [Debled-Rennesson 95]. Cette droite discrète de caractéristiques minimales est appelée *droite discrète minimale* pour le sous-segment discret. Pour faire simple, nous appelons sous-segment discret minimal, un sous-segment discret de caractéristiques minimales. Il existe de nombreuses autres propriétés sur les sous-segments discrets. La plupart d’entre elles sont aussi applicables aux droites discrètes.

**Propriété 1.4.2.** *Deux sous-segments discrets sont équivalents s'ils sont de la même droite discrète minimale même s'ils n'ont pas les mêmes extrémités.*

**Propriété 1.4.3.** *Un sous-segment discret est dit minimal si et seulement s'il contient au moins trois points d'appuis de la droite discrète minimale qui le contient [Debled-Renesson 95, De Vieilleville 06].*

**Corollaire 1.4.1.** *Deux sous-segments discrets sont équivalents s'ils contiennent trois points d'appuis identiques ou s'ils contiennent chacun trois points d'appuis de la même droite discrète.*

Ces différentes propriétés sont la base des outils qui sont utilisés pour déterminer les caractéristiques minimales d'un sous-segment. Dans la suite nous présentons deux approches de reconnaissance de sous-segments discrets : la *dilatation* et l'*érosion*.

### Dilatation de sous-segment discret

**Définition 1.4.4** (Dilatation de sous-segment discret). *On appelle dilatation de sous-segment discret, ou simplement dilatation, l'opération qui consiste à ajouter un point discret à gauche ou à droite d'un sous-segment discret  $\mathcal{S}$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  :  $\mathcal{S}(D, u, v) \cup (v + 1, y)$  ou  $\mathcal{S}(D, u, v) \cup (u - 1, y)$ .*

À partir de l'algorithme de reconnaissance de Debled-Renesson [Debled-Renesson 95] (que nous présentons en détail dans le Chapitre 2 à la Section 2.2, Page 36), nous avons des propriétés immédiates sur la dilatation. En dilatant un sous-segment discret  $\mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  à droite (respectivement à gauche) nous avons les configurations suivantes :

- si  $\mathcal{R}_{a,b,c}(u - 1)$  ou  $\mathcal{R}_{a,b,c}(v + 1)$  est égal à  $-1$  ou  $b$ , nous avons à faire à un nouveau sous-segment discret avec de nouvelles caractéristiques. On vient alors de rajouter un point faiblement extérieur qui sera un point d'appui sur le nouveau sous-segment.
- Si  $0 \leq \mathcal{R}_{a,b,c}(u - 1) \leq b - 1$  (respectivement  $0 \leq \mathcal{R}_{a,b,c}(v + 1) \leq b - 1$ ), le nouveau sous-segment conserve les mêmes caractéristiques minimales que l'ancien. On vient alors de rajouter un point intérieur.
- Dans les autres cas, c'est-à-dire  $\mathcal{R}_{a,b,c}(u - 1) < -1$  ou  $\mathcal{R}_{a,b,c}(v + 1) > b$ , la dilatation ne produit pas un sous-segment discret.

### Érosion de sous-segment discret

**Définition 1.4.5** (Érosion de sous-segment discret). *On appelle érosion de sous-segment discret ou simplement érosion l'opération qui consiste à enlever un point discret à l'extrémité gauche ou à l'extrémité droite d'un sous-segment discret  $\mathcal{S}$ .*

Mis à part le cas particulier où  $\mathcal{S}$  est composé d'un seul point, son érosion donne un sous-segment discret  $\mathcal{S}'$ . Les caractéristiques minimales de  $\mathcal{S}'$  diffèrent de celle de  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $\mathcal{S}$  ne contient que trois points d'appuis et que le point enlevé est un de ces points d'appuis [Debled-Renesson 95, Roussillon 09]. Dans ce cas, les caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathcal{S}'$  se déduisent, en temps constant, des coordonnées d'un vecteur que nous notons  $\vec{v}(\beta, \alpha)$ .  $\vec{v}$  est fonction du point d'appui

TABLE 1.2 – Caractéristiques du sous-segment  $\mathcal{S}'$  obtenu après érosion d'un des trois points d'appuis du sous-segment  $\mathcal{S}$

	Suppression à gauche	Suppression à droite
$\mathcal{S}$ possède deux points d'appuis supérieurs $U_1(x_{u_1}, y_{u_1})$ et $U_2(x_{u_2}, y_{u_2})$ et un point d'appui inférieur $L(x_l, y_l)$ avec $x_{u_1} < x_{u_2}$	$\vec{v} = \overrightarrow{FE(U_1)L}$ d'où $\beta = x_l - x_{u_1}$ et $\alpha = y_l - y_{u_1} + 1$	$\vec{v} = \overrightarrow{LFE(U_2)}$ d'où $\beta = x_{u_2} - x_l$ et $\alpha = y_{u_2} - 1 - y_l$
$\mathcal{S}$ possède un point d'appui supérieur $U(x_u, y_u)$ et deux points d'appuis inférieurs $L_1(x_{l_1}, y_{l_1})$ et $L_2(x_{l_2}, y_{l_2})$ avec $x_{l_1} < x_{l_2}$	$\vec{v} = \overrightarrow{FE(L_1)U}$ d'où $\beta = x_u - x_{l_1}$ et $\alpha = y_u - y_{l_1} - 1$	$\vec{v} = \overrightarrow{UFE(L_2)}$ d'où $\beta = x_{l_2} - x_u$ et $\alpha = y_{l_2} + 1 - y_u$

supprimé, du point faiblement extérieur correspondant, et du prochain point d'appui. Il peut y avoir quatre configurations que nous résumons dans le Tableau 1.2.

L'érosion et la dilatation sont à la base d'approches de reconnaissance de sous-segment discret de complexité linéaire [Debled-Rennesson 95, Debled-Rennesson 96, Roussillon 09]. Il existe d'autres approches plus élaborées qui permettent de reconnaître un sous-segment discret. Nous présentons dans la suite deux telles approches : l'arbre de Stern-Brocot et le diagramme de Farey. Les deux notions reposent sur la notion de pente du sous-segment discret et établissent des relations intéressantes entre cette notion et les nœuds de l'arbre de Stern-Brocot, et les éléments d'une suite de Farey dans un espace dual, respectivement.

### Arbre de Stern-Brocot

Une manière de représenter les pentes des droites discrètes est de les décrire sous la forme de leurs décompositions en fractions continues définie comme suit :

**Définition 1.4.6** (Décomposition en fractions continues). *La décomposition en fractions continues d'une fraction irréductible  $\frac{a}{b}$  est son écriture sous la forme  $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n]$  tel que :*

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_n}}}}$$

**Exemple 1.4.1** (Exemples de décomposition en fractions continues de  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{7}{10}$ ).

- $\frac{2}{3} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = [0, 1, 2]$
- $\frac{7}{10} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = [0, 1, 2, 3]$

Dans l'exemple 1.4.1 on dira que  $[0, 1, 2]$  est un convergent de  $[0, 1, 2, 3]$ . La notion de  $k$ -convergence est définie comme suit :

**Définition 1.4.7** ( $k$ -ème convergent d'une fraction continue). *Soit une fraction continue  $\zeta = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_n]$ . Les  $q_i$  sont appelés coefficients partiels de  $\zeta$  et les  $k+1$  premiers coefficients partiels de  $\zeta$  constituent un  $k$ -ème convergent de  $\zeta$  qui est noté  $\zeta_k$  [De Vieilleville 06].*

L'arbre de Stern-Brocot est un arbre binaire équilibré qui permet de représenter toutes les pentes de droites discrètes dans le premier octant [Lachaud 13, Largeteau-Skapin 07, Saïd 09, Saïd 11, De Vieilleville 06]. Dans cet arbre il y a deux nœuds racines correspondant aux fractions  $\frac{0}{1}$  à gauche et  $\frac{1}{0}$  à droite. Tous les autres nœuds sont de la forme  $\frac{m+m'}{n+n'}$  où  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$  sont deux fractions dont les nœuds sont adjacents. Dans [Largeteau-Skapin 07] il y a plus de détails sur la construction de l'arbre de Stern-Brocot.

Chaque nœud de l'arbre de Stern-Brocot peut être représenté par une série de déplacements à gauche et/ou à droite à partir du nœud  $\frac{1}{1}$ . Le lien entre décomposition en fractions continues d'une fraction irréductible et son nœud dans l'arbre de Stern-Brocot se trouve dans les déplacements à effectuer depuis ce nœud  $\frac{1}{1}$  pour l'atteindre (voir la Figure 1.14). On note  $D$  un déplacement vers le nœud fils à droite et  $G$  un déplacement vers le nœud fils à gauche. Par extension on notera  $D^n$  ou  $G^n$  les  $n$  déplacements successifs vers la droite ou la gauche respectivement. Alors la suite des déplacements à faire pour atteindre le nœud  $\frac{m}{n} = [0, q_1, q_2, \dots, q_n]$  est  $G^{q_1} D^{q_2} \dots G^{q_n}$  si  $n$  est impaire et  $G^{q_1} D^{q_2} \dots D^{q_n}$  sinon [Largeteau-Skapin 07]. La Figure 1.14 montre la série de déplacements à effectuer depuis le nœud  $\frac{1}{1}$  pour atteindre le nœud  $\frac{7}{10}$ .

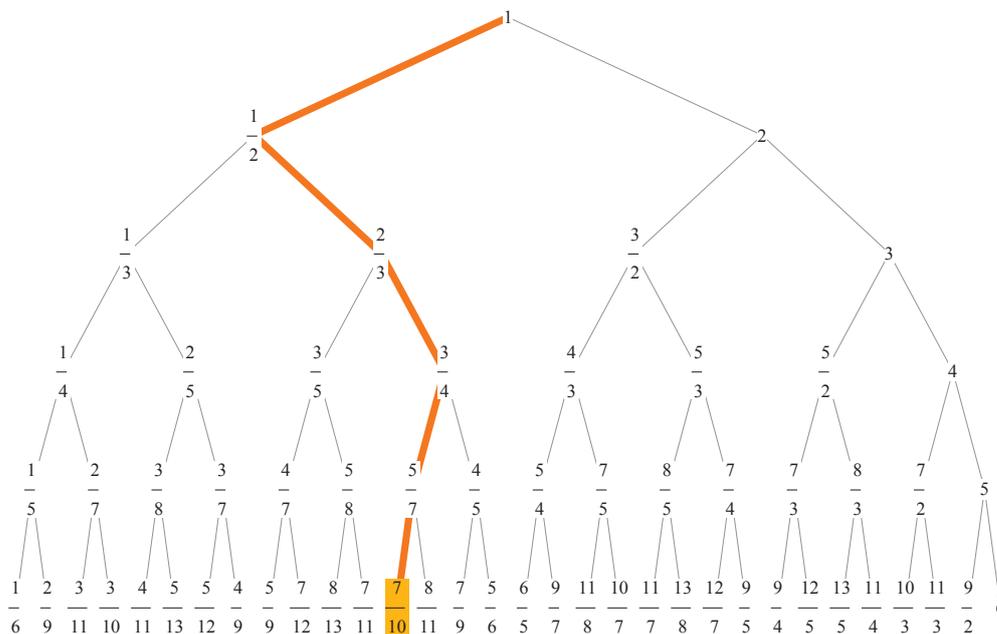


FIGURE 1.14 – Déplacements dans l'arbre de Stern-Brocot pour atteindre le nœud  $\frac{7}{10}$  à partir du nœud  $\frac{1}{1}$  :  $G^1 D^2 G^2$ . Les nœuds  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{0}$  ne sont pas représentés car ils n'interviennent pas dans les déplacements.

Il est facile de constater que pour les droites discrètes dans le premier octant,

où  $0 \leq a \leq b$  toutes les pentes possibles correspondent à des nœuds à gauche du nœud correspondant à  $\frac{1}{1}$ . Par ailleurs, si on considère deux fractions  $\frac{m_1}{n_1}$  et  $\frac{m_2}{n_2}$  dans l'arbre, si  $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$  alors le nœud de  $\frac{m_1}{n_1}$  est à gauche de celui de  $\frac{m_2}{n_2}$ . Ainsi, si  $\frac{m_2}{n_2}$  est la pente d'une droite discrète, et  $\frac{m_1}{n_1}$  la pente d'un de ses sous-segments il existe un déplacement  $D^p G^q$  entre le nœud de  $\frac{m_1}{n_1}$  et celui de  $\frac{m_2}{n_2}$ , où  $p > 1$ , et  $q \geq 0$  [De Vieilleville 06]. Inversement il existe un déplacement  $G^q D^p$  entre le nœud de  $\frac{m_1}{n_1}$  et celui de  $\frac{m_2}{n_2}$ . Cela permet de définir deux approches de reconnaissance de sous-segment discrets : l'une appelée approche descendante de l'arbre de Stern-Brocot reposant sur le déplacement  $D^p G^q$  et l'autre appelée approche ascendante de l'arbre de Stern-Brocot reposant sur le déplacement  $G^q D^p$  [De Vieilleville 06, Saïd 09, Saïd 11, Lachaud 13].

### Diagramme de Farey

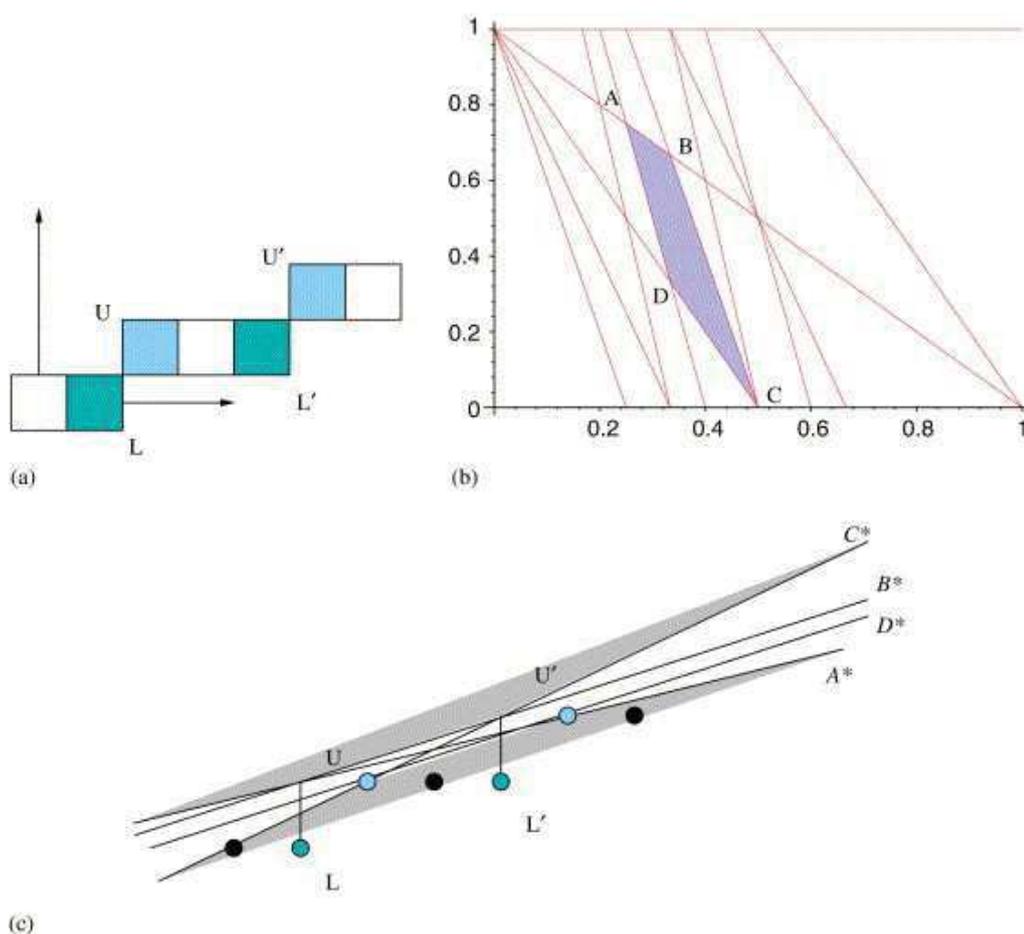


FIGURE 1.15 – (a) Sous-segment (1,3,1) de points d'appuis  $U$ ,  $U'$ ,  $L$  et  $L'$ . (b) Préimage du sous-segment :  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  correspondent aux droites de l'image (c). Le point caractéristique  $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  est le sommet inférieur gauche du polygone de Farey.

Il existe une autre façon de représenter les pentes de droite discrète que l'arbre de Stern-Brocot. En effet, les suites de Farey permettent d'énumérer toutes les pentes

rationnelles et de les représenter de manière ordonnée.

**Définition 1.4.8** (Suite de Farey). *La suite de Farey d'ordre  $n$ , notée  $F_n$ , est la suite croissante des fractions rationnelles irréductibles comprises entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur ou égal à  $n$ .*

**Exemple 1.4.2.**  $F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$

Il existe des relations intéressantes sur les suites de Farey qui permettent de les utiliser dans la reconnaissance de sous-segment discret. En particulier, les liens entre suites de Farey et les arbres de Stern-Brocot sont détaillés dans [Largeteau-Skapin 07]. Nous nous intéressons ici aux relations qui existent entre les suites de Farey et les sous-segments. Nous commençons par introduire la notion de *préimage* de sous-segment avant de présenter les relations existantes entre cette préimage et les suites de Farey.

La *préimage*  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  d'un sous-segment discret  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des droites discrètes pouvant contenir  $\mathcal{S}$  [Dorst 91, Sivignon 12]. C'est à dire que

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \{(\alpha, \beta), |\alpha| \leq 1 \mid \forall (x, y) \in \mathcal{S}, 0 \leq \alpha x - y + \beta < 1\}$$

où  $\alpha$  représente la pente et  $\beta$  le décalage à l'origine. La préimage est généralement représenté dans un espace dual à l'espace discret que nous appelons dans ce contexte, *espace*  $(\alpha, \beta)$ . Dans cet espace  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  correspond à un polygone dont les côtés et sommets ont des relations avec les droites et points d'appuis du sous-segment discret  $\mathcal{S}$ . Ces relations sont définies comme suit :

**Proposition 1.4.1** (Relations entre  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{S}$  [Sivignon 12]). *Soit un sous-segment discret  $\mathcal{S}$ . Soit  $U$  et  $U'$  (respectivement  $L$  et  $L'$ ) deux points d'appuis supérieurs (respectivement inférieurs) consécutifs de  $\mathcal{S}$ . Soit  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  la préimage de  $\mathcal{S}$ .  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  correspond à un polygone  $ABCD$ , où  $A$  est le sommet le plus à gauche et en haut et les autres sont nommés dans l'ordre suivant le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Nous avons les relation suivantes :*

- $B$  correspond à la droite d'appui supérieure  $(UU')$  ;
- $D$  correspond à la droite d'appui inférieure  $(LL')$  avec une translation de vecteur  $(0, 1)$  dans l'espace de paramètres ;
- $A$  correspond à la droite  $(U'L^+)$  où  $L^+ = L + (0, 1)$  ;
- $C$  correspond à la droite  $(UL'^+)$  où  $L'^+ = L' + (0, 1)$ .

$\mathcal{S}$  a comme caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  si et seulement si les coordonnées de  $B$  sont  $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right)$ . On dit que  $B$  est le **point caractéristique** de  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  et que  $[AB]$  et  $[BC]$  sont ses **côtés inférieurs**.

La Figure 1.15, tirée de [Coeurjolly 05b], donne une illustration de la préimage d'un sous-segment discret.

Pour reconnaître un sous-segment discret  $\mathcal{S}$ , il faut alors déterminer le point caractéristique de sa préimage  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ . C'est là que nous pouvons utiliser les suites de Farey. Commençons par associer à chaque couple d'entiers positifs une droite appelée *rayon* définie comme suit :

**Définition 1.4.9** (Rayon [Sivignon 12]). *Soient  $x$  et  $y$  deux entiers positifs. Le rayon défini par  $x$  et  $y$  est défini et noté  $:R(x, y) = \{(\alpha, \beta) \mid \beta = -x\alpha + y\}$  où  $x$  est appelé **pente** du rayon mais correspond à la valeur absolue de la pente du rayon.*

Le rayon  $R(x, y)$  est une droite de  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  passant par le point d'ordonnées  $(x, y)$ . Comme nous supposons que nous sommes dans le premier octant,  $0 \leq y \leq x \leq n$  où  $n$  est la taille de  $\mathcal{S}$ . Par ailleurs, comme les équations sont de la forme  $\beta = -x\alpha + y$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Le *diagramme de Farey* permet de considérer tous les rayons dont les pentes ont un dénominateur inférieur à  $n$  correspondant à l'abscisse du dernier point discret de  $\mathcal{S}$ <sup>2</sup>. La définition du diagramme de Farey est faite comme suit :

**Définition 1.4.10** (Diagramme de Farey [Sivignon 12]). *Le diagramme de Farey d'ordre  $n$ , noté  $\mathcal{F}_n$ , est défini dans l'espace  $(\alpha, \beta)$  comme un arrangement de tous les rayons  $R(x, y)$  tel que  $0 \leq y \leq x \leq n$ , et tel que  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $0 \leq \beta \leq 1$ .*

Les rayons d'un diagramme de Farey partitionnent l'espace en polygones (quadrilatère, triangle) appelés *facettes*. Et il existe une bijection entre les facettes de  $\mathcal{F}_n$  et l'ensemble de sous-segments discrets de taille  $n$  [McIlroy 85]. La facette de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{F}_n$  correspond ainsi à  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ . Finalement, le point caractéristique de  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$  est un point  $v\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right)$  de la facette de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{F}_n$ . Inversement, pour déterminer les caractéristiques minimales  $(p, q, r)$  de  $\mathcal{S}$ , il suffit de déterminer la facette de  $\mathcal{F}_n$  contenant  $\Lambda\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right)$  où  $(a, b, c)$  sont les caractéristiques de la droite discrète contenant  $\mathcal{S}$ .

## 1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des notions de base pour les travaux que nous présentons dans ce manuscrit. La grande différence entre géométrie euclidienne et géométrie discrète réside dans le fait qu'on associe au point discret une région de l'espace appelée pixel en dimension 2 ou voxel en dimension 3. De façon générique, et lorsqu'on s'intéresse au multi-échelles, le point discret est associé à un pavé qui a une forme rectangulaire en dimension 2 et hexaédrique en dimension 3. Nous avons défini des notions de voisinage entre points discrets, base de la topologie en géométrie discrète. À partir de cette notion, il est possible de construire des modèles de primitives discrètes comme les hyperplans ou les hypersphères discrets. Nous avons présenté les modèles qui nous intéressent avant de présenter les primitives que nous étudions dans les chapitres suivants. Comme hyperplans discrets, nous nous intéressons aux droites discrètes et aux sous-segments discrets dont nous avons présenté les principales notions et propriétés. Comme hypersphères discrets nous nous intéressons aux arcs de cercles et aux cercles discrets, dont nous avons aussi présenté des notions et propriétés.

Nous avons ensuite présenté des outils utilisés dans la littérature pour la reconnaissance de sous-segment discret que nous abordons dans le chapitre suivant. Nous avons d'abord présenté deux approches basées sur des propriétés arithmétiques sur la dilatation et l'érosion de sous-segment discret. Puis nous avons présenté des outils comme l'arbre de Stern-Brocot et le Diagramme de Farey qui permettent de faire de la reconnaissance de sous-segment discret.

Dans les chapitres suivants, nous présentons nos contributions pour la reconnaissance des primitives discrètes. Dans le Chapitre 2, nous présentons nos travaux sur

---

2. On peut toujours ramener le début du sous-segment à l'abscisse 0 par translation et modification des caractéristiques

## Chapitre 1. Rappels sur la géométrie discrète

---

la reconnaissance de sous-segment discret. Dans le Chapitre 3, nous présentons nos travaux sur l'amélioration des approches de reconnaissance de cercles discrets et de droites discrètes multi-échelles.

---

# Chapitre 2

---

## Reconnaissance de sous-segments discrets

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>2.2</b>	<b>État de l'art sur la reconnaissance de sous-segment discret</b>	<b>35</b>
2.2.1	Rappels sur les droites et les sous-segments discrets naïfs	35
2.2.2	Approche de reconnaissance de Debled-Renesson et Reveilles	36
2.2.3	Approches reposant sur un parcours dans l'arbre de Stern-Brocot	37
2.2.4	Approche basée sur un parcours dans le diagramme de Farey	39
2.2.5	Récapitulatif des approches existantes	41
<b>2.3</b>	<b>Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret</b>	<b>42</b>
2.3.1	Notations et définitions	42
2.3.2	Évolution des restes arithmétiques d'un sous-segment	44
2.3.3	Relations entre restes arithmétiques et points d'appuis	46
2.3.4	Algorithmes de recherche des points d'appuis	54
2.3.5	Algorithme principal de reconnaissance de sous-segment	63
2.3.6	Comparaison avec les approches précédentes	65
2.3.7	Optimisation : mutualisation des recherches des restes minimum et maximum	68
2.3.8	Cas particulier d'un sous-segment ayant deux points d'appuis de la droite	70
<b>2.4</b>	<b>Perspectives d'extensions en dimension 3</b>	<b>73</b>
2.4.1	Sous-segment discret de dimension 3	73
2.4.2	Morceaux de plan de dimension 3	74
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes intéressés à un problème spécifique de reconnaissance de sous-segment discret. Le problème est typique à la géométrie discrète multi-échelles et est déjà abordé dans [Lachaud 13, Saïd 09, Saïd 11]. Si nous considérons le sous-segment discret comme une partie connexe de la droite discrète à un niveau de description plus raffiné, pouvoir le reconnaître permet une analyse multi-échelles de la droite discrète. Ce processus de reconnaissance de sous-segment a, comme entrées, les caractéristiques d'une droite discrète  $(a, b, c)$  et les coordonnées de deux de ses points discrets  $P$  et  $Q$  qui constituent les extrémités du sous-segment discret. La reconnaissance consiste à déterminer les caractéristiques du sous-segment discret délimité par ces deux points. Il y a donc une différence avec les problèmes de reconnaissance classiques car ici nous avons des informations importantes comme le fait que les points du sous-segment discret appartiennent à une droite discrète dont les caractéristiques sont connues. Cela explique pourquoi la plupart des algorithmes de reconnaissance de sous-segment discret ont une complexité logarithmique [Lachaud 13, Saïd 09, Saïd 11, Sivignon 12]. Ce qui est inimaginable sans connaissance a priori des points appartenant au sous-segment discret.

Nous nous intéressons à une nouvelle approche de reconnaissance d'un sous-segment discret pour deux raisons principales :

- avoir une approche simple, basée sur des propriétés arithmétiques connues des droites et sous-segments discrets, et facilement programmable : nous pensons avoir atteint cet objectif et le montrons tout au long de ce chapitre ;
- avoir une approche extensible en dimension 3 : nous avons rencontré des contradictions avec certains des théorèmes (vrais en dimension 2) dans l'extension en dimension 3 mais nous en discutons et proposons des pistes dans les perspectives.

Pour rappel, étant donné une droite discrète définie par  $0 \leq ax - by - c < b$  (avec  $0 \leq a \leq b$ ), le reste arithmétique est noté  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x) = ax - by - c = \left\{ \frac{ax-c}{b} \right\}$ , nous utilisons la notation  $\left\{ \frac{n}{m} \right\}$  pour  $n \bmod m$ .

Nous montrons que, sous certaines conditions, il existe une relation d'ordre entre les restes arithmétiques des points du sous-segment discret par rapport aux caractéristiques de la droite discrète et par rapport aux caractéristiques du sous-segment discret. En particulier, nous montrons que les points du sous-segment discret ayant respectivement le reste arithmétique minimal et le reste arithmétique maximal par rapport aux caractéristiques de la droite discrète sont des points d'appuis supérieur et inférieur respectivement du sous-segment discret. En plus, nous montrons que le calcul de ces restes minimal et maximal peut se faire avec des algorithmes de complexité logarithmique dont la simplicité est équivalente à l'algorithme d'Euclide. Finalement déterminer trois points d'appuis du sous-segment discret revient à calculer trois restes qui ont la valeur minimum ou maximum de l'ensemble des restes arithmétiques du sous-segment discret. Rigoureusement, il s'agit de déterminer deux maxima et un minimum ou deux minima et un maximum suivant les configurations. Ensuite, avec les trois points d'appui, il est facile de calculer les caractéristiques du sous-segment discret. L'algorithme résultant est très simple et efficace au point d'être relativement plus rapide que des approches précédentes [Lachaud 13, Sivignon 12].

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous présentons succinctement des approches de reconnaissance de sous-segment existant et faisons un bref récapitu-

latif. Dans la troisième section, nous présentons l'approche de reconnaissance de sous-segment que nous proposons. Nous introduisons d'abord des notions relatives à l'érosion et la dilatation de sous-segment discret. Nous nous intéressons ensuite au calcul des restes minimal et maximal d'une suite de restes arithmétiques du sous-segment discret. Puis nous présentons l'algorithme principal de reconnaissance du sous-segment discret et montrons des résultats de comparaisons avec les approches précédentes. Dans la quatrième section, nous proposons des perspectives d'optimisation de nos travaux et discutons de la possibilité de l'extension en dimension 3 à la reconnaissance de morceau de plan discret et de sous-segment discret.

## 2.2 État de l'art sur la reconnaissance de sous-segment discret

La reconnaissance de sous-segments discrets est un sujet étudié dans la communauté de géométrie discrète et de reconnaissance de formes. Il y a plusieurs approches qui ont été proposées comme un parcours incrémental du sous-segment discret [Debled-Rennesson 96, Debled-Rennesson 95], l'utilisation de propriétés d'enveloppe convexe du sous-segment discret [Buzer 06], l'utilisation de propriétés arithmétiques en relation avec l'arbre de Stern-Brocot [Lachaud 13, Roussillon 09, Saïd 10, Saïd 09, Saïd 11], et l'utilisation d'un espace dual [Sivignon 04, Sivignon 12]. Nous nous intéressons à trois de ces approches permettant de déterminer les caractéristiques analytiques du sous-segment discret. La première approche a été proposée par Debled-Rennesson et Reveilles [Debled-Rennesson 96]. Cette approche se base sur des relations arithmétiques et géométriques du sous-segment discret en relation avec la dilatation pour déterminer de façon incrémentale ses caractéristiques analytiques. La seconde approche concerne les travaux de De Vieilleville, Lachaud et Saïd [Lachaud 13, Saïd 10, Saïd 09, Saïd 11, De Vieilleville 06] qui montrent le lien entre l'évolution des caractéristiques analytiques d'un sous-segment discret et des parcours dans l'arbre de Stern-Brocot. Il en résulte deux approches de reconnaissance de sous-segment discret basées respectivement sur des parcours descendant [Lachaud 13, Saïd 10, Saïd 09] et ascendant [Lachaud 13, Saïd 10, Saïd 11] dans l'arbre de Stern-Brocot. La troisième approche est proposée par Sivignon [Sivignon 12] qui pose la reconnaissance de sous-segment discret comme un problème de détermination d'un point dans le diagramme de Farey.

Dans cette première section, nous rappelons quelques notations et présentons les trois approches précédentes. Nous concluons par un bref récapitulatif et une comparaison sommaire des différentes approches.

### 2.2.1 Rappels sur les droites et les sous-segments discrets naïfs

En dimension 2, une droite discrète naïve dans le premier octant de caractéristiques  $(a, b, c)$  est l'ensemble des points discrets de coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $0 \leq ax - by - c < b$  et  $0 \leq a \leq b$ . Nous le notons dans la suite  $\mathcal{D}(a, b, c)$  et l'appelons indifféremment droite discrète ou droite infinie ou encore droite support. Une des caractéristiques de la droite discrète naïve est qu'à chaque abscisse correspond un

et un seul point discret de la droite. Nous notons  $P_D(x)$  le point discret de la droite  $\mathcal{D}$  d'abscisse  $x$ .

L'ensemble des points discrets d'une droite discrète dont les abscisses sont comprises entre celles de deux points discrets distincts correspond à un sous-segment discret. Supposons que les abscisses des deux points sont  $u$  et  $v$  avec  $u < v$ , nous notons alors le sous-segment discret  $\mathcal{S}(\mathcal{D}, u, v)$  où  $\mathcal{D}$  est la droite support. On peut aussi noter le sous-segment discret  $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma)$  lorsque ses caractéristiques analytiques sont  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ; c'est à dire que  $\mathcal{S}$  contient trois points d'appuis d'une droite support  $\mathcal{D}'(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Pour rappel un *point d'appui supérieur* de coordonnées  $(x, y)$  est tel que  $ax - by - c = 0$  et un *point d'appui inférieur* de coordonnées  $(x, y)$  est tel que  $ax - by - c = b - 1$ . Nous utilisons le terme *point d'appui* pour désigner indifféremment un point d'appui inférieur ou supérieur. Par ailleurs, un *point faiblement supérieur* de coordonnées  $(x, y)$  est tel que  $ax - by - c = -1$  et un *point faiblement inférieur* de coordonnées  $(x, y)$  est tel que  $ax - by - c = b$ . Nous utilisons le terme *point faiblement extérieur* pour désigner indifféremment un point faiblement inférieur ou supérieur. Nous définissons aussi un point fortement supérieur de coordonnées  $(x, y)$  comme un point discret tel que  $ax - by - c < -1$  et un point fortement inférieur de coordonnées  $(x, y)$  comme un point discret tel que  $ax - by - c > b$ . Nous utilisons le terme *point fortement extérieur* pour désigner indifféremment un point fortement inférieur ou supérieur. Enfin, nous définissons un *point fortement intérieur* de coordonnées  $(x, y)$  comme un point discret tel que  $0 < ax - by - c < b - 1$ . Un *point intérieur* est un point d'appui ou un point fortement intérieur.

Un palier d'une droite discrète ou d'un sous-segment discret est un ensemble de points discrets voisins de même ordonnée appartenant à la droite discrète ou au sous-segment discret. Comme nous étudions les droites et sous-segments discrets dans le premier octant, dans les parcours (ou pour l'orientation) nous allons de la gauche vers la droite pour les abscisses et du bas vers le haut pour les ordonnées. Cela veut dire que le premier point discret d'un sous-segment discret est celui le plus à gauche et en bas.

### 2.2.2 Approche de reconnaissance de Debled-Rennesson et Reveilles

Dans cette sous-section nous présentons l'approche de reconnaissance de sous-segment discret proposée par Debled-Rennesson et Reveilles [Debled-Rennesson 96]. L'approche se base sur une dilatation successive du premier palier du sous-segment discret à reconnaître.

Soit  $\mathcal{S}$  un sous-segment discret d'extrémités les points discrets  $A$  et  $B$  d'abscisses respectives  $u$  et  $v$  avec  $u < v$ . Dans la suite nous notons  $\mathcal{S}_i$  des parties de  $\mathcal{S}$  et leurs extrémités  $A_i$  et  $B_i$  d'abscisses respectives  $u_i$  et  $v_i$  avec  $u_i < v_i$ .

Soit  $\mathcal{S}_0$  le premier palier du sous-segment discret  $\mathcal{S}$ . Les caractéristiques de  $\mathcal{S}_0$  sont  $(a, b, c) = (0, 1, -y_0)$  où  $y_0$  est l'ordonnée de  $A_0$ . Soit  $P(x_P, y_P) = P_D(v_0 + 1)$  le point connexe à  $B_0$ . Soit  $U(x_U, y_U)$  le point d'appui supérieur le plus à droite de  $\mathcal{S}_0$  et  $L(x_L, y_L)$  le point d'appui inférieur le plus à droite de  $\mathcal{S}_0$ . Soit  $\mathcal{S}_1(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{S}_0 \cup P$ , une dilatation de  $\mathcal{S}_0$  par l'ajout à  $\mathcal{S}_0$  du point discret  $P$ . Debled-Rennesson et Reveilles ont montré que les caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathcal{S}_1$  se déduisent des

caractéristiques  $(a, b, c)$  de  $\mathcal{S}_0$  [Debled-Renneson 96]. Ainsi :

- Si  $P$  est un point faiblement supérieur de  $\mathcal{S}_0$  :
  - $P$  devient un point d'appui supérieur de  $\mathcal{S}_1$  ;
  - $\alpha = y_P - y_U$ ,  $\beta = x_P - x_U$  et  $\gamma = \alpha x_U - \beta y_U$ .
- si  $P$  est un point faiblement inférieur de  $\mathcal{S}_0$  :
  - $P$  devient un point d'appui inférieur de  $\mathcal{S}_1$  ;
  - $\alpha = y_P - y_L$ ,  $\beta = x_P - x_L$  et  $\gamma = \alpha x_L - \beta y_L - \beta + 1$
- si  $P$  est un point intérieur de  $\mathcal{S}_0$ , les caractéristiques de  $\mathcal{S}_1$  sont les mêmes que celles de  $\mathcal{S}_0$  :  $(\alpha, \beta, \gamma) = (a, b, c)$  ;
- si  $P$  est un point fortement extérieur de  $\mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_1$  n'est pas un sous-segment discret.

L'exemple 2.2.1 donne un exemple de reconnaissance de sous-segment discret par cette approche.

**Exemple 2.2.1** (Reconnaissance du sous-segment  $\mathcal{S}(\mathcal{D}, 15, 48)$  avec  $\mathcal{D}(59, 88, 0)$ ).

- $\mathcal{S}(\mathcal{D}, 15, 16)$  est le premier palier du sous-segment  $\mathcal{S}(\mathcal{D}, 15, 48)$  et a comme caractéristiques  $(0, 1, -10)$  où 10 représente l'ordonnée du premier point d'abscisse 15 noté  $P_D(15)$ . Le point d'abscisse 15,  $U_0 = P_D(15)$ , est un point d'appui supérieur de la droite  $\mathcal{D}_0(0, 1, -10)$  et le point suivant, d'abscisse 17,  $P_0 = P_D(17)$ , est un point faiblement extérieur de la droite  $\mathcal{D}_0(0, 1, -10)$ .
- Le sous-segment dilaté obtenu par l'ajout de  $P_0$   $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \cup P_0$  a donc de nouvelles caractéristiques. Ces nouvelles caractéristiques sont  $(1, 2, -5)$  et sont déterminées à partir du vecteur  $\overrightarrow{U_0 P_0}$ .
- Le point d'abscisse 18,  $P_1 = P_D(18)$ , est un point faiblement extérieur de la droite  $\mathcal{D}_1(1, 2, -5)$ . Donc le sous-segment dilaté obtenu par l'ajout de  $P_1$ ,  $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cup P_1$ , a les nouvelles caractéristiques  $(2, 3, 0)$  déterminées à partir du vecteur  $\overrightarrow{U_0 P_1}$ .
- Les points discrets dont les abscisses sont comprises entre 19 et 48 sont tous intérieurs à la droite  $\mathcal{D}_2(2, 3, 0)$ . Le sous-segment  $\mathcal{S}(\mathcal{D}, 15, 48)$  a donc les mêmes caractéristiques  $(2, 3, 0)$ .

La mise à jour incrémentale des caractéristiques d'un sous-segment par dilatations successives, permet de définir un algorithme de reconnaissance de sous-segment discret. Cet algorithme est de complexité linéaire en nombre de points discrets du sous-segment discret. Il commence par le premier palier que nous notons  $\mathcal{S}_0$ . Puis il procède à des dilatations successives et effectue des mises à jour lorsque le point discret à ajouter est un point faiblement extérieur. L'algorithme s'arrête après l'ajout du dernier point discret au sous-segment discret.

### 2.2.3 Approches reposant sur un parcours dans l'arbre de Stern-Brocot

Dans l'algorithme proposé par Debled-Renneson et Reveilles, seuls les points faiblement extérieurs induisent des mises à jour de caractéristiques. Il n'est donc pas nécessaire de traiter tous les points du sous-segment. Saïd et Lachaud ont montré comment déterminer, en temps constant, les caractéristiques de  $\mathcal{S}_{i+1}$  à partir de  $\mathcal{S}_i$  où  $\mathcal{S}_{i+1}$  est le résultat de l'ajout d'un point faiblement extérieur au sous-segment  $\mathcal{S}_i$  [Saïd 09, Saïd 11]. Ils ont ensuite fait le lien entre ces mises à jours et des parcours

dans l'arbre de Stern-Brocot. Dans cette sous-section, nous présentons leurs travaux sur la reconnaissance de sous-segment discret en parcourant l'arbre de Stern-Brocot.

### Parcours descendant de l'arbre de Stern-Brocot

Un sous-segment peut être décrit par un code de Freeman spécifique qui est périodique que nous appelons *pattern* (ou *pattern renversé*) correspondant au déplacement entre deux points d'appuis supérieurs (ou inférieurs) consécutifs. Les travaux de De Vieilleville et Lachaud [De Vieilleville 06] font le lien entre ce *pattern* et la décomposition en fractions continues de la pente  $z$  du sous-segment. Soit un sous-segment  $\mathcal{S}$  de pente  $z = \frac{a}{b}$  et dont la décomposition en fractions continues est  $[0, q_1, q_2, \dots, q_k]$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $z_i$  le  $i$ -ème convergent de  $z$ . Le *pattern* de  $\mathcal{S}$ , c'est à dire la suite de déplacements selon le code de Freeman entre deux points d'appuis supérieurs de  $\mathcal{S}$ , est noté  $E(z_k)$  (pour plus de détails voir la Sous-Section 1.4.2 du Chapitre 1 à la page 27).  $E(z_k)$  se construit comme suit :

- $E(z_0) = 0$  ;
- $E(z_1) = \overbrace{0 \dots 0}^{q_1} 1$  ;
- $E(z_k) = E(z_{k-1})^{q_k} E(z_{k-2})$  si  $k$  est impair ;
- $E(z_k) = E(z_{k-2}) E(z_{k-1})^{q_k}$  si  $k$  est pair ;

**Exemple 2.2.2** (Calcul du *pattern* de la pente  $\frac{7}{11}$ ).  $\frac{7}{11} = [0, 1, 1, 1, 3]$  donc le *pattern* a calculé est  $E(z_4)$ . On a alors :

- $E(z_0) = 0$  ;
- $E(z_1) = 0^1 1$  ;
- $E(z_2) = E(z_0) E(z_1)^1 = 001$  ;
- $E(z_3) = E(z_2)^1 E(z_1) = 00101$  ;
- $E(z_4) = E(z_2) E(z_3)^4 = 001001010010100101$  ;

On dit que le *pattern* recouvre le sous-segment. Reconnaître un sous-segment discret revient alors à reconnaître le *pattern* qui le recouvre. Ce qui peut se faire par un test des *patterns* correspondants aux différents convergents de la pente de la droite infinie. Comme les pentes correspondant aux convergents sont des nœuds de l'arbre de Stern-Brocot, cela revient à une recherche descendante dans l'arbre de Stern-Brocot. Saïd et Lachaud proposent un algorithme de recherche du convergent adéquat appelé *SmartDSS* [Lachaud 13, Saïd 09].

### Parcours ascendant de l'arbre de Stern-Brocot

Pour déterminer le *pattern* du sous-segment discret, il est aussi possible de considérer l'évolution de la pente du sous-segment discret dans le sens inverse ; c'est à dire en allant de la pente de la droite discrète à celle de la pente du sous-segment discret. Dans ce cas, il s'agit d'une ascension dans l'arbre de Stern-Brocot. Ce procédé ressemble à ce que nous avons tantôt appelé érosion (Chapitre 1, Sous-Section 1.4.2, Page 26) et est plus efficace en terme de temps de calcul des caractéristiques du sous-segment [Saïd 11] que l'approche précédente (dilatation de sous-segment discret). L'érosion de sous-segment discret a aussi été abordée dans [Debled-Rennesson 95, Roussillon 09]. Dans cette approche, il faut considérer le sous-segment comme le résultat d'une succession d'érosions de la droite infinie. Pour

déterminer les caractéristiques d'un sous-segment  $\mathcal{S}$ , on commence par considérer un sous-segment initial  $\mathcal{S}_0$  ayant exactement trois points d'appuis de la droite et qui contient tous les points de  $\mathcal{S}$ . Puis on procède à des érosions de  $\mathcal{S}_0$  jusqu'à obtenir uniquement les points de  $\mathcal{S}$ . L'érosion peut se faire dans les deux sens mais nous considérerons l'érosion de droite vers la gauche, l'érosion dans l'autre se déduisant facilement. Après érosion, donc de droite vers la gauche, de  $\mathcal{S}_0$  :

- Si l'érosion concerne un point fortement intérieur, ses caractéristiques ne changent pas ;
- Si l'érosion concerne un point faiblement intérieur, ses caractéristiques changent :
  - Si c'est un point d'appui supérieur  $U_1$ , les nouvelles caractéristiques de  $\mathcal{S}_0$  sont définies à partir du vecteur  $\overrightarrow{L_0LE_1}$  où  $L_0$  est le point d'appui inférieur le plus près de  $U_1$  et  $LE_1$  est le point faiblement extérieur de même abscisse que  $U_1$  ;
  - Si c'est un point d'appui inférieur  $L_1$ , les nouvelles caractéristiques de  $\mathcal{S}_0$  sont définies à partir du vecteur  $\overrightarrow{U_0UE_1}$  où  $U_0$  est le point d'appui supérieur le plus près de  $L_1$  et  $UE_1$  est le point faiblement extérieur de même abscisse que  $L_1$ .

Le principe d'érosion est illustré dans la Figure 2.1. Le passage de  $\mathcal{S}_0$  à  $\mathcal{S}_1$  où  $\mathcal{S}_1$  est le résultat d'un point d'appui de  $\mathcal{S}_0$  se répercute par un changement de caractéristiques. Dans l'arbre de Stern-Brocot cela revient à une ascension du nœud correspondant à la pente de  $\mathcal{S}_0$  à celui correspondant à la pente de  $\mathcal{S}_1$ .

Les différentes caractéristiques des sous-segments  $\mathcal{S}_i$  correspondent donc aux différents nœuds de l'arbre de Stern-Brocot qu'il y a entre le nœud correspondant à la pente de la droite discrète et celle correspondant à la pente du sous-segment discret [De Vieilleville 06]. Saïd et Lachaud proposent un algorithme, *ReverseSmartDSS*, pour déterminer efficacement les caractéristiques du sous-segment discret par un tel parcours [Lachaud 13, Saïd 11].

### 2.2.4 Approche basée sur un parcours dans le diagramme de Farey

De façon classique, la reconnaissance de sous-segment peut se poser comme le problème suivant [McIlroy 85] :

**Problème 1** : Étant donnée une droite discrète  $\mathcal{D}$  de caractéristiques  $(a, b, \mu)$  et deux points  $P(x_P, y_P)$  et  $Q(x_Q, y_Q)$ , comment calculer les caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$  d'un sous segment  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathcal{D} | x_P \leq x \leq x_Q\}$ .

En utilisant les notions de pente et les outils associés nous pouvons reformuler ce problème. Dans cette sous-section nous présentons la reformulation faite par Sivignon [Sivignon 12]. Pour rappel, la *préimage* d'un sous-segment discret est l'ensemble des droites infinies qui peuvent le contenir. Il est possible de représenter la *préimage* dans un espace dual à l'espace image appelé par Sivignon *espace*  $(\alpha, \beta)$  où  $\frac{\alpha}{\beta}$  représente une pente. Dans cet espace Sivignon montre qu'il existe un point, appelé *point caractéristique*  $v\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}\right)$ , intersection de droites duales de points d'appuis du sous-segment discret. Elle montre ensuite comment déterminer ce point caractéristique. Comme le diagramme de Farey permet de représenter les droites de pentes rationnelles, l'espace duale peut être associé au diagramme de Farey. Dans le dia-

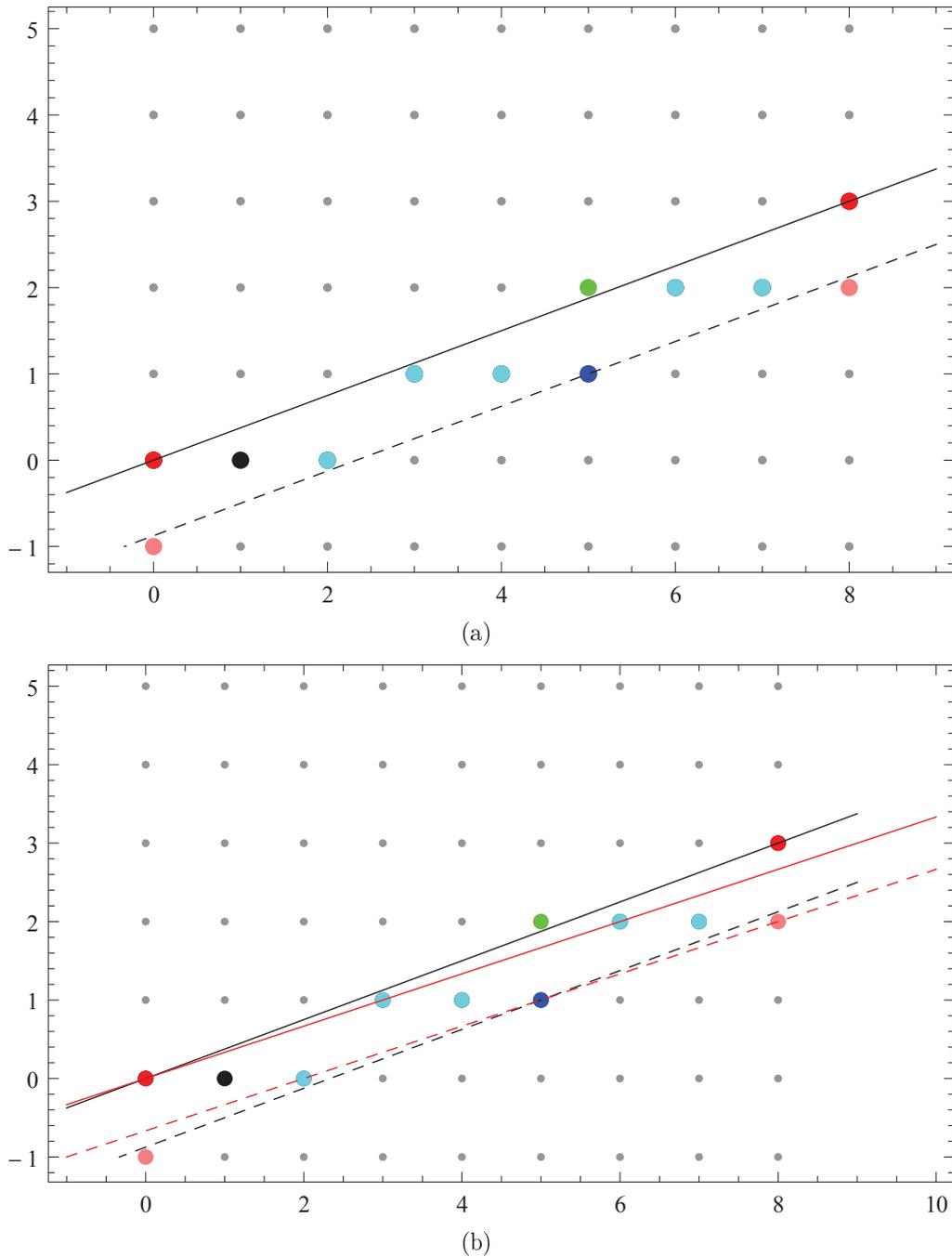


FIGURE 2.1 – Principe d'érosion de sous-segment : (a)  $\mathcal{S}(\mathcal{S}_0, 2, 7)$  dont les points discrets sont en cyan ne contient qu'un point d'appui (en bleu) de  $\mathcal{S}_0(3, 8, 0)$ . (b) En érodant le deuxième point d'appui de  $\mathcal{S}_0$  on obtient  $\mathcal{S}_1(1, 3, 0)$  avec une nouvelle configuration de droites d'appuis (en rouge) et  $\mathcal{S}$  contient désormais au moins 3 points d'appuis. On en déduit que les caractéristiques de  $\mathcal{S}$  sont celles de  $\mathcal{S}_1$ .

gramme de Farey, les droites duales s'intersectent et forment des polygones appelés *facettes*. Sivignon montre que la détermination du point caractéristique revient à la détermination du sommet en bas et à gauche de la facette contenant le point correspondant à la pente de la droite infinie dans un diagramme de Farey d'ordre  $n$  où  $n$  représente la taille du sous-segment discret. C'est pourquoi, la simplification de Sivignon correspond à une reformulation du premier problème en le deuxième problème [Sivignon 12] suivant :

**Problème 2** : Étant donnés les points  $\Lambda(\frac{a}{b}, \frac{r}{b})$  et  $Q(x_Q, y_Q)$  comment déterminer un point  $v$  du diagramme de Farey d'ordre  $n = x_Q$  tel que  $v$  soit le point caractéristique de la facette contenant  $\Lambda$ .

Ainsi la reconnaissance d'un sous-segment revient à déterminer le point caractéristique de la facette de  $F_n$  contenant  $\Lambda$ . Pour réaliser cela de façon efficace, Sivignon se base sur l'approche de [McIlroy 85], et propose un algorithme de complexité  $\mathcal{O}(\log n)$  où  $n$  est la taille du sous-segment discret. Il existe des propriétés et corollaires intéressantes sur le diagramme de Farey et ses relations au polygone préimage d'un sous-segment. Ces propriétés permettent de définir un algorithme de résolution du problème 2, c'est-à-dire déterminer le point caractéristique d'une facette  $F_n$  contenant un point donné  $\Lambda(\frac{a}{b}, \frac{r}{b})$  [Sivignon 12]. Celle sur laquelle se base l'approche de Sivignon est énoncée comme suit (le lecteur peut se référer à la Sous-section 1.4.2 du Chapitre 1 à la Page 29) :

**Propriété 2.2.1.** *Un point  $v(\frac{p_v}{q_v}, \frac{r_v}{q_v})$  est le point caractéristique d'une facette si et seulement si :*

1. *soit  $v$  est le point d'intersection des deux côtés bas :*
  - (a) *le rayon sur lequel se trouve le côté bas et droit est celui de pente minimal dans  $v$  ;*
  - (b) *le rayon sur lequel se trouve le côté bas et gauche est celui de pente maximal dans  $v$  ;*
2. *soit  $v$  est sur l'unique côté bas et il existe plusieurs rayons passant par le point  $(\frac{p_v}{q_v}, \frac{r_v+1}{q_v})$ .*

En se basant sur la Propriété (2.2.1) et les travaux de McIlroy [McIlroy 85] Sivignon définit une approche à 3 étapes pour résoudre le problème 2 :

1. Chercher la bande dans laquelle se trouve  $\Lambda$  ;
2. Déterminer le rayon le plus haut qui couvre ou passe en dessous de  $\Lambda$  soit  $R$  ; ce rayon est le support d'un côté bas de la facette ;
3. Parcourir le rayon  $R$  pour déterminer le point caractéristique.

La première étape est résolu par des approches basées sur la décomposition en fractions continues [Hardy 89] dans la littérature mais Sivignon propose l'algorithme de Charnier et de Buzer [Charrier 09]. Elle propose ensuite des algorithmes pour les deux dernières étapes (Algorithme 1 et 2 de [Sivignon 12]).

### 2.2.5 Récapitulatif des approches existantes

Les trois approches, que nous avons présentées, ont toutes été implémentées. Celle qui se base sur le parcours ascendant dans l'arbre de Stern-Brocot a la complexité

minimale qui est  $\mathcal{O}(\log \delta)$  où  $\delta$  est la différence en profondeur entre les décompositions en fractions continues de la pente de la droite support et du sous-segment discret.

De façon générale, lorsqu'on veut déterminer les caractéristiques analytiques d'un sous-segment discret il y a 3 configurations possibles :

- le sous-segment discret contient trois points d'appuis de la droite support : dans ce cas ses caractéristiques analytiques sont celles de la droite support et cela est déterminé en temps constant  $\mathcal{O}(1)$  ;
- le sous-segment discret contient deux points d'appuis (un supérieur et un inférieur) de la droite support : dans ce cas ses caractéristiques analytiques sont différentes de celles de la droite support et sont déterminables en temps logarithmique  $\mathcal{O}(\log \delta)$  où  $\delta$  est la différence en profondeur entre la décomposition en fractions continues de la pente de la droite support et celle du sous-segment discret ;
- le sous-segment discret contient un point d'appui de la droite support : dans ce cas ses caractéristiques analytiques sont différentes de celles de la droite support mais peuvent être déterminés en temps constant  $\mathcal{O}(1)$ .

Au vu des approches existantes on pourrait se demander quelle est la nécessité de proposer une nouvelle approche. Notre objectif n'est pas de montrer qu'on peut faire mieux mais qu'on peut faire plus simple. D'ailleurs, comme nous le montrons par la suite, notre approche, même si elle est plus rapide, partage la même classe de complexité que les autres approches présentées. Mais surtout, pour l'extension en dimension 3 notre approche pourrait être une alternative étant donné qu'aussi bien le diagramme de Farey que l'arbre de Stern-Brocot n'ont pas une extension immédiate en dimension 3 contrairement aux restes arithmétiques.

Dans le Tableau 2.1 (Page 43), nous présentons un récapitulatif des approches de reconnaissance de sous-segment discret présentées avec ce que nous considérons comme avantages et inconvénients. Nous considérerons un sous-segment  $\mathcal{S}$  de caractéristiques  $(\alpha, \beta, \mu)$  de  $n$  pixels et reposant sur une droite infinie  $\mathcal{D}$  de caractéristiques  $(a, b, c)$ . Nous considérons aussi que la décomposition en fractions continues de  $\frac{\alpha}{\beta}$  est  $[0, q_1, q_2, \dots, q_k]$ , et que celle de  $\frac{a}{b}$  est  $[0, q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n]$ . Soit  $\delta = n - k$ . Nous considérons finalement le premier palier horizontal du sous-segment  $\mathcal{S}$  comme le sous-segment  $\mathcal{S}_0$ .

### 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

Dans cette section nous présentons des notions, des définitions, des notations et des propriétés des sous-segments discrets. Nous mettrons particulièrement l'accent sur les restes arithmétiques du sous-segment discret et leurs relations avec les restes arithmétiques de la droite discrète correspondante.

#### 2.3.1 Notations et définitions

Pour rappel, deux sous-segments discrets sont équivalents s'ils appartiennent à la même droite discrète minimale et ont chacune trois points d'appuis de la droite

## 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

---

TABLE 2.1 – Récapitulatif sur les approches de reconnaissance de sous-segment.

Approche utilisée	Complexité	Avantages	Inconvénients
<b>DR95</b> : Mise à jour de $\mathcal{S}_0$ à l'ajout de points faiblement extérieurs	$\mathcal{O}(n)$ où $n$ représente le nombre de pixels de $\mathcal{S}$	Simple	Moins efficace et nécessité de refaire le parcours pour recalculer les caractéristiques lors de modifications (érosions ou dilations) de $\mathcal{S}$ .
<b>SmartDSS</b> : Détermination du <i>pattern</i> qui recouvre $\mathcal{S}$ : parcours descendant de l'arbre de Stern-Brocot	$\mathcal{O}(\log n)$ où $n$ représente le nombre de pixels de $\mathcal{S}$	Efficace	Il n'est pas nécessaire de calculer toutes les étapes (k-convergent de $\frac{a}{b}$ ).
<b>ReversedSmartDSS</b> : Détermination du <i>pattern</i> qui recouvre $\mathcal{S}$ : parcours ascendant de l'arbre de Stern-Brocot	$\mathcal{O}(\log \delta)$ où $\delta$ est la différence en profondeur entre les décompositions en fractions continues de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{\beta}$	Efficace	Structures et calculs complexes et difficilement extensible en dimension 3.
<b>Projection dans le diagramme de Farey</b> : Déterminer un point caractéristique dans un espace dual	$\mathcal{O}(\log n)$ où $n$ représente le nombre de pixels de $\mathcal{S}$	Efficace et extensible pour les droites à pentes irrationnelles.	Structures et calculs complexes en dimension 3.

support. En plus des définitions et notations présentées en Section 1.4 (Page 22, Chapitre 1), nous introduisons les notions de dilatation et érosion pivot :

**Définition 2.3.1** (Dilatation de pivot droit). *Soit un sous-segment  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$ .  $S'$  est une dilatation de pivot droit (ou simplement dilatation s'il n'y a pas d'ambiguïtés) de  $S$  si et seulement si  $S' = \mathcal{S}(D, u, v')$  n'est pas équivalent à  $S$  mais que son érosion  $\mathcal{S}(D, u, v' - 1)$  l'est.*

**Définition 2.3.2** (Érosion de pivot droit). *Soit un sous-segment  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$ .  $S''$  est une érosion de pivot droit (ou simplement érosion s'il n'y a pas d'ambiguïtés) de  $S$  si et seulement si  $S'' = \mathcal{S}(D, u, v'')$  n'est pas équivalent à  $S$  mais que sa dilatation  $\mathcal{S}(D, u, v'' + 1)$  l'est.*

On définit de la même manière la *dilatation de pivot gauche* et l'*érosion de pivot gauche*.

Il y a des propriétés immédiates sur les dilatations et les érosions qui sont déjà énoncées dans les travaux de Reveilles [Reveillès 91], Troesch [Troesch 93], et Debled-Rennesson [Debled-Rennesson 95, Debled-Rennesson 96]. Nous savons ainsi que dans un sous-segment d'une droite discrète minimale, la dilatation à droite d'une érosion de pivot droit est une dilatation de pivot droit et vice et versa. Par ailleurs, la dilatation de pivot d'un sous-segment discret contient toujours exactement trois points d'appuis (par rapport aux caractéristiques minimales du sous-segment discret dilaté).

Dans la Figure 2.2, nous montrons un sous-segment discret érodé  $S'_i$  et sa dilatation  $S_{i+1}$ . Les sous-segments discrets  $S_i$  et  $S'_i$  sont équivalents. Pour la clarté de certaines figures, nous représenterons des sous-segments discrets non pas par l'ensemble des points discrets  $(x, y)$  qui le constituent mais par l'ensemble de points de type  $(x, \mathcal{R}_{a,b,c}(x))$ . De cette façon les droites  $ax - by - c$  sont représentées horizontalement et il est plus facile de voir comment les points d'appuis, et les points faiblement extérieur jouent un rôle dans l'évolution des caractéristiques minimales. Tous les segments discrets qui ont la même dilatation de pivot droit sont équivalents. Tous les segments discrets qui ont la même érosion de pivot droit sont équivalents. Il en va de même pour les érosions et dilatations de pivot gauche.

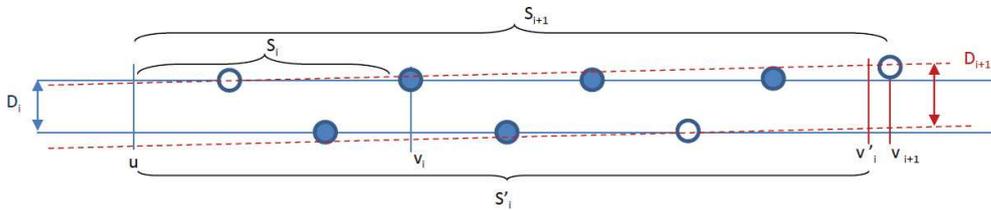


FIGURE 2.2 – Illustration d'une suite de dilatations d'un sous-segment discret.

### 2.3.2 Évolution des restes arithmétiques d'un sous-segment

Dans cette partie nous cherchons à établir le lien entre les restes arithmétiques d'une droite discrète et ceux de ses sous-segments. Cela nous permettra ensuite de

déterminer les caractéristiques minimales de sous-segments discrets. Dans la suite, nous considérons essentiellement une dilatation de pivot droit pour la définition par construction d'une suite de sous-segments discrets. Pour établir le lien entre les caractéristiques d'une droite discrète  $D$  et les caractéristiques minimales d'un sous-segment discret  $\mathcal{S}(D, u, v)$ , nous commencerons par le sous-segment  $\mathcal{S}(D, u, v)$  et de façon répétitive nous ajouterons des points de  $D$  afin de construire une suite de dilatations de pivot droit jusqu'à obtenir un sous-segment  $\mathcal{S}(D, u, v_n)$  où  $v_n$  correspond au troisième point d'appui de  $D$  à droite de  $P_D(u)$ . Nous savons alors que les caractéristiques minimales de  $\mathcal{S}(D, u, v_n)$  sont celles de  $D$ . Nous construisons la suite  $v_i$  des abscisses pour lesquelles les caractéristiques minimales changent avec des dilatations de pivot droit et les caractéristiques minimales de ces sous-segments successifs correspondants. Notre but est de montrer que les variations des restes arithmétiques par rapport aux sous-segments minimaux sont liées aux variations des restes arithmétiques pour la droite discrète minimale  $D$ .

Le lemme suivant montre une première relation entre un sous-segment minimal et sa dilatation/érosion :

**Lemme 2.3.1.** *Soit une droite discrète  $D$  et deux sous-segments discrets  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  et une érosion pivot (ou une dilatation pivot) de  $S$  :  $S' = \mathcal{S}(D, u', v')$  de caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Alors l'égalité suivante se vérifie :*

$$a\beta - \alpha b = \pm 1.$$

*Démonstration.* Soit un sous-segment  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$ .

**S' est une érosion de pivot droit de S**

Considérons que  $S' = \mathcal{S}(D, u, v')$  est une érosion de pivot droit de  $S$ . La dilatation de pivot droit de  $S'$  :  $S'' = \mathcal{S}(D, u, v' + 1)$  est équivalent à  $S$  par définition de l'érosion de pivot droit. De plus, on sait que  $S''$  a exactement trois points d'appuis pour les caractéristiques  $(a, b, c)$ . Soient  $U_0(v' + 1 - b, y_0)$  et  $U_1(v' + 1, y_0 + a)$  deux points d'appuis supérieurs consécutifs de  $S''$ .  $U_1$  est un point faiblement extérieur de  $S'$ , ce qui implique que  $\alpha(v' + 1) - \beta(y_0 + a) - \gamma = -1$ .  $U_0$  demeure aussi un point d'appui supérieur sur  $S'$  [Debled-Rennesson 95], d'où  $\alpha(v' + 1 - b) - \beta y_0 - \gamma = 0$ . On a alors  $\alpha(v' + 1) - \beta(y_0 + a) - \gamma = -1$  et  $\alpha(v' + 1 - b) - \beta y_0 - \gamma = 0$ ; on en déduit que  $a\beta - \alpha b = 1$ .

Si nous avons plutôt  $L_0(v' + 1 - b, y_0)$  et  $L_1(v' + 1, y_0 + a)$  deux points d'appuis inférieurs consécutifs de  $S''$ , c'est  $L_1$  qui serait un point faiblement extérieur de  $S'$ , ce qui impliquerait que  $\alpha(v' + 1) - \beta(y_0 + a) - \gamma = \beta$ .  $L_0$  demeurerait toujours un point d'appui inférieur sur  $S'$  [Debled-Rennesson 95], d'où  $\alpha(v' + 1 - b) - \beta y_0 - \gamma = \beta - 1$ . On aurait alors  $\alpha(v' + 1) - \beta(y_0 + a) - \gamma = \beta$  et  $\alpha(v' + 1 - b) - \beta y_0 - \gamma = \beta - 1$ ; on en déduit que  $a\beta - \alpha b = -1$ .

**S' est une érosion de pivot gauche de S**

Considérons que  $S' = \mathcal{S}(D, u', v)$  est une érosion de pivot gauche de  $S$  et que  $S''$  est sa dilatation de pivot gauche  $S'' = \mathcal{S}(D, u' - 1, v)$ .  $S''$  a aussi exactement trois points d'appuis pour les caractéristiques  $(a, b, c)$ . Dans ce cas on peut considérer  $U_0(u' - 1, y_0)$  et  $U_1(u' - 1 + b, y_0 + a)$  comme deux points d'appuis supérieurs consécutifs de  $S''$ .  $U_0$  serait un point faiblement extérieur de  $S'$ , ce qui implique que  $\alpha(u' - 1) - \beta y_0 - \gamma = -1$ .  $U_1$  demeurerait un point d'appui supérieur sur  $S'$ , d'où  $\alpha(u' - 1 + b) - \beta(y_0 + a) -$

$\gamma = 0$ . On aurait alors  $\alpha(u' - 1) - \beta y_0 - \gamma = -1$  et  $\alpha(u' - 1 + b) - \beta(y_0 + a) - \gamma = 0$ ; donc  $a\beta - \alpha b = -1$ .

Si nous avons plutôt  $L_0(u' - 1, y_0)$  et  $L_1(u' - 1 + b, y_0 + a)$  deux points d'appuis inférieurs consécutifs de  $S''$ , c'est  $L_0$  qui serait un point faiblement extérieur de  $S'$ , ce qui impliquerait que  $\alpha(u' - 1) - \beta y_0 - \gamma = \beta$ .  $L_1$  demeurerait un point d'appui inférieur sur  $S'$ , d'où  $\alpha(u' - 1 + b) - \beta(y_0 + a) - \gamma = \beta - 1$ . On aurait alors  $\alpha(u' - 1) - \beta y_0 - \gamma = \beta$  et  $\alpha(u' - 1 + b) - \beta(y_0 + a) - \gamma = \beta - 1$ ; donc  $a\beta - \alpha b = 1$ .

**S' est une dilatation de pivot droit de S**

Considérons que  $S' = \mathcal{S}(D, u, v')$  et de caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est une dilatation de pivot droit de  $S$ . L'érosion de pivot droit de  $S'$  :  $S'' = \mathcal{S}(D, u, v' - 1)$  est aussi équivalent à  $S$  par définition de la dilatation de pivot droit.  $S'$  a exactement trois points d'appuis pour les caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Soient  $U_0(v' - \beta, y_0)$  et  $U_1(v', y_0 + \alpha)$  deux points d'appuis supérieurs consécutifs de  $S'$ .  $U_1$  est un point faiblement extérieur de  $S''$ , ce qui implique que  $av' - b(y_0 + \alpha) - c = -1$ .  $U_0$  demeure aussi un point d'appui supérieur sur  $S''$  [Debled-Rennesson 95], d'où  $a(v' - \beta) - by_0 - c = 0$ . On a alors  $av' - b(y_0 + \alpha) - c = -1$  et  $a(v' - \beta) - by_0 - c = 0$ ; on en déduit que  $a\beta - \alpha b = -1$ .

Si nous avons plutôt  $L_0(v' - \beta, y_0)$  et  $L_1(v', y_0 + \alpha)$  deux points d'appuis inférieurs consécutifs de  $S'$ , c'est  $L_1$  qui serait un point faiblement extérieur de  $S''$ , ce qui impliquerait que  $av' - b(y_0 + \alpha) - c = b$ .  $L_0$  demeurerait toujours un point d'appui inférieur sur  $S''$  [Debled-Rennesson 95], d'où  $a(v' - \beta) - by_0 - c = b - 1$ . On aurait alors  $av' - b(y_0 + \alpha) - c = b$  et  $a(v' - \beta) - by_0 - c = b - 1$ ; on en déduit que  $a\beta - \alpha b = 1$ .

**S' est une dilatation de pivot gauche de S**

Considérons que  $S' = \mathcal{S}(D, u', v)$  est une dilatation de gauche droit de  $S$  et que  $S''$  est son érosion de pivot gauche  $S'' = \mathcal{S}(D, u' + 1, v)$ .  $S'$  a alors exactement trois points d'appuis pour les caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Dans ce cas on peut considérer  $U_0(u', y_0)$  et  $U_1(u' + \beta, y_0 + \alpha)$  comme deux points d'appuis supérieurs consécutifs de  $S'$ .  $U_0$  est un point faiblement extérieur de  $S''$ , ce qui implique que  $au' - by_0 - c = -1$ .  $U_1$  demeure un point d'appui supérieur sur  $S''$ , d'où  $a(u' + \beta) - b(y_0 + \alpha) - c = 0$ . On aurait alors  $au' - by_0 - c = -1$  et  $a(u' + \beta) - b(y_0 + \alpha) - c = 0$ ; donc  $a\beta - \alpha b = 1$ . Si nous avons plutôt  $L_0(u', y_0)$  et  $L_1(u' + \beta, y_0 + \alpha)$  deux points d'appuis inférieurs consécutifs de  $S'$ , c'est  $L_0$  qui serait un point faiblement extérieur de  $S''$ , ce qui impliquerait que  $au' - by_0 - c = b$ .  $L_1$  demeurerait un point d'appui inférieur sur  $S''$ , d'où  $a(u' + \beta) - b(y_0 + \alpha) - c = b - 1$ . On aurait alors  $au' - by_0 - c = b$  et  $a(u' + \beta) - b(y_0 + \alpha) - c = b - 1$ ; donc  $a\beta - \alpha b = -1$ .

□

L'interprétation géométrique de ce lemme est assez évidente. En effet si les vecteurs de coordonnées  $(a, b)$  et  $(\alpha, \beta)$  n'étaient pas unimodulaires il y aurait des points discrets supplémentaires dans l'intervalle  $[u', v']$  ce qui serait contradictoire avec notre construction.

### 2.3.3 Relations entre restes arithmétiques et points d'appuis

Le théorème suivant établit que les restes arithmétiques d'un sous-segment discret et les restes arithmétiques de ses dilatations (respectivement ses érosions) sont ordonnés de la même manière si les points que nous considérons sont assez proches :

### 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

**Théorème 2.3.1.** *Soit une droite discrète  $D$  et deux sous-segments  $S = \mathcal{S}(D, u, w)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  et  $S' = \mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$  tels que  $S$  est une dilatation de pivot droit de  $S'$  (et donc  $S'$  est une érosion de pivot droit de  $S$ ). Alors :*

$$\forall x, x' \in [u, v], |x - x'| \leq b : \mathcal{R}_{a,b,c}(x) < \mathcal{R}_{a,b,c}(x') \Rightarrow \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) \leq \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x')$$

Notons que le fait que  $[u, v] \subset [u, w]$ , ne signifie pas que nous avons toujours  $v - u \leq b$ . par exemple, pour  $D = \mathcal{D}(5, 13, 0)$ , le sous-segment discret  $\mathcal{S}(D, -7, 13)$  (de caractéristiques minimales  $(5, 13, 0)$ ) est la dilatation de pivot droit du sous-segment discret  $\mathcal{S}(D, -7, 12)$  (de caractéristiques minimales  $(3, 8, 0)$ ). Dans cet exemple,  $[u, v] = [-7, 12]$  alors que  $b = 13$ . Le théorème ne permet pas de couvrir complètement  $[u, v]$  à cause de la condition  $|x - x'| < b$ . Nous pensons que cette condition n'est pas nécessaire mais nous ne l'avons pas encore prouvé.

*Démonstration.* On a  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x) = ax - by - c$  et alors  $y = \frac{ax - c - \mathcal{R}_{a,b,c}(x)}{b}$ . On a aussi  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \alpha x - \beta y - \gamma$ . La même égalité tient pour  $(x', y')$ . Il faut noter que comme les deux sous-segments discrets appartiennent à  $D$ , ils ont les mêmes points discrets  $(x, y)$  pour  $x \in [u, v]$ . Les ordonnées sont identiques. On peut alors écrire :

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x') = \alpha x - \beta y - \gamma - (\alpha x' - \beta y' - \gamma).$$

En remplaçant  $y$  et  $y'$  par leur expression à partir des caractéristiques  $D$  :

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x') = \\ & \alpha x - \beta \left( \frac{ax - c - \mathcal{R}_{a,b,c}(x)}{b} \right) - \left( \alpha x' - \beta \left( \frac{ax' - c - \mathcal{R}_{a,b,c}(x')}{b} \right) \right). \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x') = \frac{(\alpha b - \beta a)(x - x')}{b} - \frac{\beta}{b}(\mathcal{R}_{a,b,c}(x') - \mathcal{R}_{a,b,c}(x)).$$

Comme  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x) < \mathcal{R}_{a,b,c}(x')$  il existe  $1 \leq k \leq b-1$  tel que  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x') - \mathcal{R}_{a,b,c}(x) = k$ . Donc :  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x') = \frac{(\alpha b - \beta a)(x - x')}{b} - \frac{k\beta}{b}$ . Le fait que  $|x - x'| \leq b$ , combiné au lemme 2.3.1 induit que  $(\alpha b - \beta a) = \pm 1$ .

On sait aussi que  $1 \leq \beta \leq b-1$  et  $1 \leq k \leq b-1$  d'où :  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x') \leq 1 - \frac{1}{b}$ . La différence entre les restes arithmétiques est entière donc  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x') \leq 0$ .  $\square$

Les corollaires suivants du théorème 2.3.1 établissent qu'un point d'appui d'un sous-segment reste point d'appui sur son érosion.

**Corollaire 2.3.1.** *Soit une droite discrète  $D$ , un sous-segment discret  $S = \mathcal{D}(u, w)$  et son érosion de pivot droit  $S' = \mathcal{S}(D, u, v)$ .*

*Notons  $m$  (respectivement  $M$ ) le point d'appui supérieur (inférieur) de  $S$  qui appartient à  $S'$ . Alors le point  $m$  (respectivement  $M$ ) est aussi un point d'appui supérieur (respectivement inférieur) de  $S'$ .*

On peut déduire ce corollaire de l'algorithme de génération de sous-segment de Debled-Renesson [Debled-Renesson 95] ou les travaux sur l'érosion dans la thèse de Roussillon [Roussillon 09]. Nous donnons ici le résultat comme une conséquence directe du théorème proposé ci-dessus.

*Démonstration.* Notons d'abord que  $S'$  en tant qu'une érosion de pivot droit de  $S$  contient exactement deux points d'appuis de  $S$ . Comme  $m(x_m, y_m)$  est le seul point d'appui supérieur de  $S$  dans  $[u, v]$ , nous avons  $\forall x \in [u, v], 0 = \mathcal{R}_{a,b,c}(x_m) < \mathcal{R}_{a,b,c}(x)$  et  $\forall x \in [u, v], |x_m - x| < b$  sinon il existerait un autre point d'appui supérieur de  $S$  sur le sous-segment discret. La proposition 2.3.1 permet ensuite de déduire directement le résultat du corollaire. La même démonstration peut être faite pour  $M$ .  $\square$

Le deuxième corollaire établit que si deux sous-segments discrets sont liés par une dilatation/érosion, sur la partie de sous-segment commune aux deux sous-segments discrets, les points de restes arithmétiques minimal et maximal sont identiques :

**Corollaire 2.3.2.** *Soit une droite discrète  $D$ , deux sous-segments discrètes  $S = \mathcal{S}(D, u, w)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  et  $S' = \mathcal{S}(D, u, t)$  de caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$  tels que  $S$  est la dilatation de pivot droit  $S'$ . Considérons toujours un intervalle  $[u, v]$  tel que  $u \leq v \leq t < w$ . Alors :*

$$\min_{u \leq x \leq v} \{\mathcal{R}_{a,b,c}(x)\} = \mathcal{R}_{a,b,c}(x_m) \Rightarrow \min_{u \leq x \leq v} \{\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x)\} = \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x_m)$$

*Démonstration.* Si  $v - u \geq b$  alors il existe un point d'appui supérieur  $m(x_m, y_m)$  et un point d'appui inférieur  $M(x_M, y_M)$  de  $S$  sur le sous-segment  $\mathcal{S}(D, u, v)$ . Le corollaire 2.3.1 implique que  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x_m) = 0 = \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x_m)$  d'où le résultat du corollaire.

Si  $v - u < b$  alors le théorème 2.3.1 entraîne directement le corollaire.  $\square$

Nous établissons dans la suite l'un des théorèmes essentiels à ces travaux :

**Théorème 2.3.2.** *Soit une droite discrète  $D = \mathcal{D}(a, b, c)$  et le sous-segment discret  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$ . Alors le point  $m(x_m, y_m)$  (respectivement  $M(x_M, y_M)$ ) dont le reste arithmétique sur  $D$  est le reste minimum (respectivement maximum) sur  $D$  dans l'intervalle  $[u, v]$  est un point d'appui supérieur (respectivement inférieur) sur  $S$ .*

*Démonstration.* La preuve est basée sur l'application récursive des corollaires précédents sur une suite de sous-segments discrets définies comme suit : on commence avec  $S = S_0 = \mathcal{S}(D, u, v_0)$  (où  $v_0 = v$ ) de caractéristiques minimales  $(a_0, b_0, c_0)$ . Le deuxième sous-segment discret de la suite  $S_1 = \mathcal{S}(D, u, v_1)$  de caractéristiques minimales  $(a_1, b_1, c_1)$ , est une dilatation de pivot droit de  $S_0$ . Le minimum de la suite de restes arithmétiques  $\mathcal{R}_{a_1,b_1,c_1}(u, v)$  est le minimum des restes arithmétiques  $\mathcal{R}_{a_0,b_0,c_0}(u, v)$  (induit du corollaire 2.3.2). Le sous-segment  $S = S_0$  est défini sur l'intervalle  $[u, v]$  et ainsi le reste arithmétique minimal par rapport aux caractéristiques minimales de  $S_0$  est 0 puisqu'il y a trois points d'appuis sur le sous-segment discret et donc au moins un point d'appui supérieur. Comme le reste arithmétique 0 est celui d'un point d'appui supérieur, l'abscisse du point de reste arithmétique minimal de  $S_1$  est celui d'un point d'appui supérieur de  $S$ . Le sous-segment discret suivant  $S_2$  est la dilatation de pivot droit de  $S_1$  et d'après le corollaire 2.3.2 le minimum des restes arithmétiques de  $S_2$  correspond au minimum des restes arithmétiques de  $S_1$  obtenu sur un point d'appui supérieur de  $S$ . On répète ce procédé jusqu'à obtenir une dilatation de pivot droit correspondant au sous-segment discret  $S_i$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$ . Les intervalles sont de plus en plus grands et par conséquent il arrive au niveau de certains points qu'on ait trois points d'appuis de  $D$  dans le sous-segment discret. Le corollaire 2.3.2 peut être appliqué à chaque étape

### 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

de la récursion. On prouve de la même manière le lien entre reste maximal et point d'appui inférieur.  $\square$

L'Exemple 2.7 illustre par une construction la conservation du minimum des restes arithmétiques à la suite de dilatations récursives.

**Exemple 2.3.1.** Soit une droite discrète  $D = \mathcal{D}(5, 13, 0)$  et un sous-segment  $S = S_0 = \mathcal{S}(D, 6, 9)$  de caractéristiques minimales  $(1, 2, 2)$ . Nous allons faire des dilatations de pivot droit et observer la suite des restes arithmétiques de  $D$  sur l'intervalle  $[6, 26]$  par rapport aux caractéristiques minimales des sous-segments. Nous nous intéressons particulièrement à l'évolution des restes arithmétiques des points dans l'intervalle  $[6, 9]$  (en vert dans les figures) qui définissent  $S_0$  :

- $S = S_0 = \mathcal{S}(D, 6, 9)$  de caractéristiques minimales  $(1, 2, 2)$ .  
La suite des restes arithmétiques des points de  $D$  avec les caractéristiques  $(1, 2, 2)$  dans l'intervalle  $[6, 26]$  est illustrée sur la Figure 2.3. Le point faiblement extérieur inférieur est à l'abscisse 10 (en rouge).

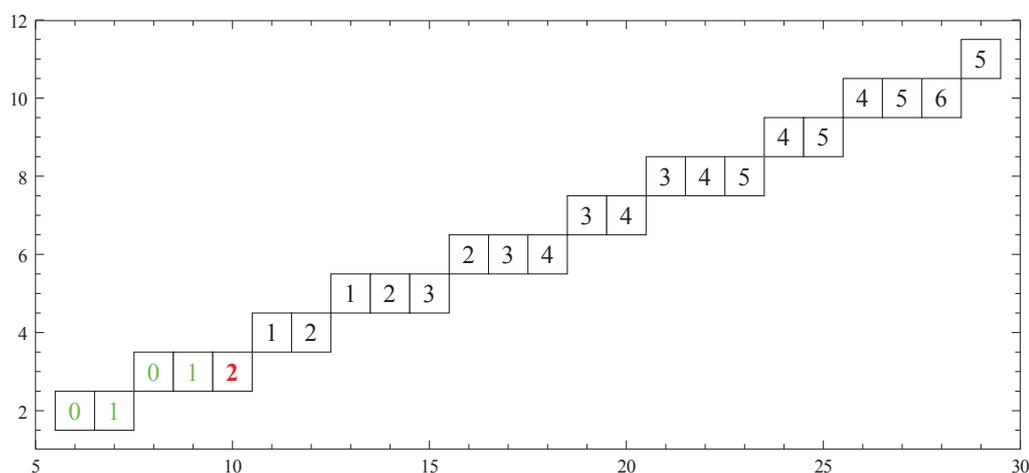


FIGURE 2.3 – Restes arithmétiques sur  $D$  avec les caractéristiques  $(1, 2, 2)$ .

- $S_1 = \mathcal{S}(D, 6, 10)$  de caractéristiques minimales  $(1, 3, -1)$ .  
La suite des restes arithmétiques des points de  $D$  avec les caractéristiques  $(1, 3, -1)$  dans l'intervalle  $[6, 26]$  est illustrée sur la Figure 2.4. Le point faiblement extérieur supérieur est à l'abscisse 13 (en rouge). On remarque que les restes minimal et maximal sur l'intervalle  $[6, 9]$  sont des points d'appuis supérieur et inférieur de  $S$ . La réciproque n'est pas vraie : tous les points d'appuis supérieurs et inférieurs de  $S$  n'ont pas les restes arithmétiques minimaux et maximaux sur  $S_1$  dans l'intervalle  $[6, 9]$ . On peut aussi noter que deux points d'appuis de  $S_1$  dans l'intervalle  $[6, 9]$  sont aussi points d'appuis de  $S$ .
- $S_2 = \mathcal{S}(D, 6, 13)$  de caractéristiques minimales  $(2, 5, 1)$ .  
La suite des restes arithmétiques des points de  $D$  avec les caractéristiques  $(2, 5, 1)$  dans l'intervalle  $[6, 26]$  est illustrée sur la Figure 2.5. Le point faiblement extérieur inférieur est à l'abscisse 18 (en rouge). On remarque aussi que les points de restes minimal et maximal sur l'intervalle  $[6, 9]$  sont des points d'appuis supérieur et inférieur de  $S$ . Par contre ici alors qu'on a deux points d'appuis de plus dans l'intervalle  $[6, 9]$  sur  $S_1$  il n'y a en qu'un seul qui reste sur  $S_2$ .

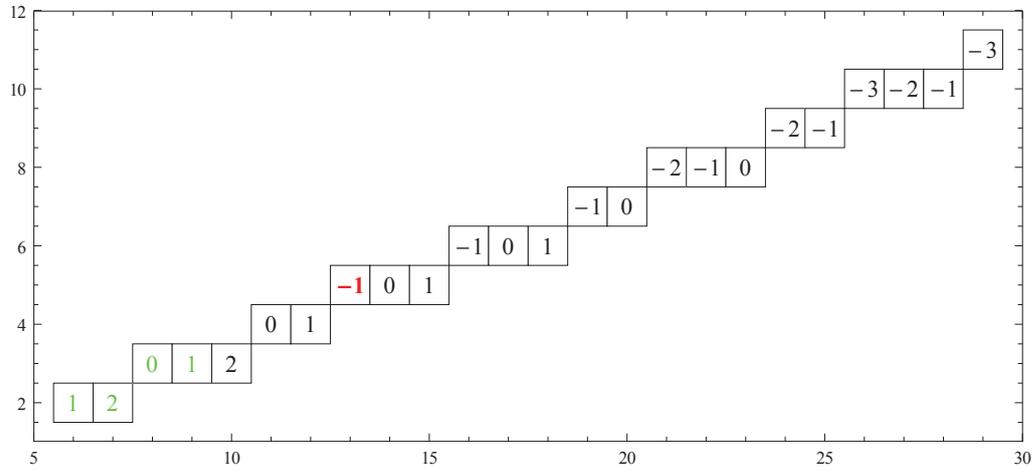


FIGURE 2.4 – Restes arithmétiques sur  $D$  avec les caractéristiques  $(1, 3, -1)$ .

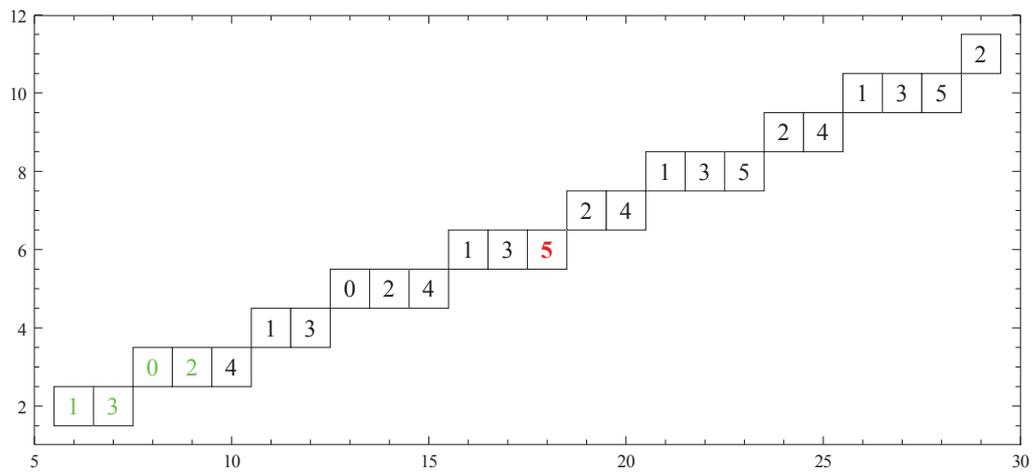


FIGURE 2.5 – Restes arithmétiques sur  $D$  avec les caractéristiques  $(2, 5, 1)$ .

### 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

- $S_3 = \mathcal{S}(D, 6, 18)$  de caractéristiques minimales  $(3, 8, -1)$ .

La suite des restes arithmétiques des points de  $D$  avec les caractéristiques  $(3, 8, -1)$  dans l'intervalle  $[6, 26]$  est illustrée sur la Figure 2.6. Le point faiblement extérieur supérieur est à l'abscisse 26 (en rouge). On remarque aussi que les points de restes minimal et maximal sur l'intervalle  $[6, 9]$  sont des points d'appuis supérieur et inférieur de  $S$ . Mais il n'y a plus de point d'appui de  $S_3$  dans l'intervalle  $[6, 9]$ . Mais la propriété de conservation des restes arithmétiques minimal et maximal demeure.

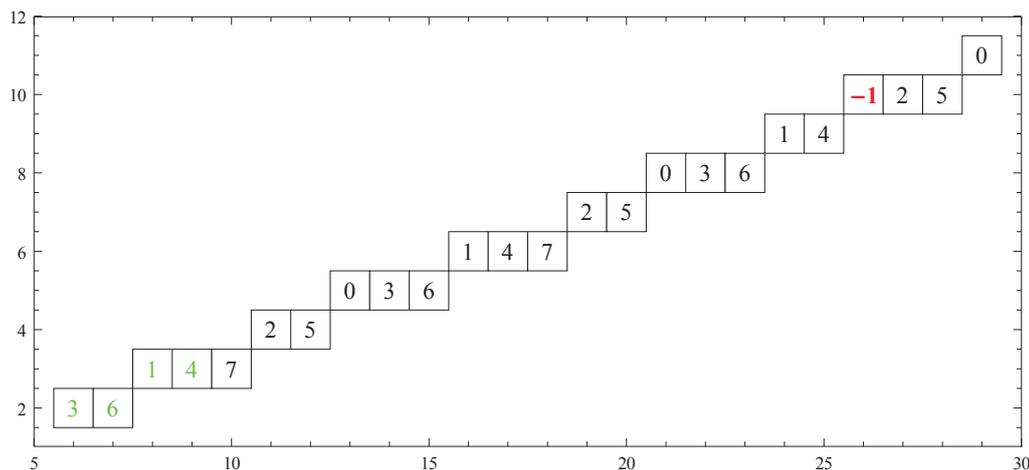


FIGURE 2.6 – Restes arithmétiques sur  $D$  avec les caractéristiques  $(3, 8, -1)$ .

- $S_4 = \mathcal{S}(D, 6, 26)$  de caractéristiques minimales  $(5, 13, 0)$ . Nous avons atteint les caractéristiques de  $D$ .

La suite des restes arithmétiques des points de  $D$  avec les caractéristiques  $(5, 13, 0)$  dans l'intervalle  $[6, 26]$  est illustrée sur la Figure 2.7. Il n'y a plus de point faiblement extérieur. Les points de restes arithmétiques minimal et maximal sur  $D$  dans l'intervalle  $[6, 9]$  sont des points d'appuis supérieur et inférieur de  $S$ .

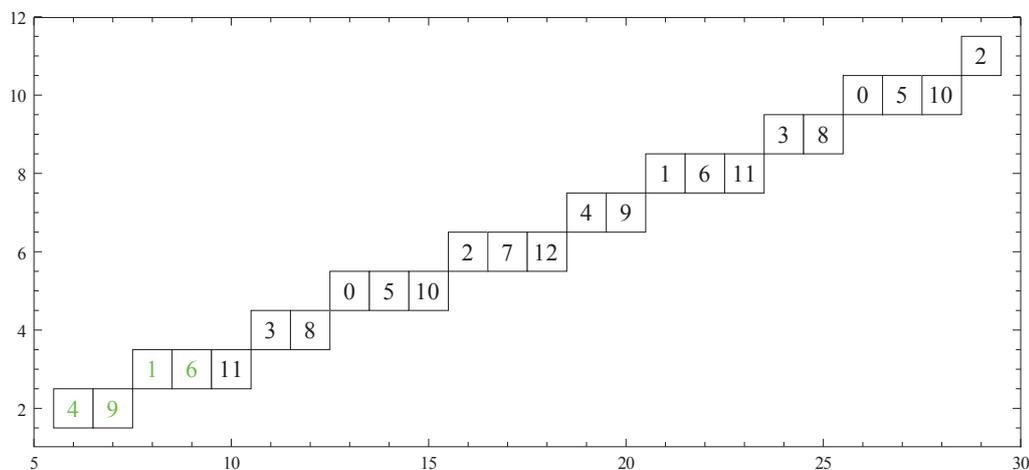


FIGURE 2.7 – Restes arithmétiques sur  $D$  avec les caractéristiques  $(5, 13, 0)$ .

Nous avons présenté comment déterminer un point d'appui supérieur et un point d'appui inférieur d'un sous-segment discret minimal  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  en considérant les restes arithmétiques par rapport à  $D$  dans l'intervalle  $[u, v]$ . Pour déterminer les caractéristiques minimales de  $S$ , deux points d'appuis ne suffisent pas, il nous faut déterminer un troisième point d'appui. Une fois qu'on a le troisième point d'appui, soit on a deux points d'appuis supérieurs ou deux points d'appuis inférieurs et cela permet de déduire directement les caractéristiques.

Le Théorème 2.3.3 établit que la position du troisième point d'appui est fonction de la position des deux points d'appuis précédemment déterminés. Le reste arithmétique du troisième point d'appui que nous cherchons est aussi le reste arithmétique minimal ou maximal d'un certain intervalle.

**Théorème 2.3.3.** *Soit une droite discrète  $D = \mathcal{D}(a, b, c)$  et un sous-segment discret  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  tel que  $m(x_m, y_m)$  est le point d'appui supérieur de  $\mathcal{S}$  ayant le reste arithmétique minimal sur  $D$  dans l'intervalle  $[u, v]$  et  $M(x_M, y_M)$  est le point d'appui inférieur  $\mathcal{S}$  ayant le reste arithmétique maximal sur  $D$  dans l'intervalle  $[u, v]$ . L'abscisse du troisième point d'appui que nous recherchons est dans le plus grand intervalle  $[u', v']$  parmi les intervalles  $[u, x_m - 1]$ ,  $[x_m + 1, v]$ ,  $[u, x_M - 1]$  ou  $[x_M + 1, v]$ . Ainsi :*

- si le plus grand intervalle est  $[u, x_m - 1]$  ou  $[x_m + 1, v]$ , le troisième point d'appui est le point de reste minimal sur l'intervalle ;
- sinon si le plus grand intervalle est  $[u, x_M - 1]$  ou  $[x_M + 1, v]$ , le troisième point d'appui est le point de reste maximal sur l'intervalle.

*Démonstration.* Nous savons qu'il y a forcément un troisième point d'appui. Grâce au corollaire 2.3.2, nous savons que ce point d'appui a forcément un reste arithmétique extremum dans l'un des quatre intervalles. C'est soit un point de reste arithmétique minimal sur  $[u, x_m - 1]$  ou  $[x_m + 1, v]$  soit un point de reste arithmétique maximal sur  $[u, x_M - 1]$  ou  $[x_M + 1, v]$ . Supposons que le troisième point d'appui ne soit pas sur le plus grand intervalle parmi les quatre, mais dans l'un des autres. Comme les points d'appuis consécutifs du même type ont une distance en abscisse égale à  $\beta$ , avec  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les caractéristiques minimales de  $S$ , il devrait donc y avoir aussi un point d'appui dans le plus grand intervalle. Il y a par conséquent toujours un point d'appui dans le plus grand intervalle.  $\square$

La Figure 2.8 illustre le Théorème 2.3.3.

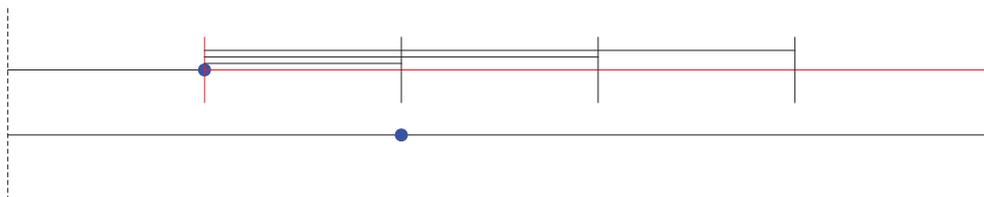


FIGURE 2.8 – Représentation des intervalles pouvant contenir le troisième point d'appui : les points de restes maximal et minimal sont en bleu et le plus long intervalle en rouge. Si l'un des autres intervalles contenaient un point d'appui il y en aurait également sur le plus long à cause de la périodicité d'apparition des points d'appuis.

## 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

Le théorème 2.3.3 suffit pour déterminer les caractéristiques minimales. Si  $T(x_t, y_t)$  est le troisième point d'appui trouvé à l'aide du théorème et  $A(x_A, y_A)$  est l'autre point d'appui de même type alors  $\beta = \frac{|x_A - x_T|}{k}$  et  $\alpha = \frac{|y_A - y_T|}{k}$  pour  $k \geq 1$ , avec  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les caractéristiques minimales du sous-segment discret. Par un simple calcul du PGCD de  $\alpha$  et  $\beta$  nous déduisons facilement les caractéristiques minimales ( $\gamma$  est trivial à trouver).

Avant de montrer que le troisième point d'appui obtenu à l'aide du théorème vérifie toujours  $k = 1$ , nous introduisons un lemme qui fait le lien entre les restes d'une droite discrète, d'un de ses sous-segments discrets et leurs périodes respectives.

**Lemme 2.3.2.** *Soit une droite discrète  $D = \mathcal{D}(a, b, c)$  et un sous-segment discret  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Alors :*

- si  $u \leq x < x + \beta \leq v$  alors  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x + \beta) = \mathcal{R}_{a,b,c}(x) + (a\beta - \alpha b)$  ;
- si  $u \leq x < x + b \leq v$  alors  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x + b) = \mathcal{R}_{a,b,c}(x) - (a\beta - \alpha b)$ .

*Démonstration.*  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x) = ax - c - b \lfloor \frac{ax-c}{b} \rfloor$  d'où  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x + \beta) - \mathcal{R}_{a,b,c}(x) = a\beta - b(\lfloor \frac{a(x+\beta)-c}{b} \rfloor - \lfloor \frac{ax-c}{b} \rfloor)$ . Si  $P_D(x)$  et  $P_D(x + \beta)$  appartiennent tous les deux à  $S$  alors ils appartiennent aussi à  $D$  et par conséquent  $\lfloor \frac{ax-c}{b} \rfloor = \lfloor \frac{\alpha x - \gamma}{\beta} \rfloor$  et  $\lfloor \frac{ax-c}{b} \rfloor = \lfloor \frac{\alpha(x+\beta) - \gamma}{\beta} \rfloor$ . Nous avons alors  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x + \beta) - \mathcal{R}_{a,b,c}(x) = a\beta - \alpha b$ . La preuve de la deuxième partie du lemme se fait de façon similaire.  $\square$

Nous avons maintenant trois points d'appuis, c'est à dire que nous avons deux points d'appuis de même type. Cependant nous ne pouvons pas d'abord conclure que le troisième point d'appui est consécutif à celui du même type à partir du théorème 2.3.3. Dans le théorème qui suit nous montrons qu'il est en effet consécutif et que, par conséquent, on peut directement calculer les caractéristiques minimales :

**Théorème 2.3.4.** *Soit une droite discrète  $D = \mathcal{D}(a, b, c)$  et un sous-segment discret  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$  tels que  $LP_1(x_1, y_1)$  et  $LP_2(x_2, y_2)$  sont les points d'appuis de même type (supérieur ou inférieur) déterminé par le théorème 2.3.3 et le théorème 2.3.2. Alors les caractéristiques minimales de  $S$  sont définies par :*

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (|y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|, \alpha x_1 - \beta y_1)$$

*Démonstration.* Soit une droite discrète  $D = \mathcal{D}(a, b, c)$  de caractéristiques minimales  $(a, b, c)$  et un sous-segment discret  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  de caractéristiques minimales  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Les points d'appuis sont sur les droites d'appuis du sous-segment discret et vérifient le lemme 2.3.2. Tous les points d'appuis sur les droites d'appuis ont des restes arithmétiques  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x_m) + k|a\beta - \alpha b|$  ou  $\mathcal{R}_{a,b,c}(x_M) - k|a\beta - \alpha b|$  selon que  $T$  soit un point d'appui supérieur ou inférieur.  $T$  est celui des points d'appuis ayant le second plus grand reste arithmétique ou le second plus petit reste arithmétique sur  $D$  dans le plus grand sous-intervalle correspondant (théorème 2.3.3). L. Buzer a montré dans [Buzer 06] que s'il existe plusieurs points d'appuis de même type alors la droite d'appui correspondante est un côté de l'enveloppe convexe des points du sous-segment discret. Cela implique que dans l'intervalle dans lequel on a trouvé le troisième point d'appui il n'y a pas de point avec un reste arithmétique plus petit (ou grand).  $\square$

La Figure 2.9 illustre la dernière partie de la preuve du théorème 2.3.4. Nous avons représenté les restes arithmétiques des points de la droite discrète et du sous-segment discret  $(x, \mathcal{R}_{13,28,0}(x))$ . À l'horizontal nous avons les points qui ont les mêmes restes arithmétiques sur la droite discrète. En diagonale, (sur les droites noires et simples), nous avons les points qui ont les mêmes restes arithmétiques sur le sous-segment discret. On peut voir que les points d'appuis inférieurs du sous-segment discret sont alignés avec les points en bas qui ont respectivement le plus petit reste arithmétique de la droite discrète (cercle noir) et le plus petit reste arithmétique de la droite à gauche de l'autre point d'appui (disque gris). Une autre remarque qu'on peut faire sur la Figure 2.9, c'est que les points d'appuis supérieurs soient en bas parce que les restes arithmétiques de  $D$  sont représentés horizontalement. Les points d'appuis sont dits "supérieurs" car en dessinant les droites d'appuis  $ax - by - c = 0$  et  $ax - by - c = b - 1$  avec  $0 \leq a \leq b$  la droite d'appui  $ax - by - c = 0$  est au dessus de la droite d'appui  $ax - by - c = b - 1$  et par conséquent les points d'appuis supérieurs (géométriquement en haut) ont ceux qui ont les restes arithmétiques minimaux.

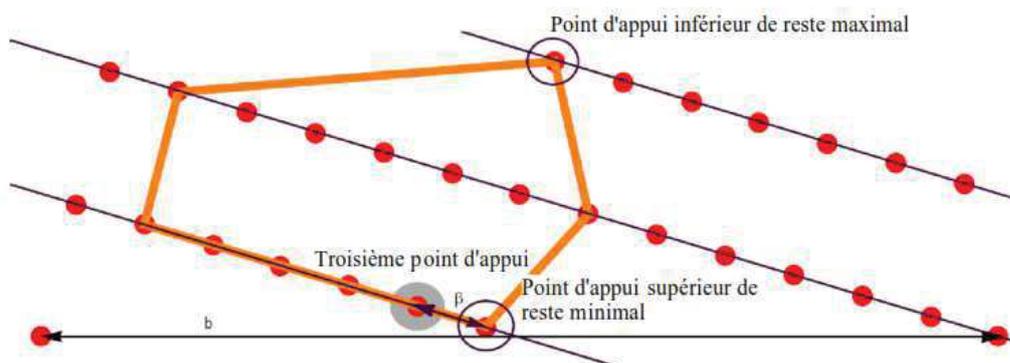


FIGURE 2.9 – Représentation des restes arithmétiques de la droite discrète  $D = \mathcal{D}(13, 28, 0)$  et de l'enveloppe convexe des points du sous-segment discret  $\mathcal{S}(D, 3, 16)$  de caractéristiques minimales  $(5, 11, -1)$ . Les deux grands cercles correspondent aux points d'appuis ayant les restes arithmétiques minimal et maximal. Le disque gris correspond au troisième point d'appui.

### 2.3.4 Algorithmes de recherche des points d'appuis

Dans la sous-section 2.3 (Page 42), nous avons montré que les points de restes arithmétiques minimal et maximal permettent de déterminer des points d'appuis supérieur et inférieur d'un sous-segment discret minimal. Dans cette section nous nous intéressons à comment calculer les restes arithmétiques minimal et maximal d'une façon efficace. Nous cherchons à montrer que cela peut se faire aussi simplement que l'algorithme de calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide.

On peut d'abord remarquer que si le sous-segment discret  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  de la droite discrète  $D = \mathcal{D}(a, b, c)$  est tel que  $v - u \geq b$  alors les restes arithmétiques 0 et  $b - 1$  sont forcément dans la suite des restes arithmétiques  $\mathcal{R}_{a,b,c}(u, v)$  auquel cas il est inutile de rechercher encore les restes arithmétiques minimal et maximal.

## 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

---

Ensuite, si nous avons les coefficients de Bezout de  $a$  et  $b$ , c'est facile de déterminer si  $0$  ou  $b - 1$  appartiennent à  $\mathcal{R}_{a,b,c}(u, v)$  ce qui peut advenir même quand  $v - u < b$ . Dans ces cas aussi, il est inutile de rechercher le reste arithmétique minimal et/ou maximal.

Finalement, nous pouvons considérer uniquement les droites discrètes avec un décalage affine nul (égale à  $0$ ). En effet, en considérant les coefficients de Bezout  $(\alpha, \beta)$  de  $(a, b)$  ( $a\alpha - b\beta = 1$ ) il est facile de voir que les suites de restes arithmétiques suivantes sont équivalentes :  $\mathcal{R}_{a,b,c}(u, v) = \mathcal{R}_{a,b,0}(u + \{\frac{-c\alpha}{b}\}, v + \{\frac{-c\alpha}{b}\})$ .

### Paliers de départ et de fin de la suite des restes arithmétiques

Le théorème suivant établit que les restes arithmétiques en début et fin de palier peuvent constituer des suites congruentes :

**Théorème 2.3.5.** *Soit la suite de restes arithmétiques  $\zeta = \mathcal{R}_{a,b,0}(u, v)$ , avec  $0 \leq a \leq b$  et  $\gcd(a, b) = 1$ .*

- si  $\lfloor \frac{au}{b} \rfloor = \lfloor \frac{av}{b} \rfloor$  alors  $\min(\zeta) = \{\frac{au}{b}\}$  et  $\max(\zeta) = \{\frac{av}{b}\}$  ;
- sinon
  - $\min(\zeta) \in \zeta'$  avec  $\zeta' = \mathcal{R}_{\{\frac{-b}{a}\}, a, 0}(1 + \lfloor \frac{a(u-1)}{b} \rfloor, \lfloor \frac{av}{b} \rfloor)$  ;
  - et  $\max(\zeta) \in \zeta''$  avec  $\zeta'' = b - a + \mathcal{R}_{\{\frac{-b}{a}\}, a, 0}(1 + \lfloor \frac{au}{b} \rfloor, \lfloor \frac{a(v+1)}{b} \rfloor)$ .

La preuve de cela a déjà été introduite par J-P Reveilles [Reveillès 91]. La preuve que nous proposons est un peu plus directe.

*Démonstration.* Comme remarque préliminaire, rappelons que  $\zeta = \mathcal{R}_{a,b,0}(u, v)$  est la suite de reste arithmétique d'un sous-segment discret minimal  $S = \mathcal{S}(D, u, v)$  d'une droite discrète  $D$  de caractéristiques minimales  $(a, b, 0)$ . Sur chaque palier d'ordonnée  $\lfloor \frac{ax}{b} \rfloor$ , les restes arithmétiques sont ordonnés de façon croissante. (Un palier est un ensemble de points discrets connexes deux à deux de  $D$  avec la même ordonnée). Si les points  $P_D(u)$  et  $P_D(v)$  sont sur le même palier,  $\lfloor \frac{au}{b} \rfloor = \lfloor \frac{av}{b} \rfloor$ , et le point de reste arithmétique minimal est à l'abscisse  $u$  et celui de reste arithmétique maximal à l'abscisse  $v$ .

Dans la suite nous supposons que  $P_D(u)$  et  $P_D(v)$  ne sont pas sur le même palier. Le minimum de la suite est forcément au début de l'un des paliers. Il est facile ensuite de voir que la suite des restes arithmétiques des points en début de palier est celle que nous recherchons. D'abord le reste arithmétique  $r$  est sur le début d'un palier si et seulement si  $r - a < 0$  ou  $0 \leq r < a$ . Les restes en début des prochains paliers  $r'$  vérifient alors  $r + k.a = b + r'$ , où  $k$  est le nombre de fois qu'on ajoute  $a$  à  $r$  pour atteindre le prochain palier. On a alors  $r' = r + k.a - b$ . Comme  $0 \leq r' < a$ , cela implique  $r' = \frac{r-b}{a}$ . La suite des restes arithmétiques des points en début de palier est alors définie par la suite congruente  $\left\{ \frac{\{\frac{-b}{a}\}x}{a} \right\}$ .

À ce stade, la suite des restes arithmétiques des points en début de palier est connu et égale à  $\mathcal{R}_{\{\frac{-b}{a}\}, a, 0}(u', v')$  avec  $u'$  et  $v'$  à déterminer. Des paliers du sous-segment discret peuvent être des paliers incomplets de la droite discrète  $D$ . Le premier palier de  $S$  est incomplet si et seulement si  $P_D(u - 1)$  est sur le même palier que  $P_D(u)$  et le dernier palier est incomplet si et seulement si  $P_D(v + 1)$  est sur le

même palier que  $P_D(v)$  pour  $D$ . Comme les restes arithmétiques de points en début de palier sont plus petits que les autres restes arithmétiques du palier, ce n'est pas grave si le dernier palier de notre suite  $\zeta$  est incomplet vu qu'on a juste besoin du début de palier. C'est pourquoi la valeur  $v'$  est donnée simplement par l'ordonnée correspondante de la droite discrète correspondante (un palier par ordonnée) :  $v' = \lfloor \frac{av}{b} \rfloor$ . Pour la même raison, le minimum de  $\zeta$  ne peut pas être dans le premier palier si celui-ci est incomplet (avec  $P_D(u)$  et  $P_D(v)$  sur des paliers différents). Au début de  $\zeta'$  nous voulons mettre le début du premier palier qui est effectivement le début du premier palier si celui-ci est complet et le début du second sinon et alors  $u' = 1 + \lfloor \frac{a(u-1)}{b} \rfloor$ .

Pour le maximum des restes arithmétiques, c'est facile de voir que si les débuts de palier constituent la suite  $\left\{ \left\lfloor \frac{a - \{\frac{b}{a}\}x}{a} \right\rfloor ; u' \leq x \leq v' \right\}$  alors les fins de palier forment la suite  $b - a + \left\{ \left\lfloor \frac{a - \{\frac{b}{a}\}(x+1)}{a} \right\rfloor ; u'' \leq x \leq v'' \right\}$  puisque le point qui succède une fin de palier est le début du palier suivant. La première valeur de cette suite est la valeur à laquelle succède la valeur en début du second palier c'est à dire à  $x + 1$ . Les valeurs de début et de fin de la nouvelle suite sont données par  $\lfloor \frac{au}{b} \rfloor$  et  $\lfloor \frac{a(v+1)}{b} \rfloor - 1$ . Cela n'est pas exactement ce que dit le théorème ; mais pour traiter une abscisse  $x$  dans notre algorithme et non  $x$  et  $x + 1$ , nous remplaçons  $x$  par  $x + 1$  et alors  $u''$  devient  $u'' + 1$  et  $v''$  devient  $v'' + 1$  ce qui conduit aux formules données.  $\square$

Le théorème 2.3.5 implique qu'on peut construire une suite de restes arithmétiques qui contient toujours le minimum ou qui nous permet de calculer le maximum de la suite des restes arithmétiques. Mais cette méthode n'est pas très efficace : nous remplaçons alors la suite modulo  $b$  par une suite modulo  $a$  ce qui remplace le nombre de points par le nombre de paliers. Si la pente est proche de 1, le nombre de points et le nombre de paliers sont assez proches et il n'y a pas un gain considérable en remplaçant la suite. Il y a néanmoins une façon simple de rendre la méthode plus efficace :

**Lemme 2.3.3.** *Soit la suite de restes arithmétiques  $\zeta = \mathcal{R}_{a,b,0}(u, v)$ , avec  $0 \leq a \leq b$  et  $\gcd(a, b) = 1$ . Supposons que  $2a > b$  alors :*

$$\min(\zeta) \in \zeta' \text{ et } \max(\zeta) \in \zeta' \text{ where } \zeta' = \mathcal{R}_{-a,b,0}(-v, -u)$$

*Démonstration.* C'est facile de remarquer que  $\left\{ \frac{-ax}{b} \right\}$  est la suite  $\zeta$  à l'envers à partir d'un reste arithmétique 0 fixé. Les valeurs des deux séquences sont les mêmes ; donc les valeurs minimales et maximales sont préservées.  $\square$

Le lemme 2.3.3 nous permet de transformer la suite avec  $a$  paliers en une suite de  $b - a$  palier et un sous-segment discret de pente  $\frac{a}{b} > \frac{1}{2}$  en un sous-segment discret de pente  $\frac{b-a}{b} < \frac{1}{2}$ . Les paliers sont alors plus grands et on réduit le temps de calcul.

**Exemple 2.3.2.** *Dans la recherche du minimum de la suite de reste arithmétique  $\zeta = \mathcal{R}_{55,89,0}(1, 88) = \left\{ \left\lfloor \frac{55x}{89} \right\rfloor ; 1 \leq x \leq 88 \right\}$  on a les étapes suivantes. Nous avons pris des nombres d'une suite de Fibonacci comme paramètres (et bien sûr un intervalle ne contenant pas le reste arithmétique 0) pour maximiser le nombre d'étapes de l'exemple. On appelle  $\zeta_i$  la suite minimale à l'étape  $i$  :*

---

**Algorithme 1** : ResteMinimal (Entrées :  $a, b, c, u, v, x_0, y_0, pgcd$ . Sortie :  $mini$ )

---

```

/* a,b,c : caractéristiques de la droite; u,v : extrémités du
   sous-segment;  $x_0, y_0$  : coefficients de Bézout de a et b; pgcd :
   pgcd de a et b calculé en même temps que  $x_0$  et  $y_0$ ; mini :
   reste minimal */
1 début
   /* calcul à l'aide des coefficients de Bézout si 0 est dans
      l'intervalle  $[u, v]$  */
2   Si 0 est dans l'intervalle  $[u, v]$  alors
3     |  $mini \leftarrow 0$ ;
4   sinon
5     |  $a' \leftarrow a; b' \leftarrow b; u' \leftarrow u; v' \leftarrow v$ ;
6     | Tant que VRAI faire
7       | Si  $2a' > b'$  alors
8         |  $a' \leftarrow b' - a'; v'' \leftarrow b' - u'; u' \leftarrow b' - v'; v' \leftarrow v''$ ;
9         |  $y_u \leftarrow \lfloor \frac{a'u'}{b'} \rfloor; y_v \leftarrow \lfloor \frac{a'v'}{b'} \rfloor$ ;
10        | Si  $y_u = y_v$  alors
11          | /* Le reste minimum est connu */
12          |  $mini \leftarrow \lfloor \frac{a'u'}{b'} \rfloor$ ;
13          |  $break$  /* Arrêt forcé */
14          | ;
15          |  $a_t \leftarrow a'; b_t \leftarrow b'; u_t \leftarrow u'; v_t \leftarrow v'$ ;
16          |  $a' \leftarrow \lfloor \frac{-b_t}{a_t} \rfloor$ ;
17          |  $b' \leftarrow a_t$ ;
18          |  $u' \leftarrow 1 + \lfloor \frac{a_t(u_t-1)}{b_t} \rfloor; v' \leftarrow \lfloor \frac{a_t v_t}{b_t} \rfloor$ ;

```

---

---

**Algorithme 2 : ResteMaximal** (Entrées :  $a, b, c, u, v, x_0, y_0, pgcd$ . Sortie :  $maxi$ )

---

```

/* a,b,c : caractéristiques de la droite; u,v : extrémités du
   sous-segment;  $x_0, y_0$  : coefficients de Bézout de a et b; pgcd :
   pgcd de a et b calculé en même temps que  $x_0$  et  $y_0$ ; maxi :
   reste maximal */
1 début
2   Si  $b - 1$  est dans l'intervalle alors
3     |  $maxi \leftarrow b - 1$ ;
4   sinon
5     |  $accum \leftarrow 0$ ;
6     |  $a' \leftarrow a$ ;  $b' \leftarrow b$ ;  $u' \leftarrow u$ ;  $v' \leftarrow v$ ;
7     | Tant que VRAI faire
8     |   Si  $2a' > b'$  alors
9     |     |  $a' \leftarrow b' - a'$ ;  $v'' \leftarrow b' - u'$ ;  $u' \leftarrow b' - v'$ ;  $v' \leftarrow v''$ ;
10    |     |  $y_u \leftarrow \lfloor \frac{a'u'}{b'} \rfloor$ ;  $y_v \leftarrow \lfloor \frac{a'v'}{b'} \rfloor$ ;
11    |     | Si  $y_u = y_v$  alors
12    |     |   /* Le reste maximum est connu */
13    |     |    $maxi \leftarrow accum + \lfloor \frac{a'v'}{b'} \rfloor$ ;
14    |     |    $break$  /* Arrêt forcé */
15    |     |   ;
16    |     |  $a_t \leftarrow a'$ ;  $b_t \leftarrow b'$ ;  $u_t \leftarrow u'$ ;  $v_t \leftarrow v'$  ;
17    |     |  $a' \leftarrow \lfloor \frac{-b_t}{a_t} \rfloor$ ;  $b' \leftarrow a_t$ ;
18    |     |  $u' \leftarrow 1 + \lfloor \frac{a_t u_t}{b_t} \rfloor$ ;  $v' \leftarrow \lfloor \frac{a_t(v_t+1)}{b_t} \rfloor$ ;
19    |     |  $accum \leftarrow accum + b_t - a_t$ ;

```

---

## 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

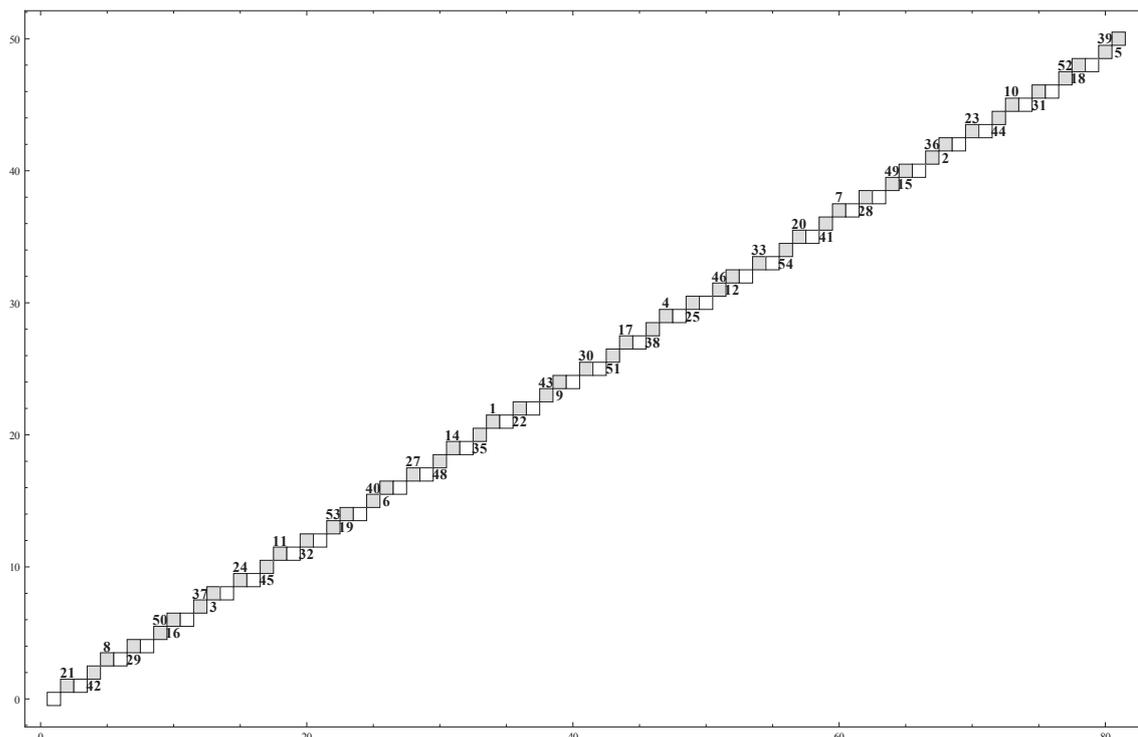


FIGURE 2.10 – Restes arithmétiques de  $\zeta_0$ .

- $\zeta_0 = \zeta'_0 = \mathcal{R}_{55,89,0}(1, 88)$  ;
- Comme on avait  $2 \times 55 > 89$  alors on applique d'abord le lemme 2.3.3 :  
 $\zeta_1 = \mathcal{R}_{34,89,0}(-88, -1)$ .  
 On peut remarquer que  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont exactement les inverses les unes des autres mais que  $\zeta_0$  a des paliers de taille 1 et 2, tandis que  $\zeta_1$  a des paliers de taille 2 et 3. Les débuts et fins de paliers restent les mêmes ;

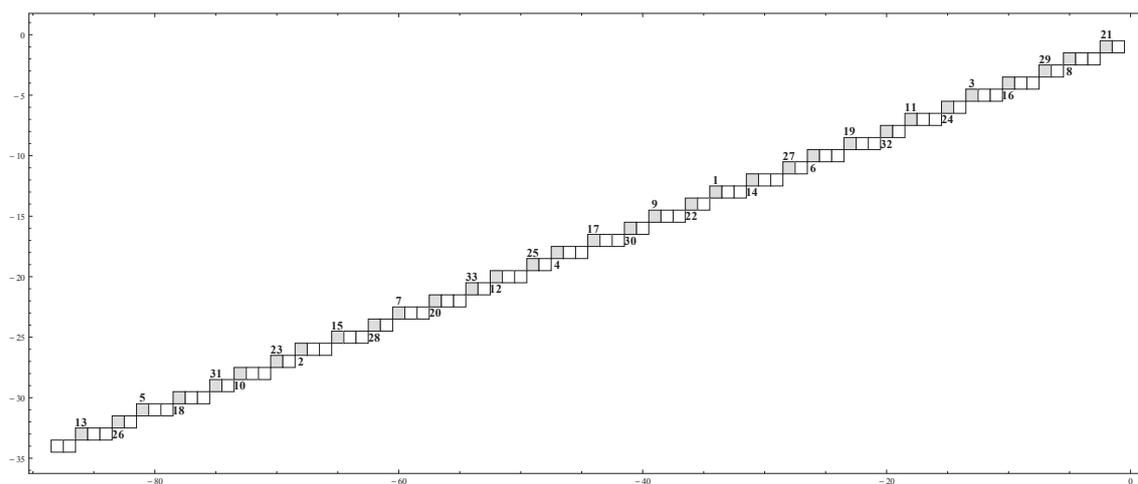


FIGURE 2.11 – Restes arithmétiques de  $\zeta_1$ .

- Maintenant nous commençons à réduire la taille des suites  $\zeta_2 = \mathcal{R}_{13,34,0}(-33, -1)$ .  
 Les nouveaux paramètres sont :  $\left\{ \frac{-89}{34} \right\} = 13$ ,  $u' = 1 + \left\lfloor \frac{34*(-34)}{89} \right\rfloor = -33$  et  
 $v' = \left\lfloor \frac{34*(-1)}{89} \right\rfloor = -1$ . On remarque que ce sont les valeurs en début de paliers

qui forment cette nouvelle suite (bien sûr sauf le début du palier incomplet 34, 68);

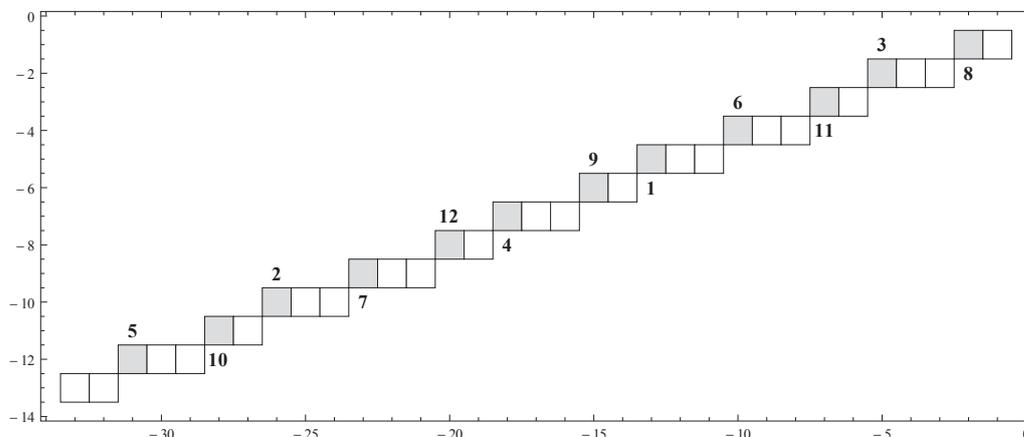


FIGURE 2.12 – Restes arithmétiques de  $\zeta_2$ .

- $\zeta_3 = \mathcal{R}_{5,13,0}(-12, -1)$ .

Les nouveaux paramètres sont :  $\left\{ \frac{-34}{13} \right\} = 5$ ,  $u' = 1 + \left\lfloor \frac{13*(-13)}{34} \right\rfloor = -4$  et  $v' = \left\lfloor \frac{13*(-1)}{34} \right\rfloor = -1$ . On remarque que ce sont les valeurs en début de paliers qui forment cette nouvelle suite (sauf le début du palier incomplet 13, 26);

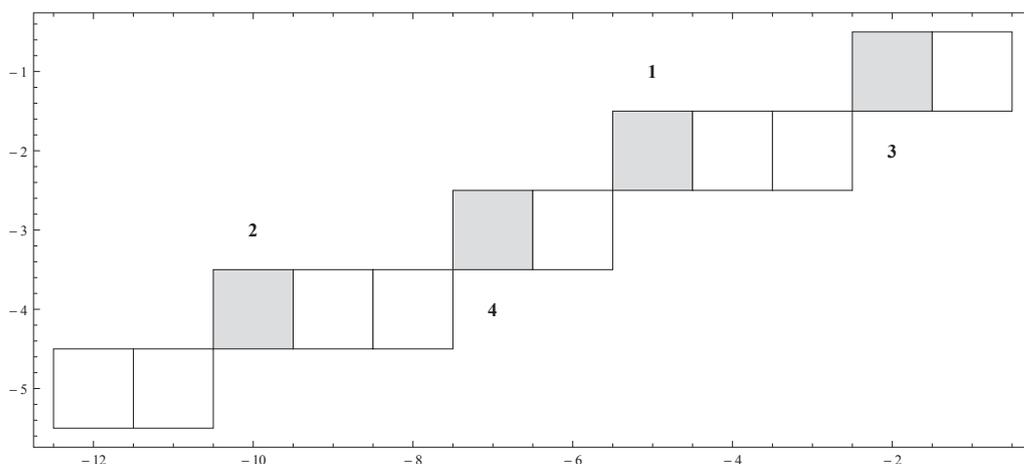


FIGURE 2.13 – Restes arithmétiques de  $\zeta_3$ .

- $\zeta_4 = \mathcal{R}_{2,5,0}(-4, -1)$ ;
- $\zeta_5 = \mathcal{R}_{1,2,0}(-1, -1)$ . Nous avons maintenant la valeur minimale dans l'intervalle;
- $\zeta'_6 = \mathcal{R}_{1,1,0}(0, 0) = 87 + (2-1) + \{0\}$ . Nous avons maintenant la valeur maximale dans l'intervalle qui est la valeur d'accumulation plus la dernière valeur, dans notre exemple  $0 + 88$ .

**Exemple 2.3.3.** Dans la recherche du maximum de la suite de reste arithmétique  $\zeta = \mathcal{R}_{55,89,0}(1, 88) = \left\{ \left\{ \frac{55x}{89} \right\}; 1 \leq x \leq 88 \right\}$  on a les étapes suivantes. Dans l'exemple, on pourrait dire directement que le reste arithmétique 88 appartient à la suite et

### 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

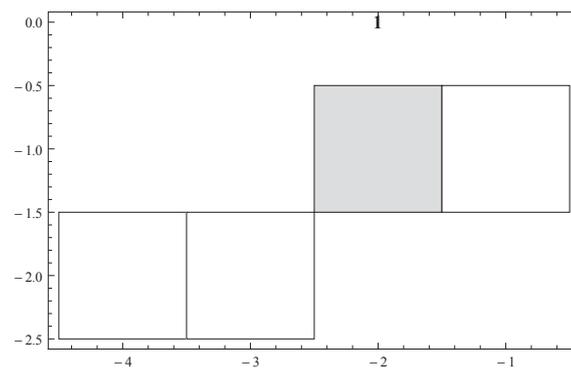


FIGURE 2.14 – Restes arithmétiques de  $\zeta_4$ .

nous arrêter là mais, pour l'exemple, nous allons présenter les suites construites successivement. On appelle  $\zeta'_i$  les suites maximales :

- $\zeta'_0 = \mathcal{R}_{55,89,0}(1, 88)$

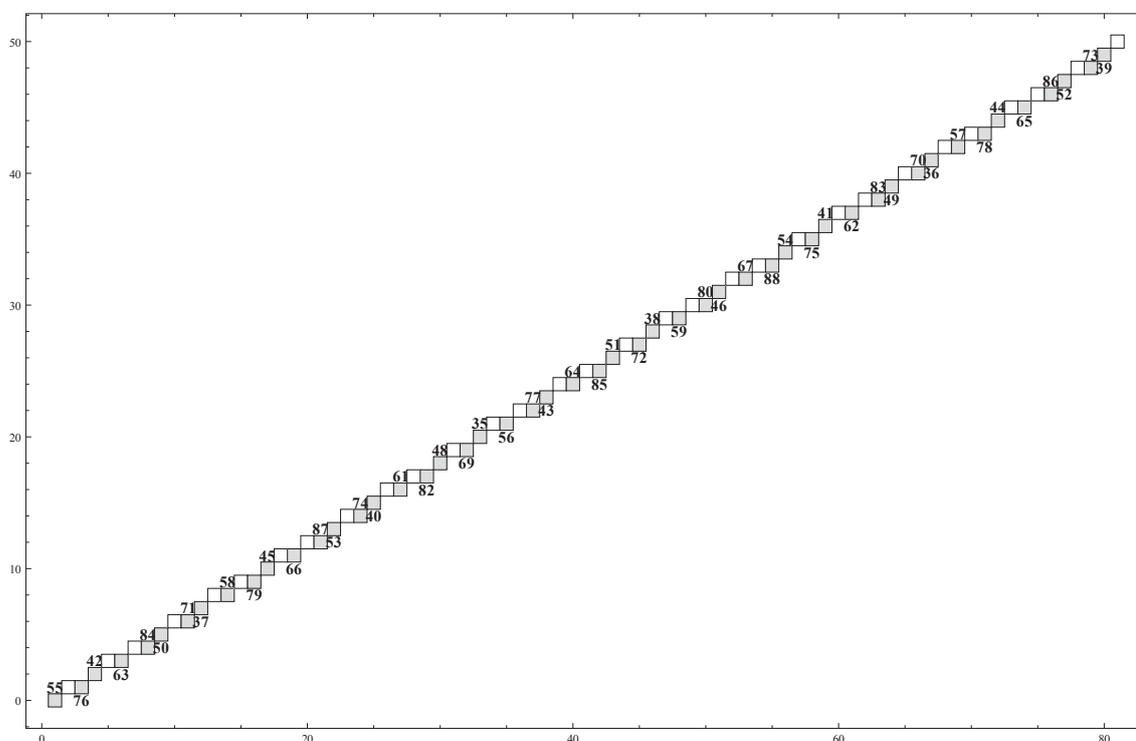


FIGURE 2.15 – Restes arithmétiques de  $\zeta'_0$ .

- Comme on avait  $2 \times 55 > 89$  alors on applique d'abord le lemme 2.3.3 :  $\zeta'_1 = \mathcal{R}_{34,89,0}(-88, -1)$ .  
On peut remarquer que  $\zeta'_0$  et  $\zeta'_1$  sont exactement les inverses les unes des autres mais que  $\zeta'_0$  ont des paliers de taille 1 et 2, tandis que  $\zeta'_1$  ont des paliers de taille 2 et 3. Les débuts et fins de paliers restent les mêmes ;
- $\zeta'_2 = \mathcal{R}_{13,34,0}(-33, 0)$ .  
La suite maximale est obtenue par l'ajout d'une valeur d'accumulation (dans l'exemple  $89 - 34 = 55$ ) et la suite de mêmes caractéristiques que  $\zeta_2$ . Les extrémités de l'intervalle peuvent changer (dans l'exemple on a  $[-33, 0]$  pour  $\zeta'_2$  et  $[-33, -1]$  pour  $\zeta_2$ ) ;

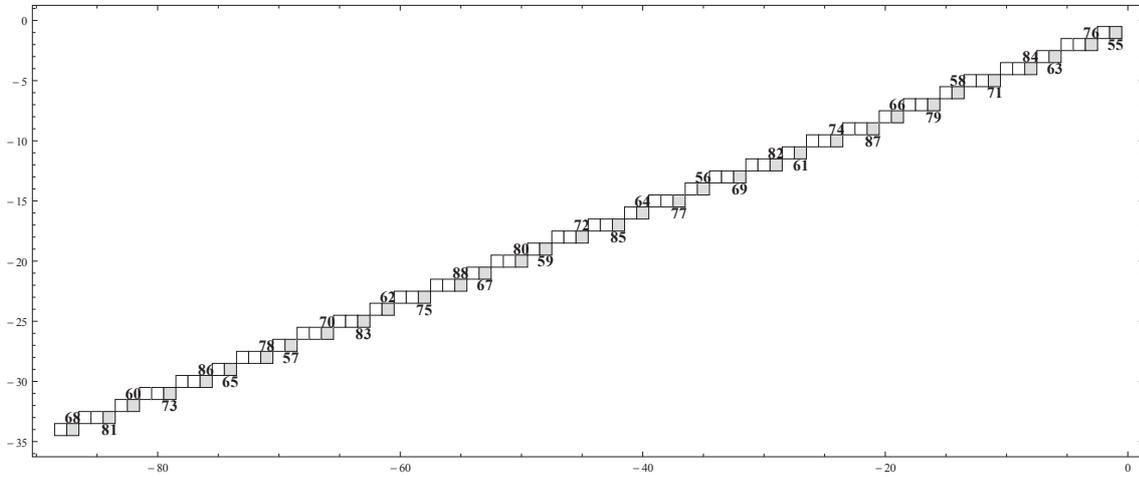


FIGURE 2.16 – Restes arithmétiques de  $\zeta'_1$ .

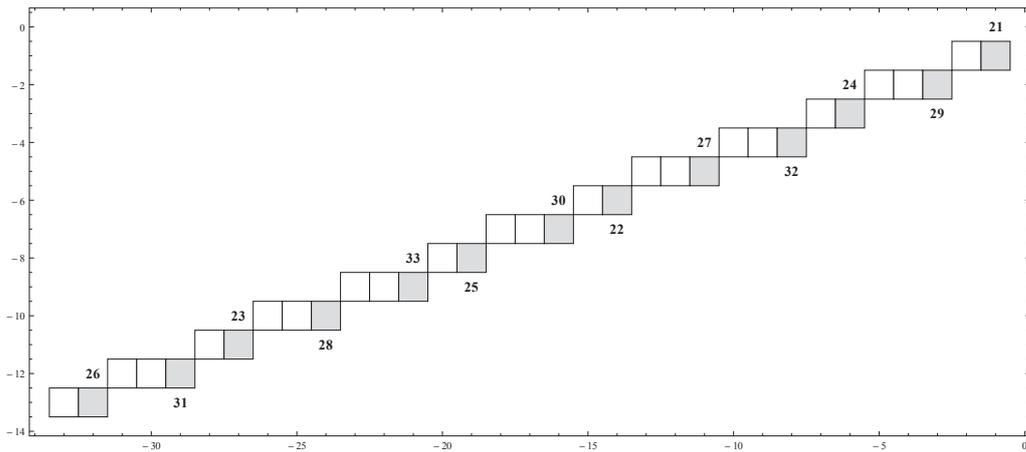


FIGURE 2.17 – Restes arithmétiques de  $\zeta'_2$ .

### 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

- $\zeta'_3 = \mathcal{R}_{5,13,0}(-12, 0)$ . La valeur d'accumulation est maintenant  $55 + (34 - 13) = 76$  ;

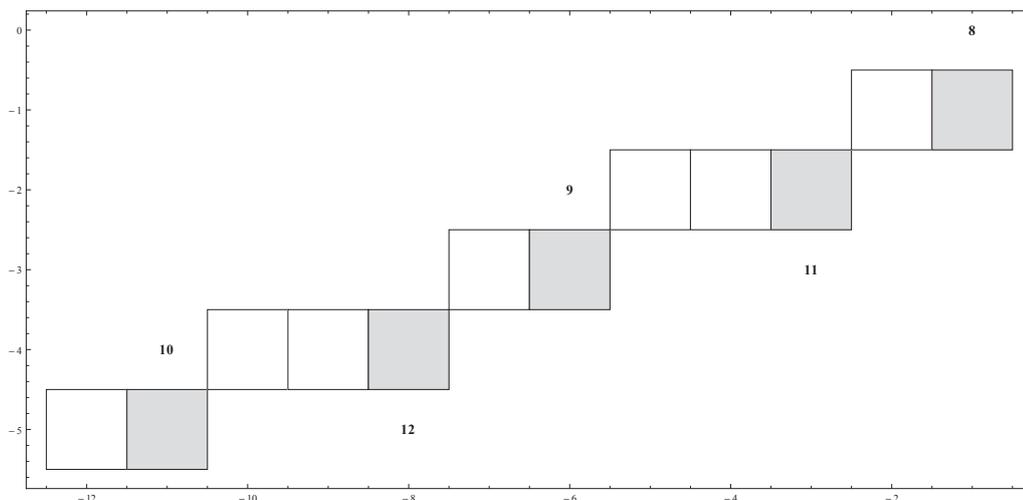


FIGURE 2.18 – Restes arithmétiques de  $\zeta'_3$ .

- $\zeta'_4 = \mathcal{R}_{2,5,0}(-4, 0)$ . La valeur d'accumulation est maintenant  $55 + 21 + (13 - 5) = 84$  ;

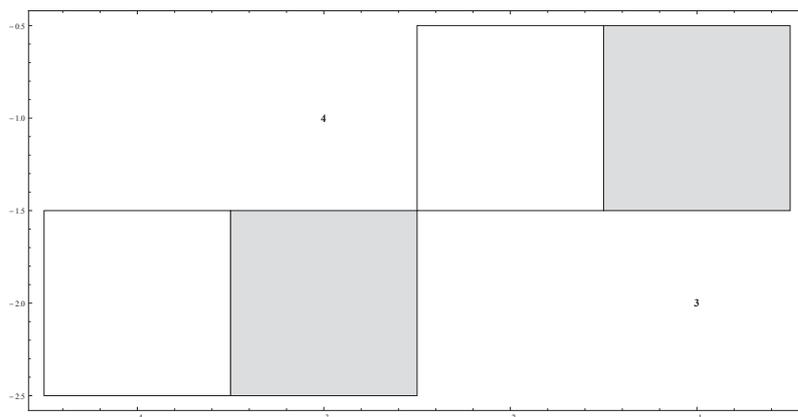


FIGURE 2.19 – Restes arithmétiques de  $\zeta'_4$ .

- $\zeta'_5 = \mathcal{R}_{1,2,0}(-1, 0)$ . Nous avons maintenant la valeur maximale contrairement à la suite minimale. La valeur d'accumulation est maintenant  $84 + (5 - 2) = 87$  ;
- $\zeta'_6 = \mathcal{R}_{1,1,0}(0, 0) = 87 + (2 - 1) + \{0\}$ . Nous avons maintenant la valeur maximale dans l'intervalle qui est la valeur d'accumulation plus la dernière valeur, dans notre exemple  $0 + 88$ .

#### 2.3.5 Algorithme principal de reconnaissance de sous-segment

L'algorithme principal calcule les points de restes arithmétiques minimal et maximal sur le sous-segment à partir des caractéristiques de la droite infinie. Ces deux points constituent des points d'appuis par rapport aux caractéristiques à calculer. Puis en fonction des configurations de ces deux points, l'algorithme détermine le

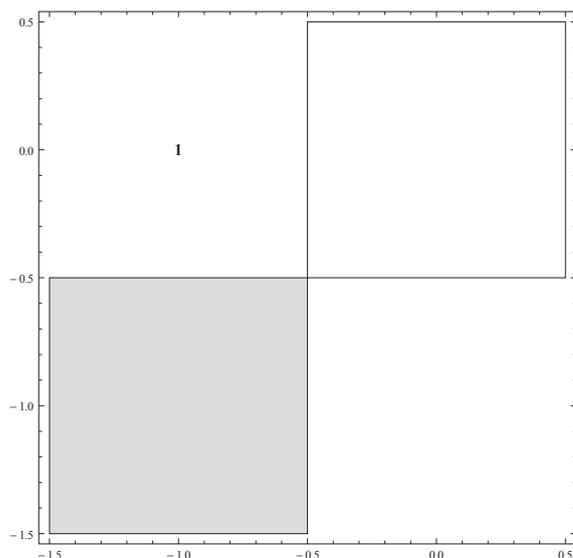


FIGURE 2.20 – Restes arithmétiques de  $\zeta'_5$ .

troisième point d'appui. Enfin, avec trois points d'appui, il détermine les caractéristiques du sous-segment.

### Complexité de l'algorithme

**Proposition 2.3.1.** *La recherche du minimum (respectivement du maximum) d'une suite de restes arithmétiques dans un intervalle  $[u, v]$  a une complexité au pire de  $O(\log(\min(a, b - a)))$ .*

*Démonstration.* Dans la première étape nous remplaçons une suite de  $v - u$  restes arithmétiques par une suite de  $\min(a, b - a)$  restes arithmétiques. Ainsi à chaque prochaine étape nous divisons le nombre de valeurs dans la suite de restes arithmétiques par au moins 2 (lemme 2.3.3).  $\square$

La proposition 2.3.1 est une estimation du temps de calcul du reste arithmétique minimal ou maximal de la suite de restes arithmétiques. Pour la complexité globale de l'algorithme de reconnaissance, il faut prendre en compte plus de détails. En effet, notre approche a besoin des coefficients de Bézout des paramètres  $a$  et  $b$  de la droite discrète pour certains calculs comme la détermination de l'abscisse d'un reste (minimal ou maximal). Comme la complexité de l'algorithme d'Euclide étendu qui permet de déterminer ces coefficients, préempte la complexité de l'algorithme de calcul du reste minimal ou maximal, la complexité globale de l'algorithme de reconnaissance basée sur notre approche sera majorée par la complexité de l'algorithme d'Euclide étendu (voir la Proposition 2.3.2).

Néanmoins, il peut avoir plusieurs intervalles qui contiennent les valeurs de restes arithmétiques 0 ou  $b - 1$  et par conséquent des étapes de la recherche de reste minimal ou maximal se font en temps constant. Nous pensons que la complexité au pire de notre approche est le triple de celle de l'algorithme d'Euclide étendu telle que proposée (d'où la Proposition 2.3.2).

---

**Algorithme 3** : ReconnaissanceDSS(Entrées :  $a, b, c, u, v, x_0, y_0, pgcd$ . Sorties :  $\alpha, \beta, \mu$ )

---

```

/* a,b,c : caractéristiques de la droite; u,v : extrémités du
   sous-segment;  $x_0, y_0$  : coefficients de Bézout de a et b; pgcd :
   pgcd de a et b calculé en même temps que  $x_0$  et  $y_0$ ;  $\alpha, \beta, \mu$  :
   caractéristiques du sous-segment */
1 début
2   Si Sous-Segment est vertical alors
3     |  $(\alpha, \beta, \mu) \leftarrow (1, 0, u)$ ;
4     | break ;
5   Si Sous-Segment est horizontal alors
6     |  $(\alpha, \beta, \mu) \leftarrow (0, 1, y_u)$ ;
7     | break ;
8    $min1 \leftarrow ResteMinimal(a, b, c, u, v, x_0, y_0, pgcd)$ ;
9    $max1 \leftarrow ResteMaximal(a, b, c, u, v, x_0, y_0, pgcd)$ ;
10   $indmin1 \leftarrow CalculIndcice(a, b, c, min1, y_0)$ ;
11   $indmax1 \leftarrow CalculIndcice(a, b, c, max1, y_0)$ ;
12   $ymin1 \leftarrow CalculY(a, b, c, min1)$ ;
13   $ymax1 \leftarrow CalculY(a, b, c, max1)$ ;
14  Si  $Max(v - indmin, indmin - u) \geq Max(v - indmax, indmax - u)$  alors
15    | Si  $v - indmin1 > indmin1 - u$  alors
16    | |  $min2 \leftarrow ResteMinimal(a, b, c, indmin1 + 1, v, x_0, y_0, pgcd)$ ;
17    | | sinon
18    | | |  $min2 \leftarrow ResteMinimal(a, b, c, u, indmin1 - 1, x_0, y_0, pgcd)$ ;
19    | | |  $indmin2 \leftarrow CalculIndcice(a, b, c, min2, y_0)$ ;
20    | | |  $ymin2 \leftarrow CalculY(a, b, c, min2)$ ;
21    | | |  $(\alpha, \beta, \mu) \leftarrow (|ymin2 - ymin1|, |indmin2 - indmin1|, |ymin2 -$ 
    | | |  $ymin1| \times indmin1 - |indmin2 - indmin1| \times ymin1)$ ;
22    | | sinon
23    | | Si  $v - indmax1 > indmax1 - u$  alors
24    | | |  $max2 \leftarrow ResteMaximal(a, b, c, indmax1 + 1, v, x_0, y_0, pgcd)$ ;
25    | | | sinon
26    | | | |  $max2 \leftarrow ResteMaximal(a, b, c, u, indmax1 - 1, x_0, y_0, pgcd)$ ;
27    | | | |  $indmax2 \leftarrow CalculIndcice(a, b, c, max2, y_0)$ ;
28    | | | |  $ymax2 \leftarrow CalculY(a, b, c, max2)$ ;
29    | | | |  $(\alpha, \beta, \mu) \leftarrow (|ymax2 - ymax1|, |indmax2 - indmax1|, |ymax2 -$ 
    | | | |  $ymax1| \times indmin1 - |indmax2 - indmax1| \times ymin1)$ ;

```

---

**Proposition 2.3.2.** *La reconnaissance de sous-segment discret d'une droite discrète de caractéristiques  $\min(a, b, c)$ , dans le premier octant, par l'Algorithme 3 a une complexité au pire cas de  $O(\log(a))$ .*

*Démonstration.* La preuve est triviale. Il s'agit de la complexité de l'algorithme d'Euclide étendu qui est définie par le théorème de Lamé [Knuth 97].  $\square$

Il faut aussi noter que la taille de  $b$  n'est pas un facteur déterminant dans la rapidité du calcul du minimum (respectivement maximum). En effet la suite des restes arithmétiques de début de palier d'une suite  $\mathcal{R}_{a,b,0}(u, v)$  est la même dans  $\mathcal{R}_{\min(a, b-a), \min(a, b-a) + \{\frac{b}{\min(a, b-a)}\}, 0}(u', v')$  pour un  $u'$  et un  $v'$  à déterminer précisément. Cela correspond à la première phase de l'algorithme de recherche de minimum et suffit à montrer que seule la taille  $y_v - y_u$  (qu'on peut majorer par  $a$  dans une configuration où il n'y a pas 3 points d'appuis de la droite infinie sur le sous-segment) importe dans le calcul de la complexité des algorithmes de recherche de reste minimal ou maximal.

Pour montrer ce comportement logarithmique, par rapport à  $y_v - y_u$ , de notre approche nous avons fait deux expérimentations dont les résultats sont représentés par les courbes de la Figure 2.21 et de la Figure 2.22 respectivement. Dans la première, en suivant le même protocole que celui dans [Sivignon 12], on remarque qu'il y a assez d'irrégularités sur la courbe. Cela est dû au fait que, quand les caractéristiques sont choisies de façon aléatoire, il arrive souvent que les sous-segments à reconnaître possèdent des points d'appuis de la droite infinie en entrée. Dans ce cas notre approche a une ou plusieurs étapes qui seront faites en temps constant. Mais, comme le montre la deuxième courbe, lorsque nous choisissons des caractéristiques de telle sorte que les sous-segments à reconnaître ne possèdent pas de point d'appuis de la droite infinie et que le nombre de paliers du sous-segment va en s'augmentant l'allure est logarithmique.

### 2.3.6 Comparaison avec les approches précédentes

L'algorithme principale (Algorithme 3) a été implémenté en C++. Ensuite la librairie open-source DGTAL [DGTAL 14] a été utilisée afin d'effectuer des comparaisons de notre algorithme avec l'Algorithme *ReversedSmartDSS* de Saïd et Lachaud [Lachaud 13] et celui de Sivignon [Sivignon 12].

Dans un premier temps, nous avons suivi le même protocole que celui proposé dans [Sivignon 12] sur un ordinateur de processeur Intel Dual Core de fréquence 2.10 GHz. Dans ce cadre nous avons d'abord choisi une valeur maximale  $N$  que peut prendre  $b$ . Puis nous avons fixé une valeur maximale pour la longueur  $n$  du sous-segment discret. Ensuite nous avons choisi de façon aléatoire les paramètres  $a$  et  $b$  tels que  $a < b \leq N$ , et le décalage affine  $c$  aussi bien que l'abscisse du premier point du sous-segment discret. Chaque comparaison est faite avec 10000 paramètres aléatoires. Et pour chaque comparaison, une vérification que les algorithmes trouvent les mêmes caractéristiques est faite avant de calculer le temps d'exécution moyen. La Figure 2.23 et la Figure 2.24 montrent les résultats de la comparaison de notre algorithme avec ceux dans [Saïd 11, Sivignon 12] pour une valeur de  $N = 10^9$  et  $N = 10^6$  respectivement. Dans ces figures, nous faisons varier la taille  $n$  du sous-segment de la forme  $10 \times 2^k$  dans l'intervalle  $[10, N]$ . Nous constatons que notre algorithme

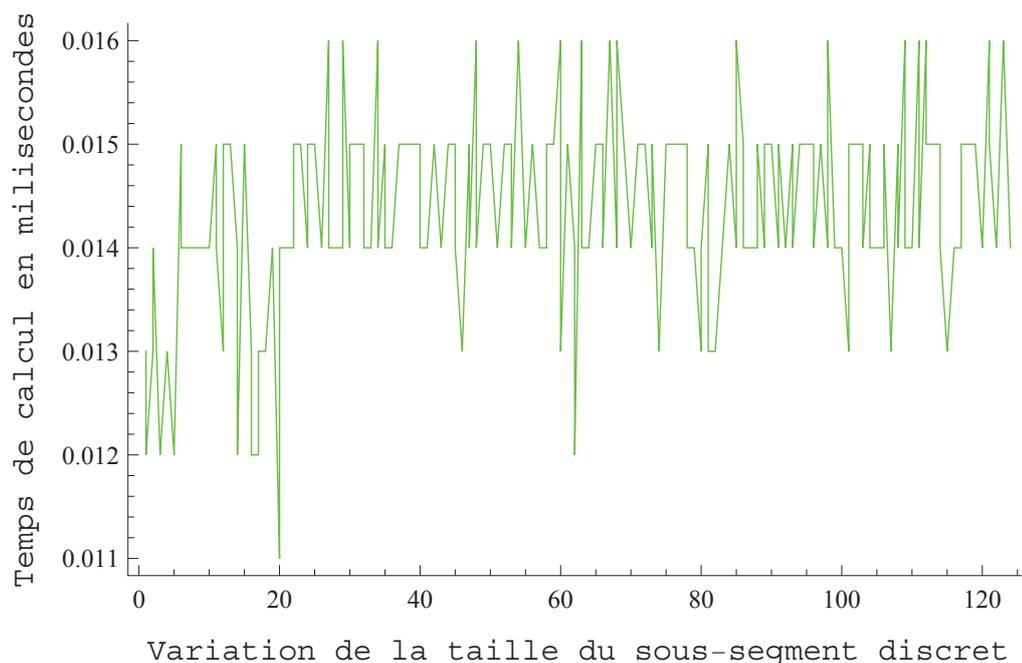


FIGURE 2.21 – Caractéristiques aléatoires pour la droite discrète  $b \leq 1000001$ ,  $a < b$ , et  $\mu \leq a + b$ . La courbe montre le temps de calcul en fonction de la distance en ordonnées ( $y_v - y_u$ ).

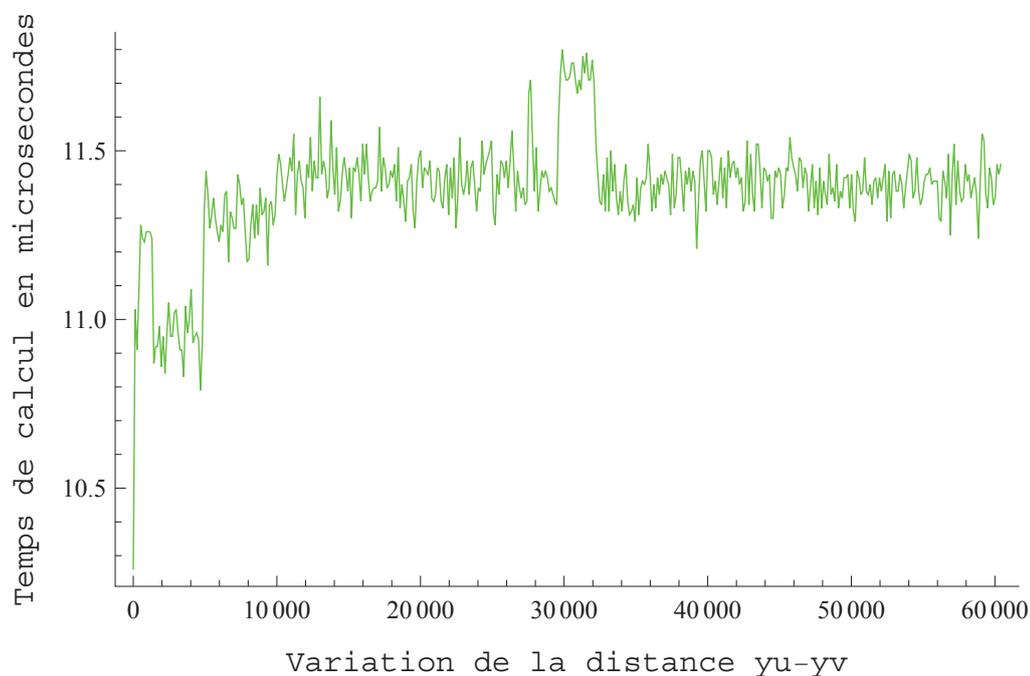


FIGURE 2.22 – Droite discrète de caractéristiques  $a = 300007$ ,  $b = 1000001$  et  $\mu = 0$ . On considère des sous-segments ne contenant pas de points d'appuis de la droite infinie. La courbe montre le temps de calcul en fonction de la distance en ordonnées ( $y_v - y_u$ ).

(Ouattara et al.) est relativement plus rapide que les deux autres algorithmes (Sivignon, Saïd et al.) quelque soit la taille  $n$  du sous-segment discret. Ces premières figures donnent une idée de comment ces algorithmes se comportent sur de grandes valeurs de  $b$ .

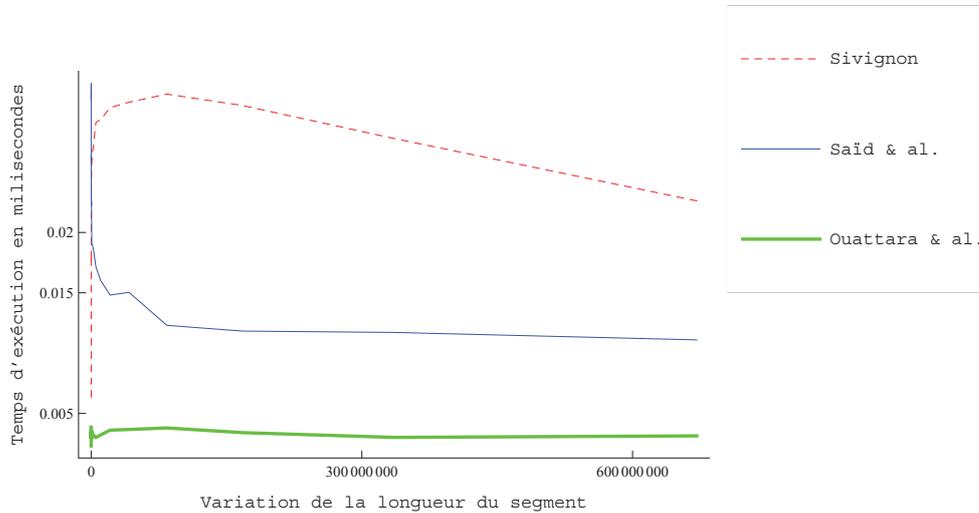


FIGURE 2.23 – La valeur maximale de  $b$  est  $10^9$ . Les longueurs de  $S$  sont données.

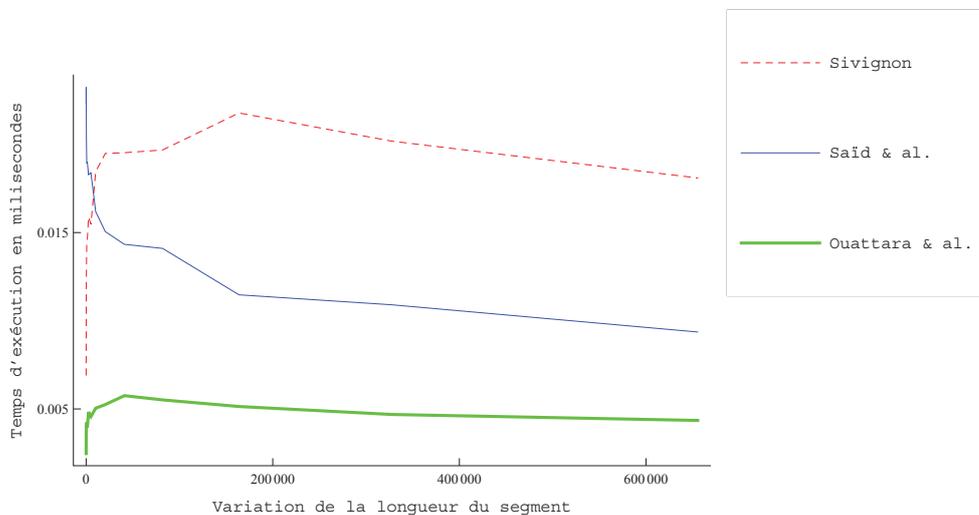


FIGURE 2.24 – La valeur maximale de  $b$  est  $10^6$ . Les longueurs de  $S$  sont données.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à vérifier si les tendances des comparaisons précédentes se confirmaient avec des petites valeurs de  $b$  (en fonction des tailles des images classiques utilisées dans le domaine). Dans la Figure 2.25, la comparaison est faite pour la valeur  $N = 10007$  en variant la taille  $n$  du sous-segment de la forme  $n_i + 10$  où  $n_i$  est la taille à l'étape précédente. Nous constatons que notre algorithme est toujours plus rapide que les deux autres algorithmes quelque soit la taille  $n$  du

## 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

sous-segment discret. Nous remarquons aussi que les courbes des deux autres algorithmes s'intersectent ce qui confirme ce que a montré Sivignon dans [Sivignon 12], à savoir que son algorithme, bien que moins efficace dans le cadre général, est plus efficace que celui de Saïd et al. sur des sous-segments discrets de petite taille  $n$ . La Figure 2.25 n'est pas un simple zoom de la Figure 2.23 et ou de la Figure 2.24 car les complexités des algorithmes sont fonction de la taille du sous-segment  $v - u$  (comme le montre les figures) mais aussi de  $a$  (pour le calcul de coefficients de Bézout) qui est contraint par  $b$  dans les tests.

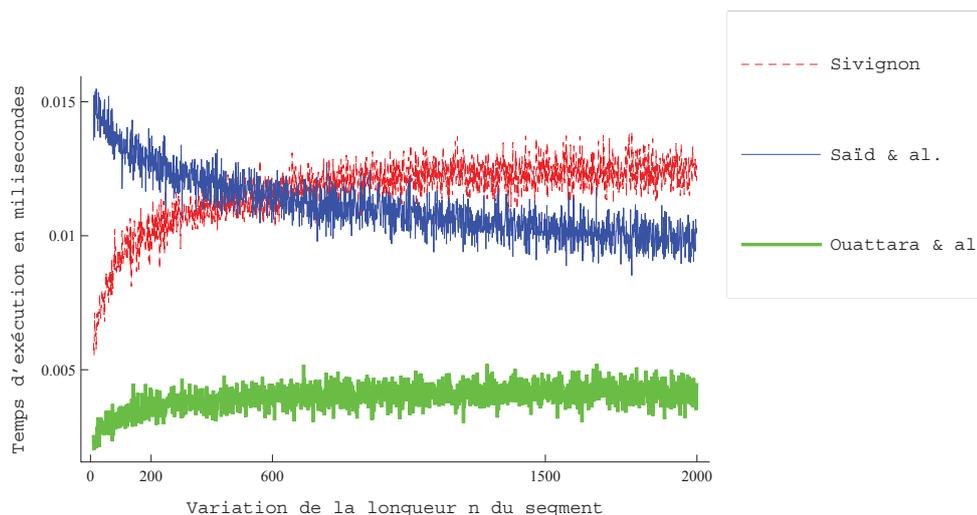


FIGURE 2.25 – La valeur maximale de  $b$  est 10007. Les longueurs de  $S$  sont données.

### 2.3.7 Optimisation : mutualisation des recherches des restes minimum et maximum

L'Algorithme 3 est plus rapide si on a en entrée les coefficients de Bézout des paramètres  $a$  et  $b$  de la droite infinie. Mais de façon générale on peut améliorer le temps de calcul en calculant dans une seule boucle les restes maximaux et minimaux candidats. Nous présentons comment faire cela dans l'Algorithme 4.

Cet algorithme calcule dans une seule boucle les restes minimal ( $mini$ ) et maximal ( $maxi$ ) ainsi que les deuxièmes restes minimal et maximal candidats à gauche ( $mini_L$  et  $maxi_L$ ) et à droite ( $mini_R$  et  $maxi_R$ ). À la sortie de cet algorithme on peut calculer en temps constant les trois points d'appuis. Pour commencer, nous considérons  $P_D(mini)$  et  $P_D(maxi)$  comme des points d'appuis supérieur et inférieur du sous-segment. Puis, en fonction de la distance la plus longue entre  $\|P_D(mini)P_D(u)\|$ ,  $\|P_D(mini)P_D(v)\|$ ,  $\|P_D(maxi)P_D(u)\|$  et  $\|P_D(maxi)P_D(v)\|$ ,  $P_D(mini_L)$  ou  $P_D(maxi_L)$  ou  $P_D(mini_R)$  ou encore  $P_D(maxi_R)$  est un troisième point d'appui (lignes 14 à 29 de l'Algorithme 3).

L'Algorithme 3 ne prend pas en compte le fait qu'il puisse avoir déjà des points d'appuis de la droite infinie sur le sous-segment mais l'algorithme principale (Algorithme 3) peut être modifié pour en tenir compte. C'est à dire qu'on teste d'abord (en temps constant) si le sous-segment contient un point d'appui de la droite infinie :

---

**Algorithme 4** : Restes(Entrées :  $a, b, c, u, v, x_0, y_0, pgcd$ . Sortie :  $miniL, mini, miniR, maxiL, maxi, maxiR$ )

---

```

/* a,b,c : caractéristiques de la droite; u,v : extrémités du
   sous-segment;  $x_0, y_0$  : coefficients de Bézout de a et b; pgcd :
   pgcd de a et b calculé en même temps que  $x_0$  et  $y_0$ ; mini :
   reste minimal, miniR : reste minimal à droite de mini,
   miniL : reste minimal à gauche de mini, maxi : reste maximal,
   maxiR : reste maximal à droite de maxi et maxiL : reste
   maximal à gauche de maxi */
1 début
2   accum ← 0;
3   a' ← a; b' ← b; u' ← u; v' ← v; u1 ← u; v1 ← v;
4   Tant que VRAI faire
5     Si 2a' > b' alors
6       [ a' ← b' - a'; v'' ← b' - u'; u' ← b' - v'; v' ← v'';
7       yu ← ⌊ $\frac{a'u'}{b'}$ ⌋; yv ← ⌊ $\frac{a'v'}{b'}$ ⌋;
8       Si yu = yv alors
9         maxi ← accum + ⌊ $\frac{a'v_1}{b'}$ ⌋;
10        mini ← ⌊ $\frac{a'u'}{b'}$ ⌋;
11        maxiL ← accum + ⌊ $\frac{a'(v_1-1)}{b'}$ ⌋;
12        miniR ← ⌊ $\frac{a'(u'+1)}{b'}$ ⌋;
13        maxiR ← accum - bt + at + ⌊ $\frac{a_t(v_0-1)}{b_t}$ ⌋;
14        miniL ← ⌊ $\frac{a_t(u_t+1)}{b_t}$ ⌋;
15        break ;
16      at ← a'; bt ← b'; ut ← u'; vt ← v' ;
17      a' ← ⌊ $\frac{-b_t}{a_t}$ ⌋; b' ← at;
18      u' ← 1 + ⌊ $\frac{a_t u_t}{b_t}$ ⌋; v' ← ⌊ $\frac{a_t(v_t+1)}{b_t}$ ⌋;
19      u1 ← ⌊ $\frac{a_t u_t}{b_t}$ ⌋; v0 ← v1;
20      v1 ← ⌊ $\frac{a_t(v_t+1)}{b_t}$ ⌋;
21      accum ← accum + bt - at;

```

---

- Si le sous-segment ne contient aucun point d'appui de la droite infinie alors on utilise l'Algorithme 4 pour calculer les restes minimaux et maximaux candidats (à gauche et à droite). L'Algorithme 3 est juste modifié pour appeler l'Algorithme 4 une seule fois au lieu de faire trois appels aux Algorithmes 1 et 2;
- Si le sous-segment contient un point d'appui inférieur (supérieur) de la droite infinie on calcule le reste maximal (minimal) dans l'intervalle le plus long qui sépare ce point des extrémités. On n'a pas besoin là de l'Algorithme 4;
- Si le sous-segment contient un point d'appui inférieur et un point d'appui supérieur de la droite infinie, on les considère comme les points de restes maximal et minimal. Et en fonction de l'intervalle le plus long qui sépare ces deux points des extrémités, on calcule le point de reste minimal ou le point de reste maximal. On n'a pas besoin encore là de l'Algorithme 4. Mieux dans cette configuration on peut même déterminer, en temps constant, les caractéristiques du sous-segment discret (voir la Sous-Section 2.3.8);
- Si le sous-segment contient 3 points d'appuis, on a déjà les caractéristiques du sous-segment discret.

### 2.3.8 Cas particulier d'un sous-segment ayant deux points d'appuis de la droite

Dans cette sous-section, nous considérons un sous-segment discret  $\mathcal{S}$  d'une droite discrète  $\mathcal{D}$ , tel que  $\mathcal{S}$  possède exactement un point d'appui supérieur et un point d'appui inférieur de  $\mathcal{D}$ . C'est cette configuration ( $\mathcal{S}$  est alors à cheval entre deux *patterns* renversés de  $\mathcal{D}$ ) qui donne la complexité au pire de l'algorithme de reconnaissance proposé par Saïd et Lachaud [Saïd 11]. Dans la littérature il n'y a pas encore de méthode de calcul, pour ce cas, en temps constant. Nous proposons une approche pour faire le calcul en temps constant.

Notons  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les caractéristiques de  $\mathcal{S}$  et  $(a, b, \mu)$  ceux de  $\mathcal{D}$ . Notons aussi  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  les extrémités de  $\mathcal{S}$  avec  $x_A < x_B$  et  $y_A < y_B$ . Soient  $U(x_u, y_u)$  et  $L(x_l, y_l)$  des points d'appuis respectivement supérieur et inférieur de  $\mathcal{D}$  appartenant à  $\mathcal{S}$ . Le théorème suivant pose un système linéaire qui permet de calculer les caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathcal{S}$  :

**Théorème 2.3.6.** *Les caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$  d'un sous-segment discret  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{D}(a, b, \mu)$  d'extrémités  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  et contenant les points d'appuis supérieur  $U(x_u, y_u)$  et inférieur  $L(x_l, y_l)$  de  $\mathcal{D}$  sont :*

$$\begin{cases} \alpha = a + k(y_u - y_l - 1) \\ \beta = b + k(x_u - x_l + 1) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} k = \min \left[ \frac{\delta_x - b}{x_u - x_l + 1}, \frac{\delta_y - a}{y_u - y_l - 1} \right] & \text{si } x_u - x_l + 1 > 0 \\ k = \max \left[ \frac{\delta_x - b}{x_u - x_l + 1}, \frac{\delta_y - a}{y_u - y_l - 1} \right] & \text{si } x_u - x_l + 1 < 0 \\ \delta_x = \max [|x_u - x_A|, |x_u - x_B|, |x_l - x_A|, |x_l - x_B|] \\ \delta_y = \max [|y_u - y_A|, |y_u - y_B|, |y_l - y_A|, |y_l - y_B|] \end{cases}$$

où  $\delta_x$  et  $\delta_y$  représentent les distances maximales respectivement en abscisse et en ordonnée entre les points d'appuis  $U$  et  $L$  et les extrémités  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{S}$ .

Lorsque  $x_u - x_l + 1 = 0$ ,  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  et lorsque  $y_u - y_l - 1 = 0$  alors  $\alpha = 1$  et  $\beta$  prend les valeurs suivantes en fonction de  $\delta_x$  et  $\delta_y$  :

- Si  $\delta_y \geq 1$  alors
  - $\beta = \lceil \frac{a+b}{a} \rceil - 1$
  - ou  $\beta = \lfloor \frac{a+b}{a} \rfloor - 1$
- Sinon  $\beta = \delta_x$ .

*Démonstration.* La démonstration du Théorème 2.3.6 repose sur un système linéaire : nous définissons des contraintes sur  $(\alpha, \beta, \gamma)$  et nous résolvons ensuite le système linéaire qui en résulte.

Commençons par supposer que  $A$  et  $B$  sont sur des paliers distincts car sinon les caractéristiques de  $\mathcal{S}$  sont  $(0, 1, y_A)$  et il n'est plus nécessaire de continuer la reconnaissance. Cette hypothèse nous permet d'établir que :

$$\begin{cases} x_A < x_B \\ y_A < y_B \end{cases}$$

Par ailleurs pour que la configuration soit bien celle où  $\mathcal{S}$  est dans deux *patterns* renversés de  $\mathcal{D}$  il faut que les points d'appuis  $U$  et  $L$  ne se confondent pas aux extrémités  $A$  et  $B$ . C'est ce que nous formalisons par :

$$\begin{cases} x_A \leq x_u \leq x_B \\ y_A \leq y_u \leq y_B \\ x_A \leq x_l \leq x_B \\ y_A \leq y_l \leq y_B \\ U \neq A \\ U \neq B \\ L \neq A \\ L \neq B \end{cases}$$

$U$  et  $L$  sont des points d'appuis de  $\mathcal{D}$  appartenant à  $\mathcal{S}$ . D'après le Corollaire 2.3.1 (Page 47) ils sont également des points d'appuis lorsqu'on considère les caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Comme  $\mathcal{S}$  est un sous-segment discret minimal de caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , il contient un troisième point d'appui de sa droite minimale de caractéristiques  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (voir Chapitre 1, Section 1.4, Page 22). Ce qui implique qu'au moins une des assertions suivantes est vraie :

- $U_1(x_u + \beta, y_u + \alpha)$  est un nouveau point d'appui supérieur de  $\mathcal{S}$  ;
- $U_2(x_u - \beta, y_u - \alpha)$  est un nouveau point d'appui supérieur de  $\mathcal{S}$  ;
- $L_1(x_l + \beta, y_l + \alpha)$  est un nouveau point d'appui inférieur de  $\mathcal{S}$  ;
- $L_2(x_l - \beta, y_l - \alpha)$  est un nouveau point d'appui inférieur de  $\mathcal{S}$ .

Comme nous l'expliquons sur la Figure 2.8, ce troisième point d'appui se trouve sur la distance maximale séparant  $U$  et  $L$  des extrémités de  $\mathcal{S}$ . C'est ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} 1 \leq \beta \leq \delta_x \\ 1 \leq \alpha \leq \delta_y \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$\begin{cases} \delta_x = \max [|x_u - x_A|, |x_u - x_B|, |x_l - x_A|, |x_l - x_B|] \\ \delta_y = \max [|y_u - y_A|, |y_u - y_B|, |y_l - y_A|, |y_l - y_B|] \end{cases}$$

### 2.3 Nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret

Par ailleurs, nous pouvons réécrire les restes de  $U$  et  $L$  relativement à  $(\alpha, \beta, \gamma)$  afin d'obtenir une troisième contrainte entre  $\alpha$  et  $\beta$  (Équation 2.2) :

$$\begin{cases} \alpha x_u - \beta y_u = \gamma \\ \alpha x_l - \beta y_l = \gamma + \alpha + \beta - 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha x_l - \beta y_l = \alpha x_u - \beta y_u + \alpha + \beta - 1 \\ \Rightarrow \alpha(x_u - x_l + 1) - \beta(y_u - y_l - 1) = 1$$

d'où

$$\alpha(x_u - x_l + 1) - \beta(y_u - y_l - 1) = 1 \quad (2.2)$$

À partir des Équations 2.1 et 2.2 nous définissons les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  soient les caractéristiques de  $\mathcal{S}$  comme :

$$\begin{cases} 1 \leq \beta \leq \delta_x \\ 1 \leq \alpha \leq \delta_y \\ \alpha(x_u - x_l + 1) - \beta(y_u - y_l - 1) = 1 \end{cases}$$

Dans la suite, nous prouvons l'existence des paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma)$  du Théorème 2.3.6 en résolvant l'Équation 2.2 et en exhibant  $(\alpha, \beta)$ ,  $\gamma$  se déduisant facilement ensuite.

Pour résoudre l'Équation 2.2, nous avons besoin de connaître les signes des coefficients de  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces signes sont interdépendants comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 2.3.3.**  *$(x_u - x_l + 1)$  et  $(y_u - y_l - 1)$  sont soit tous positifs, soit tous négatifs et ne peuvent pas être tous nuls.*

*Démonstration.*  $(x_u - x_l + 1)$  et  $(y_u - y_l - 1)$  ne peuvent pas tous être nuls puisque  $\alpha(x_u - x_l + 1) - \beta(y_u - y_l - 1) = 1$ . Supposons que  $x_u - x_l + 1 > 0$  et  $y_u - y_l - 1 < 0$ .  $x_u - x_l + 1 > 0$  implique que le point d'appui supérieur est sur un palier au dessus du palier sur lequel se trouve le point d'appui inférieur tandis que  $y_u - y_l - 1 < 0$  implique le contraire. cela est donc impossible. De même  $x_u - x_l + 1 < 0$  et  $y_u - y_l - 1 > 0$  est impossible. Donc  $(x_u - x_l + 1)$  et  $(y_u - y_l - 1)$  sont toujours du même signe et ne peuvent pas être nuls en même temps.  $\square$

La résolution de l'Équation 2.2 se fait alors suivant les différents cas :

- Cas où  $x_u - x_l + 1 = 0$  Dans ce cas

$$\begin{aligned} -\beta(y_u - y_l - 1) = 1 &\Rightarrow \beta = \frac{1}{y_l - y_u - 1} \\ &\Rightarrow \beta = 1 \end{aligned}$$

On en déduit que  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  car  $\alpha \leq \beta$ .

- Cas où  $y_u - y_l - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \alpha(x_u - x_l + 1) = 1 &\Rightarrow \alpha = \frac{1}{x_u - x_l + 1} \\ &\Rightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

On a toujours  $1 \leq \beta \leq \delta_x$ , mais  $\beta$  se détermine facilement en fonction de  $\delta_x$  et  $\delta_y$  :

- Si  $\delta_y > 1$  alors il y a alors au moins un palier complet de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{S}$ . Par conséquent  $\beta$  est la taille d'un palier de  $\mathcal{D}$  (voir Chapitre 1, Sous-section 1.4.1, Page 22), c'est à dire que :

- $\beta = \lceil \frac{b}{a} \rceil$
- ou  $\beta = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$
- Sinon  $\beta = \delta_x$ .

- Cas où  $x_u - x_l + 1 \neq 0$  et  $y_u - y_l - 1 \neq 0$  Nous savons que  $U$  et  $L$  sont des points d'appuis de  $\mathcal{D}(a, b, \mu)$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\mu$  sont donc solution de l'Équation 2.2; c'est à dire que :  $a(x_u - x_l + 1) - b(y_u - y_l - 1) = 1$ .

Comme les solutions d'une équation diophantienne sont toutes congruentes entre elles, elles le sont à une solution particulière. Comme  $U$  et  $L$  sont des points d'appuis de  $\mathcal{D}$ ,  $(a, b, \mu)$  vérifie donc l'Équation 2.2 et constitue ainsi la solution particulière. Par conséquent :

$$\exists k \in \mathbb{Z}^* \mid \begin{cases} \alpha = a + k(y_u - y_l - 1) \\ \beta = b + k(x_u - x_l + 1) \end{cases}$$

Les contraintes de l'Équation 2.1 imposent de plus que :

$$\exists k \in \mathbb{Z}^* \mid \begin{cases} 1 \leq b + k(x_u - x_l + 1) \leq \delta_x \\ 1 \leq a + k(y_u - y_l - 1) \leq \delta_y \end{cases}$$

Suivant les signes de  $x_u - x_l + 1$  et  $y_u - y_l - 1$ , nous avons les deux cas suivants :

- Si  $x_u - x_l + 1 > 0$  ( et donc  $y_u - y_l - 1 > 0$  d'après la Proposition 2.3.3) alors :

$$\begin{cases} \frac{1-b}{x_u-x_l+1} \leq k \leq \frac{\delta_x-b}{x_u-x_l+1} \\ \frac{1-a}{y_u-y_l-1} \leq k \leq \frac{\delta_y-a}{y_u-y_l-1} \end{cases}$$

Nous en déduisons que  $k \in \left[ \max \left[ \frac{1-b}{x_u-x_l+1}, \frac{1-a}{y_u-y_l-1} \right], \min \left[ \frac{\delta_x-b}{x_u-x_l+1}, \frac{\delta_y-a}{y_u-y_l-1} \right] \right]$

Comme  $x_u - x_l + 1 > 0$ , et que  $\delta_x - b < 0$  et  $\delta_y - a < 0$  nous devons choisir

$k = \lfloor \min \left[ \frac{\delta_x-b}{x_u-x_l+1}, \frac{\delta_y-a}{y_u-y_l-1} \right] \rfloor$  pour avoir les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  optimales.

- Si  $x_u - x_l + 1 < 0$  ( et donc  $y_u - y_l - 1 < 0$  d'après la Proposition 2.3.3) alors :

$$\begin{cases} \frac{\delta_x-b}{x_u-x_l+1} \leq k \leq \frac{1-b}{x_u-x_l+1} \\ \frac{\delta_y-a}{y_u-y_l-1} \leq k \leq \frac{1-a}{y_u-y_l-1} \end{cases}$$

Ce qui implique que  $k \in \left[ \max \left[ \frac{\delta_x-b}{x_u-x_l+1}, \frac{\delta_y-a}{y_u-y_l-1} \right], \min \left[ \frac{1-b}{x_u-x_l+1}, \frac{1-a}{y_u-y_l-1} \right] \right]$ .

Comme  $x_u - x_l + 1 < 0$ , et que  $\delta_x - b < 0$  et  $\delta_y - a < 0$  nous devons choisir

$k = \lceil \max \left[ \frac{\delta_x-b}{x_u-x_l+1}, \frac{\delta_y-a}{y_u-y_l-1} \right] \rceil$  pour avoir les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  optimales.

Le Théorème 2.3.6 permet donc de déterminer en  $\mathcal{O}(1)$  les caractéristiques d'un sous-segment discret possédant un point d'appui supérieur et un point d'appui inférieur de la droite discrète.  $\square$

## 2.4 Perspectives d'extensions en dimension 3

### 2.4.1 Sous-segment discret de dimension 3

En nous basant sur l'algorithme de reconnaissance de sous-segment en dimension 3 de Debled-Rennesson [Debled-Rennesson 95], nous pourrions utiliser des approches en dimension 2 pour la reconnaissance de sous-segment en dimension 3. Dans cet

algorithme (de Debled-Renesson), un sous-segment discret en dimension 3 est défini comme ayant deux projections en dimension 2 correspondant à des sous-segments en dimension 2 [Kim 83]. Il suffirait alors de déterminer les paramètres des projections pour déduire les paramètres du sous-segment en dimension 3. Ainsi pour reconnaître un sous-segment en dimension 3, il faudrait :

1. déterminer les projections de la droite en dimension 3 qui sont des droites en dimension 2 : cela se fait en temps constant ;
2. déterminer sur les projections les paramètres de sous-segment en dimension 2 correspondant au sous-segment en dimension 3 : cela se fait en temps logarithmique avec les approches de reconnaissance que nous avons présentées et la notre ;
3. à partir des paramètres des sous-segments en dimension 2, on peut déduire les paramètres du sous-segment en dimension 3.

### 2.4.2 Morceaux de plan de dimension 3

Si nous nous intéressons à l'extension proprement dite des approches en dimension 3, notre approche offre des perspectives d'extension aux morceaux de plans discrets, contrairement aux autres approches [Saïd 11, Sivignon 12]. En effet notre approche est basée sur la notion de reste arithmétique et de point d'appui, et ces deux notions existent également pour des plans discrets en dimension 3 tandis que les autres approches basées sur les notions de diagramme de Farey et d'arbre de Stern-Brocot sont plus difficilement extensibles en dimension 3.

Cependant des difficultés se posent à cette extension en dimension 3.

Pour le moment nous pensons que de telles propriétés existent même s'il y a des contradictions au Théorème 2.3.5 en dimension 3. Comme le montre la Figure 2.26, en enlevant une ligne du sous-plan discret  $P$  de caractéristiques  $(3, 7, 18, 0)$  ( $0 \leq 3x + 7y + 18z + 0 < 18$ ) dans l'intervalle  $[1, 7] \times [2, 5]$  du plan  $(x, y)$  on obtient un nouveau sous-plan  $P'$  de caractéristiques  $(2, 5, 11, -3)$  où un point de reste arithmétique 2 sur  $P$  devient point d'appui de  $P'$  alors qu'un point de reste arithmétique 1 sur  $P$  ne le devient pas. Donc le Théorème 2.3.5 n'est pas vérifié en l'état en dimension 3 pourtant l'ordre des restes arithmétiques tel que stipulé par le Théorème 2.3.5 semble être vérifié dans la plupart des cas. Peut-on trouver un théorème ou une proposition moins contrainte qui stipulerait des propriétés similaires ? C'est vrai aussi que dans l'exemple nous avons choisi d'ignorer le coefficient lié à  $z$  (par des transformations géométriques) dans la détermination des caractéristiques du sous-plan discret. Cela pourrait-il justifier le non-respect du Théorème 1 ou mieux y a-t-il d'autres choix qui préserveraient l'ordre des restes arithmétiques comme le stipule le Théorème 1 en dimension 3 ? Quelles propriétés pour l'érosion en dimension 3 ? Y a-t-il une meilleure façon d'éroder une ligne ou une colonne ? Cela ouvre de nombreuses perspectives.

## 2.5 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle approche de reconnaissance de sous-segment discret. L'algorithme qui en découle est de complexité logarithmique et prend en entrée les caractéristiques de la droite discrète ainsi que les abscisses des extrémités

0	1	2	3	4	5	0
4	5	0	1	2	3	4
2	3	4	5	0	1	2

(a)

2	5	8	11	14	17	2
13	16	1	4	7	10	13
6	9	12	15	0	3	6
17	2	5	8	11	14	17

(b)

8	10	1	3	5	7	9
3	5	7	9	0	2	4
9	0	2	4	6	8	10

(c)

FIGURE 2.26 – Illustration de la contradiction de l'ordre des restes en 3D lorsqu'on érode une ligne en bas (a) ou en haut (c) du morceau de plan discret (b). Si en (a) les nouveaux points d'appuis (en rouge) sont ceux qui avaient des restes minimaux ou maximaux (en rouge clair), en (c) le point de reste minimal 1 en (b) n'est pas un point d'appui alors que celui de reste 2 l'est.

du sous-segment discret. Notre approche est basée sur la suite de restes arithmétiques des points du sous-segment discret sur la droite discrète. Nous montrons que cette suite de restes arithmétiques est ordonnée de la même manière sur la droite discrète et le sous-segment discret et que les valeurs minimale et maximale de cette suite correspondent à des points d'appuis du sous-segment discret. Puis nous proposons des algorithmes pour calculer les valeurs de reste arithmétique minimale et maximale. Cela nous permet de déterminer ensuite les points d'appuis inférieur et supérieur et de déduire les caractéristiques du sous-segment discret.

Nos algorithmes de calcul du reste arithmétique minimal et maximal sur une suite de reste arithmétique sont d'un grand apport d'un point de vue algorithmique. Ils sont simples car similaires à l'algorithme d'Euclide et déterminent les restes arithmétiques minimal et maximal en temps logarithmique. Les tests que nous avons effectués montrent que notre algorithme général est plus rapide que ceux dans [Lachaud 13] (*ReverseSmartDSS*) et [Sivignon 12]. Pour les cas particuliers où le sous-segment discret contient un point d'appui supérieur et un point d'appui inférieur de la droite discrète, nous avons montré qu'il était possible de déterminer les caractéristiques du sous-segment discret en temps constant en posant des contraintes et en les résolvant.

Comme première perspective, nous prévoyons d'implémenter nos algorithmes dans la librairie DGtal car tous les algorithmes des approches auxquelles nous avons comparé nos résultats y sont déjà implémentés.

Ensuite nous comptons approfondir nos travaux sur les possibilités d'extension en dimension 3 de notre approche pour la reconnaissance de morceaux de plans discrets. Étant donné un plan discret dont les caractéristiques sont connues, peut-on appliquer la même approche (que celle que nous utilisons pour les sous-segments discrets) pour reconnaître des morceaux de ce plan discret? Nous envisageons de déterminer les conditions qu'il faut remplir pour que les différentes propositions et les différents théorèmes que nous avons proposés dans ce chapitre puissent s'appliquer en dimension 3. Cela nous permettrait de proposer un algorithme de reconnaissance de morceaux de plan discret en dimension 3. L'autre perspective, liée à la première, est de voir si cela peut se traduire sur des sous-segments discrets en dimension 3 même si là, il y a une contrainte majeure liée à la définition même de la notion de reste arithmétique.

Finalement, comme nous avons considéré des droites discrètes de pentes rationnelles, il serait intéressant d'étudier l'application de notre approche de reconnaissance sur des sous-segments discrets de droites discrètes de pentes irrationnelles.



---

# Chapitre 3

---

## Espace dual et reconnaissance de primitives discrètes

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>77</b>
<b>3.2</b>	<b>Espace dual et préimage</b>	<b>79</b>
3.2.1	Transformations duales	79
3.2.2	Préimage généralisée	81
3.2.3	Médiatrice généralisée et centre généralisé	84
<b>3.3</b>	<b>Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance</b>	<b>89</b>
3.3.1	Calcul des duaux de la médiatrice généralisé et du centre généralisé	89
3.3.2	Préimage généralisée basée frontières	108
3.3.3	Modification de l'algorithme de reconnaissance de droite	113
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>115</b>

---

### 3.1 Introduction

Pour reconnaître des primitives discrètes, différentes techniques sont utilisées alliant la programmation linéaire, l'arithmétique, diverses techniques algorithmiques. Un des outils que nous avons beaucoup étudié est l'utilisation d'espace dual (espace des paramètres) à l'espace de représentation de la primitive discrète. La finalité est d'associer des calculs dans l'espace dual, beaucoup plus simples et/ou rapides, à la détermination des caractéristiques d'une primitive discrète dans son espace de représentation. *Les transformées de Hough* [Hough 62, Maitre 85] sont parmi les plus connues des outils utilisés pour de tels calculs.

Nous utilisons principalement, dans la reconnaissance de droite discrète, une forme améliorée de ces transformées, introduite par Dexet [Dexet 06a], qui associe au point discret (pixel ou voxel) une forme dans l'espace de paramètres appelée *dual* du point discret.

Définie pour la reconnaissance de droite discrète dans un espace régulier, la préimage généralisée est l'intersection de duaux d'un ensemble de pixels correspondant

à un ensemble de points discrets. Elle permet aussi de reconnaître des droites discrètes multi-échelles [Dexet 06a]. Nous avons étudié la préimage généralisée de pavés en dimension 2. Nous montrons que les types de voisinages possibles entre pavés influent sur la nature des polygones correspondant à la préimage généralisée de telle sorte que nous ne rencontrons pas les configurations décrites par Dexet [Dexet 06a].

Nous avons ensuite proposé des améliorations pour le calcul de la préimage généralisée dans un cadre général. Cette amélioration se base sur la réduction des éléments à considérer dans le calcul de la préimage généralisée. Nous avons montré que l'intersection de deux de deux hypervoxels correspondant à deux points discrets connexes était équivalente à l'intersection d'une zone que nous appelons *frontière*. Ainsi calculer la préimage généralisée d'un ensemble d'hypervoxels revient à calculer la préimage généralisée de leurs frontières.

Nous nous sommes aussi intéressés à l'utilisation de transformations duales dans la reconnaissance de cercles discrets. La médiatrice généralisée de deux pixels  $P$  et  $Q$  est un morceau de plan qui contient tous les centres possibles de cercles ou d'arcs discrets passant par les deux pixels [Rodriguez 10, Rodriguez 11, Richard 11]. Les bords de la médiatrice généralisée sont formés par des segments et des morceaux de paraboles. Une forme simplifiée existe, appelée médiatrice généralisée simplifiée (MGS dans la suite), qui peut être représentée par un polygone. Les morceaux de paraboles sont dans ce cas approximés par des segments de droites pour simplifier les calculs. Les côtés de ce polygone sont des parties de médiatrices des seize segments joignant les quatre sommets de  $P$  aux quatre sommets de  $Q$ . Pour déterminer les caractéristiques d'un cercle discret il faut calculer l'intersection des MGSs des couples de pixels de l'ensemble des pixels. Cette intersection est appelée *centre généralisé simplifié* (appelé CGS par la suite). Le CGS contient l'ensemble des centres candidats du cercle discret. En fonction d'un centre candidat on peut déterminer des plages de rayons d'arcs ou de cercles qui passent par l'ensemble des pixels. La complexité en temps d'une telle approche de reconnaissance de cercles discrets est de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^4)$  [Rodriguez 10]. Nous nous intéressons dans un premier temps à réduire cette complexité. Pour faire cela, nous déterminons les duaux des médiatrices des segments joignant les sommets de  $P$  et  $Q$ . Pour chaque paire de points discrets, ces duaux constituent les sommets d'un polygone (appelé DMGS par la suite) qui représente le dual de leur MGS. Puis au lieu de calculer les intersections des MGS, on détermine les droites qui coupent l'ensemble des DMGS. Ces droites donnent les caractéristiques des centres candidats du cercle discret. Avec une telle approche nous ramenons la complexité en temps du calcul de la CGS à  $\mathcal{O}(n^3 \log(n))$  [Richard 11]. Nous avons mené les travaux sur la DMGS en dimension 2 sur des pixels, mais nos travaux peuvent être étendus en dimension 3 et, dans les 2 cas, sur des pavés de différentes échelles.

Ce chapitre se subdivise en deux parties. Dans la première partie, nous rappelons d'abord des notions sur les espaces de paramètres, la préimage généralisée, la médiatrice généralisée et le centre généralisé. Dans la seconde partie nous présentons les différents travaux que nous avons mené dans la reconnaissance de primitives discrètes. Nous commençons par présenter nos travaux sur le calcul de la préimage généralisée basée sur la notion de frontière. Puis nous présentons des spécificités de la préimage généralisée d'ensemble de pavés. Nous présentons ensuite le calcul du dual de la médiatrice généralisée simplifiée. Enfin nous présentons la reconnaissance

de cercle discrets basée sur la programmation linéaire et la notion de flocon.

## 3.2 Espace dual et préimage

Dans le but de simplifier ou accélérer la reconnaissance des primitives discrètes, on utilise souvent un espace, dit *espace de paramètres*, différent de celui de représentation de la primitive discrète dit *espace image*. Entre les deux espaces, on définit alors des relations, dites *transformations duales*, qui associent à une catégorie de primitives de l'un une autre catégorie de primitives de l'autre. Dans cette section nous présentons brièvement les bases des transformations duales avant de présenter la notion de transformée de Hough [Hough 62] dont découlent les transformations duales qui nous intéressent. Nous présentons ensuite la préimage généralisée [Dexet 06a] qui est un outil basé sur la transformée de Hough et qui permet la reconnaissance d'hyperplans discrets. Nous présentons enfin la médiatrice généralisée. La médiatrice généralisée est utilisée dans la reconnaissance d'hypersphères discrètes. Elle n'est pas basée sur la transformée de Hough mais nous présentons dans la Section 3.3 comment on accélère son calcul en le faisant dans un espace dual. D'où l'intérêt de la présenter dans cette section.

### 3.2.1 Transformations duales

Dans la suite,  $\varepsilon_n = (O_\varepsilon, X_1, \dots, X_n) \subseteq \mathbb{R}^n$  est un espace image et  $\mathcal{P}_n = (O_p, Y_1, \dots, Y_n) \subseteq \mathbb{R}^n$  un espace de paramètres, tous de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous nous intéressons à définir deux transformations duales permettant d'associer à un point de  $\varepsilon_n$ , un hyperplan dans  $\mathcal{P}_n$  et vice et versa. Les espaces  $\varepsilon_n$  et  $\mathcal{P}_n$  sont alors des *espaces duaux*. Et l'espace  $\varepsilon_n$  est l'espace dual de  $\mathcal{P}_n$  et vice et versa.

Notons  $D_\varepsilon : \varepsilon_n \rightarrow \varphi(\mathcal{P}_n)$  et  $D_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}_n \rightarrow \varphi(\varepsilon_n)$ , où  $\varphi(A)$  désigne l'ensemble des parties de  $A$ , les deux transformations duales.

La transformée de Hough [Hough 62] est une transformation duale utilisée dans la reconnaissance de plusieurs types de primitives. Un panorama des différentes sortes de transformées de Hough est fait dans [Maitre 85]. De façon générale, la transformée de Hough se définit comme suit :

**Définition 3.2.1** (Transformée de Hough [Hough 62]). *Soit  $\mathbb{R}^n$  un espace image et  $\zeta = \{M_i, i \in [1, \dots, n]\} \in \mathbb{R}^n$  un ensemble de  $n$  points sélectionnés. Soient  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^p$  un espace de paramètres, et  $F$  une famille de courbes dans  $\mathbb{R}^n$  paramétrées par  $a$ ; c'est à dire*

$$\mathbb{F} = \{\{x : f(x, a) = 0, x \in \mathbb{R}^n\}, a \in \Omega\}$$

*On appelle transformation de Hough associée à la famille  $F$ , une transformation qui fait correspondre à l'ensemble  $\zeta$  une fonction  $g$  définie sur  $\mathcal{P}$ .*

Nous nous intéressons aux transformées de Hough utilisées pour la reconnaissance de droites discrètes. Dans la suite nous travaillons en dimension 2 et nous considérons toujours  $\varepsilon$  comme un espace image, et  $\mathcal{P}$  comme un espace de paramètres.

**Définition 3.2.2** (Transformée de Hough des droites). Soient  $A(x_a, y_a) \in \varepsilon$  et  $B(x_b, y_b) \in \mathcal{P}$ . La transformée de Hough des droites est définie par les deux transformations duales suivantes :

$$\begin{cases} A(x_a, y_a) \mapsto D_{\mathcal{P}} : \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}^2 \mid \beta = -\alpha x_a + y_a\} \\ A(x_b, y_b) \mapsto D_{\varepsilon} : \{(x, y) \in \varepsilon^2 \mid y = -x x_b + y y_b\} \end{cases}$$

La Figure 3.1 illustre la transformée de Hough des droites.

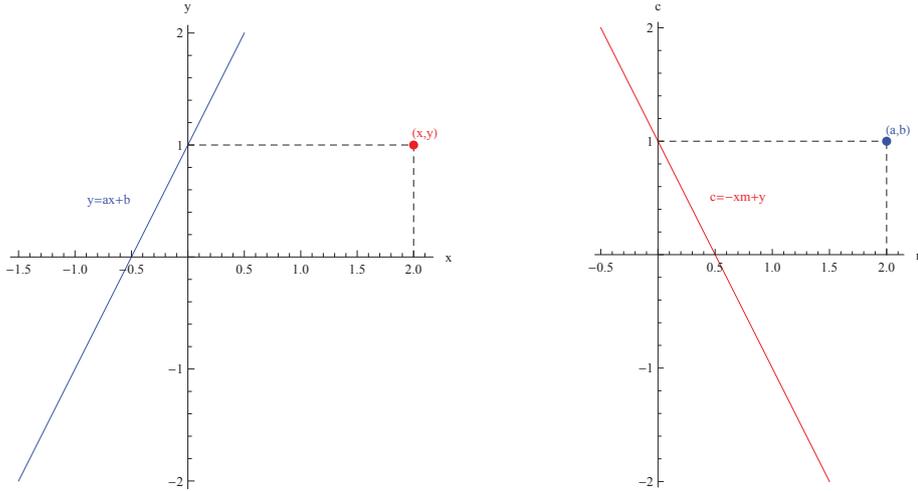


FIGURE 3.1 – Transformée de Hough des droites : un point  $(x, y)$  de l'image de gauche correspond à une droite  $\mathcal{D} : c = -xm + y$  de l'image de droite et une droite  $y = ax + b$  correspond à un point  $(a, b)$ .

Des propriétés sur cette transformée de Hough et leurs preuves sont énoncées dans [Maitre 85, Dexet 06a, Sere 07]. Nous retiendrons que la *transformée de Hough des droites* est basée sur des coordonnées cartésiennes et ne permet pas de détecter des droites verticales [Maitre 85]. C'est pourquoi nous utilisons à sa place la *transformée analytique de Hough* qui n'a pas cette limitation [Maitre 85]. Nous nous intéresserons particulièrement à la notion de dual introduite par Dexet [Dexet 06a] et basée sur les transformations duales suivantes :

**Définition 3.2.3** (Transformations duales [Dexet 06a]). Soient  $p_{\varepsilon} = (x_1, \dots, x_n) \in \varepsilon_n$  et  $p_{\mathcal{P}} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{P}_n$ . Alors,

$$D_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}) = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{P}_n \mid y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \right\}$$

et

$$D_{\mathcal{P}}(p_{\mathcal{P}}) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \varepsilon_n \mid x_n = y_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i x_i \right\}$$

Dans la suite nous utilisons le terme *Dual* indifféremment pour les deux transformations  $D_{\mathcal{P}}$  et  $D_{\varepsilon}$ .

Il existe des propriétés intéressantes sur la dualité pour les opérations classiques comme l'inclusion, l'union et l'intersection. L'ensemble des définitions, des propriétés et toutes les preuves sur les transformations duales que nous utiliserons sont présentées dans la section 2.2.2 de la thèse de Dexet Martine [Dexet 06a]. Dans la suite, nous nous intéressons surtout à comment utiliser le dual d'un objet discret dans sa reconnaissance. La préimage généralisée, définie à partir du dual des points discrets, est un outil qui permet la reconnaissance des hyperplans discrets. Nous la présentons succinctement dans la sous-section suivante. Toutes les définitions, propriétés et preuves sur la préimage généralisée que nous utilisons ont été introduites par Dexet [Dexet 06a].

### 3.2.2 Préimage généralisée

Nous synthétisons les travaux de Dexet [Dexet 06a] en donnant, en dimension 2 et 3, les relations entre le dual d'un hypervoxel (associé au point discret) et ses sommets [Dexet 06a].

Pour un pixel  $P$  de centre  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  le Tableau 3.1 donne les relations entre le dual de  $P$  et ses sommets [Dexet 06a]. Chaque dual d'un sommet est une droite qui découpe l'espace en deux sous-espaces notés  $\mathcal{H}_-$  et  $\mathcal{H}_+$ . En fonction de la position du sommet  $\mathcal{H}_-$  ou  $\mathcal{H}_+$  intervient dans le calcul du dual de l'hypervoxel.

TABLE 3.1 – Relations entre le dual d'un pixel et ses sommets.

Demi-espace	$y_1 \leq 0$	$y_1 \geq 0$
$\mathcal{H}_-$	$(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$	$(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$
$\mathcal{H}_+$	$(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2})$	$(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2})$

La Figure 3.2 illustre la construction du dual de l'hypervoxel associé à un point discret d'une grille régulière en dimension 2. La Figure 3.3 illustre la construction du dual de l'hypervoxel associé à un point discret d'une grille irrégulière isothétique en dimension 2.

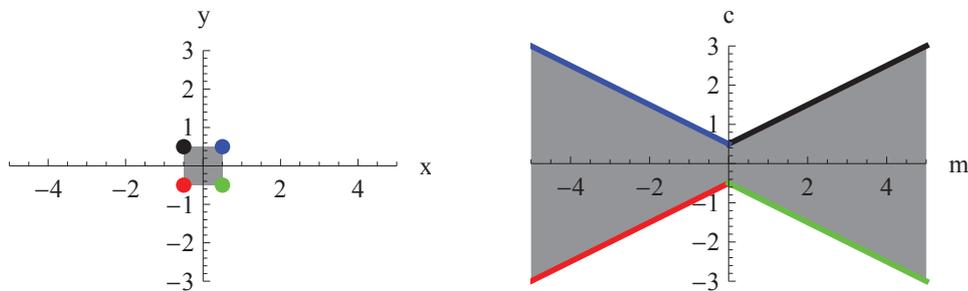


FIGURE 3.2 – Illustration du dual d'un pixel : à chaque sommet de l'image de gauche correspond un dual correspondant à une demi-droite de même couleur de l'image de droite.

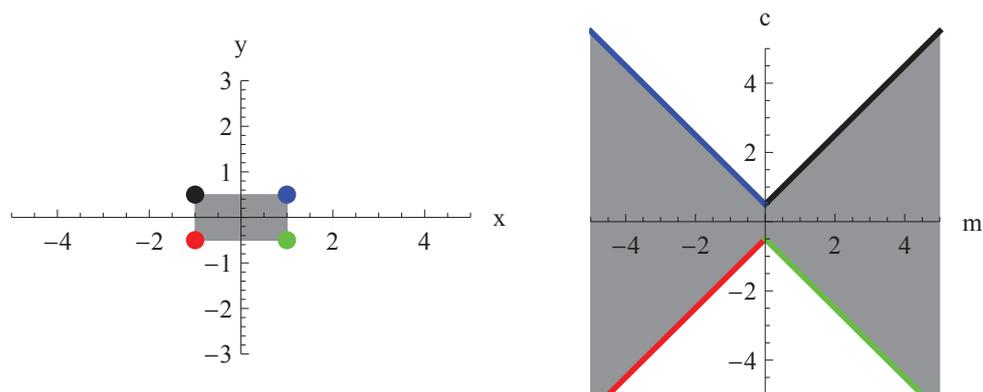


FIGURE 3.3 – Illustration du dual d'un pavé : à chaque sommet de l'image de gauche correspond une demi-droite de même couleur de l'image de droite.

De même, pour un voxel  $P$ , de centre  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ , le Tableau 3.2 donne les relations entre le dual de  $P$  et ses sommets [Dexet 06a].

TABLE 3.2 – Relations entre le dual d'un voxel et ses sommets.

Demi-espace	$y_1 \leq 0, y_2 \leq 0$	$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0$
$\mathcal{H}_-$	$(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2})$	$(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2})$
$\mathcal{H}_+$	$(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2})$	$(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2})$
Demi-espace	$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0$	$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$
$\mathcal{H}_-$	$(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2})$	$(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2})$
$\mathcal{H}_+$	$(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2})$	$(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2})$

La Figure 3.4 illustre la construction de la préimage généralisée en dimension 3.

Le dual d'un point discret définit donc l'ensemble des paramètres d'hyperplans discrets contenant l'hypervoxel associé à ce point discret. Pour connaître les paramètres d'un ensemble de points discrets connexes, il suffit alors de calculer l'intersection des duaux des différents points discrets. C'est cette intersection qu'on appelle *préimage généralisée* d'un ensemble de points discrets, notée  $\mathbb{G}_p$  et définie comme suit :

**Définition 3.2.4** (Préimage généralisée, [Dexet 06a]).  $P = \{P_1, \dots, P_k\}$  un ensemble de  $k$   $n$ -polytopes,  $k \in \mathbb{N}^*$ . La préimage généralisée de  $P$  est définie par :

$$\mathbb{G}_p(P) = \bigcap_{i=1}^k Dual(P_i)$$

En dimension 2, la préimage généralisée d'un ensemble de pixels peut être un ensemble vide si aucune droite ne passe par l'ensemble des points discrets. Sinon c'est une forme qui est dans l'une des quatre configurations suivantes définies par Dexet [Dexet 06a] :

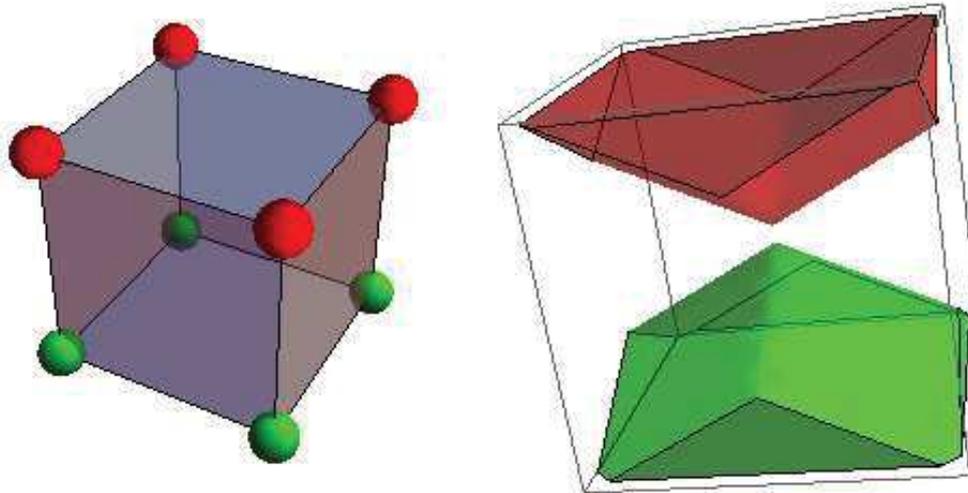


FIGURE 3.4 – Illustration du dual d'un voxel : les sommets de même couleur de l'image de gauche correspondent à une intersection de demi-plans de même couleur de l'image de droite.

- Deux polygones infinis : la préimage généralisée de deux pixels 1-voisins ou de pixels 1-voisins deux à deux et alignés verticalement est définie par deux polygones infinis. La Figure 3.5 donne une illustration de cette configuration ;

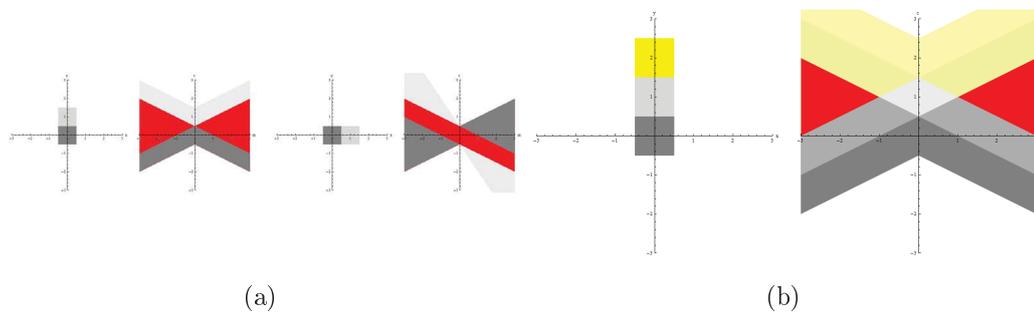


FIGURE 3.5 – a) En rouge la préimage généralisée de deux pixels 1-voisins. b) En rouge la préimage généralisées de pixels alignés verticalement.

- Un polygone infini : la préimage généralisée de deux rangées de pixels 1-voisins deux à deux et alignés verticalement est défini par un polygone infini. La Figure 3.6 donne une illustration de cette configuration ;
- Deux polygones finis : la préimage généralisée de  $K$  pixels 1-voisins deux à deux et alignés horizontalement ( $k \geq 3$ ) est défini par deux polygones finis. La Figure 3.7 donne une illustration de cette configuration ;
- Un polygone fini : la préimage généralisée de  $K$  pixels 1-voisins deux à deux et ne définissant pas les configurations précédentes est défini par un polygone fini. La Figure 3.8 donne une illustration de cette configuration.

Dexet a proposé des algorithmes de reconnaissance de droites et de plans discrets basés sur la préimage généralisée [Dexet 06a]. Dans la section suivante, nous pré-

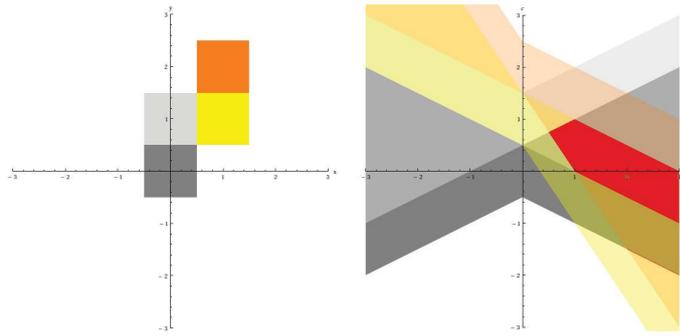


FIGURE 3.6 – En rouge la préimage généralisée de deux rangées de pixels 1-voisins alignés verticalement est définie par un polygone infini.

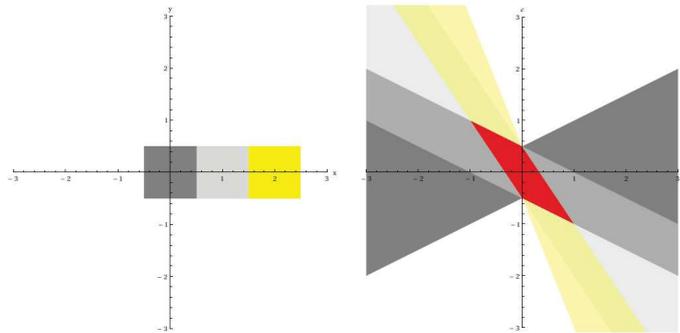


FIGURE 3.7 – En rouge la préimage généralisée de plus de 2 pixels alignés horizontalement est définie par 2 polygones finis. L'axe des ordonnées sépare les deux polygones.

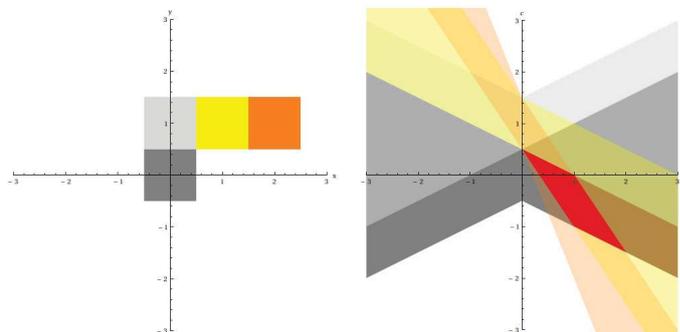


FIGURE 3.8 – En rouge la préimage généralisée d'un ensemble de pixels quelconques est définie par un polygone fini.

sentons la reconnaissance d'hypersphère discrète ainsi que la notion de médiatrice généralisée.

### 3.2.3 Médiatrice généralisée et centre généralisé

La notion de *médiatrice généralisée* a été introduite par Rodriguez et al. [Rodriguez 10, Rodriguez 11]. La médiatrice généralisée représente l'ensemble des médiatrices possibles entre les points euclidiens contenus dans une paire de points discrets. Nous nous intéressons aux notions de médiatrices et aux méthodes de reconnaissance associées.

#### Définitions et propriétés

La médiatrice généralisée est une extension de la notion de médiatrice dans un espace euclidien pour qu'elle s'applique à des régions plutôt qu'à des points. Nous considérons que la médiatrice d'un segment  $[AB]$  est l'ensemble des points équidistants de  $A$  et de  $B$ . C'est cette définition qui est étendue pour les points discrets.

**Définition 3.2.5** (Médiatrice généralisée de deux régions [Rodriguez 10]). *Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux régions de  $R^n$ . La médiatrice généralisée de  $S_1$  et  $S_2$  est l'union de toutes les médiatrices de chaque couple de points  $(p, q)$  tels que  $p \in S_1$  et  $q \in S_2$ .*

Pour tout couple de points  $p$  et  $q$ , il existe un point  $c$  de la médiatrice généralisée équidistant à  $p$  et  $q$ .  $c$  est par conséquent le centre d'une hypersphère passant par  $p$  et  $q$ . D'où la définition alternative 3.2.6.

**Définition 3.2.6** (Définition alternative de la médiatrice généralisée [Rodriguez 11]). *Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux régions de  $R^n$ . Soit  $X \in R_n$ , soient  $d_i(X) = \min(d(X, S_i))$  et  $D_i(X) = \max(d(X, S_i))$  où  $d$  est la distance euclidienne classique. La médiatrice généralisée de  $S_1$  et  $S_2$  est l'ensemble des points  $X \in R_n, [d_1(X), D_1(X)] \cap [d_2(X), D_2(X)] \neq \emptyset$ .*

Dans la suite nous considérons un espace de dimension 2. Si nous considérons des points euclidiens, entre deux points  $A$  et  $B$  on peut définir une médiatrice. Lorsque nous prenons en compte un troisième point  $C$ , nous introduisons deux autres médiatrices : entre  $A$  et  $C$  et entre  $B$  et  $C$ . Si ces points ne sont pas alignés, les médiatrices s'intersectent en un unique point appelé *centre du cercle circonscrit* au triangle  $ABC$ . De même, pour un nombre  $n \in \mathbb{N}^k, k \geq 2$  de points, si toutes les médiatrices des couples de points parmi les  $n$  points s'intersectent en un unique point  $I$ ,  $I$  est le centre d'un cercle passant par les  $n$  points. Sinon, il n'existe pas de cercle passant par tous les points considérés. La définition 3.2.7 étend la notion de centre de cercle circonscrit de la géométrie euclidienne en géométrie discrète. Elle introduit la notion de centre généralisé des hypersphères circonscrites à un ensemble de régions comme étant l'intersection de toutes les médiatrices généralisées entre tous les couples de régions qu'on peut former.

**Définition 3.2.7** (Centre généralisé des hypersphères circonscrites [Rodriguez 10]). *Le centre généralisé des hypersphères circonscrites ( $I_g$ ) d'un ensemble de régions*

$S = (S_i)_{i \in [1,n]}$  est l'intersection des médiatrices généralisées ( $M_g$ ) de tout couple de régions :

$$I_g(S) = \bigcap_{i,j \in [1,n], i < j} (M_g(S_i, S_j))$$

Les différentes définitions et propriétés sur la médiatrice généralisée et le centre généralisé des hypersphères circonscrites sont détaillées dans [Rodriguez 11, Rodriguez 10, Richard 11]. Elles sont les bases d'approches de reconnaissance pour différents types d'hypersphères discrètes. Nous reprenons les algorithmes principaux utilisés pour la reconnaissance d'hypersphère discrète de la thèse de Rodriguez [Rodriguez 11]. L'Algorithme 5 permet de calculer le centre généralisé des hypersphères circonscrites d'un ensemble de points discrets. La complexité de cet algorithme est  $\mathcal{O}(n^2)$  où  $n$  représente le nombre de points discrets. Si le centre n'est pas vide l'Algorithme 6 permet de déterminer la plage de rayons pour une hypersphère centré en un point donné du centre généralisé. C'est donc cet algorithme qui résout le problème de l'existence d'une hypersphère centrée en un point  $c$  de  $\mathbb{R}^n$  et passant par un ensemble de points discrets. Sa complexité est aussi de l'ordre  $\mathcal{O}(n^2)$ , d'où une complexité totale de reconnaissance d'hypersphère discrète qui est de  $\mathcal{O}(n^4)$ .

---

**Algorithme 5 : DÉTERMINATION DES CENTRES POSSIBLES DES CERCLES DISCRETS RECONNUS**

---

**Entrées :** Un ensemble  $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in [1,n]}$  de voxels.

**Output :**  $CGHC(\mathcal{V})$ , le centre généralisé des hypersphères circonscrites de  $\mathcal{V}$  noté  $Centre(\mathcal{V})$

- 1 initialiser  $Centre(\mathcal{V}) \leftarrow \mathbb{R}^n$ ;
  - 2 **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n - 1$  **faire**
  - 3     **Pour**  $j \leftarrow i + 1$  à  $n$  **faire**
  - 4     |      $Centre(\mathcal{V}) \leftarrow Centre(\mathcal{V}) \cap MG(v_i, v_j)$ ;
  - 5 return  $Centre(\mathcal{V})$ ;
- 

---

**Algorithme 6 : CALCUL DE L'INTERVALLE DE RAYON POUR UN ENSEMBLE DE VOXELS DONNÉS.**

---

**Entrées :** Un point  $c \in \mathbb{R}^2$ , n ensemble  $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in [1,n]}$  de voxels.

**Output :** L'intervalle de rayon  $[r_{min}, r_{max}]$  pour lesquels une hypersphère centrée en  $c$  intersecte tous les voxels de  $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in [1,n]}$ .

- 1 initialiser  $IntervalleRayons \leftarrow \mathbb{R}$ ;
  - 2 **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n$  **faire**
  - 3      $r_{min} \leftarrow d_{min}(c, v_i)$ ;
  - 4      $r_{max} \leftarrow D_{max}(c, v_i)$ ;
  - 5      $IntervalleRayons \leftarrow IntervalleRayons \cap [r_{min}, r_{max}]$ ;
  - 6 return  $IntervalleRayons$ ;
- 

Étant donné qu'il existe plusieurs modèles de discrétisations le calcul de la médiatrice généralisée dépendra du modèle considéré. Le lecteur peut se rapporter à la

thèse de Rodriguez [Rodriguez 11] pour plus de détails sur les médiatrices généralisées correspondant aux modèles de discrétisation Supercouverture, Standard et Naïf. De façon générale, la médiatrice généralisée de deux pixels disjoints est un polygone infini dont les côtés sont constitués de segments de droites, de demi-droites et de morceaux de paraboles [Rodriguez 11]. Calculer le centre généralisé avec de tels polygones est fastidieux car il faut calculer les intersections des différentes médiatrices généralisées. C'est pourquoi Rodriguez et al. introduit la notion de médiatrice généralisée simplifiée. Nous présentons succinctement cette notion dans la sous-section suivante.

### Médiatrice Généralisée Simplifiée

Il est possible de simplifier les calculs de la médiatrice généralisée de deux pixels et le calcul d'intersection entre deux médiatrices généralisées en ignorant les morceaux de paraboles dans les bords de la médiatrice généralisée. Cela implique d'ignorer des points qui se projettent orthogonalement sur les arêtes des carrés associés aux pixels (voir la Figure 3.9) mais l'erreur engendrée est faible pour des images de grande taille.

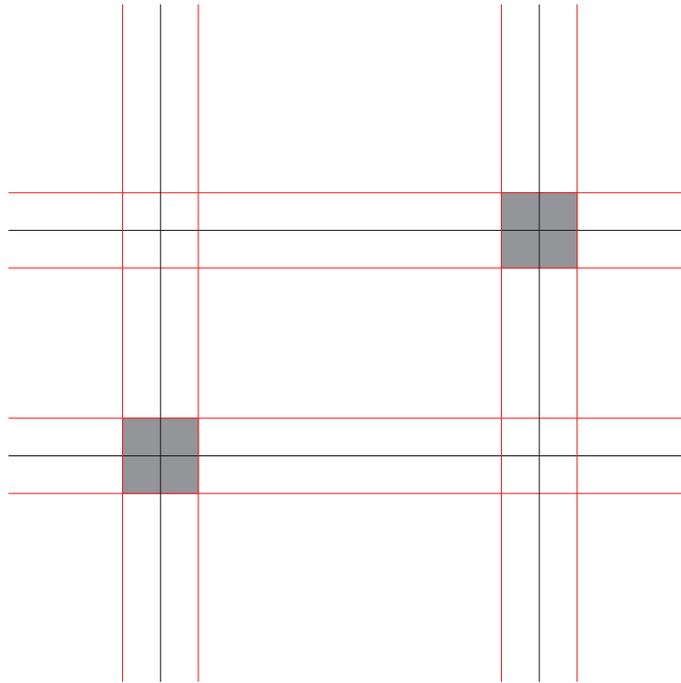


FIGURE 3.9 – Partitions de l'espace pour la construction de la médiatrice généralisée de deux pixels : les droites en rouge sont ignorées lorsqu'on s'intéresse à la médiatrice généralisée simplifiée.

On appelle *médiatrice généralisée simplifiée* et on note  $MGS$  une telle médiatrice généralisée. La  $MGS$  de deux pixels  $P_1$  et  $P_2$  est définie par la formule :

$$MGS(P_1, P_2) = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \sqrt{(x - C_{2x})^2 + (y - C_{2y})^2} \leq \sqrt{(x - F_{1x})^2 + (y - F_{1y})^2} \\ \wedge \sqrt{(x - C_{1x})^2 + (y - C_{1y})^2} \leq \sqrt{(x - F_{2x})^2 + (y - F_{2y})^2} \end{array} \right\}$$

où  $C_{i_x}, F_{i_x} \in \{(x_i - \frac{1}{2}), (x_i + \frac{1}{2})\}$  et  $C_{i_y}, F_{i_y} \in \{(y_i - \frac{1}{2}), (y_i + \frac{1}{2})\}$ .  $C_i$  représente le sommet le plus proche du pixel  $i$  au pixel  $i'$  tandis que  $F_i$  représente le sommet le plus éloigné du pixel  $i$  au pixel  $i'$ .

La *MGS* est délimitée par des segments et des demi-droites dont le nombre est au plus 10 [Richard 11]. Ces segments et demi-droites sont représentés en couleur dans la Figure 3.10 qui illustre la médiatrice généralisée simplifiée de deux pixels.

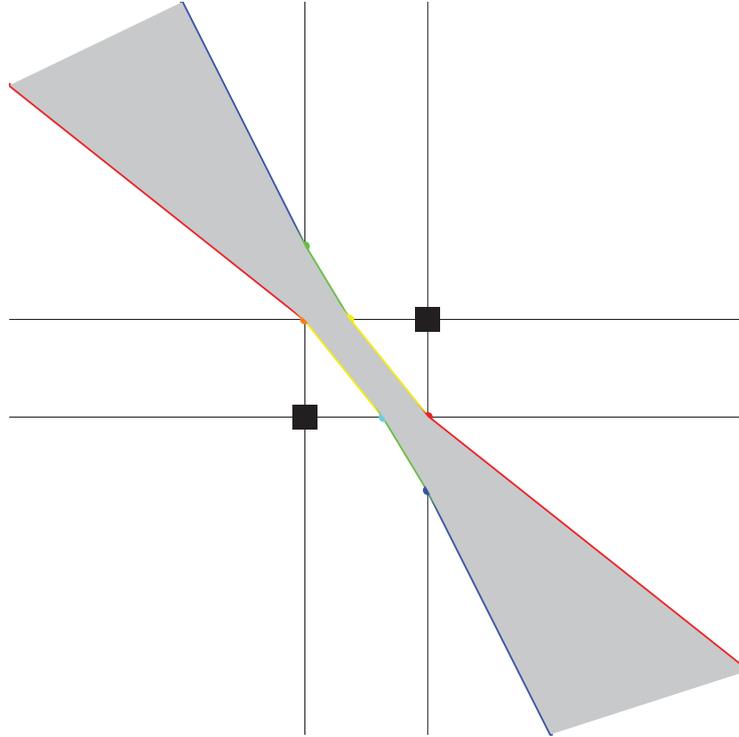


FIGURE 3.10 – Le bord de la médiatrice généralisée simplifiée est composé d’au plus 6 segments et de 4 demi-droites.

Nous notons les droites supports des bords de la *MGS*  $\mathbb{D}_i$  avec  $i \in [1, 10]$ . Le lecteur peut se référer à [Richard 11] pour les calculs de ces droites supports. Il existe des relations intéressantes entre elles qui simplifient largement les calculs de la *MGS*.

À partir de la *MGS*, nous introduisons la notion de centre généralisé des hypersphères circonscrites simplifié [Richard 11], noté *CHCGS*. Le *CHCGS* se définit comme suit :

**Définition 3.2.8** (Centre généralisé et simplifié des hypersphères circonscrites). *Le centre généralisé simplifié des hypersphères circonscrites (CHCGS) d’un ensemble fini de  $n$  régions connexes  $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in [1, n]}$  est défini comme l’intersection des médiatrices généralisées simplifiées (MGS) de tous les couples de régions de  $\mathcal{S}$  :*

$$CHCGS(\mathcal{S}) = \bigcap_{i, j \in [1, n], i < j} (MGS(S_i, S_j))$$

La Figure 3.11 illustre le calcul du *CHCGS* de trois pixels.

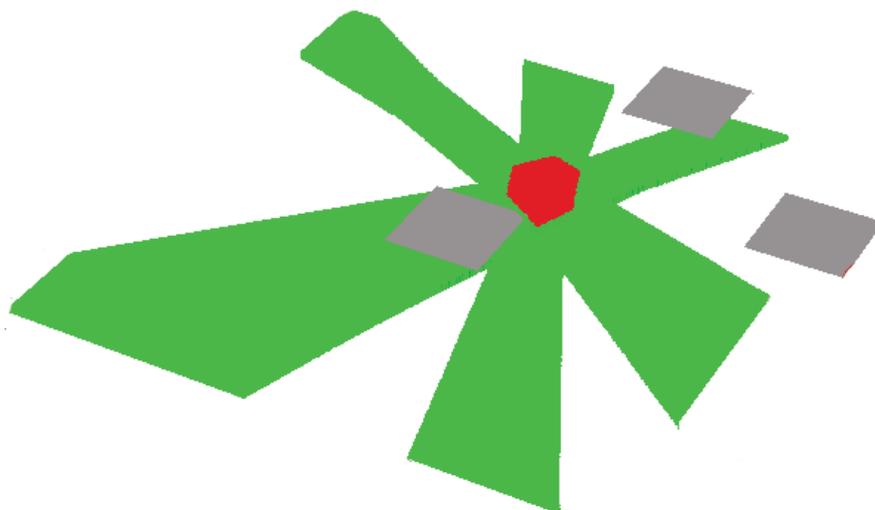


FIGURE 3.11 – En rouge le centre généralisé simplifié des cercles circonscrits à trois pixels en gris. Les différentes médiatrices généralisées sont en vert.

Pour reconnaître une droite discrète définie par des points discrets il faut calculer la préimage généralisée correspondant à ces points discrets et, en fonction de cette médiatrice, déterminer les caractéristiques analytiques de la droite discrète. L'opération se fait dans un espace dual à l'espace image et peut se faire pour des droites discrètes multi-échelles. Nous abordons plus en détail la reconnaissance de droites discrètes multi-échelles dans la section suivante. Pour reconnaître un cercle discret d'un ensemble de points discrets il faut calculer le centre généralisé des cercles circonscrits aux points discrets. En fonction de ce centre généralisé, on détermine aussi les caractéristiques analytiques de cercles discrets contenant les points discrets. Cette opération n'utilise pas particulièrement un espace dual mais nous nous intéressons dans la section suivante à comment simplifier et accélérer les calculs en utilisant un espace dual dans le calcul des médiatrices généralisées et de leurs intersections.

### 3.3 Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance

Dans cette section, nous présentons quelques travaux que nous avons menés dans le but d'améliorer les approches de reconnaissance de cercles et de droites que nous avons présentées dans la section précédente. Nous commençons par le calcul du dual du centre généralisé pour la reconnaissance de cercle discret. Cela permet de faciliter le calcul des intersections des médiatrices généralisées et de réduire la complexité totale de reconnaissance d'un cercle discret d'un facteur log. Puis nous présentons une nouvelle approche de calcul de la préimage généralisée qui simplifie également le calcul de ce dernier et qui est plus efficace pour la reconnaissance de droites discrètes multi-échelles. Nous présentons finalement des travaux sur l'étude de la préimage

généralisée de pavés à différentes échelles.

### 3.3.1 Calcul des duaux de la médiatrice généralisé et du centre généralisé

Dans cette sous-section nous nous intéressons au calcul du dual de la médiatrice généralisée simplifiée. Cela nous permet d'utiliser des travaux existant pour la détermination du dual du centre généralisé avec une meilleure complexité.

#### Généralités

Dans la suite  $P(x_P, y_P)$ , et  $P'(x_{P'}, y_{P'})$  sont deux pixels. Pour faire simple on considère que les pixels sont ordonnés suivant un ordre total strict comme défini par Vacavant [Vacavant 08] :

$$\begin{cases} P <_x P' \Rightarrow x < x' \\ P <_y P' \Rightarrow y < y' \end{cases}$$

Notons  $P_i$  ou  $i$  le sommet du pixel  $P$  et  $P'_i$  ou  $i'$  le sommet du pixel  $P'$  comme défini par Dexet [Dexet 06a]. La Figure 3.12 illustre la numérotation des sommets de pixels.

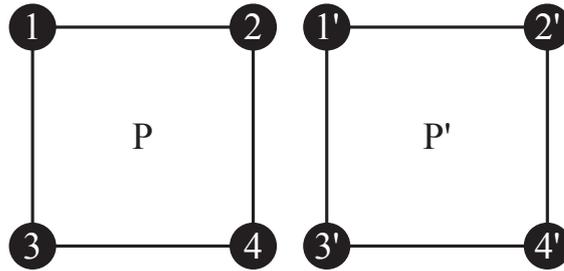


FIGURE 3.12 – Numérotation des sommets des pixels.

Notons  $Dual(O)$  le dual de l'objet  $O$  de l'espace image. Dans l'espace image le paramètre  $x$  représente l'abscisse et le paramètre  $y$  l'ordonnée. Dans l'espace des paramètres, le paramètre  $m$  représente l'abscisse et le paramètre  $c$  l'ordonnée. Le dual d'un point  $M(x, y)$  de l'espace image est une droite de l'espace de paramètres que nous notons et définissons comme  $Dual(M) : c = -xm + y$ . Par ailleurs, le dual d'une droite de l'espace image d'équation  $(D) : y = -mx + c$  est un point de l'espace des paramètres que nous notons  $N(m, c)$ .

Soit  $I(x_I, y_I)$  le milieu d'un segment quelconque  $[AB]$  avec  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points de l'espace image. Les milieux possibles entre deux pixels sont illustrés sur la Figure 3.13. Le dual de  $I$  est une droite de l'espace des paramètres d'équation  $Dual(I) : c = -x_I m + y_I$ . Comme  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ,  $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$  et  $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$ . Par conséquent le dual du milieu d'un segment  $[AB]$  avec  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  peut être définie par l'équation  $Dual(M) : c = -(\frac{x_A + x_B}{2}) \times m + \frac{y_A + y_B}{2}$ .

Soit  $N(m, c)$  le point dual de la droite  $(AB)$ . Alors dans l'espace de paramètres,  $N$  est l'intersection des droites correspondantes aux duaux de  $A$  et  $B$  :

### 3.3 Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance

$Dual((AB)) = Dual(A) \cap Dual(B)$ . Les duaux de  $A$  et de  $B$  ont pour équations respectives  $c = -x_A m + y_A$  et  $c = -x_B m + y_B$ . Cela revient à dire que :

$$\begin{cases} c = -x_A m + y_A \\ c = -x_B m + y_B \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ c = y_A - x_A \times \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases} \quad (3.1)$$

C'est à dire que le dual de la droite  $(AB)$  est le point  $N(\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}, y_A - x_A \times \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B})$  (voir la Figure 3.1 à la Page 80 pour une illustration de la transformée de Hough des droites et le lien entre points et droites des espaces duaux).

Notons  $Med_{AB}$  la médiatrice du segment  $[AB]$ ,  $m_{AB}$  la pente de la droite  $(AB)$  et  $m_{Med_{AB}}$  la pente de  $Med_{AB}$ .  $Med_{AB}$  passe par le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  et correspond de ce fait à un point de  $Dual(I)$  dans l'espace des paramètres. Par ailleurs  $Med_{AB}$  est orthogonale à  $[AB]$ . Cela implique que  $m_{AB} \times m_{Med_{AB}} = -1$ . Si  $N(m, c) = Dual(Med_{AB})$  on a alors :

$$\begin{cases} c = -(\frac{x_A + x_B}{2}) \times m + \frac{y_A + y_B}{2} \\ m \times \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = -1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} m = -\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} \\ c = (\frac{x_A + x_B}{2}) \times \frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} + \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \quad (3.2)$$

C'est à dire que le dual de  $Med_{AB}$  est le point  $N(\frac{x_B - x_A}{y_A - y_B}, \frac{1}{2 \times (y_A - y_B)} \times [x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2])$ .

Soient deux pixels  $P(x_P, y_P)$  et  $P'(x_{P'}, y_{P'})$ . Nous nous intéressons aux duaux des médiatrices  $Med_{i'j'}$  des segments  $[P_i P'_{i'}]$  où  $P_i$  est un sommet de  $P$  et  $P'_{i'}$  un sommet de  $P'$ . Nous présentons d'abord les paramètres des différents éléments utilisés dans l'espace image avant de présenter certains paramètres dans l'espace dual.

#### Calcul dans l'espace image

Nous rappelons les coordonnées des sommets de pixels dans le Tableau 3.3.

TABLE 3.3 – Coordonnées des sommets de pixels

Sommets	Pixel $P(x_P, y_P)$	Pixel $P'(x_{P'}, y_{P'})$
1	$P_1(x_P - \frac{1}{2}, y_P + \frac{1}{2})$	$P'_{1'}(x_{P'} - \frac{1}{2}, y_{P'} + \frac{1}{2})$
2	$P_2(x_P + \frac{1}{2}, y_P + \frac{1}{2})$	$P'_{2'}(x_{P'} + \frac{1}{2}, y_{P'} + \frac{1}{2})$
3	$P_3(x_P - \frac{1}{2}, y_P - \frac{1}{2})$	$P'_{3'}(x_{P'} - \frac{1}{2}, y_{P'} - \frac{1}{2})$
4	$P_4(x_P + \frac{1}{2}, y_P - \frac{1}{2})$	$P'_{4'}(x_{P'} + \frac{1}{2}, y_{P'} - \frac{1}{2})$

Nous recherchons une manière de calculer les intersections des médiatrices des segments  $[P_i P'_{i'}]$  et de déterminer quelle médiatrice est support du bord de la médiatrice généralisée et à quel endroit. Pour cela nous allons nous baser sur des notions liées aux médiatrices comme les milieux et les pentes des segments  $[P_i P'_{i'}]$ .

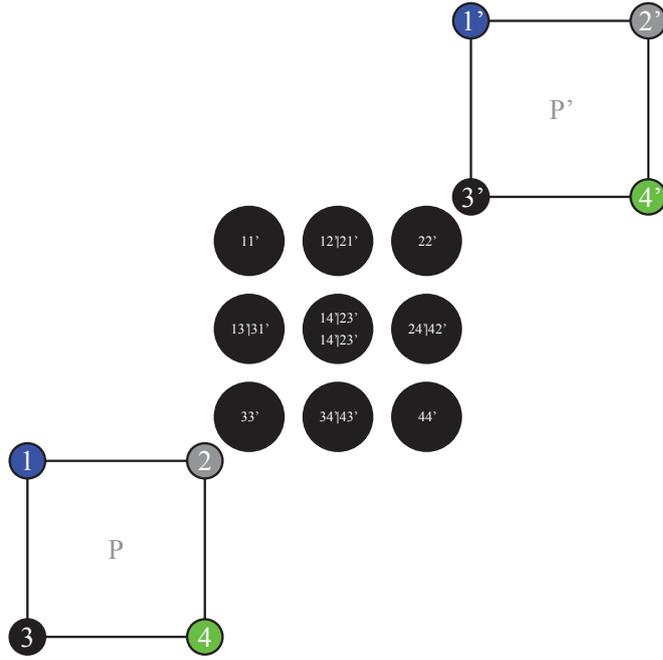


FIGURE 3.13 – Exemples de pixels P et P' avec leurs sommets  $P_i$  et  $P'_i$ . L'ensemble des milieux  $I_{ii'}$  des 16 segments possibles  $[P_iP'_i]$  sont repartis sur les sommets, les milieux de côtés et le centre d'un rectangle centré sur le milieu du segment  $[PP']$ . Certains milieux sont confondus.

TABLE 3.4 – Milieux des segments joignant les sommets de pixels

I	1'	2'	3'	4'
1	$(\frac{x_P+x_{P'}-1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}+1}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}+1}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}-1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$
2	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}+1}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}+1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}+1}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}+1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$
3	$(\frac{x_P+x_{P'}-1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}-1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}-1}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}-1}{2})$
4	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}+1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}}{2}, \frac{y_P+y_{P'}-1}{2})$	$(\frac{x_P+x_{P'}+1}{2}, \frac{y_P+y_{P'}-1}{2})$

### Milieux des segments $[P_iP'_i]$

Les médiatrices passent par les milieux  $I_{ii'}$  des segments que nous décrivons dans le Tableau 3.4. Dans la suite, nous considérons la configuration de pixels de la Figure 3.13 et le Tableau 3.4. Nous pouvons alors faire certaines remarques sur les éléments de la Figure 3.13 :

- Le couple de milieux  $(I_{ij'}, I_{ji'})$  avec  $i$  différent de  $j$  correspondent au même point. On a ainsi  $I_{12'}=I_{21'}$ ,  $I_{13'}=I_{31'}$ ,  $I_{14'}=I_{41'}$ ,  $I_{23'}=I_{32'}$ ,  $I_{24'}=I_{42'}$ ,  $I_{34'}=I_{43'}$  ;
- En plus  $I_{14'}$ ,  $I_{41'}$ ,  $I_{32'}$ ,  $I_{23'}$  correspondent au même point et ce point est le milieu aussi du segment  $[PP']$  ;
- $I_{11'}$  a la même ordonnée que  $I_{22'}$  et la même abscisse que  $I_{33'}$  ;
- $I_{44'}$  a la même ordonnée que  $I_{33'}$  et la même abscisse que  $I_{22'}$ .

Sur la Figure 3.13, nous considérons  $I_{11'}I_{22'}I_{44'}I_{33'}$  comme un pixel. Nous pouvons alors remarquer que par les sommets de ce pixel passe une médiatrice, par les milieux

TABLE 3.5 – Coordonnées des milieux par lesquels passent les médiatrices

<i>Milieu</i>	<i>Abscisse</i>	<i>Ordonnée</i>
$I_{11'}$	$x_I - \frac{1}{2}$	$y_I + \frac{1}{2}$
$I_{12'}$	$x_I$	$y_I + \frac{1}{2}$
$I_{13'}$	$x_I - \frac{1}{2}$	$y_I$
$I_{14'}$	$x_I$	$y_I$
$I_{22'}$	$x_I + \frac{1}{2}$	$y_I + \frac{1}{2}$
$I_{24'}$	$x_I + \frac{1}{2}$	$y_I$
$I_{33'}$	$x_I - \frac{1}{2}$	$y_I - \frac{1}{2}$
$I_{34'}$	$x_I$	$y_I - \frac{1}{2}$
$I_{44'}$	$x_I + \frac{1}{2}$	$y_I - \frac{1}{2}$

des côtés passent deux médiatrices, et par le centre passent quatre médiatrices. Nous pouvons déterminer les différents milieux à partir de  $I(x_I, y_I)$ , milieu du segment  $[PP']$  comme dans le Tableau 3.5.

#### Pentes des segments $[P_iP'i']$

Soit  $m_{ii'}$  la pente du segment  $[P_iP'i']$ . Il est facile de montrer (sous réserve du respect de l'ordre total préétabli  $P' >_x P$  et  $P' >_y P$ ) que :

- $m_{i1'} > m_{i2'} > m_{i4'}$  et  $m_{i1'} > m_{i3'} > m_{i4'}$  ;
- $m_{11'} = m_{22'} = m_{33'} = m_{44'}$  ;
- $m_{21'} = m_{43'}$  ;
- $m_{12'} = m_{34'}$  ;
- $m_{24'} = m_{13'}$  ;
- $m_{42'} = m_{31'}$  ;
- $m_{4j'} > m_{3j'}, m_{2j'} > m_{1j'}$  ;
- $m_{21'} > m_{12'}, m_{31'} > m_{13'}, m_{41'} > m_{14'}$  et  $m_{43'} > m_{34'}$ .

La Figure 3.14 et la Figure 3.15 illustrent ces remarques.

Pour deux segments distincts  $S_1$  et  $S_2$ , l'ordre des pentes de leurs médiatrices est le même que l'ordre de leurs pentes. Cela parce que il faut faire l'inverse et la multiplication par -1 de la pente d'un segment, pour obtenir la pente de sa médiatrice. Ainsi si la pente de  $S_1$  est supérieure à la pente de  $S_2$ , la pente de la médiatrice de  $S_1$  sera supérieure à celle de la médiatrice de  $S_2$ . Donc si nous posons  $m_{ii'}$  la pente de la médiatrice  $Med_{ii'}$ , on a :

- $m_{i1'} > m_{i2'}, m_{i3'} > m_{i4'}$  ;
- $m_{11'} = m_{22'} = m_{33'} = m_{44'}$  ;
- $m_{21'} = m_{43'}$  ;
- $m_{12'} = m_{34'}$  ;
- $m_{24'} = m_{13'}$  ;
- $m_{42'} = m_{31'}$  ;
- $m_{4j'} > m_{2j'} > m_{1j'}$  et  $m_{4j'} > m_{3j'} > m_{1j'}$  ;
- $m_{21'} > m_{12'}, m_{31'} > m_{13'}, m_{41'} > m_{14'}$  et  $m_{43'} > m_{34'}$ .

Il est facile de montrer que si une médiatrice est entre deux autre médiatrices de même pente qu'elle alors elle ne participe pas au bord de la médiatrice généralisée. Nous pouvons donc éliminer les médiatrices  $Med_{11'}$  et  $Med_{44'}$  car dans notre

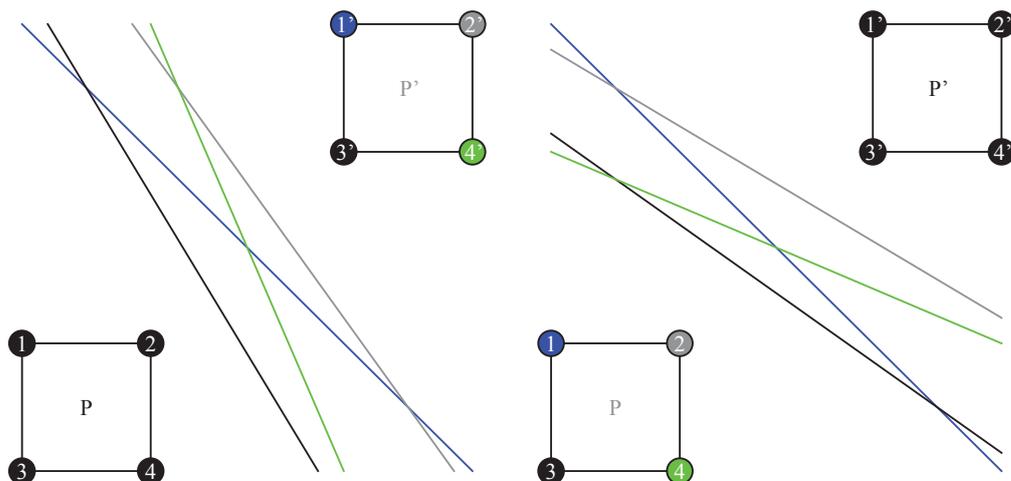


FIGURE 3.14 – À gauche les médiatrices du sommet 1 vers les sommets 1',2',3',4' respectivement en bleu, gris, noir et vert. À droite les médiatrices des sommets 1,2,3,4 vers le sommet 1' respectivement en bleu, gris, noir et vert. On remarque que  $m_{11'} > m_{12'}$ ,  $m_{13'} > m_{14'}$  et que  $m_{41'} > m_{31'}$ ,  $m_{21'} > m_{11'}$ .

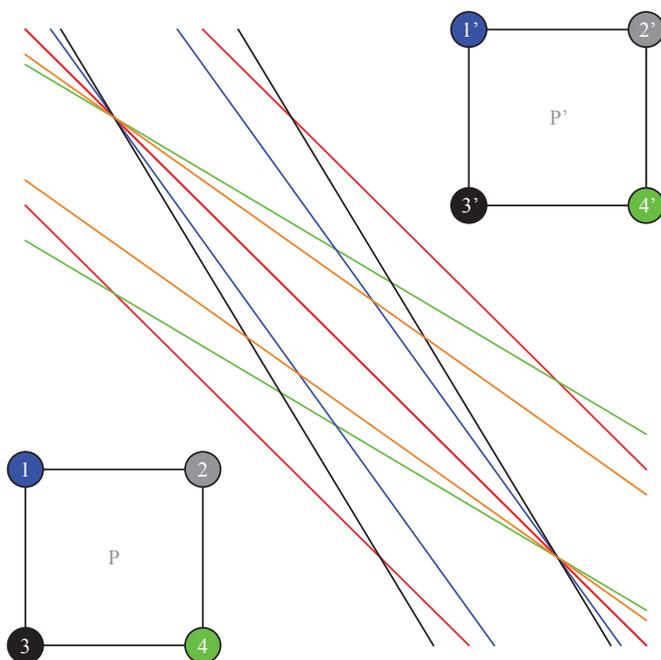


FIGURE 3.15 – Médiatrices parallèles. En rouge  $m_{11'} = m_{22'} = m_{33'} = m_{44'}$ . En vert  $m_{21'} = m_{43'}$ , en bleu  $m_{12'} = m_{34'}$ , en noir  $m_{24'} = m_{13'}$  et en orange  $m_{42'} = m_{31'}$ .

configuration elles sont délimitées par  $Med_{33'}$  et  $Med_{22'}$  et elles ont toutes la même pente. C'est ce qu'illustre la Figure 3.16.

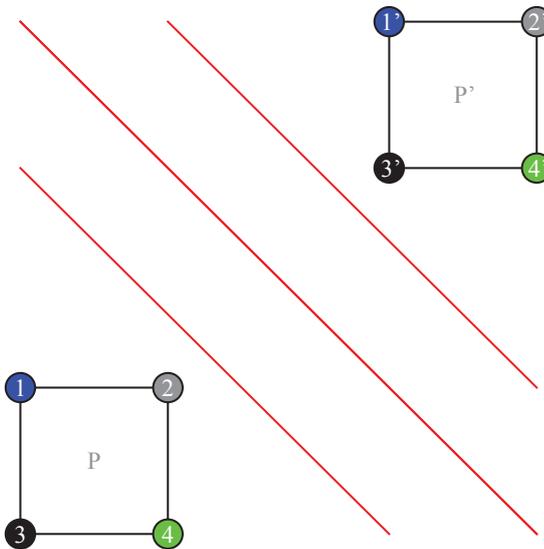


FIGURE 3.16 – Les médiatrices  $Med_{11'}$  et  $Med_{44'}$  sont délimitées par  $Med_{33'}$  et  $Med_{22'}$  de même pente. Elles ne peuvent atteindre aucun bord de la médiane généralisée ; il faut donc les supprimer.

Par ailleurs il est aussi facile de montrer que si une médiane  $Med_2$  est sécante avec deux autres médianes  $Med_1$  et  $Med_3$  au même point et que leurs pentes sont telles que  $m_1 \leq m_2 \leq m_3$  alors  $Med_2$  ne participe pas au bord de la médiane généralisée. C'est ce qui justifie que nous éliminons aussi les médianes  $Med_{32'}$  et  $Med_{23'}$  qui sont sécantes avec  $Med_{14'}$  et  $Med_{41'}$  au même point mais dont les pentes sont bornées par celles des deux autres comme dans la Figure 3.17.

Cela nous amène à éliminer également  $Med_{12'}$  et  $Med_{21'}$ , puis  $Med_{34'}$  et  $Med_{43'}$  parce que leurs pentes sont bornées par celles de  $Med_{14'}$  et  $Med_{41'}$ . Même si elles ne s'intersectent pas au même point, le fait que les milieux  $I_{ii'}$  associés soient portés par une verticale et soient distants de moins la taille du pixel n'introduirait qu'une infime erreur. D'ailleurs à cet endroit une autre médiane est forcément au dessus (au dessous selon le cas) de l'ensemble. C'est ce qu'illustre la Figure 3.18.

Nous pouvons ainsi retenir que certaines médianes comme candidates aux droites supports des bords de la médiane généralisée. Dans notre configuration nous retiendrons les médianes  $Med_{13'}$ ,  $Med_{14'}$ ,  $Med_{22'}$ ,  $Med_{24'}$ ,  $Med_{31'}$ ,  $Med_{33'}$ ,  $Med_{41'}$  et  $Med_{42'}$ . Considérons qu'il y ait un bord gauche et un bord droit de la médiane généralisée<sup>1</sup>. A part les médianes de pente maximale  $Med_{41'}$  et minimale  $Med_{14'}$  qui participent aux deux bords, le reste des médianes participent à un seul bord. Il suffit en effet de remarquer que les autres médianes sont parallèles deux à deux :  $Med_{13'}$  et  $Med_{24'}$ ,  $Med_{31'}$  et  $Med_{42'}$ ,  $Med_{33'}$  et  $Med_{22'}$ . Et en fonction de leur position elles ne pourraient jamais toucher un des bord car parallèle à un de ses supports. Ainsi nous avons six médianes qui participent à un des bords et

---

1. On peut parler de bord haut et bas aussi. Comme ici on considère un ordre total  $\leq_x$  donc on part de gauche vers la droite.

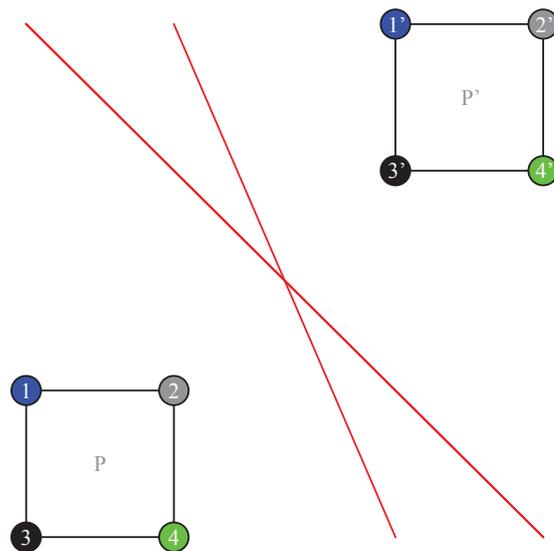


FIGURE 3.17 – Les médiatrices  $Med_{32'}$  et  $Med_{23'}$  sont sécantes avec  $Med_{14'}$  et  $Med_{41'}$  au même point mais leurs pentes sont bornées par celles des deux autres. Elles ne peuvent atteindre aucun bord de la médiatrice généralisée ; il faut donc les supprimer.

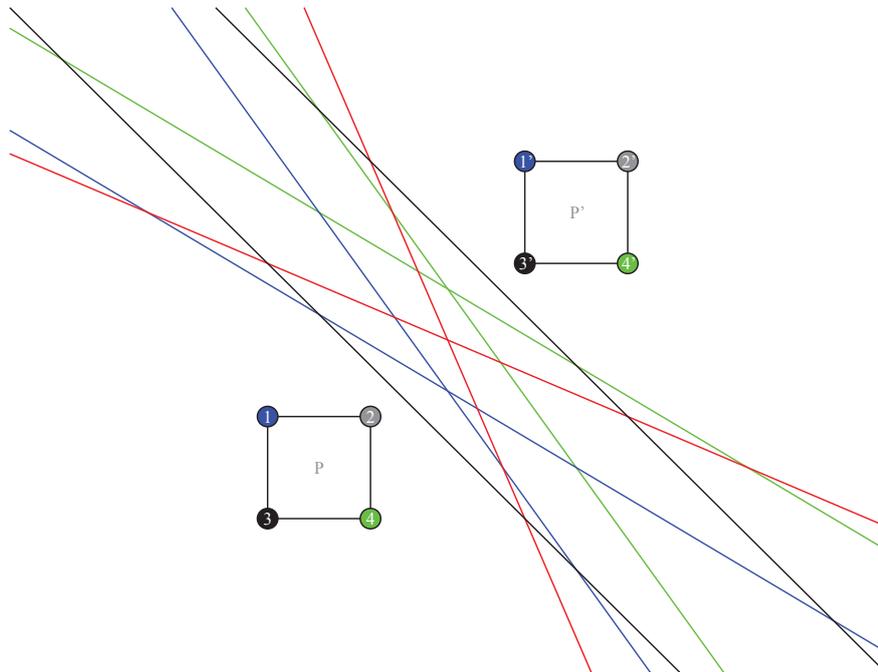


FIGURE 3.18 – Les médiatrices  $Med_{12'}$  et  $Med_{21'}$  en vert puis  $Med_{34'}$  et  $Med_{43'}$  en bleu sont délimitées par les médiatrices  $Med_{14'}$  et  $Med_{41'}$  en rouge à quelque erreur près. Cette erreur est corrigée par la délimitation de  $Med_{22'}$  et  $Med_{33'}$  en noir.

### 3.3 Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance

deux médiatrices qui participent aux deux bords. Dans notre configuration  $Med_{13'}$ ,  $Med_{31'}$ , et  $Med_{33'}$  ne participent qu'au bord gauche de la médiatrice généralisée et  $Med_{22'}$ ,  $Med_{24'}$  et  $Med_{42'}$  ne participent qu'à son bord droit. Par ailleurs, on peut ordonner les médiatrices candidates par bord suivant leurs pentes :

- pour le bord gauche  $m_{41'} > m_{31'} > m_{33'} > m_{13'} > m_{14'}$  ;
- et pour le bord droit  $m_{41'} > m_{42'} > m_{22'} > m_{24'} > m_{14'}$ .

On en déduit que :

- le bord gauche de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{41'}$ , puis d'une partie de  $Med_{31'}$ , puis d'une partie de  $Med_{33'}$ , puis d'une partie de  $Med_{13'}$ , et d'une partie de  $Med_{14'}$  ;
- le bord droit de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{14'}$ , puis d'une partie de  $Med_{24'}$ , puis d'une partie de  $Med_{22'}$ , puis d'une partie de  $Med_{42'}$ , et d'une partie de  $Med_{41'}$ . Cette construction est illustrée par la Figure 3.19.

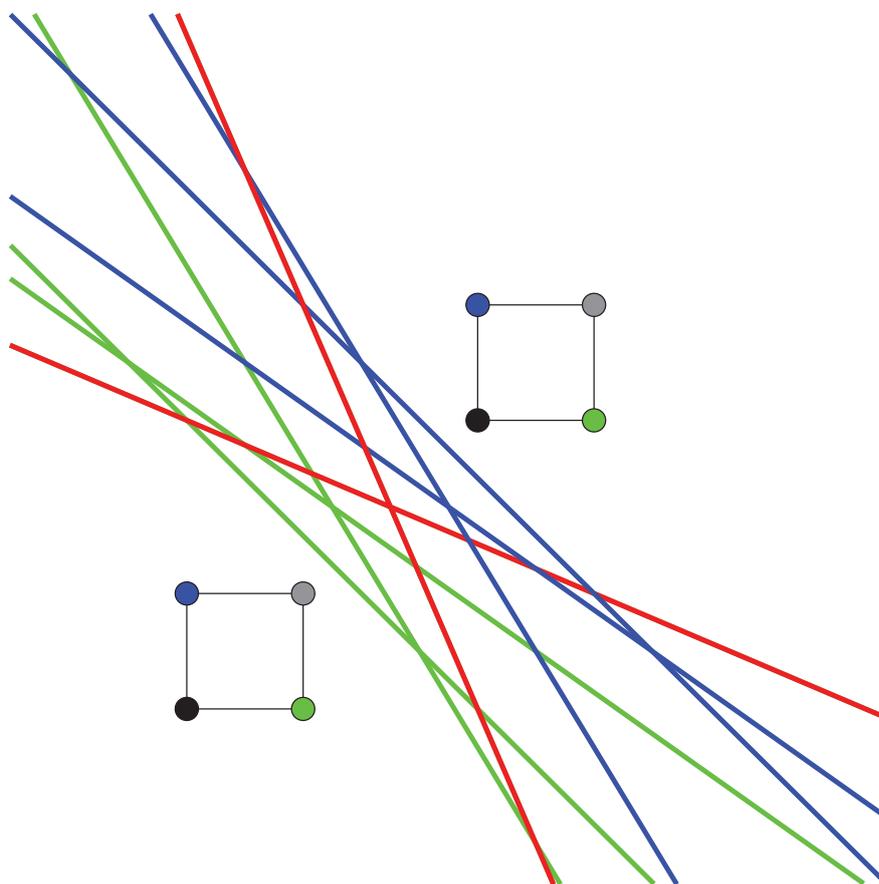


FIGURE 3.19 – Médiatrice généralisée à partir de huit médiatrices. Le bord gauche est constitué par les médiatrices de couleur verte et le bord droit par celles de couleur bleue. Les médiatrices rouges (à pente minimale et maximale) participent aux deux bords. Dans notre configuration on a quatre côtés par bord mais on atteint cinq dans d'autres configurations.

Finalement pour déterminer les bords de la médiatrice généralisée il suffit de déterminer ses sommets qui correspondent aux intersections entre les médiatrices comme

suit :

- entre  $Med_{14'}$  et  $Med_{13'}$  et entre  $Med_{14'}$  et  $Med_{24'}$  ;
- entre  $Med_{41'}$  et  $Med_{31'}$  et entre  $Med_{41'}$  et  $Med_{42'}$  ;
- entre  $Med_{31'}$  et  $Med_{33'}$  ;
- entre  $Med_{33'}$  et  $Med_{13'}$  ;
- entre  $Med_{24'}$  et  $Med_{22'}$  ;
- entre  $Med_{22'}$  et  $Med_{42'}$ .

Nous détaillons la détermination de ces sommets dans la partie suivante.

### Points d'intersections des médiatrices candidates

Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points.  $I(x_I, y_I)$  est le milieu du segment  $[AB]$ . Soit  $M(x, y)$ , un point de la médiatrice de  $[AB]$ . Alors  $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{MI}$ . Ce qui se traduit par  $(x_I - x) \times (x_I - x_A) + (y_I - y) \times (y_I - y_A) = 0$ . Or

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Sous réserve de l'ordre total préétabli, nous pouvons donc poser les équations suivantes pour la médiatrice :

- Si  $y_A \neq y_B$  alors

$$y = \left(-\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right) \times x + \frac{1}{2} \times \left[ y_A + y_B + (x_A + x_B) \times \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right) \right] \quad (3.3)$$

- Sinon si  $x_A \neq x_B$

$$x = \frac{1}{2} \times (x_A + x_B)$$

Nous étudierons après les cas particuliers  $y_A = y_B$  ou  $x_A = x_B$ .

Considérons deux médiatrices  $Med_1$  et  $Med_2$  d'équations respectives :

$$\begin{cases} y_1 = \left(-\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right) \times x_1 + \frac{1}{2} \times \left[ y_{A_1} + y_{B_1} + (x_{A_1} + x_{B_1}) \times \left(\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right) \right] \\ y_2 = \left(-\frac{x_{B_2} - x_{A_2}}{y_{B_2} - y_{A_2}}\right) \times x_2 + \frac{1}{2} \times \left[ y_{A_2} + y_{B_2} + (x_{A_2} + x_{B_2}) \times \left(\frac{x_{B_2} - x_{A_2}}{y_{B_2} - y_{A_2}}\right) \right] \end{cases}$$

Alors l'intersection  $M(x, y)$  des deux médiatrices s'obtient en résolvant  $y_1 = y_2$ . Les valeurs de  $x$  et  $y$  obtenues vérifient alors :

$$\begin{cases} y = \left(-\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right)x + \frac{1}{2} \left[ y_{A_1} + y_{B_1} + (x_{B_1} - x_{A_1}) \left(\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right) \right] \\ x \left( \frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} - \frac{x_{B_2} - x_{A_2}}{y_{B_2} - y_{A_2}} \right) = \\ \frac{1}{2} \left[ -y_{A_2} - y_{B_2} - (x_{A_2} + x_{B_2}) \left(\frac{x_{B_2} - x_{A_2}}{y_{B_2} - y_{A_2}}\right) + y_{A_1} + y_{B_1} + (x_{A_1} + x_{B_1}) \left(\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right) \right] \end{cases}$$

Nous en déduisons les valeurs suivantes de  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} y = \left(-\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right)x + \frac{1}{2} \left[ y_{A_1} + y_{B_1} + (x_{A_1} + x_{B_1}) \left(\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right) \right] \\ x = \frac{(y_{B_1} - y_{A_1})(y_{B_2} - y_{A_2}) \times \left[ y_{A_1} + y_{B_1} + (x_{A_1} + x_{B_1}) \left(\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}}\right) - y_{A_2} - y_{B_2} - (x_{A_2} + x_{B_2}) \left(\frac{x_{B_2} - x_{A_2}}{y_{B_2} - y_{A_2}}\right) \right]}{2((x_{B_1} - x_{A_1})(y_{B_2} - y_{A_2}) - (x_{B_2} - x_{A_2})(y_{B_1} - y_{A_1}))} \end{cases}$$

### 3.3 Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance

Après réécriture, nous déduisons que les coordonnées de l'intersection des médiatrices de  $[A_1B_1]$  et  $[A_2B_2]$  sont données par  $x$  et  $y$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(y_{B_1}-y_{A_1})(y_{B_2}-y_{A_2}) \times \left[ y_{A_1}+y_{B_1}+(x_{A_1}+x_{B_1})\left(\frac{x_{B_1}-x_{A_1}}{y_{B_1}-y_{A_1}}\right)-y_{A_2}-y_{B_2}-(x_{A_2}+x_{B_2})\left(\frac{x_{B_2}-x_{A_2}}{y_{B_2}-y_{A_2}}\right) \right]}{2((x_{B_1}-x_{A_1})(y_{B_2}-y_{A_2})-(x_{B_2}-x_{A_2})(y_{B_1}-y_{A_1}))} \\ y = -\frac{(y_{B_2}-y_{A_2}) \times (x_{B_1}-x_{A_1}) \times \left[ y_{A_1}+y_{B_1}+(x_{A_1}+x_{B_1})\left(\frac{x_{B_1}-x_{A_1}}{y_{B_1}-y_{A_1}}\right)-y_{A_2}-y_{B_2}-(x_{A_2}+x_{B_2})\left(\frac{x_{B_2}-x_{A_2}}{y_{B_2}-y_{A_2}}\right) \right]}{2 \times ((x_{B_1}-x_{A_1})(y_{B_2}-y_{A_2})-(x_{B_2}-x_{A_2})(y_{B_1}-y_{A_1}))} \\ + \frac{1}{2} \left[ y_{A_1} + y_{B_1} + (x_{A_1} + x_{B_1}) \left( \frac{x_{B_1}-x_{A_1}}{y_{B_1}-y_{A_1}} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Une fois que nous pouvons déterminer les bords et les sommets de la médiatrice généralisée, nous pouvons déterminer son dual. Nous détaillons cela dans la partie suivante.

#### Calcul dans l'espace des paramètres

En appliquant l'équation 3.2 aux couples de sommets nous déterminons les paramètres des duaux des huit médiatrices retenues dans le tableau suivant :

TABLE 3.6 – Caractéristiques des duaux des cotés de la médiatrice généralisée simplifiée

	Coordonnées
$Dual(Med_{13'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P}{y_P-y_{P'}+1}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'}+1)} \left[ (x_P - \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} - \frac{1}{2})^2 + (y_P + \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} - \frac{1}{2})^2 \right] \right)$
$Dual(Med_{14'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P+1}{y_P-y_{P'}+1}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'}+1)} \left[ (x_P - \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} + \frac{1}{2})^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} + \frac{1}{2})^2 \right] \right)$
$Dual(Med_{22'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P}{y_P-y_{P'}}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'})} \left[ (x_P + \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} + \frac{1}{2})^2 + (y_P + \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} + \frac{1}{2})^2 \right] \right)$
$Dual(Med_{24'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P}{y_P-y_{P'}+1}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'})} \left[ (x_P + \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} + \frac{1}{2})^2 + (y_P + \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} - \frac{1}{2})^2 \right] \right)$
$Dual(Med_{31'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P}{y_P-y_{P'}-1}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'}-1)} \left[ (x_P - \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} - \frac{1}{2})^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} + \frac{1}{2})^2 \right] \right)$
$Dual(Med_{33'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P}{y_P-y_{P'}}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'})} \left[ (x_P - \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} - \frac{1}{2})^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} - \frac{1}{2})^2 \right] \right)$
$Dual(Med_{41'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P-1}{y_P-y_{P'}-1}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'})} \left[ (x_P + \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} - \frac{1}{2})^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} + \frac{1}{2})^2 \right] \right)$
$Dual(Med_{42'})$	$\left( \frac{x_{P'}-x_P}{y_P-y_{P'}-1}, \frac{1}{2 \times (y_P-y_{P'})} \left[ (x_P + \frac{1}{2})^2 - (x_{P'} + \frac{1}{2})^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 - (y_{P'} + \frac{1}{2})^2 \right] \right)$

Le dual de l'intersection de deux médiatrices est une droite qui porte les deux points duaux associés aux médiatrices. Donc pour représenter les intersections des médiatrices dans l'espace dual, on trace les segments joignant les duaux des médiatrices concernées. Nous obtenons alors un polygone qui représente le dual de la médiatrice généralisée comme sur la Figure 3.21. Nous pouvons dire que ce polygone a au plus huit cotés. Ce nombre maximum de cotés est induit par le nombre de médiatrices (08) participant au calcul de la médiatrice généralisée. Il y a en effet huit (08) points duaux correspondant aux huit médiatrices ; alors le polygone issu de la jonction des huit sommets suivant les intersections des médiatrices associées ne peut avoir plus de huit cotés. Cependant il y a des spécificités lors la médiatrice généralisée contient des médiatrices verticales (comme dans le cas où les pixels ont la même ordonnée sur la Figure 3.27). Parce que dans ce cas la pente minimale de la médiatrice généralisée est à  $-\infty$  tandis que sa pente maximale est à  $\infty$ .

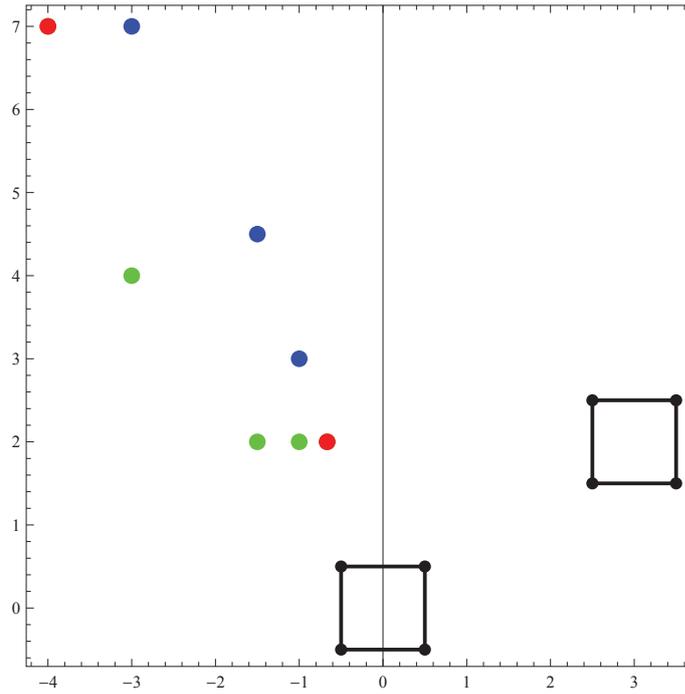


FIGURE 3.20 – Les points duaux des médiatrices pour les pixels  $P(0,0)$  et  $P'(3,2)$ . Les duaux de  $Med_{31'}$ ,  $Med_{33'}$ , et  $Med_{13'}$  sont en vert puis ceux de  $Med_{24'}$ ,  $Med_{22'}$  et  $Med_{42'}$  sont en bleu ceux de  $Med_{14'}$ , et  $Med_{41'}$  sont en rouge.

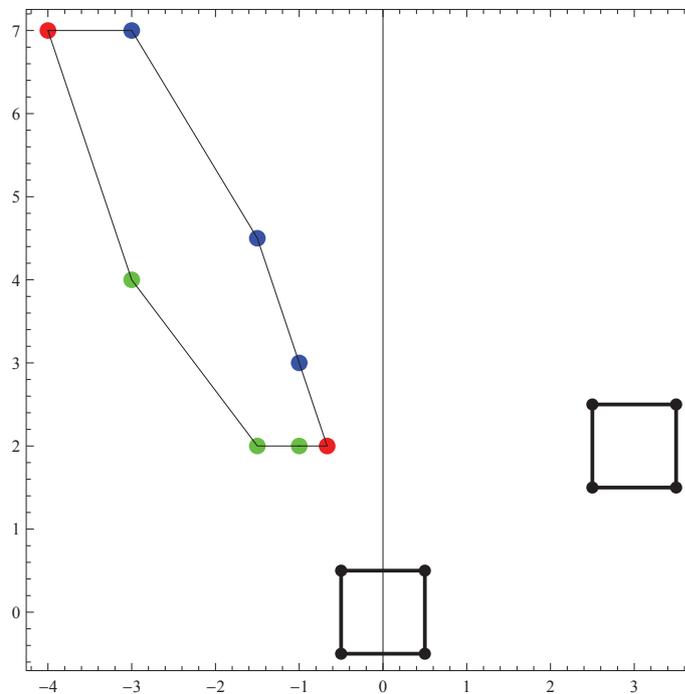


FIGURE 3.21 – Pour les pixels  $P(0,0)$  et  $P'(3,2)$ , le polygone obtenu en joignant les duaux des médiatrices qui s'intersectent. Il s'agit du dual des bords de la médiatrice généralisée.

Dans la suite nous étudions la détermination du dual de la médiatrice généralisée dans d'autres configurations.

#### Généralisation pour les autres configurations de pixels

Dans cette partie nous étudions les autres configurations de pixels. Nous gardons toujours l'ordre de gauche vers la droite ( $\leq_x$ ) et nous nous intéressons aux cas où  $P >_y P'$  ou  $P =_x P'$  ou encore  $P =_y P'$ .

##### Cas où $P >_y P'$

Cette configuration peut s'obtenir à partir de la configuration d'origine par symétrie axiale avec axe de symétrie l'axe (OX) (voir la Figure 3.22). Les distances sont conservées et les médiatrices sont croissantes. Il faut cependant remarquer qu'une telle symétrie induit un changement des numéros des sommets ; c'est ce qui explique le fait que les médiatrices participant aux bords de la médiatrice généralisée des deux pixels ne soient plus les mêmes comme l'illustre la Figure 3.23.

En effet :

- le bord droit de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{23'}$ , puis d'une partie de  $Med_{13'}$ , puis d'une partie de  $Med_{11'}$ , puis d'une partie de  $Med_{31'}$ , et d'une partie de  $Med_{32'}$  ;
- le bord gauche de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{32'}$ , puis d'une partie de  $Med_{42'}$ , puis d'une partie de  $Med_{44'}$ , puis d'une partie de  $Med_{24'}$ , et d'une partie de  $Med_{23'}$ .

Par conséquent les intersections à calculer sont :

- entre  $Med_{32'}$  et  $Med_{31'}$  et entre  $Med_{14'}$  et  $Med_{24'}$  ;
- entre  $Med_{23'}$  et  $Med_{13'}$  et entre  $Med_{41'}$  et  $Med_{42'}$  ;
- entre  $Med_{13'}$  et  $Med_{11'}$  et entre  $Med_{11'}$  et  $Med_{31'}$  ;
- entre  $Med_{42'}$  et  $Med_{44'}$  et entre  $Med_{44'}$  et  $Med_{24'}$ .

Il suffit de répercuter ces changements sur l'approche précédente pour calculer la médiatrice généralisée (figure 3.23) et son dual (figure 3.24) dans cette configuration.

##### Cas où $P =_x P'$

Lorsque les deux pixels ont la même abscisse, les médiatrices à considérer pour le calcul du bord de leur médiatrice généralisée changent. Ainsi :

- le bord gauche de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{23'}$ , puis d'une partie de  $Med_{43'}$ , puis d'une partie de  $Med_{34'}$ , et d'une partie de  $Med_{14'}$  ;
- le bord droit de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{14'}$ , puis d'une partie de  $Med_{12'}$ , puis d'une partie de  $Med_{21'}$ , et d'une partie de  $Med_{23'}$ .

Par conséquent les intersections à calculer sont :

- entre  $Med_{14'}$  et  $Med_{12'}$  et entre  $Med_{14'}$  et  $Med_{34'}$  ;
- entre  $Med_{23'}$  et  $Med_{21'}$  et entre  $Med_{23'}$  et  $Med_{43'}$  ;
- entre  $Med_{12'}$  et  $Med_{21'}$  ;
- entre  $Med_{43'}$  et  $Med_{34'}$ .

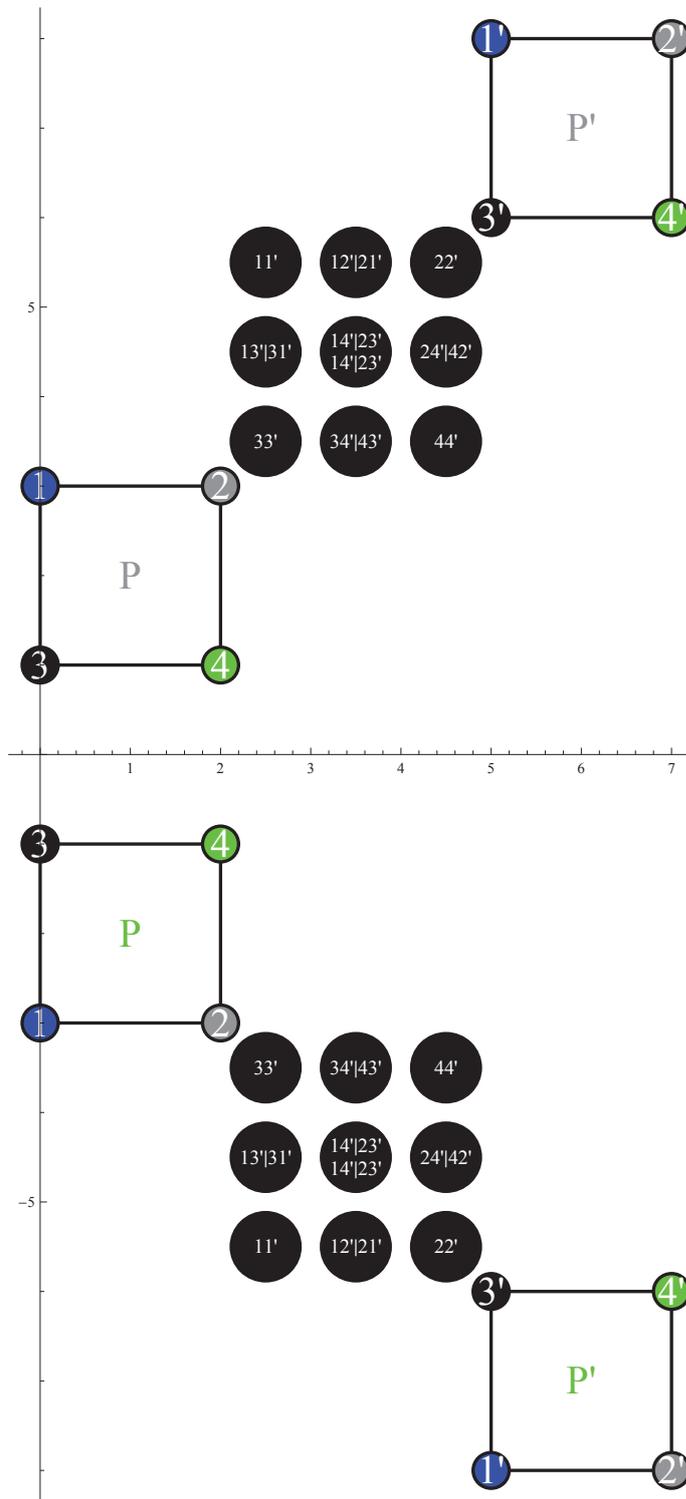


FIGURE 3.22 – Les configurations de pixels où  $P >_y P'$  peuvent être ramenées aux configurations d'origine ( $P \leq_x P'$  et  $P \leq_y P'$ ) par symétrie axiale (OX).

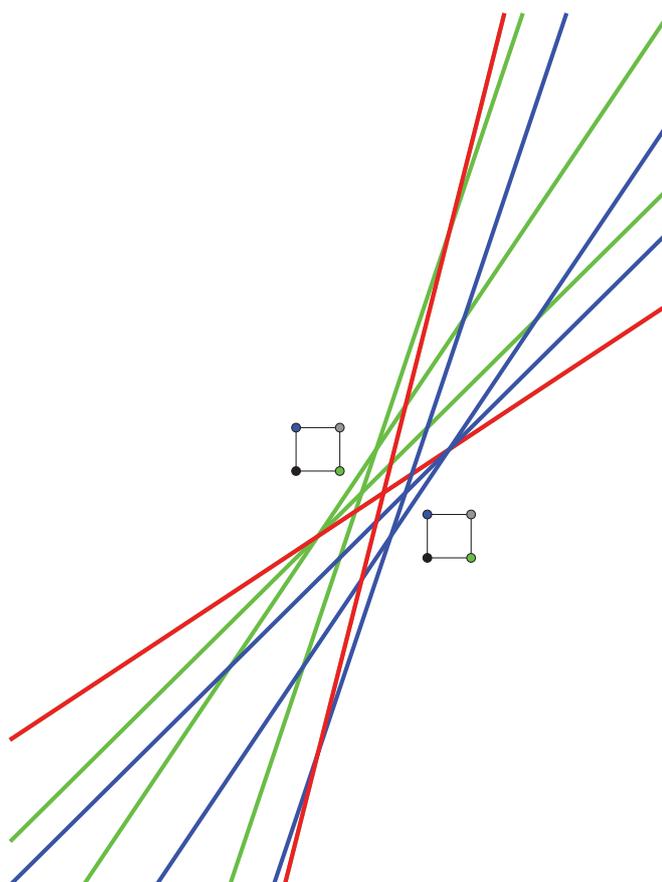


FIGURE 3.23 – Médiatrice généralisée quand  $P >_y P'$  avec  $P(0,0)$  et  $P'(3,-2)$ .

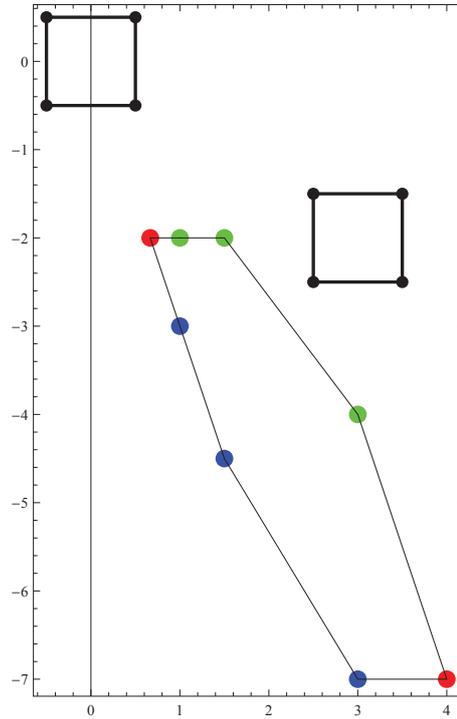


FIGURE 3.24 – Dual de la médiatrice généralisée quand  $P >_y P'$  avec  $P(0,0)$  et  $P'(3,-2)$ .

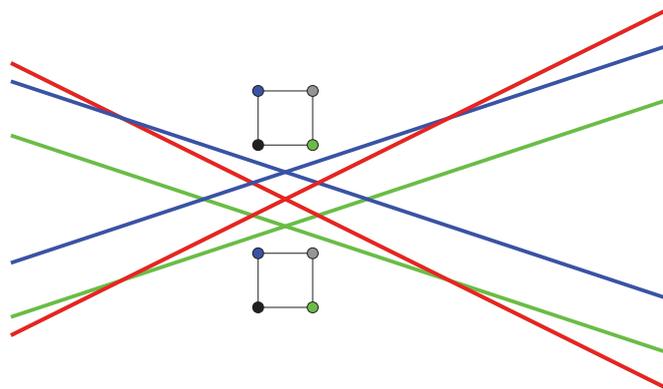


FIGURE 3.25 – Médiatrice généralisée quand  $P =_x P'$  avec  $P(0,0)$  et  $P'(0,2)$ .

### 3.3 Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance

Pour cette configuration, nous représentons la médiatrice généralisée sur la Figure 3.25 et son dual sur la Figure 3.26.

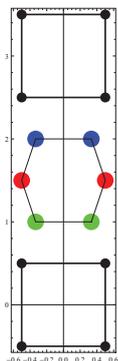


FIGURE 3.26 – Dual de la médiatrice généralisée quand  $P =_x P'$  avec  $P(0,0)$  et  $P'(0,3)$ .

Cas où  $P =_y P'$

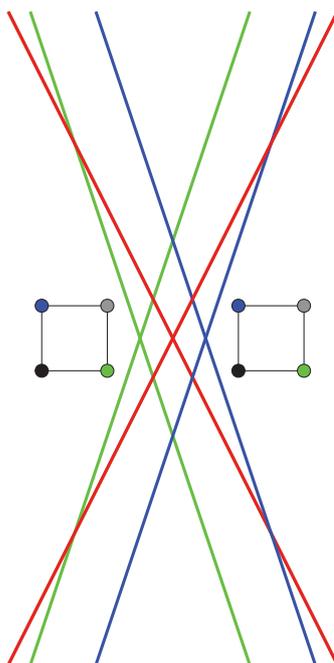


FIGURE 3.27 – Médiatrice généralisée quand  $P =_y P'$  avec  $P(0,0)$  et  $P'(3,0)$ .

Pour cette configuration, les deux pixels ont la même ordonnée et on a :

- le bord gauche de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{23'}$ , puis d'une partie de  $Med_{13'}$ , puis d'une partie de  $Med_{31'}$ , et d'une partie de  $Med_{41'}$  ;
- le bord droit de la médiatrice généralisée est constitué d'une partie de  $Med_{41'}$ , puis d'une partie de  $Med_{42'}$ , puis d'une partie de  $Med_{24'}$ , et d'une partie de  $Med_{23'}$ .

Par conséquent les intersections à calculer sont :

- entre  $Med_{41'}$  et  $Med_{31'}$  et entre  $Med_{41'}$  et  $Med_{42'}$  ;
- entre  $Med_{23'}$  et  $Med_{13'}$  et entre  $Med_{23'}$  et  $Med_{24'}$  ;
- entre  $Med_{13'}$  et  $Med_{31'}$  ;
- entre  $Med_{42'}$  et  $Med_{24'}$  .

Pour cette configuration, nous représentons la médiatrice généralisée sur la figure 3.27 et son dual sur la figure 3.28.

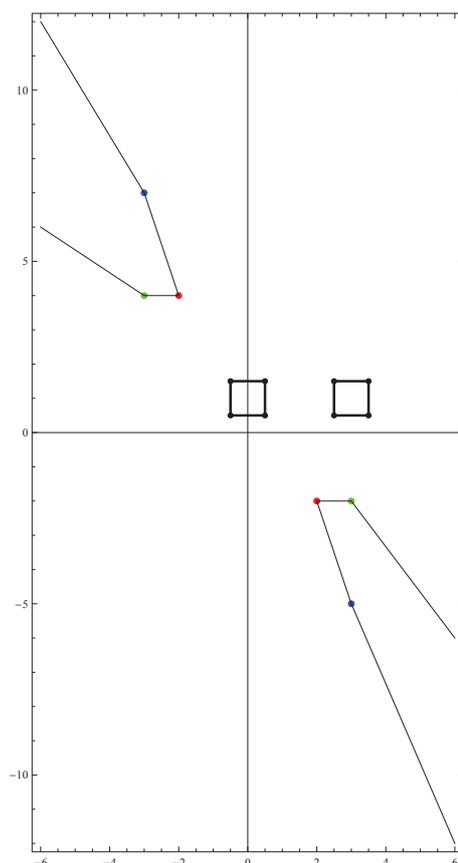


FIGURE 3.28 – Dual de la médiatrice généralisée quand  $P =_y P'$  avec  $P(0,0)$  et  $P'(3,0)$  : il y a deux polygones convexes dû au fait que des médiatrices verticales sont dans la médiatrice généralisée.

Le centre généralisé du cercle circonscrit est l'intersection des différentes médiatrices généralisées. Cela se traduit dans l'espace dual par la détermination de l'ensemble des droites qui passent par tous les duaux des médiatrices généralisées. Nous détaillons cela dans la partie suivante.

### Dual du centre généralisé

Nous considérons dans cette partie, trois pixels  $P$ ,  $P'$  et  $P''$ . Le centre généralisé de  $P$ ,  $P'$  et  $P''$ , que l'on note  $\mathcal{C}_{Gen}(P, P', P'')$  est l'intersection des médiatrices généralisées des couples de pixels que l'on peut former avec les trois pixels (voir la Figure 3.29). Par conséquent, le dual du centre généralisé que l'on note

### 3.3 Contributions à l'amélioration des approches de reconnaissance

$Dual(\mathbb{C}_{Gen}(P, P', P''))$  est l'ensemble des droites qui coupe tous les duaux des médiatrices généralisées des couples de pixels pris parmi P, P' et P''.

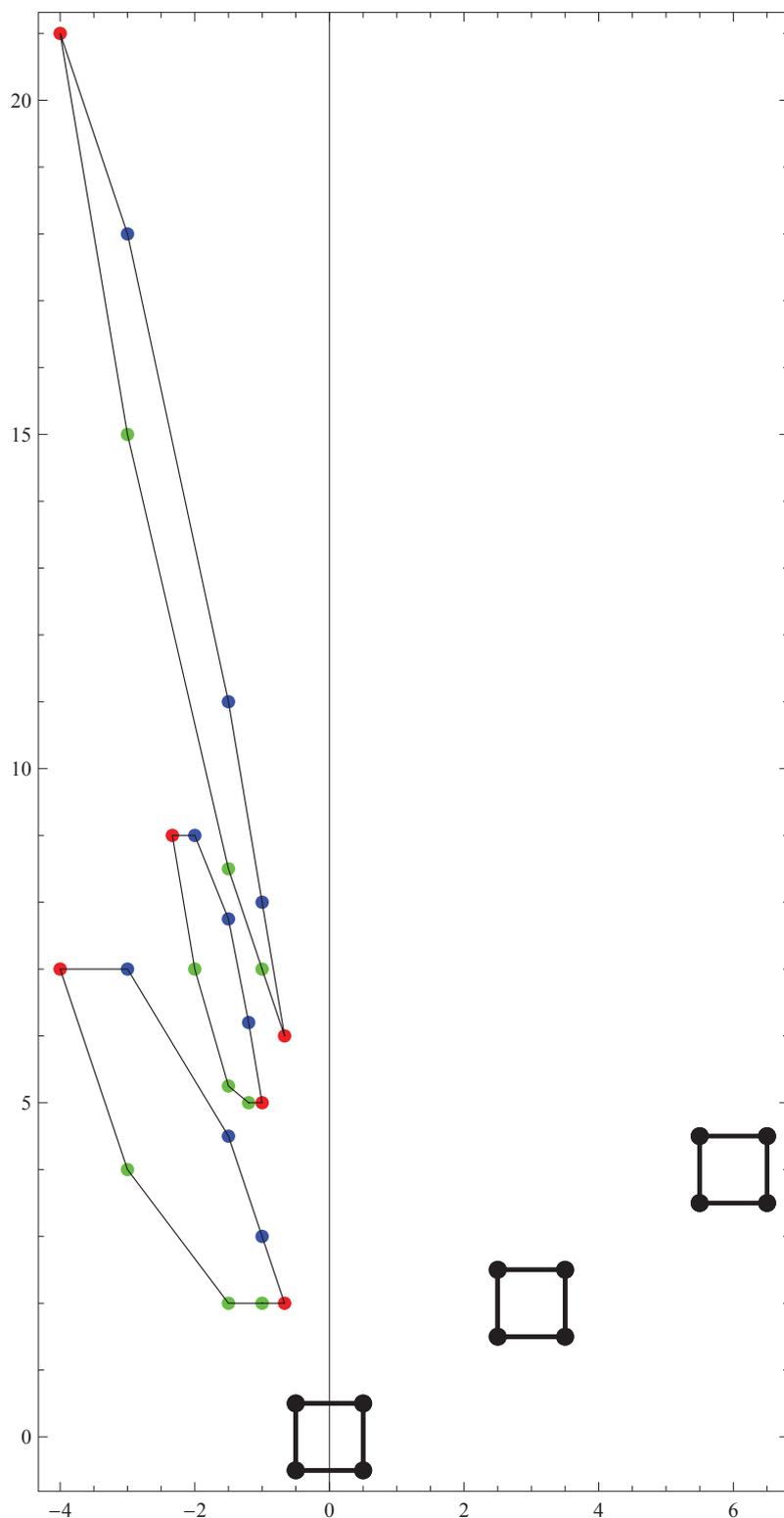


FIGURE 3.29 – Pour les pixels  $P(0,0)$ ,  $Q(3,2)$  et  $R(6,4)$ , les duaux des médiatrices généralisées correspondantes.

La reconnaissance proprement dite est basée sur des techniques de visibilité. Étant donné un ensemble de polygones on aimerait déterminer au moins une droite qui les traverse toutes.

### 3.3.2 Préimage généralisée basée frontières

Dans cette sous-sections nous proposons de calculer la préimage généralisée à l'aide de la notion de frontière que nous introduisons. La frontière est la partie commune aux hypervoxels associés à deux points discrets voisins.

Dans la suite, nous considérons un espace de dimension  $n$  et  $\mathcal{D}$  représente un ensemble de  $k$  pavés  $P_i(x_{ij}, l_{ij})_{j=\overline{1,n}, i=\overline{1,k}}$ . Nous considérons la même notation des sommets de pixels que Dexet dans [Dexet 06a].

**Définition 3.3.1** (Frontière de deux pavés). *Soient deux pavés au moins e-adjacents,  $P_1(x_{1j}, l_{1j})_{j=\overline{1,n}}$  et  $P_2(x_{2j}, l_{2j})_{j=\overline{1,n}}$ , on appelle frontière de  $P_1$  et de  $P_2$  et on note  $F_{1,2}$  l'intersection des composantes adjacentes de  $P_1$  et de  $P_2$ .*

$$F_{1,2} = \left\{ (x_j)_{j=1,n} \right\} \mid \begin{cases} |x_j - x_{1j}| \leq \frac{l_{1j}}{2} \\ |x_j - x_{2j}| \leq \frac{l_{2j}}{2} \end{cases}$$

La Figure 3.30 illustre des frontières d'ensemble de pixels en dimension 2. Cette

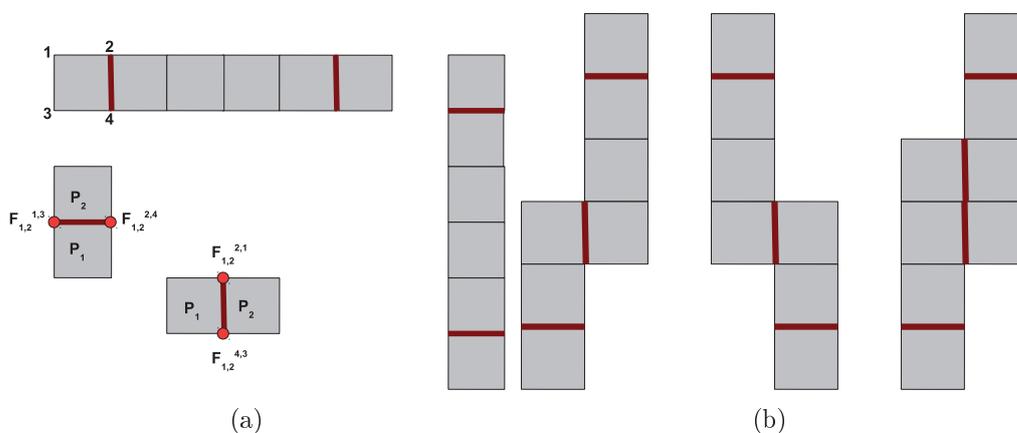


FIGURE 3.30 – Caractérisation des frontières d'ensemble de pixels : les segments en rouge caractérisent les frontières. (a) Caractérisation des frontières de pixels alignés verticalement ou horizontalement : les sommets des pixels sont notés de 1 à 4 comme sur le palier horizontal et les sommets des frontières sont notés comme sur les deux frontières de base. (b) Caractérisation des frontières de deux rangées verticales de pixels. Que la pente soit positive ou négative le principe est le même.

notion de frontière est également applicable directement aux grilles irrégulière isothétique. La Figure illustre des frontières pour des ensembles de pavés en dimension 2. La Figure 3.32 illustre des frontières d'ensemble de voxels ou de pavés en dimension 3.

La notion de frontière implique la propriété triviale suivante :

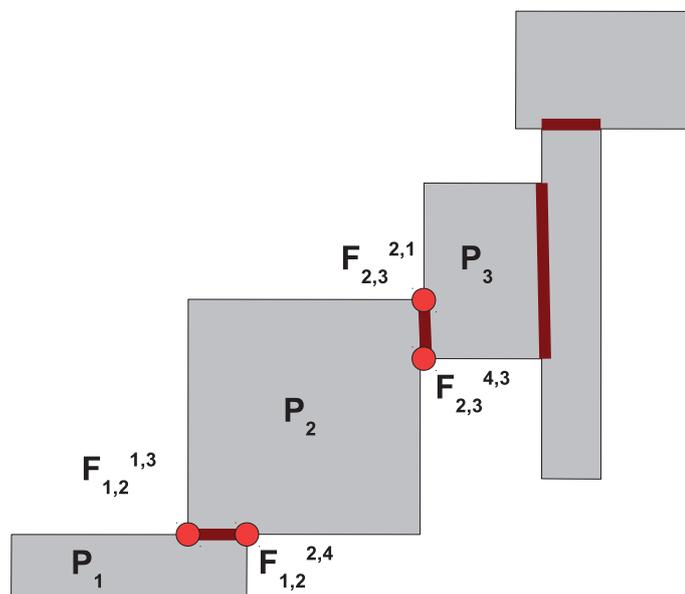


FIGURE 3.31 – Caractérisation des frontières de pavés quelconques : la frontière peut être tout ou partie d'un côté ; on adopte cependant les mêmes notations que pour les frontières de pixels.

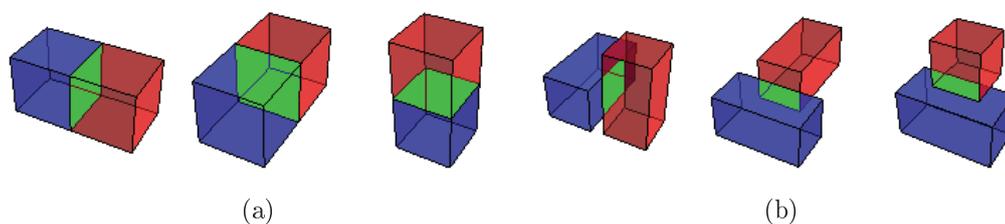


FIGURE 3.32 – Caractérisation des frontières en dimension 3 : la frontière est illustrée en vert. (a) Caractérisation des frontières de voxels. (b) Caractérisation des frontières de pavés en dimension 3.

**Propriété 3.3.1.** Soient deux pavés  $e$ -adjacents,  $P_1$  et  $P_2$  et soit  $F_{1,2}$  leur frontière. Si  $P_1$  et  $P_2$  appartiennent à la discrétisation d'un segment euclidien  $S$  alors  $S$  passe forcément par  $F_{1,2}$ .

Nous en déduisons le corollaire suivant :

**Corollaire 3.3.1.** Soient deux pavés  $e$ -adjacents,  $P_1$  et  $P_2$  et soit  $F_{1,2}$  leur frontière. La préimage de  $F_{1,2}$  est incluse dans l'intersection des préimages de  $P_1$  et  $P_2$ . Mieux seule la préimage de  $F_{1,2}$  intervient dans le calcul de la préimage généralisée de  $\mathcal{D}$ .

**Preuve 3.3.1.** La preuve de l'inclusion de la préimage de  $F_{1,2}$  dans l'intersection des préimages de  $P_1$  et  $P_2$  est immédiate puisque  $F_{1,2}$  est l'intersection des composantes adjacentes de  $P_1$  et  $P_2$ . Supposons que seule la préimage de  $F_{1,2}$  ne suffit pas pour représenter l'apport de  $P_1$  et  $P_2$  dans le calcul la préimage généralisée. Cela voudrait dire que la préimage généralisée admette des droites solutions dont les équivalents euclidiens ne passent pas par  $F_{1,2}$ . Ce qui implique que

- soit  $P_1$  soit  $P_2$  ne serait pas dans une telle droite solution ;
- ou qu'il existerait un autre pavé adjacent à  $P_1$  et  $P_2$  dans la droite solution.

Dans l'un ou l'autre des cas la préimage généralisée ne serait pas celle de  $\mathcal{D}$ .  $\square$

**Proposition 3.3.1** (Calcul de la préimage généralisée). Pour calculer la préimage généralisée d'un ensemble de pavés  $P_i (x_{ij}, l_{ij})_{j=\overline{1,n}, i=\overline{1,k}}$  il suffit de calculer l'intersection des préimages des frontières des pavés adjacents.

Pour le cas particulier des pavés à la même échelle il faut considérer les frontières de paliers de pavés ainsi que les premières et dernières frontières.

La Figure 3.33 illustre la préimage généralisée de frontières horizontales et verticales.

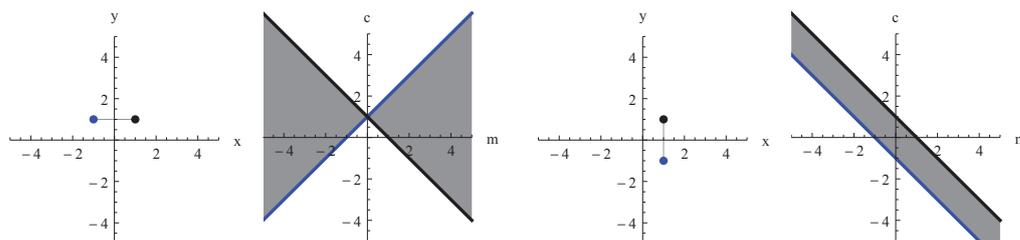


FIGURE 3.33 – Prémimage de frontières horizontale et verticale.

Dans la suite nous mettons en application la proposition 3.3.1 sur des cas classiques (échelle identique) de calcul de préimage généralisée.

**Corollaire 3.3.2** (Préimage généralisée d'un alignement de pavés  $(n - 1)$ -voisins).  
 Lorsque des pixels 1-voisins deux à deux, sont alignés verticalement ou horizontalement, leur préimage généralisée peut être déterminée à l'aide de la frontière entre les deux premiers hypervoxels  $F_{1,2}$  et les deux derniers hypervoxels  $F_{n-1,n}$ . La Figure 3.34 et la Figure 3.35 illustrent ces types de configurations.

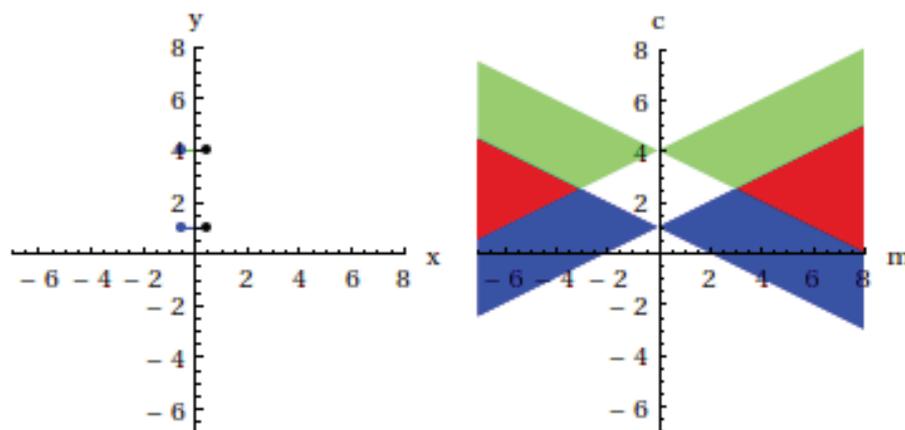


FIGURE 3.34 – En rouge la préimage généralisée de pixels alignés verticalement calculée à partir des frontières.

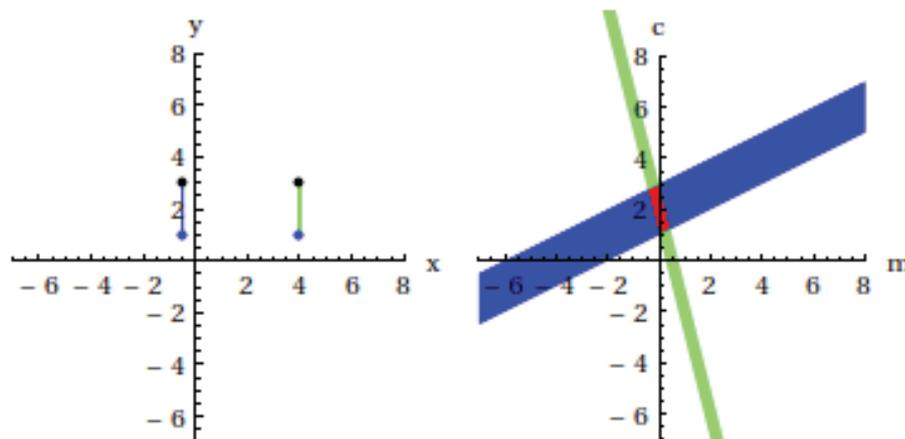


FIGURE 3.35 – En rouge la préimage généralisée de pixels alignés horizontalement calculée à partir des frontières.

**Corollaire 3.3.3** (Préimage généralisée de deux rangées verticales de pavés  $(n-1)$ -voisins).  
 Lorsque des pavés  $n - 1$ -voisins deux à deux, sont portés par deux rangées verticales adjacentes, leur préimage généralisée peut être déterminée à l'aide des frontières des deux premiers hypervoxels  $F_{1,2}$ , de la frontière entre les 2 paliers  $F_{A,B}$ , et de la frontière des deux derniers hypervoxels  $F_{n-1,n}$ . C'est ce qu'illustre la Figure 3.36.

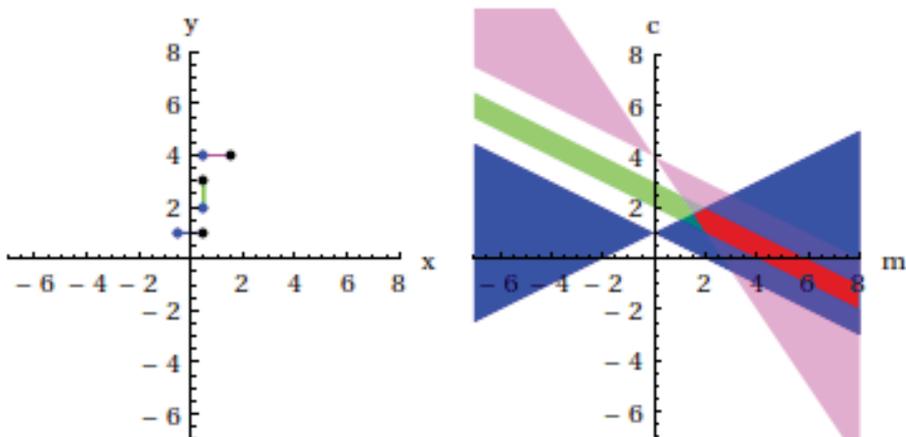


FIGURE 3.36 – En rouge la préimage généralisée de 2 rangées verticales de pixels, calculée à partir des frontières.

**Corollaire 3.3.4** (Autres cas). *Pour les autres configurations, on peut ramener le problème à celui de rangées verticales ou horizontales adjacentes de pavés  $(n - 1)$ -voisins et mener une approche similaire à celle de deux rangées verticales de pavés  $(n - 1)$ -voisins. Ainsi pour calculer la préimage généralisée on a besoin des frontières des deux premiers hypervoxels  $F_{1,2}$ , des frontières entre les paliers adjacents  $F_{A_i, B_i}$ , et de la frontière des deux derniers hypervoxels  $F_{n-1, n}$ . C'est ce qu'illustre la Figure 3.37.*

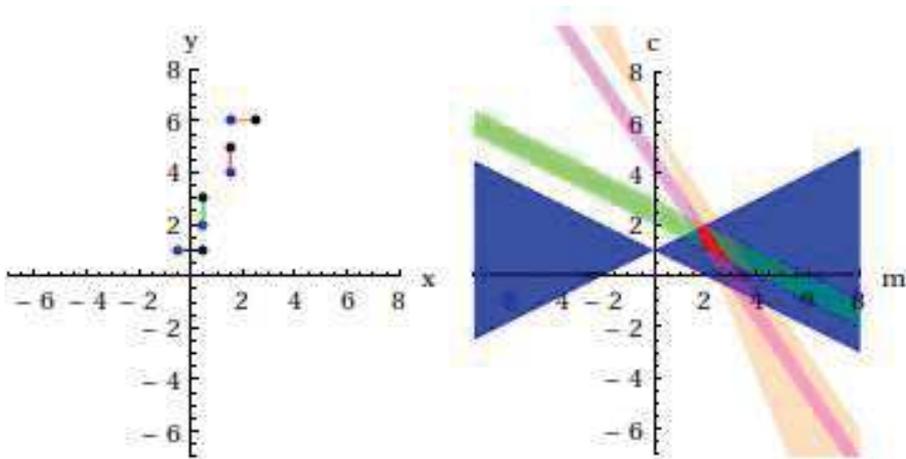


FIGURE 3.37 – En rouge la préimage généralisée de configuration quelconque de pixels, calculée à partir des frontières.

En dimension 2, le calcul de la préimage généralisée se base alors sur le calcul d'intersection de deux d'objets en dimension 1 et en dimension 3 elle se base sur le calcul d'intersection d'objets en dimension 2 comme l'illustre la Figure 3.38. Donc nous pouvons non seulement utiliser les préimages généralisées de frontières pour

reconnaître les droites discrètes mais cela ramène un problème en dimension  $n$  à un problème de dimension  $n - 1$ . Nous détaillons cela dans la sous-section suivante.

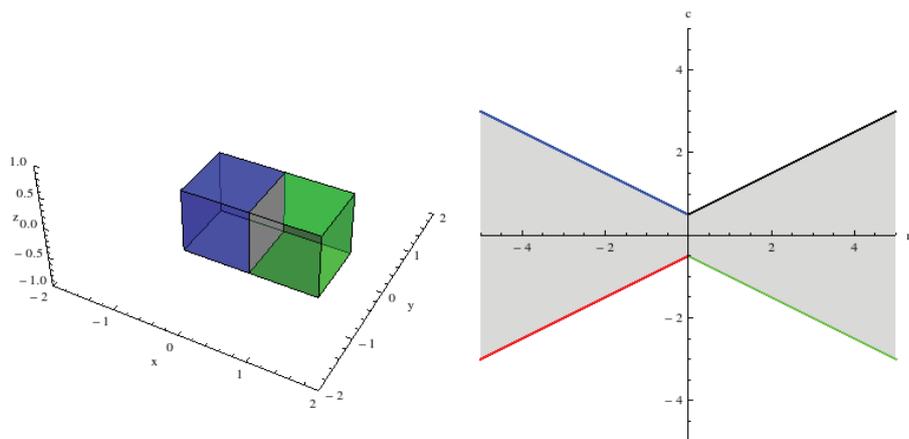


FIGURE 3.38 – Illustration du dual de la frontière de deux voxels : le dual est un objet de dimension 2 comme la frontière (en gris).

#### 3.3.3 Modification de l'algorithme de reconnaissance de droite

Pour faire de la reconnaissance de droites discrètes en utilisant la notion de frontière, nous proposons la démarche suivante qui est inspirée de l'approche de reconstruction de Vacavant [Vacavant 08] :

1. Soit  $P_1$  le pavé ayant la plus petite abscisse. S'il y en a plusieurs dont les abscisses sont identiques on choisit celui dont la largeur  $l_x^p$  est la plus grande. S'il y en a plusieurs on choisit de façon arbitraire celui dont l'ordonnée est la plus petite et on ordonne les pavés suivant ce principe ;
2. On calcule la frontière entre  $P_1$  et son voisin  $P_2$  ;
3. Si la frontière est un segment vertical, le sommet dont la valeur de l'ordonnée est maximale est marqué  $F_{1,2}^{21}$  et l'autre sommet est marqué  $F_{1,2}^{43}$ . Si la frontière est un segment horizontal, le sommet dont la valeur de l'abscisse est minimale est marqué  $F_{1,2}^{13}$  et l'autre sommet est marqué  $F_{1,2}^{24}$  ;
4. On calcule la frontière entre  $P_2$  et son voisin  $P_3$  ;
5. Si la frontière est un segment vertical, le sommet dont la valeur de l'ordonnée est maximale est marqué  $F_{2,3}^{21}$  et l'autre sommet est marqué  $F_{2,3}^{43}$ . Si la frontière est un segment horizontal, le sommet dont la valeur de l'abscisse est minimale est marqué  $F_{2,3}^{13}$  et l'autre sommet est marqué  $F_{2,3}^{24}$  ;
6. On trace les droites à pente maximale et minimale qui sont respectivement  $(F_{1,2}^{43}, F_{2,3}^{21})$  et  $(F_{1,2}^{21}, F_{2,3}^{43})$  ou  $(F_{1,2}^{24}, F_{2,3}^{13})$  et  $(F_{1,2}^{13}, F_{2,3}^{24})$  ou  $(F_{1,2}^{43}, F_{2,3}^{13})$  et  $(F_{1,2}^{21}, F_{2,3}^{24})$  ou encore  $(F_{1,2}^{24}, F_{2,3}^{21})$  et  $(F_{1,2}^{13}, F_{2,3}^{43})$  ;
7. On calcule la frontière entre  $P_3$  et son voisin  $P_4$  ;
8. Si la frontière est un segment vertical, le sommet dont la valeur de l'ordonnée est maximale est marqué  $F_{3,4}^{21}$  et l'autre sommet est marqué  $F_{3,4}^{43}$ . Si la frontière

est un segment horizontal, le sommet dont la valeur de l'abscisse est minimale est marqué  $F_{3,4}^{13}$  et l'autre sommet est marqué  $F_{3,4}^{24}$  ;

9. Si la frontière est coupée par l'une des droites à pentes maximale ou minimale, ou si elle est incluse dans la zone bordée par ces droites  $P_4$  fait partie du segment de droite discret. Mais il faut redéfinir les droites à pentes maximale et minimale. Pour cela on compare les pentes des droites joignant les sommets des frontières deux à deux et on retient les extrema. Puis on reprend le procédé en calculant la frontière entre  $P_4$  et son voisin  $P_5$  ; ... (retour au 8)
10. Sinon  $P_1, P_2, P_3$  constitue le segment de droite discret.

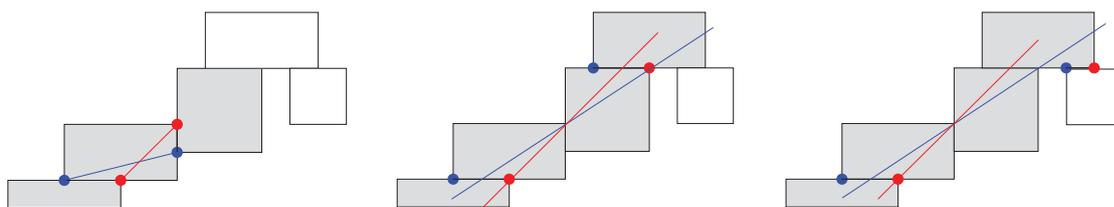


FIGURE 3.39 – Reconnaissance de droites discrètes. (a) On trace les droites de pentes maximale et minimale joignant les deux premières frontières. Les pavés gris définissent la partie de droite discrète reconnue. (b) La frontière entre le troisième et le quatrième pavés est coupée par l'une des droites définies ; le quatrième pavé est mis en gris. Et on redéfinit les droites de pentes maximale et minimale. (c) La frontière entre le cinquième et le quatrième pavés n'est pas coupée par l'une des droites précédemment définies ; l'algorithme s'arrête. Les paramètres sont définies à l'aide de la préimage généralisée des frontières calculée en même temps.

Dans la suite nous considérons les variables, structures et fonctions suivantes :

- Point représente un point de  $\mathbb{R}$  contenant en plus de son abscisse ( $x$ ) et son ordonnée ( $y$ ) un sens pour désigner le bon demi-plan dans le calcul de la préimage généralisée ;
- Pave représente un pavé caractérisé par son centre et ses sommets qui sont tous de type Point ;
- Frontiere représente une frontière caractérisée par ses extrémités de type Point ;
- Droite représente une droite caractérisée par deux de ses points de type Point ;
- Zone représente une zone délimitée par 2 droites de type Droite ;
- ListePaves représente une liste ordonnée de pavés ;
- ListeSommets représente une liste de sommets de type Point rentrant dans le calcul de la préimage généralisée ;
- $Inclus(Zone Z, Point P)$  : booléen qui renseigne si un point est au dessous du bord supérieur d'une zone et au dessus de son bord inférieur ;
- $Frontiere(Pave P, Pave Q)$  : *Frontiere* : détermine la frontière entre deux pavés voisins ;
- $Zone(Frontiere F, Frontiere G)$  : *Zone* : détermine une zone par défaut à partir de deux frontières. Le bord supérieur est la droite définie par les deux points *Premier* de chaque frontière et le bord inférieur est la droite définie par les deux points *Dernier* de chaque frontière ;

- *Coupe*(Zone  $Z$ , Frontiere  $F$ ) : Booléen : renseigne si une frontière est coupée ou incluse dans une zone ;
- *Modification*(Zone  $Z$ , Frontiere  $F$ ) : modifie les bords de la zone en fonction de la position des sommets de la frontière. En fait on recalcule les droites à pentes maximale et minimale et on remplace éventuellement les droites de la zone précédente pour définir une nouvelle zone ;
- *Dual*(Point  $P$ ) : Droite : détermine la droite duale du point en question. En fonction du pavé le plus à gauche et de celui le plus à droite on fixera les abscisses et on calculera les ordonnées de deux points pour définir la droite. La droite est tracée dans l'espace de paramètres.

L'Algorithme 7 implémente les étapes 1 à 10 de l'approche que nous avons décrite (Page 113) et permet alors la reconnaissance de droite discrète dans une grille régulière comme dans une grille irrégulière isothétique.

La complexité générale de l'algorithme 7 est linéaire. Parce qu'il parcourt tous les pavés pour déterminer les frontières, les sommets et les duaux correspondants. Par contre, vu qu'il n'est nécessaire de calculer que les préimages des frontières l'algorithme est plus rapide que l'algorithme classique qui calculerait les préimages des pavés entiers. En effet pour  $n$  pavés et avec l'approche basée frontière, il suffit de calculer les duaux de  $2 \times (n - 1)$  sommets correspondants aux extrémités des  $n - 1$  frontières tandis qu'on devrait calculer les duaux de  $4 \times n$ . En plus, les calculs d'intersections entre préimage à faire qui sont rendus simples, l'Algorithme 7 est nettement plus rapide que l'algorithme classique.

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des travaux sur l'utilisation d'un espace dual dans la reconnaissance de droite et de cercle discrets.

Nous avons d'abord discuté du calcul du dual de la médiatrice généralisée dans différentes configurations de pixels. Avec ces duaux, les calculs sont plus faciles et la complexité est moindre par rapport au calcul classique. En effet le calcul d'intersection revient à un test de visibilité ce qui a déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Nos travaux sur les duaux de la médiatrice généralisée et du centre généralisé permettent ainsi de diminuer le temps de calcul et la complexité du centre généralisé.

Nous avons ensuite présenté des travaux sur l'amélioration du calcul de la préimage généralisée dans un cadre général en introduisant la notion de frontière. Avec cette notion, les formes de la préimage généralisée deviennent très simples et leurs intersections sont par conséquent plus faciles à calculer. Puis nous avons présenté des spécificités de la préimage généralisée d'un ensemble de pavés.

Comme perspectives aux calculs des duaux de la médiatrice généralisée ainsi que du centre généralisé nous envisageons de faire de la reconnaissance générique de primitives discrètes. En effet maintenant que nous pouvons déterminer le dual du centre généralisé et la préimage généralisée, une étude des deux formes pourrait permettre de définir des liens et éventuellement aboutir à des méthodes de reconnaissance simultanées de l'ensemble des droites candidates passant par un ensemble de pixels et l'ensemble des centres candidats de cercles passant par ces pixels.

---

**Algorithme 7** : ReconnaissanceDroite(Liste de Pave ListePaves)

---

```

1  début
2  |   Pave Prem, Sec, Der, Test ;
3  |   Frontiere Frt1, Frt2, Front;
4  |   Zone Z ;
5  |   Liste de Droite duales;
6  |   Liste de Point sommets ;
7  |   Liste de Frontiere frontieres ;
8  |   Booleen Fin ← Faux ;
9  |   Iterateur it ← ListePaves.Iterateur() ;
10 |   Prem ← (*it); it ++ ;
11 |   Sec ← (*it); it ++ ;
12 |   Der ← (*it); it ++ ;
13 |   Frt1 ← Frontiere(Prem, Sec) ;
14 |   Frt2 ← Frontiere(Sec, Der) ;
15 |   Z ← Zone(Frt1, Frt2) ;
16 |   sommets.ajoute(Frt1.Prem, Frt1.Der, Frt2.Prem, Frt2.Der) ;
17 |   duales.ajoute(Dual(Frt1.Prem), Dual(Frt1.Der)) ;
18 |   duales.ajoute(Dual(Frt2.Prem), Dual(Frt2.Der))
19 |   frontieres.ajoute(Frt1, Frt2) ;
20 |   Tant que !Fin & it ≠ null faire
21 |   |   Pavetest ← (it);
22 |   |   Front ← Frontiere(Der, Test) ;
23 |   |   Si Coupe(Z, Front) alors
24 |   |   |   Modification(Z, Front) ;
25 |   |   |   frontieres.ajoute(Front) ;
26 |   |   |   Si Inclus(Z, Front.Prem) alors
27 |   |   |   |   sommets.ajoute(Front.Prem) ;
28 |   |   |   |   duales.ajoute(Dual(Front.Prem)) ;
29 |   |   |   Si Inclus(Z, Front.Der) alors
30 |   |   |   |   sommets.ajoute(Front.Der) ;
31 |   |   |   |   duales.ajoute(Dual(Front.Der)) ;
32 |   |   |   Der ← Pavetest; it ++ ;
33 |   |   sinon
34 |   |   |   Fin ← Vrai ;

```

---

---

---

# Conclusion Générale et Perspectives

---

## Conclusion Générale

Nous avons proposé ou amélioré des approches de reconnaissance de primitives discrètes (droites, sous-segments, arcs et cercles essentiellement) pour qu'elles puissent s'appliquer aussi bien dans des grilles multi-échelles que dans les espaces discrets classiques. Tout au long de nos travaux, nous nous sommes basés sur des notions et approches utilisées dans la géométrie discrète classique (où les éléments structurants ont une échelle uniforme) et avons mené les travaux dans des espaces de dimension 2. Puis nous avons discuté selon les cas de l'extension en dimension supérieure ou aux grilles irrégulières.

Nous avons, dans un premier temps, lié la notion d'objet discret multi-échelles à notre approche de reconnaissance de sous-segment discret. Comme un sous-segment discret d'une droite discrète peut être caractérisé par d'autres paramètres que ceux de la droite, nous pouvons considérer qu'il est à une précision ou échelle raffinée par rapport à la droite discrète. Étant donné un contour discret dont on a calculé au préalable la décomposition en segments discrets, il est alors possible de le recalculer (tout ou partie) dans des grilles raffinées ou agrandies. Pour cela, il faut, dans un premier temps, déterminer les extrémités du sous-segment concerné, de déterminer (par reconnaissance) les nouvelles caractéristiques de ce sous-segment, et de les utiliser dans la grille d'arrivée.

En dimension 2, notre approche est basée sur la notion de reste arithmétique et établit des liens entre les restes arithmétiques d'un sous-segment et ses points d'appuis. Nous montrons entre autre, qu'en considérant les caractéristiques de la droite infinie, le point ayant le reste arithmétique minimal (maximal) sur le sous-segment correspond à un point d'appui supérieur (inférieur) du sous-segment. Nous proposons ensuite des algorithmes pour calculer les points ayant des restes maximaux et minimaux d'un sous-segment discret. La complexité, en temps au pire, du calcul des restes maximaux ou minimaux est logarithmique en nombre de paliers du sous-segment, ce qui est plus efficace que des algorithmes existants. Concrètement l'algorithme est plus rapide car il existe souvent déjà des points d'appuis de la droite infinie sur le sous-segment. Nous avons discuté des optimisations possibles de notre approche, notamment en calculant en une seule boucle tous les restes correspondant aux points d'appuis nécessaires pour caractériser le sous-segment discret.

La notion de reste arithmétique existe aussi en dimension 3 contrairement aux notions d'arbre de Stern-Brocot et de diagramme de Farey. C'est pourquoi nous avons discuté de l'extension de notre approche pour la reconnaissance de sous-plan discret.

L'ordre des restes arithmétiques semble ne pas obéir aux mêmes principes qu'en dimension 2 (certains points d'appuis peuvent ne pas être conservés dans certains cas) mais les propriétés restent globalement vraies. Nous envisageons de poursuivre les travaux dans le sens de trouver une meilleure explication à cela.

Nous avons aussi présenté des travaux portant sur la reconnaissance d'arcs, de cercles et de sphères discrets. En nous basant sur des travaux sur la médiatrice généralisée et le centre généralisé nous avons d'une part proposé des simplifications dans le calcul de la médiatrice généralisée et d'autre part, nous avons proposé comment calculer le dual de la médiatrice généralisée [Richard 11]. Cela permet de ramener les calculs d'intersection de médiatrice généralisée (donc la détermination du centre généralisé) à un test de visibilité dans un espace dual, ce qui a été beaucoup plus étudié.

Finalement nous avons présenté nos travaux sur la reconnaissance de droites discrètes afin de simplifier et d'améliorer le temps de calcul de la préimage généralisée et d'étendre certains résultats de Dexet [Dexet 06a] aux grilles irrégulières isothétiques. Nous avons introduit la notion de frontière entre pavés ou paliers adjacents de grilles régulières ou irrégulières isothétiques. Et, en nous y basant, nous avons montré comment diminuer le nombre d'éléments à prendre en compte dans le calcul de la préimage généralisée. Cela simplifie et étend la notion de préimage généralisée et améliore conséquemment les temps de calcul. Nous avons aussi proposé une modification de l'approche de reconnaissance de droite discrète basée sur ce calcul de la préimage généralisée en vue de prendre en compte les notions de frontières. Cela permet d'étendre la reconnaissance de droite discrète aux grilles irrégulières isothétiques et de simplifier les calculs.

Nous pouvons désormais envisager de décomposer un contour en un ensemble de sous-segments ou en un ensemble d'arcs. Une perspective intéressante à nos travaux serait d'unifier les différentes approches et proposer un algorithme générique (sans a priori) de reconnaissance de sous-segments ou d'arcs. Un tel algorithme pourrait décider si une forme est plutôt rectiligne ou curviligne par exemple.

## Perspectives

### À court et moyen termes

Dans la lancée de nos travaux sur les sous-segments nous envisageons d'implémenter l'approche en dimension 2 suivant les templates et outils proposés par la communauté travaillant sur DGTAL [DGTAL 14]. Cela permettrait de faire des tests et déterminer les contextes dans lesquels l'une ou l'autre des approches parmi [Lachaud 13, Roussillon 14, Sivignon 12] ou la notre est plus efficace et peut être de pouvoir trouver des améliorations possibles de l'une ou l'autre des approches de reconnaissance de sous-segments discrets.

Nous avons commencé à étudier la possibilité d'extension en dimension 3 de notre approche de reconnaissance de sous-segment discret. En dimension 3 nous nous sommes intéressés à deux primitives discrètes : la droite et le plan.

Dans la reconnaissance de sous-plan avec notre approche, il y a des exceptions à certaines propriétés que nous utilisons en dimension 2. En effet la conservation des points d'appuis du plan infini sur le morceau de plan ne peut pas être toujours

---

garantie si on conserve en même temps le critère de minimalité. Nous envisageons faire des études dans le dual du morceau de plan comme Coeurjolly et Sivignon [Coeurjolly 05b, Sivignon 12] et dans le voisinage des points d'appuis comme Vittone et Chassery [Vittone 97] pour pouvoir trouver les explications aux spécificités. Toutefois dès maintenant, nous pouvons proposer un algorithme pour la reconnaissance de sous-plan en dimension 3 qui conserve les points d'appuis du plan (mais ne vérifie pas forcément le critère de minimalité de l'épaisseur). Il nous reste à formaliser les preuves et analyser les propriétés de ces solutions comparées à celles des solutions avec le critère de minimalité.

Pour la reconnaissance de sous-segment en dimension 3, nous ne pouvons pas utiliser directement notre approche car la notion de reste arithmétique n'est pas définie. Cela est dû au fait que la droite discrète en dimension 3 est définie par 2 doubles inégalités [Debled-Rennesson 95]. Le même article a montré qu'il suffit, de reconnaître des sous-segments en dimension 2 correspondant aux projections du sous-segment en dimension 3 pour en déduire les caractéristiques de ce dernier. Nous pouvons donc envisager d'appliquer notre approche sur les projections et d'en déduire les caractéristiques du sous-segment en dimension 3.

Nous envisageons aussi implémenter les versions modifiées (en considérant les frontières de pixels ou pavés) des approches de reconnaissances de droites discrètes et d'arcs en vue de mesurer leur efficacité.

## À long terme

Pour unifier nos approches de reconnaissance de primitives discrètes, nous envisageons d'abord une étude des points communs qu'il peut y avoir entre ces primitives (droites, cercles) d'une part et les approches présentées (préimage généralisée, centre généralisé) d'autre part.

L'unification des approches nous paraît envisageable car il y a assez de similitudes entre elles d'un point de vue objets manipulés (points discrets, définitions analytiques, ...) et outils utilisés (espaces duaux, arithmétique, ...). Nous envisageons, entre autres, déterminer les liens éventuels entre les polygones duaux utilisés dans la reconnaissance de droites et ceux utilisés dans la reconnaissance de cercles. Pour illustrer notre idée, supposons que l'intersection du dual de la médiatrice généralisée de deux pixels et de la préimage de leur frontière soit non vide et appelons cette intersection  $PI$ . De par les propriétés des deux polygones de départ,  $PI$  contient les paramètres de droites et cercles qui passent par les deux pixels. Lorsque  $PI$  est vide on peut continuer avec la reconnaissance de l'une ou l'autre des primitives si les deux polygones associées existent toujours (ou choisir en fonction de critères) sinon on continue avec celui dont le polygone existe.

Il existe déjà des travaux qui donnent des définitions génériques de primitives discrètes, notamment ceux sur les coniques discrètes. L'intérêt d'une telle définition est qu'elle permet d'envisager la reconnaissance générique aussi de coniques discrètes. Nous envisageons aussi de proposer une approche de reconnaissance de conique discrète. Pour commencer on peut étudier ce qu'est le dual d'une conique discrète et comment il évolue en fonction des paramètres définis ou non. Cela permet d'associer un polygone dual générique aussi bien pour une droite, un arc, une ellipse, ... et ensuite reconnaître indifféremment l'une ou l'autre de ces primitives discrètes.



---

---

# Publications et communications

---

## Revue internationale

Jean Serge Dimitri Ouattara, Eric Andres, Gaëlle Largeteau-Skapin, Rita Zrour, Théodore M. Y. Tapsoba. *Remainder Approach for the Computation of Digital Straight Line Subsegment Characteristics*. Discrete Applied Mathematics (2014) 1-12.

## Conférences internationales avec actes

Aurélien Richard, Gaëlle Largeteau-Skapin, Marc Rodriguez, Eric Andres, Laurent Fuchs, Jean Serge Dimitri Ouattara. *Properties and Applications of the Simplified Generalized Perpendicular Bisector*. DGCI 2011 : 296-307.

## Communications sans acte

Jean Serge Dimitri Ouattara, Eric Andres, Gaëlle Largeteau-Skapin, Rita Zrour, Théodore M. Y. Tapsoba. *Reconnaissance d'un sous-segment discret*. Journées "Informatique et Géométrie", Nancy (France), novembre 2013.



---

---

## Références bibliographiques

---

- [Andres 93] Eric Andres. *Le Plan Discret*. In 3ème colloque DGCI Géométrie Discrète en Imagerie, Strasbourg (France), pages 45–61, September 1993.
- [Andres 94] Eric Andres. *Discrete circles, rings and spheres*. Computers & Graphics, vol. 18, no. 5, pages 695 – 706, 1994.
- [Andres 00] Eric Andres. *Modélisation analytique discrète d’objets géométriques*. Thèse d’habilitation à diriger la recherche, Université de Poitiers, Poitiers, France, 2000.
- [Andres 02] Eric Andres, Achille Braquelaire, Jacques-Olivier Lachaud & Anne Vialard. *Defining discrete objects for polygonalization : The standard model*. Lecture notes in computer science, vol. 2301, no. 10, pages 313–325, 2002.
- [Andres 03] Eric Andres. *Discrete linear objects in dimension  $n$  : the standard model*. Graphical Models, vol. 65, pages 92–111, 2003.
- [Andres 08] Eric Andres. *The supercover of an  $m$ -flat is a discrete analytical object*. Theoretical Computer Science, vol. 406, no. 1–2, pages 8 – 14, 2008.
- [Andres 11] Eric Andres & Tristan Roussillon. *Analytical Description of Digital Circles*. In Discrete Geometry for Computer Imagery, vol. 6607 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 235–246. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [Ballard 81] D.H. Ballard. *Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes*. Pattern Recognition, vol. 13, no. 2, pages 111 – 122, 1981.
- [Bresenham 65] Jack E. Bresenham. *Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter*. IBM Systems Journal, vol. 4, no. 1, pages 25–30, 1965.
- [Breton 03a] Robert Breton. *Reconstruction inversible d’objets discret 2D*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, 2003.
- [Breton 03b] Rodolphe Breton, Isabelle Sivignon, Florent Dupont & Eric Andres. *Towards an Invertible Euclidean Reconstruction of*

- a Discrete Object*. In Discrete Geometry for Computer Imagery, vol. 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 246–256. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [Buzer 06] Lilian Buzer. *Digital line recognition, convex hull, thickness, a unified and logarithmic technique*. In Combinatorial Image Analysis. Springer, 2006.
- [Buzer 07] Lilian Buzer. *A simple algorithm for digital line recognition in the general case*. Pattern Recognition, vol. 40, pages 1675–1684, 2007.
- [Charrier 09] Émilie Charrier & Lilian Buzer. *Approximating a real number by a rational number with a limited denominator : A geometric approach*. Discrete Applied Mathematics, vol. 157, no. 16, pages 3473–3484, 2009.
- [Chassery 91] Jean-Marc Chassery & Annick Montanvert. Géométrie discrète en analyse d’images. Traité des nouvelles technologies. Hermès 1991, cop. 1991 (58-Clamecy), Paris, 1991.
- [Chernyaev 95] Evgeni V. Chernyaev. *Marching Cubes 33 : Construction of Topologically Correct Isosurfaces*. Rapport technique, Institute for High Energy Physics, Moscow, Russia, 1995.
- [Coeurjolly 02] David Coeurjolly. *Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces*. PhD thesis, Université Lumière Lyon 2, 2002.
- [Coeurjolly 04] David Coeurjolly, Alexis Guillaume & Isabelle Sivignon. *Reversible discrete volume polyhedrization using Marching Cubes simplification*. In Vision Geometry XII, vol. 5300, pages 1–11, 2004.
- [Coeurjolly 05a] David Coeurjolly. *Supercover model and digital straight line recognition on irregular isothetic grids*. In DGCI’05, Lecture Notes in Computer Science, pages 311–322. Springer, 2005.
- [Coeurjolly 05b] David Coeurjolly, Isabelle Sivignon, Florent Dupont, F Feschet & Jean-Marc Chassery. *On digital plane preimage structure*. Discrete Applied Mathematics, vol. 151, no. 1-3, pages 78–92, 2005.
- [Coeurjolly 06a] David Coeurjolly, Florent Dupont, Laurent Jospin & Isabelle Sivignon. *Optimization Schemes for the Reversible Discrete Volume Polyhedrization Using Marching Cubes Simplification*. In Discrete Geometry for Computer Imagery, vol. 4245 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 413–424. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [Coeurjolly 06b] David Coeurjolly & Loutfi Zerarga. *Supercover model, digital straight line recognition and curve reconstruction on the irregular isothetic grids*. Comput. Graph., vol. 30, no. 1, pages 46–53, 2006.
- [Cohen-Or 95] Daniel Cohen-Or & Arie Kaufman. *Fundamentals of Surface Voxelization*. Graph. Models Image Process., vol. 57, no. 6, pages 453–461, 1995.

- [Damaschke 95] Peter Damaschke. *The linear time recognition of digital arcs*. Pattern Recognition Letters, vol. 16, no. 5, pages 543–548, 1995.
- [De Vieilleville 06] Francois De Vieilleville & Jacques-Olivier Lachaud. *Revisiting Digital Straight Segment Recognition*. In DGCI'06, vol. 4245 of LNCS, pages 355–366. Springer, 2006.
- [Debled-Rennesson 95] Isabelle Debled-Rennesson. *Etude et reconnaissance des droites et plans discrets*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 1995.
- [Debled-Rennesson 96] Isabelle Debled-Rennesson & Jean-Pierre Reveillès. *A linear algorithm for segmentation of digital curves*. Series in machine perception and artificial intelligence, vol. 19, pages 73–100, 1996.
- [Dexet 06a] Martine Dexet. *Architecture d'un modèleur discret à base topologique d'objets discret et methodes de reconstruction en dimensions 2 et 3*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, france, 2006.
- [Dexet 06b] Martine Dexet & Eric Andres. *Linear Discrete Line Recognition and Reconstruction Based on a Generalized Preimage*. In Combinatorial Image Analysis, vol. 4040 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 174–188. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [Dexet 06c] Martine Dexet, David Coeurjolly & Eric Andres. *Invertible Polygonalization of 3D planar digital curves and applications to volume data reconstruction*. International Symposium on Visual Computing, vol. 4292, pages 514–523, 2006.
- [DGTAL 14] DGTAL. *DGTAL : Digital Geometry Tools and Algorithms Library*. <http://libdgtal.org>, 2014.
- [Dorst 84] Leo Dorst & Arnold W. M. Smeulders. *Discrete Representation of Straight Lines*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 6, no. 4, pages 450–463, 1984.
- [Dorst 91] L. Dorst & A.W.M. Smeulders. *Discrete Straight Line Segments : Parameters, Primitives and Properties*. In Vision Geometry, series Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, 1991.
- [Foley 90] James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner & John F. Hughes. *Computer graphics : Principles and practice* (2nd ed.). Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1990.
- [Freeman 61] H. Freeman. *On the encoding of arbitrary geometric configurations*. Institute of Radio Engineers, trans. on Electronic Computers, vol. EC-10, pages 260–268, 1961.
- [Freeman 74] Herbert Freeman. *Computer Processing of Line-Drawing Images*. ACM Comput. Surv., vol. 6, no. 1, pages 57–97, March 1974.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [Hardy 89] G. H. Hardy & E.M. Wright. An introduction to the theory of numbers. Oxford Society, 1989.
- [Hilaire 06] X. Hilaire & K. Tombre. *Robust and accurate vectorization of line drawings*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, vol. 28, no. 6, pages 890–904, 2006.
- [Ho 05] Chien-chang Ho, Fu-che Wu, Bing-yu Chen & Ming Ouhyoung. *Cubical marching squares : Adaptive feature preserving surface extraction from volume data*. Computer Graphics Forum, vol. 24, page 2005, 2005.
- [Hough 62] Paul Hough. *Method and Means for Recognizing Complex Patterns*. U.S. Patent 3.069.654, 1962.
- [Kaufman 93] A. Kaufman, D. Cohen & R. Yagel. *Volume Graphics*. IEEE Computer, vol. 27, no. 7, pages 51–64, July 1993.
- [Kim 83] C. E. Kim. *Three-Dimensional Digital Line Segments*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 5, no. 2, pages 231–234, 1983.
- [Knuth 97] D. Knuth. The art of computer programming. V2. Seminumerical Algorithms, 3rd edition, 1997.
- [Kovalesky 90] V. A. Kovalesky. *New Definition and Fast Recognition of Digital Straight Segments and Arcs*. In Proceedings of the 10th International Conference on Pattern Recognition, pages 31–34. IEEE Press, 1990.
- [Lachaud 13] Jacques-Olivier Lachaud & Mouhammad Said. *Two Efficient Algorithms for Computing the Characteristics of a Subsegment of a Digital Straight Line*. Discrete Appl. Math., vol. 161, no. 15, pages 2293–2315, October 2013.
- [Largeteau-Skapin 07] Gaëlle Largeteau-Skapin & Isabelle Debled-Rennesson. *Outils arithmétiques pour la géométrie discrète*. In Géométrie discrète et images numériques, Traité IC2 - Traitement du signal et de l'image, pages 59–74. Hermès-Lavoisier, 2007.
- [Lewiner 03] Thomas Lewiner, Helio Lopes, Wilson Antonio Vieira & Geovan Tavares. *Efficient implementation of Marching Cubes' cases with topological guarantees*. Journal of Graphics Tools, vol. 8, page 2003, 2003.
- [Lipkin 70] Bernice Sacks Lipkin. Picture processing and psychopictorics. Elsevier, 1970.
- [Maitre 85] Henri Maitre. *Un panorama de la transformée de Hough - a review on Hough transform*. Traitement du signal, vol. 2, no. 4, pages 305–317, 1985.
- [McIlroy 85] M. D. McIlroy. *A Note on Discrete Representation of Lines*. AT&T Technical Journal, vol. 64, no. 2, pages 481–490, 1985.
- [Mertzios 99] Basil G. Mertzios & Dimitris A. Karras. *On Applying Fast and Efficient Methods in Pattern Recognition*. In Signal processing for multimedia. J.S. Byrnes (Ed.), 1999.

- [Provot 05] Laurent Provot. Reconnaissance de morceaux de plans discrets bruités. Mémoire de dea, Université Paul Verlaine, Metz, France, 2005.
- [Reveillès 91] Jean-Pierre Reveillès. *Calcul en Nombres Entiers et Algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1991.
- [Richard 11] Aurélie Richard, Gaëlle Largeteau-Skapin, Marc Rodríguez, Eric Andres, Laurent Fuchs & Jean-Serge Dimitri Ouattara. *Properties and Applications of the Simplified Generalized Perpendicular Bisector*. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, vol. 6607 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 296–307. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [Rodriguez 10] Marc Rodriguez, Gaëlle Largeteau-Skapin, Eric Andres & Sere Abdoulaye. *Generalized Perpendicular Bisector and Circumcenter*. In *Computational Modeling of Objects Represented in Images*, 2010.
- [Rodriguez 11] Marc Rodriguez. *Redimensionnement adaptatif et reconnaissance de primitives discrètes*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, 2011.
- [Rosenfeld 74] Azriel Rosenfeld. *Digital Straight Line Segments*. *Computers, IEEE Transactions on*, vol. C-23, no. 12, pages 1264–1269, Dec 1974.
- [Roussillon 09] Tristan Roussillon. *Algorithmes d'extraction de modèles géométriques discrets pour la représentation robuste des formes*. PhD thesis, Université Lumière Lyon 2, Lyon, France, 2009.
- [Roussillon 14] Tristan Roussillon. *An Arithmetical Characterization of the Convex Hull of Digital Straight Segments*. In 18th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), 2014.
- [Saïd 11] Mouhamad Saïd & Jacques-Olivier Lachaud. *Computing the characteristics of a subsegment of a digital straight line in logarithmic time*. In DGCI'11, vol. 6607 of *LNCS*, pages 320–332. Springer, 2011.
- [Saïd 09] Mouhammad Saïd, Jacques-Olivier Lachaud & Fabien Feschet. *Multiscale Discrete Geometry*. In DGCI'09, vol. 5810 of *LNCS*, pages 118–131. Springer, 2009.
- [Saïd 10] Mouhamad Saïd. *Géométrie multirésolutions des objets discrets bruités*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2010.
- [Sere 07] Abdoulaye Sere. *Espace dual généralisé et application à la reconnaissance de formes*. Mémoire de dea, Université Polytechnique de Bobo-dioulasso, Bobo-Dioulasso, Burkina-Faso, 2007.
- [Sere 13] Abdoulaye Sere. *Transformations analytiques appliquées aux images multi-échelles et bruitées*. Thèse de doctorat, Université de Ouagadougou, Ouagadougou, Burkina-Faso, 2013.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [Sivignon 04] Isabelle Sivignon. *De la caractérisation des primitives à la reconstruction polyédrique de surfaces en géométrie discrète*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble, 2004.
- [Sivignon 05] Isabelle Sivignon, Rodolphe Breton, Florent Dupont & Eric Andrès. *Discrete analytical curve reconstruction without patches*. *Image and Vision Computing*, vol. 23, no. 2, pages 191–202, 2005.
- [Sivignon 12] Isabelle Sivignon. *Walking in the Farey fan to Compute the Characteristics of a Discrete Straight Line Subsegment*. In DGCI'13, vol. 7749 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 23–34. Springer, 2012.
- [Troesch 93] Albert Troesch. *Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide et reconnaissance de segments*. *Theoretical computer science*, vol. 115, pages 291–319, 1993.
- [Vacavant 08] Antoine Vacavant. *Géométrie discrète sur grilles irrégulières isothétiques*. Thèse de doctorat, Université Lumière Lyon 2, France, 2008, 2008.
- [Vittone 97] Joëlle Vittone & Jean-Marc Chassery. *Coexistence of Tributes in Digital Naive Plane*. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 99–110, 1997.
- [Vittone 99] J. Vittone. *Caractérisation et reconnaissance de droites et de plans en géométrie discrète*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1999.

---



---

# Table des Figures

---

1.1 Exemples de pavages irréguliers en dimension 2. . . . .	9
1.2 Pavage régulier en dimension 2 et grille correspondante. . . . .	10
1.3 Représentation d'exemples de pavés en dimension 2 et 3. . . . .	12
1.4 Exemple de voisinages entre hypervoxels en dimension 2 et 3. . . . .	13
1.5 Exemples de voisinages entre pavés. . . . .	15
1.6 Discrétisation d'un segment de droite suivant le modèle naïf. . . . .	17
1.7 Discrétisation d'un segment de droite suivant le modèle Supercouverture. . . . .	17
1.8 Discrétisation d'un segment de droite dans une grille irrégulière. . . . .	18
1.9 Discrétisation d'un segment de droite suivant le modèle Standard. . . . .	18
1.10 Exemple de cercle discrets. . . . .	21
1.11 Répartition des points de $\mathbb{Z}$ en fonction des droites d'appuis. . . . .	23
1.12 Illustration de paliers d'une droite discrète. . . . .	24
1.13 Intersection de deux droites discrètes. . . . .	25
1.14 Déplacements dans l'arbre de Stern-Brocot. . . . .	28
1.15 Prémimage d'un sous-segment. . . . .	29
2.1 Principe de l'érosion d'un sous-segment. . . . .	40
2.2 Illustration d'une suite de dilatations d'un sous-segment discret. . . . .	44
2.3 Restes arithmétiques sur $D$ avec les caractéristiques $(1, 2, 2)$ . . . . .	49
2.4 Restes arithmétiques sur $D$ avec les caractéristiques $(1, 3, -1)$ . . . . .	50
2.5 Restes arithmétiques sur $D$ avec les caractéristiques $(2, 5, 1)$ . . . . .	50
2.6 Restes arithmétiques sur $D$ avec les caractéristiques $(3, 8, -1)$ . . . . .	51
2.7 Restes arithmétiques sur $D$ avec les caractéristiques $(5, 13, 0)$ . . . . .	51
2.8 Représentation des intervalles où se situe le troisième point d'appui . . . . .	52
2.9 Représentation de restes arithmétiques de droite discrète . . . . .	54
2.10 Restes arithmétiques de $\zeta_0$ . . . . .	58
2.11 Restes arithmétiques de $\zeta_1$ . . . . .	59
2.12 Restes arithmétiques de $\zeta_2$ . . . . .	59
2.13 Restes arithmétiques de $\zeta_3$ . . . . .	59
2.14 Restes arithmétiques de $\zeta_4$ . . . . .	60
2.15 Restes arithmétiques de $\zeta'_0$ . . . . .	60
2.16 Restes arithmétiques de $\zeta'_1$ . . . . .	61
2.17 Restes arithmétiques de $\zeta'_2$ . . . . .	61
2.18 Restes arithmétiques de $\zeta'_3$ . . . . .	62
2.19 Restes arithmétiques de $\zeta'_4$ . . . . .	62

2.20	Restes arithmétiques de $\zeta'_5$ . . . . .	62
2.21	Allure aléatoire de l'approche de reconnaissance de sous-segment discret . . . . .	65
2.22	Allure logarithmique de l'approche de reconnaissance de sous-segment discret . . . . .	66
2.23	Expérimentations sur des sous-segments avec $b \leq 10^9$ . . . . .	67
2.24	Expérimentations sur des sous-segments avec $b \leq 10^6$ . . . . .	67
2.25	Expérimentations sur des sous-segments avec $b \leq 10007$ . . . . .	68
2.26	Illustration de la contradiction de l'ordre des restes en 3D . . . . .	75
3.1	Transformée de Hough des droites . . . . .	80
3.2	Illustration du dual d'un pixel . . . . .	81
3.3	Illustration du dual d'un pavé . . . . .	82
3.4	Illustration du dual d'un voxel . . . . .	82
3.5	Préimage généralisée définie par deux polygones infinies . . . . .	83
3.6	Préimage généralisée de deux rangées verticales de pixels 1-voisins . . . . .	83
3.7	Préimage généralisée de plus de 2 pixels alignés horizontalement . . . . .	84
3.8	Préimage généralisée d'un ensemble de pixels quelconques . . . . .	84
3.9	Partitions de l'espace pour la construction de la médiatrice généralisée. . . . .	87
3.10	Bords de la médiatrice généralisée simplifiée. . . . .	88
3.11	Centre généralisé simplifié. . . . .	89
3.12	Numérotation des sommets . . . . .	90
3.13	Exemples de pixels et milieux associés . . . . .	91
3.14	Ordre des médiatrices $i$ vers $j$ ' . . . . .	93
3.15	Médiatrices parallèles . . . . .	94
3.16	Élimination de médiatrices de même pente à l'intérieur . . . . .	95
3.17	Élimination de médiatrices de pentes bornées et sécantes . . . . .	95
3.18	Élimination de médiatrices de pentes bornées . . . . .	96
3.19	Médiatrice généralisée . . . . .	97
3.20	Duaux des médiatrices . . . . .	100
3.21	Dual du bord de la médiatrice généralisée . . . . .	100
3.22	Configuration de pixels 2 . . . . .	102
3.23	Médiatrice généralisée quand $P >_y P'$ . . . . .	103
3.24	Dual de la médiatrice généralisée quand $P >_y P'$ . . . . .	104
3.25	Médiatrice généralisée quand $P =_x P'$ . . . . .	104
3.26	Dual de la médiatrice généralisée quand $P =_x P'$ . . . . .	105
3.27	Médiatrice généralisée quand $P =_y P'$ . . . . .	105
3.28	Dual de la médiatrice généralisée de configuration de pixels verticale . . . . .	106
3.29	Duaux de 3 médiatrices généralisées . . . . .	107
3.30	Caractérisation des frontières d'ensemble de pixels. . . . .	108
3.31	Caractérisation des frontières de pavés quelconques . . . . .	109
3.32	Caractérisation des frontières en dimension 3 . . . . .	109
3.33	Préimage de frontières. . . . .	110
3.34	Préimage généralisée, basée frontière, de pixels alignés verticalement . . . . .	111
3.35	Préimage généralisée, basée frontière, de pixels alignés horizontalement . . . . .	111
3.36	Préimage généralisée, basée frontière, de 2 rangées verticales de pixels . . . . .	112
3.37	Préimage généralisée, basée frontière, d'ensemble quelconque de pixels . . . . .	112
3.38	Dual de la frontière de deux voxels . . . . .	113
3.39	Reconnaissance de droites discrètes basée frontière . . . . .	114

---

---

# Liste des Tableaux

---

1.1	Répartition des points de $\mathbb{Z}$ en fonction des droites d'appuis . . . . .	23
1.2	Mise à jour des caractéristiques d'un sous-segment après érosion . . . . .	27
2.1	Récapitulatif des approches de reconnaissance de sous-segment . . . . .	43
3.1	Relations entre le dual d'un pixel et ses sommets . . . . .	81
3.2	Relations entre le dual d'un voxel et ses sommets . . . . .	82
3.3	Coordonnées des sommets de pixels . . . . .	92
3.4	Milieux des segments joignant les sommets de pixels . . . . .	92
3.5	Coordonnées des milieux par lesquels passent les médiatrices . . . . .	93
3.6	Caractéristiques des duaux des cotés de la médiatrice généralisée simplifiée . . . . .	99





## Reconnaissance de primitives discrètes multi-échelles

**Résumé :** Dans cette thèse, nous nous intéressons à la reconnaissance des primitives discrètes multi-échelles. Nous considérons qu'une primitive discrète multi-échelles est une superposition de primitives discrètes de différentes échelles ; et nous proposons des approches qui permettent de déterminer les caractéristiques d'une primitive discrète ou d'une partie d'une primitive discrète.

Nous nous intéressons d'abord au sous-segment discret en dimension 2. Nous proposons une nouvelle approche qui se base sur des propriétés sur l'ordre des restes arithmétiques de la droite discrète. Nous établissons des liens entre les points d'appuis du sous-segment discret et les points ayant des restes arithmétiques minimaux et maximaux sur la droite discrète. Nous avons implémenté notre approche et l'avons comparé avec d'autres approches existantes et, d'après les résultats, notre approche se relève être plus efficace.

Nous nous intéressons ensuite à des approches de reconnaissance de droite discrète par la préimage généralisée et des approches de reconnaissance d'arcs et de cercles discrets par le centre généralisé. Pour la préimage généralisée, nous utilisons la notion de frontière pour diminuer le nombre d'éléments rentrant dans son calcul afin de le simplifier et de le réduire. Pour le centre généralisé, nous étudions le dual de la médiatrice généralisée et proposons de calculer le centre généralisé par des calculs de visibilité dans l'espace dual afin de réduire également son temps de calcul.

**Mots-clés :** géométrie discrète, reconnaissance, sous-segment discret.

## Multi-scale discrete primitives recognition

**Abstract :** This thesis is about discrete geometry and particularly recognition of multi-scale discrete primitives. We consider that a multiscale discrete primitive is a superimposition of many discrete primitives of different scales. Then we propose approaches of recognition of discrete primitives or parts of a discrete primitives.

Firstly we study the recognition of digital subsegment in dimension 2. We propose a new approach that is based on properties of the sequence of arithmetic remainders of the digital straight line. The approach defines some links between the leaning points of the digital subsegment and the points that have the minimal and maximal arithmetic remainders on the digital straight line. We implemented it and compared it with some of the best digital subsegment recognition algorithms and, based on the results, our approach seems more efficient.

Secondly we present some work on improving digital straight line recognition by generalized preimage and digital rings and circles recognition by general circumcenter. To reduce the number of elements to take into account for the computation of the generalized preimage we introduce the concept of boundary. We also study the dual of the generalized bisector in order to simplify the computation of the intersections of generalized bisectors as a polygon stabbing problem.

**Keywords :** discrete geometry, recognition, digital sub-segment.

**Doctorat de l'Université de Poitiers, Spécialité : Informatique et Applications**

Thèse préparée et soutenue au Département SIC du Laboratoire XLIM, UMR 7252

Université de Poitiers, Bât. SP2MI, Téléport 2, Bvd Marie et Pierre Curie

BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex France

