THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité :
Acoustique Physique

Présentée par :

Diego Baresch

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

Pince Acoustique

Piégeage et manipulation d'un objet par pression de radiation d'une onde progressive

À être condidérée pour sa soutenance

devant le jury composé de :

Rapporteur	Pierre Thibault	- professeur
Rapporteur	Vincent Tournat	- chargé de recherche
Examinateur	Anne-Christine Hladky	- directeur de recherche
Examinateur	François Graner	- directeur de recherche
Examinateur	Stéphane Régnier	- professeur
Directeur de thèse	Jean-Louis Thomas	- directeur de recherche
Directeur de thèse	Régis Marchiano	- professeur

Institut des Nanonsciences de Paris,
Institut Jean Le Rond D'Alembert
4, place Jussieu,
75252, PARIS cedex 05, FRANCE

Ecole doctorale SMAER,

4, place Jussieu, BC 270,
75252, PARIS cedex 05, FRANCE

Résumé

Une onde acoustique qui rencontre un obstacle exerce, en moyenne, une force sur sa surface. La pression associée est appelée *pression de radiation* et résulte d'une interaction non linéaire entre l'onde et l'obstacle.

Initialement, la faible manifestation de cette force ne suggérait pas d'applications potentielles. Néanmoins, avec l'avènement de sources acoustiques de haute puissance mais aussi avec le développement de l'acoustique ultrasonore, il a rapidement été envisagé de manipuler de petits objets à distance par pression de radiation. Depuis, c'est via l'excitation d'ondes stationnaires dans des cavités que cette méthodologie connait son essor. On parle alors de lévitation acoustique ou bien d'acoustophorèse lorsqu'il s'agit de trier et séparer de particules dans un milieu fluidique.

Parallèlement, la pression de radiation de la lumière a elle aussi rapidement permis de piéger et de manipuler des objets de taille nanométrique à micrométrique. Grâce à un unique laser fortement focalisé, la *pince optique* a donné une grande flexibilité aux techniques de manipulation sans contact et est devenue un outil fondamental pour de nombreuses disciplines scientifiques. Cependant, les faibles forces développées, les importantes intensités lumineuses et la petite taille des objets en sont d'importantes limites, particulièrement pour leur application en biologie.

Alors que les domaines de l'acoustique et de l'optique présentent un certain nombre de similitudes, il n'existe pas l'équivalent de la pince optique en acoustique utilisant un unique faisceau pour piéger des particules. Le travail de recherche présenté ici donne un ensemble d'éléments théoriques et expérimentaux profitables à la fois pour la compréhension de la pression de radiation en acoustique et le dimensionnement d'une *pince acoustique* utilisant un unique faisceau ultrasonore : le vortex acoustique. Ce travail trace l'esquisse d'une nouvelle méthode de manipulation sans contact et qui promet de donner une véritable dextérité de préhension à la pince acoustique à l'échelle de la particule unique. Les faibles intensités nécessaires associé aux larges forces développées sont des caractéristiques qui sauront se montrer attractives pour imaginer un large panel de nouvelles applications scientifiques.

Abstract

As an acoustic wave impinges an obstacle, a mean force is exerted on its surface. This so-called *radiation pressure* arises from the non linear interaction between the wave and the object.

The early history of this force did not suggest any application of such a feeble effect. Nevertheless, as technological advances improved the prospects of new powerful sound sources so as the fast development of ultrasonics, it was rapidly considered to use the acoustic radiation pressure as a mean of non-contact manipulation of small objects. Ever since, standing wave schemes excited in cavities has been the preferred strategy that is becoming considerably popular. Such methodologies are known as acoustic levitation or acoustophoresis when particle sorting and separation in fluidic channels is considered.

In the same time, the radiation pressure of light was also recognised to accurately trap and manipulate small objects ranging in size from hundreds of nanometres to micrometres. Using a single focused laser beam, *optical tweezers* brought a great dexterity to non contact manipulation techniques and rapidly grew to become a fundamental tool in many scientific fields. However, the minuteness of the force, the very high intensities required and the smallness of trappable objects are important and well-known limitations in particular for biological applications.

Although optics and acoustics have shown many similarities, a strict acoustical analogue to optical tweezers using a single beam to trap small objects is yet to be demonstrated. Theoretical and experimental efforts are presented in this thesis and shed light on the underpinning physical mechanisms of single-beam *acoustical tweezers*. The analysis of a peculiar beam's radiation pressure, *i.e.* acoustical vortices, unveiled new characteristics for single-beam trapping and manipulation. Our experimental demonstration along with the low intensities required and the large forces developed show promise for a wide spectrum of new scientific applications.

Table des matières

Résumé/Abstract **3**

Table des matières **5**

Introduction **9**
I.1 Pression de radiation optique : échange de quantité de mouvement 10
I.2 Pression de radiation acoustique : influence du milieu de propagation . . . 11
I.2.1 Définitions 11
I.2.2 Pression de radiation de Langevin sur une sphère 15
I.3 Application de la pression de radiation à la manipulation d'objets sans contact 17
I.3.1 Pièges optiques 17
I.3.2 Pièges acoustiques 20
I.4 Objectifs de l'étude 23

II Théorie tridimensionnelle de la pression de radiation exercée sur une sphère **27**
II.1 Pression de radiation de Langevin : l'approche de Brillouin 27
II.1.1 Avant propos 27
II.1.2 Tenseur de radiation de Brillouin 28
II.2 Problème de la diffusion d'un champ acoustique par une sphère élastique revisité 32
II.2.1 Avant propos 32
II.2.2 Potentiels acoustiques dans le formalisme des harmoniques sphériques 32
II.2.3 Application des conditions aux limites 36
II.2.4 Illustrations de la diffusion par une sphère élastique 41
II.2.5 Conclusion 43
II.3 Expression de la force résultante dans le repère cartésien centré sur la sphère 43
II.3.1 Passage en champ lointain 44
II.3.2 Composantes du vecteur force 46
II.4 Cas particuliers : onde plane et faisceau de Bessel 47
II.4.1 Force exercée par une onde plane progressive : King, Yosioka et Kawasima 48
II.4.2 Force exercée par un faisceau de Bessel : l'approche de Marston . . 49
II.4.3 Définition et description d'une dislocation hélicoïdale : Force d'un vortex acoustique 52
II.5 Conclusions du chapitre 54

III Pression de radiation dans l'hypothèse d'une petite sphère : généralisation de l'approche de Gor'kov **57**
III.1 Expression de la force dans la limite de petite sphère 58
III.1.1 Coefficients de diffusion monopolaire R_0 et dipolaire R_1 58
III.1.2 Implication sur la pression de radiation 59
III.1.3 Rappel sur la notion de monopole et dipôle acoustique 61
III.1.4 Formulation finale et interprétation 62
III.2 Cas d'une petite bulle de gaz 64
III.3 Correction de la force due à la viscosité dynamique 67

IV Application à la manipulation d'objets par pression de radiation **73**
IV.1 Calcul numérique de la force sur une sphère 74
IV.1.1 Avant propos 74
IV.1.2 Détermination des coefficients A_n^m pour une position donnée de la sphère. 74
IV.1.3 Procédure et validation 80
IV.1.4 Conclusion 82
IV.2 Pression de radiation d'un faisceau de Bessel 82
IV.2.1 Force sur une petite sphère $a \ll \lambda$ dans un faisceau de Bessel 85
IV.2.2 Comportement axial et transverse de grandes sphères 86
IV.2.3 Conclusion 91
IV.3 Modélisation d'un champ acoustique focalisé dans le formalisme des harmoniques sphériques 92
IV.3.1 Avant propos 92
IV.3.2 Coefficients de forme d'un faisceau acoustique focalisé 92
IV.4 Pression de radiation d'un faisceau focalisé sur une sphère 96
IV.4.1 Faisceau axisymétrique 96
IV.4.2 Système de faisceaux contra-propagatifs 102
IV.4.3 Vortex acoustique focalisé : dimensionnement d'une pince acoustique 104

V La pince acoustique : démonstration expérimentale **119**
V.1 Synthèse expérimentale de vortex acoustiques 119
V.1.1 Avant propos 119
V.1.2 Dispositif expérimental 120
V.1.3 Le filtre inverse spatio-temporel pour la synthèse de vortex 122
V.1.4 Propagation de vortex acoustiques focalisés 125
V.2 Estimation de la force exercée sur une sphère en polystyrène. 133
V.3 Piégeage et manipulation d'une sphère avec la pince acoustique 135
V.3.1 Avant propos 135
V.3.2 Pince dans une configuration horizontale 135
V.3.3 Évaluation de l'écoulement acoustique 138
V.3.4 Pince dans une configuration verticale 142

Conclusion **153**

Bibliographie **167**

Annexes **169**

A Formalisme des harmoniques sphériques **171**

B Potentiels scalaires de Debye **173**

C Composantes du vecteur force **177**

D Expression des coefficients du champ incident **181**

E Diffusion basse fréquence d'une bulle **185**

F Correction visqueuse au coefficient dipolaire R_1 **189**

G Critères de convergence du calcul de la force au chapitre IV **193**

H Conception des lentilles **197**

Table des figures **201**

Introduction

Les techniques de manipulation d'objets, à distance et sans contact, ont une importance pour un vaste domaine de disciplines scientifiques. Un objet qui est piégé et isolé des contraintes imposées par son environnement, peut ensuite être étudié en détail ou servir d'outil pour une autre application. L'emploi de ces méthodes donne fréquemment une information riche sur des mécanismes fondamentaux et variés, qui peut être associée à la force utilisée pour manipuler. Dans le cas de l'expérience célèbre de Millikan, la force électrostatique permettant de léviter des gouttelettes d'huile contre leur poids, a donné une première mesure du quanta de charge électrique attribué à l'électron [1]. Les expériences de lévitation magnétique ont permis, entre autre, une compréhension de la supraconductivité et l'effet Meissner qui lui est associé [2]. Par ailleurs, le piégeage optique à l'aide de faisceaux lasers a donné accès à un nombre considérable d'études fondamentales sur les objets qui pouvaient être manipulés de cette façon [3] mais aussi sur les propriétés intrinsèques de la lumière elle-même. Concernant les forces qu'exercent les ondes acoustiques, elles ont permis d'étudier les propriétés fondamentales de liquides en suspension dans des cavités à ondes stationnaires [4], ou encore, de donner un cadre approprié pour l'étude du phénomène spectaculaire qu'est la sonoluminescence [5].

La pression de radiation acoustique est le cadre dans lequel s'inscrit ce travail. Cet effet ondulatoire non linéaire caractérise la force moyenne exercée sur un objet en interaction avec l'onde. Les pinces optiques, qui utilisent la pression de radiation de la lumière, permettent de piéger et de manipuler une particule avec la pression de radiation d'un unique faisceau laser. Ce schéma, très simple, rend la pince optique performante et facilement manœuvrable dans l'espace. Sa dextérité en ont fait un outil très puissant pour de nombreuses études scientifiques. Parallèlement, les techniques de manipulation sans contact en acoustique commencent à révéler de nombreux atouts et suscite un net regain d'intérêt d'une vaste communauté scientifique. Néanmoins, à l'heure actuelle, aucun dispositif n'a intégré le concept de pince à faisceau unique qui a donné une véritable dextérité de préhension à son homologue optique, limitant ainsi le dessein favorable offert à la force acoustique. Par une analyse détaillée de la pression de radiation acoustique, l'objectif de cette thèse est donc de comprendre les mécanismes de la manipulation sans contact d'un objet à l'aide d'un unique faisceau ultrasonore focalisé. Dans ce premier chapitre introductif, nous retraçons l'historique des concepts de pression de radiation à la fois en optique et en acoustique. Nous dressons ensuite un bilan des applications de ces forces à la manipulation d'objets sans contact. Pour finir, nous présentons les objectifs principaux de cette étude ainsi que l'organisation du manuscrit.

I.1 Pression de radiation optique : échange de quantité de mouvement

Historiquement, l'idée que la lumière puisse posséder une quantité de mouvement et ainsi exercer une force sur un objet neutre, ou encore une pression de radiation [1], remonte aux observations astronomiques de Kepler (1612). Afin de proposer une explication à l'orientation particulière de la queue de poussière [2] des comètes orbitant à proximité du soleil, il invoque un effet mécanique de la lumière provenant de celui-ci. En 1873, Maxwell dans sa théorie de l'électromagnétisme a écrit : *"Hence in a medium in which waves are propagated there is a pressure in the direction normal to the waves and numerically equal to the energy in unit volume"*, formulant ainsi théoriquement l'existence de la pression de radiation [3]. Les contraintes électromagnétiques qui régissent l'action mécanique de la lumière s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \epsilon_1 E_i E_j + \frac{1}{\mu_1} B_i B_j - \frac{1}{2}\big(\epsilon_1 E^2 + \tfrac{1}{\mu_1} B^2\big)\delta_{ij}, \tag{1}$$

où E_i et B_i sont la $i-$ème composante du champ électrique et magnétique. ϵ_1, μ_1 sont respectivement la permittivité et la perméabilité diélectrique du milieu (supposé transparent) et δ_{ij} le symbole de Kroenecker. Ce tenseur de rang deux se rencontre sous le nom de tenseur des contraintes de Maxwell ou encore tenseur de Minkowski [4]. On peut alors calculer la force moyenne exercée sur un objet rencontrant l'onde électromagnétique par :

$$F_i = \int_S \langle \sigma_{ij} \rangle n_j \, \mathrm{dS}. \tag{2}$$

où F_i est la force qui s'exerce dans la direction i sur l'objet et la convention de sommation d'Einstein a été adoptée. S est une surface qui l'entoure complètement et de vecteur normal extérieur n_j. La force nette est donc un effet obtenue en prenant la moyenne temporelle $\langle \cdot \rangle$ des contraintes électromagnétiques. Si la lumière se réfléchit en incidence normale sur une surface plane, la pression associée à cette force se réduit à :

$$P = \frac{\langle N \rangle}{c} = \langle w \rangle \tag{3}$$

1. Aussi usuellement rencontrée sous le nom pression de rayonnement.

2. La queue de poussière provenant de la fonte de la comète à proximité du soleil est électriquement neutre. Une deuxième queue est distinguée de la première car les ions légers qui la composent sont eux poussés par le vent solaire.

3. Notons dès à présent, que le concept de pression est utilisé comme une force par unité de surface et non pas comme une pression hydrostatique. Dans le cadre de l'acoustique, cette différence sera à l'origine de nombreuses confusions.

4. La version de ce tenseur donnée par Maxwell est réservée la propagation de la lumière dans le vide.

où N est le module du vecteur de Poynting, $\vec{N} = \vec{E} \wedge \vec{B}$. Cet effet est donc non linéaire et est proportionnel au carré de l'amplitude du champ, plus exactement à la densité d'énergie électromagnétique, $\langle w \rangle$. La force appliquée peut aussi être comprise par la deuxième loi de Newton et la quantité de mouvement que possèdent les photons. La surface exerce une force sur un photon qui la percute par vertu de la modification de sa quantité de mouvement (après réflexion). La troisième loi de Newton indique alors que la surface ressent une force égale mais de direction opposée.

En appliquant cette expression au calcul de la pression de radiation exercée par notre soleil, Maxwell trouve une pression très faible dont l'effet mécanique serait difficilement observable. En effet, il faudra attendre le début du XXème siècle pour avoir la première confirmation expérimentale des valeurs avancées par la théorie de Maxwell. Indépendamment, Lebedev [6] (1901) et Nichols et Hull [7] (1903) ont mesuré la pression de radiation exercée par un faisceau de lumière [5]. Depuis, de nombreuses applications de cette force ont vu le jour et nous détaillerons plus loin une des manifestations les plus spectaculaires : la manipulation d'objets sans contact.

I.2 Pression de radiation acoustique : influence du milieu de propagation

I.2.1 Définitions

Peu de temps après la vérification de l'existence d'une pression de radiation en optique, son analogue acoustique a été recherché et comme souvent, l'histoire commence avec Rayleigh. En 1905, il publie une expression pour la pression de radiation qui porte aujourd'hui son nom [8]. Dès ses débuts, le concept a connu des difficultés. En effet, Rayleigh lui même avait déjà donné une autre expression pour cette pression [9] en 1902 [6]. La situation est différente de celle rencontrée en optique puisque le milieu dans lequel l'onde se propage est lui-même mis en mouvement. Cette surpression acoustique, liée uniquement à la présence de l'onde, pourrait en principe participer elle-même à la pression de radiation. Par ailleurs, il est aisé de vérifier qu'une onde mécanique ne possède pas de quantité de mouvement [10], et la vision corpusculaire propre à l'optique n'est pas adéquate pour une onde mécanique. Une erreur pourtant commise par Rayleigh en reprenant les propos de Poynting s'exprimant sur le sujet et qui lui valu une critique de Brillouin [11].

Ainsi en acoustique, la pression de radiation ne peut pas se résumer à une simple force par unité de surface, exercée par un faisceau qui transporte une quantité de mouvement.

5. Le dispositif expérimental menant à la démonstration porte le nom de radiomètre de Nichols. Il n'est pas à confondre avec le radiomètre de Crookes dont la rotation avait initialement été attribué par l'inventeur à la pression de radiation, initiant ainsi une controverse scientifique. L'explication finale de la propulsion de ce système réside dans la force résultant de l'apparition d'un gradient de température.

6. Rayleigh l'a obtenue en prenant l'hypothèse d'une onde plane se propageant dans un gaz isotherme. Cette deuxième expression est aujourd'hui celle connue pour la pression de radiation de Langevin qui a été obtenue dans l'hypothèse, correcte, de transformation adiabatique.

Le point de départ est de calculer "l'excès de pression" moyen qui existe à la surface de l'objet, et qui, intégré sur cette surface, donne la force moyenne. Procédant ainsi, Rayleigh donne pour une onde plane en incidence normale sur un objet plan :

$$\langle p^L \rangle - p_0 = \frac{\beta}{2} \langle E \rangle \tag{4}$$

où $\langle E \rangle$ est la densité moyenne d'énergie Lagrangienne transportée par l'onde, β le coefficient de non-linéarité du milieu et p_0 sa pression hydrostatique au repos. Pour obtenir la force, il faut ensuite évaluer l'excès de pression moyen (dans le temps) dans le repère lié à la surface mobile de l'objet. Les coordonnées matérielles sont utilisées et la pression lagrangienne, p^L, est de rigueur [7]. L'excès de pression selon Rayleigh semble donc purement non linéaire puisqu'il est nécessaire de considérer les termes d'ordre deux dans la propagation de l'onde pour obtenir l'excès de pression à l'ordre deux et proportionnel à β [8]. Le cas qu'il traite pour obtenir cette expression est celui d'une onde plane d'extension infinie incidente sur une surface plane. De manière équivalente, cette situation peut être représentée par une onde plane confinée dans son milieu de propagation sans communication avec le milieu extérieur au repos.

Langevin qui s'est lui aussi intéressé au problème après Rayleigh, donne une deuxième expression pour l'excès de pression statique qui s'écrit [13] [9] :

$$\langle p^L \rangle - p_0 = \langle V \rangle + \langle T \rangle = \langle E \rangle \tag{5}$$

cette équation porte le nom de *première relation de Langevin* où $\langle V \rangle$ et $\langle T \rangle$ sont respectivement les densités d'énergies potentielle et cinétique de l'onde. Dans le cas de l'onde plane, l'équipartition de l'énergie donne $\langle E \rangle$. Le cas traité par Langevin est foncièrement différent. L'onde plane n'est plus confinée mais peut communiquer avec le reste du milieu au repos. D'après Hertz et Mende [14], cette communication implique un équilibrage de la pression statique entre la région excitée et celle au repos. Une fois équilibré, l'excès de pression statique dans la région excitée demeure d'ordre deux mais se calcule avec suffisamment de précision à partir de la densité d'énergie transportée par la perturbation acoustique $\langle E \rangle$. Il apparait alors inutile de faire intervenir les non-linéarités du milieu.

En somme, l'influence du milieu de propagation apparaît donc aussi par l'existence de *deux méthodes* pour calculer l'excès de pression. Il existe alors deux expressions de la pression de radiation qui intégrées sur la surface excitée donnent la force acoustique moyenne :

7. Il est bien sûr possible d'utiliser les coordonnées d'Euler à la condition de remarquer que les quantités de second ordre ne sont pas égales dans les deux représentations [12].

8. Ceci est fait en cherchant le premier terme qui viole la loi de Hooke dans l'équation d'état.

9. Les développements de Langevin exposés au sein du Collège de France ont été publiés par son étudiant, Pierre Biquard en 1932.

$$p_R = \langle p^L \rangle - p_0 = \frac{\beta}{2}\langle E \rangle \tag{6}$$

$$p_L = \langle p^L \rangle - p_0 = \langle E \rangle \tag{7}$$

où p_R et p_L sont respectivement les pressions de radiation de Rayleigh et de Langevin. Il est régulièrement avancé que cette différence de point de vue est la conséquence d'un problème mal posé. D'après Hertz et Mende [14], les conditions nécessaires pour obtenir l'expression de Rayleigh apparaissent comme purement théoriques. En effet, en milieu libre, la communication avec le milieu au repos est inévitable et rares sont les systèmes donnant lieu à la propagation d'une onde plane dans un milieu confiné [10]. Les configurations expérimentales conduisent majoritairement à la pression de radiation de Langevin. La deuxième moitié du XXème siècle a alors vu apparaitre un ensemble de confusions sur le sujet. La lecture des articles de synthèse [15, 11, 16, 17] est recommandée.

Par ailleurs, une autre portion de la littérature est venue défier les deux précédents concepts sous l'élan de Brillouin. Dans son analyse du problème [18, 19], il donne une toute autre dimension à la pression de radiation. De prime abord, il peut être pensé que la pression de radiation de Langevin (Eq. (5)) est applicable dans un problème tridimensionnel et indépendamment de la nature de l'onde (l'hypothèse d'onde plane n'est pas nécessaire pour obtenir la première relation de Langevin). La densité d'énergie $\langle V \rangle + \langle T \rangle$ serait alors la quantité scalaire universelle appelée pression de radiation. Il n'en est rien. Brillouin a montré en coordonnées Eulériennes que la force se calcule à partir d'un tenseur de rang deux homogène à une pression. Nous verrons en détail au chapitre suivant que la force moyenne qui s'exerce sur l'objet s'écrit alors :

$$F_i = \int_S \langle \Pi_{ij} \rangle n_j \, \mathrm{dS}, \tag{8}$$

où le tenseur de radiation de Brillouin a pour expression :

$$\langle \Pi_{ij} \rangle = \langle p^E \rangle \delta_{ij} + \langle \rho v_i v_j \rangle. \tag{9}$$

S est une surface entourant complètement l'objet et immobile dans le repère Eulérien. Le vecteur $\vec{n}$ est la normale sortante de cette surface. Remarquons une analogie formelle avec la force électromagnétique. Les contraintes sont elles aussi tensorielles (Eq. (1)) [11]. L'excès de pression, $\langle p^E \rangle$, se calcule en coordonnées Eulériennes. Une deuxième relation rapportée par Biquard [13] est :

$$\langle p^E \rangle = \langle V \rangle - \langle T \rangle + C \tag{10}$$

10. Un tube à ondes stationnaires excité à basse fréquence peut rendre compte de cette situation.

11. L'analogie s'arrête là. Le photon a une quantité de mouvement bien définie alors que la pseudo-particule appelée phonon n'en a simplement pas.

qui est la *deuxième relation de Langevin*. C est une constante en temps et en espace qui, dans le cadre des équations (8) et (9), ne contribue pas à la force (l'intégration s'effectuant sur une surface fermée). Par contre, elle importe pour trouver le lien entre l'excès de pression Eulérien (10) et la pression de radiation de Rayleigh [20]. Il est à noter que l'équation (10) est une relation qui n'est valable qu'au second ordre acoustique [12] et s'écrit :

$$\langle p^E \rangle = \frac{1}{2\rho_0 c^2}\langle p_1^2 \rangle - \frac{1}{2}\rho_0 \langle |\vec{v}^{(1)}|^2 \rangle = -L \tag{11}$$

où c est la vitesse de propagation acoustique et ρ_0 la masse volumique du milieu au repos. L est la densité Lagrangienne d'énergie de l'onde. L'excès de pression qui intervient dans le tenseur de Brillouin se calcule donc avec la seule connaissance du champ de pression p_1 et de vitesse $\vec{v}^{(1)}$ au premier ordre. Puis, seulement dans le cas où l'onde incidente est plane, disons $\vec{v}^{(1)} = (v, u = 0, w = 0)$, on a alors pour un objet plan orienté suivant la direction de propagation $\vec{e}_1$:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_S \langle \Pi_{11} \rangle \, \mathrm{dS} = \int_S \langle E \rangle \, \mathrm{dS}, \\ F_2 &= \int_S \langle \Pi_{12} \rangle \, \mathrm{dS} = 0, \qquad (12) \\ F_3 &= \int_S \langle \Pi_{13} \rangle \, \mathrm{dS} = 0. \qquad (13) \end{aligned}$$

puisque $L = 0$ en conséquence de l'équipartition de l'énergie d'une onde plane et $\rho_0 v^2 = 2\langle T \rangle = \langle E \rangle$. Ce n'est que dans ce cas que l'on retrouve la pression de radiation de Langevin. Par contre, si l'onde n'est pas plane ou l'objet quelconque, la force n'est pas directement proportionnelle à la densité d'énergie portée par l'onde. On rejoint le concept de Brillouin ; il n'existe aucune quantité scalaire qu'on pourrait appeler pression de radiation et qui serait définie universellement. Le concept de force moyenne qui est tensorielle dépend fondamentalement de la forme de l'objet et de la nature du champ incident [12]. Pour illustrer ce point, la figure 1 est extraite du travail de Hertz et Mende. Elle montre très clairement que l'interface entre deux fluides immiscibles est sujette à une pression de radiation provenant du faisceau ultrasonore qui s'y propage. De plus, on voit que le sens de la déformation dépend du contraste d'impédance entre les deux fluides et ne dépend pas uniquement du sens de propagation. La pression de radiation dépend donc de la valeur du tenseur de Brillouin dans chaque milieu qui par voie de conséquence dépend des coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie à l'interface.

À la lumière de nos connaissances, nous résumons la situation comme suit. Il y a une controverse pour calculer l'excès de pression qui, *in fine*, exerce une force sur un objet.

12. Brillouin préféra parler de "tensions de radiation" puisqu'en général ce tenseur ne correspond pas à une contrainte isostatique. Nous garderons ici la terminologie de pression de radiation pour désigner la force acoustique.

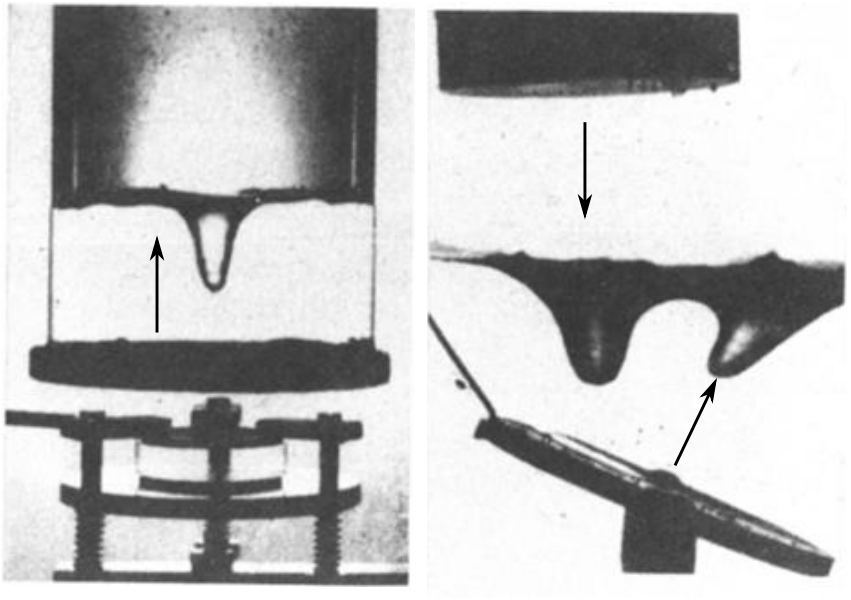


FIGURE 1 – Photographie reproduite de l'expérience de Hertz et Mende [14]. Une onde se propage dans un milieu constitué de deux fluides immiscibles, l'eau et le Tétrachlorométhane (CCl4). La déformation de l'interface sujette à une pression de radiation dépend de l'impédance acoustique de chaque milieu.

Alors que la pression de radiation de Langevin a été confirmée a plusieurs reprises expérimentalement, la pression de radiation de Rayleigh semble plus en difficulté même si le débat n'est probablement pas clos [21, 22]. Il s'agit donc de rester prudents. Néanmoins, la vision tensorielle de Brillouin associée à la seconde relation de Langevin, est une procédure sure et confirmée à plusieurs reprises dans la littérature que ce soit théoriquement ou expérimentalement. C'est notamment le cas pour la pression de radiation qui s'exerce sur une sphère, un problème que nous allons maintenant aborder.

I.2.2 Pression de radiation de Langevin sur une sphère

Louis King [23] est le premier à avoir considéré ce problème (1935). Dans le formalisme des harmoniques sphériques, il calcule la pression de radiation qu'exerce une onde plane (progressive ou stationnaire) sur une sphère rigide (la sphère est un réflecteur parfait pour l'onde). Il obtient un résultat important en considérant une sphère de petite taille devant la longueur d'onde ; la force est beaucoup plus élevée dans une onde stationnaire. Son approche est reprise pour des fronts d'onde sphériques par Embleton [24]. Yosioka et Kawasima (1955 [25]) étendent l'approche de King pour prendre en compte l'élasticité de la sphère. Ils observent alors des pics de résonance dans la force attribués à des ondes qui se propagent à la surface de la sphère. De manière remarquable, ils confirment leur prévision théorique dans une expérience utilisant une sphère de silice suspendue à un fil [26, 27]. Une application rapidement visée était l'étalonnage des transducteurs ultrasonores utilisés dans les applications médicales. L'intensité du faisceau peut être déduite de la force. Une

méthode proposée par Dunn [28] utilise une sphère suspendue sur un pendule et permet de mesurer la pression de radiation exercée. Néanmoins, il a rapidement été reconnu que l'hypothèse d'onde plane, propre aux travaux de King, Yosioka et Kawasima, était rarement rencontrée en expérience. Chen et Apfel [29, 30] s'intéressent alors au problème de la force exercée sur une sphère élastique positionnée sur l'axe de propagation d'un faisceau focalisé. Il ressort de leur étude l'importance de la position relative de la sphère par rapport à la focale du transducteur. Ils ne traitent pas le cas d'une sphère positionnée hors de l'axe de propagation. Les études citées précédemment supposent une symétrie importante : dans le repère lié à la sphère, le champ incident doit être axisymétrique. Il est évident que positionner une sphère hors de l'axe d'un faisceau, ou bien supposer un champ aux fronts d'onde quelconques suffit à briser cette hypothèse forte. Marston, dans une série de publications dédiée à l'étude des faisceaux de Bessel [13], calcule la force qu'ils exercent sur une sphère élastique [31, 32, 33, 34, 35]. Procédant astucieusement à une décomposition du champ incident en une superposition d'ondes planes, il applique les résultats bien connus pour celles-ci. Son analyse est cependant elle aussi restreinte au cas d'une sphère placée sur l'axe du faisceau. Son approche montre clairement l'importance du calcul du champ diffusé et la difficulté qui en résulte quand elle est située hors de l'axe du faisceau.

Pourtant, la position de la sphère dans la scène sonore est un élément très important pour l'ensemble des applications qui peuvent être imaginées. En effet, sous l'action de la pression de radiation, la sphère ne restera pas statique. Hormis le cas spécial de l'onde plane, la force ressentie par la sphère différera souvent fortement suivant sa position. Animés par les applications visant à manipuler un objet avec un faisceau acoustique, Shung *et al.* [36, 37] ont considéré la force exercée sur une sphère par un faisceau de type Gaussien. Ils se placent dans le régime de l'acoustique géométrique ; la taille de la sphère est contrainte à être grande devant la longueur d'onde du faisceau.

Prenant l'hypothèse inverse, *i.e.* une sphère très petite devant la longueur d'onde, Gor'kov (1962) donne une expression élégante de la force pour une sphère placée n'importe où dans un champ de type stationnaire [38]. Il remarque alors que dans le cas d'ondes stationnaires, la pression de radiation acoustique est une force conservative et donc qui dérive d'un potentiel. La topologie de ce potentiel (soit aussi la stabilité de la force acoustique) dépend de deux contrastes différents. Le premier compare la compressibilité du fluide et celui de la sphère. Il caractérise la capacité de la sphère à rentrer en oscillation monopolaire. Un deuxième contraste dit d'inertie, caractérise la capacité de l'onde à accélérer une particule dans un mouvement dipolaire et dépend de la densité du fluide et de l'objet. Du fait de la simplicité de son expression analytique, mais aussi de son large champ d'application, il est devenu possible de prévoir la force ressentie par la sphère pour une position quelconque de celle-ci. Son expression est de loin la plus utilisée pour les applications de la pression de radiation en acoustique. Récemment, Settnes et Bruus [39] ont étendu la théorie de Gor'kov pour prendre en compte la viscosité du milieu.

13. Ce sont des solutions particulières de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques. Nous les décrirons en détail au chapitres II et III.

L'étude des vortex (des faisceaux particuliers aux fronts d'onde hélicoïdaux [14]) ont démontré d'importantes propriétés pour la manipulation d'objets en optique. Obtenus plus récemment en acoustique, l'étude de leur pression de radiation a aussi suggéré des potentialités. Marston [34] étudie le cas des faisceaux de Bessel hélicoïdaux et leur découvre la propriété de pouvoir tirer de manière continue un objet vers la source du faisceau. Un effet qui a été rediscuté par la suite [40]. Kang *et al.* [41] appliquent l'analyse de Gor'kov à un exemple particulier de ces faisceaux mais ne semblent pas avoir considéré que leurs fronts d'onde étaient progressifs (la théorie de Gor'kov ne s'appliquant pas).

Prenant en compte un champ acoustique aux fronts d'onde quelconques ainsi qu'une position et une taille de la sphère arbitraires, il semble, qu'à l'heure actuelle, aucun modèle analytique suffisamment général n'existe pour traiter un ensemble de situations importantes (faisceaux tridimensionnels, progressifs et stationnaires). Bien que des approches numériques utilisant la méthode des différences finies [42], des volumes finis [43] et des éléments finis [44] aient donné des résultats satisfaisants en deux dimensions (problèmes axisymétriques), aucune ne propose de traiter un problème général à trois dimensions.

I.3 Application de la pression de radiation à la manipulation d'objets sans contact

I.3.1 Pièges optiques

La faiblesse des forces optiques prédites par la théorie de Maxwell (Eq. (2)) ne laissaient pas envisager de réelles applications. Seulement en astronomie, où les intensités lumineuses sont énormes, voyait-on une manifestation de l'effet mécanique de la lumière [15]. Il a fallu attendre l'avènement des premiers lasers pour significativement changer la situation. En 1970, Arthur Ashkin observe pour la première fois l'accélération de particules micrométriques et leur piégeage dans un puits de potentiel stable [3]. Le schéma de ses expériences est montré à la figure 2. Procédant dans l'eau, la pression de radiation d'un seul laser accélère les particules de latex dans la direction de propagation du faisceau. Elles viennent alors percuter la boite à échantillons et restent piégées latéralement. Il a alors l'idée de contrer l'accélération axiale en utilisant un deuxième laser. Les particules étaient alors confinées entre la focale des deux faisceaux. Dès le départ, il entrevoit la possibilité de piéger des molécules et même des atomes. Ses recherches ont finalement mené au refroidissement d'atomes par laser [46, 47] [16]. En accordant la fréquence du laser à une des transitions atomiques, l'absorption et l'émission spontanée d'un photon permet

14. Ses faisceaux particuliers seront aussi présentés en détail au chapitre II.

15. Poynting avait écrit en 1905 : "A very short experience in attempting to measure these forces is sufficient to make one realize their extreme minuteness... a minuteness which appears to put them beyond consideration in terrestrial affairs... " [45]

16. Les développements d'Ashkin ont largement contribué aux travaux de Tannoudji, Chu et Phillips qui se sont vus décerner le prix Nobel de physique en 1997. Steven Chu a longtemps collaboré avec Ashkin au sein des Bell labotatories.

dans ce cas de ralentir les atomes et diminuer ainsi leur agitation thermique.

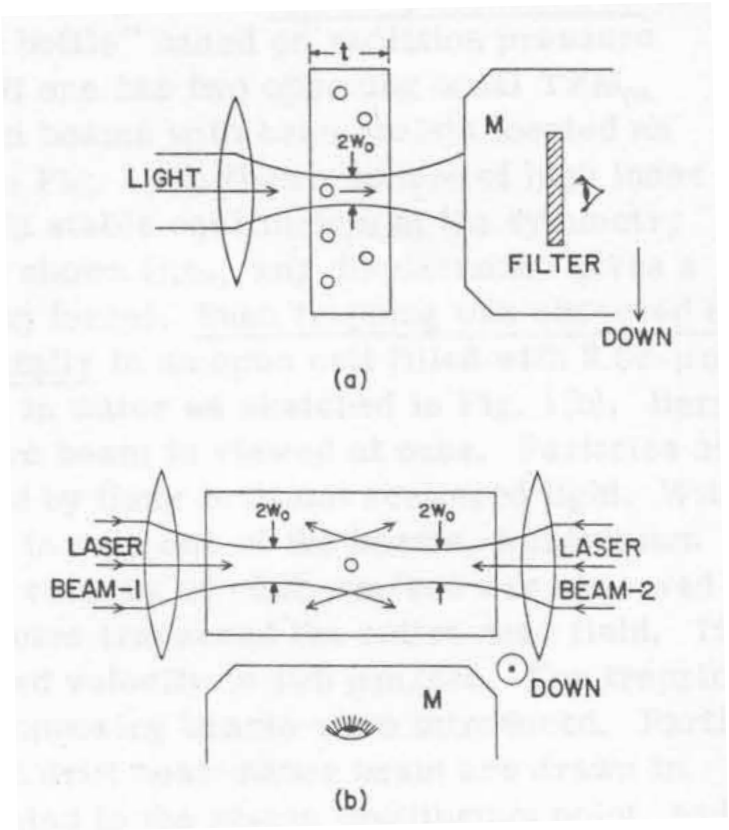
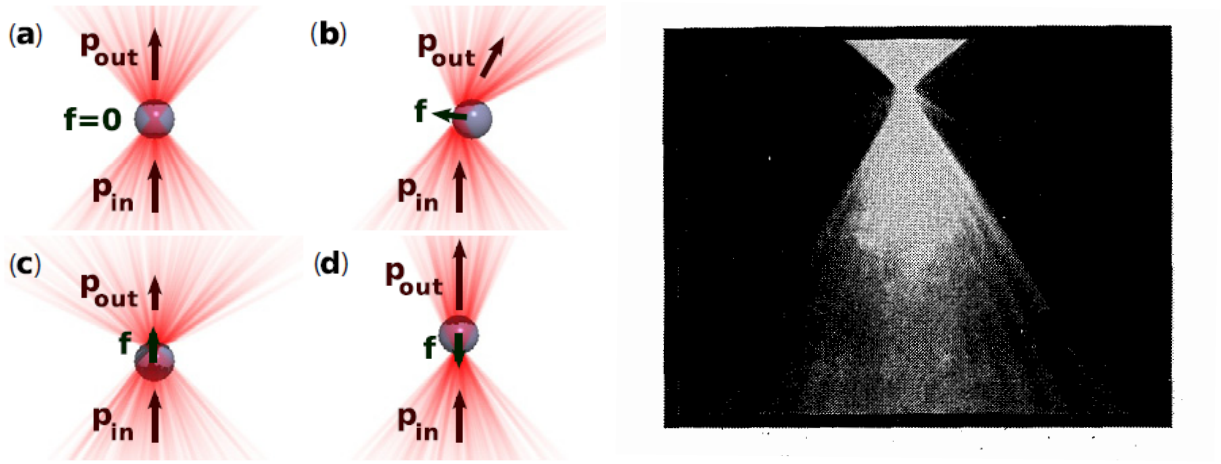


FIGURE 2 – Schéma reproduit de la première expérience d'Ashkin (1970). Il observe l'accélération de particules micrométriques sujettes à la pression de radiation d'un laser en (a) et les piège dans un puits de potentiel stable à l'aide d'un deuxième laser en (b).

Ce n'est qu'en 1986, qu'il propose d'utiliser la force de gradient d'un seul laser fortement focalisé pour piéger des particules en trois dimensions [48]. Pour y parvenir, il fallait trouver une méthode pour contrer la forte accélération axiale qu'il observait dans ses premières expériences. L'utilisation de lentilles convergentes avec une forte ouverture numérique (atteignant le plus souvent un angle d'ouverture de 70°) a permis de faire dominer la force attractive de gradient devant la force de poussée axiale résultant de la rétrodiffusion de la lumière. L'utilisation de particules transparentes devient aussi nécessaire (leur indice optique doit être proche de celui du milieu de propagation). Grâce a un laser fortement focalisé, la force agit donc localement comme un "ressort", maintenant la particule dans une unique position d'équilibre stable. Sur la figure 3 (a), il est possible de comprendre l'action du faisceau par la conservation du moment des photons incidents et réfractés par une sphère transparente. Cette expérience concluante marque l'invention des pinces optiques qui sont depuis devenues un outil formidable pour un vaste champ d'applications en chimie, biologie, robotique et en physique [49, 50, 51, 52]. Block [53] met l'emphase sur la grande dextérité offerte par ce schéma utilisant un faisceau unique et ses avantages pour les applications en biologie.



(a) (b)

FIGURE 3 – Principe de fonctionnement d'une pince optique. En (a), la force de gradient exerce un rappel sur une particule transparente quelque soit sa position près de la focale (schéma extrait de la référence [51]). En (b), photo prise par Ashkin d'une particule piégée dans un laser fortement focalisé.

Depuis, le développement de nouvelles fonctionnalités pour les pinces optiques en ont fait des outils courants d'investigation scientifique. Allen [54] a démontré l'existence d'un moment cinétique orbital bien défini pour les faisceaux de Gauss-Laguerre (un exemple de vortex optiques). Ce degré de liberté supplémentaire a permis de mettre en rotation des particules par absorption [55] pendant qu'elles étaient piégées. En outre, Simpson *et al.* ont pu distinguer l'action combinée du moment cinétique intrinsèque (de spin) et extrinsèque (orbital) que possèdent les photons d'un vortex optique [56, 57]. La dynamique de la particule piégée dépend fortement du milieu dans laquelle elle évolue. Une particule piégée peut ainsi devenir un outil pour sonder la rhéologie de divers fluides à l'échelle microscopique [58] et parfois même dans des conditions extrêmes de pression et de température [59]. La sphère piégée peut aussi agir sur le fluide comme le démontrent Leach *et al.* avec la mise en place d'une "micropompe" [60]. Grier a introduit le concept des "holographic optical tweezers" pour une reconfiguration en temps réel de la forme et des propriétés de multiples pièges [61, 62] donnant ainsi une importante flexibilité à cette méthode de micromanipulation.

Concernant les applications en biologie, il a dès le départ été reconnu que l'utilisation de pinces optiques pouvait causer un dommage irréversible sur les objets fragiles [17]. En effet, typiquement, l'intensité à la focale du faisceau fortement focalisé peut atteindre 10^7 à 10^8 W/cm^2 pour développer des forces faibles de l'ordre du piconewton. Ainsi le faisceau échauffe à la fois l'objet et le milieu et il devient nécessaire d'accorder le laser à une lon-

17. Dans l'expérience d'Ashkin (1986), les particules de latex piégées finissaient par fondre en quelques minutes voire secondes suivant l'intensité du faisceau. Il baptise "opticution" le dommage optique exercé sur les particules biologiques [63].

gueur d'onde proche de l'infrarouge [18]. Aussi, l'intensité nécessaire pour piéger augmente avec la taille de l'objet. Néanmoins, la dextérité de l'outil reste très prisée des biologistes et biophysiciens. La technique privilégiée est d'utiliser une sphère micrométrique piégée comme une poignée attachée à une entité biologique pour venir mesurer son élasticité ou toute autre propriété. Cette technique a été appliquée à l'étude de molécules (telle l'ADN), virus ou bactéries [49, 64] .

I.3.2 Pièges acoustiques

À une toute autre échelle, il semblerait que la première observation d'un objet lévité par une onde acoustique ait été faite par Allen et Rudnick [65] en 1947. En rapportant sur la fabrication d'une sirène haute puissance dans les fréquences audibles, ils ont également observé, pour leur simple amusement, la lévitation de pièces de monnaie placées dans le champ acoustique ; un effet confirmé plus en détail peu après [66]. Les techniques de lévitation ont alors rapidement été développées sous l'élan de potentielles applications aérospatiales [67]. Elles utilisent un transducteur ultrasonore (émettant à une fréquence de 20 à 100 kHz environ), la plupart du temps focalisé, et un réflecteur pour créer une onde stationnaire dans une cavité. Les particules solides sont ainsi piégées dans les nœuds de pression du champ acoustique (voir Fig. 4). Finalement, en variant la fréquence d'émission dans la cavité, les particules piégées peuvent être déplacées unilatéralement avec les lignes nodales [68]. La lévitation aérienne a rapidement mené à l'étude des oscillations de surface de gouttes excitées dans un environnement contrôlé [69]. Ceci est devenu un moyen d'obtenir une mesure directe de leur tension de surface [70] ainsi que de leur seuil de rupture [71]. Les dispositifs modernes de lévitation aérienne ont intégré la possibilité de contrôler davantage le puits de potentiel piégeant l'objet. De cette façon, un contrôle électronique de la position de l'objet dans l'espace a pu être démontré [72, 73]. Crum [74] a également démontré la possibilité d'utiliser une onde stationnaire pour piéger des gouttelettes fluides dans un tube rempli d'eau. Éventuellement, en remplaçant les gouttes par une bulle de gaz, ce sont des phénomènes tels que la sonoluminescence qui ont pu être étudiés [5].

Wu, en 1991, s'est inspiré du concept d'Ashkin pour tenter de piéger des particules à l'aide d'un seul faisceau ultrasonore focalisé. Dans son article intitulé "Acoustical tweezers" [76] c'est avec deux faisceaux contrapropagatifs qu'il piège de petites particules de latex et des agglomérats d'œufs de grenouille. Sur la figure 5, nous montrons le schéma de son montage et une photographie d'agglomérats d'œufs piégés près de la focale des deux faisceaux acoustiques. Il justifie l'utilisation d'un deuxième émetteur par l'apparition d'un écoulement induit par l'atténuation de l'onde acoustique (le "vent de quartz" ou vent acoustique). Le deuxième faisceau permet d'annuler l'écoulement et crée aussi une onde stationnaire axiale. Ce système, à la manière des systèmes de lévitation, permet d'obtenir un puits de potentiel stable pour les particules élastiques. Notons la similitude de son dispositif avec le premier montage d'Ashkin (Fig. 2) qui préféra distinguer la pince

18. Cette longueur d'onde minimise l'absorption de l'énergie électromagnétique dans l'eau.

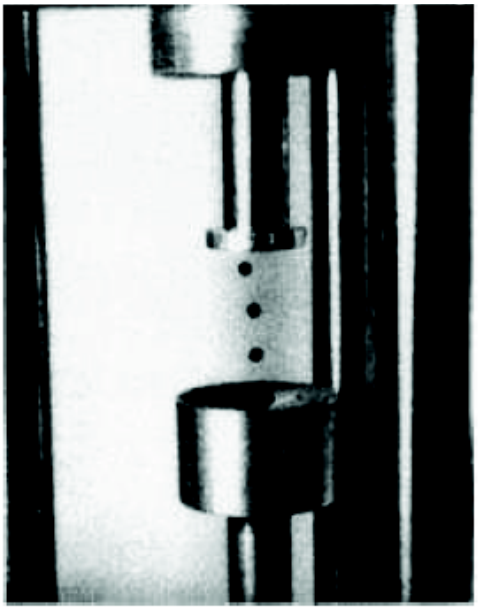


FIGURE 4 – Photographie d'un système de lévitation acoustique (d'après Xie *et al.* (2001) [75]). Une onde stationnaire est créee entre un émetteur concave (en bas) et un réflecteur. Les particules solides sont piégées aux nœuds de pression.

optique de son piège à onde stationnaires. Lee *et al.* proposent des faisceaux ultrasonores haute fréquence (100 à 200 MHz) pour piéger latéralement des petites gouttelettes d'huile de silicone [77, 78]. À l'aide d'une fine membrane transparente aux ondes acoustiques, ils contrent l'accélération axiale induite par la pression de radiation du faisceau. C'est alors uniquement la force latérale qui permet de piéger et déplacer les particules. L'utilisation d'un faisceau ultrasonore pour manipuler des particules est d'autant plus importante qu'elle est motivée par des avantages considérables offerts par l'acoustique. Nous avons vu que la force était proportionnelle à la densité d'énergie de l'onde à la fois en optique et en acoustique. Soit encore, au flux d'intensité divisé par la vitesse de propagation. La force d'une pince acoustique pourrait donc théoriquement dominer de cinq ordres de grandeur celle retrouvée en optique. Il serait alors possible de manipuler des objets macroscopiques et avec des forces abondantes, toute en réduisant les risques d'endommagement.

L'utilisation d'un faisceau acoustique pour manipuler des objets en trois dimensions semble encore difficile et l'idée n'a par la suite jamais été reprise. L'utilisation de la pression de radiation acoustique à ainsi été limitée à des applications médicales. Ce n'est que très récemment et avec le développement rapide du domaine de la microfluidique [79] et des technologies de laboratoire sur puce ("Lab on a chip") qu'il y a eu un nouvel essor pour les forces acoustiques. Ces environnements fluidiques contrôlés permettent de réaliser de nombreuses études chimiques et biologiques sur des quantités infimes de fluide ou sur des objets du vivant. La nécessite d'agir mécaniquement dans ces environnements a naturellement ouvert le domaine à l'utilisation de la pression de radiation acoustique. On parle alors d'une nouvelle discipline nommée "acoustofluidique" [80, 81]. Suivant la

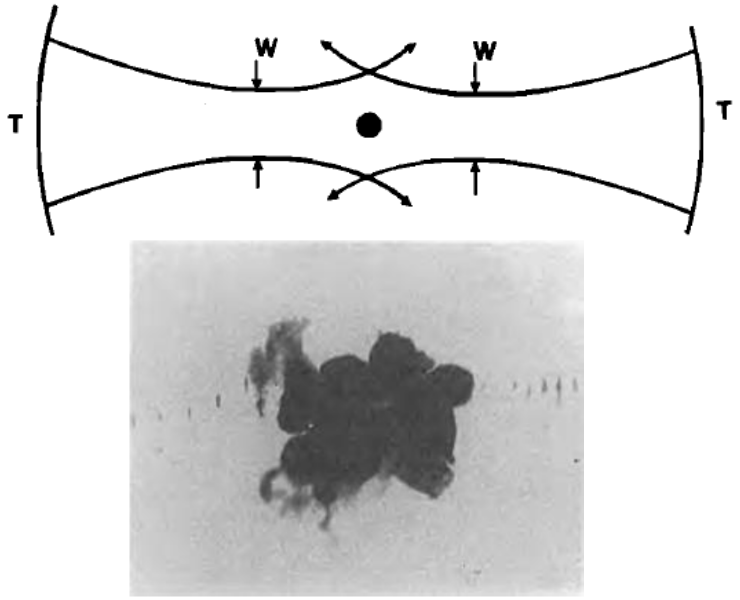


FIGURE 5 – Schéma du montage à deux faisceaux de Wu et une photographie d'œufs de grenouille piégés dans l'eau. Deux transducteurs focalisés émettent des faisceaux ultrasonores dans des directions opposées. Notez l'apparition de bandes axiales, signe de l'existence d'une onde stationnaire.

pression de radiation acoustique exercée sur un objet, l'acoustophorèse consiste à trier et séparer de multiples particules et à de hautes vitesses dans des micro-canaux [82, 83] et trouve des applications de concentration et de décontamination en biologie et médecine. Prenant le cas des bulles, leur excitation simultanée permet d'étudier des forces d'interaction qui expliquent leur auto-organisation [84]. Des bulles excitées dans ces milieux exercent à leur tour un pouvoir d'attraction dur les objets voisins et permettent de piéger et déplacer des microparticules dans ces milieux confinés [85]. Une autre technique émergente consiste à utiliser des ondes acoustiques de surface. Elles peuvent être générées par des multiples transducteurs inter-digités déposés sur un substrat piézoélectrique. On peut alors émettre des ondes progressives pour agir par exemple sur des gouttes [86, 87]. À l'instar de l'acoustophorèse et des techniques de lévitation acoustique, on peut aussi créer des puits de potentiels complexes dans les microcanaux à partir d'ondes de surface contre-propagatives. Trouvant dans un premier temps des applications pour le tri [88], il a rapidement été envisagé de déplacer et manipuler avec précision un objet unique dans cet environnement 2D [89] grâce à une configuration en temps réel du puits de potentiel. Néanmoins, ces techniques ne semblent pas pouvoir agir de manière localisée sur une seule particule puisque l'ensemble du milieu est excité.

Concernant la rotation contrôlée de particules, il est aussi connu que les ondes acoustiques peuvent exercer un couple sur un objet. Ainsi, Dual *et al.* ont démontré la rotation de fibres de verre [43]. En déphasant deux modes orthogonaux d'une chambre microfluidique rectangulaire, ils peuvent contrôler la carte spatio-temporelle du potentiel acoustique et donc le couple qui s'exerce sur des particules non sphériques. Comme nous l'avons déjà évoqué pour l'optique, les faisceaux hélicoïdaux (ou vortex), possèdent un moment cinétique orbital et plus précisément un flux orbital de quantité de mouvement en ce qui concerne l'acoustique. Il a alors été démontré le transfert de ce flux angulaire avec des disques absorbants à la fois dans l'air avec des vortex acoustiques audibles [90, 91] et dans les liquides avec des vortex ultrasonores [92, 93].

I.4 Objectifs de l'étude

La volonté d'obtenir un direct analogue de la pince optique avec un unique faisceau ultrasonore a servi de fil conducteur pour l'ensemble de cette étude. Les méthodes acoustiques de manipulation contrôlée reposent jusqu'à maintenant sur des systèmes d'ondes stationnaires essentiellement. Le concept d'Ashkin rapporté à l'acoustique semble prometteur pour obtenir une véritable dextérité de préhension et de manipulation à trois dimensions tout en présentant de nombreux avantages offerts par l'acoustique.

Au sujet des développements théoriques sur la pression de radiation qui s'exerce sur une sphère, nous avons montré qu'il n'existait aucun modèle suffisamment général pour analyser le comportement d'une sphère arbitrairement placée dans la scène sonore. La synthèse bibliographique ci-dessus a fait apparaitre les limitations suivantes :

– Le modèle de King applicable à une sphère rigide, et celui de Yosioka et Kawasima

prenant en compte la compressibilité de celle-ci sont tous deux limités à l'étude d'ondes planes.
- Leur généralisation au cas de faisceaux focalisés (Chen et Apfel) ou de Bessel (Marston) constitue un premier pas pour la prise en compte de fronts d'onde arbitraires. Néanmoins dans leur étude, la sphère est contrainte à être placée sur l'axe de propagation du faisceau.
- Dans la limite de petite sphère devant la longueur d'onde, la formulation analytique de Gor'kov a constitué un réel progrès pour modéliser l'action d'un champ stationnaire sur une sphère élastique dans un contexte tridimensionnel.

La première étape de ce travail est donc de développer une théorie tridimensionnelle de la pression de radiation qui s'exerce sur une sphère élastique. Le premier chapitre est consacré à ce point. Dans une première partie, nous montrons la procédure pour traiter le problème de la diffusion d'un champ arbitraire par une sphère élastique. De manière équivalente, cela permet aussi de considérer une position arbitraire de la sphère dans un champ incident fixé. Une fois déterminé, le champ acoustique total du premier ordre permet d'obtenir les éléments du tenseur de Brillouin et calculer les composantes de la force qui s'exerce sur la sphère. Ce calcul est montré dans une deuxième partie. La fin de ce chapitre est consacré à une comparaison et validation du résultat avec des expressions issues de la littérature.

Le résultat analytique obtenu pour les trois composantes de la force se présente sous la forme de séries infinies de plusieurs coefficients introduits pendant le calcul. Cette forme ne favorise pas l'interprétation physique de la pression de radiation exercée dans le cas général. Dans le deuxième chapitre, nous nous plaçons dans l'hypothèse de petite sphère devant la longueur d'onde et calculons la forme limite que prend la force. Dans ce régime, l'excitation de la sphère se résume à sa vibration monopolaire et son oscillation dipolaire. On retrouve alors la force de gradient de Gor'kov qui domine dans une onde stationnaire et s'exprime simplement à partir des dérivées du champ acoustique du premier ordre. Un deuxième terme est trouvé pour la force et est aussi exprimé à partir du champ est ses dérivées. Ce terme devient important pour toutes les ondes de nature progressive comme c'est le cas pour un faisceau acoustique ou d'autres systèmes d'ondes progressives.

Concernant les applications de la pression de radiation à la manipulation d'objets sans contact. La partie qui précède fait apparaitre les points suivants :

- Les pinces optiques d'Ashkin, ont bénéficié à un large spectre d'études scientifiques. Cette méthode de manipulation à faisceau unique est la plus simple à implémenter et présente une très bonne dextérité. Elle est limitée aux particules de taille nanométrique à micrométrique. Les forces développées sont très faibles et des fortes intensités optiques sont requises.
- La manipulation d'objets en acoustique utilise majoritairement des systèmes à ondes

stationnaires. De la lévitation jusqu'aux applications d'acoustofludique, la pression de radiation acoustique a montré une très bonne adéquation pour l'étude d'objets macroscopiques, et plus spécifiquement, les organismes biologiques. La dextérité de ces méthodes pour l'étude à l'échelle de la particule unique reste une limite.
– Les tentatives pour reproduire en acoustique le concept de pince tel que défini par Ashkin ne sont pas totalement concluantes. Il reste a comprendre et analyser les mécanismes de répulsion axiale qui mènent à une forte accélération de la particule dans la direction de propagation.

Dans un quatrième chapitre, nous appliquons la théorie obtenue dans l'objectif de comprendre les mécanismes menant aux observations documentées et proposer une méthode satisfaisante pour piéger et manipuler des particules avec un unique faisceau ultrasonore. Théoriquement, une solution trouvée est d'utiliser des faisceaux focalisés particuliers : les vortex acoustiques. Nous examinons en détail la pression de radiation que peuvent exercer ces faisceaux dans un contexte tridimensionnel.

Un dernier chapitre est dédié aux réalisations expérimentales de cette thèse. Pour vérifier les conclusions tirées de notre modèle, nous proposons une méthode de synthèse performante pour générer des vortex acoustiques focalisés dans une première partie. Les prévisions théoriques de la pression de radiation sont mises en contexte et utilisées pour procéder à la réalisation expérimentale de la pince acoustique à faisceau unique.

Chapitre II

Théorie tridimensionnelle de la pression de radiation exercée sur une sphère

Introduction

Ce premier chapitre théorique va permettre de donner un cadre formel général et utile pour l'ensemble des études de cette thèse. Il s'agit de calculer la pression de radiation qui s'exerce sur une sphère élastique plongée dans un champ acoustique. Comme nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction, il semble manquer une approche suffisamment générale pour convenablement traiter le problème pour des champs acoustiques aux fronts d'onde arbitraires et pouvant donc être de nature tridimensionnelle. Les travaux de King [23] et de Yosioka et Kawasima [25] ont montré que le problème pouvait être traité dans une base sphérique centrée sur la sphère. La présente étude a pour but de lever l'ensemble des limitations des études précédentes pour pouvoir modéliser la pression de radiation appliquée sur une sphère arbitrairement positionnée dans un champ acoustique quelconque. Nous commencerons par fixer le cadre de la théorie de la pression de radiation qui est celle établie par Brillouin. Puis, dans la deuxième et troisième partie, nous revisitons le problème de la diffusion d'une onde par une sphère élastique pour fixer un cadre général et exprimons la force moyenne qui s'applique. Pour finir le chapitre, les résultats sont comparés aux expressions obtenues pour l'onde plane progressive et aussi pour le cas intéressant des faisceaux de Bessel. Une partie du contenu de ce chapitre à fait l'objet d'une publication [94].

II.1 Pression de radiation de Langevin : l'approche de Brillouin

II.1.1 Avant propos

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il existait deux concepts de la pression de radiation en acoustique : la pression de radiation de Rayleigh et de Langevin. Nous avons aussi précisé à cette occasion que dans un milieu libre, c'était le concept de Langevin qui a pu être rigoureusement vérifié par les expériences. Aussi, l'étude de la pression de radiation exercée sur une sphère en interaction avec un champ acoustique répond aux relations établies par Brillouin. Avant de présenter la théorie que nous avons développée pendant la thèse, il convient de présenter son approche qui a généralisé le concept de Langevin.

Son apport important consiste à prouver que le concept de "pression" de radiation est en réalité une grandeur tensorielle.

II.1.2 Tenseur de radiation de Brillouin

La force qui s'exerce sur une particule en interaction avec un champ acoustique dans un fluide supposé parfait est définie comme une grandeur moyenne sur une période acoustique $T = 2\pi/\omega$. Elle est obtenue en intégrant l'excès de pression sur la surface mobile de l'objet :

$$F_i = \left\langle \int_{S(t)} p n_i \, \mathrm{dS} \right\rangle \tag{14}$$

où $p(\vec{x}, t)$ est le champ de pression totale dans le fluide et $\vec{n}$ le vecteur entrant et normal à la surface de l'objet. C'est un effet moyen à distinguer de la force instantanée appliquée à l'objet et qui ne contribue qu'à la mise en oscillation de celui-ci. La surface $S(t)$ de l'objet est donc en oscillation et rend le calcul de la force moyenne délicat. Obtenir la force nette impose de se placer dans le repère mobile lié à l'objet. Ce qui revient à se placer en coordonnées Lagrangiennes pour évaluer l'intégrale. Cette méthode est adoptée par King [23] mais a rarement été reprise par la suite [24]. Des difficultés mathématiques supplémentaires compliquent le calcul de la force en suivant ce schéma [1]. Pour les éviter, tout en se plaçant en coordonnées Euleriennes, il suffit de partir de la loi de conservation de la quantité de mouvement [95] :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \tag{15}$$

avec :

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j. \tag{16}$$

où v_i est la vitesse du fluide, Π_{ij} est le tenseur flux de quantité de mouvement. C'est précisément un bilan sur la quantité de mouvement qui va nous permettre d'exprimer la force. En intégrant l'équation (15) sur le volume contenu entre la surface mobile $S(t)$ et une surface fixe S_R entourant l'objet (voir la figure 6), on obtient :

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \, \mathrm{dV} = \int_{S(t)} \Pi_{ij} n_j \, \mathrm{dS} + \int_{S_R} \Pi_{ij} n'_j \, \mathrm{dS} \tag{17}$$

1. La sphère étant libre d'osciller, King montre que la prise en compte de ces oscillations donne naissance à des termes de pression supplémentaires qui s'ajoutent à l'excès de pression de Langevin.

où $\vec{n}$ est le vecteur sortant normal à la surface $S(t)$ (pointant donc vers l'intérieur de l'objet) et $\vec{n}$ le vecteur sortant normal à la surface S_R. Il convient maintenant de réexprimer le membre de gauche en faisant usage du théorème de transport de Reynolds :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \rho v_i \,\mathrm{dV} = \int_{V(t)} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t}\,\mathrm{dV} + \int_{S(t)} \rho(v_i v_j) n_j \,\mathrm{dS} \tag{18}$$

qui stipule qu'en présence d'une paroi mobile dans le volume V, la variation totale de la quantité de mouvement est due à une variation interne de celle-ci et de son flux traversant la surface mobile $S(t)$. Or, en ce qui concerne la propagation d'ondes dans un fluide supposé parfait, en moyenne, la quantité de mouvement totale se conserve. En prenant la moyenne de l'équation (18), le membre de gauche est donc nul et la relation (17) devient :

$$\left\langle \int_{S(t)} (\Pi_{ij} - \rho(v_i v_j)) n_j \,\mathrm{dS} \right\rangle = -\int_{S_R} \langle \Pi_{ij} n'_j \rangle \,\mathrm{dS} \tag{19}$$

Finalement, en utilisant la définition du tenseur flux de quantité de mouvement (16) et l'expression (14), l'équation (19) nous donne pour la pression de radiation la relation suivante :

$$F_i = -\int_{S_R} \langle \Pi_{ij} \rangle n_j \,\mathrm{dS} \tag{20}$$

Le tenseur $\langle \Pi_{ij} \rangle$ est communément dénommé tenseur de Brillouin qui a été le premier à révéler la nature tensorielle de la pression de radiation. Nous remarquons qu'aucune hypothèse n'est nécessaire sur la forme de l'objet pour établir l'équation (20). La force moyenne peut donc s'obtenir à partir de ce tenseur intégré sur n'importe quelle surface immobile entourant complètement un objet quelconque. La situation peut être décrite de la façon suivante. L'onde acoustique ne transporte pas de quantité de mouvement (pas de transport de masse en moyenne). Par contre, localement à travers une surface, on peut quantifier le flux de quantité de mouvement moyen qui la traverse. Ainsi la présence de tout obstacle va modifier ce flux. Grâce à la conservation moyenne de la quantité de mouvement (ou mathématiquement parce que le tenseur de Brillouin est à divergence nulle), cette modification peut être quantifiée sur une surface de contrôle quelconque. On remonte ainsi à la fraction de quantité de mouvement cédée à l'objet et qui est responsables de la force appliquée.

La pression de radiation est calculée avec suffisamment de précision à partir des quantités acoustiques du second ordre. Il faut donc donner l'expression de l'excès de pression acoustique à l'ordre 2, $\langle p_2 \rangle$. Pour l'obtenir, il convient dans un milieu parfait d'utiliser la seconde relation de Langevin introduite au chapitre précédent (Eq. 11) :

$$\langle p_2 \rangle = \frac{1}{2\rho_0 c^2}\langle p_1^2 \rangle - \frac{1}{2}\rho_0 \langle |\vec{v}^{(1)}|^2 \rangle = -L \tag{21}$$

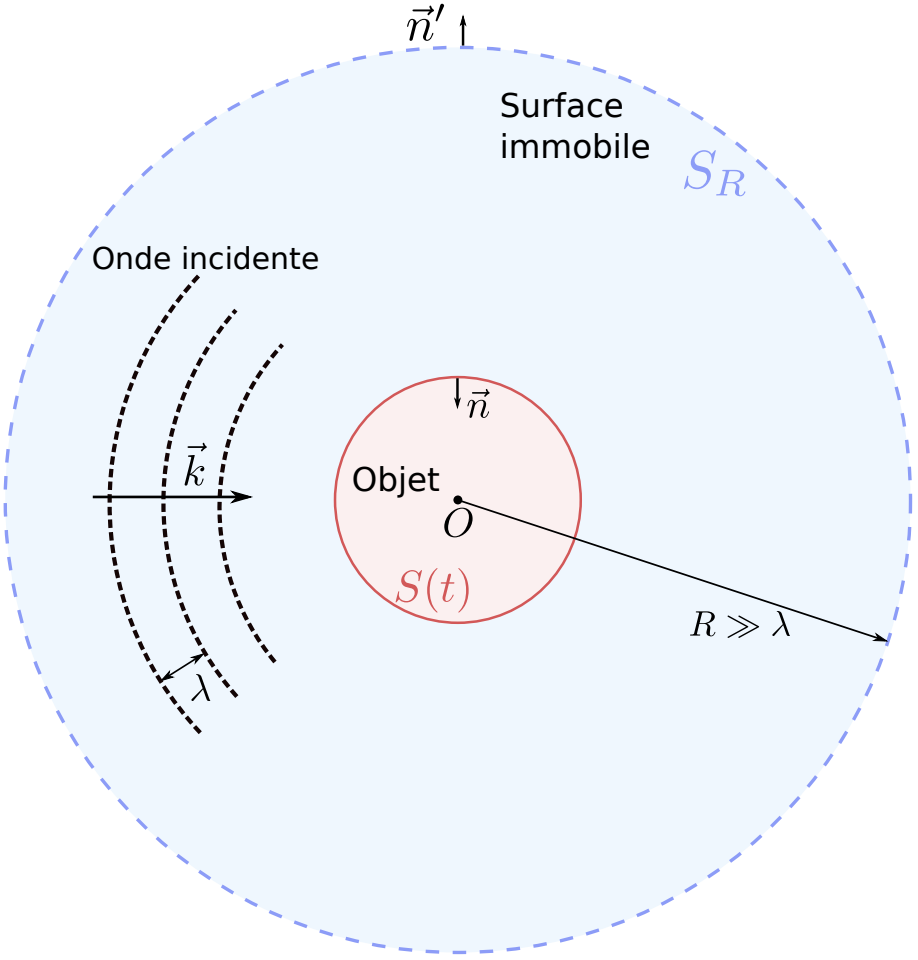


FIGURE 6 – **Objet suspendu dans un fluide parfait dans lequel se propage une onde acoustique.** La surface $S(t)$ de l'objet est en oscillation sous l'effet du champ acoustique incident avec un vecteur d'onde $\vec{k}$. S_R est une surface arbitraire entourant complétement l'objet.

où p_1 et $\vec{v}^{(1)}$ sont les quantités acoustiques calculées au premier ordre. Finalement, le tenseur de Brillouin devient au second ordre :

$$\Pi_{ij} = \left(\frac{1}{2\rho_0 c^2} \langle p_1^2 \rangle - \frac{1}{2} \rho_0 \langle |\vec{v}^{(1)}| \rangle \right) \delta_{ij} + \rho v_i^{(1)} v_j^{(1)}. \tag{22}$$

Quelques remarques sont importantes à ce point. Premièrement, la pression de radiation peut être calculée directement à partir du champ de pression et de de la vitesse au premier ordre, les non-linéarités du milieu n'interviennent pas. Ainsi, d'une manière générale, le calcul de la pression de radiation exercée sur un objet peut se décomposer en deux étapes :

1. Traiter le problème de diffusion. Il conduit au calcul de l'amplitude des ondes diffusées dans toutes les directions de l'espace par l'objet,

2. Le champ à l'ordre 1 étant déterminé, le calcul du tenseur de Brillouin permet d'obtenir la force résultante sur l'objet dans une direction donnée.

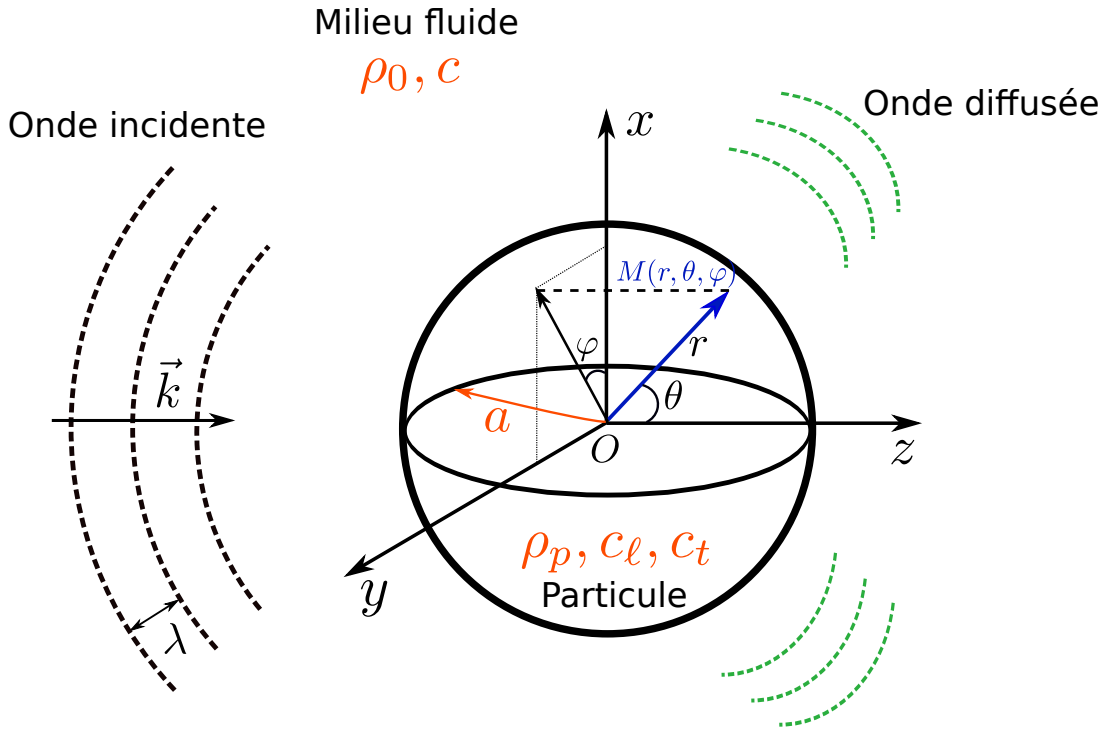


FIGURE 7 – **Repère sphérique du problème.** Sphère de rayon a suspendue dans un fluide. Elle diffuse le champ acoustique incident avec un vecteur d'onde $\vec{k}$. Un repère sphérique (r, θ, φ) est défini au centre de la sphère O. Des ondes sont excitées à l'intérieur de la particule de masse volumique ρ_p et se propagent avec des vitesses c_ℓ et c_t pour les composantes longitudinales et transverses respectivement.

Nous allons maintenant présenter le développement de ces étapes pour calculer la pression de radiation exercée sur une sphère élastique dans un champ acoustique quelconque. On se munit d'un repère en coordonnées sphériques (r, θ, φ) centré sur la sphère (voir figure 7). Les ondes acoustiques se propagent à la célérité c dans le milieu fluide. La sphère est élastique, homogène et isotrope, de masse ρ_p et de rayon a. Les ondes longitudinales et transverses se propagent respectivement aux célérités c_ℓ et c_t. Après l'extinction de tous les phénomènes transitoires du système, la perturbation est supposée harmonique et la convention temporelle adoptée est $(e^{-i\omega t})$. Le problème sera traité de manière suffisamment générale pour obtenir un cadre théorique tridimensionnel de la pression de radiation exercée sur une sphère.

II.2 Problème de la diffusion d'un champ acoustique par une sphère élastique revisité

II.2.1 Avant propos

L'analyse classique de la diffusion d'une onde plane par une sphère liquide est due à Anderson [96] et reconsidérée pour le cas d'une sphère élastique par Faran [97]. Ils ont introduit la théorie générale du traitement de la diffraction en acoustique quand la sphère est de taille quelconque devant la longueur d'onde. Epstein et Carhart [98] ainsi que Allegra et Hawley [99] ont intégré les effets thermiques et visqueux à ces modèles. L'hypothèse d'axisymmétrie du champ incident supposé par ces auteurs permet de traiter le problème de manière directe à partir de l'équation de Helmhotz scalaire. De manière remarquable, une façon de briser cette symétrie est de considérer le problème d'une inclusion élastique dans un milieu lui aussi élastique et dans lequel se propage une onde plane cette fois-ci polarisée transverse. C'est un problème résolu par Truell *et al.* [100] qui ont fait usage pour la première fois des potentiels scalaires de Debye que nous introduirons à notre tour plus loin. Considérant des objets de forme quelconque, Waterman formula une nouvelle analyse de la diffraction en introduisant ce qu'il appelle alors la "T-matrix" [101]. Malgré la généralité de son étude et de ses avantages d'un point de vue numérique, cette matrice ne possède d'expression analytique que pour des cas bien connus comme celui de la sphère ou du cylindre élastique.

Ici nous allons montrer qu'il est possible de généraliser la méthodologie introduite par Anderson et Faran à un champ acoustique aux fronts d'onde arbitraires, ou de manière équivalente, à une sphère placée à une position arbitraire dans un champ acoustique déterminé. Le cadre formel approprié pour traiter le problème pour une sphère est celui des harmoniques sphériques.

II.2.2 Potentiels acoustiques dans le formalisme des harmoniques sphériques

Les équations de la mécanique des fluides se réduisent, dans le cadre de l'acoustique linéaire, à l'équation de propagation acoustique (voir par exemple [102]). En particulier, le champ de vitesse linéaire est supposé irrotationnel ($\vec{\nabla}\wedge\vec{v}^{(1)}=\vec{0}$) et un potentiel acoustique peut être défini de la manière qui suit : $\vec{v_1}=\vec{\nabla}\phi$. Dans l'hypothèse harmonique supposée ici, l'équation de propagation devient de manière classique l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta+k^2)\Phi=0 \quad \text{où} \quad k=\frac{\omega}{c} \tag{23}$$

Φ pouvant être de manière indifférente, une des quantités physiques suivantes : ρ_1, p_1, ϕ où une des composantes du vecteur vitesse, $\vec{v}^{(1)}$.

Base des harmoniques sphériques

Dans le repère sphérique défini, il est possible de trouver une base orthogonale de fonctions sur laquelle n'importe quelle solution de l'équation de Helmholtz pourra être décomposée. En coordonnées sphériques, les solutions de l'équation (23) s'écrivent (Annexe A) :

$$\Phi_n^m = f_n(k_0 r) Y_n^m(\theta, \varphi) \tag{24}$$

où $Y_n^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta)$ sont les harmoniques sphériques constitués d'une fonction sinusoïdale en φ et des polynômes de Legendre associés $P_n^m(x)$. f_n est une fonction de Bessel sphérique : $j_n(x)$ et $y_n(x)$ ou bien toute combinaison linéaire de celles-ci. On utilise fréquemment les fonctions de Hankel sphériques de première et seconde espèce $h_n^{(1)}(x)$ et $h_n^{(2)}(x)$ liées aux précédentes par :

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \quad \text{et} \quad h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x)$$

Plusieurs relations importantes liées à cette base sont données dans l'annexe A. En particulier pour le développement d'une fonction (indépendante de r) dans la base des harmoniques sphériques [103] (page 403) :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} c_n^m Y_n^m(\theta, \varphi), \tag{25}$$

où f est une fonction arbitraire sur la surface d'une sphère et qui est continue ainsi que ses deux premières dérivées. Une relation fondamentale est alors l'expression des coefficients c_n^m obtenus à partir des propriétés d'orthogonalité des harmoniques sphériques (Annexe A) :

$$c_n^m = \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{m*} \, \mathrm{d}\Omega. \tag{26}$$

où $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$ est l'angle solide.

Décomposition des potentiels du problème

Potentiels dans le fluide : En présence de la sphère, le potentiel acoustique est composé de la somme du champ incident ϕ_i et du champ diffusé ϕ_d :

$$\phi = \phi_i + \phi_d, \tag{27}$$

qui se décomposent de la manière la plus générale comme suit :

$$\phi_i = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_n^m j_n(kr) e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta), \tag{28}$$

$$\phi_d = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} R_n^m A_n^m h_n^{(1)}(kr) e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta). \tag{29}$$

ϕ_0 est l'amplitude réelle du champ incident. Les coefficients A_n^m sont à déterminer en connaissant le champ incident et le caractérisent complètement dans la base sphérique. On les appellera les *coefficients de forme* du champ incident. Le champ incident étant défini en absence de la sphère, on utilise pour l'évolution radiale, la fonction de Bessel sphérique j_n qui est la seule à être définie à l'origine. R_n^m sont les coefficients de diffusion que l'on recherche. Chaque coefficient représente l'amplitude de réflexion associée à chaque onde partielle sphérique de degré n et d'ordre m. De manière à satisfaire la condition de Sommerfeld en espace libre quand $r \to \infty$, l'onde diffusée doit diverger à partir de la sphère. Ainsi, on utilise la fonction sphérique de Hankel de première espèce ($h_n^{(1)}$). Dans la suite nous poserons $h_n^{(1)} \equiv h_n$ pour alléger les notations. Remarquons que les équations (28) et (29) font intervenir en principe une infinité de termes pour chaque champ. En ce qui concerne le champ incident, la convergence de la série dépend fortement de la variation spatiale des fonctions utilisées. De manière intuitive, plus le champ s'éloigne du cas d'une onde sphérique convergente ou divergente, plus il faudra de termes pour correctement le caractériser. Ainsi une onde plane nécessite un spectre dense d'harmoniques sphériques pour la caractériser dans une région de l'espace.

Potentiels dans la sphère : Dans la sphère élastique, l'équation du mouvement linéarisée s'écrit [104] :

$$-\rho_p \omega^2 \vec{u} = (\lambda_p + \mu_p)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu_p \Delta \vec{u}, \tag{30}$$

où $\vec{u}(\vec{x})$ est la dépendance spatiale du champ de déplacement et λ_p et μ_p sont les deux coefficients de Lamé. Suivant la décomposition de Helmholtz, on peut scinder le champ de déplacement en une partie "irrotationnelle" et une partie "solénoïdale" :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \tag{31}$$

Notons au passage que nous sommes passés d'un vecteur $\vec{u}$ ayant trois inconnues à deux potentiels et quatre inconnues au total. Pour lever cette indétermination, il est d'usage d'utiliser la condition de Jauge : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. Cette condition permet d'établir que le potentiel scalaire Φ et le potentiel vecteur $\vec{A}$ sont alors solution d'une équation de Helmholtz scalaire et vectorielle respectivement :

$$(\Delta + k_\ell^2)\Phi(r,\theta,\varphi) = 0\,, \quad k_\ell = \frac{\omega}{c_\ell} = \omega\sqrt{\frac{\rho_p}{\lambda_p + 2\mu_p}}, \tag{32}$$

$$(\Delta + k_t^2)\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \vec{0}\,, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t} = \omega\sqrt{\frac{\rho_p}{\mu_p}}. \tag{33}$$

À ce stade, le problème est considérablement simplifié lorsque la sphère est illuminée par une onde plane. Par symétrie de révolution autour de l'axe de propagation, les champs ne dépendent pas de φ et il en résulte qu'une seule composante du potentiel $\vec{A}$ est non nulle : $\vec{A} = (0, 0, A_\varphi)$. En réutilisant la condition de jauge, on pouvait alors simplement montrer que cette composante satisfait l'équation de Helmholtz scalaire. Jusqu'ici, aucune restriction n'a été imposée au champ incident ni à la position de la sphère en fonction de celui-ci. Dans ce cas, il n'y a pas de solution formelle simple à l'équation (33) dans la plupart des repères. Néanmoins, dans le repère sphérique, il est possible de démontrer que le potentiel vecteur $\vec{A}$ peut s'écrire en fonction de deux potentiels scalaires, parfois dénommés potentiels scalaires de Debye (cette démonstration est donnée en annexe B) :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (r\vec{e_r}\psi) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (r\vec{e_r}\chi)/k_t, \tag{34}$$

où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire radial de la base. Ces potentiels de Debye satisfont à leur tour l'équation de Helmholtz scalaire :

$$(\Delta + k_t^2)(\psi, \chi) = 0. \tag{35}$$

Il devient alors possible de décomposer les potentielles (Φ, ψ, χ) dans la base des harmoniques sphériques :

$$\Phi = \frac{\phi_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} S_n^m A_n^m j_n(k_\ell r) e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta) \tag{36}$$

$$\psi = \frac{\phi_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} T_n^m A_n^m j_n(k_t r) e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta) \tag{37}$$

$$\chi = \frac{\phi_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} U_n^m A_n^m j_n(k_t r) e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta) \tag{38}$$

Φ caractérise la propagation des ondes de compression dans le solide alors que ψ et χ représentent deux polarisations transverses. Les normalisations en $1/\omega$ permettent de garder des coefficients de décomposition A_n^m, R_n^m, S_n^m, T_n^m et U_n^m sans dimension. La dimension de ϕ_0 étant le m^2/s.

II.2.3 Application des conditions aux limites

Quatre inconnues R_n^m, S_n^m, T_n^m et U_n^m ont été introduites et peuvent être déterminées en appliquant les conditions aux limites sur la surface de la sphère, en $r = a$. À l'interface, on doit vérifier la continuité des déplacements normaux et la continuité des contraintes :

$$\begin{aligned} u_i^{(f)} + u_d^{(f)} &= u_r && (39)\\ p_i + p_s &= -\tau_{rr} && (40)\\ 0 &= \tau_{r\theta} && (41)\\ 0 &= \tau_{r\varphi} && (42) \end{aligned}$$

où $u_{i,d}^{(f)}$ est le déplacement radial des particules fluides à la surface de la sphère. Le milieu incident est ici fluide et dépourvu de viscosité. Ceci explique le membre de gauche des équations (41) et (42). Les éléments du tenseur des contraintes de Cauchy, τ_{ij}, sont reliés aux composantes du vecteur déplacement u_i par la loi de comportement linéaire :

$$\tau_{ij} = \lambda_p \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_p \epsilon_{ij} \quad \text{où} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{43}$$

avec ϵ_{ij} le tenseur des déformations linéarisées et ϵ_{kk} sa trace. δ_{ij} est le symbole de Kronecker. À ce stade, on pourrait inclure les pertes visqueuses dans la sphère. Dans le cadre du modèle de Kelvin-Voigt par exemple [105], il suffirait alors d'introduire des nombres d'ondes complexes à la place de k_ℓ et k_t et la suite du calcul ne serait pas formellement modifiée. D'après l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1, \tag{44}$$

on peut exprimer, dans le fluide, la pression au premier ordre et le déplacement radial en fonction du potentiel ϕ uniquement :

$$p_1 = i\rho_0 \omega \phi \quad ; \quad u_r = \frac{1}{-i\omega}\frac{\partial \phi}{\partial r}. \tag{45}$$

De façon similaire dans le solide, il est nécessaire d'exprimer le déplacement $\vec{u}$ et les composantes du tenseur des contraintes τ_{ij} en fonction des potentiels (Φ, ψ, χ) que nous avons introduits. On fait alors usage des équations (31), (34) et (43) en traitant méthodiquement les multiples rotationnels qui apparaissent. L'identité suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a} \tag{46}$$

s'avère utile pour regrouper astucieusement les différents termes. On peut ensuite reconnaitre l'équation de Helmholtz (35) qui s'applique aux deux potentiels (ψ, χ). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + k_t^2 r\psi \\
u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + \frac{k_t^2}{\sin\theta}\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \\
u_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) - k_t^2\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\
\tau_{rr} &= -\lambda_p k_\ell^2 \Phi + 2\mu_p\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + k_t^2\frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) \\
\tau_{r\theta} &= \mu_p\left(2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + k_t^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right)\right) \\
\tau_{r\varphi} &= \mu_p\left(\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\Phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + k_t^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\chi}{r}\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{47}$$

Il reste à appliquer les conditions aux limites définies aux équations (39)-(42) pour exprimer les quatre coefficients R_n^m, S_n^m, T_n^m et U_n^m encore inconnus. Néanmoins, il faut au préalable continuer à exprimer les équations (45) et (47) en utilisant l'expression des différents potentiels dans la base des harmoniques sphériques (28),(29),(36),(37) et (38). Si ce calcul ne présente pas de difficulté technique majeure, il reste que les étapes sont quelque peu fastidieuses et leur exposé intégral serait ici mal venu. Par contre, nous précisons tout de même que le calcul consite essentiellement à dériver avec soin tous les potentiels et de remarquer alors que les équations différentielles suivantes :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(n[n+1] - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \quad \text{avec} \quad y = P_n^m(x) \tag{48}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n[n+1]\right)y = 0 \quad \text{avec} \quad y = j_n(x), y_n(x) \text{ ou } h_n^{(1,2)}(x) \tag{49}$$

qui sont celles obtenues par Bessel et Legendre, permettent de factoriser la majorité des termes en faisant apparaitre les inconnues R_n^m, S_n^m, T_n^m et U_n^m en facteur lorsqu'on applique les conditions aux limites en $(r = a)$. En ayant introduit alors trois paramètres sans dimension, $x = ka$, $x_\ell = k_\ell a$ et $x_t = k_t a$, on obtient :

$$ix\left(j_n'(x)+R_n^m h_n'(x)\right)=S_n^m x_\ell j_n'(x_\ell)+n(n+1)T_n^m j_n(x_t) \tag{50}$$

$$\begin{aligned} i\rho_0\omega^2\left(j_n(x)+R_n^m h_n(x)\right)=&-\lambda_p x_\ell^2 S_n^m j_n(x_\ell)+2\mu_p\left[x_\ell^2 j_n''(x_\ell)S_n^m\right.\\ &\left.+n(n+1)T_n^m\left(x_t j_n'(x_t)-j_n(x_t)\right)\right] \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} 0=\mu_p\sin\theta\frac{dP_n^m}{d\theta}\left[2S_n^m\left(j_n(x_\ell)-\right.\right.&\left.x_\ell j_n'(x_\ell)\right)+T_n^m\left((n^2+n-2)j_n(x_t)+x_T^2 j_n''(x_t)\right)\Big]\\ &+im\mu_p P_n^m U_n^m\left(x_t j_n(x_t)-x_t^2 j_n'(x_t)\right) \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} 0=im\mu_p P_n^m\left[2S_n^m\left(j_n(x_\ell)-\right.\right.&\left.x_\ell j_n'(x_\ell)\right)+T_n^m\left((n^2+n-2)j_n(x_t)+x_T^2 j_n''(x_t)\right)\Big]\\ &-\mu_p\sin\theta\frac{dP_n^m}{d\theta}U_n^m\left(x_t j_n(x_t)-x_t^2 j_n'(x_t)\right) \end{aligned} \tag{53}$$

On remarque maintenant que les équations (52) et (53) font encore intervenir une dépendance angulaire alors que les conditions aux limites doivent être vérifiées quelque soit θ ou φ. En fait, nous allons montrer que ces deux équations dégénèrent en deux relations redondantes. Les polynômes de Legendre associés forment une base orthogonale telle que [106] :

$$\langle P_k^m|P_\ell^m\rangle=\frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!}\delta_{k,\ell}, \tag{54}$$

et :

$$\langle\frac{P_\ell^m}{\sqrt{1-x^2}}|\frac{P_\ell^n}{\sqrt{1-x^2}}\rangle=\begin{cases}0 & \text{si } m\neq n\\ \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!} & \text{si } m=n\neq 0\\ \infty & \text{si } m=n=0\end{cases} \tag{55}$$

où nous avons défini le produit scalaire suivant :

$$\langle P_n^m|P_{n'}^{m'}\rangle=\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-1}^1 P_n^m(x)P_{n'}^{m'}(x)\,\mathrm{d}x\quad\text{en posant } x=\cos\theta$$

Ensuite faisant usage des relations de récurrence suivantes [106, 107] :

$$\begin{aligned}&(1-x^2)P_n^m=(n-m+1)(n+m)\sqrt{1-x^2}P_n^{m-1}+mxP_{n+1}^m\\ &(2n+1)\sqrt{1-x^2}P_n^{m-1}=P_{n-1}^m-P_{n+1}^m\\ &(2n+1)xP_n^{m-1}=(n-m+1)P_{n-1}^m+(n+m)P_{n+1}^m\end{aligned}$$

On montre alors assez simplement que :

$$\begin{aligned}
&\langle P_n^m | \sin\theta \frac{dP_n^m}{d\theta} \rangle = 0 \\
&\langle P_n^m | P_n^m \rangle \neq 0 \\
&\langle \sin\theta \frac{dP_n^m}{d\theta} | \sin\theta \frac{dP_n^m}{d\theta} \rangle \neq 0
\end{aligned}$$

Ces relations d'orthogonalité appliquées aux équations (50) et (51) donnent deux nouvelles équations et le système (50)-(53) peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} R_n^m \\ S_n^m \\ T_n^m \\ U_n^m \end{pmatrix} = \mathbf{B} \tag{56}$$

où les éléments de la matrice $\mathbf{A}$ sont :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ixh_n'(x) & -x_\ell j_n'(xh_n'(x)) & n(n+1)j_n'(x_t) & 0 \\ i\rho_0\omega^2 h_n(x) & \lambda_p x_\ell^2 j_n(x_\ell) - 2\mu_p x_\ell^2 j_n'(x_\ell) & n(n+1)(j_n(x_t) - x_t j_n'(x_t)) & 0 \\ 0 & 2\left(j_n(x_\ell) - x_\ell j_n'(x_\ell)\right) & (n^2+n-2)j_n(x_t) + x_t^2 j_n''(x_t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_n(x_t) - x_t j_n'(x_t) \end{pmatrix} \tag{57}$$

et ceux du second membre $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -ixj_n'(x) \\ -i\rho_0\omega^2 j_n(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Plusieurs remarques sont à faire sur ce système d'équations. Premièrement, tous les éléments des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont indépendants du paramètre azimutal m. Le problème de la sphère isotrope plongée dans un fluide parfait est donc invariant par rotation et cela quelque soient les propriétés du champ incident. Notamment, nous discuterons plus loin dans ce manuscrit, le cas de champs ayant une variation azimutale et de fait un flux de moment angulaire. Le système montre que ce flux de moment angulaire ne sera pas transmis à un objet sphérique. Pour exercer un couple sur un objet, il faut soit briser la symétrie sphérique, soit que l'objet absorbe l'énergie acoustique. Deuxièmement, la dernière équation impose qu'on ait identiquement $U_n^m = 0$. Le système dégénère à 3 inconnues seulement. Un seul potentiel ψ était nécessaire pour caractériser les polarisations transverses dans la sphère. En effet ce résultat qui peut paraître surprenant s'explique totalement par la décomposition de Debye (Eq. 34). Le potentiel vecteur $\vec{A}$ a été décomposé

en deux ondes transverses. L'une d'entre-elles, représentée par le potentiel χ, est toujours localement tangente à la surface de la sphère. Le fait que cette onde ne soit pas générée dans le solide est le problème analogue à l'incidence d'une onde sur une surface plane, qui ne donne jamais lieu à l'onde secondaire horizontale "SH" lorsque le milieu incident est fluide. On a montré (calculs non faits ici) que ce deuxième potentiel χ n'intervient dans le problème de diffusion que si l'onde incidente possède une polarisation transverse.

Ainsi, le système est réduit à :

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} R_n \\ S_n \\ T_n \end{pmatrix} = \mathbf{B} \tag{59}$$

où on a retiré la dernière ligne à la matrice $\mathbf{A}$ et au vecteur $\mathbf{B}$. On écarte également la dépendance en m des coefficient R_n, S_n et T_n. Pour trouver l'expression de chaque coefficient, il faut procéder à la résolution du système de trois équations à trois inconnues. Une méthode parmi d'autres retenue ici est celle de Cramer. Il vient finalement pour le coefficient de diffusion :

$$R_n = -\frac{j_n(x)\xi_n - x j_n'(x)}{h_n(x)\xi_n - x h_n'(x)} = \alpha_n + i\beta_n \tag{60}$$

où nous avons posé $\alpha_n = \Re(R_n)$ et $\beta_n = \Im(R_n)$. ξ_n est un coefficient qui ne dépend que des propriétés du matériau élastique et s'écrit :

$$\xi_n = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho_p}\, x_T^2\, \frac{a_n/b_n - c_n/d_n}{e_n/b_n - f_n/d_n}, \tag{61}$$

où :

$$\begin{aligned}
a_n &= x_\ell j_n'(x_\ell), \\
b_n &= x_\ell j_n'(x_\ell) - j_n(x_\ell), \\
c_n &= 2n(n+1) j_n(x_t), \\
d_n &= -2x_t j_n'(x_t) - \left(x_t^2 - 2n(n+1) + 2\right) j_n(x_t), \\
e_n &= 2x_\ell j_n'(x_\ell) + \left(\frac{x_t^2}{2} - n(n+1)\right) j_n(x_\ell), \\
f_n &= 2n(n+1)\left(j_n(x_t) - x_t j_n(x_t)\right).
\end{aligned} \tag{62}$$

avec $x = ka$, $x_\ell = k_\ell a$ et $x_t = k_t a$ les paramètres sans dimension introduits précédemment. Les coefficients S_n et T_n de transmission des ondes longitudinales et transverses peuvent

être calculés en suivant la même procédure mais ne seront pas nécessaires pour la présente étude.

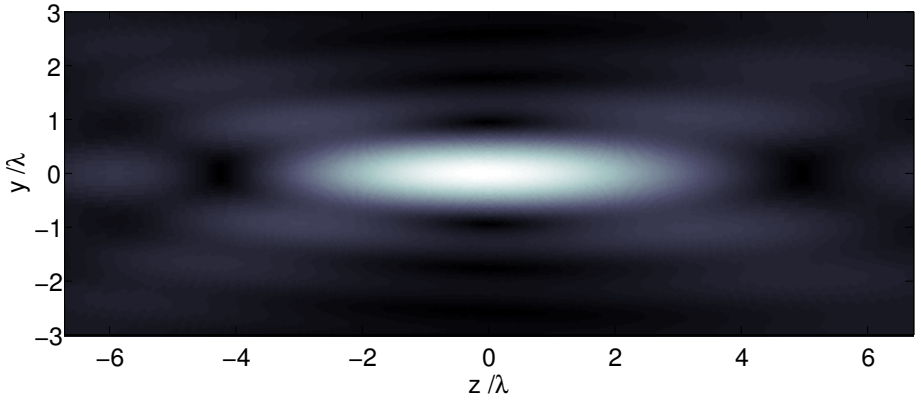
Le coefficient de diffusion R_n ne dépend donc que des paramètres mécaniques de la sphère (ρ_p, c_ℓ, c_t), de son rayon (a), de la fréquence d'excitation $(k = \omega/c)$ et du milieu incident ρ_0. À ce stade, il faut remarquer que le fait de n'avoir invoqué aucune symétrie n'a pas eu de conséquence sur l'expression finale obtenue pour les coefficients de diffusion. Nos résultats correspondent identiquement à ceux obtenus classiquement par Faran et Carhart [97, 98] dans le cas d'une onde plane incidente. En toute généralité, nous venons de montrer que quelque soit le champ incident dans un milieu fluide, si on peut le décomposer dans la base sphérique centrée sur la sphère, alors le problème de diffusion dégénère et les coefficients sont identiques à ceux de la diffusion d'une onde plane par une sphère élastique. Il s'avère aussi que pour le cas encore plus général d'une inclusion sphérique élastique dans un milieu élastique, ce résultat reste vrai. La conclusion étant que pour le problème de diffusion, la seule symétrie à invoquer est celle de l'objet.

II.2.4 Illustrations de la diffusion par une sphère élastique

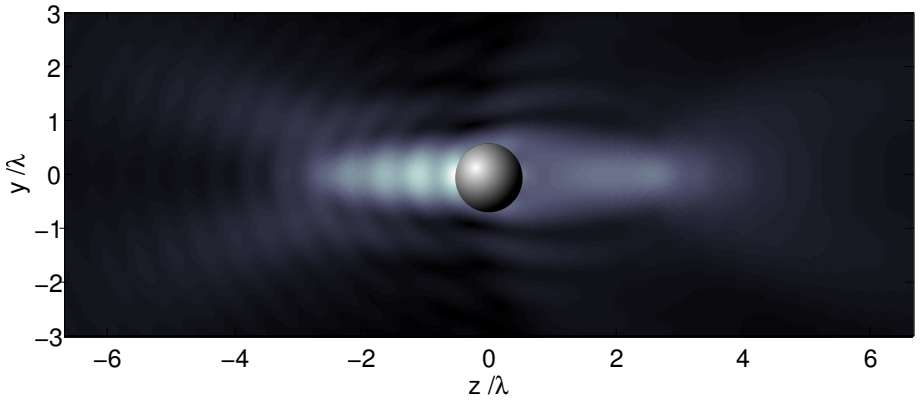
Comme nous le verrons en détail dans le chapitre IV, le champ incident est complètement caractérisé par ses coefficients de forme A_n^m introduits à l'équation (28). Ils contiennent l'information du poids à donner à chaque mode sphérique pour correctement le décrire. De plus, comme nous venons de traiter le problème de diffusion dans un cadre formel général vis à vis des symétries du problème, les coefficients de forme pourront très bien décrire un faisceau ultrasonore focalisé par exemple, ou tout autre type de champ. De manière plus importante encore, ils vont permettre d'obtenir analytiquement le champ pour une sphère placée n'importe où dans l'espace. Plus de détails sur la méthodologie analytique mise en place seront donnés au chapitre IV. En ce qui concerne l'illustration que nous donnons ici, il suffit de savoir que c'est une des possibilités importante de la théorie développée.

Prenons une sphère élastique de rayon $a = 0,5\lambda$ où λ est la longueur d'onde acoustique déterminée par la fréquence d'excitation et le milieu de propagation. On se donne un faisceau acoustique focalisé (obtenu grâce à un transducteur de forme concave par exemple). Sur la figure 8 a), nous représentons (en unités arbitraires) la carte d'intensité du champ acoustique obtenu. Le faisceau se propage suivant l'axe z. Si nous plaçons la sphère à la focale du faisceau (position (0,0,0) dans le repère cartésien), elle diffracte le champ incident. Le calcul des coefficients de diffusion R_n correspondants permet de tracer le champ de pression total en b). On aperçoit facilement l'effet de la sphère. De la même manière, on peut grâce au modèle, translater la sphère hors de l'axe de propagation (position $(0, 0.5\lambda, 0)$). L'effet est évidemment différent et le champ diffracté contribue à un champ de pression total autour de la sphère distinct.

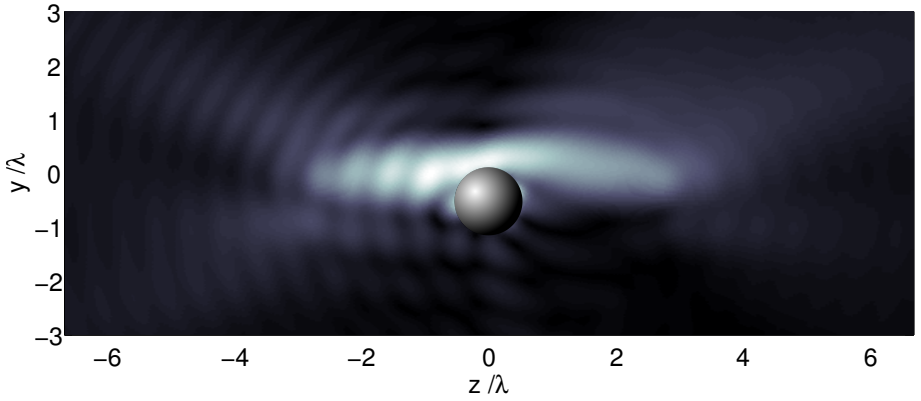
Cette même opération peut être répétée quelque soit la position de la sphère, ses propriétés mécaniques et la nature du champ incident.



(a) Faisceau focalisé incident



(b) Champ incident et diffusé pour une sphère en $(0, 0)$



(c) Champ incident et diffusé pour une sphère en $(0, 0.5\lambda)$

FIGURE 8 – **Champ diffusé par une sphère.** En a), Un faisceau acoustique incident. En b), La sphère de rayon $0,5\lambda$ est placée à la focale du faisceau. Elle diffuse le faisceau incident et la pression totale est représentée. En c) la même sphère est placée hors de l'axe de propagation et diffracte le faisceau différemment.

II.2.5 Conclusion

Dans cette section nous avons exposé le calcul de la diffusion d'un champ acoustique de fronts d'onde arbitraires. La perte de l'axisymétrie du champ incident a nécessité un traitement plus général de l'équation vectorielle de Helmholtz, satisfaite par le potentiel vecteur qui décrit les polarisations transverses dans la sphère élastique. On montre que ce potentiel vecteur peut être décomposé à son tour en deux potentiels scalaires dits de Debye. Ces potentiels sont solutions de l'équation scalaire de Helmhotz et donc décomposables dans le base des harmoniques sphériques. Une fois que tous les potentiels du milieu ont été définis, l'application des conditions aux limites à la surface de la sphère conduisent aux coefficients de diffusion recherchés. De manière assez surprenante, le problème final dégénère et les résultats établis dans le cadre de l'onde plane sont retrouvés. Il semblerait donc que seul la symétrie de l'objet importait. Néanmoins, il était nécessaire de s'assurer que nous étions en mesure de calculer le champ diffusé pour une position arbitraire de la sphère et quelque soit le champ incident. Nous pouvons maintenant aller plus loin et donner une analyse tridimensionnelle de la pression de radiation qui s'applique sur une sphère.

II.3 Expression de la force résultante dans le repère cartésien centré sur la sphère

Le champ acoustique total autour de la sphère est maintenant déterminé. La deuxième étape pour obtenir la pression de radiation agissant sur la sphère est de calculer les éléments du tenseur de Brillouin $\langle \Pi_{ij}^{(2)} \rangle$ et d'appliquer l'équation (20). Nous allons nous placer dans le repère cartésien dont le centre O coïncide avec le centre de la sphère. La surface S_R entourant l'objet est naturellement sphérique et l'élément de surface infinitésimale s'écrit : $\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \mathrm{dS}\vec{e_r}$ où $\vec{e_r}$ est le vecteur normal à la surface pointant vers l'extérieur de celle-ci (voir la figure 6). Faisant usage de l'équation (21) et en introduisant de nouveau le potentiel de vitesse $\phi(r,\theta,\varphi) = (\phi_i + \phi_d)e^{-i\omega t}$, la projection du tenseur sur $\vec{e_r}$ donne les éléments du tenseur de Brillouin Eq. (22) qui contribuent à la force :

$$
\begin{aligned}
\langle \Pi_{rr} \rangle =& \langle p_2 + \rho_0 v_r^2 \rangle = \rho_0 \langle -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)^2\right) + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 \rangle, \\
\langle \Pi_{r\theta} \rangle =& \langle \rho_0 v_\theta v_r \rangle = \rho_0 \langle \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial r} \rangle, \\
\langle \Pi_{r\varphi\rangle} =& \langle \rho_0 v_\varphi v_r \rangle = \rho_0 \langle \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial r} \rangle.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Puis dans le repère cartésien, le vecteur force sera obtenu à partir de :

$$\vec{F} = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{f}(R,\theta,\varphi) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \tag{64}$$

où $\vec{f}$ est la densité surfacique de force définie telle que :

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\Pi_{rr}\rangle \\ \langle\Pi_{r\theta}\rangle \\ \langle\Pi_{r\varphi}\rangle \end{pmatrix} \tag{65}$$

II.3.1 Passage en champ lointain

En établissant l'équation (20), nous avons précisé que le choix de la surface S_R était arbitraire. Un choix judicieux qui va simplifier le calcul analytique de la force, est de prendre le rayon de la surface tel que $R \to \infty$. En pratique il suffit de vérifier $kR \gg 1$, et les fonctions de Hankel et de Bessel sphériques prennent la forme limite suivante [107] :

$$h_n^{(1)}(kR) \simeq (-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \tag{66}$$

et on a aussi :

$$j_n(kR) = \frac{h_n^{(1)}(kR) + h_n^{*(1)}(kR)}{2} \tag{67}$$

on peut alors écrire le champ de diffusion (Eq. 29) en approximation de champ lointain comme :

$$\phi_d = \phi_0 \frac{a}{R} e^{ikR} F_d(\theta,\varphi), \tag{68}$$

où la fonction F_d est une série d'harmoniques sphériques souvent appelée *fonction de forme* de diffusion. Elle permet de décrire la distribution du champ diffusé dans la direction (θ,φ) :

$$F_d(\theta,\varphi) = \frac{-i}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} i^{-n} R_n A_n^m e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta). \tag{69}$$

A l'instar de ϕ_d, le potentiel incident (Eq. 28) en champ lointain peut s'écrire :

$$\phi_i = (\phi_0 a) \left(\frac{e^{ikR}}{2R} F_i^{(1)}(\theta,\varphi) + \frac{e^{-ikR}}{2R} F_i^{(2)}(\theta,\varphi) \right), \tag{70}$$

où les fonctions $F_i^{(1)}$ et $F_i^{(2)}$ s'écrivent :

$$F_i^{(1)}(\theta,\varphi) = \frac{-i}{ka}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} i^{-n} A_n^m e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta), \tag{71}$$

$$F_i^{(2)}(\theta,\varphi) = \frac{i}{ka}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} i^{n} A_n^m e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta). \tag{72}$$

pour évaluer l'équation (63), on doit se rappeler que les champs définis jusqu'à maintenant sont complexes et en prendre la partie réelle, ou bien, on utilise les propriétés suivantes :

$$\langle ab\rangle = \frac{1}{2}\Re\{ab^*\} \tag{73}$$

$$(a+b)(a^*+b^*) = |a|+|b|+2\Re(ab^*) \tag{74}$$

pour toute paire de fonctions complexes a et b harmoniques en ω. De plus, on remarque alors que l'approximation de champ lointain pour ϕ_i et ϕ_d permet d'écrire :

$$\left(\phi_d, \phi_i, \frac{\partial\phi_{i,d}}{\partial\theta}, \frac{\partial\phi_{i,d}}{\partial\varphi}\right)_{r=R} \propto \frac{1}{R} \tag{75}$$

Et de manière importante on a alors :

$$\langle\Pi_{r\theta}\rangle_{r=R} \simeq \langle\Pi_{r\varphi}\rangle_{r=R} \propto \frac{1}{R^4} \simeq 0 \quad \text{quand} R\to\infty \tag{76}$$

et

$$\langle\Pi_{rr}\rangle_{r=R} \simeq \rho_0\langle\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\rangle \propto \frac{1}{R^2} \tag{77}$$

donne la seule contribution finie à la force puisque $\mathrm{dS} = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. On mesure alors l'intérêt de passer en champ lointain pour calculer la force ; une seule composante du tenseur de Brillouin intervient et qui ne fait intervenir que le flux de quantité de mouvement radial transporté à travers la surface.

Finalement, en utilisant les expressions (68) et (70) on obtient :

$$\langle\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\rangle_{r=R} = \frac{\phi_0^2(ak)^2}{2R^2}\left(|F_d|^2 + \Re\left\{F_d\left(F_i^{(1)*} - e^{-2ik_0r}F_i^{(2)*}\right)\right\}\right), \tag{78}$$

$$\frac{1}{c^2}\langle\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\rangle_{r=R} = \frac{\phi_0^2(ak)^2}{2R^2}\left(|F_d|^2 + \Re\left\{F_d\left(F_i^{(1)*} + e^{-2ik_0r}F_i^{(2)*}\right)\right\}\right), \tag{79}$$

où nous avons négligé tous les termes proportionnels à $1/R^4$ au calcul de l'équation (77). Aussi, les termes qui ne font intervenir que des combinaisons du champ incident seul ne contribuent pas. En effet, ces termes doivent s'annuler entre-eux, ce qui revient à dire qu'en absence de la sphère, bien évidemment aucune force n'en résulte. Cela nous donne :

$$\langle \Pi_{rr} \rangle_{r=R} = \rho_0 \frac{\phi_0^2 (ak)^2}{2R^2} \left(|F_d|^2 + \Re \left\{ F_d F_i^{(1)*} \right\} \right). \tag{80}$$

II.3.2 Composantes du vecteur force

En projetant la composante $\langle \Pi_{rr} \rangle_{r=R}$ qui vient d'être obtenue en suivant la relation (65) et puis en intégrant sur la surface de la sphère (64), on obtient pour les trois composantes de la pression de radiation des relations du type :

$$F_{x,y,z} = -\frac{\rho_0 (ka)^2 \phi_0^2}{2} \left(I^{(1)}_{x,y,z} + I^{(2)}_{x,y,z} \right) \tag{81}$$

qui font intervenir 6 intégrales $I^{(1)}_{x,y,z}$ et $I^{(2)}_{x,y,z}$ dépendantes de l'expression trouvée pour $\langle \Pi_{rr} \rangle$ et de l'angle solide $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$. Le calcul de ces intégrales n'est ni trivial ni immédiat. Il requiert un soin particulier quant au choix des propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre associés et des fonctions trigonométriques utilisées à partir de l'expression des séries définissant les fonctions de forme F_d et $F_i^{(1)}$. Pour arriver à des simplifications convenables, tous les détails de calcul sont donnés en annexe (Annexe C). Après manipulation et simplification de ces intégrales, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} F_x = -\frac{\pi \rho_0 \phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} Q_n^m \big[& (V_n^m \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} - \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^1 \\ & - (V_n^m \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} - \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^2 \big], \end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned} F_y = -\frac{\pi \rho_0 \phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} Q_n^m \big[& -(V_n^m \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} + \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^1 \\ & - (V_n^m \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} + \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^2 \big], \end{aligned} \tag{83}$$

$$F_z = -\frac{\pi \rho_0 \phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} 2(n+m+1) Q_n^m \left[\Re\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\} D_n^2 - \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\} D_n^1 \right]. \tag{84}$$

où $D_n^1 = \alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n \alpha_{n+1} + \beta_n \beta_{n+1})$, $\quad D_n^2 = \beta_{n+1} - \beta_n + 2(\beta_{n+1} \alpha_n - \alpha_{n+1} \beta_n)$. (85)

$$\text{et} \qquad Q_n^m = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(2n+3)(n-m)!} \quad , \quad V_n^m = (n+m+1)(n+m+2). \tag{86}$$

Ces trois équations viennent terminer le calcul général de la pression de radiation exercée sur une sphère dans un milieu parfait. La généralité provient de trois points de vue essentiels :

1. Premièrement, aucune hypothèse n'a été formulée sur la nature du front d'onde incident. Ce champ pourra alors être plan, sphérique, cylindrique, hélicoïdal, focalisé, divergent, stationnaire ou progressif, etc ... Il suffit d'obtenir de manière convenable les coefficients de forme, A_n^m, décrivant la décomposition du champ dans la base sphérique (voir par exemple la section qui suit).
2. Deuxièmement, comme nous l'avons rapidement aperçu lors du calcul de la diffusion, il est possible d'envisager une position quelconque pour la sphère dans un champ incident défini initialement. Encore une fois, il suffit de déterminer les coefficients de forme du champ incident A_n^m dans le repère adéquat (voir section IV.1).
3. Finalement, la généralité provient aussi de l'objet lui même, le problème de la diffusion a été traité pour une sphère élastique. Cependant, le cas de la sphère liquide ou la bulle de gaz en sont des cas limites (si considérés dépourvues de viscosité et en négligeant les échanges thermiques)[108]. Ensuite, comme mentionné, nous pourrions facilement prendre en compte le comportement visco-élastique de la sphère [105] et évaluer ainsi l'influence de son absorption sur la pression de radiation. Aussi, un système de sphère cœur - coquille aurait pu être considéré à la section II.2. La seule condition étant encore une fois de trouver l'expression des coefficients de diffusion $R_n = \alpha_n + i\beta_n$ dans le repère lié à la sphère.

La théorie décrite ici semble donc appropriée pour l'analyse de la dynamique d'un diffuseur sphérique quelconque placé arbitrairement dans un champ acoustique quelconque. La seule limite étant, à priori, la forme de l'objet lui même. La théorie de la pression de radiation qui vient d'être présentée a fait l'objet d'une publication [94]. En arrivant au terme de ce calcul et au moment d'en proposer une implémentation numérique efficace, force a été de constater la remarquable similitude entre les développements propres à l'acoustique et une théorie bien connue des opticiens, la *Generalized Lorenz-Mie Theory*. La GLMT est très utilisée en électromagnétisme et fut proposée originellement par Gouesbet et Gréhan [109, 110].

II.4 Cas particuliers : onde plane et faisceau de Bessel

Nous allons maintenant retrouver avec nos expressions quelques exemples issus de la littérature. Nous commencerons d'abord par le cas bien connu de l'onde plane, initialement traité par King [23] dans le cas de sphère incompressible puis par Yosioka et Kawasima [25].

Puis nous introduirons un concept bien plus récent, celui de la force acoustique exercée par un vortex en nous appuyons sur des résultats publiés par Marston. Cette section est une première vérification de la justesse des expressions analytiques pour la pression de radiation. Cette vérification ne concerne que la composante F_z (Eq. 84) qui est la seule à avoir reçu un traitement dans les études citées.

II.4.1 Force exercée par une onde plane progressive : King, Yosioka et Kawasima

Considérons d'abord le cas d'une onde plane. Pour calculer la force F_z donnée à l'équation (84), il faut trouver l'expression des coefficients de forme A_n^m de l'onde. En coordonnées cartésiennes, lorsqu'elle est incidente suivant l'axe (Oz), elle est décrite par le potentiel acoustique suivant :

$$\phi_i(\vec{x}, t) = \phi_0 e^{i(kz-\omega t)}, \tag{87}$$

qui devient en coordonnées sphériques :

$$\phi_i(\vec{x}, t) = \phi_0 e^{i(kr\cos\theta-\omega t)}. \tag{88}$$

On peut alors chercher la décomposition de sa dépendance spatiale dans la base des harmoniques sphériques sous la forme suivante (Eq. (25)) :

$$e^{i(kr\cos\theta)} = \sum_{p=0}^{\infty} c_p P_p(\cos\theta), \tag{89}$$

puisque aucune dépendance azimutale n'est attendue. En multipliant chaque membre par $P_n(\cos\theta)$, puis en intégrant sur θ, on utilise l'orthogonalité des polynômes de Legendre associés (Annexe A), pour obtenir :

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} e^{(ikr\cos\theta)} P_n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{90}$$

Puis, en utilisant l'écriture intégrale suivante pour les fonctions de Bessel sphériques [103] (page 410) :

$$j_l(x) = \frac{1}{2i^{\ell}}\int_0^{\pi} e^{ixcos\theta} P_{\ell}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{91}$$

on obtient :

$$e^{i(kr\cos\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n(\cos\theta), \tag{92}$$

Par identification avec l'équation (28), le coefficients de forme d'une onde plane sont donc :

$$A_n^m = A_n = c_n = i^n(2n+1). \tag{93}$$

Cette expression implique aussi que $\Re\{A_n A_{n+1}^*\} = 0 \quad \forall n$ dans l'équation (84) et on obtient pour la force exercée par l'onde plane progressive :

$$F_z = 2\pi\rho_0\phi_0^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)D_n^1 \tag{94}$$

$$F_z = 2\pi\rho_0\phi_0^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)[\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_n\beta_{n+1})] \tag{95}$$

c'est le résultat obtenu par Yosioka et Kawasima [25] étendant la théorie de King [23] aux sphères élastiques. Le paramètre m est absent de l'analyse pour une onde plane dans ce repère et reflète son axisymétrie. De ce fait, F_x et F_y, qui couplent les ordres $m+1$ et $m-1$, sont identiquement nulles. Ceci est tout à fait consistant avec une onde plane se propageant suivant l'axe z qui ne peut donner lieu qu'à une force poussant la sphère dans la direction de propagation.

II.4.2 Force exercée par un faisceau de Bessel : l'approche de Marston

Un travail remarquable sur la diffusion et la pression de radiation exercée sur une sphère est celui de Marston. Dans une série de publications [31, 32, 33, 34], il s'attache à calculer et analyser l'interaction entre une sphère et un faisceau particulier dit de Bessel. Il a ouvert la voie à la généralisation que nous venons de présenter en pointant clairement dans ses travaux les difficultés liées à prendre en compte des faisceaux aux fronts d'onde arbitraires et/ou une position quelconque du diffuseur. Le cas particulier qu'il traite est celui du faisceau de Bessel :

$$\phi_i = \phi_0 J_{m'}(k_r\rho)e^{i(k_z z + m'\varphi - \omega t)} \tag{96}$$

où on a écrit son expression dans un repère cylindrique (ρ, φ, z) centré sur la sphère. Cette onde est une solution à variables séparées de l'équation de Helmholtz en milieu libre et qui fait intervenir les fonctions de Bessel cylindriques d'ordre m', $J_{m'}$. Tout comme l' onde plane, c'est une solution physique dépourvue de diffraction. L'amplitude du champ ne

varie pas avec la distance de propagation z. Les fonctions de Bessel apparaissent très naturellement dans de nombreux problèmes de diffraction dans une configuration à symétrie de révolution (*e.g.* la diffraction d'une onde plane par une fente circulaire, le rayonnement d'un piston circulaire ...). Durnin a proposé d'utiliser cette solution naturelle de l'équation de Helmholtz scalaire comme un faisceau optique à part entière [111, 112]. Comme nous le verrons en détail dans le chapitre IV, la pression de radiation exercée par ces faisceaux a des propriétés remarquables et uniques. En particulier Marston démontra théoriquement pour la première fois, le concept de faisceau "attracteur", le célèbre *tractor beam* prisé des auteurs de science fiction et qui initia une certaine compétition pour sa vérification expérimentale à la fois en optique et acoustique.

Pour mieux comprendre la construction d'un tel faisceau, partons d'une onde plane ayant une incidence quelconque $\vec{k}$. La propagation est décrite dans un repère cartésien centré sur le diffuseur auquel on adjoint les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) (Fig. 9). Ainsi $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{k} = (k_\rho \cos\varphi, k_\rho \sin\varphi, k_z)$. Pour chaque composante plane nous avons :

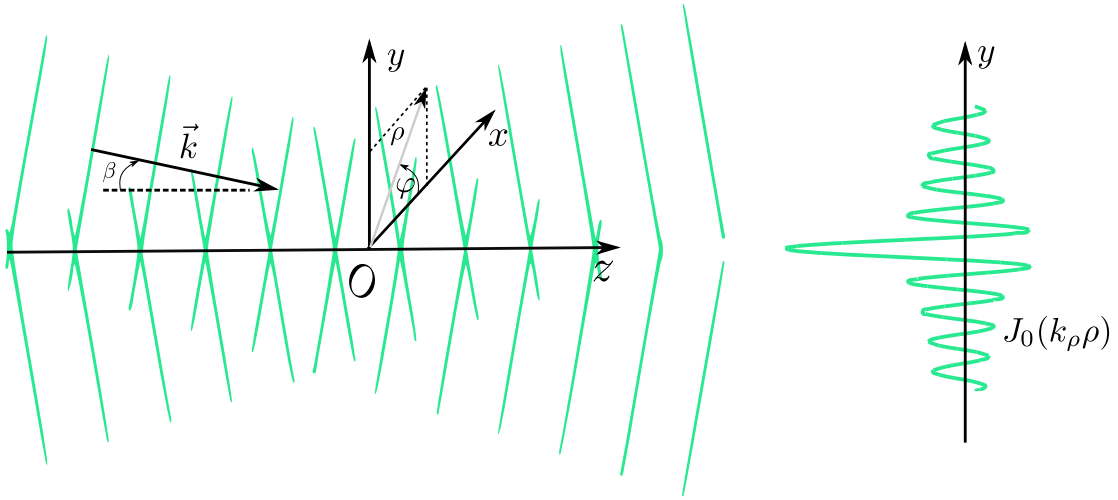


FIGURE 9 – **Décomposition d'un faisceau de Bessel en ondes planes**. Des composantes planes d'angle d'incidence fixé β réparties sur un cône (paramétrée par φ), interfèrent pour former un faisceau de Bessel.

$$\mathrm{d}\phi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ik_\rho(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} e^{ik_z z}, \tag{97}$$

Fixons maintenant l'angle d'incidence de cette composante par rapport à l'axe z à une valeur β :

$$k_\rho = k\cos\beta, \tag{98}$$

Ainsi la composante radiale du vecteur d'onde ne varie pas avec φ. Si nous considérons une somme de ces ondes planes ayant le même angle d'incidence β mais chacune partant

d'un azimute φ distinct, d'après le principe de superposition, le champ total s'écrit :

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}e^{ik_z z}\int_0^{2\pi} e^{ik_\rho(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{99}$$

où le facteur $1/2\pi$ est introduit par commodité. Dans l'équation (99), l'intégrale n'est autre qu'une représentation de la fonction de Bessel cylindrique $J_0(k_\rho\rho)$ et on obtient pour la superposition :

$$\phi = J_0(k_\rho\rho)e^{ik_z z}. \tag{100}$$

Ce potentiel est aussi la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques. On parle de solution fondamentale puisqu'on fixe l'ordre de la fonction de Bessel à l'ordre le plus bas dans l'équation (96). De manière plus générale, la fonction suivante :

$$\phi = \frac{1}{2\pi}e^{ik_z z}\int_0^{2\pi} A(\varphi)e^{ik_\rho(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi \tag{101}$$

est aussi une solution de l'équation des ondes en milieu libre. $A(\varphi)$ peut être une fonction quelconque de φ mais doit être suffisamment régulière [113]. Si chaque ondelette plane est déphasée de sa voisine de la quantité $A(\varphi) = e^{im'\varphi}$ où m' est un nombre entier, on retrouve l'ensemble des solutions cylindriques de Helmholtz (Eq. (96)) y compris les faisceaux tels que ($|m'| > 0$). Autrement dit, le faisceau de Bessel est le résultat d'une superposition de fronts d'onde plans répartis sur un cône d'angle d'ouverture β. Ce constat, et le principe de superposition, ont permis à Marston d'utiliser les résultats bien connus de la diffraction d'une onde plane par une sphère, et ainsi de calculer la diffusion due à un faisceau de Bessel [32, 33] puis la force axiale [31, 34].

En ce qui concerne notre approche qui est différente, il suffit de remarquer qu'une onde cylindrique peut s'exprimer directement dans le repère sphérique ([103], p. 413) de la manière qui suit :

$$\phi_i = \phi_0\sum_{n=m}^{\infty} i^{(n-m)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}(2n+1)j_n(kr)e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\beta) \tag{102}$$

On identifie alors les coefficients de forme du champ incident A_n^m (28) :

$$A_n^m = i^{n-m'}(2n+1)\frac{(n-m')!}{(n+m')!}P_n^{m'}(\cos\beta)\delta_{m,m'} \tag{103}$$

où nous avons introduit le symbole de Kronecker $\delta_{m,m'}$ pour signaler que tous les coefficients de forme A_n^m sont nuls quand l'ordre m des harmoniques sphériques n'est pas en adéquation avec la variation azimutale m' choisie pour le faisceau cylindrique. De nouveau on remarque que $\Re\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\} = 0$ et ces coefficients rapportés dans l'expression (84) nous donne :

$$F_z = 2\pi\rho_0\phi_0^2 \sum_{n=m'}^{\infty} \frac{(n-m'+1)!}{(n+m')!} P_n^{m'}(\cos\beta) P_{n+1}^{m'}(\cos\beta)[\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_n\beta_{n+1})] \tag{104}$$

Dans le cas particulier du faisceau de Bessel axisymétrique $m' = 0$, on retrouve [31] :

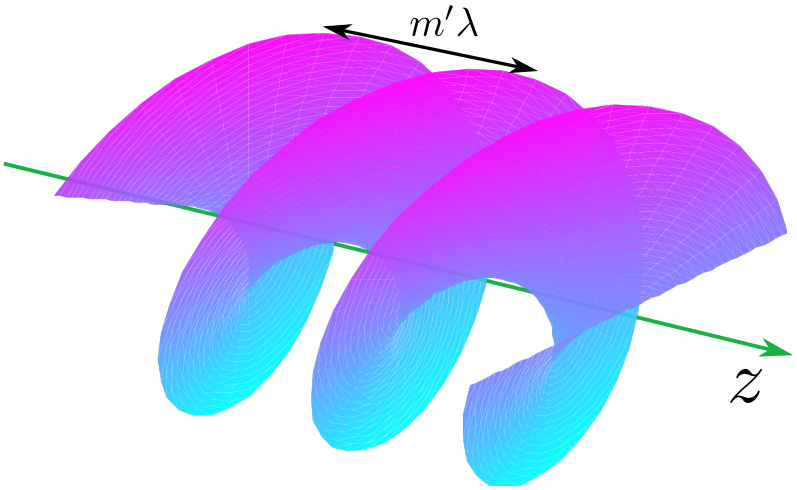
$$F_z = 2\pi\rho_0\phi_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_n(\cos\beta) P_{n+1}(\cos\beta)[\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_n\beta_{n+1})] \tag{105}$$

En outre, en prenant $\beta = 0$ on a alors $P_n(1) = 1\,\forall n$, et on retrouve l'expression pour une onde plane progressive de Yosioka et Kawasima. Lorsque le paramètre m' est non nul, nous sommes en présence de faisceaux acoustiques particuliers : les vortex. Un concept que nous allons maintenant introduire.

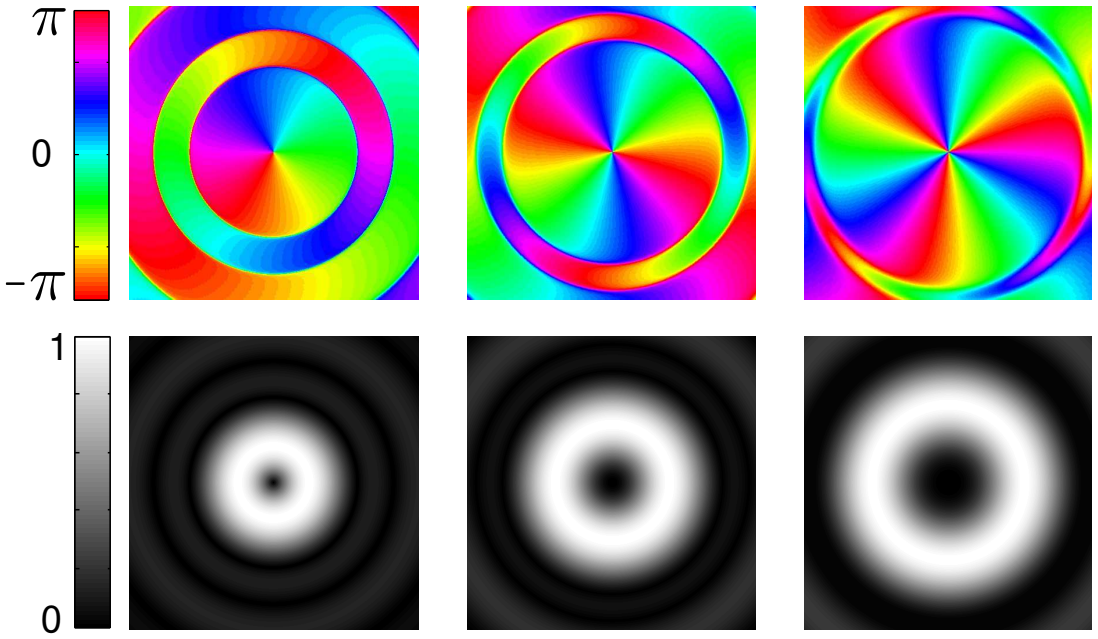
II.4.3 Définition et description d'une dislocation hélicoïdale : Force d'un vortex acoustique

Définition

D'après Nye et Berry, les dislocations en hélice sont des structures ondulatoires tridimensionnelles qui possèdent une singularité de phase de type "vis" [114]. Ces singularités se rencontrent fréquemment dans la nature et sont le signe de phénomènes de diffraction ondulatoire [115]. Quand ces structures possèdent un axe de propagation privilégié autour duquel les fronts d'onde s'enroulent de manière hélicoïdale, on parle alors de vortex (acoustique ou optique suivant la nature de l'onde). Sur la figure 10 a), nous montrons l'hélicoïde équiphase d'un vortex. Sur l'axe de propagation, la phase est non définie et l'amplitude de l'onde y est nulle. Un nombre entier important est la charge topologique m' qui fixe le pas de l'hélice. Plus la charge est élevée, plus la structure est allongée relativement à la longueur d'onde. Le signe de la charge impose le sens de rotation du front d'onde (direct pour $m' > 0$). Sur la même figure en b), nous avons tracé les variations de phase et d'intensité dans la plan transverse à l'axe de propagation. Nous retrouvons la variation azimutale de la phase qui subit m' sauts de 2π lorsqu'on parcourt un cercle autour du centre du vortex. On voit par exemple pour $m' = 1$ que chaque point de part et d'autre du cœur du vortex est déphasé de π. Les interférences destructives contribuent alors à l'amplitude acoustique nulle dans cette région.



(a) hélicoïde équiphase



(b) Phase et Intensité (u.a.) dans le plan transverse

FIGURE 10 – **Structure d'un vortex acoustique** En a), les fronts équiphase décrivent une hélicoïde. La phase s'enroule autour de l'axe de propagation et le pas de l'hélice est fixé par par la charge topologique m'. En b), dans le plan transverse à l'axe de propagation z, on retrouve la variation azimutale de la phase pour des charges $m' = 1$, 2 et 3 (de gauche à droite). Les interférences destructives qui résultent de la singularité de phase annulent le champ et forment le cœur du vortex. Ce cœur est entouré d'un anneau de forte intensité.

Alors que les vortex ont une nouvelle fois reçu une attention particulière en optique, un nombre restreint d'études existent dans le cadre de l'acoustique. Hefner et Marston sont les premiers à avoir synthétisé un vortex de charge topologique $m' = 1$ [116]. Marchiano

et Thomas les ont caractérisés en régime linéaire pour des charges élevées et ont étudié leur comportement en régime non linéaire. Ils ont ainsi pu établir la loi de conservation de la charge topologique [117, 118, 119].

Pression de radiation

Une caractéristique très importante des vortex acoustiques est le flux orbital de quantité de mouvement qu'ils possèdent [116, 117]. Le vecteur de flux d'intensité (ou de "Poynting") est toujours normal au front d'onde. Ainsi dans le cas particulier des vortex, ce vecteur prend une structure tridimensionnelle et comporte une composante azimutale. L'absorption de ce flux d'intensité azimutal donne lieu à un couple exercé par l'onde. Ainsi, quand ce moment angulaire est cédé, un obstacle peut être mis en rotation. L'action de ce couple sur des disques absorbants a été démontré dans l'air [90, 91] et dans des fluides avec des vortex ultrasonores [92, 93]. Le moment angulaire est directement quantifié par la charge topologique m'. Plus la charge est élevée et plus le vecteur de Poynting est incliné par rapport à l'axe de propagation (augmentation du pas de l'hélice) lui donnant une composante azimutale importante. De manière surprenante, la pression de radiation de ces ondes a reçu peu d'attention théorique et elle n'a fait l'objet d'aucune étude expérimentale. Pourtant, leur structure tridimensionnelle particulière (amplitude nulle sur l'axe de propagation et flux angulaire de quantité de mouvement) devrait leur conférer des propriétés uniques pour la manipulation d'objets sans contact. Notamment, si un un vortex permet de piéger un objet dans son cœur "silencieux", celui-ci sera fortement protégé de l'excitation acoustique et isolé du milieu extérieur. Une caractéristique qui pourrait avoir une grande importance pour les applications biologiques.

En reprenant l'équation (104), pour le cas particulier important $m' = 1$, on obtient :

$$F_z = 2\pi\rho_0\phi_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} P_n^1(\cos\beta) P_{n+1}^1(\cos\beta)[\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_n\beta_{n+1})] \quad (106)$$

En accord avec Marston [34]. Son étude est la première analyse de la pression de radiation sur une sphère due à un faisceau hélicoïdal. Nous reviendrons dans le chapitre IV sur une étude approfondie des faisceaux hélicoïdaux de Bessel et d'autres exemples de vortex.

II.5 Conclusions du chapitre

Ce premier chapitre a été l'occasion d'asseoir les bases théoriques fondamentales pour la suite du travail de cette thèse. Ainsi, nous avons introduit dans un premier temps, l'approche de Brillouin pour définir la pression de radiation. Elle se calcule à partir du tenseur moyen de flux de quantité de mouvement à travers une surface entourant l'objet qui diffracte l'onde incidente. À ce stade, il a été pointé que la seule connaissance des champs acoustiques à l'ordre 1 suffisait pour calculer cet effet du second ordre. C'est pourquoi, nous avons d'abord traité le problème linéaire de la diffusion d'un champ acoustique

arbitraire par une sphère élastique afin d'obtenir le champ acoustique total, puis, dans le contexte général fixé pour le calcul, l'expression de la force résultante dans un repère cartésien centré sur la sphère a abouti aux trois équations principales de ce chapitre, à savoir les composantes F_x, F_y et F_z de la pression de radiation (Eqs. (82)-(84)). L'ensemble donne un cadre formel suffisant pour traiter un ensemble important de problèmes de pression de radiation. La force peut désormais être calculée pour n'importe quel type de sphère (élastique, fluide, gazeuse, coque etc...) et pour un champ incident quelconque.De manière importante, le modèle permet avant tout de prendre en compte un position arbitraire de la particules dans un champ incident fixé. Pour illustrer l'étendue des problèmes pouvant être traités, nous avons retrouvé l'expression de la pression de radiation exercée par une onde plane progressive qui avait été donnée originellement par King et Yosioka et Kawasima [23, 25]. Puis, nous avons discuté les travaux plus récents de Marston [31, 34] qui ont introduit le cas intéressant des faisceaux de Bessel. Bien que ces faisceaux soient par leur structure intrinsèquement tridimensionnels, seule l'expression de la force axiale F_z a été retrouvée. Dans le chapitre IV, nous proposerons une analyse complète de la pression de radiation de ces faisceaux. Avant, nous allons aller plus loin dans l'analyse de la théorie que nous venons de présenter. En considérant le cas d'une particule sphérique supposée petite devant la longueur d'onde acoustique, une expression limite de la force sera établie. Elle permet ainsi de révéler plus explicitement la physique du problème de l'interaction d'une particule avec un champ acoustique. Le lecteur intéressé par les applications de la théorie est invité à passer directement au chapitre IV.

Chapitre III

Pression de radiation dans l'hypothèse d'une petite sphère : généralisation de l'approche de Gor'kov

Introduction

La théorie présentée dans le chapitre précédent, est valable quelque soit la taille de la sphère. Or du point de vue de la diffusion d'une onde, il existe deux cas limites pour traiter le problème. Ainsi, lorsque la sphère est grande devant la longueur d'onde ($a \gg \lambda$), le cadre de l'acoustique géométrique permet de calculer le champ réfléchi et transmis aux interfaces de celle-ci et peut servir à obtenir une expression de la pression de radiation [120, 36]. Inversement, lorsque le diffuseur est petit devant la longueur d'onde ($a \ll \lambda$), le cadre de la diffusion de Rayleigh montre que la sphère n'est excitée que sur ses modes monopolaire et dipolaire. D'après Gor'kov [38], pour une sphère plongée dans un champ de type stationnaire, la pression de radiation est une force conservative qui dérive alors d'un potentiel acoustique. Le succès de son approche réside dans sa simplicité formelle et la possibilité de positionner la particule n'importe où dans ce puits de potentiel. Les expressions de la force (Eqs. (82), (83) et (84)) données au chapitre précédent, sont plus générales dans le sens où aucune restriction n'est imposée quant à la taille du diffuseur et le champ peut être progressif. De ce fait, elles contiennent, à priori, au moins les mêmes informations présentes dans la formulation de Gor'kov. Dans l'hypothèse de diffusion de Rayleigh, nous allons présenter dans ce chapitre la forme limite que prend l'expression de la force et la généralisation qui en résulte. Dans un premier temps, nous procédons à des développements limités sur plusieurs équations établies au chapitre précédent. Puis, une expression de la force est donnée pour laquelle une interprétation physique est possible. On obtient des expressions analytiques pour une sphère élastique, une bulle de gaz et une sphère élastique dans un milieu visqueux.

III.1 Expression de la force dans la limite de petite sphère

III.1.1 Coefficients de diffusion monopolaire R_0 et dipolaire R_1

L'hypothèse de grande longueur d'onde suppose que la taille du diffuseur est telle que $a/\lambda << 1$. C'est un régime initialement étudié par Rayleigh pour la diffraction de la lumière. Dans ce régime la particule voit le champ extérieur varier "lentement", on parle donc de manière équivalente de régime quasi-statique. Suivant l'équation (29) introduite au chapitre II, le champ diffusé peut être décomposé en une superposition de modes sphériques. Les deux premiers sont le monopôle et le dipôle. Les modes supérieurs (quadrupoles, etc...) correspondant à des variations spatiales toujours plus rapides de la surface de la sphère. Dans le régime quasi-statique, nous allons montrer que la seule déformation que peut subir la sphère sous l'action des compressions et dilatations du milieu extérieur est la somme d'une "respiration" monopolaire et d'un déplacement dipolaire de son centre de masse.

Partant maintenant de l'expression des coefficients R_n (Eqs. (60), (61) et (62) du chapitre II), nous allons chercher une expression de R_0 et R_1, les coefficients de diffusion du mode monopolaire et dipolaire sous l'hypothèse de grande longueur d'onde $x, x_\ell, x_t << 1$. Le développement limité des fonctions de Bessel sphériques est donné par [107] :

$$\lim_{x\to 0} j_n(x) = \frac{x^n}{(2n+1)!!} \tag{107}$$

$$\lim_{x\to 0} y_n(x) = -x^{-n-1}(2n-1)!! \tag{108}$$

et

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \tag{109}$$

Après avoir développé les termes de l'équation (62) jusqu'à l'ordre dominant, on trouve pour l'équation (61) :

$$\xi_0 \simeq -\frac{x^2}{3}\frac{\rho_0 c^2}{\rho_p(c_l^2 - \frac{4}{3}c_t^2)} + O(x_\ell^4) \tag{110}$$

$$\xi_1 \simeq \frac{\rho_0}{\rho_p} + O(x_\ell^2) + O(x_t^2) \tag{111}$$

Les termes d'ordre supérieurs auront une contribution négligeable. Il faut ensuite développer le numérateur et le dénominateur de l'équation (60) tout en gardant les termes dominants à la fois pour la partie réelle et imaginaire introduite par le développement de la fonction $h_n^{(1)}$. Ce développement peut être évalué en effectuant une division euclidienne selon les puissances croissantes de x. Cela donne :

$$R_0 = -\frac{(ka)^6}{9}\left(1-\frac{\rho_0 c^2}{\rho_p(c_l^2-\frac{4}{3}c_t^2)}\right)^2 - i\frac{(ka)^3}{3}\left(1-\frac{\rho_0 c^2}{\rho_p(c_l^2-\frac{4}{3}c_t^2)}\right) = \alpha_0 + i\beta_0 \quad (112)$$

$$R_1 = -\frac{(ka)^6}{9}\left(\frac{\rho_p-\rho_0}{2\rho_p+\rho_0}\right)^2 + i\frac{(ka)^3}{3}\left(\frac{\rho_p-\rho}{2\rho_p+\rho}\right) = \alpha_1 + i\beta_1 \quad (113)$$

où nous avons de nouveau introduit les notations α_n et β_n pour les parties réelles et imaginaires de ces coefficients de diffusion. Les termes qui suivent dans les expressions de R_0 et R_1 sont d'ordre $O(x^8)$ pour la partie réelle et $O(x^5)$ pour la partie imaginaire. En ce qui concerne les coefficients de diffusion R_n pour les modes sphériques tels que $n > 1$:

$$R_{n>1} \simeq O(x^{4n+2}) + iO(x^{2n+1}) \quad (114)$$

qui sont d'ordre croissant en x et à négliger par rapport aux deux termes R_0 et R_1.

III.1.2 Implication sur la pression de radiation

Puisque la diffusion des termes multipolaires tels que $n > 1$ sont négligeables, la force va elle aussi être dominée par la réponse monopolaire et dipolaire du diffuseur. Les équations (82), (83) et (84) pour la force s'écrivent pour les termes dominants :

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_x &= \frac{2}{3}\left[(\Re\{A_0^0 A_1^{-1*}\} - 2\Re\{A_0^0 A_1^{1*}\})(\beta_1-\beta_0) - (\Im\{A_0^0 A_1^{-1*}\} - 2\Im\{A_0^0 A_1^{1*}\})(\alpha_0+\alpha_1+2\beta_0\beta_1)\right] \\
&\quad -\frac{2}{15}\sum_{m=-1}^{m=1}\frac{(m+1)!}{(1-m)!}\left[(\Re\{A_1^m A_2^{m-1*}\} - (m+2)(m+3)\Re\{A_1^m A_2^{m+1*}\})\beta_1\right. \\
&\quad \left.+(\Im\{A_1^m A_2^{m-1*}\} - (m+2)(m+3)\Im\{A_1^m A_2^{m+1*}\})\alpha_1\right], \quad (115) \\
\tilde{F}_y &= -\frac{2}{3}\left[(\Im\{A_0^0 A_1^{-1*}\} + 2\Im\{A_0^0 A_1^{1*}\})(\beta_1-\beta_0) + (\Re\{A_0^0 A_1^{-1*}\} + 2\Im\{A_0^0 A_1^{1*}\})(\alpha_0+\alpha_1+2\beta_0\beta_1)\right] \\
&\quad +\frac{2}{15}\sum_{m=-1}^{m=1}\frac{(m+1)!}{(1-m)!}\left[(\Im\{A_1^m A_2^{m-1*}\} + (m+2)(m+3)\Im\{A_1^m A_2^{m+1*}\})\beta_1\right. \\
&\quad \left.-(\Re\{A_1^m A_2^{m-1*}\} + (m+2)(m+3)\Re\{A_1^m A_2^{m+1*}\})\alpha_1\right], \quad (116) \\
\tilde{F}_z &= \frac{4}{3}\left[\Re\{A_0^0 A_1^{0*}\}(\beta_1-\beta_0) - \Im\{A_0^0 A_1^{0*}\}(\alpha_0+\alpha_1+2\beta_0\beta_1)\right] \\
&\quad -\frac{4}{15}\sum_{m=-1}^{m=1}\frac{(m+2)!}{(1-m)!}\left[\Re\{A_1^m A_2^{m*}\}\beta_1 - \Im\{A_1^m A_2^{m*}\}\alpha_1\right]. \quad (117)
\end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$\vec{F} = -\frac{\pi\rho_0\phi_0^2}{2}(\tilde{F}_x\vec{e}_x + \tilde{F}_y\vec{e}_y + \tilde{F}_z\vec{e}_z) \quad (118)$$

Les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ et β_1 ont déjà pris une forme révélant les propriétés physiques de l'objet. L'examen de l'expression de la force montre qu'il est encore nécessaire de chercher une signification physique pour les coefficients de forme du champ incident A_n^m et pour $n = 0, 1$ et 2. D'après l'équation (26) du chapitre précédent, ces coefficients répondent à l'équation fondamentale suivante :

$$A_n^m = \frac{1}{\phi_0 j_n(kr)} \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \int_\Omega \phi_i Y_n^{m*} \, \mathrm{d}\Omega \tag{119}$$

Les coefficients de forme peuvent ainsi être obtenus par des quadratures sur la surface d'une sphère de rayon r quelconque. Puisque la taille de la sphère est très petite, $ka \ll 1$, il est possible de donner le développement de Taylor du champ incident au voisinage de la sphère de la manière qui suit :

$$\phi_i(\vec{r}) = \phi_i(\vec{0}) + \vec{\nabla}\phi_i(\vec{0}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{2}(\mathrm{H}(\phi_i)_{|_{(\vec{0})}} \vec{r}) \cdot \vec{r} + \dots \tag{120}$$

où $\mathrm{H}(\phi_\mathrm{i})$ est la matrice Hessienne du potentiel ϕ_i définie comme :

$$\mathrm{H}_{jk}(\phi_i) = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j \partial x_k} \tag{121}$$

En utilisant l'équation (120) pour évaluer (119), on obtient les coefficients A_n^m recherchés. Le calcul n'est néanmoins pas immédiat. Il faut faire de nouveau usage des propriétés d'orthogonalité des harmoniques sphériques et de leur expression pour $n = 0, 1, 2$ (Annexe A) et du développement limité des fonctions de Bessel sphériques (Eq. (E.58)). Les étapes importantes ont été résumées dans l'annexe D et on trouve les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
A_0^0 &= \frac{1}{\phi_0}\phi_i \\
A_1^0 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{3}{k}\frac{\partial\phi_i}{\partial z} \\
A_1^1 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{3}{2k}\left(-\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\right) \\
A_1^{-1} &= \frac{1}{\phi_0}\frac{3}{k}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\right) \\
A_2^0 &= \frac{1}{\phi_0}\left(\frac{5}{2}\phi_i+\frac{15}{2k^2}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial z^2}\right) \\
A_2^1 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{5}{2k^2}\left(-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial z}+i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y\partial z}\right) \\
A_2^{-1} &= \frac{1}{\phi_0}\frac{15}{k^2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial z}+i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y\partial z}\right) \\
A_2^2 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{5}{8k^2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}-2i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right) \\
A_2^{-2} &= \frac{1}{\phi_0}\frac{15}{k^2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}+2i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right)
\end{aligned}
\tag{122}
$$

où le champ ϕ_i et ses dérivées sont à évaluer à l'origine de la sphère, $\vec{r}=\vec{0}$. Avant de proposer une expression explicite de la force nous rappelons le concept de monopole et de dipole acoustique qui aidera à l'interprétation physique du résultat.

III.1.3 Rappel sur la notion de monopole et dipôle acoustique

Un monopôle est décrit par un potentiel acoustique qui s'écrit (voir par exemple Morse et Ingard [121]) :

$$\phi_{mon}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{Q}}{4\pi r}e^{i(kr-\omega t)} \tag{123}$$

où Q est le débit volumique d'éjection de masse de fluide pour une sphère pulsant avec une vitesse radiale $Ue^{-i\omega t}$. Ainsi $Q = 4\pi a^2 U$. Un champ acoustique monoplaire requiert donc une source qui retire puis éjecte une masse de fluide périodiquement. Une sphère qui se contracte et dilate alternativement et radialement répond à cette description. Un champ dipolaire répond à la description du champ généré par une portion du fluide qui oscille linéairement autour d'un barycentre. Cette situation est simulée simplement par deux sphères pulsantes en opposition de phase et séparées d'une petite distance d devant la longueur d'onde λ. On trouve que le potentiel acoustique de ce système est donné par :

$$\phi_{dip}(\vec{r}) = -\vec{\mathrm{D}} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - ik\right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r} \tag{124}$$

où $\vec{\mathrm{D}} = \mathrm{Q}\vec{d}$ est la force dipolaire de la source. Dans le cas $\vec{d} = d\vec{e}_z$ on retrouve le résultat de Morse [121].

III.1.4 Formulation finale et interprétation

On peut maintenant écrire le champ diffusé par un petit diffuseur en champ lointain. L'équation (68) devient :

$$\phi_d = \phi_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \left(-iR_0 A_0^0 - R_1 \sum_{m=-1}^{m=1} A_1^m Y_1^m\right) \tag{125}$$

puisque nous avons vu que les termes d'ordre supérieur sont négligeables. En utilisant les équations (122) et (A.6) ainsi qu'en remarquant que :

$$\vec{v}_i \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\vec{\nabla}\phi_i \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\phi_i}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\phi_i}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\right), \tag{126}$$

on obtient :

$$\phi_d = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left(-i\frac{4\pi}{k}R_0\phi_i + \frac{12\pi}{k^2}R_1\vec{v}_i \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right).\right) \tag{127}$$

Il est convenable de définir deux nouveaux paramètres α_m et α_d à partir des coefficients de diffusion :

$$\alpha_m = i\frac{4\pi R_0}{k^3} = \alpha_m^0 - i\frac{k^3}{4\pi}(\alpha_m^0)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_m^0 = \frac{4}{3}\pi a^3\left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\rho_p(c_l^2 - \frac{4}{3}c_t^2)}\right), \tag{128}$$

$$\alpha_d = -i\frac{12\pi R_1}{k^3} = \alpha_d^0 + i\frac{k^3}{12\pi}(\alpha_d^0)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_d^0 = 4\pi a^3\left(\frac{\rho_p - \rho_0}{2\rho_p + \rho_0}\right), \tag{129}$$

pour obtenir ainsi :

$$\phi_d = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left(-k^2\alpha_m\phi_i + (ik)\alpha_d\vec{v_i} \cdot (\frac{\vec{r}}{r})\right). \tag{130}$$

On remarque alors que le diffuseur rayonne bien comme la superposition d'un monopole et d'un dipôle. Une comparaison avec les équations (123) et (124) permet de constater que le débit de la source monopolaire s'écrit $\mathrm{Q} = \alpha_m(-k^2\phi_i)$ et la force dipolaire $\vec{\mathrm{D}} = \alpha_d\vec{v}_i$. Si

bien que nous avons défini deux paramètres qui relient de manière proportionnelle le champ extérieur ϕ_i au rayonnement de la source secondaire qu'est le diffuseur. L'efficacité de la source secondaire dépend naturellement du contraste de compressibilité pour le mode de respiration monopolaire et du contraste d'inertie (termes de masse ajoutée et d'Archimède) entre la particule et le fluide pour le mode dipolaire. Ces paramètres sont complexes, la sphère ne suit pas exactement les particules fluides dans le champ incident mais peut dans une certaine mesure être déphasée. La réponse instantanée de l'objet étant proportionnelle au volume ($(ka)^3$), domine. Le déphasage proportionnel au volume au carré ($(ka)^6$) est en général très faible. Notons également que le diagramme de directivité du dipôle dépend exclusivement de l'orientation locale du front d'onde incident via $\vec{v}_i$. Pour le cas particulier des vortex, le dipôle ne sera pas orienté dans la direction de propagation.

De la même manière, en utilisant les paramètres α_m et α_d définis aux équations (128) et (129) et l'expression des coefficients de forme du champ incident (122), on obtient deux contributions pour la force :

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_D \tag{131}$$

, où :

$$\vec{F}_G = -\frac{1}{2}\left(\Re(\alpha_m)\frac{1}{2\rho_0 c^2}\vec{\nabla}|p|^2 - \Re(\alpha_d)\frac{1}{2}\rho_0\vec{\nabla}|\vec{v}|^2\right), \tag{132}$$

et :

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k}{c}\Im(\alpha_m) - \frac{k^4}{12\pi c}\Re(\alpha_m)\Re(\alpha_d)\right)\Re(p\vec{v}^*) + \rho_0\Im(\alpha_d)\Im((\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}^*)\right]. \tag{133}$$

$\vec{F}_G$ est une force qui dépend du gradient des densités d'énergie cinétique et potentielle de l'onde. Ce terme a initialement été obtenu par Gor'kov [38] en traitant, dès le départ, le problème de diffusions dans l'hypothèse quasi-statique. Ce terme domine la force totale dans tous les cas où la densité d'énergie n'est pas uniforme. C'est une situation typiquement rencontrée pour les ondes stationnaires avec des fortes variations spatiales de la densité d'énergie du champ. La direction de cette force de gradient dépendra à la fois du champ, et des contrastes $\Re(\alpha_m)$ et $\Re(\alpha_d)$ proportionnels au volume de la sphère.

Pour les ondes dont le gradient de leur densité d'énergie est négligeable, voire nul, une situation rencontrée pour les ondes de type progressif (planes, cylindriques, sphériques), un terme qu'on appelle force de diffusion, $\vec{F}_D$, domine la force totale. Ce nom lui est donné puisque c'est la contribution qui provient du flux de quantité de mouvement (Eq. (77)) porté exclusivement par les ondes diffusées. Elle est proportionnelle au volume de la particule au carré $(ka)^6$ et est par conséquent beaucoup plus faible en amplitude que pour une sphère plongée dans un champ stationnaire. Le premier et dernier terme de $\vec{F}_D$ proviennent de la réponse décalée en phase du diffuseur proportionnelle à $\Im(\alpha_m)$ et

$\Im(\alpha_d)$. On comprend alors l'importance de prendre en compte le rayonnement déphasé de la particule alors qu'il reçoit peu d'égard dans le traitement de problèmes linéaires. Le deuxième terme provient d'un couplage entre les deux modes d'oscillation de la sphère. Si l'onde incidente est plane, l'expression (133) retombe sur le calcul de Gor'kov [38], et de celui de King [23] dans la limite sphère incompressible.

Il est important de noter que $\vec{F}_D$ fait figure d'une généralisation de la théorie de Gor'kov. En prenant un champ aux fronts d'onde quelconques, on peut trouver des situations pour lesquelles les deux forces peuvent contribuer. Pensons notamment à un faisceau. Dans la direction de propagation, les fronts d'onde sont progressifs. Les termes de la composante $\vec{F}_D$ pourront jouer dans une certaine mesure. Mais aussi, l'extension finie du faisceau introduit de forts gradients de la densité d'énergie et qui agiront sur la sphère suivant l'équation (132) de Gor'kov. Aussi, toutes les régions d'interférence de fronts d'onde, guides d'ondes, le champ proche d'une source, etc..., pourront donner lieu à l'expression mutuelle des deux contributions à la force. Historiquement, King avait montré que la force exercée par une onde plane stationnaire est beaucoup plus importante que celle due à une onde plane progressive [23]. Dès lors, la partie progressive n'a été traitée que comme une correction à la force de gradient. Nyborg a donné une expression à cette correction sans faire apparaitre explicitement le rôle du champ et de ses premières dérivées [122]. Cette procédure a été reproduite par la suite par Wu et Du [123]. Ici, à partir de l'expression générale de la force, nous donnons une expression explicite pour les deux contributions en fonction du champ et de ses dérivées. Dans le cas où les gradients ne peuvent pas expliquer une force, en aucun cas la force de diffusion représente une correction mais le mécanisme principale de l'interaction entre l'onde et l'objet. Par la suite, nous verrons plusieurs exemples où la force n'est pas une force de gradient.

III.2 Cas d'une petite bulle de gaz

Le traitement du problème de diffraction de l'objet à la section II.2 et donc de sa diffusion en basse fréquence a été traité dans le cas d'un objet solide élastique. Pour le cas d'une gouttelette fluide ou une bulle de gaz, les coefficients de diffusion, R_n, originellement obtenus par Anderson [96] diffèrent du cas élastique. De plus, tant que la série définie à l'équation (29) est considérée sans approximation, le cas de la bulle de gaz (sans dissipation de volume) est évidemment inclus. Néanmoins, en passant à la limite basse fréquence $(x, x_f << 1)$ où $x_f = (\omega a)/c_f$, nous montrons à l'annexe E que les développements limités doivent être examinés avec une certaine attention pour inclure le cas d'une bulle de gaz. On y conclut que les coefficients monopolaire R_0 et dipolaire R_1 restent identiques aux expressions (113) pour une sphère fluide respectant $\tilde{\sigma} = c_f/c \sim O(1)$ et $\tilde{\lambda} = \rho_f/\rho_0 \sim O(1)$, à condition de remplacer l'expression de la compressibilité de la sphère élastique par $\chi_f = 1/\rho_f c_f^2$ dans l'expression de R_0.

Maintenant prenons pour exemple le cas d'une bulle d'air dans l'eau. On a alors $\tilde{\lambda} \sim 10^{-3} << 1$ pendant que $\tilde{\sigma} \sim O(1)$. Puisque les développements limités sont effectués pour $x, x_f << 1$, la petitesse de $\tilde{\lambda}$ a une influence dans la retenue des termes dominants. Ainsi

à $\tilde{\lambda}$ fixé, il est nécessaire d'autoriser un régime basse fréquence tel que $\tilde{\lambda} \sim O(x_f^2)$. Nous obtenons ainsi le coefficient monopolaire $R_0^{(b)}$ d'une bulle :

$$R_0^{(b)} = -\frac{x^6}{9}\frac{\left(\frac{\chi_f}{\chi}\right)^2}{\left[\frac{x^3}{3}\frac{\chi_f}{\chi}\right]^2 + \left[1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right]^2} + i\frac{x^3}{3}\frac{\frac{\chi_f}{\chi}\left(1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right)}{\left[\frac{x^3}{3}\frac{\chi_f}{\chi}\right]^2 + \left[1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right]^2} \tag{134}$$

Ce développement limité fait alors apparaître une résonance basse fréquence de la bulle (Annexe E), telle que $x_f^2 = 3\tilde{\lambda}$ soit :

$$\omega_R^2 = \frac{3\gamma p_A}{\rho_0 a^2} \tag{135}$$

c'est la fréquence de résonance de Minnaert où p_A est la pression ambiante du gaz et γ le coefficient polytropique [124].

Le coefficient dipolaire R_1 garde la même expression définie à l'équation (113). Dans la limite $\tilde{\lambda} << 1$, il se réduit à :

$$R_1^{(b)} \simeq -\frac{x^6}{9} - i\frac{x^3}{3} \tag{136}$$

Près de la résonance, le terme monopolaire domine de manière importante la diffusion dipolaire. Le rapport montre une dominance d'un facteur $1/\tilde{\lambda}^2 \simeq O(1/x^4)$ pour la partie réelle du coefficient $R_0^{(b)}$ et d'un facteur $1/\tilde{\lambda} \simeq O(1/x^2)$ pour sa partie imaginaire. Ainsi la force de gradient pour une bulle proche de sa résonance basse fréquence se réduit à :

$$\vec{F}_G^{(b)} = -\frac{1}{2}\Re(\alpha_m^{(b)})\frac{1}{2\rho_0 c^2}\vec{\nabla}|p|^2 \tag{137}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{V}\frac{1}{2\rho_0 c^2}\vec{\nabla}|p|^2\frac{\frac{\chi_f}{\chi}\left(1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right)}{\left[\frac{x^3}{3}\frac{\chi_f}{\chi}\right]^2 + \left[1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right]^2} \tag{138}$$

$\Re(\alpha_m^{(b)})$ se déduit directement de l'équation (128) après avoir introduit l'expression (134). La force est proportionnelle au volume V de la bulle et de la densité d'énergie potentielle de l'onde. Cette force change de signe de part et d'autre de la fréquence de résonance (voir le graphique pour $R_0^{(b)}$ Fig. 11). Dans le cas d'une bulle excitée par une onde plane stationnaire, on retrouve l'expression de la première force de Bjerknes [25, 125, 126] [1].

De la même manière, la force de diffusion donne pour la bulle :

1. Yosioka et Kawasima [25] ont évalué une force $1/x_f^2$ fois trop grande.

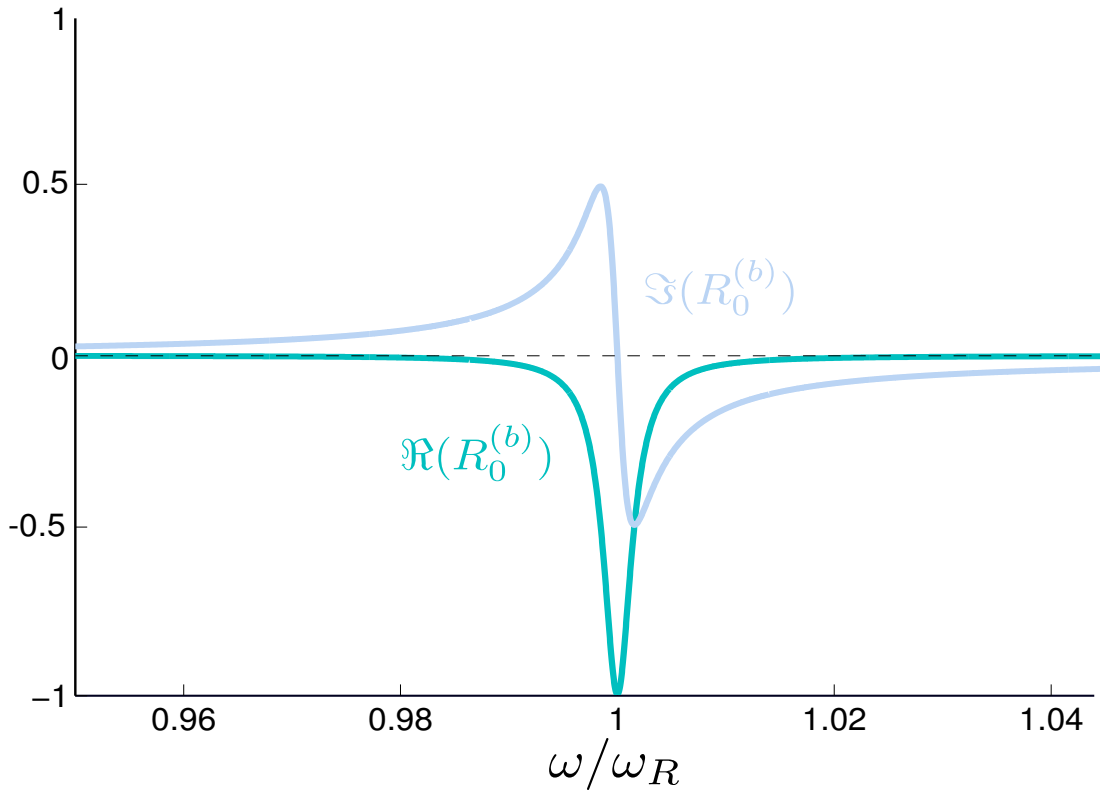


FIGURE 11 – **Coefficient de diffusion monopolaire d'une bulle.** Partie réelle et imaginaire de R_0 (Eq. (134)). Forte résonance de la bulle près de la fréquence de résonance de Minnaert ω_R et donc de la force.

$$\vec{F}_D^{(b)} = -\frac{1}{2}\frac{k}{c}\Im(\alpha_m^{(b)})\Re(p\vec{v}^*) \tag{139}$$

$$= \frac{x^3}{6}\mathrm{V}\frac{k}{c}\Re(p\vec{v}^*)\frac{\left(\frac{\chi_f}{\chi}\right)^2}{\left[\frac{x^3}{3}\frac{\chi_f}{\chi}\right]^2 + \left[1-\frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right]^2} \tag{140}$$

Cette force est toujours dans la direction du flux d'intensité et est maximale à la résonance. Il est important de préciser que la prise en compte de la viscosité de volume du gaz peut donner une forte contribution à la force [125]. Cette contribution est ici négligée tout autant que la tension superficielle de la bulle.

III.3 Correction de la force due à la viscosité dynamique

La théorie développée jusqu'ici considère un milieu fluide supposé parfait. Pourtant, divers milieux réels possèdent une viscosité et dissipent dans une certaine mesure l'énergie acoustique. En outre, l'excitation dipolaire de la sphère doit prendre en compte une couche limite visqueuse δ pour satisfaire les conditions aux limites à sa surface. Cette couche limite visqueuse a pour expression :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0\omega}} \tag{141}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide. Cette couche est donc proportionnelle à l'inverse de la racine carré de la fréquence. Dans cette couche, des ondes transverses de nombre d'onde $k_\nu = (1+i)\sqrt{(\rho_0\omega/2\nu)}$ sont générées et décroissent exponentiellement avec l'épaisseur δ [127]. La dissipation d'ondes visqueuses dans cette couche va profondément modifier l'oscillation dipolaire d'un petit diffuseur. La correction au problème de diffusion réside dans la modification du coefficient R_1. Dès les travaux sur la diffusion dans le cadre de la théorie ECAH (Epstein Carhart Allegra et Hawley) [98, 99] la modification à apporter fut donnée. Allegra et Hawley écrivent dans la limite basse fréquence ($x << 1$) (équation 15 dans [99]) :

$$R_1^{(\mathrm{AH})} = i\frac{x^3}{3}\frac{(\rho_p-\rho)h_2^{(1)}(x_\nu)}{2(\rho-\rho_p)h_0^{(1)}(x_\nu) + 3\frac{\rho}{\rho_p}h_2^{(1)}(x_\nu)} \tag{142}$$

où $h_n^{(1)}$ est de nouveau la fonction de Hankel de première espèce. $x_\nu = (1+i)a/\delta$ est le produit du nombre d'onde de l'onde visqueuse par le rayon de la sphère a. Ainsi, il suffit de chercher une éventuelle écriture plus fonctionnelle de $R_1^{(\mathrm{AH})}$ pour corriger l'expression de la force que nous avons donnée. En annexe F nous trouvons :

$$R_1^{(\nu)} = i\frac{x^3}{3}\frac{(\rho_p-\rho_0)(1-\gamma)}{(2\rho_p+\rho_0-3\gamma\rho_0)} + \frac{x^6}{9}\left(\frac{\rho_p-\rho}{2\rho_p+\rho}\right)^2 \tag{143}$$

où $\gamma = -\frac{3}{2}\tilde{\delta}(1+i+i\tilde{\delta})$ et le paramètre sans dimension $\tilde{\delta} = \delta/a$ a été introduit. En utilisant cette équation avec les expressions (133), (132) et (129) nous obtenons la force pour un fluide visqueux quelle que soit l'épaisseur de la couche limite. Pour aller plus loin, il convient de nous placer dans la limite $\tilde{\delta} = \delta/a << 1$. La couche limite est prise petite devant la taille de la sphère. En effet en dehors de cette limite, il semblerait que les corrections apportées à la pression de radiation ne seraient pas complètes sans considérer les complications liées à l'écoulement qui est aussi généré dans la couche limite [128, 129, 130].

Dans la limite $\tilde{\delta} << 1$, nous montrons en annexe F, que le coefficient dipolaire devient :

$$R_1^{(\nu)} = i\frac{x^3}{3}\frac{\rho_p-\rho}{2\rho_p+\rho}\left(1+3\frac{\rho_p-\rho}{2\rho_p+\rho}\tilde{\delta}+O(\tilde{\delta}^2)\right) - \frac{x^3}{3}\left(\frac{\rho_p-\rho}{2\rho_p+\rho}\right)^2\left(3\tilde{\delta}+\frac{x^3}{3}+O(\tilde{\delta}^2)\right) \tag{144}$$

Ce résultat est la combinaison de l'expression due à Allegra et Hawley, $R_1^{(\mathrm{AH})}$, et la réponse déphasée de la sphère obtenue à l'équation (113). En omettant le terme d'ordre $O(x)^6$, il est en accord avec la relation donnée par Bruus [39] dans la même limite.

Pour exprimer la force, on utilise la relation (129) pour obtenir $\alpha_d^{(\nu)}$. Le terme monopolaire R_0 ainsi que la force de gradient $\vec{F}_G$ ne sont pas modifiés par la prise en compte de la viscosité. Par contre, la force de diffusion est augmentée d'un terme :

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k}{c}\Im(\alpha_m) - \frac{k^4}{12\pi c}\Re(\alpha_m)\Re(\alpha_d)\right)\Re(p\vec{v}^*) + \rho_0\Im(\alpha_d^{(\nu)})\Im((\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}^*)\right] \tag{145}$$

où

$$\Im(\alpha_d^{(\nu)}) = \frac{4}{3}\pi a^3 x^3\left(\frac{\rho_p-\rho}{2\rho_p+\rho}\right)^2\left(\frac{9\tilde{\delta}}{x^3}+1\right) \tag{146}$$

La viscosité introduit donc un déphasage supplémentaire à la réponse dipolaire du diffuseur qui est cette fois-ci proportionnel à $\tilde{\delta}/x^3$. Partant de ce constat, il est souvent conclu que la force due à une onde plane progressive est dominée par la contribution visqueuse uniquement. Effectivement, à première vue, la force est augmentée d'un facteur $1/x^3$ par rapport à la force dans un milieu supposé parfait. Or dans la limite adoptée ($x << 1$), cela suppose que la condition $\tilde{\delta} >> x^3$ soit simultanément respectée et la conclusion est à mitiger. Sur la figure 12, nous avons tracé pour plusieurs fréquences les deux quantités en fonction du nombre sans dimension $x = ka$. Le milieu de propagation est de l'eau de viscosité dynamique $\mu = 1,013$ mPa·s à 20°C. On voit que dans l'intervalle

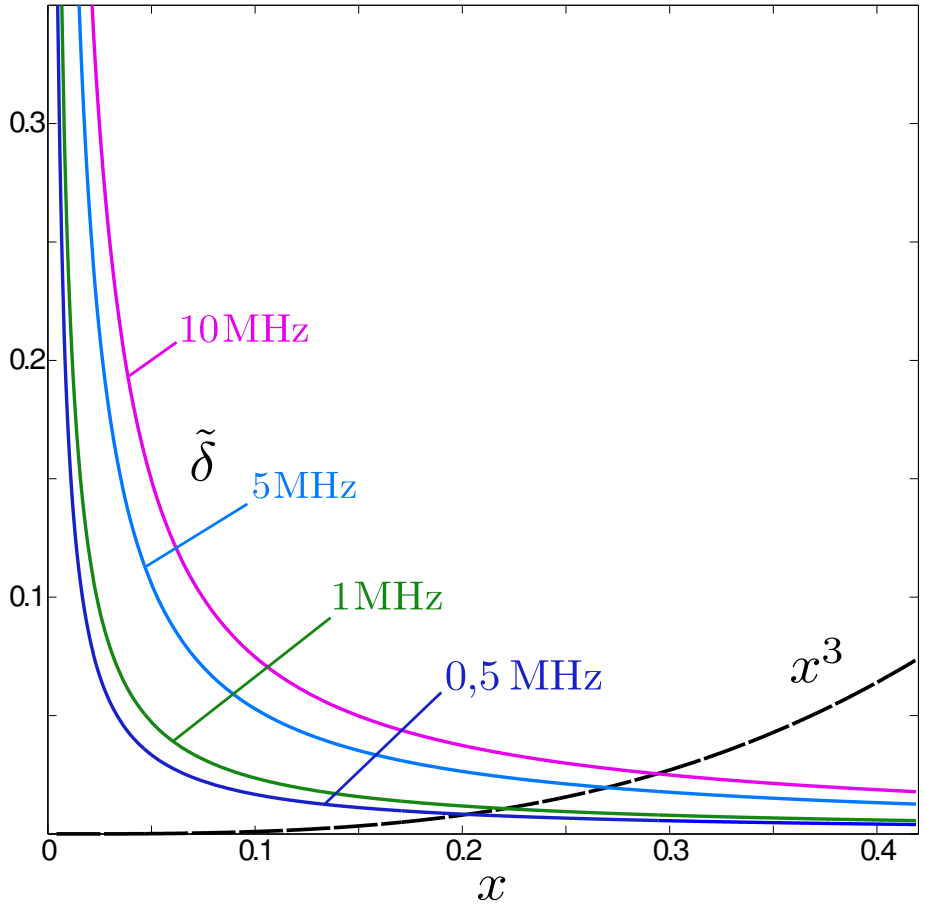


FIGURE 12 – **Prise en compte de la viscosité - Ordres de grandeur.** Couche limite visqueuse $\tilde{\delta} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\nu}{\rho_0\omega}}$ dans l'eau en fonction de $x = ka$. Le milieu est de l'eau, $\mu = 1,013$ mPa·s, pour $f = 0,5,\ 1\ ,\ 5$ et 10 MHz. La valeur de $\tilde{\delta}$ est à comparer avec x^3 pour déterminer l'impact de la viscosité sur la force de pression de radiation.

de validité de l'hypothèse de basse fréquence $x << 1$ [2], les plus petites sphères seront effectivement dominées par la viscosité et la force $\vec{F}_D$ devient :

$$\vec{F}_D = -\rho_0 6\pi a^3 \tilde{\delta} \mathrm{V} \left(\frac{\rho_p - \rho}{2\rho_p + \rho} \right)^2 \Im((\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}^*) \tag{147}$$

qui, pour une onde plane, est en accord avec Bruus. Néanmoins, on voit aussi clairement que pour les sphères les plus grosses ; toute une région existe où $x^3 \sim \tilde{\delta}$. Il n'y est alors pas question de négliger les autres termes de l'équation (145) qui contribueront tout autant. Il est utile d'ajouter que ces termes sont d'autant plus importants que la particule est compressible. Une particule peu inertielle mais compressible sera vite dominée par les termes proportionnels à α_m (comme nous l'avons vu de manière extrême pour les bulles). Pour finir, ce résultat vaut pour un fluide faiblement visqueux (tel l'eau ou les mélanges eau-NaCl couramment employés dans des applications biologiques). Par contre si la viscosité du fluide est augmentée, il est évident que nous transitons plus rapidement dans un régime dominé par la correction visqueuse de la pression de radiation mais aussi éventuellement par les écoulements de couche limite.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons donné une expression de la pression de radiation dans la limite où la sphère est supposée petite devant la longueur d'onde. Le fait que les réponses monopolaire et dipolaire du diffuseur dominent réduit aussi les mécanismes responsables de la pression de radiation. Les coefficients de diffusion correspondants sont complexes. Il existe donc une réponse statique mais aussi déphasée de la sphère à l'excitation extérieure. Cette hiérarchisation a permis de trouver deux contributions à la force. Ainsi, dans un champ présentant de forts gradients de sa densité d'énergie acoustique, la pression de radiation est dominée par une force dite de *gradient* dont l'expression est identique à celle donnée par Gor'kov (1962). Cependant, il existe de nombreux exemples en acoustique où le champ est de nature progressive ou une combinaison des deux et pour lesquels d'autres mécanismes contribuent à la force. Nous avons alors proposé une deuxième contribution à la force sous la forme d'une force dite de "diffusion" (à l'instar d'un calcul similaire en optique pour des faisceaux propagatifs focalisés [3]). En outre, la théorie de Gor'kov n'incluait pas originellement deux cas physiques intéressants. Premièrement, considérant le cas d'une bulle de gaz dans un fluide, la résonance monopolaire de Minnaert n'était pas prise en compte et nous l'avons intégrée dans la théorie. Le coefficient de diffusion monopolaire d'une bulle près de la résonance peut être utilisé pour retrouver l'expression de la première force de Bjerknes et donner une expression pour la force de diffusion

2. Une comparaison entre les expressions approchées (132) et (133) avec les expressions exactes établies aux équations (82), (83) et (84) permet de montrer que pour la majorité des matériaux, une faible différence commence à apparaitre aux alentours de $x = ka \sim 0,3$ soit $a \sim \lambda/20$.

exercée par une onde de type progressive. Deuxièmement, dans le régime de petite sphère, la viscosité du milieu joue un rôle important dans le terme de diffusion dipolaire. Partant des résultats de Allegra et Hawley (1971), nous avons trouvé des corrections visqueuses de la pression de radiation en accord avec une étude récente de Settnes et Bruus (2012).

Chapitre IV

Application à la manipulation d'objets par pression de radiation

Introduction

Dans le chapitre II, nous avons proposé une généralisation de la théorie de la pression de radiation qui s'exerce sur une sphère. Utilisant le formalisme des harmoniques sphériques dans le repère centré sur le diffuseur, il est possible d'exprimer les trois composantes de la pression de radiation F_x, F_y et F_z ((82)-(84)). Nous nous intéressons dans ce chapitre à différents cas d'application. Le chapitre II a aussi été l'occasion d'introduire les faisceaux de Bessel qui ont récemment attiré l'attention à la fois en optique et en acoustique. D'un point de vue de la pression de radiation, certaines de leurs propriétés particulières ont déjà été explorées en optique [131, 132]. En acoustique, c'est d'un point de vue théorique qu'ils ont reçu une attention particulière. Marston [31, 34] a mis en évidence une propriété remarquable, ces faisceaux peuvent théoriquement attirer une particule vers la source du faisceau de manière continue. Cette force négative a successivement été prédite en optique [29, 133]. Rapidement des tentatives pour démontrer expérimentalement le concept ont été menées [134, 135, 136] mais à notre connaissance aucune d'entre-elles n'a démontré le concept tel que prédit par Marston. Sa vérification expérimentale passera certainement par une prévision théorique plus complète de cette force d'attraction et en particulier une analyse tridimensionnelle de la pression de radiation semble nécessaire. La première application de ce chapitre y sera consacrée.

Concernant l'utilisation d'un faisceau focalisé comme une pince pour manipuler des objets, nous rappelons que le concept de pince optique tel qu'introduit par Ashkin en optique [3, 48] n'a pas été obtenu en acoustique. La pression de radiation acoustique a de nombreux potentiels pour les applications de manipulation sans contact. À intensités égales, il est prévu que la pression de radiation acoustique exerce une force 5 ordres de grandeurs supérieurs à celle accessible à la pression de radiation optique (nous avons vu dans l'introduction que les forces sont toutes les deux proportionnelles à l'intensité divisée par la vitesse de propagation). De plus, le large spectre fréquentiel couvert par les sources cohérentes en acoustique permettrait de manipuler des objets microscopiques jusqu'à macroscopiques et indépendamment de leurs propriétés optiques. La prédiction et la compréhension des forces exercées par un faisceau acoustique focalisé sont d'autant plus importantes qu'elles sont motivées par l'accès à un large panel d'applications et particulièrement en biologie. Des études dans ce sens ont tenté de démontrer le piégeage de particules avec des faisceaux ultrasonores. Peu après Ashkin, Wu [76] a proposé le

concept de pince acoustique en utilisant deux faisceaux contre-propagatifs pour piéger des particules élastiques. Le groupe de Shung *et al.* propose de manipuler des particules avec un faisceau mais latéralement uniquement. Il semblerait alors que les particularités de l'acoustique ne permettent pas d'obtenir un puits de potentiel tridimensionnel et stable pour une sphère avec un unique faisceau focalisé. La deuxième application de la théorie a été motivée par la compréhension de ce phénomène. Dans un premier temps, nous développons un modèle pour calculer la pression de radiation exercée par un faisceau acoustique fortement focalisé, à ce stade nous identifions la physique du piégeage avec un faisceau unique, puis nous introduisons le concept de vortex acoustique focalisé qui permet de répondre à ce problème. Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'une publication [137].

Mais avant de présenter les applications, la procédure permettant d'implémenter la théorie du chapitre II dans un algorithme de calcul de la pression de radiation est présentée dans la partie qui suit.

IV.1 Calcul numérique de la force sur une sphère

IV.1.1 Avant propos

La procédure pour calculer la force dans un cas concret peut être décomposée en trois étapes principales :

1. Premièrement, pour une position donnée de la sphère, il faut déterminer les coefficients de forme du champ incident A_n^m, qui le décrivent dans la base sphérique centrée sur la sphère. Les différentes méthodologies qui existent seront discutées dans la première section de cette partie, et nous justifierons le choix retenu ici.
2. On fixe ensuite les paramètres physiques de la sphère (rayon, densité et vitesses de propagation) pour calculer les coefficients de diffusion R_n (Eq. (60)). Nous avons déjà démontré au chapitre II que ces coefficients sont indépendants de la nature du champ incident et de la position de la sphère.
3. Finalement, le calcul des équations (82), (83) et (84) donne les trois composantes de la force qui s'exerce sur la sphère.

Dans cette section, nous commençons par justifier et présenter brièvement la méthode retenue pour le calcul des coefficients de forme, A_n^m. La procédure d'un calcul type est illustrée puis une application sur la force exercée par une onde plane permet de valider la procédure.

IV.1.2 Détermination des coefficients A_n^m pour une position donnée de la sphère.

D'après l'équation (28) obtenue au chapitre II, les coefficients A_n^m déterminent la forme du champ incident dans le repère lié à la sphère. Il existe différentes méthodes analytiques

ou numériques pour les déterminer. Rappelons que dans le cas de l'onde plane et du faisceau de Bessel, des expressions analytiques ont été exprimées. L'équation fondamentale de la décomposition a été rencontrée dans le chapitre III et s'écrit :

$$A_n^m = \frac{1}{\phi_0 j_n(kr)} \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \int_\Omega \phi_i Y_n^{m*} \, \mathrm{d}\Omega \tag{148}$$

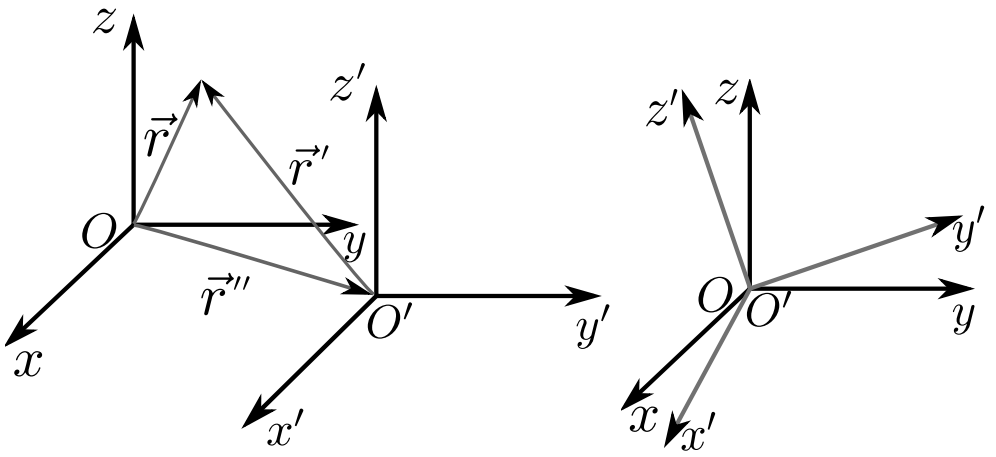
Naturellement, connaissant ϕ_i, la première méthode consiste à calculer cette double intégrale en procédant à des quadratures numériques dans le repère centré sur la sphère. Cette procédure peut être répétée quelque soit la position de la sphère. Cette méthode a été utilisée en acoustique pour calculer la diffusion d'une sphère placée hors de l'axe de propagation d'un faisceau de Bessel [138]. Malheureusement, ces opérations sont numériquement couteuses et le temps de calcul pour traiter un problème tridimensionnel complet (c'est à dire le calcul de la force pour de nombreuses positions de la sphère) augmente très rapidement [139, 140, 141]. Cette méthode n'est donc pas optimale. Faisant usage des propriétés d'orthogonalité de la base des harmoniques sphériques, il est possible d'obtenir des opérateurs de rotation et de translation de la base. Ainsi, en principe il suffit de connaitre les coefficients de forme A_n^m pour une seule position de référence de la sphère (soit analytiquement ou par une première quadrature numérique). Puis, en appliquant les opérateurs de translation et de rotation, les coefficient de forme du faisceau sont obtenus quelque soit la position de la sphère. Des algorithmes rapides et efficaces permettent de calculer ces opérateurs [142, 141]. Cette méthodologie a été retenue pour le calcul de la force. Des détails supplémentaires sur la définition de ces opérateurs sont donnés dans ce qui suit.

Opération de translation des harmoniques sphériques

Pour chaque nouvelle position de la sphère, la redéfinition du champ incident dans un nouveau repère repose sur des transformations de translation et de rotation connues pour les harmoniques sphériques. Ces transformations sont utilisées par une large communauté scientifique passant par la chimie quantique et le calcul d'orbitales atomiques, le calcul des matrices de Fock [143], la résolution numérique des équations de Maxwell [144] et de Helmholtz pour des applications à la diffusion multiple en électromagnétisme ou en acoustique [145, 146].

Se donnant deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on définit un repère centré en O et un deuxième en O' (voir la figure 13 (a)). La transformation des fonctions d'onde sphériques entre deux bases translatées l'une par rapport à l'autre d'un vecteur $\vec{r}''$ s'écrit :

$$j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{\ell=-n'}^{n'} C_{n,n'}^{m,\ell}(\vec{r}'') j_{n'}(kr') Y_{n'}^{\ell}(\theta', \varphi') \tag{149}$$



(a) Translation (b) Rotation

FIGURE 13 – **Translation et rotation des harmoniques sphériques d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$.**

Ce théorème est appelé *théorème d'addition* de translation à cause de la relation $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r''}$. Plusieurs méthodes permettent d'exprimer et calculer l'opérateur $C^{m,\ell}_{n,n'}$. Celles-ci peuvent faire intervenir le coefficient de Gaunt [146] ou les symboles de Wigner $3-j$ [147] bien connus en mécanique quantique. Ou alors, on peut faire usage de relations de récurrence apparaissant naturellement avec les propriétés de dérivation des ondes sphériques [144]. C'est cette dernière option qui a été adoptée. La translation axiale telle que $\vec{r''} = d\vec{e}_z$ est la plus efficace à calculer numériquement. Les coefficients de translation ne dépendent alors plus de ℓ : $C^{m,\ell}_{n,n'}(\vec{r''}) = C^{m}_{n,n'}(kd)$ et (149) devient :

$$j_n(kr)Y^m_n(\theta,\varphi) = \sum_{n'=0}^{\infty} C^m_{n,n'}(kd) j_{n'}(kr')Y^m_{n'}(\theta',\varphi') \tag{150}$$

Les relations de récurrence permettant d'obtenir l'opérateur de translation $C^m_{n,n'}(kd)$ sont données dans les références [144, 145]. Ainsi, pour un champ incident initialement défini dans la base $\mathcal{B}$ par les coefficients A^m_n :

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A^m_n j_n(kr)Y^m_n(\theta,\varphi) \tag{151}$$

en recherchant dans $\mathcal{B}'$ son écriture sous la forme suivante :

$$\Phi(\vec{r'}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \tilde{A}^m_n j_n(kr')Y^m_n(\theta',\varphi') \tag{152}$$

on voit qu'en injectant (150) dans (151) et en échangeant convenablement les variables muettes, la comparaison avec (152) donne immédiatement :

$$\tilde{A}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} C_{n',n}^m(kd) A_{n'}^m \tag{153}$$

En appliquant l'équation (152) avec les coefficients $\tilde{A}_n^m$ obtenus, on aura alors la description du même champ incident initialement décrit dans la base $\mathcal{B}$ dans une nouvelle base centrée sur la sphère. Cette base $\mathcal{B}'$ a été translatée d'un vecteur $d\vec{e}_z$ par rapport au repère initial. Ceci revient à déplacer la sphère dans le champ acoustique considéré.

Opération de rotation des harmoniques sphériques

À l'instar des propriétés de translation, les harmoniques sphériques Y_n^m satisfont la propriété suivante :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-n}^{n} D_n^{m,m'}(\mathbf{R}) Y_n^{m'}(\theta', \varphi') \tag{154}$$

où l'opérateur $D_n^{m,m'}$ transforme l'expression des harmoniques sphériques d'une base à l'autre quand celles-ci gardent la même origine (Fig. 13 (b)). La matrice $\mathbf{R}$ est la matrice de rotation qui relie les vecteurs de base des deux repères $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Une rotation générale s'écrit :

$$\mathbf{R} = R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \tag{155}$$

et les matrices de rotation de la base cartésienne sont :

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \; R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \; R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{156}$$

Les éléments de l'opérateur $D_n^{m,m'}$ peuvent de nouveau être calculés à partir de propriétés de récurrence des harmoniques sphériques [143]. Les coefficients de forme du champ décrit par A_n^m dans la base $\mathcal{B}$ deviennent dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\tilde{A}_n^m = \sum_{m'=-n}^{n} D_n^{m',m}(\mathbf{R}) A_n^{m'} \tag{157}$$

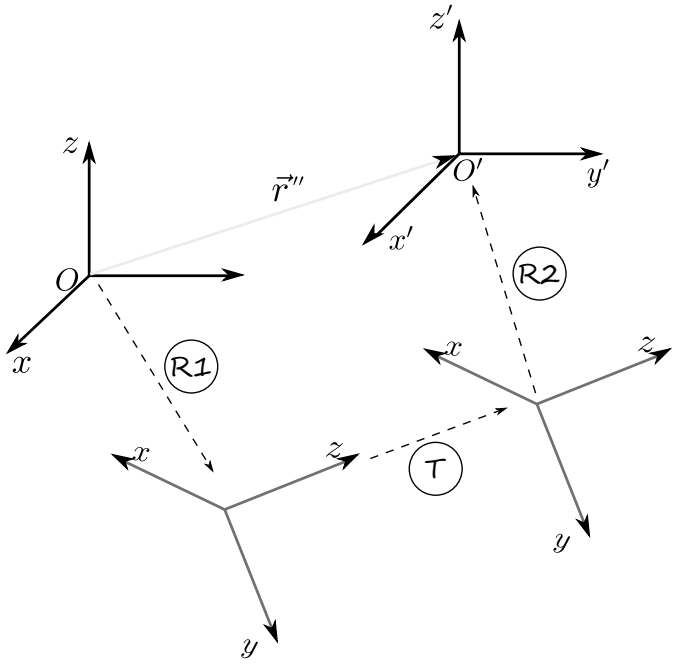


FIGURE 14 – **Translation arbitraire.** Une translation de vecteur $\vec{r}''$ est décomposée en deux rotations et une translation.

Pour déplacer la sphère nous nous sommes restreints, jusqu'ici, à une unique translation axiale suivant l'axe z. Néanmoins, il est possible d'obtenir une translation arbitraire à partir de la combinaison d'une translation axiale et deux opérations de rotation. En effet, une translation d'un vecteur arbitraire $\vec{r}''$ peut se décomposer comme suit :

$$\tilde{A}_n^m = \sum_{\nu=-n}^{n} D_n^{\nu,m}(\mathbf{R_2}) \sum_{n'=0}^{\infty} C_{n',n}^m(kr'') \sum_{m'=-n}^{n} D_n^{m',m}(\mathbf{R_1}) A_n^m \tag{158}$$

Comme nous l'avons illustré à la figure 14, la première rotation $\mathbf{R_1}$ permet d'orienter l'axe z pour qu'il soit colinéaire à $\vec{r}''$. Puis, on translate le repère dans cette nouvelle direction d'une distance r''. La rotation $\mathbf{R_2}$ permet de revenir à des axes colinéaires entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Les relations de récurrence permettant d'obtenir les opérateurs $C_{n,n'}^m$ et $D_n^{m,m'}$ ont été utilisées dans le cadre du calcul de la pression de radiation optique [142]. Nieminen *et al* ont mis à disposition un ensemble de routines en accès libre que nous avons adapté et utilisé pour le calcul de la pression de radiation acoustique.

Pour résumer, il suffit de déterminer les coefficients A_n^m pour une seule position de référence de la sphère. On les obtient soit analytiquement quand cela est possible, soit on procède à une unique quadrature de l'équation (148). Leur rotation et translation permet ensuite des les redéfinir pour chaque nouvelle position de la sphère de manière numériquement efficace.

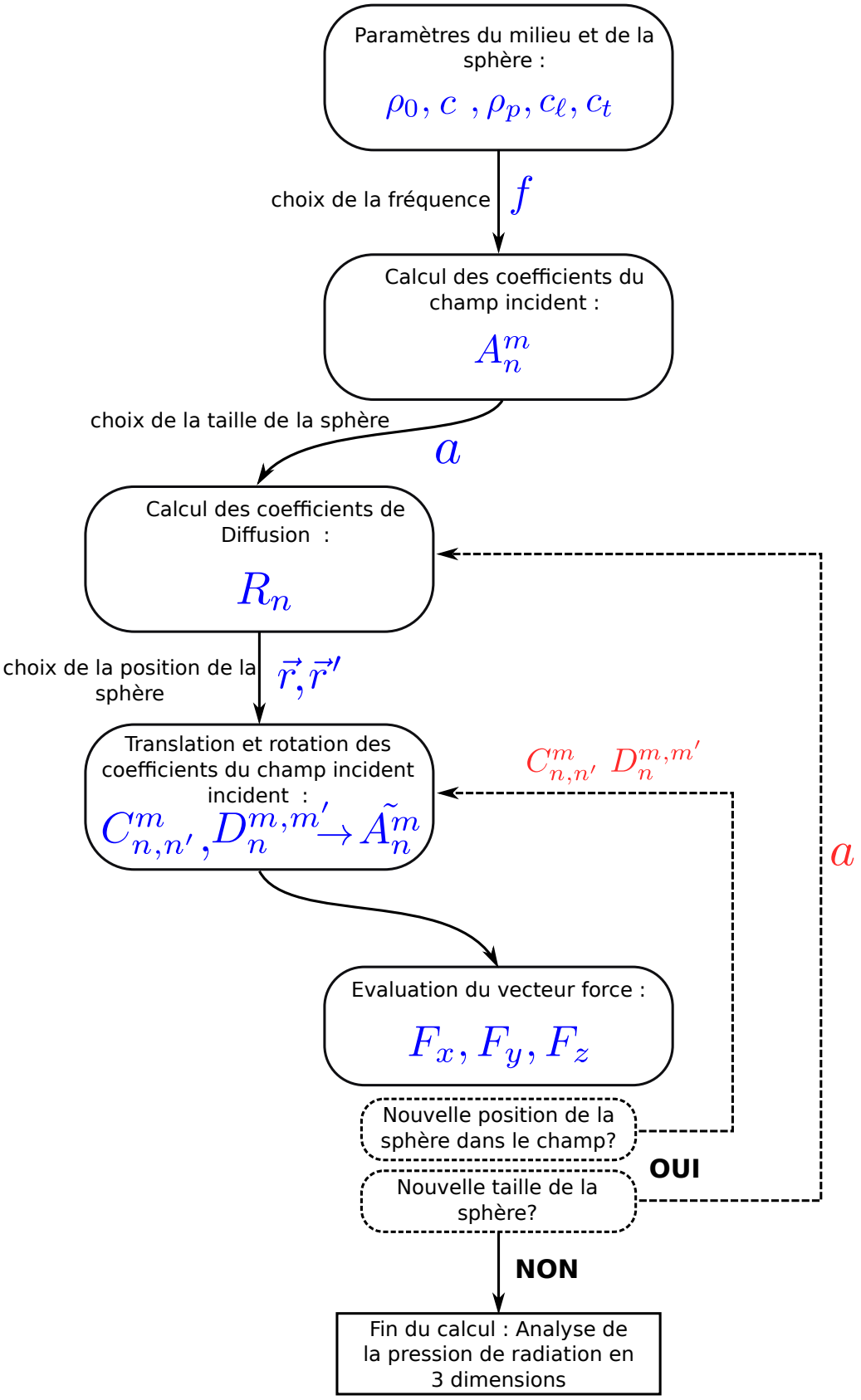


FIGURE 15 – **Organigramme du code de calcul analytique.**

IV.1.3 Procédure et validation

Organisation des données

Le langage de programmation retenu est de type matriciel. Toutes les séries vues jusqu'ici, (pour le champ incident, le champ diffusé et les composantes de la force) sont infinies sur le degré n des polynômes de Legendre et des fonctions de Bessel sphériques et avec $m \in [-n, \ldots, n]$. On sera amenés à les tronquer à un nombre entier N bien déterminé. Dans l'annexe G, nous exposons certains des arguments qui permettent de choisir la troncature. Notamment, le choix $N = (ka+d)+3(ka+d)^{1/3}$ où d est la distance de translation maximale qui sera effectuée, a assuré une convergence du calcul de diffusion dans tous les cas traités. Ainsi, les coefficients A_n^m seront pensés comme des vecteurs de taille $P = (N+1)^2$ puisque m prend $2n+1$ valeurs distinctes pour chaque n. Remarquons que les P valeurs ne sont pas toutes utilisées. Suivant les symétries des champs beaucoup d'entre elles seront fixées à zéro [1]. Les opérateurs de translation $C_{n,n'}^m$, de rotation $D_n^{m,m'}$ mais aussi les coefficients de diffusion R_n seront pensés comme des matrices et sont de taille P^2. Heureusement, ces matrices sont aussi en général fortement creuses et le coût numérique reste limité. Notamment, la matrice représentant les coefficients de diffusion R_n est diagonale et redondante en m. Elle est diagonale à cause de la symétrie de l'objet. Il n'y a pas de couplage entre les différents nombres azimutaux m. Une ondelette sphérique d'ordre m sera diffractée en une ondelette sphérique aussi d'ordre m [2]. Au chapitre II, nous avons conclu que les coefficients de diffusion ne dépendaient pas du nombre azimutal m et ceci explique la redondance. La matrice ainsi construite est l'exact analogue de la matrice T de diffusion pour un objet sphérique [101].

Procédure générale

L'organisation du calcul de la force est résumé par la figure 15 et reprend les étapes principales énumérées au début de cette partie. Les paramètres physiques du problème sont d'abord choisis (milieu de propagation, fréquence d'excitation, choix du matériau pour la sphère). On fixe ensuite la forme du champ incident dans un repère de référence initial (sphère sur l'axe d'un faisceau de Bessel, à la focale d'un champ focalise, ...). Puis, pour une taille de la sphère donnée, on calcul les coefficients de diffusion R_n correspondants. Lorsqu'on veut placer la sphère dans une position particulière (hors de l'axe de propagation par exemple), on calcul les opérateurs de translation et de rotation pour ensuite les appliquer aux coefficients de forme initiaux. Finalement, les équations (82), (83) et (84) sont calculées pour obtenir la force qui s'applique sur la sphère. Si on conserve la même sphère mais on change sa position, il suffit uniquement de recalculer les opérateurs de translation et de rotation. Si on veut au contraire regarder l'influence de la taille de celle-ci, il est nécessaire de recalculer les coefficients de diffusion.

1. On parle de vecteurs et matrices creux ou creuses, ou "sparse" en anglais.

2. Notez que ceci n'est pas vrai pour une sphéroïde ou un objet de forme quelconque. Il y a alors un couplage entre les ordres azimutaux et on peut y voir le signe d'échange d'un moment cinétique.

Illustration et validation

Il est important de valider chaque nouvel apport au code de calcul grâce à une comparaison directe à une référence. Ainsi, le cas de l'onde plane traité correctement par la théorie de Yosioka et Kawasima [25] est une référence validée expérimentalement [26, 27, 28, 148]. Dans le chapitre II, nous avons vérifié analytiquement que notre expression de la force axiale F_z (Eq. (84)) donnait correctement le résultat pour l'onde plane. Nous allons maintenant valider l'expression des composantes restantes F_x et F_y numériquement ainsi que les opérations de translation et de rotation par la même occasion. Pour cela, nous utilisons une généralisation de l'équation (93) qui décrit une onde plane dont l'incidence est quelconque en coordonnées sphériques [149] :

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} i^n(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}Y_n^{m*}(\alpha,\beta)j_n(kr)Y_n^m(\theta,\varphi) \tag{159}$$

où dans le repère cartésien nous avons le vecteur d'onde $\vec{k} = (k\cos(\alpha)\sin(\beta), k\sin(\alpha)\sin(\beta), k\cos(\beta))$. Les coefficients A_n^m de l'onde sont donc :

$$A_n^m = i^n(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}Y_n^{m*}(\alpha,\beta) \tag{160}$$

Nous choisissons une onde plane telle que $(\alpha,\beta) = (\pi/2, \pi/3)$. Le vecteur d'onde est alors perpendiculaire à l'axe z et incliné de $\pi/3$ par rapport à l'axe x. Sur la figure 16 sont représentées les forces F_x et F_y exercées par cette onde sur une sphère de rayon $a = 0,5\lambda$. La translation de la position de la sphère est effectuée dans la direction de propagation. On voit donc, premièrement, que la force est invariante dans cette direction comme attendu. Les courbes en trait plein représentent la force obtenue à partir des expressions de F_x et F_y et les coefficients A_n^m de (160) sans faire usage de rotations. Les cercles sont obtenus à partir des coefficients d'une onde plane se propageant suivant z (équation (93)) mais auxquels nous avons appliqué deux rotations pour obtenir $\tilde{A}_n^m$; une première autour de l'axe y de $\pi/2$ et une seconde autour de l'axe z de $\pi/3$. On obtient ainsi la direction de propagation discutée précédemment $(\alpha,\beta) = (\pi/2, \pi/3)$. Les courbes se superposent convenablement et valident ainsi la procédure de rotation. En addition, en noir et trait plein, nous avons calculé la force F_z exercée par une onde plane de même amplitude se propageant suivant l'axe z et en fonction de la distance de translation $\vec{d} = d\vec{e_z}$. Les cercles sont obtenus à partir de $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ qui est le module de la force dans le cas de l'onde plane inclinée. Leur égalité prouve que les composantes F_x et F_y ont donné les bonnes valeurs numériques. Ce module calculé à partir des équations (82) et (83), valide leur expression.

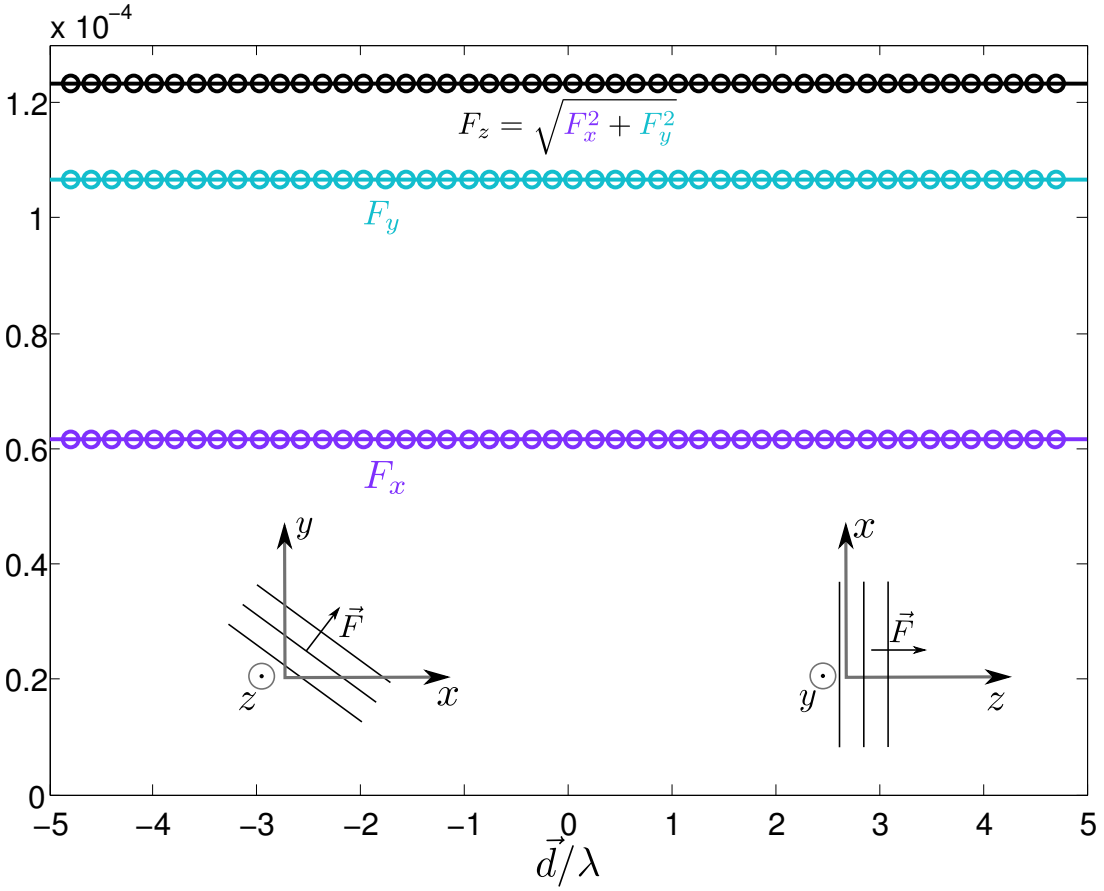


FIGURE 16 – **Validation des composantes F_x et F_y et la procédure de rotation.** Analyse tridimensionnelle de la pression de radiation acoustique exercée par une onde plane sur une sphère. En noir le cas de référence de la force axial F_z d'une onde plane se propageant suivant z. En cyan et violet, les composantes de force F_x et F_y pour une onde de vecteur d'onde $\vec{k} = (k\cos(\pi/3), \sin(\pi/3), 0)$ dans le repère cartésien.

IV.1.4 Conclusion

Nous venons d'exposer les informations importantes pour construire efficacement un algorithme de calcul à partir de la théorie générale donnée au chapitre II. La procédure peut être résumée par la figure 15. La section qui suit permet de retrouver et étendre une discussion intéressante entamée dans la littérature : la pression de radiation exercée par un faisceau de Bessel.

IV.2 Pression de radiation d'un faisceau de Bessel

Les faisceaux de Bessel ont été introduits à la section II.4.2 du chapitre II. Dans le cas idéal, ils sont dépourvus de diffraction à cause de l'invariance de leur amplitude avec la distance de propagation z. Cette invariance par translation axiale leur confère en

principe une capacité de transport de particules de longue portée. La pression de radiation qu'ils exercent est constante quelque soit z. Il a été démontré en optique qu'ils avaient la capacité de s'auto-reconstruire après avoir rencontré un obstacle [131]. Cette robustesse a notamment permis de piéger optiquement plusieurs particules simultanément à des cotes z différentes [132]. De manière plus intrigante encore, le changement de signe de la force axiale prédit par Marston [31, 34] permettrait d'obtenir un faisceau "attracteur", le célèbre *tractor beam*. La particule serait alors attirée de manière continue vers la source du faisceau. Un effet qu'il reste à démontrer malgré des tentatives en optique [133, 134, 135] et en acoustique [136] utilisant d'autres champs ondulatoires. Avec la théorie présentée, nous avons l'opportunité d'analyser la pression de radiation de ces faisceaux dans un contexte tridimensionnel et d'étendre les discussions de la littérature.

Nous rappelons que les coefficients de forme d'un faisceau de Bessel s'écrivent pour une sphère sur l'axe de propagation :

$$A_n^m = i^{n-m'}(2n+1)\frac{(n-m')!}{(n+m')!}P_n^{m'}(\cos\beta)\delta_{m,m'} \tag{161}$$

où l'angle β a été défini comme l'angle du cône d'incidence décrit par les fronts d'onde du faisceau de Bessel (section II.4.2). Nous avons tracé un exemple de faisceau de Bessel à la figure 17 pour une charge unité $m' = 1$ et un angle d'incidence $\beta = 25°$. L'angle β détermine l'inclinaison des fronts d'onde par rapport à l'axe de propagation. Plus, cet angle est fort et plus le flux d'intensité à une forte composante radiale. Si nous regardons l'intensité dans le direction de propagation, en (a), le faisceau est invariant suivant z et présente une singularité de phase sur l'axe de propagation. Dans la direction transverse, on retrouve l'anneau caractéristique des vortex et la variation azimutale de la phase.

Les coefficients A_n^m permettent de calculer le champ acoustique à l'ordre 1 d'un faisceau de Bessel d'ordre hélicoïdal m'. Combiné au calcul du champ diffusé par une sphère positionnée arbitrairement dans la scène sonore, la pression de radiation qui s'applique est déterminée. Elle sera exprimée dans un repère cylindrique (ρ, φ, z) (voir figure 18) dont l'origine est prise sur l'axe de propagation du faisceau (le problème est invariant suivant z). Le vecteur force s'exprime alors :

$$\vec{F} \;=\; (F_\rho, F_\varphi, F_z) \tag{162}$$

Avec cette convention, F_z est la force qui s'exerce dans la direction de propagation du faisceau et F_ρ la force radiale qui s'exerce dans un plan transverse à la direction de propagation. Une force radiale positive expulse la sphère hors de l'axe de propagation alors qu'une force négative l'attire. F_φ est une éventuelle force azimutale qui résulte du couple exercé sur la sphère autour de l'axe de propagation et une valeur non nulle indique que la sphère est mise en rotation autour de l'axe de propagation. Son signe détermine le sens direct ou indirect de cette rotation. Les composantes de la force dépendront du rayon de la sphère et de sa position dans le repère cylindrique. La sphère de rayon a sera immergée

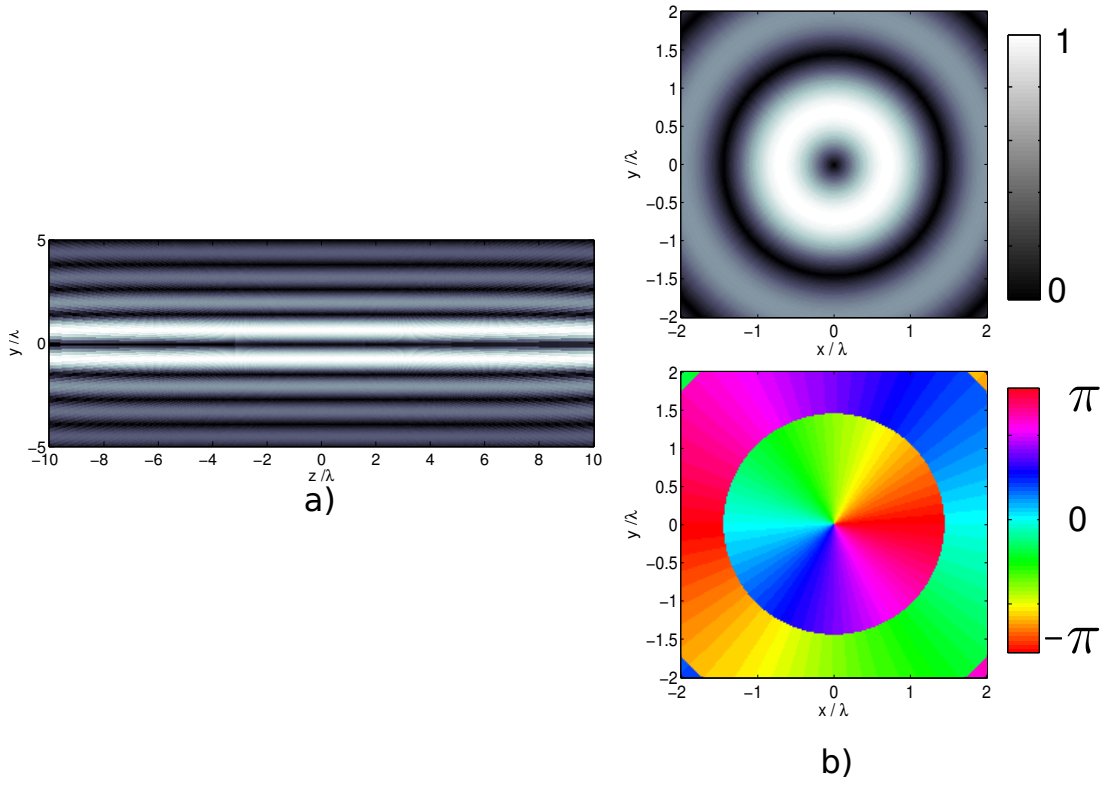


FIGURE 17 – **Faisceau de Bessel hélicoïdal.** En a), intensité dans la direction de propagation z. En b), intensité et phase dans le plan transverse.

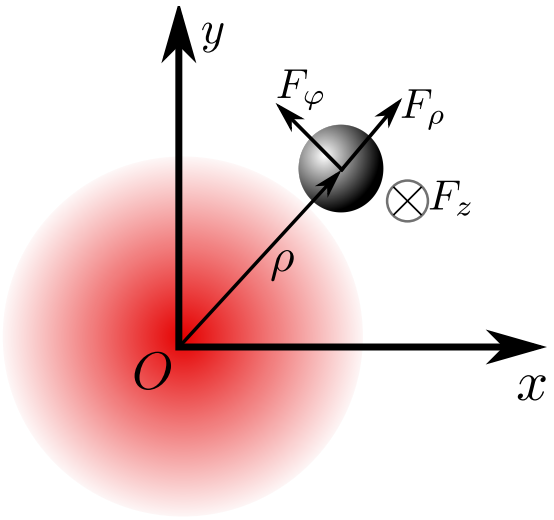


FIGURE 18 – **Repère pour l'analyse de la force $\vec{F}$.** La force sera caractérisée par une composante axiale dans la direction de propagation du faisceau et d'une composante radiale et éventuellement azimutale dans le plan transverse.

	ρ_p(kg/m^3)	c_ℓ(m/s)	c_t(m/s)
Polystyrène	1080	2350	1120
PMMA	1190	2690	1340
Aluminium	2700	6400	3000
Tungstène	19300	5200	2900
Air	1,2	340	/
Huile de silicone	1004	970	/
Eau	1000	1500	/

TABLE IV.1 – Liste des matériaux et leur propriétés

dans l'eau de densité $\rho_0 = 1000$ kg/m^3 et la célérité de propagation des ondes est prise égale à $c = 1500$ m/s. Dans toute l'étude qui suit, le faisceau de Bessel est hélicoïdal de charge topologique $m' = 1$. Son amplitude est $p_0 = 0.1$ MPa. La fréquence d'émission est fixée à $f = 1$ MHz correspondant à une longueur d'onde $\lambda = 1.5$ mm. Dans le tableau IV.1 sont regroupés les propriétés de quelques matériaux qui seront étudiés à travers les applications numériques.

IV.2.1 Force sur une petite sphère $a \ll \lambda$ dans un faisceau de Bessel

Nous avons discuté au chapitre III du régime de diffusion de Rayleigh ($a \ll \lambda$) et de l'expression limite que prend la pression de radiation. On peut distinguer deux contributions à l force : une composante dite force de *gradient* et une composante dite force de *diffusion*. Par sa structure particulière, un faisceau de Bessel va combiner l'effet des deux

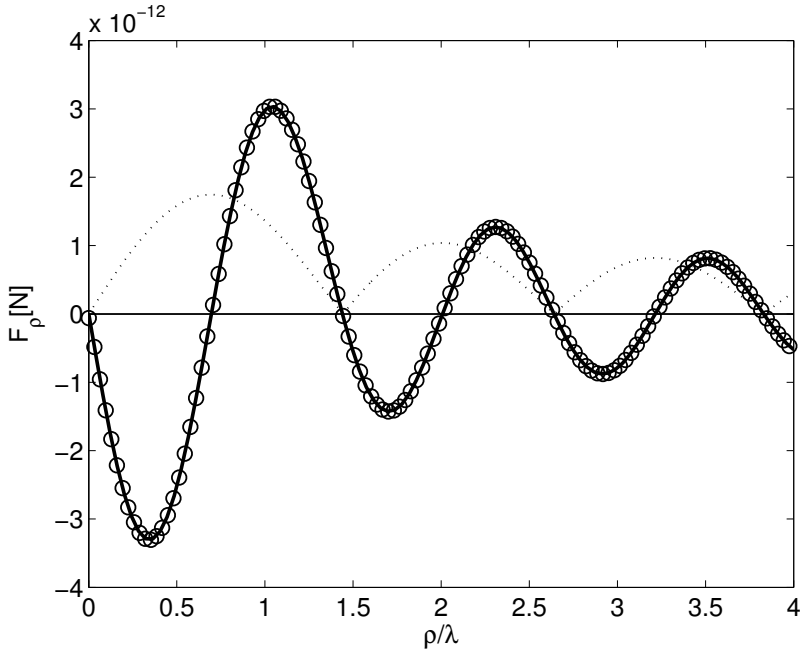
forces et non pas seulement une force de gradient comme suggéré par une étude récente [41].

Prenons une sphère en polystyrène de rayon $a = 0,01\lambda$. Sur la figure 19, nous traçons la force radiale (en a) et azimutale (en b) en fonction de la distance ρ qui sépare le centre de la sphère à l'axe de propagation. Nous avons aussi représenté l'évolution radiale de l'intensité du champ (en pointillés). En ce qui concerne la force radiale, on peut voir que la sphère est attirée vers les nœuds de pression. En effet, une position d'équilibre stable requiert une force qui passe par zéro et avec une pente négative. Autour de cette position, la force est alors une force de rappel. La position de ces nœuds est déterminée par les zéros de la fonction $J_1([k\cos\beta]\rho)$ où β est fixé à 25°. De manière remarquable, pour cet exemple de vortex, l'axe de propagation est une position d'équilibre radiale. Ce comportement est cohérent avec la théorie de Gor'kov et le contraste acoustique entre le polystyrène et l'eau. À des fins de comparaison, les cercles superposés à cette courbe correspondent à la force calculée à partir de l'expression de la force de gradient (Eq. (132) de la section III.1.2) et sont en très bon accord. La force d'attraction radiale est maximale pour $\rho \simeq 0.35\lambda$ et vaut $F_\rho = -3.310^{-12}$N. C'est donc dans la pente intérieure de l'anneau du vortex que nous avons les plus forts gradients du champ. Concernant la composante F_φ, c'est la première confirmation théorique du transfert d'une fraction de la quantité de mouvement orbital entre le faisceau et un objet sphérique non absorbant. Cette fonction est positive pour une sphère écartée de l'axe et la rotation induite est cohérente avec le sens de rotation direct des fronts d'onde. Le front d'onde hélicoïdal peut être compris comme une onde progressive azimutale. Ceci explique que l'amplitude de la force est beaucoup plus faible que pour la force radiale. C'est une composante qui peut être obtenue à partir de la force de diffusion. Le couple exercé est maximal au sommet de l'anneau du vortex. La force axiale est aussi beaucoup plus faible ($F_z \simeq 1.5\text{x}10^{-18}$N) pour la sphère située sur l'axe de propagation. Ceci vient du fait que pour une sphère sur l'axe de propagation, la structure du vortex annihile l'excitation du mode monopolaire de respiration ($\propto \alpha_m$ dans l'équation (133) de la force de diffusion). Il ne reste que le contraste d'inertie entre l'eau et le polystyrène qui est naturellement faible. Notons que les deux composantes $F\varphi$ et F_z n'auraient pas pu être calculées à partir de la théorie de Gor'kov.

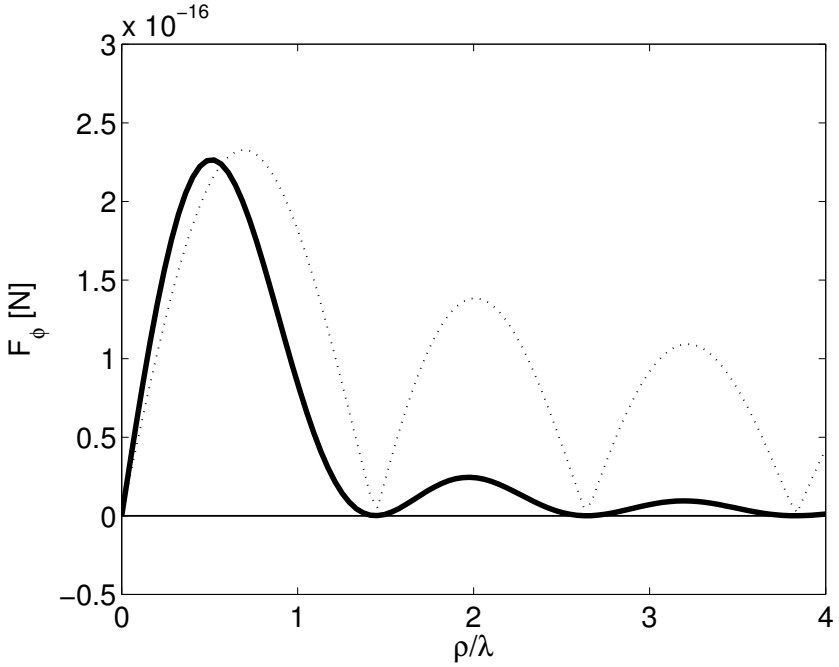
Pour ces petites sphères élastiques, le faisceau les attire vers les zéros de la fonction de Bessel et peut ensuite les pousser dans le direction de propagation.

IV.2.2 Comportement axial et transverse de grandes sphères

On étend maintenant la discussion à des sphères de taille comparable à la longueur d'onde ($a \sim \lambda$). Nous montrons à la figure 20 la force axiale F_z pour la même sphère de polystyrène en fonction de son rayon a. Il est intéressant de noter que dans le cas d'une sphère élastique comme le polystyrène, des pics de résonance apparaissent nettement dans la force. Ils sont attribués à des ondes guidées par la surface de la sphère. Ces pics ont depuis longtemps été observés dans la diffusion de sphères élastiques. Leur présence à notamment été vérifiée en étudiant la fonction de forme expérimentale du champ diffusé



(a) Force radiale



(b) Force azimutale

FIGURE 19 – **Composantes de force latérale sur une petite sphère.** En a) la force radiale exercée par le faisceau de Bessel en fonction de la distance du centre de la sphère à l'axe de propagation ρ. En b), force azimutale. La sphère peut être mise en rotation autour de l'axe de propagation.

[105]. Il était donc aussi attendu que ces pics se retrouvent aussi dans l'amplitude de la pression de radiation. La terminologie exacte pour caractériser ces ondes de surface est vaste (Rayleigh généralisées, Stoneley, Scholte-Stoneley, etc...) et le lecteur est renvoyé aux références [32, 150, 151] pour une discussion étendue sur le sujet.

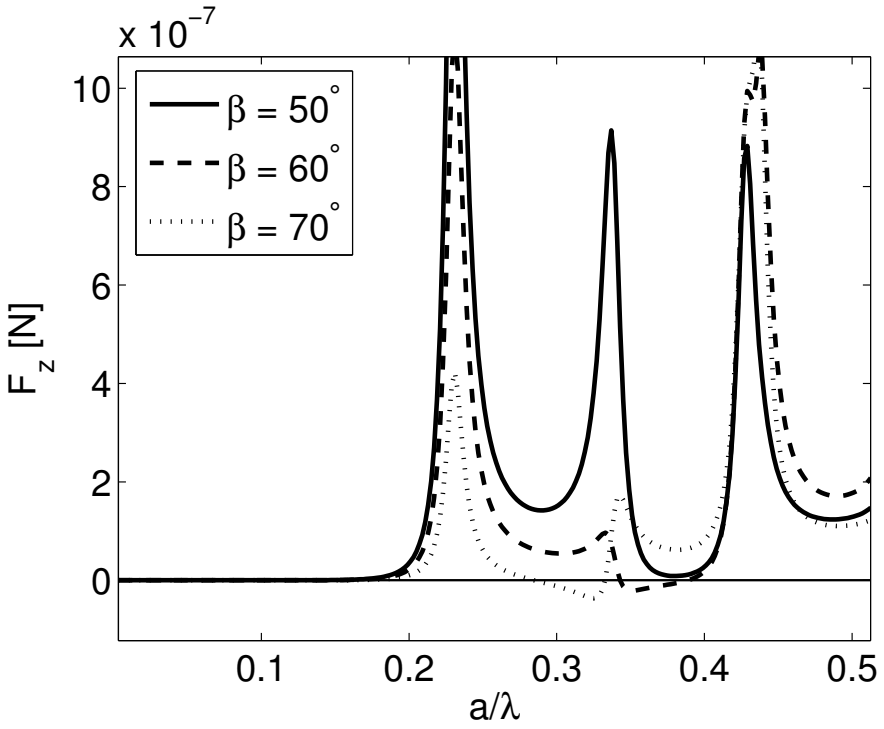
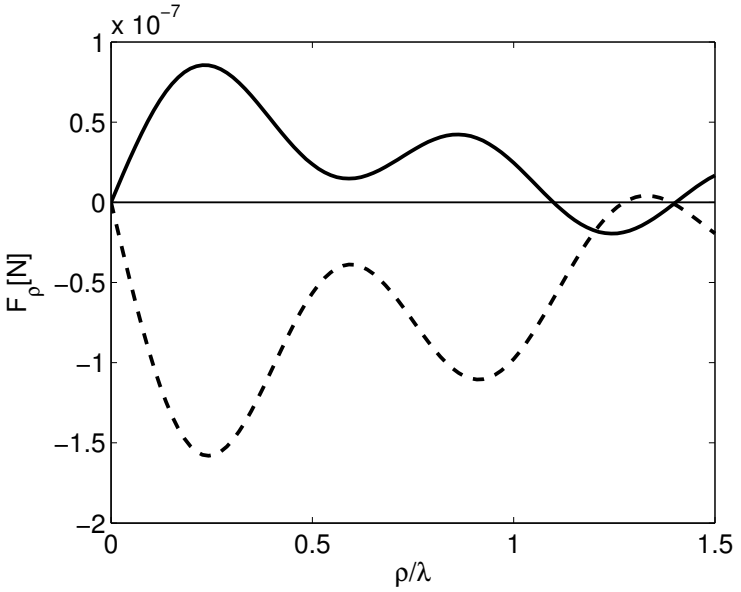


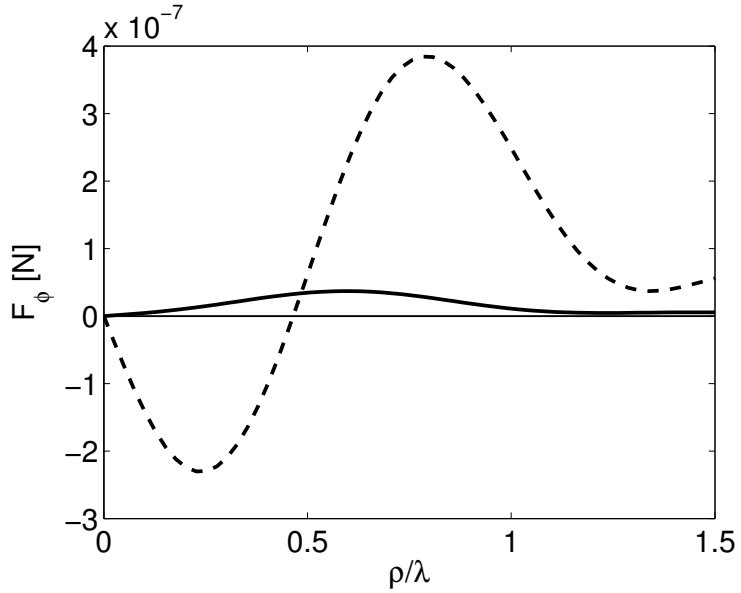
FIGURE 20 – **Force axiale exercée sur une sphère élastique.** Composante F_z pour le polystyrène sur l'axe du faisceau en fonction du rayon de la sphère a et pour trois valeurs de l'angle d'incidence β.

En ce qui concerne cette étude, il suffit de remarquer que l'excitation de ces ondes de surface subsoniques ($c_t < c$), et faiblement amorties, concentre une partie de l'énergie acoustique à la périphérie du solide. Ces ondes de surface rayonnent à leur tour dans le fluide. La conséquence étant une influence majeure sur la pression de radiation. De plus, on a ici l'opportunité de regarder précisément leur effet sur la force latérale exercée sur une sphère hors de l'axe.

Pour l'angle d'incidence fixé à $\beta = 50°$, la figure 21 a) montre l'évolution radiale de la force F_ρ pour $a = 0,3\lambda$ (trait plein) qui correspond à une situation non résonnante du graphique de F_z (Fig. 20) et aussi pour $a = 0,33\lambda$ où le pic est excité (courbe en pointillés). Dans le premier cas, la force radiale est exclusivement positive et repousse la sphère du centre du vortex. Par contre, quand la résonance est excitée, le signe de la force change. Ceci indique que le faisceau va venir confiner la sphère sur l'axe de propagation. Cette inversion de signe est analogue au piégeage d'une bulle dans une onde stationnaire de part et d'autre de sa fréquence de résonance monopolaire. Le changement de signe se retrouve aussi pour le couple qu'exerce le faisceau sur la sphère. En b), on



(a) Force radiale



(b) Force azimutale

FIGURE 21 – **Effet d'une résonance sur les composantes latérales de la force.** Courbes pour $\beta = 50°$ et les rayons sélectionnés $a = 0,3\lambda$ (courbe en trait plein) et $a = 0,33\lambda$ (courbe en pointillés) correspondent à l'excitation ou non du premier pic de la figure 20.

voit que pour une distance à l'axe $\rho \simeq 0.46\lambda$, la force azimutale change brutalement de signe. De manière surprenante, ceci signifie que près du cœur du vortex, la sphère sera mise en rotation dans la direction opposée au flux angulaire de quantité de mouvement. Une représentation vectorielle qualitative des forces a été tracée sur une carte latérale

de l'intensité du faisceau (Fig.22). Ceci permet de voir l'action latérale du faisceau. Une sphère initialement située loin du cœur du vortex est attirée par la force radiale négative tout en orbitant dans le sens direct défini par l'hélicité du vortex. Puis brusquement, le sens de rotation de l'orbite s'inverse jusqu'à ce que la sphère atteigne l'axe de propagation.

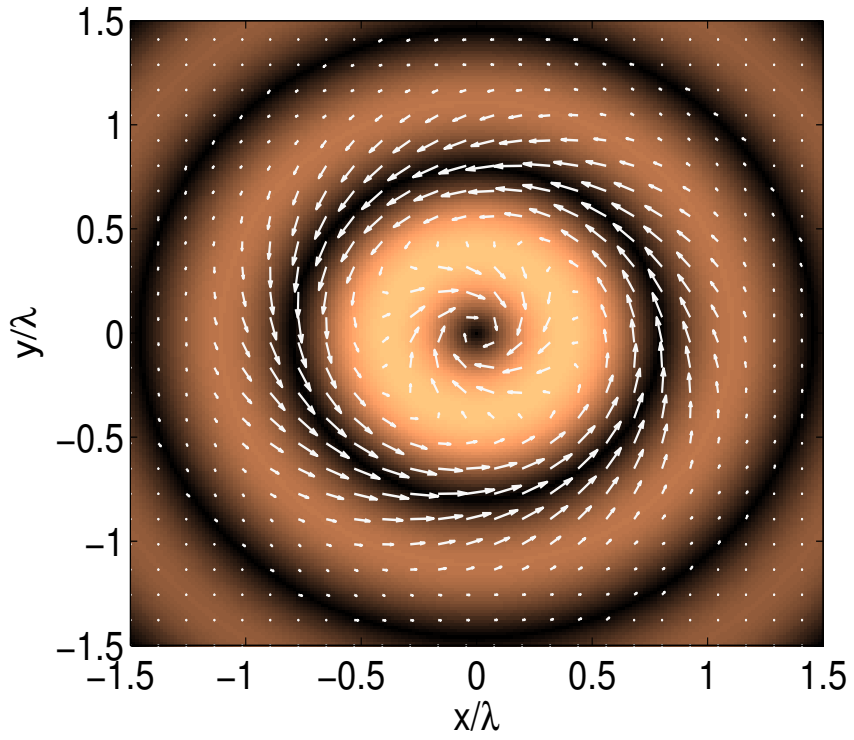


FIGURE 22 – **Force latérale exercée par le faisceau de Bessel.** On superpose sur la carte d'intensité latérale un tracé vectoriel de la force transverse (F_φ, F_z).

Une autre inversion de signe concerne cette fois-ci la force axiale. On peut la voir sur la figure 20 pour les forts angles d'incidence $\beta = 60°$ et $70°$ dans les régions : $0.34\lambda \leq a \leq 0.39\lambda$ et $0.28\lambda \leq a \leq 0.32\lambda$ respectivement. Ceci suggère que la force négative permet de tirer la sphère vers la source du faisceau et donc, de manière contre-intuitive, contre son flux de quantité de mouvement. C'est le faisceau "attracteur" mis en avant par Marston. Il existe un lien direct entre l'effet d'inversion de la force et la section efficace de diffusion de la sphère. Quand la rétrodiffusion est minimisée, grâce à un angle d'incidence du faisceau maximal, la projection du flux de quantité de mouvement exercé sur la sphère peut devenir négatif. Néanmoins, la prévision de Marston pouvait sembler incomplète sans l'analyse de la force latérale qui détermine aussi la stabilité de la sphère. La force radiale en fonction de ρ est tracée à la figure 23. Nous avons sélectionné les paramètres correspondants aux extrema de la force négative de la figure 20. Pour la courbe en longs pointillés nous avons alors $(a, \beta) = (0.35\lambda, 60°)$ et $(a, \beta) = (0.32\lambda, 70°)$ pour la courbe en pointillés courts. Pour ce dernier cas, la sphère n'est pas piégée sur l'axe de propagation, elle ne trouvera un premier équilibre radial que pour $\rho = 0.48\lambda$. Il n'y a donc aucune chance de voir la

force négative se manifester puisqu'en dehors de l'axe elle est positive. Par contre pour le cas où $\beta = 60°$, elle peut être confinée sur l'axe du faisceau par la force radiale négative et successivement tirée vers la source du faisceau par la force de traction négative. La figure 24 permet de visualiser la carte latérale de la force. Dans le premier cas discuté, la sphère est mise en orbite près d'un nœud de pression alors que dans le deuxième, la sphère peut être attirée vers l'axe.

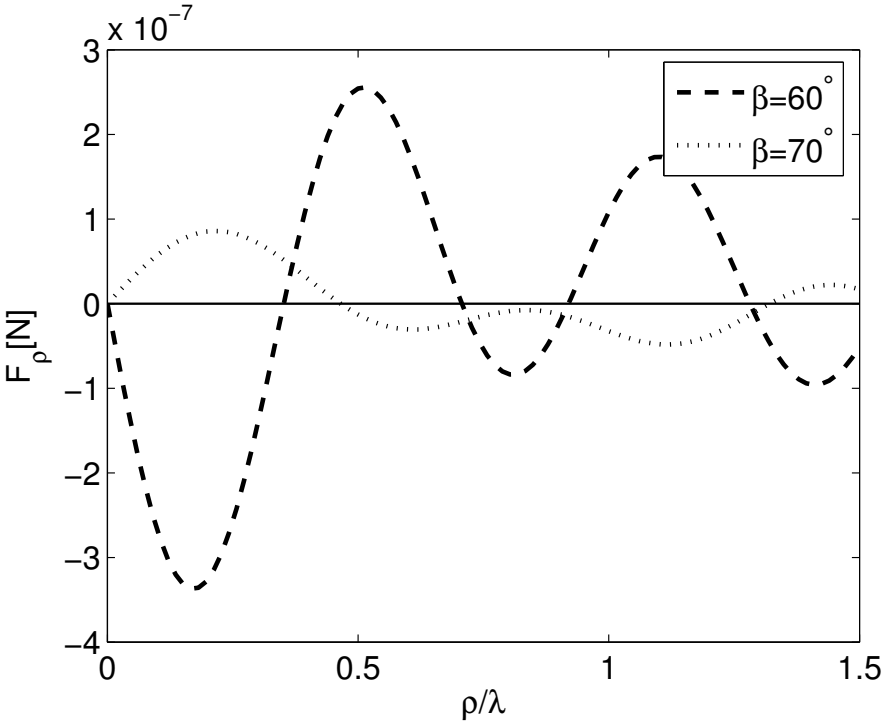
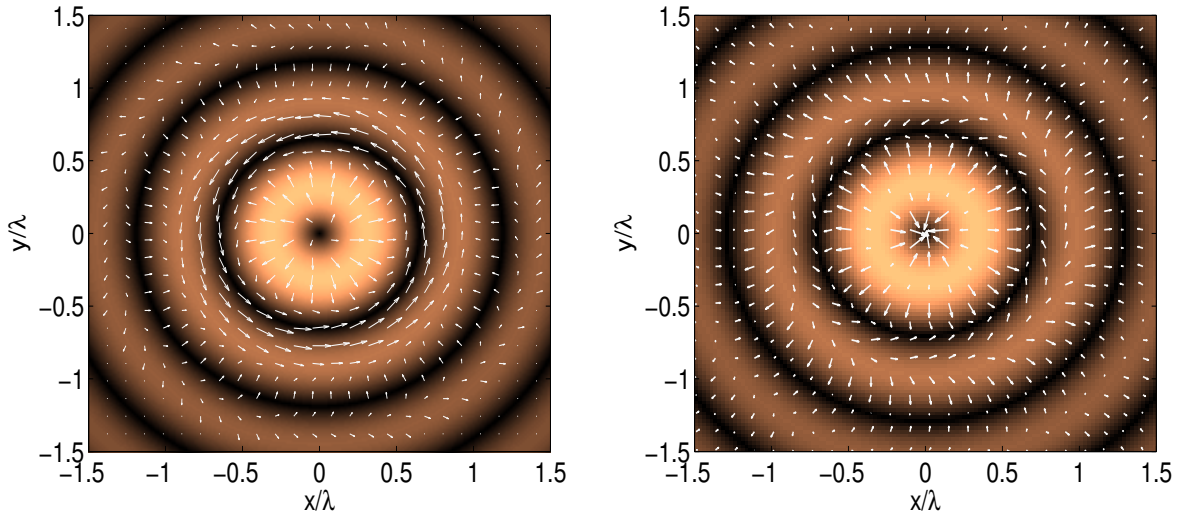


FIGURE 23 – **Stabilité latérale d'un faisceau attracteur.** Suivant l'angle d'incidence β et la taille a de la sphère, la force latérale peut attirer ou non la sphère sur l'axe de propagation.

IV.2.3 Conclusion

Nous avons pu analyser la pression de radiation en trois dimensions due à un faisceau de Bessel hélicoïdal. L'invariance axiale de faisceau permet de discuter séparément le comportement axial et latéral d'une sphère dans ce type de champ. Nous pouvons ainsi prévoir des situations où l'effet de "tractor beam" permettrait d'attirer de manière continue une sphère dans la direction contraire à la propagation. Cependant, pour ce type de faisceau qui ne possède pas de gradient axial de sa densité d'énergie, il ne peut pas exister une unique position d'équilibre stable pour la sphère. Au contraire, les forces dites non-conservatives, s'appliquent de manière continue. Nous allons maintenant essayer de trouver un faisceau développant des forces, au contraire, conservatives. La sphère sera alors sujette à un puits de potentiel et éventuellement être attirée vers une unique position



(a) Sphère mise en orbite (b) Sphère piégée dans le cœur du vortex

FIGURE 24 – **Force latérale d'un faisceau "attracteur"** En a) la sphère n'est pas confinée sur l'axe de propagation mais mise en orbite près d'un autre nœud de pression, elle ne sera donc pas attirée par la force axiale négative. En b), la sphère peut être piégée sur l'axe et ensuite être tirée par la force axiale négative vers la source acoustique.

d'équilibre stable.

IV.3 Modélisation d'un champ acoustique focalisé dans le formalisme des harmoniques sphériques

IV.3.1 Avant propos

Dans cette partie, nous proposons d'obtenir une expression des coefficients de forme A_n^m dans le cas d'un faisceau focalisé par un transducteur concave. Elle permettra dans la partie suivante, de calculer la pression de radiation exercée par un champ qui n'est plus invariant suivant l'axe de propagation comme le faisceau de Bessel, mais au contraire présente une forte focalisation. Nous allons généraliser une approche proposée par Chen et Apfel [29], pour calculer les coefficients A_n^m d'un faisceau focalisé aux fronts d'onde arbitraires. Ainsi le cas du vortex acoustique focalisé pourra aussi être discuté.

IV.3.2 Coefficients de forme d'un faisceau acoustique focalisé

La géométrie du problème est schématisée à la figure 25. Le champ focalisé est obtenu à partir d'un piston concave qui rayonne dans un milieu semi infini. Le repère sphérique est centré sur la cible en O. Le point P décrivant la surface S_T du piston a pour coordonnées

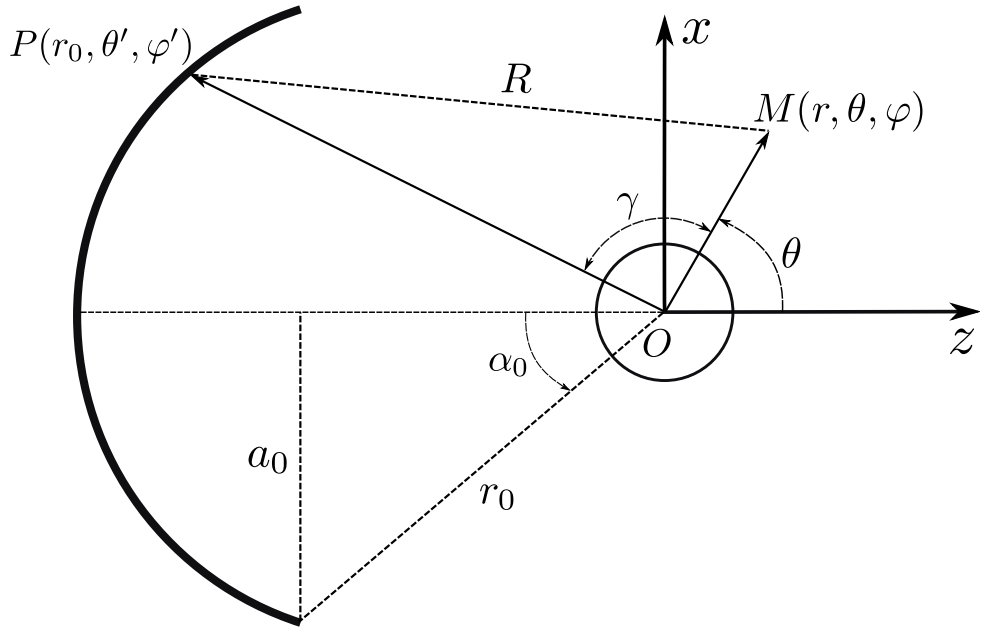


FIGURE 25 – **Géométrie du piston concave**. rayon de l'émetteur a_0, rayon de courbure r_0 et angle d'ouverture α_0. Le repère sphérique (r, θ, φ) est centré sur la particule de rayon a placée au centre de courbure.

(r_0, θ', φ') où r_0 est le rayon de courbure de la surface concave. L'ouverture de l'émetteur est donnée par l'angle α_0 relié au rayon du piston et la distance focale par $\sin(\alpha_0) = a_0/r_0$. Nous cherchons une solution pour le champ acoustique sous la forme :

$$\phi_i(\vec{r}) = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_n^m j_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{163}$$

Quand le rayon de l'émetteur est beaucoup plus grand que la longueur d'onde, *i.e.* $ka_0 \gg 1$ et l'angle d'ouverture α_0 faible, il est reconnu que le champ rayonné peut être obtenu à partir de l'intégrale de Rayleigh [152, 153, 154] :

$$\begin{aligned} \phi_i(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{S_T} u \frac{e^{ikR}}{R} \, \mathrm{dS} \\ \text{avec} \quad R^2 &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\gamma \end{aligned} \tag{164}$$

où u est la vitesse normale de vibration de la surface du piston et R la distance séparant le point d'observation $M(r, \theta, \varphi)$ et le point source sur la surface $P(r_0, \theta', \varphi')$. $\mathrm{dS} = r_0^2 \sin\theta' \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}\varphi'$ est l'élément de surface infinitésimal de l'émetteur. Cette intégrale est une solution exacte de la formulation de Helmholtz-Huygens uniquement pour un piston plan ; c'est à dire quand la fonction de Green de l'espace semi-infini est connue. Dans cette représentation, chaque point de la surface émettrice peut être considéré comme une source ponctuelle secondaire. Si la surface est plane, il est évident que chaque source émet

une onde hémisphérique. Par contre, lorsque la surface est courbée, la situation est différente. Chaque point de la surface diffracte une partie des ondelettes émises par les points source voisins et l'amplitude de vibration de la surface S_T ne peut plus être considérée comme uniforme sur toute la surface. Néanmoins, Coulouvrat [155] a montré numériquement que les conditions de validité de l'intégrale de Rayleigh pour un piston concave sont moins contraignantes que ce qui est généralement admis. Ainsi, dans la limite haute fréquence $ka_0 \gg 1$, l'influence de la diffraction par les bords de la surface émettrice est négligeable sur le champ rayonné dans le volume et ceci à faible et même à fort angle d'incidence α_0.

La décomposition en ondes sphériques de la fonction de Green en espace libre prend la forme suivante [106, 149] :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikR}}{ikR} &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)h_n^{(1)}(kr_0)j_n(kr)P_n(\cos\gamma) \quad \text{pour} \quad r<r_0 \\ &\quad \text{et} \quad \cos\gamma = \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\theta\cos\theta' \end{aligned} \tag{165}$$

Cette expression peut-être réécrite en faisant usage d'un deuxième théorème d'addition qui est celui des polynômes de Legendre associés [103] :

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{\ell=0}^{n}(2-\delta_{\ell,0})\frac{(n-\ell)!}{(n+\ell)!}P_n^{\ell}(\cos\theta)P_n^{\ell}(\cos\theta')\cos\ell(\varphi-\varphi') \tag{166}$$

Avant de procéder à l'intégration, il reste à préciser la vitesse de vibration u du transducteur. Dans l'essentiel des problèmes traités, cette vitesse est supposée uniforme sur toute la surface et le champ rayonné est alors axisymétrique [29]. Pourtant, le choix de u donne une grande liberté sur la variété des fronts d'onde qui peuvent ainsi être propagés. Par exemple, dans le but de modéliser le champ d'un vortex acoustique focalisé, la fonction pupille est choisie de la forme :

$$\begin{aligned} u(\theta',\varphi') &= U_0 e^{im'\varphi'} f(\theta') \quad \text{si} \quad \pi-\alpha_0 \leq \theta' \leq \pi \\ u(\theta',\varphi') &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned} \tag{167}$$

U_0 est l'amplitude de la vitesse de vibration supposée constante. Ainsi la surface peut vibrer avec une variation périodique de sa phase régie par un nombre azimutal m'. La fonction $f(\theta')$ peut être utilisée pour introduire une variation de la vitesse avec l'élévation θ' (par exemple une apodisation).

En reportant les équations (165), (166) et (167) dans (164), il faut traiter successivement deux intégrales. L'intégration sur φ' peut être évaluée en utilisant la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} e^{im'\varphi'} \cos[\ell(\varphi-\varphi')]\,\mathrm{d}\varphi' = \begin{cases} \pi e^{im'\varphi} & \text{si} \quad \ell = m' \neq 0 \\ 2\pi & \text{si} \quad \ell = m' = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{168}$$

L'intégrale de Rayleigh (164) est donc non nulle à condition que $\ell = m'$ dans l'équation (166) réduisant cette série à un unique terme à intégrer sur θ' :

$$I_n^{m'} = \int_{\pi-\alpha_0}^{\pi} f(\theta') P_n^{m'}(\cos\theta') \sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' \tag{169}$$

En posant $\phi_0 = iU_0/k$, on peut identifier à partir de l'équation Eq.(163) les coefficients de forme du champ incident pour un faisceau focalisé :

$$A_n^m = \delta_{m,m'}(2n+1)\frac{(n-m')!}{(n+m')!} f_n^{m'}(\alpha_0, r_0), \tag{170}$$

où

$$f_n^{m'}(\alpha_0, r_0) = (kr_0)^2 h_n^{(1)}(kr_0) I_n^{m'}. \tag{171}$$

$f_n^{m'}(\alpha_0, r_0)$ est une fonction qui matérialise l'ouverture finie du piston concave. En particulier, cette fonction est directement liée au gain d'antenne résultant de la focalisation. Plus le rayon de courbure r_0 est faible à angle d'ouverture α_0 et fréquence constants, et plus l'amplitude du paramètre $f_n^{m'}$ croît. Le symbole $\delta_{m,m'}$ est utilisé pour souligner que toutes les ondelettes sphériques dont le front d'onde ne varie pas azimutalement avec la périodicité $e^{im'\varphi}$ ne contribuent pas à la description du faisceau focalisé. Ainsi le champ résultant contient d'après Berry une singularité de phase [114]. La charge topologique est fixée par m' et est conservée pendant la propagation. On parlera en conséquence de vortex acoustique focalisé pour tous les cas tels que $m' \neq 0$. Concernant l'intégrale $I_n^{m'}$, elle ne possède pas de solution analytique en général et sera évaluée numériquement.

Sur la figure 26, nous avons représenté le champ rayonné par un piston vibrant uniformément (*i.e.* $m' = 0$ et $f(\theta') = 1$). La fréquence d'excitation est de 1 MHz correspondant à une longueur d'onde $\lambda = 1,5$ mm. L'angle d'ouverture vaut $\alpha_0 = 39°$ et le rayon de courbure est de $r_0 = 6$ cm. Qualitativement le résultat correspond bien à ce qui est attendu (dimensions de la tâche focale, etc...).Dans ce cas, l'intégrale de Rayleigh (Eq. (164)) a une solution exacte lorsqu'on calcule le champ sur l'axe acoustique ($\theta = 0$ ou$\theta = \pi$) et s'écrit :

$$\phi_i(r,0,0) = -\phi_0 \frac{r_0}{r}\left(e^{ik\sqrt{r_0^2+r^2+2r_0 r\cos\alpha_0}} - e^{ik(r_0+r)}\right) \tag{172}$$

$$\phi_i(r,\pi,0) = -\phi_0 \frac{r_0}{r}\left(e^{ik\sqrt{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos\alpha_0}} - e^{ik(r_0-r)}\right) \tag{173}$$

Le graphique en bas de la figure 26 compare cette solution exacte avec le champ calculé à partir d'une superposition d'harmoniques sphériques. L'accord est très bon, le seul écart peu visible est en champ proche où les oscillations rapides sont moins captées par le formalisme des harmoniques sphériques. La convergence est significativement améliorée en augmentant le nombre N d'harmoniques sphériques utilisées pour décomposer le champ incident.

IV.4 Pression de radiation d'un faisceau focalisé sur une sphère

L'équation (170) permet de calculer le champ acoustique à l'ordre 1 rayonné par un transducteur focalisé. Comme précédemment, nous allons pouvoir déterminer la force de pression de radiation qui s'applique en déterminant le champ que diffuse la sphère en interaction avec ce type de faisceaux. Nous choisirons d'exprimer la force acoustique sous une forme adimensionnelle et dans un repère cylindrique (ρ, φ, z) dont l'origine est ici le centre de courbure du piston concave :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_0 \vec{Q} = F_0 (Q_\rho \vec{e}_\rho + Q_\varphi \vec{e}_\varphi + Q_z \vec{e}_z) \\ \text{où} \quad F_0 &= (\pi a^2) \frac{\rho_0 k^2}{2} \phi_0^2 = (\pi a^2) \frac{1}{2\rho_0 c^2} p_0^2 \end{aligned} \tag{174}$$

F_0 a la dimension d'une force (N) et est obtenue en multipliant la section efficace géométrique πa^2 de la sphère par la densité d'énergie de l'onde. Les fonctions sans dimension (Q_ρ, Q_φ, Q_z) dépendront du rayon de la sphère et de sa position dans le repère cylindrique. Sauf précision du contraire, la fréquence d'émission est fixée à $f = 1$ MHz correspondant à une longueur d'onde $\lambda = 1.5$ mm. Nous regardons la force pour un piston ayant pour caractéristiques un rayon de courbure $r_0 = 10$ cm et un angle d'ouverture $\alpha_0 = 39°$, soit, sauf précision du contraire, les conditions sont celles de la figure 26.

IV.4.1 Faisceau axisymétrique

Influence du matériau de la sphère

Le premier cas examiné est celui d'un faisceau focalisé au front d'onde axisymétrique. La forme spatiale du champ de pression a été montrée à la figure 26. Nous allons analyser la pression de radiation qui résulte de la diffraction de ce faisceau par la sphère. Dans un première temps, l'influence de la taille de la sphère a/λ (relative à la longueur d'onde) est examinée pour différents matériaux (table IV.1) . Sur la figure 27 sont tracées les composantes Q_z et Q_ρ de la force. Dans le premier cas, la sphère est positionnée à la focale du faisceau ($\vec{r} = (0, 0, 0)$). On voit que la force est ici toujours positive et pousse donc la sphère. De nouveau, on voit apparaître des résonances apparaissent pour le polystyrène dues aux ondes guidées par la surface de la sphère.

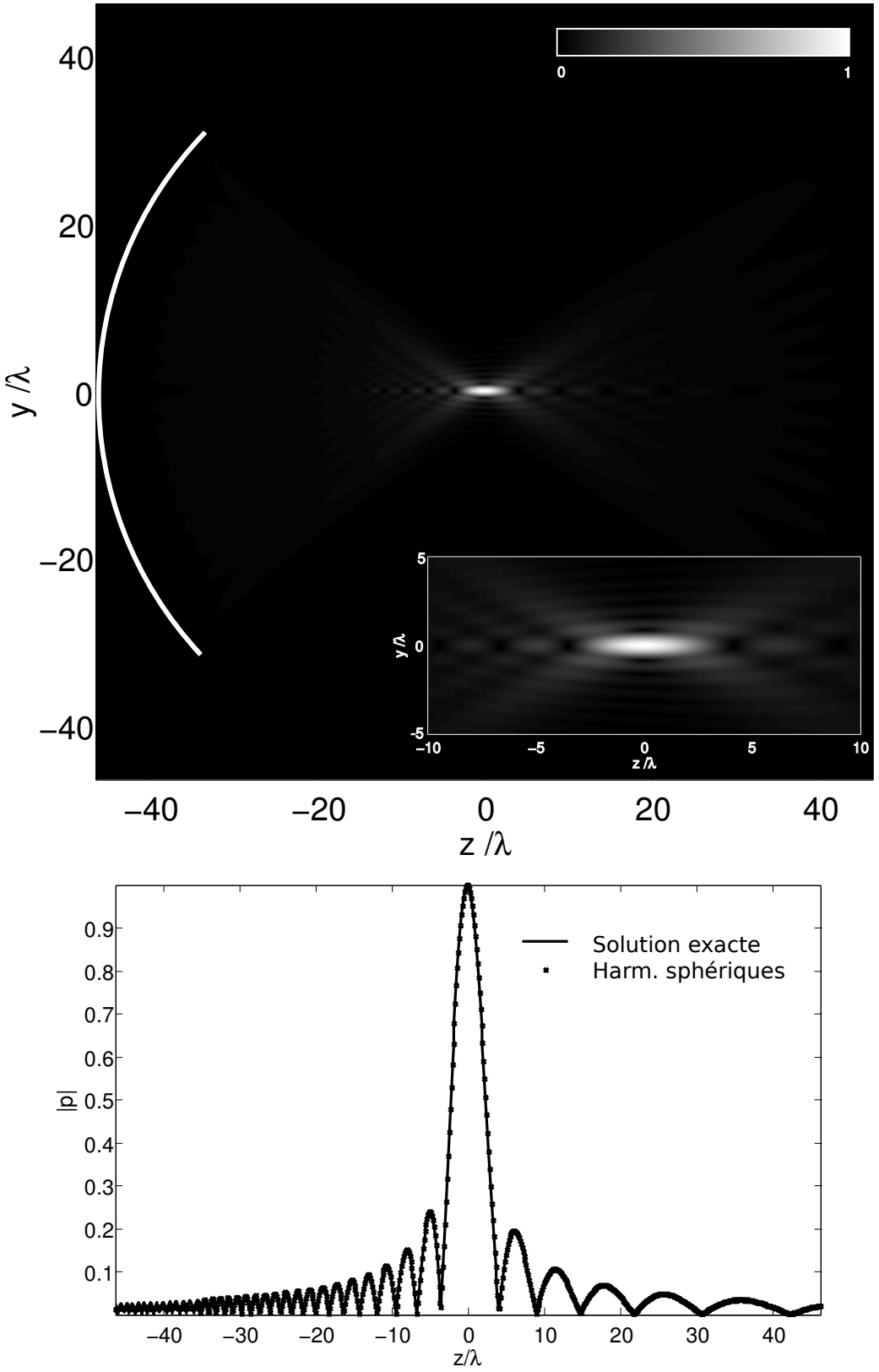


FIGURE 26 – **Champ rayonné par un piston concave vibrant avec une vitesse uniforme.** Le rayon de courbure vaut $r_0 = 6$ cm et l'angle d'ouverture α_0 est de 39°. En bas la pression est tracée sur l'axe de propagation z et comparée à la solution exacte de l'intégrale de Rayleigh.

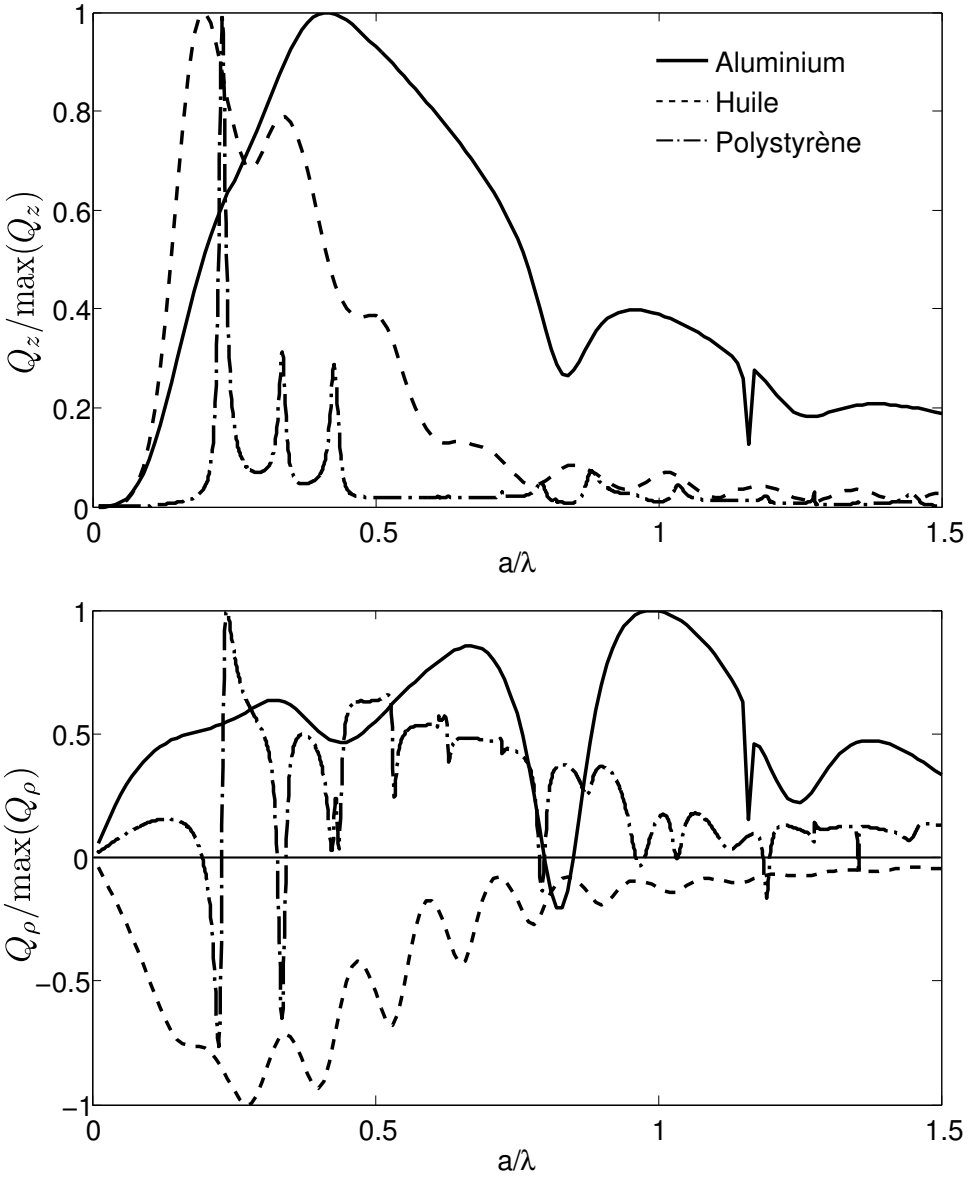


FIGURE 27 – **Force axiale et radiale en fonction du rayon a de la sphère.** La fréquence du faisceau est fixée à 1 MHz et on fait varier la taille de la sphère. Par souci de clarté, les courbes ont été normalisées. Force axiale pour une sphère en $\vec{r} = (0, 0, 0)$. La composante Q_ρ est obtenue pour une sphère située en $\vec{r} = (0, 5\lambda, 0, 0)$.

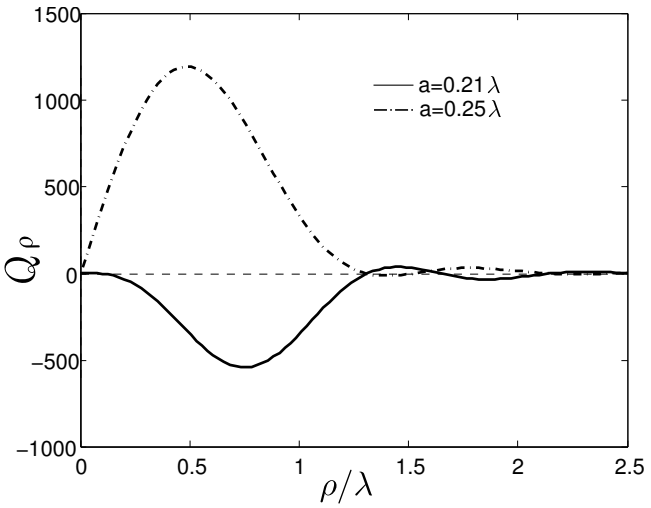
En comparaison, le comportement d'un matériau plus rigide comme l'aluminium ou liquide comme l'huile de silicone est plus régulier dans le sens où il est plus difficile de déceler un comportement résonant. La force radiale Q_ρ a été tracée pour une sphère hors de l'axe acoustique $\vec{r} = (0, 5\lambda, 0, 0)$. En effet, par symétrie, la force radiale est nulle pour un sphère positionnée sur l'axe. Les résonances détectées pour le polystyrène affectent naturellement la force radiale et peuvent dans ce cas causer un changement de signe de cette composante. L'habilité d'un faisceau à confiner une particule près de la focale

dépend pour beaucoup du signe de la force et l'effet de ces résonances doit être analysé. Toujours dans le cas du polystyrène, sur la figure suivante (Fig. 28), nous avons tracé cette fois-ci, les forces en fonction de la position de la sphère dans le faisceau incident. Nous avons sélectionné pour le rayon de la sphère $a = 0,21\lambda$ et $a = 0,25\lambda$ qui correspondent à deux positions distinctes de part et d'autre du premier pic de résonance observé à la figure 27. Comme on peut le voir sur le graphique (a), l'inversion du signe de Q_ρ se confirme quelque soit la distance ρ séparant le centre de la sphère et l'axe du faisceau. L'excitation d'une résonance peut donc permettre de sélectionner le comportement du faisceau, peu avant le pic de résonance ($a = 0,21\lambda$) la force radiale est une force de rappel qui confine la sphère sur l'axe du faisceau, après celui-ci ($a = 0,25\lambda$), la sphère est au contraire éjectée par une force radiale toujours positive. On peut tenter de donner une explication à ce comportement en analysant le champ diffusé. Le graphique (b) représente la fonction de forme de diffusion $F_d(\theta, \varphi)$ introduite à l'équation (69) du chapitre II. Cette fonction est directement liée au diagramme de directivité caractérisant le rayonnement de la sphère. Pour placer la sphère hors de l'axe de propagation, elle est écartée de la distance $\rho = 0,5\lambda$ dans la direction $\theta = 270°$. On peut remarquer que dans le cas précis d'une force attractive ($Q_\rho < 0$, courbe en trait plein), la fonction de forme est fortement asymétrique (la section efficace de diffusion est plus grande pour $\theta \in [\pi : 2\pi]$). La sphère rayonne essentiellement l'énergie acoustique de manière "centrifuge" ce qui a comme résultat la force centripète observée. Nous rappelons que la force de pression de radiation résulte d'un excès de pression à une interface. Ici l'excès qui résulte de l'asymétrie du champ diffusé semble pouvoir orienter la force vers le centre du faisceau. Nous avons vérifié que pour une gouttelette d'huile qui manifestement est toujours attirée vers le faisceau (Fig. 27), une forte asymétrie est systématiquement présente dans le diagramme de diffusion.

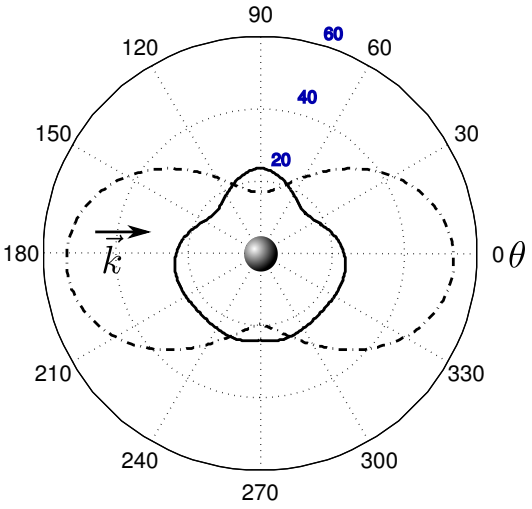
La possibilité d'attirer une particule vers le faisceau acoustique est une première manière de la manipuler à distance. Néanmoins, comme nous pouvons le voir sur la courbe de la force axiale (Fig. 28), elle est toujours orientée dans la direction de propagation du faisceau quelque soit la position z du centre de la sphère. Elle sera systématiquement pousée dans la direction de propagation.

Piège pour une gouttelette fluide

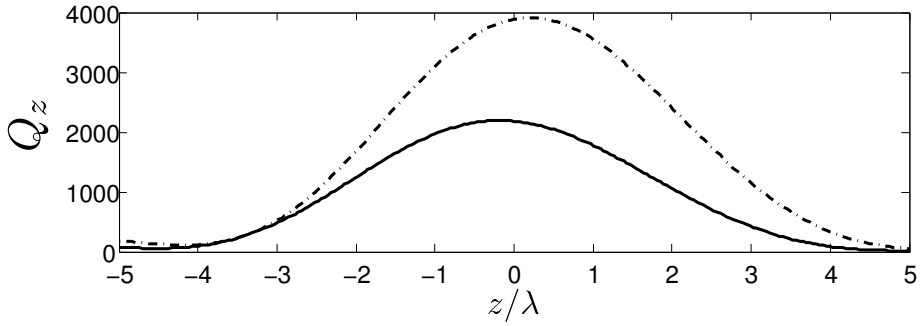
Le contraste de compressibilité et d'inertie entre la sphère et le milieu régit, tout comme dans une onde stationnaire, la direction que prend la force. On le voit avec la différence de signe de la force radiale entre une gouttelette d'huile et une sphère solide (aluminium et polystyrène hors résonance) sur la figure 27. En réduisant la taille de la sphère, on atteint le régime de Rayleigh ($a/\lambda \ll 1$), et on remarque que le faisceau focalisé peut agir comme un puits de potentiel stable pour l'huile de silicone. En effet, pour une sphère de rayon $a = 0,01\lambda$, nous montrons sur la figure 29 que l'action des deux composantes de la force peuvent se combiner pour définir une unique position d'équilibre stable pour la goutte. Cette position requiert une force qui passe par zéro et avec une pente négative. Ainsi la force radiale attire la goutte vers l'axe de propagation et la force axiale assure qu'elle rejoigne une position d'équilibre stable qui se situe légèrement en amont de la focale



(a) Force radiale



(b) Fonction de forme de diffusion en champ lointain



(c) Force axiale

FIGURE 28 – **Effet d'une résonance sur le comportement de la force.** En (a), la force radiale pour une sphère de part et d'autre du premier pic de résonance, $a = 0,21\lambda$ et $a = 0,25\lambda$. En (b), la fonction de forme est tracée dans un diagramme polaire pour les deux tailles de sphère. En (c), la force axiale en fonction de la distance à la focale z.

du piston concave. Tout comme dans un système à ondes stationnaires, c'est la force de gradient qui attire la sphère vers la tâche focale où l'intensité est maximale. Notons que le gradient de pression radial est plus fort que celui obtenu axialement par focalisation. Ceci explique que le force radiale est en règle générale plus importante. À notre connaissance, il n'existe pas de démonstration expérimentale de ce piège stable pour des gouttes liquides utilisant un faisceau axisymétrique. D'un point de vue applicatif, avec une pression au foyer $p_0 = 1$ MPa, la force de rappel radiale vaut au maximum $F_\rho \simeq 2,7$ nN et axiale $F_z \simeq 600$ pN. Ces forces suffiraient certainement à convenablement manipuler la goutte de rayon $a = 15\mu$m. Néanmoins, il ne sera pas possible d'établir des conditions de stabilité similaires pour des matériaux solides. Du fait d'une forte réflexion spéculaire, la force axiale est toujours répulsive (voir figure 30). Le contraste acoustique ne donne tout simplement

pas le bon signe à la force. Une exception peut être faite pour les matériaux très denses et incompressibles (*e.g.* le tungstène). Sous certaines conditions, on peut établir une position d'équilibre (voir les discussions dans les références [123, 137]). Pour finir, quelque soit le matériau, en augmentant de nouveau le rayon de la sphère la force axiale de diffusion domine rapidement et pousse la sphère dans la direction de propagation.

Conclusion sur le faisceau axisymétrique

Un faisceau ultrasonore axisymétrique ne permet pas, en général, de manipuler une sphère en trois dimensions. Par contre, la force de poussée axiale pourra être bloquée par une contrainte extérieure (par exemple en utilisant une membrane non réfléchissante). La sphère pourra ensuite être manipulée latéralement. C'est une technique adoptée dans les travaux du groupe de recherche de K.K Shung *et al.* [77, 78, 156]. Suivant les propriétés des particules, elles ne seront pas manœuvrées de la même manière (expulsion ou répulsion latérale). Ceci, ajouté à l'apparition de résonances élastiques étudiées ici, laisse entrevoir une manière efficace de trier des particules par leur taille et/ou propriétés élastiques.

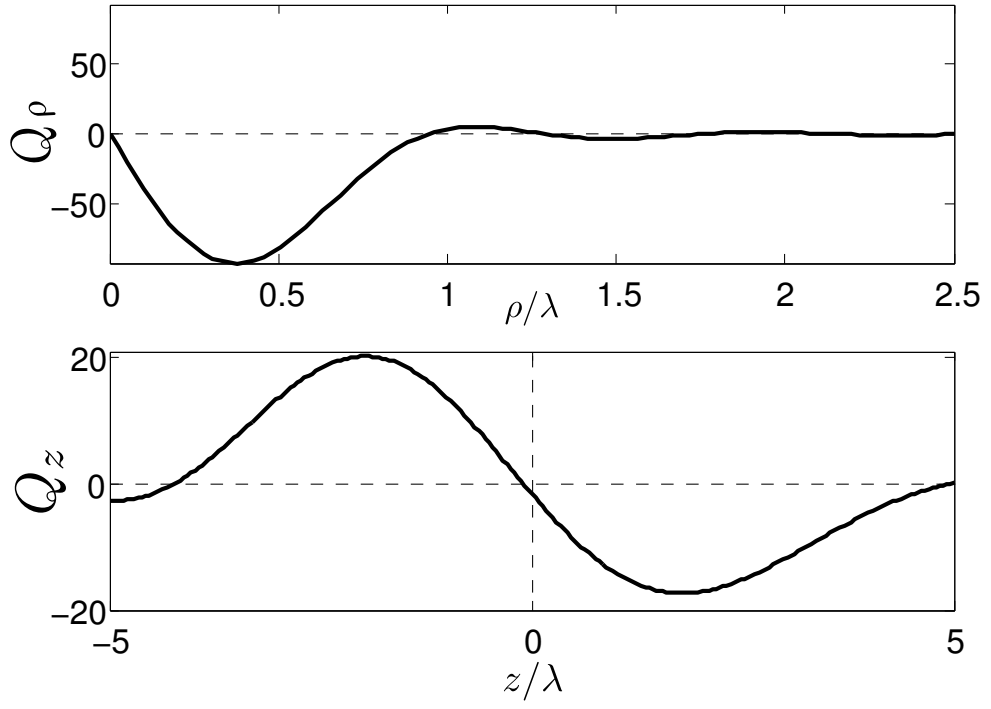


FIGURE 29 – **Force sur une petite gouttelette d'huile de silicone**. Forces de type rappel suivant l'axe de propagation et latéralement. La goutte est confinée à une position d'équilibre stable.

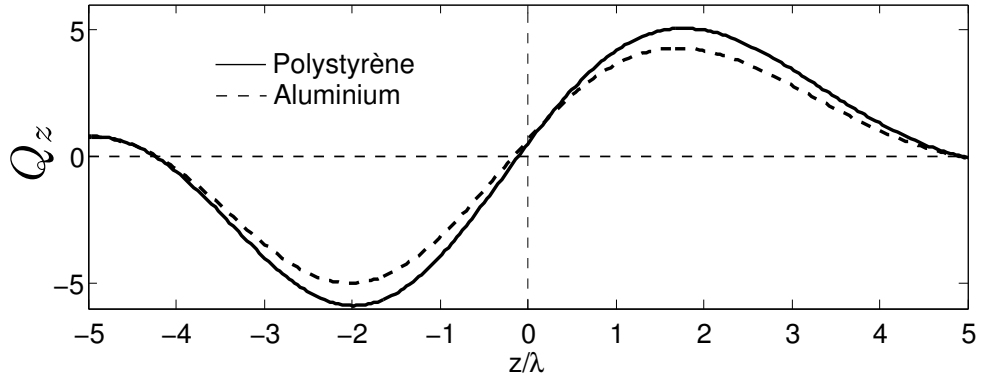


FIGURE 30 – **Force sur des petites sphères élastiques**. La force axiale repousse les particules de la focale du faisceau. On ne peut obtenir une position d'équilibre stable.

IV.4.2 Système de faisceaux contra-propagatifs

Nous venons de voir qu'un unique faisceau axisymétrique n'était pas adéquat pour confiner une particule en trois dimensions. Une force axiale qui pousse la particule dans la direction de propagation empêche d'établir une position d'équilibre stable. L'étude pionnière de Wu [76] avait justement pour objectif d'obtenir l'analogue acoustique des pinces optiques introduites par Ashkin [48]. Pour plusieurs raisons dans son étude, il n'a pas pu démontrer la faisabilité du concept de piège à faisceau unique sur des particules de latex. Il n'a alors pas reconnu que le contraste acoustique était clairement en sa défaveur et préféra évoquer des complications liées à l'écoulement induit par l'atténuation du faisceau acoustique. Quoiqu'il en soit, écoulement ou non, sa méthodologie n'était pas adaptée à l'application visée. La force d'entrainement visqueuse appliquée par l'écoulement sur les particules venait renforcer la poussée axiale de pression de radiation. Pour remédier à son problème, il utilisa donc deux faisceaux contra-propagatifs pour établir un puits de potentiel stable. C'est une solution analogue à celle adoptée par Ashkin qui rencontra initialement des problèmes similaires de fuite axiale [3].

Le champ représenté à la figure 31 est obtenu avec deux faisceaux qui se propagent dans des directions opposées et qui sont générés par des transducteurs ayant les mêmes caractéristiques ($r_0 = 10$cm, $\alpha_0 = 39°$). On voit qu'un système axial d'ondes stationnaires se crée. Des nœuds et des ventres d'amplitude sont séparés de $\lambda/4$ dans la direction de propagation z. Comme dans l'étude de Wu, les foyers focaux de chaque faisceau sont séparés de quelques millimètres, ici 4λ. En ce qui concerne la force, on peut s'attendre à ce que la composante axiale soit modifiée à cause de cette stationnarité. Sur la figure 32, nous avons tracé pour deux particules distinctes (huile de silicone et PMMA) de rayon $a = 0,01\lambda$, les composantes axiale et radiale de la force. La stationnarité de l'onde se retrouve clairement dans l'évolution de Q_z en fonction de la position z de la sphère. Ainsi, comme classiquement observé dans les systèmes d'ondes planes stationnaires, la goutte est attirée vers les ventres de pression et la sphère élastique en PMMA vers les nœuds. Le nombre de positions axiales d'équilibre stable est déterminé par l'extension du domaine stationnaire obtenu avec les deux faisceaux. Ce nombre augmente quand on rapproche les

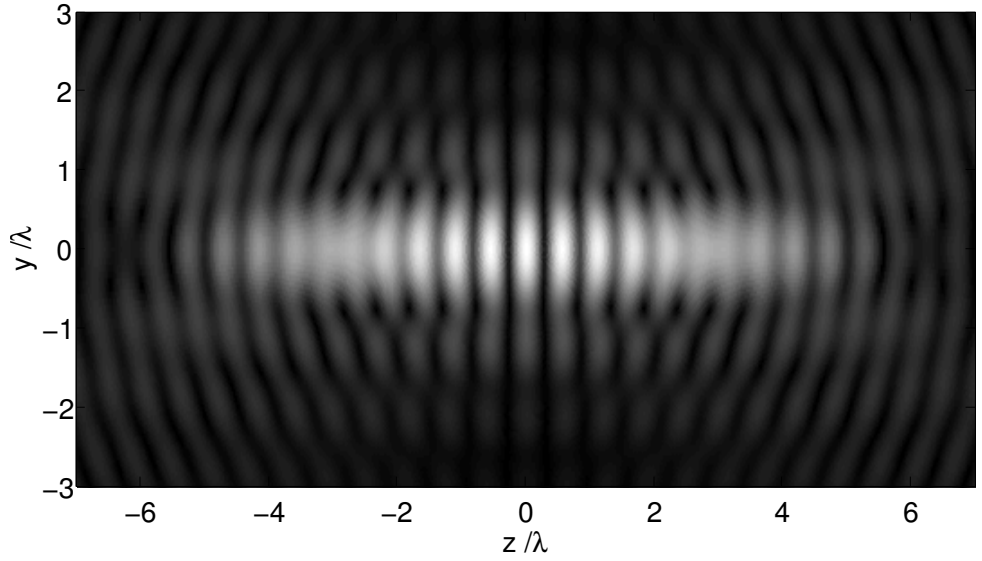


FIGURE 31 – **Champ de deux faisceaux contra-propagatifs.** Deux faisceaux contra-propagatifs de même amplitude forment un système stationnaire dans la direction de propagation z. Des nœuds et des ventres d'amplitude sont séparés de $\lambda/4$. Les foyers focaux de chaque faisceau sont séparés d'une distance 4λ.

deux foyers focaux. Nous pouvons aussi analyser la force radiale sur cette même figure. Pour la goutte d'huile, les ventres de forte intensité génèrent une force attractive dirigée vers l'axe acoustique. De manière plus singulière, pour la sphère de PMMA décalée de $z = 0,25\lambda$, le nœud de pression axiale permet aussi d'attirer la sphère vers l'axe. C'est cette force qui a permis à Wu de confiner en trois dimensions des particules de latex. C'est aussi cette force qui permet dans les expériences de lévitation acoustique de maintenir dans une certaine mesure les particules alignées. La focalisation dans ces expériences créent toujours un faible gradient latéral de pression.

Les deux cas qui viennent d'être illustrés entrent dans le régime de diffusion de Rayleigh. Analysons maintenant le comportement de ce piège pour des sphères plus grandes. Toujours pour les deux mêmes matériaux, nous prenons des sphères de rayon $a = 0,25\lambda$. Nous pouvons voir pour la composante Q_z sur la figure 33, que la sphère élastique possède encore plusieurs positions d'équilibre axial. Par contre, la goutte n'est plus aussi sensible aux gradients de pression du champ stationnaire. Ainsi, elle sera piégée à égale distance des deux transducteurs et l'ensemble du champ agit comme un unique puits de potentiel. En comparant au cas d'un seul faisceau, la goutte piégée peut ici être beaucoup plus grande, les forces de poussée des deux faisceaux se superposent et forment une force de rappel au niveau du barycentre du système. Sur la figure 34, nous montrons que ce barycentre est pondéré par l'amplitude respective des deux faisceaux. L'amplitude du faisceau arrivant des z positifs est augmenté de 10, 50 et 100% par rapport à l'autre. On voit alors qu'il est possible de déplacer la position d'équilibre stable vers la gauche et déplacer ainsi la goutte piégée. Le PMMA reste sensible à la présence de nœuds et de ventres et plusieurs positions d'équilibre stable existent. La force radiale Q_ρ reste encore attractive permet-

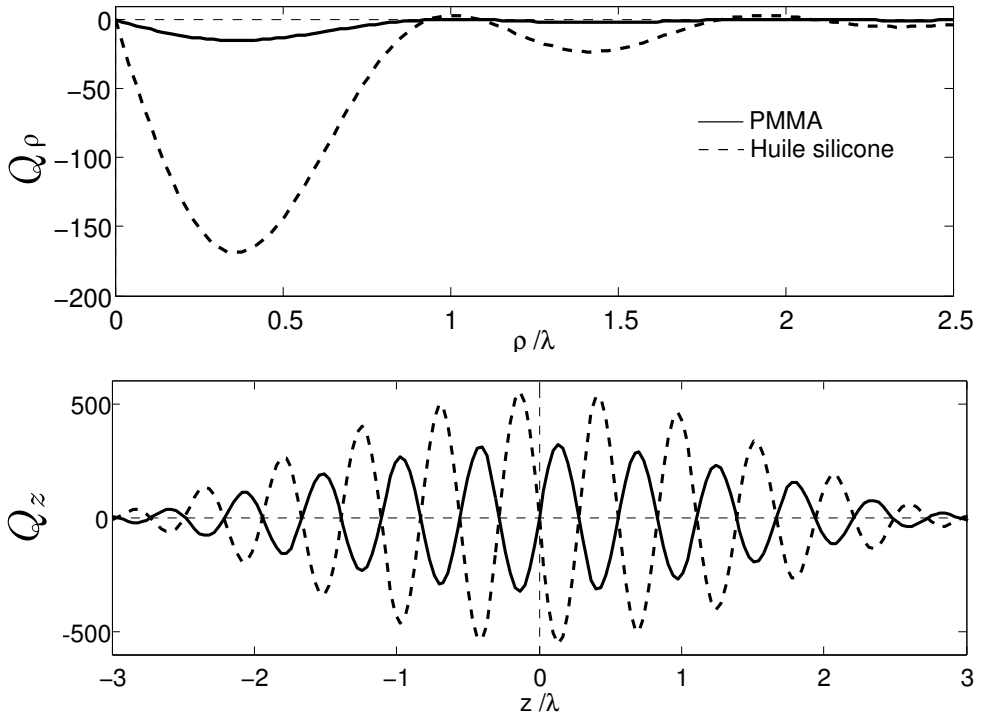


FIGURE 32 – **Composantes radiale et axiale de la force.** L'onde stationnaire axiale de la figure 31 défini un nombre fini de positions d'équilibre pour les deux sphères. La gouttelette d'huile est attirée vers les ventres de pression pendant que le PMMA va vers les nœuds. Pour les deux, la force radiale confine les particules sur l'axe acoustique.

tant de confiner la particule sur l'axe acoustique. En augmentant davantage la taille de la particule, ce piège semble redevenir rapidement instable.

Ce montage introduit par Wu au début des années 1990 n'a pas été exploité par la suite. Pourtant son analogue optique a reçu plus d'attention [50, 157, 158] et cette configuration semble bien adaptée à l'étude de grands organismes biologiques. Notamment, suivant l'élasticité de l'objet biologique étudié, il semble possible de l'étirer dans la direction de propagation des faisceaux grâce au différentiel de force qui apparaît à chacune de ses extrémités [157]. On peut donc concevoir une machine à traction sans contact macro- ou microscopique.

IV.4.3 Vortex acoustique focalisé : dimensionnement d'une pince acoustique

Description du champ incident

Sur la figure 35, nous représentons à la fois l'intensité et la phase de vortex pour plusieurs valeurs de la charge topologique $m' = 1$, 2 et 3. Contrairement aux conditions requises pour les faisceaux hélicoïdaux de Bessel vus précédemment, cette fois-ci ils sont focalisés par un transducteur concave. On retrouve la forme caractéristique déjà décrite,

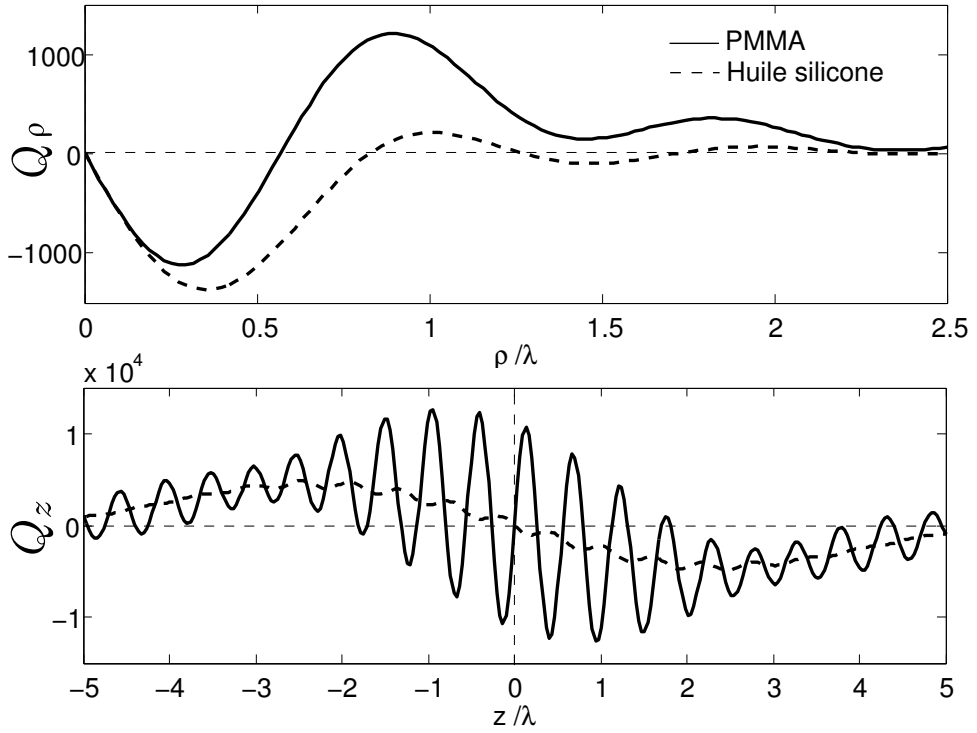


FIGURE 33 – **Composantes radiale et axiale de la force.** Forces axiale et radiale pour des sphère plus grandes de rayon $a = 0,25\lambda$.

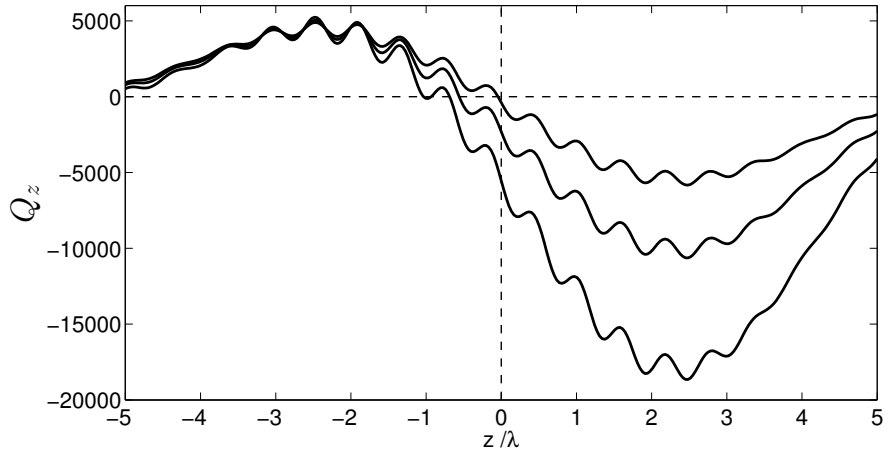
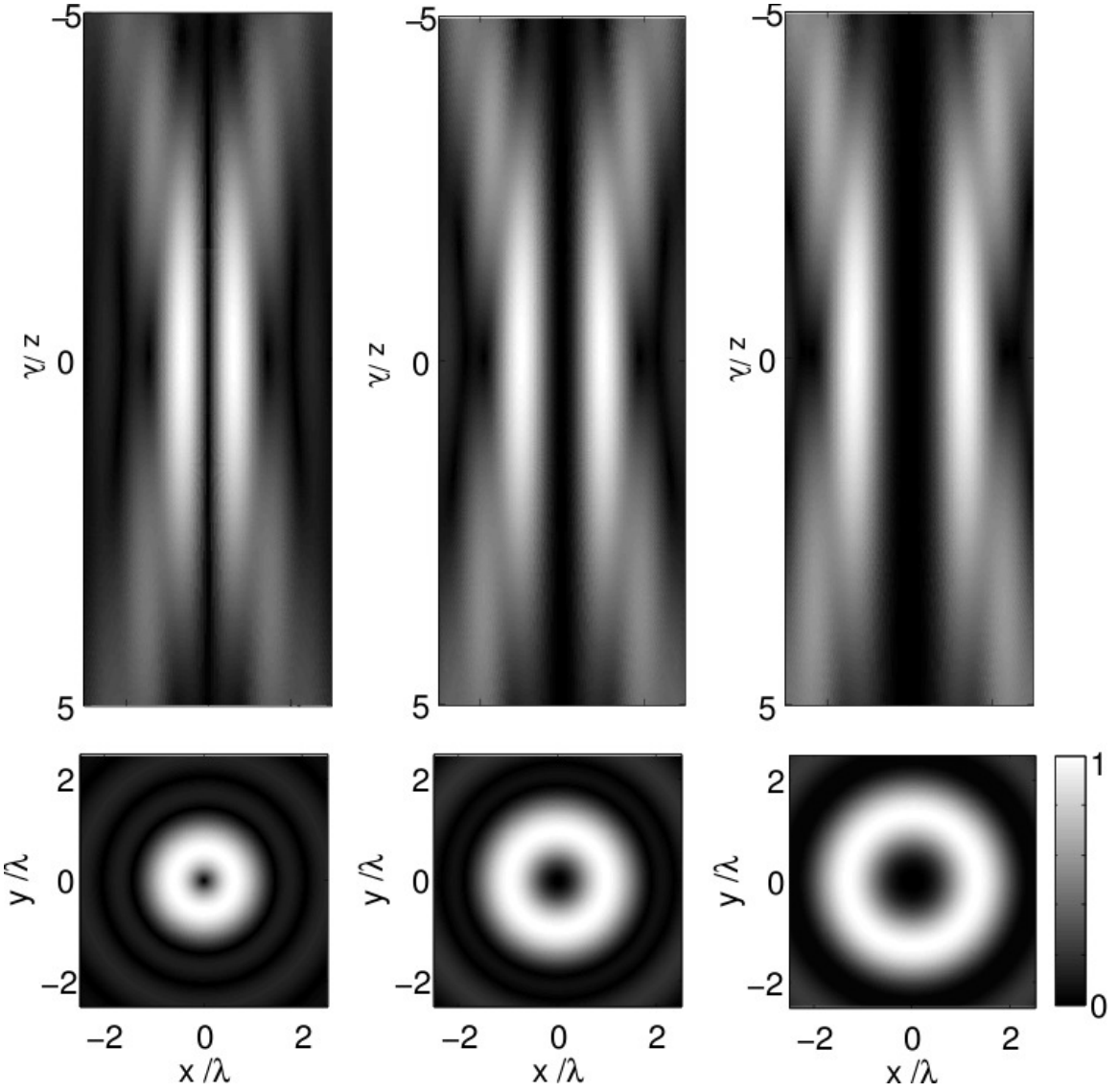


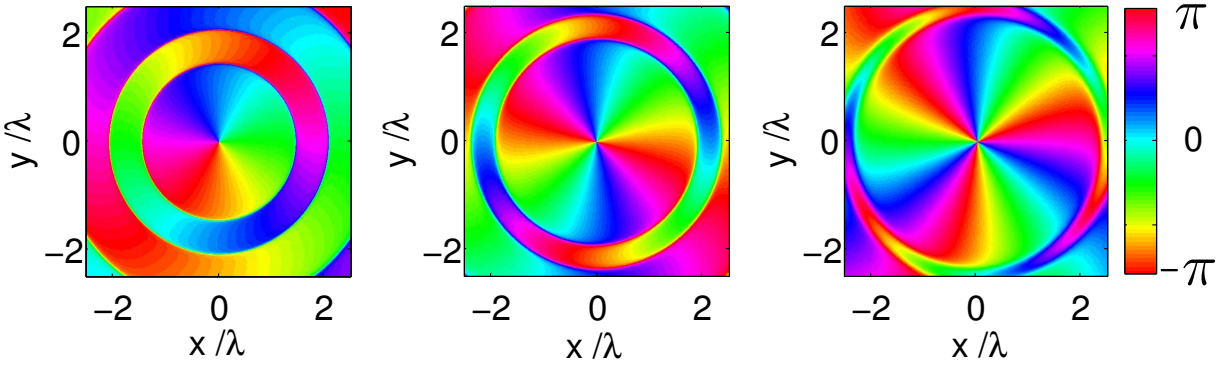
FIGURE 34 – **influence d'un déséquilibre en amplitude des faisceaux.** Ici nous montrons la position d'équilibre axiale est pondéré par l'amplitude respective de chaque faisceau. L'amplitude du faisceau arrivant des z positifs est augmenté de 10, 50 et 100% par rapport à l'autre.

un anneau de forte intensité entourant un cœur où l'amplitude est nulle. Dans la direction de propagation z, on peut observer l'effet de la focalisation. L'intensité est décrite par un

"tube de focalisation" et la singularité de phase, très robuste, semble se maintenir quelque soit z.



(a) intensité (u.a.)



(b) phase

FIGURE 35 – **Intensité et phase en fonction de la charge topologique m' d'un vortex focalisé.** De gauche à droite, la charge vaut $m' = 1$, 2 et 3. En a) l'intensité dans la direction de propagation et dans le plan transverse. En b), variation azimutale de la phase.

Piège tridimensionnel pour une sphère élastique

Comme premier exemple nous analysons la force exercée par un vortex de charge topologique $m' = 1$ qui est focalisé par le même émetteur que dans les sections précédentes. En fixant le paramètre m' à l'équation (170), nous obtenons les coefficients de forme du champ incident pour la position de référence (sphère placée à la focale du transducteur). Les composantes radiale, azimutale et axiale de la force sont montrées à la figure 36. La sphère de rayon $a = 0.15\lambda$ est en aluminium. Dans le plan transverse à l'axe de propagation (le plan focal $z = 0$), les composantes Q_ρ et Q_φ sont fonctions de la distance à l'axe acoustique ρ. La composante axiale est elle calculée pour une sphère positionnée sur l'axe acoustique en fonction de sa position par rapport au foyer de focalisation z. De manière très importante, on constate qu'à la fois la force radiale et axiale attirent la sphère vers une unique position d'équilibre. La force radiale assure son attraction vers l'axe de propagation, puis, elle rejoint ensuite un position d'équilibre en aval de la focale, $z_{eq} \sim 0.5\lambda$ déplacée sous l'action de la force axiale. Sur les graphiques pour Q_ρ et Q_φ est aussi tracée la variation de l'intensité du champ (courbe en pointillés). La force radiale est maximale à l'intérieur de l'anneau du vortex ($\rho \simeq 0,23\lambda$) où les gradients de l'énergie acoustique sont importants. Néanmoins, la force demeure attractive jusqu'à approximativement le sommet de l'anneau du vortex, $\rho_{max} \sim 0.6\lambda$, ce qui suggère une portée d'action du piège suffisamment grande devant la taille de l'objet. Concernant la composante Q_φ, comme dans le cas du faisceau de Bessel hélicoïdal, elle confirme une nouvelle fois le transfert d'une fraction de la quantité de mouvement orbital entre le faisceau et l'objet sphérique non absorbant. Cette fonction est positive pour une sphère écartée de l'axe et la rotation induite est cohérente avec le sens de rotation direct des fronts d'onde.

Le comportement de la force axiale mérite d'être discuté plus en détail. Pour la première fois, on observe une action du faisceau de type "ressort" qui permet de piéger une sphère élastique. Revenant à l'analyse grande longueur d'onde de la pression de radiation (section III.1.2), il est possible de donner un sens physique à ce comportement. Pour une petite sphère, contrairement au cas du faisceau de Bessel que nous avons étudié au début de ce chapitre, la force axiale est ici dominée par la force de gradient. L'équation (132) s'écrit pour la force de gradient axiale dans le repère cylindrique (ρ, φ, z) :

$$F_G^z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{175}$$

et cette force conservative dérive du potentiel acoustique qui prend la forme :

$$U(\rho, \varphi, z) = -\rho_0 \pi a^3 \left(\frac{\rho_p - \rho_0}{2\rho_p + \rho_0} \right) |\vec{v}|^2 \tag{176}$$

En effet partant du constat que le pression acoustique est nulle sur l'axe de propagation du vortex, le terme monopolaire n'est plus excité puisque $\frac{\partial |p|^2}{\partial z} = 0$. Il ne reste alors que

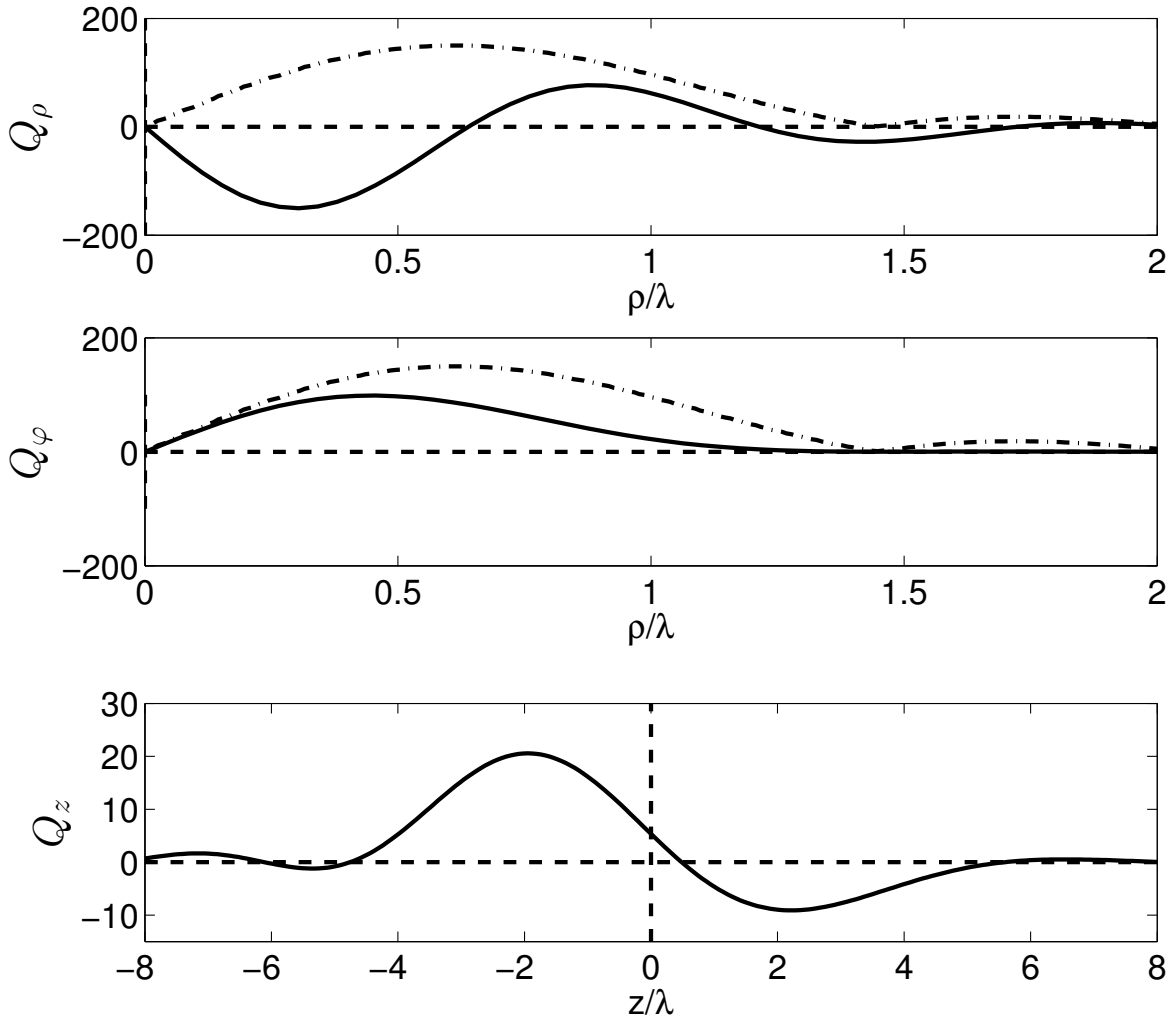


FIGURE 36 – **Force d'un vortex de charge** $m' = 1$**.** Composantes Q_ρ et Q_φ pour une sphère de rayon $a = 0,15\lambda$ en aluminium en fonction de la distance radiale ρ. L'intensité du champ (unités arbitraires) a aussi été représenté en pointillés. La force Q_z est tracée pour la sphère sur l'axe acoustique en fonction de son éloignement à la focale.

l'excitation dipolaire proportionnelle au contraste d'inertie entre la particule et le milieu de propagation. Faisant usage de l'équation d'Euler linéarisée, le potentiel peut s'écrire en fonction de la pression uniquement :

$$U(\rho,\varphi,z) = -\frac{\pi a^3}{\rho_0\omega^2}\left(\frac{\rho_p-\rho_0}{2\rho_p+\rho_0}\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right) \tag{177}$$

or la variation azimutale du champ de pression est périodique en $e^{im\varphi}$ ce qui implique que

le terme $\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)^2$ soit nul. On retrouve le fait que la force azimutale n'est pas une force de gradient (voir aussi section IV.2.1) et le potentiel tel qu'il est défini est indépendant de φ. Finalement U devient plus simplement :

$$U(\rho, z) = -\frac{\pi a^3}{\rho_0 \omega^2}\left(\frac{\rho_p - \rho_0}{2\rho_p + \rho_0}\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right) \tag{178}$$

Pour le cas particulier de la force sur l'axe de propagation ($\rho = 0$), elle se réduit à :

$$F_G^z(z) = \frac{\pi a^3}{\rho_0 \omega^2}\left(\frac{\rho_p - \rho_0}{2\rho_p + \rho_0}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^2_{\rho=0} \tag{179}$$

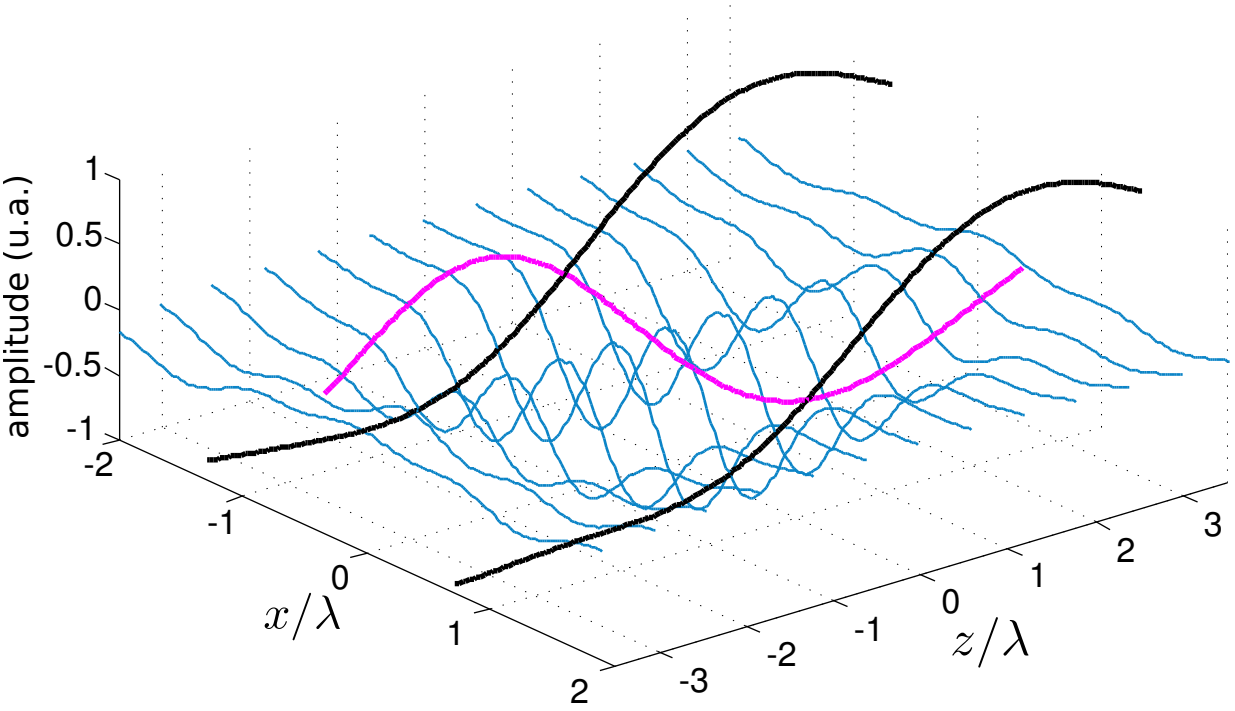


FIGURE 37 – **Puits de potentiel dont dérive la force de gradient.** Le potentiel acoustique U est représenté dans le plan (x, z) par les courbes bleues. La force axiale est tracée pour trois position latérales différentes $x = -2\lambda$ 0 et 2λ. Sur l'axe acoustique (courbe magenta) le puits de potentiel est tel que la force axiale définit une position d'équilibre pour la sphère. L'ensemble des courbes ont été normalisées à l'unité.

La clé pour obtenir la force de rappel axiale réside ainsi dans la variation axiale du gradient radial de la pression pris en $\rho = 0$. Sur la figure 37 nous avons tracé le potentiel acoustique ($-U$ pour être exactes) à partir du champ de pression d'un vortex ainsi que

la force axiale F_z^G qui en résulte pour trois positions latérales différentes. L'examen des courbes pour le potentiel (en bleu) montre que ce n'est que sur l'axe acoustique ($x = 0$) que le gradient axial du potentiel produit un point d'inflexion dans la bonne direction pour la courbe de la force (courbe magenta). Hors de l'axe ($x = \pm 2\lambda$) ce point d'inflexion est inversé et la force (courbes noires) est répulsive.

En résumé, la topologie particulière du vortex (pression nulle sur et son gradient radial qui en résulte), une annihilation du terme monopolaire et un contraste inertiel favorable pour des particules plus denses que le milieu de propagation sont les trois ingrédients pour établir la force de rappel attractive d'un vortex acoustique sur des sphères élastiques.

Trajectoire d'une particule dans un vortex acoustique

Le puits de potentiel qui agit sur la sphère est tridimensionnel et varie dans l'espace. Nous pouvons calculer la trajectoire d'une particule dans le piège pour mieux comprendre l'action de la pression de radiation. Le bilan des forces qui s'exerce sur la sphère s'écrit :

$$m\frac{\partial \vec{v}_p}{\partial t} = \vec{F} + \vec{F}_s + \vec{P}, \tag{180}$$

où

$$\vec{F}_s = -6\pi\mu a\vec{v_p}. \tag{181}$$

m est la masse de la sphère et $\vec{v}_p$ sa vitesse. Les forces à prendre en compte sont le poids apparent de la sphère $\vec{P}$ (poids moins la poussée d'Archimède). Une force visqueuse d'entrainement notée $\vec{F}_s$, et calculée à partir du modèle de Stokes où $\mu = 0.001$ Pa·s est la viscosité dynamique de l'eau. Et $\vec{F}$ la pression de radiation acoustique. Un schéma explicite de Runge-Kutta a été couplé au calcul analytique de la force acoustique pour résoudre l'équation (180). Pour chaque pas temporel, la pression de radiation est calculée pour la nouvelle position de la sphère et la force d'entrainement est obtenue à partir de la vitesse qu'elle a atteinte. La trajectoire de la sphère en aluminium est montrée sur la figure 38. La pression sur la surface d'émission est fixée à $0,1$ MPa. On obtient pour la valeur maximale de la pression de radiation $F_z \simeq 7\mu$N, $F_\varphi \simeq 35\mu$N et $F_\rho \simeq 53\mu$N pour les courbes de la figure 36. Partant de la position $(0.4, -0.4, 0)$ en unités de λ et sans vitesse initiale, elle est d'abord rapidement attirée vers l'axe de propagation contre son propre poids (qui vaut $\sim$ 80nN dirigée dans cette configuration suivant l'axe y). Tant qu'elle n'a pas atteint l'axe de propagation, la force axiale est positive et pousse la sphère dans la direction de propagation (direction z). Simultanément, l'échange du flux de moment angulaire l'entraine dans une trajectoire orbitale autour de l'axe de propagation. Ce n'est qu'une fois sur l'axe z que la sphère est ensuite, plus lentement, attirée par la force axiale négative vers sa position d'équilibre stable $(0, 0, 0.5)$. Ceci démontre que le vortex de charge $m' = 1$ peut piéger une sphère solide et sera approprié pour être utilisé comme une véritable pince acoustique. Une fois la sphère piégée, il est concevable de

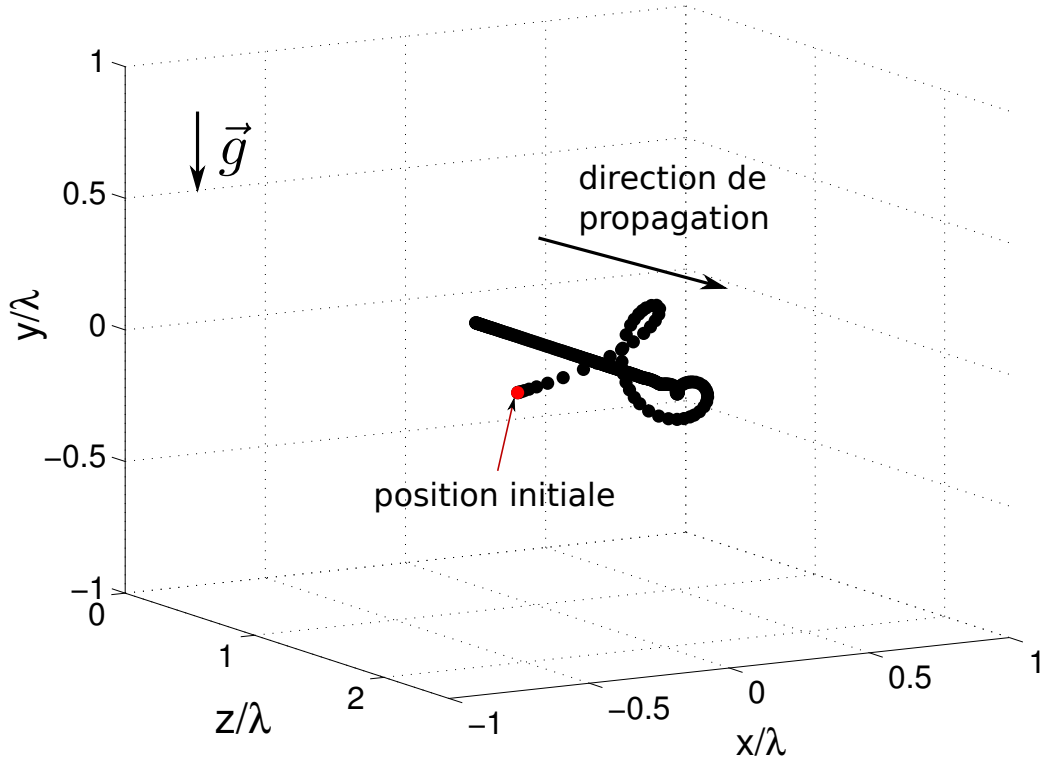
pouvoir la manœuvrer avec précision en déplaçant le champ acoustique. Bien entendu, suivant la taille de la sphère, sa densité et le milieu dans lequel on opère, un pré-requis est de développer une force suffisante pour dominer les autres forces mises en jeu (le poids, l'accélération de la particule, un éventuel écoulement, etc...).

Influence de la focalisation du champ acoustique

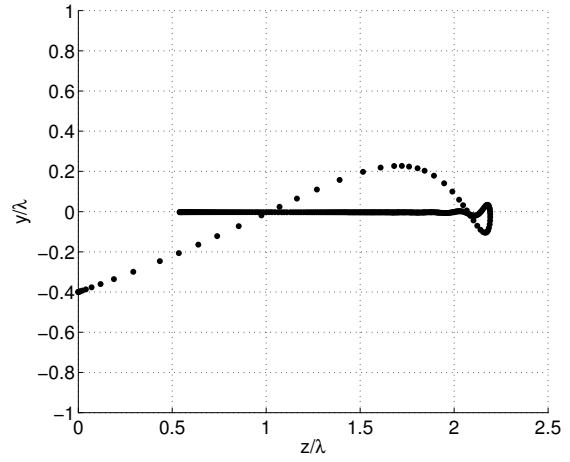
Nous avons vu que la force de type "gradient" était responsable de l'attraction de la sphère vers une position d'équilibre. On est naturellement amené à penser que les caractéristiques de focalisation jouent un rôle important dans l'apparition de cet effet. Pour un rayon d'ouverture du transducteur fixé à $a_0 = 5$ cm, nous avons fait varier l'angle d'ouverture α_0 en changeant le rayon de courbure r_0. Sur la figure 39, pour les angles $\alpha_0 = 19,5°$, $30°$, $38,7°$ et $56,5°$, nous avons tracé l'évolution des forces axiale F_z et radiale F_ρ de la force (en Newtons). Pour obtenir chaque courbe, nous avons normalisé le champ acoustique rayonné par le gain d'antenne correspondant à chaque angle d'ouverture. On conserve ainsi une pression au foyer fixe $p_0 = 1$ MPa. On remarque que pour les deux composantes, la force augmente avec la focalisation et l'augmentation des gradients du champ (et non sa valeur absolue au foyer). L'extension spatiale de la tâche focale étant de plus en plus petite, le champ d'action latéral est aussi fortement réduit et devient plus raide. De manière remarquable, l'effet de raidissement est beaucoup plus important pour la force axiale. Alors qu'on augmente la force d'approximativement un ordre de grandeur pour F_ρ, la force axiale croit de deux ordres de grandeur. On conclut donc que le choix de l'angle d'ouverture du transducteur concave est très important pour l'application à la pince acoustique. Une forte focalisation assure d'importants gradients de pression. La force dite de gradient qui établit la position d'équilibre stable dominera alors de manière plus robuste la force de poussée axiale issue de la rétrodiffusion.

Influence de la taille de la sphère

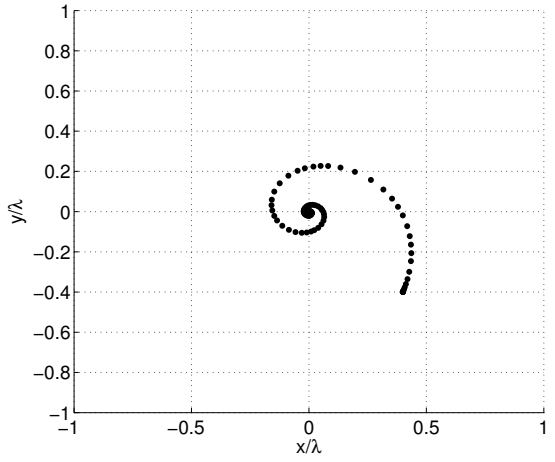
Sur la figure 40, le piégeage d'une sphère en polystyrène est aussi démontré et nous regardons l'influence de la taille de la sphère. Pour les sphères répondant au critère de Rayleigh $a \ll \lambda$, la position d'équilibre stable est sensiblement le centre de courbure du transducteur concave. En augmentant progressivement la taille de la sphère, la force est rapidement modifiée et la position d'équilibre stable se situe plus en aval de la focale. Ceci résulte d'une compétition entre la force de gradient qui l'attire vers la focale pendant que la force de diffusion tend à la pousser dans la direction de propagation. La force de poussée est en première approximation modélisée par l'équation (133) dans le régime de Rayleigh. Lorsque la taille de la sphère augmente, les termes multipolaires supplémentaires qui s'ajoutent poussent aussi fortement et proviennent d'une forte diffusion spéculaire du faisceau par la sphère. Ainsi en passant de $a = 0,15\lambda$ à $a = 0,18\lambda$ la position d'équilibre est décalée de $z_{eq} \sim 0.45\lambda$ à $z_{eq} \sim 1.3\lambda$. Pour $a = 0,2\lambda$, la force devient exclusivement répulsive. Notons qu'au contraire, la composante radiale Q_ρ confine toujours la sphère sur l'axe et semble plus résistante à l'augmentation de la taille de la sphère. En réalité son



(a) Trajectoire tridimensionnelle



(b) Projection dans le plan (z, y)



(c) Projection dans le plan (x, y)

FIGURE 38 – **Trajectoire tridimensionnelle d'une sphère dans un vortex de charge** $m' = 1$**.** Les forces agissant sur la sphère sont la pesanteur ($\|\vec{g}\| = 9.8$ m/s^2), la force d'Archimède, la pression de radiation acoustique et la force de Stokes. La sphère est lâchée sans vitesse initiale de la position $\vec{r} = (0.4, -0.4, 0)$.

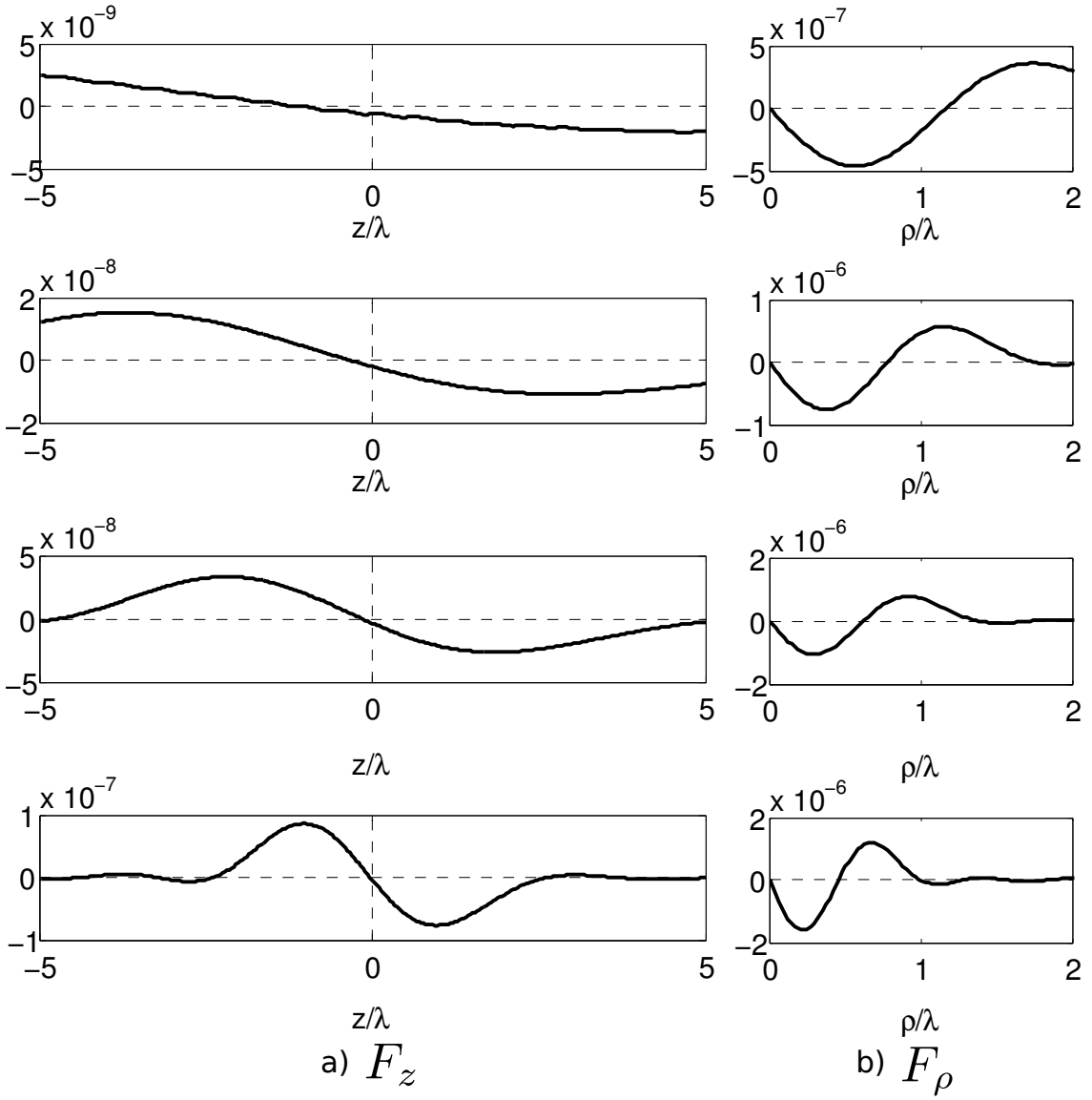


FIGURE 39 – **Influence de la focalisation.** Effet de l'augmentation de l'angle d'ouverture (de haut en bas $\alpha_0 = 19,5°$, $30°$, $39°$ et $56,5°$) sur la force axiale F_z en (a) et radiale F_ρ en (b). Les forces sont données en newtons.

signe dépendra de l'existence ou non d'un régime résonnant favorable comme dans le cas du faisceau axisymétrique.

La forte force de répulsion provient d'une importante rétrodiffusion du faisceau et en modérant l'interaction entre le faisceau et la sphère on peut espérer affaiblir cette force. Une manière d'y parvenir sans modifier la fréquence d'émission est d'augmenter le rayon de l'anneau du vortex. Comme nous l'avons vu à la figure 35, ceci peut être fait en prenant des vortex de charge topologique plus élevée. Sur la figure 41, nous traçons la force exercée par des vortex de charge $m' = 1$, $m' = 3$ et $m' = 4$ pour une sphère en polystyrène en fonction du rayon a de la sphère. Comparant les graphiques pour les différentes charges,

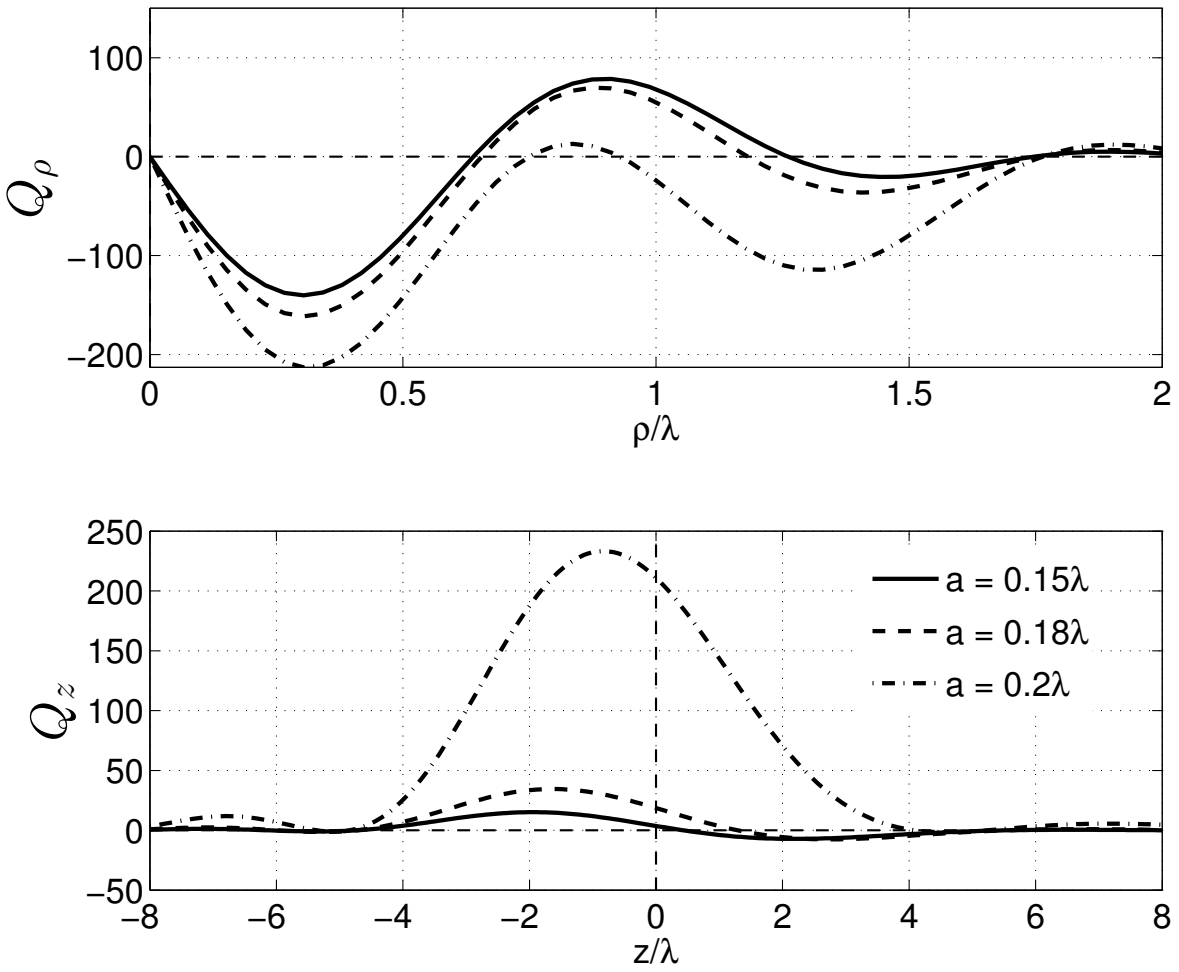
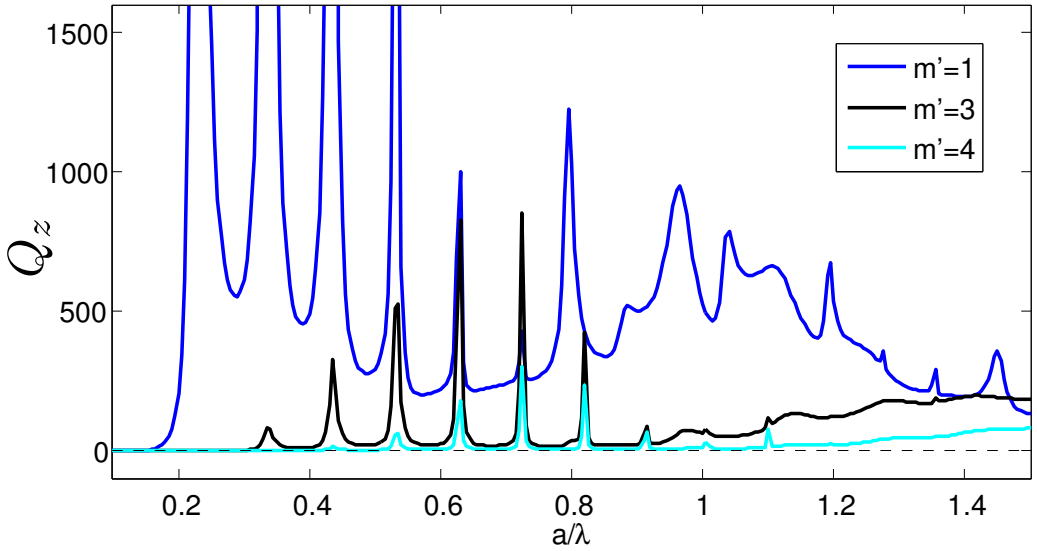
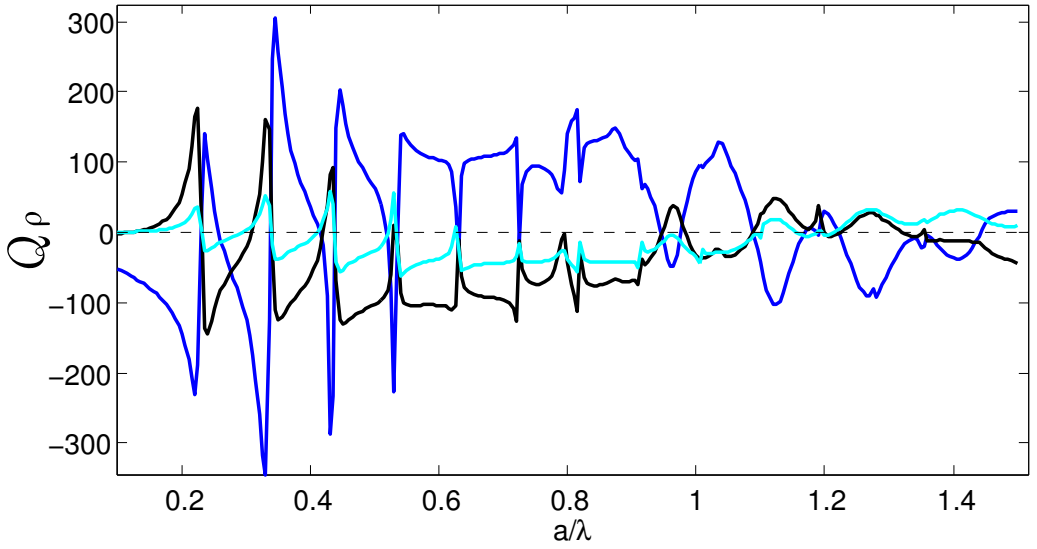


FIGURE 40 – **Influence de la taille de la sphère**. Force d'un vortex de charge $m' = 1$ sur une particule de polystyrène de rayon croissant $a = 0.15\lambda$, $a = 0.18\lambda$ et $a = 0.2\lambda$. Très rapidement, la force de gradient axiale est dominée par la force de diffusion qui éjecte la sphère.

on peut attribuer à chaque pic de Q_z le mode sphérique excité. Par définition du champ (Eq. (170)), les modes d'ordre $n < m'$ ne sont pas excités et ne contribuent pas à la force. Ainsi pour $m' = 1$, le premier pic est attribué à un mode de diffusion de degré $n = 2$ puisqu'il n'est pas excité par le vortex de charge $m' = 3$. Le deuxième pic de la courbe bleue est bien attribué au mode $n = 3$ et à son tour n'est pas excité par le vortex de charge $m' = 4$. Par contre pour la force radiale Q_ρ, le fait de désaxer la sphère de $\rho = 0,5\lambda$ (on rappelle qu'autrement la force radiale est nulle sur l'axe) couple les modes azimutaux de différentes charges m'. Il en résulte que tous les modes résonants peuvent encore être excités et le signe de la force radiale en est impacté.



(a) Force axiale



(b) Force radiale

FIGURE 41 – **Résonances pour des vortex de charge supérieure.** Composantes de la force pour des vortex de charge $m' = 1$, 3 et 4. En a) la composante axiale pour une sphère à la focale $\vec{r} = (0, 0, 0)$.

Il n'est pas perceptible sur la figure 41 que la force axiale Q_z n'est pas exclusivement positive. En faite pour chaque courbe, la force axiale demeure faiblement négative avant chaque premier pic de résonance. Ceci est le signe que la sphère est certainement attirée vers une position d'équilibre stable sur l'axe. Pour retrouver un piège tridimensionnel pour de plus grandes sphères, il suffit donc de sélectionner dans ce domaine de a une valeur qui répond à une force radiale négative également. Celle-ci confinera alors la sphère sur l'axe. Ainsi, comme nous pouvons le voir à la figure 42, en sélectionnant pour les

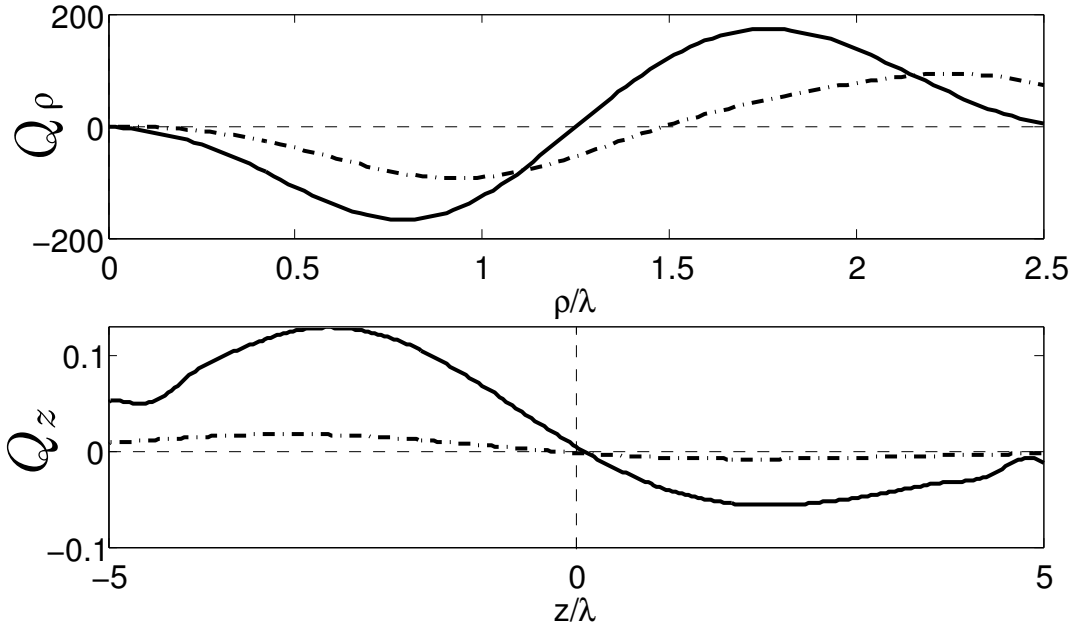


FIGURE 42 – **Augmentation de la charge** m'. Dans une certaine mesure en augmentant la charge on peut retrouver une position d'équilibre stable pour des sphères de taille plus importante. La position axiale d'équilibre est rétablie mais l'efficacité de la force est beaucoup plus faible.

vortex de charge $m' = 3$ et $m' = 4$ respectivement des sphères en polystyrène de taille $a = 0,25\lambda$ (courbe en trait plein) et $a = 0,35\lambda$ (courbe en trait pointillés), il est possible de retrouver une unique position stable et piéger la sphère en trois dimensions. Notons toutefois la très faible amplitude de la force axiale en comparaison à la composante radiale qui demeure forte. Ceci pourra être un problème majeur pour manœuvrer convenablement dans l'espace des sphères de grande taille qui auront un poids important.

Conclusions du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons proposé une implémentation numérique de la théorie de la pression de radiation exercée sur une sphère présentée au chapitre II. Ceci étant fait, nous avons illustré les capacités du modèle à capter les mécanismes de la manipulation d'objets sans contact avec la pression de radiation d'un faisceau acoustique. La première application concernait les faisceaux de Bessel. Motivés par l'application du faisceau "attracteur" introduit par Marston (2006 et 2009), nous avons, entre autre, analysé le comportement latéral de grosses sphères dans un tel faisceau et axé notre discussion sur la possibilité de les attirer de manière continue vers la source du faisceau. Les conditions d'apparition de cette force négative sont restrictives et le comportement latéral des sphères devait impérativement être pris en compte. Les résultats forment une bonne base pour la vérification future du concept de faisceau "attracteur". La possibilité d'attirer la

particule contre le flux d'intensité du faisceau n'est pas uniquement réservé aux faisceaux de Bessel. C'est d'ailleurs le phénomène clé pour le piégeage de particules avec des pinces optiques. Il faut établir un puits de potentiel stable qui attire la particule vers la focale du faisceau et qui domine la force de poussée de diffusion concomitante. La possibilité d'utiliser un faisceau comme une pince n' a pas encore été démontrée en acoustique. Nous avons consacré une section à modéliser le champ émis par un transducteur concave et ainsi calculer la pression de radiation qui s'exerce sur une sphère. À ce stade, nous avons identifié les mécanismes responsables d'une forte force de répulsion exercée par un faisceau acoustique sur une sphère élastique et qui a défié le concept de pince en acoustique depuis de nombreuses années. Ceci explique les observations des études de Wu et de l'équipe de Shung *et al.* Introduisant le concept de vortex acoustique focalisé, nous avons détecté un tout autre comportement. La singularité de phase sur l'axe de propagation du faisceau permet d'obtenir un puits de potentiel stable qui établie une unique position d'équilibre pour des sphères élastiques [137]. Ainsi, nous prévoyons qu'un vortex fortement focalisé de charge topologique $m' = 1$ permettra de manipuler convenablement des particules élastiques dont le diamètre n'excède pas un tiers de la longueur d'onde. Pour des sphères plus grandes, les mécanismes de rétrodiffusion dominent et la sphère est expulsée axialement. Forts de ces résultats théoriques, le prochain chapitre réuni l'ensemble des développements expérimentaux pour vérifier l'existence de la pince acoustique.

Chapitre V

La pince acoustique : démonstration expérimentale

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons appliqué le modèle théorique développé au chapitre II au calcul de la pression de radiation exercée sur une sphère dans des cas concrets de manipulation en acoustique. En particulier, nous avons identifié les mécanismes responsables d'une forte force de répulsion axiale lorsqu'il s'agit de faisceaux axisymétriques. Par ailleurs, nous avons prévu qu'un vortex acoustique focalisé pourrait permettre de rétablir l'effet de pince acoustique et il faut maintenant trouver une méthodologie expérimentale efficace pour générer ces faisceaux particuliers. Dans ce chapitre, nous allons procéder à la démonstration expérimentale de la manipulation d'objets élastiques avec un vortex acoustique. Nous présentons dans une première section le dispositif expérimental et la technique retenue pour la synthèse de vortex acoustiques. Les forces nécessaires pour créer une pince requièrent une forte focalisation du faisceau émis. L'objectif de la deuxième section est alors de démontrer que des vortex peuvent être fortement focalisés avec fidélité utilisant la technique de synthèse. Enfin, nous exposons les différentes étapes qui ont mené à la vérification expérimentale de la pince.

V.1 Synthèse expérimentale de vortex acoustiques

V.1.1 Avant propos

Les premières réalisations expérimentales d'un vortex en optique remontent aux années 1990. Bazhenov *et al* ont utilisé des hologrammes pour imposer la dislocation de phase à un mode Gausssien de leur cavité laser [159, 160]. D'autres techniques comme les masques de phase ou l'utilisation de cristaux liquides comme modulateurs spatiaux de la lumière ("Spatial Light Modulator") ont donné une très grande flexibilité à la synthèse de vortex en optique [161, 162, 61]. En acoustique, l'étude pionnière de Hefner et Marston [116] a démontré pour la première fois en acoustique la production de fronts d'ondes hélicoïdaux de charge topologique $m' = 1$. Ils ont utilisé deux dispositifs distincts ; un premier où un émetteur plan est scié et mécaniquement déformé pour donner une "rampe de phase" adéquate à l'émission. Le deuxième dispositif a permis de montrer qu'il suffisait de quatre sources indépendantes pilotées en phase pour générer le vortex le plus simple.

Le chapitre IV suggère qu'un vortex acoustique peut être obtenu grâce à un transducteur acoustique qui aurait une surface active vibrant de manière non-uniforme (IV.3). La singularité de phase est imposée aux fronts d'onde dès la vibration de la surface de l'émetteur. Une première solution est alors d'utiliser un réseau d'émetteurs ultrasonores dont la position de chacun est connue dans le plan d'émission. Ainsi pour chaque voie, on peut calculer le retard de phase à lui appliquer. C'est le choix récemment adopté dans la littérature [90, 91, 93] mais semble néanmoins peu robuste et flexible. Pour obtenir un contrôle optimal de la synthèse du champ acoustique, la méthode retenue est celle du filtre inverse spatio-temporel, une technique fréquemment employée en imagerie médicale. Elle a été introduite par Marchiano et Thomas pour synthétiser des vortex de charge élevée et les caractériser en régime non linéaire [117, 118, 119, 163]. Ici nous allons la réutiliser pour réaliser des vortex ultrasonores fortement focalisés.

V.1.2 Dispositif expérimental

Les expériences de cette thèse ont été réalisées dans une cuve en PVC (de dimensions 1305x805x600 mm) remplie d'eau du robinet. Un schéma du dispositif est montré à la figure 43. Une température de 22° C est contrôlée et la vitesse de propagation correspondante est $c \simeq 1490$ m/s. L'émission acoustique est assurée par un réseau de 127 éléments piézoélectriques indépendants de fréquence centrale $f = 1,15$ MHz. Les éléments peuvent être contrôlés à la fois en amplitude et en phase par une électronique propre à chaque voie. Ils sont moulés dans une calotte sphérique pour obtenir une pré-focalisation. L'émetteur peut être assimilé à un traducteur concave d'ouverture $a_0 = 5,5$ cm et de rayon de courbure naturelle $r_0 \sim 45$ cm. Ce degré de focalisation est insuffisant pour la démonstration visée. Nous avons donc décidé d'utiliser des lentilles acoustiques usinées à partir de blocs de PMMA pour augmenter l'angle d'ouverture à l'émission. Nous utilisons un hydrophone pour mesurer le champ acoustique. Il est composé d'un capteur à aiguille et d'un pré-amplificateur (Precision Acoustics LTD, U.K.). A l'extrémité de l'aiguille, un film très fin de PVDF (polyfluorure de vinylidène) aux propriétés piézoélectriques est métallisé. Elle est ainsi rendue sensible au champ acoustique incident tout en le perturbant le moins possible. Le faible diamètre de la partie sensible (disque de 75μm de diamètre) permet d'avoir une bonne résolution spatiale du champ acoustique en évitant autant que possible un moyennage spatial. Le fabricant garantie une erreur maximale de 13% sur la valeur de la sensibilité. Afin de mesurer le champ dans une région donnée de la cuve, l'hydrophone peut être déplacé avec précision grâce à un système motorisé à 3 axes. Les moteurs (Micro-Contrôle/Newport) sont alimentés et pilotés par un contrôleur (Newport, MM-4006) avec une précision maximale de 5μm. Le signal capté par l'hydrophone est conditionné puis acquis par un oscilloscope numérique (Tektronix, TDS 5104, U.S.A). L'élément central du dispositif est la baie électronique d'amplification (Lecoeur Electronique, France). Elle est constituée parallèlement du bloc P.C. et d'une baie d'amplification de 128 voies indépendantes. Ainsi, on peut assigner à chaque voie du réseau acoustique, une forme d'onde d'arbitraire et une amplitude indépendante. La tension nominale de

sortie pour chaque voie est de 50 Vc à 50 Ω soit une puissance moyenne de 25 W. En parallèle, le bus au protocole GPIB de la baie permet de synchroniser et piloter à la fois l'émission, le contrôleur des moteurs et l'acquisition avec l'oscilloscope. Cette gestion logicielle est programmée via des librairies dynamiques (dll) compilées et utilisées dans un environnement Matlab.

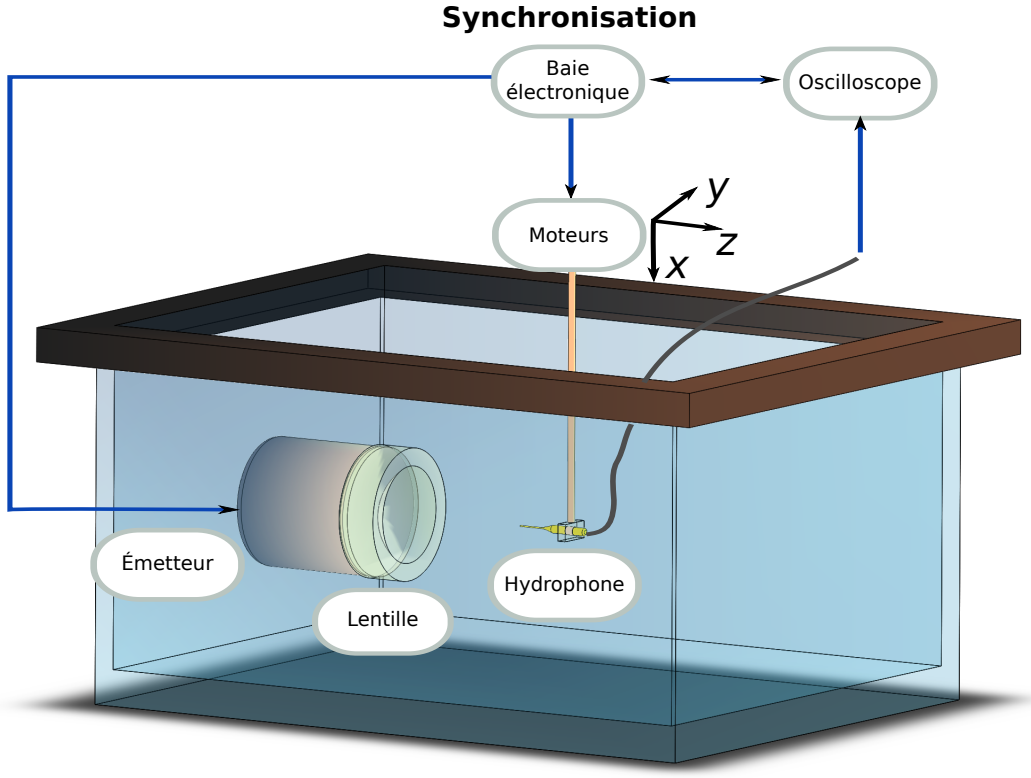


FIGURE 43 – **Schéma du dispositif expérimental**. Un émetteur acoustique (multi-éléments), génère un champ acoustique qui se propage dans la cuve. L'hydrophone est monté sur un système de positionnement motorisé à trois axes et peut mesurer le champ à une position donnée de la cuve. La baie électronique synchronise les tirs, pilote les moteurs et assure l'acquisition des données via l'oscilloscope.

Pour l'application aux expériences de pression de radiation, il a été obligatoire d'évaluer la tenue en puissance du dispositif. En effet, la baie électronique ainsi que le réseau d'émetteurs piézoélectriques n'étaient, à priori, pas conçus pour une excitation à haute puissance sur de longues durées. Une première étape a été de simuler numériquement l'élévation de température d'un transducteur unique que nous possédions [1]. Le comportement prédit a été vérifié expérimentalement et les résultats transposés au réseau acoustique

1. La simulation numérique est basée sur la méthode des éléments finis. Une collaboration avec Danielle Fournier a permis d'estimer les paramètres thermiques des matériaux composant un transducteur piézoélectrique de type composite par une méthode photothermique pompe sonde [164].

entier pour en dégager des conditions limites d'utilisation. En ce qui concerne la baie d'amplification, il a été observé qu'en régime continu et à partir d'une certaine puissance, les signaux électriques à sa sortie commençaient à fluctuer. Nous avons conclu qu'une puissance moyenne maximale de $2,5$ W par voie devait être respectée pour éviter ce problème. Dans ce régime, aucun risque d'endommagement n'est prévisible pour le réseau de transducteurs.

En ce qui concerne la visualisation des expériences, nous avons utilisé dans la majorité des cas une caméra rapide (Neo sCMOS, Andor LTD, U.K.). Un système d'objectifs permet d'atteindre un grossissement convenable de la zone d'intérêt.

V.1.3 Le filtre inverse spatio-temporel pour la synthèse de vortex

La technique repose sur la linéarité et l'invariance par translation dans le temps du système physique séparant l'excitation électrique des émetteurs et la réception acoustique quelque part dans la cuve. Le couplage électro-mécanique des transducteurs, l'équation de propagation dans le milieu ainsi que la transduction de l'hydrophone remplissent cette condition. L'opération de synthèse se décline en deux étapes principales. Une première phase d'acquisition expérimentale de l'opérateur de propagation qui caractérise complètement le milieu et la géométrie de l'expérience, puis une étape de traitement numérique de cet opérateur pour déterminer les signaux d'émission optimaux pour obtenir un champ acoustique cible choisi.

Avant d'acquérir l'opérateur de propagation, on fixe la géométrie de l'expérience. On considère ensuite l'ensemble $M = 127$ voies d'émission et on définit N points de réception (ou de contrôle) où on viendra successivement positionner l'hydrophone (Figure 44). Ces points sont souvent définis sur un plan de contrôle. Le système physique est alors caractérisé par un système de N équations :

$$f_j(t) = \sum_{i=1}^{M} h_{ji}(t) * e_i(t) \tag{182}$$

$f_j(t)$ est l'ensemble des signaux reçus au point j du plan de contrôle et émis par les voies i. Le signal $f_j(t)$ est le résultat de l'interaction des signaux émis $e_i(t)$ avec le milieu de propagation et modélisé par le produit de convolution $*$ avec la réponse impulsionnelle $h_{ji}(t)$ du couple émetteur récepteur (i, j). La réponse impulsionnelle $h_{ji}(t)$ est obtenue grâce à une impulsion dont la fréquence centrale est choisie en fonction de la bande passante des transducteurs piézoélectriques (ici on est centré autour de 1MHz) et émise par la voie i (Fig. 45a). La réponse est mesurée par l'hydrophone en j (Fig. 45b). Une analyse de la trace temporelle du signal reçu permet de voir la résonance du transducteur. Il résonne après l'excitation électrique d'un seul cycle. Plus tard dans le signal, on voit apparaitre un premier écho causé par les interfaces multiples que traverse l'onde acoustique dû à la présence de la lentille.

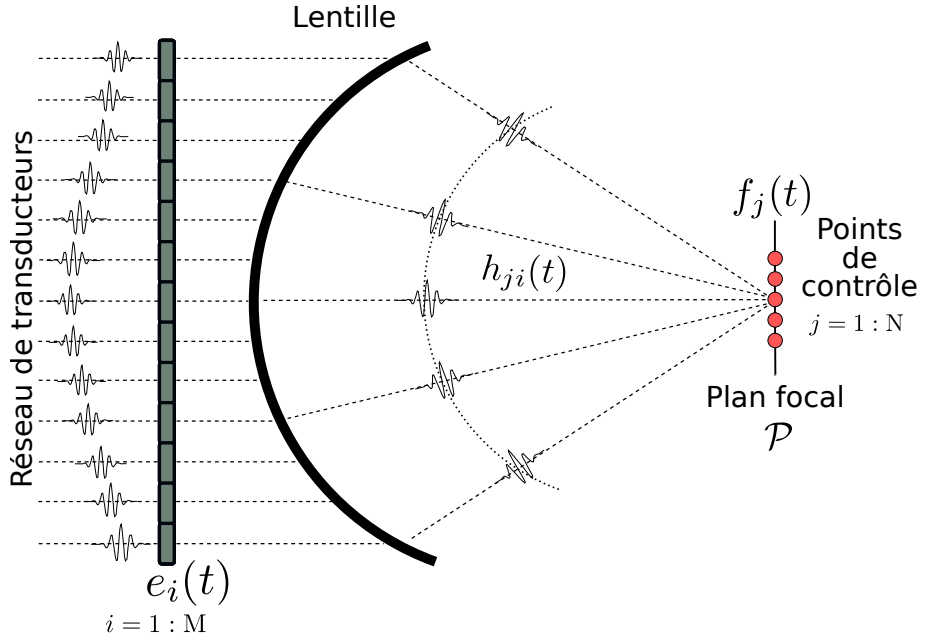
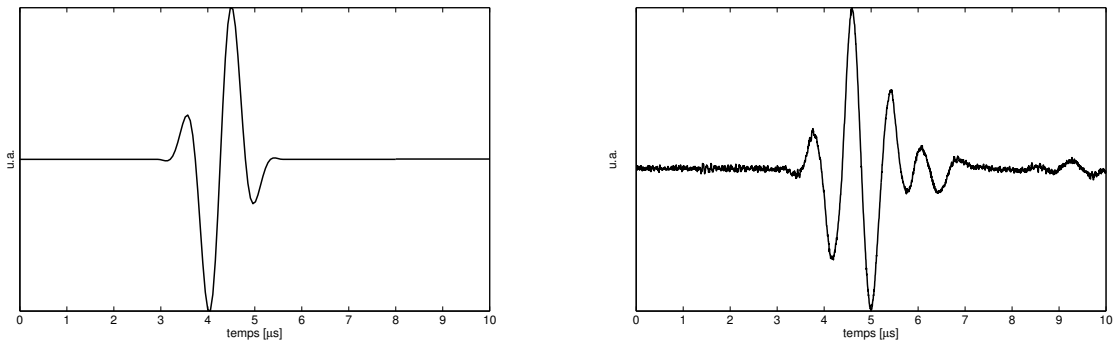


FIGURE 44 – **Principe de la méthode du filtre inverse spatio-temporel**. Pour un ensemble M d'émetteurs, un plan de contrôle $\mathcal{P}$ de N points est balayé par l'hydrophone. Toute l'information liée au système physique est contenue dans la matrice des réponses impulsionnelles $h_{ji}(t)$.



(a) Impulsion d'excitation $e_i(t)$

(b) Réponse impulsionnelle $h_{ji}(t)$

FIGURE 45 – **Mesure de la réponse impulsionnelle du système.** En (a), l'impulsion électrique à l'entrée du système. En (b), réponse impulsionnelle.

Dans l'espace de Fourier, nous avons sous forme matricielle :

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) \tag{183}$$

H est alors la matrice de transfert du système de taille $N \times M$. $E(\omega)$ et $F(\omega)$ sont les spectres des signaux émis et reçus respectivement. On peut alors écrire l'opération d'inversion suivante :

$$E(\omega) = \mathbf{H}^{-1}(\omega)F(\omega) \tag{184}$$

Le calcul de la matrice $\mathbf{H}^{-1}(\omega)$ se fait en prenant quelques précautions. Contrairement à ce qui est suggéré par l'Eq. (182), la mesure de l'impulsion $h_{ji}(t)$ s'accompagne toujours d'un bruit de mesure. On maximise alors le ratio signal-sur-bruit en moyennant plusieurs réalisations du bruit pour chaque couple (i, j). Malgré cette précaution, la matrice $\mathbf{H}(\omega)$ demeure en général mal-conditionnée et une étape de régularisation est nécessaire. Elle est d'abord décomposée en ses valeurs singulières (méthode *S.V.D.*) puis on élimine les valeurs inférieures à un seuil énergétique fixé par le rapport signal-sur-bruit. On évite ainsi d'amplifier le bruit de mesure résiduel pendant l'inversion. L'étape de synthèse consiste enfin à fixer le champ "cible" dit aussi le gabarit $F(\omega)$, pour calculer les signaux à émettre par le réseau de transducteurs. On obtient donc *in fine* par une transformée de Fourier inverse, les signaux $e_i(t)$ à émettre pour s'approcher de manière optimale du gabarit cible $f_j(t)$. En effet, on corrige les différentes sources d'aberrations liées à l'émission (sensibilité inhomogène de l'ensemble des émetteurs et résonance des transducteurs) et au milieu de propagation (aberrations géométriques, échos et atténuation dans une lentille acoustique) [2].

Pour la synthèse et l'étude des vortex focalisés, il faut premièrement faire le choix de la lentille acoustique utilisée. Dans l'annexe H, nous avons donné quelques détails sur la conception et la fabrication de ces lentilles. De plus, au chapitre IV, il a été démontré que l'angle d'ouverture α_0 du transducteur concave influençait très considérablement la pression de radiation du faisceau (voir Fig. 25 pour la définition de cet angle). C'est pourquoi une lentille optimisée biconcave a été conçue et usinée à partir d'un bloc de PMMA. Concernant le choix du plan de contrôle pour faire l'acquisition de la matrice des réponses impulsionnelles, la définition d'un disque transverse à la direction de propagation s'est avéré être la géométrie optimale. Un maillage rectangulaire régulier donne de moins bons résultats pour synthétiser des faisceau à géométrie "cylindrique". En effet les bords de ce rectangle imposaient des contraintes spatiales inutiles au filtrage inverse. Le disque retenu est de rayon $3,5$ mm. Chaque point entrant dans ce disque est réparti sur un maillage régulier de pas $0,1$ mm dans les directions x et y. Au total, le disque de contrôle est composé de 3853 points d'écoute. La distance que nous fixons entre les émetteurs

2. Il est important de noter avec précision la position de la lentille qui est emboitée sur le réseau. En effet, à chaque position correspond un arrangement particulier des aberrations introduites.

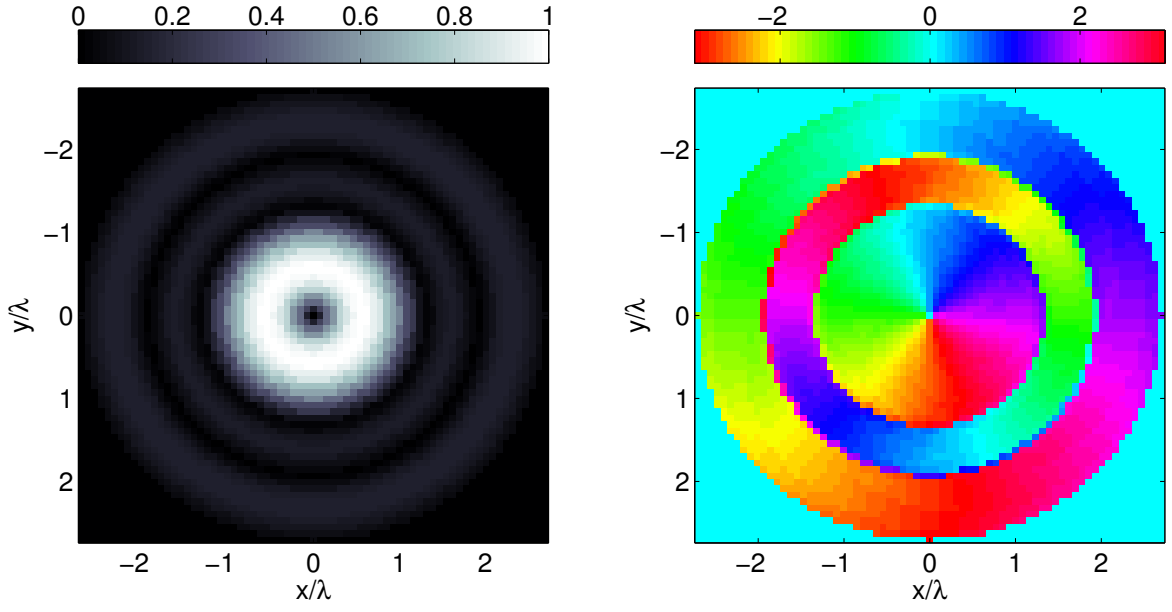
du réseau et le plan de contrôle est estimée par un premier tir test. Il consiste à tirer en phase toutes les voies d'émission du réseau et de vérifier que l'hydrophone reçoit le signal de chaque voie avec approximativement le même temps de vol. Pour la lentille choisie, ce temps de vol est de $\tau \sim 55\mu$s. La distance entre le plan d'émission et le plan de contrôle est donc d'environ 82 mm. Une fois cette distance focale naturelle de la lentille déterminée, nous pouvons acquérir la matrice $h_{ji}(t)$ pour $M = 127$ et $N = 3853$. Pour augmenter le ratio signal-sur-bruit, 20 moyennes sont effectuées pour chaque point d'écoute. Typiquement pour les $N \times M \times 20 = 9\ 247\ 200$ formes temporelles à tirer et écouter, l'expérience demande près de 20 heures de mesure. Une fois cette longue étape terminée, on peut à loisir utiliser l'opérateur inverse $\mathbf{H}^{-1}(\omega)$ pour des expériences variées de synthèse de champ.

V.1.4 Propagation de vortex acoustiques focalisés

Comme gabarit imposé $F(\omega)$, nous utilisons la solution analytique d'un vortex focalisé établie au chapitre IV. Il est calculé sur les points de contrôle correspondants de l'expérience. En outre, pour appliquer la formule (Eq. (170)), il faut fixer les deux paramètres a_0 et r_0, respectivement l'ouverture et le rayon de courbure du transducteur concave. Or, l'émission est assurée expérimentalement par le réseau auquel nous avons adjoint une lentille bi-concave. Il a été déterminé empiriquement que les paramètres de "transducteur concave équivalent" à notre système étaient convenablement donnés par : $r_0 = 6$ cm et $a_0 = 4,05$ cm ce qui correspond à un angle d'ouverture $\alpha_0 \simeq 42,5°$. Les champs synthétisés sont monochromatiques de fréquence $f = 1,15$ MHz. Les signaux à émettre sont calculés et émis à une amplitude suffisamment faible pour rester dans le régime de propagation linéaire.

Synthèse d'un vortex de charge $m' = 1$

À la figure 46, nous avons tracé le module et la phase du gabarit $F(\omega)$ que nous imposons sur le disque de contrôle. Nous avons fixé la charge du vortex à $m' = 1$ et regardons son évolution sur 15 périodes acoustiques ($T = 1/f$). En appliquant l'opérateur de propagation inverse, nous obtenons le vecteur d'émission $E(\omega)$ et par une transformée de Fourier inverse de ses composantes, les signaux $e_i(t)$ à émettre par chaque transducteur sont déterminés (Fig. 47). Ainsi pour chaque voie, le filtre inverse optimise à la fois l'amplitude, la phase et la forme d'onde à émettre. Sur les traces temporelles, on voit que toutes les voies sont déphasées entre-elles. Ceci était attendu puisque la variation hélicoïdale de la phase doit se mettre en place dès l'émission. On remarque aussi que l'amplitude entre les voies n'est pas homogène alors qu'on aurait pu le supposer. Dans le modèle, l'amplitude de la vitesse de vibration de la surface varie en phase mais pas en amplitude absolue. Cette modulation provient de la correction de l'inhomogénéité en sensibilité des transducteurs mais aussi de l'atténuation acoustique et les aberrations géométriques introduites par la lentille. Enfin, pour un autre jeu de paramètres r_0 et α_0 fixé pour le gabarit, on pourra forcer plus ou moins la focalisation.



(a) (b)

FIGURE 46 – **Gabarit cible, vortex acoustique de charge $m' = 1$.** Module (a) et phase (b) du gabarit $F(\omega)$ imposés sur le disque de contrôle de rayon 3,5 mm.

Les signaux obtenus sont appliqués au réseau. Le champ acoustique émis est mesuré sur un nouveau disque de contrôle (de rayon 3,5 mm avec une résolution de 0,1 mm), supposé être identique à celui défini pour l'acquisition des réponses impulsionnelles [3]. Sur la figure 48, nous montrons en (a) la carte spatiale du champ où pour chaque point de mesure est représenté le module du spectre calculé à partir du signal temporel acquis par l'hydrophone. L'amplitude du spectre est normalisée par la valeur absolue de la pression mesurée en MPa. La pression maximale sur l'anneau est ici de l'ordre de $0,55$ MPa. En (b), la phase est représentée pour les mêmes points de mesure. À première vue, la correspondance entre le gabarit imposé (Fig 46) et la mesure expérimentale de la pression dans un plan transverse à l'axe de propagation est très bon. Concernant l'amplitude du spectre, l'anneau principal est homogène et bien défini tout autant que les lobes (ou anneaux) secondaires. La phase hélicoïdale est également fidèlement reproduite. Un mauvais alignement entre le réseau et le plan de contrôle aurait été facilement visible sur la phase. Ce n'est pas le cas ici, le faisceau a été convenablement mesuré dans un plan transverse à son axe de propagation. On peut aussi distinguer les "lignes équiphase" (pour chaque valeur de la phase on peut suivre une ligne jusqu'à la sortie du cercle principal). Ceci est un signe que nous étions bien placés à la distance focale de la lentille. Si cela n'avait pas été les cas, nous aurions observé des "spirales équiphase" qui sont la signature de la

3. Chaque nouvelle expérience demande de réaligner le réseau avec les axes des moteurs. Il n'est pas garanti de garder le même plan de contrôle pendant les différentes journées demandées pour l'expérience.

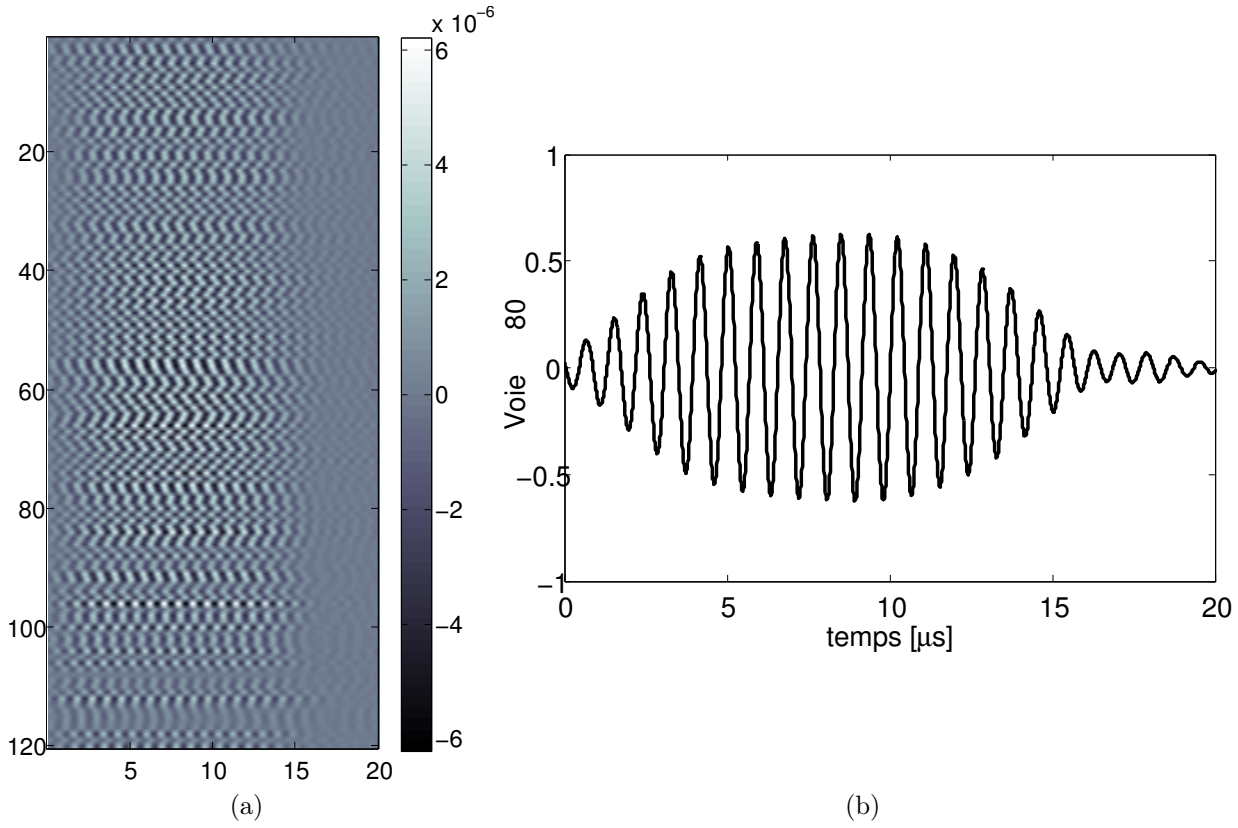


FIGURE 47 – **Signaux d'émission $e_i(t)$ calculés par filtre inverse.** En (a), les formes temporelles calculées pour les 120 voies d'émission du réseau. On voit que les voies ont chacune une phase et une amplitude indépendante. En (b), forme temporelle de la voie 80.

convergence ou de la divergence des fronts d'onde de part et d'autre du foyer.

Pour aller plus loin dans la comparaison entre la théorie et la réalisation expérimentale, nous avons tracé sur la figure 49 en (a), une coupe radiale du module du champ de pression ($y = 0$). L'accord quantitatif est très bon pour l'anneau principal du vortex mais aussi les lobes secondaires qui sont bien reproduits. Un diamètre de $1,1\lambda = 1,44$ mm est mesuré pour l'anneau principal du vortex et témoigne de la forte focalisation de la lentille. Il est important de noter que les gradients de la pression sont aussi strictement respectés. Ceci renforce la possibilité de produire une pression de radiation radiale en adéquation avec le modèle. En (b) nous avons examiné l'homogénéité de l'anneau du vortex. En parcourant un cercle de rayon $0,72$ mm autour du cœur, nous traçons à gauche l'amplitude normalisée du champ de pression. On voit qu'elle fluctue légèrement sous la valeur nominale de 1. Sur la figure de droite, la phase est comme attendu linéaire avec la variation azimutale φ. Pour ce vortex de charge $m' = 1$, il n'y a qu'un saut de 0 à 2π de la phase sur un tour. Nous avons aussi procédé à une mesure du faisceau dans la direction de propagation. Un plan contenant l'axe de propagation de dimension $[-7 : 0,25 : 7] \times [-2,5 : 0,075 : 2,5]$ a été sondé. Sur la figure 50, nous montrons de nouveau le module du spectre des signaux reçus

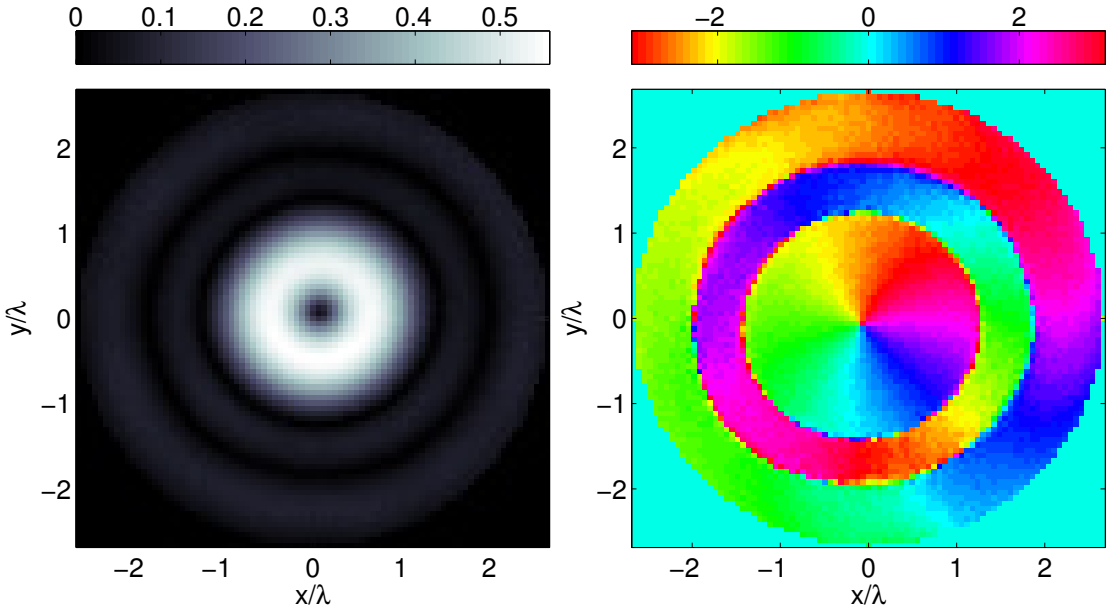
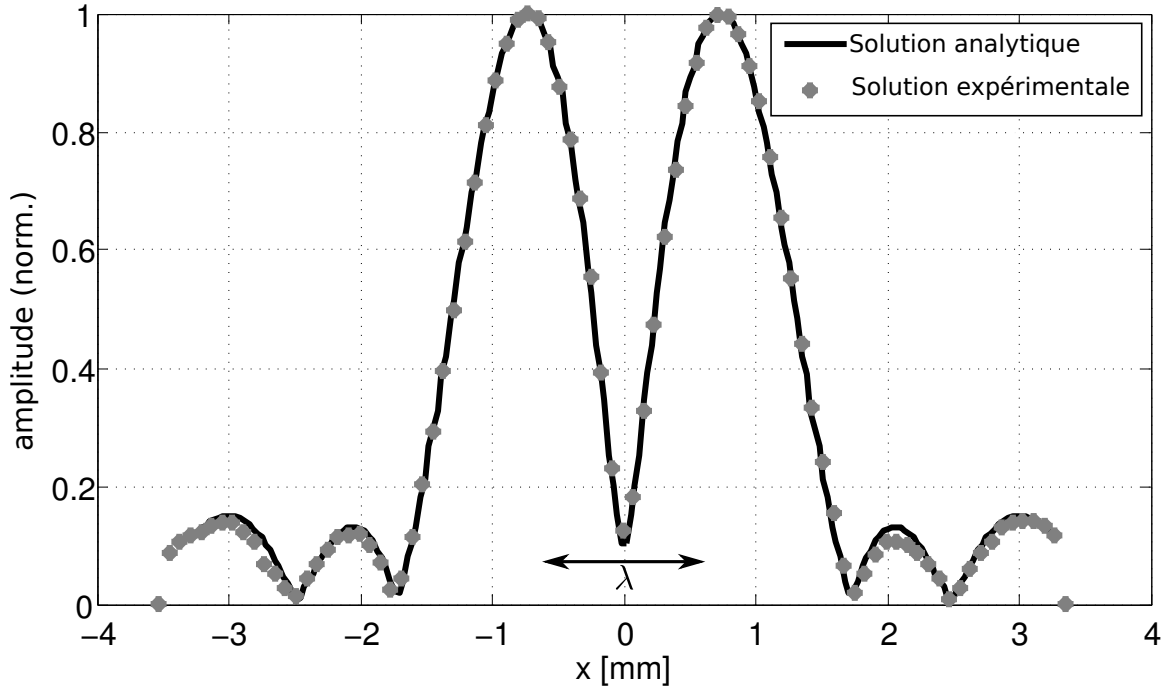


FIGURE 48 – **Champ expérimental d'un vortex de charge $m' = 1$.** Module (a) normalisé avec la valeur absolue de la pression [MPa] et la phase [rad.] en (b) du vortex synthétisé mesuré sur le disque de contrôle de rayon 3,5 mm et de pas de résolution 0,1 mm.

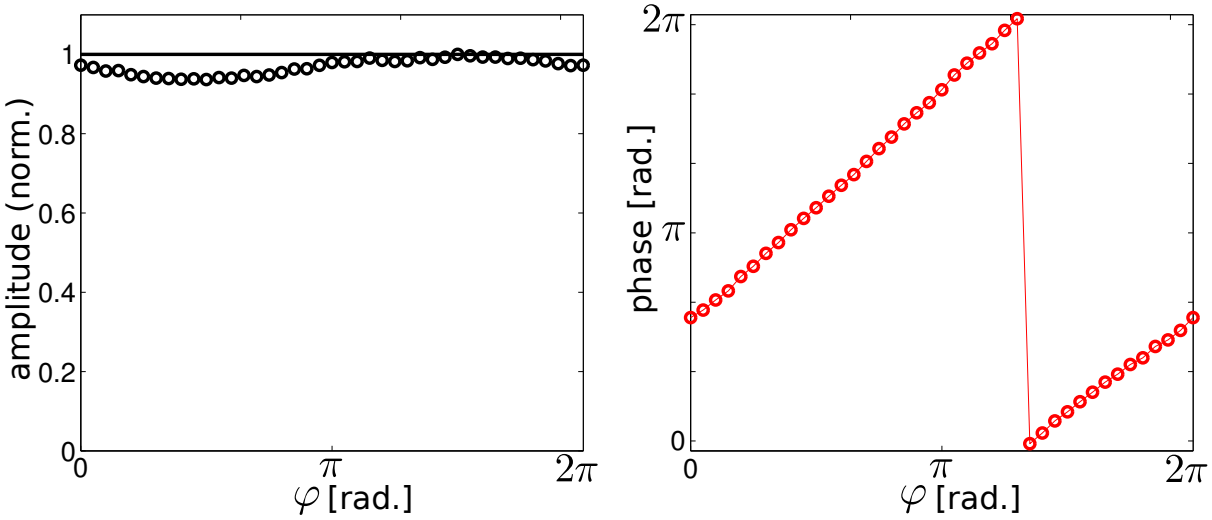
à chaque point de mesure. Alors que toutes les contraintes physiques ont été imposées au filtre inverse sur un plan orthogonal à l'axe de propagation, on voit que la solution expérimentale produite est aussi en conformité sur le degré de liberté laissé libre : l'axe de propagation. Ceci indique que le gabarit cible demandé est proche d'une solution physique, solution de l'équation des ondes et réalisable avec la géométrie fixée pour l'expérience. La tâche focale "hélicoïdale" s'étend approximativement sur $\sim 5\lambda = 6,5$ mm dans la direction de propagation.

Synthèse de vortex de charge élevée

Le nombre élevé de voies d'émission combiné à la flexibilité de la méthode de synthèse offrent la possibilité d'explorer la génération de vortex de charge topologique élevée. Nous avons repris l'ensemble des étapes qui viennent d'être décrites pour générer expérimentalement des faisceaux de charge topologique $m' = 0$ à 5. Le module du spectre des faisceaux mesurés, avec leur phase, sont représentés sur la figure 51. Chaque grille est un carré de 2,5 mm de côté mais expérimentalement seulement un disque de 2,5 mm de rayon a été sondé. Une comparaison des modules expérimentaux obtenus (colonne du milieu) avec celui attendu analytiquement (colonne de gauche) montre un très bon accord même lorsque une charge élevée telle que $m' = 5$ est considérée. Focaliser un vortex de charge élevée requiert une variation de la phase de la vibration de la surface émettrice de

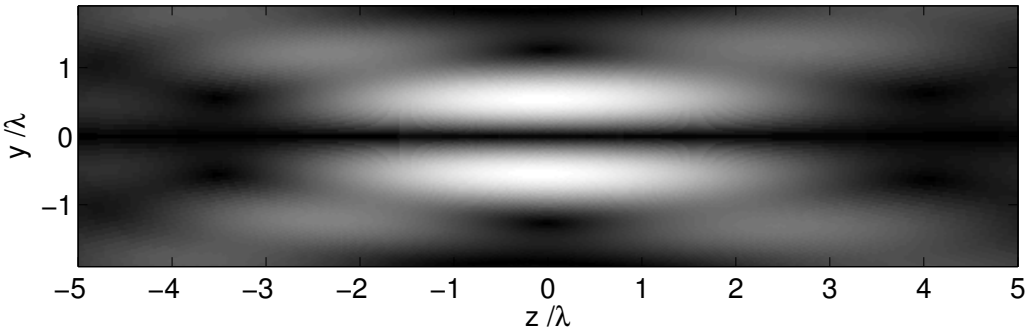


(a) Coupe radiale du vortex

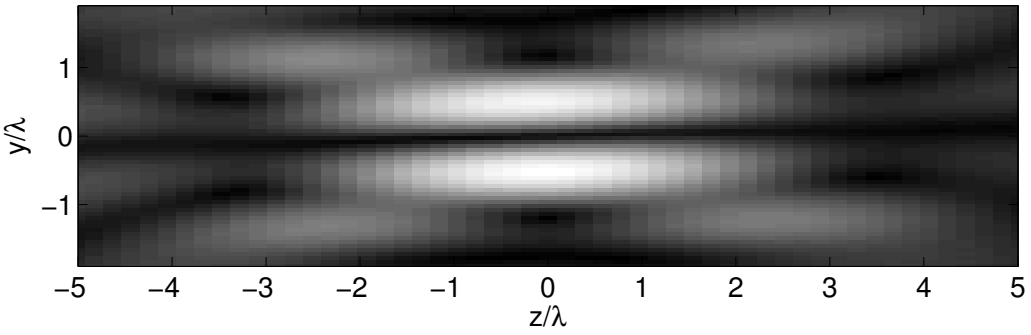


(b) Évolution de l'amplitude et de la phase sur l'anneau principal

FIGURE 49 – **Comparaison expérience/théorie.** En (a) le module normalisé du vortex réalisé expérimentalement est comparé à la solution analytique. Le diamètre de l'anneau du vortex vaut approximativement $1,2\lambda$. En (b), nous parcourrons azimutalement l'anneau du vortex et regardons l'homogénéité de l'amplitude et de la phase.



(a) Solution analytque



(b) Réalisation expérimentale

FIGURE 50 – **Faisceau dans la direction de propagation.**

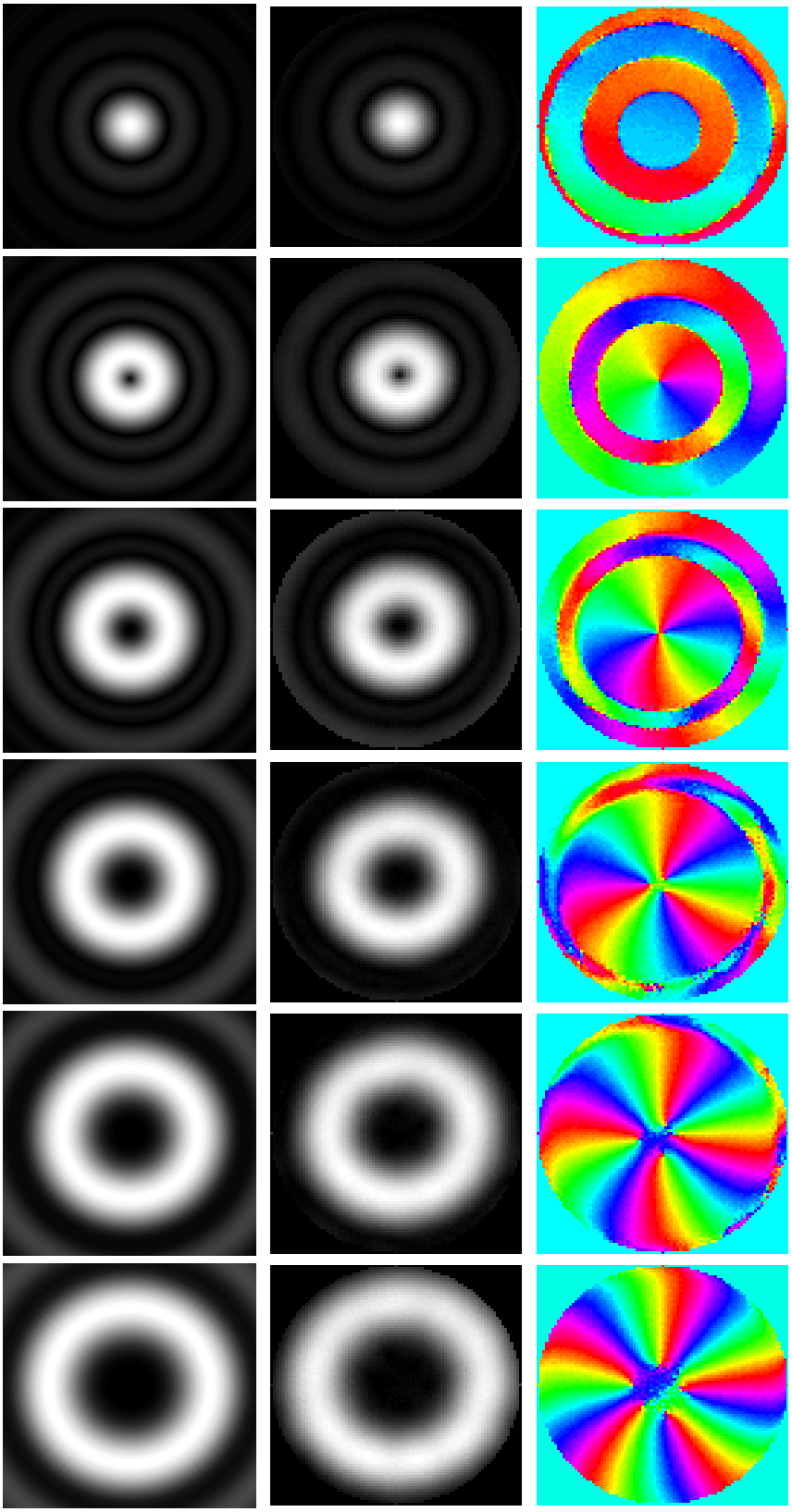


FIGURE 51 – **Synthèse de vortex de charge m'.** De haut en bas, $m' = 0$ à 5. De gauche à droite, module du vortex analytique, module et phase expérimentales. Le champ est mesuré sur un disque de rayon $3,5$ mm.

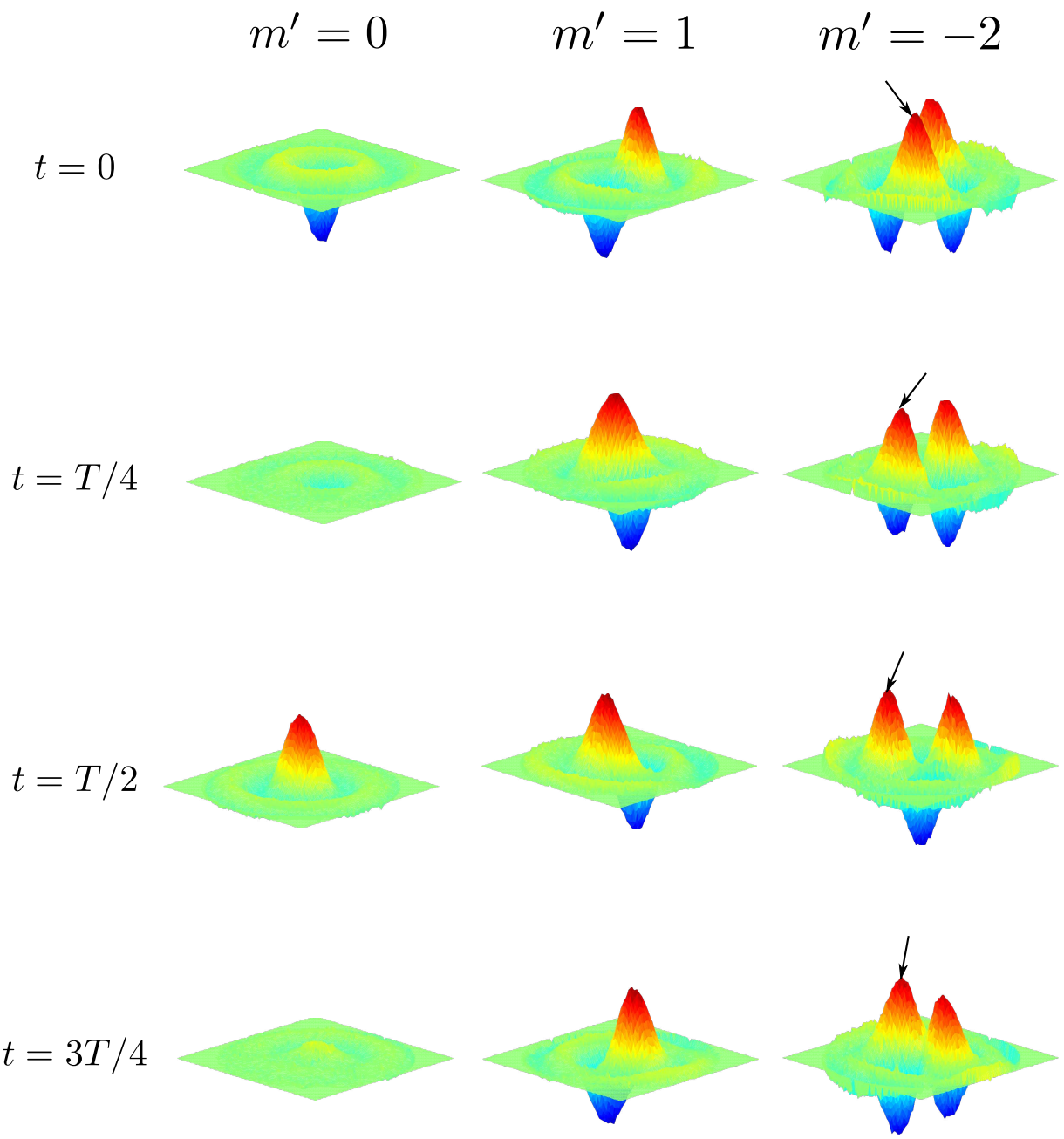


FIGURE 52 – **Évolution spatio-temporelle du champ de pression.** De gauche à droite, faisceaux de charge $m' = 0$, 1 et -2. La valeur instantanée du champ de pression mesurée dans le disque de contrôle est représentée aux instants $t = 0$, $T/4$, $T/2$ et $3T/4$.

plus en plus rapide. Néanmoins il semble que les 127 voies suffisent, même si des limites pourraient apparaître pour des charges encore plus élevées. Il est possible de remarquer en analysant la phase pour $m' = 3$, 4 et 5, qu'au cœur du vortex elle devient indéterminée. Même si on distingue clairement les lignes équiphase, elles ne sont pas jointes au centre. Ce phénomène est connu comme l'instabilité structurelle des vortex d'ordre élevé. Il a été montré qu'un vortex de charge m' est structurellement instable et dégénère en $|m'|$ vortex de charge $m'/|m'|$ pendant la propagation [118, 163, 165]. Grâce à la forte focalisation, le phénomène est moins marqué sur les distances de travail considérées.

Sur la figure 52, l'évolution spatio-temporelle du champ de pression instantané est tracée pour des faisceaux de charge topologique $m' = 0$, 1 et -2. Le premier cas est bien axisymétrique. L'évolution de ce mode de type "piston" est convenablement décrit par un cycle entier de détente, de surpression puis encore de détente en une période acoustique (T). La structure hélicoïdale est facilement visible pour le vortex de charge $m' = 1$. Dans le plan focal, les cycles de surpression et de détente ne sont pas figés dans l'espace. Bien au contraire, il existe deux pics de pression (de surpression et de détente) qui tournent autour de l'axe de propagation. Chaque pic effectue une révolution complète de 2π pendant une période acoustique. En ce qui concerne le faisceau de charge négative $m' = -2$, notons d'abord que le sens de rotation est effectivement inversé et que nous avons cette fois-ci deux pics de surpression et deux de dépression qui tournent deux fois plus lentement autour du centre (une flèche permet de suivre la rotation d'un des pics).

V.2 Estimation de la force exercée sur une sphère en polystyrène.

Toujours dans l'optique de procéder à la réalisation expérimentale de la pince acoustique, nous nous basons sur les résultats expérimentaux qui viennent d'être présentés pour quantifier théoriquement la force que nous allons pouvoir exercer. Dans la section IV.4.3, nous avons identifié qu'un vortex focalisé de charge topologique $m' = 1$ était optimal pour piéger en trois dimensions des particules dont le rayon n'excédait pas $a \sim 0,15\lambda$. Ce vortex a été expérimentalement obtenu et reproduit fidèlement le modèle théorique utilisé pour le décrire. Les paramètres d'émission appropriés pour l'obtenir expérimentalement sont : un rayon de courbure $r_0 = 6$ cm, et un angle d'ouverture $\alpha_0 = 39°$. Une donnée tout aussi importante est la pression instantanée maximale obtenue au foyer du vortex propagé. Dans les limites d'utilisation de la baie d'amplification (puissance maximale sur de longues durées d'émission), la pression maximale sur l'anneau du vortex à prévoir est de l'ordre de 0,8 MPa, soit une intensité acoustique $I = p_0^2/\rho_0 c \simeq 40$ W/cm^2.

Nous disposons de sphères en polystyrène de diamètre compris entre 190μm et 400μm et de densité $\rho_p = 1050$ kg/m^3. En utilisant les paramètres énumérés pour le transducteur concave équivalent et une pression instantanée de 0,8 MPa sur l'anneau du vortex, nous pouvons estimer théoriquement la force disponible pour les piéger. À l'examen de la figure 53, on retrouve des constatations faites à la section IV.4.3. À savoir que la force radiale

est la composante dominante et que son action combinée à la composante axiale établit une position d'équilibre stable pour la particule. Pour une sphère en polystyrène de rayon intermédiaire $a = 150\mu$m, sur les courbes on lit une valeur maximale de la force radiale $F_\rho \simeq 0,9\mu$N atteinte à une distance radiale $\rho \sim 0,25\lambda$ de la focale. La force azimutale est au moins un ordre de grandeur plus faible et sa manifestation dans le plan latéral sera vraisemblablement négligeable. La force axiale est elle aussi plus faible. Elle pousse fortement en $z \sim -1,8\lambda$ où $F_z \simeq 50$ nN. Sa capacité maximale d'attraction est atteinte en $z \sim 1,6\lambda$ et vaut $F_z \simeq -35$ nN. Rappelons que cette asymétrie de la force axiale est due à la force de diffusion (Eq. (133)) qui pousse la sphère dans la direction de propagation et qui se superpose à la force de gradient (voir la discussion à la section IV.4.3) qui tend, au contraire, à la piéger.

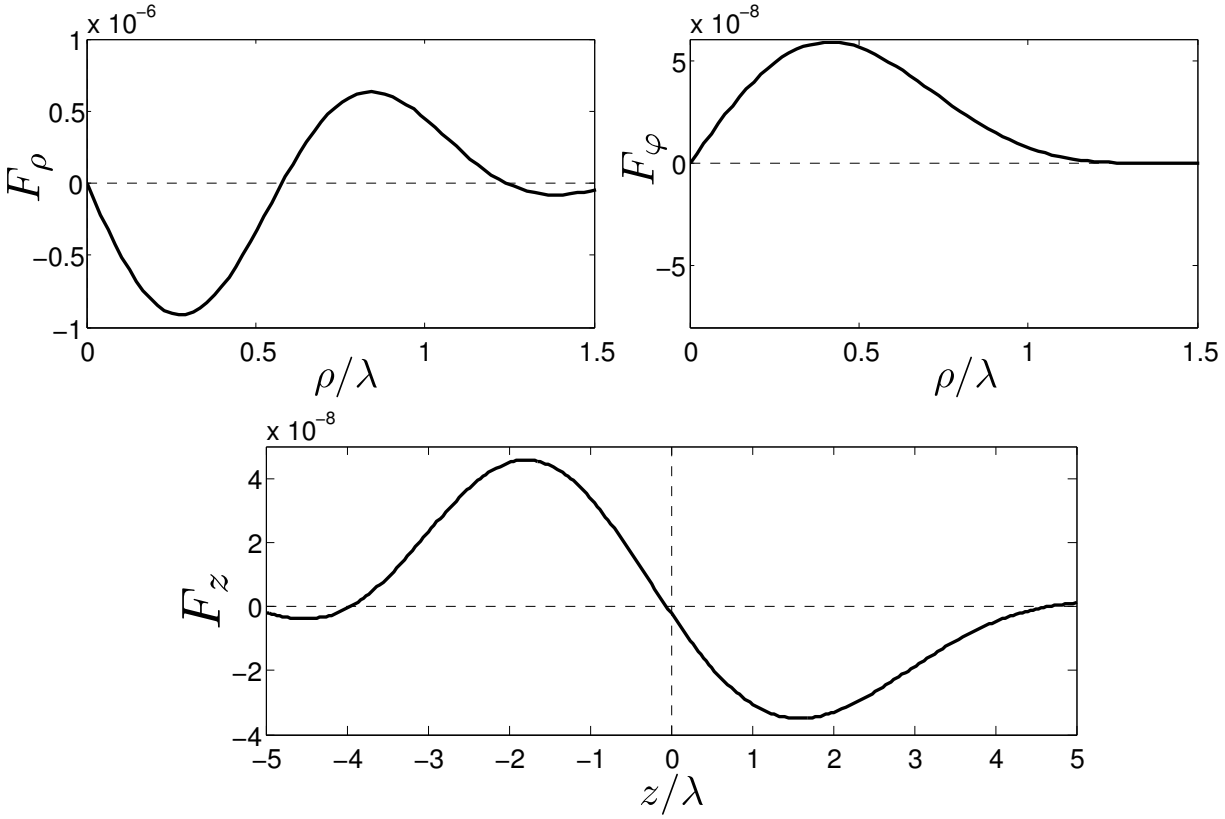


FIGURE 53 – **Force prévue pour l'expérience.** Force en Newtons attendue pour une pression absolue mesurée à $p_0 = 0.8$ MPa.

Le poids de la sphère de 150μm de rayon vaut environ 7 nN (poids effectif prenant en compte la poussée d'Archimède). Il apparait donc que la force disponible pour l'expérience suffira à manipuler les particules de ce gabarit que ce soit dans une configuration horizontale ou verticale d'émission. L'application numérique a été donnée pour $a = 050\mu$m. Cependant, la force de gradient varie comme le volume de la particule tout autant que le poids. En principe, la dominance de la force acoustique est assurée pour une large gamme de taille de sphères.

V.3 Piégeage et manipulation d'une sphère avec la pince acoustique

V.3.1 Avant propos

Tous les éléments sont maintenant réunis pour vérifier expérimentalement la manipulation d'une sphère en trois dimensions avec une pince acoustique. Dans cette partie, nous allons décrire les différentes expériences de manipulation que nous avons mené. Nous commençons dans la section suivante par observer l'action de la pince dans une configuration d'émission horizontale du faisceau. Suite aux observations dans cette configuration, il a été nécessaire de quantifier un effet que nous nous sommes permis de négliger jusqu'ici : l'apparition d'un écoulement induit par la dissipation visqueuse de l'onde acoustique. Un écoulement souvent rencontré sous le vocable de "vent acoustique" ou nommé par l'anglicisme "streaming acoustique". La section V.3.3 a pour objectif de quantifier expérimentalement ce nouvel effet non linéaire. Nous terminerons ce chapitre par une série d'expériences qui ont été menées dans une configuration verticale. La pince acoustique permet alors de piéger la sphère contre son propre poids et la force d'entrainement visqueuse induite par l'écoulement généré.

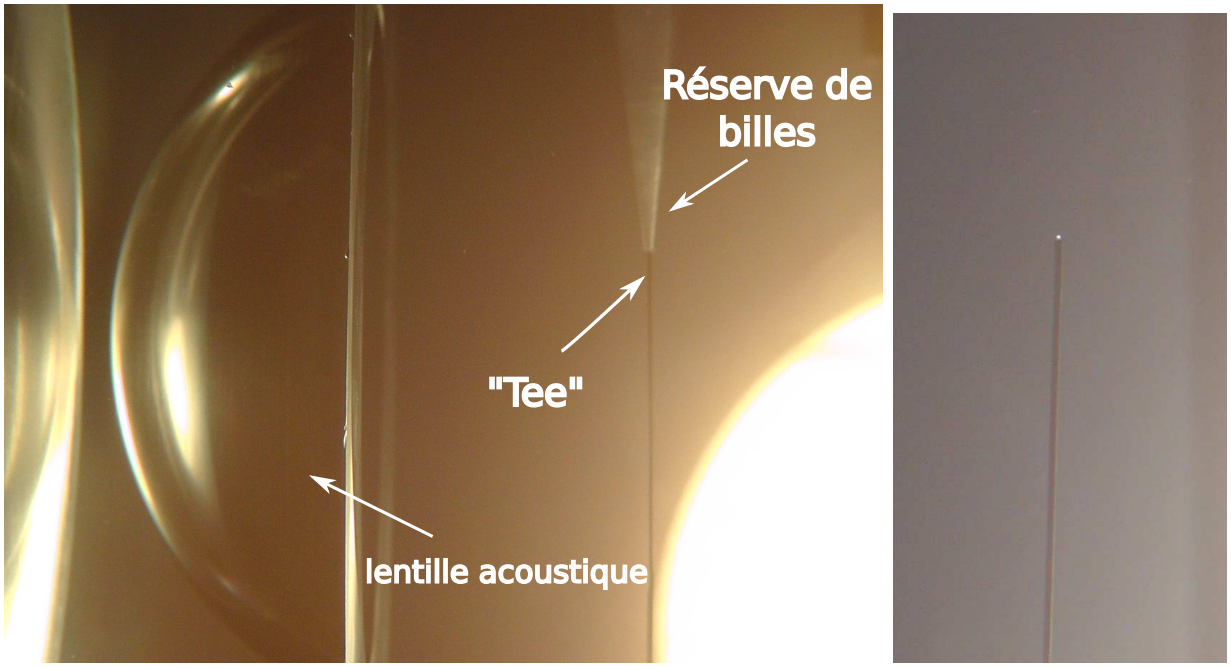
V.3.2 Pince dans une configuration horizontale

Description de la procédure

L'action de la pince a d'abord été démontrée dans une configuration horizontale (une configuration similaire à celle utilisée pour réaliser la synthèse de champs à la section V.1.2). Une première étape a été de trouver une méthode pour positionner la particule dans la zone de propagation du vortex. Pour se donner une idée des échelles, rappelons que le volume de la cuve avoisine un mètre cube et que le diamètre du vortex acoustique qui se propage a été mesuré à 1,5 mm. Bien entendu c'est dans l'anneau du vortex qu'il faut venir déposer la sphère. On comprend alors mieux la délicatesse de cette étape. Pour y parvenir, nous avons conçu un support en forme de "tee" (par analogie au support utilisé par les joueurs de golf). Il s'agit d'un tube creux en acier inox de diamètre intérieur de 300 μm ne laissant pas passer les particules [4]. La figure 54 montre une photo décrivant la procédure de positionnement de la bille. Le "tee" est monté sur le système de positionnement motorisé et est approché de l'orifice d'une pipette qui sert de réserve pour les billes. Il s'insère de manière ajustée dans la pipette. Une fois redescendu, il peut le plus souvent débloquer une bille de la réserve. Une fois que celle-ci se positionne convenablement sur le tee, il est descendu à vitesse très lente (pour éviter sa chute) vers la position de référence [5]. La figure (b) montre une photo de la bille posée sur le "tee" et prête à recevoir le tir.

4. Il a été initialement rempli de paraffine pour éviter d'y piéger des bulles d'air.

5. La position de référence est initialement repérée à la focale du faisceau grâce à la pointe de l'aiguille de l'hydrophone qui au préalable permet de mesurer le champ.



(a) (b)

FIGURE 54 – **Photo de la configuration horizontale.** En (a) est montré le dispositif pour déposer une bille sur le "tee" de support. Une pipette sert de réserve de billes. En (b), photo d'une bille déposée sur le "tee".

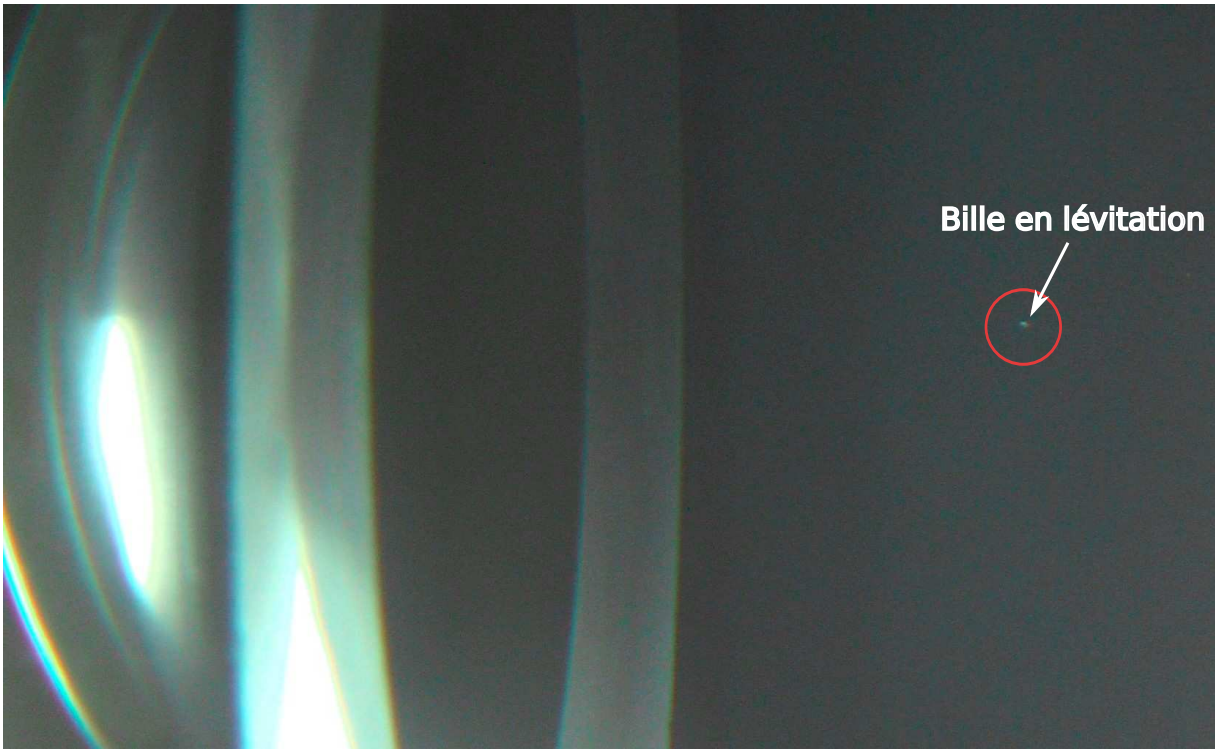


FIGURE 55 – **Bille de polystyrène en lévitation.**

Observation du piège tridimensionnel

La baie d'amplification est utilisée à sa puissance maximale. Aux incertitudes de mesure près, la pression instantanée sur l'anneau du vortex atteint alors $p_0 \sim 0,78 \pm 0,1$ MPa. Les signaux $e_i(t)$ à émettre avaient été calculés sur une courte durée dans la section précédente (typiquement 10 périodes acoustiques). Il convient alors d'extraire l'amplitude et la phase du signal pour chaque voie et de l'appliquer sur un tir monochromatique beaucoup plus long. Pour l'application à la pince, un tir dure 400μs [6] et est tiré en boucle autant de fois que nécessaire. Lorsque le vortex est émis en continu, on observe instantanément un déplacement de la bille. Elle est le plus souvent soulevée d'une très faible distance au-dessus du "tee". Suivant la position initiale de la bille on peut soit constater qu'elle est poussée vers la position d'équilibre soit qu'elle y est attirée. Une fois stable, on retire alors rapidement le "tee" pour éviter de perturber le champ et donc le piège. Sur la figure 55, une photo montre la bille piégée dans une position d'équilibre stable par la pression de radiation acoustique. Pendant toute la durée d'émission, elle reste en lévitation.

La phase de chute s'est révélée être instructive. En effet cela a été l'occasion d'observer l'action d'un effet que nous avions négligé ; celui de l'écoulement de volume induit par l'atténuation de l'onde dans le milieux. Lorsque l'émission est interrompue, la bille chute en prenant une trajectoire parabolique que nous montrons à la figure 56. Ceci est l'évidence qu'une force supplémentaire s'applique sur la sphère dans la direction de propagation

6. La mémoire maximale de la baie est de 8 ko par voie et les signaux sont échantillonnés à 20MHz.

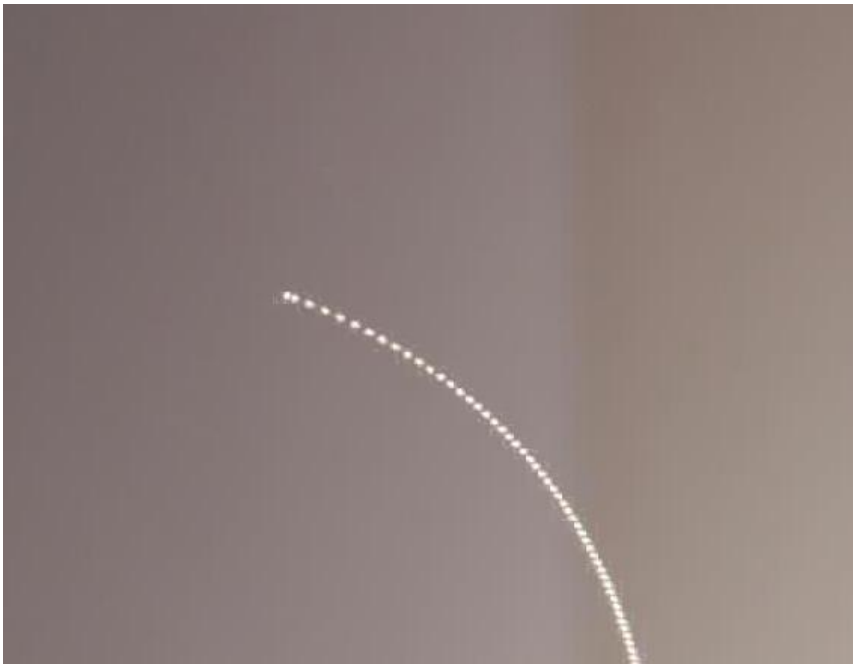


FIGURE 56 – **Phase de chute de la bille en "stop motion".** Observation de l'effet d'entrainement visqueux dû à l'écoulement établi pendant l'émission. Les différents prises de vue d'une vidéo sont compilées sur une seule photo ("stop motion").

pendant et après le tir. L'analyse de cette trajectoire serait une première méthode pour évaluer l'écoulement dans les premiers instants après l'arrêt de l'émission. Néanmoins c'est une autre méthode qui a été choisie.

Conclusion sur le piège horizontal

Cette première configuration a permis d'observer l'action de la pince acoustique à faisceau unique pour la première fois. Nous avons donc observé une situation pour laquelle la force de gradient qui piège la sphère domine toutes les autres forces qui tendent à pousser la sphère. À ce stade, nous avons aussi observé que l'écoulement généré dans le volume par dissipation visqueuse du faisceau est venu défier une force pouvant sembler déjà fragile. Une forte focalisation est requise pour définitivement supplanter la force d'entrainement visqueuse et observer un comportement stable de la pince. De plus, la procédure de positionnement de la sphère est lourde. Une configuration verticale et plus flexible est donc fortement désirée. Avant d'y parvenir, il a été nécessaire de quantifier l'écoulement acoustique.

V.3.3 Évaluation de l'écoulement acoustique

Dans cette section nous proposons une méthode pour mesurer expérimentalement la vitesse de l'écoulement acoustique.

Configuration pour la mesure

La configuration expérimentale est identique à celle utilisée dans la section précédente (émetteurs, lentille, etc...) à ceci près que le faisceau est émis à la verticale et en direction du fond de la cuve. Du reste, le même vortex est sélectionné et émis à la même amplitude que pour la pince en configuration horizontale. Pour visualiser l'écoulement généré, il nous fallait d'abord trouver un traceur adéquat. Même si diverses méthodes existent pour analyser un écoulement (comme l'ensemencement du milieu en microparticules, P.I.V. ou l'anémométrie à fil chaud), celle retenue ici est certes plus limitée mais a le mérite d'être très simple et facile à mettre en œuvre dans un environnement expérimental déjà suffisamment encombré. Nous pouvons résumer la méthode en deux étapes principales :

1. On commence par injecter de l'encre dans la zone d'intérêt. Ceci est fait grâce à une seringue connectée à son aiguille via un tuyau souple. Ainsi la pointe de l'aiguille est approchée de la focale du faisceau sans introduire la seringue dans la cuve.
2. Rapidement après l'injection, l'encre se diffuse. Une fois une tache homogène est obtenue, le vortex est émis. L'ensemble de la procédure est filmé avec la caméra rapide.

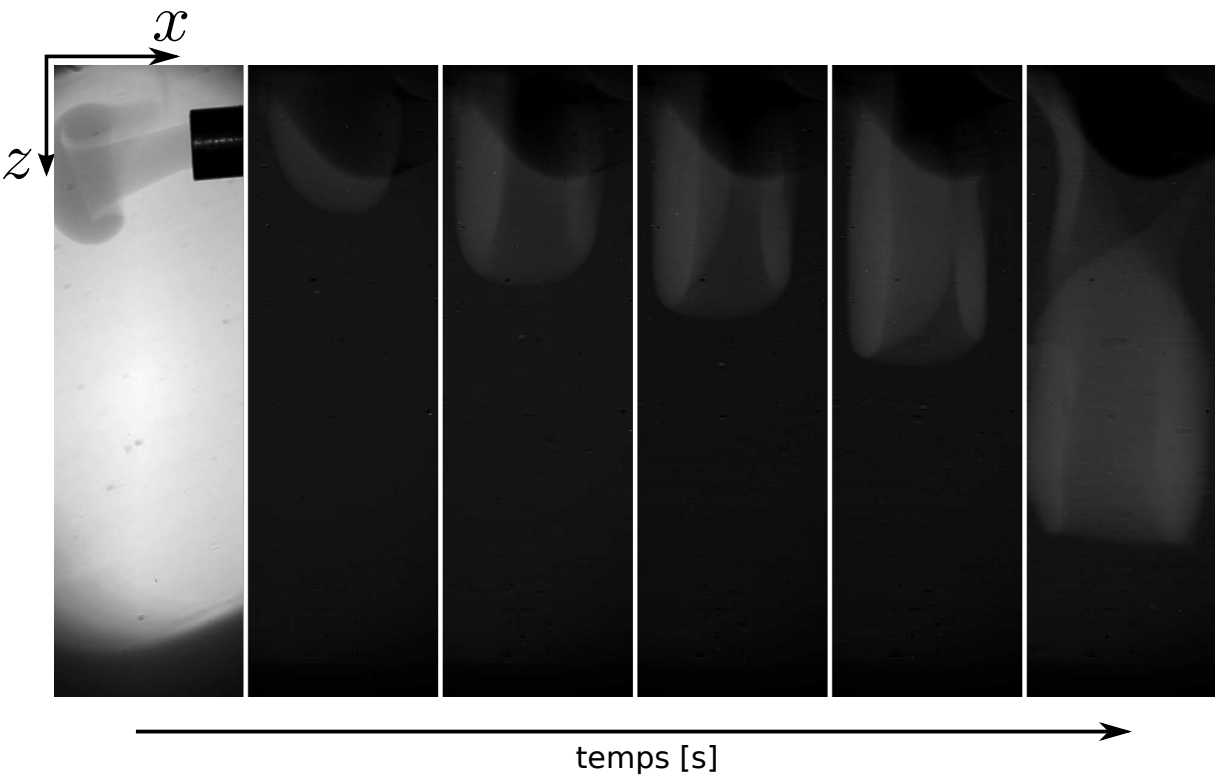


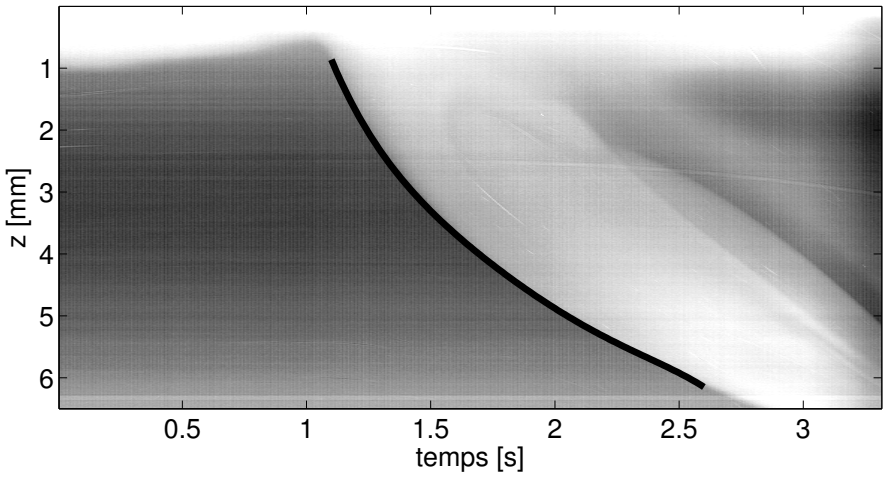
FIGURE 57 – **Visualisation de l'écoulement induit par dissipation visqueuse du vortex acoustique.** L'évolution spatio-temporelle du "front" de propagation de l'encre est filmée à haute cadence. Ici des images de stades successifs d'évolution de la tache d'encre permettent de visualiser l'écoulement. L'échelle de temps n'est pas linéaire.

Des clichés successifs de visualisation de l'écoulement sont montrés à la figure 57. La première photo (à gauche) montre l'injection de l'encre par l'aiguille (le faisceau ne se propage pas encore). Ensuite, une fois la tache d'encre diffusée le champ acoustique est émis. Les photos qui suivent (qui ont reçu un post-traitement pour l'analyse qui va suivre) montrent l'évolution dans le temps de la tache d'encre. L'entrainement des fines particules d'encre permettent donc de visualiser indirectement l'écoulement généré. La région capturée dans ces clichés est un rectangle de 4 mm de largeur et 8 mm de hauteur. La focale du faisceau acoustique est approximativement située à la hauteur de l'aiguille et centrée latéralement.

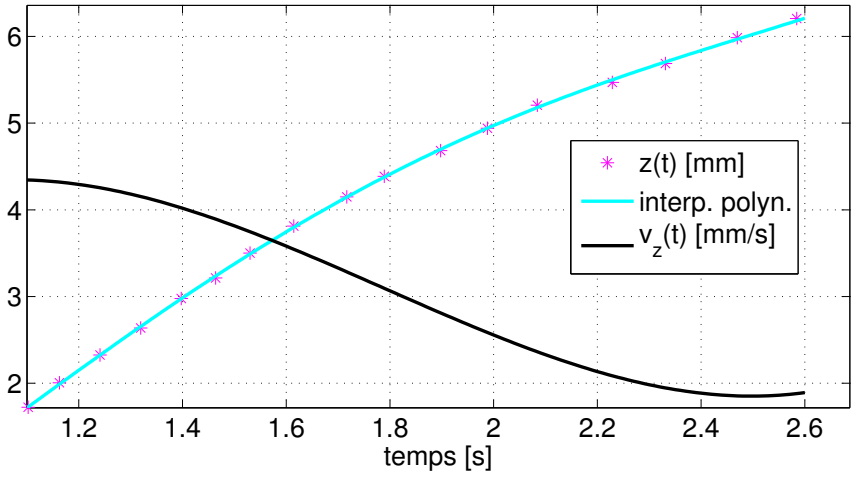
Vitesse axiale de l'écoulement

Pour analyser l'écoulement, les images extraites de la vidéo sont post-traitées [7]. Cette étape permet de faire sortir un meilleur contraste des images et de diminuer autant que possible le scintillement à 50Hz de l'éclairage. Ainsi, toujours sur la figure 57, la première photo n'a reçu aucun traitement et est à comparer aux autres qui ont été traitées. Suite à cette première étape, il a été possible d'écrire un algorithme de détection du "front de propagation" de la tache d'encre. Ainsi, quelque soit la position latérale x, on peut extraire l'évolution axiale $z(t)$ du contour inférieure de la tache. Pour maximiser la résolution temporelle, la vidéo initiale est capturée à une cadence de 166 images par seconde. Les différentes étapes pour finalement obtenir la vitesse axiale de l'écoulement, v_z, sont montrées à la figure 58. Premièrement en (a), en traçant pour $x = 0$ (c'est à dire sur l'axe de propagation acoustique) la position z du front d'encre pour toutes les images (560 au total), nous obtenons une carte altitude/temps du contour (l'encre est en couleur claire sur l'image et le reste du milieu reste sombre). Ainsi jusqu'à l'instant $t \sim 1,15$ s, l'encre stagne en haut de l'image. Le champ acoustique n'est effectivement pas encore émis. Par contre, dès que l'écoulement se forme, le front d'encre descend progressivement dans le plan de l'image. Le contour du front est suffisamment net pour pouvoir repérer clairement son altitude à chaque instant t (courbe en noire). Les positions $z(t)$ sont sélectionnées manuellement en (a) et reproduites et interpolées à la figure (b). Nous n'avons représenté les courbes qu'à partir de l'instant $t = 1,15$ s. Bien entendu, une simple dérivation numérique permet d'obtenir la vitesse axiale instantanée $v_z(t)$. Il convient de préciser le type de vitesse que nous avons calculé. En effet, on l'obtient en suivant la particule fluide pendant son mouvement (particule d'encre en occurrence). Il s'agit donc de la vitesse Lagrangienne de la particule fluide (contrairement aux techniques de P.I.V. et du fil chaud). Ainsi, si la vitesse décroit avec le temps, ce n'est pas que l'écoulement s'est affaibli, mais plutôt que nous sommes dans une région où il est, et demeurera, plus faible. Par conséquent, il est utile de se représenter la vitesse en fonction de l'altitude (hypothèse de stationnarité). En (c), nous montrons la courbe de la vitesse de l'écoulement v_z en fonction de la distance à la focale z_f. Comme attendu, l'écoulement est fort près de la focale ($v_z \sim 4,4$ mm/s pour $z_f = 0$ mm) et plus faible en amont ($v_z \sim 2,8$ mm/s pour $z_f = 3$ mm par exemple). Près de la focale, une particule de rayon $a = 150\mu$m devrait donc ressentir une force

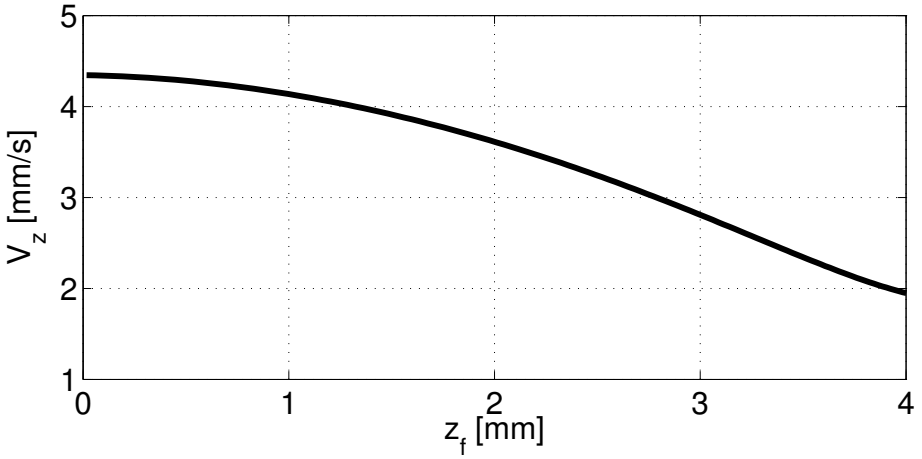
7. Les post-traitements ont été effectuées avec le logiciel sous licence libre *ImageJ* [166].



(a) Détection du front de propagation de la tache d'encre



(b) Calcul de la vitesse instantanée



(c) Calcul de la vitesse en fonction de la distance à la focale z_f

FIGURE 58 – **Mesure de la vitesse axiale de l'écoulement.** En (a), contour de la tâche d'encre en fonction du temps. En (b) son altitude et vitesse instantanée en fonction du temps. En (c), vitesse de l'écoulement en fonction de la distance à la focale du faisceau z_f.

d'entrainement (loi de Stokes) :

$$F_s = 6\pi\nu a v_z \sim 12,5\,\mathrm{nN} \tag{185}$$

où $\nu = 1$ mmPa.s est la viscosité dynamique de l'eau. Cette force additionnelle de poussée est évidemment à prendre en compte pour une démonstration verticale de la pince.

Pour terminer cette section, nous allons discuter un effet un peu plus singulier qui a pu être observé. Sur les images du front d'encre de la figure 57, on peut noter ce qui serait, à priori, la présence d'un écoulement azimutal. En effet, la tache d'encre semble montrer un front qui s'enroule autour de l'axe de propagation de la gauche vers la droite. Rappelons que le flux d'intensité du vortex possède une composante azimutale. La dissipation du front d'onde hélicoïdal permettrait ainsi de mettre en rotation le fluide autour de l'axe de propagation. Cet écoulement azimutal n'a été observé, à notre connaissance, que dans une seule étude [93] et à fait l'objet d'une étude théorique récente [167]. Ce dispositif pourrait permettre dans le future de quantifier et caractériser cette vitesse azimutale en fonction de la charge topologique par exemple, ou le degré de focalisation du faisceau.

Conclusion

Dans cette section, nous avons obtenu par une procédure simple une bonne estimation de la vitesse axiale de l'écoulement généré par la dissipation visqueuse du vortex acoustique. On a alors obtenu une estimation de la force d'entrainement de Stokes qui vient déséquilibrer la balance dans le comportement axial de la pince acoustique. Cette donnée était indispensable pour démontrer le fonctionnement de la pince dans une configuration verticale que nous allons maintenant présenter.

V.3.4 Pince dans une configuration verticale

Avant propos

La majorité des expériences utilisant des pinces optiques s'effectuent dans une configuration verticale. Même si dans les échelles accessibles aux pinces optiques, la gravité ne joue pas de rôle majeure, c'est cette configuration qui permet une intégration efficace d'un microscope pour visualiser la zone de piégeage [53]. En ce qui nous concerne, la gravité joue un rôle important. Nous avons déjà montré dans la section V.3.2, que la mise en place d'une configuration horizontale était techniquement difficile. Il faut trouver une méthode pour approcher les billes près de la zone d'intérêt alors qu'elles ne demandent qu'à rejoindre le fond de la cuve. Aussi, dans la configuration verticale, la terminologie de pince acoustique prend tout sons sens. On entend par là, pouvoir sélectionner une particule parmi d'autres, les trier, les manipuler, etc... Assez naturellement, c'est dans cette configuration qu'on peut espérer l'essor de nouvelles applications de la pince acoustique dans un milieu sujet à la force gravitationnelle. À l'instar des pinces optiques, nous présentons dans cette section l'implémentation verticale de la pince acoustique. Nous avons

prédit une force de gradient négative suffisante pour soulever les billes à l'encontre de leur poids et de la force d'entrainement visqueuse estimée dans la section précédente.

Montage vertical

Nous avons schématisé le montage à la figure 59. Le réseau est maintenu dans la cuve par un support. Il émet le champ acoustique vers le fond de la cuve où nous avons disposé un ploc absorbant de 4 cm d'épaisseur en polyuréthane pour éviter des réflexions acoustiques parasites dans la zone piégeage. Un film très fin en polyéthylène [8] est tendu sur un support muni d'une tige et qui est monté sur le système de positionnement motorisé. Sa très faible épaisseur (de l'ordre de 13μm) assure une réflexion acoustique minimale. L'objectif de la caméra regarde à travers une fenêtre optique placée sur un côté de la cuve et permet une visualisation de la zone d'intérêt.

Une première étape consiste à repérer la zone de propagation du vortex. Au préalable, l'hydrophone permet de mesurer et repérer le cœur du vortex et la distance focale. Ensuite, la mise au point de l'image optique est faite sur l'aiguille de l'hydrophone. C'est aussi l'occasion de calibrer les dimensions de l'image. Une photo est prise de deux positions successives de la pointe de l'hydrophone déplacé de manière très précise avec le système de positionnement. Finalement, les billes sont déposées sur le film et approchées de la zone de propagation [9]. Nous disposons de petites sphères de diamètre proche de 190μm et d'une deuxième gamme de taille plus grande de diamètre compris entre $355 - 425\mu$m. Une bille correctement positionnée à la focale optique et donc dans le plan de propagation apparait nettement sur l'écran de visualisation.

Lévitation d'une sphère unique

Une fois la bille bien positionnée, on émet le vortex acoustique. L'effet est immédiat. La force attire rapidement la sphère et la soulève jusqu'à sa position d'équilibre stable. Elle reste en lévitation pendant l'intégralité de la durée d'émission. Elle ne retombe sur la membrane qu'à la fin du tir. Une photo d'une sphère piégée de 170μm de rayon est montrée à la figure 60. À la position d'équilibre, la pression de radiation négative est au moins égale au poids de la sphère ($\sim$ 10 nN). En réalité, elle contre aussi la force d'entrainement additionnelle générée par l'écoulement produit. Puisqu'une multitude de particules sont déposées sur le film, il a été possible d'explorer la propriété de sélectivité de la pince acoustique. Ainsi, si deux particules sont initialement proches l'une de l'autre, il est aisé de viser avec le vortex la zone qui permet de n'en piéger qu'une seule. En effet, si on se souvient de la courbe théorique pour la force radiale (Fig. 53 à la section V.2), elle n'est attractive que sur un certain domaine (jusqu'à 600μm de l'axe acoustique pour ce faisceau). Au-delà de ce rayon, la force devient répulsive. Il est donc possible d'éjecter

8. Ici ce n'est autre qu'une couverture de survie.

9. Elles sont laissées dans l'eau au moins 30 minutes pour s'assurer qu'aucune bulle d'air ne reste piégée à leur surface. Les bulles d'air étant très échogènes, elles pourraient perturber la pression de radiation exercée.

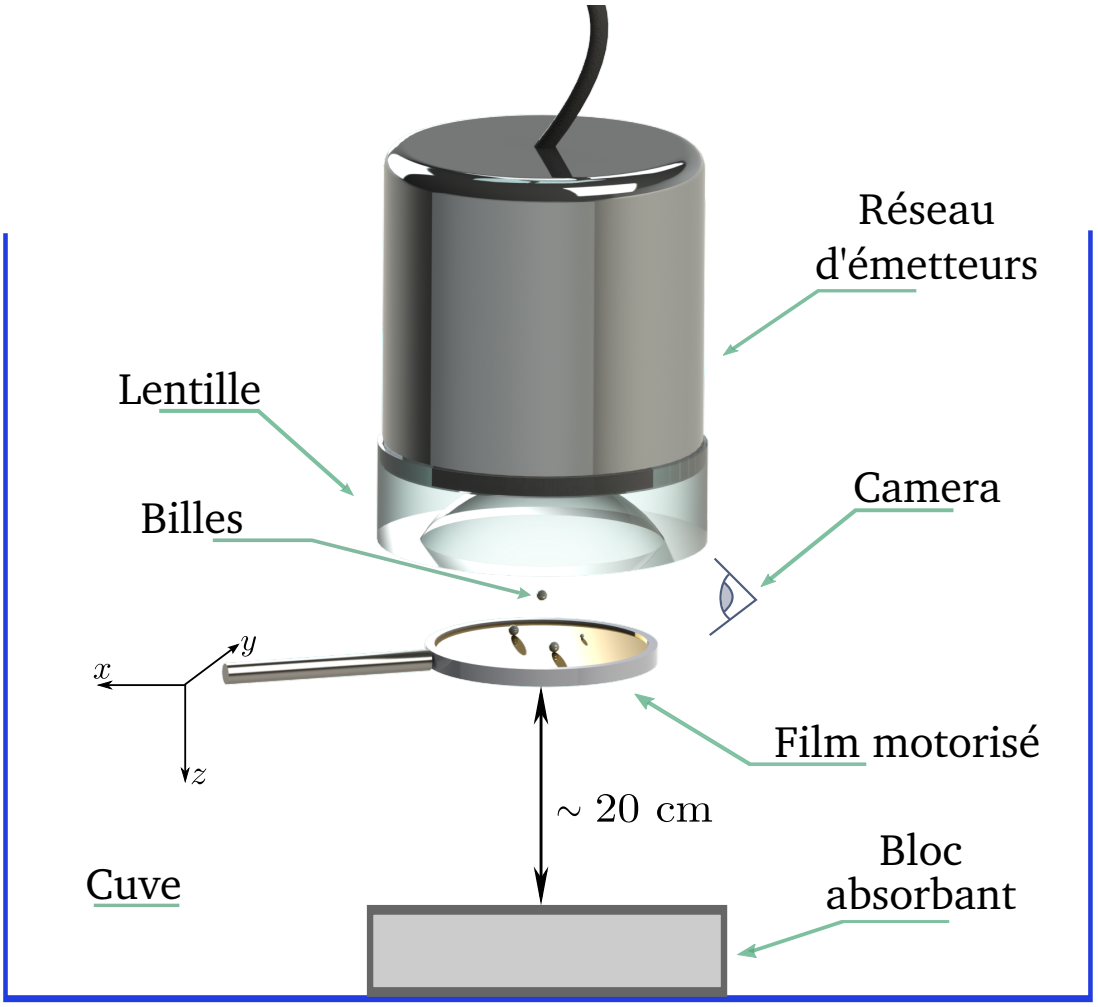


FIGURE 59 – **Montage vertical de la pince acoustique.** Le faisceau est émis verticalement vers le fond de la cuve. Un bloc absorbant assure qu'aucune réflexion ne vienne perturber la zone d'intérêt.

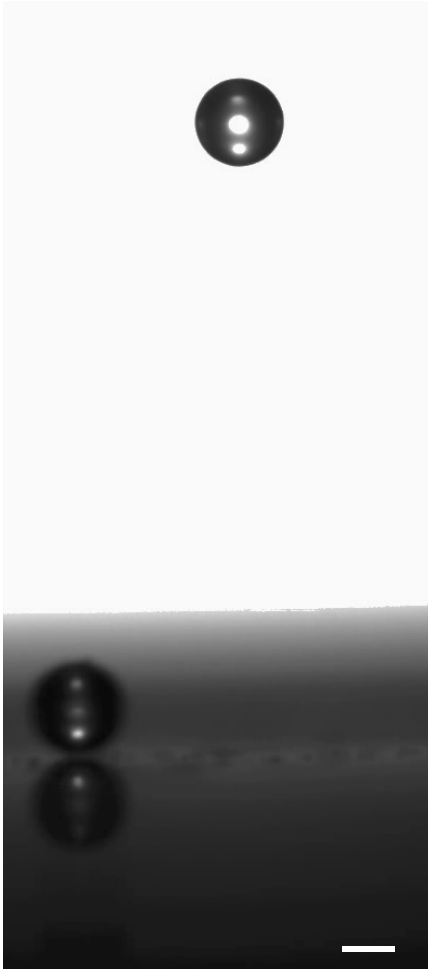


FIGURE 60 – **Lévitation d'une sphère par la pince acoustique.** Photo de la lévitation d'une sphère dans sa position d'équilibre. La barre d'échelle représente 200μm.

la deuxième. D'ailleurs sur la même photo, la bille située en bas à gauche a été expulsée du piège. On peut ensuite la voir se déplacer à cause des forces exercées dans les anneaux secondaires du vortex. Par contre si le film est retiré (vers le bas), en aucun cas celle-ci se verra collectée dans la position d'équilibre déjà occupée. Cette caractéristique est importante pour les applications. Elle assure une opération avec précision à l'échelle de la particule unique. On lève ici une grande limitation des pinces optiques [53] et cette opération sélective semble difficile pour les pièges acoustiques à ondes stationnaires. En effet, à moins que le milieu ne soit peuplé initialement que d'une seule particule, elles seront majoritairement toutes piégées dans le réseau de nœuds et de ventres du système stationnaire.

Pendant le processus de piégeage, nous avons observé, comme prévu, une forte dominance de la force radiale. La sphère est accélérée très fortement vers l'axe acoustique avant même de commencer à léviter. À une cadence d'acquisition rapide (476 images/s), nous filmons l'attraction radiale d'une sphère initialement désaxée d'environ 600μm avant

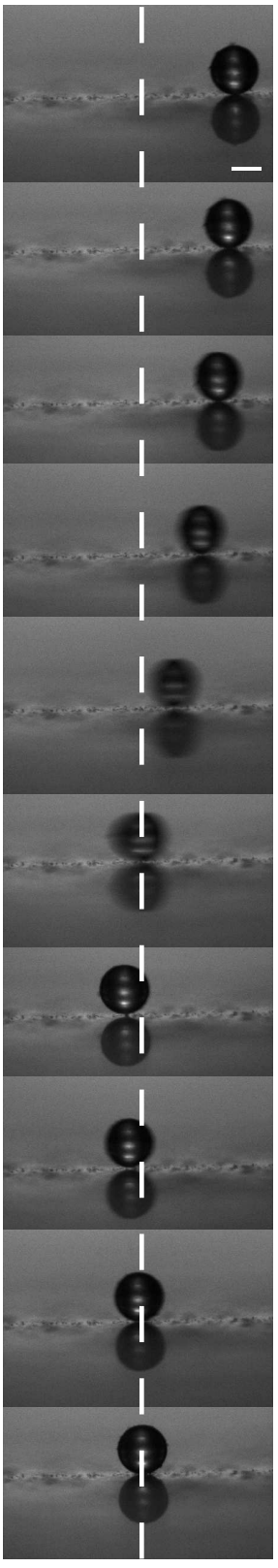


FIGURE 61 – **Attraction latérale de la sphère.** Une sphère initialement déportée hors de l'axe est rapidement accélérée vers celui-ci. La barre d'échelle représente 200μm.

d'émettre le faisceau. L'altitude du film est positionnée au niveau de la focale du faisceau. C'est à ce niveau que la force radiale est prévue maximale par la théorie. Sur la figure 61, nous pouvons voir une succession de 10 photos prises pendant qu'elle était attirée vers l'axe. Partant de la droite, elle accélère vers la gauche. Elle finit par dépasser l'axe à cause de son inertie avant d'être finalement bloquée au niveau de celui-ci. Cette procédure prend approximativement 20 ms. En calculant la trajectoire puis l'accélération radiale de la particule, nous avons pu estimer la force radiale exercée. Elle avoisine $0{,}4\mu\mathbf{N}$ pour $\rho \simeq 420\mu$m.

Une fois la particule piégée, il est désirable de pouvoir convenablement la manœuvrer dans l'espace. Malheureusement dans le présent dispositif, l'émetteur est encombrant et lourd, et il n'a pas pu être fixé au système de positionnement motorisé. Néanmoins, il est possible d'intervenir de manière simple sur la séquence de tir du faisceau. De cette façon, en introduisant de manière périodique des temps de pause dans la séquence de tir, il est possible de voir chuter la bille avant qu'elle ne soit rapidement rattrapée au vol lorsque l'émission reprend. Il en résulte des oscillations rapides de la sphère autour de sa position d'équilibre peuvent être initiées. On a alors une première méthode de contrôler la dynamique de la particule. En principe, les oscillations rapides de la sphère pourraient initier des écoulements de manière locale dans le milieu. La technique du filtre inverse utilisée permet, en principe, de reconfigurer le champ spatio-temporel. Dans la présente configuration, les capacités du bloc PC et sa mémoire ne permettent pas de calculer en temps réel des nouvelles configurations du piège. Néanmoins dans le futur, ceci serait une amélioration intéressante du dispositif.

Rotation contrôlée de la sphère

Un autre effet observé est la mise en rotation de la sphère autour d'un axe intrinsèque (qui coïncide avec l'axe de propagation). Cette observation est indirecte et difficile à montrer par l'usage d'images ici. Lorsqu'une bille est piégée, il est fréquent d'observer des poussières ou impuretés initialement présentes dans l'eau qui restaient accrochées à la bille. Leur présence met en évidence la rotation de la sphère autour de l'axe de propagation. Cet effet n'avait pas été pris en compte dans notre théorie et provient de l'absorption acoustique du flux angulaire de quantité de mouvement par le polystyrène. À l'instar de la rotation observée sur des disques absorbants [91, 90, 92, 93], le couple exercé met en rotation la sphère. Cet effet a récemment été prédit théoriquement par Marston [168]. Ici nous le vérifions dans le contexte d'une pince acoustique. Intrigués par cet effet et de son intérêt potentiel pour des applications, nous avons recherché une méthode pour contrôler la rotation de la sphère. De manière attendue, en inversant le signe de la charge topologique du vortex et donc le sens de rotation du front d'onde synthétisé, la sphère tourne aussi dans la direction opposée. Il a été montré qu'un dispositif de synthèse de champs similaire à celui-ci, permettait de générer deux vortex en même temps [118, 163]. On pourrait alors imaginer inverser la charge d'un d'entre eux pour annuler le couple. Cependant, cette même étude a montré que ces deux vortex de charge opposée fusionnent pour donner un champ axisymétrique pendant la propagation. Cela détruirait le puits de

potentiel et le piège. Alors, pour conserver l'effet de pince, nous avons regroupé dans un même tir deux vortex de même amplitude mais de charge opposé, qui se succèdent de manière alternative dans le temps. Ainsi, le puits de potentiel qui est proportionnel à la densité moyenne d'énergie du champ garde la même forme quelque soit la charge. Pendant le tir de charge positive, la sphère ressent un couple dans le sens directe, puis, on alterne avec le couple en sens inverse. En moyenne, l'effet est une annulation totale de la rotation de la sphère alors qu'elle reste piégée dans le même puits de potentiel. En prolongeant ce raisonnement, nous pouvons judicieusement contrôler la vitesse de rotation de la particule en dosant le temps d'émission du vortex d'une des charges données.

Lévitation d'un système à deux sphères

Nous avons démontré la sélectivité de la pince qui permet de ne piéger qu'une sphère à proximité d'autres. Néanmoins, si deux particules sont suffisamment proches et que rien n'est fait pour les départager, il est alors possible de les piéger simultanément. Les photos de la figure 62 montrent des systèmes à deux particules en lévitation. L'examen des deux photos indique que la taille relative des deux billes peut déterminer l'arrangement du système dans le puits de potentiel. À gauche, deux sphères de rayon 177 et 108 μm sont piégées et maintenues en contact. Par contre à droite, les sphères de rayon 98 et 67 μm sont tenues de manière stable à une distance $d \simeq 336\mu$m. L'explication est à chercher dans l'interaction mutuelle entre les deux particules. En effet, à l'instar des forces secondaires de Bjerknes [169] pour une bulle, après avoir diffusé le champ acoustique primaire du faisceau, la première sphère reçoit le champ secondaire de la deuxième particule qui exerce alors une nouvelle force à prendre en compte. À notre connaissance, aucun modèle ne permet de prévoir ce comportement dans cette configuration même si quelques études seraient une bonne base de départ [24, 170, 171]. Une approche serait de généraliser la théorie développée au chapitre II en intégrant des modèles existants pour la diffusion multiple de deux voire trois sphères. Le piège montré semble toute à fait convenable pour prouver expérimentalement ce type de théories.

Lévitation et rotation d'un système à trois sphères

Pour finir, nous montrons à la figure 63 qu'il est possible de piéger trois sphères de taille différente avec le vortex acoustique. De manière remarquable, ce système à trois objets est mis en rotation autour de l'axe de propagation. Ainsi parcourant les photos de gauche à droite, on voit que la sphère centrale tourne autour des deux autres. Elle commence par passer derrière le plan de l'image pour réapparaitre par la droite. La séquence a été acquise à une cadence de 116 images par seconde et il faut entre 4 et 5 images pour observer une révolution de la sphère centrale. Cela correspond à une fréquence de rotation du système de l'ordre de 25 Hz. L'axe défini par le centre des sphères supérieure et inférieure est aussi en précession tel une toupie déséquilibrée.

De nouveau, aucune théorie ne permet de prévoir ce comportement. On observe dans ce système une combinaison riche de phénomènes. Il y a l'interaction entre les trois par-

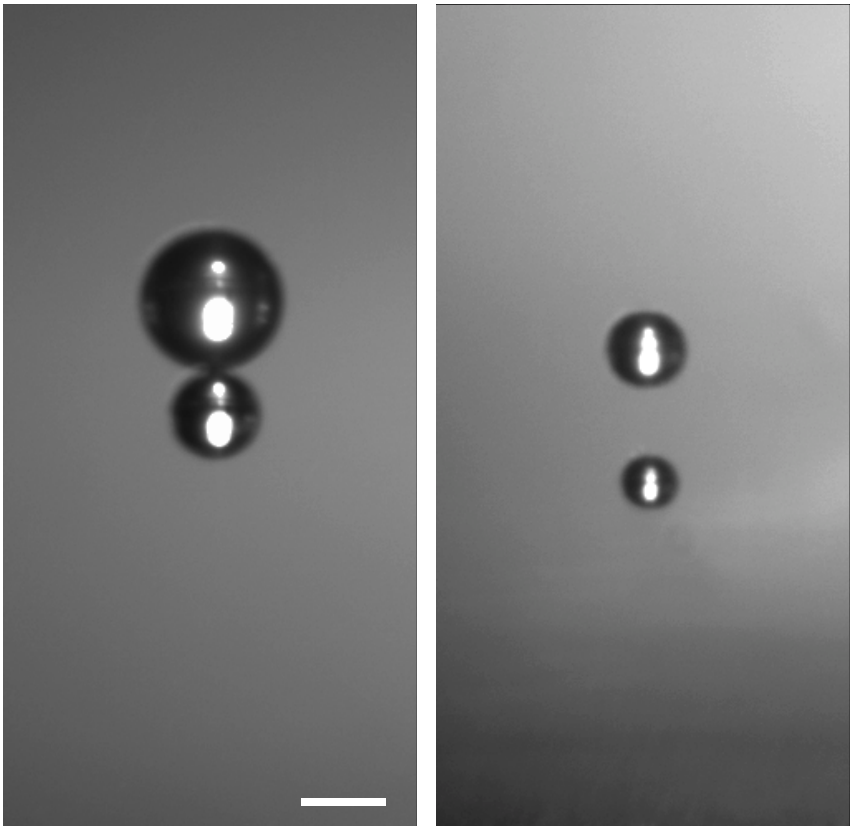


FIGURE 62 – **Lévitation de systèmes à deux sphères.** Les sphères sont de rayon 177 et 108 μm à gauche et de rayon 98 et 67 μm à droite. La barre d'échelle représente 200μm.

ticules influençant la pression de radiation, un échange de flux angulaire de quantité de mouvement entre le vortex et les particules (dû cette fois-ci à l'asymétrie du système) qui exerce le couple, éventuellement une force d'entrainement azimutale due à l'écoulement rotationnel et le couple exercé par absorption acoustique sur chaque sphère. Sur ce dernier point, il n'a pas été possible de distinguer une rotation de chaque sphère autour de son propre axe.

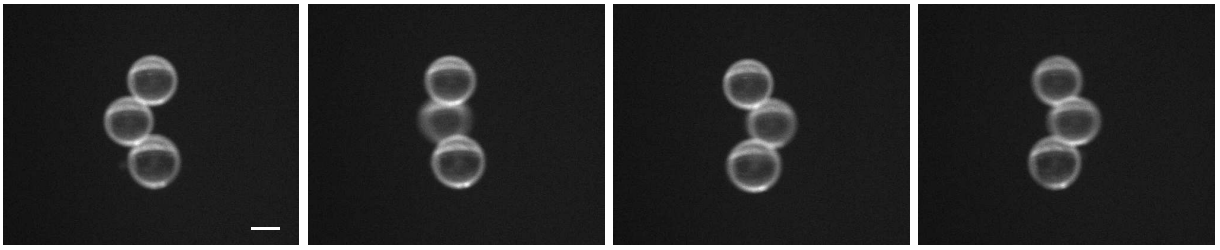


FIGURE 63 – **Lévitation et rotation d'un système à trois sphères.** Sur ces photos prises à des instants successifs, on voit le système qui est en rotation autour de l'axe de propagation. La barre d'échelle représente 200μm.

Conclusion sur la configuration verticale

Dans cette section, nous avons démontré le fonctionnement de la pince dans une configuration verticale. Premièrement, la force de gradient négative permet d'opérer contre la gravité et l'écoulement acoustique qui exerce une force d'entrainement dans la direction de propagation du faisceau. Une fois piégée, elle pourra être manipulée en trois dimensions, le faisceau étant ici statique. Dans un dispositif allégé, un contrôle micrométrique de la position de la pince est facilement envisageable en trois dimensions. Dans la configuration actuelle, il est déjà possible de faire de la particule un objet pouvant être lâché puis rattrapé à différentes périodes. La pince démontre une excellente sélectivité pour opérer à l'échelle de la particule unique mais peut aussi manipuler deux à trois particules en même temps. Le transfert de quantité de mouvement angulaire a été détecté. Ainsi pour une particule unique, c'est l'absorption du polystyrène qui permet au vortex d'exercer un couple sur la sphère piégée. Cette rotation contrôlée devient une caractéristique intéressante de la pince acoustique à faisceau unique. La possibilité d'exercer des torsions est un avantage important ajouté aux facultés de translation en trois dimensions. Puis, s'agissant de l'agrégat de trois particules, c'est le transfert du flux angulaire de quantité de mouvement avec un un système asymétrique qui est responsable du couple exercé.

Conclusion du chapitre

Les résultats de ce chapitre constituent la première démonstration de la pince acoustique telle que définie par les travaux pionniers d'Ashkin [48]. Nous avons d'abord décrit le dispositif expérimental pour la synthèse de vortex acoustiques focalisés. La technique du

filtre inverse spatio-temporel nous a permis de reproduire avec fidélité les faisceaux acoustiques modélisés analytiquement au chapitre précédent. Cette méthode flexible et robuste a permis de synthétiser des vortex ayant une charge topologique atteignant $m' = 5$. À partir de la mesure de la valeur absolue du champ de pression, il a alors été possible de prévoir avec suffisamment de précision la pression de radiation qui allait s'appliquer à des particules de diamètres compris entre 190μm et 400μm. Puis, nous avons confirmé qu'un vortex focalisé de charge $m' = 1$ permettait de piéger la particule dans un puits de potentiel stable et tridimensionnel à la fois dans une configuration horizontale puis verticale dans un second dispositif. Il a alors été observé la présence de l'écoulement de volume généré par la dissipation du faisceau incident. Cet écoulement exerce alors une force axiale positive qui n'avait pas été modélisée. Une forte focalisation du faisceau est nécessaire pour faire dominer la force de gradient négative qui attire la sphère vers la focale. Dans le montage vertical, la pince acoustique a démontré un ensemble de caractéristiques qui confirment son analogie avec la pince optique dans son sens strict. Grâce à un unique faisceau ultrasonore, elle peut sélectionner, tirer et pousser, contrôler à la fois la position de la particule et la force qu'elle exerce en trois dimensions. Ces caractéristiques lui confèrent donc une bonne dextérité de préhension. En principe, une fois piégée, elle pourra dans un montage optimisé (poids et taille de l'émetteur) être facilement manœuvrée dans l'espace et avec précision. Une première méthode pour agir simplement sur la particule est de périodiquement la laisser retomber et de la rattraper au vol initiant ainsi son oscillation autour d'une position d'équilibre. En outre, le flux de moment cinétique du vortex permet aussi de mettre la bille en rotation de manière contrôlée. Le mécanisme responsable est la faible absorption viscoélastique du flux angulaire de quantité de mouvement par le polystyrène.

Conclusions et perspectives

L'historique des applications de la pression de radiation à la manipulation d'objets en optique et en acoustique a souvent démontré de surprenantes similitudes. Pourtant, il semblait manquer un élément important pour mener entièrement la comparaison : démontrer qu'un faisceau ultrasonore pouvait piéger et manipuler une unique particule élastique. Pour parvenir à démontrer l'existence de la pince acoustique, cette thèse a abordé l'étude de la pression de radiation acoustique tant d'un point de vue théorique qu'expérimental.

Le contexte de l'étude a rapidement exigé de modéliser avec précision la dynamique tridimensionnelle d'une sphère dans une scène sonore. Nous avons alors proposé une théorie tridimensionnelle de la pression de radiation exercée sur une sphère élastique. Ainsi, pour la première fois, la force acoustique peut être calculée pour une position arbitraire de l'objet et quelque soit la nature du champ incident. Concernant la taille des objets, le modèle couvre les régimes de Rayleigh ($a \ll \lambda$), de Mie ($a \sim \lambda$) et de l'acoustique géométrique ($a \gg \lambda$). La généralisation concerne dans un premier temps le problème de la diffusion par une sphère élastique. Il était nécessaire de démontrer que nous pouvions calculer le champ diffusé quelque soit la position de la sphère et pour un champ incident quelconque. Puis, ce résultat a été combiné à la théorie de Brillouin-Langevin pour obtenir les trois composantes, F_x, F_y et F_z de la force dans le repère cartésien centré sur la sphère. La confrontation du modèle avec plusieurs résultats issus de la littérature a donné un résultat positif.

Dans le régime de Rayleigh, le vecteur force prend une forme limite qui autorise une discussion plus approfondie de la physique derrière le problème de pression de radiation. Ainsi, pour un champ arbitraire, la force peut être séparée en une force dite de gradient (originellement obtenue par Gor'kov) et une force de diffusion. Régulièrement, cette deuxième contribution ne représente qu'une correction mineure à la force de gradient. Néanmoins, la structure à la fois progressive et focalisée d'un faisceau, nécessite de considérer l'effet combiné des deux types de force. D'autres cas, qui ne concernaient pas cette étude, pourraient être traités avec cette expression. Par exemple, de nombreuses applications de manipulation dans des environnements microfluidiques combinent aujourd'hui des systèmes progressifs et stationnaires et la formule de référence de Gor'kov ne s'applique pas rigoureusement. Par ailleurs, à cette échelle, il est connu que les forces visqueuses jouent un rôle important, à la fois d'un point de vue hydrodynamique et acoustique. Nous avons alors montré que la correction du terme dipolaire de la diffusion, pour prendre en compte la viscosité du milieu, permettait d'obtenir son influence sur la force et retrouvons des résultats récemment publiés. Cependant, il est possible que des difficultés liées à l'écoulement acoustique de couche limite ne soient pas prises en compte par ces corrections. Ceci est une question ouverte. La correction des coefficients de diffusion suffit-elle à prendre en compte tous les effets liés à la viscosité ? Une chose sure est qu'un deuxième effet lié à la viscosité, l'écoulement généré dans le volume, n'est pas pris en compte par

la théorie de couche limite récemment publiée [39]. Cet écoulement a joué un rôle prépondérant dans nos expériences et une modélisation appropriée reste nécessaire pour les futurs développements de la pince acoustique et une confrontation rigoureuse entre notre modèle et nos observations expérimentales. Enfin, il serait utile de considérer d'autres géométries pour les particules, à commencer par le cas des sphéroïdes qui semble accessible. Nous pouvons alors nous attendre à un couple acoustique qu'il serait intéressant d'intégrer dans la modélisation. Toutes les étapes du chapitre II seraient à reprendre dans la base sphéroïdale.

La première application du modèle a eu pour objet d'étendre la discussion sur un effet surprenant introduit par Marston [31]. Les faisceaux de Bessel et leur effet "tractor beam". Il semblerait que ces faisceaux puissent tirer la particule de manière continue vers la source. Nous avons démontré que cette conclusion restait valable dans un contexte tridimensionnel. Basé sur la décomposition en ondes planes de ce type de faisceau, il devrait être possible de concevoir un émetteur acoustique qui répond au critères d'apparition de cet effet. Il faut nécessairement un angle d'incidence des fronts d'onde β très élevé. Ensuite, il faut explorer le régime résonant des particules élastiques. Dans ces conditions, il sera peut-être possible de trouver le régime adéquat pour inverser le signe de la force axiale tout en confinant la sphère sur l'axe de propagation. L'effet de "tractor beam" a éveillé la curiosité de nombreux physiciens et devrait pouvoir trouver sa démonstration en acoustique.

L'application à la pince acoustique nécessite une forte focalisation du faisceau ultrasonore. Après avoir modélisé le champ émis par un transducteur concave dans le formalisme des harmoniques sphériques, nous avons pu identifier le majeur problème pour obtenir une pince et qui a mis à défaut les études de Wu et Shung *et al.* Dans le cas de petites sphères, le contraste des propriétés acoustiques entre le milieu et la particule donne un potentiel acoustique instable. En ce qui concerne les particules élastiques plus grandes, c'est tout simplement une forte rétrodiffusion qui résulte en une accélération axiale importante. En introduisant le concept de vortex acoustique focalisé, nous avons observé une modification intéressante de la force de gradient exercée par ces faisceuax. Par symétrie, un vortex est incapable d'exciter le diffuseur sur son mode monopolaire. Pour des petites particules élastiques, le puits de potentiel devient alors stable et est piloté par le contraste inertiel entre la particule et le milieu. Un vortex acoustique de charge topologique $m' = 1$ est donc adéquat pour réaliser une pince acoustique pour piéger des particules élastiques dont le diamètre ne dépasse pas un tiers de la longueur d'onde. Lors des applications numériques, nous avons majoritairement axé notre discussion pour des sphères élastiques. Il serait néanmoins intéressant d'évaluer, plus en détail, le comportement des différents faisceaux introduits sur des bulles, des gouttes ou encore des systèmes cœur-coquille dont le comportement est directement accessible par le modèle.

Le choix du dispositif expérimental a été guidé par le soucis de maitriser au mieux la synthèse de vortex acoustiques. Ces faisceaux aux fronts d'ondes particuliers nécessitent de

développer un dispositif expérimental performant pour leur génération. La technique du filtre inverse spatio-temporel est une méthode optimale pour synthétiser ce type de fronts d'ondes hélicoïdaux. À l'aide d'un réseau d'émetteurs piézoéléctriques et d'une lentille acoustique fortement focalisée, nous avons pu obtenir un vortex de charge topologique $m' = 1$ avec une très bonne précision pour procéder aux expériences de manipulation d'objets. Sa forte focalisation a permis d'introduire des forts gradients de pression au cœur du vortex permettant ainsi de maximiser la force qui servira à piéger les particules. La technique de synthèse a su prouver sa flexibilité avec la génération de vortex ayant de charges topologiques atteignant $m' = 5$.

Sous réserve de connaitre la décomposition du champ incident dans la base des harmoniques sphériques, le modèle théorique développé peut traiter une multitude d'autres cas. La synthèse de fronts d'ondes complexes est une thématique très active en optique et en essor en acoustique. On pourra prédire la force exercée par des ondes plus "exotiques" encore et couplé a la technique du filtre inverse, de nouvelles applications à la manipulation d'objets sont directement accessibles.

Nous avons terminé ce travail de thèse par une démonstration expérimentale de la pince acoustique à faisceau unique qui est le direct analogue des pinces optiques. La pince permet pour la première fois de sélectionner, soulever et pousser, et contrôler à la fois la position et la force qui s'exerce sur la particule. Ce schéma à faisceau unique semble pouvoir donner une véritable dextérité de préhension à la pince. Nous pouvons opérer de manière sélective dans un milieu vaste et composé de nombreuses particules. La génération du piège ne repose sur aucune réflexion du milieu ou d'une deuxième source pour établir un système d'ondes stationnaires. Dans le dispositif actuel, il n'a pas été possible de déplacer dynamiquement le faisceau et donc la particule piégée. Même si beaucoup d'expériences en optique reposent aussi sur un faisceau statique, il est désirable d'alléger le dispositif pour permettre un positionnement mécanique du faisceau avec un précision micrométrique. La méthode de filtre inverse semble aussi appropriée pour dépointer électroniquement le piège. Cette possibilité devra être explorée pour une application à la reconfiguration en temps réel de la forme sptatio-temporelle du piège.

La pince utilisée ici développe un intensité acoustique d'environ 40 Watts/cm^2 au niveau de son anneau principal de focalisation. Outre le fait que cette intensité soit remarquablement faible, les objets sont piégés dans le cœur silencieux du vortex. À titre de comparaison, les pinces optiques nécessitent une intensité de l'ordre de 10^8 Watts/cm^2 et ne développent des forces que de l'ordre de $\sim$ 100 pN. Ceci est leur majeure limitation pour les applications de type biologiques. Ici, la force radiale est de l'ordre de $0{,}5\mu\mathbf{N}$ pour les différentes sphères en polystyrène. À l'échelle macroscopique le gain est donc très conséquent et attractif pour développer de nouvelles applications. Ramené à l'échelle microscopique, la pince acoustique devrait conserver un avantage de cinq ordres de grandeur.

La pince utilisant un vortex acoustique peut aussi exercer un couple sur une sphère absorbante. De cette manière, nous avons pu contrôler la direction et la vitesse de rotation

d'une particule sans modifier sa position dans le piège et donc la force de gradient qui la maintient en lévitation. À l'instar des pinces "magnétiques", qui offrent également ce degré de liberté, de nombreuses applications exploitant la rotation contrôlée pourront certainement être imaginées.

Toutes les caractéristiques démontrées, laissent penser à un vaste panel d'applications potentielles pour la pince acoustique. Les domaines concernés seraient la biologie, la fludique et la rhéologie ainsi que la manipulation sans contact pour des applications en robotique. Pour ce qui est des applications en biologie, nous envisageons, à l'instar des pinces optiques, d'utiliser la sphère piégée comme une véritable poignée. Cette poignée peut être attachée à un organisme pour venir sonder son module viscoélastique et même son module de cisaillement grâce à la torsion. Il est de plus en plus reconnu que le milieu dans lequel évoluent les cellules et en particulier, les contraintes extérieures exercées, régissent *in fine* les mécanismes de l'expression cellulaire. Les forces proposées dépassent largement le cadre des pinces optiques et pourraient adresser des problèmes tels que la morphogénèse et l'organogénèse mais aussi la mesure locale de l'adhésion cellulaire avec le risque d'un éventuel endommagement largement diminué.

Pour rendre l'utilisation de la pince plus performante et confortable, il est impératif de simplifier le dispositif actuel. Dans cet objectif, nous avons envisagé des pistes réalistes pour miniaturiser le système d'émission et augmenter la fréquence d'émission pour atteindre une efficacité sur des objets micrométriques. Cette amélioration passera par la conception d'un émetteur simplifié et mono-élément qui permettra d'obtenir un vortex se propageant dans un milieu plus confiné.

En somme, cette étude a mis en place un cadre théorique qui a rapidement mené à une application importante pour la manipulation d'objets en acoustique. Les connaissances développées vont permettre, dans le futur, d'envisager de nouvelles fonctionnalités pour la pince, de nouveaux modes de piégeage mais aussi des méthodes efficaces pour répondre aux différents besoins scientifiques. Les démonstrations expérimentales esquissent ici une ébauche de la pince acoustique du futur et pour laquelle nous pouvons espérer une application aux études fondamentales de demain.

Bibliographie

[1] R.A. Millikan : On the elementary electric charge and the avogadro constant. *Phys. Rev.*, 2:109–143, 1913.

[2] F Hellman, E M Gyorgy, D W Johnson, H M O'Bryan et R C Sherwood : Levitation of a magnet over a flat type II superconductor. *J. Appl. Phys.*, 63(2), 1988.

[3] A. Ashkin : Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 24:156, 1970.

[4] Y. Tian, R. G. Holt et R.E. Apfel : A new method for measuring liquid surface tension with acoustic levitation. *Review of Scientific Instruments*, 66(5), 1995.

[5] D Felipe Gaitan, Lawrence A Crum, Charles C Church et Ronald A Roy : Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(6), 1992.

[6] P.N. Lebedev : Experimental examination of light pressure. *Annalen der physik*, 6:433, 1901.

[7] E.F. Nichols et G.F. Hull : The pressure due to radiation. *The Astrophysical Journal*, 17:315–351, 1903.

[8] Lord Rayleigh : *Theory of sound.* Dover Publications, New York, 1945.

[9] Lord Rayleigh : *Phil. Mag.*, 10:364, 1905.

[10] M.E. McIntyre : On the "wave momentum" myth. *J. Fluid. Mech.*, 106:331–347, 1981.

[11] R.T. Beyer : Radiation pressure-the history of a mislabeled tensor. *J. Acous. Soc. Am.*, 63(4), 1978.

[12] K. Beissner : The acoustic radiation force in lossless fluids in Eulerian and Lagrangian coordinates. *J. Acous. Soc. Am.*, 103(5), 1998.

[13] P. Biquard : Ultrasonic waves. *Revue d'Acoustique*, 1, 1932.

[14] G. Hertz et H. Mende : Acoustic radiation pressure in liquids. *Z. Physik*, (114), 1939.

[15] R.T. Beyer : *Nonlinear Acoustics.* Naval Sea Systems Command, Providence, 1974.

[16] F.E. Borgnis : Acoustic radiation pressure of plane compressional waves. *Review of Modern Physics*, 25:653–663, 1953.

[17] K. Beissner : Two concepts of acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(5):1610–1612, 1986.

[18] L. Brillouin : Sur les tensions de radiation. *Ann. Phys.*, 4:528, 1925.

[19] L. Brillouin : Les pressions de radiation et leur aspect tensoriel. *Journal de Physique et le Radium*, 17:379–383, 1956.

[20] B. Chu et R. E. Apfel : Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. *J. Acous. Soc. Am.*, 72(6):1673–1687, 1982.

[21] M. Rénier, C. Barrière et D. Royer : Optical measurements of the self-demodulated displacement and its interpretation in terms of radiation pressure. *J. Acous. Soc. Am.*, 121(6), 2007.

[22] M. Renier : *Contribution à l'étude de la pression de radiation acoustique : application à la non-linéarité de l'élasticité de cisaillement des solides mous*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2008.

[23] L.V. King : On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. R. Soc. London*, 147:212–214, 1935.

[24] T. F. W. Embleton : Mean Force on a Sphere in a Spherical Sound Field. I. (Theoretical). *J. Acoust. Soc. Am.*, 26(1), 1954.

[25] K. Yosioka et Y. Kawasima : Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acustica*, 5(3):167–173, 1955.

[26] T. Hasegawa et K. Yosioka : Acoustic Radiation Force on a Solid Elastic Sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 46(5), 1969.

[27] T. Hasegawa et K. Yosioka : Acoustic radiation force on fused silica spheres, and intensity determination. *J. Acoust. Soc. Am.*, 3(58):581–585, 1975.

[28] F. Dunn, A. J. Averbuch et W. D. O'Brien : A primary method for the determination of ultrasonic intensity with the elastic sphere radiometer. *Acta Acustica united with Acustica*, 38(1):58–61, 1977.

[29] X. Chen et R.E. Apfel : Radiation force on a spherical object in the field of a focused cylindrical transducer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(5):2443–2447, 1996.

[30] X. Chen et R. E. Apfel : Radiation force on a spherical object in an axisymmetric wave field and its application to the calibration of high-frequency transducers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2):713–24, 1996.

[31] P.L. Marston : Axial radiation force of a Bessel beam on a sphere and direction reversal of the force. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(6):3518, 2006.

[32] P.L. Marston : Acoustic beam scattering and excitation of sphere resonance : Bessel beam example. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(1), 2007.

[33] P.L. Marston : Scattering of a bessel beam by a sphere : Ii. helicoidal case and spherical shell example. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(5):2905–2910, 2008.

[34] P.L. Marston : Radiation force of a helicoidal bessel beam on a sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120:3539–3547, 2009.

[35] L. Zhang et P.L. Marston : Geometrical interpretation of negative radiation forces of acoustical bessel beams on spheres. *Phys. Rev. E.*, 84:035601, 2011.

[36] J. Lee et K.K. Shung : Radiation forces exerted on arbitrarily located sphere by acoustic tweezer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(2):1084–1094, 2006.

[37] J. Lee : Numerical analysis for transverse microbead trapping using 30MHz focused ultrasound in ray acoustics regime. *Ultrasonics*, 54(1):11–19, 2013.

[38] L.P. Gor'kov : On the forces acting on a small particle in an acoustic field in an ideal fluid. *Sov. Phys. Dokl*, 6:773–775, 1962.

[39] M. Settnes et H. Bruus : *Physical Review E*, 85(1):016327, 2012.

[40] F.G. Mitri : Langevin acoustic radiation force of a high- order bessel beam on a rigid sphere. *IEEE Ultrasonics*, 56(5):1059–1064, 2009.

[41] S.T. Kang et C.K. Yeh : Potential-well model in acoustic tweezers. *IEEE Ultrasonics*, 57(6):1451–1459, 2010.

[42] F. Cai, L. Meng, C. Jiang, Y. Pan et H. Zheng : Computation of the acoustic radiation force using the finite-difference time-domain method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(4):1617–22, 2010.

[43] J. Wang et J. Dual : Theoretical and numerical calculations for the time-averaged acoustic force and torque acting on a rigid cylinder of arbitrary size in a low viscosity fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129(6), 2011.

[44] P. Glynne-Jones, P. P. Mishra, R.J. Boltryk et M. Hill : Efficient finite element modeling of radiation forces on elastic particles of arbitrary size and geometry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 133(4), 2013.

[45] A. Ashkin : History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules. *IEEE Quant. Elec.*, 6(6):841–856, 2000.

[46] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste et C. Cohen-Tannoudji : Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping. *Phys. Rev. Lett.*, 61:826–829, 1988.

[47] C.N. Cohen-Tannoudji : Manipulation of atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.*, 70:707–719, 1998.

[48] A Ashkin, J M Dziedzic, J E Bjorkholm et Steven Chu : Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Opt. Lett.*, 11(5):288–290, 1986.

[49] A Ashkin : Applications of laser radiation pressure. *Science (New York, N.Y.)*, 210(4474):1081–8, 1980.

[50] A. Ashkin et J M Dziedzic : Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria. *Science*, 235:1517–1520, 1987.

[51] R. W. Bowman et M. J Padgett : Optical trapping and binding. *Rep. Prog. Phys.*, 76(2):026401, 2013.

[52] C. Pacoret, R. Bowman, G. Gibson, S. Haliyo, D. Carberry, A. Bergander, S. Régnier et M. Padgett : Touching the microworld with force-feedback optical tweezers. *Opt. Express*, 17(12):10259–10264, 2009.

[53] K Svoboda et S M Block : Biological applications of optical forces. *Annual review of biophysics and biomolecular structure*, 23:247–85, 1994.

[54] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw et J.P. Woerdman : Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, 45:8185–8189, 1992.

[55] H. He, M.E.J Friese, N.R. Heckenberg et H. Rubinsztein-Dunlop : Direct observation of transfer of angular-momentum to absorptive particles from a laser-beam with a phase singularity. *Phys. Rev. Lett*, 75:826–829, 1995.

[56] N.B. Simpson, K. Dholakia et M.J. Padgett : Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light : An optical spanner. *Optics Letters*, 22:52–54, 1997.

[57] M. Padgett, S.M. Barnett et R. Loudon : The angular momentum of light inside a dielectric. *J. Mod. Opt*, 50(10):1555–1562, 2003.

[58] A. I. Bishop, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg et H. Rubinsztein-Dunlop : Optical microrheology using rotating laser-trapped particles. *Phys. Rev. Lett.*, 92: 198104, 2004.

[59] R. W. Bowman, G. M. Gibson, M. J. Padgett, F. Saglimbeni et R. Di Leonardo : Optical trapping at gigapascal pressures. *Phys. Rev. Lett.*, 110:095902, 2013.

[60] J. Leach, H. Mushfique, R. di Leonardo, M. Padgett et J. Cooper : An optically driven pump for microfluidics. *Lab Chip*, 6(6):735–739, 2006.

[61] D.G. Grier : A revolution in optical manipulation. *Nature*, 424:810–816, 2003.

[62] B. Sun, Y. Roichman et D.G. Grier : Theory of holographic optical trapping. *App. Phys. Lett*, 92:161111, 2008.

[63] A. Ashkin, J M Dziedzic et T Yamane : Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(24/31):769–771, 1987.

[64] K. C. Neuman et A. Nagy : Single-molecule force spectroscopy : optical tweezers, magnetic tweezers and atomic force microscopy. *Nature Methods*, 5(6):491–505, 2008.

[65] C. H. Allen et I. Rudnick : *J. Acous. Soc. Am.*

[66] M. C. Lee et I. Feng : Acoustic levitating apparatus for submillimeter samples. *Review of Scientific Instruments*, 53(6), 1982.

[67] P Collas, M Barmatz et C Shipley : *J. Acous. Soc. Am.*

[68] T. Kozuka, T. Tuziuti, H. Mitome et T. Fukuda : Micromanipulation using a focused ultrasonic standing wave field. *Elec. and Comm. in Jap.*, 83:53–60, 2000.

[69] E. Trinh et T. G. Wang : *J. Fluid Mech.*

[70] E H Trinh, P L Marston et J L Robey : Acoustic measurement of the surface tension of levitated drops. *Journal of Colloid and Interface Science*, 124(1):95–103, 1988.

[71] L.A. CRUM : Tensile strength of water. *Nature*, 278:148–149, 1979.

[72] D. Foresti, M. Nabavi, M. Klingauf, A. Ferrari et D. Poulikakos : Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2013.

[73] Y. Ochiai, T. Hoshi et J. Rekimoto : Three-dimensional mid-air acoustic manipulation by ultrasonic phased arrays. *PLoS ONE*, 9(5):e97590, 2014.

[74] L.A. Crum : *J. Acous. Soc. Am.*

[75] W J Xie et B Wei : Parametric study of single-axis acoustic levitation. *Appl. Phys. Lett.*, 79(6), 2001.

[76] J. Wu : Acoustical tweezers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(5):2140–2143, 1991.

[77] J. Lee, S. Teh, A. Lee, H. Ham Kim, C. Lee et K. K. Shung : Single beam acoustic trapping. *App. Phys. Lett.*, 95:1–3, 2009.

[78] J. Lee, C. Lee, H. H. Kim, A. Jakob, R. Lemor, S-Y. Teh, A Lee et K.K. Shung : Targeted cell immobilization by ultrasound microbeam. *Biotechnology and Bioengineering*, 108(7):1643–1650, 2011.

[79] G. M. Whitesides : The origins and the future of microfluidics. *Nature*, 442, 2006.

[80] M. Evander et J. Nilsson : Acoustofluidics 20 : Applications in acoustic trapping. *Lab Chip*, 12(22):4667–4676, 2012.

[81] J. Friend et L. Y. Yeo : Microscale acoustofluidics : Microfluidics driven via acoustics and ultrasonics. *Rev. Mod. Phys.*, 83:647–704, 2011.

[82] R. Barnkob, P. Augustsson, T. Laurell et H. Bruus : Acoustic radiation- and streaming-induced microparticle velocities determined by microparticle image velocimetry in an ultrasound symmetry plane. *Physical Review E*, 056307:1–11, 2012.

[83] P. B. Muller, M. Rossi, Á. G. Marín, R. Barnkob, P. Augustsson, T. Laurell, C. J. Kähler et H. Bruus : *Physical Review E*, 88(2):023006, 2013.

[84] D. Rabaud, P. Thibault, M. Mathieu et P. Marmottant : Acoustically bound microfluidic bubble crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 106:134501, 2011.

[85] S. K. Chung et S. K. Cho : On-chip manipulation of objects using mobile oscillating bubbles. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18(12):125024, 2008.

[86] P Brunet, M Baudoin, O Bou Matar et F Zoueshtiagh : Droplet displacements and oscillations induced by ultrasonic surface acoustic waves : a quantitative study. *Physical Review E*, 81(3):036315, 2010.

[87] A. Bussonnière, Y. Miron, M. Baudoin, O. Bou Matar, M. Grandbois, P. Charette et A. Renaudin : Cell detachment and label-free cell sorting using modulated surface acoustic waves (saws) in droplet-based microfluidics. *Lab on a Chip*, 14(18):3556–3563, 2014.

[88] J. Shi, D. Ahmed, X. Mao, S.-C. S. Lin, A. Lawit et T.J. Huang : Acoustic tweezers : patterning cells and microparticles using standing surface acoustic waves (ssaw). *Lab on a Chip*, 9(20):2890–2895, 2009.

[89] S B Q Tran, P Marmottant et P Thibault : Fast acoustic tweezers for the two-dimensional manipulation of individual particles in microfluidic channels. *Appl. Phys. Lett.*, 101(11), 2012.

[90] K. Volke-Sepúlveda, A.O. Santillán et R.R. Bullosa : Transfer of angular momentum to matter from acoustical vortices in free space. *Phys. Rev. L.*, 100: 024302, 2008.

[91] K.D. Skeldon, C. Wilson, M. Edgar et M.J. Padgett : An acoustic spanner and its associated rotational doppler shift. *New. Journ. Phys*, 10:013018, 2008.

[92] C.E.M Demore, Z. Yang, A. Volovick, S. Cochran, M.P. MacDonald et G.C. Spalding : Mechanical evidence of the orbital angular momentum to energy ratio of vortex beams. *Phys. Rev. Lett*, 108:194301, 2012.

[93] A. Anhäuser, R. Wunenburger et E. Brasslet : Acoustical rotational manipulation using orbital angular momentum transfer. *Phys. Rev. Lett*, 109:034301, 2012.

[94] D. Baresch, J.-L. Thomas et R. Marchiano : Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 133(1):25–36, 2013.

[95] L.D. Landau et E.M. Lifshitz : *Fluid Mechanics*. Pergamon, New York, 1959.

[96] V.C. Anderson : Sound scattering from a fluid sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 22:426–431, 1950.

[97] J.J. Faran : Sound scattering by solid cylinders and spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 23:405–418, 1951.

[98] P.S. Epstein et R.R. Carhart : The absorption of sound in suspensions and emulsions. i. water fog in air. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25(3):553–565, 1953.

[99] J.R. Allegra et S.A. Hawley : Attenuation of sound in suspensions and emulsions : Theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(5):1545–1564, 1971.

[100] N.G. Einspruch, E.J. Witterholt et R. Truell : Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium. *J. Appl. Phys.*, 31(5):806–818, 1960.

[101] P.C. Waterman : New formulation of acoustic scattering. *J. Acoust. Soc. Am.*, 45(6):1417–1429, 1969.

[102] D.T. Blackstock : *Fundamentals of physical acoustics*, chapitre 10. John Wiley & Sons, New York, 2000.

[103] J.A. Stratton : *Electromagnetic Theory*, chapitre 6-7. McGraw-Hill, New York, 1941.

[104] D. Royer et E. Dieulesaint : *Ondes élastiques dans les solides*. Elsevier Masson, 1996.

[105] V.M. Ayres et G C Gaunaurd : Acoustic Resonance Scattering by Viscoelastic Objects. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81(2), 1986.

[106] I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik : *Table of Integrals, Series, and Products*, chapitre 8. Elsevier, Burlington, 7 édition, 2007.

[107] M. Abramowitz et I. Stegun : *Handbook of mathematical functions*, chapitre 8-9. Dover Publications, New York, 1965.

[108] D. Brill et G. Gaunaurd : Resonance Theory of Elastic Waves Ultrasonically Scattered From an Elastic Sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81:1–21, 1986.

[109] G Gouesbet et G Grehan : On the scattering of light by a Mie scatter center located on the axis of an axisymmetric light profile. *J. Opt.*, 97, 1982.

[110] B Maheu, G Gouesbet et G Grehan : A concise presentation of the generalized Lorenz-Mie theory for arbitrary location of the scatterer in an arbitrary incident profile. *J. Opt.*, 19(2):59–67, 1987.

[111] J. Durnin : Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(4):651–654, 1987.

[112] J. Durnin, J.J. Miceli et J.H. Eberly : Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1499–1501, 1987.

[113] T.H. Havelock : Mathematical analysis of wave propagation in isotropic space of p dimensions. *Proc. Lond. Soc. Math.*, (2):122–137, 1904.

[114] J.F. Nye et M.V. Berry : Dislocations in wave trains. *Proc. R. Soc. London*, 336:165–190, 1974.

[115] M. R. Dennis, K. O'Holleran et M. J. Padgett : Singular optics : optical vortices and polarization singularities. *Progress in Optics*, 53:293–363, 2009.

[116] B.T. Hefner et P.L. Marston : An acoustical helicoidal wave transducer with applications for the alignment of ultrasonic and underwater systems. *J. Acous. Soc. Am.*, 106(6):3313–3316, 1999.

[117] J.-L. Thomas et R. Marchiano : Pseudo angular momentum and topological charge conservation for nonlinear acoustical vortices. *Phys. Rev. Lett.*, 91(24):1–4, 2003.

[118] J.-L. Thomas et R. Marchiano : Synthesis and analysis of linear and nonlinear acoustical vortices. *Phys. Rev. E.*, 71:1–11, 2005.

[119] R. Marchiano et J.-L. Thomas : Doing arithmetic with nonlinear acoustic vortices. *Phys. Rev. Lett.*, 101:1–4, 2008.

[120] J. Lee, K.l Ha et K. K. Shung : A theoretical study of the feasibility of acoustical tweezers : Ray acoustics approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(5), 2005.

[121] P.M. Morse et K.U. Ingard : *Theoretical Acoustics*. Mc Graw-Hill Company, New York, 1968.

[122] W. L Nyborg : Radiation Pressure on a Small Rigid Sphere. *J. Acous. Soc. Am.*, 42(5), 1967.

[123] J. Wu et G. Du : Acoustic radiation force on a small compressible sphere in a focused beam. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(3):997–1003, 1990.

[124] M. Minnaert : On musical air-bubbles and the sound of running water. *Philosophical Magazine*, 16(104):235–248, 1933.

[125] R. Löfstedt et S. Putterman : Theory of long wavelength acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(4):2027–2033, 1991.

[126] C P Lee et T G Wang : Acoustic Radiation Force on a Bubble. 93(3):1637–1640, 1993.

[127] O.V. Rudenko et S.I. Soluyan : *Theoretical Foundations of nonlinear acoustics*. Studies in Soviet Science, New York, 1977.

[128] H. Schlichting : *Boundary Layer Theory*. Pergamon, London, 1955.

[129] S.D. Danilov et M.A. Mironov : Mean force on a small sphere in a sound field in a viscous fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(1):143–153, 2000.

[130] A. A. Doinikov : Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. I. General formula. 101:713–721, 1997.

[131] Z. Bouchal, J. Wagner et M. Chlup : Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam. *optics Comm.*, (151):207–211, 1998.

[132] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett et K. Dholakia : Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. *Nature*, 419(6903):145–7, 2002.

[133] A. Novitsky, C. Wei Qiu et H. Wang : Single gradientless light beam drags particles as tractor beams. *Phys. Rev. Lett.*, 107:1–4, 2011.

[134] D. B. Ruffner et D. G. Grier : Optical Conveyors : A Class of Active Tractor Beams. *Physical Review Letters*, 109(16):163903, 2012.

[135] O. Brzobohatý, V. Karásek, M. Šiler, L. Chvátal, T. Čižmár et P. Zemánek : Experimental demonstration of optical transport, sorting and self-arrangement using a 'tractor beam'. *Nature Photonics*, 7:123–127, 2013.

[136] C. E. M. Démoré, P. M. Dahl, Z. Yang, P. Glynne-Jones, A. Melzer, S. Cochran, M. P. MacDonald et G. C. Spalding : Acoustic tractor beam. *Phys. Rev. Lett.*, 112:174302, 2014.

[137] D. Baresch, J-L. Thomas et R. Marchiano : Spherical vortex beams of high radial degree for enhanced single-beam tweezers. *Journ. Appl. Phys.*, 113(18):184901, 2013.

[138] F.G. Mitri et G.T. Silva : Off-axial acoustic scattering of a high-order Bessel vortex beam by a rigid sphere. *Wave Motion*, 48(5):392–400, 2011.

[139] J.A. Lock et G. Gouesbet : Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized lorenz–mie theory. i. on-axis beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(9):2503–2515, 1994.

[140] G. Gouesbet, C. Letellier, K. F. Ren et G. Gréhan : Discussion of two quadrature methods of evaluating beam-shape coefficients in generalized lorenz–mie theory. *Appl. Opt.*, 35(9):1537–1542, 1996.

[141] T.A. Nieminen, H. Rubinsztein-Dunlop et N.R. Heckenberg : Multipole expansion of strongly focussed laser beams. *Journ. Quant. Spect. Rad. Trans.*, 79-80:1005–1017, 2003.

[142] T.A. Nieminen, V.L. Loke, A.B. Stilgoe, G. Knöner, A.M. Branczyk et N.R. Heckenberg : Optical tweezers computational toolbox. *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, 9:196–203, 2007.

[143] C.H. Choi, J. Ivanic, M.S. Gordon et K. Ruedenberg : Rapid and stable determination of rotation matrices between spherical harmonics by direct recursion. *J. Chem. Phys.*, 111(19):8825–8831, 1987.

[144] N. Gumerov et R. Duraiswami : Recursions for the Computation of Multipole Translation and Rotation Coefficients for the 3-D Helmholtz Equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(4):1344–1381, 2004.

[145] G. Videen : *Light Scattering from Microstructures*, pages 81–96. Springer, Berlin, 2000.

[146] P.A. Martin : *Multiple Scattering - Interaction of time harmonic waves with N obstacles*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[147] B. U. Felderhof et R.B. Jones : Addition theorems for spherical wave solutions of the vector Helmholtz equation. *J. Math. Phys.*, 28(4):836–839, 1987.

[148] E. Leung, N. Jacobi et T. Wang : Acoustic radiation force on a rigid sphere in a resonance chamber. 70(6):1762–1767, 1981.

[149] J.D. Jackson : *Classical Electrodynamics*, chapitre 16. John Wiley and Sons Inc., New York, 1962.

[150] B. T. Hefner et P. L Marston : Backscattering enhancements associated with subsonic Rayleigh waves on polymer spheres in water : Observation and modeling for acrylic spheres. *J. Acous. Soc. Am.*, 107(4), 2000.

[151] H. Überall : Surface Waves in Acoustics. *Phys. Acoust.*, 10, 1973.

[152] A O Williams : Acoustic Intensity Distribution from a "Piston" Source. *J. Acoust. Soc. Am.*, 17(3), 1946.

[153] H. T. ONeil : Theory of Focusing Radiators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 21(5), 1949.

[154] T. Hasegawa, N. Inoue et K. Matsuzawa : A new theory for the radiation from a concave piston source. *J. Acoust. Soc. Am.*, 82(2):706–708, 1987.

[155] F. Coulouvrat : Continuous field radiated by a geometrically focused transducer : Numerical investigation and comparison with an approximate model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(3):1663–1675, 1993.

[156] C. Lee, J. Seob Jeong, J. Youn Hwang, J. Lee et K. Kirk Shung : Non-contact multi-particle annular patterning and manipulation with ultrasound microbeam. *Appl. Phys. Lett.*, 104(24):244107, 2014.

[157] J. Guck, R. Ananthakrishnan, H. Mahmood, T. J. Moon, C. C. Cunningham et J. Käs : The optical stretcher : a novel laser tool to micromanipulate cells. *Biophysical journal*, 81(2):767–84, 2001.

[158] G. Thalhammer, R. Steiger, S. Bernet et M. Ritsch-Marte : Optical macrotweezers : trapping of highly motile micro-organisms. *Journal of Optics*, 13(4): 044024, 2011.

[159] V.Y. Bazhenov, M. V. Vasnetsov et M.S. Soskin : Laser beams with screw dislocations in their wavefronts. *JETP Lett.*, 52(9):429–431, 1991.

[160] V.Y. Bazhenov, M. S. Soskin et M. V. Vasnetsov : Screw Dislocations in Light Wavefronts. *Journ. Mod. Opt.*, 39(5):985–990, 1992.

[161] E. R. Dufresne et D. G. Grier : Optical tweezer arrays and optical substrates created with diffractive optics. *Rev. Sci. Inst.*, 69(5):1974–1977, 1998.

[162] J. E. Curtis et D. G. Grier : Structure of optical vortices. *Phys. Rev. Lett.*, 90:133901, 2003.

[163] R. Marchiano : *Singularités d'amplitude et de phase en acoustique non-linéaire. Application au bang sonique.* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2003.

[164] D. Fournier, A.C. Boccara et J. Badoz : Dichroism measurements in photoacoustic spectroscopy. *Appl. Phys. Lett.*, 32(10):640–642, 1978.

[165] I. V. Basistiy, V.Y. Bazhenov, M. S. Soskin et M. V. Vasnetsov : Optics of light beams with screw dislocations. *Opt. Comm.*, 103(5–6):422–428, 1993.

[166] ImageJ. `http://imagej.nih.gov/ij/`. Accessed : 2014-09-7.

[167] A. Riaud, M. Baudoin, J-L. Thomas et O. Bou Matar : Cyclones and attractive streaming generated by acoustical vortices. *Phys. Rev. E*, 90:013008, 2014.

[168] L. Zhang et P.L. Marston : Angular momentum flux of nonparaxial acoustic vortex beams and torques on axisymmetric objects. *Phys. Rev. E.*, 84:065601, 2011.

[169] V.F.K. Bjerknes : *Fields of force.* Columbia University Press, New York, 1906.

[170] M. Azarpeyvand, M. A. Alibakhshi et R. Self : Effects of multi-scattering on the performance of a single-beam acoustic manipulation device. *IEEE TUFFC*, 59(8):1741–9, 2012.

[171] G.T. Silva et H. Bruus : *arXiv*, (arXiv :1408.5638):11, 2014.

[172] G. Mie : *Ann. Physik.*, 25:377, 1908.

[173] P. Debye : *Ann. Physik.*, 30:57, 1909.

[174] C. Feuillade et C. S. Clay : Anderson (1950) revisited. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(2):553, 1999.

[175] F. IHLENBURG : *Finite element analysis of acoustic scattering*. Springer, New York, 1998.

[176] Optgeo. `http://jeanmarie.biansan.free.fr/optgeo.html`. Accessed : 2014-06-26.

Annexes

Annexe A

Formalisme des harmoniques sphériques

Lorsqu'on recherche les solutions à variables séparées $\phi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, on est amené à résoudre trois équations différentielles bien connues en physique. D'une part pour la dépendance radiale en posant $x = k_0 r$, $R(r)$ est solution de l'équation de Bessel sphérique :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n[n+1]\right) y = 0 \tag{A.1}$$

Elle a pour couple de solutions les fonctions de Bessel et de Neumann sphériques [107] : $j_n(x)$ et $y_n(x)$. Mais aussi toute combinaison linéaire de celles-ci. On utilise fréquemment les fonctions de Hankel sphériques de première et seconde espèce $h_n^{(1)}(x)$ et $h_n^{(2)}(x)$ liées aux précédentes par :

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \quad \text{et} \quad h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x)$$

Leur comportement à l'infini est le suivant [107] :

$$\lim_{x\to\infty} h_n^{(1)}(x) = (-i)^{n+1}\frac{e^{ix}}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} h_n^{(2)}(x) = (i)^{n+1}\frac{e^{-ix}}{x} \tag{A.2}$$

Ces deux fonctions permettent de rendre compte de la propagation d'ondes sphériques divergentes et convergentes respectivement. Pour la dépendance en θ, en posant $x = \cos(\theta)$ la fonction $\Theta(\theta)$ est solution de l'équation généralisée de Legendre :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(n[n+1] - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0 \tag{A.3}$$

Dont les solutions physiquement acceptables sont les polynômes associés de Legendre : $P_n^m(x)$. Ils sont reliés aux polynômes orthogonaux de Legendre par [107] :

$$P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad \text{tel que} \quad 0 \le m \le n$$

L'équation différentielle pour la dépendance azimutale en φ est plus classique et a pour solution : $e^{im\varphi}$. Finalement, l'équation de Helmholtz (Chapitre II, équation (23)) en coordonnées sphériques a pour solution :

$$\phi(r,\theta,\varphi) = A_0 f_n(k_0 r) Y_n^m(\theta,\varphi) \quad \text{avec} \quad f_n \equiv j_n,\, y_n \,\text{ou}\, h_n^{(1,2)} \tag{A.4}$$

$Y_n^m(\theta,\varphi)$ sont les *harmoniques sphériques* complexes, telles que :

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad \text{avec} \quad |m| \leq n \tag{A.5}$$

Les premières harmoniques sphériques s'écrivent

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= 1 \\ Y_1^0 &= \cos\theta \\ Y_1^1 &= -e^{i\varphi}\sin\theta \\ Y_2^1 &= -3e^{i\varphi}\cos\theta\sin\theta \\ Y_2^2 &= 3e^{i2\varphi}\sin^2\theta \end{aligned} \tag{A.6}$$

et de manière importante :

$$Y_n^{-m} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Y_n^{m*} \tag{A.7}$$

Des propriétés fondamentales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{-i\ell\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\delta_{m,\ell} \tag{A.8}$$

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_p^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\delta_{p,n} \tag{A.9}$$

on obtient la relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^m(\theta,\varphi) Y_p^{\ell *}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\delta_{p,n}\delta_{m,\ell} \tag{A.10}$$

où $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ est l'angle solide infinitésimal. La solution (A.4) est un mode propre de l'équation de Helmholtz en espace libre. Les harmoniques sphériques constituent une base sur laquelle tout champ acoustique peut être décomposé.

Ces résultats combinés à la solution de l'équation de Helmholtz vectorielle donnée en Annexe B permettent de déterminer les fonctions dites *harmoniques sphériques vectorielles* largement utilisées en mécanique quantique et électromagnétisme.

Annexe B

Potentiels scalaires de Debye

On a classiquement la décomposition du champ de déplacement $\vec{u}$ en une partie longitudinale totalement décrite par un potentiel scalaire $\vec{\nabla}\Phi$ et la partie solénoïdale, elle est décrite par le potentiel vecteur $\vec{A}$, qui satisfait :

$$(\Delta + k_t^2)\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \vec{0}\,, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t} = \omega\sqrt{\frac{\rho_p}{\mu_p}} \tag{B.11}$$

Comme nous l'avons évoqué à la section II.2. Cette dernière équation n'est utilisable en pratique que dans peu de cas. Par exemple dans un repère cartésien orthogonal. Chaque composante de $\vec{A}$ est alors solution de l'équation de Helmholtz scalaire. Dans un repère sphérique, l'écriture du Laplacien montre immédiatement que cette propriété n'est pas vérifiée dans cette base. On réécrit cette dernière équation sous la forme :

$$-\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge\vec{A} + k_t^2\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \vec{0} \tag{B.12}$$

où la condition de Jauge $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ a été utilisée. Faisons l'usage d'un potentiel scalaire $\chi(r,\theta,\varphi)$ et d'un vecteur radiale $f\vec{e_r}$ pour définir les opérateurs :

$$\vec{M} = \vec{\nabla}\wedge(\chi f\vec{e_r}) \quad , \quad \vec{N} = 1/k_t\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge(\chi f\vec{e_r}) \tag{B.13}$$

On va alors montrer que ces deux opérateurs satisfont l'équation (B.12) sous certaines conditions. Les composantes de $\vec{M}$ s'écrivent facilement :

$$M_r = 0 \quad , M_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\chi f)}{\partial\varphi} \quad , M_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial(\chi f)}{\partial\theta} \tag{B.14}$$

Nous allons maintenant procéder à l'étape plus délicate d'exprimer les composantes de l'opérateur $-\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge\vec{M} + k_t^2\vec{M}$. Sa composante en $\vec{e_r}$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left(M_\theta + r\frac{\partial M_\theta}{\partial r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[M_\varphi + r\frac{\partial M_\varphi}{\partial r}\right] = 0 \tag{B.15}$$

qui d'après les propriétés de $\vec{M}$ est identiquement nulle. Après quelques étapes de simplifications, la composante suivant $\vec{e_\theta}$ donne :

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rM_\theta)\right]-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta M_\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(rM_\theta)\right)\right]\right)+k_t^2M_\theta \tag{B.16}$$

qui se réduit à :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\chi f)+\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\chi f)\right)+\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\chi f)+\frac{k_t^2}{r}(\chi f)\right] \tag{B.17}$$

Sous réserve de poser $\vec{f}=r\vec{e_r}$, jusqu'à maintenant la fonction était supposée quelconque, on identifie que le vecteur $\vec{M}$ qui satisfait l'équation (B.12) est tel que :

$$(\Delta+k_t^2)\chi=B(r,\theta) \tag{B.18}$$

La projection suivant $\vec{e_\varphi}$ nous donne de manière très similaire :

$$(\Delta+k_t^2)\chi=C(r,\varphi) \tag{B.19}$$

Il n'y alors que deux solutions possibles. Soit, la fonction scalaire χ introduite est fonction de r uniquement. On est alors en train d'écrire la solution triviale $\vec{M}=\vec{0}$. Sinon on doit supposer que les fonctions d'intégration $B(r,\theta)$ et $C(r,\varphi)$ sont identiquement nulles. On conclue alors que le vecteur $\vec{M}$ est solution de l'équation vectorielle de Helmholtz si et seulement si le potentiel scalaire χ satisait l'équation de Helmholtz scalaire :

$$(\Delta+k_t^2)\chi=0 \tag{B.20}$$

En prenant le rotationnel de l'Eq. (B.12) et en remarquant que $k_t\vec{N}=\nabla\wedge\vec{M}$, on montre immédiatement que ce deuxième opérateur satisfait l'équation de Helmholtz vectorielle. Par la définition donnée à $\vec{M}$ et $\vec{N}$, on a construit deux solutions indépendantes et orthogonales. Ainsi tout vecteur $\vec{A}$ solution de Helmholtz peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux opérateurs :

$$\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge(r\vec{e_r}\psi)+\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge(r\vec{e_r}\chi)/k_t \tag{B.21}$$

Les potentiels ψ et χ sont souvent appelés les potentiels scalaires de Debye même si successivement Mie en 1908 et Debye en 1909 en ont fait usage pour traiter le problème électromagnétique de la diffraction d'une sphère diélectrique [103, 172, 173]. De manière très convenable pour les calculs en géométrie sphérique, ils pourront être décomposés dans la base des harmoniques sphériques.

Annexe C

Composantes du vecteur force

Nous avons vu dans la section II.3.2 que les trois composantes de la force prenaient la forme suivante :

$$F_{x,y,z} = -\frac{\rho_0 (ka)^2 \phi_0^2}{2} \left(I^{(1)}_{x,y,z} + I^{(2)}_{x,y,z} \right) \tag{C.22}$$

d'après les équations (64) et (65) de la section II.1, ces intégrales s'écrivent :

$$I_x^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |F_d|^2 \sin^2\theta \cos\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.23}$$

$$I_y^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |F_d|^2 \sin^2\theta \sin\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.24}$$

$$I_z^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |F_d|^2 \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.25}$$

et

$$I_x^{(2)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Re\{F_d F_i^{(1)*}\} \sin^2\theta \cos\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.26}$$

$$I_y^{(2)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Re\{F_d F_i^{(1)*}\} \sin^2\theta \sin\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.27}$$

$$I_z^{(2)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Re\{F_d F_i^{(1)*}\} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.28}$$

Il faut maintenant exprimer les deux intégrants qui apparaissent. On peut scinder $|F_d|^2$ en deux doubles séries :

$$|F_d|^2 = \frac{1}{(ka)^2} \sum_{n,m} i^{-n} R_n A_n^m e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta) \times \sum_{p,\ell} i^p R_p^* A_p^{\ell *} e^{-i\ell\varphi} P_p^\ell(\cos\theta) \tag{C.29}$$

et de manière analogue

$$F_d F_i^{(1)*} = \frac{1}{(ka)^2} \sum_{p,\ell} i^{-p} R_p A_p^\ell e^{i\ell\varphi} P_p^\ell(\cos\theta) \times \sum_{n,m} i^n A_n^{m*} e^{-im\varphi} P_n^m(\cos\theta) \tag{C.30}$$

Ainsi les intégrales $I_z^{(1)}$ et $I_z^{(2)}$ sur φ seront proportionnelles à :

$$\mathrm{I}_{m\ell} = \int_0^{2\pi} e^{i(m-\ell)\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\delta_{m,\ell} \tag{C.31}$$

$$\text{où } \delta_{m,\ell} = \begin{cases} 1 \text{ if } m = \ell \\ 0 \text{ if } m \neq \ell \end{cases}$$

et l'intégrale sur θ s'écrit alors :

$$\mathrm{I}_{np} = \int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_p^m(x)\; x\,\mathrm{d}x \tag{C.32}$$

où on a posé $x = \cos\theta$. Faisant usage des relations d'orthogonalité et de récurrence suivantes [107] :

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_p^m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\;\delta_{k,\ell} \tag{C.33}$$

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n-m+1)P_{n+1}^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) \tag{C.34}$$

on obtient finalement :

$$\mathrm{I}_{np} = S_n^{m+}\delta_{p,n+1} + S_n^{m-}\delta_{p,n-1} \tag{C.35}$$

$$S_n^{m+} = \frac{2(n+m+1)!}{(2n+1)(2n+3)(n-m)!} = S_{n+1}^{m-} \tag{C.36}$$

$$S_n^{m-} = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(2n-1)(n-m-1)!} \tag{C.37}$$

Il vient pour les intégrales $I_z^{(1)}$ et $I_z^{(2)}$:

$$I_z^{(1)} = \frac{2\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n}\left[R_n A_n^m\left(iS_n^{m+}R_{n+1}^* A_{n+1}^{m*} - iS_n^{m-}R_{n-1}^* A_{n-1}^{m*}\right)\right] \tag{C.38}$$

$$I_z^{(2)} = \frac{2\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n}\Re\left\{\left[A_n^{m*}\left(-iS_n^{m+}A_{n+1}^m R_{n+1} + iS_n^{m-}A_{n-1}^m R_{n+1}\right)\right]\right\} \tag{C.39}$$

D'après la définition des coefficients du champ incident A_n^m (section II.2, Eq. (28)) et la propriété $P_n^m \equiv 0$ si $n < 0$, on doit vérifier $A_{-1}^m \equiv 0$. Il est donc nécessaire de ré-indexer le deuxième terme de chaque intégrale en remarquant que $S_{n+1}^{m-} = S_n^{m+}$ pour continuer les simplifications et regroupements de termes. Il vient :

$$I_z^{(1)} = \frac{-4\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} S_n^{m+}\left[\Im\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\}(\alpha_n\alpha_{n+1}+\beta_n\beta_{n+1})\right.$$
$$\left.+\Re\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\}(\beta_n\alpha_{n+1}-\alpha_n\beta_{n+1})\right] \quad \text{(C.40)}$$

$$I_z^{(2)} = \frac{2\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} S_n^{m+}\left[-\Im\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\}(\alpha_n+\alpha_{n+1})\right.$$
$$\left.+\Re\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\}(\beta_{n+1}-\beta_n)\right] \quad \text{(C.41)}$$

où on a introduit les parties réelles et imaginaires du coefficient de diffusion, $R_n = \alpha_n + i\beta_n$. On obtient l'expression de F_z (Eq. (84)) en utilisant les équations (C.40) et (C.41) dans (C.22). Pour la suite, le coefficient Q_n^m est défini tel que :

$$Q_n^m = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(2n+3)(n-m)!} \quad \text{(C.42)}$$

et $S_n^{m+} = (n+m+1)Q_n^m$

En ce qui concerne les intégrales restantes pour F_x et F_y, une première intégration sur φ donne cette fois-ci :

$$\mathrm{I}_{m\ell}^x = \int_0^{2\pi} e^{i(m-\ell)\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \pi\left(\delta_{\ell,m+1}+\delta_{\ell,m-1}\right) \quad \text{(C.43)}$$

$$\mathrm{I}_{m\ell}^y = \int_0^{2\pi} e^{i(m-\ell)\varphi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -i\pi\left(\delta_{\ell,m+1}-\delta_{\ell,m-1}\right) \quad \text{(C.44)}$$

Par conséquent, il y a maintenant deux contributions distinctes pour l'intégration sur θ. En utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\sqrt{1-x^2}(2n+1)P_n^m(x) = P_{n-1}^{m+1}(x) - P_{n+1}^{m+1}(x)$$

On a alors pour les termes proportionnels à $\delta_{\ell,m+1}$ et $\delta_{\ell,m-1}$ les deux intégrales suivantes respectivement à traiter :

$$\mathrm{I}_{np}^1 = \frac{1}{(2n+1)}\int_{-1}^{1}\left(P_{n-1}^{m+1}(x) - P_{n+1}^{m+1}(x)\right)P_p^{m+1}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{I}_{np}^2 = \frac{1}{(2p+1)}\int_{-1}^{1}\left(P_{p-1}^{m}(x) - P_{p+1}^{m}(x)\right)P_n^{m}(x)\,\mathrm{d}x$$

En utilisant de nouveau l'orthogonalité des polynômes de Legendre associés (C.33). Il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^1_{np} &= Q^{m+1}_{n-1}\delta_{p,n-1} - V^m_n Q^m_n \delta_{p,n+1}\\ \mathrm{I}^2_{np} &= Q^m_n \delta_{p,n+1} - V^{m-1}_{n-1} Q^{m-1}_{n-1}\delta_{p,n-1}\end{aligned}$$

où le coefficient Q^m_n est donné à l'équation (C.42) et $V^m_n = (n+m+2)(n+m+1)$. On peut maintenant écrire pour la composante sur x :

$$\begin{aligned} I^{(1)}_x &= \frac{\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} iR_n A^m_n \left[Q^m_n\left(A^{m-1*}_{n+1} - V^m_n A^{m+1*}_{n+1}\right)R^*_{n+1}\right.\\ &\qquad \left. + \left(V^{m-1}_{n-1}Q^{m-1}_{n-1}A^{m-1*}_{n-1} - Q^{m+1}_{n-1}A^{m+1*}_{n-1}\right)R^*_{n-1}\right] \qquad \text{(C.45)}\\ I^{(2)}_x &= \frac{\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} iR_n A^m_n \left[Q^m_n\left(A^{m-1*}_{n+1} - V^m_n A^{m+1*}_{n+1}\right)\right.\\ &\qquad \left. + \left(V^{m-1}_{n-1}Q^{m-1}_{n-1}A^{m-1*}_{n-1} - Q^{m+1}_{n-1}A^{m+1*}_{n-1}\right)\right] \qquad \text{(C.46)}\end{aligned}$$

De la même manière que pour $I^{(1,2)}_z$, la deuxième partie de ces intégrales doit être réindexée. On sera amené à poser $n' = n-1$, $m' = m+1$ et $m'' = m-1$ pour obtenir des séries avec des variables muettes telles que $0 \le n' \le \infty$ et $-n' \le m', m'' \le n'$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} I^{(1)}_x &= \frac{-2\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} Q^m_n \left[(\Im\{A^m_n A^{m-1*}_{n+1}\} - V^m_n \Im\{A^m_n A^{m+1*}_{n+1}\})(\alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_n\beta_{n+1})\right.\\ &\qquad \left. +(\Re\{A^m_n A^{m-1*}_{n+1}\} - V^m_n \Re\{A^m_n A^{m+1*}_{n+1}\})(\beta_n\alpha_{n+1} - \alpha_n\beta_{n+1})\right] \qquad \text{(C.47)}\\ I^{(2)}_x &= \frac{-\pi}{(ka)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|<n} Q^m_n \left[(\Im\{A^m_n A^{m-1*}_{n+1}\} - V^m_n \Im\{A^m_n A^{m+1*}_{n+1}\})(\alpha_n + \alpha_{n+1})\right.\\ &\qquad \left. -(\Re\{A^m_n A^{m-1*}_{n+1}\} - V^m_n \Re\{A^m_n A^{m+1*}_{n+1}\})(\beta_{n+1} - \beta_n)\right] \qquad \text{(C.48)}\end{aligned}$$

Qui introduites dans l'équation (C.22) donne directement l'expression de F_x (Eq. (82)) obtenue à la section II.3.2. Le calcul des intégrales $I^{(1)}_y$ et $I^{(2)}_y$ est tout à fait similaire partant de l'équation (C.44) au lieu de (C.43).

Annexe D

Expression des coefficients du champ incident

Dans la section III.1.2, nous avons établi que les coefficients du champ incident introduits pour la décomposition (28) du chapitre II.2, pouvaient être déduits de :

$$A_n^m = \frac{1}{\phi_0 j_n(kr)} \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \int_\Omega \phi_i Y_n^{m*} \, \mathrm{d}\Omega \tag{D.49}$$

où $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$ est l'angle solide, Y_n^m un harmonique sphérique et ϕ_i le champ incident.

A proximité du centre de la sphère, le champ incident possède un développement de Taylor :

$$\phi_i(\vec{r}) = \phi_i(\vec{0}) + \vec{\nabla}\phi_i(\vec{0}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{2}(\mathrm{H}(\phi_i)_{|_{(\vec{0})}} \vec{r}) \cdot \vec{r} + \dots \tag{D.50}$$

où $\mathrm{H}(\phi)$ est la matrice Hessienne du potentiel ϕ_i :

$$\mathrm{H}_{jk}(\phi_i) = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j \partial x_k} \tag{D.51}$$

Les produits scalaires $\vec{\nabla}\phi_i \cdot \vec{r}$ et $(\mathrm{H}(\phi_i)\vec{r}) \cdot \vec{r}$ s'écrivent :

$$\vec{\nabla}\phi_i(\vec{0}) \cdot \vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial\phi}{\partial x} + r\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial\phi}{\partial y} + r\cos\theta \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{D.52}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}(\phi_i)_{|_{(\vec{0})}} \vec{r}) \cdot \vec{r} = {} & r\sin\theta\cos\varphi \left(r\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + r\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + r\cos\theta \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} \right) \\ & + r\sin\theta\sin\varphi \left(r\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} + r\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + r\cos\theta \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} \right) \\ & + r\cos\theta \left(r\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} + r\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} + r\cos\theta \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right)\end{aligned} \tag{D.53}$$

Les expressions des harmoniques sphériques ont été données en Annexe A à l'équation (A.6). Le calcul des coefficients A_n^m en utilisant les équations (D.49), (D.50) et (D.51) se résumera à linéariser des puissances de sinus et de cosinus :

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= (1-\cos 2x) \\
\sin^3 x &= \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x) \\
\sin^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3) \\
\sin^5 x &= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \\
\cos^3 x &= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) \\
\cos^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3) \\
\cos^5 x &= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)
\end{aligned}$$

et utiliser les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi &= \pi \\
\int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi}\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi &= \pm i\pi
\end{aligned} \tag{D.54}$$

ainsi que :

$$\lim_{x\to 0} j_n(x) = \frac{x^n}{(2n+1)!!} \tag{D.55}$$

On obtient après un peu d'algèbre :

$$
\begin{aligned}
A_0^0 &= \frac{1}{\phi_0}\phi_i \\
A_1^0 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{3}{k}\frac{\partial\phi_i}{\partial z} \\
A_1^1 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{3}{2k}\left(-\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\right) \\
A_1^{-1} &= \frac{1}{\phi_0}\frac{3}{k}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\right) \\
A_2^0 &= \frac{1}{\phi_0}\left(\frac{5}{2}\phi_i+\frac{15}{2k^2}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial z^2}\right) \\
A_2^1 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{5}{2k^2}\left(-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial z}+i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y\partial z}\right) \\
A_2^{-1} &= \frac{1}{\phi_0}\frac{15}{k^2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial z}+i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y\partial z}\right) \\
A_2^2 &= \frac{1}{\phi_0}\frac{5}{8k^2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}-2i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right) \\
A_2^{-2} &= \frac{1}{\phi_0}\frac{15}{k^2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}+2i\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right)
\end{aligned}
\tag{D.56}
$$

où le champ ϕ_i et ses dérivées sont évaluées en $\vec{r}=\vec{0}$ à l'origine de la sphère.

Annexe E

Diffusion basse fréquence d'une bulle

Les coefficients de diffusion définis à la section II.2, équation (60), pour une sphère élastique prennent une expression légèrement différente pour une sphère fluide [96]. Pour une sphère fluide de rayon a et de densité ρ_f et dans laquelle les ondes se propagent à la vitesse c_f on a [96, 174] :

$$R_n^{(f)} = -\frac{j_n(x)j_n'(x_f) - \tilde{\sigma}\tilde{\lambda}j_n'(x)j_n(x_f)}{h_n(x)j_n'(x_f) - \tilde{\sigma}\tilde{\lambda}h_n'(x)j_n(x_f)} \tag{E.57}$$

où $x = ka$ dans le milieu incident, $x_f = k_f a$, $\tilde{\sigma} = c_f/c$ et $\tilde{\lambda} = \rho_f/\rho_0$.

On ne s'intéresse ici qu'à l'approximation basse fréquence de la section III.1.2, c'est à dire $x, x_f << 1$. Dans ce régime on a vu que :

$$\lim_{x\to 0} j_n(x) = \frac{x^n}{(2n+1)!!} \tag{E.58}$$

$$\lim_{x\to 0} y_n(x) = -x^{-n-1}(2n-1)!! \tag{E.59}$$

et

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x)$$

Ainsi on a besoin pour le mode monopolaire $R_0^{(f)}$ de :

$$j_0(x) = 1 - \frac{x^2}{6} \tag{E.60}$$

$$j_0'(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} \tag{E.61}$$

$$h_0(x) = -\frac{i}{x} + 1 + i\frac{x}{2} \tag{E.62}$$

$$h_0'(x) = \frac{i}{x^2} + \frac{i}{2} - \frac{x}{3} \tag{E.63}$$

Pour mener correctement le développement limité du coefficient R_0, il faut discuter des ordres de grandeur de $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\lambda}$. Que ce soit pour une sphère de fluide ou de gaz, nous aurons en général $\tilde{\sigma} = O(1)$. Pour ce qui est des masses volumiques, pour prendre en compte la réalité d'une bulle, il faudra envisager que $\tilde{\lambda} << 1$. Les développements limités étant effectués en tendant vers zéro, ceci va avoir une influence sur l'expression du

coefficient. Pour la suite nous autorisons $\tilde{\lambda}$ à être de l'ordre $O(x^2)$. En gardant tous les termes pertinents, R_0 s'écrit :

$$R_0^{(f)} = -\frac{-\frac{x_f}{3} + \tilde{\sigma}\tilde{\lambda}\frac{x}{3}}{-\frac{x_f}{3} + \tilde{\sigma}\tilde{\lambda}\frac{x}{3} + i\left(\frac{x_f}{3x} - \frac{\tilde{\sigma}\tilde{\lambda}}{x^2}\right)} \tag{E.64}$$

En introduisant la compressibilité des fluides $\chi = (1/V)(\partial V/\partial p) = 1/(\rho c^2)$ cette expression peut s'écrire :

$$R_0^{(f)} = \frac{-\frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{\chi_f}{\chi}\right)\left[\frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{\chi_f}{\chi}\right) + i\left(1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right)\right]}{\left[\frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{\chi_f}{\chi}\right)\right]^2 + \left[1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right]^2} \tag{E.65}$$

Dans le cas d'une gouttelette fluide, $\tilde{\lambda} = O(1)$ soit $x_f^2/\tilde{\lambda} \to 0$, cette expression redonne :

$$R_0^{(f)} = -\frac{x^6}{9}\left(1 - \frac{\chi_f}{\chi}\right)^2 - i\frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{\chi_f}{\chi}\right) \tag{E.66}$$

C'est exactement l'expression (Eq. (113)) du coefficient monopolaire d'une sphère élastique où on prend alors comme compressibilité celle du solide $\chi_p = 1/(\rho_p(c_\ell^2 - 4/3c_t^2))$. La contribution monopolaire est du même ordre de grandeur que le terme dipolaire R_1.

Par contre, pour le cas d'une bulle avec $\tilde{\lambda} = O(x^2)$, on alors $\chi_f/\chi >> 1$ et on obtient :

$$R_0^{(b)} = -\frac{x^6}{9}\frac{\left(\frac{\chi_f}{\chi}\right)^2}{\left[\frac{x^3}{3}\frac{\chi_f}{\chi}\right]^2 + \left[1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right]^2} + i\frac{x^3}{3}\frac{\frac{\chi_f}{\chi}\left(1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right)}{\left[\frac{x^3}{3}\frac{\chi_f}{\chi}\right]^2 + \left[1 - \frac{x_f^2}{3\tilde{\lambda}}\right]^2} \tag{E.67}$$

Qu'il s'agisse de la partie réelle ou imaginaire, on voit alors apparaître une résonance satisfaisant :

$$x_f^2 = 3\tilde{\lambda} \tag{E.68}$$

$$\omega_R^2 = \frac{3\tilde{\lambda}c_f^2}{a^2} \tag{E.69}$$

$$\omega_R^2 = \frac{3\rho_f c_f^2}{\rho_0 a^2} \tag{E.70}$$

qui pour un gaz tel que l'air peut se mettre sous la forme :

$$\omega_R^2 = \frac{3\gamma p_A}{\rho_0 a^2} \tag{E.71}$$

c'est la fréquence de résonance de Minnaert où p_A est la pression ambiante de l'air et γ le coefficient polytropique [124]. Cette résonance basse fréquence est typique des bulles et autres diffuseurs très compressibles en comparaison au fluide ambiant. Notons que le coefficient monopolaire $R_0^{(b)}$ dans ce régime domine le terme dipolaire $R_1^{(b)}$ d'un facteur $1/\tilde{\lambda}^2 \simeq O(1/x^4)$ pour la partie réelle et $1/\tilde{\lambda} \simeq O(1/x^2)$ pour la partie imaginaire. Le terme dipolaire prend une valeur limitée dans ce régime :

$$R_1^{(b)} = -\frac{x^6}{9} - i\frac{x^3}{3} \quad \text{quand} \quad \tilde{\lambda} << 1 \tag{E.72}$$

Enfin, a $\tilde{\lambda}$ fixé, si on continue à faire tendre la fréquence vers zéro, *i.e.* $x_f \to 0$, on retrouve un comportement du coefficient monopolaire décrit par l'équation (E.66).

Annexe F

Correction visqueuse au coefficient dipolaire R_1

Dans les travaux fondateurs de Epstein et Carhart [98] puis de Allegra et Hawley [99], il a été question d'évaluer l'atténuation d'une onde acoustique se propageant dans un système de multiples petits diffuseurs. Les deux travaux ont considéré l'importante influence de la viscosité du milieu incident et éventuellement celui du diffuseur [98]. La viscosité dynamique ν intervient dans le calcul du coefficient de diffusion dipolaire R_1. Lorsque la viscosité est prise en compte dans le fluide, l'excitation dipolaire de la sphère doit prendre en compte une couche limite visqueuse δ pour satisfaire les conditions aux limites à la surface de celle-ci. Cette couche limite visqueuse a pour expression :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\rho_0 \omega}} \tag{F.73}$$

et est donc proportionnelle à l'inverse de la racine carré de la fréquence. Dans cette couche des ondes transverses de nombre d'onde $k_\nu = (1+i)\sqrt{(\rho_0\omega/2\nu)}$ sont générées et décroissent exponentiellement avec l'épaisseur δ. Allegra et Hawley donnent une expression du coefficient R_1 dans le régime de petite sphère ($a \ll \lambda$) (équation 15 dans [99]) :

$$R_1^{(\mathrm{AH})} = i\frac{x^3}{3}\frac{(\rho_p - \rho_0)h_2^{(1)}(x_\nu)}{2(\rho_0 - \rho_p)h_0^{(1)}(x_\nu) + 3\frac{\rho_0}{\rho_p}h_2^{(1)}(x_\nu)} \tag{F.74}$$

où $x = ka << 1$, $x_\nu = (1+i)a/\delta$, ρ_p et ρ_0 sont la densité de la particule et du fluide respectivement. Il va être possible de trouver une expression explicite de ce coefficient en fonction de x et du paramètre sans dimension $\tilde{\delta} = \delta/a$. Les fonctions de Hankel de première espèce [107] d'ordre 0 et 2 ont pour expression :

$$h_0^{(1)}(x) = -i\frac{e^{ix}}{x} \tag{F.75}$$

$$h_2^{(1)}(x) = \left(\frac{i}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3i}{x^3}\right)e^{ix} \tag{F.76}$$

La fonction de Hankel de seconde espèce peut se réécrire de la manière qui suit :

$$h_2^{(1)} = \left(\frac{i\tilde{\delta}}{1+i} - \frac{3\tilde{\delta}^2}{2i} - \frac{3i\tilde{\delta}^3}{2i(1+i)} \right) e^{ix_\nu} \tag{F.77}$$

$$= \frac{i\tilde{\delta}}{1+i} \left(1 + \frac{3}{2}\tilde{\delta}(1+i+i\tilde{\delta}) \right) e^{ix_\nu} \tag{F.78}$$

$$= \frac{i\tilde{\delta}}{1+i} (1-\gamma)\, e^{ix_\nu} \tag{F.79}$$

$$\tag{F.80}$$

où le paramètre $\gamma = -\frac{3}{2}\tilde{\delta}(1+i+i\tilde{\delta})$ a été défini. On trouve alors de façon directe le coefficient $R_1^{(\mathrm{AH})}$ défini en (F.74) :

$$R_1^{(\mathrm{AH})} = i\frac{x^3}{3} \frac{(\rho_p - \rho_0)(1-\gamma)}{(2\rho_p + \rho_0 - 3\gamma\rho_0)} \tag{F.81}$$

quelque soit $\tilde{\delta}$. Dans la limite de grande sphère devant l'épaisseur de la couche limite, *i.e.* $\tilde{\delta} \ll 1$, mais toujours en respectant $x \ll 1$, on reprend l'équation (F.74) pour écrire :

$$R_1^{(\mathrm{AH})} = i\frac{x^3}{3} \frac{(\rho_p - \rho_0)\left(\frac{i}{x_\nu} - \frac{3}{x_\nu^2} - \frac{3i}{x_\nu^3}\right)}{2(\rho_0 - \rho_p)\left(\frac{-i}{x_\nu}\right) + 3\frac{\rho_0}{\rho_p}\left(\frac{i}{x_\nu} - \frac{3}{x_\nu^2} - \frac{3i}{x_\nu^3}\right)} \tag{F.82}$$

qui devient :

$$R_1^{(\mathrm{AH})} = i\frac{x^3}{3} \frac{(\rho_p - \rho_0)}{(2\rho_p + \rho_0)} \frac{1 + \frac{3i}{(i+1)}\tilde{\delta} + O(\tilde{\delta}^2)}{1 + 3\frac{\rho_0}{\rho_p}\frac{1}{2\rho_p+\rho_0}\left(\frac{3i}{(i+1)}\tilde{\delta} + O(\tilde{\delta}^2)\right)} \tag{F.83}$$

et le développement limité de ce quotient pour $\tilde{\delta} << 1$ devient :

$$R_1^{(\mathrm{AH})} = i\frac{x^3}{3} \frac{(\rho_p - \rho)}{(2\rho_p + \rho_0)} \left(1 + 3(1+i)\frac{(\rho_p - \rho_0)}{(2\rho_p + \rho_0)}\tilde{\delta} + O(\tilde{\delta}^2) \right) \tag{F.84}$$

Allegra et Hawley n'étaient intéressés que par la réponse statique de la particule d'ordre $0(x^3)$ pour calculer la diffusion de la particule. Nous rappelons que la particule a également une réponse en quadrature par rapport à l'excitation d'ordre $O(x^6)$. On donne ainsi une expression du coefficient dipolaire en milieux visqueux, $R_1^{(\nu)}$, qui s'écrit :

$$R_1^{(\nu)} = i\frac{x^3}{3}\frac{\rho_p - \rho}{2\rho_p + \rho}\left(1 + 3\frac{\rho_p - \rho}{2\rho_p + \rho}\tilde{\delta} + O(\tilde{\delta}^2)\right) - \frac{x^3}{3}\left(\frac{\rho_p - \rho}{2\rho_p + \rho}\right)^2 \left(3\tilde{\delta} + \frac{x^3}{3} + O(\tilde{\delta}^2)\right) \tag{F.85}$$

Dans cette limite, il apparait donc que la viscosité introduit un déphasage supplémentaire cette fois-ci proportionnel à $\tilde{\delta}x^3$.

Annexe G

Critères de convergence du calcul de la force au chapitre IV

Au chapitre II, les expressions (28) du champ incident, (29) du champ diffusé et les trois composantes de la force (82), (83) et (84) sont des séries infinies sur l'ordre n des harmoniques sphériques. Il faut donc les tronquer à un nombre entier N suffisamment grand. Deux mécanismes sont importants et doivent guider son choix :

1. La force sera calculée à partir des coefficients de diffusion R_n. Nous avons déjà vu qu'en régime basse fréquence $ka << 1$ seul les deux premiers $n = 0$ et 1 étaient non négligeables. Quand la valeur de ka est quelconque, une loi empirique préconise de tronquer les séries à partir de $N \sim 1,6ka$ [32, 175]. Ici nous avons adopté la loi $N = ka+3(ka)^{1/3}$ [142] qui a donné une convergence du calcul de diffusion dans tous les cas traités. Ceci assure que même en présence de résonances de la sphère (ceci peut exciter des modes sphériques pour des n élevés), le calcul du champ diffusé et de la force converge.
2. Le plus souvent, le champ incident sera translaté d'une distance d suivant l'axe z avant de calculer la force. Il faut un certain nombre de termes N pour s'assurer que le champ incident est bien décrit au voisinage de la sphère.

Pour illustrer le choix de N, à la figure 64, le champ d'une onde plane stationnaire suivant z est tracé dans le plan (y, z). On y voit que pour $N = 20$ le champ obtenu par les $(N+1)^2$ ondelettes sphériques définissant le champ incident est convenablement décrit au voisinage de la sphère (figure du haut). En revanche il l'est beaucoup moins au-delà de $z \sim 2\lambda$. Ainsi sur les deux autres graphiques de la figure 64, les coefficients de forme du champ incident A_n^m ont été translatés de $d = 1,5\lambda$ (milieu) et 3λ (bas) suivant z. Le cercle blanc rappel que le champ est toujours réécrit dans le repère centré sur la sphère. On conclut donc que pour un N initial trop faible et une translation de la base suffisamment grande, le champ représenté par une superposition d'harmoniques sphériques ne converge plus.

Bien évidemment ceci va avoir une conséquence sur le calcul de la force. Sur la figure 65, nous avons calculé la force pour une sphère (une bulle d'air dans l'eau de rayon $a = 0,5\lambda$) dans cette onde plane stationnaire. Le champ stationnaire est initialement avec $N = 10$, 20 ou 40. Pour des translations de distances $d \in [-5\lambda, 5\lambda]$ la mauvaise définition du champ impacte la valeur de la force calculée. En effet seul le cas $N = 40$ fourni la valeur de la force attendue quelque soit z pour un tel système stationnaire. Dans les deux autres cas, la force ne converge plus à partir d'une certaine distance de translation. Ceci arrive exactement à la distance d pour laquelle le champ incident lui même n'est plus convergent au voisinage

de la sphère (Fig. 64). Un pré-requis est donc de trouver un nombre N de termes qui suffisent pour parfaitement décrire le champ au voisinage de la sphère après avoir effectué la translation demandée. Empiriquement, nous avons vérifié que la divergence pouvait être évitée avec un nombre $N \sim k(a+d) + 3(k(a+d))^{1/3}$, soit un nombre de termes requis par une sphère fictive de rayon $a+d$.

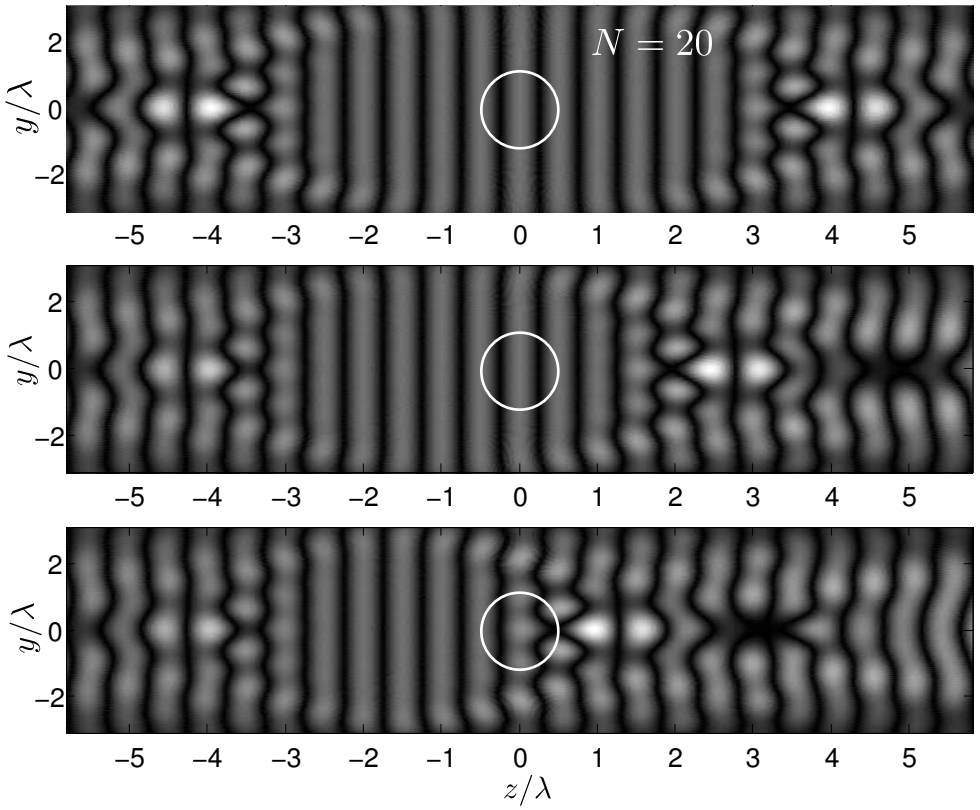


FIGURE 64 – **Convergence du champ incident et translations**. Influence du nombre maximal N de termes dans les séries définissant le champ incident. En haut sans translation, Au centre et en bas les translations des A_n^m initiaux sont obtenues pour des distances $d = 1,5\lambda$ et 3λ respectivement.

Quant à la rotation des ondelettes sphériques, le comportement est similaire à l'opération de translation.

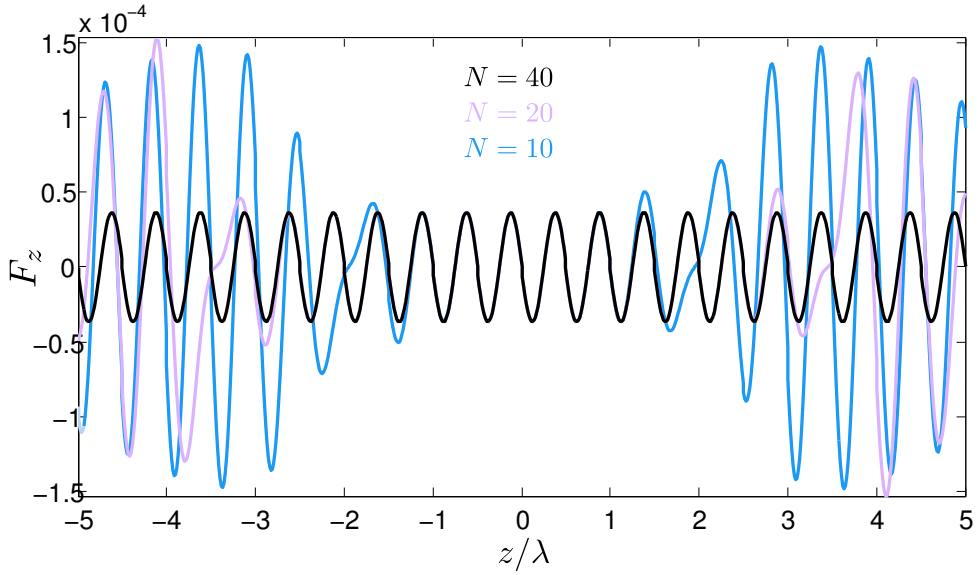


FIGURE 65 – **Convergence de la force axiale.** La force F_z pour chaque position z/λ de la sphère correspondant à des translations telles que $d \in [-5\lambda, 5\lambda]$. Pour chaque courbe de force le champ est défini initialement par $N = 10$, 20 et 40 termes d'amplitude A_n^m.

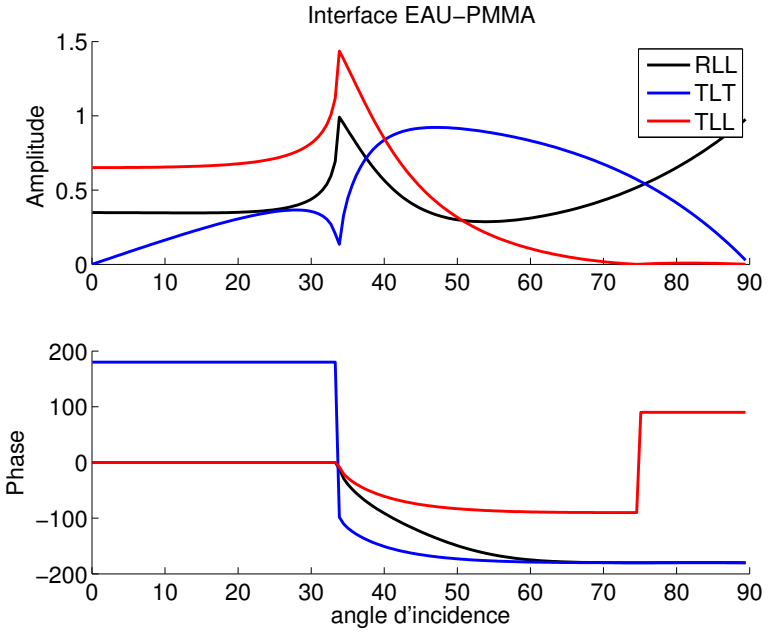
Annexe H

Conception des lentilles

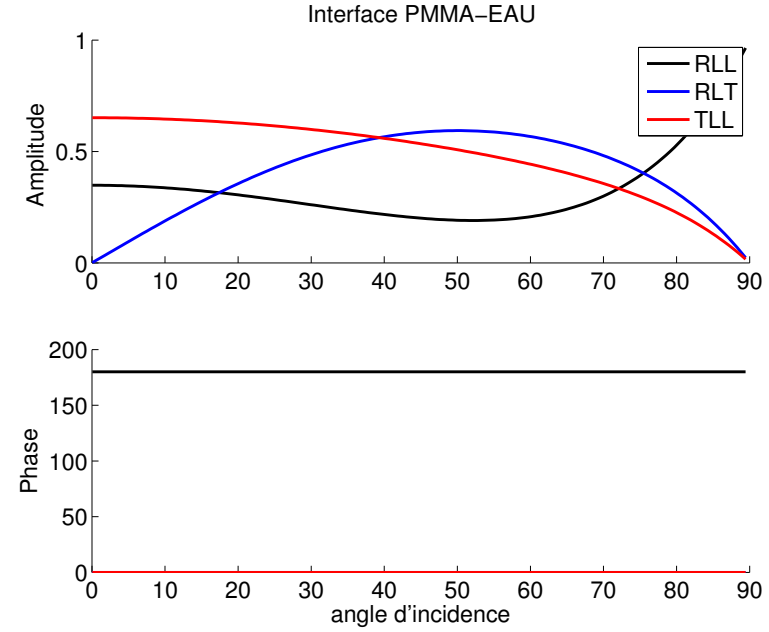
Dans cette annexe sont détaillés les quelques pistes de réflexion qui ont conduit à la conception de lentilles acoustiques pour focaliser davantage le faisceau ultrasonore incident.

Comme toute lentille, la convergence ou divergence des rayons acoustiques repose sur le contraste d'indice entre le milieu incident et le matériau de la lentille. Le PMMA présente l'avantage de pouvoir être facilement usiné avec une machine à commande numérique. La célérité des ondes transverses et longitudinales est de 1100 et 2700 m/s respectivement. Avant de choisir la géométrie exacte des lentilles, il faut s'assurer que l'énergie ne se perde pas en réflexion aux interfaces. On peut assez facilement programmer les coefficients de réflexion et de transmission à une interface liquide-solide et inversement en prenant en compte toutes les polarisations [104]. Sur la figure 66 sont représentés pour l'interface eau-PMMA (en a), le coefficient de réflexion de l'onde longitudinale ainsi que les deux coefficients de transmission dans le solide. On peut voir qu'aux alentours d'une incidence à 33°, il y a une résonance du coefficient de réflexion des ondes longitudinales mais accompagnée d'une résonance des ondes longitudinales transmises. C'est donc un angle critique pour la conversion en ondes transverses seulement. Par contre, après ce pic le coefficient de transmission des ondes longitudinales chute brusquement pendant que le coefficient de réflexion augmente fortement. Il est nécessaire d'éviter des angles supérieurs à environ 35° à cette interface. Concernant l'interface de sortie de la lentille (en b)), c'est à dire PMMA-eau, le coefficient de transmission de la polarisation longitudinale chute rapidement après un angle de 50°.

A l'aide d'un logiciel de tracé de rayons optique (*Optgeo* [176]) nous pouvons simuler la trajectoire des rayons acoustiques dans le PMMA. Pour chaque rayon la démarche consiste à appliquer la loi de Snell-Descartes à chaque interface. Cette même loi nous dit qu'un rayon venant de l'eau va avoir tendance à s'éloigner de la normale à l'interface en passant dans le PMMA. Par conséquent une interface concave permet de faire converger les rayons vers un foyer focal. Sur la figure 67 nous voyons que dans un premier temps nous appliquons la focalisation "naturelle" du réseau 127 éléments introduit à la section V.1.3. Cela est fait en introduisant une lentille mince de focale 450 mm. La lentille de focale $F = 110$ mm, correspondant à un angle de convergence $\alpha_0 \simeq 36°$, n'utilise que l'interface de sortie pour focaliser les rayons (Fig. 67a). Pour focaliser davantage nous avons pensé à utiliser la première interface eau-PMMA. Prenant la précaution de ne pas introduire des angles supérieurs aux 35° mentionnés précédemment, cette première interface incline les rayons une première fois avant que la deuxième interface ne focalise de nouveau. Son rayon de courbure convexe est de 210 mm. A l'interface PMMA-eau de sortie, les rayons



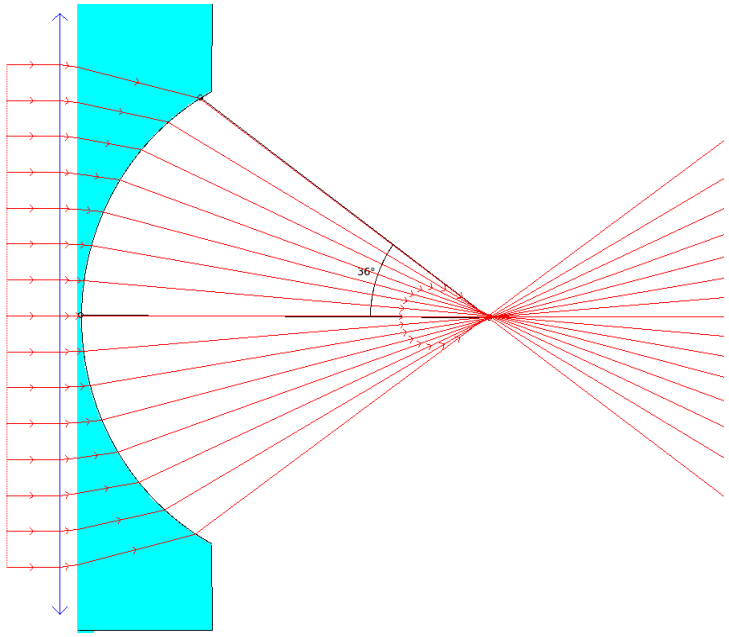
(a) Interface EAU-PMMA



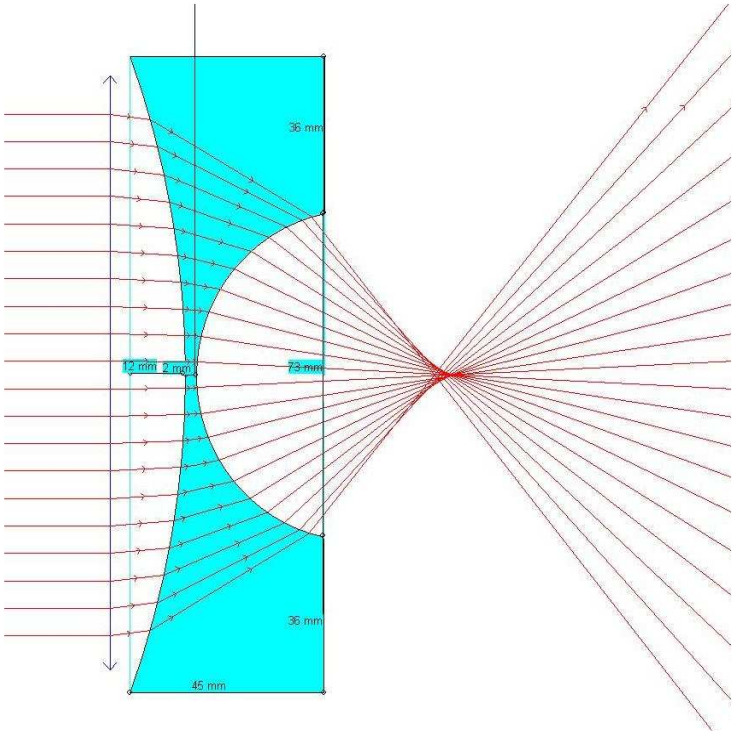
(b) Interface PMMA-EAU

FIGURE 66 – **Coefficients de réflexion transmission aux interface Eau -PMMA en fonction de l'angle d'incidence.** RLL : coefficient de réflexion des polarisations longitudinales. TLT : coefficient de transmission de la polarisation longitudinale vers une polarisation transverse. TLL : transmission longitudinal vers longitudinale. RLT : Réflexion longitudinale vers transversale.

convergent encore davantage. La rayon de courbure concave de cette interface est de 37,8 mm. Cela nous a permis d'atteindre un angle de convergence d'environ 42°. Il est à noter que cette deuxième lentille présente toutefois des inconvénients. Premièrement, l'épaisseur de PMMA à traverser pour les rayons les plus éloignés de l'axe acoustique est plus importante. Ceci introduira une atténuation non négligeable de l'énergie des voies périphériques du réseau (le PMMA atténue de 0.65 dB/cm à 1 MHz). Ensuite, cette lentille pâti d'abbérations géométriques visibles par la caustique qui apparait au foyer de focalisation. Cette deuxième limitation sera néanmoins facilement corrigée par la technique du filtre inverse spatio-temporelle utilisée pour la synthèse des faisceaux.



(a) Lentille simplement concave



(b) Lentille bi-concave

FIGURE 67 – **Tracé de rayons acoustiques aux interfaces EAU-PMMA d'une lentille.**

Table des figures

1 Photographie reproduite de l'expérience de Hertz et Mende [14]. Une onde se propage dans un milieu constitué de deux fluides immiscibles, l'eau et le Tétrachlorométhane (CCl4). La déformation de l'interface sujette à une pression de radiation dépend de l'impédance acoustique de chaque milieu. . 15

2 Schéma reproduit de la première expérience d'Ashkin (1970). Il observe l'accélération de particules micrométriques sujettes à la pression de radiation d'un laser en (a) et les piège dans un puits de potentiel stable à l'aide d'un deuxième laser en (b). 18

3 Principe de fonctionnement d'une pince optique. En (a), la force de gradient exerce un rappel sur une particule transparente quelque soit sa position près de la focale (schéma extrait de la référence [51]). En (b), photo prise par Ashkin d'une particule piégée dans un laser fortement focalisé. 19

4 Photographie d'un système de lévitation acoustique (d'après Xie *et al.* (2001) [75]). Une onde stationnaire est créee entre un émetteur concave (en bas) et un réflecteur. Les particules solides sont piégées aux nœuds de pression. 21

5 Schéma du montage à deux faisceaux de Wu et une photographie d'œufs de grenouille piégés dans l'eau. Deux transducteurs focalisés émettent des faisceaux ultrasonores dans des directions opposées. Notez l'apparition de bandes axiales, signe de l'existence d'une onde stationnaire. 22

6 **Objet suspendu dans un fluide parfait dans lequel se propage une onde acoustique.** La surface $S(t)$ de l'objet est en oscillation sous l'effet du champ acoustique incident avec un vecteur d'onde $\vec{k}$. S_R est une surface arbitraire entourant complétement l'objet. 30

7 **Repère sphérique du problème.** Sphère de rayon a suspendue dans un fluide. Elle diffuse le champ acoustique incident avec un vecteur d'onde $\vec{k}$. Un repère sphérique (r, θ, φ) est défini au centre de la sphère O. Des ondes sont excitées à l'intérieur de la particule de masse volumique ρ_p et se propagent avec des vitesses c_ℓ et c_t pour les composantes longitudinales et transverses respectivement. 31

8 **Champ diffusé par une sphère.** En a), Un faisceau acoustique incident. En b), La sphère de rayon $0,5\lambda$ est placée à la focale du faisceau. Elle diffuse le faisceau incident et la pression totale est représentée. En c) la même sphère est placée hors de l'axe de propagation et diffracte le faisceau différemment. 42

9 **Décomposition d'un faisceau de Bessel en ondes planes**. Des composantes planes d'angle d'incidence fixé β réparties sur un cône (paramétrée par φ), interfèrent pour former un faisceau de Bessel. 50

10 **Structure d'un vortex acoustique** En a), les fronts équiphase décrivent une hélicoïde. La phase s'enroule autour de l'axe de propagation et le pas de l'hélice est fixé par par la charge topologique m'. En b), dans le plan transverse à l'axe de propagation z, on retrouve la variation azimutale de la phase pour des charges $m' = 1$, 2 et 3 (de gauche à droite). Les interférences destructives qui résultent de la singularité de phase annulent le champ et forment le cœur du vortex. Ce cœur est entouré d'un anneau de forte intensité. 53

11 **Coefficient de diffusion monopolaire d'une bulle.** Partie réelle et imaginaire de R_0 (Eq. (134)). Forte résonance de la bulle près de la fréquence de résonance de Minnaert ω_R et donc de la force. 66

12 **Prise en compte de la viscosité - Ordres de grandeur.** Couche limite visqueuse $\tilde{\delta} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\nu}{\rho_0\omega}}$ dans l'eau en fonction de $x = ka$. Le milieu est de l'eau, $\mu = 1,013$ mPa·s, pour $f = 0,5$, 1 , 5 et 10 MHz. La valeur de $\tilde{\delta}$ est à comparer avec x^3 pour déterminer l'impact de la viscosité sur la force de pression de radiation. 69

13 **Translation et rotation des harmoniques sphériques d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$.** 76

14 **Translation arbitraire.** Une translation de vecteur $\vec{r}''$ est décomposée en deux rotations et une translation. 78

15 **Organigramme du code de calcul analytique.** 79

16 **Validation des composantes F_x et F_y et la procédure de rotation.** Analyse tridimensionnelle de la pression de radiation acoustique exercée par une onde plane sur une sphère. En noir le cas de référence de la force axial F_z d'une onde plane se propageant suivant z. En cyan et violet, les composantes de force F_x et F_y pour une onde de vecteur d'onde $\vec{k} = (k\cos(\pi/3), \sin(\pi/3), 0)$ dans le repère cartésien. 82

17 **Faisceau de Bessel hélicoïdal.** En a), intensité dans la direction de propagation z. En b), intensité et phase dans le plan transverse. 84

18 **Repère pour l'analyse de la force $\vec{F}$.** La force sera caractérisée par une composante axiale dans la direction de propagation du faisceau et d'une composante radiale et éventuellement azimutale dans le plan transverse. . . 85

19 **Composantes de force latérale sur une petite sphère.** En a) la force radiale exercée par le faisceau de Bessel en fonction de la distance du centre de la sphère à l'axe de propagation ρ. En b), force azimutale. La sphère peut être mise en rotation autour de l'axe de propagation. 87

20 **Force axiale exercée sur une sphère élastique.** Composante F_z pour le polystyrène sur l'axe du faisceau en fonction du rayon de la sphère a et pour trois valeurs de l'angle d'incidence β. 88

21 **Effet d'une résonance sur les composantes latérales de la force.** Courbes pour $\beta = 50°$ et les rayons sélectionnés $a = 0,3\lambda$ (courbe en trait plein) et $a = 0,33\lambda$ (courbe en pointillés) correspondent à l'excitation ou non du premier pic de la figure 20. 89
22 **Force latérale exercée par le faisceau de Bessel.** On superpose sur la carte d'intensité latérale un tracé vectoriel de la force transverse (F_φ, F_z). . 90
23 **Stabilité latérale d'un faisceau attracteur.** Suivant l'angle d'incidence β et la taille a de la sphère, la force latérale peut attirer ou non la sphère sur l'axe de propagation. 91
24 **Force latérale d'un faisceau "attracteur"** En a) la sphère n'est pas confinée sur l'axe de propagation mais mise en orbite près d'un autre nœud de pression, elle ne sera donc pas attirée par la force axiale négative. En b), la sphère peut être piégée sur l'axe et ensuite être tirée par la force axiale négative vers la source acoustique. 92
25 **Géométrie du piston concave**. rayon de l'émetteur a_0, rayon de courbure r_0 et angle d'ouverture α_0. Le repère sphérique (r, θ, φ) est centré sur la particule de rayon a placée au centre de courbure. 93
26 **Champ rayonné par un piston concave vibrant avec une vitesse uniforme.** Le rayon de courbure vaut $r_0 = 6$ cm et l'angle d'ouverture α_0 est de 39°. En bas la pression est tracée sur l'axe de propagation z et comparée à la solution exacte de l'intégrale de Rayleigh. 97
27 **Force axiale et radiale en fonction du rayon a de la sphère.** La fréquence du faisceau est fixée à 1 MHz et on fait varier la taille de la sphère. Par souci de clarté, les courbes ont été normalisées. Force axiale pour une sphère en $\vec{r} = (0, 0, 0)$. La composante Q_ρ est obtenue pour une sphère située en $\vec{r} = (0, 5\lambda, 0, 0)$. 98
28 **Effet d'une résonance sur le comportement de la force.** En (a), la force radiale pour une sphère de part et d'autre du premier pic de résonance, $a = 0,21\lambda$ et $a = 0,25\lambda$. En (b), la fonction de forme est tracée dans un diagramme polaire pour les deux tailles de sphère. En (c), la force axiale en fonction de la distance à la focale z. 100
29 **Force sur une petite gouttelette d'huile de silicone**. Forces de type rappel suivant l'axe de propagation et latéralement. La goutte est confinée à une position d'équilibre stable. 101
30 **Force sur des petites sphères élastiques**. La force axiale repousse les particules de la focale du faisceau. On ne peut obtenir une position d'équilibre stable. 102
31 **Champ de deux faisceaux contra-propagatifs.** Deux faisceaux contra-propagatifs de même amplitude forment un système stationnaire dans la direction de propagation z. Des nœuds et des ventres d'amplitude sont séparés de $\lambda/4$. Les foyers focaux de chaque faisceau sont séparés d'une distance 4λ. 103

32 **Composantes radiale et axiale de la force.** L'onde stationnaire axiale de la figure 31 défini un nombre fini de positions d'équilibre pour les deux sphères. La gouttelette d'huile est attirée vers les ventres de pression pendant que le PMMA va vers les nœuds. Pour les deux, la force radiale confine les particules sur l'axe acoustique. 104

33 **Composantes radiale et axiale de la force.** Forces axiale et radiale pour des sphère plus grandes de rayon $a = 0,25\lambda$. 105

34 **influence d'un déséquilibre en amplitude des faisceaux.** Ici nous montrons la position d'équilibre axiale est pondéré par l'amplitude respective de chaque faisceau. L'amplitude du faisceau arrivant des z positifs est augmenté de 10, 50 et 100% par rapport à l'autre. 105

35 **Intensité et phase en fonction de la charge topologique m' d'un vortex focalisé.** De gauche à droite, la charge vaut $m' = 1$, 2 et 3. En a) l'intensité dans la direction de propagation et dans le plan transverse. En b), variation azimutale de la phase. 107

36 **Force d'un vortex de charge $m' = 1$.** Composantes Q_ρ et Q_φ pour une sphère de rayon $a = 0,15\lambda$ en aluminium en fonction de la distance radiale ρ. L'intensité du champ (unités arbitraires) a aussi été représenté en pointillés. La force Q_z est tracée pour la sphère sur l'axe acoustique en fonction de son éloignement à la focale. 109

37 **Puits de potentiel dont dérive la force de gradient.** Le potentiel acoustique U est représenté dans le plan (x, z) par les courbes bleues. La force axiale est tracée pour trois position latérales différentes $x = -2\lambda$ 0 et 2λ. Sur l'axe acoustique (courbe magenta) le puits de potentiel est tel que la force axiale définit une position d'équilibre pour la sphère. L'ensemble des courbes ont été normalisées à l'unité. 110

38 **Trajectoire tridimensionnelle d'une sphère dans un vortex de charge $m' = 1$.** Les forces agissant sur la sphère sont la pesanteur ($\|\vec{g}\| = 9.8$ m/s^2), la force d'Archimède, la pression de radiation acoustique et la force de Stokes. La sphère est lâchée sans vitesse initiale de la position $\vec{r} = (0.4, -0.4, 0)$. 113

39 **Influence de la focalisation.** Effet de l'augmentation de l'angle d'ouverture (de haut en bas $\alpha_0 = 19,5°$, 30°, 39° et 56,5°) sur la force axiale F_z en (a) et radiale F_ρ en (b). Les forces sont données en newtons. 114

40 **Influence de la taille de la sphère**. Force d'un vortex de charge $m' = 1$ sur une particule de polystyrène de rayon croissant $a = 0.15\lambda$, $a = 0.18\lambda$ et $a = 0.2\lambda$. Très rapidement, la force de gradient axiale est dominée par la force de diffusion qui éjecte la sphère. 115

41 **Résonances pour des vortex de charge supérieure.** Composantes de la force pour des vortex de charge $m' = 1$, 3 et 4. En a) la composante axiale pour une sphère à la focale $\vec{r} = (0, 0, 0)$. 116

42 **Augmentation de la charge** m'. Dans une certaine mesure en augmentant la charge on peut retrouver une position d'équilibre stable pour des sphères de taille plus importante. La position axiale d'équilibre est rétablie mais l'efficacité de la force est beaucoup plus faible. 117

43 **Schéma du dispositif expérimental**. Un émetteur acoustique (multi-éléments), génère un champ acoustique qui se propage dans la cuve. L'hydrophone est monté sur un système de positionnement motorisé à trois axes et peut mesurer le champ à une position donnée de la cuve. La baie électronique synchronise les tirs, pilote les moteurs et assure l'acquisition des données via l'oscilloscope. 121

44 **Principe de la méthode du filtre inverse spatio-temporel**. Pour un ensemble M d'émetteurs, un plan de contrôle $\mathcal{P}$ de N points est balayé par l'hydrophone. Toute l'information liée au système physique est contenue dans la matrice des réponses impulsionnelles $h_{ji}(t)$. 123

45 **Mesure de la réponse impulsionnelle du système.** En (a), l'impulsion électrique à l'entrée du système. En (b), réponse impulsionnelle. 123

46 **Gabarit cible, vortex acoustique de charge** $m' = 1$**.** Module (a) et phase (b) du gabarit $F(\omega)$ imposés sur le disque de contrôle de rayon 3,5 mm. 126

47 **Signaux d'émission** $e_i(t)$ **calculés par filtre inverse.** En (a), les formes temporelles calculées pour les 120 voies d'émission du réseau. On voit que les voies ont chacune une phase et une amplitude indépendante. En (b), forme temporelle de la voie 80. 127

48 **Champ expérimental d'un vortex de charge** $m' = 1$**.** Module (a) normalisé avec la valeur absolue de la pression [MPa] et la phase [rad.] en (b) du vortex synthétisé mesuré sur le disque de contrôle de rayon 3,5 mm et de pas de résolution 0,1 mm. 128

49 **Comparaison expérience/théorie.** En (a) le module normalisé du vortex réalisé expérimentalement est comparé à la solution analytique. Le diamètre de l'anneau du vortex vaut approximativement $1,2\lambda$. En (b), nous parcourrons azimutalement l'anneau du vortex et regardons l'homogénéité de l'amplitude et de la phase. 129

50 **Faisceau dans la direction de propagation.** 130

51 **Synthèse de vortex de charge m'.** De haut en bas, $m' = 0$ à 5. De gauche à droite, module du vortex analytique, module et phase expérimentales. Le champ est mesuré sur un disque de rayon $3,5$ mm. 131

52 **Évolution spatio-temporelle du champ de pression.** De gauche à droite, faisceaux de charge $m' = 0$, 1 et -2. La valeur instantanée du champ de pression mesurée dans le disque de contrôle est représentée aux instants $t = 0$, $T/4$, $T/2$ et $3T/4$. 132

53 **Force prévue pour l'expérience.** Force en Newtons attendue pour une pression absolue mesurée à $p_0 = 0.8$ MPa. 134

54 **Photo de la configuration horizontale.** En (a) est montré le dispositif pour déposer une bille sur le "tee" de support. Une pipette sert de réserve de billes. En (b), photo d'une bille déposée sur le "tee". 136

55 **Bille de polystyrène en lévitation.** 137

56 **Phase de chute de la bille en "stop motion".** Observation de l'effet d'entrainement visqueux dû à l'écoulement établi pendant l'émission. Les différents prises de vue d'une vidéo sont compilées sur une seule photo ("stop motion"). 138

57 **Visualisation de l'écoulement induit par dissipation visqueuse du vortex acoustique.** L'évolution spatio-temporelle du "front" de propagation de l'encre est filmée à haute cadence. Ici des images de stades successifs d'évolution de la tache d'encre permettent de visualiser l'écoulement. L'échelle de temps n'est pas linéaire. 139

58 **Mesure de la vitesse axiale de l'écoulement.** En (a), contour de la tâche d'encre en fonction du temps. En (b) son altitude et vitesse instantanée en fonction du temps. En (c), vitesse de l'écoulement en fonction de la distance à la focale du faisceau z_f. 141

59 **Montage vertical de la pince acoustique.** Le faisceau est émis verticalement vers le fond de la cuve. Un bloc absorbant assure qu'aucune réflexion ne vienne perturber la zone d'intérêt. 144

60 **Lévitation d'une sphère par la pince acoustique.** Photo de la lévitation d'une sphère dans sa position d'équilibre. La barre d'échelle représente 200μm. 145

61 **Attraction latérale de la sphère.** Une sphère initialement déportée hors de l'axe est rapidement accélérée vers celui-ci. La barre d'échelle représente 200μm. 146

62 **Lévitation de systèmes à deux sphères.** Les sphères sont de rayon 177 et 108 μm à gauche et de rayon 98 et 67 μm à droite. La barre d'échelle représente 200μm. 149

63 **Lévitation et rotation d'un système à trois sphères.** Sur ces photos prises à des instants successifs, on voit le système qui est en rotation autour de l'axe de propagation. La barre d'échelle représente 200μm. 150

64 **Convergence du champ incident et translations**. Influence du nombre maximal N de termes dans les séries définissant le champ incident. En haut sans translation, Au centre et en bas les translations des A_n^m initiaux sont obtenues pour des distances $d = 1,5\lambda$ et 3λ respectivement. 194

65 **Convergence de la force axiale.** La force F_z pour chaque position z/λ de la sphère correspondant à des translations telles que $d \in [-5\lambda, 5\lambda]$. Pour chaque courbe de force le champ est défini initialement par $N = 10$, 20 et 40 termes d'amplitude A_n^m. 195

66 **Coefficients de réflexion transmission aux interface Eau -PMMA en fonction de l'angle d'incidence.** RLL : coefficient de réflexion des polarisations longitudinales. TLT : coefficient de transmission de la polarisation longitudinale vers une polarisation transverse. TLL : transmission longitudinal vers longitudinale. RLT : Réflexion longitudinale vers transversale. 198
67 **Tracé de rayons acoustiques aux interfaces EAU-PMMA d'une lentille.** 200