THÈSE DE DOCTORAT
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS 6)

Spécialité : **Mécanique**

ED 391 : Sciences mécaniques, acoustique, électronique & robotique

Institut Jean le Rond d'Alembert, UPMC
Unité de Mécanique, ENSTA-ParisTech

Turbulence d'ondes dans les plaques minces en vibration :
étude expérimentale et numérique de l'effet de l'amortissement

Thomas HUMBERT

Thèse soutenue le 19 Septembre 2014 devant le jury composé de :

Nicolas MORDANT	Rapporteur
Bérangère DUBRULLE	Rapporteur
Régis MARCHIANO	Examinateur
Vincent PAGNEUX	Examinateur
Pierre-Olivier MATTEI	Examinateur
Christophe JOSSERAND	Directeur de Thèse
Olivier CADOT	Directeur de Thèse
Cyril TOUZÉ	Directeur de Thèse

Remerciements

Comme l'a rapidement évoqué Christophe au cours de la soutenance, il est commun de dire qu'avec trois directeurs de thèse les choses ne sont pas forcément simples. Même si je n'avais aucun doute, force est de constater que tout s'est pour moi royalement bien passé, Christophe, Olivier, et Cyril m'ayant offert le cadre de travail parfait, entre liberté d'action et présence réconfortante et scientifiquement primordiale. Merci à vous pour ces trois très belles années dont je ne me souviendrai qu'en bons termes, vos apports bien distincts et (presque) toujours dans la même direction ont constitué la solide base qui m'a permis d'évoluer et d'obtenir les résultats décrits par ce manuscrit. Merci également à Stefan Bilbao pour m'avoir accueilli un mois à Édimbourg en me donnant une bonne vision des problématiques liées aux schémas numériques par différences finies. Je remercie une nouvelle fois mon jury de thèse. J'avais souhaité réunir aussi bien des gens familiers de la turbulence d'ondes que des gens des vibrations et de l'acoustique. La discussion (parfois intense) qui a suivi ma soutenance a rempli ses objectifs et je suis vraiment content des échanges qui se sont alors produits. Merci d'avoir passé du temps à réfléchir sur mes résultats.

La thèse représente la première confrontation sérieuse avec le monde de la recherche. Et si l'image du chercheur autiste et solitaire nous colle à la peau, l'apport des autres, et encore plus en tant que thésard, est des plus importants. Mes travaux se seraient donc (beaucoup) moins bien déroulés sans les apports logistiques, scientifiques, et amicaux fournis par Romain, Claude, Thierry, Nicolas, Benjamin, Olivier D., Corinne, Jean, Marie. Les conditions découvertes à l'UME au cours de mon stage de M1 et qui ont enveloppé ma thèse correspondent à mon image idéale d'un bon cadre de travail, à la fois détendu et passionné, cadre un peu remis en questions de nos jours. Alors tenez bons, c'est rare d'avoir ça ! Une pensée amplifiée pour ceux avec qui j'ai partagé aussi bien un intérêt scientifique commun que de fortes accointances amicales : sœurette Mélodie, Amin, Jules : à très vite.

La musique partage à temps (presque) égal ma vie et mon cœur avec la recherche, donc un grand merci à ceux qui l'ont fait vivre car, de façon pas si indirecte, vous m'avez alors permis d'être toujours d'appoint et motivé pour la recherche. Nous ne sommes alors plus qu'à un pas de la Krust Church et de Chaos E.T. Sexual, et donc de Yves, Tarik, et Romain. On est tous conscient de la chance qu'on a, et même si on se couche souvent trop tard, il n'y a rien de mieux pour couper un peu notre cerveau des tourbillons où nous emmène la thèse, et pour mieux y replonger le lendemain.

Le petit nombre de gens qui lira cette thèse sera en majeure partie constituée de thésards. Alors, pour vous, soyez fort, mais ne vous prenez pas trop la tête : un rythme régulier, des activités annexes, et le tour est joué. Et puis quant à cette fameuse rédaction, sachez que c'est un des moments les plus enrichissants de la thèse, dès lors qu'on prend le temps de faire calmement et bien les choses.

Table des matières

1 Vibrations non linéaires de plaques minces **11**
1.1 Équations de Föppl-von Kármán 12
1.1.1 Notions d'élasticité appliquées aux plaques minces 12
1.1.2 Équations de Föppl von-Kármán : établissement et discussion . 16
1.2 Mécanismes dissipatifs dans les plaques métalliques minces 20
1.2.1 Grandeurs considérées 20
1.2.2 Pertes internes 21
1.2.3 Amortissement par rayonnement 25
1.2.4 Autres pertes par couplage 33

2 Turbulence d'ondes appliquée aux plaques élastiques **35**
2.1 Introduction générale à la turbulence d'ondes 36
2.1.1 Analogies avec la turbulence hydrodynamique 36
2.1.2 Les grandes lignes de la turbulence d'ondes 39
2.2 Application aux ondes de flexions 42
2.2.1 Des équations de Föppl von-Kármán à l'équation cinétique . . . 43
2.2.2 État de l'art 48
2.2.3 Idée et organisation de la thèse 54

3 Méthodes expérimentales **55**
3.1 Dispositif expérimental 57
3.1.1 Montage 57
3.1.2 Forçage 57
3.1.3 Comparaison avec Boudaoud *et al.* [7] et Mordant *et al.* [68] . . 59
3.2 Mesure de l'amortissement 61
3.2.1 Estimation de la réponse impulsionnelle 61
3.2.2 Estimation du facteur d'amortissement 62
3.2.3 Influence des paramètres d'analyse sur la détermination des facteurs d'amortissement 66
3.2.4 Caractérisation de l'amortissement de notre système 69
3.2.5 Configurations expérimentales mises en œuvre pour étudier l'effet de l'amortissement sur le régime turbulent 74
3.3 Profilométrie par Transformée de Fourier 78

3.3.1 Principe 78
3.3.2 Mise en œuvre 79
3.3.3 Calibration 81
3.3.4 Application : Effet de l'amplitude de forçage sur la relation de dispersion 84

4 Effet de l'amortissement sur le régime de turbulence d'ondes 89
4.1 Observation expérimentale de l'effet de l'amortissement sur la pente des spectres 90
4.1.1 Résultats en un point 90
4.1.2 Spectre de la puissance dissipée 90
4.1.3 Profilométrie par transformée de Fourier 92
4.2 Simulations numériques des équations de Föppl-von Kármán avec amortissement 92
4.3 Discussion 96
4.3.1 Relation entre amplitude spectrale, puissance injectée, et amortissement 96
4.3.2 Au sujet du caractère turbulent du régime vibratoire 98
4.3.3 Conclusion intermédiaire 101

5 Modèle phénoménologique 103
5.1 Présentation du modèle 104
5.1.1 Introduction 104
5.1.2 Équation modèle 104
5.1.3 Schéma numérique 105
5.1.4 Turbulence forcée : dynamique stationnaire 106
5.2 Solutions instationnaires 108
5.2.1 Solutions auto-similaires de l'équation cinétique 108
5.2.2 Solutions auto-similaires de l'équation phénoménologique 109
5.2.3 Simulations numériques 110
5.3 Cadre non conservatif : effet de l'amortissement 116
5.3.1 Adimensionnement des équations de Föppl-von Kármán 116
5.3.2 Effet sur les spectres E_ω 117
5.3.3 Comportement de la pulsation caractéristique 119
5.3.4 Retour aux expériences et aux simulations 123
5.4 Conclusion intermédiaire 123

Introduction

La richesse de la dynamique non linéaire d'une plaque mince peut être appréhendée facilement en considérant le son d'une cymbale ou d'un gong [102]. Nous avons déjà tous entendu ces sons et savons qu'ils couvrent un grand intervalle de fréquences sans qu'une note précise ne puisse être identifiée. De même, les bruiteurs au théâtre ont pendant longtemps reproduit le son du tonnerre en secouant une grande plaque mince. Dans ce cas, l'ordre de grandeur de la fréquence initialement produite par l'opérateur ne dépasse pas quelques Hertz alors qu'un bruit de foudre convaincant contient des fréquences bien plus hautes. Si l'application musicale a ici été mise en avant pour introduire le comportement non linéaire d'une plaque, l'intérêt de son étude peut aussi être compris en remarquant que la plaque est souvent l'élément de référence pour décrire la dynamique d'un système mécanique complexe.

Tant que l'on reste dans le domaine de comportement élastique du matériau, la non-linéarité d'une plaque sujette à de grandes amplitudes de vibrations est d'origine géométrique et dépend alors uniquement du rapport entre l'amplitude de la vibration et l'épaisseur de la plaque. Plus une plaque est mince et plus elle présentera facilement un comportement non linéaire. Techniquement, celui-ci se traduit, pour un effort de flexion, par un couplage entre ce dernier et les forces de membrane agissant dans le plan de la plaque. Ce couplage est décrit par les équations de Föppl-von Kármán qui représentent une extension non linéaire aux équations linéaires de plaques de Kirchhoff-Love [2, 34, 97, 106]. En termes du déplacement transverse, la non-linéarité de ce jeu d'équations est d'ordre trois, ce qui se traduit en termes d'ondes par des résonances à quatre ondes : sous l'effet de la non-linéarité une onde peut produire trois nouvelles ondes, ou deux ondes vont engendrer deux autres ondes. Considérons alors une expérience où une plaque est sollicitée sur un de ses modes avec un forçage d'amplitude croissante [101, 103] : au départ, la plaque répond de façon linéaire en vibrant selon un seul mode correspondant à la fréquence du forçage ; quand l'amplitude du forçage devient de l'ordre de l'épaisseur, le terme non linéaire n'est plus négligeable et des résonances modales apparaissent de telle sorte que la plaque vibre selon un régime de modes couplés. Plus le forçage augmente et plus ce dernier régime couvre un grand intervalle de fréquences : un spectre large bande peut alors être observé.

Bien que ce dernier régime ait parfois été qualifié de chaotique, les outils de la théorie du chaos [5] se heurtent dans le cas d'une plaque mince à son grand nombre de degrés de liberté. Le point de vue de la turbulence semble par contre adapté

pour décrire la répartition de l'énergie sur l'ensemble des modes de la plaque. En effet, l'établissement décrit ci-dessus d'un spectre large bande trouve des résonances notables avec la turbulence hydrodynamique [35, 56] : si un mouvement fluide est engendré par un forçage suffisamment fort, alors il devient instable en produisant une cascade de tourbillons de plus en plus petits jusqu'à ce que la viscosité soit capable de dissiper l'énergie transférée. Il en résulte un spectre large bande présentant une gamme inertielle, ou cascade turbulente, séparant l'injection de la dissipation. Dans ce contexte, un point de vue statistique est alors privilégié.

La première trace d'une telle approche pour un système d'ondes est attribuée à Peierls en 1929 [81] dans sa recherche d'une théorie cinétique permettant de décrire le comportement de phonons dans un cristal non-harmonique [71]. Les années 1960 ont permis alors, dans le cadre de la physique des plasmas [105, 117] et de celle des vagues [4, 41, 114], de formaliser ces outils sous la forme d'une théorie dite de turbulence d'ondes. Cette dernière dispose par rapport à la turbulence hydrodynamique d'une fermeture naturelle des équations qui permet le calcul analytique des deux solutions stationnaires :

- Le spectre d'équilibre de Rayleigh-Jeans, qui décrit l'équipartition de l'énergie.
- Le spectre de Kolmogorov-Zakharov, qui fut calculé pour la première fois par Zakharov [111], et nommé de cette façon par analogie avec la cascade de Kolmogorov en turbulence hydrodynamique. Cette solution hors équilibre décrit le transfert d'un flux d'énergie constant le long d'une gamme inertielle séparant les grandes échelles où l'énergie est injectée des petites échelles où elle est dissipée.

L'ensemble de la démarche calculatoire permettant de passer de l'équation des ondes du problème considéré aux solutions analytiques a été réunie par Zakharov [115]. Elle peut alors être appliquée à un système quelconque sous certaines hypothèses telles que la dispersivité du milieu, sa taille infinie, une faible non-linéarité, la séparation entre le temps associé à la période des ondes et celui caractérisant les transferts non linéaires d'énergie. De plus, l'existence de la fenêtre de transparence suppose que la dynamique est hamiltonienne, ce qui est primordial pour entreprendre l'ensemble des calculs nécessaires.

La théorie de turbulence d'ondes a alors été appliquée à des cas aussi variés que les ondes acoustiques [75], l'optique non linéaire [28], la condensation de Bose-Einstein [73] ou la magnéto-hydro-dynamique [8]. Cependant, seul le cas des ondes capillaires présentes à l'interface entre deux fluides a montré une comparaison convaincante entre prédictions théoriques et spectres mesurés [29, 30].

L'application de la théorie de turbulence d'ondes aux plaques minces en vibration a été réalisée par Düring *et al.* [26, 27]. Les plaques minces offrant un milieu dispersif où la dynamique est uniquement gouvernée par la propagation d'ondes interagissant de façon faiblement non linéaire, elles peuvent même être vues comme un cadre turbulent idéal. Par l'écriture de l'équation cinétique régissant l'évolution du spectre d'onde au cours du temps les deux solutions analytiques classiques peuvent être déterminées. Cependant, le calcul du spectre de Kolmogorov-Zakharov nécessite

l'emploi d'une méthode perturbative suite à une dégénérescence de l'équation cinétique, la solution hors équilibre étant très proche de la solution d'équilibre. Il vient que le spectre de Kolmogorov-Zakharov prend dans le cas des plaques la forme d'un spectre quasiment plat jusqu'à ce qu'une correction logarithmique entraîne la coupure du spectre. Cette correction logarithmique introduit une fréquence caractéristique, ou fréquence de coupure, à partir de laquelle on considère que l'énergie est dissipée. En raison du caractère cubique de la non-linéarité, il a également été montré qu'une fois la solution hors équilibre écrite en fonction de la fréquence adimensionnée par la fréquence de coupure, l'amplitude spectrale évolue théoriquement comme la puissance 1/3 du flux fourni à la cascade.

En simulant numériquement les équations de Föppl-von Kármán dans le cadre théorique de la turbulence d'ondes, c'est à dire pour un forçage aux basses fréquences et une dissipation contenue aux hautes fréquences, les solutions calculées analytiquement ont bien été retrouvées [27]. Les études expérimentales opérées par Boudaoud et al [7] et par Mordant [68] ont alors proposé, pour deux montages sensiblement différents, une mesure de la pente des spectres et de la relation entre amplitude spectrale et flux d'énergie. Ce dernier est caractérisé expérimentalement par la mesure de la puissance injectée. Les conclusions tirées par ces deux études furent similaires : les spectres de puissance de la vitesse présentent une loi de puissance de l'ordre de $f^{-0.5}$, et l'amplitude spectrale évolue comme la racine carrée de la puissance injectée. Ces deux premiers résultats expérimentaux sont en désaccord évident avec les prédictions théoriques.

Bien que la dynamique non linéaire d'une plaque mince présente un caractère turbulent indéniable que seule la turbulence d'ondes est à même de décrire, cette dernière semble donc considérer des hypothèses non vérifiées dans les conditions expérimentales. Par une mesure de la relation de dispersion, il a alors été montré que les effets de la taille finie de la plaque sont considérables tant que les non-linéarités sont trop faibles pour que la relation de dispersion soit continue [19, 69]. Ce résultat permet de délimiter un régime où la turbulence n'est pas assez développée pour être analysée à l'aide des outils théoriques à disposition. La thèse réalisée par Benjamin Miquel [63] de 2010 à 2013 a également fourni d'importants éléments dans la compréhension du régime turbulent expérimental :

- le régime turbulent d'une plaque mince est bien constitué d'une dynamique d'ondes propagatives faiblement non linéaires [65],
- la séparation des échelles temporelles linéaires et non linéaires est dans la plupart des cas respectée [65],
- le forçage introduit une anisotropie dans le spectre aux basses fréquences de telle sorte que l'étude du régime de turbulence en déclin permet de trouver des spectres plus proches des prédictions théoriques [66],
- pour des forçages trop importants, une dynamique de plis localisée aux basses fréquences domine la dynamique d'ondes et l'état vibratoire de la plaque ne peut plus être décrit à l'aide de la théorie de turbulence d'ondes [64].

Aucune hypothèse ici considérée ne permet d'expliquer des différences aussi importantes que celles reportées entre théorie et expériences. Une hypothèse fondamentale de la théorie de turbulence d'ondes doit alors être considérée : l'existence d'une gamme inertielle. La question suivante est donc posée et guidera cette thèse : dans quelle mesure l'amortissement, présent à toutes les échelles dans une plaque, joue-t-il un rôle dans la dynamique turbulente observée expérimentalement, et de quelle manière peut-il être pris en compte dans la théorie de turbulence d'ondes ?

Le manuscrit s'articule de la façon suivante :

- Le premier chapitre donne une présentation succincte des éléments essentiels à la compréhension des **modèles vibratoires faiblement non linéaires de plaques minces**. À cette occasion, il est montré que la dissipation est présente à toutes les échelles.

- Le chapitre 2 présente la **théorie de la turbulence d'ondes** et les études antérieures à cette thèse quant à l'application de cette théorie aux ondes de flexion.

- Le chapitre 3 contient les détails inhérents aux **méthodes expérimentales** mises en œuvre pour mesurer l'amortissement et quantifier son effet sur le régime turbulent.

- Les **résultats** de cette étude sont alors décrits au chapitre 4 et complétés par une étude numérique introduisant les lois d'amortissement réelles dans les simulations numériques des équations de Föppl-von Kármán.

- Enfin, le chapitre 5 introduit un **modèle phénoménologique** capable d'étendre de façon simple les outils théoriques de la turbulence d'ondes à la dynamique instationnaire d'un système turbulent ainsi qu'à la dynamique stationnaire en l'absence de fenêtre de transparence.

Chapitre 1

Vibrations non linéaires de plaques minces

Ce chapitre donne une présentation succincte des éléments essentiels à la compréhension des modèles vibratoires faiblement non linéaires de plaques minces. La concision sera préférée à l'exhaustivité.
La première section s'attache à introduire les équations de Föppl von-Kármán qui décrivent, dans un cadre conservatif, le mouvement de flexion d'une plaque mince élastique en régime de vibration faiblement non linéaire. Pour ceci, la géométrie du système et le concept de non-linéarité géométrique sont présentés dans le § 1.1.1. Le § 1.1.2 introduit quant à lui formellement les équations de Föppl-von Kármán tout en soulignant les nombreuses hypothèses nécessaires à leur établissement.
La seconde section se concentre sur les principaux mécanismes dissipatifs agissant sur les vibrations d'une plaque élastique mince et métallique. Ceux-ci peuvent être regroupés en deux catégories :

- *les pertes internes, présentées au § 1.2.2, et causées soit par thermoélasticité, soit par viscoélasticité.*
- *les pertes dues au couplage avec l'air sont présentées au § 1.2.3 quand il y a génération d'ondes acoustiques et au § 1.2.4 quand l'interaction prend la forme d'une force de friction exercée par le fluide.*

Ces pertes sont quantifiées par des grandeurs définies au § 1.2.1 dans le cadre d'un oscillateur à un degré de liberté, forcé, et amorti.

1.1 Équations de Föppl-von Kármán

1.1.1 Notions d'élasticité appliquées aux plaques minces

Cadre, géométrie

Une plaque mince rectangulaire est un parallélépipède de dimensions L_x et L_y dans les directions du plan de la plaque et d'épaisseur h dans la direction transverse (voir Figure 1.1). La plaque étant mince, son épaisseur est bien plus petite que ses autres dimensions, de telle sorte que

$$L_x, L_y >> h. \tag{1.1}$$

Le matériau est supposé homogène et isotrope. Il possède alors comme constantes intrinsèques une densité ρ, un module d'Young E, et un coefficient de Poisson ν. Le module d'Young caractérise, lorsqu'un effort est appliqué, la déformation dans la direction de la contrainte extérieure. Les dilatations dans les autres directions sont déterminées par un facteur commun, le coefficient de Poisson [54].

Au repos, la plaque est un plan supposé élastique et identifié à sa surface moyenne (voir Figure 1.1). Quand des forces lui sont appliquées, elles entraînent des déformations faisant passer la configuration plan initiale (ou configuration de référence) dans une configuration déformée. Cette dernière est décrite d'un point de vue Lagrangien : les coordonnées (cartésiennes) d'un point quelconque de la plaque dans la configuration déformée sont exprimées comme fonctions des coordonnées de ce même point dans la configuration de référence. Le déplacement horizontal d'un point de coordonnées x et y au cours du temps t est caractérisé par son déplacement transverse $\zeta(x, y, t)$, aussi appelé flèche.

Non-linéarités géométriques

Un système non linéaire, en opposition avec un système linéaire, peut être défini par deux comportements typiques : sa réponse dépend de l'intensité du signal d'excitation et le contenu fréquentiel de ce dernier est modifié. Le comportement non linéaire géométrique d'une plaque mince vibrant avec des amplitudes grandes (de l'ordre de grandeur de l'épaisseur) se caractérise par :

- une relation non linéaire entre déformations et déplacements,
- une loi de comportement pour le matériau qui reste élastique linéaire.

Pour un effort de flexion de faible amplitude, la courbure de la plaque comprime la matière d'un côté et l'étire de l'autre : le profil de déformation est linéaire et représente une dynamique de flexion pure. Quand l'effort de flexion devient plus important un couplage avec les forces de membrane est mis en jeu : un étirement dans le plan comme conséquence de la flexion apparaît. Cet effet non linéaire est un effet géométrique qui

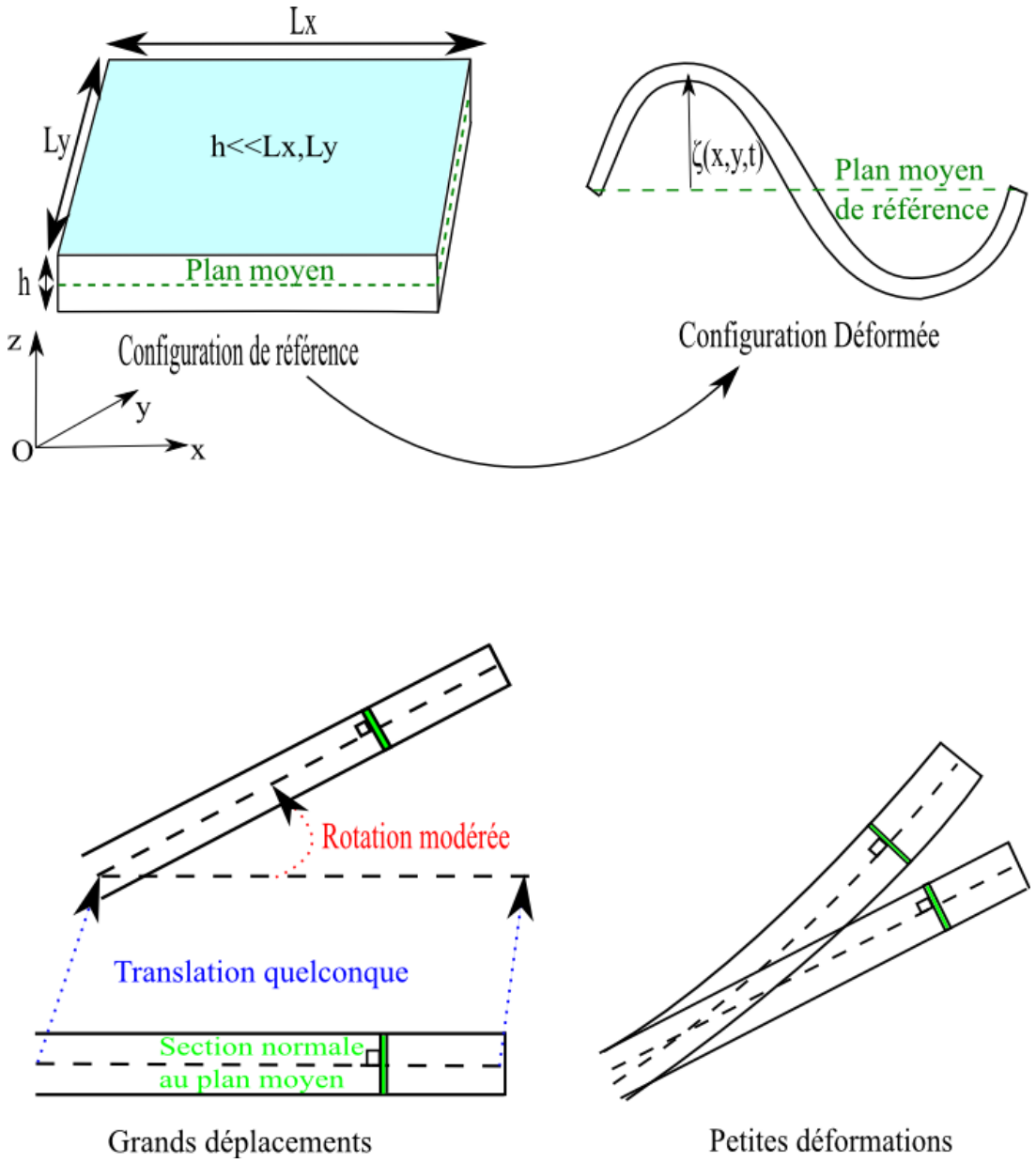


FIGURE 1.1 – Le système étudié est une plaque mince d'épaisseur h très petite devant les dimensions L_x et L_y du plan moyen. Le déplacement d'un point de coordonnées cartésiennes x et y est caractérisé par son déplacement transverse ζ par rapport à la configuration de référence. Le modèle décrit par les équation de Föppl-von Kármán considère de grands déplacements de type solide rigide avec une translation quelconque et une rotation modérée. Les déformations doivent rester petites, et conformément à l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love, les sections droites initialement perpendiculaires au plan moyen restent perpendiculaires au cours de la transformation.

dépend du rapport ζ/h : plus une plaque est mince et plus ce couplage apparaît facilement.

Le mouvement d'une section transverse de la plaque en réaction à une sollicitation (un effort) extérieur est alors une transformation se décomposant en un mouvement de solide rigide (une translation quelconque et une rotation modérée) et une déformation, qui elle doit rester petite (voir Figure 1.1). Ces hypothèses fixées, des mesures adaptées de la déformation et de la contrainte doivent être définies afin de construire une loi de comportement cohérente avec le cadre de l'étude.

Mesures de la déformation

Pour caractériser les déformations, le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{\gamma}}$ est utilisé [91] :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}). \tag{1.2}$$

$\nabla\mathbf{u}$ est le gradient du vecteur déplacement $\mathbf{u}$ d'un point $M(x, y)$ appartenant à la plaque, et $\nabla^T\mathbf{u}$ est son transposé. La relation non linéaire entre la déformation et le déplacement est représentée par le dernier terme du tenseur. Le tenseur de Green-Lagrange peut être aussi décomposé en un tenseur des déformations planes $\underline{\underline{\epsilon}}$ et un vecteur $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ désignant les termes de cisaillement :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\epsilon}} & \vdots & \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \\ \cdots & & \cdots \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^t & \vdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ est alors tronqué selon la démarche entreprise par Théodore von-Kármán [106] afin de ne garder dans les déformations planes que les termes non linéaires quadratiques fonctions de $\zeta(x, y)$. Pour cela, deux hypothèses sont nécessaires :

– Le déplacement transverse est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur :

$$\zeta \simeq h. \tag{1.4}$$

– Le déplacement longitudinal $\mathbf{u}$ est d'un ordre inférieur au déplacement transverse,

$$||\mathbf{u}|| \simeq \epsilon\zeta \qquad \text{avec} \quad \epsilon = \frac{h}{L}, \tag{1.5}$$

où L est de l'ordre des dimensions de la plaque L_x et L_y.

Ces hypothèses permettent d'écrire le tenseur des déformations planes sous la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon^2 \left[\frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^T\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{grad}\zeta \otimes \mathbf{grad}\zeta - z.\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{grad}\zeta\right] \tag{1.6a}$$

$$+ \epsilon^4\frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}}^T\mathbf{u} - z.\underline{\underline{\text{grad}}}^T\mathbf{grad}\zeta).(\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{u} - z.\underline{\underline{\text{grad}}}\mathbf{grad}\zeta). \tag{1.6b}$$

La troncature proposée par Théodore von-Kármán consiste alors à supposer que les termes de l'ordre d'ϵ^4 sont négligeables, ce qui ne laisse plus que des termes dépendant de ζ dans la partie non linéaire du tenseur des déformations planes. Cette hypothèse est valable pour la prise en compte des effets non linéaires induits par des rotations d'amplitude modérée, et si le matériau reste dans le domaine élastique.

Mesures des contraintes, loi de comportement

Les déformations engendrent des contraintes intérieures dans le matériau. Elles traduisent la présence de forces internes s'exerçant entre les points matériels voisins en réaction à la déformation, ces derniers cherchant à rétablir la configuration de référence. Pour mesurer ces contraintes, le tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$ est utilisé. Il est énergétiquement conjugué au tenseur des déformations de Green-Lagrange pour de petites déformations par la loi de comportement linéaire dite de Kirchhoff-St Venant [37] :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\pi}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\underline{\underline{\pi}})\underline{\underline{1}} \tag{1.7}$$

où $\mathrm{tr}\underline{\underline{\pi}}$ est la trace du tenseur $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{1}}$ la matrice identité. Cette loi de comportement n'est en fait que l'écriture de la loi de Hooke pour les tenseurs de Piola-Kirchhoff et de Green-Lagrange.

En rappelant qu'en notation indicielle π_{ij} représente la mesure de la force par unité de surface exercée dans la direction i sur une surface orientée selon j, il vient

$$\pi_{xz} = \pi_{yz} = \pi_{zz} = 0 \qquad \text{en} \quad z = +- \frac{h}{2} \tag{1.8}$$

puisque l'air n'applique aucune contrainte sur la plaque. Sachant que pour une plaque mince les contraintes dans la direction normale sont très faibles, l'hypothèse suivante est invoquée afin de se restreindre à un problème d'élasticité bidimensionnelle [2] :

$$\pi_{xz} = \pi_{yz} = \pi_{zz} = 0 \qquad \forall z \in [-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}]. \tag{1.9}$$

Pour finir, dans le formalisme des équations de Föppl von-Kármán, les contraintes sont représentées par le potentiel d'Airy χ introduit par Föppl [34] :

$$\pi_{xx} = \partial^2_{yy}\chi \qquad \pi_{yy} = \partial^2_{xx}\chi \qquad \pi_{xy} = \partial^2_{xy}\chi. \tag{1.10}$$

Cette définition est valable sous deux hypothèses importantes :

- L'inertie longitudinale associée aux déplacements dans le plan est négligée.
- Il est supposé qu'aucun effort extérieur longitudinal n'est appliqué.

1.1.2 Équations de Föppl von-Kármán : établissement et discussion

Rappel des hypothèses

Avant de présenter les équations de Föppl von-Kármán, les différentes hypothèses précédemment évoquées sont récapitulées. Celles-ci concernent le matériau, la transformation, les déformations, les contraintes, et enfin la loi de comportement. Évoquer ces hypothèses permet de discuter des enrichissements possibles des équations de Föppl von-Kármán.

Concernant la plaque :

– Elle est constituée d'un matériau supposé homogène, isotrope, et possède comme constantes intrinsèques une masse volumique ρ, un module d'Young E, et un coefficient de Poisson ν. Les équations de Föppl von-Kármán peuvent être étendues au cas d'une plaque anisotrope. Dans ce cas, l'opérateur bidimensionnel (le crochet $\{.,.\}$ de l'équation (1.12)) possède une structure plus complexe [55].

– Elle est mince, c'est à dire que le rapport d'aspect ϵ, rapport de l'épaisseur h sur une longueur caractéristique L de la surface moyenne est un petit paramètre :

$$\epsilon = \frac{h}{L} << 1 \tag{1.11}$$

Concernant la transformation de la configuration de référence à la configuration déformée :

– Toute section normale au plan médian avant la déformation est animée d'un mouvement de solide rigide : elle reste droite et normale au plan médian après déformation, et ce sans variation de l'épaisseur. Par cette hypothèse, dite hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love, le cisaillement est négligé. Les équations de Föppl von-Kármán sont en effet une extension de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love avec prise en compte des non-linéarités géométriques. Cette classe de modèles s'oppose à la théorie des plaques de Reissner-Mindlin, où le cisaillement est pris en compte.

– La rotation de tout segment de la plaque est supposée modérée. Formellement, il faut que le sinus et le cosinus de l'angle de rotation (voir Figure 1.1) puissent être linéarisés au premier ordre.

Concernant les déformations, les contraintes, et la loi de comportement :

– Les déplacements dans le plan sont d'un ordre inférieur au déplacement transverse ζ, qui est lui de l'ordre de l'épaisseur. Cette hypothèse permet la troncature du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{\gamma}}$ de l'équation (1.2) et corrobore l'hypothèse précédente de rotations modérées.

– Les contraintes sont supposées suffisamment faibles pour que le matériau reste dans le domaine élastique et ne plastifie pas. Cette restriction se traduit par le choix d'une loi de comportement linéaire (1.7).

– Les composantes dans la direction transverse du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$ sont négligées devant les autres composantes (voir équation (1.9)). Le problème est alors restreint à un problème d'élasticité bidimensionnelle.

– L'inertie longitudinale est négligée afin de pouvoir introduire le potentiel d'Airy défini par rapport au tenseur des contraintes via les équations (1.10). Une formulation complète des équations de Föppl-von Kármán avec prise en compte des déplacements dans le plan et de l'inertie longitudinale est disponible [70, 88, 110].

Établissement des équations

À partir des mesures de contraintes et de déformations précédemment introduites, de la relation non linéaire entre déformations et déplacements, et de la loi de comportement linéaire, les équations dites de Föppl von-Kármán peuvent être établies de plusieurs manières qui ne seront pas détaillées ici. Le principe de moindre action est utilisé à partir de formes appropriées de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle dans [38, 70]. Dans [2], les équations de Föppl von-Kármán sont déterminées comme étant des équations d'Euler-Lagrange pour l'énergie libre. La démarche entreprise dans [37, 97, 99] a recours quant à elle au principe des travaux virtuels. Une preuve mathématique par développements asymptotiques selon un petit paramètre lié à l'intensité des efforts extérieurs est finalement établie par [17]. Les équations de Föppl von-Kármán apparaissent alors comme une première correction non linéaire à l'équation linéaire de Kirchhoff-Love pour les plaques minces. Il est à remarquer que dans la littérature mécanique, ce modèle est le plus souvent référencé sous le nom de von-Kármán uniquement, l'hypothèse la plus importante se situant au niveau de la troncature proposée par von-Kármán dans la relation entre déformations et déplacements. Föppl a quant à lui le premier proposé l'utilisation d'une fonction d'Airy pour condenser les déplacements longitudinaux [3, 34].

Le déplacement normal ζ d'une plaque mince est régi en tout point x et y du repère associé au plan moyen de la plaque par le jeu d'équations suivant, les équations de Föppl von-Kármán,

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \{\chi, \zeta\}, \tag{1.12a}$$

$$\Delta^2 \chi = -\frac{Eh}{2} \{\zeta, \zeta\}, \tag{1.12b}$$

où $\{\chi,\zeta\} = \chi_{,xx}\zeta_{,yy} + \chi_{,yy}\zeta_{,xx} - 2\chi_{,xy}\zeta_{,xy}$ est l'opérateur de Monge-Ampère écrit en coordonnées cartésiennes. Δ^2 est le bilaplacien, carré du laplacien, et s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\Delta^2\zeta = \frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}. \tag{1.13}$$

Le jeu d'équations (1.12) est un système de deux équations non linéaires à deux inconnues χ et ζ. L'équation (1.12b), parfois appelée équation de compatibilité, gouverne le mouvement longitudinal et permet de déterminer le potentiel d'Airy. L'équation (1.12a) gouverne le mouvement transversal et le terme proportionnel au bilaplacien du déplacement transverse représente la raideur linéaire en flexion. Le couplage entre les forces de membrane et les forces de flexion est apporté par l'opérateur $\{.,.\}$. Le terme non linéaire dans l'équation d'évolution (1.12a) est un terme non linéaire cubique en ζ.

L'opérateur bilaplacien de l'équation (1.12a) étant d'ordre 4, quatre conditions aux limites doivent être associées aux équations de Föppl-von Kármán : une pour le mouvement de flexion ζ, une pour la rotation des bords correspondant à la dérivée dans la direction normale $\zeta_{,n}$, deux pour les déplacements dans le plan $\mathbf{u} = (u, v)$. Pour la fonction d'Airy χ, la physique impose des conditions sur ζ et $\mathbf{u}$ qui doivent être retranscrites en conditons aux limites pour χ. Le tableau 1.1 répertorie les différentes situations possibles et les conditions alors imposées sur le déplacement transverse ζ et la fonction d'Airy χ.

Au sujet du choix du modèle

Le comportement non linéaire d'une plaque peut être décrit à l'aide des équations de Föppl von-Kármán, ou des équations de Reissner-Mindlin. Ces dernières sont une extension à deux dimensions du modèle de poutre de Timoshenko et ne font pas d'hypothèse sur l'amplitude des rotations ni de troncature sur le tenseur des déformations $\underline{\underline{\gamma}}$. Cette représentation est appropriée si la source des phénomènes non linéaires n'est plus le couplage entre forces de membrane et forces de flexion. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer d'autres termes non linéaires que ceux dépendant uniquement de ζ. Cependant, à deux dimensions, le couplage membrane/flexion est la source principale des phénomènes non linéaires de telle sorte que la prise en compte de ces autres termes n'est justifiée que pour de grandes déformations avec une loi de comportement non linéaire [97, 98]. Le modèle de von-Kármán semble donc être le plus adapté en vue d'une application à la turbulence d'ondes. Cependant, certaines hypothèses importantes pourraient être mises en défaut :

- *Les déplacements sont considérés comme modérés (de l'ordre de l'épaisseur), de même que les rotations, et ce afin de pouvoir négliger le cisaillement.* Les expériences de turbulence d'ondes dans les plaques mettent en œuvre pourtant des déplacements allant jusqu'à dix fois l'épaisseur de la plaque. Le problème de la

Conditions aux limites	Direction longitudinale	Direction transverse
Encastrées	$\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \chi_{,nn} - \nu\chi_{,tt} = \chi_{,nnn} + (2+\nu)\chi_{,ntt} = 0$	$\zeta = 0 \quad ; \quad \zeta_{,n} = 0$
Libres	$\chi_{,nt} = \chi_{,tt} = 0$	$\zeta_{,nn} + (2-\nu)\zeta_{,ntt} - \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2}(\chi_{,tt}\zeta_{,n} - \chi_{,nt}\zeta_{,t}) = 0$ $\zeta_{,nt} = 0$ aux coins $\zeta_{,nn} + \nu\zeta_{,tt} = 0$
Simplement supportées	//	$\zeta = 0 \quad ; \quad \zeta_{,nn} + \nu\zeta_{,tt} = 0$

TABLE 1.1 – Expression des conditions aux limites imposées à la plaque dans des cas simples en fonction du déplacement transverse ζ et de la fonction d'Airy χ [16, 24, 97]. L'écriture $\zeta_{,n}$ représente l'opération de dérivation dans la direction normale au plan médian et $\zeta_{,t}$ celle dans la direction tangentielle.

validité du modèle de von-Kármán en fonction de l'amplitude vibratoire reste un problème ouvert. En effet, on ne trouve pas dans la littérature de comparaisons exhaustives permettant de donner une borne supérieure claire à son utilisation en fonction du rapport ζ/h. Cependant les quelques études disponibles montrent un très bon comportement du modèle de von-Kármán jusqu'à 5 à 10 fois l'épaisseur [27, 64, 67, 98, 101, 104, 109].

– *L'inertie longitudinale est négligée.* La validité de cette hypothèse est discutable pour des vibrations en hautes fréquences. Il serait nécessaire de simuler numériquement le modèle prenant en compte les déplacements transverses et l'inertie longitudinale [70] et de comparer les résultats avec une simulation des équations (1.12) pour pouvoir répondre à cette question.

– *L'inertie de rotation est négligée.* Là encore, il serait intéressant de simuler numériquement la version des équations de Föppl von Kármán prenant en compte ce terme d'inertie. Cependant, la contribution de l'inertie de rotation est inférieure d'un ordre à celle de l'inertie longitudinale. Négliger cette dernière est donc sans doute l'hypothèse la plus discutable du modèle de von-Kármán.

1.2 Mécanismes dissipatifs dans les plaques métalliques minces

L'amortissement est une problématique fondamentale en mécanique des structures et en vibroacoustique où il présente encore beaucoup d'enjeux aussi bien dans sa modélisation que dans sa mesure. Les formes de dissipation peuvent être regroupées dans deux catégories, les pertes internes à la structure, et les pertes dues au couplage avec l'environnement. Dans le cas des plaques métalliques minces, deux mécanismes sont reconnus comme prépondérants dans le processus de dissipation d'énergie, l'amortissement thermoélastique résultant de pertes thermiques dans l'épaisseur de la plaque, et l'amortissement par rayonnement causé par la génération d'ondes acoustiques dans l'air environnant. La phénoménologie de ces deux mécanismes sera détaillée puis les autres processus pouvant également entraîner une perte d'énergie de la plaque seront évoqués. Ces modèles seront comparés dans le chapitre 3 à des mesures de l'amortissement du montage dédié à la mise en œuvre expérimentale de la turbulence d'ondes.

1.2.1 Grandeurs considérées

Il est important de définir clairement les grandeurs utilisées pour quantifier l'amortissement. Celui-ci provenant de la somme de l'énergie perdue par chacun des modes du système considéré, il peut être introduit dans le cadre d'un oscillateur à un degré de liberté, forcé, et amorti.

Soit donc un oscillateur forcé harmoniquement au cours du temps t à la pulsation ω avec une amplitude F_0, son déplacement x est alors régi par l'équation du mouvement suivante,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 e^{j\omega t}, \tag{1.14}$$

où m est la masse de l'oscillateur et k sa raideur. L'amortissement, de type visqueux, est représenté par le terme cdx/dt. En cherchant une solution de la forme $x(t) = x_0 e^{j(\omega t - \phi)}$, il vient

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{\tilde{F}_0}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \tag{1.15}$$

avec $r = \omega/\omega_n$ la pulsation relative, rapport de la pulsation du système amorti ω avec la pulsation propre du système non amorti $\omega_n = \sqrt{k/m}$. On note $\tilde{F}_0 = F_0/k$ et

$$\xi = c/(2m\omega_n), \tag{1.16}$$

cette dernière quantité étant communément appelée le taux d'amortissement.

Dans l'approximation de faible amortissement, typiquement

$$\xi < 0.05, \tag{1.17}$$

le maximum du rapport $x_0/\tilde{F}_0$ est approché par sa valeur en $r = 1$. Le facteur de qualité Q est alors défini :

$$Q = (\frac{x_0}{\tilde{F}_0})_{max} = \frac{1}{2\xi}. \tag{1.18}$$

Deux autres mesures d'amortissement sont régulièrement employées, le facteur de pertes η et le facteur d'amortissement γ :

$$\eta = 2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{2\gamma}{\omega}. \tag{1.19}$$

Dans cette thèse, le facteur d'amortissement γ sera utilisé pour mesurer l'amortissement, et ce comme dans les précédents travaux sur la dissipation réalisés à l'UME [1, 53].

1.2.2 Pertes internes

Amortissement thermoélastique dans les plaques minces

L'amortissement thermoélastique provient du couplage dans l'épaisseur de la plaque entre les ondes élastiques et les ondes thermiques. Sa modélisation nécessite donc de coupler l'équation gouvernant le déplacement transverse d'un point de la plaque avec l'équation de la chaleur. Cette démarche étend au cas à deux dimensions les travaux fondateurs de Zener pour les poutres [118]. La propagation des ondes de flexion dans la plaque est décrite par l'équation de Kirchhoff-Love,

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta, \tag{1.20}$$

dont on vérifie facilement qu'elle correspond à la partie linéaire de l'équation de Föppl-von Kármán (1.12a). L'objectif principal des modèles trouvés dans la littérature est alors d'inclure les effets des pertes thermoélastiques dans l'équation non dissipative de Kirchhoff-Love (1.20) en écrivant une équation de la forme

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\Delta^2 \zeta + \alpha_{TH}(1+\nu)\Delta\Theta(x,y,t)), \tag{1.21}$$

où α_{TH} est le coefficient de dilatation thermique du matériau. $\Theta(x, y, t)$ est le moment de température selon l'épaisseur de la plaque,

$$\Theta(x,y,t) = \frac{1}{I} \int_{-h/2}^{h/2} z\theta(x,y,z,t)dz, \tag{1.22}$$

avec $I = h^3/12$. $\theta(x, y, z, t)$ représente la différence entre la température de la plaque et la température ambiante. La première estimation du moment de température Θ a été réalisée par Chadwick [14] et nécessite une équation à trois dimensions pour décrire les variations du champ de température. Cette démarche conduit à un modèle compliqué

Chadwick [14] / Norris [79] : $\gamma_{TH} = \frac{\omega^2\alpha^2 ET(1+\nu)}{2C(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n\tau_n}{1+\omega^2\tau_n^2}$	Lagnese & Lions [52] : $\gamma_{TH} = \frac{6\kappa\omega^2\alpha^2 ETh^2(1+\nu)}{(144\kappa^2+\omega^2h^4C^2)(1-\nu)}$
Simmonds [94] : $\gamma_{TH} = \frac{\omega^2\alpha^2 ETh^2(1+\nu)}{20\kappa(1-\nu)}$	McIntyre [62] : $\gamma_{TH} = \frac{48\kappa\omega^2\alpha^2 ETh^2(1-\nu^2)}{\pi^2(\omega^2h^2\rho^2C_e^2+\kappa^2\pi^4)(1-\nu)^2}$

TABLE 1.2 – Facteurs d'amortissement thermoélastique γ_{TH} disponibles dans la littérature.

Symbole	Nom	Valeur pour l'acier	Unité
α	Dilatation Thermique	1.2×10^{-5}	K^{-1}
κ	Conductivité thermique	50	$W.m^{-1}.K^{-1}$
C	Chaleur spécifique volumique	3.7×10^6	$J.m^{-3}.K^{-1}$
T	Température ambiante	293	K
E	Module d'Young	2.1×10^{11}	Pa
ν	Coefficient de Poisson	0.3	/
ρ	Masse Volumique	7860	kg.m-3

TABLE 1.3 – Grandeurs caractéristiques de l'acier permettant de construire les modèles d'amortissement par thermoélasticité.

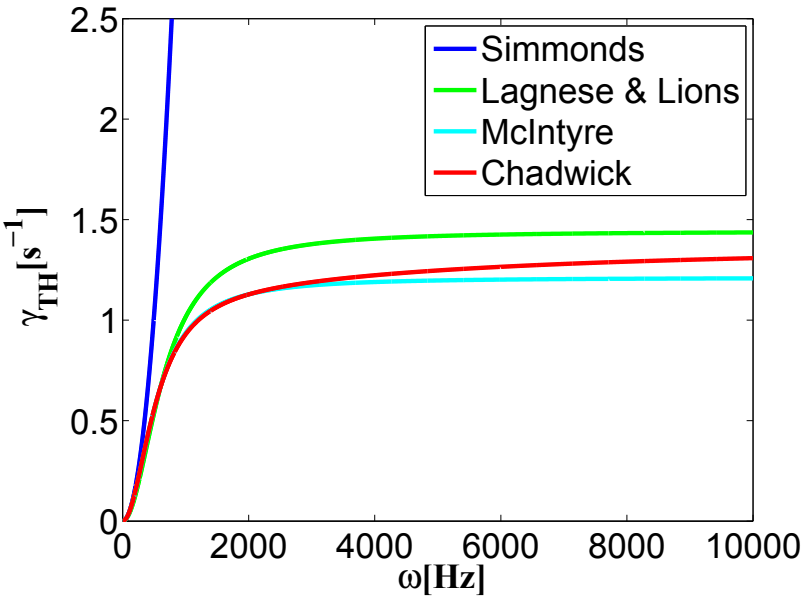


FIGURE 1.2 – Facteur d'amortissement par thermoélasticité γ_{TH} d'une plaque d'acier d'épaisseur $h = 0.5$mm en fonction de la pulsation ω pour les quatre modèles.

à mettre en œuvre et dont le niveau de complexité n'est par ailleurs pas nécessaire. En effet, les variations de température dans le plan de la plaque sont insignifiantes comparées à la diffusion conduite par le gradient de température à travers l'épaisseur. Cette remarque faite, plusieurs études proposent, sous certaines approximations, des systèmes d'équations simplifiés permettant de calculer le moment Θ [52, 79, 94]. Dans tous les cas, le moment de température est régi par un système d'équations dépendant des paramètres mécaniques et thermiques du matériau, de la différence de température θ, et du déplacement transverse ζ.

Les différents modèles dédiés au calcul de Θ sont comparés et leurs différences mises en exergue dans [78]. Cette étude est ici reprise, dans le cadre d'une plaque infinie ou de très grande densité modale, pour le facteur d'amortissement γ défini par l'équation (1.19) sous l'hypothèse de faible amortissement. La forme du facteur d'amortissement thermoélastique proposée par McIntyre [62] et reprise dans [1, 53] a été ajoutée à cette étude comparative. Les différentes formules sont présentées dans le tableau 1.2 où il a été posé pour le modèle de Chadwick

$$d_n = \frac{96}{\pi^4(2n+1)^4}, \qquad \tau_n = \frac{h^2 C}{\kappa\pi^2(2n+1)^2}. \tag{1.23}$$

Ces coefficients apparaissent en introduisant, pour décrire les effets de la thermoélasticité, une fonction de relaxation g qui dépend du temps t :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\tau_n} e^{-t/\tau_n}. \tag{1.24}$$

Les grandeurs inhérentes au matériau sont définies dans le tableau 1.3 et associées à leur valeur pour l'acier. Bien que le modèle de Norris [79] estime le moment de température à l'aide d'une seule équation, et ce grâce à l'emploi du formalisme de la viscosité, le facteur d'amortissement qui en découle prend strictement la même forme que celui venant du modèle de Chadwick.

La Figure 1.2 présente le facteur d'amortissement thermoélastique γ_{TH} en fonction de la pulsation ω pour l'ensemble des références citées. La forme la plus simple du facteur d'amortissement est donnée par Simmonds : le facteur d'amortissement thermoélastique est proportionnel au carré de la pulsation et ne correspond qu'aux plus basses fréquences du système aux prédictions des autres modèles. Ceux-ci disposent en effet d'une correction aux hautes fréquences permettant que la convergence du facteur d'amortissement : il croît comme le carré de la pulsation pour les plus basses fréquences avant d'atteindre une valeur asymptotique. La fréquence à partir de laquelle s'opère cette correction dépend des paramètres mécaniques et thermiques du matériau et évolue comme l'inverse du carré de l'épaisseur de la plaque (voir Figure 1.3(b)). Pour les modèles de Lagnese et McIntyre, le facteur d'amortissement est constant après cette fréquence. Les éléments essentiels du processus dissipatif sont capturés mais une erreur systématique induite par les approximations faites sur le moment de température Θ est observée. On préfèrera donc garder la forme du facteur d'amortissement donnée par Chadwick et retrouvée par Norris.

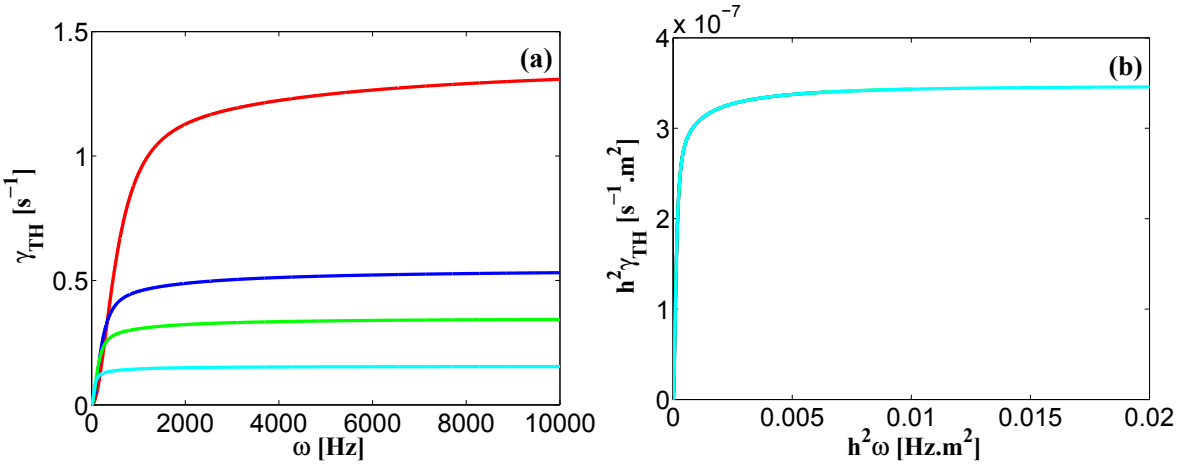


FIGURE 1.3 – Facteurs d'amortissement par thermoélasticité γ_{TH} prédits par le modèle de Chadwick en fonction de la pulsation ω pour des plaques d'épaisseurs différentes. Rouge : $h = 0.5$ mm. Bleu : $h = 0.8$ mm. Vert : $h = 1$ mm. Cyan : $h = 1.5$ mm.(b) Facteurs d'amortissement thermoélastique multipliés par l'épaisseur de la plaque au carré en fonction de la pulsation multipliée par l'épaisseur de la plaque au carré.

La Figure 1.3(a) montre le facteur d'amortissement thermoélastique γ_{TH} prédit par le modèle de Chadwick en fonction de la pulsation ω pour des plaques d'épaisseurs $h = 0.5, 0.8, 1, 1.5$ mm. Pour les quatre épaisseurs, le comportement observé est similaire : le facteur d'amortissement augmente très rapidement dans un premier temps avant d'atteindre un palier. En fonction de l'épaisseur, deux comportements se dégagent :

- Le palier est plus rapidement atteint pour une plaque épaisse.

- Le facteur d'amortissement thermoélastique augmente quand l'épaisseur de la plaque diminue : plus la plaque est mince et plus les pertes par chaleur sont grandes.

La Figure 1.3(b) présente ces mêmes facteurs normalisés en amplitude par le carré de l'épaisseur de la plaque en fonction de la pulsation normalisée elle aussi par le carré de l'épaisseur. Toutes les courbes ne forment plus qu'une seule et même trajectoire, attestant que les variations de l'amortissement thermoélastique évoluent comme l'inverse du carré de l'épaisseur de la plaque.

Les coefficients d'amortissements présentés précédemment ont été déterminés sous l'hypothèse d'un système de taille infinie ou de très grande densité modale. Pour un système de taille finie, le facteur d'amortissement est donné par [53] et vaut, sous

l'hypothèse de faible amortissement,

$$\gamma_{TH}(\omega_p) = \frac{48\kappa\omega_p^2\alpha^2 ETh^2(1-\nu^2)}{\pi^2(\omega_p^2 h^2\rho^2 C_e^2 + \kappa^2\pi^4)(1-\nu)^2} I_{1,p}, \tag{1.25}$$

où $I_{1,p}$ est un moment d'inertie dépendant du mode considéré, de la géométrie de la plaque, et des conditions aux limites. Pour une plaque rectangulaire encastrée ou simplement supportée aux quatre bords, $I_{1,p} = 1$ [62] : l'amortissement est indépendant des déformées modales. En présence de bords libres ce n'est plus le cas : une grande disparité du facteur d'amortissement avec la déformée modale est présente pour les premiers modes de la plaque [53]. Pour les modes d'ordres plus élevés, le comportement asymptotique décrit par le modèle de Chadwick reste valable.

Amortissement viscoélastique

L'amortissement viscoélastique est le résultat d'un "effet mémoire" du matériau lié à ses dislocations. La modélisation de ce comportement permet de décrire dans quelle mesure le travail fourni au cours d'une déformation est stocké en énergie mécanique, ou dissipé intrinsèquement. Cette dissipation est indépendante de l'épaisseur de la plaque. Des expériences sur différentes classes de matériaux [53] ont montré que ce mécanisme dissipatif était prépondérant dans des matériaux tel que le verre, le bois, et le carbone. Pour les métaux, les pertes viscoélastiques semblent être négligeables par rapport aux pertes internes dues à la thermoélasticité. Cette conclusion est venue de l'observation de la grande dépendance des facteurs d'amortissement à l'épaisseur de la plaque.

Dans [13], les auteurs estiment expérimentalement le facteur de pertes due à la viscoélasticité pour l'acier :

$$\eta_{visco} = 1.67 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}^{-1}. \tag{1.26}$$

Ce facteur de pertes est relié au facteur d'amortissement viscoélastique par la relation $\gamma_{visco} = 0.5 * \eta_{visco}\omega$. En suivant cette référence, on trouve donc que le facteur d'amortissement due à la viscoélasticité dépasse 1 s^{-1} à partir de 2 kHz. Ce mode de dissipation devra donc être pris en compte pour analyser l'amortissement de notre système expérimental.

1.2.3 Amortissement par rayonnement

Le deuxième mécanisme d'amortissement régulièrement considéré dans le cadre des plaques est l'amortissement par rayonnement, résultat d'un transfert d'énergie de la plaque à l'air ambiant sous forme d'ondes acoustiques. Comprendre cette forme de dissipation revient à s'intéresser aux modèles de rayonnement d'une plaque, rayonnement caractérisé par deux grandeurs : le facteur de rayonnement et la fréquence de coïncidence.

Facteur de rayonnement

On quantifie la qualité du rayonnement d'une structure par le facteur de rayonnement σ_{rad}, rapport entre la puissance acoustique rayonnée et la puissance mécanique injectée. Ce facteur est proche de 0 si la structure rayonne peu et égal à 1 quand l'efficacité du rayonnement est maximale. Il est défini pour un système de surface vibratoire S rayonnant dans un fluide de densité ρ_0 où le son se propage à la vitesse c_0 par :

$$\sigma_{rad} = \frac{R_{rad}}{\rho_0 c_0 S}. \tag{1.27}$$

Dans notre cas, $S = L_x L_y$ est la surface de la plaque. R_{rad} est la résistance de rayonnement définie à partir de la puissance acoustique P_{rad} mesurée sur la surface rayonnante $S_2 = 2 \times S$, la plaque rayonnant par ses deux faces :

$$P_{rad} = \int_{S_2} \langle p_a \mathbf{v}_a \rangle dS_2, \tag{1.28a}$$

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{\langle v^2 \rangle_S}. \tag{1.28b}$$

p_a et $\mathbf{v}_a$ sont respectivement le champ de pression et le champ de vitesse de la perturbation acoustique produite par la plaque. $\langle v^2 \rangle_S$ est la moyenne spatiale du carré de la vitesse vibratoire de la plaque :

$$\langle v^2 \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S v^2 dS. \tag{1.29}$$

Le facteur d'amortissement par rayonnement γ_{rad} est relié au facteur de rayonnement par [100] :

$$\gamma_{rad} = \frac{c_0 \rho_0}{\rho h} \sigma_{rad} = \frac{R_{rad}}{\rho h S}. \tag{1.30}$$

Afin d'obtenir des solutions analytiques pour les plaques, l'hypothèse principale consiste à supposer que le système baigne dans un fluide léger en négligeant la force qu'exerce ce dernier sur la plaque. La condition à remplir pour que cette hypothèse soit valide est [90] :

$$\omega \frac{\rho h}{\rho_0 c_0} >> 1 \tag{1.31}$$

Cette hypothèse est souvent valable pour le cas d'une plaque d'acier rayonnant dans l'air mais peut être questionnée pour des plaques très minces à basses fréquences.

Fréquence de coïncidence et effets de taille finie

Le rayonnement d'une plaque n'est efficace qu'à partir d'une certaine fréquence appelée fréquence de coïncidence. Celle-ci peut être introduite physiquement en comprenant qu'il est nécessaire qu'il y ait adaptation géométrique des longueurs d'ondes

entre le front d'onde parcourant une plaque (ici supposée infinie) et le front de l'onde plane acoustique engendrée dans l'air. La Figure 1.4 représente les deux front d'ondes caractérisés par les longueurs d'ondes λ_p pour les ondes de la plaque et λ_a pour les ondes acoustiques. Ce schéma introduit un angle θ mesurant l'écart entre la direction des deux fronts d'ondes. Il vient :

$$\lambda_a = \lambda_p \cos\theta. \tag{1.32}$$

Ceci implique que la longueur d'onde dans l'air doit être plus petite que celle dans la plaque et donc que le nombre d'onde k_a dans l'air doit être plus grand que le nombre d'onde k_s de l'onde associée se propageant dans le solide. La figure 1.5 représente la relation de dispersion des ondes dans l'air,

$$k_a = \frac{2\pi f}{c_0}, \tag{1.33}$$

ainsi que la relation de dispersion des ondes dans la plaque,

$$k_p = \sqrt{\frac{2\pi f}{\kappa}} \qquad \text{avec} \quad \kappa = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \tag{1.34}$$

κ est la vitesse des ondes se propageant dans la plaque. Ces relations de dispersion ont ici été calculées à partir des caractéristiques de la plaque majoritairement utilisée au cours de cette thèse : sa surface mesure 2×1 m^2, son épaisseur vaut $h = 0.5$ mm, et elle est faite d'un acier caractérisé par un module d'Young $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et une masse volumique $\rho = 7860$ kg.m^{-3}. Enfin, elle baigne dans l'air de densité $\rho_0 = 1.2$ kg.m^{-3} où se propage les ondes à la vitesse $c_0 = 340.5$ m.s^{-1}. La Figure 1.5 montre ainsi l'existence de la fréquence de coïncidence définie formellement par

$$f_c = \frac{c_0}{2\pi\kappa}. \tag{1.35}$$

A partir de cette fréquence, le nombre d'onde des ondes dans l'air est supérieur à celui des ondes dans le solide. Si $f < f_c$, la plaque génère des ondes de pression évanescentes et il n'y a pas d'émission d'énergie de la plaque vers le fluide. Le fluide se comporte alors uniquement comme une masse ajoutée et il n'y a pas d'amortissement par rayonnement. Pour $f > f_c$ la plaque génère des ondes propagatives et une partie de l'énergie vibratoire est transmise au fluide environnant sous forme de rayonnement. D'après la Figure 1.5, nous déduisons que la fréquence de coïncidence de la plaque majoritairement utilisée au cours de cette thèse vaut $f_c = 2.38 \times 10^4$ Hz. Les pertes par rayonnement n'ont lieu qu'à des fréquences hors de l'audible et peuvent être donc théoriquement négligées si l'on considère une plaque infinie. Cependant, expérimentalement, on entend la plaque vibrer, du fait de sa taille finie.

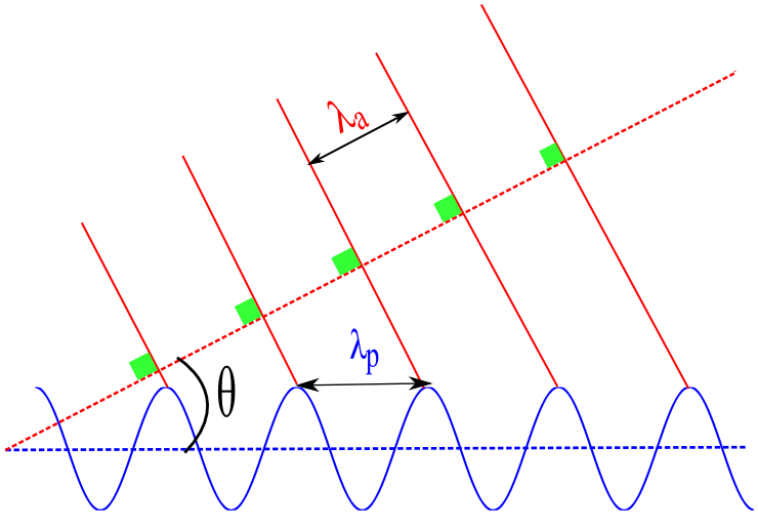


FIGURE 1.4 – Accord géométrique entre la longueur d'onde λ_p des ondes se propageant dans la plaque et celle λ_a des ondes se propageant dans l'air. Les deux directions de propagation forment un angle θ tel que $\lambda_a = \lambda_p \cos\theta$.

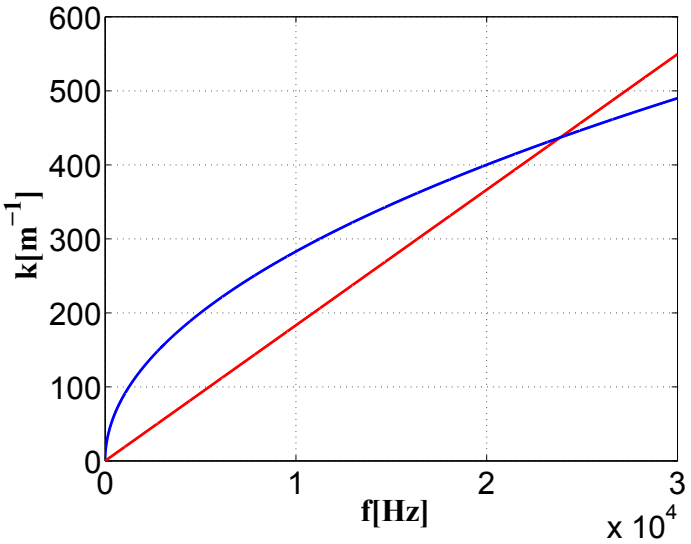


FIGURE 1.5 – Nombre d'onde k en fonction de la fréquence de l'onde f. Bleu : relation de dispersion d'une onde parcourant une plaque d'acier d'épaisseur $h = 0.5$ mm. Rouge : relation de dispersion d'une onde se propageant dans l'air.

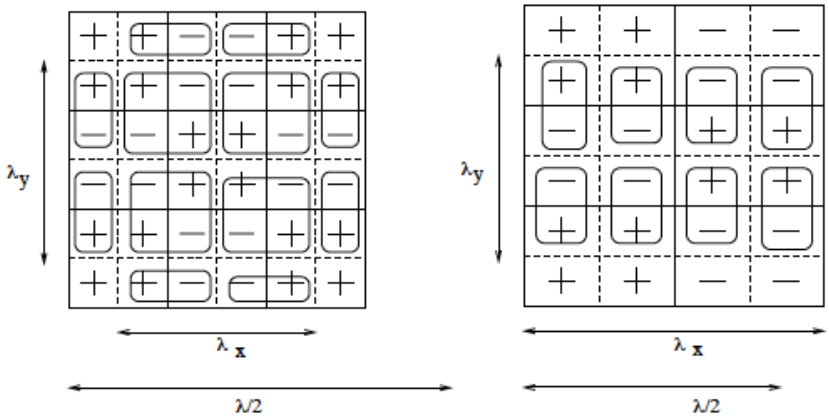


FIGURE 1.6 – Figure extraite de [60]. (Gauche) $\lambda_x < \lambda/2$ et $\lambda_y < \lambda/2$: la plaque rayonne par ses coins. (Droite) $\lambda_x > \lambda/2$ et $\lambda_y < \lambda/2$: la plaque rayonne par ses bords.

Le rayonnement d'une plaque finie dépend de la déformée modale (voir Figure 1.6) [60] :

- Si $\lambda_x < \lambda/2$ et $\lambda_y < \lambda/2$, on peut former des quadripôles et des dipôles dont l'efficacité de rayonnement est nulle : seuls les coins de la plaque rayonnent.
- Si $\lambda_x < \lambda/2$ et $\lambda_y > \lambda/2$ ou $\lambda_x > \lambda/2$ et $\lambda_y < \lambda/2$, on ne peut former des dipôles que dans la direction où la longueur d'onde dans le fluide est plus grande que la longueur d'onde dans la plaque : le rayonnement provient des bords.
- Si $\lambda_x > \lambda/2$ et $\lambda_y > \lambda/2$ on ne peut constituer ni dipôles ni quadripôles et le rayonnement est dû à la totalité de la plaque

Ces derniers modes, appelés aussi modes de surface [15] sont les plus efficaces d'un point de vue du rayonnement, suivis par les modes de bords puis par les modes de coins.

Modèle de rayonnement choisi

Les facteurs de rayonnement d'une plaque finie peuvent alors être prédits en considérant la contribution de chaque mode à partir de l'intégrale de Rayleigh [107], ce qui pour un système comportant une aussi grande densité modale que notre plaque (car grande et mince) est une tâche fastidieuse. Une autre méthode consiste à évaluer le rayonnement global moyen de la structure grâce à des calculs de flux de puissance et d'analyse statistique d'énergie. Cette démarche a été entreprise par Maidanik [58]. Les deux approches ont été comparées pour une plaque mince d'acier dans [1], montrant que pour des plaques à très grande densité modale, la description globale fournie par Maidanik était suffisante pour capturer les éléments fondamentaux du rayonnement. Nous présentons ici les résultats de Maidanik pour une plaque mince insérée dans une

écran infini, aux conditions aux limites simplement supportées, et rayonnant dans un fluide léger. Pour $f < f_c$:

$$R_{rad} = \rho_0 c_0 S \left(2\psi^2 \frac{\lambda_c \lambda_a}{S} g_1 + P \frac{\lambda_c}{S} g_2 \right) \quad \text{avec} \tag{1.36a}$$

$$g_1 = \frac{4}{\pi^4} \left(\frac{1 - 2\psi^2}{\psi (1 - \psi^2)^{1/2}} \right) \quad \text{pour} \quad f/f_c < 0.5, \tag{1.36b}$$

$$g_1 = 0 \quad \text{pour} \quad f/f_c > 0.5 \tag{1.36c}$$

$$g_2 = \frac{1}{4\pi^2 (1 - \psi^2)^{3/2}} \left((1 - \psi^2) \ln \left[\frac{1 + \psi}{1 - \psi} \right] + 2\psi \right) \tag{1.36d}$$

$$\text{avec} \quad \psi = \sqrt{\frac{f}{f_c}} \tag{1.36e}$$

avec $S = L_x L_y$, $P = 2(L_x + L_y)$, λ_a la longueur d'onde du son dans l'air, λ_c la longueur d'onde à la fréquence critique. g_1 correspond au rayonnement des modes de coins et g_2 à celui des modes de bords. Les dimensions de notre plaque sont telles qu'aucun mode de surface ne rayonne. À $f = f_c$:

$$R_{rad} = \rho_0 c_0 S [(L_x/\lambda_c)^{1/2} + (L_y/\lambda_c)^{1/2}], \tag{1.37}$$

et finalement, pour $f > f_c$:

$$R_{rad} = \rho_0 c_0 S [1 - (f_c/f)]^{-1/2}. \tag{1.38}$$

La Figure 1.7 présente le facteur d'amortissement par rayonnement γ_{rad} obtenu à partir du modèle de Maidanik [58] pour une plaque d'acier d'épaisseur $h = 0.5$ mm rayonnant par ses deux faces dans l'air. Avant la moitié de la fréquence de coïncidence, le rayonnement est très faible et sa valeur est déterminée par le rapport entre la fonction $2\psi^2 \lambda_a g_1$, décroissante, et la fonction $P g_2$ croissante. À partir de $f_c/2$, g_1 est nul et l'amortissement par rayonnement croît pour atteindre sa valeur maximale en $f = f_c$. Pour les fréquences supérieures à la fréquence de coïncidence, γ_{TH} décroît en direction d'une valeur constante.

L'influence de l'épaisseur sur l'amortissement thermoélastique a été discuté précédemment. La Figure 1.8 représente l'évolution du facteur d'amortissement pour des plaques d'épaisseur $h = 0.5, 0.8, 1, 1.5$ mm. Avant la moitié de la fréquence de coïncidence, le rayonnement est peu sensible à l'épaisseur bien qu'il soit un peu plus élevé pour la plaque la plus épaisse. La fréquence de coïncidence définie par l'équation (1.35) évolue comme l'inverse de l'épaisseur, descendant pour la plaque de 1.5 mm d'épaisseur jusqu'à $f_c = 7949$ Hz : plus la plaque est épaisse et plus elle a tendance à perdre de l'énergie par rayonnement rapidement. Après la fréquence de coïncidence, la décroissance du facteur d'amortissement est similaire pour toutes les épaisseurs et tend vers une constante qui se comporte proportionnellement avec l'inverse de l'épaisseur : une plaque épaisse rayonne plus rapidement, mais l'efficacité de son rayonnement est plus faible aussi bien au niveau de la fréquence de coïncidence qu'après.

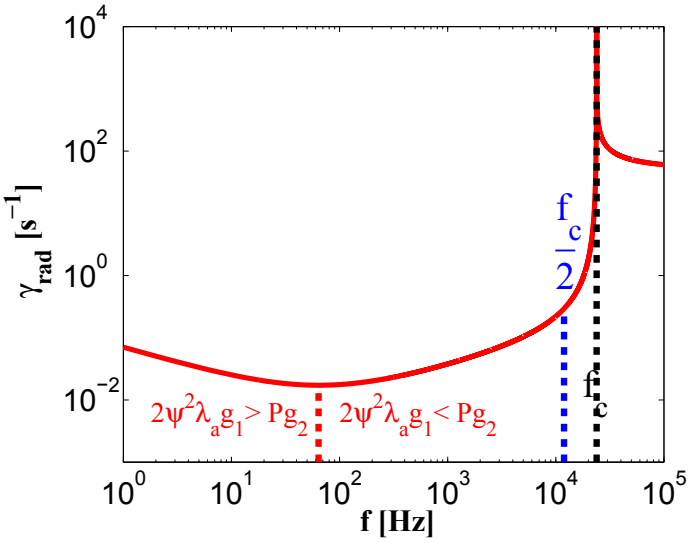


FIGURE 1.7 – Facteur d'amortissement par rayonnement γ_{rad} en fonction de la fréquence pour une plaque d'acier d'épaisseur $h = 0.5$ mm. Cette courbe est donnée par la simulation du modèle fourni par Maidanik [58] pour une plaque simplement supportée et placée dans un écran infini.

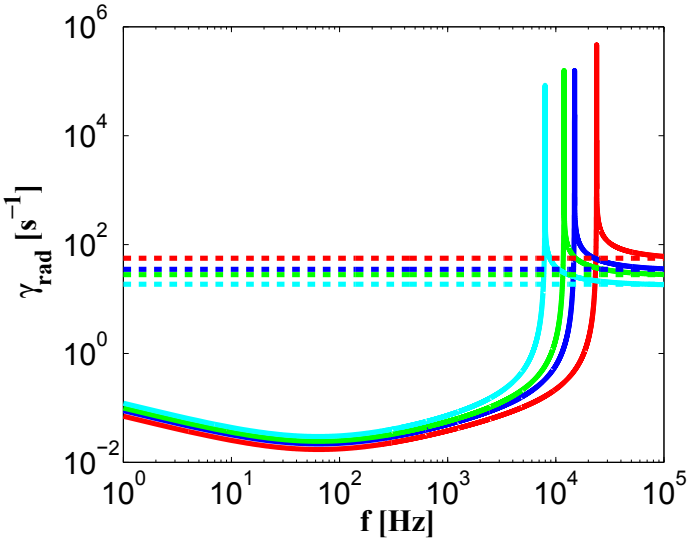


FIGURE 1.8 – Facteurs d'amortissement par rayonnement γ_{rad} en fonction de la fréquence pour des plaques d'acier de plusieurs épaisseurs. Rouge : $h = 0.5$ mm. Bleu : $h = 0.8$ mm. Vert : $h = 1$ mm. Cyan : $h = 1.5$ mm. Lignes pointillées : valeur du facteur d'amortissement pour une plaque à bords libres et non bafflée [13]. Rouge : $\gamma_{rad} = 56.014$ s^{-1}. Bleu : $\gamma_{rad} = 35.009$ s^{-1}. Vert : $\gamma_{rad} = 28.01$ s^{-1}. Cyan : $\gamma_{rad} = 18.67$ s^{-1}.

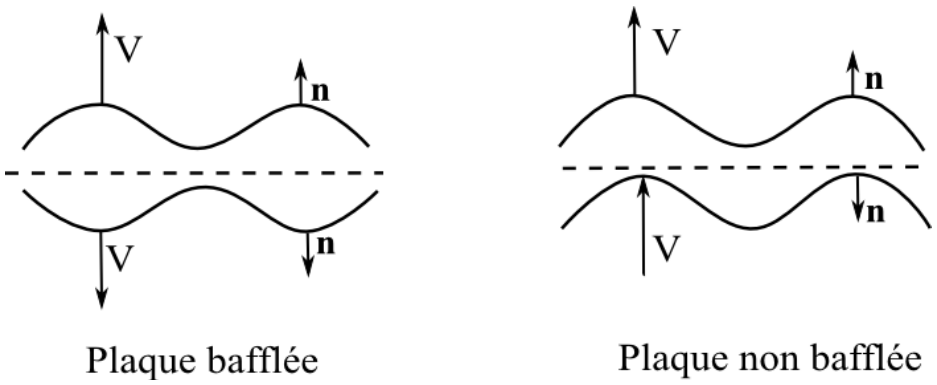


FIGURE 1.9 – Effet du baffle sur le rayonnement d'une plaque. Plaque bafflée : les ondes acoustiques rayonnées par la plaque sont animées de part et d'autre d'une vitesse symétrique V de même signe que la normale extérieure $\mathbf{n}$. Plaque non bafflée : les ondes acoustiques rayonnées par la plaque ont leurs vitesses de mêmes signes.

Discussion

Les hypothèses de plaque simplement supportée et insérée dans un écran infini sont discutables. L'influence des conditions aux limites est reliée aux types de modes rayonnant précédemment évoqués. En changeant les conditions aux limites, la densité de modes rayonnant par les bords, par les coins, ou par la totalité de la surface, est modifiée. Cependant, on peut considérer que sur un grand nombre de mode la moyenne n'est que peu affectée et on supposera dans notre cas que le facteur de rayonnement moyen est indépendant des déformées modales et donc des conditions aux limites.

La présence du baffle permet de découpler les deux espaces situés de part et d'autres de la plaque (voir Figure 1.9) : les ondes acoustiques rayonnées par la plaque sont animées de part et d'autre d'une vitesse de même signe que la normale extérieure. Sans écran, les ondes acoustiques rayonnées par la plaque ont leurs vitesses de mêmes signes [15]. Le rayonnement diffère entre les deux cas par sa directivité. Du point de vue global, il a cependant été reporté [85] qu'en moyenne, après $f_c/2$, le rayonnement était similaire avec ou sans baffle. Avant $f_c/2$, il est plus faible sans baffle que celui présenté dans la Figure 1.7 [23]. Comme dans cette région l'amortissement par rayonnement est très faible, la surestimation de l'amortissement obtenue par l'hypothèse de l'écran peut être négligée.

Finalement, dans [13], les auteurs estiment que pour une plaque à bords libres non bafflée la contribution de l'amortissement par rayonnement après la fréquence de coupure tend vers

$$\gamma_{rad} = \frac{\rho_0 c_0}{2\rho h} \tag{1.39}$$

Comme remarqué précédemment, l'évolution de cette valeur avec l'augmentation de l'épaisseur est bien en $1/h$. De plus, ces valeurs prédites sont représentées sur la Figure 1.8. L'accord entre cette prédiction d'une plaque à bords libres non bafflée et

h (mm)	0.5	0.8	1	1.5
A (m^{-1})	0.165	0.103	0.082	0.055

TABLE 1.4 – Facteur A défini par l'équation (1.41) en fonction de l'épaisseur de la plaque considérée.

le modèle de plaque simplement supportée et bafflée est très bon, traduisant le fait qu'aux hautes fréquences, l'influence des conditions aux limites et de la présence de la baffle est négligeable.

1.2.4 Autres pertes par couplage

Amortissement par friction fluide

L'interaction entre la structure et le fluide environnant n'a pas uniquement lieu via la génération d'ondes acoustiques. Les travaux de [13] mettent en effet en évidence l'existence d'une force dite de friction fluide exercée par l'air sur la plaque quand la vitesse de l'écoulement est suffisamment grande. En reprenant le formalisme utilisé dans l'équation (1.14), l'effet de cette force peut être explicité :

$$c = \rho_0 \frac{v C_x S}{2}. \tag{1.40}$$

v est la vitesse de l'écoulement, S la surface de la plaque, et C_x le coefficient de friction. $C_x = 2$ pour une plaque [9]. Ce processus dissipatif ne dépend pas de la fréquence mais uniquement de la vitesse de l'écoulement. Il n'apparaîtra pas dans les mesures d'amortissement, celles-ci étant réalisées en régime linéaire, et donc à faible amplitude d'excitation et à faible vitesse d'écoulement.

Le facteur d'amortissement par friction fluide γ_{fric} est alors déterminé par les relations (1.16) et (1.19) :

$$\gamma_{fric} = \frac{c}{2m} = A \times v, \qquad \text{où l'on a posé} \quad A = \frac{\rho_0 C_x}{4\rho h}. \tag{1.41}$$

Le tableau 1.4 présente la valeur du coefficient A en fonction de l'épaisseur pour des plaques d'acier vibrant dans l'air et d'épaisseurs $h = 0.5, 0.8, 1, 1.5$ mm. Plus la plaque est épaisse et plus l'amortissement par friction fluide est faible, A variant de 0.165 m^{-1} pour la plaque la plus mince à 0.055 m^{-1} pour la plaque la plus épaisse. L'influence de l'amortissement par friction fluide est donc généralement négligeable, la vitesse de la plaque atteignant des maxima de l'ordre de quelques dizaines de millimètres par seconde [7]. À cet ordre de vitesse correspond un coefficient d'amortissement de l'ordre de 1.10^{-3} s^{-1} pour la plaque la plus mince, ordre de grandeur bien inférieur aux contributions par thermoélasticité, viscoélasticité, et rayonnement.

Pertes par transmission mécanique

Le montage expérimental utilisé pour la mise en œuvre de la turbulence d'ondes dans une plaque mince d'acier nécessite que celle-ci soit attachée par son bord supérieur à une poutre du plafond via un encastrement rendu hermétique par deux lamelles de caoutchoucs disposées de part et d'autre de la plaque. Il est fort probable que ces condition aux limites dissipent de l'énergie mais ce type de pertes est complexe à quantifier et ne pourra l'être qu'une fois les contributions des autres processus évaluées et soustraites à l'amortissement total mesuré. Cette démarche a été mise en œuvre avec succès dans [1].

Chapitre 2

Turbulence d'ondes appliquée aux plaques élastiques

En rappelant la phénoménologie de la turbulence hydrodynamique, la première section de ce chapitre introduit de façon générale celle associée à la turbulence d'ondes. Ces deux théories se rejoignent sur le fait qu'elles cherchent à fournir une description statistique aux temps longs d'un système hors équilibre. Contrairement à la turbulence hydrodynamique, la turbulence d'ondes considère la propagation d'ondes plutôt que celle de tourbillons et possède, au prix de certaines hypothèses importantes, des solutions analytiques.
L'objectif de ce chapitre est alors de montrer dans quelle mesure les plaques minces élastiques peuvent être vues comme un cadre propice pour sa mise en œuvre expérimentale bien que des différences importantes entre prédictions théoriques et réalisations expérimentales existent. Nous pensons que celles-ci sont en majeure partie causées par la dissipation complexe présentée au chapitre précédent, ce qui permettra d'introduire les travaux réalisés au cours de cette thèse dans le contexte des résultats déjà connus.

2.1 Introduction générale à la turbulence d'ondes

2.1.1 Analogies avec la turbulence hydrodynamique

Un fluide en régime turbulent, en opposition au le régime laminaire, se trouve dans un état où l'écoulement est irrégulier tel qu'en tout point de l'espace sa vitesse varie aléatoirement [56]. Quand le forçage est d'amplitude suffisamment faible, l'écoulement est laminaire : le mouvement du fluide a lieu à une échelle unique comparable à celle du forçage. Lorsque l'amplitude de celui-ci augmente, des effets instationnaires pour un forçage stationnaire apparaissent et des mouvements de toutes tailles coexistent alors. Ces mouvements correspondent entre autres à des tourbillons, les plus petits étant transportés par les plus grands.

L'écoulement d'un fluide visqueux, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν, est régi par l'équation de Navier-Stokes. Elle se démontre à partir d'un bilan de quantité de mouvement par unité de volume et est présentée ici, pour un fluide incompressible, sous la forme d'un bilan de forces par unité de masse :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{2.1}$$

$\mathbf{v}$ est le champ de vitesse et p le champ de pression tel que $-\nabla p$ représente les contraintes normales liées aux forces de pression. $\nu\Delta\mathbf{v}$ est un terme linéaire représentant le transport de quantité de mouvement par diffusion moléculaire. Le terme $(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}$ décrit le transport de la vitesse par convection, il est non linéaire de par sa dépendance quadratique en la vitesse. La discrimination entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent s'opère grâce au nombre de Reynolds Re qui pondère le terme de diffusion visqueuse par rapport aux autres termes de l'équation. Il apparaît dans l'équation de Navier-Stokes adimensionnée :

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V}.\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{V}, \tag{2.2}$$

$$\text{avec} \quad \mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}. \tag{2.3}$$

U et L sont des échelles associées respectivement à une vitesse caractéristique et à une taille caractéristique de l'écoulement. P et $\mathbf{V}$ sont respectivement le champ de pression adimensionné et le champ de vitesse adimensionné. En régime laminaire, Re est petit (typiquement $Re << 1$) et le terme non linéaire d'advection $(\mathbf{V}.\nabla)\mathbf{V}$ est dominé par le terme de diffusion $\nu\Delta\mathbf{V}$. Les phénomènes diffusifs sont prépondérants et l'équation est linéaire. Pour $Re >> 1$, l'équation est non linéaire car les effets convectifs dominent : l'énergie injectée est transférée à des échelles plus petites que celle associée au forçage. Plus le nombre de Reynolds est grand et plus l'écoulement est complexe et turbulent.

La recherche de solutions analytiques de l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent est une tâche ardue de par la grande sensibilité du système à de très

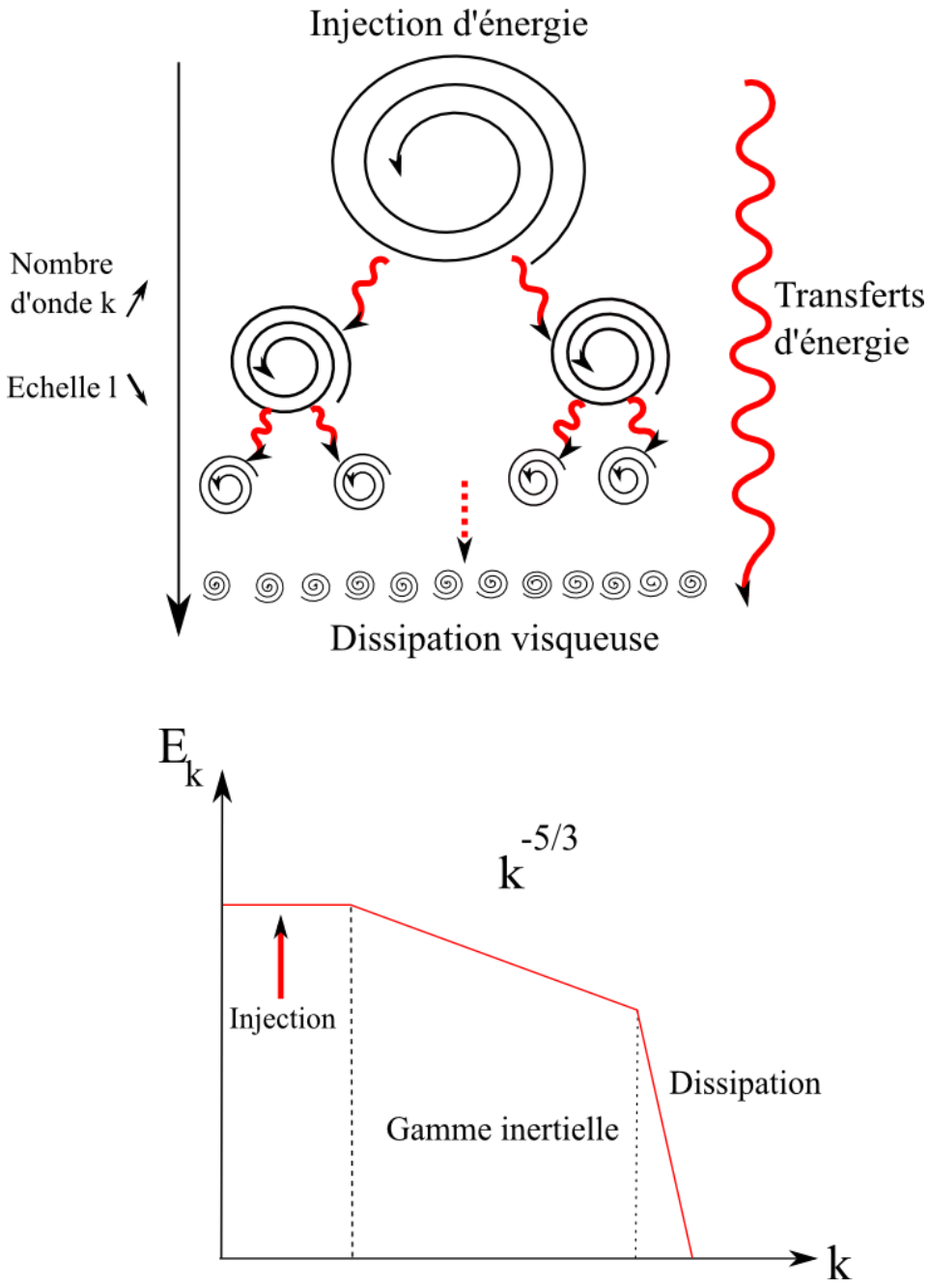


FIGURE 2.1 – (haut) Phénoménologie de la turbulence. À grand nombre de Reynolds, les tourbillons de grande taille l (et de petit nombre d'onde k) sont instables et meurent en se cassant en tourbillons plus petits. Ce processus de cascade se déroule jusqu'à ce que la taille des tourbillons soit assez petite pour que les effets de la viscosité se fassent ressentir. (bas) Spectre E_k de l'énergie en régime turbulent développé. La puissance fournie aux grands tourbillons est transférée vers des tourbillons de plus en plus petits le long d'une gamme inertielle indépendante du forçage et de la dissipation.

petites variations des conditions initiales [35, 59]. Cependant, pour des nombres de Reynolds grands et après un certain temps, l'écoulement atteint un régime tellement développé que la turbulence va présenter un caractère universel du point de vue statistique : ce caractère est indépendant du forçage et des conditions aux limites et peut être résumé pour un fluide incompressible, homogène, isotrope, et à nombre de Reynolds élevé, par les quelques points cruciaux suivants [35] :

– Soit un fluide agité à la vitesse U_I sur une échelle L_I, la puissance mécanique par unité de masse injectée est de l'ordre de

$$\varepsilon_I = U_I^3/L_I. \tag{2.4}$$

En rappelant que $Re = \frac{UL}{\nu}$, il apparaît que le nombre de Reynolds associé aux grands tourbillons est très grand de sorte que la viscosité n'a pas d'effet. Ces tourbillons sont incapables de dissiper leur énergie cinétique sous forme de chaleur : ils sont instables et meurent en se cassant en tourbillons plus petits. Les instabilités de l'écoulement sont donc les mécanismes de production des nouvelles échelles.

– Ces nouveaux tourbillons ont récupéré en totalité l'énergie cinétique de leur père et meurent à leur tour. La puissance fournie à l'injection est donc transférée le long d'une gamme inertielle où un flux d'énergie constant est échangé d'une échelle à l'autre suivant une loi

$$E_k \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{2.5}$$

E_k est l'énergie par unité de masse de l'échelle k,

$$E_k \propto < |v_{\mathbf{k}}|^2 >, \tag{2.6}$$

où le champ de vitesse dans l'espace réel $v(\mathbf{r})$ a été décomposé selon ses composantes de Fourier :

$$v_{\mathbf{k}} = \int_{\mathcal{V}} v(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{2.7}$$

– Ce processus de cascade se déroule jusqu'à ce que les tourbillons soient assez petits pour que les effets de la viscosité se fassent ressentir. Cette échelle L_d, dite de Kolmogorov, est liée à la viscosité cinématique du fluide et à la puissance injectée par la relation :

$$L_d \propto \nu^{3/4} \varepsilon_I^{-1/4}. \tag{2.8}$$

Le terme d'advection non linéaire et le terme de convection linéaire sont alors du même ordre de grandeur : les tourbillons de taille L_d ne seront plus sujets aux instabilités et mourront par dissipation visqueuse sous forme de chaleur.

Cette image de la turbulence valable uniquement d'un point de vue statistique et représentée par la Figure 2.1 est communément appelée cascade de Richardson [89]. Les lois d'échelles (2.4) (2.5) (2.8) ont été déterminées par Kolmogorov [51].

2.1.2 Les grandes lignes de la turbulence d'ondes

Phénoménologie

Tout comme la turbulence hydrodynamique, la turbulence d'ondes (ou turbulence faible) s'attache à décrire un transfert d'énergie entre les différentes échelles d'un système non linéaire hors équilibre, c'est à dire en présence de forçage et de dissipation. En revanche, la dynamique du système considéré est une dynamique d'ondes plutôt que de tourbillons [71, 77, 115]. Tout comme pour la turbulence hydrodynamique, la théorie de turbulence d'ondes nécessite une description statistique : à partir des propriétés statistiques du système étudié, elle cherche à comprendre et à évaluer le transport d'énergie (voire le transport d'autres quantités conservées) entre des ondes de fréquences différentes. Ce transfert est supposé se dérouler loin du forçage et de la dissipation, ces derniers étant alors séparés par une gamme inertielle où un flux ε constant cascade (voir Figure 2.2).

Établie premièrement pour décrire la propagation des ondes de gravité à la surface de l'eau [41, 45, 113], la démarche calculatoire propre à la turbulence d'ondes a été appliquée aussi bien aux plasmas (voir Figure 2.2) [112], aux écoulements magnéto-hydrodynamiques [36], et à l'optique [28]. Si les dérivations théoriques considèrent un espace à n dimensions, la plupart des études se restreignent à deux dimensions et le cas d'un système uni-dimensionnel pose encore de nombreuses questions théoriques [40].

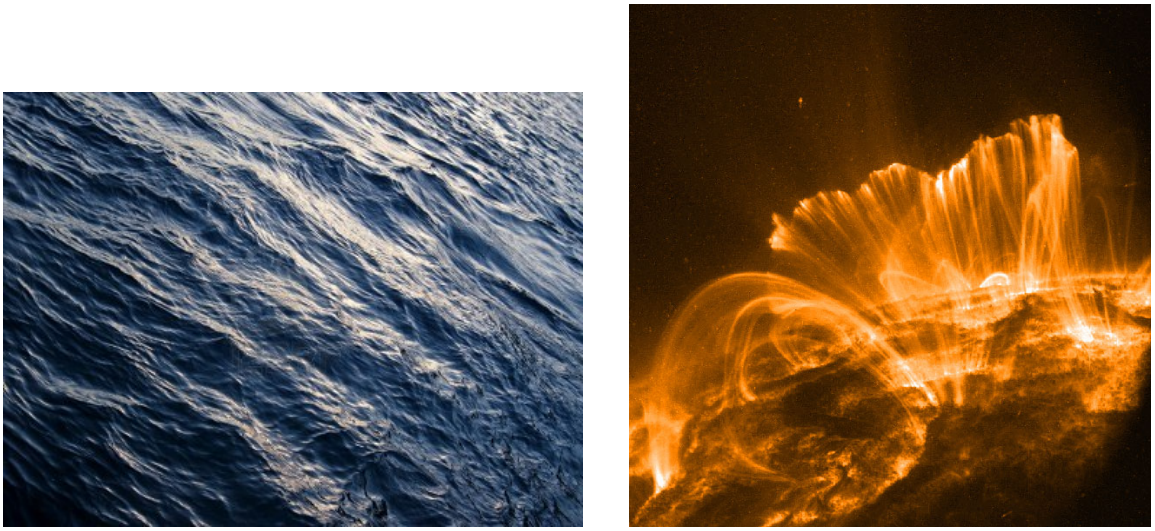
Sur des temps courts (de l'ordre de la période des ondes), la turbulence faible peut être approchée par sa description linéaire. Sur des temps longs, l'approximation linéaire est insuffisante car les non-linéarités jouent un rôle crucial dans la dynamique. Comme pour la turbulence hydrodynamique, les propriétés statistiques du système sont alors universelles et le système peut être considéré comme stationnaire, du point de vue statistique. Cependant, dans le cadre de la théorie de turbulence d'ondes, les mécanismes qui permettent d'aboutir à cet état sont bien compris et résident dans les interactions entre les ondes, celles-ci devant satisfaire certaines conditions de résonance sur leur fréquence ω et leur vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

On considère usuellement des interactions à 3 ou 4 ondes correspondant respectivement à des non linéarités quadratiques et cubiques. À quatre ondes, les conditions de résonance sur les quadruplets peuvent s'écrire comme la résonance entre un triplet d'onde et une onde seule (résonance 3<->1) :

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4, \tag{2.9}$$
$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4, \tag{2.10}$$

ou l'interaction entre deux couples d'ondes (résonance 2<->2) :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \tag{2.11}$$
$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4. \tag{2.12}$$



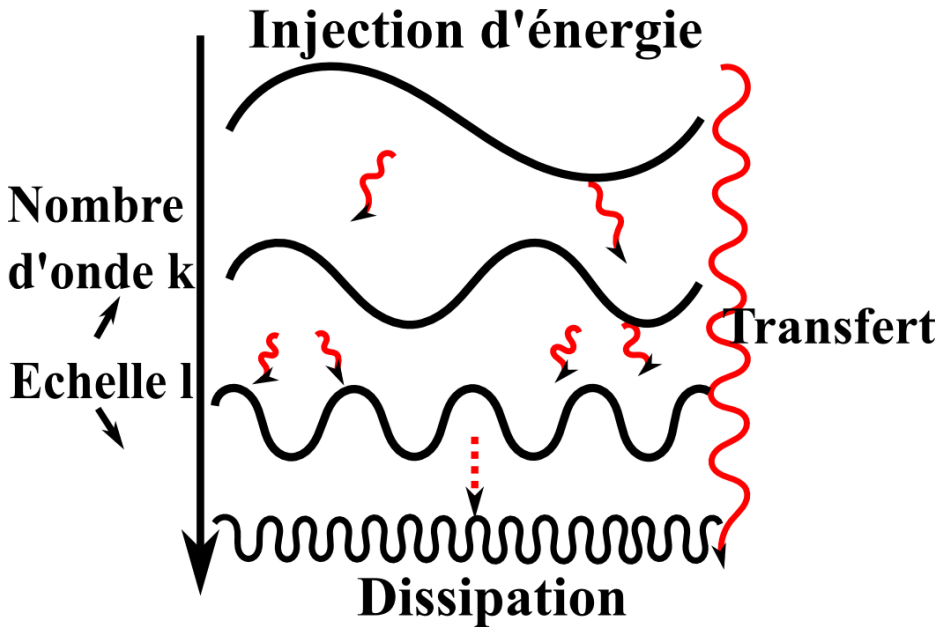


FIGURE 2.2 – (haut) Exemples d'applications de la théorie de turbulence d'ondes : (gauche) photo de la surface de la mer ; (droite) ondes d'Alfvén se propageant dans un plasma, ici à la surface du soleil. (bas) Phénoménologie de la turbulence d'ondes. Pour un forçage d'amplitude suffisante et à des temps longs, les non-linéarités inhérentes au système considéré entraîne la cascade d'un flux d'énergie constant des grandes longueurs d'ondes vers les plus petites qui dissipent alors l'énergie fournie.

Les interactions à trois ondes doivent quant à elles satisfaire :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \tag{2.13}$$
$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \tag{2.14}$$

Ces conditions de résonance assurent la conservation de l'énergie et du moment pour chaque interaction. L'existence d'un *petit paramètre* ϵ estimant le rapport entre les termes non linéaires et les termes linéaires permet d'ordonner toutes les interactions possibles selon leur influence sur la dynamique : les interactions à trois ondes, de l'ordre de grandeur de ϵ^3, auront plus d'influence que les interactions à quatre ondes, de l'ordre de ϵ^4.

La démarche calculatoire propre à la turbulence d'ondes sera détaillée pour les ondes de flexions au paragraphe suivant. Les grandes étapes sont cependant ici résumées :

- La dynamique est considérée, dans la gamme inertielle, comme hamiltonienne, puisqu'elle assure la conservation de l'énergie totale.
- Afin de décrire habilement les interactions entre les ondes, les équations d'Hamilton sont écrites dans l'espace de Fourier, ce qui permet d'obtenir une équation d'amplitude.
- Une seconde équation d'amplitude peut être obtenue en ne gardant que la partie non linéaire de l'équation précédente. Pour cela, une hypothèse de séparation des échelles temporelles intervient et permet de séparer la solution en une amplitude lentement variable modulant une oscillation rapide. Alors, et via un développement type échelles multiples permettant d'établir la hiérarchies des moments conjugués de l'amplitude complexe (les cumulants), l'équation d'amplitude devient une équation cinétique, par analogie avec l'équation de Boltzmann pour les gaz [82].
- Les solutions stationnaires de l'équation cinétique sont recherchées sous la forme d'une loi de puissance. Si l'on prend l'exemple du spectre d'énergie recherché sous la forme $E_\omega \propto \omega^x$, l'exposant peut prendre deux valeurs, l'une correspondant à l'équipartition de l'énergie (spectre de Rayleigh-Jeans), l'autre correspondant à un système hors équilibre parcouru par un flux d'énergie constant (spectre de Kolmogorov-Zakharov). Ces solutions peuvent en général être également déterminées par analyse dimensionnelle [21].

Résumé des hypothèses et présentation des problèmes rencontrés expérimentalement

La théorie de turbulence d'ondes propose donc une description statistique de l'état d'un système hors équilibre sous les hypothèses suivantes :

- Les échelles de forçage et de dissipation sont séparées de telle sorte qu'une gamme inertielle existe : un flux d'énergie constant est transféré des grandes vers les petites longueurs d'ondes.

- La relation de dispersion n'est pas triviale afin que le système soit dispersif. Pour un système 1D non dispersif, l'équation cinétique prend la forme d'une équation de Burgers décrivant la propagation de chocs. Pour un système à plusieurs dimensions, le caractère non dispersif complique fortement le traitement de l'intégrale de collision de l'équation cinétique. Dans certains cas bien particuliers comme les ondes acoustiques 3D [57, 75], les solutions du problème peuvent tout de même être déterminées.
- L'amplitude des ondes reste faible, ce qui introduit la dénomination de *turbulence faible*, en opposition avec la turbulence hydrodynamique, ou *turbulence forte*.
- Les échelles temporelles doivent être séparées : la période de l'onde doit être bien plus courte que celle de la modulation entraînée par les résonances entre les ondes.
- Le système est supposé de taille infinie afin d'assurer la vérification des conditions de résonance.

Ces hypothèses sont restrictives. En pratique, très peu de systèmes expérimentaux ont permis de retrouver les spectres de Kolmogorov-Zakharov prédits par la théorie, mis à part le cas des ondes capillaires parcourant la surface de l'eau [30]. Ces différences sont souvent attribuées :

- À la taille finie du système expérimental : les conditions de résonance sont alors limitées, ce qui modifie la dynamique en altérant le transfert du flux d'énergie [47, 49, 46].
- À la dissipation, qui expérimentalement n'est pas uniquement une condition aux limites active aux plus petites échelles : elle est en général présente pour toutes les longueurs d'ondes, et le flux qui parcourt la cascade n'est pas constant.
- À la présence de phénomènes fortement non linéaires (tourbillons, condensats, intermittence [31, 76, 108]) qui perturbent les spectres mesurés expérimentalement.

2.2 Application aux ondes de flexions

Motivation

Quand une plaque est secouée fortement, un spectre continu signe d'un comportement non linéaire apparaît (voir Figure 2.3). Ce comportement est très bien observé en musique quand l'on tape sur un gong de plus en plus fort ou en théâtre où une *plaque tonnerre* (appelée également *lame à tonnerre*) permet de reproduire le bruit de l'orage. Par ces exemples, on comprend bien que les plaques minces fournissent un cadre semblant être propice à la mise en pratique de la théorie de turbulence d'ondes. Elles peuvent même être vues comme un cadre expérimental idéal dans la mesure où l'injection d'énergie se traduit forcément par la génération d'ondes. Il n'y a par exemple pas, comme à l'interface entre deux fluides, coexistence entre ondes et tour-

billons. De plus, le caractère élastique des plaques interdit, de prime abord, la présence de structures fortement non linéaires pouvant perturber la dynamique globale.

La mise en œuvre de la théorie perturbative aboutissant à l'équation cinétique a été réalisée par Gustavo Düring [26, 27] sur le cas des plaques parfaites décrites dans le formalisme de Föppl von-Kármán et est ici rappelée en utilisant la même démarche. Les premières comparaisons entre prédictions théoriques et résultats expérimentaux sont ensuite évoquées.

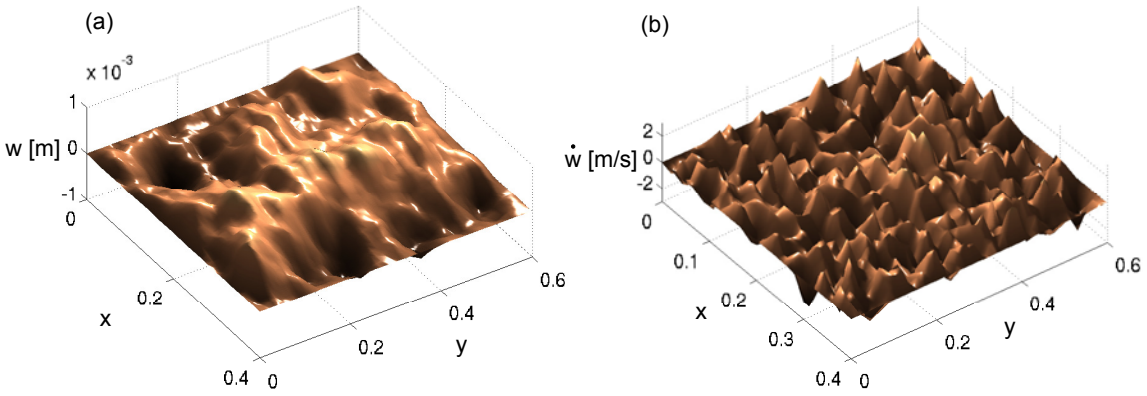


FIGURE 2.3 – Figure issue des simulations par différences finies des équations de Föppl-von Kármán présentées dans [101]. (a) Déplacement et (b) vitesse transverse en régime de vibration turbulent. La plaque ne présente pas d'amortissement et est excitée à la fréquence $f_0 = 87$ Hz à une amplitude de 30 N.

2.2.1 Des équations de Föppl von-Kármán à l'équation cinétique

Équation d'amplitude

Les équations de Föppl von-Kármán (1.12) sont les équations d'Euler-Lagrange pour l'action

$$S = h \int \left(\frac{\rho}{2} \dot{\zeta}^2 - F[\zeta, \chi] \right) d\mathbf{r} dt \tag{2.15}$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur position repérant dans l'espace physique le point où est mesuré le déplacement transverse ζ et tel que $d\mathbf{r} = dxdy$. F est l'énergie libre par unité de volume :

$$F[\zeta, \chi] = \left[\frac{1}{4} (\Delta\zeta)^2 - \frac{1}{2} (\Delta\chi)^2 - \frac{1}{2} \chi\{\zeta, \zeta\} \right]. \tag{2.16}$$

Une équation décrivant l'évolution de l'amplitude d'une onde repérée par son vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est recherchée. Pour cela, le déplacement transverse ζ et la fonction

d'Airy χ sont remplacés par leurs expressions dans l'espace de Fourier, respectivement $\zeta_{\mathbf{k}}$ et $\chi_{\mathbf{k}}$:

$$\zeta(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int \zeta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \tag{2.17a}$$

$$\chi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int \chi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \tag{2.17b}$$

$\zeta(\mathbf{r},t)$ et $\chi(\mathbf{r},t)$ sont des champs réels, ce qui fait apparaître les symétries suivantes, $\zeta_{\mathbf{k}} = \zeta^*_{-\mathbf{k}}$ et $\chi_{\mathbf{k}} = \chi^*_{-\mathbf{k}}$, où * désigne le nombre complexe conjugué. La décomposition en variables de Fourier (2.17) permet, d'après l'équation (1.12b), d'exprimer la transformée de Fourier de la fonction d'Airy en fonction de celle du déplacement transverse :

$$\chi_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{Eh}{2|\mathbf{k}|^4}\{\zeta,\zeta\}_{\mathbf{k}} \tag{2.18}$$

avec $\{\zeta,\zeta\}_{\mathbf{k}}$ la transformée de Fourier de l'opérateur $\{\zeta,\zeta\}$.

En utilisant la décomposition (2.17), l'action (2.15) est réécrite dans l'espace de Fourier. Le Lagrangien étant défini à partir de l'action par la relation $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, il prend ici la forme :

$$\begin{aligned} L[\zeta_{\mathbf{k}},\dot{\zeta}_{\mathbf{k}}] &= \int [\frac{1}{2}\dot{\zeta}_{\mathbf{k}}\dot{\zeta}_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{4}\mathbf{k}^4\zeta_{\mathbf{k}}\zeta_{-\mathbf{k}}]d^2\mathbf{k} \\ &- \int T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}\delta^{(2)}(\mathbf{k}_4+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\zeta_{\mathbf{k}_1}\zeta_{\mathbf{k}_2}\zeta_{\mathbf{k}_3}\zeta_{\mathbf{k}_4}d^2\mathbf{k}_{1234}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

δ est le symbole de Kronecker, $d^2\mathbf{k}_{1234} = d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 d^2\mathbf{k}_3 d^2\mathbf{k}_4$, et $T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}$ est un terme caractéristique de la résonance à quatre ondes :

$$T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} = \frac{E}{2(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{k}_1\times\mathbf{k}_2|^2|\mathbf{k}_3\times\mathbf{k}_4|^2}{|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2|^4}. \tag{2.20}$$

Le moment conjugué $p_{\mathbf{k}} = \rho h\dot{\zeta}_{\mathbf{k}}$ est facilement identifié à partir du Lagrangien (2.19), ce qui permet d'écrire l'hamiltonien $H[\zeta_{\mathbf{k}},p_{\mathbf{k}}]$:

$$\begin{aligned} H[\zeta_{\mathbf{k}},p_{\mathbf{k}}] &= h\int [\frac{1}{2}p_{\mathbf{k}_1}p_{-\mathbf{k}_1} + \frac{1}{4}\mathbf{k}_1^4\zeta_{\mathbf{k}_1}\zeta_{-\mathbf{k}_1}]d^2\mathbf{k}_1 \\ &+ \int T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}\delta^{(2)}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)\zeta_{\mathbf{k}_1}\zeta_{\mathbf{k}_2}\zeta_{\mathbf{k}_3}\zeta_{\mathbf{k}_4}d^2\mathbf{k}_{1234}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

L'introduction des variables complexes canoniques diagonalisant le terme quadratique de l'hamiltonien dans l'espace de Fourier

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \frac{X_k}{\sqrt{2}}(A_{\mathbf{k}} + A^*_{-\mathbf{k}}) \tag{2.22a}$$

$$p_{\mathbf{k}} = -i\frac{X_k^{-1}}{\sqrt{2}}(A_{\mathbf{k}} - A^*_{-\mathbf{k}}) \tag{2.22b}$$

avec

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \qquad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}|\mathbf{k}|^2 = hck^2. \tag{2.23}$$

permet finalement de décomposer l'hamiltonien en fonction du degré de non-linéarité : $H = H_2 + H_4$. Le terme

$$H_2 = \int \omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} A^*_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \tag{2.24}$$

correspond au hamiltonien classique associé aux oscillations libres d'ondes gouvernées par la relation de dispersion $\omega_{\mathbf{k}}$. Le terme d'ordre 4 prend la forme

$$\begin{aligned} H_4 &= \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int X_{\mathbf{k1}} X_{\mathbf{k2}} X_{\mathbf{k3}} X_{\mathbf{k4}} T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} \\ &\times A^{s_1}_{\mathbf{k}_1} A^{s_2}_{\mathbf{k}_2} A^{s_3}_{\mathbf{k}_3} A^{s_4}_{\mathbf{k}_4} \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) d^2\mathbf{k}_{1234} \end{aligned} \tag{2.25}$$

où s dénote le signe associé à la direction de propagation : $s = +, -$ tel que $A^+_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}}$ et $A^-_{\mathbf{k}} = A^*_{-\mathbf{k}}$. On note que pour des raisons de symétrie le terme non linéaire cubique de l'hamiltonien est nul : la dynamique non linéaire ne présente pas d'interactions à 3 ondes et le terme non linéaire prépondérant concerne les résonances entre quadruplets. En utilisant les équations d'Hamilton

$$i\partial_t A_{\mathbf{k}} = \frac{\delta H}{\delta A^*_{\mathbf{k}}}, \tag{2.26}$$

il vient pour l'équation dynamique du système :

$$\frac{dA^s_k}{dt} + is\omega_k A_{\mathbf{k}} = -is \sum_{s_1 s_2 s_3} \int J_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} A^{s_1}_{\mathbf{k}_1} A^{s_2}_{\mathbf{k}_2} A^{s_3}_{\mathbf{k}_3} \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d^2\mathbf{k}_{123} \tag{2.27}$$

avec

$$J_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} = \frac{1}{6} X_{\mathbf{k1}} X_{\mathbf{k2}} X_{\mathbf{k3}} X_{\mathbf{k4}} P_{234} T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}. \tag{2.28}$$

P_{234} est la somme sur les six permutations possibles de $2, 3$ et 4. L'équation (2.27) décrit l'évolution de l'amplitude des ondes de flexion dans l'espace de Fourier et ne pose pas d'hypothèses supplémentaires vis à vis des équations de Föppl-von Kármán. On élimine finalement la partie linéaire de cette équation en écrivant les variables canoniques $A_{\mathbf{k}}$ sous la forme d'une partie qui oscille rapidement à la pulsation $\omega_{\mathbf{k}}$ tout en étant lentement modulée par une amplitude $a_{\mathbf{k}}(t)$ que l'on cherche à déterminer [76] :

$$A^s_{\mathbf{k}} = a^s_{\mathbf{k}}(t) e^{-is\omega_{\mathbf{k}} t}. \tag{2.29}$$

Cette décomposition permet d'écrire l'équation régissant les modulations d'amplitude engendrées par les non-linéarités :

$$\begin{aligned} \frac{da^s_{\mathbf{k}}}{dt} &= -is \sum_{s_1 s_2 s_3} \int J_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} e^{it(s\omega_{\mathbf{k}} - s_1\omega_{\mathbf{k}_1} - s_2\omega_{\mathbf{k}_2} - s_3\omega_{\mathbf{k}_3}} \\ &\times a^{s1}_{\mathbf{k}_1} a^{s2}_{\mathbf{k}_2} a^{s3}_{\mathbf{k}_3} \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d^2\mathbf{k}_{123}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Cette dernière équation est utilisée pour la suite de l'étude. L'introduction de la forme (2.29) pose l'hypothèse de séparation des échelles temporelles entre la période linéaire des ondes et le temps caractéristique associé aux transferts non linéaires. On considère en effet qu'alors, la connaissance des variations de l'amplitude dues aux phénomènes non linéaires est suffisante pour décrire statistiquement le régime de turbulence d'ondes aux temps longs.

Hiérarchie des cumulants et équation cinétique

La résolution de l'équation (2.30) est une tâche complexe à laquelle lui est préférée une description statistique réalisée à partir de l'introduction des moments conjugués de l'amplitude complexe moyennés statistiquement sur les réalisations :

$$\langle a_{\mathbf{k}_1}^{s_1} a_{\mathbf{k}_2}^{s_2} \rangle, \langle a_{\mathbf{k}_1}^{s_1} a_{\mathbf{k}_2}^{s_2} a_{\mathbf{k}_3}^{s_3} a_{\mathbf{k}_4}^{s_4} \rangle, \text{etc.} \tag{2.31}$$

La dérivée temporelle de ces moments faisant apparaître des moments d'ordre supérieur, une hiérarchie infinie d'équations gouvernant l'évolution des moments de chaque ordre émerge. Cependant, et contrairement à la turbulence hydrodynamique, une fermeture de ce système d'équation peut être trouvée à l'aide d'une méthode perturbative [4, 74]. Cette fermeture permet d'exprimer tous les moments d'ordres élevés en fonction du moment du second ordre :

$$\langle a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* \rangle = n_{\mathbf{k}_1} \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \tag{2.32}$$

$n_{\mathbf{k}}$ est appelé le spectre d'action d'ondes. Cette fermeture est fournie par l'existence du petit paramètre ϵ en posant les hypothèses suivantes :

- Les interactions non linéaires sont faibles, l'évolution de l'amplitude des ondes $a_{\mathbf{k}}$ est un effet cumulatif moyenné sur de nombreuses périodes. On suppose alors que la fréquence liée à la modulation $a_{\mathbf{k}}$ est de l'ordre de $\epsilon^{\alpha} t$. Cette hypothèse permet de rechercher les solutions de la fermeture sous la forme d'un développement multi-échelle dans la limite où ϵ tend vers 0.
- Les amplitudes $a_{\mathbf{k}}$ suivent une statistique quasi-gaussienne de telle sorte que seuls les moments d'ordres pairs sont non nuls.
- Le système est supposé isotrope, bien que l'équation cinétique dans le cas général puisse être déterminée [26].

Finalement, le comportement du spectre d'onde $n_{\mathbf{k}}$ est régi par l'équation cinétique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathbf{p}_1}}{\partial t} &= 12\pi \int |J_{\mathbf{p}_1\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 n_{\mathbf{p}_1} n_{\mathbf{k_1}} n_{\mathbf{k_2}} n_{\mathbf{k_3}} \\ &\times \left(\frac{1}{n_{\mathbf{p}_1}} + \frac{s_1}{n_{\mathbf{k_1}}} + \frac{s_2}{n_{\mathbf{k_2}}} + \frac{s_3}{n_{\mathbf{k_3}}} \right) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_1 + s_1\mathbf{k_1} + s_2\mathbf{k_2} + s_3\mathbf{k_3}) \\ &\times \delta(\omega_{\mathbf{k}} + s_1\omega_{\mathbf{k}_1} + s_2\omega_{\mathbf{k}_2} + s_3\omega_{\mathbf{k}_3}) \mathrm{d}_{\mathbf{k}_1} d^2\mathbf{k}_{123}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Cette équation, similaire à une équation de type Boltzmann dans les gaz, décrit un échange d'énergie lent d'un mode à un autre. Elle conserve grâce aux conditions de résonances [26] l'énergie cinétique par unité de surface

$$E = h \int \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(t) d^2\mathbf{k}, \tag{2.34}$$

ainsi que le moment total par unité de surface

$$P = h \int \mathbf{k} n_{\mathbf{k}}(t) d^2\mathbf{k}. \tag{2.35}$$

En revanche, l'action d'onde

$$N = \int n_{\mathbf{k}}(t) d^2\mathbf{k} \tag{2.36}$$

n'est pas conservée. Ceci s'explique physiquement par le fait que la forme de l'équation cinétique autorise aussi bien les résonances 2<->2 que les résonances 3<->1 et 1<->3. L'action d'onde pouvant être interprétée comme la quantité d'ondes se propageant, elle n'est pas conservée. La conservation de l'énergie se traduit par une cascade des grandes aux petites longueurs d'ondes avec transport d'un flux d'énergie constant. La non-conservation du nombre d'onde empêche l'existence d'une seconde cascade dans le sens inverse.

Solutions de l'équation cinétique

Soit S l'entropie hors équilibre définie par :

$$S(t) = \int \ln(n_{\mathbf{k}}) d^2k \tag{2.37}$$

L'équilibre thermodynamique est atteint quand la variation d'entropie est nulle, $dS/dt = 0$, c'est à dire pour :

$$(\frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{s_1}{n_{\mathbf{k}_1}} + \frac{s_2}{n_{\mathbf{k}_2}} + \frac{s_3}{n_{\mathbf{k}_3}}) = 0. \tag{2.38}$$

Cette condition est remplie quand

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\omega_{\mathbf{k}}} \propto k^{-2} \tag{2.39}$$

où T est une constante associée à la température. Cette distribution d'énergie correspond au spectre dit de Rayleigh-Jeans, d'équilibre thermodynamique, ou d'équipartition de l'énergie.

Le spectre de Kolmogorov-Zakharov est cherché sous la forme :

$$n_{\mathbf{k}} \propto \mathbf{k}^{\alpha}. \tag{2.40}$$

En injectant cette forme dans l'équation cinétique (5.13), il vient par analyse dimensionnelle $\alpha = -2$. Le spectre d'équilibre (Rayleigh-Jeans) (2.39) et le spectre hors équilibre (Kolmogorov-Zakharov) possèdent les mêmes exposants. Le premier correspond à un flux d'énergie nul, ce qui n'est pas cohérent avec la situation hors équilibre prenant en compte le forçage et la dissipation. On dit que la solution est dégénérée. Chercher une solution stationnaire à flux constant peut être fait en ne cherchant plus seulement une loi de puissance, mais en faisant intervenir une correction logarithmique, similairement au cas de l'équation de Schrödinger à deux dimensions [28] :

$$n_k \propto k^{-\alpha} \ln^z(k/k_c). \tag{2.41}$$

En suivant alors la même démarche, consistant à entreprendre une expansion perturbative du troisième ordre en fonction du petit paramètre k/k_c il vient [26] :

$$n_k = C \frac{h\varepsilon_F^{1/3}\rho^{2/3}}{(12(1-\nu))^{2/3}} \frac{\ln^{1/3}(k_c/k)}{k^2}. \tag{2.42}$$

ε_F est le flux d'énergie parcourant le régime inertiel et C est un nombre sans dimension qui peut être calculé [26]. k_c est le nombre d'onde de coupure du spectre.

2.2.2 État de l'art

Expérimentalement, la répartition de l'énergie sur les différents modes de la plaque est mesurée à l'aide du spectre de puissance de la vitesse transverse, défini dans le domaine spatial par $E_k = \langle|\dot{\zeta}_k|^2\rangle$ et dans dans le domaine fréquentiel par $E_f = \langle|\dot{\zeta}_f|^2\rangle$. Les crochets $\langle\cdots\rangle$ représentent une moyenne temporelle. Afin d'exprimer les prédictions fournies par la théorie de turbulence d'ondes sur la forme des spectres de Rayleigh-Jeans (R-J) et de Kolmogorov-Zakharov (K-Z), le spectre d'énergie du déplacement transverse $\langle|\zeta_k|^2\rangle$ est premièrement défini. Il est relié au spectre d'onde $n_{\mathbf{k}}$ par

$$\langle|\zeta_k|^2\rangle = X_k^2 n_{\mathbf{k}} = \frac{n_{\mathbf{k}}}{\rho\omega_{\mathbf{k}}}, \tag{2.43}$$

de telle sorte que les prédictions théoriques (2.39) et (2.42) deviennent

$$\text{pour R-J :} \qquad \langle|\zeta_k|^2\rangle = \frac{T}{\rho h^2 c^2 k^4}, \tag{2.44a}$$

$$\text{pour K-Z :} \qquad \langle|\zeta_k|^2\rangle = C\left[\frac{\rho}{12(1-\nu)}\right]^{1/6} \frac{\varepsilon_F^{1/3}}{k^4 E^{1/2}} \ln^{1/3}\left[\frac{k_c}{k}\right]. \tag{2.44b}$$

Dans [7, 68], les spectres expérimentaux sont calculés à partir de la vitesse normale de la plaque mesurée en un point à l'aide d'un vibromètre laser, donnant accès à la répartition de l'énergie dans le domaine fréquentiel. En utilisant la relation de dispersion, et en rappelant que $E_f = \langle|\dot{\zeta}_f|^2\rangle \propto f^2\langle|\zeta_f|^2\rangle$, les expressions (2.44) prennent finalement la forme :

$$\text{pour R-J :} \qquad E_f = \frac{T}{\rho}, \tag{2.45a}$$

$$\text{pour K-Z :} \qquad E_f \propto \varepsilon_F^{1/3} \ln^{1/3}\left[\frac{f_c}{f}\right]. \tag{2.45b}$$

L'expression (2.45a) justifie l'appellation *spectre d'équipartition de l'énergie* pour le spectre de Rayleigh-Jeans, chaque mode étant doté de la même quantité d'énergie T/ρ.

Premiers résultats

L'étude numérique proposée par *Düring et al* dans [27] pour accompagner l'application de la théorie de turbulence d'ondes aux plaques minces simule les équations de Föppl-von Kármán à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale que nous présenterons brièvement et réutiliserons au cours du chapitre 4 de cette thèse. L'étude de la propagation dans l'espace des nombres d'onde d'une condition initiale en l'absence de forçage et de dissipation mène bien au spectre d'équilibre de Rayleigh-jeans (2.39). Quand le cadre théorique de la turbulence d'ondes est considéré, c'est à dire quand l'énergie est injectée aux basses fréquences et dissipée aux hautes fréquences, le spectre de Kolmogorov-Zakharov (2.42) est également retrouvé.

Les premières études expérimentales consacrées à la caractérisation du régime de turbulence d'ondes dans les plaques minces ont été réalisées par [7, 68]. Les plaques étudiées ont une surface de 2×1 m^2 et une épaisseur de 0.5 mm dans [7] et de 0.4 mm dans [68]. Cette dernière plaque est fixée à l'aide d'un encastrement sur l'un de ses petits côtés tandis que les deux coins restants sont fixés au sol par le biais de ressorts. La plaque [7] est elle maintenue par quatre ressorts disposés à chacun de ses coins. Les deux systèmes sont forcés par un pot vibrant avec un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 30$ Hz. La dynamique de la plaque est caractérisée par une mesure de la vitesse transverse en un point par vibromètre laser.

Pour un forçage d'amplitude faible, le signal enregistré est proche du signal d'excitation : le régime de vibration de la plaque est périodique. Si la plaque est forcée à une fréquence proche de l'un de ses modes propres, une résonance linéaire est mise en jeu et les modes harmoniques de la fréquence de forçage sont activés [103]. Pour une amplitude de forçage modérée, une bifurcation s'opère par la perte de stabilité de l'onde forcée : le régime de vibration est alors quasi-périodique. Cette dynamique est gouvernée par un régime couplé constitué d'un petit nombre de modes partageant une résonance interne non linéaire et se répartissant de cette façon l'énergie fournie [101, 103]. Pour une amplitude de forçage importante, ce régime couplé perd sa stabilité lors d'une seconde bifurcation donnant naissance au régime turbulent. Un spectre continu large bande où n'apparaissent plus les modes et dont la largeur augmente avec le forçage est alors observé. Les seuils correspondants aux deux bifurcations ont été déterminés dans [103]. La figure 2.4 présente les spectrogrammes de deux

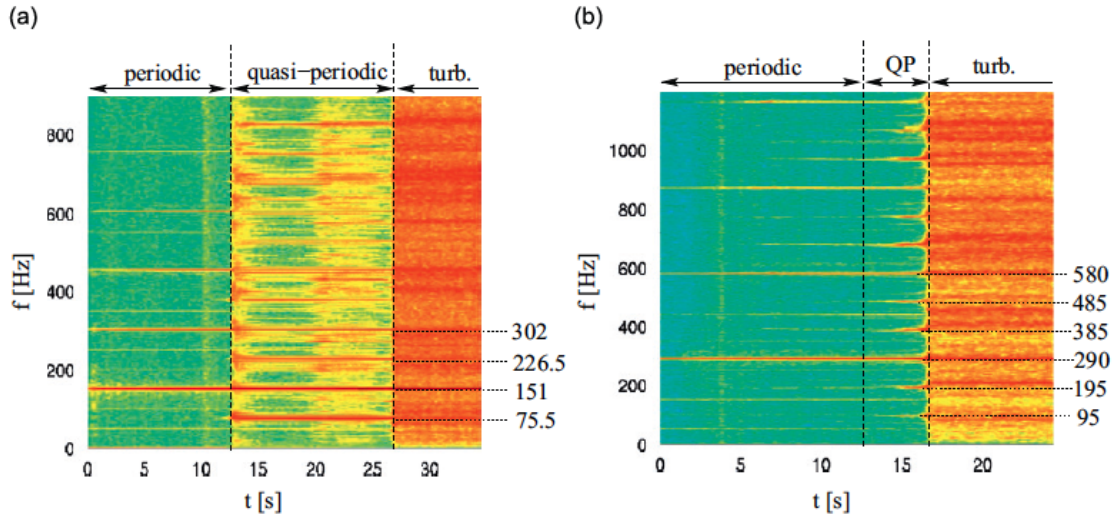


FIGURE 2.4 – Figures issues de [103]. Spectrogramme expérimental de la vitesse transverse d'une plaque rectangulaire excitée par une force harmonique d'amplitude croissante et de fréquence 151 Hz (a) et 290 Hz (b).

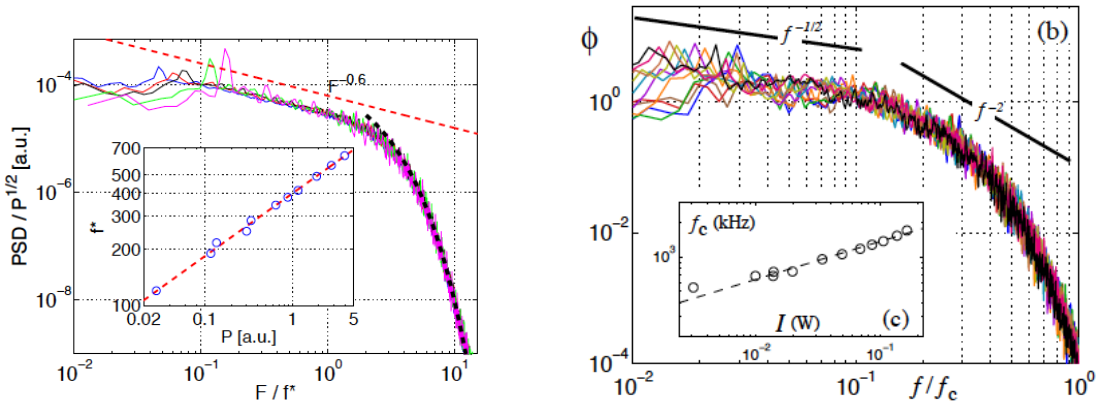


FIGURE 2.5 – Figures extraites de [68] (gauche) et [7] (droite). Spectres temporels de la vitesse transverse mesurés en un point et renormalisés par la puissance injectée ϵ_I pour différentes amplitudes de forçage. (a) Les spectres sont comparés à la loi de puissance $(f/f_c)^{-0.6}$(pointillés rouges) puis à une décroissance exponentielle (pointillés noirs) décrivant la coupure. (b) La gamme inertielle est repérée par une loi de puissance de la forme $(f/f_c)^{-0.5}$ puis par une loi de puissance $(f/f_c)^{-2}$. Les deux figures insérées présentent la fréquence de coupure du spectre f_c en fonction de la puissance injectée ϵ_I par des symboles ronds, et la loi de puissance (2.48) par une ligne pointillée.

expériences de transition à la turbulence pour des fréquences d'excitation différentes. Pour une amplitude de forçage faible, la vibration est périodique. Quand le forçage augmente, le régime quasi-périodique émerge et donne finalement naissance au régime turbulent. Selon la fréquence de forçage, la stabilité des deux premiers régimes diffère.

La quantité d'énergie fournie à la plaque est quantifiée par la mesure de la puissance injectée moyenne ε_I obtenue par l'estimation de la moyenne temporelle du produit des signaux de vitesse v et de force F mesurés au point d'excitation :

$$\varepsilon_I = \langle F.v \rangle. \tag{2.46}$$

La puissance injectée est *normalement* proportionnelle au flux d'énergie ε_F défini lors de l'introduction du spectre de Kolmogorov-Zakharov. A partir des séries temporelles de la vitesse mesurées pour plusieurs puissances injectées, une forme commune pour les spectres de puissance est recherchée :

$$E_f = \epsilon_I^\alpha \phi(f/f_c). \tag{2.47}$$

ϕ est une fonction de la fréquence normalisée par une fréquence de coupure f_c. L'amplitude des spectres est normalisée par une loi de puissance en fonction de la puissance injectée ϵ_I^α. La fréquence de coupure est évaluée soit en déterminant un seuil à partir duquel on considère l'amplitude des ondes négligeable [7], soit par un ajustement exponentiel des plus hautes fréquences du spectre [68]. Les figures insérées de la Figure 2.5 décrivent le comportement de la fréquence de coupure en fonction de la puissance injectée. Une loi de puissance de la forme

$$f_c \propto \epsilon_I^{1/3} \tag{2.48}$$

est facilement vérifiée. La coupure des spectres semble donc être plutôt déterminée par les effets non linéaires que par les mécanismes dissipatifs régissant la dynamique de la plaque.

La Figure 2.5 présente les fonctions renormalisées (2.47) issues de [68] à gauche et de [7] à droite. Les spectres obtenus peuvent être décomposés en deux parties :

– Entre la fréquence d'injection f_0 et la fréquence des coupures f_c, les spectres semblent suivre une loi de puissance de la forme

$$E_f \propto \epsilon_I^{0.5\pm0.07}(f/f_c)^{-0.5\pm0.2} \qquad \text{selon [7]}, \tag{2.49a}$$
$$E_f \propto \epsilon_I^{0.5}(f/f_c)^{-0.6} \qquad \text{selon [68]}. \tag{2.49b}$$

– Après la fréquence de coupure, une décroissance rapide de l'énergie est reportée :

$$E_f \propto \epsilon_I^{0.5\pm0.07}(f/f_c)^{-2} \qquad \text{selon [7]}, \tag{2.50a}$$
$$E_f \propto \epsilon_I^{0.5}\exp(-f/f_c) \qquad \text{selon [68]}. \tag{2.50b}$$

Les différences observées sur les lois de puissance ne sont pas notables et sont contenues dans les incertitudes des deux expériences. En revanche, les comportements observés expérimentalement sont relativement éloignés des prédictions théoriques aussi bien pour l'évolution de l'amplitude spectrale en fonction de la puissance injectée que pour la décroissance des spectres en fonction de la fréquence.

De la validité des hypothèses de la turbulence d'ondes dans le cadre expérimental

Pour expliquer le comportement $E_f \propto \epsilon_I^{1/2}$, la présence d'imperfections sur la plaque réelle a été évoquée [7]. En brisant la symétrie du système, les défauts produisent des interactions à trois ondes [101]. Celles-ci font théoriquement évoluer l'amplitude des spectres comme la racine carrée de la puissance injectée [27]. Cependant, des simulations numériques récentes réalisées à l'aide d'un schéma numérique conservatif en différences finies des équations de Föppl-von Kármán ont montré que l'introduction d'un défaut de grande longueur d'onde sur la plaque ne modifiait pas la dépendance entre amplitude spectrale et puissance injectée. D'une manière générale, la présence d'imperfections, même si celles-ci sont importantes, ne perturbe pas de façon notable la dynamique statistique du système en régime turbulent.

La mesure de la relation de dispersion permet de vérifier la validité de plusieurs hypothèses de la turbulence d'ondes dans le cadre expérimental. Pour cela, une méthode de profilométrie par transformée de Fourier, donnant accès aux spectres à la fois dans le domaine spatial et dans le domaine temporel, a été développée [19, 69]. La Figure 2.6(gauche) représente la relation de dispersion pour un forçage faible. Celle-ci possède pour les vecteurs d'ondes dirigés selon le petit côté de la plaque un caractère discret à hautes fréquences, témoignant d'un effet de taille fini [65, 66, 69]. Quand le forçage augmente, les composantes spectrales se dilatent de par l'effet des non-linéarités jusqu'à ce que la relation de dispersion devienne continue. Au paragraphe précédent, il était suggéré que les effets de taille finie se traduisaient par une limitation du nombre de résonances internes, altérant ainsi les transferts d'énergie. Cependant, pour un forçage suffisant, l'élargissement spectral du aux non-linéarités entraîne des relations de quasi-résonances qui effacent les problèmes de taille finie [71]. Au final, il peut être résumé que les effets de taille finie sont présents tant que l'écart entre les modes est plus grand que l'élargissement des modes engendré par les non-linéarités. La Figure 2.6(droite) présente la relation de dispersion mesurée pour un forçage très important. Celle-ci se tient très proche de la relation de dispersion linéaire, ce qui permet de conclure que la dynamique reste faiblement non linéaire et qu'elle est toujours composée d'ondes. La Figure 2.6(droite) montre cependant une déviation aux très bas nombres d'ondes, pouvant être interprétée comme la correction non linéaire à la relation de dispersion linéaire.

Cette déviation à basses fréquences peut être également due à une anisotropie du forçage [69]. Pour évaluer l'influence du forçage le cadre de la turbulence en déclin a été étudié [66] : une fois le régime stationnaire atteint, le forçage est coupé et les

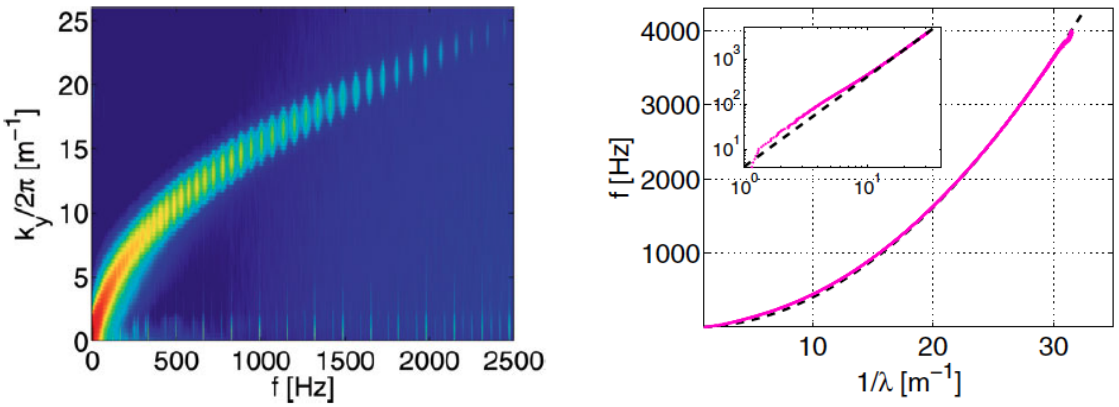


FIGURE 2.6 – Figures extraites de [69]. (Gauche) Coupe du spectre spatio-temporel $E(\mathbf{k}, \omega)$ en $k_x = 0$. (Droite) Relation de dispersion non linéaire pour $\epsilon_I = 36$, la figure insérée est en échelle logarithmique.

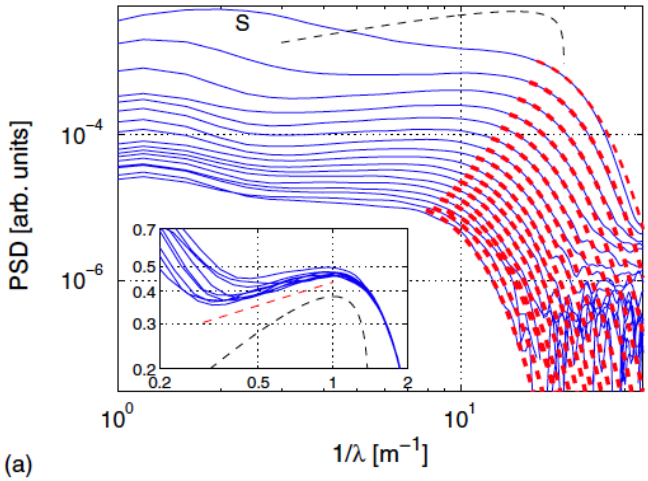


FIGURE 2.7 – Figure extraire de [66]. Évolution du spectre de puissance de la vitesse en fonction du temps lors d'une expérience de turbulence en déclin. Courbes bleues : spectre du régime stationnaire puis (de haut en bas) à des dates espacées de 83ms (les spectres sont moyennés sur 42 ms). Ligne pointillée noire : spectre théorique de Kolmogorov-Zakharov. Lignes pointillées rouge : comportement $E_d(k, t,) = Ak^3 \exp[-Bk^2/k_c^2(t)]$ prédit pour la région dissipative du spectre par [50, 66]. Le nombre d'onde de coupure k_c dépend du temps, et les constantes A et B sont estimées à partir des spectres. Figure insérée : même série de spectres expérimentaux renormalisés par A et tracés en fonction du nombre d'onde renormalisé $k/k_c(t)$.

spectres sont calculés tout au long de la décroissance. L'isotropie est alors restaurée pour toute la gamme fréquentielle impliquée dans la cascade. La Figure 2.7 montre l'évolution du spectre de puissance au cours du temps. La décroissance de l'amplitude spectrale se déroule en deux parties : une première régie par les transferts non linéaires entre les modes, une seconde, exponentielle, causée par les mécanismes dissipatifs [50]. Avec le temps, les spectres tendent vers une loi de puissance de la forme $E_f \propto \epsilon_I^{1/2} f^{-0.3}$ plus proche des prédictions théoriques que dans le cadre du régime forcé.

L'hypothèse fondamentale de séparation des échelles temporelles entre le temps non linéaire T_{NL} lié aux transferts d'énergie par le biais des non-linéarités et le temps linéaire associé à la période des ondes a été vérifié [65]. Le temps non linéaire est mesuré en décomposant les mesures spatiales à l'aide de la transformée de Gabor. Plus le forçage est intense et plus les effets non linéaires sont importants, ce qui entraine une décroissance du temps non linéaire. La séparation des échelles temporelles est très généralement maintenue, bien que faible pour les plus grandes longueurs forcées avec une amplitude importante. A faible forçage, la turbulence est discrète [48]. Ce régime est caractérisé par un temps de gel qui diminue avec le nombre d'onde alors que le temps non linéaire augmente. Quand ce dernier est supérieur au temps de gel, peu de transferts d'énergie sont opérés, la turbulence est gelée [84].

2.2.3 Idée et organisation de la thèse

Le régime de turbulence d'ondes observé expérimentalement et numériquement est donc sensible à la puissance injectée [109]. Pour un forçage très important, la présence, numériquement et expérimentalement, de structures en forme de plis apparaissant dans les basses fréquences des spectres a d'ailleurs été reportée par [63, 64]. Tous les résultats ici évoqués n'expliquent cependant pas les différences observées entre prédictions théoriques et observations expérimentales et numériques. Le reste de cette thèse est donc consacré à l'étude du rôle de la dissipation dans le régime de turbulence d'ondes. Le chapitre 1 a en effet montré sa présence à toutes les échelles, compromettant l'existence d'une fenêtre de transparence où un flux est transféré des grandes aux petites échelles de façon conservative. Le chapitre 3 est dédié à la présentation du dispositif expérimental et à la caractérisation de son amortissement. Le chapitre 4 présente une étude expérimentale et numérique montrant l'importance de l'absence d'une gamme inertielle dans les différences entre prédictions théoriques et mise en œuvre expérimentale. Finalement, le chapitre 5 propose un modèle phénoménologique hérité de la théorie de turbulence d'ondes qui permet de prendre en compte l'effet de l'amortissement.

Chapitre 3

Méthodes expérimentales

Ce chapitre présente les méthodes expérimentales mises en œuvre pour quantifier l'effet de l'amortissement sur le régime turbulent, cette étude étant proposée dans le chapitre suivant. Le montage expérimental est introduit au paragraphe § 3.1.1 et les spectres de puissance de la vitesse ici obtenus sont comparés à ceux mesurés par les travaux antérieurs à cette thèse [7, 68].
La seconde section introduit une mesure de l'amortissement adaptée aux spécificités de notre système. L'amortissement est alors analysé à l'aide des modèles d'amortissement présentés au premier chapitre et un montage expérimental qui permettra au chapitre 4 de quantifier l'effet de l'amortissement sur le régime de turbulence d'ondes est présenté.
La dernière section décrit la mise en place d'une méthode de profilométrie par transformée de Fourier qui permet d'étudier le régime turbulent dans l'espace des nombres d'onde k. Bien que cette méthode ait déjà été employée avec succès sur les plaques dans [19, 64, 65, 66, 69], sa mise au point sans aucune référence pré-existante en interne nous a permis de bien en comprendre les difficultés de calibration que nous détaillerons. Le paragraphe § 3.3.4 conclut ce chapitre par une étude qualitative de l'effet du forçage sur la relation de dispersion.

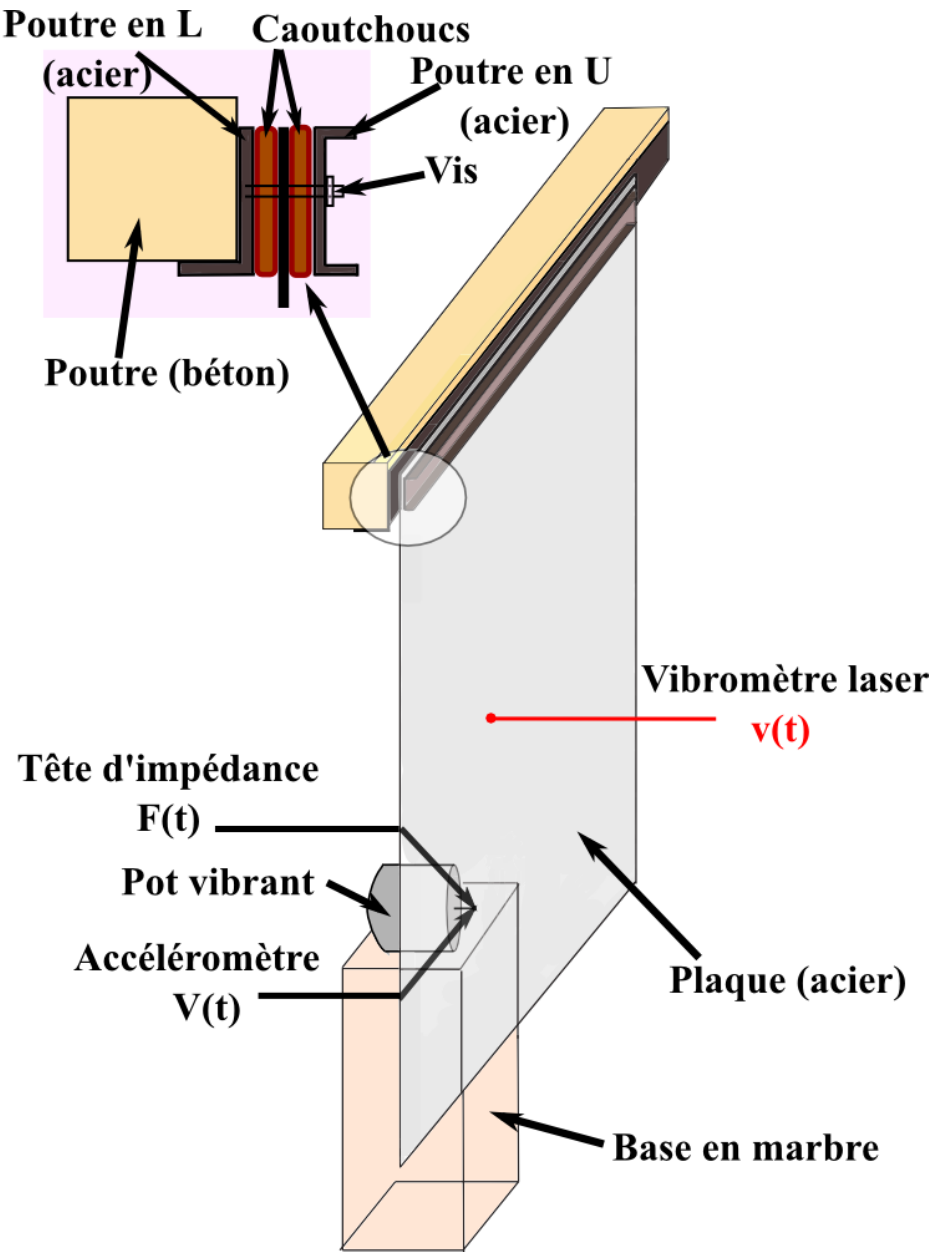


FIGURE 3.1 – Schéma du montage. La plaque est encastrée sur un de ses petits côtés entre deux poutres d'aciers à l'aide trois vis. L'encastrement est consolidé par deux lamelles de caoutchoucs séparant les poutres d'acier de la plaque. La plaque est excitée à l'aide d'un pot vibrant : un accéléromètre et un capteur de force permettent respectivement les mesures de la vitesse d'injection $V(t)$ et de la force appliquée $F(t)$. La vitesse transverse de la plaque $v(t)$ est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser.

3.1 Dispositif expérimental

3.1.1 Montage

Le montage expérimental élaboré pour l'étude du régime turbulent d'une plaque mince élastique est présenté Figure 3.1. Les plaques sont faites d'un acier inox d'une masse volumique $\rho = 7800\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, d'un module d'Young $E = 210$ GPa, et d'un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La surface vaut $S = 2 \times 1\,\mathrm{m}^2$ et nous disposons de plaques d'épaisseurs $h = 0.5,\ 0.6,\ 0.8,\ 1\,\mathrm{mm}$. La plaque est encastrée sur un de ses petits côtés entre deux poutres d'acier. L'encastrement est consolidé par deux lamelles de caoutchoucs séparant les poutres de la plaque. Les trois autres bords sont libres.

Les résultats précédemment obtenus à l'ENSTA [7] correspondaient à un ancien montage où la plaque n'était pas encastrée mais fixée par ses coins à un cadre métallique. Ces conditions aux limites ainsi qu'un pot vibrant moins puissant n'autorisaient pas de très grandes amplitudes de forçage et de vibration. C'est afin de ne pas être limité par ces conditions expérimentales que le présent montage a été établi, il est équivalent à celui utilisé par N. Mordant [68].

3.1.2 Forçage

Un pot vibrant LDS V455MS est placé à la moitié de la plaque, à 62cm du bord inférieur. Un capteur de force Bruel & Kjaer Type 8230-002 est installé entre le pot-vibrant et la plaque afin de mesurer la force appliquée $F(t)$. Un accéléromètre Bruel & Kjaer Type 4517 est installé sur le pot vibrant et fournit la vitesse d'injection $V(t)$. Les deux grandeurs $V(t)$ et $F(t)$ sont utilisées pour déduire la puissance injectée moyenne,

$$\epsilon_I = \frac{\langle F(t)\cdot V(t)\rangle}{\rho S}, \tag{3.1}$$

où les crochets représentent une moyenne temporelle. Le pot-vibrant est contrôlé par un signal électrique sinusoïdal. La Figure 3.2 présente en fonction du temps et lorsque la plaque est en régime turbulent la force F, la vitesse à l'injection V, et le produit $F\cdot V$ normalisé par ρS. La puissance injectée moyenne vaut ici $\epsilon_I = 1.25\times10^{-4}\ \mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-3}$. La vitesse suit en fonction du temps un profil sinusoïdal. Le signal de force possède la composante linéaire liée au signal d'excitation mais fait également apparaître la contribution non linéaire de la vibration de la plaque. Les fluctuations de la puissance injectée sont d'un ordre supérieur à sa moyenne et possèdent un profil asymétrique déjà étudié par *Cadot et al.* [10, 12].

Le comportement de l'injection dans le cas de la turbulence de plaques vibrantes est une question loin d'être triviale. Dans la suite de cette thèse, nous dirons simplement que la plaque est excitée à l'aide d'un forçage sinusoïdal dont l'amplitude est paramétrée par la puissance injectée moyenne ϵ_I.

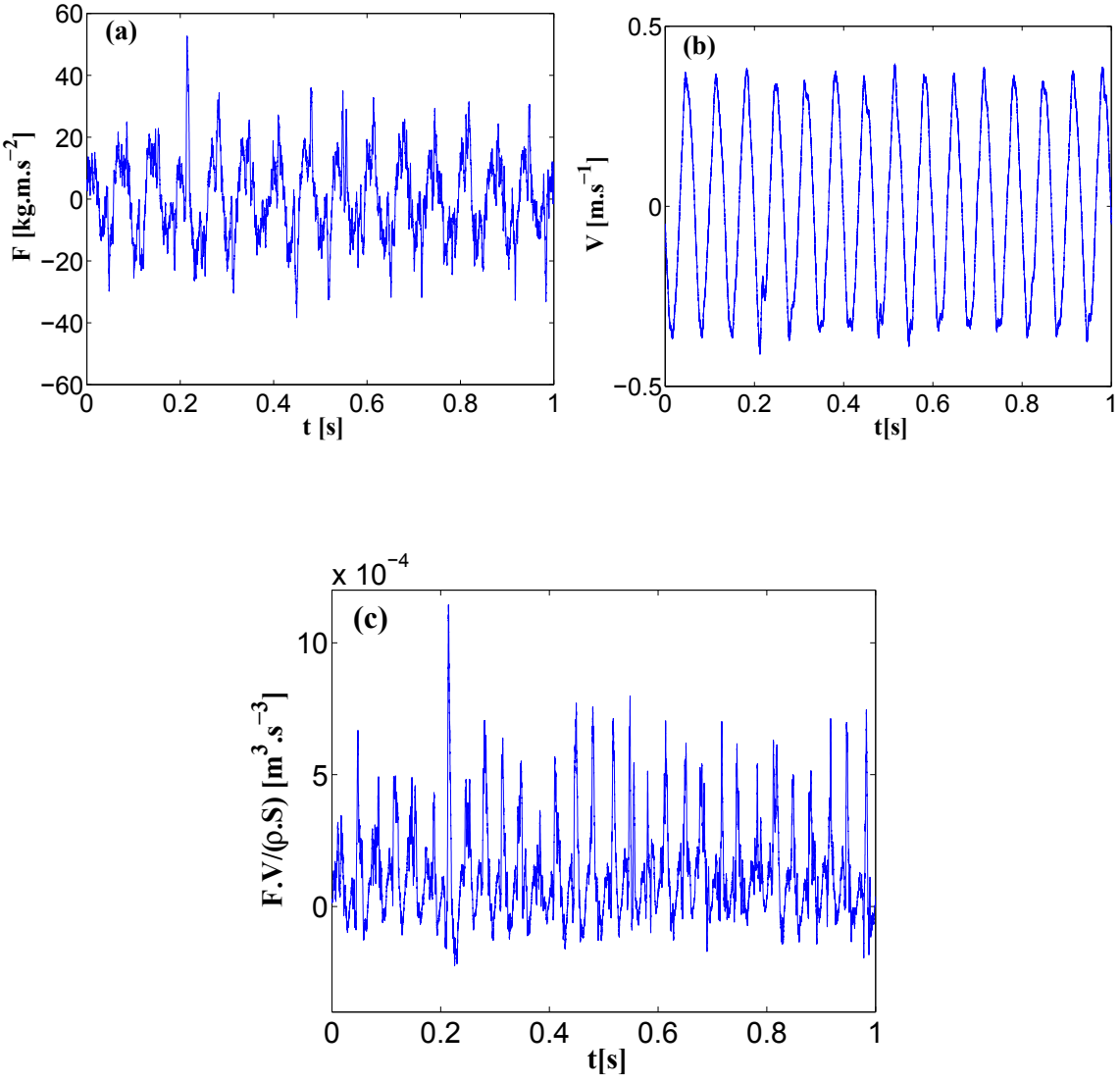


FIGURE 3.2 – En fonction du temps : (a) Force F. (b) Vitesse mesurée à l'injection V. (c) Puissance injectée.

3.1.3 Comparaison avec Boudaoud *et al.* [7] et Mordant *et al.* [68]

La plaque est placée en régime turbulent à l'aide d'un forçage sinusoïdal. La fréquence d'excitation est petite et pour la plupart des études nous avons choisi : $f_0 = 30$ Hz. La vitesse transverse de la plaque $v(t)$ est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser Polytec OFV 056 en un point situé à 1 m du bas de la plaque et à 40 cm du bord gauche. Les signaux sont acquis à une fréquence d'échantillonnage de 22.05 kHz pendant 180 s. La transformée de Fourier du signal de vitesse $v(t)$ est alors moyennée sur une fenêtre d'une seconde afin d'avoir une résolution fréquentielle d'1 Hz. Finalement, la densité spectrale de puissance de la vitesse $P_v(f)$ est calculée via la fonction *periodogram* de *MATLAB*. Les spectres seront régulièrement caractérisés par leur fréquence de coupure f_c que nous définissons par :

$$f_c = \frac{\int_{f_0}^{\infty} P_v(f) f df}{\int_{f_0}^{\infty} P_v(f) df}. \tag{3.2}$$

La Figure 3.3 présente les spectres de puissance de la vitesse calculés pour plusieurs puissances injectées : $\epsilon_I = 5.8 \times 10^{-5}$, 8.4×10^{-5}, 1.7×10^{-4}, $5.6 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3.s^{-3}}$. Tous les spectres sont larges-bandes et continus. Quand la puissance injectée augmente, la fréquence de coupure croît et la cascade s'élargit. Cette dernière présente alors une gamme de fréquences correspondant à l'injection où apparaissent la fréquence d'excitation et ses harmoniques, une gamme semblant être inertielle, et une gamme dissipative où le spectre décroît rapidement. À faible puissance injectée il est cependant difficile d'estimer une loi de puissance à partir de la gamme inertielle. Le comportement $P_v \propto f^{-0.5}$ proposé dans [7] pour un autre montage expérimental est bien retrouvé, de même que celui ($P_v \propto f^{-0.6}$) mesuré dans [68] pour un schéma expérimental proche du notre.

La Figure 3.3(b) présente les mêmes spectres de puissance normalisés par la racine carrée de la puissance injectée en fonction de la fréquence adimensionnée f/f_c. Les spectres forment alors une seule et même courbe, conformément encore aux observations de [7]. Finalement, l'évolution de la fréquence de coupure f_c en fonction de la puissance injectée ϵ_I est tracée dans la Figure 3.4 et comparée à la loi de puissance $f_c \propto \epsilon_I^{1/3}$ mesurée par [7, 68]. Malgré une variabilité caractéristique des mesures de turbulence d'ondes, un très bon accord est trouvé.

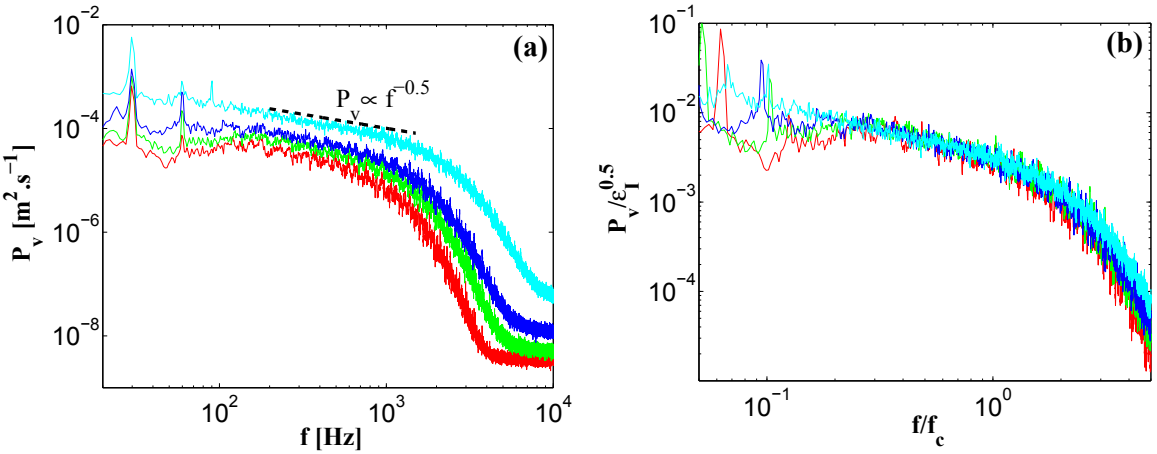


FIGURE 3.3 – (a) Spectres de puissance de la vitesse transverse P_v en fonction de la fréquence. Rouge : $\epsilon_I = 5.8 \times 10^{-5}$ $m^3.s^{-3}$. Vert : $\epsilon_I = 8.4 \times 10^{-5}$ m^3.s^{-3}. Bleu : $\epsilon_I = 1.7 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. Cyan : $\epsilon_I = 5.6 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. Ligne pointillée noire : loi de puissance $P_v \propto f^{-0.5}$ proposée par [7]. (b) Mêmes spectres de puissance normalisés par la racine carrée de la puissance injectée en fonction de la fréquence adimensionnée f/f_c.

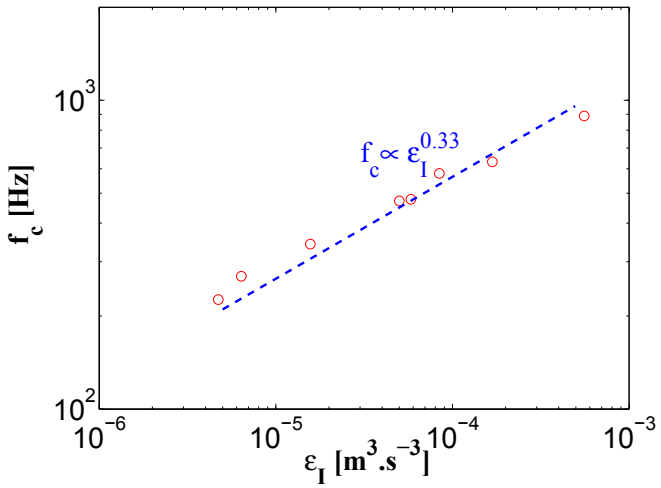


FIGURE 3.4 – Fréquence de coupure f_c en fonction de la puissance injectée moyenne ϵ_I pour des puissances allant de $\epsilon_I = 4.7 \times 10^{-6}$ m^3.s^{-3} à $\epsilon_I = 5.6 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. Ligne pointillée bleue : loi de puissance $f_c \propto \epsilon_I^{1/3}$.

3.2 Mesure de l'amortissement

Classiquement, l'amortissement d'une plaque est estimé à partir de la réponse impulsionnelle du système en calculant pour chaque mode le facteur d'amortissement γ. L'utilisation d'un marteau d'impact pour mesurer la réponse impulsionnelle est connue pour ne pas être adaptée à notre système [1] :

- Les grandes dimensions de la plaque engendrent, suite à une impulsion, un rapport signal-sur-bruit insuffisant.
- L'épaisseur très petite de la plaque introduit forcément une réponse non linéaire, incompatible avec la mesure d'amortissement.

L'amortissement sera ici calculé à partir d'une réponse impulsionnelle *fabriquée*. La très grande densité modale entraînant un important recouvrement qui complique l'estimation du facteur d'amortissement modal, un traitement de la réponse impulsionnelle par bandes de fréquences est également mis en œuvre.

La méthode utilisée s'inspire des travaux réalisés par Angelo Farina en acoustique des salles [33] et déjà appliqués aux plaques minces dans la thèse de Kevin Arcas [1]. La démarche consiste dans un premier temps à mesurer la réponse de la plaque à un sinus glissant. Par l'emploi de ce signal d'excitation, les composantes non linéaires peuvent être séparées des composantes linéaires, ce qui améliore de façon conséquente le rapport signal-sur-bruit et la précision. Une fois cette réponse impulsionnelle linéaire déterminée, elle est interprétée dans l'espace de Fourier à l'aide de la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT). A partir de la décroissance de chaque canal fréquentiel, un amortissement moyen par bandes de fréquences est déterminé.

3.2.1 Estimation de la réponse impulsionnelle

La première étape consiste à mesurer la réponse impulsionnelle de la plaque. Cette dernière, notée $y_I(t)$, est définie à l'aide du produit de convolution $\otimes$. Celui-ci fournit la réponse $y(t)$ d'un système à un signal d'entrée $x(t)$:

$$y(t) = y_I(t) \otimes x(t). \tag{3.3}$$

La réponse impulsionnelle est ici construite à partir de la convolution de la réponse de la plaque à un filtre inverse $f_i(t) = x(T-t)E(t)$ où x est un signal d'excitation au contenu fréquentiel large bande. L'enveloppe $E(t)$ dépend de x et est choisie afin que la condition

$$x(t) \otimes f_i(t) = x(t) \otimes x(T-t)E(t) = \delta(t) \tag{3.4}$$

soit remplie, avec T la longueur du signal x et δ le delta de Dirac. Il vient alors :

$$y(t) \otimes f_i(t) = y_I(t) \otimes x(t) \otimes x(T-t)E(t) = y_I(t) \otimes \delta(t) = y_I(t). \tag{3.5}$$

Un filtre f_i est donc construit pour que sa convolution avec le signal d'entrée x donne un Dirac. Alors, sa convolution avec le signal de sortie y isole la réponse du système

au signal x en donnant directement accès à y_I.

L'emploi d'un sinus glissant logarithmique de la forme

$$x(t) = \sin\left[\frac{2\pi f_1 T}{\ln(f_2/f_1)}(e^{\frac{t}{T}\ln(f_2/f_1)} - 1)\right] \tag{3.6}$$

est alors suggéré par [33]. f_1 et f_2 sont respectivement la plus basse et la plus haute fréquence du signal. Dans ce cas, l'enveloppe $E(t)$ prend la forme :

$$E(t) = e^{\frac{t}{T}\ln(f_2/f_1)(\frac{-6}{\log_{10}(2)})}. \tag{3.7}$$

La Figure 3.5 présente en fonction du temps, pour $T = 20$ s, $f_1 = 2$ Hz, $f_2 = 20$ Hz, l'enveloppe (3.7) et le filtre inverse f_i correspondant.

Pour une plaque mince, même pour une excitation de faible amplitude, la réponse du système contient des composantes non linéaires que l'on ne souhaite pas prendre en compte dans l'estimation de l'amortissement. Le sinus glissant logarithmique est particulièrement intéressant pour les systèmes non linéaires car il permet alors de distinguer les composantes linéaires des composantes non linéaires du signal enregistré. La Figure 3.6(a) présente le résultat y_I de la convolution en fonction du temps pour une plaque d'acier mesurant $2 \times 1\,\mathrm{m}^2$ et dont l'épaisseur vaut $h = 0.5\,\mathrm{mm}$. Les paramètres du sinus glissant logarithmique sont $T = 180$ s, $f_1 = 20$ Hz, $f_2 = 8000$ Hz. La réponse linéaire commence à $t = T$ alors que les contributions des harmoniques produites par les distorsions non linéaires arrivent avant, ou beaucoup plus tard. En tronquant le signal précédent à partir de $t = T$, une réponse impulsionnelle ne dépendant pas de l'amplitude du signal d'excitation est obtenue. Cette dernière, présentée en Figure 3.6(b), est maximale pour $t = T$, et décroît pendant un temps d'environ deux secondes jusqu'à atteindre une amplitude négligeable.

3.2.2 Estimation du facteur d'amortissement

Le facteur d'amortissement est estimé à partir de la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) de la partie linéaire de la réponse impulsionnelle $y_I(t)$. Pour cela, la pente de la décroissance supposée exponentielle de chaque bande de fréquence du spectrogramme résultant de la TFCT doit être mesurée. Cette partie est assez critique car sujette à une variabilité importante vis à vis des paramètres de calcul du spectrogramme, variabilité que nous étudierons au paragraphe § 3.2.3. Pour le moment, la résolution fréquentielle est fixée à $\Delta f = 43$ Hz, la fréquence d'échantillonnage à $F_e = 22.05$ kHz, et le taux de recouvrement à 90%. Ce taux de recouvrement très élevé est nécessaire pour disposer de suffisamment de points lors de l'interpolation des différents canaux fréquentiels. Le sinus logarithmique parcourt la plaque de 50 à 8000 Hz, et ce pendant 180 secondes. Le spectrogramme issu de la TFCT de la réponse impulsionnelle présentée Figure 3.6(b) est montré en Figure 3.7. À $t = 0$ s, l'amplitude est maximale pour tout le spectre, puis chaque bande de fréquence décroît jusqu'à atteindre une amplitude équivalente au niveau de bruit. On remarque

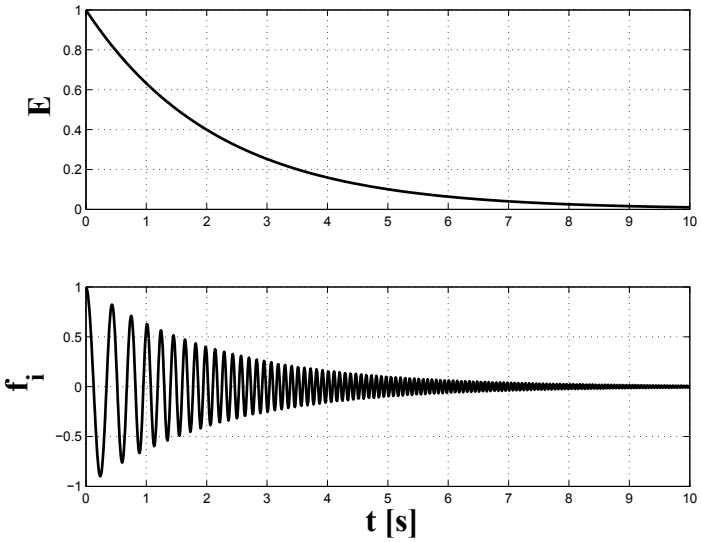


FIGURE 3.5 – (a) Enveloppe E définie par l'équation (3.7) en fonction du temps. (b) Filtre inverse $f_i = x(T-t)E$ en fonction du temps. $T = 20$ s, $f_1 = 2$ Hz, $f_2 = 20$ Hz.

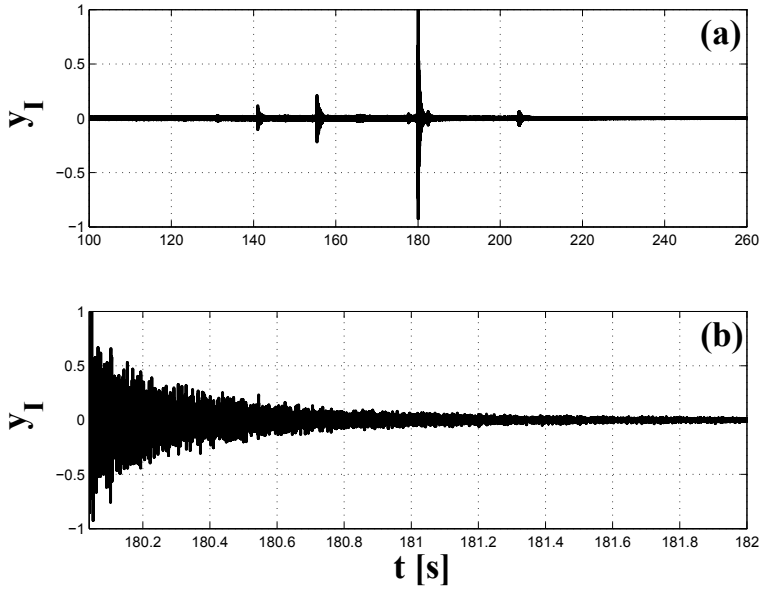


FIGURE 3.6 – (a) Réponse impulsionnelle y_I en fonction du temps pour une plaque d'acier d'une surface de $2 \times 1\,\mathrm{m}^2$ et d'épaisseur $h = 0.5\,\mathrm{mm}$. (b) Zoom sur la partie linéaire de la réponse impulsionnelle, débutant à $t = T = 180\,\mathrm{s}$.

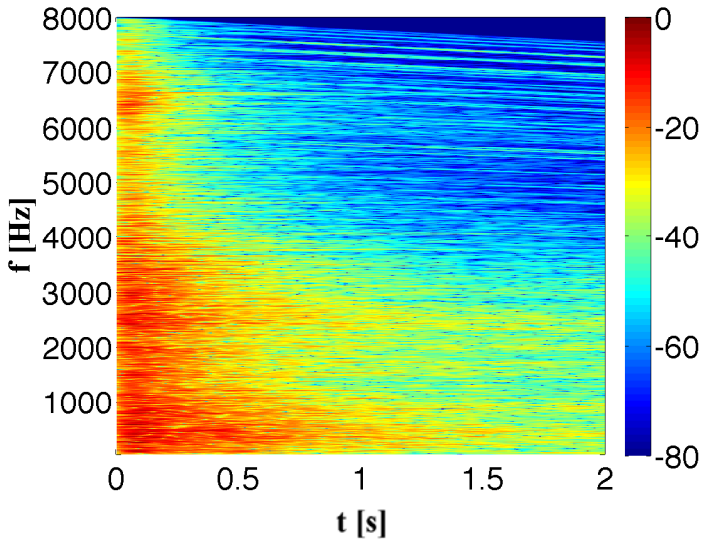


FIGURE 3.7 – Spectrogramme de la réponse impulsionnelle de la Figure 3.6 pour $F_e = 22050$ Hz, $\Delta f = 3.6$ Hz, et un taux de recouvrement de 95%. L'amplitude du spectrogramme est en dB et l'échelle de couleur est logarithmique.

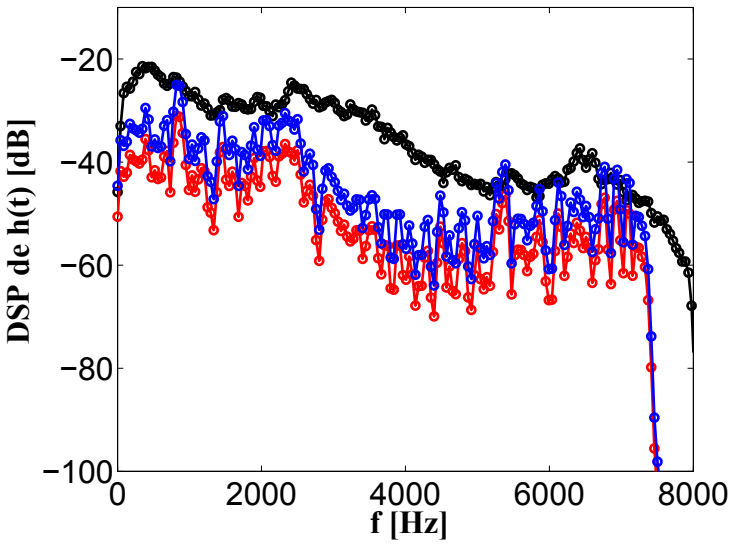


FIGURE 3.8 – Densité spectrale de puissance en fonction de la fréquence. Noir : Réponse impulsionnelle prise entre 0 et 1 seconde. Rouge : Bruit de fond calculé sur les dix derniers instants. Bleu : Bruit de fond plus 6dB.

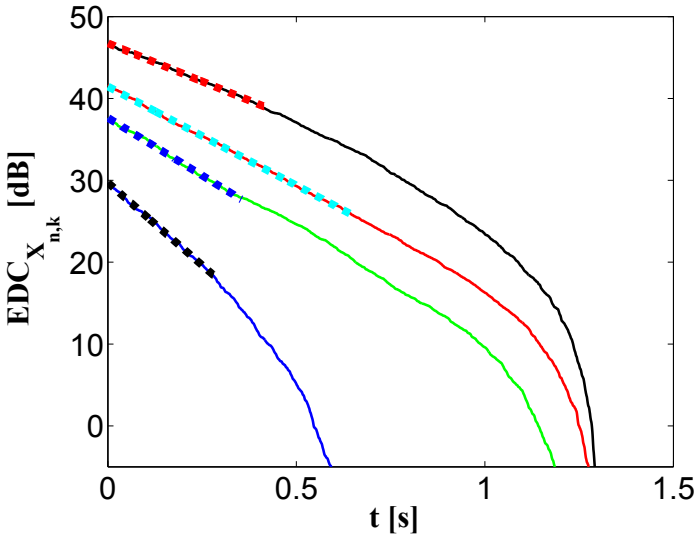


FIGURE 3.9 – Courbes de décroissances $EDC_{X_{n,k_i}}$ en fonction du temps pour plusieurs bandes de fréquence. Noir : $f = 517$ Hz, Rouge : $f = 1380$ Hz, Vert : $f = 1897$ Hz, Bleu : $f = 4312$ Hz. Lignes pointillés : interpolations.

que cette décroissance est très variable d'une bande de fréquence à l'autre, soulignant la complexité de la dépendance entre amortissement et fréquence.

Le spectrogramme de la Figure 3.7 est assez bruité, comme le montrent par exemple les lignes diagonales qui peuvent être observées à hautes fréquences entre $t = 1$ s et $t = 2$ s. Afin de proposer une estimation correcte de la décroissance de l'amplitude de chaque canal, les *courbes de décroissance* sont employées. En rappelant la définition de la TFCT d'un signal discret $x(n)$ pondéré par la fenêtre d'analyse $x[n+m]w[m]$ [80],

$$X_{n,k} = X[n, 2\pi k/N_f] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{i(2\pi/N_f)km}, \tag{3.8}$$

la courbe de décroissance $EDC_{X_{n,k_i}}(m)$ associée à un canal k_i est définie par [92] :

$$EDC_{X_{n,k_i}}(m) = \sum_{n=m}^{M} |X_{n,k_i}|. \tag{3.9}$$

N_f est la taille des transformées successives, L le dernier échantillon, et M correspond à l'instant où la réponse impulsionnelle est de l'ordre du bruit de fond supposé gaussien, ici assimilé au niveau de crête de l'amplitude de chaque canal à $t = 2.5$ s. À cet instant, la réponse impulsionnelle a été totalement amortie. Le niveau de crête d'un bruit gaussien est d'environ 10 dB au dessus de sa moyenne et la dynamique de mesure maximale est obtenue entre 6 et 8 dB. Pour évaluer ce niveau, la densité spectrale de puissance est directement déduite à partir du spectrogramme de la Figure 3.7

à un instant donné. La Figure 3.8 présente en noir la densité spectrale de puissance moyennée entre les temps $t = 0$ s et $t = 1$ s en fonction de la fréquence. Le niveau moyen de bruit mesuré en $t = 2.5$ s est représenté en rouge, et la moyenne plus 6 dB en bleu. De par cette représentation, il est possible de trier les bandes de fréquence où la courbe bleue est supérieure à la courbe noire et où le bruit est donc trop important pour que l'estimation de la décroissance soit satisfaisante. Sur les canaux conservés, les courbes de décroissance définies par l'équation (3.9) sont alors calculées.

La Figure 3.9 représente quatre courbes de décroissance réparties entre $f = 517$ Hz et $f = 4312$ Hz en fonction du temps. Pour les canaux à hautes fréquences, la décroissance est bien plus rapide qu'à basses fréquences, témoignant de l'augmentation de l'amortissement avec la fréquence. Pour quantifier cette évolution, les courbes de décroissances sont alors interpolées de façon à estimer la chute exponentielle. Les droites issues de l'interpolation sont affichées dans la Figure 3.9. Pour chaque canal, les pentes K_{dB} associées aux interpolations sont reliées au facteur d'amortissement γ par la relation :

$$\gamma = K_{dB} ln(10)/20. \tag{3.10}$$

3.2.3 Influence des paramètres d'analyse sur la détermination des facteurs d'amortissement

Le premier paramètre à calibrer est la durée totale T du sinus glissant logarithmique utilisé pour balayer l'ensemble des fréquences. La Figure 3.10 présente la densité spectrale de puissance de la réponse impulsionnelle mesurée à partir de signaux de durées $T = 30$, 60, 120, 180 s. Les densités spectrales ont été moyennées sur la première seconde de la réponse impulsionnelle. Jusqu'à 4 kHz, les quatre courbes sont très proches et leurs différences relèvent essentiellement de la variabilité de la mesure. À partir de 4 kHz, les densités spectrales issues d'une réponse impulsionnelle mesurée sur des temps courts ont une amplitude moindre. Cette observation signifie que le signal d'excitation parcourt les fréquences les plus hautes trop rapidement, induisant des erreurs dans le calcul de la réponse impulsionnelle qui se traduisent dans le domaine fréquentiel. A partir de $T = 120$ s, la densité spectrale de puissance de la réponse impulsionnelle semble converger sur toute la gamme étudiée. Afin d'éviter de sous-estimer les hautes fréquences, nous choisirons un signal d'une durée minimum de $T = 180$ s.

Le second paramètre à déterminer correspond à la résolution fréquentielle utilisée pour l'analyse dans l'espace de Fourier de la réponse impulsionnelle via le calcul de la TFCT. La Figure 3.11(a) présente les valeurs du facteur d'amortissement en fonction de la fréquence pour des fenêtrages de taille $\Delta f = 21.6, 43, 86.2, 172.4$ Hz. Avant 1000 Hz, le choix d'une fenêtre de grande taille conduit à des réponses impulsionnelles très bruitées où très peu de facteurs d'amortissement peuvent être évalués avec confiance. Il est donc nécessaire d'appliquer la fenêtre la plus étroite afin de dispo-

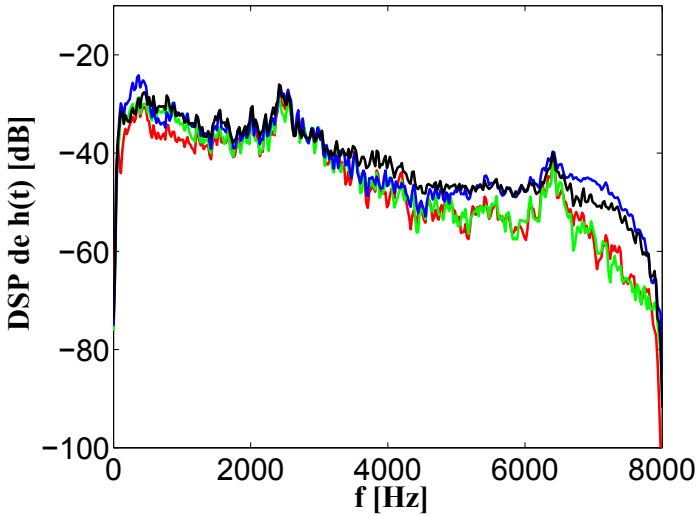


FIGURE 3.10 – Densité spectrale de puissance de la réponse impulsionnelle pour différents temps d'acquistion : Rouge : $T = 30$ s, Vert : $T = 60$ s, Bleu : $T = 120$ s, Noir : $T = 180$ s.

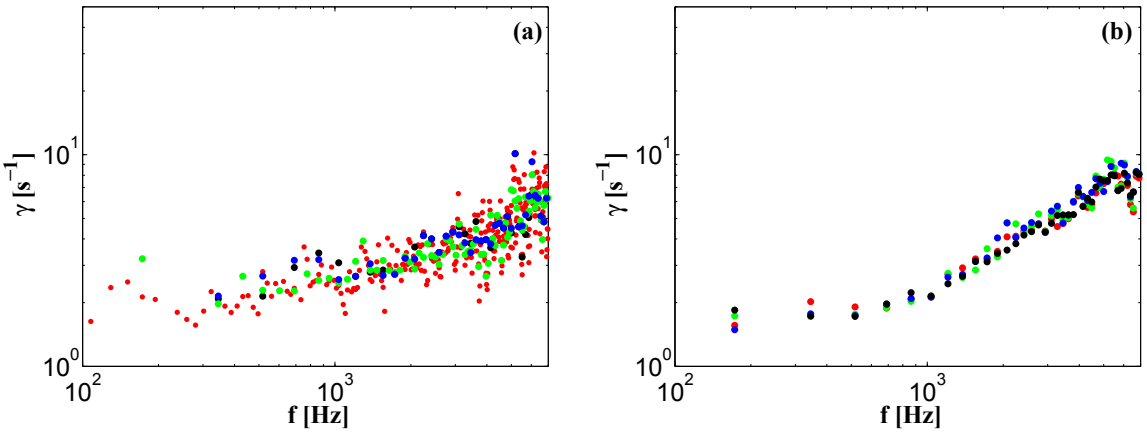


FIGURE 3.11 – (a) Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence pour différentes résolutions fréquentielles : Rouge : $\Delta f = 21.6$ Hz, Noir : $\Delta f = 43$ Hz, Vert : $\Delta f = 86.2$ Hz, Bleu : $\Delta f = 172.4$ Hz. (b) Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence pour quatre réponse impulsionnelles mesurées de la même façon.

ser d'assez de points pour avoir une idée quantitative de l'amortissement dans cette gamme de fréquences. Après 1000 Hz, l'emploi d'une fenêtre trop petite induit un bruit compliquant l'analyse du fait de la complexité de la fonction d'amortissement et d'une barre d'erreur assez importante. Nous verrons de plus au chapitre suivant que cette complexité ainsi que la multiplicité des sources d'amortissement nous conduiront à modéliser l'amortissement par une loi de puissance. Dans ce but, après 1000 Hz, la plus grande taille Δf de fenêtre est utilisée, fournissant tout de même assez de points pour avoir une information qualitative pertinente sur l'amortissement.

Finalement, la figure 3.11(b) montre quatre mesures complètes du facteur d'amortissement réalisées avec les mêmes signaux d'excitations et les mêmes paramètres de traitement. Les quatre fonctions d'amortissement présentées sont proches les unes des autres et permettent de quantifier de la dispersion statistique associée à l'ensemble des étapes ayant conduit de la mesure de la réponse de la plaque au sinus glissant logarithmique jusqu'aux facteurs d'amortissement. Pour chaque fréquence, la moyenne arithmétique $\bar{\gamma}$ des $N = 4$ réalisations est calculée,

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i, \tag{3.11}$$

et permet d'estimer la variance de la distribution du facteur d'amortissement pour chaque fréquence :

$$\sigma_\gamma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i - \bar{\gamma})^2. \tag{3.12}$$

En prenant la racine carré de cette variance, l'écart-type est déterminé et montre que la dispersion statistique est plus importante à hautes fréquences qu'à basses fréquences. Ceci peut s'expliquer par la décroissance très rapide des canaux hautes fréquences : moins de points sont disponibles pour l'interpolation et l'erreur est en conséquence plus grande. La mesure de l'écart-type nous permet d'estimer la confiance en notre mesure γ_{mes} du facteur d'amortissement γ :

$$\gamma = \gamma_{mes} \pm 0.12\text{s}^{-1} \text{ sur l'intervalle } [0 \;\; 3000] \text{ Hz}, \tag{3.13a}$$

$$\gamma = \gamma_{mes} \pm 0.28\text{s}^{-1} \text{ sur l'intervalle } [3000 \;\; 8000] \text{ Hz}. \tag{3.13b}$$

Ce résultat nous est plutôt satisfaisant, connaissant la difficulté et la variabilité des mesures vibratoires sur une grande plaque mince.

3.2.4 Caractérisation de l'amortissement de notre système

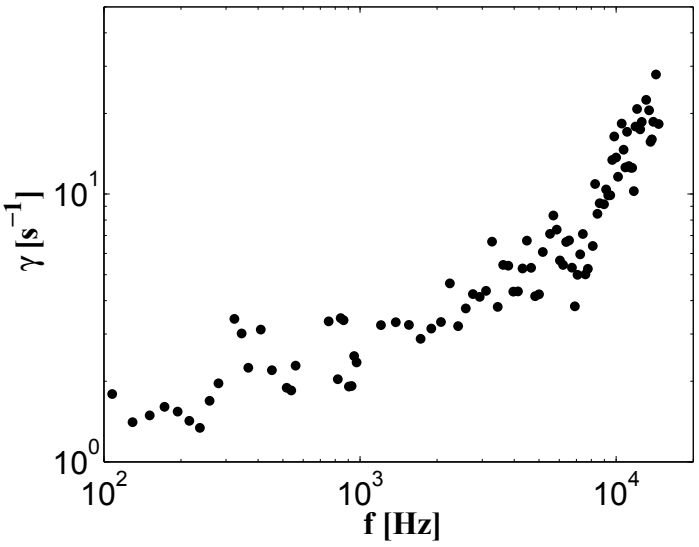


FIGURE 3.12 – Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence. $\Delta f = 21.6$ Hz avant 1000 Hz. $\Delta f = 172.4$ Hz après 1000 Hz.

La Figure 3.12 présente une mesure d'amortissement que l'on qualifiera d'optimale par rapport aux paramètres évalués au paragraphe précédent. L'évolution de la dissipation avec la fréquence nous est alors disponible entre 100 et 15000 Hz. Pour cela, trois sinus glissants logarithmiques de longueur $T = 180$ s ont été utilisés, le premier de 100 à 1000 Hz, le second de 1000 à 8000 Hz, et le dernier de 8000 à 15000 Hz.

Le premier chapitre a permis d'introduire les différentes sources de pertes présentes dans une plaque métallique mince :

- L'amortissement thermoélastique, résultat du couplage entre les ondes de flexion et les ondes de chaleur dans l'épaisseur de la plaque : il est ici modélisé à l'aide des travaux de Chadwick [14]. Ces derniers prédisent une croissance du facteur d'amortissement thermoélastique proportionnelle au carré de la fréquence avant qu'un palier, situé à 200 Hz pour une plaque de 0.5 mm, soit atteint. Cet amortissement évolue comme l'inverse du carré de l'épaisseur.
- L'amortissement viscoélastique, conséquence d'un *effet mémoire* du matériau lié à ses dislocations : le facteur d'amortissement viscoélastique évolue linéairement avec la fréquence et devient significatif dans notre cas à partir de 1 kHz [13].
- L'amortissement par rayonnement acoustique : il représente une dissipation importante voire prépondérante à partir de la moitié de la fréquence de coïncidence (1.35), égale à 2.38×10^4 Hz pour une plaque d'épaisseur 0.5 mm. La prise en compte de cet amortissement est opérée à l'aide du modèle de Maidanik [58].

- Les pertes induites par une force dite de *friction fluide* exercée par l'air sur la plaque quand la vitesse de l'écoulement est suffisamment grande. Il a été montré au paragraphe § 1.41 que ce mécanisme était négligeable pour le montage utilisé dans [7]. Notre montage présente des bords libre et la capacité du forçage est supérieure, de telle sorte que des vitesses plus importantes peuvent ici être atteintes. L'amortissement par friction fluide joue donc potentiellement un rôle pour la plaque la plus mince aux niveaux des premiers modes où les autres mécanismes d'amortissement sont très peu efficaces. Dans tous les cas, ce processus dissipatif ne peut être ici caractérisé puisque nos mesures d'amortissement sont réalisées pour des forçages d'amplitude très faible.
- Les pertes dues à l'encastrement de la plaque entre deux lamelles de caoutchoucs.

La Figure 3.13 reprend les points expérimentaux de la Figure 3.12 et trace en parallèle la somme des facteurs d'amortissements provenant des divers modèles précédemment évoqués :

- Les valeurs prises par le facteur d'amortissement avant 100 Hz ne sont pas accessibles expérimentalement car les composantes non linéaires sont trop présentes et les mesures d'amortissement alors trop bruitées : la croissance théorique de l'amortissement thermoélastique avec la fréquence dans cet intervalle n'est donc pas observable. Cependant, entre 100 et 1000 Hz, la croissance des facteurs d'amortissement expérimentaux et théoriques est similaire : c'est bien l'amortissement thermoélastique qui domine dans cette gamme.
- À partir de 1 kHz, les deux jeux de données présentent une croissance plus rapide : la contribution de amortissement viscoélastique n'est plus négligeable.
- À partir de 6 kHz, la valeur du facteur d'amortissement est essentiellement déterminée par la dissipation viscoélastique.
- La contribution de l'amortissement par rayonnement acoustique est très faible et peut être, pour cette plaque et sur cette gamme de fréquences, négligée. En raison du rapport signal-sur-bruit, notre connaissance de l'amortissement expérimental s'arrête à 15 kHz. La comparaison entre expériences et modèles au voisinage de la fréquence de coïncidence n'est donc pas possible. Pour pallier ce problème, la dissipation inhérente à une plaque plus épaisse est ci-dessous étudiée, l'augmentation de l'épaisseur correspondant à une baisse de la fréquence de coïncidence.

Cette première comparaison entre nos mesures et l'amortissement théorique est donc plutôt satisfaisante et semble valider le choix des divers modèles d'amortissement. Un décalage dans l'amplitude des facteurs d'amortissement est cependant remarqué, de telle sorte que l'amortissement théorique semble sous-estimer l'amortissement réel. Cette observation est peu surprenante, et peut aussi bien être justifiée par l'absence de la modélisation des pertes à l'encastrement que par la barre d'erreur assez importante inhérente à notre mesure d'amortissement et donnée par les relations 3.13. Aucun paramètre libre n'est utilisé dans ces modèles : l'amortissement thermoélastique est déterminé par les grandeurs inhérentes au matériau présentées par le Tableau 1.2,

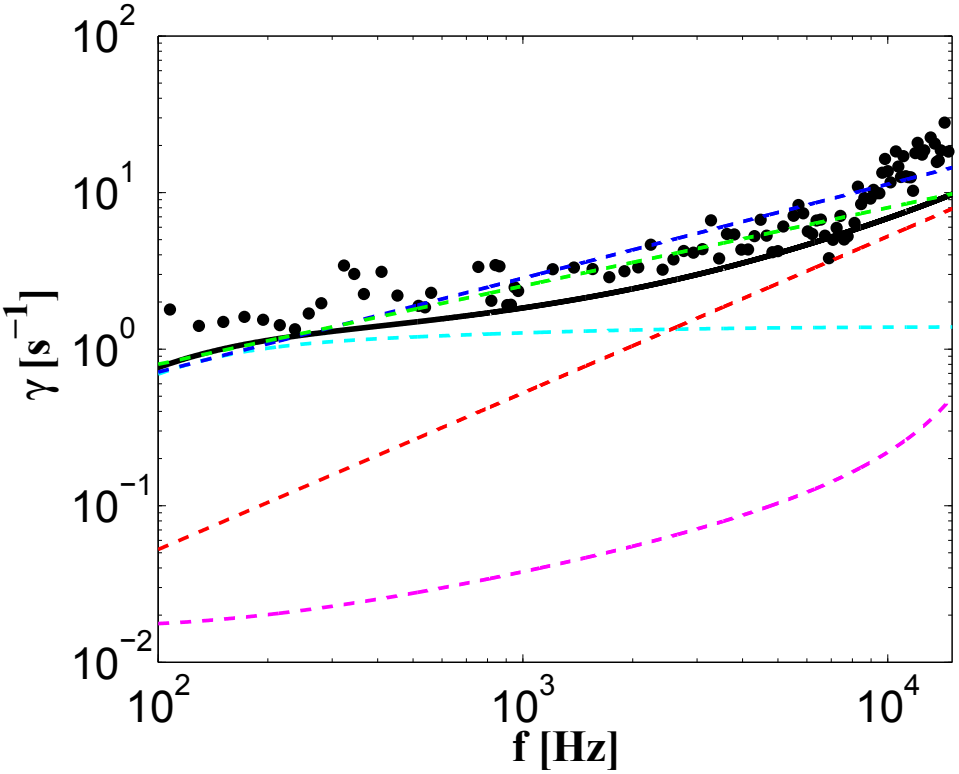


FIGURE 3.13 – Facteur d'amortissement γ en fonction de la fréquence pour une plaque d'acier d'épaisseur 0.5 mm. Points : mesure déjà présentée en Figure 3.12. Lignes pointillées : modèles proposés pour représenter l'amortissement thermoélastique (cyan), viscoélastique (rouge), par rayonnement (magenta). Ligne noire : somme des différentes contributions. Lignes pointillées bleues et vertes : respectivement, lois de puissances $\gamma = 0.045 f^{0.6}$ et $\gamma \propto f^{0.5}$ (voir § 3.2.5).

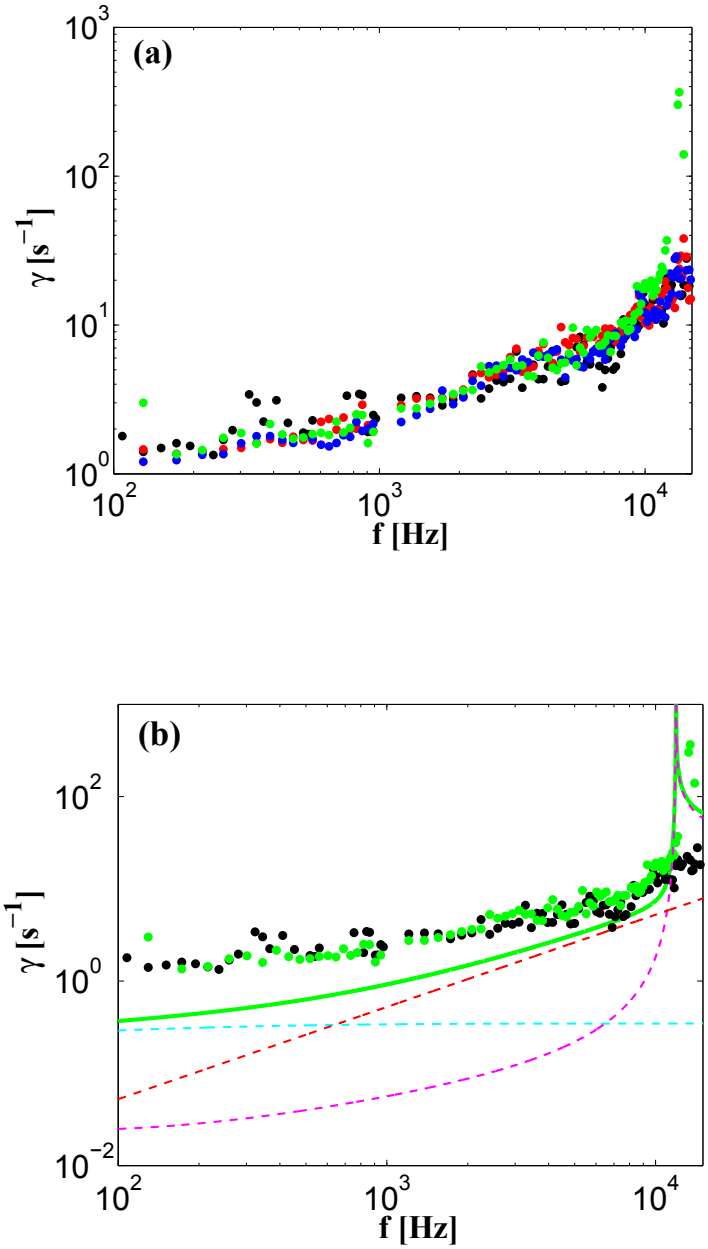


FIGURE 3.14 – Facteur d'amortissement γ en fonction de la fréquence. Points : données expérimentales. Noir : $h = 0.5$ mm. Rouge : $h = 0.6$ mm. Bleu : $h = 0.8$ mm. Vert : $h = 1$ mm. (b) Lignes pointillées : $h = 1$ mm, modèles proposés pour représenter l'amortissement thermoélastique (cyan), viscoélastique (rouge), par rayonnement (magenta). Ligne verte : somme des différentes contributions.

l'amortissement viscoélastique par le facteur de pertes mesuré dans [13], l'amortissement par rayonnement par les dimensions de la plaque, la vitesse du son dans l'air, les densités de l'acier et de l'air. La différence entre la mesures et les modèles peut donc aussi en partie provenir d'une différence entre les grandeurs caractéristiques de l'acier de notre plaque et celles provenant de la littérature, ces grandeurs étant connues pour varier d'un acier à un autre. L'étude de cette hypothèse nécessiterait une mesure directe des constantes de l'acier utilisé expérimentalement.

La Figure 3.14(a) présente les facteurs d'amortissement mesurés pour des plaques d'épaisseurs $h = 0.5, 0.6, 0.8, 1$ mm. Les quatre séries sont très proches les unes des autres et la faible variation d'épaisseur ici traitée semble être insuffisante pour établir une relation expérimentale claire entre amortissement et épaisseur. Trois points peuvent cependant être soulignés :

- Pour la plaque la plus épaisse, une croissance très rapide de l'amortissement aux plus hautes fréquences témoignent de la présence de la fréquence de coïncidence, conformément aux prédictions théoriques.
- Entre 2 et 10 kHz, le facteur d'amortissement ne dépend pas de l'épaisseur, ce qui suggère que l'amortissement viscoélastique est dans cette gamme le mécanisme qui dissipe le plus d'énergie.
- Finalement, avant 1 kHz, seule une légère hiérarchie est observable : la plaque la plus fine possède un amortissement en moyenne plus élevé que la plaque la plus épaisse.

La Figure 3.14(b) isole des données précédentes la mesure d'amortissement pour la plaque la plus fine et celle pour la plaque la plus épaisse. Les modèles correspondants à cette dernière sont également tracés. A hautes fréquences, la fréquence de coïncidence expérimentale de la plaque la plus épaisse est un peu plus élevée que la prédiction théorique. Là encore, cette différence peut provenir des paramètres du matériau utilisés dans le modèle d'amortissement par rayonnement. Ces paramètres ont en effet une influence non négligeable sur la relation de dispersion des ondes se propageant dans l'acier, et donc sur la fréquence de coïncidence.

À basses fréquences, dans la zone gouvernée théoriquement par l'amortissement thermoélastique, l'écart entre l'amortissement de la plaque la plus épaisse et celui de la plus fine est bien moins notable qu'attendu : $\gamma \propto 1/h^2$. Il est difficile de savoir si cette observation traduit la présence d'un mécanisme d'amortissement supplémentaire (les pertes au niveau de l'encastrement, par exemple) qui compenserait la diminution du facteur thermoélastique, ou si elle traduit simplement le fait que la résolution de notre mesure est insuffisante par rapport à la variation de l'épaisseur ici étudiée.

La mesure d'amortissement dans les structures est une problématique expérimentale complexe, et il est plutôt rare d'observer une cohérence parfaite entre le cadre pratique et les modèles, ceux-ci devant considérer des situations simplifiées. Dans notre cas, les résultats ont permis de mettre en valeur expérimentalement les principaux mécanismes dissipatifs actifs dans notre configuration tout en hiérarchisant l'importance de leurs contributions selon la fréquence en accord avec les prédictions théoriques.

3.2.5 Configurations expérimentales mises en œuvre pour étudier l'effet de l'amortissement sur le régime turbulent

Par la mise en œuvre (détaillée dans la section 3.3) de la profilométrie par transformée de Fourier, nous nous sommes rendus compte que le fait de peindre la plaque ajoutait une dissipation homogène. Nous dénotons la configuration initiale *configuration N*, la configuration où une face est peinte *configuration 1CP*, et la configuration où les deux faces sont peintes *configuration 2CP*. Une autre configuration est obtenue en ajoutant à la précédente des amortisseurs sur les trois bords libres de la plaque afin d'atténuer les ondes réfléchies aux frontières (*configuration BA*, voir Figure 3.15). Ces amortisseurs ont une forme cylindrique, un diamètre de 1.7 cm, et ils sont vendus dans le commerce pour l'isolation thermique de conduits hydrauliques. Chaque configuration est caractérisée par une mesure d'amortissement.

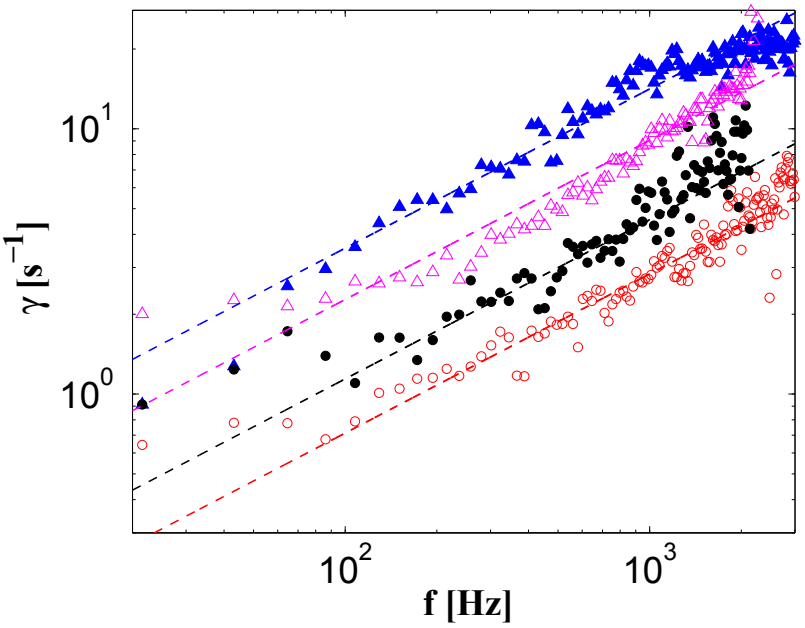


FIGURE 3.16 – Facteur d'amortissement γ en fonction de la fréquence. Lignes pointillées : lois de puissance $\gamma = \alpha f^{0.6}$. Rouge : configuration N, $\alpha = 0.045$. Noir : configuration 1CP, $\alpha = 0.072$. Magenta : configuration 2CP, $\alpha = 0.144$. Bleu : configuration BA, $\alpha = 0.224$.

La Figure 3.16 présente pour les quatre configurations les facteurs d'amortissement mesurés entre 20 Hz et 3 kHz. La Section 3.2 a mis en lumière la complexité de la dépendance fréquentielle de la dissipation. Ici, il est intéressant de noter que bien qu'entre les différentes configurations les sources d'amortissement soient de plusieurs natures, les facteurs d'amortissement présentent un comportement similaire en fonction de la fréquence. Il est donc proposé de chercher pour chaque configuration une

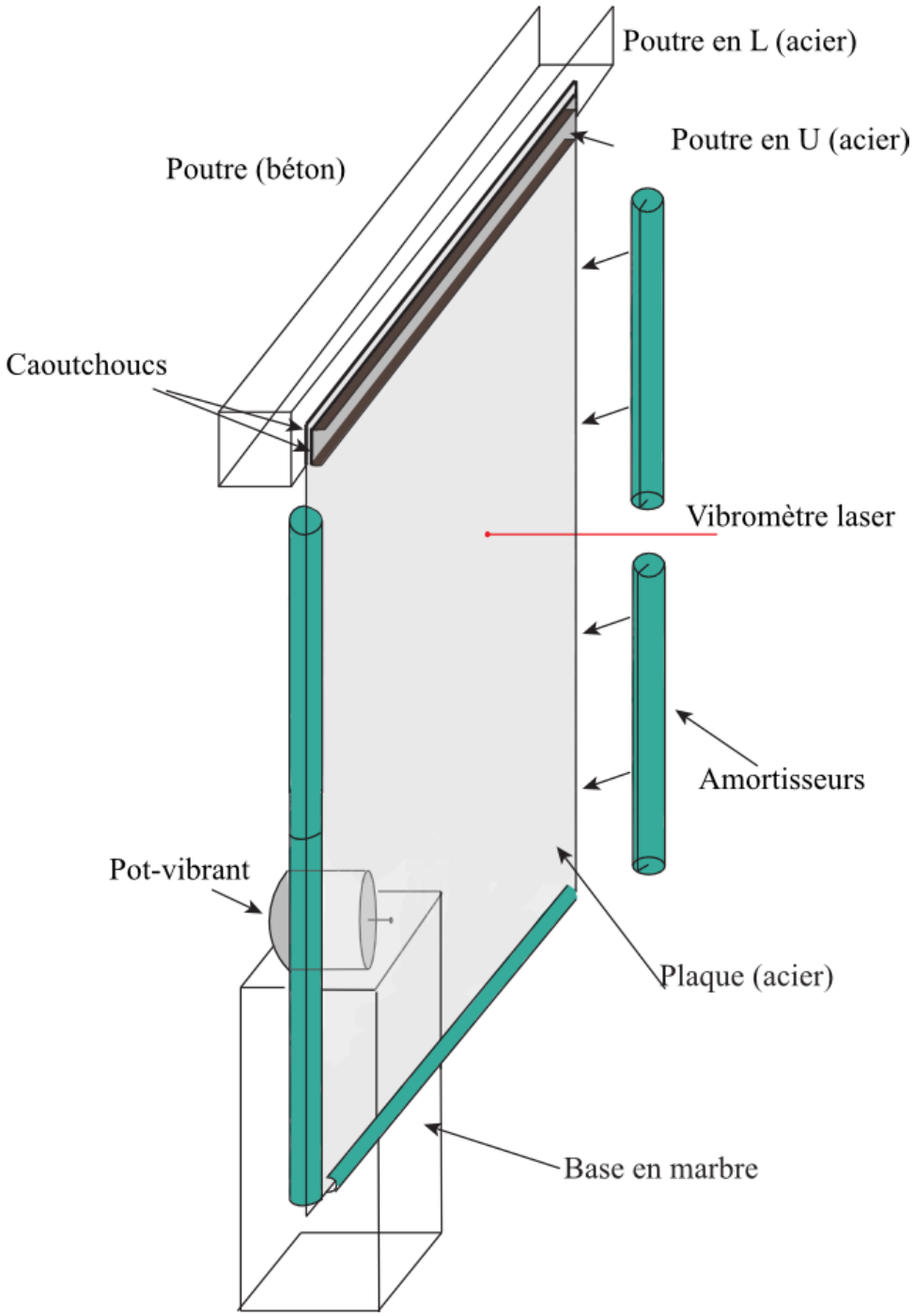


FIGURE 3.15 – Le dispositif expérimental présenté en Figure 3.1 est repris. Pour la *configuration BA*, des amortisseurs sont placés sur les trois bords libres de la plaque.

loi de puissance de la forme :

$$\gamma = \alpha f^{0.6\pm0.05}. \tag{3.14}$$

Cette loi est mise en défaut pour les premiers modes de la plaque mais fournit, sur l'intervalle de fréquences usuellement emprunté par la cascade (typiquement entre 60 et 4000 Hz), une description globale de l'amortissement de la plaque. Chaque configuration peut alors être caractérisée par un coefficient d'amortissement relatif γ^* qui normalise le coefficient d'amortissement α par celui de la configuration initiale α_N :

$$\gamma^* = \frac{\alpha}{\alpha_N}. \tag{3.15}$$

Le tableau 3.1 regroupe les valeurs de γ^* obtenues dans chaque cas : une multiplication allant jusqu'à un facteur 5 de l'amortissement de la configuration initiale a été obtenue.

Configuration	N	$1SP$	$2SP$	ED
α	0.045	0.072	0.144	0.224
γ^*	1	1.6	3.1	4.9

TABLE 3.1 – Coefficients d'amortissement α et γ^* pour chaque configuration étudiée.

Finalement, la loi de puissance estimée ici pour la configuration N a été reportée dans la Figure 3.13 de même qu'une loi de puissance de la forme $\gamma(f) \propto f^{0.5}$ correspondant à la mesure de l'amortissement réalisée par Boudaoud *et al.* [7]. La méthode consiste à mettre la plaque en régime turbulent puis à couper le forçage. Alors, la décroissance exponentielle est mesurée pour l'ensemble des fréquences considérées et une loi de puissance est estimée. Sur l'intervalle de fréquences usuellement emprunté par la cascade turbulente, la Figure 3.13 montre que les deux lois de puissance sont très proches et fournissent une bonne approximation du facteur d'amortissement.

Mesure de la puissance dissipée

Les mesures d'amortissement permettent de connaître la puissance dissipée par la cascade. Cette dernière correspond à l'énergie dissipée par chaque mode et peut donc être définie par rapport au spectre de puissance P_v et à l'amortissement γ par la relation :

$$\epsilon_D = h \int_0^\infty \gamma(f) P_v(f) df. \tag{3.16}$$

La Figure 3.17 présente pour chaque configuration l'évolution de la puissance dissipée en fonction de la puissance injectée ϵ_I définie par l'équation (3.1). Pour calculer l'intégrale (3.16), les points présentés en Figure 3.16 fournissent les valeurs de $\gamma(f)$ et les spectres $P_v(f)$ ici utilisés seront présentés et analysés au chapitre suivant. La puissance injectée et la puissance dissipée suivent une relation de proportionnalité de la forme

$$\epsilon_D = 0.44\epsilon_I \tag{3.17}$$

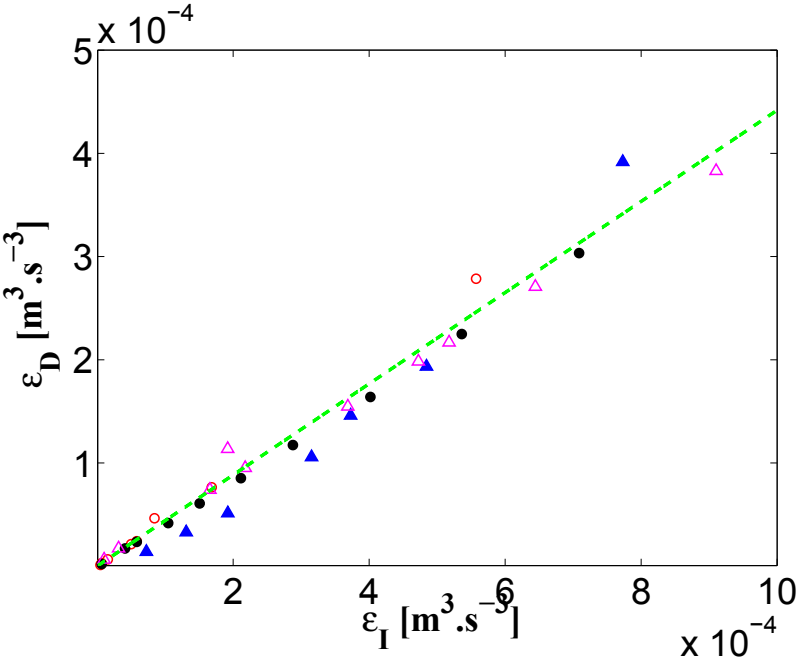


FIGURE 3.17 – Puissance dissipée ϵ_D en fonction de la puissance injectée ϵ_I. Rouge : $\gamma^* = 1$. Noir : $\gamma^* = 1.6$. Magenta : $\gamma^* = 3.1$. Bleu : $\gamma^* = 4.9$. Ligne verte pointillée : $\epsilon_D = 0.44\epsilon_I$.

alors qu'intuitivement ces deux puissances devraient être égales si l'amortissement est homogène. Cette hypothèse d'homogénéité n'est peut être pas parfaitement vérifiée mais nous pensons que l'inégalité entre les deux puissances provient de pertes d'énergie par génération de tourbillons dans l'air via les bords de la plaque. Cet amortissement ne se produisant que quand la plaque est en régime de vibration non linéaire, il n'est pas pris en compte par notre manière de mesurer l'amortissement. De plus, un rapide calcul classique de puissance aérodynamique rayonnée montre que cette dernière est, dans le cadre de grands déplacements des bords, de même ordre que la puissance injectée. Même si ϵ_D représente mieux ce qui a été dissipé par la cascade, ϵ_I est par la suite utilisé comme paramètre de contrôle comme c'était le cas dans les premières études expérimentales [7, 68].

3.3 Profilométrie par Transformée de Fourier

Jusqu'ici, les travaux expérimentaux réalisés à l'UME considéraient l'étude du régime turbulent à partir de la mesure de la vitesse en un point. Si maintenant nous désirons étudier l'isotropie du régime turbulent ou vérifier la validité de la relation de dispersion à des amplitudes de forçage importantes, il est nécessaire de mettre en place une mesure spatiale.

La *profilométrie par transformée de Fourier* a été développée par Takeda [95, 96] pour mesurer les dimensions d'un objet. Elle fut adaptée par [18, 61, 83] pour étudier la propagation d'ondes à la surface de l'eau et appliquée au cas de la turbulence d'ondes de flexions dans [19, 69].

3.3.1 Principe

Un vidéoprojecteur et une caméra séparés par une distance D sont situés à une distance L d'une surface paramétrée par les coordonnées cartésiennes (x, y). Cette dernière est au repos et un réseau de franges sinusoïdales de longueur d'onde λ_p est projeté. L'intensité I_0 mesurée par la caméra dans son plan (X, Y) est alors un motif en niveaux de gris de la forme

$$I_0(X,Y) = A(X,Y)\cos\left(\frac{2\pi Y}{\lambda_c} + \phi_0(X,Y)\right) + B(X,Y), \tag{3.18a}$$

$$\text{avec} \quad \phi_0(X,Y) = \frac{-2\pi}{\lambda} D. \tag{3.18b}$$

$\lambda = \alpha\lambda_p$ avec $\alpha > 1$ est la longueur d'onde du motif formé sur la surface et $\lambda_c = \beta\lambda$ avec $\beta < 1$ la période vue par la caméra. A est un facteur dépendant du montage et B un bruit introduit par l'inhomogénéité de l'éclairage. Ce bruit est quantifié en projetant une image monochromatique et l'on nomme I^{ref} l'intensité mesurée dans ce cas par la caméra :

$$I^{ref}(X,Y) = B(X,Y). \tag{3.19}$$

Une fois le système mis en vibration, l'intensité mesurée à chaque pas de temps s'écrit :

$$I(X,Y) = A(X,Y)\cos\left(\frac{2\pi Y}{\lambda_c} + \phi(X,Y)\right) + B(X,Y) \tag{3.20a}$$

$$\text{avec} \quad \phi(X,Y) = \frac{-2\pi}{\lambda}\frac{D}{L-\zeta}. \tag{3.20b}$$

ζ est pour chaque pixel de la caméra le déplacement transverse opéré par la surface et constitue la quantité à déterminer. La différence de phase entre l'image associée à I et celle associée à I_0,

$$\Delta\phi(X,Y) = \phi(X,Y) - \phi_0(X,Y), \tag{3.21}$$

doit donc être mesurée. Pour cela, deux transformations de Hilbert sont calculées :

$$H(I_0 - I^{ref}) = A(X,Y)\exp\left(i(2\pi/\lambda_c Y + \phi_0(Y))\right), \tag{3.22a}$$
$$H(I - I^{ref}) = A(X,Y)\exp\left(i(2\pi/\lambda_c Y + \phi(Y))\right), \tag{3.22b}$$

Le déphasage $\Delta\phi$ est alors donné par la partie imaginaire de l'équation

$$\log[H(I - I^{ref}).H^*(I_0 - I^{ref})] = \log A^2 + i\Delta\phi, \tag{3.23}$$

avec H^* le nombre complexe conjugué de la transformée de Hilbert (3.22a).

La différence de phase est reliée directement au déplacement transverse ζ grâce aux expressions (3.18b) et (3.20b). Ces dernières, démontrées dans [61, 86], sont valables dans le cas où les axes optique de la caméra et du vidéoprojecteur sont parallèles et la lumière issue du vidéoprojecteur est supposée collimatée : les rayons qui la composent sont parallèles et leur dispersion avec la distance est négligée. Pour des franges non collimatées, l'expression du déplacement transverse est plus complexe et a été déterminée par [87]. Dans notre cas, il vient :

$$\zeta(x', y') = \frac{\Delta\phi L}{\Delta\phi - 2\pi/\lambda D}. \tag{3.24}$$

Comme la surface peut être, en plus du déplacement transverse, animée d'un mouvement dans son plan, la mesure de ζ est obtenue en un point (x', y') de coordonnées $(x + \delta x, y + \delta y)$, avec :

$$\delta y = \frac{D - y}{L}\zeta, \tag{3.25a}$$
$$\delta x = \frac{x}{L}h. \tag{3.25b}$$

3.3.2 Mise en œuvre

Un vidéoprojecteur Epson EH-TW9000 d'une résolution de 1920×1200 px^2 et une caméra rapide Phantom V9, dont la résolution est ajustable, sont vissés parallèlement au sol à un support commun (voir Figure 3.18). Celui-ci est construit à partir d'une planche de bois fixée à une structure métallique maintenue au sol par des poids. Les emplacement de la caméra et du vidéoprojecteur ont été choisis de telle sorte que leurs capteurs soient alignés et à égale distance de la plaque. La distance qui les sépare vaut $D = 0.315$ m et un objectif Nikon de focale $F = 50$ mm dont l'ouverture est réglée à 1.4 pour optimiser le rapport signal sur bruit est monté sur la caméra. Le flux d'air chaud sortant de l'aération du vidéoprojecteur ne doit pas être négligé : s'il passe devant la caméra l'indice optique de l'air est perturbé et l'image enregistrée est déformée. Cette précaution explique sur la Figure 3.18 que la caméra ait été placée en dessous du vidéoprojecteur, le flux d'air chaud provenant du vidéoprojecteur se dirigeant vers le haut de la salle d'expériences.



FIGURE 3.18 – Profilométrie par transformée de Fourier : dispositif de mesure. Un vidéoprojecteur EPSON EH-TW9000 et une caméra rapide Phantom V9 sont vissés à un support commun de telle sorte que le capteur de la caméra et celui du vidéoprojecteur soient alignés.

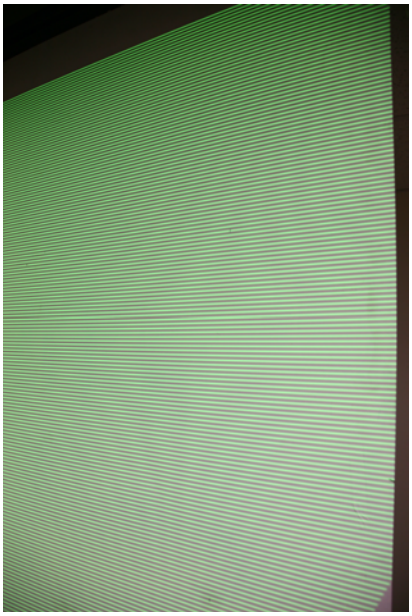


FIGURE 3.19 – Projection d'un motif sinusoïdal à deux dimensions sur la plaque. Seul le capteur vert du Tri-LCD du vidéoprojecteur est utilisé, et ce car cette couleur correspond à la meilleure sensibilité de la caméra rapide.

Il est nécessaire de supprimer les réflexions induites par l'acier pour rendre la surface de la plaque diffusive. Pour cela, une des faces a été peinte avec une peinture blanche liquide adaptée au métal dont l'effet sur les vibrations sera présentée au chapitre suivant. Le motif sinusoïdal est alors projeté à l'aide du vidéoprojecteur en utilisant un seul des capteurs du Tri-LCD. La composante verte est de cette façon isolée (voir Figure 3.19) car elle correspond à la couleur à laquelle la caméra est la plus sensible.

La taille des franges ainsi que la distance entre les appareils de mesure et la plaque doivent être déterminées. Ce dimensionnement prend en compte la plus petite longueur d'onde, ainsi que la plus grande, pouvant se propager. Pour pouvoir observer la plus grande longueur d'onde, égale à la largeur de la plaque, le support sur lequel sont placés la caméra et le vidéoprojecteur doit être disposé à une distance $L = 3.27$m. La résolution de la caméra est fixée à 1200×1200 px^2. Nous cherchons alors la plus petite longueur d'onde. D'après la Figure 3.4, nous savons que la cascade atteint au maximum des fréquences de l'ordre de 10 kHz. D'après la relation de dispersion donnée par l'équation (1.34) et présentée précédemment en Figure 1.5, cette borne supérieure correspond en terme de nombre d'onde à $k = 282.9$ rad.m^{-1}, et en terme de longueur d'onde à 0.0222 m. D'après [18], la résolution maximale de la profilométrie par transformée de Fourier est de $\lambda/4$, où λ est la longueur d'onde apparente. Dans notre cas, il faut $\lambda \leq 0.0888$ m. Avec une résolution de 1200×1200 px^2, un pixel de la caméra représente 8.33×10^{-4} m sur la plaque. En projetant une longueur d'onde correspondant sur la plaque à 10 pixels caméra, $\lambda = 8.33 \times 10^{-3}$ m et la résolution est donc de 2.1×10^{-3} m, ce qui est largement suffisant.

3.3.3 Calibration

La plaque est mise en régime turbulent par un signal sinusoïdal à la fréquence $f_0 = 30$ Hz. La vibration est enregistrée à l'aide de la caméra rapide sur une zone couvrant 1 m^2 de la plaque et située au dessus du pot-vibrant. La salle d'expérience a été isolée de toute lumière extérieure de telle sorte que l'éclairage fourni par le vidéoprojecteur est homogène sur toute la surface. Cette précaution nous affranchit de la mesure de l'intensité de référence I^{ref}. Les étapes décrites au paragraphe 3.3.1 pour déterminer le déplacement transverse ζ se traduisent expérimentalement par les démarches suivantes :

- Avant la mise en vibration de la plaque, le motif projeté est enregistré par la caméra, fournissant pour chaque pixel l'intensité I_0.

- Une fois la plaque mise en régime turbulent, la caméra enregistre pendant une seconde la vibration, fournissant l'évolution de l'intensité I au cours du temps.

- La transformée de Fourier 2D des multiples images est calculée puis filtrée par une gaussienne 2D autour de la fréquence des franges. La totalité des infor-

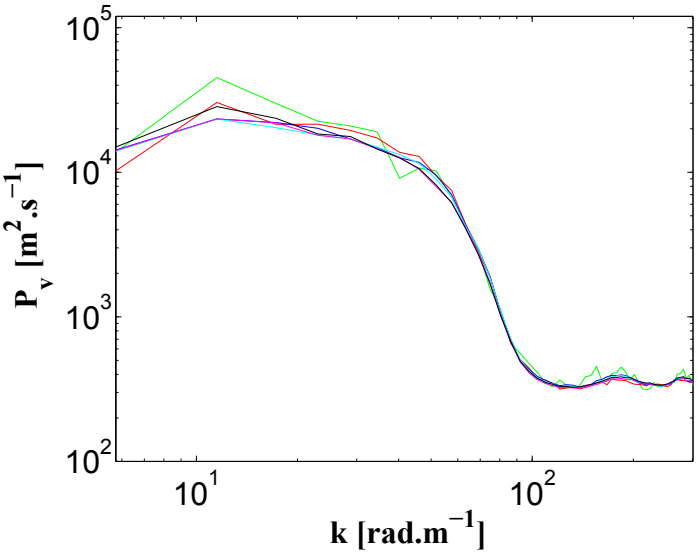


FIGURE 3.20 – Densité spectrale de puissance de la vitesse P_v en fonction de la norme k du vecteur d'onde pour plusieurs moyennes N_m. Vert : $N_m = 2$, Rouge : $N_m = 10$, Bleu : $N_m = 50$, Cyan : $N_m = 100$, Magenta : $N_m = 300$, Noir : $N_m = 1000$.

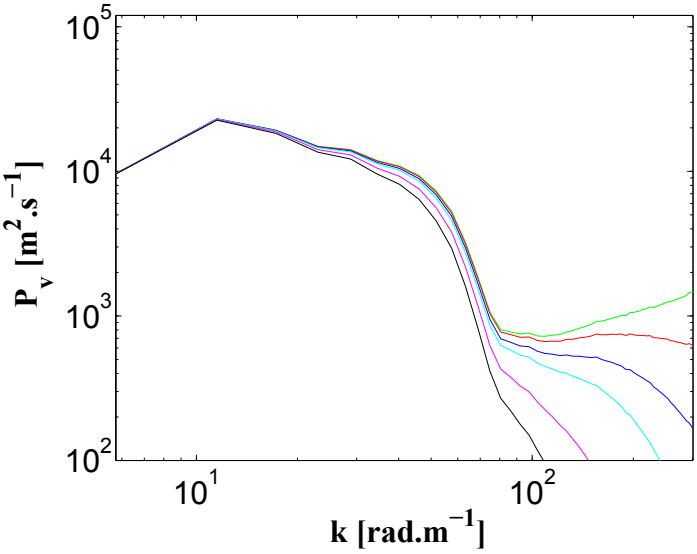


FIGURE 3.21 – Densité spectrale de puissance de la vitesse P_v en fonction de la norme k du vecteur d'onde pour différents écart-types σ_g. Noir : $\sigma_g = 12.5$ rad.m^{-1}. Magenta : $\sigma_g = 16.67$ rad.m^{-1}. Cyan : $\sigma_g = 25$ rad.m^{-1}. Bleu : $\sigma_g = 33.3$ rad.m^{-1}. Rouge : $\sigma_g = 50$ rad.m^{-1}. Vert : $\sigma_g = 125$ rad.m^{-1}.

mations de phase recherchée se trouve dans cette partie du signal, le reste ne constituant que du bruit. Finalement, seule la partie positive des spectres est conservée, ce qui revient à avoir calculé la transformée de Hilbert des images I et I_0, conformément à l'étape (3.22).

– Le calcul du produit des transformées de Hilbert $H(I)$ et $H(I_0)$ donne accès à la différence de phase $\Delta\phi$ grâce à la relation (3.23). La phase obtenue doit être déroulée afin de supprimer les discontinuités en $+\pi$ et $-\pi$. Les algorithmes permettant de dérouler la phase sur des images 2D sont nombreux [42, 43, 116], mais leur complexité et le temps de calcul nécessaire ne sont pas appropriés dans notre cas. Afin d'éviter toute erreur pouvant être induite par cette étape, les calculs précédents ne considèrent plus une image au repos et une image en vibration, mais deux images qui se suivent directement. Par cette opération, la différence de phase est beaucoup plus petite qu'auparavant et reste contenue dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$. On notera qu'alors c'est la vitesse transverse, et non le déplacement, qui est obtenue à partir du déphasage.

– Les spectres de puissance de la vitesse sont calculés et évalués en fonction de la norme du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Pour cela, le module au carré de la transformée de Fourier 2D d'une image de vitesse est sommé sur tous les angles du repère (k_x, k_y). Le spectre de puissance est ensuite moyenné au cours du temps jusqu'à ce que sa forme converge. La Figure 3.20 présente les spectres d'énergie en fonction de la norme de $\mathbf{k}$ pour un nombre croissant d'images utilisées pour la moyenne temporelle. La fréquence d'échantillonnage est fixée pour ce comparatif à $F_s = 1430$ Hz. Avec $2, 10, 50$ images, le spectre calculé est accidenté. À partir de 300 images, ce dernier est convergé. Pour la suite de l'étude, 1000 images (ce qui correspond ici à 0.7 s) sont utilisées : la convergence du spectre est assurée sans qu'un trop grand nombre d'images doit être enregistré. Le traitement d'image est en effet très gourmand en terme de mémoire.

La gaussienne utilisée pour filtrer les images brutes doit être précisément calibrée : si elle est trop large le rapport signal-sur-bruit est insuffisant, si elle est trop étroite des longueurs d'ondes présentes dans la cascade turbulente sont filtrées. L'écart-type, qui définit la largeur de la gaussienne, est exprimé dans le référentiel de la plaque. La Figure 3.21 présente les spectres d'énergie en fonction de la norme de $\mathbf{k}$ pour des gaussiennes allant de $\sigma_g = 12.5$ rad.m^{-1} à $\sigma_g = 125$ rad.m^{-1}. Pour les nombres d'ondes les plus petits, les six spectres sont similaires. Pour des largeurs de gaussienne $\sigma_g = 12.5$ rad.m^{-1} et $\sigma_g = 16.67$ rad.m^{-1}, la cascade est affectée par le filtrage à partir de $k = 20$m^{-1} : l'amplitude spectrale est plus faible que pour les autres tailles de gaussienne et la cascade s'arrête plus rapidement. Pour les autres tailles de gaussienne, la cascade n'est plus affectée par le filtrage et possède dans les quatre cas la même largeur. Cependant, un bruit apparaît pour les nombres d'onde supérieurs à $k = 100$ m^{-1} dans les cas $\sigma_g = 50$ rad.m^{-1} et $\sigma_g = 125$ rad.m^{-1}. Le meilleur

compromis entre les deux erreurs relevées est obtenu pour $\sigma_g = 33.33$ rad.m^{-1} et $\sigma_g = 25$ rad.m^{-1}, cette dernière taille de fenêtre étant utilisée par la suite.

L'amplitude spectrale dépend également du temps d'exposition de la caméra. Un temps d'exposition très court permet d'utiliser une grande fréquence d'échantillonnage mais conduit à des images trop sombres. Un temps d'exposition trop long réduit la fréquence d'acquisition : comme la vitesse est calculée à partir de deux images successives, la cascade est alors filtrée. La Figure 3.22 présente les spectres d'énergie en fonction de la norme de $\mathbf{k}$ pour des temps d'exposition allant de 100 à 700 μs. Pour $T_e = 100$ μs, toutes les composantes spectrales ont une amplitude supérieure aux autres spectres, mettant en exergue la présence du bruit induit par le manque de contraste. Pour des temps d'exposition longs tels $T_e = 500$ μs et $T_e = 700$ μs, la cascade est filtrée, ce qui entraîne une coupure plus rapide. Pour $T_e = 260$ μs et $T_e = 300$ μs, la taille de la cascade n'évolue pas et le niveau de bruit est faible. Pour le reste de l'étude il sera choisi $T_e = 300$ μs.

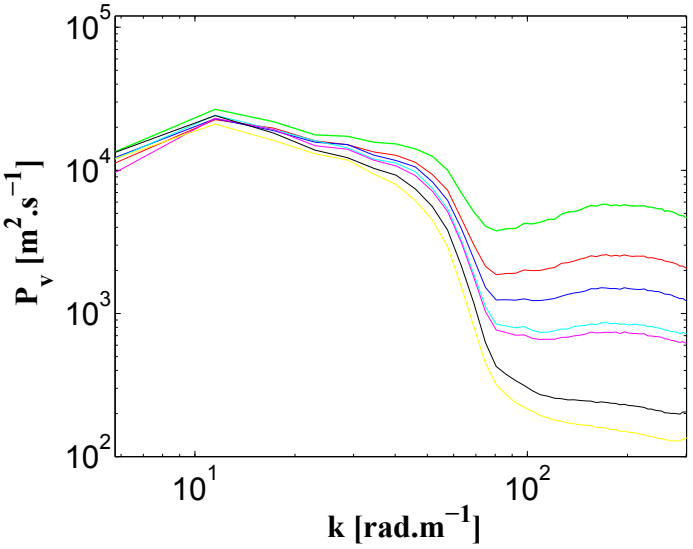


FIGURE 3.22 – Densité spectrale de puissance de la vitesse P_v en fonction de la norme du vecteur d'onde pour différents temps d'exposition T_e. Vert : $T_e = 100\,\mu$s, Rouge : $T_e = 150\,\mu$s, Bleu : $T_e = 200\,\mu$s, Cyan : $T_e = 260\,\mu$s Magenta : $T_e = 300\,\mu$s, Noir : $T_e = 500$ μs. Jaune : $T_e = 700$ μs.

3.3.4 Application : Effet de l'amplitude de forçage sur la relation de dispersion

D'après [69], pour de fortes amplitudes de forçage, un écart entre la relation de dispersion mesurée et la relation de dispersion linéaire apparaît à basses fréquences, témoignant de l'existence d'une correction non linéaire. Pour pouvoir observer et quantifier cet effet, il est nécessaire de calculer les spectres spatio-temporels $P_v(\mathbf{k}, f)$.

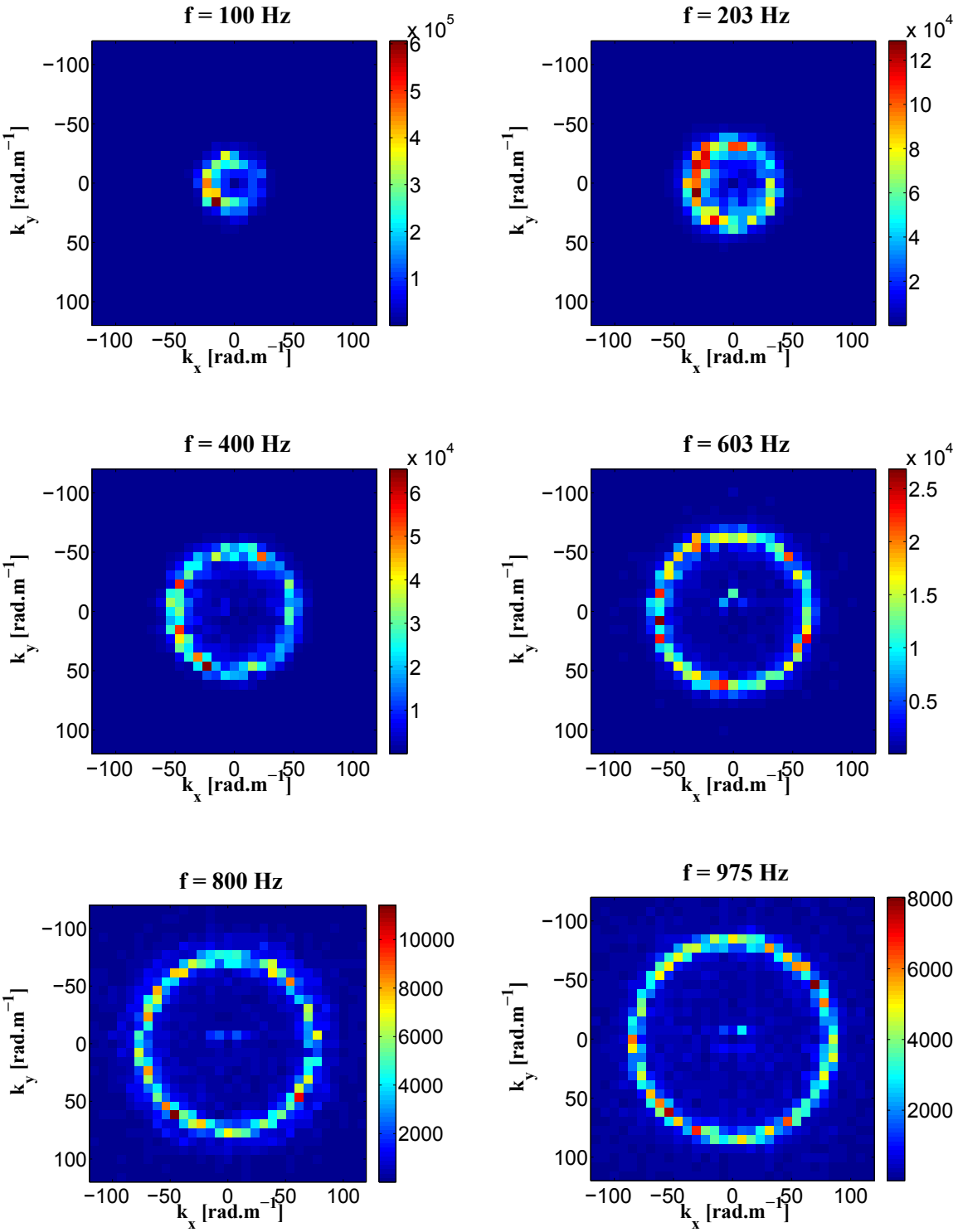


FIGURE 3.23 – Spectre d'énergie spatio-temporel de la vitesse en fonction des composantes k_x et k_y du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ pour six fréquences. Les échelles de couleur sont linéaires.

L'obtention de ces derniers nécessite d'enregistrer un signal suffisamment long pour pouvoir correctement fenêtrer le signal temporel et moyenner la transformée de Fourier dans la direction du temps. La caméra ayant une mémoire limitée, il faut alors réduire sa résolution à 960×960 px^2, ce qui ne détériore que très peu notre résolution dans l'espace des nombres d'onde et permet de garder un nombre d'images plus grand qu'auparavant.

Comme nous cherchons à quantifier un effet présent à basses fréquences (typiquement pour des nombres d'ondes inférieurs à 50 rad.m^{-1}), le temps d'exposition est limité à $T_e = 500$ μs. La résolution temporelle maximale est alors de 2000 images par seconde, ce qui restreint en terme de fréquences notre observation à un intervalle $[0, 1000]$ Hz. Là encore, comme nous cherchons à quantifier un effet présent à basses fréquences, cet intervalle nous convient. Finalement, la vibration de la plaque peut être enregistrée sur une durée de 1.14 s en filmant 2250 images.

La taille de la gaussienne utilisée reste inchangée. La chaîne de traitement est la même que précédemment jusqu'à l'obtention du spectre d'énergie en fonction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Alors, une transformée de Fourier dans la direction du temps est appliquée afin d'obtenir le spectre spatio-temporel $P_v(\mathbf{k}, f)$. Sa résolution en terme de fréquences est de $\Delta f = 7$ Hz. La Figure 3.23 présente, pour six fréquences, des coupes du spectre spatio-temporel. D'après la relation de dispersion, on a :

$$f = \frac{\kappa}{2\pi}(k_x^2 + k_y^2) \qquad \text{avec} \quad \kappa = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \tag{3.26}$$

L'énergie est donc également répartie, à une fréquence donnée, sur un cercle de centre $k_x = 0$, $k_y = 0$, et d'équation :

$$k_x^2 + k_y^2 = R^2, \tag{3.27a}$$

$$\text{avec} \qquad R = \sqrt{\frac{\kappa f}{2\pi}}. \tag{3.27b}$$

f (Hz)	100	203	400	603	800	975
R_{th} [rad.m^{-1}]	28.344	40.384	56.688	69.6	80.169	88.504
R_{exp} [rad.m^{-1}]	30.8	38.5	53.9	69.3	77.38	84.7

TABLE 3.2 – Rayon R_{th} des cercles théoriques définis par l'équation (3.27b) et rayon R_{exp} des cercles expérimentaux de la Figure 3.23 en fonction de la fréquence.

Le tableau 3.2 présente les rayons prédits par l'équation (3.27b) en comparaison de ceux relevés sur la Figure 3.23. Notre résolution expérimentale étant de 7 m^{-1}, l'accord entre les prédictions théoriques et les observations expérimentales est bon : la relation de dispersion linéaire est suivie. Les coupes à basses fréquences de la Figure 3.23 montrent cependant une inégalité dans la répartition de l'énergie traduisant

l'anisotropie entraîné par le forçage. A hautes fréquences, l'isotropie du spectre d'énergie est maintenue.

Pour approfondir ces premières remarques, la relation de dispersion expérimentale est obtenue en relevant pour chaque fréquence le nombre d'onde correspondant au maximum d'énergie. La Figure 3.24(a) présente la relation de dispersion mesurée à faible forçage ($\epsilon_I = 1.24 \times 10^{-4}$ m^{3}s^{-3}) en comparaison de la relation de dispersion linéaire. La résolution spatiale disponible étant assez faible, peu de points nous sont accessibles pour la comparaison à basses fréquences. Cependant, un très bon accord est à nouveau trouvé entre la relation mesurée, et la relation théorique. La Figure 3.24(b) présente la même comparaison pour un forçage d'amplitude dix fois plus importante : $\epsilon_I = 1.5 \times 10^{-3}$ m^{3}s^{-3}. Un décalage entre les deux relations de dispersion apparaît clairement : le nombre d'onde mesuré est inférieur à la relation de dispersion linéaire, conformément aux observations de [69]. À partir de 500 Hz, la relation de dispersion linéaire est rejointe par la relation de dispersion mesurée.

La correction non linéaire à la relation de dispersion, qui dépend de l'amplitude du déplacement transverse ζ, est introduite en écrivant

$$f = \frac{\kappa}{2\pi}(1 + \alpha\zeta^2)|\mathbf{k}|^2 \tag{3.28}$$

où α est une constante associée à la non-linéarité du système considéré. Pour les plaques, la non-linéarité est raidissante [70] et α est alors supérieur à 1. L'effet non linéaire fait donc correspondre pour un même nombre d'onde une fréquence plus grande que la valeur associée à la relation de dispersion linéaire. Ceci est en accord avec le décalage observé précédemment. À hautes fréquences, beaucoup moins d'énergie vibratoire est mis en jeu et le rapport ζ/h devient petit : expérimentalement, cela se traduit sur la Figure 3.24(b) par le fait qu'on ne distingue plus à hautes fréquences la correction non linéaire alors qu'elle est visible à basses fréquences.

Les performances de la caméra à notre disposition nous empêchent de quantifier précisément la correction non linéaire à la relation de dispersion en fonction de l'amplitude de forçage. On remarque cependant sur la Figure 3.24 que pour deux puissances injectées séparées d'un facteur dix, le décalage entre les mesures et la relation de dispersion linéaire n'est pas critique au point de pouvoir expliquer les divergences observées entre les régimes turbulents expérimentaux et les prédictions théoriques décrites au chapitre 2.

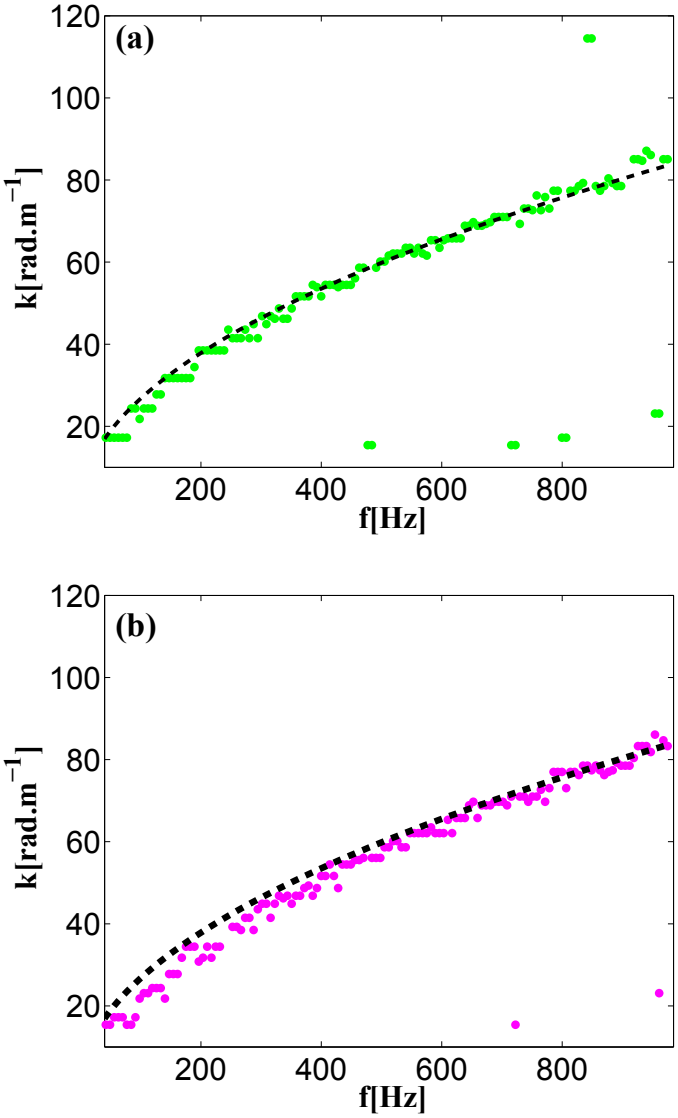


FIGURE 3.24 – Relation de dispersion, représentée par l'évolution de la norme k du vecteur d'onde en fonction de la fréquence f. Ligne noire pointillée : relation de dispersion linéaire (3.26). Points : mesures expérimentales pour deux puissances injectées ε_I. (a) Vert : $\varepsilon_I = 1.24 \times 10^{-4}$ m^{3}s^{-3}. (b) Magenta : $\varepsilon_I = 1.5 \times 10^{-3}$ m^{3}s^{-3}.

Chapitre 4

Effet de l'amortissement sur le régime de turbulence d'ondes

Ce chapitre propose d'étudier expérimentalement et numériquement l'effet de l'amortissement sur le régime turbulent d'une plaque mince. Les travaux publiés dans [44] sont pour cela repris et complétés par les mesures par profilométrie par transformée de Fourier.
Les quatre configurations introduites au § 3.2.5 permettent d'augmenter l'amortissement naturel d'une plaque mince :

- *L'effet de ce contrôle opéré sur l'amortissement est premièrement quantifié par rapport à la pente des spectres : plus l'amortissement est important et plus celle-ci est raide.*
- *L'amortissement permet d'accéder au spectre de la puissance dissipée : l'absence d'une gamme inertielle est alors mise en évidence.*

La section 4.2 introduit les lois d'amortissement expérimentales dans un code numérique pseudo-spectral. Un comportement très proche des expériences est trouvé.
La dernière section discute et interprète les observations précédentes. En cherchant à discriminer les deux mises à l'échelle classiques de l'amplitude spectrale $P_v \propto \epsilon_I^{0.5}$ et $P_v \propto \epsilon_I^{0.33}$, il est montré que la fréquence caractéristique des spectres est une fonction non seulement de la puissance injectée, mais aussi de l'amortissement. Une normalisation appropriée des spectres prenant en compte cet effet est alors proposée. Bien que l'hypothèse d'une gamme inertielle ne soit pas vérifiée expérimentalement de par la présence de l'amortissement à toutes les échelles, des preuves que la dynamique non linéaire d'une plaque mince reste turbulente sont fournies au § 4.3.2.

4.1 Observation expérimentale de l'effet de l'amortissement sur la pente des spectres

4.1.1 Résultats en un point

La plaque est mise en régime turbulent par un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 30$ Hz. La vitesse transverse est mesurée par un vibromètre laser à une fréquence d'échantillonnage de 22.05 kHz pendant 180 s. La transformée de Fourier du signal de vitesse est alors moyennée sur une fenêtre d'une seconde afin que la résolution fréquentielle soit de 1 Hz.

La Figure 4.1 présente les densités spectrales de puissance de la vitesse transverse pour des puissances injectées similaires dans les quatre configurations présentées au § 3.2.5. Tous les spectres présentent un comportement de type turbulent avec un processus de cascade des grandes vers les petites échelles. Entre les échelles d'injection (de 30 à 90 Hz) et les échelles de dissipation (après $f = 2$ kHz), une loi de puissance peut être estimée pour chaque spectre. La configuration N présente une pente $P_v \propto f^{-0.54}$ en accord avec les précédentes études expérimentales [7, 68]. Quand l'amortissement est accru, la cascade est plus pentue. Pour $\gamma^* = 4.9$, une loi de la forme $P_v \propto f^{-1.1}$ est estimée : la variation d'un facteur 5 de l'amortissement multiplie par deux l'exposant de la loi de puissance. La forme de la cascade dépend à chaque échelle du rapport entre la puissance injectée et le taux d'amortissement : elle est donc, dans les conditions expérimentales, étroitement liée à la dissipation.

4.1.2 Spectre de la puissance dissipée

De la même façon que la puissance dissipée a été définie par l'équation (3.16), le spectre de la puissance dissipée $P_D(f)$ est introduit :

$$P_D = \gamma(f) P_v = \alpha f^{0.6} P_v. \tag{4.1}$$

La Figure 4.2 représente le spectre de dissipation en fonction de la fréquence pour les quatre configurations. Les lois de puissance mesurées au § 3.2.5 ont été utilisées pour $\gamma(f)$ et les spectres P_v correspondent à ceux de la Figure 4.1. L'amplitude des spectres de la puissance dissipée est non négligeable sur l'ensemble des modes parcourus par la cascade turbulente. Pour $\gamma^* = 1$, $P_v \propto f^{-0.54}$ et $\gamma \propto f^{0.6}$: le spectre est plat jusqu'à la fin de la cascade de telle sorte que chaque mode dissipe en moyenne la même énergie. Pour les autres cas, $P_v \propto f^{-\beta}$ avec β compris entre 0.65 et 1.1 : il vient $P_D \propto f^{\theta}$ avec θ compris entre -0.5 pour la configuration la plus amortie et -0.05 pour la configuration 1CP. Pour les configurations $1CP$, $2CP$, et BA, le spectre de dissipation décroît donc en fonction de la fréquence, en contradiction avec le cadre théorique de la turbulence d'ondes qui impose une dissipation confinée aux hautes fréquences. Par le calcul du spectre de dissipation, l'existence d'une fenêtre de transparence séparant les échelles de forçage et les échelles dissipatives est invalidée dans le cadre expérimental de la turbulence d'ondes de flexion.

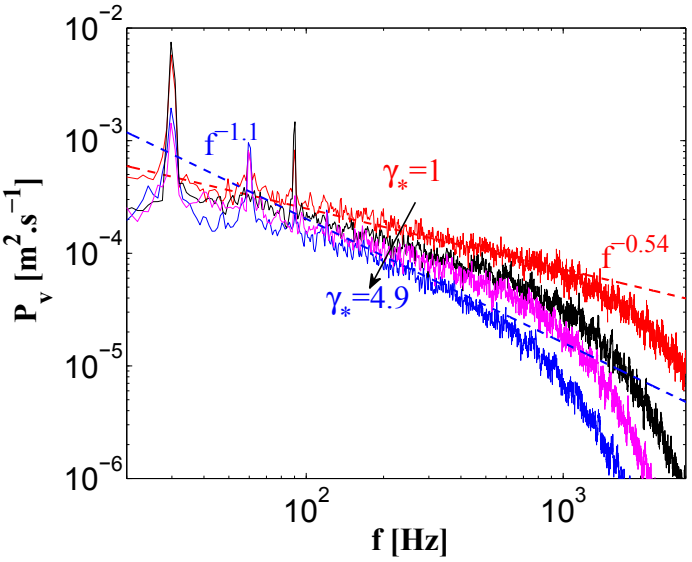


FIGURE 4.1 – Densité spectrale de puissance de la vitesse transverse P_v en fonction de la fréquence pour les quatre configurations. Rouge : $\gamma_* = 1$, $\epsilon_I = 0.56 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Noir : $\gamma_* = 1.6$, $\epsilon_I = 0.54 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Magenta : $\gamma_* = 3.1$, $\epsilon_I = 0.52 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Bleu : $\gamma_* = 4.9$, $\epsilon_I = 0.48 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Ligne pointillée rouge + équation : $P_v \propto f^{-0.54}$. Ligne pointillée bleue + équation : $P_v \propto f^{-1.1}$.

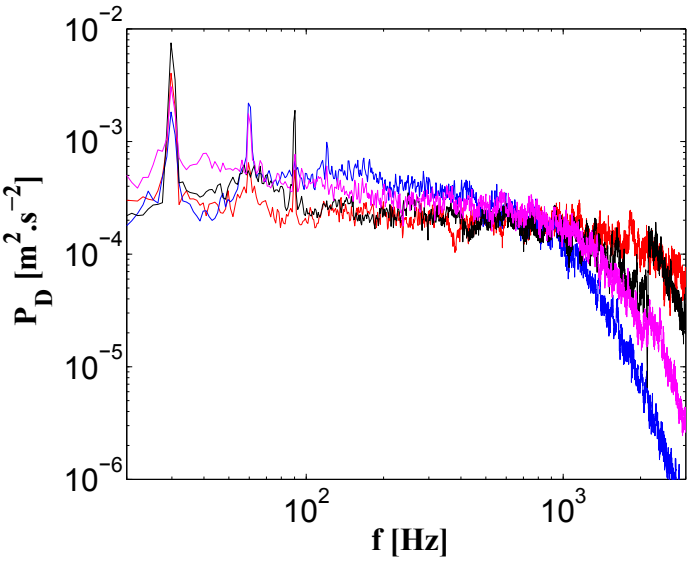


FIGURE 4.2 – Spectre de dissipation P_D en fonction de la fréquence. Rouge : $\gamma_* = 1$, $\epsilon_I = 0.56 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Noir : $\gamma_* = 1.6$, $\epsilon_I = 0.54 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Magenta : $\gamma_* = 3.1$, $\epsilon_I = 0.52 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Bleu : $\gamma_* = 4.9$, $\epsilon_I = 0.48 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}.

4.1.3 Profilométrie par transformée de Fourier

Nous cherchons à quantifier maintenant l'effet de l'amortissement sur la pente des spectres $P_v(k)$ mesurés par la méthode de profilométrie et reliés aux spectres $P_v(f)$ par la relation :

$$P_v(f)df \propto P_v(k)kdk. \tag{4.2}$$

D'après la relation de dispersion (1.34), $df = \kappa k dk$ et il vient $df/dk = \kappa k$ de telle sorte que :

$$P_v(f) \propto P_v(k). \tag{4.3}$$

La pente des spectres mesurés dans l'espace des nombres d'onde est donc théoriquement la même que celle des spectres mesurés précédemment en un point.

La vitesse transverse est mesurée à l'aide de la profilométrie par transformée de Fourier sur une fenêtre couvrant 0.84×0.84 m^2 de la plaque. La Figure 4.3(a) présente pour la configuration 2CP les spectres de puissance de la vitesse en fonction de la norme du vecteur d'onde. Les mesures sont réalisées à des puissances injectées plus faibles qu'au paragraphe précédent, de $\epsilon_I = 8.11 \times 10^{-5}$ m^3.s^{-3} à $\epsilon_I = 7.07 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}, et ce afin que l'intervalle résolu soit adapté à la taille de la cascade. La croissance de la fréquence de coupure avec la puissance injectée est vérifiée. Cependant, la mesure par vibromètre laser sera préférée pour étudier ce comportement car la résolution obtenue par la méthode de profilométrie est moins bonne. Pour $\epsilon_I > 1.9 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}, une loi de puissance peut être estimée. Le comportement observé en Figure 4.1 pour la configuration $2CP$ est tracé, ce qui permet de s'assurer de la concordance entre les deux méthodes.

La Figure 4.3(b) présente, pour des puissances injectées de l'ordre de celles utilisées pour la configuration 2CP, les spectres de puissance de la vitesse dans le cadre de la configuration BA. La pente observée dans ce cas en Figure 4.1 est également représentée. Un accroissement de la pente par rapport à la configuration précédente en accord avec la mesure en un point est observé. Malgré une résolution limitée, l'effet de l'amortissement sur les spectres est également notable dans la mesure par profilométrie, ce qui atteste de son importance.

4.2 Simulations numériques des équations de Föppl-von Kármán avec amortissement

Le code introduit par Düring *et al* dans [27] est employé pour simuler numériquement les équations de Föppl-von Kármán (1.12). Ce jeu d'équations couplées est résolu à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale qui prend avantage de la dynamique linéaire des ondes dans l'espace de Fourier. Le terme non linéaire de l'équation (1.12a) est calculé dans l'espace réel pendant que la partie linéaire est déterminée de façon exacte dans l'espace de Fourier. L'intégration temporelle est opérée dans ce même

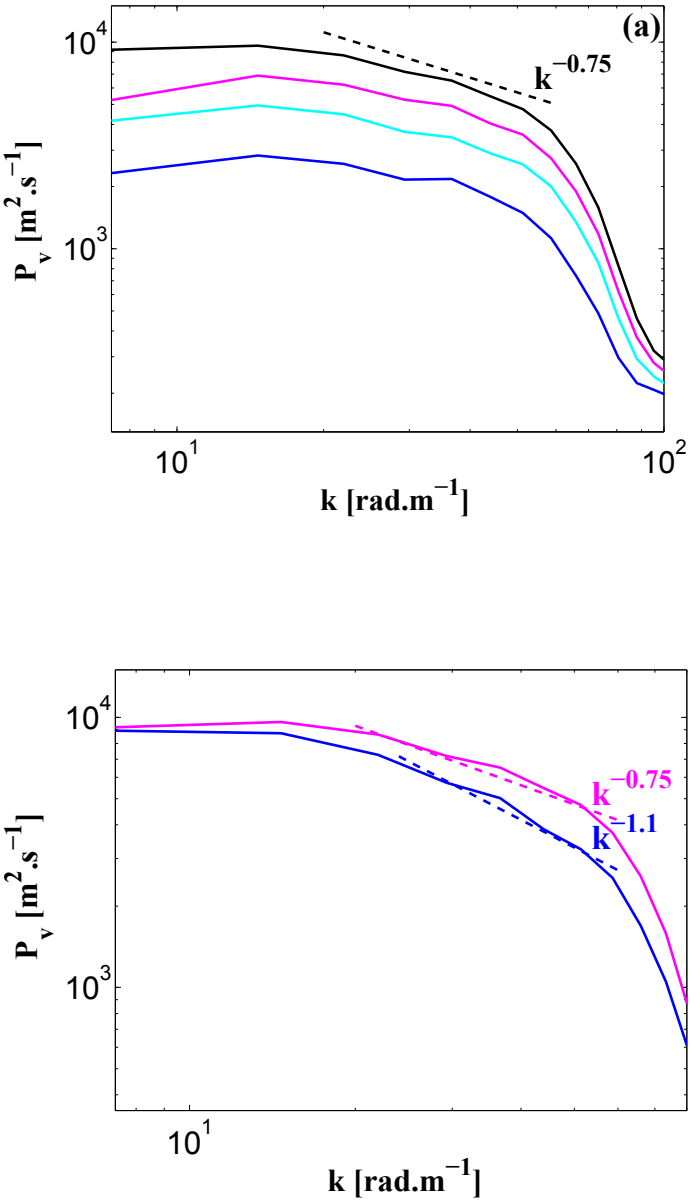


FIGURE 4.3 – Densité spectrale de puissance P_v en fonction de la norme k du vecteur d'onde pour différentes puissances injectées. (a) Configuration 2CP. Bleu : $\epsilon_I = 8.11 \times 10^{-5}$ m^3.s^{-3}, Cyan : $\epsilon_I = 1.9 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}, Magenta : $\epsilon_I = 3.63 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}, Noir : $\epsilon_I = 7.07 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. Ligne pointillée noire : $P_v \propto k^{-0.75}$. (b) Configuration BA. Bleu : $\epsilon_I = 8.40 \times 10^{-5}$ m^3.s^{-3}, Cyan : $\epsilon_I = 2.00 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}, Magenta : $\epsilon_I = 3.90 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}, Noir : $\epsilon_I = 6.78 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. Ligne pointillée noire : $P_v \propto k^{-1.1}$.

espace par un schéma de type Adams-Bashford d'ordre 2. Le terme non linéaire est interpolé comme une fonction du temps polynomiale d'ordre 1. L'énergie est conservée avec une erreur de l'ordre de 1/100. Bien qu'une méthode spectrale autorise plusieurs types de conditions aux limites, elle est souvent écrite pour des conditions aux limites périodiques et ces dernières fournissent un cadre naturel pour l'étude des caractéristiques de la turbulence d'ondes. Une méthode numérique par différences finies serait plus appropriée pour simuler des conditions aux limites réalistes [6, 25, 99, 101].

Afin de se rapprocher des conditions expérimentales, un terme de forçage et un terme d'amortissement sont introduits dans le code précédent. En présence de ces termes, les équations de Föppl-von Kármán (1.12) s'écrivent dans l'espace de Fourier sous la forme :

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3 k^4}{12(1-\nu^2)} \zeta_k + \{\chi, \zeta\}_k + f_k^i - \rho h \gamma_k^d \frac{\partial \zeta_k}{\partial t}, \tag{4.4a}$$

$$k^4 \chi_k = -\frac{Eh}{2} \{\zeta, \zeta\}_k. \tag{4.4b}$$

ζ_k dénote la transformée de Fourier du déplacement transverse ζ et χ_k celle de la fonction d'Airy χ. La dissipation est introduite sous la forme d'un amortissement visqueux par le terme $\rho h \gamma_k^d \frac{\partial \zeta_k}{\partial t}$ où γ_k^d est calculé à partir des valeurs du tableau 3.1. $\{\chi, \zeta\}_k$ et $\{\zeta, \zeta\}_k$ représentent les transformées de Fourier des termes non linéaires. L'adaptation du forçage mono fréquentiel expérimental est réalisé en choisissant un champ aléatoire f_k^i contenu entre 5 et 35 Hz.

La plaque simulée numériquement mesure 1×1 m^2, ses propriétés mécaniques sont équivalentes à la plaque expérimentale, et ses conditions aux limites sont périodiques. 128×128 modes spatiaux sont résolus, ce qui permet de prendre en compte d'un nombre d'échelles comparable à celui des régimes turbulents expérimentaux.

La Figure 4.4 présente, pour une même puissance injectée, les densités spectrales de puissance de la vitesse normale obtenues numériquement pour les quatre configurations expérimentales. Le spectre de type Kolmogorov-Zakharov obtenu pour une dissipation confinée aux petites échelles est également tracé, en vue de faire apparaître la correction logarithmique définie par l'équation (2.45b). Pour $\gamma^* = 1$, le spectre simulé possède une décroissance pouvant être assimilée à une loi de puissance $P_v \propto f^{-0.56}$ comparable au cas expérimental. Pour les trois autres configurations, l'augmentation de l'amortissement se traduit par un accroissement de la pente des spectres avec des exposants proches des observations expérimentales faites en section § 4.1. L'introduction du terme dissipatif issu des mesures dans les simulations numériques permet de passer du cadre théorique au cadre expérimental, du spectre prédit aux spectres mesurés.

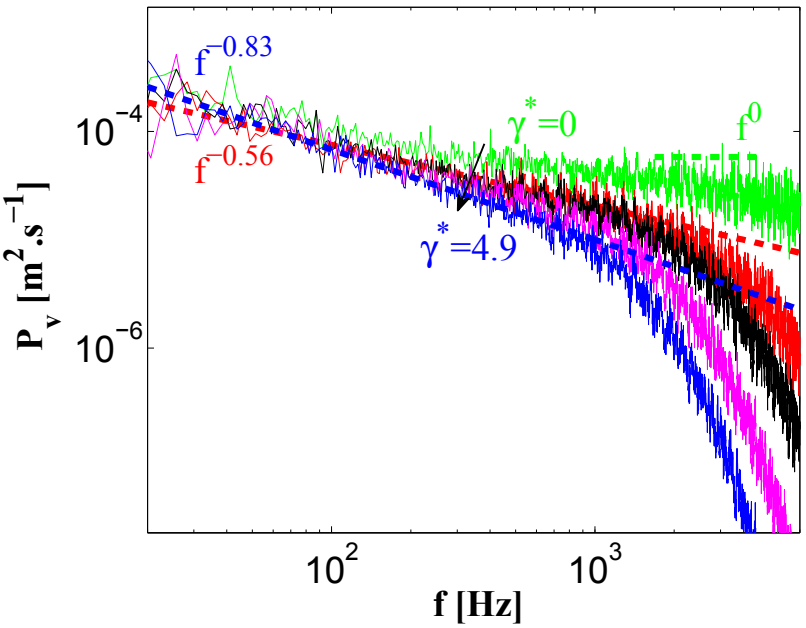


FIGURE 4.4 – Simulations numériques : densité spectrale de puissance de la vitesse transverse P_v en fonction de la fréquence. Vert : $\gamma^* = 0$, $\epsilon_I = 0.057 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Autres cas : $\epsilon_I = 0.024 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Rouge : $\gamma_* = 1$. Noir : $\gamma_* = 1.6$. Magenta $\gamma_* = 3.1$. Bleu : $\gamma_* = 4.9$. Ligne pointillée rouge + équation : $P_v \propto f^{-0.56}$. Ligne pointillée bleue + équation : $P_v \propto f^{-0.83}$. Ligne pointillée verte + équation : $P_v \propto f^0$.

4.3 Discussion

4.3.1 Relation entre amplitude spectrale, puissance injectée, et amortissement

Il a été montré dans [7] que les spectres peuvent être mis sur une même courbe $P_v(\frac{f}{f_c})/\sqrt{\epsilon_I}$ quand la puissance injectée varie, où f_c est la fréquence caractéristique ici définie par l'équation (3.2). Ce résultat est en contradiction avec la théorie de turbulence d'ondes qui, à partir des conditions de résonances à quatre ondes et de l'hypothèse d'une gamme inertielle, prédit un comportement de l'amplitude spectrale avec la puissance injectée de la forme $P_v(\frac{f}{f_c}) \propto \epsilon_I^{0.33}$. Dans un premier temps, il a été suggéré que cette différence puisse être attribuée à la prédominance, dans les conditions expérimentales, des interactions à trois ondes. Cependant, les simulations numériques menées par Ducceschi *et al* [25] et introduisant sur la plaque un défaut géométrique engendrant des interactions à trois ondes n'ont pas montré une influence notable de ces dernières dans la relation entre amplitude spectrale et puissance injectée.

La Figure 4.5 présente les deux mises à l'échelle classiques ($P_v(\frac{f}{f_c})/\epsilon^{0.33}$ à droite, $P_v(\frac{f}{f_c})/\epsilon^{0.5}$ à gauche) opérées ici sur nos données expérimentales et numériques. En ce qui concerne les expériences, la mise à l'échelle par la racine carrée de la puissance injectée offre un résultat de meilleure facture dans le cas $\gamma^* = 1$. Dans les autres configurations, la différence entre les deux mises à l'échelle est bien plus ténue. Pour les données numériques, les deux mises à l'échelle proposent de très bons résultats : la présence d'amortissement semble donc jouer un rôle dans la relation entre amplitude spectrale et puissance injectée. Nous nous proposons donc d'extraire les propriétés d'auto-similarité des spectres à partir du comportement de la fréquence caractéristique f_c. Ce travail a également été motivé par le fait que l'absence d'une gamme inertielle ne permet plus de justifier la relation $P_v(\frac{f}{f_c}) \propto \epsilon_I^{0.33}$.

L'interprétation physique de la fréquence caractéristique peut être clarifiée en faisant l'hypothèse que la cascade s'arrête quand l'énergie injectée aux grandes échelles a été entièrement dissipée par la totalité des modes excités [7, 68]. À partir de la définition de la puissance dissipée (3.16), l'approximation suivante peut alors être raisonnablement écrite :

$$\epsilon_D \simeq h \int_0^{f_c} \gamma(f) P_v(f) df. \tag{4.5}$$

En introduisant une forme générale pour le spectre de puissance $P_v(f) \propto \epsilon_I^{\lambda}(f/f_c)^{-\beta}$ où λ est indéterminé, le bilan d'énergie de la cascade devient :

$$\epsilon_D \propto \gamma^* f_c^{1.6} \epsilon_I^{\lambda}. \tag{4.6}$$

Il est important de noter que cette relation ne dépend pas de la pente β du spectre. Pour finir, comme ϵ_I est proportionnel à ϵ_D (voir Figure 3.17), l'expression suivante

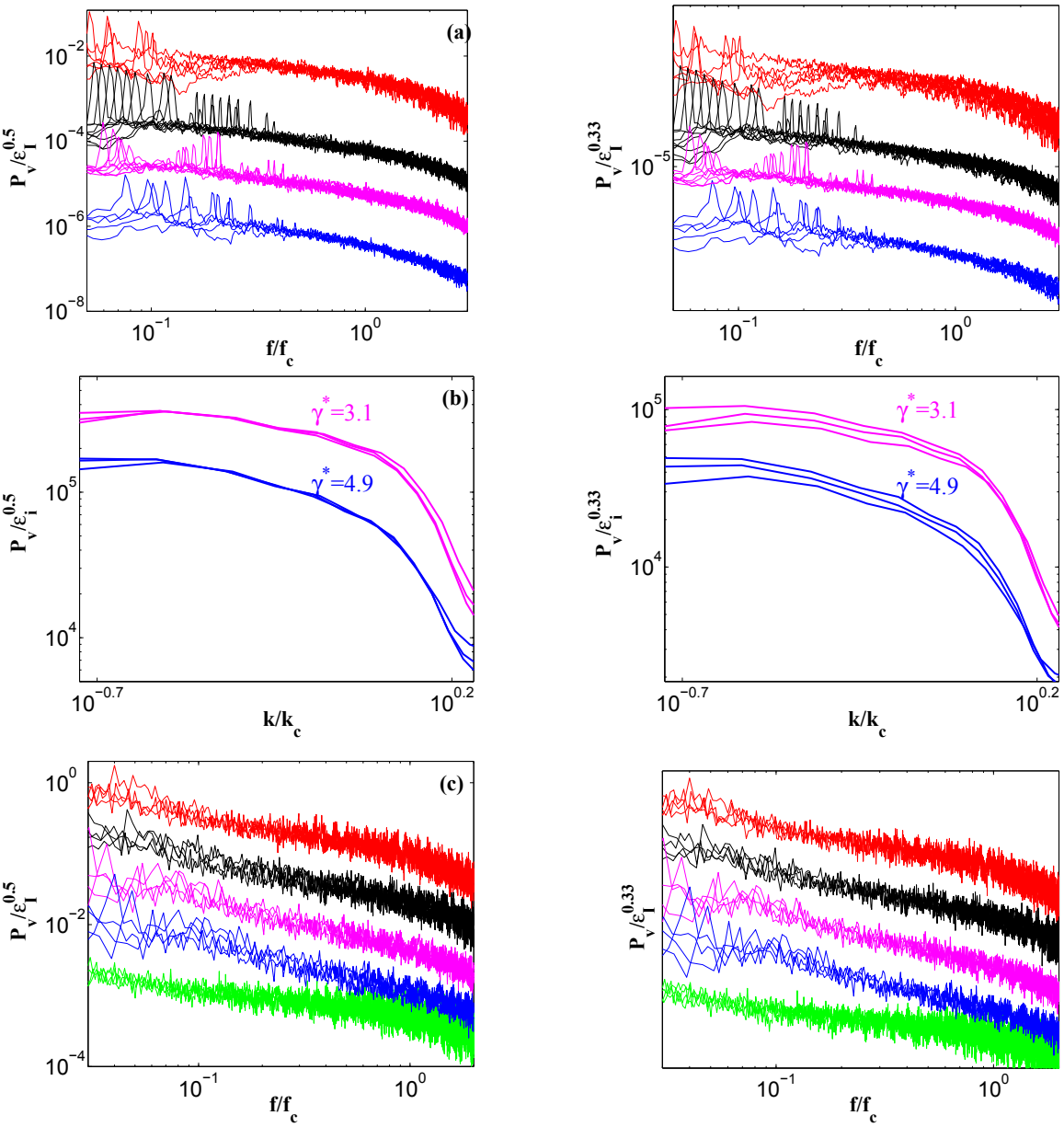


FIGURE 4.5 – Densité spectrale de puissance de la vitesse transverse P_v en fonction de la fréquence adimensionnée f/f_c ou du nombre d'onde adimensionné k/k_c pour plusieurs puissances injectées. Les courbes sont regroupées par γ^* et décalés des autres par souci de lisibilité. Gauche : les densités spectrales de puissance sont normalisées par la racine carrée de la puissance injectée ϵ_I. Droite : les densités spectrales de puissance sont normalisées par $\epsilon_I^{0.33}$. Rouge : $\gamma^* = 1$. Noir : $\gamma^* = 1.6$. Magenta $\gamma_* = 3.1$. Bleu : $\gamma_* = 4.9$. (a) Mesures par vibromètre laser en un point. 4.724×10^{-6} m^3.s^{-3} $\leq \epsilon_I \leq 9.10 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. (b) Profilométrie par transformée de Fourier. 1.90×10^{-4} m^3.s^{-3} $\leq \epsilon_I \leq 7.07 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. (c) Simulations numériques. 1.63×10^{-4} m^3.s^{-3} $\leq \epsilon_I \leq 7.29 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}.

Configuration	N	$1CP$	$2CP$	BA	$\gamma^* = 0$
$\frac{1-\lambda}{1.6}$ (Exp.)	0.27	0.30	0.32	0.40	/
λ (Exp.)	0.57	0.52	0.49	0.36	/
$\frac{1-\lambda}{1.6}$ (Num.)	0.39	0.34	0.34	0.38	0.42
λ (Num.)	0.38	0.46	0.46	0.39	0.33

TABLE 4.1 – Pour chaque configuration, puissance $(1-\lambda)/1.6$ associée aux interpolations des lois d'échelles de la Figure 4.6 et paramètre de normalisation des amplitudes spectrales λ.

permet de relier la fréquence caractéristique à la puissance injectée :

$$\gamma^{*^{1/1.6}} f_c \propto \epsilon_I^{\frac{1-\lambda}{1.6}}. \tag{4.7}$$

La Figure 4.6 présente la quantité $f_c \gamma^{*^{1/1.6}}$ en fonction de la puissance injectée pour les quatre configurations. La différence d'amplitude entre les séries expérimentales et numériques s'explique par le rapport dans les expériences entre ϵ_I et ϵ_D donné par l'équation (3.17) : l'inégalité entre les deux puissances translate de façon systématique les données expérimentales. En interpolant les données de chaque configuration par des lois de puissance, la puissance λ qui détermine la mise à l'échelle entre amplitude spectrale et puissance injectée est obtenue. Le Tableau 4.1 présente les résultats de ces interpolations pour chaque configuration. Avec l'amortissement, la puissance λ varie de 0.36 à 0.57 pour les expériences et de 0.33 à 0.39 pour les simulations. λ évolue donc entre 1/3 et 1/2, les deux valeurs usuellement recherchées pour la turbulence d'ondes de plaques minces. La Figure 4.7 présente finalement la mise à l'échelle des spectres P_v par ϵ_I^λ. Aussi bien expérimentalement que numériquement, et ce pour toutes les configurations, la mise à l'échelle des différentes courbes est satisfaisante, suggérant que la dépendance des spectres sur la puissance injectée s'explique peut être mieux par la présence de l'amortissement que par le type d'interaction résonnante mis en jeu. La mise à l'échelle proposée par la relation (4.7) nous semble donc la plus à même de décrire le comportement entre amplitude spectrale et puissance injectée.

4.3.2 Au sujet du caractère turbulent du régime vibratoire

Les différents résultats jusqu'ici présentés montrent que le processus de cascade avec transport d'un flux d'énergie constant n'a pas lieu dans le cadre expérimental de la turbulence d'ondes de flexion. Au contraire, le flux d'énergie décroit lors du transfert d'énergie vers les petites échelles, définissant aussi bien la pente que la fréquence caractéristique comme des fonctions de l'amortissement. Il est cependant important de noter que le système se comporte tout de même de façon *turbulente*, avec un processus de cascade qui se termine quand tous les modes excités ont dissipé l'énergie fournie.

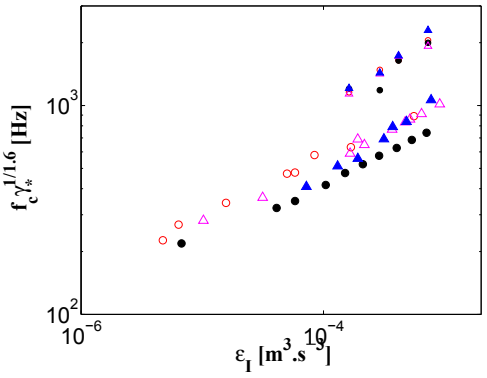


FIGURE 4.6 – Test de la loi d'échelle pour le bilan d'énergie de la cascade donnée par l'équation (4.7). Gros symboles : expériences en un point. Petits symboles : simulations. Rouge : $\gamma^* = 1$. Noir : $\gamma^* = 1.6$. Magenta : $\gamma^* = 3.1$. Bleu : $\gamma^* = 4.9$.

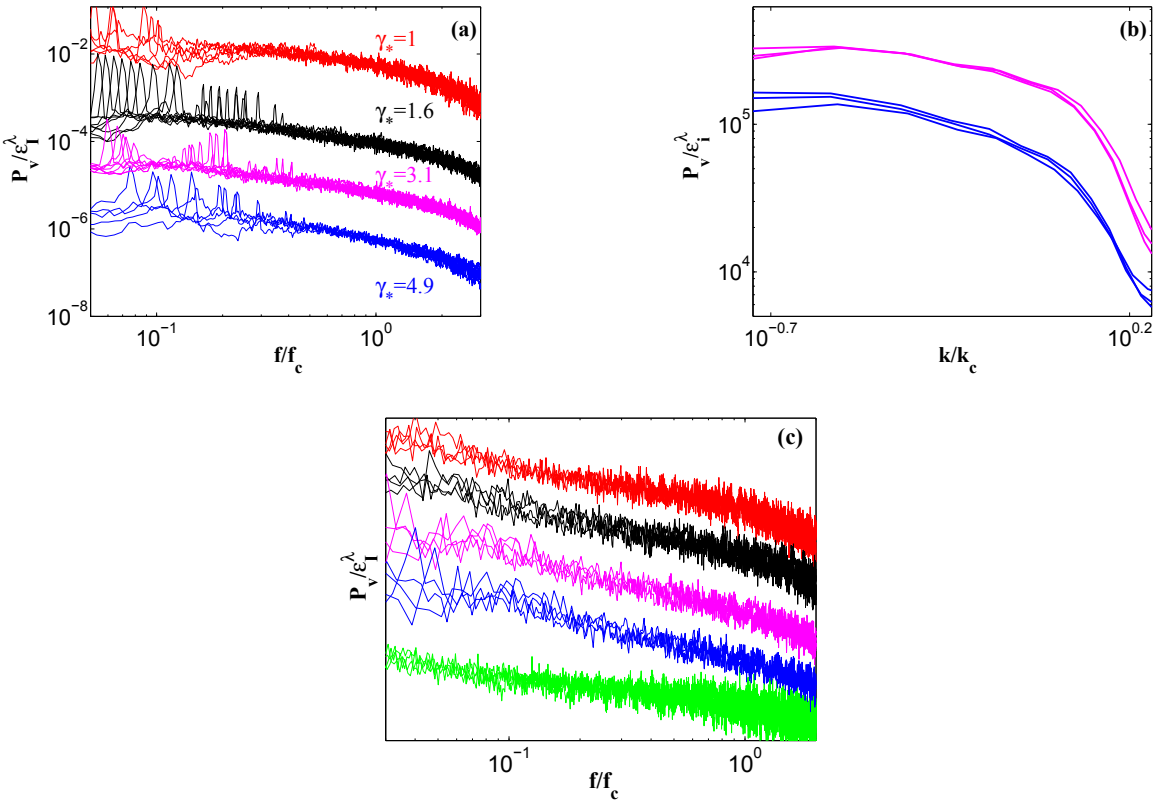


FIGURE 4.7 – Densité spectrale de puissance de la vitesse transverse P_v en fonction de la fréquence adimensionnée f/f_c ou du nombre d'onde adimensionné k/k_c pour plusieurs puissances injectées égales à celles de la Figure 4.5. Les densités spectrales de puissance sont normalisées par ϵ_I^λ où la puissance λ est donnée pour chaque configuration par le tableau 4.1. Rouge : $\gamma^* = 1$. Noir : $\gamma^* = 1.6$. Magenta $\gamma_* = 3.1$. Bleu : $\gamma_* = 4.9$. Vert : $\gamma^* = 0$. (a) Mesures par vibromètre laser en un point. (b) Profilométrie par transformée de Fourier. (c) Simulations numériques.

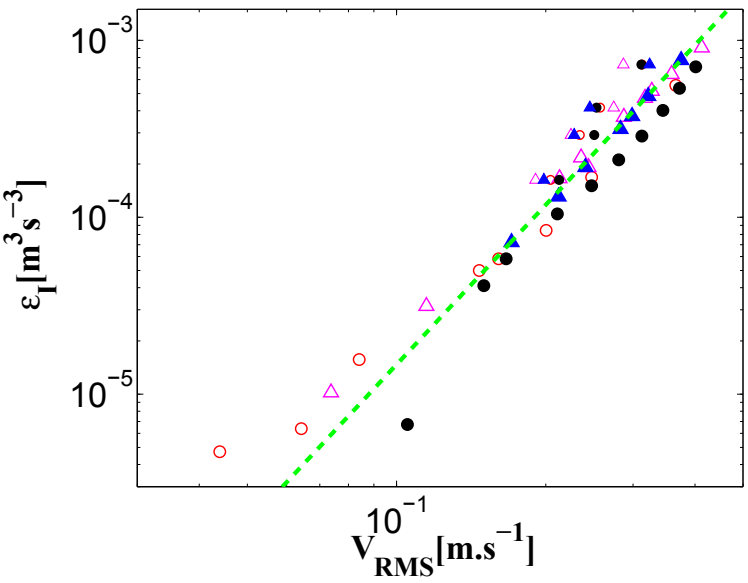


FIGURE 4.8 – Evolution de la puissance injectée ϵ_I en fonction de la racine carrée de la vitesse mesurée à l'injection V_{RMS}. Gros symboles : expériences. Petits symboles : simulations. Rouge : $\gamma^* = 1$. Noir : $\gamma^* = 1.6$. Magenta $\gamma_* = 3.1$. Bleu : $\gamma_* = 4.9$. Vert : $\gamma^* = 0$. Ligne verte pointillée : $\epsilon_I \propto V_{RMS}^3$.

En hydrodynamique, le caractère turbulent se traduit expérimentalement par la relation entre la puissance injectée et la vitesse d'injection. Cette dernière dépend uniquement de la puissance injectée et une relation universelle peut être observée :

$$\epsilon_I \propto V_{RMS}^3. \tag{4.8}$$

Le mécanisme d'injection est inertiel : il ne dépend pas de la viscosité [11].

Expérimentalement, la vitesse d'injection est caractérisée par la valeur RMS de la vitesse mesurée directement sur le pot vibrant. Numériquement, la vitesse d'injection est obtenue en prenant la racine carrée de l'intégrale du spectre d'énergie P_v calculée sur les échelles d'injection. La Figure 4.8 présente pour chaque configuration l'évolution de la puissance injectée en fonction de la vitesse d'injection V_{RMS}. La loi de puissance $\epsilon_I \propto V_{RMS}^3$ est tracée : elle est bien suivie pour des puissances supérieures à $\epsilon_I = 3 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-3}. Le mécanisme d'injection est donc inertiel, ce qui permet de confirmer le caractère turbulent de la dynamique d'une plaque mince pour une aplitude de forçage importante. Une déviation des données expérimentales par rapport à la loi de puissance $\epsilon_I \propto V_{RMS}^3$ est observable sur les premiers point de la Figure 4.8 : à faible puissance injectée, le régime vibratoire est dominé par les premiers modes de la plaque et ne suit pas encore une dynamique *parfaitement* turbulente.

4.3.3 Conclusion intermédiaire

L'effet de l'amortissement sur le comportement turbulent des plaques vibrantes a été étudié à la fois expérimentalement et numériquement. Les spectres d'énergie présentent des comportements proches de lois de puissance dont les exposants diminuent quand l'amortissement grandit. La présence d'un régime turbulent dans lequel un processus de cascade est mis en jeu n'est pas discutable. Cependant, notre analyse souligne qu'une comparaison directe entre la pente des spectres expérimentaux et celle des spectres théoriques n'est pas appropriée. En particulier, nous avons montré que le flux d'énergie n'est pas constant le long de la cascade car la dissipation est influente à toutes les échelles. Un tel mécanisme n'est pour le moment par pris en compte par la théorie de turbulence d'ondes et un cadre théorique plus proche du cadre expérimental est alors nécessaire.

Notons ici qu'en introduisant dans un code pseudo-spectral différent du notre une dissipation mesurée expérimentalement, Benjamin Miquel a pu tirer des conclusions similaires [63] : la pente des spectres et la relation entre amplitude spectrale et puissance injectée dépend fortement de l'amortissement.

Chapitre 5

Modèle phénoménologique

Ce chapitre introduit un modèle phénoménologique capable de décrire les caractéristiques principales du régime turbulent d'une plaque mince. L'équation modèle est introduite au § 5.1.2 et le schéma numérique développé pour déterminer ses solutions est présenté dans le § 5.1.3. La validité de notre modèle dans le cadre théorique de la turbulence d'ondes où l'énergie est injectée aux basses fréquences et dissipée aux hautes fréquences est alors montrée au § 5.1.4.
La section 5.2 s'intéresse à la dynamique instationnaire de la turbulence d'ondes de flexion dans deux cas :
- *une turbulence forcée aux basses fréquences à l'aide d'un flux constant,*
- *une turbulence libre où est considérée, en l'absence de forçage et de dissipation, la diffusion en échelles d'une quantité d'énergie initialement fixée.*

Finalement, les lois d'amortissement mesurées pour les quatre configurations expérimentales présentées au chapitre 3 sont introduites dans le modèle phénoménologique au § 5.3.2. En simulant numériquement les quatre régimes stationnaires obtenus pour une même puissance injectée, les observations opérées au chapitre 4 sont retrouvées et une explication simple de la relation entre la forme des spectres et l'amortissement est fournie. Le § 5.3.3 propose, par un calcul du bilan d'énergie de la cascade, des prédictions du comportement de la fréquence caractéristique des spectres en fonction de l'amortissement et de la puissance injectée.

5.1 Présentation du modèle

5.1.1 Introduction

Le chapitre précédent a montré que l'absence d'une gamme inertielle était à l'origine des différences observées entre les prédictions théoriques de la turbulence d'ondes de flexion et les résultats expérimentaux.

La prise en compte de la dissipation au sein du cadre théorique de la turbulence d'ondes reste une question ouverte. L'injection et la dissipation sont en effet vus comme des conditions aux limites imposées dans l'espace des nombres d'onde à une fenêtre de transparence au sein de laquelle la dynamique est supposée hamiltonienne. Introduire une dissipation faible dans les développements asymptotiques de la turbulence d'ondes menant à l'équation cinétique reste alors théoriquement possible [72] mais techniquement difficile à cause de la complexité des calculs analytiques.

Un regard sensiblement différent peut alors être posé sur la dynamique turbulente des plaques minces afin de travailler dans un cadre où la dissipation peut être introduite plus simplement. Des modèles phénoménologiques inspirés du modèle de Leith ont déjà été utilisés dans le cadre de la turbulence forte [20, 39] ainsi que dans celui de la turbulence d'ondes pour étudier la dynamique instationnaire de celle-ci en considérant un cas général d'interactions à quatre ondes [22, 32]. Pour cela, une analyse dimensionnelle de l'équation cinétique est mise en œuvre afin d'écrire une équation non linéaire aux dérivées partielles décrivant l'évolution du spectre d'onde. Cette équation phénoménologique, plus simple que l'équation cinétique, doit admettre les même solutions stationnaires que cette dernière.

Dans ce cadre, un amortissement couvrant toutes les fréquences peut être introduit : la théorie de turbulence d'ondes peut alors être appliquée au cadre expérimental des plaques minces en vibration.

5.1.2 Équation modèle

Pour les plaques minces, les solutions stationnaire de l'équation cinétique sont [27] :

- Le spectre de Rayleigh-Jeans (RJ), qui décrit l'équipartition de l'énergie entre chaque mode. Le spectre de l'énergie E_ω, écrit ici en fonction de la pulsation ω, vérifie donc la condition :
$$\partial_\omega E_\omega = 0. \tag{5.1}$$
- Le spectre de Kolmogorov-Zakharov (KZ), qui décrit la cascade d'un flux d'énergie constant ε le long d'une gamme inertielle séparant les échelles d'injection des échelles de dissipation. Ces dernières sont identifiées par une fréquence caractéristique ω_c qui permet de repérer la coupure du spectre. Dans ce cadre théorique idéal, le spectre d'énergie prend la forme suivante [27] :
$$E_\omega \propto \varepsilon^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right). \tag{5.2}$$

En dérivant l'équation (5.2) par rapport à ω, il vient

$$\partial_\omega E_\omega \propto -\frac{\varepsilon^{1/3}}{\omega^2}\log^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \tag{5.3}$$

et la quantité $\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega$ apparaît donc comme étant égale à une constante. En dérivant une nouvelle fois par rapport à ω, il vient donc :

$$\partial_\omega(\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega) = 0. \tag{5.4}$$

D'après les équations (5.1) et (5.4), les quantités $\partial_\omega E_\omega$ et $\partial_\omega(\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega)$ représentant les deux solutions stationnaires de l'équation cinétique sont aussi des solutions stationnaires de l'équation modèle suivante :

$$\partial_t E_\omega = \partial_\omega(\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega). \tag{5.5}$$

Cette équation de diffusion non linéaire du second ordre peut être vue comme une équation de conservation de l'énergie dont le flux associé est :

$$\varepsilon = -\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega. \tag{5.6}$$

Bien que l'établissement de l'équation phénoménologique ne soit pas directement possible à partir de l'équation cinétique, une justification de ce type d'équations dans le cadre de la turbulence d'ondes a été fourni par *Zakharov et al.* dans [115] à l'aide d'une approximation locale de l'équation cinétique.

5.1.3 Schéma numérique

L'équation (5.5) peut être résolue numériquement à l'aide d'une méthode des volumes finis. Alors que les éléments finis sont employés pour assurer la conservation de l'énergie puisque dérivant conceptuellement d'une formulation faible de l'équation de conservation, les volumes finis sont utilisés quand la conservation d'un flux est primordiale : l'espace est discrétisé en volumes, le flux entrant dans l'un d'eux étant donné égal aux flux sortant des volumes adjacents. L'équation (5.5) décrit la conservation d'un flux qui apparaît explicitement, une telle méthode est donc particulièrement bien adaptée.

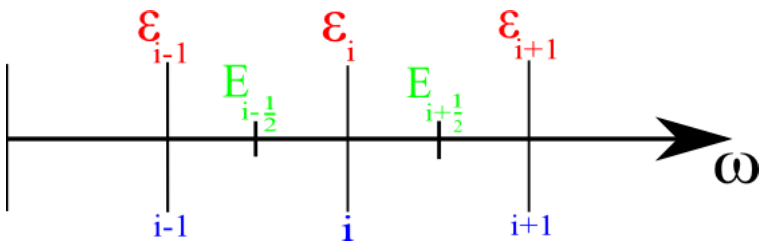


FIGURE 5.1 – Schéma numérique : le flux ε est défini à l'entrée de chacun des intervalles discrétisant l'axe ω. L'énergie E_ω est calculée au centre de chaque segment.

L'espace est ici composé d'une unique dimension ω, il est donc discrétisé par des segments de longueur $d\omega$ repérés par l'indice i. Le flux est calculé aux extrémités de chaque intervalle tandis que l'énergie E_ω est définie au milieu de chaque segment (voir Figure 5.1). On note à présent E_i^k la valeur de $E_\omega(t)$ au pas de temps k et au pas d'espace i. En connaissance de l'énergie au pas de temps $k-1$, le flux et l'énergie sont déterminés de la façon suivante pour le pas de temps k :

– Le calcul du flux nécessite, d'après son expression (5.6), d'estimer la dérivée de l'énergie, ainsi que la valeur prise par E_i^{k-1}. Cette dernière est obtenue par le calcul de la moyenne

$$E_i^{k-1} = \frac{E_{i+\frac{1}{2}}^{k-1} + E_{i-\frac{1}{2}}^{k-1}}{2}. \tag{5.7}$$

La dérivée est quant à elle estimée à l'aide d'un opérateur discret décentré et le flux en i s'écrit alors :

$$\varepsilon_i^k = -\omega E_i^{k-1} E_i^{k-1} \frac{E_{i+\frac{1}{2}}^{k-1} - E_{i-\frac{1}{2}}^{k-1}}{d\omega}. \tag{5.8}$$

Cette expression est valable dans l'intervalle $i = [2 \;\; N]$. Pour la turbulence forcée, la valeur de ε en $\omega = i = 1$ est une constante qui détermine le flux cascadant de façon conservative dans la direction ω. Pour la turbulence libre, cette valeur est fixée à 0 afin d'assurer un flux nul en $\omega = 1$.

– La valeur du spectre d'énergie est finalement calculée par une différence discrète du premier ordre :

$$E_{i+\frac{1}{2}}^k = E_{i+\frac{1}{2}}^{k-1} + \frac{\varepsilon_i^k - \varepsilon_{i+1}^k}{d\omega} dt. \tag{5.9}$$

5.1.4 Turbulence forcée : dynamique stationnaire

Notre modèle est premièrement placé dans le cadre théorique de la turbulence d'ondes où l'énergie est injectée aux basses fréquences et dissipée aux hautes fréquences. Une valeur constante ε_I est appliquée au cours du temps au flux ε en $\omega = 0$. Un intervalle $\omega = [0\,,\, 2047]$ est discrétisé avec un incrément $d\omega = 1$ et le pas de temps vaut $dt = 10^{-3}$. La première valeur du spectre de l'énergie est donc calculée en $\omega = 0.5$. Un amortissement de grande amplitude est introduit pour les pulsations supérieures à $\omega = 1024$ de telle sorte que quand la cascade atteint cette échelle, le système devient rapidement stationnaire. L'introduction de l'amortissement nécessite d'écrire l'équation phénoménologique (5.5) sous sa forme non conservative :

$$\partial_t E_\omega = \partial_\omega(\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega) - \hat{\gamma} E_\omega. \tag{5.10}$$

L'étape (5.9) devient alors :

$$E_{i+\frac{1}{2}}^k = E_{i+\frac{1}{2}}^{k-1} + \frac{\varepsilon_i^k - \varepsilon_{i+1}^k}{d\omega} dt - \hat{\gamma}_i E_{i+\frac{1}{2}}^{k-1} dt. \tag{5.11}$$

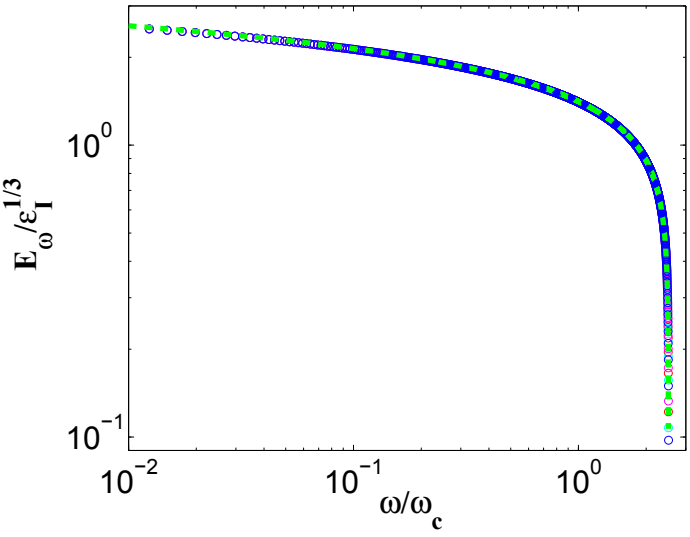


FIGURE 5.2 – Spectre de l'énergie E_ω normalisé par $\varepsilon_I^{1/3}$ en fonction de la pulsation normalisée ω/ω_c pour plusieurs flux $\varepsilon_I = 0.5, 1, 2, 5$ imposés en $\omega = 0$. Ligne verte pointillée : spectre de Kolmogorov-Zakharov (5.2).

L'équation (5.10) sera commentée en détails au § 5.3.2. Pour le moment, $\hat{\gamma}$ est nul jusqu'à $\omega = 10^3$. Aux abords de cette pulsation, une gaussienne est introduite afin de modéliser un important puits d'énergie. La coupure des spectres est évaluée à l'aide d'une pulsation caractéristique ω_c définie par :

$$\omega_c = \frac{\int_{0.5}^{\infty} E_\omega \omega \mathrm{d}\omega}{\int_{0.5}^{\infty} E_\omega \mathrm{d}\omega}. \tag{5.12}$$

La Figure 5.2 présente en fonction de la pulsation normalisée ω/ω_c les spectres stationnaires E_ω obtenus pour des flux $\varepsilon_I = 0.5$, 1, 2, 5. L'amplitude des spectres est normalisée par $\varepsilon_I^{1/3}$. La validité du comportement théorique prédit par la turbulence d'ondes appliquée aux plaques minces apparaît clairement : $E_\omega(\omega/\omega_c) \propto \varepsilon^{1/3}$. De même, un accord parfait est ici observé entre les spectres normalisés et la solution stationnaire hors-équilibre KZ. Le comportement dynamique d'une plaque mince vu par le spectre de la turbulence d'ondes est donc correctement décrit par l'équation phénoménologique (5.5) dans le régime stationnaire.

Il est important de noter que la pulsation caractéristique ne correspond pas à la plus petite échelle atteinte par E_ω mais elle donne un bon moyen de repérer à quel moment (dans la direction ω) le processus de coupure est mis en jeu. Dans le cas du modèle phénoménologique, ce dernier provient d'une singularité propre à l'équation et provoque une coupure très raide.

5.2 Solutions instationnaires

5.2.1 Solutions auto-similaires de l'équation cinétique

Afin détudier la dynamique instationnaire du régimue turbulent d'une plaque mince, les solutions auto-similaires de l'équation cinétique sont premièrement recherchées en appliquant la méthode générale proposée par *Zakharov et al.* dans [115] et déjà appliquée au cas des plaques par *Ducceschi et al.* dans [25].

L'équation cinétique calculée par *Düring et al* dans [27] et déjà présentée au § 2.2.1 est ici rappelée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{\mathbf{p}_1}}{\partial t} &= 12\pi \int |J_{\mathbf{p}_1\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 n_{\mathbf{p}_1} n_{\mathbf{k_1}} n_{\mathbf{k_2}} n_{\mathbf{k_3}} \\ &\times \left(\frac{1}{n_{\mathbf{p}_1}} + \frac{s_1}{n_{\mathbf{k_1}}} + \frac{s_2}{n_{\mathbf{k_2}}} + \frac{s_3}{n_{\mathbf{k_3}}}\right) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_1 + s_1\mathbf{k_1} + s_2\mathbf{k_2} + s_3\mathbf{k_3}) \\ &\times \delta(\omega_{\mathbf{k}} + s_1\omega_{\mathbf{k}_1} + s_2\omega_{\mathbf{k}_2} + s_3\omega_{\mathbf{k}_3}) d^2\mathbf{k}_{123}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Les solutions auto-similaires de cette équation sont recherchées sous la forme $n_{\mathbf{k}} = t^{\alpha} f(kt^{-\beta}) \equiv t^{\alpha} f(\xi)$. Il vient en utilisant les propriées d'homogénéité de J

$$-t^{\alpha-1}\left[-\alpha f(\xi) + \beta\xi f'(\xi)\right] = I(\xi) t^{3\alpha+2\beta} \tag{5.14}$$

où $I(\xi)$ correspond à l'intégrale de collision (membre de droite de l'équation (5.13)) écrit en fonction de la variable autosimilaire ξ. Les réels α et β vérifient alors la relation :

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2}. \tag{5.15}$$

Une seconde relation est déterminée dans deux cas :

- La turbulence forcée, où le régime turbulent est engendré par un forçage aux grandes échelles à l'aide d'un flux d'énergie constant. L'énergie totale du système $\mathcal{E}$ croît linéairement et il vient

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} k^2 n_{\mathbf{k}} dk = \int_0^{+\infty} t^{4\beta+\alpha} f(\xi) d\xi = At \tag{5.16}$$

  où A est une constante. La seconde relation est donc $4\beta + \alpha = 1$ de telle sorte que :

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 1/2. \tag{5.17}$$

- La turbulence libre, où est considérée la propagation d'une condition initiale d'énergie K, en l'absence de forçage et de dissipation. Dans ce cas, l'énergie totale reste constante :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} k^2 n_{\mathbf{k}} dk = K \tag{5.18}$$

La seconde relation est donc $4\beta + \alpha = 0$ de telle sorte que :

$$\alpha = -2/3, \qquad \beta = 1/6. \tag{5.19}$$

En utilisant le changement de variable tiré de la relation de dispersion $\omega \propto k^2$, les solutions auto-similaires peuvent être écrites pour E_ω grâce à la relation $E_\omega = \omega n_\omega \propto k^2 n_{\mathbf{k}}$. Les solutions auto-similaires de l'équation cinétique prennent alors la forme :

$$E_\omega \sim \frac{k^2}{t} f\left(\frac{k}{\sqrt{t}}\right) = g\left(\frac{\omega}{t}\right), \tag{5.20a}$$

$$E_\omega \sim \frac{k^2}{t^{2/3}} f\left(\frac{k}{t^{1/6}}\right) = t^{-1/3} h\left(\frac{\omega}{t^{1/3}}\right). \tag{5.20b}$$

Dans le cas de la turbulence forcée, le front de cascade avance donc linéairement avec le temps. Dans le cas de la turbulence libre, l'amplitude spectrale décroit comme une fonction de $t^{-1/3}$ tandis que la cascade croît en terme de fréquences en $t^{1/3}$. Ces comportements correspondent très bien à ceux observés par *Ducceschi et al.* dans [25] à l'aide d'une simulation par différences finies des équations de Föppl-von Kármán.

5.2.2 Solutions auto-similaires de l'équation phénoménologique

Les solutions auto-similaires de l'équation (5.5) sont recherchées sous la forme

$$E_\omega = t^\alpha g(\frac{\omega}{t^\beta}) \equiv t^\alpha g(\eta). \tag{5.21}$$

En insérant la forme (5.21) dans l'équation (5.5), la relation suivante entre α et β est trouvée :

$$2\alpha = \beta - 1. \tag{5.22}$$

Turbulence forcée

En réécrivant l'égalité (5.16) en fonction de E_ω,

$$\int_0^{+\infty} E_\omega d\omega = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta} g(\eta) d\eta = At, \tag{5.23}$$

une seconde relation entre les inconnues α et β est trouvée :

$$\alpha + \beta = 1. \tag{5.24}$$

Il vient $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, les solutions auto-similaires sont donc nécessairement de la forme :

$$E_\omega = g(\frac{\omega}{t}) \equiv g(\eta). \tag{5.25}$$

La pulsation caractéristique des solutions auto-similaires de l'équation (5.5) croît donc linéairement avec le temps dans le cadre de la turbulence forcée, conformément à la solution (5.20a).

Turbulence libre

En réécrivant l'égalité (5.18) en termes de $E_\omega = t^\alpha h(\omega t^{-\beta}) = t^\alpha h(\nu)$, il vient :

$$\int_0^{+\infty} E_\omega d\omega = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta} h(\nu) d\nu = K. \tag{5.26}$$

La seconde relation (5.24) entre les inconnues α et β prend alors la forme

$$\alpha = -\beta, \tag{5.27}$$

de telle sorte que $\alpha = -1/3$ et $\beta = 1/3$. La solution auto-similaire est donc :

$$E_\omega = t^{-1/3} h(\frac{\omega}{t^{1/3}}) \equiv t^{-1/3} h(\nu). \tag{5.28}$$

La solution auto-similaire de l'équation cinétique (5.20b) dans le cadre de la turbulence libre est bien retrouvée. Dans les deux cas ici étudiés, il est donc montré par analyse dimensionnelle que l'équation phénoménologique semble capturer la dynamique instationnaire inhérente à l'équation cinétique. Le schéma numérique décrit au § 5.1.3 est désormais utilisé pour calculer numériquement les solutions auto-similaires.

5.2.3 Simulations numériques

Turbulence forcée

La dynamique instationnaire dans le cadre de la turbulence forcée est simulée numériquement en utilisant les mêmes paramètres qu'au § 5.1.4. La dissipation introduite aux hautes fréquences pour modéliser un puits d'énergie est ici supprimée afin de restaurer le cadre conservatif.

La Figure 5.3 présente dans ce cadre le spectre d'énergie à différents temps. Une croissance de la cascade en direction des hautes fréquences est observée. La figure insérée montre que la pulsation caractéristique ω_c évolue linéairement avec le temps. Le comportement (5.20a) calculé à partir de l'équation cinétique dans le cadre de la turbulence forcée est donc bien retrouvé.

La Figure 5.3 permet d'obtenir, en normalisant la pulsation des spectres par ω_c, une estimation de la fonction d'auto-similarité g de l'équation (5.5) pour la turbulence forcée. Celle-ci est présentée en bleu dans la Figure 5.4. Une autre manière de calculer numériquement cette solution consiste à injecter la forme (5.25) dans l'équation phénoménologique (5.5). L'équation régissant l'évolution de la fonction d'auto-similarité g_η est alors obtenue,

$$-\eta g'_\eta = (\eta g_\eta^2 g'_\eta)'. \tag{5.29}$$

Cette équation est résolue en utilisant l'algorithme *ode45* de *Matlab* qui applique une variante de la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 pour un pas de temps variable [93].

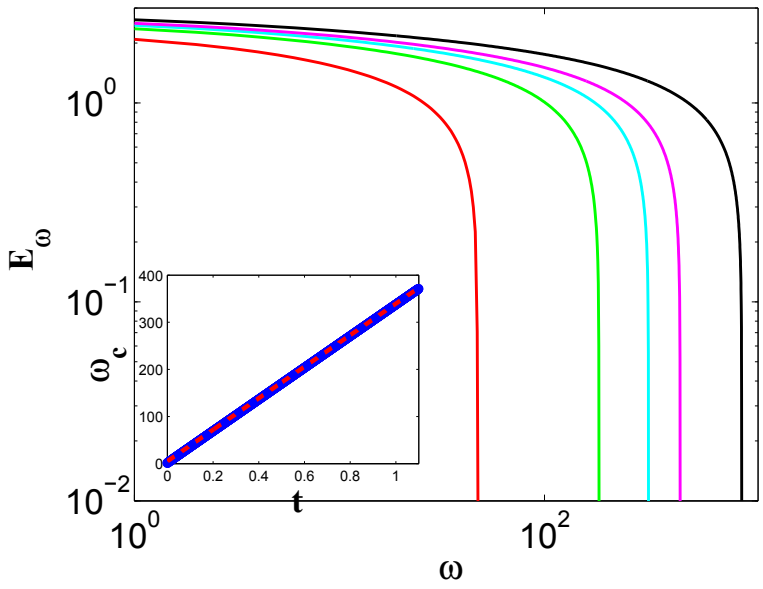


FIGURE 5.3 – Spectre de l'énergie E_ω en fonction de la pulsation ω pour des temps croissants de gauche à droite. Rouge : $t = 0.05$ s. Vert : $t = 0.2$ s. Cyan : $t = 0.35$ s. Magenta : $t = 0.5$ s. Noir : $t = 1$ s. $\varepsilon_I = 1$. Figure insérée : fréquence caractéristique ω_c en fonction du temps. Ligne rouge pointillée : $\omega_c \propto t$.

Dans ce but, l'équation (5.29) est réécrite au premier ordre :

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g_\eta^2} - \frac{1}{\eta} - \frac{g'_\eta}{g_\eta} \end{pmatrix} Y \qquad \text{avec} \qquad Y = \begin{bmatrix} g_\eta \\ g'_\eta \end{bmatrix} \text{ et } Y' = \begin{bmatrix} g'_\eta \\ g''_\eta \end{bmatrix}. \tag{5.30}$$

Le problème aux valeurs initiales consiste alors en $\eta = 0.01$ à choisir deux valeurs qui détermineront le flux traversant la cascade : $g_\eta(\eta = 0.01)$ et $g'_\eta(\eta = 0.01)$. L'équation est alors résolue jusqu'à ce que la singularité de l'équation phénoménologique entraîne la coupure de la cascade.

La Figure 5.4 présente cette nouvelle fonction et celle déduite de la Figure 5.3 en les comparant à la fonction obtenue par Ducceschi *et al.* dans [25]. Les valeurs initiales du problème (5.30) ont été déterminées pour que le flux cascadant dans la solution de l'équation (5.29) soit le même que celui injecté directement dans le modèle phénoménologique. Ces deux solutions ont ensuite été mises à l'échelles pour que leur amplitude en $\eta = 0.01$ soit équivalente à la solution extraite de [25]. Les deux solutions que nous venons de déterminer sont en très bon accord entre elles et correspondent bien à la troisième jusqu'au voisinage de la coupure. Alors, la décroissance de nos spectres est bien plus rapide.

Ce résultat amène une question encore ouverte aussi bien dans ce cas particulier que dans le cadre général de la turbulence d'ondes de flexion : la signification physique de la fréquence caractéristique des spectres. Nous rappelons que cette dernière provient de la correction logarithmique $\log^{1/3}(\omega_c/\omega)$ introduite dans [26] pour contourner une dégénérescence de la théorie. Cette dégénérescence conduit, pour l'équation cinétique, à une solution hors-équilibre où le flux est nul, cette solution étant alors équivalente à la solution d'équilibre de Rayleigh-Jeans. L'expansion perturbative opérée pour contourner cette dégénérescence amène alors à la correction logarithmique. Celle-ci est pertinente tant que les variations de E_ω ne sont pas trop grandes de telle sorte qu'elle n'est plus valide dans la zone de décroissance rapide du spectre. Le modèle phénoménologique ayant été construit à partir de la solution (5.2), il est contraint de la suivre hors de sa zone de validité, ce qui provoque d'ailleurs la singularité mettant fin au spectre. Nous nous contenterons donc de considérer le comportement des spectres dans la zone qui précède la décroissance rapide du spectre. Dans cet intervalle de fréquences, le comportement auto-similaire prédit par le modèle phénoménologique est en accord avec la simulation des équations de von Kármán. Il est également important de souligner à nouveau que dans ces dernières, l'évolution linéaire de la fréquence caractéristique avec le temps est parfaitement observée [25].

Trouver une solution analytique de l'équation (5.29) est une tâche ardue mais il est possible de déterminer le comportement de la fonction auto-similaire g_η quand son amplitude devient proche de 0. Ce moment est ci-dessous indiqué par la grandeur η_c^*. Le comportement de g_η pour η proche de η_c^* est premièrement recherché sous la forme d'une loi de puissance

$$g_\eta \propto \eta^{-\alpha}. \tag{5.31}$$

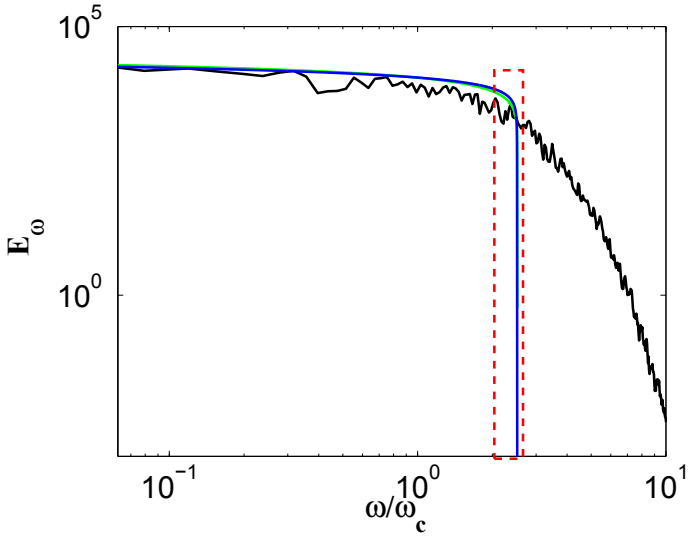


FIGURE 5.4 – Fonction d'auto-similarité $g(\eta) = E_\omega(\frac{\omega}{\omega_c})$. Ligne bleue : simulation numérique de l'équation (5.5). Ligne verte : simulation numérique de l'équation (5.29). Ligne noire : simulation numérique par différences finies des équations de Föppl-von Kármán réalisées par *Ducceschi et al.* [25]. Les trois spectres ont été normalisés afin que l'amplitude du premier point soit la même. Rectangle rouge : intervalle présentée dans la Figure 5.5.

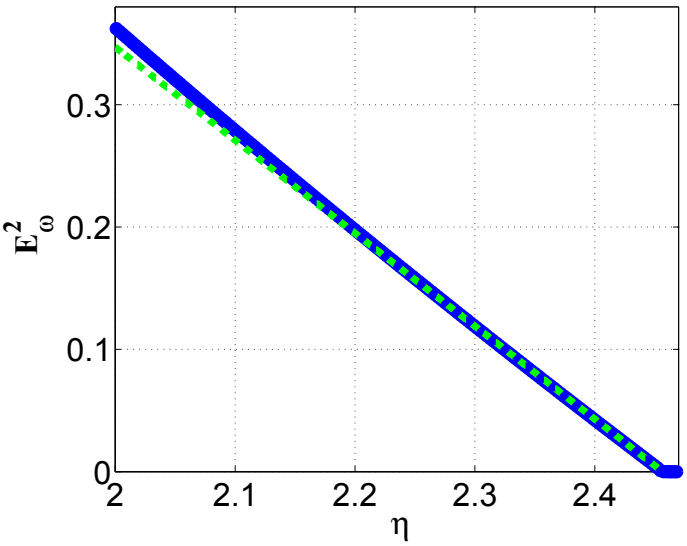


FIGURE 5.5 – Spectre de l'énergie E_ω au carré en fonction de la varible auto-similaire η. Ligne verte pointillée : $g_\eta^2 \propto \eta_c^* - \eta$.

En injectant cette forme dans l'équation (5.29), il vient $\alpha = -1/2$ de telle sorte que la solution g_η diverge quand η est proche de η_c^*. Ce comportement n'est pas physique car il correspond à une énergie qui croît aux hautes fréquences et donc à un flux d'énergie négatif. La solution est maintenant cherchée sous la forme :

$$g_\eta \propto (\eta_c^* - \eta)^{-\alpha}. \tag{5.32}$$

Il vient $\alpha = 1/2$. La Figure 5.5 présente en fonction de la variable η le carré de la fonction autosimilaire obtenue par simulations numériques de l'équation phénoménologique et déjà présentée dans la Figure 5.4. La loi linéaire $g^2 \propto -\eta$ est également tracée. Un très bon accord entre les deux courbes est trouvé : la fonction d'auto-similarité g_η suit donc bien pour η proche de η_c^* un comportement de la forme (5.32) avec $\alpha = 1/2$.

Turbulence libre

L'équation phénoménologique (5.5) est ici résolue pendant 1000 pas de temps en imposant un flux d'énergie ε_I constant. À un instant qui détermine l'origine des temps, la valeur du flux est fixée à 0 et la simulation est poursuivie en imposant cette condition de flux nul en $\omega = 0$: la turbulence est libre.

La Figure 5.6(a) présente l'évolution de la quantité initiale d'énergie K (en rouge) en fonction du temps. La cascade se propage en direction des petites échelles et son amplitude diminue au cours du temps, le système étant conservatif. Les figures insérées de la Figure 5.6 décrivent respectivement, en fonction du temps, l'évolution de la fréquence caractéristique, et celle de l'amplitude spectrale en $\omega = 0.5$. Les comportements observés sont respectivement proportionnels à $t^{1/3}$ et $t^{-1/3}$. Ces deux observations et la mise à l'échelle proposée par la Figure 5.6(b) sont bien en accord avec la solution auto-similaire donnée par l'équation (5.28) ainsi qu'avec celle calculée à partir de l'équation cinétique.

La forme (5.28) est injectée dans l'équation (5.5) afin d'obtenir l'équation décrivant l'évolution de la fonction d'auto-similarité h_ν en fonction de la variable auto-similaire ν :

$$-\frac{1}{3}\nu h_\nu' = (\nu h_\nu^2 h_\nu')'. \tag{5.33}$$

L'opération de dérivation par rapport à la variable ν est notée $'$. On cherche à nouveau à prédire le comportement de la fonction d'auto-similarité au voisinage de ν_c^*. Ceci est réalisé en injectant la loi de puissance

$$h_\nu \propto (\nu_c - \nu)^\alpha \tag{5.34}$$

dans l'équation (5.33). Il vient à nouveau $\alpha = 1/2$. La Figure 5.7 montre le carré de la fonction d'auto-similarité $E_\omega(\nu)$ déjà présentée dans la Figure 5.6(b). La loi linéaire $h^2 \propto \nu_c - \nu$ est également présentée. Un très bon accord est observé, accord validant la description de la fonction h_ν au voisinage de ν_c par la loi de puissance (5.34), avec $\alpha = 1/2$.

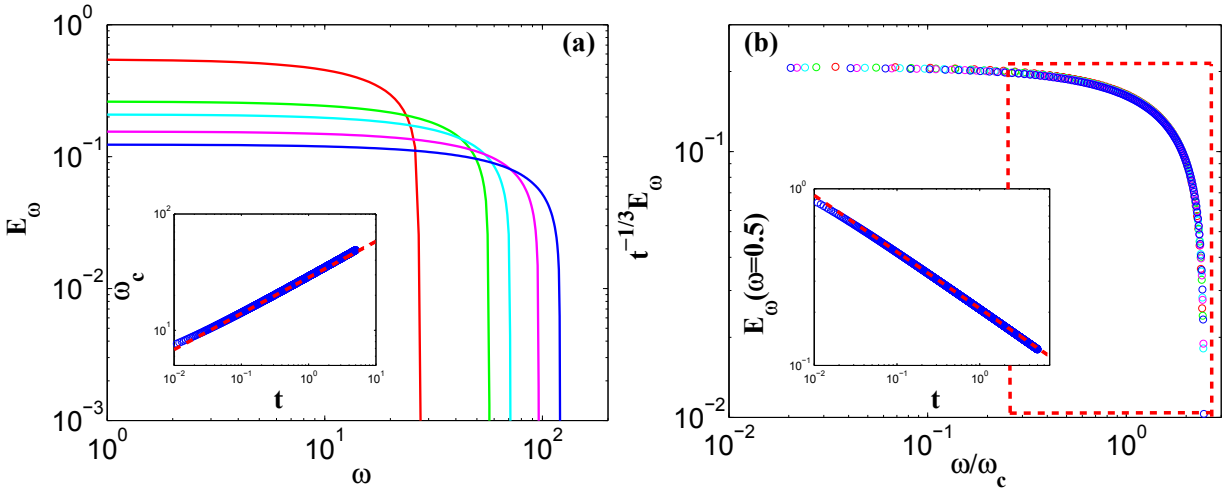


FIGURE 5.6 – (a) Spectre de l'énergie E_ω en fonction de la pulsation ω pour (de haut en bas) $t = 0, 1, 2, 3, 4$ s. Figure insérée : pulsation caractéristique ω_c en fonction du temps. Ligne rouge pointillée : $\omega_c \propto t^{1/3}$. (b) Fonction auto-similaire $h(\frac{\omega}{t^{1/3}}) \equiv h(\frac{\omega}{\omega_c})$ pour les mêmes données. Rectangle rouge : intervalle présenté en Figure (5.7). Figure insérée : $E_\omega(\omega = 0.5)$ en fonction du temps. Ligne rouge pointillée : $E_\omega(0.5) \propto t^{-1/3}$.

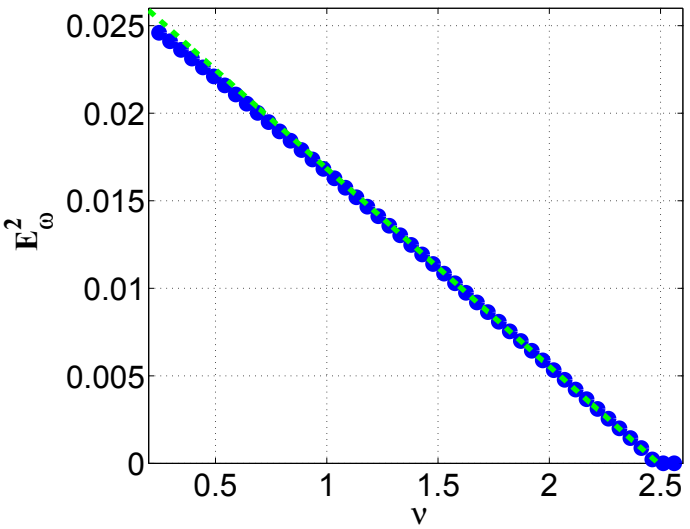


FIGURE 5.7 – Spectre de l'énergie E_ω à la puissance 2 en fonction de la variable auto-similaire ν. Ligne verte pointillée : $h_\nu^2 \propto \nu_c^* - \nu$.

5.3 Cadre non conservatif : effet de l'amortissement

5.3.1 Adimensionnement des équations de Föppl-von Kármán

L'équation phénoménologique non conservative (5.10) est ici utilisée en prenant désormais le terme dissipatif $\hat{\gamma}$ comme non nul sur l'ensemble des pulsations ω. Les mesures réalisées au § 3.2.5 ont montré que dans certaines conditions expérimentales, l'amortissement pouvait en moyenne être décrit par une loi de puissance de la forme $\hat{\gamma} = \alpha f^{0.6}$, où α est un paramètre qui peut être modifié expérimentalement. Le lien entre les grandeurs réelles et les grandeurs sans dimension utilisées pour le modèle phénoménologique doit donc premièrement être établi.

Les équations de Föppl-von Kármán (1.12) sont adimensionnées par l'introduction d'une longueur caractéristique l, d'un temps τ, et d'une constante C :

$$\zeta' = \frac{\zeta}{l}, \quad t' = \frac{t}{\tau}, \quad \chi' = \frac{\chi}{C}. \tag{5.35}$$

En omettant dès maintenant les $'$ pour désigner les variables adimensionnées, le jeu d'équations (1.12) prend, en fonction des nouvelles variables, la forme suivante :

$$\frac{\rho h l}{\tau^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)l^3}\Delta^2\zeta + \frac{C}{l^3}\{\chi,\zeta\}, \tag{5.36a}$$

$$\frac{C}{l^4}\Delta^2\chi = -\frac{Eh}{2l^2}\{\zeta,\zeta\}. \tag{5.36b}$$

On souhaite désormais que la dynamique soit décrite uniquement par les variables sans dimension (5.35) :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{1}{4}\Delta^2\zeta + \{\chi,\zeta\}, \tag{5.37a}$$

$$\Delta^2\chi = -\frac{1}{2}\{\zeta,\zeta\}. \tag{5.37b}$$

Pour cela, les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\frac{Eh^2\tau^2}{3\rho(1-\nu^2)l^4} = \frac{C\tau^2}{\rho h l^4} = \frac{C}{Ehl^2} = 1. \tag{5.38}$$

Il vient alors :

$$l = \frac{h}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \tag{5.39a}$$

$$\tau = l\sqrt{\frac{\rho}{E}} = h\sqrt{\frac{\rho}{3E(1-\nu^2)}}, \tag{5.39b}$$

$$C = Ehl^2 = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \tag{5.39c}$$

Le même travail peut être réalisé à partir des équations de von Kármán prenant en compte un terme d'amortissement visqueux, proportionnel à la vitesse. La dynamique de flexion d'une plaque mince amortie est alors décrite en fonction des variables sans dimension par le jeu d'équations suivant simplifié par h :

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -\frac{1}{4}\Delta^2\zeta + \{\chi,\zeta\} - \hat{\gamma}\frac{\partial\zeta}{\partial t}, \tag{5.40a}$$

$$\Delta^2\chi = -\frac{1}{2}\{\zeta,\zeta\}. \tag{5.40b}$$

$\hat{\gamma}$ est relié aux grandeurs physiques du problème par la relation

$$\hat{\gamma} = \gamma\tau = \gamma h\sqrt{\frac{\rho}{3E(1-\nu^2)}}, \tag{5.41}$$

et les coefficients sans dimension $\hat{\alpha}$ sont reliés aux coefficients expérimentaux α par :

$$\hat{\alpha} = \frac{\tau^{0.4}}{(2\pi)^{0.6}}\alpha. \tag{5.42}$$

Les coefficients à introduire dans l'équation (5.10) sont présentés dans le tableau 5.3.1.

Configuration	N	1CP	2CP	BA
α	0.045	0.072	0.14	0.22
$\hat{\alpha}\times 10^5$	1.908	3.0528	5.9359	9.3279

TABLE 5.1 – Coefficients d'amortissement expérimentaux α et coefficients d'amortissement adimensionnés $\hat{\alpha}$ pour les quatre configurations expérimentales décrites au § 3.2.5.

5.3.2 Effet sur les spectres E_ω

L'équation (5.10) est résolue numériquement en imposant une valeur constante ε_I pour le flux ε en $\omega = 0$. Pour les quatre configurations expérimentales, l'équation est alors simulée jusqu'à ce qu'un régime stationnaire soit atteint quand le flux ε_I a complètement été dissipé. La Figure 5.8 présente les spectres E_ω obtenus pour chaque cas simulé avec le même flux ε_I. Avant $\omega = 10$, les quatre spectres présentent le même comportement. Après, la dissipation n'est plus négligeable : plus le système est amorti plus le spectre coupe rapidement. L'allure des spectres est donc déterminée par l'amortissement. Les régimes stationnaires ici observés s'accordent donc très bien avec les résultats expérimentaux et numériques du chapitre 4. Il est cependant important de noter que ces simulations numériques présentent un intervalle de fréquences bien plus grand que celui étudié expérimentalement. Dans ce cadre, il apparaît qu'une loi de puissance ne peut pas être trouvée pour décrire la pente des spectres sur la totalité

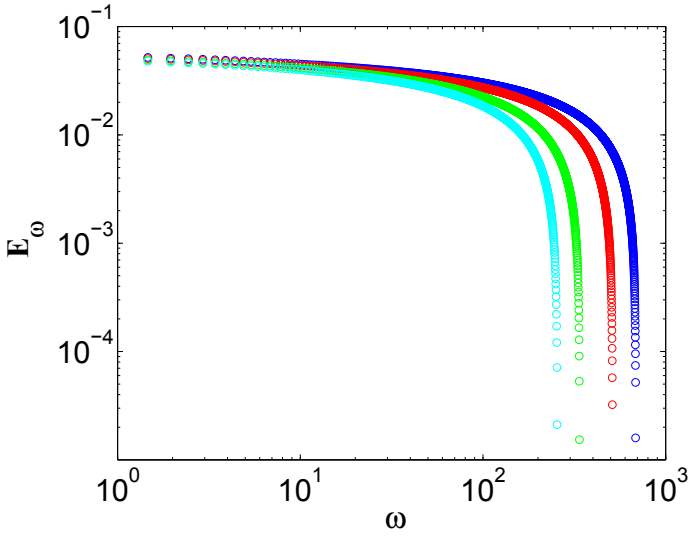


FIGURE 5.8 – Spectre de l'énergie E_ω en fonction de la pulsation ω. $\varepsilon_I = 10^{-5}$. Bleu : $\hat{\alpha} = 1.908 \times 10^{-5}$. Rouge : $\hat{\alpha} = 3.0528 \times 10^{-5}$. Vert : $\hat{\alpha} = 5.9359 \times 10^{-5}$. Cyan : $\hat{\alpha} = 9.3279 \times 10^{-5}$.

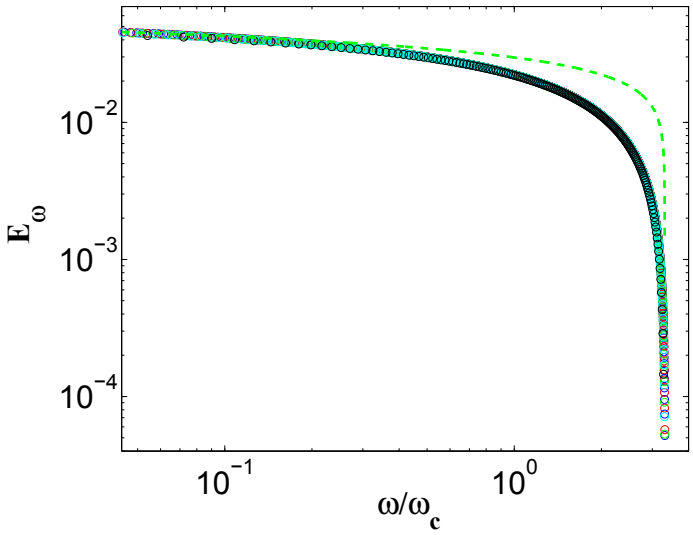


FIGURE 5.9 – Spectres de l'énergie présentés en (a) en fonction de la pulsation adimensionnée ω/ω_c. Ligne verte pointillée : spectre de Kolmogorov-Zakharov (5.2).

des fréquences, alors que ceci est possible sur un intervalle de la taille des données expérimentales. La recherche d'une loi de puissance pour décrire la forme des spectres en présence d'amortissement ne semble donc pas être la meilleure façon de décrire les solutions de notre problème.

La Figure 5.9 trace les mêmes spectres, cette fois en fonction de la pulsation adimensionnée ω/ω_c. Tous les spectres convergent vers une fonction unique, différente et plus raide que le spectre de Kolmogorov-Zakharov (présenté en vert dans la Figure 5.9). Ce résultat ne nous était pas apparu clairement expérimentalement, un intervalle de fréquence trop limité n'étant pas perturbé par le forçage ou par la décroissance rapide du spectre au niveau des échelles dissipatives. En ne modélisant à l'aide du modèle phénoménologique que la balance entre le terme conservatif $\partial_\omega(\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega)$ et le terme dissipatif $\hat{\gamma}_\omega E_\omega$, la dynamique turbulente expérimentale est retrouvée à partir du cadre théorique de la turbulence d'ondes. Quand l'hypothèse d'une gamme inertielle n'est pas vérifiée, une solution stationnaire générale existe pour le cadre non conservatif : elle est différente de la solution théorique sans dissipation et dépend de la forme de la fonction d'amortissement. On cherche alors à quantifier cette relation en étudiant le comportement de la pulsation caractéristique, l'évolution de cette dernière semblant contenir toutes les informations relatives à l'effet de la dissipation.

5.3.3 Comportement de la pulsation caractéristique

L'interprétation physique de la pulsation caractéristique est fournie par une analyse similaire à celle opérée sur les données expérimentales au § 4.3.1. La puissance totale dissipée par la cascade ε_D se présente, en fonction des grandeurs utilisées par le modèle phénoménologique, sous la forme :

$$\varepsilon_D = \int_0^{\omega_c} \hat{\gamma} E_\omega d\omega. \tag{5.43}$$

Après avoir remarqué que la loi d'échelle $E_\omega \propto \epsilon_I^{1/3}$ restait cohérente dans le cadre du modèle phénoménologique en présence d'amortissement, E_ω est introduit sous la forme $E_\omega \propto \varepsilon_I^{1/3} \Phi(\omega/\omega_c)$ dans l'équation (5.43). La dépendance entre amplitude spectrale et puissance injectée est fixée et la forme du spectre est une fonction Φ quelconque qui dépend de ω/ω_c, comme suggéré par la Figure 5.9 . L'amortissement $\hat{\gamma}$ est une loi de puissance de la forme

$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\omega^\lambda \tag{5.44}$$

où la puissance λ et le coefficient $\hat{\alpha}$ sont à fixer ou à déterminer. Le bilan d'énergie de la cascade (5.43) peut alors être réécrit sous la forme :

$$\varepsilon_D \propto \hat{\alpha} \varepsilon_I^{1/3} \omega_c^{1+\lambda}. \tag{5.45}$$

L'énergie dissipée par la cascade ε_D est égale au flux injecté ε_I. Il vient donc finalement la relation suivante entre puissance injectée, amortissement, et pulsation

caractéristique :

$$\omega_c \propto \varepsilon_I^{\theta} \hat{\alpha}^{-\frac{1}{1+\lambda}} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{2}{3(1+\lambda)}. \tag{5.46}$$

Pour ε_I fixé

Nous cherchons à utiliser l'équation (5.46) pour prédire le comportement, pour un flux entrant donné, de la pulsation caractéristique en fonction de l'amplitude $\hat{\alpha}$ de la dissipation. Nous cherchons par cette démarche à quantifier la décroissance de la pulsation caractéristique observée dans la Figure 5.8.

La relation (5.46) est réécrite en considérant ϵ_I constant :

$$\omega_c \propto \hat{\alpha}^{-\frac{1}{1+\lambda}}. \tag{5.47}$$

Dans nos conditions expérimentales $\lambda = 0.6$ et il vient donc $\omega_c \propto \hat{\alpha}^{-0.63}$. La valeur de la puissance λ étant en partie liée à notre configuration expérimentale, on peut également chercher les prédictions attribuées à ω_c pour d'autres λ. La Figure 5.10 présente l'évolution de la pulsation caractéristique en fonction du facteur d'amortissement $\hat{\alpha}$. Les points sont obtenus en résolvant, pour une même flux entrant, l'équation (5.10) en prenant $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\omega^{\lambda}$ avec $\lambda = 0.6, 1, 2$. Les lignes représentent les comportements prédits par l'équation (5.47). Un accord parfait entre ces prédictions et les résultats fournis par l'équation phénoménologique est trouvé.

Pour une loi d'amortissement donnée

Nous cherchons finalement à utiliser la loi (5.46) pour quantifier, en connaissance de l'amortissement $\hat{\gamma}$ du système, l'évolution de la pulsation caractéristique en fonction de ϵ_I. La relation (5.46) est réécrite sous la forme :

$$\omega_c \propto \varepsilon_I^{\frac{2}{3(1+\lambda)}}. \tag{5.48}$$

La Figure 5.11 présente l'évolution de la fréquence caractéristique en fonction de ϵ_I. Les lignes représentent les comportements prédits par la relation (5.48) tandis que les points correspondent aux simulations de l'équation (5.10) pour $\hat{\alpha} = 1$ et $\lambda = 0.1, 0.5, 1, 2$. Pour ces configurations, les prédictions théoriques fournies par l'équation (5.48) sont respectivement $\theta = 0.60, 0.44, 0.33, 0.22$. La correspondance entre les deux jeux de données est très bonne : la coupure de la cascade est intimement liée à l'amortissement et peut être prédite en calculant le bilan d'énergie de la cascade.

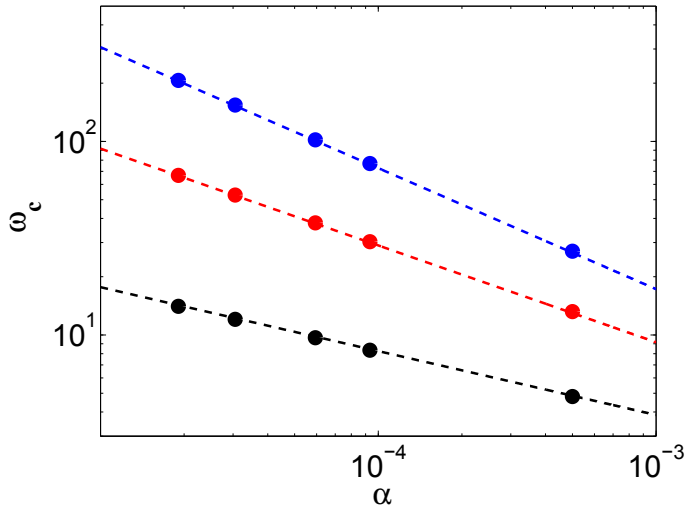


FIGURE 5.10 – Pulsation caractéristique ω_c en fonction du facteur d'amortissement $\hat{\alpha}$. Noir : $\lambda = 2$. Rouge : $\lambda = 1$. Bleu : $\lambda = 0.6$. Lignes : lois d'évolution prédites par l'équation (5.46). Noir : $\omega_c = 0.39\hat{\alpha}^{-0.33}$. Rouge : $\omega_c = 0.29\hat{\alpha}^{-0.5}$. Bleu : $\omega_c = 0.23\hat{\alpha}^{-0.625}$.

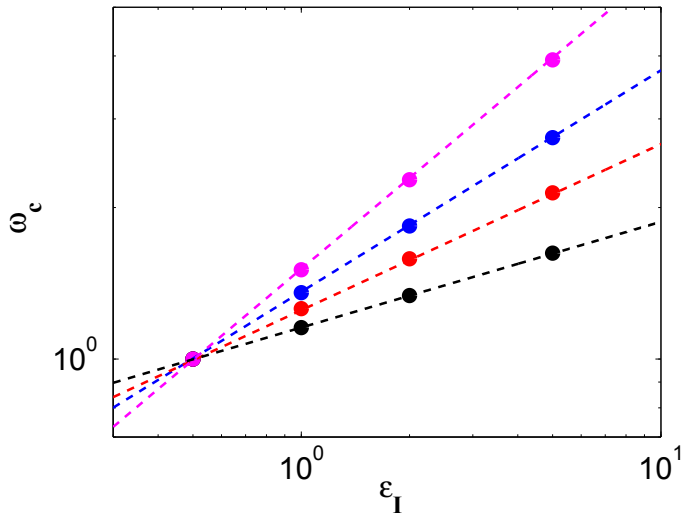


FIGURE 5.11 – Pulsation caractéristique ω_c en fonction du flux ε_I injecté en $\omega = 0$. Par soucis de lisibilité, ω_c a été divisé pour chaque configuration par sa valeur en $\epsilon_I = 0.5$. Noir : $\lambda = 2$. Rouge : $\lambda = 1$. Bleu : $\lambda = 0.5$. Magenta : $\lambda = 0.1$. Lignes pointillées : lois d'évolution prédites par l'équation (5.48). Noir : $\omega_c = 1.16\epsilon_I^{0.22}$. Rouge : $\omega_c = 1.25\epsilon_I^{0.33}$. Bleu : $\omega_c = 1.36\epsilon_I^{0.44}$. Magenta : $\omega_c = 1.51\epsilon_I^{0.6}$.

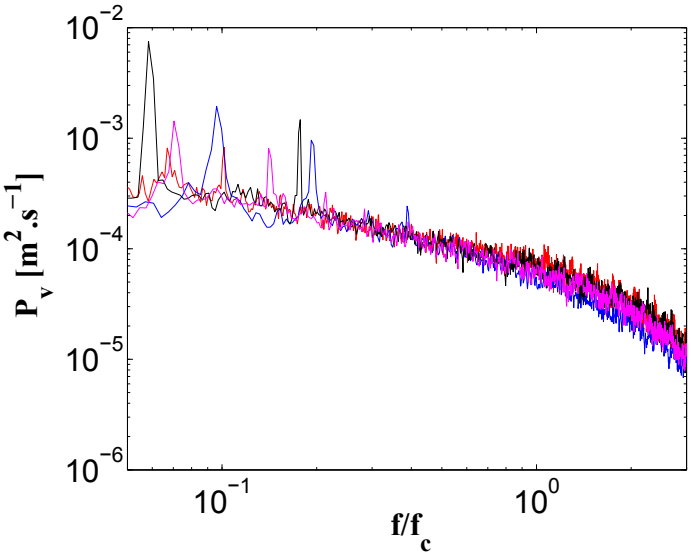


FIGURE 5.12 – Densités spectrale de puissance de la vitesse transverse P_v déjà présentées en Figure 4.1 et ici tracées en fonction de la fréquence adimensionnée f/f_c. Rouge : $\gamma_* = 1$, $\epsilon_I = 0.56 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Noir : $\gamma_* = 1.6$, $\epsilon_I = 0.54 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Magenta : $\gamma_* = 3.1$, $\epsilon_I = 0.52 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Bleu : $\gamma_* = 4.9$, $\epsilon_I = 0.48 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}.

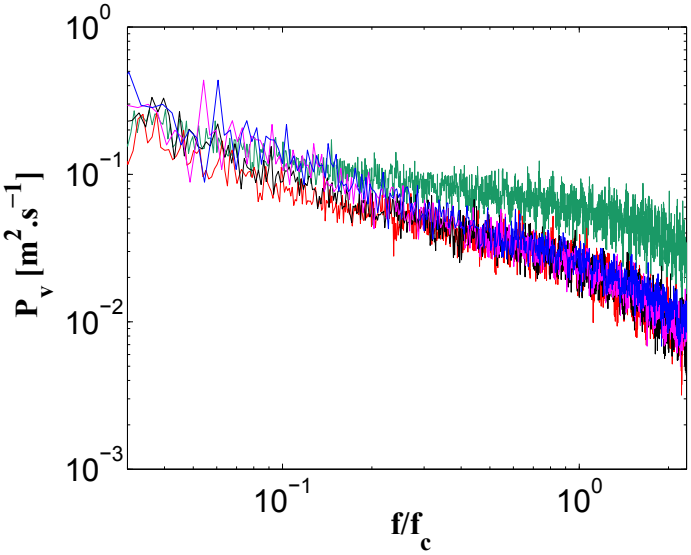


FIGURE 5.13 – Simulations numériques : densités spectrale de puissance de la vitesse transverse P_v déjà présentées en Figure 4.4 en fonction de la fréquence adimensionnée f/f_c. Vert : $\gamma^* = 0$, $\epsilon_I = 0.057 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Autres cas : $\epsilon_I = 0.024 \times 10^{-3}$ m^3.s^{-3}. Rouge : $\gamma_* = 1$. Noir : $\gamma_* = 1.6$. Magenta $\gamma_* = 3.1$. Bleu : $\gamma_* = 4.9$.

5.3.4 Retour aux expériences et aux simulations

Le § 5.3.2 a mis en lumière dans l'équation phénoménologique l'existence d'une solution stationnaire du cadre non conservatif, différente de celle associée au cadre conservatif, et dépendant de la fonction d'amortissement de la plaque considérée.

La Figure 5.11 présente les spectres expérimentaux déjà présentés dans la Figure 4.1, cette fois-ci tracés en fonction de la fréquence adimensionnée f/f_c. Précédemment, nous avions montré que plus l'amortissement était important, plus la pente des spectres était grande et la fréquence de coupure basse. Ici, il est remarqué que ces quatre spectres peuvent être placés sur une seule et même courbe s'ils sont écrits en fonction de la fréquence adimensionnée. L'existence d'une solution générale au cadre non conservatif de la turbulence d'ondes de plaque mince est montrée, tout comme dans le modèle phénoménologique. Si l'on cherche à estimer une loi de puissance pour décrire cette fonction, on trouve

$$P_v \propto (f/f_c)^{-0.6}, \tag{5.49}$$

ce qui est bien différent du spectre théorique de Kolmogorov-Zakharov, et proche des premiers spectres expérimentaux présentés dans [7] et [68].

La Figure 5.12 présente les spectres numériques déjà présentés dans la Figure 4.4. Là encore, les deux solutions stationnaires du problème de turbulence d'ondes dans les plaques minces sont mises en valeur : la solution du cadre conservatif, et la solution du cadre non conservatif.

5.4 Conclusion intermédiaire

Un modèle phénoménologique construit à partir des deux solutions de l'équation cinétique a ici été décrit et appliqué au cadre de la turbulence instationnaire dans deux cas : la turbulence libre et une turbulence forcée par un flux d'énergie constant au cours du temps. La résolution numérique de cette équation a permis de faire apparaître dans les deux cas l'existence d'un comportement auto-similaire. Les solutions auto-similaires de l'équation cinétique sont alors retrouvées. Ces deux exemples montrent la capacité de notre modèle, malgré sa simplicité, à décrire les caractéristiques fondamentales de la dynamique de plaques minces élastiques. Les différences observées quant à la forme des fonctions d'auto-similarité issues de notre modèle et celles obtenues par une simulation directe des équations de von-Kármán doivent encore être comprises.

En introduisant dans le modèle phénoménologique l'amortissement mesuré expérimentalement, les conclusions tirées au chapitre 4 ont été retrouvées : l'amortissement agit dans les plaques à toutes les échelles de telle sorte qu'il n'y a pas de fenêtre de transparence, le flux qui cascade n'est plus constant et la forme de la cascade est entièrement dépendante de l'amortissement. Les spectres stationnaires obtenus en présence d'amortissement ne sont plus des lois de puissances et chercher de telles

lois dans les expériences n'est donc pas la meilleure façon d'analyser la répartition de l'énergie dans notre système. Au contraire, étudier le comportement de la coupure de la cascade en écrivant le bilan d'énergie de cette dernière permet de lier avec succès les paramètres fondamentaux de notre problème : l'amortissement, la puissance injectée, et la pulsation caractéristique. Ces premiers résultats sont très concluants et encouragent l'utilisation d'un modèle phénoménologique pour appliquer la théorie de turbulence d'ondes à un cadre expérimental mettant en défaut l'existence d'une fenêtre de transparence.

La dépendance, en présence d'amortissement, de l'amplitude spectrale avec le flux ou la puissance injectée reste encore une question ouverte. Si expérimentalement cette dépendance a pu être reliée à l'amortissement de façon concluante, les résultats issus du modèle phénoménologique tendent à faire penser que la relation théorique $E_\omega \propto \epsilon^{1/3}$ reste valide. Il nous semble que cette différence est attribuée aux conditions expérimentales et à un effet de l'amortissement sur le processus d'injection. Mesurer expérimentalement le flux ou mieux contrôler le forçage peuvent être des pistes intéressantes à suivre.

Conclusion et perspectives

L'effet d'une dissipation présente à toutes les échelles sur un système d'ondes turbulent est une question importante à laquelle cette étude a fourni des éléments de réponse dans le cadre des plaques minces.

Résultats

La caractérisation de l'amortissement a permis de mettre en lumière la coexistence des pertes thermoélastiques et viscoélastiques, coexistence qui peut être justifiée par les caractéristiques particulières des plaques étudiées en turbulence d'ondes. Ce couplage a permis de caractériser l'amortissement moyen de notre plaque par une loi de puissance $\gamma(f) \propto f^{0.6}$ qui a facilité la prise en compte de la dissipation dans les simulations numériques :

- Expérimentalement, il a alors été montré que l'amortissement déterminait la forme des spectres : en multipliant l'amortissement par 5, la pente des spectres est multipliée par 2. De plus, l'introduction d'une dissipation réelle dans les simulations numériques des équations de Föppl-von Kármán permet de passer du spectre de Kolmogorov-Zakharov théorique à des spectres très proches des expériences.

- Ces observations ne remettant pas en cause l'emploi de la turbulence d'ondes pour décrire la dynamique d'une plaque mince sollicitée par un forçage de grande amplitude, les outils théoriques à notre disposition devaient être étendus à un système sans fenêtre de transparence. En réalisant cette extension de façon phénoménologique, une nouvelle solution stationnaire différente du spectre de Kolmogorov-Zakharov a pu être calculée numériquement et celle-ci semble valable pour toute loi d'amortissement.

- Par rapport à l'étude de la pente des spectres, le calcul du bilan d'énergie de la cascade turbulente a fourni d'autres éléments permettant de quantifier l'effet de l'amortissement sur le régime turbulent. Dans le cadre expérimental, une nouvelle mise à l'échelle de l'amplitude spectrale prenant en compte l'absence d'une gamme inertielle a pu être établie. Dans le cadre du modèle phénoménologique, la coupure des spectres a pu être à la fois reliée à la puissance injectée et à

l'amortissement.

Perspectives expérimentales

Si les modèles d'amortissement semblent bien adaptés à une description globale de la dissipation, la variabilité en conditions réelles de cette dernière pousse à fournir une analyse fine de chaque configuration expérimentale mise en œuvre. Il nous semblerait alors intéressant de décrire entièrement un système tel que le notre en terme de puissance injectée et de puissance dissipée. Cette dernière pourrait par exemple être quantifiée pour les pertes thermoélastiques à l'aide d'une caméra thermique et pour les pertes par rayonnement par une méthode d'antennerie. Cette démarche nécessiterait en outre de mieux contrôler le forçage afin de connaître précisément l'énergie fournie par l'excitateur. Ceci permettrait peut être aussi de comprendre pourquoi la dépendance à l'amortissement de la loi d'échelle liant amplitude spectrale et puissance injectée observée expérimentalement n'est pas reproduite dans le cadre du modèle phénoménologique.

Perspectives théoriques

De manière plus générale, et hormis quelques exceptions, les prédictions théoriques de la turbulence d'ondes ont rarement été retrouvées expérimentalement dans les systèmes pour le moment étudiés. L'idée d'un modèle de type phénoménologique semble alors être dans un premier temps une bonne façon de quantifier l'effet de l'amortissement sur la dynamique turbulente d'un système où l'hypothèse d'une fenêtre de transparence n'est pas respectée. À plus long terme, il serait quand même important que les contributions non négligeables de l'amortissement à la dynamique non linéaire d'un ensemble d'ondes soient prises en compte dans le développement calculatoire global de la turbulence d'ondes.

Liste de publications

Publications dans des journaux à comité de lecture

T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica, and C. Touzé. Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping. *EPL (Europhysic Letters)*, 102(3) :30002, 2013.
T. Humbert, C. Josserand, O. Cadot, and C. Touzé. Phenomenological model for predicting stationary and non-stationary spectra of wave turbulence in vibrating plates. *En préparation pour Physica D*, 2014.

Actes de congrès

T. Humbert, O. Cadot, C. Josserand, and C. Touzé. Phenomenological model for predicting stationary and non-stationary spectra of wave turbulence in vibrating plates. *ENOC2014 (European Nonlinear Dynamics Conference)*. Vienne (Autriche), Juillet 2014.
T. Humbert, O. Cadot, C. Josserand, et C. Touzé. Modèle phénoménologique pour la prédiction de spectres stationnaires et instationnaires de turbulence d'ondes de plaques. *17e Rencontre du non linéaire*. Paris, mars 2014.
T. Humbert, O. Cadot, C. Josserand, et C. Touzé. Turbulence d'ondes dans les plaques minces en vibration : effet de l'amortissement. *16e Rencontre du non linéaire*. Paris, mars 2013.

Communications orales

T. Humbert, O. Cadot, C. Josserand, and C. Touzé. Phenomenological model for predicting stationary and non-stationary spectra of wave turbulence in vibrating plates. *Workshop on Weak Chaos and Weak Turbulence*. Dresden, février 2014.
T. Humbert, O. Cadot, C. Josserand, and C. Touzé. Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping. *Non-linear Hydrodynamic Waves : Wave Interactions and Wave Turbulence*. Paris, septembre 2013.
T. Humbert, O. Cadot, C. Josserand, and C. Touzé. Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping. *Wave propagation in complex media, École d'été*. Cargese, aout 2012.

Posters

T. Humbert, O. Cadot, C. Josserand, and C. Touzé. Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping. *Wave turbulence, École d'hiver*. Les Houches, Mars 2012.
T. Humbert. Turbulence d'ondes dans les plaques vibrantes : étude expérimentale et théorique. Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio (JJ-CAAS), Rennes, Décembre 2011.

Autres

T. Humbert, G. Lasserre, A. met den Ancxt, et C. Touzé. Installation Kimanétik. *Premier prix du festival Arts-Sciences Curiositas*. Orsay, septembre 2013.

Bibliographie

[1] K. Arcas. *Simulation numérique d'un réverbérateur à plaque*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées, Palaiseau, France, 2008.

[2] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and geometry*. Oxford Univ. Press., 2010.

[3] Z. P. Bažant and L. Cedolin. *Stability of structures : elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific, 2010.

[4] D. J. Benney and A. C. Newell. Random wave closures. *Studies in Applied Mathematics*, 48(1) :29, 1969.

[5] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, 1998.

[6] S. Bilbao. A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von Kármán plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1) :193–216, 2008.

[7] A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille, and C. Touzé. Observation of wave turbulence in vibrating plates. *Physical Review Letters*, 100(23) :234504, 2008.

[8] F. Boyer and E. Falcon. Wave turbulence on the surface of a ferrofluid in a magnetic field. *Physical Review Letters*, 101(24) :244502, 2008.

[9] E.A. Brun, A. Martinot-Lagarde, and J. Mathieu. *Mécanique des fluides*, volume 3. Dunod Paris, 1970.

[10] O. Cadot, A. Boudaoud, and C. Touzé. Statistics of power injection in a plate set into chaotic vibration. *Eur. Phys. J. B.*, 66(399-407), 2008.

[11] O. Cadot, Y. Couder, A. Daerr, S. Douady, and A. Tsinober. Energy injection in closed turbulent flows : Stirring through boundary layers versus inertial stirring. *Physical Review E*, 56(1) :427, 1997.

[12] O. Cadot, C. Touzé, and A. Boudaoud. Linear versus nonlinear response of a forced wave turbulence system. *Physical Review E*, 82(046211), 2010.

[13] A. Caracciolo and C. Valette. Damping mechanisms governing plate vibration. *Acta Acustica*, 3(5) :393–404, 1995.

[14] P. Chadwick. On the propagation of thermoelastic disturbances in thin plates and rods. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(2) :99–109, 1962.

[15] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. BELIN, 2008.

[16] C. Y. Chia. *Nonlinear Analysis of Plates*. McGraw-Hill New York, 1980.

[17] P.G. Ciarlet. A justification of the von Kármán equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 73(4) :349–389, 1980.

[18] P. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux, and P. Petitjeans. Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry. *Experiments in fluids*, 46(6) :1037–1047, 2009.

[19] P. Cobelli, P. Petitjeans, A. Maurel, V. Pagneux, and N. Mordant. Space-time resolved wave turbulence in a vibrating plate. *Physical Review Letters*, 103(20) :204301, 2009.

[20] C. Connaughton and S. Nazarenko. Warm cascades and anomalous scaling in a diffusion model of turbulence. *Physical Review Letters*, 92(4) :044501, 2004.

[21] C. Connaughton, S. Nazarenko, and A. C. Newell. Dimensional analysis and weak turbulence. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 184(1) :86–97, 2003.

[22] C. Connaughton, A. C. Newell, and Y. Pomeau. Non-stationary spectra of local wave turbulence. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 184(1) :64–85, 2003.

[23] B. David. *Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée. Méthodes d'estimation relatives aux fréquences et amortissements des modes propres. Applications en acoustique musicale.* PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 1999.

[24] M. Ducceschi. *Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates, A Numerical Investigation with Application to Wave Turbulence and Sound Synthesis.* PhD thesis, ENSTA - ParisTech, 2014.

[25] M. Ducceschi, O. Cadot, C. Touzé, and S. Bilbao. Dynamics of the wave turbulence spectrum in vibrating plates : A numerical investigation using a conservative finite difference scheme. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 280 :73–85, 2014.

[26] G. Düring. *Non-equilibrium dynamics of nonlinear wave systems : Turbulent regime, breakdown and wave condensation.* PhD thesis, U.P.M.C. Paris, 2010.

[27] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica. Weak turbulence for a vibrating plate : can one hear a Kolmogorov spectrum ? *Physical Review Letters*, 97(2) :025503, 2006.

[28] S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov. Optical turbulence : weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrödinger equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 57(1) :96–160, 1992.

[29] C. Falcon, E. Falcon, U. Bortolozzo, and S. Fauve. Capillary wave turbulence on a sperical fluid surface in low gravity. *EPL (Europhysics Letters)*, 86(1) :14002, 2009.

[30] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve. Observation of gravity-capillary wave turbulence. *Physical Review Letters*, 98(9) :094503, 2007.

[31] E. Falcon, S. G. Roux, and C. Laroche. On the origin of intermittency in wave turbulence. *EPL (Europhysics Letters)*, 90(3) :34005, 2010.

[32] G. E. Falkovich and A. V. Shafarenko. Non-stationary wave turbulence. *J. Nonlinear Sci.*, 1 :452–480, 1991.

[33] A. Farina. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. In *Audio Engineering Society Convention 108*. Audio Engineering Society, 2000.

[34] A. Föppl. *Vorlesungen über technische Mechanik*, volume 5. Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1907.

[35] U. Frisch. *Turbulence*, volume 1. Cambridge Univ. Press, 1996.

[36] S. Galtier, S. Nazarenko, A. C. Newell, and A. Pouquet. A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics. *Journal of Plasma Physics*, 63(5) :447–488, 2000.

[37] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.

[38] K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Courier Dover Publications, 1975.

[39] V. N. Grebenev, S. Nazarenko, S.B. Medvedev, I.V. Schwab, and Y. A. Chirkunov. Self-similar solution in the leith model of turbulence : anomalous power law and asymptotic analysis. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 47(2) :025501, 2014.

[40] P. Guyenne, V. E. Zakharov, A. Pushkarev, and F. Dias. Turbulence d'ondes dans des modèles unidimensionnels. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 328(10) :757–762, 2000.

[41] K. Hasselmann. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. *J. Fluid Mech*, 12(15) :481–500, 1962.

[42] M. A. Herráez, J.G. Boticario, M. J. Lalor, and D. R. Burton. Agglomerative clustering-based approach for two-dimensional phase unwrapping. *Applied optics*, 44(7) :1129–1140, 2005.

[43] M. A. Herráez, D. R. Burton, M. J. Lalor, and D. B. Clegg. Robust, simple, and fast algorithm for phase unwrapping. *Applied optics*, 35(29) :5847–5852, 1996.

[44] T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica, and C. Touzé. Wave turbulence in vibrating plates : The effect of damping. *EPL (Europhysics Letters)*, 102(3) :30002, 2013.

[45] P. A. E. M. Janssen. Nonlinear four-wave interactions and freak waves. *Journal of Physical Oceanography*, 33(4) :863–884, 2003.

[46] E. Kartashova. Weakly nonlinear theory of finite-size effects in resonators. *Physical Review Letters*, 72(13) :2013, 1994.

[47] E. Kartashova. Exact and quasiresonances in discrete water wave turbulence. *Physical Review Letters*, 98(21) :214502, 2007.

[48] E. Kartashova. Discrete wave turbulence. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(4) :44001, 2009.

[49] E. Kartashova. *Nonlinear Resonance Analysis*. Cambridge University Press, 2010.

[50] G. V. Kolmakov. Decay of capillary turbulence on the surface of a viscous liquid. *JETP letters*, 83(2) :58–63, 2006.

[51] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 32(1) :16–18, 1941.

[52] J. Lagnese and J.L. Lions. *Modelling Analysis and Control of Thin Plates*. Masson Paris, 1988.

[53] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes. Application à la synthèse sonore*. PhD thesis, Université du Maine, 1997.

[54] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Theory of elasticity*. Pergamon Press, 1959.

[55] S.G. Lekhnitskii. *Anisotropic plates*. Gordon and Breach, New York, 1968.

[56] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*, volume 3. Kluwer academic publishers Dordrecht, 1997.

[57] V. S. L'vov, Y. L'vov, A. C. Newell, and V. E. Zakharov. Statistical description of acoustic turbulence. *Physical Review E*, 56(1) :390–405, 1997.

[58] G Maidanik. The influence of fluid loading on the radiation from orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 3(3) :288–299, 1966.

[59] P. Manneville. *Dissipative structures and weak turbulence*. Springer, 1995.

[60] R. Marchiano. *Rayonnement acoustique des structures - Notes de Cours -*. Université Pierre et Marie Curie.

[61] A. Maurel, P. Cobelli, V. Pagneux, and P. Petitjeans. Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in Fourier transform profilometry. *Applied optics*, 48(2) :380–392, 2009.

[62] M.E. Mclntyre and J. Woodhouse. The influence of geometry on linear damping. *Acustica*, 39, 1978.

[63] B. Miquel. *Études expérimentales et numériques de la turbulence d'ondes de flexion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2013.

[64] B. Miquel, A. Alexakis, C. Josserand, and N. Mordant. Transition from wave turbulence to dynamical crumpling in vibrated elastic plates. *Physical Review Letters*, 111(5) :054302, 2013.

[65] B. Miquel and N. Mordant. Nonlinear dynamics of flexural wave turbulence. *Physical Review E*, 84(6) :066607, 2011.

[66] B. Miquel and N. Mordant. Nonstationary wave turbulence in an elastic plate. *Physical Review Letters*, 107(3) :034501, 2011.

[67] M. Monteil. *Comportement vibratoire du steelpan : effet des procédés de fabrication et dynamique non linéaire*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2013.

[68] N. Mordant. Are there waves in elastic wave turbulence ? *Physical Review Letters*, 100(23) :234505, 2008.

[69] N. Mordant. Fourier analysis of wave turbulence in a thin elastic plate. *The European Physical Journal B*, 76(4) :537–545, 2010.

[70] A.H. Nayfeh and P.F. Pai. *Linear and nonlinear structural mechanics*. John Wiley & Sons, 2008.

[71] S. Nazarenko. *Wave turbulence*, volume 825. Springer, 2011.

[72] S. Nazarenko. Communication privée, 2014.

[73] S. Nazarenko and M. Onorato. Wave turbulence and vortices in Bose-Einstein condensation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 219(1) :1–12, 2006.

[74] A. C. Newell. The closure problem in a system of random gravity waves. *Reviews of Geophysics*, 6(1) :1–31, 1968.

[75] A. C. Newell and P. J. Aucoin. Semidispersive wave systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(03) :593–609, 1971.

[76] A. C. Newell, S. Nazarenko, and L. Biven. Wave turbulence and intermittency. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 152 :520–550, 2001.

[77] A. C. Newell and B. Rumpf. Wave turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43 :59–78, 2011.

[78] A.N. Norris. Dynamics of thermoelastic thin plates : a comparison of four theories. *Journal of Thermal Stresses*, 29(2) :169–195, 2006.

[79] A.N. Norris and D.M. Photiadis. Thermoelastic relaxation in elastic structures, with applications to thin plates. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 58(1) :143–163, 2005.

[80] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, and J. R. Buck. *Discrete-time signal processing*. Prentice-hall Englewood Cliffs, 1989.

[81] R. Peierls. Zur kinetischen theorie de wärmeleitung in kristallen. *Annalen der Physik*, 395(8) :1055–1101, 1929.

[82] D. Proment, S. Nazarenko, P. Asinari, and M. Onorato. Warm turbulence in the Boltzmann equation. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(2) :24004, 2011.

[83] A. Przadka, B. Cabane, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans. Fourier transform profilometry for water waves : how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface ? *Experiments in fluids*, 52(2) :519–527, 2012.

[84] A. N. Pushkarev. On the Kolmogorov and frozen turbulence in numerical simulation of capillary waves. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 18(3) :345–351, 1999.

[85] A. Putra and D.J. Thompson. Sound radiation from rectangular baffled and unbaffled plates. *Applied Acoustics*, 71(12) :1113–1125, 2010.

[86] B. A. Rajoub, D. R. Burton, and M. J. Lalor. A new phase-to-height model for measuring object shape using collimated projections of structured light. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 7(6) :S368, 2005.

[87] B. A. Rajoub, M. J. Lalor, D. R. Burton, and S.A. Karout. A new model for measuring object shape using non-collimated fringe-pattern projections. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 9(6) :S66, 2007.

[88] J. Reddy. *Nonlinear Analysis of Plates*. McGraw Hill, 1980.

[89] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 2007.

[90] M.L. Rumerman. The effect of fluid loading on radiation efficiency. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111(1) :75–79, 2002.

[91] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus (Vol. 1) : concepts généraux*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[92] M. R. Schroeder. New method of measuring reverberation time. *Journal of the Acoustical Society of America*, 37(3) :409–412, 1965.

[93] L. F. Shampine and M. W. Reichelt. The matlab ode suite. *SIAM J. of Scientific Computing*, 18(1) :1–22, 1997.

[94] J.G. Simmonds. Major simplifications in a current linear model for the motion of a thermoelastic plate. *Quarterly of Applied Mathematics*, 57(4) :673–679, 1999.

[95] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1) :156–160, 1982.

[96] M. Takeda and K. Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-d object shapes. *Applied optics*, 22(24) :3977–3982, 1983.

[97] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques-Application aux instruments de percussion.* PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2001.

[98] O. Thomas. Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration. *Habilitation à diriger les recherches - ENS Cachan*, 2011.

[99] O. Thomas and S. Bilbao. Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :569–590, 2008.

[100] D. Tomlinson, RJM. Craik, and R. Wilson. Acoustic radiation from a plate into a porous medium. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1) :33–49, 2004.

[101] C. Touzé, S. Bilbao, and O. Cadot. Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 331(2) :412–433, 2012.

[102] C. Touzé, S. Bilbao, L. Longo-Mucciante, O. Cadot, and A. Boudaoud. Vibrations chaotiques de plaques minces : application aux instruments de type cymbale. In *10ème Congrès Français d'Acoustique*, 2010.

[103] C. Touzé, O. Thomas, and M. Amabili. Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates. *International Journal of non-linear Mechanics*, 46(1) :234–246, 2011.

[104] C. Touzé, M. Vidrascu, and D. Chapelle. Calcul direct de la raideur non linéaire géométrique pour la réduction de modèles de coques en éléments finis. In *Colloque national en calcul de structures CSMA, Giens*, Mai 2013.

[105] A. A. Vedenov. Theory of a weakly turbulent plasma. In *Reviews of plasma physics*, pages 229–276. Springer, 1967.

[106] T. von Kármán. Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften*, 4(4) :311–385, 1910.

[107] C.E. Wallace. Radiation resistance of a rectangular panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3B) :946–952, 2005.

[108] W. B. Wright, R. Budakian, D. J. Pine, and S. J. Putterman. Imaging of intermittency in ripple-wave turbulence. *Science*, 278(5343) :1609–1612, 1997.

[109] N. Yokoyama and M. Takaoka. Weak and strong wave turbulence spectra for elastic thin plate. *Physical Review Letters*, 110(10) :105501, 2013.

[110] Z. Yosibash and R.M. Kirby. Dynamic response of various von-Kármán non-linear plate models and their 3-d counterparts. *International journal of solids and structures*, 42(9) :2517–2531, 2005.

[111] V. E. Zakharov. Weak turbulence in media with a decay spectrum. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 6(4) :22–24, 1965.

[112] V. E. Zakharov. Weak-turbulence spectrum in a plasma without a magnetic field. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 24 :455, 1967.

[113] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko. Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a liquid. In *Soviet Physics Doklady*, volume 11, page 881, 1967.

[114] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko. Weak turbulence of capillary waves. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 8(5) :37–40, 1967.

[115] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. E. Falkovich. *Kolmogorov spectra of turbulence 1. Wave turbulence.*, volume 1. Springer, 1992.

[116] E. Zappa and G. Busca. Comparison of eight unwrapping algorithms applied to fourier-transform profilometry. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(2) :106–116, 2008.

[117] G.M. Zaslavskii and R.Z. Sagdeev. Limits of statistical description of a nonlinear wave field. *Soviet physics JETP*, 25(718–724), 1967.

[118] C. Zener. Internal friction in solids. I. theory of internal friction in reeds. *Physical review*, 52(3) :230, 1937.