Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire d'Informatique et de Mécanique pour les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI)

Thèse de doctorat

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur de l'université Pierre et Marie Curie, spécialité « Mécanique des Fluides »

par

Charles GARNIER

Modélisation numérique des écoulements ouverts de convection naturelle au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé

Thèse soutenue le 03/12/2014 devant le jury composé de :

M.	Eric Chénier	Maître de Conférences, HDR, UPEM	(Rappoteur)
M.	Guillaume Polidori	Professeur des Universités, URCA	(Rapporteur)
M.	Jean-Paul Caltagirone	Professeur émérite, ENSCBP	(Examinateur)
M.	Pierre-Yves Lagrée	DR CNRS, IJLRA	(Examinateur)
M.	Marc Médale	Professeur des Universités, AMU	(Examinateur)
M.	Shihe Xin	Professeur des Universités, INSA Lyon	(Examinateur)
Mme	Anne Sergent	Maître de Conférences, UPMC	(Encadrante)
M.	Patrick Le Quéré	DR CNRS, LIMSI	(Directeur de thèse)

Deux conséquences capitales découlent donc de l'idée de système ouvert : la première est que les lois d'organisation du vivant ne sont pas d'équilibre, mais de déséquilibre, rattrapé ou compensé, de dynamisme stabilisé... La seconde conséquence, peut-être plus majeure encore, est que l'intelligibilité du système doit être trouvée, non seulement dans le système lui-même, mais aussi dans sa relation avec l'environnement, et que cette relation n'est pas qu'une simple dépendance, elle est constitutive du système.

La réalité est dès lors autant dans le lien que dans la distinction entre le système ouvert et son environnement. Ce lien est absolument crucial tant sur le plan épistémologique, méthodologique, théorique, empirique. Logiquement le système ne peut être compris qu'en incluant en lui l'environnement, qui lui est à la fois intime et étranger et fait partie de lui-même tout en lui étant extérieur.

Edgar Morin, Introduction à la pensée complexe, 1990

Orsay, le 13 novembre 2014.

Titre Modélisation numérique des écoulements ouverts de convection naturelle au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé

Résumé Cette thèse porte sur la modélisation numérique des écoulements ouverts de convection naturelle au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant. Elle s'inscrit dans un contexte national de comparaison associant approches numériques (benchmark de la Société Française de Thermique SFT) et expérimentales. La particularité de ce type d'écoulement réside dans le fait que le moteur du mouvement est situé au sein même de l'écoulement, rendant alors difficile la modélisation des interfaces et par conséquent la définition des conditions aux limites à appliquer aux frontières ouvertes du domaine de calcul. Nous proposons ici deux approches numériques de modélisation de ce type d'écoulement. La première approche consiste à inclure à la fois le canal vertical et son environnement extérieur dans le domaine de calcul. Cette approche intègre les interactions canal – environnement extérieur de manière implicite et nous permet d'obtenir une description complète de l'écoulement et ainsi de caractériser les interfaces du canal. Sur la base de ces simulations, des solutions numériques de référence modélisant un écoulement de convection naturelle dans un canal vertical immergé dans un environnement infini sont établies. La deuxième approche consiste à restreindre le domaine de calcul aux limites géométriques du canal. Plusieurs méthodes de résolution et modélisation des interfaces sont alors proposées et comparées avec les solutions de référence précédentes. Une approche originale basée sur des conditions limites de type Robin pour la pression motrice montre ainsi de très bon accords avec les solutions de référence.

Mots-clés convection naturelle ; modélisation numérique ; conditions limites ; écoulements ouverts ; canal vertical ; cheminée

Title Numerical modeling of natural convection in a vertical channel asymmetrically heated

Abstract This thesis focuses on the numerical modeling of natural convection flows in a vertical channel asymmetrically heated at constant heat flux. It takes place in a national context of comparison of numerical approaches (benchmark of the French Thermic Society SFT) and experimental approaches. The main issues result in the fact that the driving forces lie within the computational domain so inlet and outlet flow cannot be a priori prescribed. Therefore it is difficult to model the interfaces and to prescribe boundary conditions at the open frontiers of the computational domain. We propose two numerical approaches for modeling this type of flow. In the first approach the numerical domain includes the vertical channel and its external surroundings in the computational domain. This approach implicitly integrates interactions between the channel and its external environment. This allows us to obtain a complete description of the flow and thus to characterize the channel interfaces. Based on these simulations, numerical reference solutions which are modeling a natural convection flow in a vertical channel immersed in a infinite environment are established. In the second approach the computational domain is restricted to the geometric limits of the channel. Several methods for the numerical resolution and for modeling of the interfaces are proposed and then compared with the previous reference solutions. An original modeling based on Robin boundary conditions for the driving pressure is described and shows very good agreement with the reference solutions.

Keywords natural convection ; numerical modeling ; boundary conditions ; open domain ; vertical channel ; chimney

Table des matières

Table des matières x

Liste des figures xiii

Notations 1

Préface 5

I Introduction générale 7

1 Convection naturelle et effet cheminée : Etat de l'art 9
- 1.1 La convection naturelle . . . 11
  - 1.1.1 Principes physiques . . . 11
  - 1.1.2 Nombres sans dimension . . . 12
  - 1.1.3 Approximation de Boussinesq et mise en équation . . . 13
- 1.2 Le canal vertical : prototype des écoulements ouverts de convection naturelle . . . 14
  - 1.2.1 L'effet cheminée . . . 14
  - 1.2.2 Les écoulements ouverts de convection naturelle . . . 15
- 1.3 Etat de l'art . . . 17
  - 1.3.1 Rappels théoriques : plaque plane verticale . . . 18
  - 1.3.2 Régimes remarquables d'écoulement laminaire . . . 18
  - 1.3.3 Caractérisation de l'écoulement du point de vue thermique . . . 20
  - 1.3.4 Caractérisation de la dynamique de l'écoulement . . . 22
  - 1.3.5 Comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux . . . 23
- Bibliographie . . . 24

2 Configuration d'étude et objectifs 27
- 2.1 Configuration d'étude . . . 29
- 2.2 Adimensionnement des équations . . . 29
- 2.3 Grandeurs caractéristiques . . . 30
- 2.4 Quelques résultats préliminaires sur le canal vertical . . . 31
- 2.5 Objectifs et orientations de l'étude . . . 35
- Bibliographie . . . 36

II Simulation du canal et de son environnement extérieur 37

3 Etat de l'art et modélisation numérique 39
- 3.1 Etat de l'art . . . 41
- 3.2 Motivations et objectifs . . . 43
- 3.3 Configuration d'étude . . . 44
- 3.4 Méthodes numériques . . . 45

3.4.1 Discrétisation temporelle . . . 46
3.4.2 Couplage Vitesse-Pression . . . 46
3.4.3 Conditions limites . . . 48
3.4.4 Discrétisation spatiale . . . 48
Bibliographie . . . 50

4 Etude paramétrique sur la taille de l'environnement extérieur 53
4.1 Régime pleinement développé $Ra = 5.10^3$ . . . 55
4.1.1 Etablissement d'une stratification thermique . . . 56
4.1.2 Similarité des écoulements . . . 57
4.1.3 Evolution temporelle . . . 58
4.1.4 Bouclage entre l'entrée et la sortie . . . 60
4.2 Régime de type couche limite $Ra = 5.10^5$ . . . 60
4.2.1 Similarité des écoulements . . . 62
4.2.2 Oscillation du jet . . . 62
4.3 Conclusion sur l'interaction canal/environnement . . . 63
Bibliographie . . . 64

5 Etablissement de solutions numériques de référence 65
5.1 Evolution temporelle de l'écoulement au sein du canal pour $10^2 \leq Ra \leq 5.10^5$ . . . 67
5.1.1 Observation d'un plateau stationnaire dans le canal pour $10^2 \leq Ra \leq 10^4$ . . . 67
5.1.2 Comportement oscillant pour $Ra > 10^4$ . . . 68
5.1.3 Evolution temporelle des grandeurs globales . . . 68
5.1.4 Conclusion sur l'identification de solution de référence . . . 70
5.2 Influence du nombre de Rayleigh sur les solutions de référence . . . 71
5.2.1 Caractérisation des interfaces canal/environnement . . . 71
5.2.2 Corrélations en fonction du nombre de Rayleigh pour les grandeurs globales . . . 75
Bibliographie . . . 79

6 Comparaison avec l'expérience 81
6.1 Présentation du cas d'étude . . . 83
6.2 Ecoulements sur des temps longs . . . 84
6.3 Ecoulements aux premiers instants . . . 86
6.3.1 Lignes de courant . . . 86
6.3.2 Profils de vitesse verticale aux interfaces . . . 88
6.4 Conclusion . . . 89
Bibliographie . . . 90

III Simulation réduite aux limites géométriques du canal 91

7 Configuration et approche numérique 93
7.1 Configuration d'étude . . . 95
7.2 Discrétisation temporelle et spatiale du problème . . . 96
7.3 Etat de l'art . . . 97
7.4 Opérateur de Stokes . . . 100
7.5 Analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes . . . 100
7.5.1 Aspect mathématique . . . 100
7.5.2 Méthodes numériques . . . 102
Bibliographie . . . 102

8 Principe de superposition 105

8.1 Méthodes numériques . . . 107
8.1.1 Frontières du domaine de calcul . . . 107
8.1.2 Conditions limites et modélisation des interfaces . . . 108
8.1.3 Couplage Vitesse-Pression . . . 109
8.1.4 Implémentation numérique des conditions limites aux interfaces du canal . . . 110
8.2 Résultats de l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes . . . 112
8.3 Principe de superposition . . . 113
8.4 Comparaison des résultats obtenus . . . 115
8.4.1 Comparaison des conditions limites $CLU - DH$ et $CLU - V$ . . . 115
8.4.2 Comparaison avec les solutions de référence . . . 117
8.4.3 Discussion . . . 120
8.5 Conclusion partielle . . . 121
Bibliographie . . . 121

9 Conditions limites de type Bernoulli 123
9.1 Méthodes numériques . . . 125
9.1.1 Frontières du domaine de calcul . . . 125
9.1.2 Conditions limites et modélisation des interfaces . . . 126
9.1.3 Couplage vitesse-pression . . . 127
9.1.4 Implémentation numérique des conditions limites aux interfaces du canal . . . 129
9.1.5 Discussion et analyse des conditions limites . . . 130
9.1.6 Résultat de l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes . . . 130
9.2 Résultats . . . 131
9.2.1 Benchmark numérique . . . 131
9.2.2 Evolution de l'influence des conditions limites en fonction du nombre de Rayleigh 136
9.2.3 Comparaison des résultats avec les solutions numériques de référence d'un canal dans un environnement infini . . . 139
9.3 Conclusion partielle . . . 143
Bibliographie . . . 144

10 Nouvelle approche pour les conditions limites aux interfaces du canal 145
10.1 Bilan des premières approches . . . 147
10.2 Autres approches dans la littérature . . . 147
10.3 Méthodes numériques . . . 149
10.3.1 Conditions limites . . . 149
10.3.2 Frontière du domaine de calcul . . . 151
10.3.3 Algorithme de résolution . . . 152
10.3.4 Implémentation numérique des conditions limites sur la vitesse . . . 154
10.4 Modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal . . . 155
10.4.1 Imposition de la pression motrice extraite des solutions numériques de référence 155
10.4.2 Calcul de la pression par l'intégration de l'équation de quantité de mouvement pour U . . . 157
10.4.3 Condition limite de type Robin pour la pression motrice . . . 158
10.5 Résultats et discussion . . . 161
10.6 Conclusion et perspectives . . . 167
Bibliographie . . . 167

IV Optimisation de l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical 169

11 Optimisation de l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical 171

11.1 Objectifs et configuration d'étude . . . 173
11.2 La méthode de krigeage . . . 174
11.2.1 Principe du krigeage . . . 175
11.2.2 Construction du prédicteur . . . 176
11.2.3 Méthode d'optimisation utilisant le prédicteur de type krigeage . . . 177
11.3 Application de la méthode de krigeage à l'optimisation du canal vertical 178
11.3.1 Fonctions objectifs et variable d'optimisation . . . 178
11.3.2 Méthodes numériques . . . 179
11.4 Résultats . . . 180
11.4.1 Effet d'une ouverture sur le nombre de Nusselt à la paroi chauffée . . . 181
11.4.2 Effet d'une ouverture sur le débit entrant par le bas du canal . . . 182
11.4.3 Simulation non-linéaires des configurations optimales . . . 183
11.5 Conclusion partielle . . . 185
Bibliographie . . . 185

V Conclusions et perspectives **187**

Liste des figures

1.1 Principe physique de la convection naturelle entre deux plaques planes horizontales : cas de la convection de Rayleigh-Bénard . . . 11
1.2 Ligne de courant le long d'une plaque plane verticale chauffée à flux constant (Polidori et al. 2003) . . . 15
1.3 Convection naturelle dans un canal vertical composé de deux plaques planes verticales chauffées à température constante (Bejan 1994) . . . 15
1.4 Configuration prototype des écoulements semi-confinés de convection naturelle 16
1.5 Iso-contours de la vitesse verticale moyenne pour un chauffage symétrique à température constante à $Ra_{T,H} = 4.10^6$ (gauche) et asymétrique à $Ra_{T,H} = 2.10^6$ (droite) (Habib et al. 2002) . . . 19
1.6 Evolution du nombre de Nusselt en fonction du Rayleigh : (A) régime pleinement développé, (B) régime de type couche limite (Bodia et Osterle 1962) ($Pr = 0.7$) . . . 19
1.7 Photographie du régime de type couche limite avec zone de recirculation Sparrow et al. (1984) ($Ra_{T,L} \approx 8.10^4$, $Pr = 5$, $Rf_c = 15.2$) . . . 20
1.8 Nusselt expérimental en fonction du nombre de Rayleigh et corrélations associées Sparrow et Azevedo (1985) ($Pr = 5$ et $S/H = 1/Rf_c$) . . . 21

2.1 Configuration du canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant . . . 29
2.2 Evolution théorique de $\overline{T}(y)$ et $\overline{P}(y)$ pour $Ra = 100$, $Pr = 7.85$, $G_{in}(y = 0) = 0.456$, $\alpha_T = 1$, $Rf_c = 10$ et $\Delta P = 0$ . . . 33
2.3 Evolution théorique de $G_{in}(y = 0)$ en fonction de ΔP pour $Ra = 100$, 500, 1000, $Pr = 7.85$ et $Rf_c = 10$, $\alpha_T(x) \approx 1$ . . . 34

3.1 Configuration d'étude et conditions limites utilisées par Kettleborough (1972) . 41
3.2 Configuration d'étude CE pour le canal et son environnement extérieur . . . 45
3.3 Schéma maillage décalé . . . 50

4.1 Champ de température (gauche) et de pression motrice (droite) dans le réservoir à différents instants ($t = 25,\ 50,\ 100$) pour $Ra = 5.10^3$ . . . 56
4.2 Evolution temporelle de la vitesse verticale et de la température pour les cas $CE10$, $CE40$, $CE160$, $CE640$ en 3 points au sein du canal ($X1$, $X2$, $X3$) et 3 points dans le réservoir ($X4$, $X5$, $X6$) pour $Ra = 5\,10^3$ . . . 59
4.3 Champ du gradient de pression motrice $\frac{\partial P}{\partial y}$ dans le réservoir à $t = 50,\ 100$ pour $Ra = 5.10^3$ . . . 60
4.4 Détails autour du canal (température et ligne de courant) à $t = 50$ pour $Ra = 5.10^3$ . . . 60
4.5 Champ de température dans le réservoir et détails autour du canal à différents instants ($t = 100,\ 200,\ 275$) pour $Ra = 5.10^5$ . . . 61
4.6 Evolution temporelle de la vitesse verticale pour les cas $CE160$, $CE640$ en 3 points au sein du canal ($X1$, $X2$, $X3$) et 3 points dans le réservoir ($X4$, $X5$, $X6$) pour $Ra = 5.10^5$ . . . 63

5.1 Evolution temporelle de la vitesse verticale aux points X_5 , X_1 , X_2 , X_3 pour Ra variant de 10^2 à 5.10^5 . . . 67
5.2 Evolution temporelle de la vitesse verticale aux points X_5 et X_2 , X_3 pour $Ra = 5.10^4$ et 5.10^5 . . . 68
5.3 Evolution temporelle du débit entrant par le bas du canal $G_{in}(y = 0)$, de la température débitante à l'interface haute du canal $T_{bulk}(y = Rf_c)$ et du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffé $\overline{Nu_1}$ pour Ra variant de 10^2 à 10^4 . . . 69
5.4 Evolution temporelle du débit entrant par le bas du canal $G_{in}(y = 0)$, de la température débitante à l'interface haute du canal T_{bulk} et du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffé $\overline{Nu_1}$ pour $Ra = 5.10^4$ et 5.10^5 . . . 69
5.5 Evolution temporelle de l'écart de pression motrice moyen entre l'interface haute et basse du canal $\Delta P = P_{top} - Pbot$ pour Ra variant de 10^2 à 5.10^5 . . . 70
5.6 Champ de vitesse verticale V autour de l'interface basse du canal . . . 71
5.7 Champ de vitesse horizontale U autour de l'interface basse du canal . . . 71
5.8 Profil de vitesse verticale V à l'interface basse du canal . . . 72
5.9 Profil de vitesse horizontale U à l'interface basse du canal . . . 72
5.10 Champ de vitesse verticale V autour de l'interface haute du canal . . . 72
5.11 Profil de vitesse verticale V à l'interface haute du canal . . . 73
5.12 Profil de vitesse horizontale U à l'interface haute du canal . . . 73
5.13 Champ de pression motrice P autour de l'interface basse du canal . . . 74
5.14 Profil de pression motrice P autour de l'interface haute du canal . . . 74
5.15 Champ de pression motrice P autour de l'interface haute du canal . . . 74
5.16 Profil de pression motrice P proche de l'interface haute du canal . . . 75
5.17 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée en fonction du nombre de Rayleigh . . . 75
5.18 Evolution du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal en fonction du nombre de Rayleigh . . . 76
5.19 Evolution de $T_{bulk}\, G_{in}(y = 0)$ en fonction du nombre de Rayleigh . . . 77
5.20 Evolution de l'écart de pression motrice moyenne ΔP entre les interfaces du canal en fonction du nombre de Rayleigh . . . 77
5.21 Evolution de K_{bot} et K_{top} en fonction du nombre de Rayleigh . . . 78
5.22 Evolution de $(P_{top} - P_{top})\, A^{-1}$ avec $A = \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} G_{in}(y = 0)^2$ et de $(P_{top} - P_{top})\, B^{-1}$ avec $B = G_{in}(y = 0)^2$ en fonction du nombre de Rayleigh . . . 78

6.1 Configuration expérimentale (Ospir et al. 2012, Polidori et al. 2014) . . . 83

6.2 Modélisation numérique de l'expérience de Ospir et al. (2012) et Polidori et al. (2014) . . . 84
6.3 Champ de température au sein du réservoir et lignes de courant à $t = 10\ min$. 85
6.4 Champ de température au sein du réservoir et lignes de courant à $t = 20\ min$. 85
6.5 Champ de température au sein du réservoir et lignes de courant à $t50\ min$ . . . 86
6.6 Lignes de courant au sein du canal à $t = 60,\ 90,\ 120,\ 180,\ 240,\ 270,\ 300$ pour $Ra = 11.4 \cdot 10^6$. En haut : résultats numériques, en bas : résultats expérimentaux Polidori et al. (2014) . . . 87
6.7 Résultats numériques : profil de vitesse verticale à l'interface basse du canal à $t = 20,\ 40,\ 60,\ 90,\ 120,\ 180,\ 240,\ 270,\ 300$ pour $Ra = 11.4 \cdot 10^6$ . . . 88
6.8 Résultats expérimentaux Polidori et al. (2014) : profil de vitesse verticale à l'interface basse du canal à $t = 60,\ 120$ et $180\ s$ pour $Ra = 11.4 \cdot 10^6$ . . . 88
6.9 Résultats numériques : profil de vitesse verticale à l'interface haute du canal pour $t = 20,\ 40,\ 60,\ 90,\ 120,\ 180,\ 240,\ 270,\ 300$ pour $Ra = 11.4 \cdot 10^6$ . . . 89
6.10 Résultats expérimentaux Polidori et al. (2014) : profil de vitesse verticale à l'interface haute du canal pour $t = 60,\ 120$ et 180 pour $Ra = 11.4 \cdot 10^6$ . . . 89

7.1 Configuration du canal vertical asymétriquement chauffé sans son environnement extérieur . . . 95
7.2 Schéma maillage décalé . . . 96
7.3 Diagramme de Strang (Strang 1980) . . . 101

8.1 Frontière du domaine de calcul : interface haute et basse sur les noeuds de la vitesse verticale . . . 107
8.2 Mode 2 du noyau de l'opérateur de Stokes : cas $CLU - V$ . . . 112
8.3 Evolution de ξ_2 en fonction du temps ($Pr = 7.85$ et $Ra = 5.10^3$) . . . 115
8.4 Comparaison des champs U, V, et P au sein du canal pour $Ra = 5.10^5$ . . . 116
8.5 Comparaison des profils de V et P aux interfaces basse et haute du canal pour $Ra = 5.10^5$ . . . 116
8.6 Comparaison de l'évolution temporelle de $G_{in}(y = 0)$ entre $CLU - V$ et $CE640$. 117
8.7 Comparaison de V entre $CLU - V$ et $CE640$ $Ra = 5.10^5$ . . . 118
8.8 Comparaison de P à l'interface basse (gauche), à l'interface haute (milieu) et le long de la ligne médiane $x = 0$ (droite) pour $Ra = 5.10^5$. Interface basse : trait plein ($y = 0$), trait pointillé ($y = 0.12$) et trait mixte ($y = 0.24$). Interface haute : trait plein ($y = Rf_c = 10$), trait pointillé ($y = 9.88$) et trait mixte ($y = 9.76$) . . . 119
8.9 Comparaison de U à l'interface basse (gauche) et à l'interface haute (droite) pour $Ra = 5.10^5$. Interface basse : trait plein ($y = 0$), trait pointillé ($y = 0.12$) et trait mixte ($y = 0.24$). Interface haute : trait plein ($y = Rf_c = 10$), trait pointillé ($y = 9.88$) et trait mixte ($y = 9.76$) . . . 119
8.10 Comparaison de U le long de la ligne $x = -0.375$ et de $\frac{\partial U}{\partial y}$ à différentes hauteurs près de l'interface basse pour $Ra = 5.10^5$. Trait plein ($y = 0$), trait pointillé ($y = 0.12$) et trait mixte ($y = 0.24$) . . . 120
8.11 Profil de la composante tangentielle τ du vecteur des contraintes à l'interface basse pour $CE640$ . . . 120

9.1 Frontière du domaine de calcul : interface haute et basse sur les noeuds scalaires de la pression motrice . . . 125
9.2 Champs de pression motrice au sein du canal et profil le long de la ligne médiane $x = 0$ pour les conditions limites GB, $GB0$, LB et $LB0$ ($Ra = 5.10^5$ et $Pr = 0.71$) . . . 134
9.3 Champs de vitesse verticale au sein du canal pour les conditions limites GB, $GB0$, LB et $LB0$ ($Ra = 5.10^5$ et $Pr = 0.71$) . . . 135

9.4 Champs de vitesse horizontale au sein du canal pour les conditions limites GB, $GB0$, LB et $LB0$ ($Ra = 5.10^5$ et $Pr = 0.71$) . . . 136
9.5 Evolution du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, $LB0$, GB et $GB0$ . . . 137
9.6 Evolution du débit de fluide sortant par l'interface haute du canal $G_{out}(y = Rf_c)$ en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, $LB0$, GB et $GB0$ . . . 137
9.7 Evolution du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal $G_{in}(y = 0)$ en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, $LB0$, GB et $GB0$ . . . 138
9.8 Evolution de la longueur de pénétration de la zone de recirculation L_p en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, $LB0$, GB et $GB0$ . . . 138
9.9 Comparaison de V aux interfaces basse ($y = 0$) et haute ($y = Rf_c$) du canal entre le cas LB et $CE640$ pour $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$ . . . 139
9.10 Comparaison de V le long de la ligne médiane ($x = 0$) du canal entre le cas LB et $CE640$ pour $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$ . . . 140
9.11 Comparaison de P à différentes hauteurs près de l'interface haute pour $Ra = 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. Pour l'interface basse : trait plein $y = 0$, trait pointillé $y = 0.12$ et trait mixte $y = 0.24$. Pour l'interface haute : trait plein $y = Rf_c$, trait pointillé : $y = 9.88$ et trait mixte $y = 9.76$ . . . 141
9.12 Comparaison de P le long de la ligne médiane ($x = 0$) du canal entre le cas LB et $CE640$ pour $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$ . . . 142
9.13 Comparaison de U à différentes hauteurs près de l'interface basse pour $Ra = 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. Trait plein : $y = 0$, trait pointillé : $y = 0.12$ et trait mixte $y = 0.24$ . . . 142

10.1 Frontière du domaine de calcul . . . 152
10.2 Comparaison de U aux interfaces haute et basse du canal entre les cas IC_stress, IC_P, LB et $CE640$ pour $Ra = 5.10^3,\ 5.10^5$ . . . 156
10.3 Comparaison de V aux interfaces haute et basse du canal entre les cas IC_stress, IC_P, LB et $CE640$ pour $Ra = 5.10^3,\ 5.10^5$ . . . 157
10.4 Schéma de principe pour la modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal . . . 159
10.5 Profil de L_{bot} et L_{top} pour les solutions numériques de référence $CE640$ . . . 160
10.6 Comparaison de V aux interfaces hautes ($y = Rf_c$) et basse ($y = 0$) du canal entre le cas RBC et les solutions de référence pour $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$ . . . 162
10.7 Comparaison du champ de vitesse verticale (gauche) et de la vitesse verticale le long de la ligne médiane $x = 0$ (droite) entre les cas RBC et $CE640$ pour $Ra = 5.10^5$. $L_P = 3.413$ pour RBC et $L_P = 3.401$ pour $CE640$ . . . 163
10.8 Comparaison de P à différentes hauteurs près de l'interface haute et basse pour $Ra = 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. Interface basse : trait plein : $y = 0$, trait pointillé : $y = 0.12$ et trait mixte $y = 0.24$. Interface haute : trait plein : $y = Rf_c = 10$, trait pointillé : $y = 9.88$ et trait mixte $y = 9.76$ . . . 165
10.9 Comparaison du champ de pression motrice (gauche) et de la pression motrice le long de la ligne médiane $x = 0$ (droite) entre les cas RBC et $CE640$ pour $Ra = 5.10^5$ . . . 165
10.10 Comparaison de U à différentes hauteurs près de l'interface haute et basse pour $Ra = 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. Interface basse : trait plein : $y = 0$, trait pointillé : $y = 0.12$ et trait mixte $y = 0.24$. Interface haute : trait plein : $y = Rf_c = 10$, trait pointillé : $y = 9.88$ et trait mixte $y = 9.76$ . . . 166

10.11Comparaison de U le long de la ligne $x = -0.375$ et de $\frac{\partial U}{\partial y}$ à l'interface basse entre RBC et $CE640$ pour $Ra = 5.10^5$. 166

11.1 Configuration du canal vertical asymétriquement chauffé avec une ouverture sur la paroi non chauffée 173
11.2 Visualisation de l'écoulement dans le canal en présence d'une ouverture au niveau de la zone de recirculation. A gauche : résultat expérimental (Azevedo et Sparrow 1986), à droite : résultat numérique issu d'une simulation numérique directe 181
11.3 Cartographie du nombre de Nusselt $\overline{Nu_1}$ en fonction de d et b obtenue à l'aide du prédicteur $\tilde{Y_1}$ 182
11.4 Cartographie du débit entrant par l'interface basse du canal $G_{in}(y = 0)$ en fonction de d et b obtenue à l'aide du prédicteur $\tilde{Y_2}$ 183
11.5 Résultats des simulations non-linéaires des configurations optimales et de la configuration de base 184

Notations

Nombres sans dimension

Gr	nombre de Grashof	-
Nu	nombre de Nusselt	-
Nu_1	nombre de Nusselt avec $T_{ref} = 0$	-
Nu_2	nombre de Nusselt avec $T_{ref} = T_{bulk}$	-
$\overline{Nu_1}$	nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée	-
$\overline{Nu_2}$	nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée	-
Pr	nombre de Prandtl	-
Rf	rapport de surface entre le réservoir et le canal	-
Rf_c	rapport d'aspect du canal	-
Rf_t	rapport d'aspect du réservoir	-
Ra	nombre de Rayleigh	-
Ra_m	nombre de Rayleigh modifié	-
Ra''_q	nombre de Rayleigh pour un flux de chaleur imposé	-
Ra_T	nombre de Rayleigh pour une température imposée	-
$Ra_{*,H}$	nombre de Rayleigh basé sur la hauteur	-
$Ra_{*,L}$	nombre de Rayleigh basé sur la largeur	-

Lettres latines

b	largeur de l'ouverture du côte de la paroi non chauffée	-
C_p	capacité thermique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
d	distance entre l'ouverture et l'interface basse du canal	-
d_{top}	distance l'interface haute du canal et le réservoir	-
$D = \{x_1, ..., x_m\}$	Plan d'expérience	-
e	épaisseur adimensionnelle des parois du canal	-
E	espace des paramètres d'optimisation	-
$\vec{e_x}$	direction horizontale	-
$\vec{e_y}$	direction verticale	-
g	accélération de la gravité	$m^2.s^{-1}$
G	débit adimensionné	-
G_{CL}	débit de référence pour la couche limite	-
$G_{in}(y = 0)$	débit adimensionnel entrant par l'interface basse du canal	-
$G_{in}(y = Rf_c)$	débit adimensionnel entrant par l'interface haute du canal	-
$G_{out}(y = Rf_c)$	débit adimensionnel sortant par l'interface haute du canal	-

h	coefficient d'échange convectif	$W.m^{-2}.K^{-1}$
H	hauteur caractéristique	m
H_c	hauteur du canal	m
H_t	hauteur du réservoir	m
k	nombre de paramètres d'entrée pour l'optimisation	-
K_θ	fonction de corrélation spatiale	-
L	longueur caractéristique	m
L_{ref}	longueur de référence	-
L_c	largeur du canal	m
L_t	largeur du réservoir	m
$\mathbf{n}$	vecteur normale	$-$
p	pression	Pa
p_m	pression motrice	Pa
P	pression motrice adimensionnelle	-
$\overline{P}$	pression motrice moyenne dans la section droite du canal	-
P_{bot}	pression motrice adimensionnelle moyenne à l'interface basse du canal	-
P_{ext}	pression motrice adimensionnelle du milieu extérieur	-
P_{ref}	pression motrice de référence	-
P_{top}	pression motrice adimensionnelle moyenne à l'interface haute du canal	-
q''	densité de flux	$W.m^{-2}$
$\mathbf{S}$	opérateur de Stokes discret	-
S_c	surface adimensionnelle du canal	-
S_t	surface adimensionnelle du réservoir	-
t	temps adimensionnel	-
t_c	temps caractéristique pour l'impact du panache thermique	-
t_{dev}	temps de développement de l'écoulement au sein du canal	-
t_f	temps de fin de simulation	-
t_{ref}	temps de référence	-
t_0	temps de début de simulation	-
T	température adimensionnelle	-
T_{bulk}	température de mélange adimensionnelle	-
$< T >$	température adimensionnelle moyenne dans le réservoir	-
$\overline{T}$	température moyenne dans la section droite du canal	-
u	vitesse horizontale	$m.s^{-1}$
U	vitesse horizontale adimensionnelle	-
$\mathbf{v}$	champ de vitesse 2D	$m.s^{-1}$
$\mathbf{V}$	champ de vitesse 2D adimensionnel	-
v	vitesse verticale	$m.s^{-1}$
V	vitesse verticale adimensionnelle	-
V_{CL}	vitesse de référence pour la couche limite	-
$\mathbf{V}^*$	champ de vitesse 2D prédit	-
V_{ref}	vitesse de référence	$m.s^{-1}$
x_{opt}	vecteur de paramètres optimaux	-
$y(x)$	sortie de la fonction boîte noire	-
y_{moy}	valeur moyenne de $y(x)$	-
$Y(x)$	fonction boîte noire	-
$\tilde{Y}(x)$	prédicteur de krigeage	-

$Z(x)$	processus gaussien de moyenne nulle	-

Lettres Grecques

α	diffusivité thermique	$m^2.s^{-1}$
β	coefficient de dilatation thermique isobare	K^{-1}
Γ	frontière du domaine de calcul	-
Δ_t	pas de temps adimensionnel	-
δ_T	épaisseur de la couche limite thermique	m
$\Delta\theta$	écart de température	K
ΔT	écart de température adimensionnelle	-
ΔP	écart de pression adimensionnelle moyenne entre les interfaces du canal	$-$
θ	température	K
θ_f	température du fluide	K
θ_p	température du fluide à la paroi	K
θ_{ext}	température de référence	K
λ	conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
μ	viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν	viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
ξ	paramètre pour le principe de superposition	-
ρ	masse volumique	$kg.m^3$
σ	tenseur des contraintes	-
τ	composante tangentielle du vecteur des contraintes	-
ϕ	incrément de pression	-
ψ	potentiel scalaire	-
ω	vorticité	-
Ω	domaine de calcul	-

Préface

Dans de nombreux systèmes industriels, la convection naturelle est un des principaux phénomènes de transfert d'énergie. La maîtrise et la compréhension des phénomènes liés à la convection naturelle sont ainsi des enjeux majeurs dans la conception et le dimensionnement de ces systèmes. Une part importante des dispositifs industriels tels que le mur Tombe, la cheminée solaire, le refroidissement de panneaux photovoltaïques ou encore le refroidissement des circuits imprimés correspondent à des géométries ouvertes. Par exemple pour le mur Trombe, le fluide est aspiré du milieu extérieur sous l'effet cheminée et permet de transférer au fluide la puissance thermique absorbée par le système. Dans la littérature, ces systèmes semi-confinés sont représentés par un canal vertical chauffé symétriquement ou asymétriquement à température ou flux de chaleur imposé. Depuis les années 1940, ce type de configuration a largement été étudiée tant numériquement qu'expérimentalement. Malgré la littérature existante, les problèmes de convection naturelle en milieu ouvert ou semi-confiné apparaissent encore aujourd'hui comme étant particulièrement délicat à résoudre numériquement. En effet dans ce type d'écoulement, les conditions limites aux interfaces canal/environnement extérieur ne sont *a priori* pas connues car le moteur de l'écoulement se situe au sein même de la configuration d'étude. De plus, les interfaces peuvent jouer à la fois le rôle d'entrée et de sortie pour le fluide.

Plusieurs types de condition limite ont ainsi été proposées : pression motrice et vitesse horizontale uniformément nulle aux interfaces, pression motrice de type Bernoulli, vitesse verticale uniforme, vitesse verticale parabolique, ... Cependant, il n'existe toujours pas de condition limite de référence pour modéliser au plus proche la physique de l'écoulement aux interfaces canal/environnement extérieur. Cette difficulté majeure est liée au fait que le problème étudié est tronqué de son environnement extérieur. Pour contourner cette difficulté, de nombreux auteurs ont étudié un canal vertical et son environnement extérieur. L'intérêt de ce type de simulation est d'aussi de se rapprocher au plus près des conditions expérimentales et de quantifier les différents effets liés au milieu extérieur. De plus, cette approche peut permettre d'apporter des informations supplémentaires pour la définition des conditions aux limites d'un calcul restraint au canal seul. Cependant, pour ce type de configuration, des difficultés quant au choix des conditions limites pour l'environnement extérieur peuvent aussi se poser (réservoir fermé, réservoir ouvert, extensions aux interfaces du canal). De plus, l'influence du milieu extérieur sur l'écoulement au sein du canal doit être quantifié.

Ce travail de thèse s'inscrit dans la continuité des travaux existants. Notre configuration d'étude est un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant. L'objectif de cette thèse est double puisque l'on s'intéresse non seulement à la connaissance physique des interfaces et à leur modélisation mais aussi aux difficultés numériques pouvant résulter de l'implémentation des conditions limites aux interfaces entre le canal et son environnement extérieur. Les deux approches évoquées pour la simulation numérique (canal seul ou canal avec environnement) sont considérés. La démarche proposée dans ce travail consiste à étudier dans un premier temps le canal vertical plongé au milieu d'un réservoir fermé afin d'établir des solutions numériques de référence approchant l'écoulement dans un canal vertical plongé dans un environnement infini. Dans un deuxième temps, différentes modélisations

des interfaces sont étudiées et les résultats obtenus comparés avec nos solutions numériques de référence. La caractérisation de celles-ci permet de mieux appréhender l'écoulement aux interfaces du canal et ainsi de proposer une nouvelle approche pour la modélisation de la pression motrice basée sur des conditions limites de type Robin.

Ce manuscrit se divise en quatre parties. La partie I est une introduction générale sur les écoulements de convection naturelle en milieu semi-confinés. La configuration d'étude considérée dans ce travail est présentée et les difficultés de modélisation liées à celle-ci sont abordées. La fin de cette partie présente en détail les objectifs et orientations de cette thèse. La partie II est consacrée à l'étude d'un canal vertical plongé dans un réservoir fermé. L'objectif de cette partie est double : i) caractériser les interactions entre le canal et son environnement, ii) établir des solutions numériques de référence pour l'écoulement au sein du canal. La partie III compare différentes méthodes de résolution et différentes modélisation des interfaces du canal. Le dernier chapitre de cette partie propose une nouvelle approche pour la modélisation de la pression motrice aux interfaces. Enfin, la partie IV propose un exemple de problème d'optimisation pour l'intensification des transferts thermiques et du contrôle de l'écoulement de convection naturelle au sein du canal grâce à une ouverture sur la paroi non chauffée du canal. Il faut voir cette partie comme un exemple d'application possible lorsque la connaissance de l'écoulement aux interfaces canal/environnement et la modélisation associée sera suffisante.

Première partie

Introduction générale

1

Convection naturelle et effet cheminée : Etat de l'art

Sommaire

1.1 La convection naturelle . . . 11
1.1.1 Principes physiques . . . 11
1.1.2 Nombres sans dimension . . . 12
1.1.3 Approximation de Boussinesq et mise en équation . . . 13
1.2 Le canal vertical : prototype des écoulements ouverts de convection naturelle . . . 14
1.2.1 L'effet cheminée . . . 14
1.2.2 Les écoulements ouverts de convection naturelle . . . 15
1.3 Etat de l'art . . . 17
1.3.1 Rappels théoriques : plaque plane verticale . . . 18
1.3.2 Régimes remarquables d'écoulement laminaire . . . 18
1.3.3 Caractérisation de l'écoulement du point de vue thermique . . . 20
1.3.4 Caractérisation de la dynamique de l'écoulement . . . 22
1.3.5 Comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux . . . 23
Bibliographie . . . 24

Dans un premier temps, ce chapitre expose les phénomènes physiques mis en jeu dans notre étude et les nombres sans dimension associés. L'approximation de Boussinesq est introduite et les équations gouvernant les phénomènes de convection naturelle sont présentées. Dans un deuxième temps, nous décrivons l'effet cheminée et le canal vertical, prototype des écoulements ouverts de convection naturelle, est présenté. Les difficultés liées à la modélisation des écoulements ouverts sont ensuite mises en évidence. La fin de ce chapitre est consacré à l'état de l'art des études expérimentales et numériques sur les écoulements ouverts de convection naturelle en milieu semi-confinés.

1.1 La convection naturelle

1.1.1 Principes physiques

La convection est le mode de transfert thermique privilégié entre un solide et un liquide ou un gaz. Elle est caractérisée par un transfert de chaleur associé au mouvement du fluide. On distingue trois types d'écoulements convectifs :

- la convection forcée pour laquelle le mouvement du fluide est imposé par une force extérieure (pompe, soufflerie, ...),
- la convection naturelle où le mouvement du fluide a pour origine un gradient de densité du fluide (par exemple à cause d'un gradient de température, de salinité, de concentration, d'un mélange de fluides, ...),
- la convection mixte où le mouvement du fluide résulte de la combinaison de la convection forcée et de la convection naturelle.

Dans ce travail, nous sommes uniquement intéressés par le cas de la convection naturelle dont l'origine est un gradient de température au sein du fluide. La poussée d'Archimède est alors la seule force permettant la mise en mouvement du fluide. En effet, la masse volumique étant une fonction décroissante de la température, un gradient de masse volumique apparaît ainsi dans le fluide et la poussée d'Archimède $-\rho g\vec{e_y}$ met en mouvement celui-ci : l'air chaud (plus léger) s'élève et est remplacé par de l'air froid (plus lourd). Ce phénomène est représenté de manière schématique par la figure 1.1 pour un écoulement de convection naturelle de type Rayleigh-Bénard entre deux plaques planes horizontales à température θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 < \theta_2$.

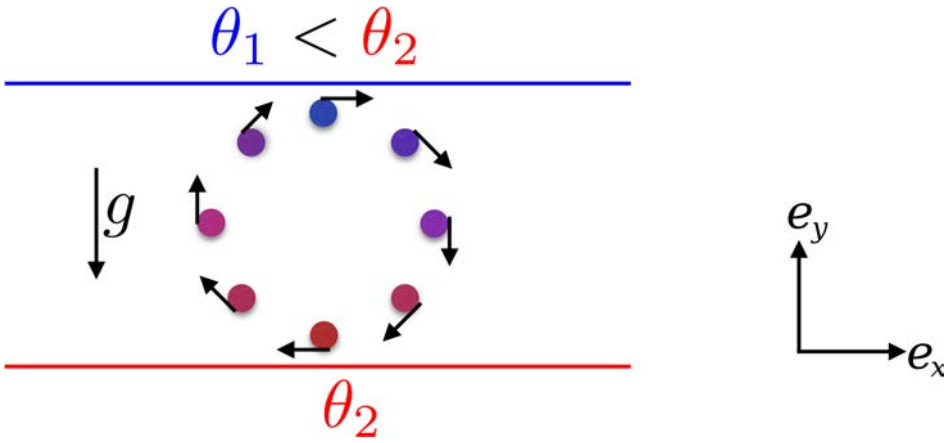


Figure 1.1 – *Principe physique de la convection naturelle entre deux plaques planes horizontales : cas de la convection de Rayleigh-Bénard*

Le phénomène de convection naturelle est présent dans de nombreux systèmes naturels ou industriels tels que dans le refroidissement des circuits électriques, les cheminées solaires, les panneaux photovoltaïques ou la thermique du bâtiment (mur Trombe, paroi double peau, ...). Dans ces systèmes industriels la connaissance du transfert de chaleur est une des clés de la conception et du dimensionnement optimal.

Dans le cas de la convection naturelle, le transfert d'énergie et la dynamique du fluide sont couplés, au contraire de la convection forcée. La résolution couplée du transfert d'énergie et de la dynamique est donc indispensable pour étudier les différents systèmes industriels. Par exemple, dans le cas de la conception des bâtiments, la maîtrise des phénomènes de convection naturelle est un enjeu majeur pour le contrôle passif de la qualité de l'air intérieur. De nombreux auteurs se sont intéressés à la dynamique de ces écoulements (Linden 1999, Hunt et Linden 1999; 2004, Favarolo et Manz 2005, Awbi 1996). D'autres auteurs se sont intéressés aux phénomènes de convection naturelle pour le dimensionnement des cheminées solaires

(Khanal et Lei 2014, Burek et Habeb 2007), de parois double peau (Gan 1998, Safer et al. 2005, Popa et al. 2012, Pasut et De Carli 2012), de panneaux photovoltaïques (Giroux-Julien et al. 2009, Cipriano et al. 2013). Le grand nombre d'études sur la convection naturelle montre l'importance de ce phénomène dans les transferts de chaleur des systèmes industriels. L'étude fine de la convection naturelle ainsi que la modélisation numérique des écoulements associés sont donc des enjeux très importants pour améliorer la compréhension des phénomènes physiques et les outils de prédiction pour la conception et le design des systèmes industriels.

1.1.2 Nombres sans dimension

La majorité des écoulements de convection naturelle peut être caractérisée par deux nombres sans dimension :

- le nombre de Prandtl Pr,
- le nombre de Grashof Gr.

De ces deux nombres sans dimension on peut en déduire le nombre de Rayleigh Ra.

Le transfert de chaleur associé à ces écoulements est lui caractérisé par le nombre de Nusselt Nu.

Le nombre de Prandtl est le rapport entre la viscosité cinématique ν ($m^2.s^{-1}$) et la diffusivité thermique α ($m^2.s^{-1}$). Il compare la rapidité des phénomènes de diffusion thermique et de diffusion visqueuse dans un fluide et s'écrit :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \tag{1.1}$$

Pour un nombre de Prandtl faible, la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse n'influence que très peu le profil de température. A un nombre de Prandtl élevé, le profil de température est fortement influencé par le profil de vitesse.

Le nombre de Grashof compare l'effet de la poussée d'Archimède $-\rho\, g\, \vec{e_y}$ (force motrice) aux forces de viscosité (forces résistives). Il s'écrit :

$$Gr = \frac{g\ \beta\ \Delta\theta\ L^3}{\nu^2}, \tag{1.2}$$

où L (m) est la dimension caractéristique du système étudié, $\Delta\theta$ (K) l'écart de température caractéristique, g ($m.s^{-2}$) l'accélération de la gravité, β (K^{-1}) le coefficient de dilatation thermique isobare et ν la viscosité cinématique.

Le nombre de Rayleigh est une variante du nombre de Grashof. Lorsque le nombre de Rayleigh est faible les forces de diffusion thermique et visqueuse sont prépondérantes et le transfert de chaleur s'effectue principalement par conduction. Le nombre de Rayleigh s'exprime de la manière suivante :

$$Ra_T = Pr\ Gr = \frac{g\ \beta\ \Delta\theta\ L^3}{\alpha\ \nu}, \tag{1.3}$$

pour un écoulement à température imposée. Lorsque l'on s'intéresse à un écoulement à flux de chaleur imposé, le nombre de Rayleigh s'écrit :

$$Ra_{q''} = \frac{g\ \beta\ q''\ L^4}{\alpha\ \nu\ \lambda}, \tag{1.4}$$

où q'' $(W.m^{-2})$ est la densité de flux de chaleur imposé et λ $(W.m^{-1}.K^{-1})$ la conductivité thermique du fluide.

Remarque 1.1 *On peut définir plusieurs nombres de Rayleigh basés sur une dimension caractéristique du système étudié. L'indice $_L$ fait référence à une largeur et l'indice $_H$ fait référence à une hauteur. On notera ainsi les différents nombres de Rayleigh $Ra_{T,L}$, $Ra_{T,H}$, $Ra_{q'',L}$ et $Ra_{q'',H}$.*

Le nombre de Nusselt représente le rapport entre le transfert thermique total et le transfert thermique par conduction. Il s'agit en fait du transfert de chaleur sans dimension. Si la conduction est le mode de transfert prépondérant alors le nombre de Nusselt tendra vers 1, si l'influence de la convection est importante le nombre de Nusselt tendra vers $+\infty$. Le nombre de Nusselt s'écrit comme :

$$Nu = \frac{h\,L}{\lambda}, \tag{1.5}$$

où h $(W.m^{-2}.K^{-1})$ est le coefficient d'échange convectif. Ce coefficient d'échange de chaleur par convection dépend de l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système. Au contact d'une paroi solide, la densité de flux de chaleur transmise au fluide est donnée par :

$$q'' = h \times (\theta_p - \theta_f), \tag{1.6}$$

où θ_p (K) est la température du fluide à la paroi et θ_f (K) la température du fluide au loin de la paroi. Dans le cas de la convection naturelle l'ordre de grandeur de h est de $10\,W.m^{-2}.K^{-1}$.

1.1.3 Approximation de Boussinesq et mise en équation

Dans ce travail, la modélisation physique de la convection naturelle est effectuée en considérant valide l'approximation de Boussinesq. Cette approximation s'énonce comme telle : *"Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g, tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci" (Boussinesq 1903).*

Cette approximation suppose alors les hypothèses suivantes (Gray et Giorgini 1976) :

- la masse volumique du fluide est constante, exceptée dans le terme de la poussée d'Archimède et ne dépend que des variations de température (l'influence des variations de pression sur la masse volumique est négligée),
- les autres propriétés thermophysiques du fluide sont constantes,
- la dissipation de chaleur due à la viscosité du fluide est négligeable.

De cette manière le terme relatif à la poussée d'Archimède $-\rho\,g\,\vec{e_y}$ s'écrit :

$$-\rho(\theta)\,g\,\vec{e_y} = -\rho_\infty g(1-\beta(\theta-\theta_\infty))\,\vec{e_y} + o(\theta-\theta_\infty) \tag{1.7}$$

où ρ_∞, θ_∞ et β sont respectivement la masse volumique de référence, la température de référence et le coefficient de dilatation thermique isobare. L'hypothèse de Boussinesq est valable sur un intervalle de température $\Delta\theta$ défini autour d'une température de référence (θ_∞) :$[\theta_\infty - \Delta\theta; \theta_\infty + \Delta\theta]$.

Les principaux critères devant être vérifiés afin de pouvoir appliquer l'approximation de Boussinesq sont (Tritton 1988) :

- $\alpha\,\Delta\theta \ll 1$: le changement de densité de fluide dû à l'expansion thermique doit être négligeable,

- $\rho\, g\, \beta\, L \ll 1$: l'influence des variations de pression sur la masse volumique doit être négligeable,
- $\dfrac{g\, \alpha\, L}{C_p} \ll 1$: la dissipation de chaleur due à la viscosité du fluide doit être négligeable.

Les équations de Navier-Stokes sous les hypothèses de Boussinesq s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \rho_\infty \left[\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \,.\, \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla(p + \rho_\infty\, g\, y) + \mu \triangle \mathbf{v} + \beta(\theta - \theta_\infty)\, \vec{e_y}, \\ \rho_\infty C_p \left[\dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \,.\, \nabla\, \theta \right] = \lambda \triangle \theta, \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse ($m.s^{-1}$), p (Pa) la pression et θ (K) la température. En $2D$ on a $\mathbf{v} = (u, v)$ avec u ($m.s^{-1}$) la composante horizontale de la vitesse et v ($m.s^{-1}$) la composante verticale de la vitesse. On peut définir la pression motrice $p_m = p + \rho_\infty\, g\, y$ où $-\rho_\infty\, g\, y$ est la pression hydrostatique. Dans le cas d'un écoulement à l'équilibre hydrostatique la pression motrice est nulle. La pression motrice peut ainsi être vue comme l'écart par rapport à la pression hydrostatique.

1.2 Le canal vertical : prototype des écoulements ouverts de convection naturelle

Les écoulements de convection naturelle peuvent se diviser en quatre grandes catégories d'écoulement :

- les écoulements externes de type couche limite en milieu infini (ex : plaque plane verticale),
- les écoulements confinés dans une enceinte fermée (ex : cavité différentiellement chauffée),
- les écoulements de type panache lorsqu'il n'y a pas de paroi à proximité (ex : barreau chauffé dans un environnement infini),
- les écoulements confinés dans des enceintes partiellement ouvertes (ex : canal vertical).

Dans ce travail, nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation numérique des écoulements de convection naturelle dans des enceintes partiellement ouvertes. Dans la littérature, ces écoulements sont très souvent représentés par un canal vertical dont les parois latérales sont chauffées symétriquement ou asymétriquement à température imposée ou à flux de chaleur imposé. Cette configuration simplifiée des systèmes industriels est étudiée à la fois expérimentalement et numériquement depuis les années 1940 avec notamment les travaux d'Elenbaas (1942).

1.2.1 L'effet cheminée

Pour un écoulement de convection naturelle le long d'une plaque plane verticale chauffée à température ou flux de chaleur constant, la couche limite thermique se formant le long de la plaque (le fluide chaud monte) est alimentée en fluide froid par du fluide venant de la direction perpendiculaire à la paroi (direction horizontale) comme le montre la figure 1.2. Si une seconde paroi verticale est ajoutée suffisamment proche en vis-à-vis de la paroi chauffée alors l'aspiration de fluide froid dans la direction horizontale n'est plus possible. L'alimentation en fluide froid s'effectue donc dans la direction verticale créant ainsi une aspiration de fluide

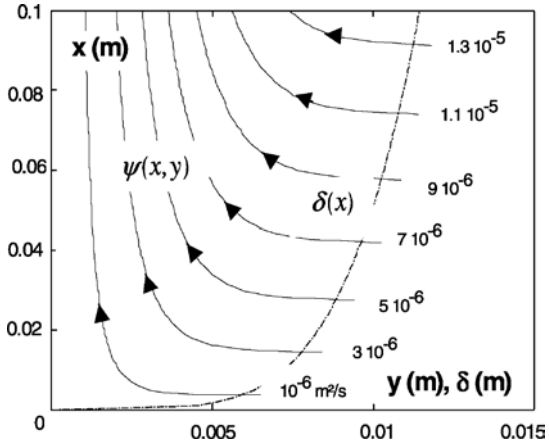


FIGURE 1.2 – *Ligne de courant le long d'une plaque plane verticale chauffée à flux constant (Polidori et al. 2003)*

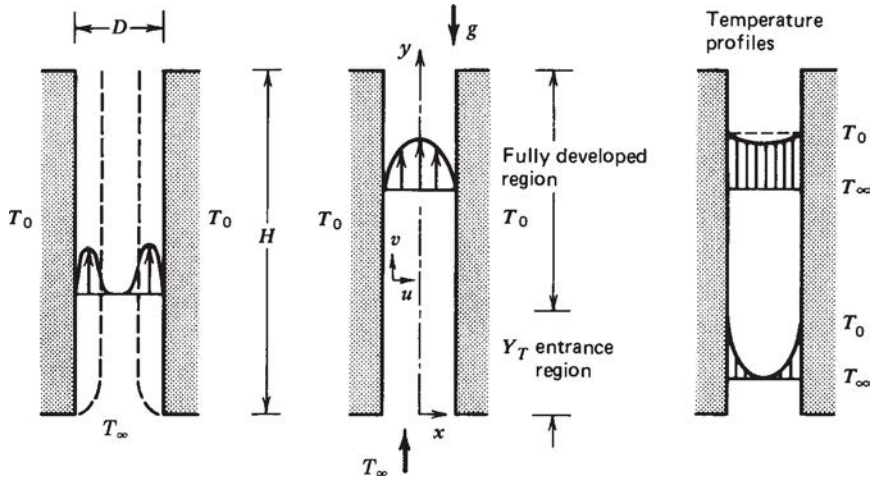


FIGURE 1.3 – *Convection naturelle dans un canal vertical composé de deux plaques planes verticales chauffées à température constante (Bejan 1994)*

entre les deux plaques verticales (voir figure 1.3). Si l'épaisseur de la couche limite δ_T est plus faible que la demi-largeur du canal alors un régime de couche limite est observé. Si l'épaisseur de la couche limite est plus grande que la demi-largeur du canal alors un régime pleinement développé est observé. Dans le cadre d'un écoulement à température imposée pleinement développé, la température maximum du fluide sera égale à la température imposée. Ainsi, à partir d'une certaine hauteur de canal la température sera constante et n'évoluera plus. Au contraire pour un écoulement à flux de chaleur imposé, plus la hauteur du canal est importante plus la température maximale au sein du canal est élevée.

L'écoulement existant au sein d'un canal vertical chauffé est donc dû à la poussée d'Archimède et au confinement de l'écoulement (si les deux parois sont trop éloignées l'une de l'autre aucune aspiration verticale n'existe). On appelle ainsi "effet cheminée" le phénomène généré par la mise en mouvement du fluide au sein du canal vertical créant une aspiration de fluide dans la direction verticale. Plus la différence de température entre le fluide chaud dans le canal et le fluide froid à l'extérieur est importante plus l'effet cheminée est grand et plus le débit de fluide traversant le canal est élevé.

1.2.2 Les écoulements ouverts de convection naturelle

Dans le cadre d'écoulements ouverts, le milieu étudié (ici l'écoulement au sein du canal) peut échanger à la fois de la matière et de l'énergie avec son environnement extérieur. La figure 1.4 présente une configuration prototype pour les écoulements de convection naturelle :

le canal vertical est chauffé à flux constant sur la moitié d'une de ses parois (configuration expérimentale proposée par Webb et Hill (1989)). La couche limite thermique est alimentée en fluide froid par du fluide provenant de l'amont du canal et le fluide chaud sort du canal sous la forme d'un panache thermique. Il existe ainsi des échanges de matière et d'énergie (thermique et mécanique) aux interfaces haute et basse du canal (ces interfaces sont définies par les limites géométriques du canal). Ce sont ces échanges qui constituent l'interaction entre le milieu étudié (le canal) et son environnement extérieur. Cette interaction rend particulièrement difficile les études expérimentales et numériques des canaux verticaux chauffés. Les écoulements de convection naturelle en milieux ouverts sont ainsi très dépendants de la nature, de la taille et du positionnement des interfaces entre le système étudié et son environnement direct. La caractérisation des interfaces entre le milieu étudié et son environnement extérieur est alors primordial.

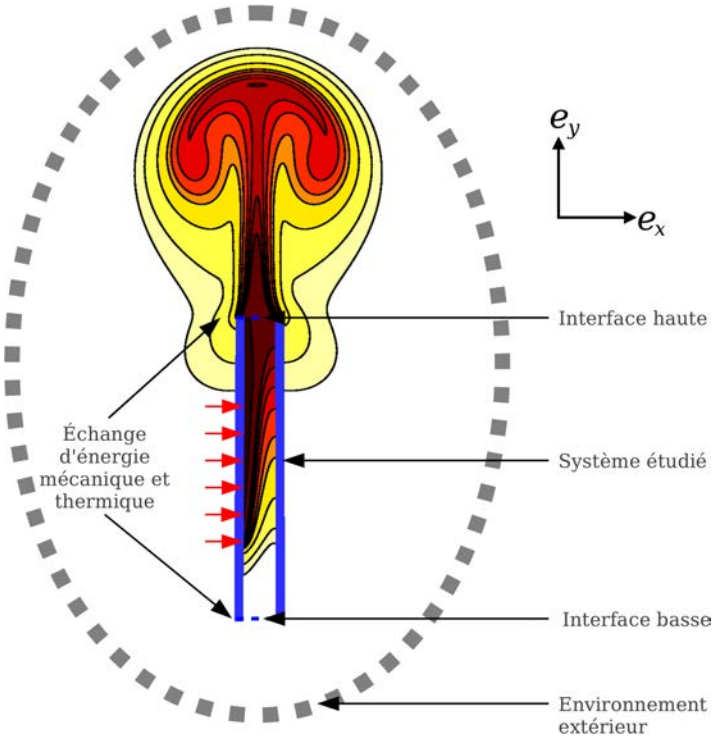


FIGURE 1.4 – *Configuration prototype des écoulements semi-confinés de convection naturelle*

Du point de vue expérimental, il convient de faire attention à l'environnement direct du système expérimental. Celui-ci peut être stratifié en température, soumis à une circulation de fluide (même faible) ou évoluer dans le temps de manière à ce que l'environnement au temps final t_f soit très différent de celui au temps initial t_0 (ex : augmentation de température). Du fait de ces nombreux paramètres, des difficultés de reproductibilité, notamment pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh, peuvent apparaître dans les expériences (Sanvicente et al. 2013).

Du point de vue numérique, deux grandes approches de résolution peuvent être envisagées :

- soit une simulation complète de l'objet d'étude et de son environnement extérieur (approche implicite car les interactions canal/environnement sont issues naturellement du calcul),
- soit une simulation tronquée en considérant l'objet d'étude seul restreint à ces limites géométriques (approche explicite car les interactions canal/environnement sont modélisées).

Approche implicite La première approche consiste à simuler le canal et son environnement extérieur. Elle permet d'avoir une vision complète de l'écoulement, de décrire le comportement thermique et dynamique de l'écoulement dans le canal et dans son environnement extérieur et de caractériser les interfaces entre le canal et son environnement direct. Cette approche peut donc être qualifiée d'implicite puisque les interactions canal/environnement extérieur sont réellement calculées. Cependant, elle nécessite de simuler un très grand domaine de calcul car la différence d'échelle entre le canal et l'environnement extérieur est importante. Cela peut donc amener à des temps de calcul extrêmement longs et incompatibles avec des études industrielles. De plus, le choix de la taille du domaine extérieur ainsi que les conditions limites à ses frontières peuvent influencer fortement l'écoulement au sein du canal. Par exemple, si le domaine extérieur est modélisé par un réservoir fermé (les limites du domaine extérieur sont des parois solides), une circulation va se mettre en place dans le réservoir créant ainsi un écoulement secondaire se superposant à l'effet cheminée. Cette approche fera l'objet de la partie II.

Approche explicite La deuxième approche consiste à restreindre le domaine de calcul aux limites géométriques du canal. Ainsi, l'enjeu majeur réside dans la modélisation des conditions limites aux interfaces entre le canal vertical et son environnement extérieur. Cette approche traite donc les interactions canal/environnement extérieur de manière explicite puisque celle-ci sont modélisées. Pour la convection naturelle, on ne connaît *a priori* pas le comportement de l'écoulement aux interfaces puisque le moteur de l'écoulement est situé au sein du domaine de calcul. Les conditions à ces interfaces ne peuvent donc pas être prescrites *a priori* mais sont dépendantes de l'écoulement lui-même. Il est donc nécessaire de faire des hypothèses de modélisation aux interfaces haute et basse du canal. Cette approche présente l'avantage de diminuer très fortement le temps de calcul mais la modélisation des interfaces est une question ouverte. La partie III de ce travail a pour objectif d'apporter certaines réponses sur la modélisation des interfaces du canal et l'implémentation numérique des conditions limites qui en découlent.

Enjeux et difficultés Les écoulements de convection naturelle en milieu ouvert ou semi-confiné présentent ainsi un double enjeu de modélisation du comportement de l'écoulement aux interfaces du système d'étude et d'implémentation numérique de ces conditions limites. L'objectif de cette thèse est d'apporter une meilleure compréhension de la modélisation des interfaces et de l'implémentation numérique des conditions limites qui en découlent.

1.3 Etat de l'art

Dans cette section, on présente la littérature caractérisant la dynamique et la thermique des écoulements de convection naturelle dans un canal vertical chauffé.

Les premiers travaux expérimentaux d'Elenbaas (1942) s'intéressent à deux plaques planes verticales chauffées à température constante. Cette étude montre que le nombre de Nusselt est dépendant du nombre de Prandtl et du nombre de Grashof. L'écoulement observé est principalement unidirectionnel, le fluide entre par le bas du canal et en sort par le haut. A la suite de cette expérience de nombreux travaux expérimentaux et numériques se sont intéressés au canal vertical symétriquement ou asymétriquement chauffé à température constante ou à flux de chaleur constant. Dans un premier temps, ces études ont mis en évidence deux régimes d'écoulement au sein du canal : un régime pleinement développé et un régime de type couche limite. Puis elles se sont principalement focalisées sur la caractérisation du transfert de chaleur au niveau des parois du canal vertical en proposant des corrélations entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh. Les études se sont ensuite intéressées à la caractérisation

de la dynamique de l'écoulement au sein du canal. Ces thèmes sont développés ci-après. On notera par la suite le rapport d'aspect du canal $Rf_c = H_c/L_c$.

1.3.1 Rappels théoriques : plaque plane verticale

On donne ici quelques rappels théoriques concernant les écoulements le long d'une plaque plane verticale chauffée. Ces rappels nous seront utiles dans la suite de ce travail. Les études d'Ostrach (1952) et de Sparrow et Gregg (1956) se sont intéressées à l'écoulement laminaire le long d'une plaque plane verticale respectivement chauffée à température constante ou à flux de chaleur imposé. Ces deux études proposent des solutions auto-similaires en s'appuyant sur la résolution des équations de couche limite laminaire. Elles montrent que le nombre de Nusselt évolue en fonction du nombre de Rayleigh à la puissance $1/4$ pour une température imposée et à la puissance $1/5$ pour un flux de chaleur imposé. Les évolutions de l'épaisseur de la couche limite (CL) thermique δ_T, la vitesse de référence V_{CL} et le débit de la couche limite G_{CL} peuvent aussi s'exprimer en fonction du nombre de Rayleigh et de la hauteur H de la couche limite. Le tableau 1.1 récapitule les différentes corrélations.

	Température imposée		Flux de chaleur imposé	
Grandeurs	$Pr \ll 1$	$Pr \gg 1$	$Pr \ll 1$	$Pr \gg 1$
δ_T	$H\,(Ra_{T,H})^{-1/4}$	$H\,(Pr\,Ra_{T,H})^{-1/4}$	$H\,(Ra_{q'',H})^{-1/5}$	$H\,(Pr\,Ra_{q'',H})^{-1/5}$
V_{CL}	$\frac{\alpha}{H}\,(Ra_{T,H})^{1/2}$	$\frac{\alpha}{H}\,(Pr\,Ra_{T,H})^{1/2}$	$\frac{\alpha}{H}\,(Ra_{q'',H})^{2/5}$	$\frac{\alpha}{H}\,(Pr\,Ra_{q'',H})^{2/5}$
G_{CL}	$\alpha\,(Ra_{T,H})^{1/4}$	$\alpha\,(Pr\,Ra_{T,H})^{1/4}$	$\alpha\,(Ra_{q'',H})^{1/5}$	$\alpha\,(Pr\,Ra_{q'',H})^{1/5}$
Nu	$(Ra_{T,H})^{1/4}$	$(Pr\,Ra_{T,H})^{1/4}$	$(Ra_{q'',H})^{1/5}$	$(Pr\,Ra_{q'',H})^{1/5}$

Tableau 1.1 – *Corrélations pour la plaque plane verticale (Ostrach 1952, Sparrow et Gregg 1956)*

1.3.2 Régimes remarquables d'écoulement laminaire

A bas nombre de Rayleigh, un régime pleinement développé est observé au sein du canal. Le fluide entre alors exclusivement par l'interface basse du canal et sort par l'interface haute. La dynamique de l'écoulement est caractérisée par le débit de fluide entrant dans le canal $G_{in}(y = 0)$. Le mode de transfert prédominant dans le canal est la diffusion et l'écoulement dans le canal est proche d'un écoulement de Poiseuille.

A plus haut nombre de Rayleigh, un régime de type couche limite est observé. Le fluide entre à la fois par les interfaces haute et basse du canal. Une couche limite se forme le long de la paroi chauffée et est alimentée en fluide froid par du fluide provenant de l'amont et de l'aval du canal. Une zone de recirculation (ou écoulement de retour) existe alors dans la partie supérieure du canal (du côté de la paroi non-chauffé dans le cas asymétrique et au centre du canal pour le cas symétrique). Le figure 1.5 montre les résultats expérimentaux obtenus par Habib et al. (2002) pour de l'air dans le cadre d'un chauffage symétrique ou asymétrique à température constante. Le comportement dynamique est ainsi caractérisé par trois débits différents : $G_{in}(y = 0)$ le débit de fluide entrant par l'interface basse du canal, $G_{in}(y = Rf_c)$ le débit de fluide entrant par l'interface haute du canal et $G_{out}(y = Rf_c)$ le débit de fluide sortant par l'interface haute du canal. Le comportement de la couche limite thermique est proche de celui observé pour une plaque plane verticale chauffée.

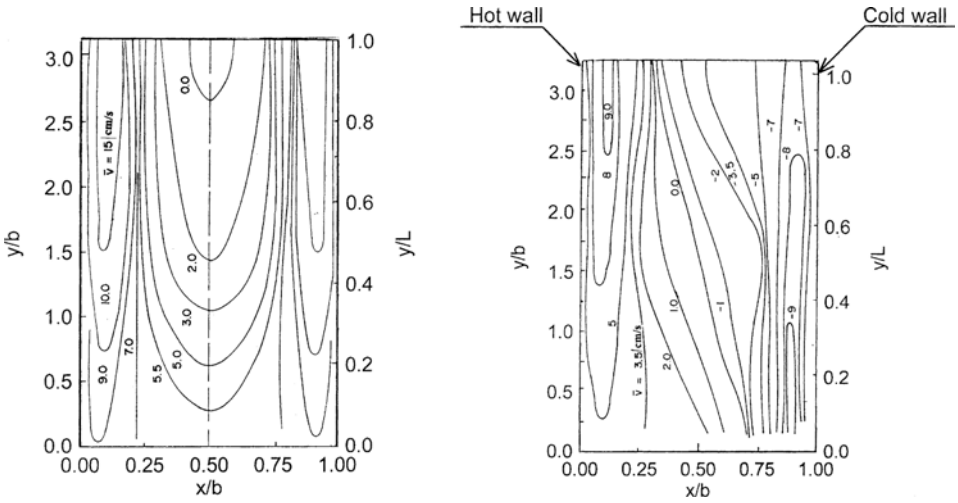


FIGURE 1.5 – *Iso-contours de la vitesse verticale moyenne pour un chauffage symétrique à température constante à* $Ra_{T,H} = 4.10^6$ *(gauche) et asymétrique à* $Ra_{T,H} = 2.10^6$ *(droite) (Habib et al. 2002)*

Ces deux régimes ont d'abord été mis en évidence par l'étude numérique de Bodia et Osterle (1962) pour un canal vertical chauffé symétriquement à température constante. L'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh $Ra_{T,L}$, pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.7$, permet notamment de mettre en évidence ces deux régimes (voir figure 1.6). Quand le nombre le Rayleigh tend vers zéro alors le nombre de Nusselt tend vers $\frac{Ra_{T,L}}{3}$ (pente A) et quand le nombre de Rayleigh tend vers l'infini alors le nombre de Nusselt évolue comme le nombre de Rayleigh à la puissance $1/4$ (pente B). Ces deux régimes d'écoulement laminaire ont été par la suite observés expérimentalement et numériquement pour un chauffage tant symétrique qu'asymétrique à température constante ou à flux de chaleur imposé.

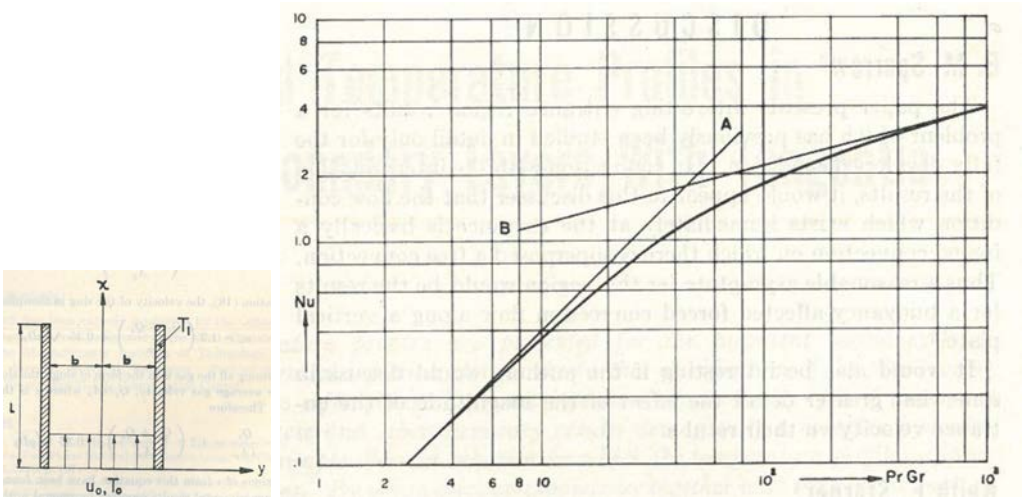


FIGURE 1.6 – *Evolution du nombre de Nusselt en fonction du Rayleigh : (A) régime pleinement développé, (B) régime de type couche limite (Bodia et Osterle 1962) (*$Pr = 0.7$*)*

Sparrow et al. (1984) ont mené une des premières expériences où une zone d'écoulement de retour est mis en évidence pour un canal vertical asymétriquement chauffé à température constante. Le fluide considéré est de l'eau ($Pr = 5$). Pour $Ra_{T,L} \approx 8.10^4$ (voir figure 1.7), la recirculation en forme de V se situe en haut du canal, du côté de la paroi non chauffée, et apparaît au bout de 10 à 15 *min*. Le fluide froid provenant de l'extérieur entre dans le canal par l'interface haute et vient alimenter la couche limite thermique. L'apparition de cette zone de recirculation est expliquée par le fait que lorsque le débit entrant par le bas du canal est insuffisant et que les forces de frottement sont trop élevées, il est alors plus facile d'alimenter

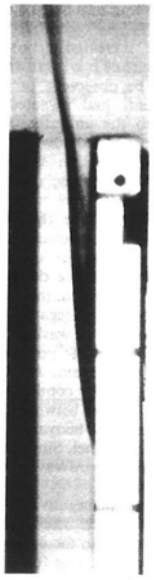


FIGURE 1.7 – *Photographie du régime de type couche limite avec zone de recirculation Sparrow et al. (1984) ($Ra_{T,L} \approx 8.10^4$, $Pr = 5$, $Rf_c = 15.2$)*

la couche limite thermique par du fluide aspiré par le haut du canal. La longueur de pénétration de la zone de recirculation est une fonction croissante avec le nombre de Rayleigh. Un comportement instationnaire est observé pour cet écoulement de retour. La transition entre l'écoulement sans zone de recirculation et l'écoulement avec zone de recirculation est observée pour un nombre de Rayleigh $Ra_{T,L}$ proche de 35000. Kihm et al. (1995) ont aussi étudié cet écoulement de retour pour un canal vertical en air ($Pr = 0.7$) symétriquement chauffé à température constante. Les observations sont très proches de celles de Sparrow et al. (1984).

1.3.3 Caractérisation de l'écoulement du point de vue thermique

Après la première étude numérique de Bodia et Osterle (1962), Aung (1972) et Aung et al. (1972) ont proposé des résultats numériques pour des cas où les parois sont chauffées symétriquement ou asymétriquement à température ou à flux de chaleur imposé. Toutes ces études mettent en évidence deux comportements distincts pour le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh : régime diffusif à bas Rayleigh ou régime de couche limite à haut nombre de Rayleigh.

Wirtz et Stutzman (1982) ont étudié un canal vertical en air ($Pr = 0.71$) chauffé à flux constant de manière symétrique. L'étude s'intéresse au transfert de chaleur et notamment à l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh. Il est montré que pour des nombres de Rayleigh inférieurs à 2, les résultats expérimentaux correspondent à ceux obtenus de manière théorique pour un écoulement pleinement développé (Aung 1972). Le nombre de Nusselt évalué à la sortie du canal est alors asymptotique à :

$$Nu(y = Rf_c) = 0.144\ Ra_{q'',L}^{0.5}. \tag{1.9}$$

Pour les nombres de Rayleigh supérieurs à 2500 l'évolution du nombre de Nusselt se comporte de la manière suivante :

$$Nu(y = Rf_c) = 0.577\ Ra_{q'',L}^{0.2}. \tag{1.10}$$

Ces résultats expérimentaux sont de l'ordre de 10 % supérieurs aux prédictions basées sur la plaque plane verticale (Sparrow et Gregg 1956). Il en est déduit une interaction des deux couches limites thermiques influençant le transfert thermique.

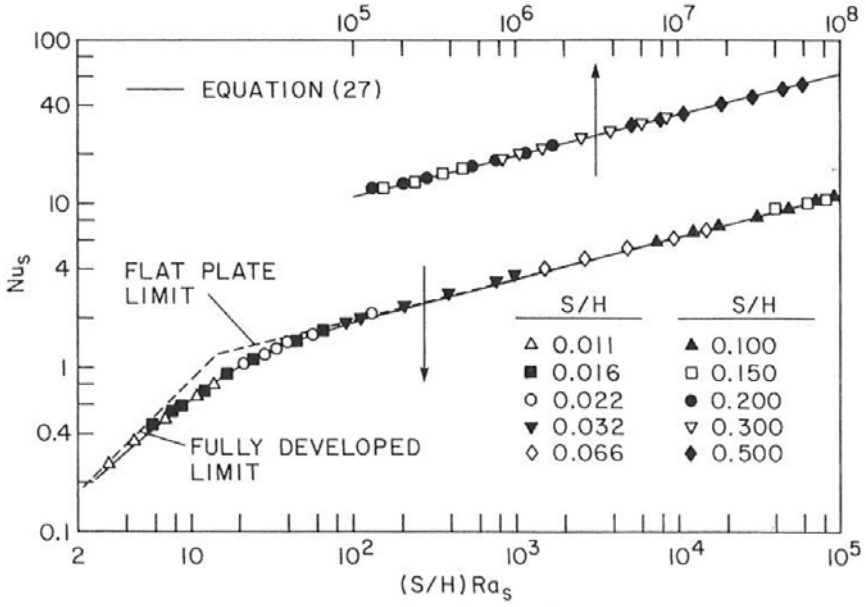


FIGURE 1.8 – *Nusselt expérimental en fonction du nombre de Rayleigh et corrélations associées Sparrow et Azevedo (1985) ($Pr = 5$ et $S/H = 1/Rf_c$)*

L'étude de Sparrow et Azevedo (1985) s'est intéressée à un canal vertical en eau ($Pr = 5$) chauffé symétriquement à température constante. La figure 1.8 montre les résultats expérimentaux obtenus. L'évolution du nombre de Nusselt sur une plage de Rayleigh couvrant les deux régimes dynamiques mis en évidence auparavant fait apparaître deux comportements thermiques : régime diffusif (quand $Ra_{T,L}$ tend vers zéro $Nu = Rf_c \times \frac{Ra_{T,L}}{12}$) et régime de plaque plane verticale (quand $Ra_{T,L}$ tend vers $+\infty$ $Nu = 0.619\,[Rf_c \times Ra_{T,L}]^{1/4}$).

Webb et Hill (1989) ont mené une expérience pour un canal vertical en air ($Pr = 0.7$) chauffé à flux constant sur une seule paroi. Le dispositif expérimental contient une zone d'entrée et de sortie non-chauffée. L'étude est menée pour des nombres de Rayleigh $Ra_{q'',L}$ de 503 jusqu'à $1.75\ 10^7$. Des corrélations pour l'évolution des nombres de Nusselt moyen et local en fonction du Rayleigh sont proposées. Le Nusselt moyen sur la paroi chauffée s'exprime alors comme :

$$Nu = 0.82\ Ra_m^{0.194}, \tag{1.11}$$

où Ra_m est le nombre de Rayleigh modifié ($Ra_m = Ra_{q'',L}$/rapport d'aspect de la zone chauffée). L'étude montre qu'à haut nombre de Rayleigh le comportement thermique d'un canal vertical chauffé à flux constant sur une seule de ces parois est proche de celui d'une plaque plane verticale chauffée à flux constant. Cependant les résultats sont de 11 % supérieurs à la prédiction de la plaque plane.

Rohsenow et al. (1998) proposent la corrélation suivante pour le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée en fonction du nombre de Rayleigh $Ra_{q'',L}$ pour un canal chauffé symétriquement à flux constant :

$$Nu = \left[(Nu_{fd})^{-3.5} + (Nu_{plate})^{-3.5}\right]^{-1/3.5}, \tag{1.12}$$

où

$$Nu_{fd} = 0.29\ Ra_{q'',L}^{0.5} \text{ pour le régime diffusif,} \tag{1.13}$$

et

$$Nu_{fd} = C\ Ra_{q'',L}^{0.2} \text{ pour le régime de type couche limite,} \tag{1.14}$$

avec C une constante dépendante du nombre de Prandtl. Cette corrélation permet de relier les deux régimes asymptotiques. A bas nombre de Rayleigh, le nombre de Nusselt tend vers Nu_{fd} et à haut nombre de Rayleigh vers Nu_{plate}.

Dans sa revue bibliographie, Olsson (2004) présente différentes corrélations sur l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour un chauffage symétrique à température constante ou à flux de chaleur constant. Cette étude montre que les deux régimes thermiques sont observés pour un chauffage symétrique ou asymétrique à température ou à flux de chaleur imposé.

D'autres études se sont aussi intéressées à l'intensification des transferts de chaleur pour les écoulements de convection naturelle dans un canal vertical. Azevedo et Sparrow (1986) ont étudié l'influence d'une ouverture sur la paroi non chauffée d'un canal en eau ($Pr = 5$) asymétriquement chauffé. Dans cette configuration, il a été montré que le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée est quasiment insensible au positionnement et à la taille de l'ouverture. Ceci s'explique alors par un comportement robuste de la couche limite thermique. Auletta et al. (2000), Manca et al. (2002) ont mené une étude expérimentale sur l'écoulement dans un canal en air asymétriquement chauffé à flux constant avec une extension adiabatique en sortie du canal. L'étude montre que l'ajout de cette extension non chauffée augmente les performances thermiques du canal.

1.3.4 Caractérisation de la dynamique de l'écoulement

L'étude d'Habib et al. (2002) propose des premières mesures de vitesse pour un canal en air ($Pr = 0.7$) chauffé à température constante de manière symétrique et asymétrique. Les résultats montrent que dans le cas symétrique une zone de recirculation apparaît au milieu du canal dans sa partie haute. Dans le cas asymétrique, il est observé une grande recirculation où l'écoulement est orienté vers le haut près de la paroi chaude et vers le bas près de la paroi froide.

L'étude d'Ospir et al. (2012) pour un canal vertical en eau ($Pr = 7$) asymétriquement chauffé à flux constant sur la moitié d'une paroi permet de visualiser l'écoulement pour $4.3\,10^5 < Ra_m < 4.5\,10^6$ où $Ra_m = Ra_{q'',L}/(Rf_c/2)$. Une zone de recirculation prenant la forme d'un 8 composé de deux cellules co-rotatives est mise en évidence. Cet état est observé en régime stationnaire et est atteint au bout de 50 min pour l'ensemble des nombres de Rayleigh étudiés. Avant l'apparition de cette zone de recirculation en forme de 8, une première zone en forme de V apparaît au bout de 10 min. Celle-ci évolue lentement, au bout de 20 min, vers une recirculation en forme de 8 avant de se stabiliser. Contrairement aux observations précédentes, la longueur de pénétration de cette recirculation est décroissante avec le rapport d'aspect du canal et le nombre de Rayleigh $Ra_{q'',L}$. Avec la même configuration d'étude Polidori et al. (2014) proposent des visualisations PIV de l'écoulement dans les premiers instants.

Dupont et al. (2013) se sont particulièrement intéressés à l'étude de l'écoulement de retour dans un canal vertical chauffé asymétriquement à flux constant. L'étude est menée pour des nombres de Rayleigh $Ra_{q'',H}$ de $6\,10^9$ à $4.5\,10^{10}$ et des mesures de vitesses ont été effectuées. L'écoulement de retour est classé en trois catégories : absent, intermittent et permanent. Le nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect du canal sont les paramètres principaux pour distinguer ces catégories. Cependant, les conditions d'apparition de l'écoulement de retour et les mécanismes physiques en jeu ne sont pas clairement identifiés. En effet, les échelles de longueur et de temps caractérisant le régime intermittent ne sont pas encore bien définies. Le profil de vitesse en entrée du canal semble plutôt tendre vers un profil plat et est très

influencé par la présence ou non d'un écoulement de retour.

Récemment, Sanvicente et al. (2013) se sont intéressés à un canal chauffé asymétriquement à flux constant. Cette étude est une des rares études à s'être intéressée à la reproductibilité des expériences de convection naturelle. L'environnement extérieur n'étant pas contrôlé, il peut effectivement influencer l'écoulement dans le canal. Les résultats montrent que pour les différents tests l'écoulement moyen est quasiment le même au milieu du canal mais varie au niveau de l'interface entre le canal et son environnement extérieur. Cela est particulièrement observé en haut du canal et montre l'influence de l'environnement extérieur. Il est aussi montré que la température d'entrée du fluide dans le canal influence directement le nombre de Nusselt et les variations du débit du fluide entrant par l'interface basse du canal sont de l'ordre de 7 %. L'étude montre ainsi une certaine difficulté dans la reproductibilité des mesures de vitesses et pose la question de l'influence de la pression motrice et de la température de l'environnement extérieur.

Parmi les autres études sur la convection naturelle en canal vertical, il faut aussi noter que de nombreuses études expérimentales se sont focalisées sur la caractérisation des écoulements turbulents de convection naturelle (Miyamoto et al. 1986, Fedorov et Viskanta 1997, Badr et al. 2006, Yilmaz et Fraser 2007, Daverat et al. 2013). Dans ce travail de thèse, nous resterons dans le cadre d'écoulements laminaires.

Cet état de l'art autour de la convection naturelle en canal vertical montrent deux régimes dynamiques différenciés par le nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect du canal. Ces régimes sont observés quelque soit la configuration d'étude : symétrique ou asymétrique, température imposée ou flux de chaleur constant. La zone de recirculation en haut du canal a été caractérisée par de nombreux auteurs mais les conditions d'apparition de celle-ci ne sont pas encore bien définies. De plus, elle apparaît de manière intermittente dans certaines études et dans un régime stationnaire pour d'autres. Les différentes études sont cependant en accord sur le temps relativement long (au moins 10 min) au bout duquel cette zone se forme. Il existe cependant une certaine diversité dans les écoulements observés.

1.3.5 Comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux

Des travaux numériques récents se sont attachés à la comparaison des champs de vitesses numériques avec des résultats expérimentaux. Ainsi Popa et al. (2012) ont comparé leurs résultats numériques avec l'étude d'Ospir et al. (2012). A l'interface basse du canal, la pression motrice est égale à $p_m(x) = \frac{-\rho v^2(x)}{2} + p_{ext}$ par application de la relation de Bernoulli entre un point au repos dans le milieu extérieur et un point à l'interface basse du canal. A l'interface haute, la pression motrice est considérée uniforme et égale à $p_m = p_{ext}$ car il est supposé que le fluide sort sous la forme d'un jet en atmosphère libre. La comparaison des résultats montre que malgré le fait que la longueur totale de la recirculation soit du même ordre de grandeur, sa structure en forme de 8 n'est pas retrouvée numériquement. Les résultats numériques donnent une unique zone de recirculation là où l'étude expérimentale permet d'observer deux cellules co-rotatives. De plus et contrairement aux observations expérimentales la longueur de pénétration de cette zone de recirculation augmente avec le nombre de Rayleigh.

Dans le travail mené par Zoubir et al. (2012), les conditions limites aux interfaces haute et basse du canal sont les mêmes que celles retenues par Popa et al. (2012). La pression en entrée est déterminée par la loi de Bernoulli et la pression en sortie est considérée uniforme. La comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux de Daverat et al. (2013) montre un désaccord important sur la dynamique et la thermique de l'écoulement

pour des nombres de Rayleigh élevés.

A notre connaissance, il n'existe pas de solution de référence expérimentale ou numérique pour l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical asymétriquement chauffée à flux constant. Par exemple, les différentes observations expérimentales mettent en évidence des écoulements de retour mais les échelles d'espace et de temps associées ne sont pas identifiées et semblent dépendantes de l'expérience. De plus, la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux montre des désaccords pouvant être importants et ce notamment sur la dynamique de l'écoulement. Ces différences ne sont aujourd'hui pas encore bien expliquées et il existe toujours un manque quant à la modélisation des interfaces entre le canal et son environnement. Nous voyons donc que la modélisation numérique des écoulements ouverts de convection naturelle reste un sujet de recherche ouvert.

Bibliographie

A. Auletta, O. Manca, B. Morrone, et V. Naso. Heat Transfer Enhancement by the Chimney Effect in a Vertical Isoflux Channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44 :4345–4357, 2000.

W. Aung. Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated Asymmetrically. *International Journal Heat Mass Transfer*, 15 :1577–1580, 1972.

W. Aung, L.S. Fletcher, et V. Sernas. Developping Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates with Asymmetric Heating. *International Journal Heat Mass Transfer*, 15 :2293–2308, 1972.

H.B. Awbi. Air Movement in Naturally-ventilated Buildings. *Proceedings of the World Renewable Energy Congress, Denver*, pages 241–247, 1996.

L.F. Azevedo et E.M. Sparrow. Natural Convection in a Vertical Channel Vented to the Ambient Through an Aperture in the Channel Wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 29 :819–830, 1986.

H.M. Badr, M. A. Habib, S. Anwar, R. Ben-Mansour, et S.A.M. Said. Turbulent Natural Convection in Vertical Parallel-plate Channels. *Heat and Mass Transfer*, 43 :73–84, 2006.

A. Bejan. Convection Heat Transfer, second edition. *John Wiley and Sons Inc*, 1994.

J.R. Bodia et J.F. Osterle. The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates. *Journal of Heat Transfer*, pages 40–44, 1962.

J. Boussinesq. Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. *Gauthier-Villars*, 1 et 2, 1903.

S.A.M Burek et A. Habeb. Air Flow and Thermal Efficiency Characteristics in Solar Chimneys and Trombe Walls. *Energy and Buildings*, 39 :128–135, 2007.

J. Cipriano, G. Houzeaux, D. Chemisana, et C. Lodi. Numerical Analysis of the Most Appropriate Heat Transfer Correlations for Free Convection Ventilated Double Skin Photovoltaic Facades. *Applied Thermal Engineering*, 57 :57–68, 2013.

C. Daverat, H. Pabiou, C. Ménézo, H. Bouia, et S. Xin. Experimental Investigation of Turbulent Natural Convection in a Vertical Water Channel With Symmetric Heating : Flow and Heat Transfer. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 44 :182–193, 2013.

F. Dupont, F. Ternat, S. Samot, et R. Blonbou. Two-dimension Experimental Study of the Reverse Flow in a Free Convection Channel With Active Walls Differentially Heated. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 47 :150–157, 2013.

W. Elenbaas. Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection. *Physica*, 9 :1–28, 1942.

P.A. Favarolo et H. Manz. Temperature-driven Single-sided Ventilation Through a Large Rectangular Opening. *Building and Environment*, 40 :689–699, 2005.

A.G. Fedorov et R. Viskanta. Turbulent Natural Convection Heat Transfer in an Asymmetrically Vertical Parallel-plate Channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40 : 3849–3860, 1997.

G. Gan. A Parametric Study of Trombe Walls for Passive Cooling of Buildings. *Energy and Buildings*, 27 :37–43, 1998.

S. Giroux-Julien, C. Menezo, J. Vareilles, H. Pabiou, M. Fossa, et E. Leonardi. Natural Convection in a Nonuniformly Heated Channel with Application to Photovoltaic Facades. *Computational Thermal Sciences : An International Journal*, 1 :231–258, 2009.

D. Gray et A. Giorgini. The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19 :545–551, 1976.

M.A. Habib, S.A.M. Said, S.A Ahmed, et A. Asghar. Velocity Characteristic of Turbulent Natural Convection in Symmetrically and Asymmetrically Heated Vertical Channel. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26 :77–87, 2002.

G.R. Hunt et P.F. Linden. The Fluid Mechanics of Natural Ventilation-displacement : Ventilation by Buoyancy-driven Flows Assisted by Wind. *Building and Environment*, 34 :707–720, 1999.

G.R. Hunt et P.F. Linden. Displacement and Mixing Ventilation Driven by Opposing Wind and Buoyancy. *Journal of Fluid Mechanics*, 527 :27–55, 2004.

R. Khanal et C. Lei. A Scaling Investigation of the Laminar Convective Flow in a Solar Chimney for Natural Ventilation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 45 :98–108, 2014.

K.D. Kihm, J.H. Kim, et L.S. Fletcher. Onset of Flow Reversal and Penetration Length of Natural Convection Flow Between Isothermal Vertical Walls. *Transaction of the ASME*, 17 : 776–779, 1995.

P.F. Linden. The Fluid Mechanics of Natural Ventilation. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 31 :201–238, 1999.

O. Manca, M. Musto, et V. Naso. Experimental Analysis of Asymmetrical Isoflux Channel-chimney Systems. *International Journal of Thermal Sciences*, 42 :837–846, 2002.

M. Miyamoto, Y. Katoh, J. Kurima, et H. Sasaki. Turbulent Free Convection Heat Transfer form Vertical Parallel Plates. *Proceedings of the International Heat Transfer, 8th Conference*, 4 : 1593–1598, 1986.

C-O. Olsson. Prediction of Nusselt Number and Flow Rate of Buoyancy Driven Flow Between Vertical Parallel Plates. *Journal of Heat Transfer*, 126 :97–104, 2004.

D. Ospir, C. Popa, C. Chereches, G Polidori, et S. Fohanno. Flow Visualization of Natural Convection in a Vertical Channel With Asymmetric Heating. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 :486–493, 2012.

S. Ostrach. An Analysis of Laminar Free-convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force. *Technical Report 2635, NACA*, 1952.

W. Pasut et M. De Carli. Evaluation of Various CFD Modelling Strategies in Predicting Airflow and Temperature in a Naturally Ventilated Double Skin Facade. *Applied Thermal Engineering*, 37 :267–274, 2012.

G. Polidori, S. Fatnassi, R. Ben Maad, F. Beaumont, et S. Fohanno. Transient Natural Convection Flow Dynamics in a Asymmetrically Heated Vertical Channel. *10th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, HEFAT, 14-16 July*, 2014.

G. Polidori, C.V. Popa, et T.H. Mai. Transient Flow Rate Behaviour in an External Natural Convection Boundary Layer. *Mechanics Research Communications*, 30 :615–621, 2003.

C. Popa, D. Ospir, S. Fohanno, et C. Chereches. Numerical Simulation of Dynamics Aspects of Natural Convection Flow in a Double-skin Façade. *Energy and Buildings*, 50 :229–233, 2012.

W. M. Rohsenow, P. Hartnett, et Y.I. Cho. Handbook of Heat Transfer. *McGraw-Hill, New York*, 126, 1998.

N. Safer, M. Waloszym, et J.J. Roux. Three-dimensional Simulation with a CFD Tool of the Airflow Phenomena in Single Floor Double-skin Facade Equipped with a Venetian Blind. *Solar Energy*, 79 :193–203, 2005.

E. Sanvicente, S. Giroux-Julien, C. Ménézo, et H. Bouia. Transitional Natural Convection Flow and Heat Transfer in an Open Channel. *International Journal of Thermal Sciences*, 63 :87–104, 2013.

E.M. Sparrow et L.F. Azevedo. Vertical-channel Natural Convection Spanning Between the Fully-developed Limit and the Single-plate Boundary-layer Limit. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28 :1847–1857, 1985.

E.M. Sparrow, G.M. Chrysler, et L.F. Azevedo. Observed Flow Reversals and Measured-predicted Nusselt Numbers for Natural Convection in a One-sided Heated Vertical Channel. *Journal of Heat Transfer*, 106 :325–332, 1984.

E.M. Sparrow et J.L Gregg. Laminar Free Convection from a Vertical Plate with Uniform Surface Heat Flux. *Transaction of the ASME*, 78 :435–440, 1956.

D.J. Tritton. Physical Fluid Dynamics. *Oxford Science Publications*, 1988.

B.W. Webb et D.P. Hill. High Rayleigh Number Laminar Natural Convection in an Asymmetrically Heated Vertical Channel. *Transactions of the ASME*, 111 :649–656, 1989.

R.A. Wirtz et R.J. Stutzman. Experiments on Free Convection Between Plates with Symmmetric Heating. *Journal of Heat Transfer*, 104 :501–507, 1982.

T. Yilmaz et S.M. Fraser. Turbulent Natural Convection in a Vertical Parallel-plate Channel with Asymmetric Heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 :2612–2623, 2007.

A. Zoubir, C. Daverat, S. Xin, S. Giroux-Julien, H. Pabiou, et C. Ménézo. Numerical Investigation for Natural Convection in a Vertical Open-ended Channel : Comparison with Experimental Data. *Proceedings of CHT-12. ICHMT International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer, Bath*, 2012.

2

Configuration d'étude et objectifs

Sommaire

2.1 Configuration d'étude 29
2.2 Adimensionnement des équations 29
2.3 Grandeurs caractéristiques 30
2.4 Quelques résultats préliminaires sur le canal vertical 31
2.5 Objectifs et orientations de l'étude 35
Bibliographie 36

Ce chapitre présente la configuration d'étude que l'on retient pour l'ensemble de ce travail. Les équations adimensionnées et les grandeurs de référence associées sont décrites et les grandeurs globales caractérisant la thermique et la dynamique de l'écoulement au sein du canal vertical sont présentées. Nous proposons aussi quelques résultats préliminaires sur la dynamique et la thermique de l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant. Ces résultats sont obtenus sous l'hypothèse d'un écoulement pleinement développé à bas nombre de Rayleigh. La fin de ce chapitre pose les objectifs et les orientations de cette étude.

2.1 Configuration d'étude

Dans l'ensemble de ce travail, on s'intéresse à un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant q'' ($W.m^{-2}$) sur la moitié d'une de ces parois, les autres parois étant adiabatiques. On considère un problème plan. La figure 2.1 présente le canal étudié. Cette configuration peut être considérée comme une configuration prototype pour les écoulements semi-confinés de convection naturelle. On définit L_c la largeur du canal et H_c sa hauteur. Le rapport d'aspect du canal est noté $Rf_c = \frac{H_c}{L_c}$. Le nombre de Rayleigh associé à cette configuration s'écrit alors $Ra_{q'',L_c} = \frac{g\,\beta\,q''\,L_c^4}{\alpha\,\nu\,\lambda}$. Nous définissons les interfaces basse et haute comme les limites géométriques basse et haute du canal. L'origine du repère est placé au milieu de l'interface basse du canal. L'orientation de la gravité g est alors opposée à $\vec{e_y}$.

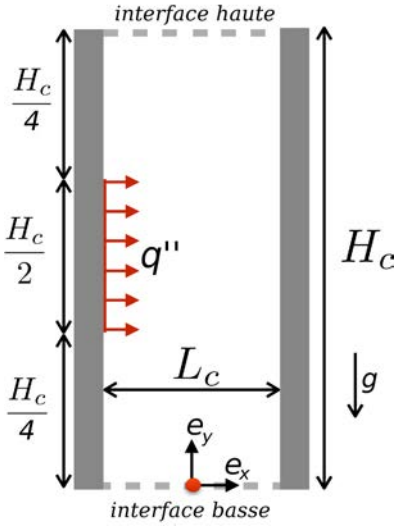


Figure 2.1 – *Configuration du canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant*

Les interfaces haute et basse du canal sont ouvertes sur deux milieux semi-infinis à pression motrice constante p_{ext} et température constante θ_{ext}. Un échange de masse et de chaleur entre l'écoulement au sein du canal et le milieu extérieur existe dès que le fluide dans le canal est en mouvement. Le canal peut être divisé en trois zones : i) la zone d'entrée adiabatique de hauteur $H_c/4$, ii) la zone chauffée de hauteur $H_c/2$ et iii) la zone de sortie adiabatique de hauteur $H_c/4$.

Cette configuration a été étudiée expérimentalement par Webb et Hill (1989) pour de l'air et par Ospir et al. (2012) pour de l'eau. Du point de vue numérique, elle a fait l'objet d'un exercice de comparaison numérique (Desrayaud et al. 2007; 2013).

2.2 Adimensionnement des équations

Les équations de Navier-Stokes sous les hypothèses de Boussinesq (1.8) sont adimensionnées en considérant comme longueur de référence la largeur du canal $L_{ref} = L_c$, la vitesse convective $V_{ref} = \frac{\alpha\sqrt{Ra}}{L_c}$ et le temps convectif $t_{ref} = \frac{L_c^2}{\alpha\sqrt{Ra}}$, où le nombre de Rayleigh est basé sur la largeur du canal et est égal à $Ra_{q'',L} = \frac{g\,\beta\,q''\,L_c^4}{\alpha\,\nu\,\lambda}$. La différence de température caractéristique est notée $\Delta T = \frac{q''\,L_c}{\lambda}$ et la température adimensionnelle s'exprime comme $T = \frac{\theta-\theta_{ext}}{\Delta T}$. Cet adimensionnement fait apparaître la pression de référence comme étant égale à $P_{ref} = \frac{\rho\,\alpha^2\,Ra}{L_c^2}$. De plus, on définit $P = P_{ref} + \frac{g\,y\,L_c^2}{\alpha^2\,Ra}$ comme la pression motrice adimensionnelle. Cette pression motrice peut être interprétée comme l'écart par rapport à la pression

d'équilibre hydrostatique adimensionnelle.

Les équations adimensionnelles que l'on résout s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \,.\, \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + \dfrac{Pr}{\sqrt{Ra}} \triangle \mathbf{V} + Pr\, T\, \vec{e_y}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \,.\, \nabla T = \dfrac{1}{\sqrt{Ra}} \triangle T, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{V} = (U, V)$ est le vecteur vitesse sans dimension avec U la composante horizontale et V la composante verticale, P la pression motrice adimensionnelle et T la température adimensionnelle sont les inconnues de notre problème. A l'état initial, le fluide est au repos à la température $T = 0$ (car $\theta = \theta_{ext}$) et à la pression motrice $P = P_{ext}$ (car $p_m = p_{ext}$). Avec cet adimensionnement, les conditions limites thermiques sur les parois sont $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ pour les parois adiabatiques et $\frac{\partial T}{\partial x} = -1$ pour la paroi chauffée.

2.3 Grandeurs caractéristiques

Nous décrivons ici les différentes grandeurs adimensionnelles caractérisant l'écoulement au sein du canal. Ces grandeurs seront utilisées dans l'ensemble de ce travail. On définit ainsi les grandeurs caractérisant la dynamique de l'écoulement dans le tableau 2.1. On rappelle que $Rf_c = H_c/L_c$ et que l'interface basse est située en $y = 0$ et l'interface haute en $y = Rf_c$.

Notation	Expression	Signification
$G_{in}(y=0)$	$\int_{-0.5}^{0.5} V(x,0)\,dx$	Débit entrant par l'interface basse du canal
$G_{out}(y=Rf_c)$	$\int_{-0.5}^{x_0} V(x,Rf_c)\,dx$ tel que $x_0 \neq -0.5$ et $V(x_0,Rf_c)=0$	Débit sortant par l'interface haute du canal
$G_{in}(y=Rf_c)$	$G_{out}(y=Rf_c)$ - $G_{in}(y=0)$	Débit entrant par l'interface haute du canal

Tableau 2.1 – *Grandeurs caractérisant la dynamique de l'écoulement*

Notation	Expression	Signification
P_{top}	$\int_{-0.5}^{0.5} P(x,Rf_c)\,dx$	Pression motrice moyenne à l'interface haute du canal
P_{bot}	$\int_{-0.5}^{0.5} P(x,0)\,dx$	Pression motrice moyenne à l'interface basse du canal
ΔP	$P_{top} - P_{bot}$	Ecart de pression motrice moyenne entre les interfaces haute et basse du canal

Tableau 2.2 – *Grandeurs caractérisant la pression motrice aux interfaces du canal*

Les grandeurs caractérisant la pression motrice moyenne sont récapitulées dans le tableau 2.2 et celles caractérisant la thermique dans le tableau 2.3.

Notation	Expression	Signification
$Nu_1(y)$	$\dfrac{1}{T(-0.5,y)}$	Nusselt local sur la paroi chauffée avec $T=0$ comme température de référence
$\overline{Nu_1}$	$\dfrac{2}{Rf_c}\displaystyle\int_{Rf_c/4}^{3Rf_c/4} Nu_1(y)\,dy$	Nusselt moyen sur la paroi chauffée avec $T=0$ comme température de référence
$T_{bulk}(y)$	$\dfrac{1}{G_{in}(y=0)}\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} T(x,y)\,V(x,y)\,dx$	Température débitante ou température de mélange du fluide
$Nu_2(y)$	$\dfrac{1}{T(-0.5,y)-T_{bulk}(y)}$	Nusselt local sur la paroi chauffée avec la température débitante comme température de référence
$\overline{Nu_2}$	$\dfrac{2}{Rf_c}\displaystyle\int_{Rf_c/4}^{3Rf_c/4} Nu_2(y)\,dy$	Nusselt moyen sur la paroi chauffée avec la température débitante comme température de référence

Tableau 2.3 – *Grandeurs caractérisant la thermique de l'écoulement*

2.4 Quelques résultats préliminaires sur le canal vertical

Hypothèse 2.1 *On se place dans le cadre d'un écoulement stationnaire pleinement développé à bas nombre de Rayleigh.*

Aung (1972) a étudié le régime diffusif pour un canal chauffé symétriquement ou asymétriquement à température constante ou à flux de chaleur imposé. Il a résolu les équations analytiques de l'écoulement diffusif (à bas nombre de Rayleigh) en canal vertical. Il considère l'hypothèse d'un gradient de pression nulle entre l'entrée et la sortie du canal : $P(x,0) = P(x,Rf_c) = 0$. Il obtient ainsi l'expression analytique pour le débit entrant dans un canal chauffé symétriquement ou asymétriquement à flux constant sur toute sa longueur :

$$G_{in}(y=0) = 2\sqrt{\frac{Rf_c}{48}}. \tag{2.2}$$

Cette étude montre qu'à bas nombre de Rayleigh le débit adimensionnel $G_{in}(y=0)$ entrant par le bas du canal ne dépend que du rapport d'aspect du canal.

Nous reprenons par la suite la démarche décrite par Aung (1972) avec les hypothèses d'un écoulement stationnaire pleinement développé et dont la diffusion thermique se fait selon $\vec{e_x}$. Nous cherchons ainsi à établir l'expression de l'évolution de la température moyenne, de la pression motrice moyenne selon $\vec{e_y}$ ainsi que la valeur du débit de fluide entrant dans le canal pour notre configuration d'étude.

Sous les hypothèses considérées, et en intégrant l'équation de la chaleur entre les parois gauche et droite du canal on obtient :

$$\int_{-0.5}^{0.5} V(x,y)\,\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\,dx \;=\; \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{\sqrt{Ra}}\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}\,dx\,. \tag{2.3}$$

On définit la valeur moyenne de la température dans une section droite du canal

$$\overline{T(y)} = \int_{-0.5}^{0.5} T(x,y)\,dx,$$

et on peut alors écrire

$$T(x,y) \;=\; \alpha_T(x)\overline{T(y)},$$

où $\alpha_T(x) \neq 0$ et $\int_{-0.5}^{0.5} \alpha_T(x)\,dx \;=\; 1$. A bas nombre de Rayleigh, la diffusion thermique selon $\vec{e_x}$ est élevée, la température peut donc être considérée comme constante dans une section droite du canal. En première approximation, on peut donc prendre $\alpha_T(x) \approx 1$. Le membre de gauche de l'équation (2.3) peut alors se réécrire comme :

$$\int_{-0.5}^{0.5} V(x,y)\,\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\,dx \;=\; \frac{\partial \overline{T(y)}}{\partial y}\int_{-0.5}^{0.5} V(x,y)\,dx \;=\frac{\partial \overline{T(y)}}{\partial y}\,G_{in}(y=0).$$

De plus, on rappelle que $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$ sur les parois adiabatiques et $\dfrac{\partial T}{\partial x} = -1$ sur la paroi chauffée. En intégrant entre 0 et y, on obtient alors :

$$\int_0^y \frac{\partial \overline{T(y')}}{\partial y'}\,dy' = -\frac{1}{G_{in}(y=0)\sqrt{Ra}}\int_0^y \left.\frac{\partial T(x,y')}{\partial x}\right|_{x=-0.5} dy'. \tag{2.4}$$

On arrive ainsi à l'évolution suivante pour la température moyenne dans le canal

$$\begin{cases} 0 \le y < Rf_c/4, & \overline{T(y)} \;=\; \overline{T(y=0)} = 0, \\ Rf_c/4 \le y < 3Rf_c/4, & \overline{T(y)} \;=\; \dfrac{1}{G_{in}(y=0)\sqrt{Ra}}(y - Rf_c/4), \\ 3Rf_c/4 \le y \le Rf_c, & \overline{T(y)} \;=\; \dfrac{Rf_c/2}{G_{in}(y=0)\sqrt{Ra}}. \end{cases} \tag{2.5}$$

La figure 2.2 permet d'observer l'évolution théorique de $\overline{T}(y)$ à bas nombre de Rayleigh. Elle est donc nulle dans la partie basse du canal, puis évolue de manière linéaire dans la partie chauffée du canal pour atteindre une température moyenne constante dans la partie haute du canal. La température moyenne à l'interface haute du canal dépend donc du débit $G_{in}(y=0)$, du rapport d'aspect de la zone chauffée $Rf_c/2$, et du nombre de Rayleigh Ra. Elle décroit avec l'augmentation du débit $G_{in}(y=0)$ et du nombre de Rayleigh Ra et augmente avec le rapport d'aspect Rf_c. On peut aussi noter que la température moyenne n'est pas directement liée à l'écart de pression motrice ΔP entre les interfaces.

L'équation de quantité de mouvement peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\underbrace{-\frac{dP(y)}{dy}}_{\text{Pression}} + \underbrace{\frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\frac{d^2V(x,y)}{dx^2}}_{\text{Frottements } <0} + \underbrace{Pr\;T(x,y)}_{\text{Flottabilité } >0} = 0. \tag{2.6}$$

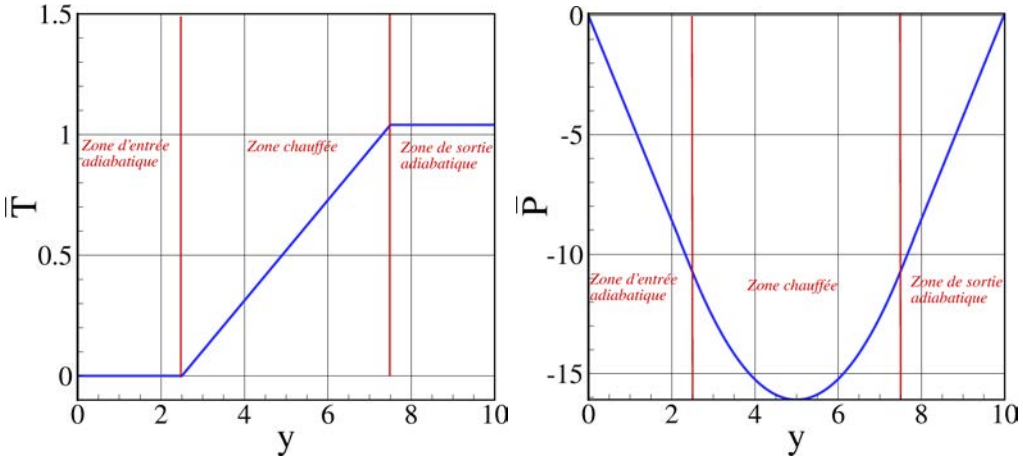


FIGURE 2.2 – *Evolution théorique de* $\overline{T}(y)$ *et* $\overline{P}(y)$ *pour* $Ra = 100$, $Pr = 7.85$, $G_{in}(y = 0) = 0.456$, $\alpha_T = 1$, $Rf_c = 10$ *et* $\Delta P = 0$

Cette équation montre qu'à bas nombre de Rayleigh les forces de frottement et le gradient de pression motrice entre l'entrée et la sortie du canal s'équilibrent avec la poussée d'Archimède. En intégrant cette équation entre les parois gauche et droite du canal et en considérant un écoulement de Poiseuille dans le canal on obtient :

$$\frac{\partial \overline{P(y)}}{\partial y} = -12\frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\, G_{in}(y=0) + Pr\, \overline{T(y)}. \tag{2.7}$$

On arrive ainsi à l'évolution suivante pour la pression motrice dans le canal :

$$\begin{cases} 0 \leq y < Rf_c/4, & \overline{P(y)} = P_{bot} - 12\,\dfrac{Pr\, G_{in}(y=0)}{\sqrt{Ra}}\, y, \\ Rf_c/4 \leq y < 3Rf_c/4, & \overline{P(y)} = P_{bot} - 12\,\dfrac{Pr\, G_{in}(y=0)}{\sqrt{Ra}}\, y \\ & \quad + \dfrac{Pr}{G_{in}(y=0)\sqrt{Ra}}\left[\dfrac{y^2 - Rf_c^2/16}{2} - \dfrac{Rf_c(y - Rf_c/4)}{4}\right], \\ 3Rf_c/4 \leq y \leq Rf_c, & \overline{P(y)} = P_{bot} - 12\dfrac{Pr\, G_{in}(y=0)}{\sqrt{Ra}}\, y \\ & \quad + \dfrac{Pr\, Rf_c}{2\, G_{in}(y=0)\sqrt{Ra}}(y - Rf_c/2). \end{cases} \tag{2.8}$$

L'évolution de $\overline{P}(y)$ est donnée par la figure 2.2. Pour notre configuration, nous montrons que dans la partie basse du canal, la pression motrice décroît linéairement avec y à partir de la valeur de la pression motrice en entrée P_{bot} pour compenser la perte de charge due aux frottements sur les parois. Puis dans la partie chauffée, la pression motrice suit une évolution parabolique et augmente ensuite linéairement dans la partie haute du canal grâce à l'augmentation de pression motrice due aux forces de flottabilité. On observe que cette évolution de la pression motrice est dépendante de la pression motrice moyenne en entrée du canal P_{bot}. Celle-ci n'est *a priori* pas connue et est dépendante de l'interaction entre le canal et son environnement extérieur. De plus, la pression motrice évolue en fonction du débit qui lui aussi est une inconnue du problème.

Dans le problème traité, nous avons donc trois inconnues : la température moyenne $\overline{T(y)}$, le débit de fluide entrant dans le canal $G_{in}(y = 0)$ et la pression motrice moyenne $\overline{P(y)}$. Cependant, seules deux équations relient ces grandeurs (équations (2.5) et (2.8)). Le problème

est donc mal posé. Pour déterminer le débit théorique et la température moyenne théorique dans le canal, des hypothèses sur l'écart de pression motrice ΔP entre l'entrée et la sortie du canal sont nécessaires (par exemple $\Delta P = 0$ comme proposé par Aung (1972)).

Si on suppose un écart de pression motrice nul entre l'entrée et la sortie du canal ($\Delta P = P_{top} - P_{bot} = 0$) et qu'on suppose aussi en première approximation $\alpha_T(x) \approx 1$, on obtient ainsi l'expression du débit théorique pour notre configuration :

$$G_{in}(y=0) = \sqrt{\frac{Rf_c}{48}}. \tag{2.9}$$

Il est intéressant de noter que si le gradient de pression motrice entre l'entrée et la sortie est nul alors le débit aspiré par le bas du canal est indépendant du nombre de Prandtl et du nombre de Rayleigh. Cette hypothèse implique donc, que quelque soit le fluide, le débit de fluide entrant dans le canal est une constante à bas nombre de Rayleigh.

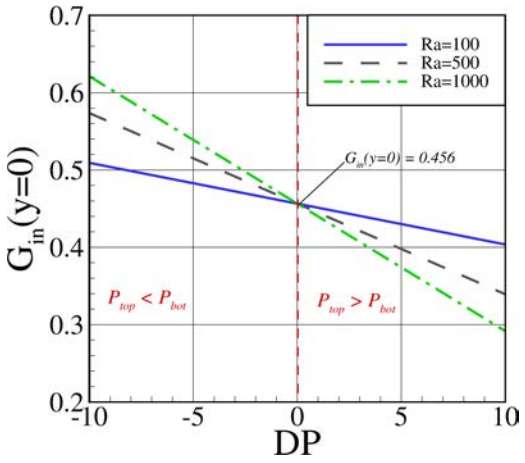


FIGURE 2.3 – *Evolution théorique de* $G_{in}(y=0)$ *en fonction de* ΔP *pour* $Ra = 100, 500, 1000$, $Pr = 7.85$ *et* $Rf_c = 10$, $\alpha_T(x) \approx 1$

Comme on ne connaît *a priori* rien sur la pression motrice moyenne en entrée du canal, nous n'avons aucune indication sur l'écart de pression motrice entre les interfaces du canal. Le débit de fluide entrant par le bas du canal s'exprime alors comme (après réarrangement de l'équation (2.8) et $\alpha_T(x) \approx 1$) :

$$G_{in}(y=0) = \frac{\sqrt{Ra\ \Delta P\ +\ 12\ Pr^2\ Rf_c^3} - \sqrt{Ra}\ \Delta P}{24\ Pr\ Rf_c}. \tag{2.10}$$

Dans ce cas, le débit dépend à la fois du nombre de Prandtl Pr, du nombre de Rayleigh Ra, du rapport d'aspect du canal Rf_c et de l'écart de pression motrice entre les interfaces du canal ΔP. La figure 2.3 permet d'observer l'évolution de $G_{in}(y=0)$ en fonction de Ra et ΔP. Pour $\Delta P = 0$, $G_{in}(y=0)$ a la même valeur quelque soit le nombre de Rayleigh. A Rayleigh fixé, un écart positif de pression motrice entre les interfaces diminue la valeur du débit $G_{in}(y=0)$ par rapport à celle observée pour $\Delta P = 0$. Cela s'explique par le fait que si $P_{top} > P_{bot}$ alors il existe un effet de bouchon ce qui réduit l'effet d'aspiration. Au contraire si $\Delta P < 0$ alors l'aspiration de fluide est favorisée.

Cette partie montre la difficulté de la modélisation des écoulements semi-confinés où il est nécessaire de faire certaines hypothèses pour pouvoir résoudre le problème. De plus, on a mis en évidence la nécessité de modéliser correctement (au plus proche de la réalité physique) la pression motrice aux interfaces canal/environnement extérieur dans le cas d'une simulation du canal restreint à ces limites géométriques puisqu'elle influence directement la dynamique de l'écoulement.

2.5 Objectifs et orientations de l'étude

L'objectif principal de cette thèse est de contribuer à la compréhension des écoulements de convection naturelle en milieux semi-confinés. Nous nous intéressons tout particulièrement à la modélisation et à la simulation numérique de ces écoulements. Un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant est considéré comme configuration prototype de ces types d'écoulements. Dans cette partie introductive, nous avons montré qu'il existe des difficultés quant à la modélisation des interfaces entre le canal et son environnement extérieur lorsque le domaine de calcul est restreint aux limites géométriques du canal. En particulier, nous avons montré qu'il était nécessaire de faire certaines hypothèses sur la pression motrice aux interfaces pour que le problème soit bien posé. Malgré les diverses études numériques évoquées dans cette première partie, le choix des conditions limites représentant au mieux la physique reste une question ouverte. De plus, les questions quant à l'interaction du canal vertical et de son environnement extérieur sont peu abordées dans la littérature. Nous nous intéressons ainsi à un problème pour lequel il existe un double enjeu :

1) modélisation de l'interaction canal/environnement et de l'écoulement aux interfaces du canal,
2) implémentation numérique des conditions limites qui en découlent.

Dans le but de contribuer à la compréhension des interactions canal/environnement et à l'amélioration de la modélisation des interfaces du canal, nous proposons une étude numérique de la convection naturelle dans un canal vertical asymétriquement chauffé. Cette étude est effectuée selon deux approches différentes :

- soit le canal vertical et son environnement sont considérés comme un système à part entière et interagissant l'un sur l'autre (approche retenue dans la partie II),
- soit le canal vertical est traité de manière indépendante (approche retenue dans la partie III).

La simulation d'un canal vertical plongé dans un réservoir fermé de plus grande dimension effectuée dans la partie II a ainsi pour but de répondre aux objectifs suivants :

=> caractériser l'influence de la taille de l'environnement extérieur sur l'écoulement au sein du canal,
=> avoir une information complète de l'écoulement aux interfaces du canal,
=> établir des solutions de référence approchant l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical plongé dans un environnement infini.

Cette partie permet de mieux appréhender l'écoulement aux interfaces du canal et les interactions entre le canal et son environnement extérieur afin d'améliorer la modélisation des interfaces. De plus, nous cherchons à établir des solutions approchant l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant plongé dans un environnement infini. A notre connaissance ce type de solution n'existe pas dans la littérature. Ces solutions nous serviront par la suite de référence afin de comparer plusieurs modélisations des interfaces canal/environnement extérieur.

Dans la partie III, le système d'étude est réduit au canal seul. La principale difficulté réside alors dans la modélisation des interfaces du canal. L'objectif de cette partie est ainsi de :

=> proposer une modélisation des interfaces se rapprochant au plus près de la réalité physique.

Nous présentons ainsi plusieurs modélisations des interfaces et différentes méthodes de résolution numériques avec un domaine de calcul restreint aux limites géométriques du canal vertical. Après un état de l'art des différentes modélisations et conditions limites proposées

dans la littérature, les difficultés numériques liées à une approche réduite sont présentées. L'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes discret est utilisée afin de s'assurer que le problème est bien posé. Une première méthode de résolution numérique basée sur la superposition d'une solution particulière au problème posé et d'une combinaison linéaire des noyaux du mode de l'opérateur de Stokes est présentée. Nous nous intéressons ensuite à l'implémentation numérique des conditions limites de type Bernoulli. Les différentes solutions numériques sont comparées avec les solutions de référence obtenues dans la partie II. Dans le but d'améliorer la modélisation des interfaces, l'étude de nouvelles conditions limites pour la pression motrice basées sur des conditions limites de type Robin est proposée. On montre l'intérêt de ces conditions limites, ainsi que les hypothèses de modélisation nécessaires pour leurs application.

La partie IV de ce travail s'inscrit dans le cadre de l'intensification des transferts thermiques et du contrôle de l'écoulement de convection naturelle au sein du canal vertical. Ces problématiques sont essentielles pour la conception et le dimensionnement des systèmes industriels. L'objectif est ici de :

=> présenter un exemple d'application de méthode d'optimisation géométrique du canal.

Une fois le choix de modélisation des interfaces du canal effectué, il est effectivement intéressant d'optimiser la thermique et/ou la dynamique de l'écoulement. Une modélisation des interfaces est donc considérée et nous étudions l'influence de la position et de la taille d'une ouverture du côté de la paroi non chauffée du canal. Pour répondre à cet objectif, nous utilisons une méthode d'optimisation basée sur le krigeage. Cette méthode nous permet d'établir des cartographies du nombre de Nusselt et du débit entrant par l'interface basse du canal en fonction de la position et de la taille de l'ouverture. De plus, différentes configurations optimales pour le canal vertical répondant à des objectifs d'optimisation précis sont présentées.

La partie V de ce travail est une conclusion générale récapitulant les principaux apports de cette thèse. Les limites de cette étude y sont présentées. Les perspectives et les travaux de recherche mis en évidence dans ce travail sont résumés.

Bibliographie

W. Aung. Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated Asymmetrically. *International Journal Heat and Mass Transfer*, 15 :1577–1580, 1972.

G. Desrayaud, R. Bennacer, J.-P. Caltagirone, E. Chenier, A. Joulin, N. Laaroussi, et K. Mojtabi. Etude numérique comparative des écoulements thermoconvectifs dans un canal vertical chauffé asymmétriquement. Dans *8 ème Colloque Franco-Québecquois sur la Thermique des Systemes, Montréal, Art.-06-14*, 2007.

G. Desrayaud, E. Chenier, A. Joulin, A. Bastide, B. Brangeon, J.P. Caltagirone, Y. Cherif, R. Eymard, C. Garnier, S. Giroux-Julien, Y. Harnane, P. Joubert, N. Laaroussi, S. Lassue, P. Le Quéré, R. Li, D. Saury, A. Sergent, S. Xin, et A. Zoubir. Benchmark Solutions for Natural Convection Flows in Vertical Channels Submitted to Different Open Boundary Conditions. *International Journal of Thermal Sciences*, 72 :18–33, 2013.

D. Ospir, C. Popa, C. Chereches, G Polidori, et S. Fohanno. Flow Visualization of Natural Convection in a Vertical Channel with Asymmetric Heating. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 :486–493, 2012.

B.W. Webb et D.P. Hill. High Rayleigh Number Laminar Natural Convection in an Asymmetrically Heated Vertical Channel. *Transactions of the ASME*, 111 :649–656, 1989.

Deuxième partie

Simulation du canal et de son environnement extérieur

3

Etat de l'art et modélisation numérique

Sommaire

3.1 Etat de l'art 41
3.2 Motivations et objectifs 43
3.3 Configuration d'étude 44
3.4 Méthodes numériques 45
3.4.1 Discrétisation temporelle 46
3.4.2 Couplage Vitesse-Pression 46
3.4.3 Conditions limites 48
3.4.4 Discrétisation spatiale 48
Bibliographie 50

Dans ce chapitre, un état de l'art des études numériques s'étant intéressées à la simulation du canal et de son environnement extérieur est effectuée. La littérature montre qu'il existe plusieurs manières de prendre en compte l'environnement extérieur (extension, réservoir fermé ou domaine ouvert) et que la taille de celui-ci influence l'écoulement au sein du canal. La configuration d'étude que nous retenons dans ce travail pour modéliser le canal vertical et son environnement extérieur est ensuite présentée et les méthodes numériques utilisées sont décrites.

3.1 Etat de l'art

On présente ici seulement des études numériques prenant en compte le canal vertical avec son environnement.

L'une des premières études numériques à s'être intéressée à la simulation de l'écoulement de convection naturelle au sein d'un canal vertical chauffé et de son environnement extérieur est celle de Kettleborough (1972). Il a ainsi étudié un canal vertical en air ($Pr = 0.73$) chauffé symétriquement à température constante avec une extension du canal au niveau de l'entrée afin de s'affranchir des conditions limites d'entrée à l'interface canal/environnement. L'idée proposée par Kettleborough est d'appliquer le principe de Saint Venant utilisé en mécanique des solides à la mécanique des fluides : si les frontières de l'extension sont assez éloignées de l'entrée du canal alors le champ de vitesse en entrée du canal n'est pas influencé par cette extension. Les équations de Boussinesq sont résolues sous leur forme fonction de courant – vorticité ($\Psi - \omega$) permettant ainsi d'éviter la résolution du champ de pression. Les conditions limites retenues aux frontières de l'extension sont présentées par la figure 3.1. Le canal

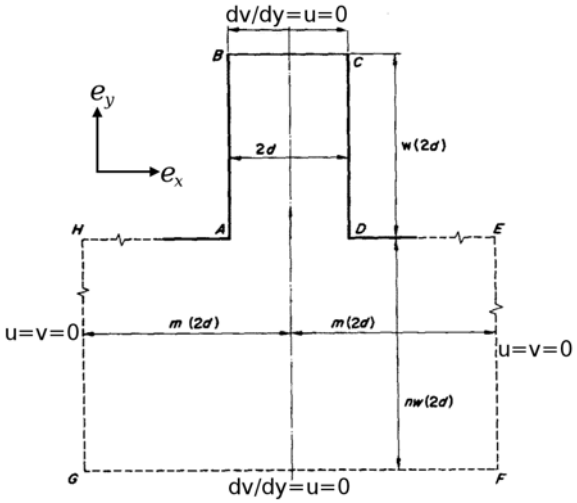


Figure 3.1 – *Configuration d'étude et conditions limites utilisées par Kettleborough (1972)*

est situé entre les segments AB et CD. En sortie du canal (segment BC) une condition de Neumann homogène est imposée sur la vitesse verticale et la température, une condition de Dirichlet homogène est imposée sur la vitesse horizontale. Les 2 composantes de la vitesse sont imposées nulles sur les segments AB et CD (parois du canal) et aussi sur les segments GH et EF ainsi que AH et DE. Sur le segment GF une condition de Neumann homogène est imposée sur la vitesse verticale et une condition de Dirichlet homogène sur la vitesse horizontale. L'étude montre que lorsque que l'état stationnaire est atteint, un écoulement existe en amont du canal et le fluide subit une accélération à l'approche de l'interface basse du canal. De plus, la vitesse horizontale est relativement importante au niveau de l'entrée du canal et l'écoulement continue de s'établir dans la partie basse du canal. Cette étude permet donc d'avoir des premières informations sur l'écoulement à l'interface basse du canal mais ne donne cependant aucune information sur le champ de pression.

Liu et Tao (1996) se sont eux intéressés à la convection naturelle autour d'un canal vertical $2D$ ($Pr = 0.7$) plongé au milieu d'un réservoir fermé dont la surface S_t est environ 5 fois plus grande que celle du canal S_c. Les parois internes et externes du canal sont maintenues à température constante. Les parois du réservoir sont à une température inférieure. Le nombre de Rayleigh $Ra_{T,H}$ varie de 10^2 à 10^7. Différents régimes dynamiques sont observés dans le réservoir en fonction du nombre de Rayleigh. A bas nombre de Rayleigh, les effets conductifs sont prédominants et une recirculation composée de deux cellules co-rotatives formant alors

un dipôle est observée dans le réservoir. A haut nombre de Rayleigh, la convection devient dominante et l'écoulement dans le réservoir fait alors apparaître une recirculation dans la partie haute du réservoir et une autre dans la partie basse. Il est aussi montré que le nombre de Nusselt moyen sur les parois chauffées du canal obtenu lorsque le canal est au milieu d'un réservoir fermé est plus faible que celui obtenu pour un canal vertical infini (Bar-Cohen et Rohsenow 1984). Cette différence s'accentue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et est expliquée par le fait que le fluide entrant dans le canal est déjà préchauffé car il n'a pu se refroidir parfaitement. A la suite de cette étude, Liu et Tao (1999) se sont plus particulièrement intéressés aux oscillations de l'écoulement dans le réservoir à haut nombre de Rayleigh. Les résultats montrent que pour leur configuration d'étude un écoulement stationnaire et symétrique existe dans le réservoir pour $Ra_{T,H} \leq 10^4$. Pour $Ra_{T,H} > 10^4$, l'écoulement devient asymétrique et bifurque vers un écoulement oscillant.

Barozzi et al. (1999) ont étudié un canal vertical en air ($Pr = 0.7$), dont les parois sont maintenues à température constante ou à flux de chaleur constant, plongé dans un réservoir fermé. Le réservoir est 4 fois plus large que le canal et 3 fois plus haut. Le rapport Rf entre la surface du réservoir et celle du canal est donc de 12. A bas nombre de Rayleigh un état stationnaire est observé au sein du canal alors qu'à haut nombre de Rayleigh un écoulement oscillant apparaît. L'étude met en évidence que pour la géométrie considérée les parois du réservoir ont une grande influence sur la circulation globale du fluide au sein du réservoir et du canal : i) la dimension du réservoir joue sur la stabilité de l'écoulement, ii) pour des petits rapport d'aspect Rf l'écoulement dans le canal n'est pas indépendant de celui dans le réservoir.

Les études de Gan (2010a;b) s'intéressent à l'importance de la géométrie de l'environnement extérieur simulé sur l'écoulement au sein du canal vertical. Deux configurations sont étudiées. La première est restreinte aux limites géométriques du canal où des conditions de pression uniforme sont appliquées aux interfaces haute et basse. La seconde considère un domaine de calcul plus grand que le canal vertical. Le domaine de calcul est alors considéré comme un domaine ouvert et des conditions de pression uniforme sont imposées aux frontières de celui-ci. Il est montré que le débit de fluide entrant dans le canal $G_{in}(y = 0)$ ainsi que le transfert de chaleur dépendent de la taille de l'environnement extérieur simulé, le débit de fluide étant la grandeur la plus sensible. Les résultats obtenus montrent que les grandeurs caractérisant l'écoulement au sein du canal tendent vers des valeurs constantes avec l'augmentation de la surface S_t de l'environnement extérieur. L'étude montre que la valeur S_t pour laquelle il existe un écoulement dans le canal indépendant du réservoir dépend de la largeur du canal, du nombre de Rayleigh et de la symétrie ou non de l'écoulement.

Dans l'objectif de se rapprocher au plus près des études expérimentales, Caltagirone (2006) a étudié un canal vertical en air ($Pr = 0.71$) plongé au milieu d'un réservoir fermé. Deux nombres de Rayleigh sont considérés ($Ra_{q'',L} = 10^5$ ou $Ra_{q'',L} = 10^7$). L'étude montre que lorsque le panache thermique sortant du canal impacte le haut du réservoir, celui-ci sépare la cavité de manière artificielle. Il est nécessaire de réaliser des simulations 3D qui permettraient d'assurer un équilibrage plus naturel de la pression sur les deux ouvertures du canal. Pour $Ra_{q'',L} = 10^7$, l'écoulement du panache dans le réservoir est pleinement turbulent.

Une des problématiques se posant pour la modélisation des écoulements ouverts de convection naturelle est la modélisation de la pression motrice au niveau des interfaces haute P_{top} et basse P_{bot} du canal. L'objectif de Khereddine et al. (1997) a été de caractériser les pertes de pression aux interfaces d'un canal vertical ($P_{bot} - P_{ext}$ et $P_{top} - P_{ext}$). Le canal chauffé symétriquement à température ou à flux constant est situé au milieu d'un domaine ouvert : les frontières du domaine de calcul sont maintenues à température et à pression P_{ext} constantes.

L'étude porte sur des nombres de Rayleigh $Ra_{q'',L}$ ou $Ra_{T,L}$ compris entre 10^3 et 10^5. Il est montré que lorsque les frontières du domaine ouvert sont situées à 4 fois la largeur du canal ou plus celles-ci n'ont plus d'influence sur l'écoulement dans le canal. Les résultats mettent aussi en évidence que les écarts de pression ($P_{bot} - P_{ext}$ et $P_{top} - P_{ext}$) entre les interfaces du canal et la pression de référence du milieu extérieur P_{ext} évoluent avec le nombre de Rayleigh et sont plus grands à bas nombre de Rayleigh.

L'étude de Sadri et Floryan (2002) s'est intéressée aux pertes de pression en entrée d'un canal ($P_{bot} - P_{ext}$). Il s'agit ici d'un cas de convection forcée où le débit de fluide traversant le canal est connu, cependant l'étude apporte des conclusions qui peuvent aussi s'appliquer à la convection naturelle. Une extension en entrée du canal est considérée. En amont du canal, l'écoulement est alors approché par un écoulement de Jeffery-Hamel (Jeffery 1915, Hamel 1916). L'écoulement en amont du canal est ainsi purement radial et peut être exprimé en coordonnées polaires sous la forme

$$V_r = F(\theta)/r \text{ et } V_\theta = 0, \tag{3.1}$$

où r est la distance par rapport à l'origine située en $(x, y) = (0, 0)$. F est déterminée en substituant l'équation (3.1) dans les équations de Navier-Stokes

$$F''' + 2\,Re\,FF' + 4\,F' = 0, \tag{3.2}$$

où le nombre de Reynolds $Re = V_{ref}H/\nu$ avec H la demi-largeur du canal. L'équation (3.2) est complétée par les conditions limites et une condition sur le débit de fluide en amont du canal devant être égal au débit de fluide dans le canal. La chute de pression motrice entre l'écoulement à l'infini et à l'interface basse ($P_{bot} - P_{ext}$) évolue de manière significative avec le nombre de Reynolds. De plus les modélisations de l'interface basse du canal retenues dans la littérature (souvent basées sur un écoulement non visqueux) sous-estiment fortement la valeur du coefficient de perte de pression et cela notamment à bas Reynolds.

La simulation du canal avec son environnement extérieur pose ainsi des questions de modélisation. La littérature évoquée montre qu'il existe plusieurs manières de prendre en compte l'environnement extérieur (extension, réservoir fermé ou domaine ouvert). Dans tous les cas, la taille de l'environnement extérieur simulé est un facteur à prendre en compte et son influence sur la dynamique et la thermique de l'écoulement au sein du canal doit être quantifiée. Cet état de l'art montre aussi qu'à bas nombre de Rayleigh il est possible d'observer un écoulement stationnaire au sein du canal alors qu'à plus haut nombre de Rayleigh l'interaction entre l'écoulement sortant du canal et l'environnement extérieur devient importante et peut mener à des écoulements oscillants. La caractérisation des interfaces du canal montre que les écarts de pression motrice entre les interfaces haute et basse du canal et l'écoulement à l'infini sont corrélées avec le nombre de Rayleigh.

3.2 Motivations et objectifs

La littérature montre que les interactions entre le canal et son environnement extérieur peuvent être importantes. Pour cette raison, nous proposons une étude paramétrique sur l'influence de la taille de l'environnement extérieur sur l'écoulement au sein du canal. Cette étude est présentée dans le chapitre 4. On caractérise cette interaction pour deux nombres de Rayleigh correspondant soit à un régime d'écoulement pleinement développé ($Ra = 5.10^3$) soit à un régime de type couche limite ($Ra = 5.10^5$). Ce chapitre nous permet de mieux identifier les limites liées à la modélisation de l'environnement extérieur par un réservoir fermé ainsi que de caractériser les interactions canal/environnement. De plus, on retiendra une géométrie pour le réservoir à partir de laquelle on pourra considérer que l'écoulement au

sein du canal n'est pas influencé par la taille du réservoir sur un temps relativement long.

La deuxième motivation de cette partie est d'établir des solutions numériques de référence pour l'écoulement au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant plongé dans un environnement infini. En effet, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de solution numérique de référence pour ce type de configuration où l'écoulement dans le canal est simulé en prenant en compte son environnement extérieur. De plus les résultats expérimentaux ne permettent pas d'obtenir à la fois les profils de vitesse, de température et de pression au sein du canal. Ces solutions de référence nous permettront par la suite de comparer les résultats numériques obtenus pour différentes modélisations des interfaces – dans le cadre d'un calcul réduit aux limites géométriques du canal – et d'améliorer la modélisation de celles-ci. Ce travail est l'objet du chapitre 5.

Le dernier chapitre de cette partie (chapitre 6) propose de reproduire numériquement l'expérience d'Ospir et al. (2012) et Polidori et al. (2014). Nous comparons les champs de vitesse obtenus expérimentalement et numériquement aux premiers instants ainsi que l'écoulement obtenu sur un temps long.

3.3 Configuration d'étude

Nous considérons une configuration simplifiée où le canal et son environnement extérieur sont modélisés par un canal immergé au milieu d'un réservoir fermé de plus grande dimension. Cette configuration est notée CE (**C**anal avec **E**nvironnement) et décrite par la figure 3.2. Cette approche nous permet :

- de s'affranchir de la difficulté liée à la modélisation des interfaces haute et basse du canal
- de se rapprocher des configurations expérimentales.

Le canal vertical présenté dans la section 2.1 est plongé au milieu d'un réservoir fermé dont les parois sont maintenues à température constante $T = 0$. Le canal vertical est chauffé sur la moitié de sa paroi intérieure gauche à flux constant ($\frac{\partial T}{\partial x} = -1$). Ces parois ont une épaisseur égale à e_1 ou e_2 et les parois non-chauffées internes et externes du canal sont adiabatiques ($\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ où n est la normale sortante à la paroi). Ainsi la conduction thermique ne sera pas résolue au sein des parois du canal. Nous définissons trois rapports d'aspect dont les définitions sont données dans la figure 3.2 :

- Rf_t pour le réservoir,
- Rf_c pour le canal,
- Rf traduisant le rapport entre la surface du réservoir S_t et celle du canal S_c.

On définit également 6 points monitorés : 3 points situés au sein du canal et 3 points situés à l'extérieur du canal (voir tableau 3.1).

	X	Y
X_1	0	0
X_2	0	$Rf_c/2$
X_3	0	Rf_c
X_4	0	$-Rf_c/4$
X_5	0	$5Rf_c/4$
X_6	-2	$Rf_c/2$

Tableau 3.1 – *Définition des points monitorés*

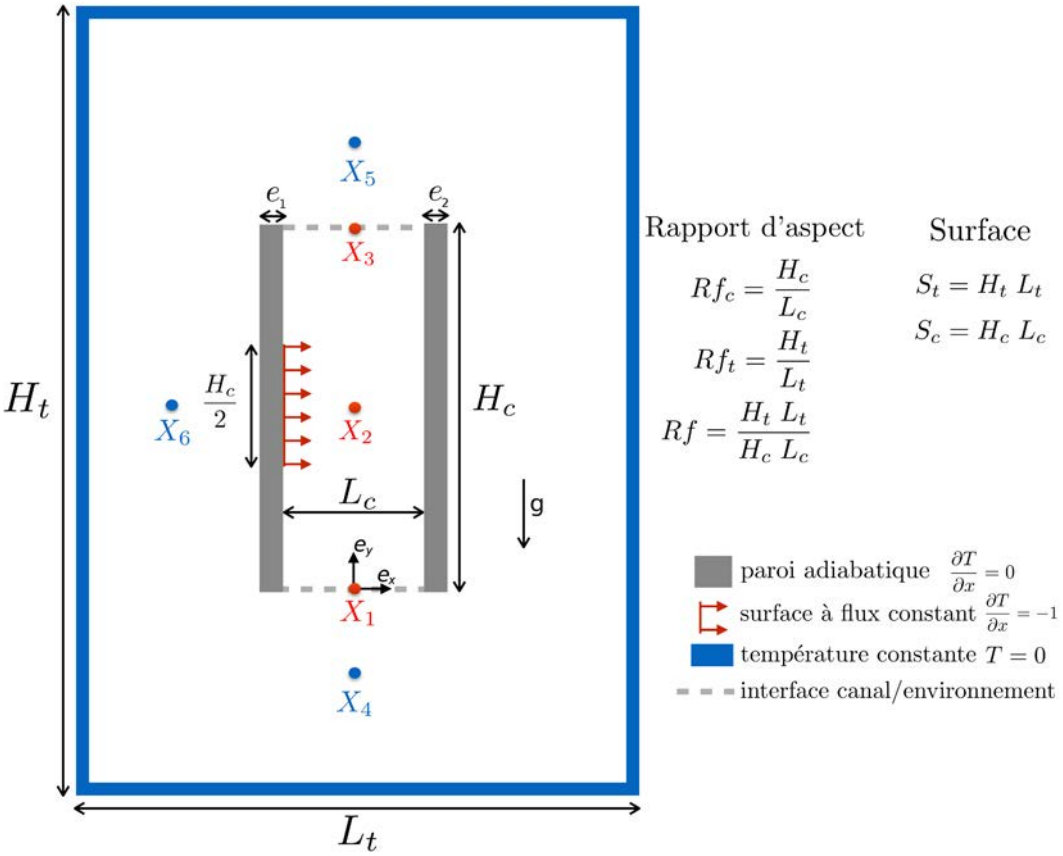


FIGURE 3.2 – *Configuration d'étude CE pour le canal et son environnement extérieur*

Dans l'ensemble de cette partie, un problème sans dimension est considéré et les équations instationnaires 2D de Boussinesq sont résolues. L'adimensionnement présenté dans la section 2.2 est utilisé. On définit ainsi le nombre de Rayleigh basé sur la largeur du canal $Ra_{q'',L} = \frac{g\beta q'' L_c^4}{\alpha\nu\lambda}$. Pour simplifier les notations, on notera dans cette partie $Ra = Ra_{q'',L}$. Le fluide considéré est de l'eau ($Pr = 7.85$) et il remplit entièrement le réservoir.

3.4 Méthodes numériques

Dans cette partie, le code de calcul SUNFLUIDH développé au sein du LIMSI par Fraigneau (2013) est utilisé pour résoudre les équations instationnaires 2D de Navier-Stokes sous les hypothèses de Boussinesq. On utilise la version OpenMP de ce code afin de pouvoir simuler des maillages fins dans un temps raisonnable.

La résolution numérique est effectuée en utilisant une approche volumes finis d'ordre 2 en espace et en temps. Les équations 2D de Boussinesq (2.1) sont discrétisées en espace sur un maillage décalé en se basant sur des schémas numériques centrés d'ordre 2. La discrétisation temporelle repose sur la méthode Euler retardé d'ordre 2 (ou Backward Differenciation Formula – *BDF*2). Afin de renforcer la stabilité numérique en fonction du pas de temps, nous utilisons une méthode semi-implicite, où seuls les termes visqueux des équations de Navier-Stokes sont définis à l'instant t^{n+1} (Harlow et Welch 1965). Les termes convectifs sont seulement définis explicitement, à partir des champs des grandeurs connues aux instants précédents (t^n et t^{n-1}) via une extrapolation d'Adams-Bashforth.

3.4.1 Discrétisation temporelle

On considère un schéma de type $BDF2$. Le pas d'intégration numérique est Δt. On a alors

$$\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right]^{n+1} = \frac{3\mathbf{V}^{n+1} - 4\mathbf{V}^{n} + \mathbf{V}^{n-1}}{2\Delta t} + o(\Delta t)^2. \tag{3.3}$$

Les termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes sont extrapolés à l'ordre 2 en fonction des grandeurs au temps t^n et t^{n-1} :

$$NL^{n+1} = 2NL^{n} - NL^{n-1} + o(\Delta t)^2. \tag{3.4}$$

En considérant le terme source $S^{n,n-1}$ incluant les termes non-linéraires et les termes calculés au temps t^n et t^{n-1} les équations discrétisées en temps s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \nabla \,.\, \mathbf{V}^{n+1} & & & = & 0, \\ \mathbf{V}^{n+1} - \frac{2\Delta t}{3}\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \triangle \mathbf{V}^{n+1} + \frac{2\Delta t}{3} \nabla P^{n+1} & = & S_{\mathbf{V}}^{n,n-1}, \\ T^{n+1} - \frac{2\Delta t}{3}\frac{1}{\sqrt{Ra}} \triangle T^{n+1} & = & S_{T}^{n,n-1}, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

avec

$$S_{\mathbf{V}}^{n,n-1} = \frac{4\mathbf{V}^{n} - \mathbf{V}^{n-1}}{3} + \frac{2\Delta t}{3}\left[- (2NL^{n} - NL^{n-1}) + Pr\; T^{n+1}\vec{e_y}\right], \tag{3.6}$$

et

$$S_{\mathbf{T}}^{n,n-1} = \frac{4\mathbf{T}^{n} - \mathbf{T}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}\left(2NL^{n} - NL^{n-1}\right). \tag{3.7}$$

L'équation de l'énergie est découplée est du problème vitesse-pression en traitant les termes non-linéaires de manière explicite. Un système d'Helmholtz est ainsi d'abord résolu pour la température afin d'obtenir T^{n+1}. Puis la résolution du couplage vitesse-pression est résolue.

3.4.2 Couplage Vitesse-Pression

Dans l'équation (3.5) la vitesse et la pression sont couplées et toutes les deux calculées au temps $^{n+1}$. Pour découpler le problème on utilise un algorithme de prédiction-projection incrémentale tel que proposé par Goda (1979). Cette méthode repose sur le théorème de Hodge-Helmholtz. On définit Ω notre domaine de calcul et Γ sa frontière. On note $[0; t_f]$ l'intervalle de temps pendant lequel est effectué la simulation.

Théorème 3.1 *Soit $\boldsymbol{V}^*$ un champ vectoriel de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ où Ω est un domaine compact de frontière Γ supposée régulière. Alors il existe un champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ et un potentiel scalaire ψ tel que :*

$$\boldsymbol{V}^* = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla\psi.$$

Si $\boldsymbol{V}$ est solénoïdal ($\nabla.\boldsymbol{V} = 0$) alors $\boldsymbol{V}$ dérive d'un potentiel vecteur :

$$\boldsymbol{V} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$

d'où

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^* - \nabla\psi.$$

On peut ainsi appliquer la décomposition de Hodge-Helmholtz au champ de vitesse $\mathbf{V}^{n+1}$ de l'équation 3.5 :

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^* - \nabla\psi. \tag{3.8}$$

La méthode de prédiction-projection incrémentale s'écrit alors en trois étapes :

- une étape de prédiction pour laquelle un champ de vitesse prédit $\mathbf{V}^*$ est calculé avec P^n

$$\begin{cases} \mathbf{V}^* - \dfrac{2\Delta t}{3}\dfrac{Pr}{\sqrt{Ra}}\triangle\,\mathbf{V}^* = -\dfrac{2\Delta t}{3}\nabla\,P^n + S_{\mathbf{V}}^{n,n-1} & \text{dans } \Omega\times[0;t_f], \\ \mathbf{V}^* = 0 & \text{sur } \Gamma\times[0;t_f], \end{cases} \tag{3.9}$$

- une étape de projection où $\mathbf{V}^*$ est exprimé, en utilisant la décomposition de Hodge-Helmholtz, comme la somme d'un champ à divergence nulle noté $\mathbf{V}^{n+1}$ et un champ irrotationnel noté $\nabla\psi$

$$\begin{cases} \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{n+1} + \nabla\psi & \text{dans } \Omega\times[0;t_f], \\ \nabla\,.\,\mathbf{V}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega\times[0;t_f], \end{cases} \tag{3.10}$$

en prenant la divergence de l'équation 3.8 et en réécrivant $\nabla\psi = \Delta t\ \nabla\phi$ où $\phi = \dfrac{2}{3}(P^{n+1} - P^n)$, l'étape de projection s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta\phi = \dfrac{\nabla\,.\,\mathbf{V}^*}{\Delta t} & \text{dans } \Omega\times[0;t_f], \\ \quad + \text{conditions limites sur } \phi \text{ définies par (3.14)} & \text{sur } \Gamma\times[0;t_f], \end{cases} \tag{3.11}$$

- une étape de correction pour déterminer $\mathbf{V}^{n+1}$ et P^{n+1}

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^* - \Delta t\nabla\phi & \text{dans } \Omega\times[0;t_f], \\ P^{n+1} = P^n - \dfrac{3}{2}\phi & \text{dans } \Omega\times[0;t_f]. \end{cases} \tag{3.12}$$

A l'étape de prédiction, on considère $\mathbf{V}^* = 0$ sur la frontière du domaine puisque notre configuration d'étude est un domaine fermé et que l'on impose des conditions de non-glissement sur les parois du canal. Pour l'étape de projection, il est nécessaire de définir des conditions limites sur ϕ. Pour cela, on intègre l'équation 3.11 sur le domaine Ω et par la formule de la divergence on obtient :

$$\int_\Gamma \nabla\phi\cdot n = \int_\Gamma \frac{\mathbf{V}^*}{\Delta t}\cdot n = 0. \tag{3.13}$$

On en déduit donc les conditions limites sur ϕ :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma\times[0;tf]. \tag{3.14}$$

Plus de détails sur cette méthode sont donnés par Chorin (1968), Teman (1969), Goda (1979), Guermond et al. (2006).

La résolution découplée du problème vitesse-pression nécessite donc la résolution de deux problèmes d'Helmholtz pour l'étape de prédiction (un pour chacune des composantes de la vitesse) et d'une équation de Poisson pour l'étape de projection. L'équation de Poisson est résolue à l'aide d'une méthode multi-grille associée avec une méthode de résolution itérative de type SOR. Les problèmes d'Helmholtz sont résolus par une méthode ADI (Alterning Direction Implicit method) (Douglas 1962, Chang et al. 1991).

Remarque 3.1 *Lorsque le problème est défini de cette manière il existe une solution $(\mathbf{V}^{n+1}, P^{n+1})$ telle que $(\mathbf{V}^{n+1}, P^{n+1} + \lambda)$ soit solution. La solution est donc unique à un mode de pression constante près. Afin d'avoir toujours la même référence pour la pression motrice, tous les résultats seront présentés de telle manière que la pression motrice au coin inférieur gauche du réservoir soit nulle. De cette manière, on considère que la pression motrice dans le milieu extérieur P_{ext} au loin du canal est nulle.*

3.4.3 Conditions limites

On récapitule ici les conditions limites thermiques et dynamiques s'appliquant à notre configuration. On décompose la frontière du domaine $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_{flux} \cup \Gamma_c$ en trois parties : Γ_t correspondant aux parois du réservoir, Γ_{flux} correspondant à la moitié chauffée de la paroi interne du canal et Γ_c pour les autres parois du canal. Les conditions limites associées à notre problème sont donc les suivantes :

- du point de vue thermique

$$\begin{cases} T^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_t, \\ \dfrac{\partial T^{n+1}}{\partial x} = -1 & \text{sur } \Gamma_{flux}, \\ \dfrac{\partial T^{n+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ T(t=0) = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ et } \Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

- du point de vue dynamique

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial P^{n+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{V}(t=0) = P(t=0) = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ et } \Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

3.4.4 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est effectuée en utilisant la méthode des volumes finis (Patankar 1980) avec un maillage à grilles décalées type MAC (Harlow et Welch 1965, Amsden et Harlow 1970). Le maillage et les volumes de contrôle des vitesses et de la pression sont représentés sur la figure 3.3. On définit la pression au centre de la maille et les composantes de vitesse U et V sont définies au centre des interfaces de la maille. La discrétisation des équations sur un maillage décalé présente l'avantage d'assurer la concordance des opérateurs gradient, divergence et laplacien discret et ainsi de respecter les relations vectorielles les reliant.

La divergence du champ de vitesse est ainsi calculée au point (I, J), l'équation de quantité de mouvement pour U au point (i, J) et celle pour V au point (I, j). Si l'on considère un maillage régulier, où Δx et Δy sont respectivement la taille des mailles dans la direction $\vec{e_x}$ et

$\vec{e_y}$, alors les différents opérateurs discrets s'écrivent avec des schémas centrés d'ordre 2 de la manière suivante :

- pour le calcul de la divergence

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}\Big|_{I,J} &= \dfrac{U_{i,J} - U_{i-1,J}}{\Delta x} + o(\Delta x)^2, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}\Big|_{I,J} &= \dfrac{V_{I,j} - V_{I,j-1}}{\Delta y} + o(\Delta y)^2, \end{cases} \tag{3.17}$$

- pour U

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}\Big|_{i,J} &= \dfrac{P_{I+1,J} - P_{I,J}}{\Delta x} + o(\Delta x)^2, \\ \Delta U\Big|_{i,J} &= \dfrac{-2\,U_{i,J} + U_{i+1,J} + U_{i-1,J}}{\Delta x^2} + \dfrac{-2\,U_{i,J} + U_{i,J+1} + U_{i,J-1}}{\Delta y^2} + o((\Delta x)^2, (\Delta y)^2), \\ NL\Big|_{i,J} &= 0.5\,U_{i,J}\left(\dfrac{U_{i+1,J} - U_{i,J}}{\Delta x} + \dfrac{U_{i,J} - U_{i-1,J}}{\Delta x}\right) \\ & \quad +0.5\left(\dfrac{V_{I+1,j} + V_{I,j}}{2} \times \dfrac{U_{i,J+1} - U_{i,J}}{\Delta y} + \dfrac{V_{I+1,j-1} + V_{I,j-1}}{2} \times \dfrac{U_{i,J} - U_{i,J-1}}{\Delta y}\right) \\ & \quad +o((\Delta x)^2, (\Delta y)^2), \end{cases} \tag{3.18}$$

- pour V

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}\Big|_{I,j} &= \dfrac{P_{I,J+1} - P_{I,J}}{\Delta y} + o(\Delta y)^2, \\ \Delta V\Big|_{I,j} &= \dfrac{-2\,V_{I,j} + V_{I+1,j} + V_{I-1,j}}{\Delta x^2} + \dfrac{-2\,V_{I,j} + V_{I,j+1} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} + o((\Delta x)^2, (\Delta y)^2), \\ NL\Big|_{I,j} &= 0.5\,V_{I,j}\left(\dfrac{V_{I,j+1} - V_{I,j}}{\Delta y} + \dfrac{V_{I,j} - V_{I,j-1}}{\Delta y}\right) \\ & \quad +0.5\left(\dfrac{U_{i,J+1} + U_{i,J}}{2} \times \dfrac{V_{I+1,j} - V_{I,j}}{\Delta x} + \dfrac{U_{i-1,J+1} + U_{i-1,J}}{2} \times \dfrac{V_{I,j} - V_{I,j-1}}{\Delta x}\right) \\ & \quad +o((\Delta x)^2, (\Delta y)^2), \end{cases} \tag{3.19}$$

- pour T

$$\begin{cases} \Delta T\big|_{I,J} &= \dfrac{-2\,T_{I,J} + T_{I+1,J} + T_{I-1,J}}{\Delta x^2} + \dfrac{-2\,T_{I,J} + T_{I,J+1} + T_{I,J-1}}{\Delta y^2} + o((\Delta x)^2, (\Delta y)^2), \\ NL\big|_{I,J} &= 0.5\left(U_{i,J}\dfrac{T_{I+1,J} - T_{I,J}}{\Delta x} + U_{i-1,J}\dfrac{T_{I,J} - T_{I-1,J}}{\Delta x}\right) \\ & \quad +0.5\left(V_{I,j}\dfrac{T_{I,J+1} - T_{I,J}}{\Delta y} + V_{I,j-1}\dfrac{T_{I,J} - T_{I,J-1}}{\Delta y}\right) \\ & \quad +o((\Delta x)^2, (\Delta y)^2). \end{cases} \tag{3.20}$$

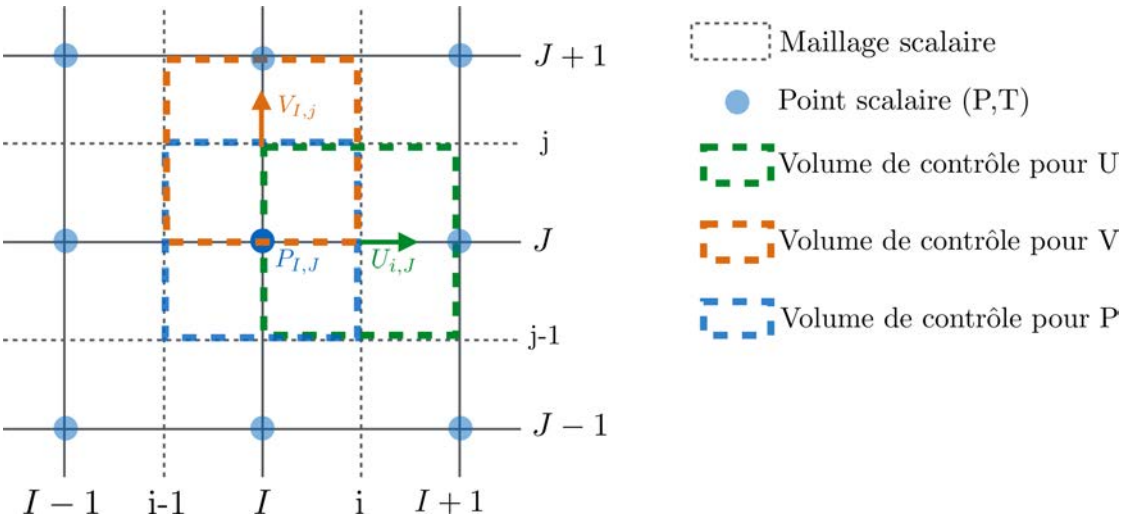


FIGURE 3.3 – *Schéma maillage décalé*

BIBLIOGRAPHIE

A. Amsden et F. Harlow. The SMAC Method : A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows. *Technical Report LA-4370, Los Alamos National Laboratory*, 1970.

A. Bar-Cohen et E.M. Rohsenow. Thermally Optimum Spacing of Vertical Natural Convection Cooled Parallel Plates. *ASME Journal Heat Transfer*, 106 :116–123, 1984.

G.S. Barozzi, M.A. Corticelli, et E. Nobile. Numerical Simulation of Time-dependent Buoyant Flows in an Enclosed Vertical Channel. *Heat and Mass Transfer*, 35 :89–99, 1999.

J.P. Caltagirone. Simulation d'une expérience de thermo-convection. *GdR AMETH*, 2006.

M. J. Chang, L. C. Chow, et W. S. Chang. Improved Alternating-direction Implicit Method for Solving Transient Three-dimensional Heat Diffusion Problems. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals 19*, 1 :69–84, 1991.

A. J. Chorin. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. *Mathematics of Computation*, 22 :745–762, 1968.

Jr.J. Douglas. Alternating Direction Methods for Three Space Variables. *Numerische Mathematik 4*, 1 :41–63, 1962.

Y. Fraigneau. Principes de base des méthodes numériques utilisées dans le code SUNFLUIDH pour la simulation des écoulements incompressibles et à faible nombre de Mach. *Internal Report, LIMSI-CNRS*, 2013.

G. Gan. Impact of Computational Domain on the Prediction of Buoyancy-driven Ventilation Cooling. *Building and Environment*, 45 :1173–1183, 2010a.

G. Gan. Simulation of Buoyancy-driven Natural Ventilation of Buildings - Impact of Computational Domain. *Energy and Buildings*, 42 :1290–1300, 2010b.

K. Goda. A Multistep Technique With Implicit Difference Schemes for Calculating Two - or Three - Dimensional Cavity Flows. *Journal of Computational Physics*, 30 :76–95, 1979.

J.L. Guermond, P.D. Minev, et J. Shen. An Overview of Projection Methods for Incompressible Flows. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :6011–6045, 2006.

G. Hamel. Spiralfömrige bewegungen zäher flüssigheiten. *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, 3 :34–60, 1916.

F. Harlow et J. Welch. Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid With Free Surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.

G. Jeffery. The Two-Dimensional Steady Motion of a Viscous Fluid. *Philos. Mag.*, 6 :455–465, 1915.

C.F Kettleborough. Transient Laminar Free Convection Between Heated Vertical Plates Including Entrance Effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15 :883–896, 1972.

A.S. Khereddine, M. Houla Sanda, S.K. Chaturvedi, et T.O. Mohieldin. Numerical Prediction of Pressure Loss Coefficient and Induced Mass Flux for Laminar Natural Convective Flow in Vertical Channel. *Energy*, 22 :413–423, 1997.

J.P. Liu et W.Q. Tao. Numerical Analysis of Natural Convection Around a Vertical Channel in a Rectangular Enclosure. *Heat and Mass Transfer*, 31 :313–321, 1996.

J.P. Liu et W.Q. Tao. Bifurcation to Oscillatory Flow of the Natural Convection Around a Vertical Channel in Rectangular Enclosure. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 9 :170–185, 1999.

D. Ospir, C. Popa, C. Chereches, G Polidori, et S. Fohanno. Flow Visualization of Natural Convection in a Vertical Channel With Asymmetric Heating. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 :486–493, 2012.

S.V. Patankar. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. *Washington, Hemisphere Publishing Corporation*, pages 126–134, 1980.

G. Polidori, S. Fatnassi, R. Ben Maad, F. Beaumont, et S. Fohanno. Transient Natural Convection Flow Dynamics in a Asymmetrically Heated Vertical Channel. *10th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Hefat, 14-16 July*, 2014.

R.M. Sadri et J.M Floryan. Accurate Evaluation of the Loss Coefficient and the Entrance Legnth of the Inlet Region of a Channel. *Journal of Fluids Engineering*, 124 :685–693, 2002.

R. Teman. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires. *Archive for Rational Mechanis and Analysis*, 33 :377–385, 1969.

4

Etude paramétrique sur la taille de l'environnement extérieur

Sommaire

4.1 Régime pleinement développé $Ra = 5.10^3$ . . . 55
4.1.1 Etablissement d'une stratification thermique . . . 56
4.1.2 Similarité des écoulements . . . 57
4.1.3 Evolution temporelle . . . 58
4.1.4 Bouclage entre l'entrée et la sortie . . . 60
4.2 Régime de type couche limite $Ra = 5.10^5$ . . . 60
4.2.1 Similarité des écoulements . . . 62
4.2.2 Oscillation du jet . . . 62
4.3 Conclusion sur l'interaction canal/environnement . . . 63
Bibliographie . . . 64

Dans ce chapitre, nous proposons une étude paramétrique afin d'étudier l'influence de la taille de l'environnement extérieur sur l'écoulement au sein du canal et les interactions canal/environnement. Cette étude est menée pour deux nombres de Rayleigh différents correspondant soit à un écoulement pleinement développé dans le canal soit à un écoulement de type couche limite avec une zone de recirculation. A la fin de ce chapitre, une géométrie du réservoir est retenue pour modéliser un environnement extérieur infini. Ce chapitre permet aussi de mettre en évidence les limites liées à la modélisation de l'environnement extérieur par un réservoir fermé.

Dans ce chapitre, les résultats sont présentés pour deux nombres de Rayleigh traduisant les deux régimes d'écoulement pouvant être observés dans le canal vertical :

- $Ra = 5.10^3$ régime pleinement développé,
- $Ra = 5.10^5$ régime de type couche limite avec zone de recirculation en haut du canal.

Une étude paramétrique est proposée afin de caractériser l'influence de la dimension de l'environnement extérieur sur l'écoulement au sein du canal. L'objectif de ce chapitre est aussi de reprendre l'idée évoquée par Kettleborough (1972) quant à l'utilisation du principe de Saint-Venant à la mécanique des fluides :

=> si les frontières du domaine sont suffisamment éloignées du canal alors l'écoulement dans le canal n'est pas influencé par celles-ci.

Etude paramétrique La configuration d'étude est celle présentée par la figure 3.2 avec $e_1 = e_2 = e$. Pour étudier l'influence de la taille de l'environnement extérieur sur l'écoulement au sein du canal, nous considérons plusieurs géométries où :

- Rf varie de $Rf = 10$ à $Rf = 640$,
- les rapports d'aspect du canal et du réservoir restant inchangés (respectivement $Rf_c = 10$ et $Rf_t = 4$).

Le tableau 4.1 récapitule les différentes géométries retenues pour cette étude.

Cas	H_t	L_t	Hc	L_c	e	Rf_t	Rf_c	Rf
CE10	20	5	10	1	0.1	4	10	10
CE40	40	10	10	1	0.1	4	10	40
CE160	80	20	10	1	0.1	4	10	160
CE640	160	40	10	1	0.1	4	10	640

TABLEAU 4.1 – *Définition des différentes géométries*

Le maillage utilisé est tel que la taille des mailles reste constante pour les différentes géométries étudiées. Cela nous permet de comparer des résultats ayant la même résolution. Les parois du canal sont maillées avec N_e mailles sur e. Le pas de temps adimensionnel Δt est de 5.10^{-3} pour toutes les configurations. Le tableau 4.2 récapitule ces informations.

	Maillage réservoir	Maillage canal	N_e	Δt
CE10	256 x 512	52 x 256	6	0.005
CE40	512 x 1024	52 x 256	6	0.005
CE160	1024 x 2048	52 x 256	6	0.005
CE640	2048 x 4096	52 x 256	6	0.005

TABLEAU 4.2 – *Maillage et pas de temps pour les différentes configurations*

Remarque 4.1 *On rappelle que les résultats sont présentés en considérant que la pression motrice au loin du canal (au coin inférieur gauche du réservoir) est nulle.*

4.1 Régime pleinement développé $Ra = 5.10^3$

La figure 4.1 permet d'observer le champ de température et le champ de pression motrice dans l'ensemble du réservoir à trois temps différents ($t = 25,\ 50,\ 100$). Le fluide froid entre par l'interface basse du canal et sort sous la forme d'un panache thermique au niveau de l'interface haute.

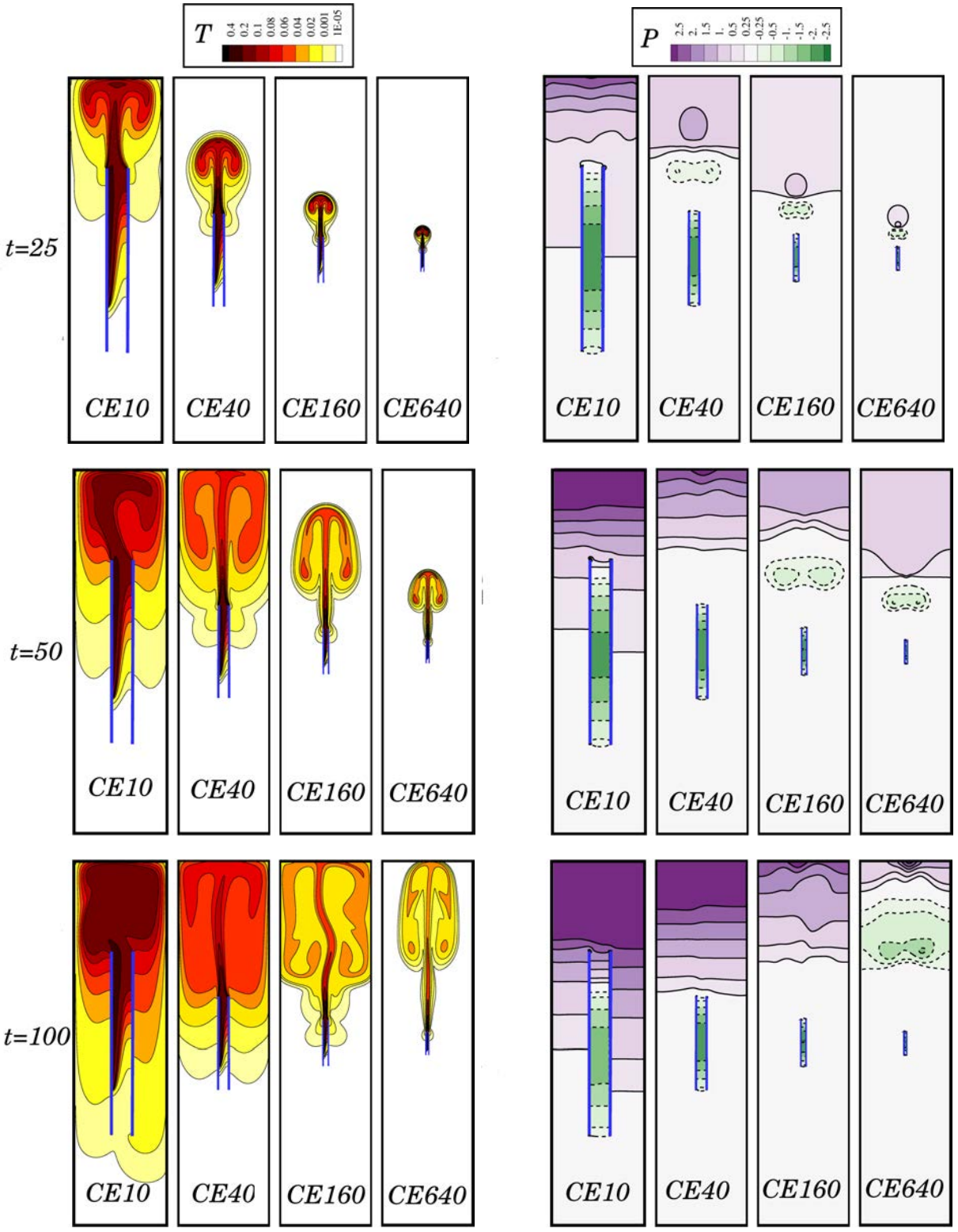


FIGURE 4.1 – *Champ de température (gauche) et de pression motrice (droite) dans le réservoir à différents instants ($t = 25,\ 50,\ 100$) pour $Ra = 5.10^3$*

4.1.1 Etablissement d'une stratification thermique

On remarque que le panache thermique sortant du canal évolue en temps (figure 4.1). Nous définissons $t_{panache}$ comme l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que le panache

parcours la distance d_{top} entre l'interface haute du canal et la paroi haute du réservoir

$$t_{panache} = \frac{d_{top}}{V_{ref}}, \tag{4.1}$$

où V_{ref} est la vitesse de référence de convection naturelle. Le temps caractéristique t_c au bout duquel le panache impacte la partie haute du réservoir s'exprime alors comme

$$t_c = t_{panache} + t_{dev}, \tag{4.2}$$

où t_{dev} est le temps de développement de la couche limite thermique le long de la paroi chauffée. t_{dev} est estimé par la mesure des vitesses au point $X1$, $X2$ et $X3$ (voir figure 4.2). Contrairement à $t_{panache}$, t_{dev} est indépendant de la taille du réservoir. Le tableau 4.3 donne une estimation du temps caractéristique t_c pour chacune des configurations.

	$t_{panache}$	t_{dev}	t_c
CE10	5	20	25
CE40	15	20	35
CE160	35	20	55
CE640	75	20	95

TABLEAU 4.3 – *Temps caractérisant l'impact du panache thermique sur la paroi haute du réservoir à* $Ra = 5.10^3$

On observe alors qu'après l'impact du panache sur la paroi haute du réservoir une stratification thermique se met en place dans le réservoir (voir par exemple la figure 4.1 pour $CE10$ après $t = 25$). La stratification thermique sera ainsi d'autant plus lente à se mettre en place que la taille du réservoir sera grande et donc le temps t_c élevé. Si l'on se fixe l'objectif d'approcher l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical plongé dans un milieu infini, il faudra donc étudier l'écoulement avant la mise en place de la stratification thermique (donc avant $t = t_c$).

4.1.2 Similarité des écoulements

Tant que le panache n'a pas impacté le réservoir les champs de température et de pression restent similaires lorsque l'on compare les différentes géométries entre elles. Ainsi, les écoulements apparaissent semblables à $t = 25$ pour $CE40$, $CE160$ et $CE640$ ainsi qu'à $t = 50$ pour $CE160$ et $CE640$ (voir figure 4.1). A $t = 100$, le panache ayant impacté le réservoir pour toutes les configurations il n'y a plus aucune similarité. Pour étudier de manière plus précise cette similarité, on s'intéresse à la température moyenne dans le réservoir

$$< T > = \frac{1}{S_t} \int_{S_t} T \, dS. \tag{4.3}$$

En remarquant que chacune des configurations CE peuvent être incluses dans les configurations de taille supérieure on peut alors écrire

$$< T >_{CE640} = \frac{1}{S_{CE640}} \int_{S_{CE640}-S_t} T \, dS \; + \; \frac{1}{S_{CE640}} \int_{S_t} T \, dS. \tag{4.4}$$

Cela nous amène à définir le rapport R_T de la manière suivante

$$R_T = \frac{S_t}{S_{CE640}} \frac{< T >}{< T >_{CE640}} \; = \; 1 \; - \frac{1}{< T >_{CE640} \; S_{CE640}} \int_{S_{CE640}-S_t} T \, dS. \tag{4.5}$$

Ainsi tant que $R_T = 1$ cela signifie que les deux configurations sont similaires du point de vue thermique. L'enthalpie des deux configurations est alors identique. Lorsque $R_T < 1$, la plus petite des configurations ($CE10$, $CE40$ ou $CE160$) ne peut plus contenir la même quantité

de chaleur que la plus grande des configurations $CE640$ et les enthalpies des configurations ne sont plus équivalentes. Le tableau 4.4 donne la valeur de R_T à différents instants. Nous montrons que tant que $t < t_c$ les configurations restent similaires. Pour $t > t_c$ il n'est alors plus possible de comparer les différentes configurations du point de vue thermique.

	$< T >= \frac{1}{S_t}\int_{S_t} T\, dS$					R_T				
temps	5	10	25	50	100	5	10	25	50	100
$CE10$	$4.59\ 10^{-3}$	$7.55\ 10^{-3}$	$1.48\ 10^{-1}$	$2.36\ 10^{-1}$	$3.49\ 10^{-1}$	**1**	**1**	0.996	0.838	0.558
$CE40$	$1.14\ 10^{-3}$	$1.88\ 10^{-3}$	$3.72\ 10^{-2}$	$6.95\ 10^{-2}$	$1.19\ 10^{-1}$	**1**	**1**	**1**	0.987	0.763
$CE160$	$2.86\ 10^{-4}$	$4.70\ 10^{-4}$	$9.28\ 10^{-3}$	$1.76\ 10^{-2}$	$3.36\ 10^{-2}$	**1**	**1**	**1**	**1**	0.856
$CE640$	$7.14\ 10^{-5}$	$1.17\ 10^{-4}$	$2.32\ 10^{-3}$	$4.40\ 10^{-3}$	$9.78\ 10^{-3}$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

TABLEAU 4.4 – *Température moyenne* $< T >$ *et rapport* R_T *dans le réservoir à* $t = 5, 10, 25, 50, 100$ *pour* $Ra = 5.10^3$

4.1.3 Evolution temporelle

La figure 4.2 montre le suivi temporel de la vitesse verticale et de la température en différents points du canal. Lorsque la stratification thermique devient importante ($t \gg t_c$), la vitesse verticale dans le canal ne fait que décroître alors que la température au sein de celui-ci augmente. Cela s'observe particulièrement bien pour les cas $CE10$ et $CE40$ sur la figure 4.2. En conséquence, pour $CE10$ et $CE640$ le débit de fluide entrant par le bas du canal ainsi que le transfert thermique par convection diminuent lorsque $t \gg t_c$ tandis que la température de mélange à l'interface haute du canal $T_{bluk}(y = Rf_c)$ augmente (voir tableau 4.5). La diminution de la vitesse s'explique par le fait que la stratification thermique va de pair avec une stratification de la pression motrice comme montré par la figure 4.3. En comparant pour les différentes configurations CE à $t = 50$, la pression motrice au niveau de l'interface haute (voir tableau 4.6), on remarque une pression motrice supérieure pour les réservoirs de petite taille par rapport aux plus grands réservoirs. Cette sur-pression due à la stratification thermique mène alors à un effet bouchon créant une diminution de l'effet cheminée.

	$\overline{Nu_1}$			$G_{in}(y=0)$			$T_{bulk}(y=Rf_c)$		
temps	25	50	100	25	50	100	25	50	100
$CE10$	3.43	3.36	3.25	0.409	0.391	0.345	0.171	0.173	0.197
$CE40$	3.46	3.44	3.42	0.421	0.427	0.420	0.163	0.162	0.165
$CE160$	3.46	3.44	3.44	0.428	0.432	0.433	0.160	0.160	0.160
$CE640$	3.39	3.37	3.37	0.430	0.433	0.433	0.158	0.158	0.158

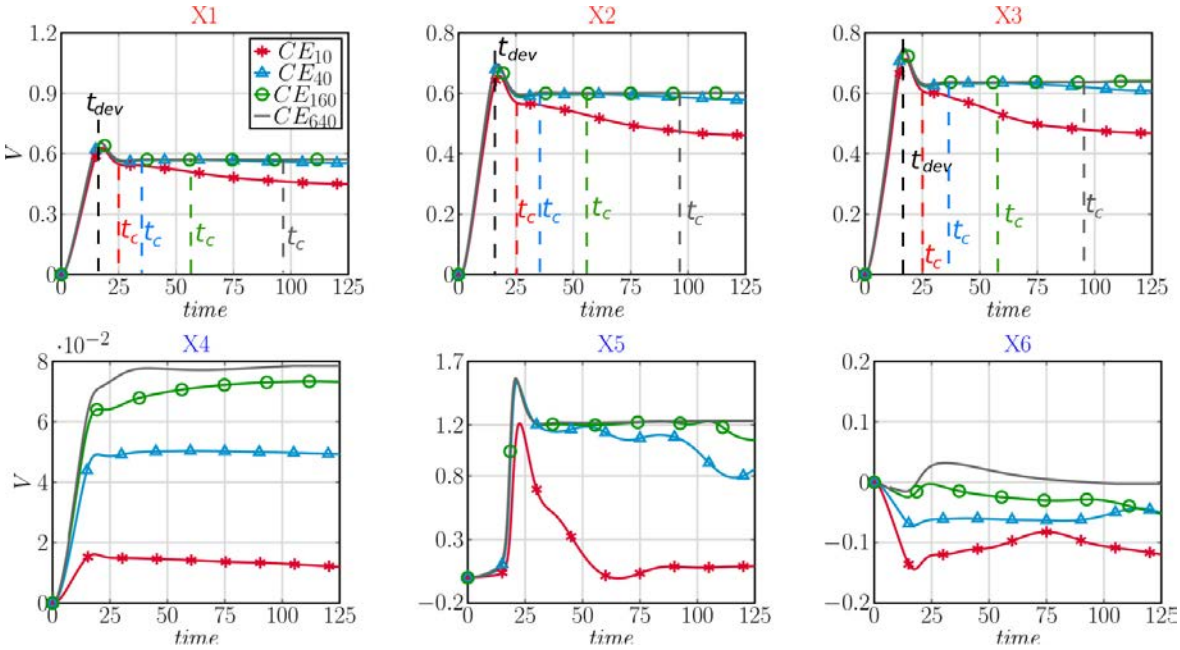
TABLEAU 4.5 – *Grandeurs caractéristiques de l'écoulement au sein du canal à* $t = 25, 50, 100$ *pour* $Ra = 5.10^3$

	P_{top}	P_{bot}	ΔP
$CE10$	0.592	−0.325	0.917
$CE40$	−0.379	−0.329	−0.05
$CE160$	−0.425	−0.338	−0.086
$CE640$	−0.426	−0.334	−0.092

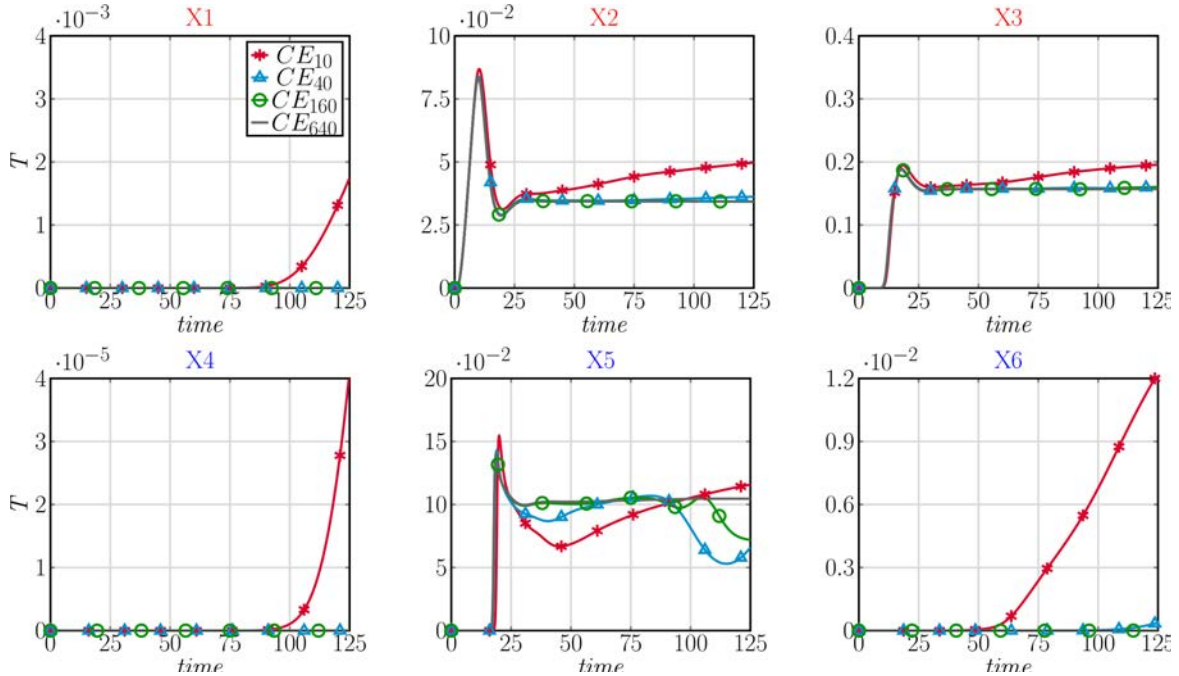
TABLEAU 4.6 – *Pression motrice moyenne aux interfaces basse et haute du canal et écart de pression motrice entre les interfaces à* $t = 50$ *pour* $Ra = 5.10^3$

Pour les configurations $CE160$ et $CE640$, le temps t_c étant plus important que pour les cas $CE10$ et $CE40$ la stratification thermique apparaît beaucoup plus tard. Ainsi pendant la période $t_{dev} < t < t_c$, la vitesse verticale et la température atteignent des valeurs constantes au sein du canal même si le milieu extérieur continue à évoluer (voir figure 4.2). Les valeurs de

vitesse verticale et de température au sein du canal sont de plus indépendantes de la géométrie du réservoir. On observe aussi que les valeurs du débit entrant dans le canal $G_{in}(y = 0)$, du nombre de Nusselt $\overline{Nu_1}$, de la température débitante à l'interface haute $T_{bulk}(y = Rf_c)$ et de l'écart de pression motrice ΔP entre les interfaces haute et basse tendent vers des valeurs indépendantes de la dimension de l'environnement extérieur (voir tableaux 4.5 et 4.6). De plus, le gradient de pression motrice dans le milieu extérieur reste très proche de zéro (voir figure 4.3). Ainsi tant que $t \ll t_c$, le milieu extérieur au canal peut donc être considéré comme proche d'un milieu infini à pression motrice constante.



(a) *Vitesse verticale V*



(b) *Température T*

FIGURE 4.2 – *Evolution temporelle de la vitesse verticale et de la température pour les cas CE10, CE40, CE160, CE640 en 3 points au sein du canal (X1, X2, X3) et 3 points dans le réservoir (X4, X5, X6) pour* $Ra = 5\,10^3$

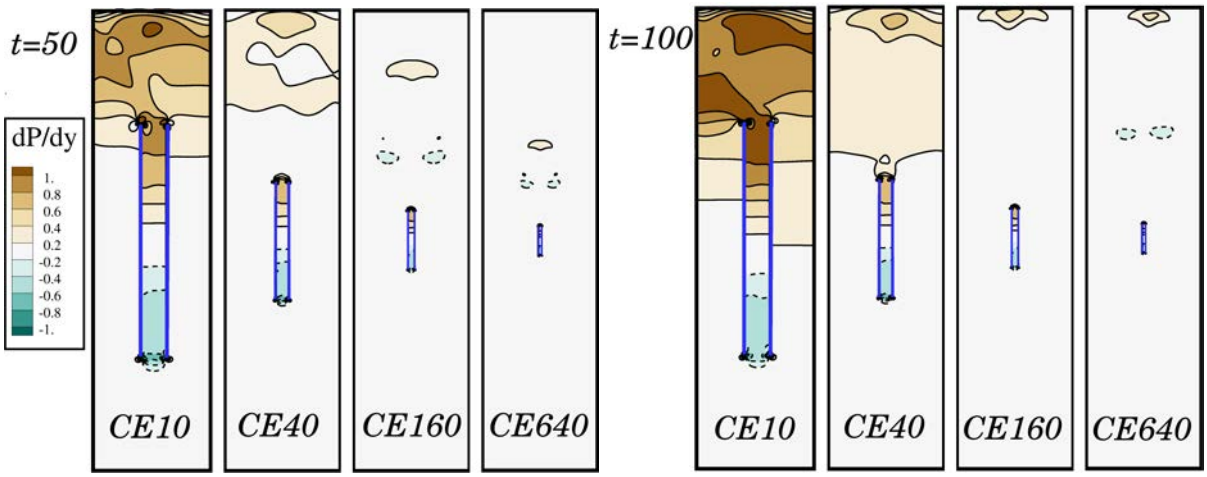


FIGURE 4.3 – *Champ du gradient de pression motrice* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *dans le réservoir à* $t = 50,\ 100$ *pour* $Ra = 5.10^3$

4.1.4 Bouclage entre l'entrée et la sortie

Un dernier point important concernant l'influence de la dimension du réservoir sur l'écoulement au sein du canal est l'existence d'un bouclage direct entre le fluide entrant et le fluide sortant du canal. Le milieu extérieur étant modélisé par un réservoir fermé il existe nécessairement une circulation globale dans le réservoir et un bouclage existe entre le fluide entrant dans le canal et le fluide en sortant. La figure 4.4 permet d'observer que lorsque la géométrie du réservoir est petite ($CE10$, $CE40$) il existe un bouclage entre le fluide entrant et le fluide sortant du canal dans la zone extérieure proche du canal. Cette situation n'est donc pas représentative d'un écoulement au sein du canal indépendant de son environnement extérieur puisque que le fluide sortant ne se refroidit pas de manière idéale et le fluide entrant est ainsi déjà échauffé. Au contraire pour $CE640$, le bouclage n'a pas lieu dans la zone proche du canal.

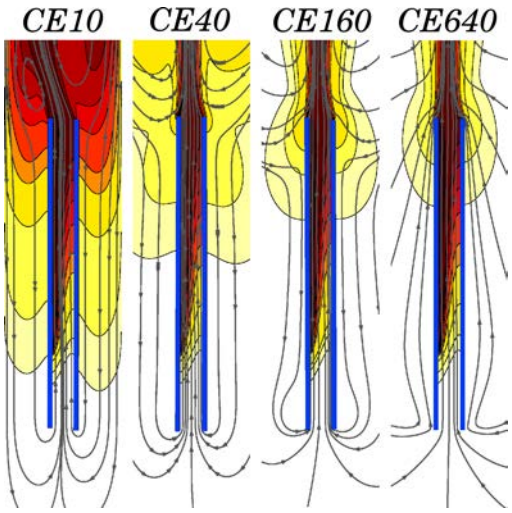


FIGURE 4.4 – *Détails autour du canal (température et ligne de courant) à* $t = 50$ *pour* $Ra = 5.10^3$

4.2 RÉGIME DE TYPE COUCHE LIMITE $Ra = 5.10^5$

Les résultats sont donnés pour les deux plus grandes configurations ($CE160$ et $CE640$) car l'influence de la stratification thermique devient vite importante pour les petites configurations ($CE10$ et $CE40$).

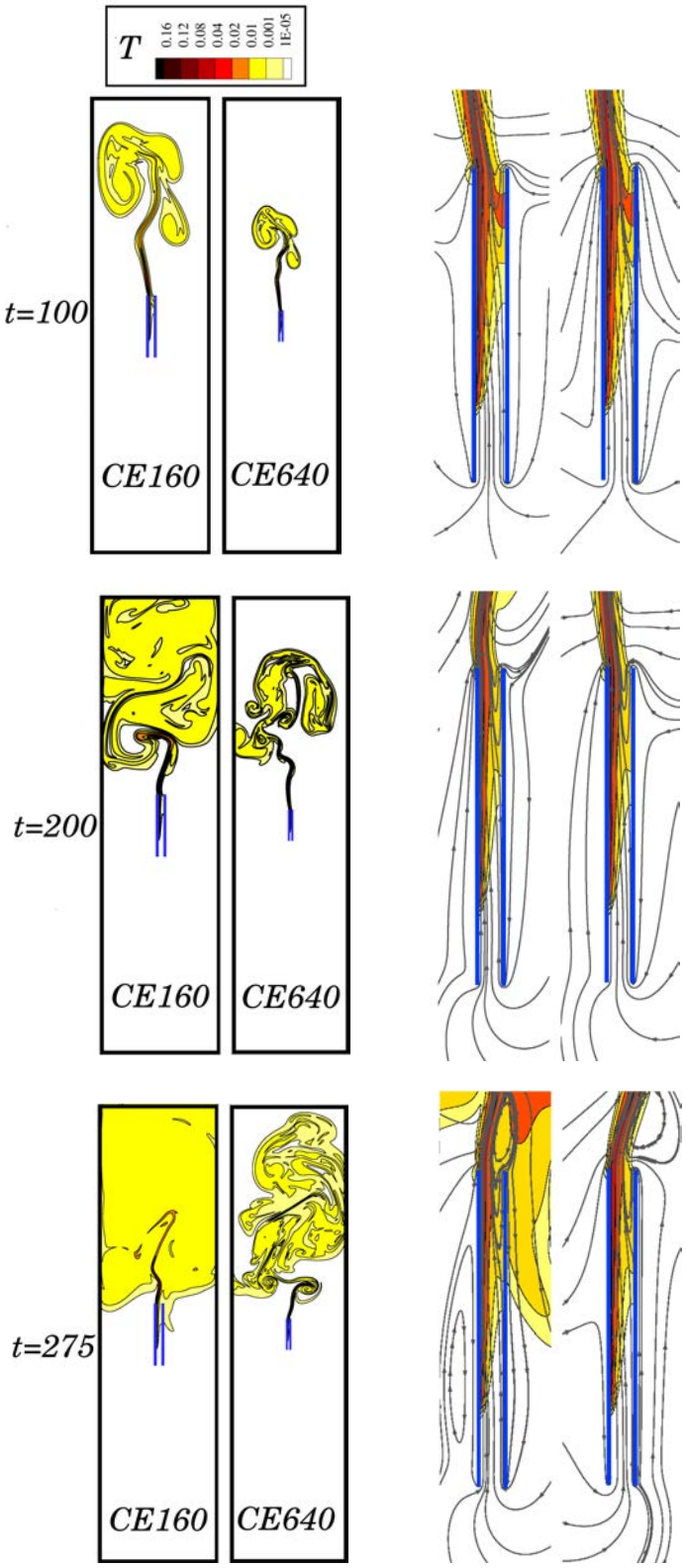


FIGURE 4.5 – *Champ de température dans le réservoir et détails autour du canal à différents instants* ($t = 100, 200, 275$) *pour* $Ra = 5.10^5$

La figure 4.5 présente le champ de température dans le réservoir ainsi qu'un zoom autour du canal où les lignes de courant sont représentées. Une couche limite thermique du côté de la paroi chauffée du canal existe et une zone de recirculation en forme de V en haut du canal

du côté de la paroi non chauffée est observée. Le fluide entre dans le canal à la fois par les interfaces basse et haute et sort sous la forme d'un jet thermique par l'interface haute.

4.2.1 Similarité des écoulements

Comme observé à $Ra = 5.10^3$, tant le jet n'interagit pas avec les parois du réservoir (ce qui est le cas pour $CE160$ et $CE640$ à $t = 100$ comme montré sur la figure 4.5) le champ de température entre les deux configurations reste similaire. Le tableau 4.7 permet de confirmer que jusqu'à $t = 100$ les configurations $CE160$ et $CE640$ sont équivalentes du point de vue thermique et ont une enthalpie identique. Au delà de $t = 200$ les configurations ne sont plus comparables thermiquement.

	$< T >= \frac{1}{S_t}\int_{S_t} T\, dS$			R_T		
temps	100	200	275	100	200	275
$CE160$	$3.56\ 10^{-3}$	$6.14\ 10^{-3}$	$9.34\ 10^{-3}$	**1**	0.99	0.97
$CE640$	$8.90\ 10^{-3}$	$1.55\ 10^{-3}$	$2.41\ 10^{-3}$	**1**	**1**	**1**

TABLEAU 4.7 – *Température moyenne* $< T >$ *et rapport* R_T *dans le réservoir à* $t = 100, 200, 275$ *pour* $Ra = 5.10^5$

4.2.2 Oscillation du jet

La figure 4.5 met aussi en évidence le fait que le jet thermique sortant du canal est oscillant. Par exemple, à $t = 200$ il est orienté vers la gauche puis orienté vers la droite à $t = 275$. Cette oscillation du jet est clairement mise en évidence sur la figure 4.6 où elle est observée dans le milieu extérieur au point X5. Ces oscillations apparaissent à $t \approx 150$ pour la configuration $CE160$ et vers $t = 225$ pour la configuration $CE640$. On observe que pour les trois points $X1$, $X2$ et $X3$ situé au sein du canal, des oscillations apparaissent sur la vitesse au même instant. L'interaction du jet avec le milieu extérieur modifie alors directement l'écoulement dans le canal. Cette influence s'explique par le fait que l'oscillation du jet vient directement modifier la taille de la zone de recirculation comme on peut l'observer sur la figure 4.5. La zone de recirculation en haut du canal est plus grande lorsque le jet est orienté vers la gauche et plus petite lorsque le jet est orienté vers la droite. Celle-ci évolue alors en espace et en temps. Cela implique que les débits de fluide entrant par les interfaces basse et haute du canal évolue dans le temps comme le montre le tableau 4.8.

	$\overline{Nu_1}$			$G_{in}(y=0)$			$G_{out}(y=Rf)$		
temps	100	200	275	100	200	275	100	200	275
$CE160$	7.97	7.94	7.97	0.214	0.205	0.217	$1.421\ 10^{-2}$	$1.879\ 10^{-2}$	$1.355\ 10^{-2}$
$CE640$	7.84	7.81	7.87	0.216	0.208	0.233	$1.338\ 10^{-2}$	$1.701\ 10^{-2}$	$8.435\ 10^{-3}$

TABLEAU 4.8 – *Grandeurs caractéristiques de l'écoulement au sein du canal à* $t = 100, 200, 275$ *pour* $Ra = 5.10^5$

Cette évolution spatio-temporelle a été observée dans des études expérimentales (Dupont et al. 2013, Sanvicente et al. 2013) mais aucune échelle de temps ou d'espace n'a été mise en évidence. On observe dans ce travail que cette oscillation de la zone de recirculation dans le canal est principalement due à l'interaction avec l'environnement extérieur et que plus l'environnement extérieur sera grand plus le jet oscillera tardivement.

Circulation globale dans le réservoir L'interaction entre le fluide sortant du canal et le milieu extérieur crée aussi une zone de circulation globale dans le réservoir dépendante de la direction du jet. Lorsque le jet est orienté vers la gauche du canal alors une recirculation globale est observée dans la partie droite du réservoir. L'aspiration du fluide par l'interface

basse n'est alors plus symétrique (comme observé à $t = 100$ sur la figure 4.5) mais privilégie la partie droite du réservoir (comme observé à $t = 200$ sur la figure 4.5). L'effet inverse est observé lorsque le jet est orienté vers la droite du canal.

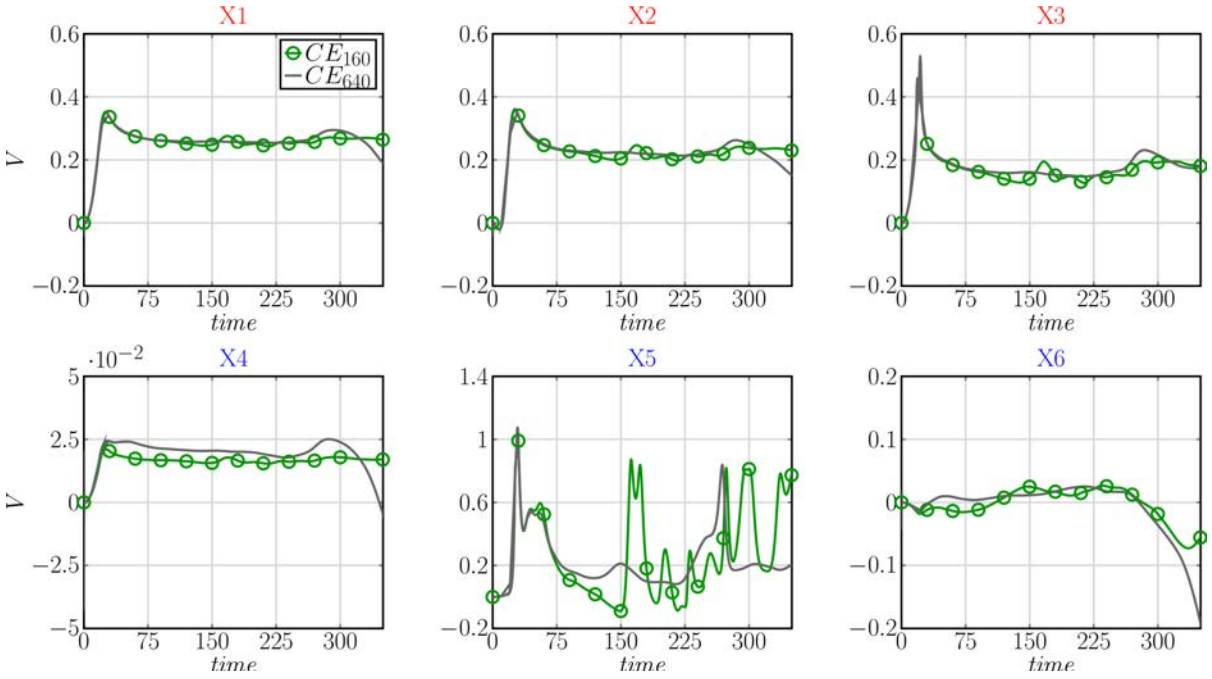


FIGURE 4.6 – *Evolution temporelle de la vitesse verticale pour les cas CE160, CE640 en 3 points au sein du canal (X1, X2, X3) et 3 points dans le réservoir (X4, X5, X6) pour* $Ra = 5.10^5$

4.3 Conclusion sur l'interaction canal/environnement

Nous avons montré qu'il existe différentes interactions entre le canal et son environnement extérieur. Les deux interactions principales mises en évidence sont :

1) l'établissement d'une stratification thermique,

2) l'oscillation du jet thermique sortant du canal.

Nous avons montré que si le rapport entre la surface de l'environnement extérieur et celle du canal est faible, le système canal/environnement n'est pas dissociable. Cependant, les interactions peuvent être limitées en augmentant la dimension de l'environnement extérieur. Il est alors possible de dissocier le comportement du canal et de l'environnement sur une plage de temps donné (pour $t < t_c$). Sur cette période, l'écoulement dans le canal ne dépend alors pas de la dimension de l'environnement extérieur.

Pour choisir une configuration d'étude représentative d'un écoulement de convection naturelle dans un canal vertical plongé dans un environnement infini, il est donc important de faire attention à ce que la taille du réservoir soit assez grande :

- pour observer l'écoulement dans le canal avant la mise en place d'une stratification thermique dans le milieu extérieur (avant t_c),
- pour limiter l'interaction de l'écoulement avec les parois du réservoir,
- pour "éviter" un bouclage direct entre le fluide entrant et le fluide sortant du canal,
- pouvoir observer l'écoulement sur un temps relativement long tout en restant dans des temps de calcul admissibles par les moyens disponibles.

Pour des raisons évidentes de temps de calcul, le choix de la taille du réservoir doit aussi se faire en prenant en compte les ressources disponibles. Le tableau 4.9 donne le temps de calcul CPU pour les différentes configurations.

	temps de calcul CPU
CE10	1 h 02 min
CE40	7 h 01 min
CE160	37 h 30 min
CE640	120 h

TABLEAU 4.9 – *Temps de calcul CPU pour arriver jusqu'à* $t = 100$ *pour* $Ra = 5.10^3$

Dans la suite de cette étude, nous travaillerons donc avec la configuration $CE640$ car celle-ci est la plus apte à représenter un environnement infini sur un temps relativement long à la fois à bas et à haut nombre de Rayleigh. De plus, le temps nécessaire pour la simulation reste modéré. On gardera cependant en tête que sur un temps très long ($t \gg t_c$) cette configuration ne sera plus représentative d'un environnement infini et le canal vertical n'évoluera plus de manière indépendante vis-à-vis du milieu extérieur due à une stratification thermique et/ou à l'interaction du jet sortant du canal avec les parois du réservoir.

Remarque 4.2 *Ce chapitre peut aussi amener à se poser la question de la reproductibilité des expériences souvent effectuées dans des milieux extérieurs de taille différentes et où le rapport entre la surface du réservoir et celle du canal est rarement très élevé.*

BIBLIOGRAPHIE

F. Dupont, F. Ternat, S. Samot, et R. Blonbou. Two-dimension Experimental Study of the Reverse Flow in a Free Convection Channel With Active Walls Differentially Heated. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 47 :150–157, 2013.

C.F Kettleborough. Transient Laminar Free Convection Between Heated Vertical Plates Including Entrance Effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15 :883–896, 1972.

E. Sanvicente, S. Giroux-Julien, C. Ménézo, et H. Bouia. Transitional Natural Convection Flow and Heat Transfer in an Open Channel. *International Journal of Thermal Sciences*, 63 :87–104, 2013.

5

Etablissement de solutions numériques de référence

Sommaire

5.1 Evolution temporelle de l'écoulement au sein du canal pour $10^2 \leq Ra \leq 5.10^5$ . . . 67
5.1.1 Observation d'un plateau stationnaire dans le canal pour $10^2 \leq Ra \leq 10^4$ . . . 67
5.1.2 Comportement oscillant pour $Ra > 10^4$ . . . 68
5.1.3 Evolution temporelle des grandeurs globales . . . 68
5.1.4 Conclusion sur l'identification de solution de référence . . . 70
5.2 Influence du nombre de Rayleigh sur les solutions de référence . . . 71
5.2.1 Caractérisation des interfaces canal/environnement . . . 71
5.2.2 Corrélations en fonction du nombre de Rayleigh pour les grandeurs globales . . . 75
Bibliographie . . . 79

Nous cherchons dans ce chapitre à établir des solutions numériques de référence approchant un écoulement de convection naturelle dans un canal vertical plongé dans un environnement infini. Cette étude est effectuée pour $10^2 \leq Ra \leq 5.10^5$. Dans un premier temps, l'évolution temporelle de l'écoulement au sein du canal est caractérisée. Pour $Ra \leq 10^4$, un comportement stationnaire est observé dans le canal jusqu'à l'établissement d'une stratification thermique dans le réservoir. Pour $Ra > 10^4$, l'écoulement au sein du canal est oscillant en raison de l'interaction avec le milieu extérieur. Dans un deuxième temps, l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement au niveau des interfaces du canal est décrite. A la fin de ce chapitre, nous cherchons à identifier des corrélations pour les grandeurs globales en fonction du nombre de Rayleigh.

5.1 Evolution temporelle de l'écoulement au sein du canal pour $10^2 \leq Ra \leq 5.10^5$

Les résultats présentés ont été obtenus avec la configuration $CE640$ pour $10^2 \leq Ra \leq 5.10^5$. L'objectif de ce chapitre est d'identifier des champs instantanés approchant l'écoulement dans un canal vertical plongé dans un environnement infini. Nous nous focalisons seulement sur l'écoulement au sein du canal et caractérisons l'évolution temporelle du débit de fluide $G_{in}(y = 0)$ entrant par l'interface basse du canal, de la température débitante $T_{bulk}(y = Rf_c)$ à l'interface haute, du nombre de Nusselt à la paroi chauffée $\overline{Nu_1}$ et de l'écart de pression motrice ΔP entre les interfaces.

5.1.1 Observation d'un plateau stationnaire dans le canal pour $10^2 \leq Ra \leq 10^4$

La figure 5.1 met en évidence que pour $10^2 \leq Ra \leq 10^4$, un plateau stationnaire est observé au sein du canal (voir points $X1$, $X2$ et $X3$) pour $50 < t < 150$. Après une phase de développement de l'écoulement ($t > t_{dev} = 20$) les vitesses verticales au sein du canal tendent vers des valeurs constantes. De plus, la vitesse verticale au point $X5$ situé dans l'environnement extérieur au dessus de l'interface haute du canal reste constante sur cette période. Cela montre que le panache thermique sortant du canal n'est pas oscillant.

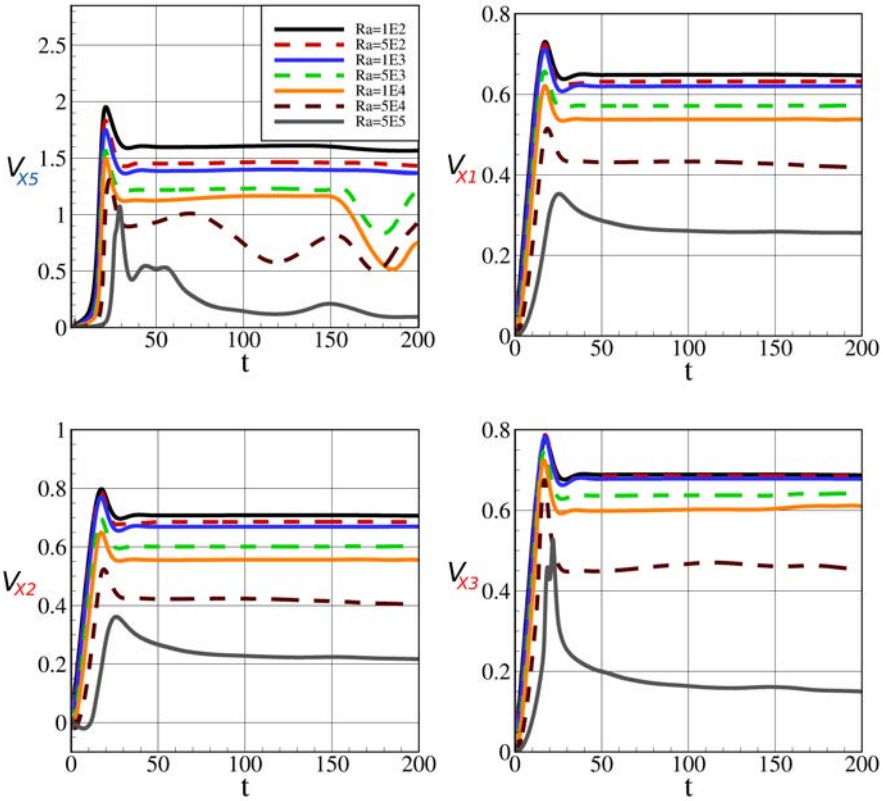


Figure 5.1 – *Evolution temporelle de la vitesse verticale aux points X_5 , X_1 , X_2 , X_3 pour Ra variant de 10^2 à 5.10^5*

Cependant, pour $t > 150$ la vitesse verticale au point $X5$ évolue :

- pour $Ra \leq 10^3$: elle diminue lentement traduisant l'effet de la stratification thermique se mettant en place dans le réservoir,
- pour $Ra = 5.10^3$ et $Ra = 10^4$ on observe un début d'oscillations traduisant la déstabilisation du panache sortant du canal et son impact sur la paroi haute du réservoir.

Ainsi pour $10^2 \leq Ra \leq 10^4$ et $t > 150$, la vitesse au sein du canal évolue lentement en temps et notamment au point $X3$ situé au niveau de l'interface haute du canal. Une étude plus

approfondie de l'écoulement dans le réservoir permettrait sans doute de mieux comprendre la déstabilisation du milieu extérieur. Cependant, cette étude sort des objectifs fixés dans ce chapitre et lorsque l'écoulement se déstabilise, en raison de la stratification thermique ou de l'impact du panache sur les parois du réservoir (donc pour $t \gg t_c$), nos résultats ne peuvent plus être considérés comme une bonne approximation d'un écoulement de convection naturelle pour un canal vertical plongé dans un environnement infini.

5.1.2 Comportement oscillant pour $Ra > 10^4$

Pour $Ra > 10^4$, l'écoulement sortant du canal est rapidement oscillant (voir figure 5.2 au point $X5$). Les vitesses verticales au sein du canal évoluent alors en temps même après la phase d'établissement de l'écoulement. L'étude de stabilité des écoulements de convection naturelle dans des espaces confinés a notamment été étudiée par Desrayaud et Lauriat (1993). La stabilité de l'écoulement est dépendante de la géométrie considérée pour le réservoir et des conditions limites sur ses parois. Pour notre configuration d'étude, le Rayleigh critique à partir duquel le jet sortant du canal oscille est compris entre $10^4 < Ra \leq 5.10^4$.

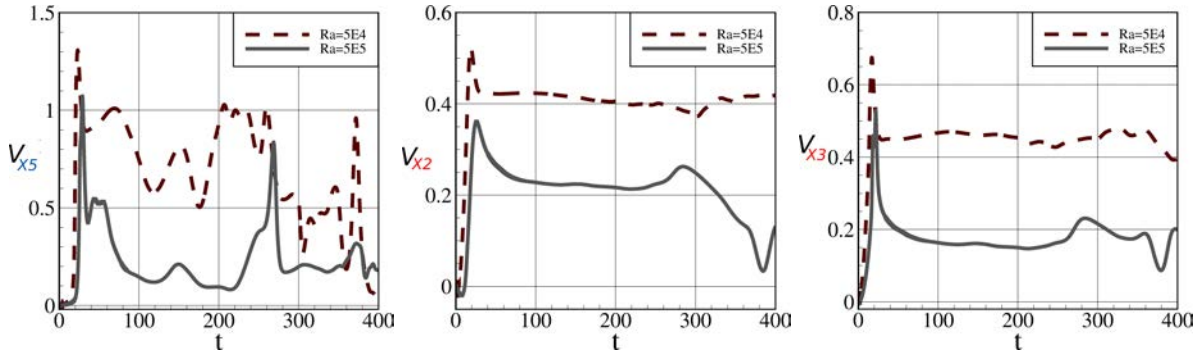


FIGURE 5.2 – *Evolution temporelle de la vitesse verticale aux points X_5 et X_2 , X_3 pour $Ra = 5.10^4$ et 5.10^5*

Pour $Ra = 5.10^4$, on observe un plateau stationnaire en $X2$ pour $50 < t < 100$ alors que la vitesse au point $X3$ varie sur cette même période. Pour $t > 100$ c'est l'ensemble de l'écoulement au sein du canal qui est influencé par l'oscillation du jet. Pour $Ra = 5.10^5$, les vitesses verticales aux différents points au sein du canal décroissent très lentement vers des valeurs constantes. Un écoulement stationnaire n'est cependant jamais atteint car l'écoulement est continuellement modifié par l'oscillation du jet dans le milieu extérieur.

5.1.3 Evolution temporelle des grandeurs globales

Ra	$G_{in}(y=0)$	$\Delta P = P_{bot} - P_{top}$	$\overline{Nu_1}$	T_{bulk}
1.10^2	$4.810\ 10^{-1}$	-2.301	1.332	$8.533\ 10^{-1}$
5.10^2	$4.703\ 10^{-1}$	$-8.996\ 10^{-1}$	2.065	$4.315\ 10^{-1}$
1.10^3	$4.627\ 10^{-1}$	$-5.665\ 10^{-1}$	2.423	$3.164\ 10^{-1}$
5.10^3	$4.308\ 10^{-1}$	$-1.632\ 10^{-1}$	3.424	$1.555\ 10^{-1}$
1.10^4	$4.083\ 10^{-1}$	$-7.885\ 10^{-2}$	3.940	$1.165\ 10^{-1}$

TABLEAU 5.1 – *Valeurs des grandeurs globales de l'écoulement au sein du canal pour $30 < t < 150$ et $10^2 \leq Ra \leq 10^4$*

L'évolution temporelle de $G_{in}(y=0)$, $T_{bulk}(y = Rf_c)$ et $\overline{Nu_1}$ (voir la figure 5.3) confirme bien un état stationnaire au sein du canal sur une période relativement longue entre $t = 50$ et $t = 150$ pour $10^2 \leq Ra \leq 10^4$. Le tableau 5.1 donne les valeurs de ces différentes grandeurs pendant ce plateau stationnaire.

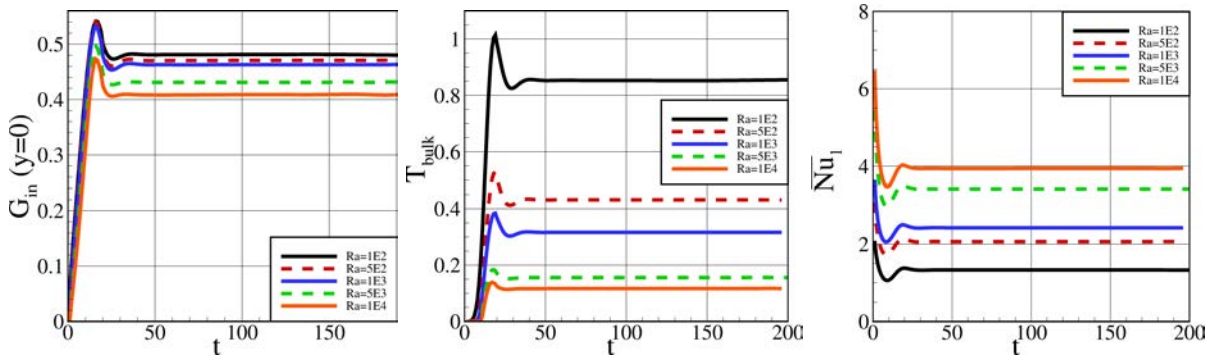


FIGURE 5.3 – *Evolution temporelle du débit entrant par le bas du canal $G_{in}(y=0)$, de la température débitante à l'interface haute du canal $T_{bulk}(y=Rf_c)$ et du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffé $\overline{Nu_1}$ pour Ra variant de* 10^2 *à* 10^4

Pour $Ra = 5.10^4$, $G_{in}(y=0)$ est constant sur une période plus courte comprise entre $t = 50$ et $t = 100$. Sur cette même période $T_{bulk}(y=Rf_c)$ et $\overline{Nu_1}$ restent relativement constants (voir figure 5.4). Cependant, comme le jet dans le milieu extérieur devient rapidement oscillant ($t > 100$), ces grandeurs globales varient pour $t > 100$. Pour $Ra = 5.10^5$, on observe que $G_{in}(y=0)$ et $\overline{Nu_1}$, après la phase de développement, décroissent très lentement dans le temps vers des valeurs constantes tandis que $T_{bulk}(y=Rf_c)$ augmente lentement vers une valeur également constante (voir figure 5.4). Cette lente diminution du débit de fluide entrant par l'interface basse est liée à l'établissement de la zone de recirculation en haute du canal et à une augmentation du débit de fluide entrant par l'interface haute du canal. Cependant, aucune valeur constante n'est observée car l'interaction du jet avec le milieu extérieur, à partir de $t = 150$ vient modifier l'écoulement au sein du canal.

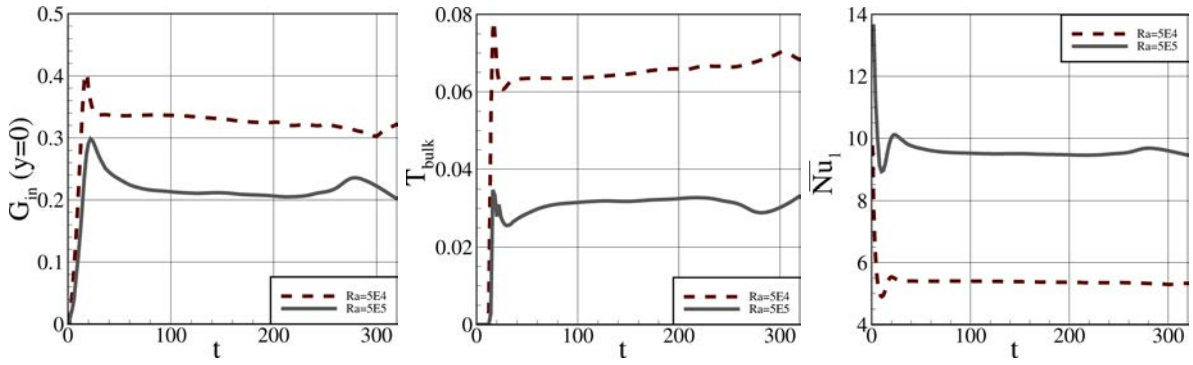


FIGURE 5.4 – *Evolution temporelle du débit entrant par le bas du canal $G_{in}(y=0)$, de la température débitante à l'interface haute du canal T_{bulk} et du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffé $\overline{Nu_1}$ pour $Ra = 5.10^4$ et* 5.10^5

L'écart de pression motrice moyenne ΔP entre les interfaces du canal est la grandeur globale la plus sujette à variation (voir figure 5.5). La pression motrice aux interfaces dépend à la fois de l'écoulement au sein du canal mais aussi de celui à l'extérieur du canal (circulation globale dans le réservoir, stratification thermique, oscillation du jet, ...). L'écart de pression motrice moyenne entre les interfaces atteint cependant des valeurs quasi-constantes sur les mêmes périodes de temps que pour les autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

Pour $Ra = 10^2$, l'écart de pression motrice ΔP augmente pour $t > 150$. Cette augmentation est due à l'établissement d'une stratification thermique. Pour $Ra = 5.10^4$ et $Ra = 5.10^5$, les variations observées pour $t > 100$ sont principalement dues à l'oscillation de l'écoulement dans le milieu extérieur et à la recirculation globale dans le réservoir.

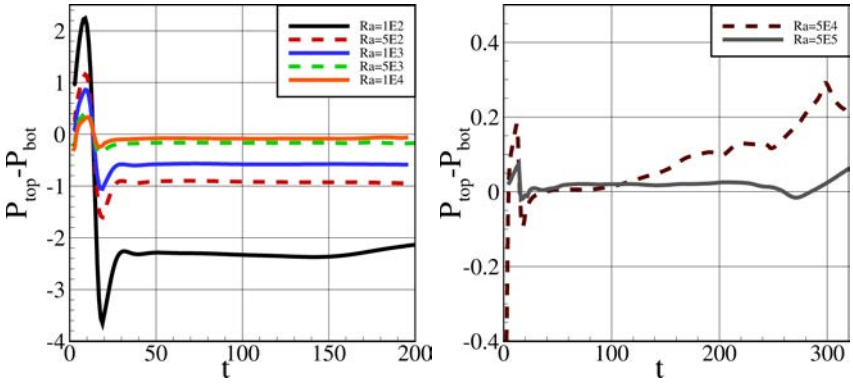


FIGURE 5.5 – *Evolution temporelle de l'écart de pression motrice moyen entre l'interface haute et basse du canal* $\Delta P = P_{top} - Pbot$ *pour Ra variant de* 10^2 *à* 5.10^5

5.1.4 Conclusion sur l'identification de solution de référence

Dans cette section, nous avons montré que l'on peut observer un écoulement stationnaire au sein du canal sur une période relativement longue pour $10^2 \leq Ra \leq 10^4$. Pendant cette période, l'écoulement au sein du canal peut être considéré comme une bonne approximation de l'écoulement au sein un canal vertical plongé dans un environnement infini. Effectivement, l'écoulement au sein du canal n'est alors pas influencé par la taille de l'environnement extérieur. On peut donc extraire les champs de vitesses, température et pression motrice au sein du canal à un instant donné et considérer ceux-ci comme nos solutions numériques de référence par la suite. Pour $Ra > 10^4$, l'interaction du fluide sortant du canal avec l'environnement extérieur n'est pas négligeable. Cependant, on peut observer un état quasi-stationnaire pour $50 < t < 80$ à $Ra = 5.10^4$ avant que l'influence de cette interaction soit trop importante sur l'écoulement dans le canal. Pour $Ra = 5.10^5$, on choisit un instant où l'interaction du jet avec les parois du réservoir est faible et où la recirculation globale dans le réservoir est négligeable ($t < 150$). Le tableau 5.2 récapitule les temps pour lesquels on extrait les champs instantanés que l'on considère par la suite comme nos solutions numériques de référence.

Ra	$Configuration$	t
1.10^2	$CE640$	75
5.10^2	$CE640$	75
1.10^3	$CE640$	75
5.10^3	$CE640$	75
1.10^4	$CE640$	75
5.10^4	$CE640$	50
5.10^5	$CE640$	100

TABLEAU 5.2 – *Sélection des champs instantanés pour les solutions numériques de référence*

Remarque 5.1 *Nous avons choisi ici d'extraire des champs instantanés et non des champs statistiques. Pour* $Ra \leq 10^4$*, l'écoulement étant stationnaire dans le canal pour* $50 < t < 150$*, les solutions extraites auraient été similaires. Pour* $Ra > 10^4$*, l'oscillation du jet dépendant de la taille de l'environnement extérieur, extraire des champs statistiques nous donnerait un champ moyen non représentatif d'un écoulement en milieu infini. Nous avons donc privilégié des champs instantanés où cette influence est négligeable tout en gardant à l'esprit que le jet devient oscillant par la suite.*

5.2 Influence du nombre de Rayleigh sur les solutions de référence

Dans cette section, nous considérons uniquement les champs numériques de référence de l'écoulement au sein du canal identifiés précédemment (voir tableau 5.2). Dans un premier temps, l'écoulement au niveau des interfaces du canal est caractérisé. Dans un deuxième temps, nous établissons des corrélations pour les grandeurs globales de l'écoulement en fonction du nombre de Rayleigh.

5.2.1 Caractérisation des interfaces canal/environnement

Caractérisation des champs de vitesse à l'interface basse Les champs de vitesse verticale (voir figure 5.6) et de vitesse horizontale (voir figure 5.7) au niveau de l'interface basse du canal montre que pour les différents nombres de Rayleigh l'écoulement existe et subit une accélération en amont du canal comme observé par Kettleborough (1972). Plus le nombre de Rayleigh est faible plus l'écoulement se développe loin en amont du canal. Cela s'explique par des effets visqueux plus importants à bas nombre de Rayleigh.

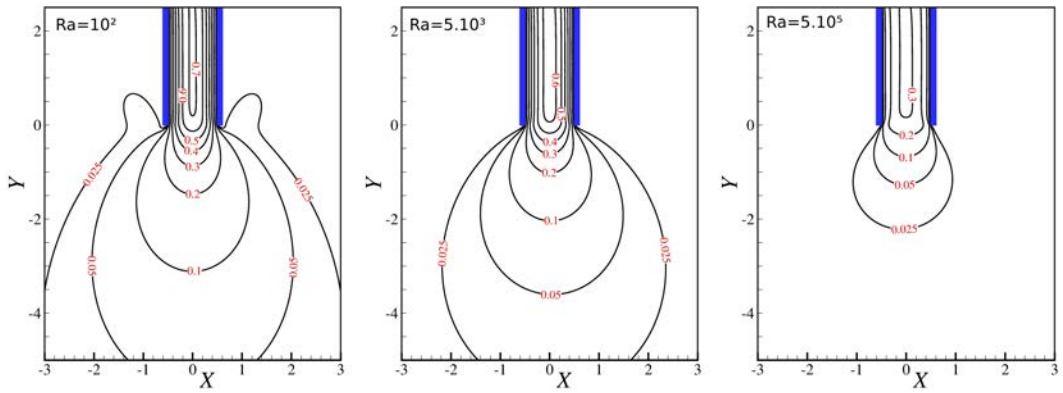


Figure 5.6 – *Champ de vitesse verticale V autour de l'interface basse du canal*

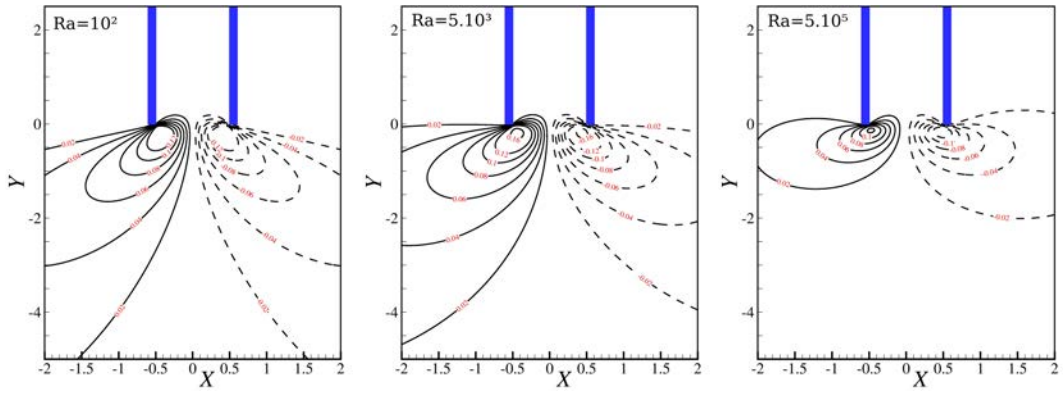


Figure 5.7 – *Champ de vitesse horizontale U autour de l'interface basse du canal*

Pour $Ra \leq 10^4$, l'aspiration du fluide au niveau de l'interface basse se fait de manière symétrique et aucune direction n'est privilégiée (voir figures 5.8 et 5.9). L'aspiration du fluide se fait dans toutes les directions de l'espace : le profil de la vitesse horizontale est ainsi symétrique par rapport à l'axe du canal. Cependant pour $Ra > 10^4$, une légère dissymétrie s'observe dans la partie basse du réservoir due à une circulation globale dans le réservoir (voir figures 5.6-droite et 5.7-droite). On note que la vitesse horizontale à l'interface basse du canal n'est pas négligeable devant la vitesse verticale et qu'elle reste quasiment du même ordre de grandeur quelque soit le nombre de Rayleigh. En revanche, la vitesse verticale diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente jusqu'à tendre vers un profil quasiment plat

pour $Ra = 5.10^5$. Dans tous les cas, l'écoulement s'établit dans la partie basse du canal : la vitesse horizontale diminue et la vitesse verticale tend vers un profil de Poiseuille.

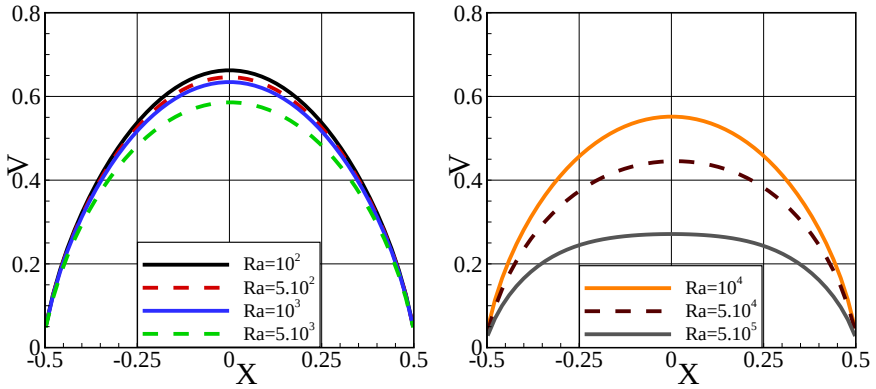


FIGURE 5.8 – *Profil de vitesse verticale V à l'interface basse du canal*

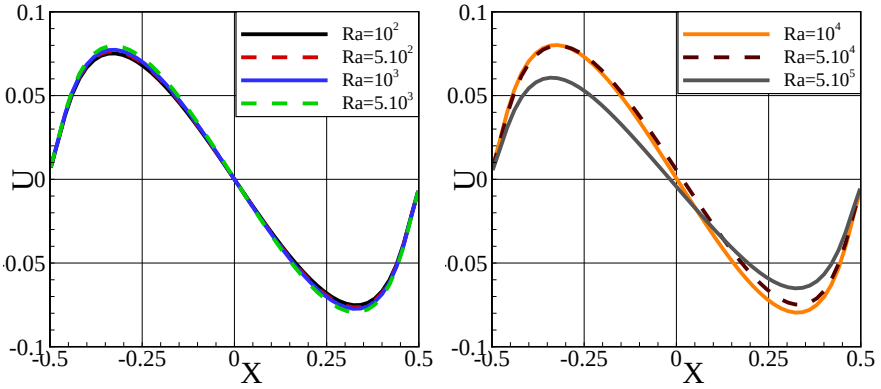


FIGURE 5.9 – *Profil de vitesse horizontale U à l'interface basse du canal*

Caractérisation des champs de vitesse à l'interface haute La vitesse verticale à l'interface haute du canal évolue de manière significative avec le nombre de Rayleigh. A bas nombre de Rayleigh ($Ra = 10^2$), l'écoulement sortant du canal est symétrique (voir figure 5.10) alors qu'à haut nombre de Rayleigh ($Ra = 5.10^5$) l'écoulement est dissymétrique en raison de la couche limite thermique et de la zone de recirculation située en haut du canal. Cette dissymétrie de

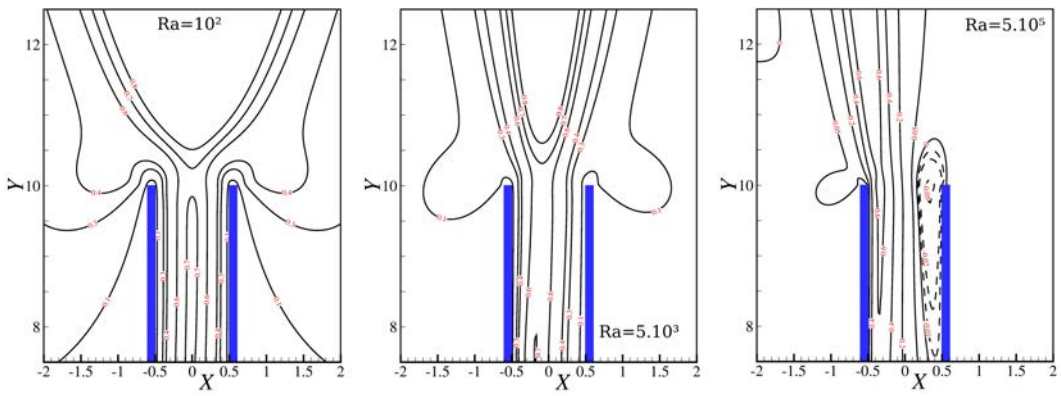


FIGURE 5.10 – *Champ de vitesse verticale V autour de l'interface haute du canal*

l'écoulement s'observe tout particulièrement sur le profil de vitesse verticale dès $Ra = 5.10^3$ (voir figure 5.11). Le maximum de vitesse se décale ainsi du côté de la paroi chauffée lorsque

le nombre de Rayleigh augmente et des valeurs négatives apparaissent du côté de la paroi non chauffée. On remarque cependant que quelque soit le nombre de Rayleigh la vitesse maximale à l'interface haute reste du même ordre de grandeur.

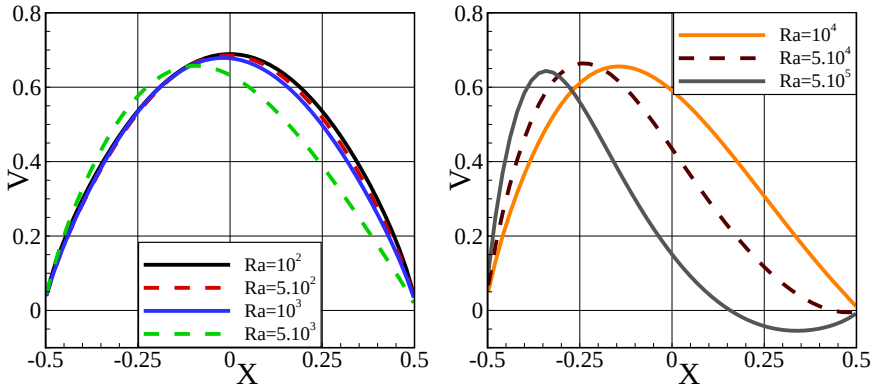


FIGURE 5.11 – *Profil de vitesse verticale V à l'interface haute du canal*

La vitesse horizontale présente un profil symétrique à l'interface haute du canal à bas nombre de Rayleigh (voir figure 5.12) traduisant le fait que le panache sort dans toutes les directions de l'espace alors qu'à plus haut nombre de Rayleigh la vitesse horizontale est négative traduisant une orientation du jet vers la gauche.

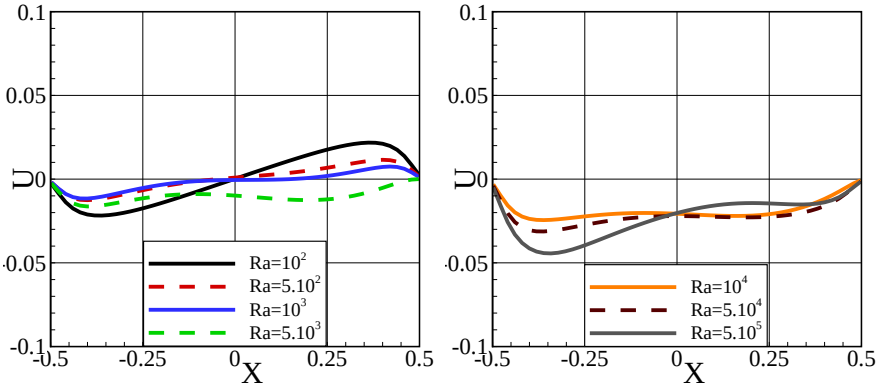


FIGURE 5.12 – *Profil de vitesse horizontale U à l'interface haute du canal*

Caractérisation du champ de pression motrice à l'interface basse L'influence du nombre de Rayleigh à l'interface basse du canal s'observe aussi sur le champ de pression motrice (voir figure 5.13). Plus le nombre de Rayleigh est faible, plus l'interface basse est en dépression par rapport au milieu extérieur ($P_{bot} - P_{ext} < 0$). Cela s'explique par des effets visqueux plus importants à bas nombre de Rayleigh. Comme pour les champs de vitesse, le champ de pression motrice en amont du canal est symétrique à bas nombre de Rayleigh ($Ra \leq 10^4$) et devient légèrement dissymétrique à haut nombre de Rayleigh ($Ra > 10^4$). La figure 5.14 montre le profil de pression motrice à l'interface basse pour différents nombres de Rayleigh. On peut remarquer que la pression au niveau de l'axe du canal ($x = 0$) est supérieure à la pression au niveau des parois du canal ($x = -0.5$ et $x = 0.5$). La pression à l'interface basse du canal n'est alors pas en accord avec les hypothèses de couche limite (où la pression est constante selon $\vec{e_x}$: $P(x,0) = P_{ext}$) et de Bernoulli (où la pression est minimale à l'axe : $P(x,0) = \frac{-V(x,0)^2}{2} + P_{ext}$). Cette observation est en accord avec l'étude de Sadri et Floryan (2002). On observe cependant qu'à moins d'une largeur du canal ($y \approx 0.4$) la pression motrice

devient rapidement constante dans la section du canal. Cela traduit le fait que l'écoulement s'établit au sein du canal sur une courte distance.

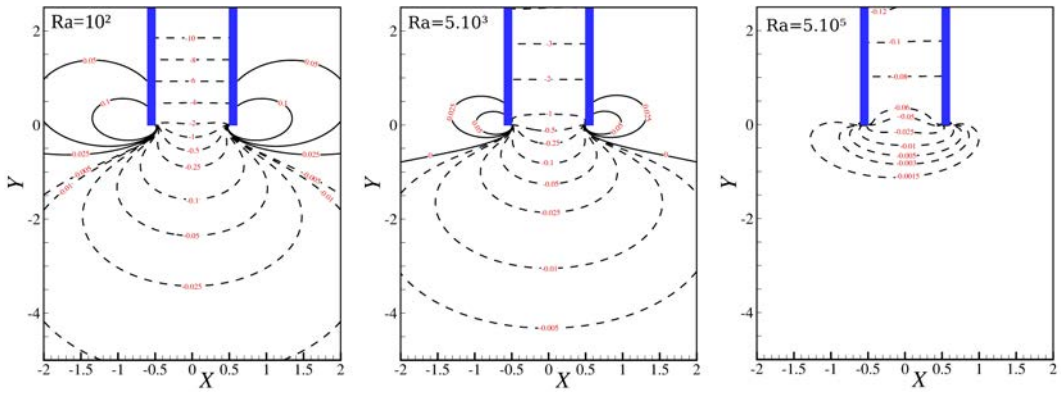


FIGURE 5.13 – *Champ de pression motrice P autour de l'interface basse du canal*

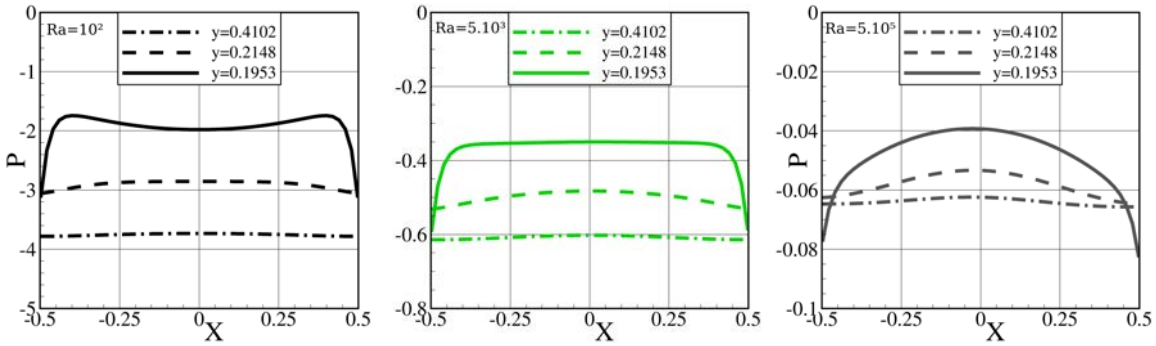


FIGURE 5.14 – *Profil de pression motrice P autour de l'interface haute du canal*

Caractérisation du champ de pression motrice à l'interface haute Le champ de pression motrice au niveau de l'interface haute (figure 5.15) est lui aussi symétrique à bas nombre de Rayleigh et se dissymétrise lorsque le nombre de Rayleigh augmente. On observe que la pression motrice à l'interface haute du canal n'est pas égale à la pression motrice du milieu extérieur au loin du canal ($P \approx 0$) mais plus faible. L'interface haute du canal est alors en

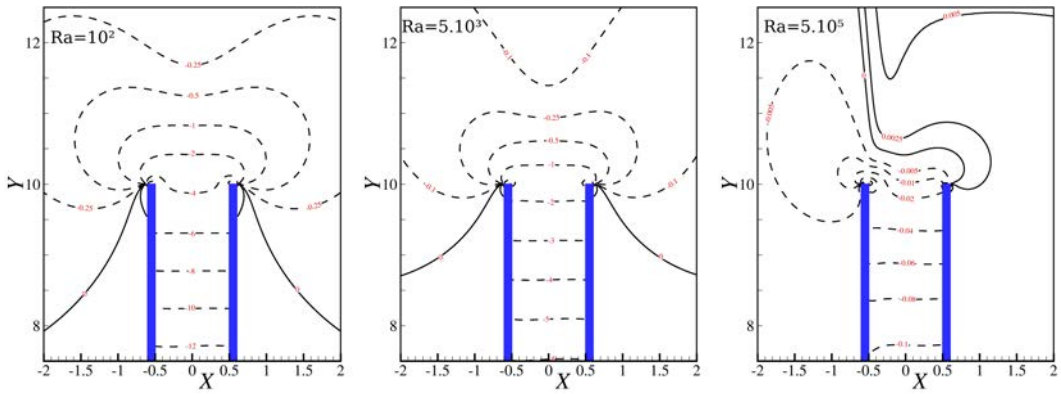


FIGURE 5.15 – *Champ de pression motrice P autour de l'interface haute du canal*

dépression par rapport au milieu extérieur. Cela s'explique par la perte de pression liée à l'entraînement du fluide provenant du milieu extérieur par le jet sortant du canal. Plus le nombre de Rayleigh est faible plus cette perte de pression est importante.

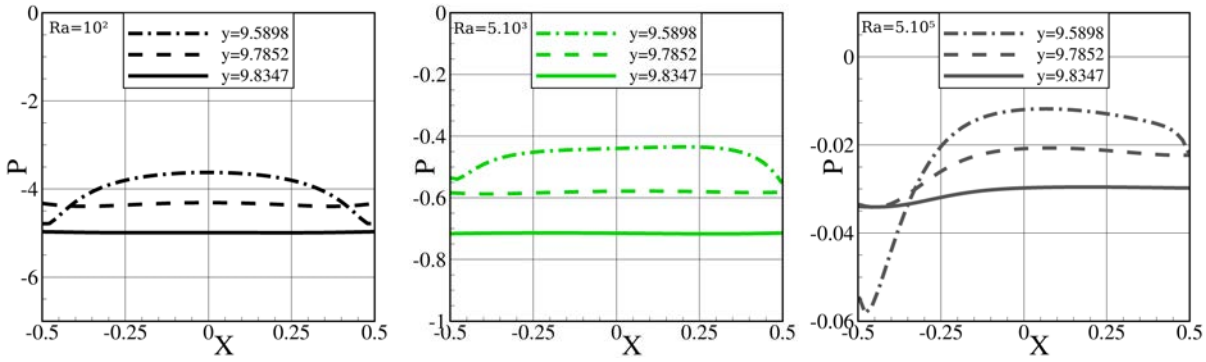


FIGURE 5.16 – *Profil de pression motrice P proche de l'interface haute du canal*

La figure 5.16 montre qu'au niveau de l'interface haute la pression motrice est plus élevée à l'axe ($x = 0$) qu'au niveau des parois. A bas nombre de Rayleigh ($Ra \leq 10^3$), ce profil est symétrique et la dépression au niveau des parois traduit une contraction du jet due à l'entraînement du fluide extérieur. Dès $Ra = 5.10^3$, le profil de pression motrice à l'interface haute est dissymétrique. Pour $Ra = 5.10^5$, la pression est beaucoup faible du côté de la paroi chauffée car la vitesse est plus élevé et l'entraînement de fluide donc plus important.

5.2.2 Corrélations en fonction du nombre de Rayleigh pour les grandeurs globales

Nombre de Nusselt Pour mettre en évidence qu'à haut nombre de Rayleigh il existe un régime de type couche limite, nous avons tracé $\overline{Nu_1}\, Ra^{-0.2}$ en fonction de Ra (voir figure 5.17). On observe que pour $Ra > 10^3$ une valeur quasiment constante de l'ordre de 0.62 est obtenue. La valeur de cette constante est dépendante du nombre de Prandtl considéré (on rappelle que dans ce travail $Pr = 7.85$). Wirtz et Stutzman (1982) ont obtenu une valeur égale à 5.777 pour une étude expérimentale d'un canal vertical en air ($Pr = 0.71$) chauffé à flux constant de manière symétrique.

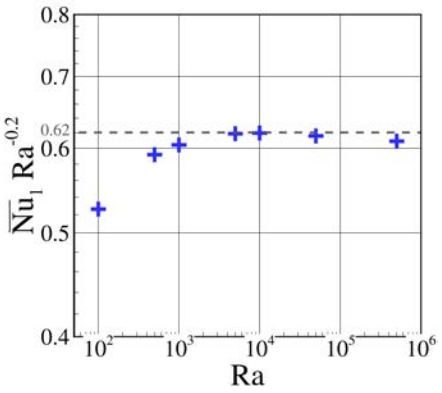


FIGURE 5.17 – *Evolution du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée en fonction du nombre de Rayleigh*

Pour $Ra \leq 10^3$, le nombre de Nusselt ne se comporte pas comme celui obtenu le long d'une plaque plane verticale. Cela s'explique par le fait qu'à très bas nombre de Rayleigh le comportement thermique est dominé par les effets conductifs et évolue en fonction de $Ra^{0.5}$ (Wirtz et Stutzman 1982, Bar-Cohen et Rohsenow 1984). Les nombres de Rayleigh considérés ici sont encore trop élevés pour mettre en évidence ce régime. Cependant, on observe la transition entre ces deux régimes d'écoulements pour $10^3 < Ra < 5.10^3$. Dans l'étude de Wirtz et Stutzman (1982) cette transition est observée pour $Ra = 2.5 \cdot 10^3$.

Débit entrant par l'interface basse du canal L'évolution du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal en fonction du nombre de Rayleigh présente elle aussi deux comportements (voir figure 5.18). A bas nombre de Rayleigh (jusqu'à $Ra \leq 10^3$), on observe une première évolution en fonction de Ra. La valeur du débit est alors plus élevée que la valeur théorique égale à $\sqrt{\frac{Rf_c}{48}}$ obtenue en supposant un gradient de pression motrice nul entre les interfaces du canal (voir section 2.4). De plus en traçant $G_{in}(y=0)Ra^{-0.016}$ on observe que cette grandeur prend une valeur constante égale 0.516 pour $Ra \leq 10^3$. Le débit entrant par l'interface basse du canal évolue donc très faiblement avec le nombre de Rayleigh. Cette évolution à bas nombre de Rayleigh s'explique par un écart de pression motrice ΔP entre les interfaces non-nulles. Le débit évolue alors en fonction de Ra, ΔP, Rf_c et Pr comme évoqué dans la section 2.4 :

$$G_{in}(y=0) = \frac{\sqrt{Ra\ \Delta P\ +\ 12\ Pr^2\ Rf_c^3} - \sqrt{Ra}\ \Delta P}{24\ Pr\ Rf_c} \tag{5.1}$$

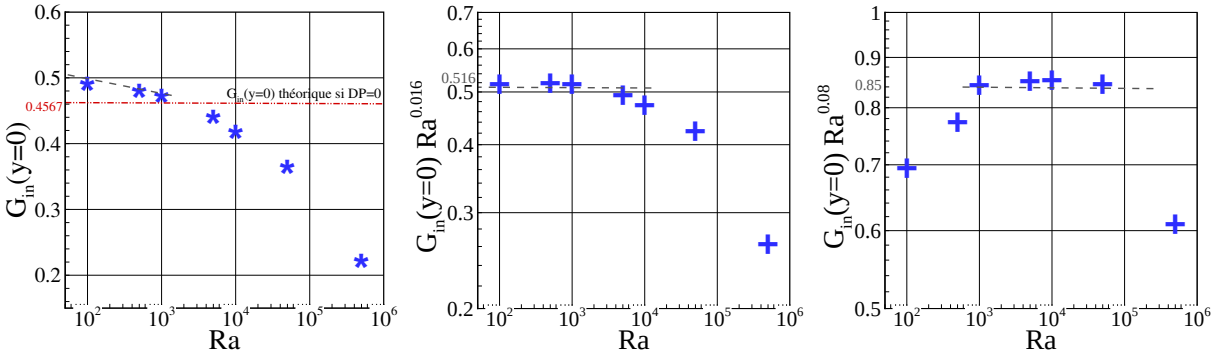


FIGURE 5.18 – *Evolution du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal en fonction du nombre de Rayleigh*

Lorsque le nombre de Rayleigh est compris entre 5.10^3 et 5.10^4 une évolution différente est observé, le débit entrant par le bas du canal évoluant alors plutôt avec $Ra^{-0.08}$. Ce comportement différent peut s'expliquer par le fait que l'écoulement change de régime pour aller vers un régime de type couche limite. On observe d'ailleurs que pour $Ra = 5.10^5$ où une zone de recirculation importante est observé le comportement de l'écoulement semble encore différent.

Température débitante En intégrant l'équation de l'énergie sur la surface du canal, on arrive à l'expression suivante :

$$\int_{-0.5}^{0.5} (V\,T)(x, Rf_c)\,dx = T_{bulk}(y=Rf_c)\,G_{in}(y=0) = \frac{Rf_c/2}{\sqrt{Ra}} + \frac{1}{\sqrt{Ra}} \int_{-0.5}^{0.5} \left[\frac{\partial T}{\partial y}(x, Rf_c) - \frac{\partial T}{\partial y}(x,0)\right] dx$$

La température en entrée du canal étant très proche de zéro on obtient alors :

$$T_{bulk}(y=Rf_c)\,G_{in}(y=0) = \frac{Rf_c/2}{\sqrt{Ra}} + \frac{1}{\sqrt{Ra}} \int_{-0.5}^{0.5} \frac{\partial T}{\partial y}(x, Rf_c) \tag{5.2}$$

Si la diffusion selon $\vec{e_y}$ est faible alors le terme $T_{bulk}\,G_{in}(y=0)$ est corrélé dans notre cas à $5\,Ra^{-0.5}$. La figure 5.19 montre l'évolution du terme de diffusion égale à $T_{bulk}\,G_{in}(y=0) - \frac{Rf_c/2}{\sqrt{Ra}}$. On observe alors bien que la diffusion devient négligeable à haut nombre de Rayleigh et que $T_{bulk}\,G_{in}(y=0)$ devient égal à bien $\frac{Rf_c/2}{\sqrt{Ra}}$. Dans le cadre de la simulation du canal seul, la diffusion $\frac{\partial T}{\partial y}$ ne peut donc pas être négligée à bas nombre de Rayleigh.

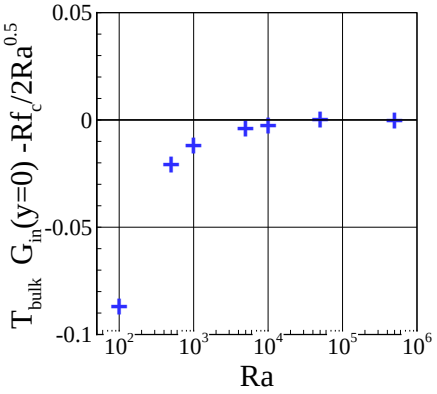


FIGURE 5.19 – *Evolution de $T_{bulk}\, G_{in}(y=0)$ en fonction du nombre de Rayleigh*

Pression motrice aux interfaces Comme le montre la figure 5.20, l'écart de pression motrice $\Delta P = P_{top} - P_{bot}$ entre les interfaces évolue avec le nombre de Rayleigh. Pour $Ra \leq 10^4$, cet écart est négatif. L'interface basse du canal est donc en surpression par rapport à l'interface haute. Pour $Ra > 10^4$, nous observons un changement de signe de ΔP. Dans ce cas, c'est alors l'interface haute du canal qui est en surpression par rapport à l'interface basse. De plus, il semble exister deux régimes différents en fonction du nombre de Rayleigh. Ce changement de comportement correspond aussi à l'apparition d'une zone de recirculation en haut du canal.

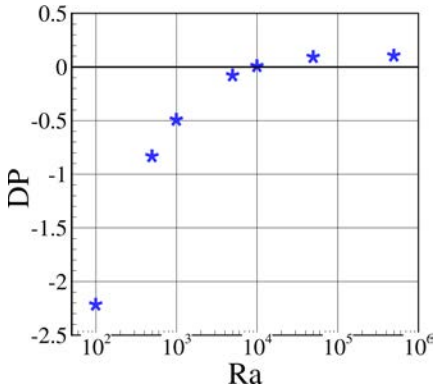


FIGURE 5.20 – *Evolution de l'écart de pression motrice moyenne ΔP entre les interfaces du canal en fonction du nombre de Rayleigh*

Pour essayer de mieux comprendre ces deux comportements, on caractérise les pertes de pression aux interfaces haute et basse par les coefficients de pertes de pression motrice K_{bot} et K_{top} :

$$K_{bot} = \frac{P_{bot} + G_{in}(y=0)^2}{G_{in}(y=0)^2} \tag{5.3}$$

$$K_{top} = \frac{P_{top} + G_{in}(y=0)^2}{G_{in}(y=0)^2} \tag{5.4}$$

On obtient alors les corrélations suivantes :

$$K_{bot} = 16.5\,\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} + 0.729 \text{ pour } 10^2 \leq Ra \leq 5.10^5 \tag{5.5}$$

et

$$K_{top} = 41.7\,\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} - 0.691 \text{ pour } 10^2 \leq Ra \leq 5.10^5 \tag{5.6}$$

Les coefficients K_{bot} et K_{top} se décomposent en une partie visqueuse et une partie non vis-

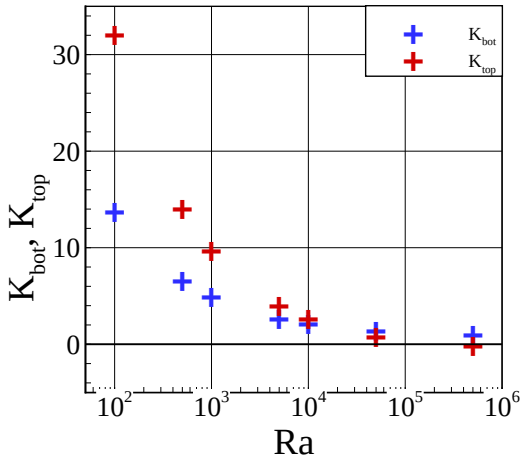


FIGURE 5.21 – *Evolution de K_{bot} et K_{top} en fonction du nombre de Rayleigh*

queuse. La figure 5.21 montre l'évolution de K_{bot} et K_{top} en fonction du nombre de Rayleigh. Pour $Ra \leq 10^4$, les pertes de pression motrice sont plus élevées à l'interface haute du canal. On observe l'inverse pour $Ra > 10^4$.

On peut ainsi en déduire une corrélation pour l'évolution du gradient de pression motrice entre les interfaces en fonction de $\frac{Pr}{\sqrt{Ra}}$ et $G_{in}(y = 0)$. On soustrait alors K_{bot} à K_{top} et l'on obtient :

$$\Delta P = \left[25.2\,\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} - 1.42\right] G_{in}(y = 0)^2. \tag{5.7}$$

L'écart de pression motrice entre les interfaces dépend alors pour partie de la viscosité et pour partie des effets convectifs. On note $A = \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} G_{in}(y = 0)^2$ et $B = G_{in}(y = 0)^2$. Sur la figure 5.22, nous avons ainsi tracé $\Delta P\, A^{-1}$ et de $\Delta P\, B^{-1}$ en fonction du nombre de Rayleigh. Nous montrons qu'à bas nombre de Rayleigh ($Ra \leq 10^3$), $\Delta P\, A^{-1}$ tend vers une valeur constante. Cela signifie que l'écart de pression motrice entre les interfaces dépend principalement des effets visqueux. Pour $Ra > 10^4$, $\Delta P\, B^{-1}$ tend lui aussi vers une valeur constante. ΔP dépend alors des effets convectifs. Pour $10^3 < Ra \leq 10^4$, il existe une phase de transition entre ces deux comportements.

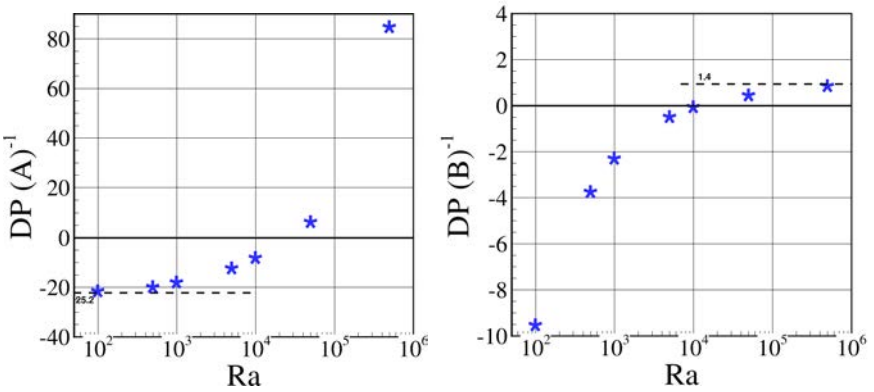


FIGURE 5.22 – *Evolution de $(P_{top} - P_{top})\, A^{-1}$ avec $A = \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} G_{in}(y = 0)^2$ et de $(P_{top} - P_{top})\, B^{-1}$ avec $B = G_{in}(y = 0)^2$ en fonction du nombre de Rayleigh*

Remarque 5.2 *La géométrie des bords du canal (ici à angle droit) a un effet direct sur les pertes de pression locales aux interfaces du canal. Des bords arrondis réduiraient sans doute les pertes de pression. De*

plus cela orienterait les lignes de courant en créant un convergent pour l'aspiration. Les corrélations relatives aux pertes de pression sont donc à interpréter en gardant la configuration étudiée à l'esprit.

Conclusion On a montré ici qu'il existe deux régimes d'écoulements différents au sein du canal vertical en fonction du nombre de Rayleigh. Ces deux régimes sont particulièrement bien identifiés sur l'évolution du nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée et sur le débit de fluide entrant par l'interface du canal. Pour $Ra \leq 10^3$, l'écoulement tend vers un écoulement pleinement développé. Contrairement à ce qui est proposé par Aung (1972), pour des faibles nombres de Rayleigh le débit de fluide est influencé par l'écart de pression motrice $\Delta P = P_{top} - P_{bot}$ entre les interfaces. Cette dépendance est principalement due à des effets visqueux non négligeables jouant sur les pertes de pression motrice aux interfaces. De plus, pour ce régime d'écoulement, la diffusion thermique selon $\vec{e_y}$ n'est pas négligeable. Pour $10^3 < Ra \leq 5.10^3$, on observe la transition entre les deux régimes d'écoulement. Cette transition a été observée pour des nombres de Rayleigh similaires dans la littérature. Pour $Ra > 5.10^3$ l'écoulement tend vers un régime de type couche limite avec une zone de recirculation du côté de la paroi non chauffée. Le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée se comporte alors comme celui le long d'une plaque plane verticale chauffée à flux constant et ΔP est principalement dépendant des effets convectifs.

Bibliographie

W. Aung. Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated Asymmetrically. *International Journal Heat Mass Transfer*, 15 :1577–1580, 1972.

A. Bar-Cohen et E.M. Rohsenow. Thermally Optimum Spacing of Vertical Natural Convection Cooled Parallel Plates. *ASME Journal Heat Transfer*, 106 :116–123, 1984.

G. Desrayaud et G. Lauriat. Unsteady Confined Buoyant Plumes. *Journal of Fluid Mechanics*, 252 :617–646, 1993.

C.F Kettleborough. Transient Laminar Free Convection Between Heated Vertical Plates Including Entrance Effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15 :883–896, 1972.

R.M. Sadri et J.M Floryan. Accurate Evaluation of the Loss Coefficient and the Entrance Legnth of the Inlet Region of a Channel. *Journal of Fluids Engineering*, 124 :685–693, 2002.

R.A. Wirtz et R.J. Stutzman. Experiments on Free Convection Between Plates With Symmmetric Heating. *Journal of Heat Transfer*, 104 :501–507, 1982.

6

Comparaison avec l'expérience

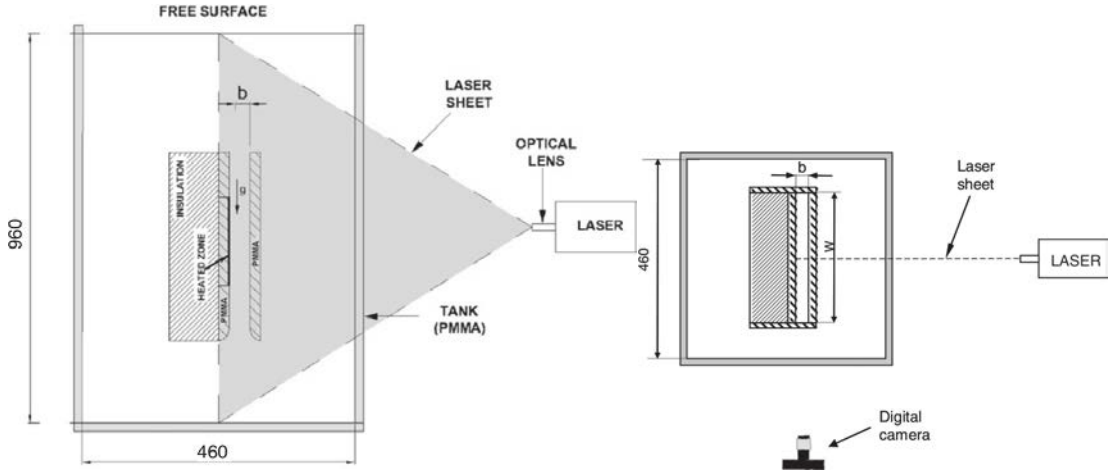
Sommaire

6.1 Présentation du cas d'étude 83
6.2 Ecoulements sur des temps longs 84
6.3 Ecoulements aux premiers instants 86
6.3.1 Lignes de courant 86
6.3.2 Profils de vitesse verticale aux interfaces 88
6.4 Conclusion 89
Bibliographie 90

Dans ce chapitre, nous proposons quelques résultats préliminaires pour la comparaison de nos résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Ospir et al. (2012) et Polidori et al. (2014). Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'écoulement sur des temps longs. Conformément à ce que nous avons montré dans les chapitres précédents, la stratification thermique dans le réservoir joue un rôle important sur la zone de recirculation observée. Dans un deuxième temps, l'écoulement aux premiers instants est caractérisé. Les résultats numériques et expérimentaux montrent plutôt de bon accords même si l'existe un décalage en temps entre les deux approches.

6.1 Présentation du cas d'étude

Configuration expérimentale Les études expérimentales de Ospir et al. (2012) et Polidori et al. (2014) portent sur l'étude d'un canal vertical chauffé à flux constant q'' sur la moitié centrale de sa paroi gauche. Le canal est plongé au milieu d'un réservoir rempli d'eau à $16\,°C$. La partie supérieure du réservoir est une surface libre. La figure 6.1 présente cette configuration d'étude. Le canal est ouvert à ses extrémités haute et basse et fermé sur les quatre parois latérales. A l'interface basse du canal, les parois sont arrondies. La profondeur w du canal est égale à 300 mm. La géométrie de l'expérience est récapitulée dans le tableau 6.2. Le rapport Rf représentant la surface du réservoir par rapport à la surface du canal est égal à $Rf = 35.6$. A l'état initial, le fluide est à une température égale à $\theta_0 = 16\,°C$. Cependant, il existe une stratification thermique de l'ordre de $0.5\ °C.m^{-1}$. Ces études expérimentales proposent des mesures de la vitesse verticale par PIV et des visualisations de l'écoulement au sein du canal.



(a) *vue de face* (b) *vue de dessus*

Figure 6.1 – *Configuration expérimentale (Ospir et al. 2012, Polidori et al. 2014)*

Les caractéristiques du fluide (eau à $16\,°C$) que nous retenons par la suite sont récapitulées dans le tableau 6.1.

$\nu\ (m^2.s^{-1})$	$\beta\ (K^{-1})$	$\lambda\ (W.m^{-1}.K^{-1})$	Pr
$1.108\,10^{-6}$	$1.625\,10^{-4}$	$5.911\,10^{-1}$	6.9

Tableau 6.1 – *Caractéristiques physiques correspondant à de l'eau à* $16°C$

Modélisation numérique de l'expérience Du point de vue numérique, nous modélisons cette expérience par un canal vertical plongé au centre d'un réservoir fermé. Le problème expérimental $3D$ est modélisé par un problème plan. La configuration numérique retenue est celle présentée par la figure 6.2. Les mêmes dimensions que pour l'expérience sont retenues pour le réservoir, le canal ainsi que pour l'épaisseur des parois du canal (voir tableau 6.2). La surface libre n'est pas prise en compte mais elle est remplacée par une paroi haute isotherme. L'ensemble des parois du réservoir sont ainsi isothermes et maintenues à $\theta_0 = 16°C$. Les parois non-chauffées du canal sont considérées comme adiabatiques. A l'interface basse du canal, les parois sont à angle droit et non arrondies comme dans l'expérience. Le problème est adimensionné par la largeur du canal L_c comme présenté précédemment dans la section 2.2. Le réservoir est maillé avec un maillage régulier 1024×2048 et le pas de temps adimensionnel Δt est égal à 10^{-3}.

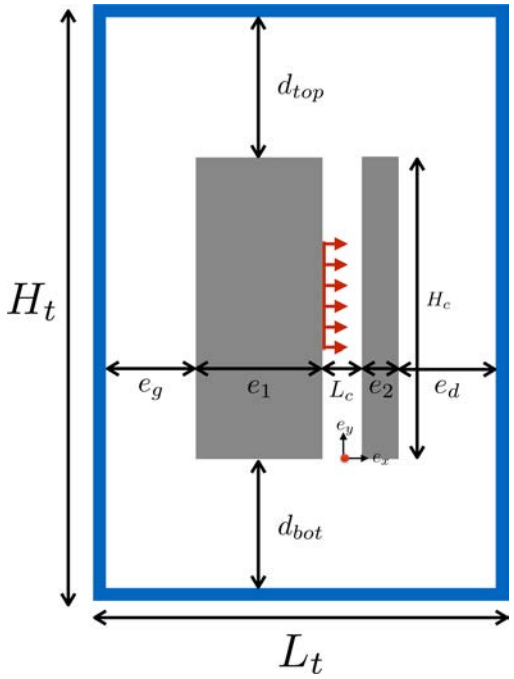


FIGURE 6.2 – *Modélisation numérique de l'expérience de Ospir et al. (2012) et Polidori et al. (2014)*

	H_t	L_t	H_c	L_c	e_1	e_2	w	e_g	e_d	d_{top}	d_{bot}
Expérience (mm)	960	460	376	36	160	10	300	127	137	258	280
Numérique (sans dimension)	26.7	12.8	10.4	1	4.4	0.3	–	3.5	3.8	7.2	7.8

TABLEAU 6.2 – *Définition des géométries expérimentale et numérique*

Les résultats présentés par la suite le sont pour un nombre de Rayleigh $Ra_{q'',L} = 11.4 \cdot 10^6$. Cela équivaut à un nombre de Rayleigh modifié $Ra_m = \frac{Ra_{q'',L}}{Rf_c/2} = 2.2 \cdot 10^6$. Nous rappelons que la relation entre temps adimensionnel t_{adi} et temps physique t_{phys} s'écrit $t_{phys} = \frac{L_c^2}{\alpha\sqrt{Ra}}\, t_{adi}$. D'où $t_{phys} = 2.4\, t_{adi}$.

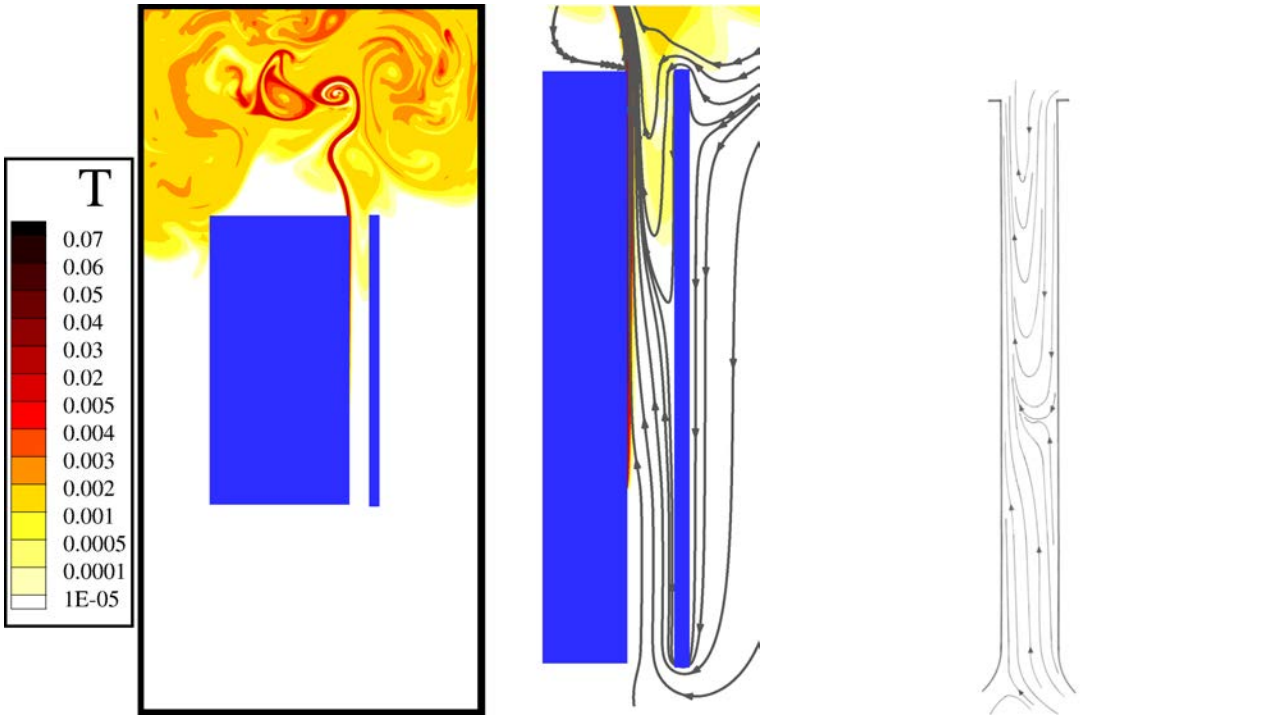
6.2 Ecoulements sur des temps longs

Nous nous intéressons tout d'abord à l'évolution de l'écoulement sur des temps longs. Les figures 6.3, 6.4 et 6.5 montrent le champ de température au sein du réservoir et les lignes de courant au sein du canal à $t = 10,\ 20$ ou $50\ min$. Ces résultats sont comparés avec les lignes de courant obtenues expérimentalement par Ospir et al. (2012) pour la même configuration mais à $Ra = 23.4 \cdot 10^6$. Les auteurs indiquent cependant que les lignes de courant sont similaires à celles observées à $Ra = 11.4 \cdot 10^6$.

Pour les deux approches (expérimentale et numérique), une zone de recirculation en haut du canal existe dès $t = 10\ min$. Lorsque t augmente cette zone de recirculation devient de plus en plus importante jusqu'à occuper plus de la moitié du canal à $t = 50\ min$. Expérimentalement, un état stationnaire pour l'écoulement au sein du canal est observé à partir de $t = 50\ min$. Numériquement, il n'existe pas d'état stationnaire mais la zone de recirculation oscille (sa taille augmente et diminue) autour de l'état observé à $t = 50\ min$.

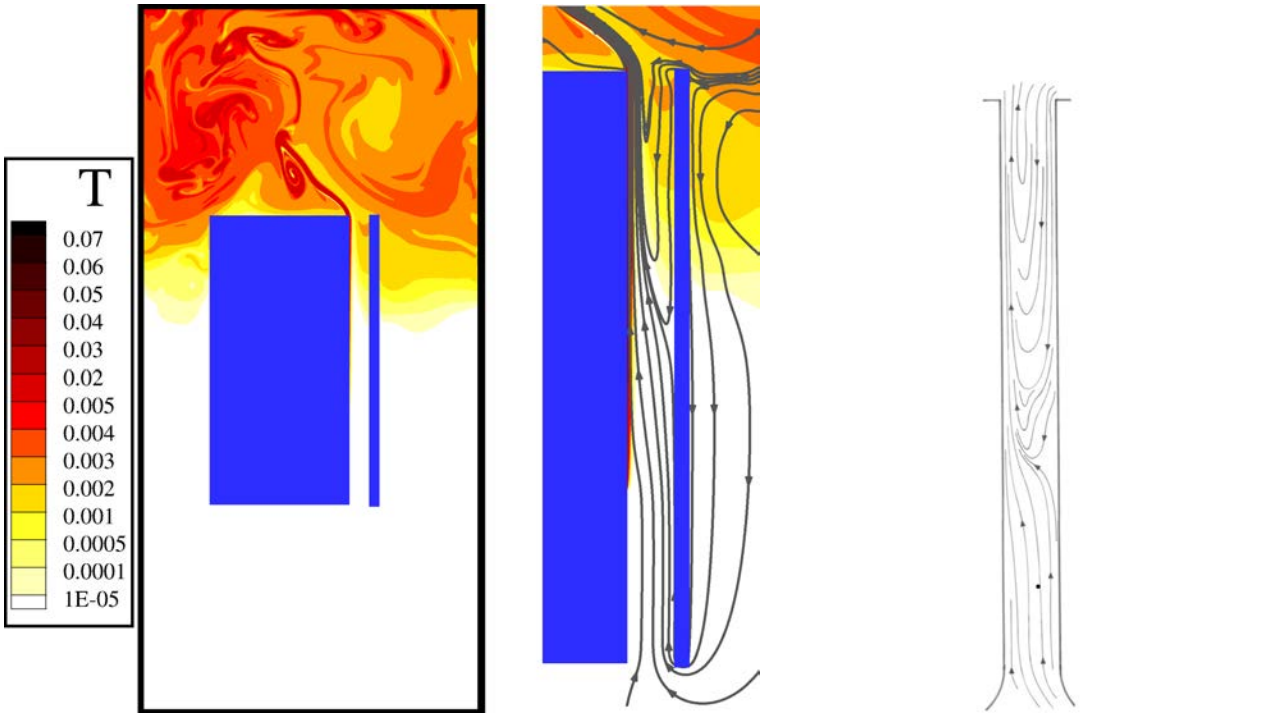
Les lignes de courant au sein du canal à $t = 50\ min$ obtenues numériquement et expérimentalement sont assez similaires. La zone de recirculation peut être décomposée en une

partie supérieure de profondeur L_{sup} et une partie inférieure de profondeur L_{inf}. Cependant, au vu de la stratification thermique et de l'écoulement dans la partie haute du réservoir mis en évidence par nos résultats numériques, on peut se poser la question de savoir si ce comportement pour la zone de recirculation n'est pas dépendant de la taille du réservoir.



(a) *Résultats numériques pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$ (b) *Résultats expérimentaux pour* $Ra = 23.4 \cdot 10^6$

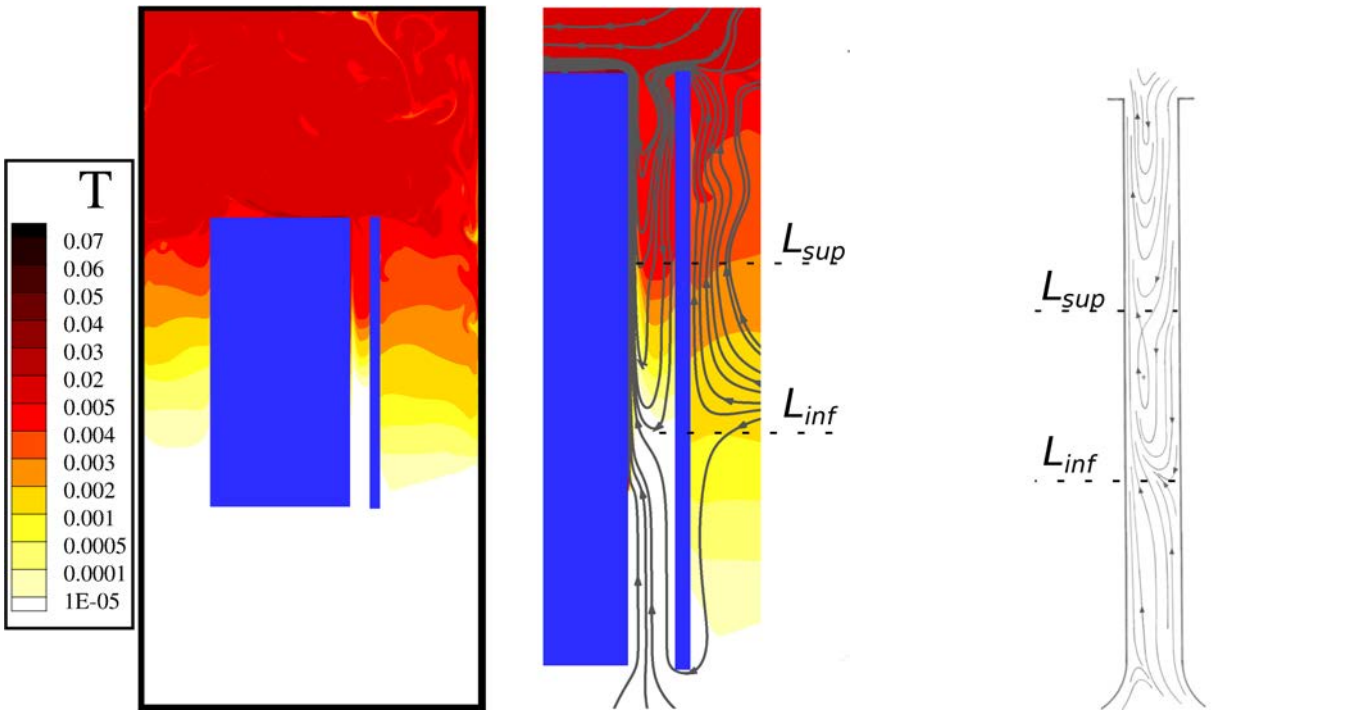
FIGURE 6.3 – *Champ de température au sein du réservoir et lignes de courant à* $t = 10$ *min*



(a) *Résultats numériques pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$ (b) *Résultats expérimentaux pour* $Ra = 23.4 \cdot 10^6$

FIGURE 6.4 – *Champ de température au sein du réservoir et lignes de courant à* $t = 20$ *min*

Comme nous l'avons montré précédemment, la stratification thermique va jouer un rôle de bouchon pour l'écoulement dans le canal en diminuant l'effet cheminée. De plus, on observe que le jet sortant du canal vient se coller en haut de la paroi gauche du canal. Ainsi plus t augmente et plus le comportement spatio-temporelle de la zone de recirculation semble dépendant de l'environnement extérieur (stratification thermique et/ou oscillation du jet). Le rapport Rf entre la surface du canal et celle du réservoir est égal à $Rf = 35.6$. Au vu de ce que l'on a montré dans les chapitres précédents, ce rapport semble plutôt faible pour pouvoir observer sur un temps relativement long un écoulement au sein du canal indépendant de la taille du réservoir.



(a) *Résultats numériques pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$ (b) *Résultats expérimentaux pour* $Ra = 23.4 \cdot 10^6$

FIGURE 6.5 – *Champ de température au sein du réservoir et lignes de courant à t*50 *min*

6.3 Ecoulements aux premiers instants

Nous nous intéressons maintenant aux premiers instants de l'écoulement (la taille de l'environnement extérieur n'influence alors pas l'écoulement au sein du canal) et à l'établissement de l'effet cheminée.

6.3.1 Lignes de courant

La figure 6.6 montre les lignes de courant au sein du canal obtenues pour le cas numérique et pour le cas expérimental. Nous observons des différences notables entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. Aux tout premiers instants ($t = 20$, 90 et 120) les résultats numériques montrent une mise en place de l'effet cheminée beaucoup plus rapide que celle observée dans le cadre expérimental. Cela peut s'expliquer par le fait que du point de vue numérique il n'existe pas de montée en température de l'élément chauffant. Le flux de chaleur est constant dès $t = 0$. Du point de vue expérimental, un temps de latence pour que l'élément chauffant délivre un flux de chaleur constant ou une montée en température de type rampe peuvent exister. Cependant, on peut observer des comportements identiques avec un décalage en temps. Ainsi, les lignes de courant obtenues numériquement à $t = 60$ et

$t = 90$ montrent des structures de l'écoulement similaires à celles obtenues expérimentalement à $t = 90$ et $t = 120$.

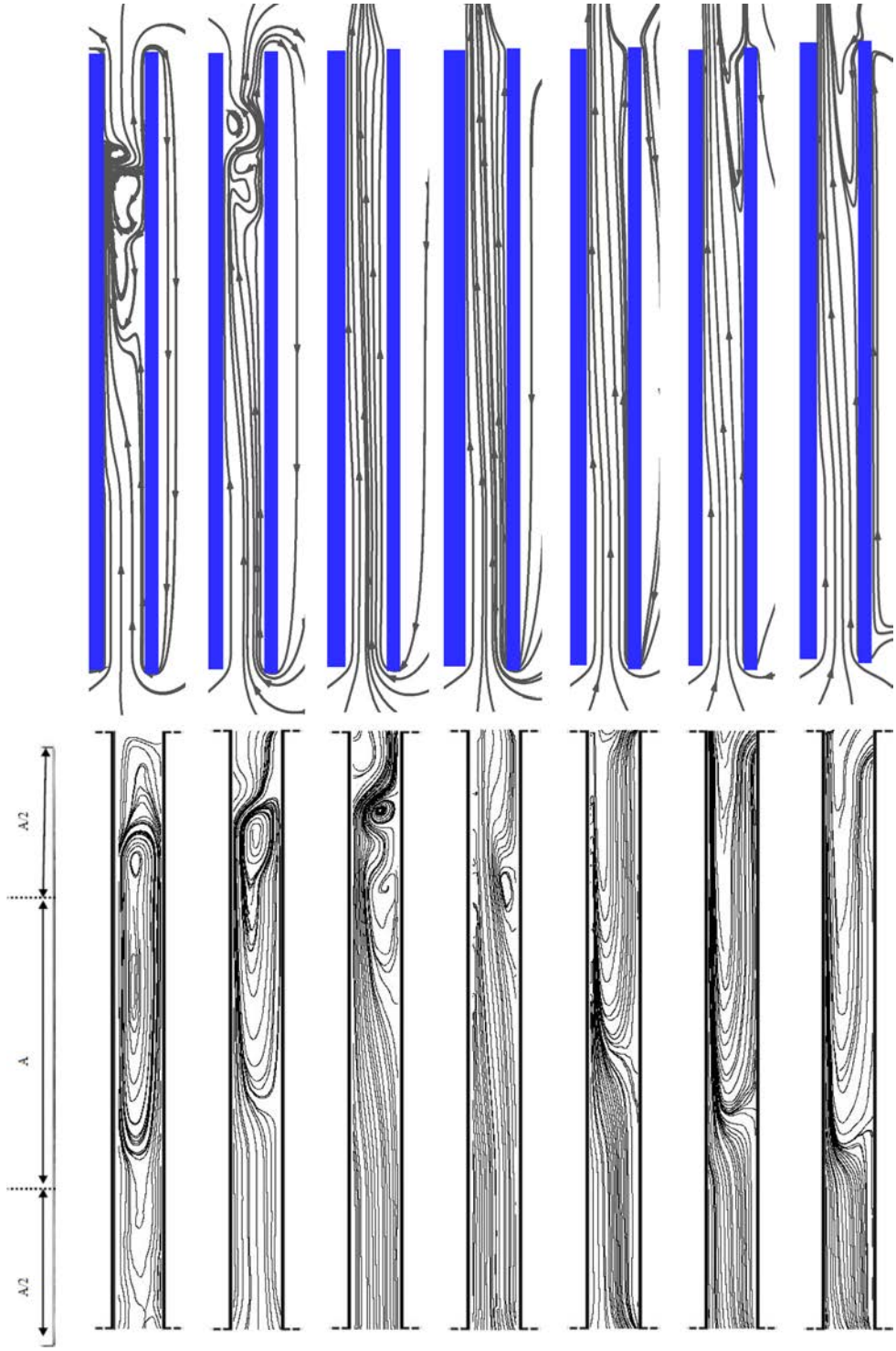


FIGURE 6.6 – *Lignes de courant au sein du canal à* $t = 60, 90, 120, 180, 240, 270, 300$ *pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$. *En haut : résultats numériques, en bas : résultats expérimentaux Polidori et al. (2014)*

Pour des temps plus grands ($t = 270$ et $t = 300$) les deux approches mettent en évidence une zone de recirculation en haut du canal du côté de la paroi non chauffée. Cependant, celle observée expérimentalement est beaucoup profonde que celle observée numériquement. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer cette différence.

- La stratification thermique initiale, présente dans l'expérience et non prise en compte du point de vue numérique, peut impliquer une stratification de la pression motrice diminuant l'effet cheminée et l'aspiration de fluide par l'interface basse du canal. L'alimentation de la couche limite thermique en fluide froid serait alors plus facile par l'interface haute du canal. Pour vérifier cette hypothèse, des tests préliminaires ont été effectués en prenant en en compte cette stratification thermique initiale du point de vue numérique. Comme évoqué par Polidori et al. (2014), il semble que la stratification thermique initiale soit trop faible pour jouer un rôle important sur l'écoulement.

- Une autre hypothèse pouvant expliquer cette différence est la présence d'une surface libre en haut du réservoir pour l'expérience. Celle-ci n'est pas prise en compte numériquement ce qui peut modifier la forme de l'écoulement et le bouclage entre les interfaces du canal. Comme nous l'avons montré précédemment, une différence de circulation globale dans le réservoir peut ainsi jouer sur l'orientation du jet sortant du canal et donc sur l'évolution de la zone de recirculation.

- La dernière raison que l'on peut évoquer ici est le fait que la simulation numérique est $2D$ là où l'expérience est par nature $3D$. Comme évoqué par Caltagirone (2006), une simulation numérique $3D$ permettraient d'assurer un équilibrage de la pression motrice plus naturel sur les interfaces du canal.

6.3.2 Profils de vitesse verticale aux interfaces

Interface basse Les figures 6.7 et 6.8 comparent les profils de vitesse à l'interface basse obtenus numériquement avec ceux issus des mesures PIV de l'expérience.

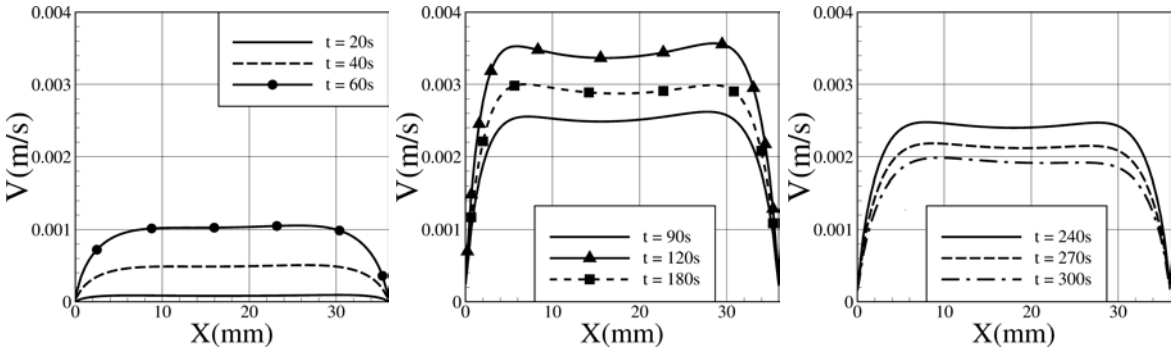


FIGURE 6.7 – *Résultats numériques : profil de vitesse verticale à l'interface basse du canal à* $t = 20, 40, 60, 90, 120, 180, 240, 270, 300$ *pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$

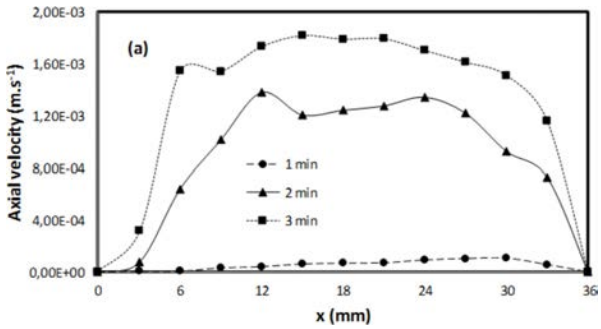


FIGURE 6.8 – *Résultats expérimentaux Polidori et al. (2014) : profil de vitesse verticale à l'interface basse du canal à* $t = 60$, 120 *et* 180 *s pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$

Dans les deux cas, les résultats montrent que la vitesse verticale à l'interface est plutôt

constante au loin des parois. De plus, les vitesses verticales sont du même ordre de grandeur même si pour les résultats expérimentaux la vitesse verticale à l'interface basse est plus faible que celle obtenue numériquement. Cette observation est cohérente avec le fait que la zone de recirculation est plus importante dans le cas expérimental.

La grande différence entre les deux approches est le fait que l'écoulement est dissymétrique dans le cas expérimental alors que numériquement une symétrie de l'écoulement est observé. Dans le cas expérimental, nous observons ainsi que l'écoulement semble privilégié une aspiration vers la droite du canal. Ce comportement est sans doute à relier à une circulation globale dans le réservoir différente entre l'expérience et le cas numérique.

Interface haute Les figures 6.9 et 6.10 comparent les profils de vitesse verticale à l'interface haute obtenus numériquement et expérimentalement. Des profils similaires sont observés à $t = 180\ s$ ($t = 3\ min$) avec une vitesse maximale proche de la paroi chauffée du même ordre de grandeur. De plus comme observé expérimentalement (mais à des temps différents), la vitesse est d'abord maximale du côté de la paroi non chauffé puis lorsque le temps augmente la vitesse maximale se déplace vers la paroi chauffée.

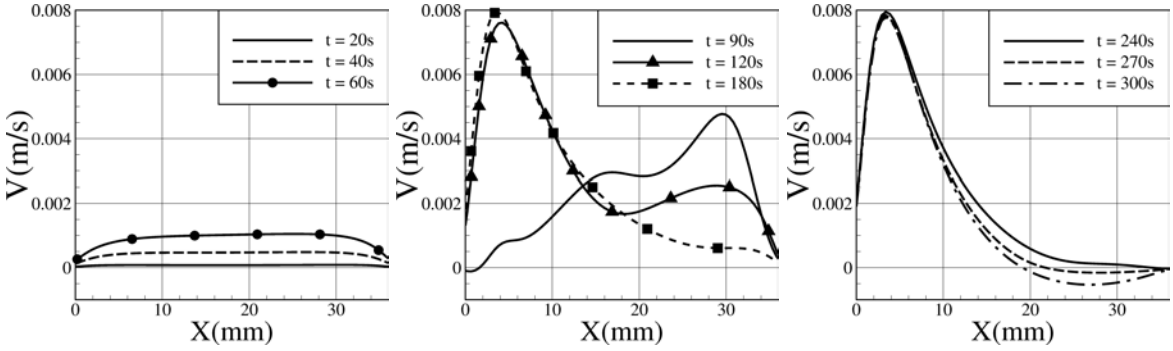


FIGURE 6.9 – *Résultats numériques : profil de vitesse verticale à l'interface haute du canal pour* $t = 20,\ 40,\ 60,\ 90,\ 120,\ 180,\ 240,\ 270,\ 300$ *pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$

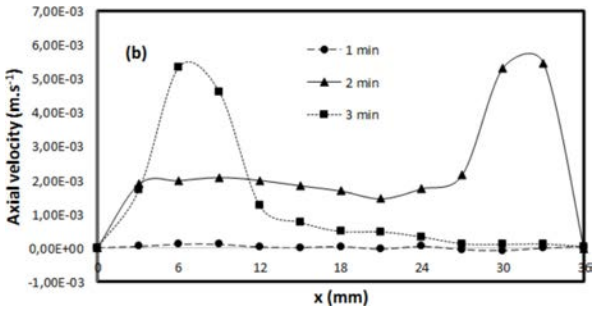


FIGURE 6.10 – *Résultats expérimentaux Polidori et al. (2014) : profil de vitesse verticale à l'interface haute du canal pour* $t = 60,\ 120$ *et* 180 *pour* $Ra = 11.4 \cdot 10^6$

6.4 Conclusion

Ces résultats préliminaires montrent de bon accords sur l'ordre de grandeur de la vitesse verticale entre l'approche numérique et expérimentale. Des structures similaires sont observés aux tout premiers instants pour les lignes de courant mais il existe un décalage en temps entre les résultats expérimentaux et numériques. De plus la zone de recirculation observée expérimentalement est beaucoup plus grande que celle mise en évidence numériquement. Sur des

temps longs, la simulation numérique pose la question de l'influence de l'environnement extérieur sur l'écoulement au sein du canal. Des travaux numériques complémentaires doivent être effectués afin de mieux comprendre les différences observées. L'effet d'une surface libre en haut du réservoir ou de la conduction dans les parois du réservoir doivent être caractérisés. Ces premiers résultats de comparaison montrent la difficulté inhérente à la comparaison entre numérique et expérience. Cette difficulté est d'autant plus importante dans le cas de la convection naturelle que l'écoulement est très sensible à de faibles variations de température.

Bibliographie

J.P. Caltagirone. Simulation d'une expérience de thermo-convection. *GdR AMETH*, 2006.

D. Ospir, C. Popa, C. Chereches, G Polidori, et S. Fohanno. Flow Visualization of Natural Convection in a Vertical Channel With Asymmetric Heating. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 :486–493, 2012.

G. Polidori, S. Fatnassi, R. Ben Maad, F. Beaumont, et S. Fohanno. Transient Natural Convection Flow Dynamics in a Asymmetrically Heated Vertical Channel. *10th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Hefat, 14-16 July*, 2014.

Troisième partie

Simulation réduite aux limites géométriques du canal

7

Configuration et approche numérique

Sommaire

7.1 Configuration d'étude 95
7.2 Discrétisation temporelle et spatiale du problème 96
7.3 Etat de l'art 97
7.4 Opérateur de Stokes 100
7.5 Analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes 100
7.5.1 Aspect mathématique 100
7.5.2 Méthodes numériques 102
Bibliographie 102

Dans ce chapitre, la configuration d'étude lorsque la simulation numérique est réduite aux limites géométriques du canal est présentée. On décrit la discrétisation temporelle et spatiale commune à l'ensemble des méthodes de résolution traitées dans la partie III. Un état de l'art des études existantes est effectué et permet de dégager les problématiques liées à la résolution numérique lorsque celle-ci est restreinte au canal seul. La fin de ce chapitre présente le cadre mathématique lié à l'opérateur de Stokes instationnaire et les difficultés étant liées à la simulation d'un écoulement ouvert de convection naturelle.

7.1 Configuration d'étude

On considère le canal vertical présenté dans la section 2.1 (voir figure 7.1). La simulation numérique est réduite aux limites géométriques du canal.

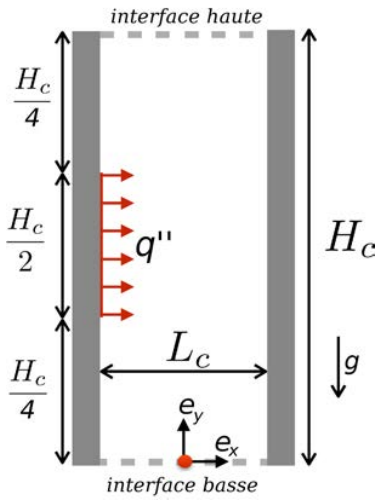


Figure 7.1 – *Configuration du canal vertical asymétriquement chauffé sans son environnement extérieur*

Le canal vertical est chauffé sur la moitié centrale de sa paroi gauche à flux constant ($\frac{\partial T}{\partial x} = -1$). Les parois non-chauffées du canal sont adiabatiques ($\frac{\partial T}{\partial x} = 0$). Les interfaces haute et basse sont ouvertes sur deux milieux semi-infinis à température constante $T_{ext} = 0$ et pression constante $P_{ext} = 0$. On rappelle que le rapport d'aspect du canal $Rf_c = H_c/L_c = 10$. On considère un problème sans dimension et les équations instationnaires 2D de Boussinesq sont résolues. On utilise l'adimensionnement présenté dans la section 2.2. On définit ainsi le nombre de Rayleigh basé sur la largeur du canal $Ra_{q'',L} = \frac{g\,\beta\,q''\,L_c^4}{\alpha\,\nu\,\lambda}$. Pour simplifier les notations, on notera dans ce chapitre $Ra = Ra_{q'',L}$.

La frontière du canal est décomposée en trois parties $\Gamma = \Gamma_W \cup \Gamma_B \cup \Gamma_T$ avec Γ_W la frontière relative aux parois du canal, Γ_B l'interface basse du canal et Γ_T l'interface haute. On note Γ_{flux} la partie de la frontière Γ_W relative à la paroi chauffée du canal.

Conditions limites pour la température Dans cette partie, les conditions limites sur la température sont les mêmes quelque soit l'approche considérée. La moitié de la paroi gauche du canal est chauffée à flux de chaleur constant q'', les parois non-chauffées sont adiabatiques. Lorsque le fluide entre dans le canal, il entre à la température extérieure $T_{ext} = 0$ et lorsqu'il sort du canal on considère une condition de Neumann homogène. A l'instant initial le fluide et les parois du canal sont à la température extérieure $T_{ext} = 0$. Les conditions limites thermiques associées à notre problème sont

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{V}^{n+1}\cdot\mathbf{n} < 0 \text{ alors } T^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_T \text{ et } \Gamma_B, \\ \text{si } \mathbf{V}^{n+1}\cdot\mathbf{n} > 0 \text{ alors } \dfrac{\partial T^{n+1}}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_T \text{ et } \Gamma_B, \\ \dfrac{\partial T^{n+1}}{\partial x} = -1 & \text{sur } \Gamma_{flux}, \\ \dfrac{\partial T^{n+1}}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_W \setminus \Gamma_{flux}. \end{cases} \tag{7.1}$$

7.2 Discrétisation temporelle et spatiale du problème

La discrétisation spatiale et temporelle est similaire à ce que l'on a présenté précédemment dans les sections 3.4.1 et 3.4.4. Les équations discrétisées en temps s'écrivent :

$$\begin{cases} & & \nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} & = & 0, \\ \mathbf{V}^{n+1} & - \frac{2\Delta t}{3}\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \triangle \mathbf{V}^{n+1} & + \frac{2\Delta t}{3}\nabla P^{n+1} & = & S_{\mathbf{V}}^{n,n-1}, \\ & T^{n+1} & - \frac{2\Delta t}{3}\frac{1}{\sqrt{Ra}} \triangle T^{n+1} & = & S_{T}^{n,n-1}, \end{cases} \tag{7.2}$$

avec

$$S_{\mathbf{V}}^{n,n-1} = \frac{4\mathbf{V}^n - \mathbf{V}^{n-1}}{3} + \frac{2\Delta t}{3}[-(2NL^n - NL^{n-1}) + Pr\ T^{n+1}e_y], \tag{7.3}$$

et

$$S_{\mathbf{T}}^{n,n-1} = \frac{4\mathbf{T}^n - \mathbf{T}^{n-1}}{3} - \frac{2\Delta t}{3}(2NL^n - NL^{n-1}). \tag{7.4}$$

La discrétisation en espace est toujours effectuée sur un maillage décalé (figure 7.2) avec des schémas centrés d'ordre 2. Les opérateurs sont discrétisés de la même manière que dans la section 3.4.4.

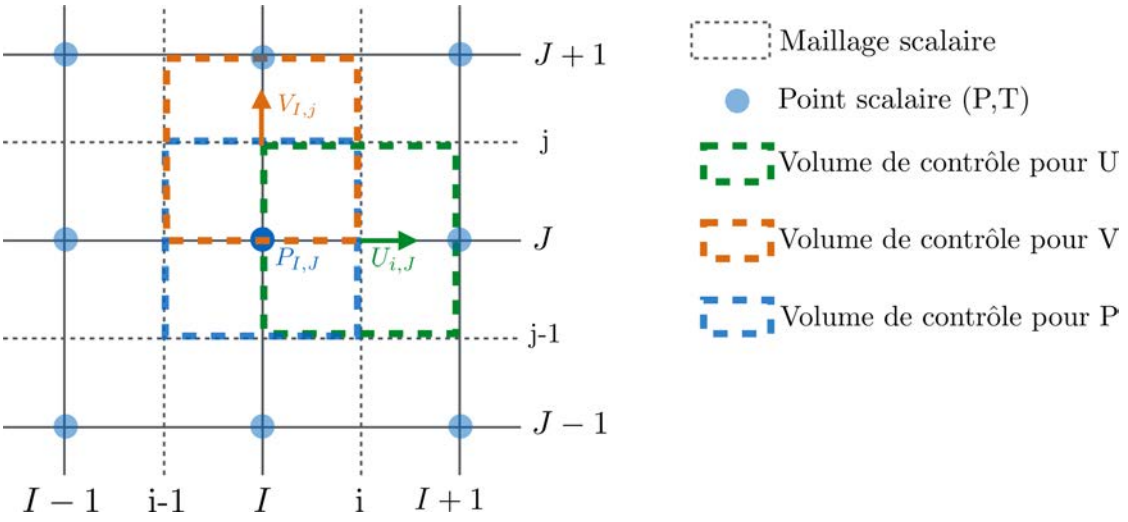


Figure 7.2 – *Schéma maillage décalé*

A chaque pas de temps, nous résolvons d'abord l'équation pour T^{n+1} puis le problème couplé vitesse-pression. Le problème discret vitesse-pression peut alors s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{S}\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_u & 0 & G_x \\ 0 & H_v & G_z \\ D_x & D_z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_U^{n,n-1} \\ S_V^{n,n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

où $\mathbf{S}$ est l'opérateur de Stokes instationnaire discret, $H = \left(\mathbb{1} - \frac{2\Delta t}{3}\frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\Delta\right)$ avec Δ l'opérateur laplacien discret, et les opérateurs discret $G_x = \frac{\partial .}{\partial x}$, $G_z = \frac{\partial .}{\partial z}$, $D_x = \frac{\partial .}{\partial x}$, $D_z = \frac{\partial .}{\partial z}$. Le vecteur $(U^{n+1}, V^{n+1}, P^{n+1})$ contient l'ensemble des inconnues du problème : c'est-à-dire les points situés à l'intérieur du domaine de calcul et les points situés sur la frontière du domaine correspondant aux conditions limites.

Dans cette partie, nous utilisons un code de calcul $2D$ séquentiel initialement développé par Patrick Le Quéré au LIMSI pour la simulation des écoulements de convection naturelle en milieu fermé. Dans cette partie, nous avons adapté ce code à la résolution d'écoulements semi-confinés. Cela implique des modifications sur :

- sur le système matriciel à résoudre,
- sur l'algorithme de résolution du problème vitesse-pression,
- sur le domaine de calcul et la position de ces frontières par rapport aux interfaces du canal.

Nous présenterons par la suite différentes modélisations des interfaces du canal et les méthodes de résolution numérique associées.

7.3 Etat de l'art

La principale difficulté pour la simulation numérique du canal réside dans la modélisation des interfaces basse et haute. Ainsi nous présentons par la suite les hypothèses retenues par différents auteurs.

Les premières études numériques pour l'étude de la convection naturelle dans un canal vertical (Bodia et Osterle 1962, Aung 1972, Aung et al. 1972) se sont basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes sous leur forme parabolique. Dans ces études, il est considéré un profil de vitesse verticale uniforme $V(x,0) = G_{in}(y=0)$ et une vitesse horizontale nulle à l'interface basse du canal. L'écart de pression motrice ΔP entre les interfaces haute et basse du canal est nul et la pression aux interfaces est uniforme et égale à P_{ext}. La comparaison de ces études numériques avec notamment les travaux d'Elenbaas (1942) montre un bon accord pour l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh.

Dans les études de Dalbert et al. (1980), Penot et Peube (1980), Dalbert et al. (1981), Penot et Dalbert (1982) une chute de pression motrice en entrée du canal due à l'aspiration du fluide à partir d'un environnement extérieur au repos à température T_{ext} et pression P_{ext} constantes est prise en compte. Ainsi à l'interface basse du canal, la vitesse verticale est uniforme $V(x,0) = G_{in}(y=0)$ et la vitesse horizontale est nulle. La pression motrice est alors déterminée en appliquant la relation de Bernoulli entre un point situé dans le milieu extérieur et un point à l'interface basse du canal. La pression motrice à l'interface basse est ainsi uniforme et égale à $P(x,0) = -\frac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext}$. La chute de pression motrice à l'interface basse du canal permet alors de prendre en compte "l'histoire" du fluide avant que celui-ci entre dans le canal. A l'interface haute du canal, le fluide est considéré comme sortant sous la forme d'un jet en atmosphère libre. La pression motrice à l'interface haute est alors égale à la pression motrice du milieu extérieur $P(x,Rf_c) = P_{ext}$ et la vitesse horizontale U est uniformément nulle. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt à haut nombre de Rayleigh se rapproche du comportement observé le long d'une plaque plane verticale.

L'étude de Chappidi et Eno (1990) s'est par la suite intéressée à l'influence du choix des conditions limites à l'interface basse d'un canal différentiellement chauffé. Les cas d'une paroi à température constante et d'une paroi à flux de chaleur constant sont étudiés. Les différentes conditions limites considérées sont : *i)* une vitesse verticale uniforme $V(x,0) = G_{in}(y=0)$ sans effet sur la pression $P = P_{ext}$, *ii)* une vitesse verticale uniforme $V(x,0) = G_{in}(y=0)$ avec un effet sur la pression $P(x,0) = -\frac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext}$, *iii)* une vitesse d'entrée parabolique sans effet sur la pression $P = P_{ext}$ et *iv)* une vitesse d'entrée parabolique avec un effet sur la pression $P(x,0) = -\frac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext}$. Pour tous les jeux de conditions limites, la vitesse horizontale à l'interface basse du canal est nulle et la pression motrice à l'interface haute est égale à la pression motrice du milieu extérieur $P(x,Rf_c) = P_{ext}$. Les résultats obtenus pour

le nombre de Nusselt à la paroi chauffée dans chacun des cas sont comparés avec les expériences d'Elenbaas (1942) et Wirtz et Stutzman (1982). Pour les faibles nombres de Rayleigh, le nombre de Nusselt local est bien prédit par l'ensemble des cas considérés. A haut nombre de Rayleigh, la dispersion entre les différents résultats et l'expérience est plus élevée. A bas nombre de Rayleigh, l'écoulement n'est pas influencé par les conditions limites en entrée car il est principalement dominé par les forces visqueuses. Au contraire, à haut nombre de Rayleigh l'influence des conditions limites d'entrée ne semble pas négligeable. Le comportement de la couche limite thermique semble au contraire assez robuste au changement de modélisation des interfaces haute et basse du canal.

Ces premières études, basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes sous leur forme parabolique, ne permettent pas de rendre compte de la zone de recirculation observée expérimentalement à haut nombre de Rayleigh. Par la suite, le problème est décrit en considérant les équations de Navier-Stokes sous leur forme elliptique.

L'étude menée par Marcondes et Maliska (1999) s'intéresse la condition limite à l'interface basse du canal. Il est considéré des conditions de type Neumann homogène sur les deux composantes de la vitesse et de type Dirichlet pour la pression motrice. Deux jeux de conditions sont comparés pour la pression motrice à l'interface basse : $P(x,0) = P_{ext}$ et $P(x,0) = -\frac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext}$. A l'interface haute du canal, la pression motrice est uniforme $P(x,Rf_c) = P_{ext}$ et des conditions de Neumann homogène sont imposées sur les vitesses. Les résultats montrent que la distribution de température au niveau de la couche limite thermique est la même quelque soit les conditions de pression en entrée du canal même si les profils de vitesse sont complètement différents. Cette observation est expliquée par le fait que l'écoulement dans le canal est mis en mouvement par deux forces motrices différentes. Proche des parois chauffées, l'écoulement est principalement soumis à la poussée d'Archimède et en dehors de la couche limite thermique il est soumis aux forces de pression résultantes des conditions de pression aux interfaces du canal. Ainsi, la zone de recirculation est plus importante et le débit aspiré par le bas du canal plus faible dans le cas où $P(x,0) = -\frac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext}$ à l'entrée du canal que pour le cas où $P(x,0) = P_{ext}$.

Caltagirone (2006a) a étudié un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant. Des conditions limites de types Bernoulli sont considérées à l'interface basse et à l'interface haute du canal la pression motrice est uniformément nulle ($P_{ext} = 0$). Les résultats de cette étude sont comparés avec une simulation du canal et de son environnement extérieur (Caltagirone 2006b). Pour $Ra = 10^5$, les résultats pour l'écoulement au sein du canal obtenus avec les deux types de simulations sont comparables bien que l'environnement extérieur soit instationnaire. Pour $Ra = 10^7$, le jet sortant du canal est instationnaire et rend l'écoulement au sein du canal instable. Cette instabilité n'a pas été prédite par la simulation du canal seul car l'interaction avec l'environnement extérieur n'est pas calculée.

L'étude de Ben-Mansour et al. (2007) propose quatre jeux de conditions limites différents pour la pression motrice : *i)* pression uniforme aux interfaces haute et basse $P(x,0) = P(x,Rf_c) = P_{ext}$ et condition de Neumann homogène sur les vitesses *ii)* zone d'entrée et de sortie étendues par deux domaines ouverts dont les frontières sont maintenues à P_{ext} , *iii)* zone d'entrée et de sortie étendues par des réservoirs semi-circulaires, *iv)* vitesse verticale uniforme à l'interface basse $V(x,0) = G_{in}(y=0)$ et $U = 0$, et jet en atmosphère libre en à l'interface haute $P(x,Rf_c) = P_{ext}$ avec une condition de Neumann homogène sur les vitesses. La comparaison des profils de vitesse verticale entre les résultats numériques et les données expérimentales présentées dans cette même étude montre que des conditions limites de type pression uniforme permettent de représenter correctement l'écoulement.

Dans l'objectif d'établir des solutions de référence pour l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical soumis à différentes conditions limites pour la pression motrice, un exercice de comparaison numérique a été soumis à la communauté française de thermique (Desrayaud et al. 2007). Dans cette comparaison, les conditions limites vitesse-pression sont

- si le fluide entre dans le canal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial y} = U = T = 0, \\ P_{GB} = -\dfrac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext} \text{ ou } P_{LB} = -\dfrac{V(x,0)^2}{2} + P_{ext}. \end{cases} \tag{7.6}$$

- si le fluide sort du canal, elles s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial y} = U = \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0, \\ P = P_{ext}. \end{cases} \tag{7.7}$$

Pour la pression aux interfaces du canal, il est considéré soit une approche globale GB (la pression est uniforme et dépendante du débit) soit une approche locale LB (la pression est variable et dépendante de la vitesse locale). Sept jeux de résultats provenant de 5 codes volumes finis et 2 code éléments finis ont été comparés. Il est montré un bon accord des résultats pour le profil de température le long de la paroi chauffée mais une grande dispersion pour les autres variables. La plus grande dispersion est observée pour la vitesse verticale en entrée du canal et du côté de la paroi chauffée. Cette comparaison pose alors la question de l'influence des méthodes numériques utilisées et de la méthode d'implémentation des conditions limites sur la vitesse et la pression aux frontières artificielles du canal. Ce travail a récemment fait l'objet d'un nouveau travail de collaboration que nous détaillerons par la suite (Desrayaud et al. 2013).

Les travaux de Le Quéré (2011) se sont intéressés à la simulation des écoulements ouverts de convection naturelle et plus particulièrement à l'implémentation numérique des conditions limites aux interfaces. Dans cette optique, il a effectué une décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de Stokes résultant de la discrétisation des équations de Navier-Stokes avec une formulation sur une grille décalée classique. Il est alors montré que le choix des conditions limites peut mener à une dimension du noyau de l'opérateur de Stokes supérieure ou égale à 2, menant ainsi à une solution indéterminée. L'algorithme de résolution alors proposé construit la solution comme une combinaison linéaire des modes du noyau de l'opérateur de Stokes discret et d'une solution particulière au problème posé. Afin d'obtenir une solution unique des contraintes supplémentaires, comme par exemple un gradient de pression motrice entre les interfaces du canal, sont imposées. Pour la simulation du canal sans son environnement extérieur, nous repartons de ce travail.

Conclusion Cet état de l'art montre que le choix des conditions limites pour la pression motrice aux interfaces du canal est particulièrement important et influence directement la dynamique de l'écoulement (notamment la zone de recirculation en haut du canal lorsqu'elle existe) tout en jouant un rôle moins important sur le comportement thermique de la couche limite. A notre connaissance, il n'existe cependant toujours pas de conditions limites de référence permettant de modéliser correctement la physique de l'écoulement aux interfaces canal/environnement. Malgré la littérature à ce sujet, le choix des conditions limites aux interfaces du canal est donc toujours une question ouverte. De plus, l'implémentation numérique des conditions limites peut aussi amener à certaines difficultés supplémentaires comme l'a montré Le Quéré (2011). C'est pourquoi on présentera par la suite plusieurs modélisations

et méthodes de résolution pour lesquelles on appliquera l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes. Les résultats seront ensuite comparés avec une simulation représentative d'un écoulement de convection naturelle dans un canal vertical plongé dans un environnement infini issu de la partie II.

7.4 Opérateur de Stokes

On s'intéresse ici à l'unicité de la solution obtenue dans le cadre d'écoulement de convection naturelle en milieu ouvert. En effet comme l'a montré Le Quéré (2011), le noyau de l'opérateur de Stokes peut être de dimension égale ou supérieure à 2 sous certaines conditions limites sur la vitesse et la pression. Le problème s'avère alors mal posé puisque la solution au problème n'est pas unique et admet une infinité de solutions.

Remarque 7.1 *Pour la résolution des équations de Navier-Stokes sur un domaine fermé, on sait qu'il existe un mode (pression constante - vitesse nulle) dans le noyau de l'opérateur de Stokes. La solution est alors unique à un mode de pression constant près.*

Une fois le problème discrétisé en temps (équation (7.5)) et complété par les conditions limites associées au problème étudié on doit donc résoudre à chaque pas de temps un système matriciel du type $\mathbf{S}\,X = B$, où $B \neq 0$ et $\mathbf{S}$ l'opérateur de Stokes instationnaire discret, afin d'obtenir la solution au problème $(\mathbf{V}^{n+1}, P^{n+1})$.

Deux cas se présentent alors :

— si $\mathbf{S}$ est inversible, le système a une solution unique $X = \mathbf{S}^{-1}\,B$,

— si $\mathbf{S}$ est non inversible, pour qu'il existe au moins une solution, il faut que $B \in Im(A)$.

Dans le cas où $\mathbf{S}$ est non inversible et $B \in Im(A)$, alors si X_0 est une solution particulière du système non homogène $\mathbf{S}\,X = B$ l'espace des solutions est de la forme

$$X = X_0 + ker(\mathbf{S}) = X_0 + X^*, X^* \in ker(\mathbf{S}). \tag{7.8}$$

Dans ce cas l'espace des solutions est un espace affine dirigé par le noyau de $\mathbf{S}$.

Dans l'hypothèse où notre problème discret aboutit à ce que l'opérateur de Stokes instationnaire admette plusieurs éléments dans son noyau, alors toute superposition d'une solution particulière et d'une combinaison linéaire des éléments du noyau est solution du problème posé. Nous pouvons ainsi écrire la solution de la manière suivante

$$X = X_0 + \xi_1 \overline{X} + \sum_{l=1}^{k} \xi_l\, X_l^*, \tag{7.9}$$

avec $\{\overline{X}, X_l^*\}_{1 \leq l \leq k}$ une base orthogonale du noyau de $\mathbf{S}$, $\overline{X}$ le mode (pression constante - vitesse nulle) et ξ_l des coefficients réels. La solution exprimée ainsi admet alors une infinité de solutions tant que les valeurs ξ_l ne sont pas déterminées.

7.5 Analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes

On cherche donc à connaître la dimension du noyau de l'opérateur de Stokes discret et les modes engendrant celui-ci. Pour répondre à cette question, on effectue l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes discret.

7.5.1 Aspect mathématique

Une fois le problème discrétisé en temps et en espace et complété avec les conditions limites, l'analyse des valeurs singulières (SVD) de l'opérateur de Stokes discret est effectuée.

On détermine ainsi les éléments du noyau. La SVD permet de factoriser toute matrice A de dimension m x n sous la forme

$$A = U \Sigma V^t, \tag{7.10}$$

où U et V sont des matrices respectivement de dimension m x m et n x n et Σ une matrice dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls et tous les autres nuls. Les valeurs singulières sont les coefficients diagonaux de Σ. Ces valeurs peuvent être classées par ordre décroissant et les valeurs singulières nulles (si elles existent) sont ainsi les derniers coefficients diagonaux. Pour plus de détails, on peut consulter (Kalman 2002).

Il existe des relations particulièrement intéressantes entre les 4 espaces fondamentaux associés à A avec U et V. Ces relations sont illustrées par le diagramme de Strang (Strang 1980).

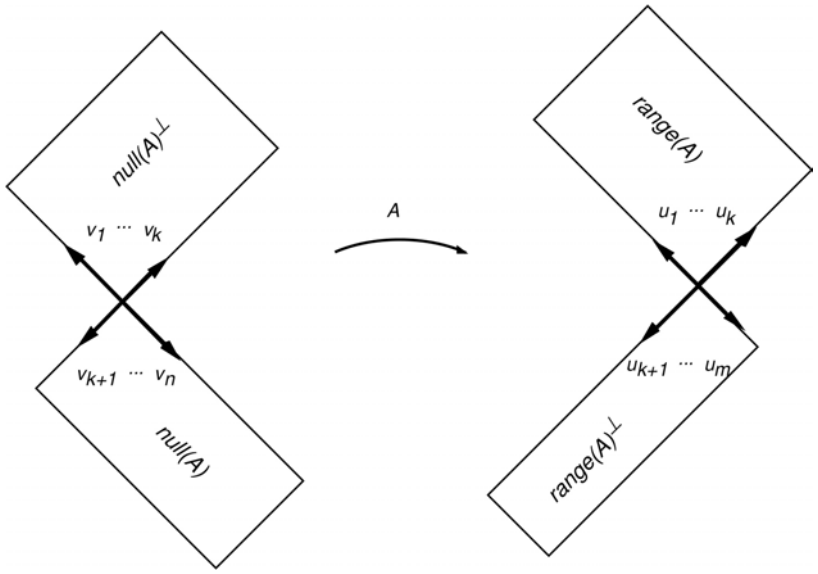


FIGURE 7.3 – *Diagramme de Strang (Strang 1980)*

Si l'on obtient k valeurs singulières non nulles, les $(n-k)$ dernières lignes de V^T correspondent aux vecteurs singuliers engendrant le noyau de l'opérateur A. Les $(m-k)$ dernières colonnes de U donnent une base de l'orthogonale de $Im(A)$.

On peut donc décomposer l'opérateur de Stokes discret **S** sous la forme de l'équation (7.10). Par la suite, on utilise ainsi la décomposition en valeurs singulières afin d'obtenir une représentation explicite du noyau de l'opérateur de Stokes discret **S**. La SVD nous permettant de trouver les matrices U et V ainsi que les valeurs singulières associées à **S**, on peut donc obtenir une base orthogonale du noyau de **S**.

Remarque 7.2 *Lorsque l'on s'intéresse au noyau de l'opérateur de Stokes discret seul le type des conditions limites retenues est important. En effet, le fait que ces conditions soient homogènes ou non homogènes ne change pas les modes du noyau.*

Remarque 7.3 *Pour des simulations où le pas de temps Δt est fixe, il est nécessaire de n'effectuer qu'une seule fois l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes instationnaire discret puisque celui-ci n'évolue pas en temps. Si la simulation est effectuée avec un pas de temps variable, il est nécessaire de faire la SVD à chaque pas de temps.*

7.5.2 Méthodes numériques

L'opérateur **S** est discrétisé en espace avec des schémas centrés d'ordre 2 et les conditions limites sont prises en compte. Pour effectuer la SVD de l'opérateur **S** on utilise la subroutine DGESVD de la librairie LAPACK (Anderson et al. 1999). On obtient ainsi, avec la procédure présentée précédemment, les vecteurs singuliers de l'opérateur de Stokes.

La décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de Stokes ne donne pas forcément une base orthogonale du noyau **S** générée par le mode $\overline{X}$ (pression constante - vitesse nulle). Comme on sait que ce mode appartient au noyau de l'opérateur de Stokes, et afin d'avoir une base orthogonale du noyau de **S** pratique et compréhensible du point de vue physique, les vecteurs singuliers fournis par la SVD sont orthogonalisés par rapport au mode $\overline{X}$. Par exemple dans le cas de 3 valeurs singulières, la SVD nous fournit : X_1, X_2, X_3 orthogonaux entre eux deux à deux. On cherche donc une nouvelle base orthogonale $\{\overline{X}, X_2^*, X_3^*\}$, avec

$$\begin{cases} X_2^* = X_2 - X_2 \cdot \overline{X}, \\ \\ X_3^* = \overline{X} \otimes X_2^*. \end{cases} \tag{7.11}$$

Cette base peut ensuite être normée afin d'avoir une base orthonormale du noyau de l'opérateur de Stokes discret.

Remarque 7.4 *La SVD peut-être effectuée soit pour l'opérateur de Stokes stationnaire soit pour l'opérateur de Stokes instationnaire. Il n'y aucune différence entre le nombre de modes dans les noyaux des deux opérateurs.*

Remarque 7.5 *Le nombre d'opérations nécessaire pour effectuer la SVD est de l'ordre de $m^2\,n$ quand $m > n$ ou $m\,n^2$ sinon. Le temps de calcul pour obtenir les modes du noyau de **S** est donc très dépendant de la taille du maillage utilisé. Pour des maillages fins, la SVD peut ainsi devenir extrêmement longue.*

Bibliographie

E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J.J. Dongarra, J.J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, et D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide (3rd Edition) SIAM, Philadelphia http ://www.netlib.org/lapack/lug*, 1999.

W. Aung. Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated Asymmetrically. *International Journal Heat Mass Transfer*, 15 :1577–1580, 1972.

W. Aung, L.S. Fletcher, et V. Sernas. Developping Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates with Asymmetric Heating. *International Journal Heat Mass Transfer*, 15 :2293–2308, 1972.

R. Ben-Mansour, M.A. Habib, H.M. Badr, et S. Anwar. Comparison of Different Turbulence Models and Flow Boundary Conditions in Predicting Turbulent Natural Convection in a Vertical Channel With Isoflux Plates. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 32 : 191–218, 2007.

J.R. Bodia et J.F. Osterle. The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates. *Journal of Heat Transfer*, pages 40–44, 1962.

J.P. Caltagirone. Simulation d'un canal ouvert. *GdR AMETH*, 2006a.

J.P. Caltagirone. Simulation d'une expérience de thermo-convection. *GdR AMETH*, 2006b.

P.R. Chappidi et B.E. Eno. A Comparative Study of the Effect of Inlet Conditions on a Free Convection Flow in a Vertical Channel. *Journal of Heat Transfer*, 112 :1082–1085, 1990.

A.-M. Dalbert, J.-L. Peube, F. Penot, et J.-F. Robert. Etude de l'écoulement dans un collecteur plan. *Revue Phys. Appl.*, 15 :201–206, 1980.

A.M Dalbert, F. Penot, et J.-L. Peube. Influence des conditions d'entrée sur l'écoulement de convection naturelle dans un thermosiphon vertical. *C. R. Académie des Sciences*, pages 1345–1347, 1981.

G. Desrayaud, R. Bennacer, J.-P. Caltagirone, E. Chenier, A. Joulin, N. Laaroussi, et K. Mojtabi. Etude numérique comparative des écoulements thermoconvectifs dans un canal vertical chauffé asymmétriquement. Dans *8 ème Colloque Franco-Québecquois sur la Thermique des Systemes, Montréal, Art.-06-14*, 2007.

G. Desrayaud, E. Chenier, A. Joulin, A. Bastide, B. Brangeon, J.P. Caltagirone, Y. Cherif, R. Eymard, C. Garnier, S. Giroux-Julien, Y. Harnane, P. Joubert, N. Laaroussi, S. Lassue, P. Le Quéré, R. Li, D. Saury, A. Sergent, S. Xin, et A. Zoubir. Benchmark Solutions for Natural Convection Flows in Vertical Channels Submitted to Different Open Boundary Conditions. *International Journal of Thermal Sciences*, 72 :18–33, 2013.

W. Elenbaas. Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection. *Physica*, 9 :1–28, 1942.

D. Kalman. A Singularly Valuable Decomposition : The SVD of a Matrix. *The American University Washington DC 20016*, 2002.

P. Le Quéré. On the Computation of Some External or Partially Enclosed Natural Convection Flows. Dans *7th International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, Istanbul, Art. 401*, 2011.

F. Marcondes et C.R. Maliska. Treatment of Inlet Boundary Conditions in Natural-convection Flows in Open-ended Channels. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 35 :317–345, 1999.

F. Penot et A.-M. Dalbert. Convection naturelle mixte et forcée dans un thermosiphon vertical chauffé à flux constant. *International Journal Heat Mass Transfer*, 26 :1639–1647, 1982.

F. Penot et J.L. Peube. Sur le fonctionnement d'un thermosiphon résultat de la rupture d'équilibre de fluide stratifié. *Revue Phys. Appl*, 15 :903–908, 1980.

G. Strang. Linear Algebra and its Applications. *2nd edition, Academic Press, New York*, 1980.

R.A. Wirtz et R.J. Stutzman. Experiments on Free Convection Between Plates with Symmmetric Heating. *Journal of Heat Transfer*, 104 :501–507, 1982.

8

Principe de superposition

Sommaire

8.1 Méthodes numériques . . . 107
8.1.1 Frontières du domaine de calcul . . . 107
8.1.2 Conditions limites et modélisation des interfaces . . . 108
8.1.3 Couplage Vitesse-Pression . . . 109
8.1.4 Implémentation numérique des conditions limites aux interfaces du canal . . . 110
8.2 Résultats de l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes . . . 112
8.3 Principe de superposition . . . 113
8.4 Comparaison des résultats obtenus . . . 115
8.4.1 Comparaison des conditions limites $CLU - DH$ et $CLU - V$ . . . 115
8.4.2 Comparaison avec les solutions de référence . . . 117
8.4.3 Discussion . . . 120
8.5 Conclusion partielle . . . 121
Bibliographie . . . 121

Ce chapitre présente une méthode de résolution basée sur les travaux de Le Quéré (2011). On commence par décrit les frontières du domaine de calcul numérique associées à cette méthode puis la modélisation et les conditions limites au niveau des interfaces haute et basse du canal sont présentées. Nous effectuons ensuite l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes et nous montrons que tel qu'est posé le problème, il existe deux modes dans le noyau de cet opérateur. Le principe de la méthode de superposition est alors introduit. Les résultats obtenus par cette méthode sont ensuite comparés avec les solutions de référence de la partie II. La fin de ce chapitre présente aussi les difficultés numériques liées à la méthode de résolution pour l'implémentation des conditions limites.

8.1 Méthodes numériques

8.1.1 Frontières du domaine de calcul

Dans ce chapitre, les interfaces haute Γ_T et basse Γ_B du canal sont localisées sur les noeuds de la vitesse verticale (en $j = 1$ et $j = NJ - 1$). Le canal est alors discrétisé selon la figure 8.1. Les frontières du domaine de calcul correspondent aux interfaces Γ_B et Γ_T entre le canal et son environnement extérieur.

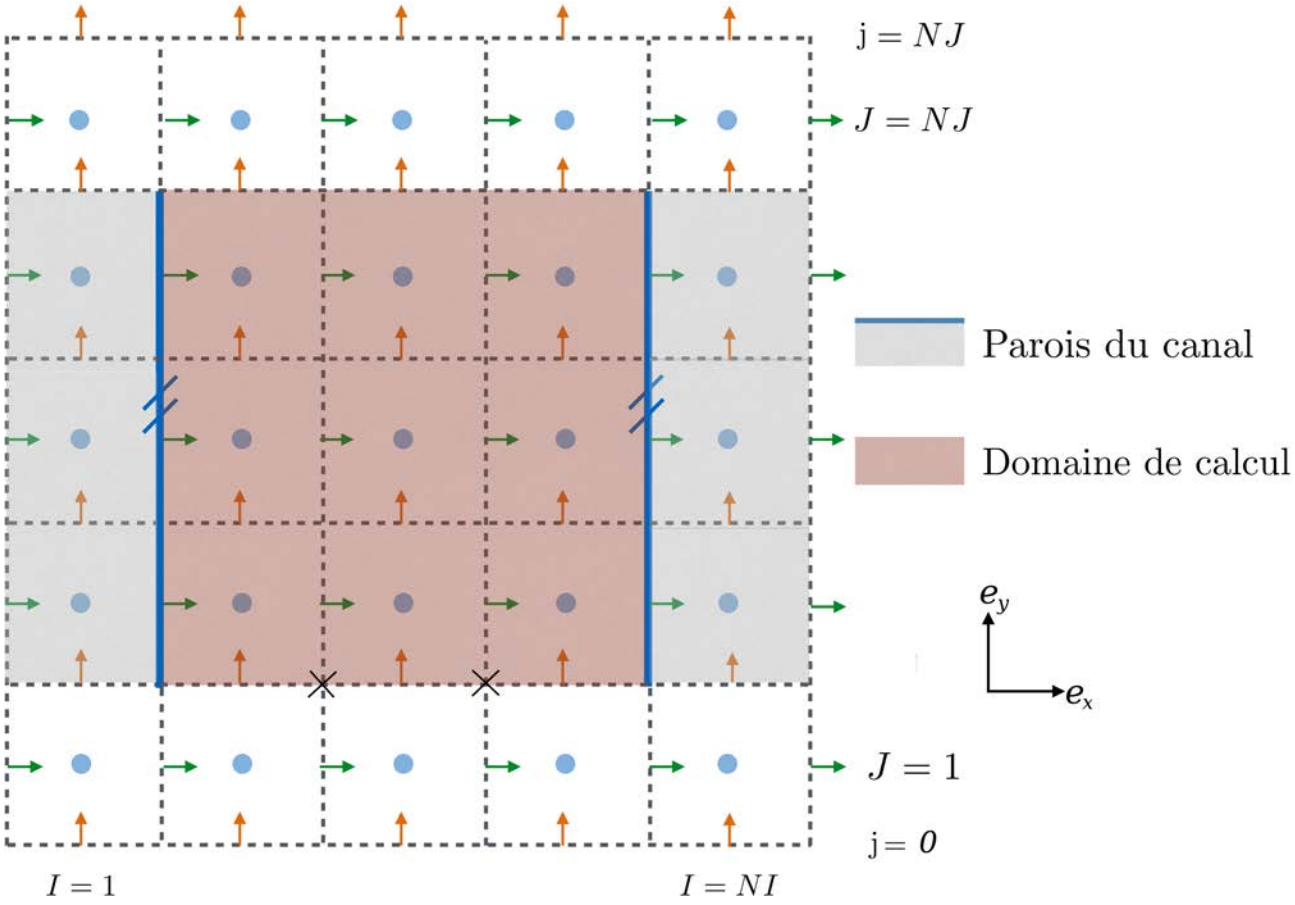


Figure 8.1 – *Frontière du domaine de calcul : interface haute et basse sur les noeuds de la vitesse verticale*

Nombre d'inconnues du problème vitesse-pression Les inconnues du problème sont situées au sein de domaine de calcul et sur sa frontière. Nous avons ainsi :

- inconnues pour U : $(NI-1) \times (NJ-2)$,
- inconnues pour V : $(NI-2) \times (NJ-1)$,
- inconnues pour P : $(NI-2) \times (NJ-2)$.

Nous avons donc au total $(NI-1) \times (NJ-2) + (NI-2) \times (NJ-1) + (NI-2) \times (NJ-2)$ inconnues (U, V, P).

Nombre d'équations du problème vitesse-pression Ces équations proviennent des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement pour U et V et des conditions limites connues de manière explicite sur les frontières du domaine de calcul :

- l'équation de conservation de la masse est résolue sur les noeuds scalaires de la pression $P_{I,J}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $2 \leq J \leq NJ-1$: $(NI-2) \times (NJ-2)$ équations,
- l'équation de quantité de mouvement pour U est résolue au point $U_{i,J}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$ et $2 \leq J \leq NJ-1$: $(NI-3) \times (NJ-2)$ équations,

- l'équation de quantité de mouvement pour V est résolue au point $V_{I,j}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $2 \leq j \leq NJ-2$: $(NI-2) \times (NJ-3)$ équations,
- les conditions limites $U_{i=1,J}$ et $U_{i=NI-1,J}$ pour $2 \leq J \leq NJ-1$ sur les parois verticales du canal Γ_W : $2 \times (NJ-2)$ équations,
- les conditions limites $V_{I,j=1}$ et $V_{I,j=NJ-1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ sur les interfaces du canal Γ_T et Γ_B : $2 \times (NI-2)$ équations.

Nous résolvons ainsi $(NI-2) \times (NJ-2) + (NI-1) \times (NJ-2) + (NI-2) \times (NJ-1)$ équations soit autant que le nombres d'inconnues.

Remarque 8.1 *Sur les interfaces Γ_T et Γ_B, les conditions limites $V|_{\Gamma_T}$ et $V|_{\Gamma_B}$ sont explicites (elles font partie des équations à résoudre car $V_{I,j=1}$ et $V_{I,j=NJ-1}$ sont définies sur Γ_T et Γ_B) alors que celle sur $U|_{\Gamma_T}$ et $U|_{\Gamma_B}$ sont imposées de manière implicite (l'opérateur de Stokes est modifié pour imposer la condition limite souhaitée mais celle-ci n'est pas une équation du problème). Sur les parois du canal Γ_W, les conditions limites sur $U|_{\Gamma_W}$ sont explicites et celles sur $V|_{\Gamma_W}$ sont implicites. Les conditions limites sur la pression sont imposées explicitement sur Γ.*

8.1.2 Conditions limites et modélisation des interfaces

Le canal vertical est ici considéré ouvert à ces interfaces haute et basse du canal sur deux milieux semi-infinis au repos à température $T_{ext} = 0$ et pression motrice $P_{ext} = 0$.

Conditions limites dynamiques Deux jeux de conditions limites du point de vue dynamique sont considérés. La différence entre ceux-ci réside dans la modélisation de l'interface basse du canal. A l'interface haute du canal, les deux jeux de conditions limites imposent des conditions de Neumann homogène sur la vitesse horizontale et la vitesse verticale.

Le premier jeu de conditions limites, noté $CLU-DH$, considère une vitesse horizontale nulle à l'interface basse du canal et une condition de Neumann homogène pour la vitesse verticale. Comme nous l'avons vu, ce type de condition limite pour modéliser l'interface basse du canal a été utilisé dans de nombreuses études. Les conditions limites du point de vue dynamique s'écrivent pour le jeu $CLU-DH$

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_W, \\ \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial y} = \dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_T, \\ \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial y} = U^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_B, \\ \mathbf{V}(t=0) = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ et dans } \Omega, \end{cases} \tag{8.1}$$

Le deuxième jeu de conditions limites, noté $CLU-V$, considère une vorticité nulle à l'interface basse du canal et une condition de Neumann homogène pour la vitesse verticale. On souhaite imposer une vorticité nulle à l'interface basse du canal car on émet l'hypothèse que si le milieu extérieur est infini et au repos alors l'écoulement en amont du canal peut être vu comme irrotationnel. Cependant, on résout ici les équations de Navier-Stokes avec les variables primitives (U, V, P), on ne peut donc pas imposer directement une condition sur la vorticité $\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$. C'est pourquoi la condition sur la vorticité est alors imposée en considérant une condition de Neumann non homogène sur la vitesse horizontale $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$. Les

conditions limites du point de vue dynamique s'écrivent pour le jeu $CLU - V$

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_W, \\ \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial y} = \dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_T, \\ \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_B, \\ \dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial y} = \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial x} & \text{sur } \Gamma_B, \\ \mathbf{V}(t=0) = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ et dans } \Omega. \end{cases} \tag{8.2}$$

Remarque 8.2 *Les conditions limites sur la pression ne sont pas spécifiées ici mais le sont dans la section suivante. En effet, les conditions limites sur la pression découlent des conditions limites retenues sur l'incrément de pression ϕ dans la résolution du couplage vitesse-pression.*

8.1.3 Couplage Vitesse-Pression

Dans l'équation 7.2 la vitesse et la pression sont couplées et toutes les deux calculées au temps $^{n+1}$. Pour découpler le problème on utilise un algorithme de prédiction-projection incrémentale tel que proposé par Goda (1979) et présenté précédemment. Nous adoptons ici cet algorithme à la résolution d'un problème semi-confiné. C'est pourquoi nous réécrivons celui-ci.

Etape de prédiction pour laquelle un champ de vitesse prédit $\mathbf{V}^*$ est calculé avec P^n

$$\mathbf{V}^* - \frac{2\Delta t}{3}\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \triangle \mathbf{V}^* = -\frac{2\Delta t}{3}\nabla P^n + S_{\mathbf{V}}^{n,n-1} \quad \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \tag{8.3}$$

avec les conditions limites associées :

$$\begin{cases} \mathbf{V}^* = 0 & \text{sur } \Gamma_W \times [0; t_f], \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial y} = \dfrac{\partial U^*}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_T \times [0; t_f], \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_B \times [0; t_f], \\ U^* = 0 \ (CLU - DH) \quad \text{ou} \quad \dfrac{\partial U^*}{\partial y} = \dfrac{\partial V^*}{\partial x} \ (CLU - V) & \text{sur } \Gamma_B \times [0; t_f]. \end{cases} \tag{8.4}$$

Pour pouvoir satisfaire les conditions limites (notamment pour le cas $CLU - V$), on résout d'abord le problème de Helmholtz pour V^* puis celui pour U^*. On connaît ainsi le champ V^* et on peut utiliser celui-ci pour imposer la condition limite de vorticité nulle à l'interface basse du canal.

Etape de projection où $\mathbf{V}^*$ est exprimé, en utilisant la décomposition de Hodge-Helmholtz, comme la somme d'un champ à divergence nulle noté $\mathbf{V}^{n+1}$ et un champ irrotationnel noté $\nabla\psi$

$$\begin{cases} \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{n+1} + \nabla\psi & \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \\ \nabla \,.\, \mathbf{V}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \end{cases} \tag{8.5}$$

en prenant la divergence de l'équation 8.5 et en réécrivant $\nabla\psi = \Delta t\ \nabla\phi$ où $\phi = \frac{2}{3}(P^{n+1} - P^n)$, l'étape de projection s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta\phi = \dfrac{\nabla \,.\, \mathbf{V}^*}{\Delta t} & \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \\ \qquad + \text{ conditions limites sur } \phi & \text{sur } \Gamma \times [0; t_f]. \end{cases} \tag{8.6}$$

Pour définir les conditions limites sur ϕ, comme présenté à la section 3.4.2 on intègre l'équation (8.6) avec comme volume de contrôle le canal. La différence avec ce qui est fait à la section 3.4.2 réside dans le fait que **V*** n'est pas nulle aux interfaces haute et basse du canal. D'où :

$$\int_\Gamma \nabla\phi \cdot n = \int_\Gamma \frac{\mathbf{V}^*}{\Delta t} \cdot n = \int_{\Gamma_T} \frac{V^*}{\Delta t} - \int_{\Gamma_B} \frac{V^*}{\Delta t}. \tag{8.7}$$

On impose alors à la fin de l'étape de prédiction $\int_{\Gamma_T} V^* - \int_{\Gamma_B} V^* = 0$ de la manière suivante :

1) on calcule $\Delta G = \int_{\Gamma_T} V^* - \int_{\Gamma_B} V^*$,

2) on corrige $\int_{\Gamma_T} V^* = \int_{\Gamma_T} V^* + \Delta G$.

On peut donc par la suite considérer les conditions limites suivantes sur ϕ :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ x } [0; T]. \tag{8.8}$$

Les conditions limites imposées implicitement sur les frontières du domaine pour la pression motrice P sont donc des conditions de Neumann homogène quelque soit le type de conditions limites sur la vitesse ($CLU - DH$ ou $CLU - V$).

Etape de correction pour déterminer $\mathbf{V}$ et P^{n+1}

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^* - \Delta t \nabla\phi & \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \\ P^{n+1} = P^n - \dfrac{3}{2}\phi & \text{dans } \Omega \times [0; t_f]. \end{cases} \tag{8.9}$$

La résolution découplée du problème vitesse-pression nécessite donc la résolution de deux problèmes de Helmholtz pour l'étape de prédiction et d'une équation de Poisson pour l'étape de projection. Les problèmes de Helmholtz sont résolus à l'aide d'une méthode itérative de type GMRES. L'équation de Poisson est résolue à l'aide d'une méthode multi-grille couplée avec une méthode itérative de type SOR.

8.1.4 Implémentation numérique des conditions limites aux interfaces du canal

On détaille seulement l'implémentation des conditions limites pour les vitesses aux interfaces du canal, les conditions limites sur les parois étant classiques.

Etape de prédiction

A l'étape de prédiction, on résout les équations de quantité de mouvement pour U^* et V^*. On souhaite imposer à l'interface basse du canal Γ_B :

- $U^*|_{\Gamma_B} = 0$ et $\dfrac{\partial V^*}{\partial y}|_{\Gamma_B} = 0$ ($CLU - DH$),

- $\frac{\partial U^*}{\partial y}|_{\Gamma_B} = \frac{\partial V^*}{\partial x}|_{\Gamma_B}$, et $\frac{\partial V^*}{\partial y}|_{\Gamma_B} = 0$ ($CLU - V$).

La condition limite sur U^* est imposée implicitement en modifiant l'opérateur de Stokes $\mathbf{S}$ au point $U^*_{i,J=2}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$. Cette modification se traduit par une modification de l'opérateur laplacien. La condition limite sur $V^*_{I,j=1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ est imposée explicitement en imposant la valeur associée à $V^*_{I,j=1}$ dans l'opérateur $\mathbf{S}$.

Pour $CLU - DH$, on pose $U^*|_{\Gamma_B} = \frac{U^*_{i,J=2} + U^*_{i,J=1}}{2}$ et $\frac{\partial V^*}{\partial y}|_{\Gamma_B} = \frac{V^*_{I,j=2} - V^*_{I,j=1}}{\Delta y}$:

$$\begin{cases} \Delta U^*\big|_{i,J=2} = \dfrac{-2\,U^*_{i,J=2} + U^*_{i+1,J=2} + U^*_{i-1,J=2}}{\Delta x^2} + \dfrac{-3\,U^*_{i,J=2} + U^*_{i,J=3}}{\Delta y^2} \text{ pour } 2 \leq i \leq NI-2, \\ V^*_{I,j=1} = V^*_{i,j=2} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1. \end{cases} \tag{8.10}$$

Pour $CLU - V$, on impose la vorticité nulle aux points situés sur l'interface basse caractérisée par X sur la figure 8.1. On pose $\frac{\partial U^*}{\partial y}|_{\Gamma_B} = \frac{U^*_{i,2} - U^*_{i,1}}{\Delta y}$ et $\frac{\partial V^*}{\partial x}|_{\Gamma_B} = \frac{V^*_{i+1,1} - V^*_{i,1}}{\Delta x}$:

$$\begin{cases} \Delta U^*\big|_{i,J=2} = \dfrac{-2\,U^*_{i,J=2} + U^*_{i+1,J=2} + U^*_{i-1,J=2}}{\Delta x^2} + \dfrac{-U^*_{i,J=2} + U^*_{i,J=3}}{\Delta y^2} + \dfrac{\frac{V^*_{I+1,j=1} - V^*_{I,j=1}}{\Delta x}}{\Delta y} \\ \qquad \text{pour } 2 \leq i \leq NI-2, \\ V^*_{I,j=1} = V^*_{I,j=2} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1. \end{cases} \tag{8.11}$$

A l'interface haute du canal Γ_T on impose :

- $\frac{\partial U^*}{\partial z}|_{\Gamma_T} = 0$ et $\frac{\partial V^*}{\partial z}|_{\Gamma_T} = 0$ pour ($CLU - V$) et ($CLU - DH$).

La condition sur U^* est imposée implicitement par modification de $\mathbf{S}$ aux points $U^*_{i,J=NJ-1}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$ et celle sur V^* explicitement par imposition de la valeur associée aux points $V^*_{I,j=NJ-1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ dans l'opérateur $\mathbf{S}$. On pose

$$\frac{\partial U^*}{\partial z}|_{\Gamma_T} = \frac{U^*_{i,j=NJ} - U^*_{i,j=NJ-1}}{\Delta x} \text{ et } \frac{\partial V^*}{\partial z}|_{\Gamma_T} = \frac{V^*_{I,j=NJ-1} - V^*_{I,j=NJ-2}}{\Delta y}.$$

On a alors pour $CLU - DH$ et $CLU - V$:

$$\begin{cases} \Delta U^*\big|_{i,J=NJ-1} = \dfrac{-2\,U^*_{i,J=NJ-1} + U^*_{i+1,J=NJ-1} + U^*_{i-1,J=NJ-1}}{\Delta x^2} + \dfrac{-U^*_{i,J=NJ-1} + U^*_{i,J=NJ-2}}{\Delta y^2} \\ \qquad \text{pour } 2 \leq i \leq NI-2, \\ V^*_{I,j=NJ-1} = V^*_{I,j=NJ-2}. \end{cases} \tag{8.12}$$

Calcul du terme source S_U Pour calculer le terme source (les termes non-linéaires convectifs) de l'équation de quantité de mouvement pour U aux points $U_{i,J=2}$ et $U_{i,J=NJ-1}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$, on doit connaître les points $U_{i,1}$ et $U_{i,NJ}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$. Après chaque étape de résolution, on met donc à jour $U_{i,1}$ et $U_{i,NJ-1}$ de la manière suivante :

- $U_{i,J=1} = -U_{i,J=2}$ (cas $CLU-DH$) et $U_{i,J=1} = U_{i,J=2} - \Delta y \dfrac{V_{I+1,j=1} - V_{I,j=1}}{\Delta x}$ (cas $CLU-V$) pour $2 \leq i \leq NI-2$,
- $U_{i,J=NJ} = U_{i,J=NJ-1}$ ($CLU-DH$ et $CLU-V$) pour $2 \leq i \leq NI-2$.

Effet de l'étape de correction sur les conditions limites Pour notre problème, il faut remarquer qu'à l'étape de correction les vitesses $U_{i,2}^{n+1}$ et $U_{i,NJ-1}^{n+1}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$ sont corrigées car incluses au sein du domaine de calcul. Ces vitesses sont alors corrigées et imposées comme étant nulle. Effectivement, comme la divergence du champ du vitesse est nulle à l'intérieur du domaine de calcul et que :

$$\frac{\partial V^{n+1}}{\partial y}|_{\Gamma_B} = \frac{V_{I,j=2}^{n+1} - V_{I,j=1}^{n+1}}{\Delta y} = 0 \text{ et } \frac{\partial V^{n+1}}{\partial y}|_{\Gamma_T} = \frac{V_{I,j=NJ-1}^{n+1} - V_{I,j=NJ-2}^{n+1}}{\Delta y} = 0,$$

alors par continuité avec la valeur aux parois et par construction de l'opérateur divergence, on a

$$U_{i,2}^{n+1} = U_{i,NJ-1}^{n+1} = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq NI-2.$$

8.2 Résultats de l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes

On présente ici les résultats de l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes discret pour les cas $CLU-DH$ et $CLU-V$. Par souci de clarté, on présente les modes pour le cas stationnaire.

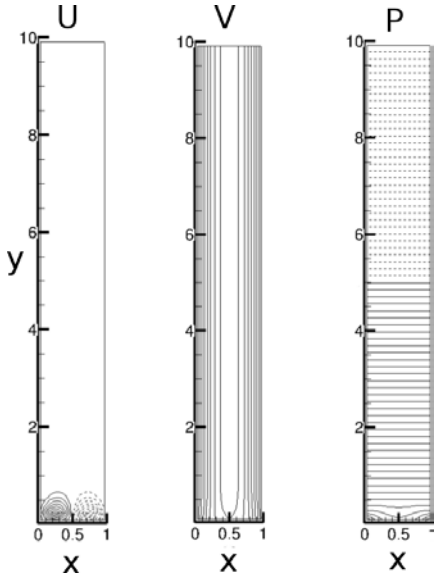


Figure 8.2 – *Mode 2 du noyau de l'opérateur de Stokes : cas $CLU-V$*

Pour les deux cas d'étude, la dimension du noyau de l'opérateur de Stokes discret est égale à 2. Le mode 1 est évidemment le mode (pression constante - vitesse nulle) et le mode 2 est un mode dépendant des conditions limites retenues. Pour $CLU-DH$, on obtient un

mode de Poiseuille avec un gradient de pression constant, une vitesse verticale parabolique et une vitesse horizontale nulle. Pour $CLU - V$, on obtient un mode un peu plus complexe où le gradient de pression n'est pas constant dans la partie basse du canal et la vitesse horizontale non nulle. Ce mode correspond à un mode de Poiseuille où il existe un établissement des couche limites au niveau de l'interface basse du canal. Ce mode est représenté par la figure 8.2.

Nous montrons donc qu'avec le maillage et la discrétisation spatiale considérés et lorsque l'on considère des conditions limites de type Neumann sur la pression ainsi que sur la vitesse verticale, le problème est mal posé car la dimension du noyau de l'opérateur de Stokes est de dimension égale à 2. Le mode 2 est alors dépendant du type de conditions limites retenues pour la vitesse horizontale. On propose par la suite une méthode de résolution permettant d'avoir un problème bien posé et une solution unique à celui-ci.

8.3 Principe de superposition

La SVD de l'opérateur de Stokes instationnaire montre l'existence de deux modes dans le noyau de cet opérateur pour les deux jeux de conditions limites ($CLU - DH$ et $CLU - V$). La solution au problème posé s'obtient alors en superposant une solution particulière à une combinaison linéaire des modes du noyau. Cette solution s'écrit :

$$(\mathbf{V}, P) = (\mathbf{V}, P)_{part} + \xi_1 (0, P)_1 + \xi_2 (\mathbf{V}, P)_2, \tag{8.13}$$

où $(0, P)_1$ est le mode (pression constante - vitesse nulle) et $(\mathbf{V}, P)_2$ le mode associé aux conditions limites, ξ_1 et ξ_2 sont pour l'instant des coefficients indéterminés. Ainsi la solution au problème admet une infinité de solution tant que les paramètres ξ_1 et ξ_2 ne sont pas fixés. Afin de déterminer ces paramètres, il est nécessaire d'imposer des contraintes supplémentaires à l'écoulement considéré. On ne peut ici fixer que deux scalaires et donc seules des contraintes globales sur l'écoulement peuvent être fixées. Les contraintes retenues dépendent des choix de modélisation effectués.

On choisit ici de modéliser la pression motrice moyenne à l'interface basse du canal en appliquant la relation de Bernoulli de manière globale. On prend alors en compte une chute de pression motrice moyenne à l'interface basse égale à

$$P_{bot} = \int_{-0.5}^{0.5} P(x, 0)\, dx = -\frac{G_{in}(y = 0)^2}{2} + P_{ext}. \tag{8.14}$$

A l'interface haute du canal, on considère que le fluide sort sous la forme d'un jet en atmosphère libre. Ainsi la pression motrice moyenne à l'interface haute est égale la pression motrice du milieu extérieur

$$P_{top} = \int_{-0.5}^{0.5} P(x, Rf_c)\, dx = P_{ext}. \tag{8.15}$$

L'écart de pression motrice $\Delta P = P_{top} - P_{bot}$ entre les interfaces est alors égal à

$$\Delta P = \frac{G_{in}(y = 0)^2}{2}. \tag{8.16}$$

Par simplicité et pour être en accord avec les hypothèses effectuées dans la partie précédente (à savoir que la pression au loin du canal est nulle), on prend par la suite $P_{ext} = 0$. Les contraintes sur l'écoulement s'expriment alors comme

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} P(x, Rf_c)\,dx - \int_{-0.5}^{0.5} P(x,0)\,dx = \gamma\left(\int_{-0.5}^{0.5} V(x,0)\,dx\right)^2, \\ \\ \displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} P(x, Rf_c)\,dx = 0, \end{cases} \tag{8.17}$$

où $\gamma = 1/2$. La solution au problème s'écrivant comme l'équation (8.13), on peut récrire l'équation (8.17) comme

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} P_{part}(x, Rf_c)\,dx - \int_{-0.5}^{0.5} P_{part}(x,0)\,dx + \xi_2\left(\int_{-0.5}^{0.5} P_2(x, Rf_c)\,dx - \int_{-0.5}^{0.5} P_2(x,0)\,dx\right) = \\ \qquad \gamma\left(\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} V_{part}(x,0)\,dx + \xi_2 \int_{-0.5}^{0.5} V_2(x,0)\,dx\right)^2, \\ \\ \displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} P_{part}(x, Rf_c)\,dx + \xi_1 + \xi_2 \int_{-0.5}^{0.5} P_2(x, Rf_c)\,dx = 0. \end{cases} \tag{8.18}$$

En développant les termes au carré et en arrangeant l'équation (8.19), on obtient une équation du second degré pour ξ_2 et une équation linéaire pour ξ_1 :

$$\begin{cases} \xi_2^2 \left[\gamma \displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} V_2(x,0)\,dx\right]^2 + \\ \xi_2 \left[2\gamma \displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} V_{part}(x,0)\,dx \int_{-0.5}^{0.5} V_2(x,0)\,dx - \left(\int_{-0.5}^{0.5} P_2(x, Rf_c)\,dx - \int_{-0.5}^{0.5} P_2(x,0)\,dx\right)\right] \\ \quad + \left[\gamma\left(\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} V_{part}(x,0)\,dx\right)^2 - \left(\int_{-0.5}^{0.5} P_{part}(x, Rf_c)\,dx - \int_{-0.5}^{0.5} P_{part}(x,0)\,dx\right)\right], \\ \\ \xi_1 = -\left[\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} P_{part}(x, Rf_c)\,dx + \xi_2 \int_{-0.5}^{0.5} P_2(x, Rf_c)\,dx\right]. \end{cases} \tag{8.19}$$

On détermine ainsi d'abord ξ_2 puis ξ_1. Une fois ces paramètres connus, la solution au problème posé est unique et satisfait les contraintes (8.17).

Remarque 8.3 *On ne considère que des solutions réelles pour ξ_2. Si la solution est complexe alors $\xi_2 = 0$. Dans le cas où deux solutions réelles existent pour ξ_2, on remarque que l'une des solutions est très grande devant l'autre. On prendra ainsi la plus petite des solutions en valeur absolue. En effet, choisir la plus grande des valeurs de ξ_2 revient à ce que la solution au problème soit uniquement influencée par le mode 2 du noyau de l'opérateur de Stokes.*

Algorithme de résolution numérique Pour des raisons de stabilité numérique, ξ_1 et ξ_2 sont calculés à chaque pas de temps. Le mode 2 que l'on considère est donc le mode lié à l'opérateur de Stokes instationnaire. La résolution du problème est ainsi réalisée en trois étapes :

1- *Calcul de la solution particulière* :
- i) l'étape de prédiction,
- ii) l'étape de projection,
- iii) l'étape de correction,

2- *Calcul des paramètres ξ_1 et ξ_2,*

3- *Superposition de la solution particulière avec une combinaison linéaire des modes du noyau de l'opérateur de Stokes.*

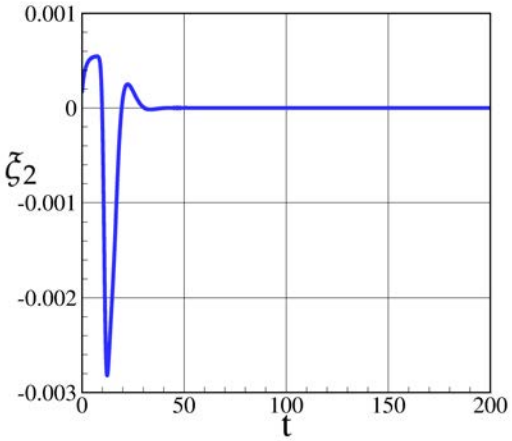


FIGURE 8.3 – *Evolution de ξ_2 en fonction du temps ($Pr = 7.85$ et $Ra = 5.10^3$)*

Pour illustrer cette méthode, la figure 8.3 montre l'évolution temporelle du paramètre ξ_2 pour une simulation donnée ($Pr = 7.85$ et $Ra = 5.10^3$). Cette simulation atteint un état stationnaire à $t = 50$. Dans les premiers instants de la simulation, ξ_2 est non nulle et le mode 2 permet de satisfaire les contraintes supplémentaires que l'on impose sur l'écart de pression tout en apportant sa contribution pour le débit de fluide traversant le canal. On observe qu'une fois l'état stationnaire atteint ($t > 50$) ξ_2 devient nul et le mode 2 n'apporte plus sa contribution.

8.4 Comparaison des résultats obtenus

Les résultats sont présentés pour deux nombres de Rayleigh : $Ra = 5.10^3$ (régime pleinement développé) et $Ra = 5.10^5$ (régime de type couche limite avec zone de recirculation). On considère un nombre de Prandtl égal à $Pr = 7.85$ (eau). La pression motrice du milieu extérieur est égale à $P_{ext} = 0$. Le maillage considéré ici est de 64×512. Pour tous les nombres de Rayleigh étudiés, l'écoulement tend vers un écoulement stationnaire. Les résultats présentés font donc référence à un état stationnaire. Nous comparons d'abord les cas $CLU - DH$ et $CLU - V$ entre eux, puis une comparaison avec les solutions numériques de référence de la partie II est effectuée.

8.4.1 Comparaison des conditions limites $CLU - DH$ et $CLU - V$

La figure 8.4 montre les champs de vitesse verticale, de vitesse horizontale et de pression motrice au sein du canal pour les jeux de conditions limites $CLU - DH$ et $CLU - V$. On observe que l'imposition de conditions de Neumann sur les deux composantes de la vitesse à l'interface basse du canal (cas $CLU - DH$) mène à un écoulement déjà établit. La vitesse horizontale est ainsi nulle, la vitesse verticale est parabolique et le gradient de pression est constant dans la partie basse du canal. Un écoulement de Poiseuille est ainsi observé et il n'y a pas d'aspiration du fluide dans toutes les directions de l'espace à l'interface basse. Au contraire l'imposition d'une vorticité nulle au niveau de l'interface basse (cas $CLU - V$) permet d'obtenir un établissement de l'écoulement (les couches limites se développent). La vitesse horizontale est non nulle et le gradient de pression motrice non constant dans la partie basse du canal.

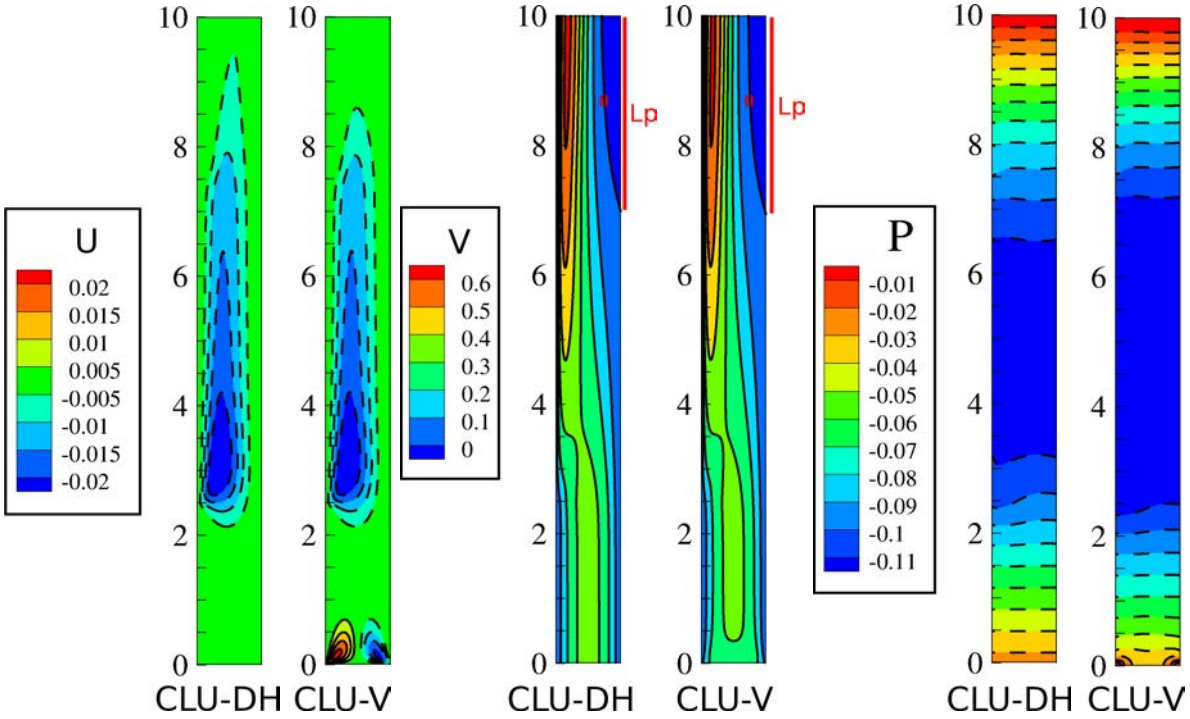
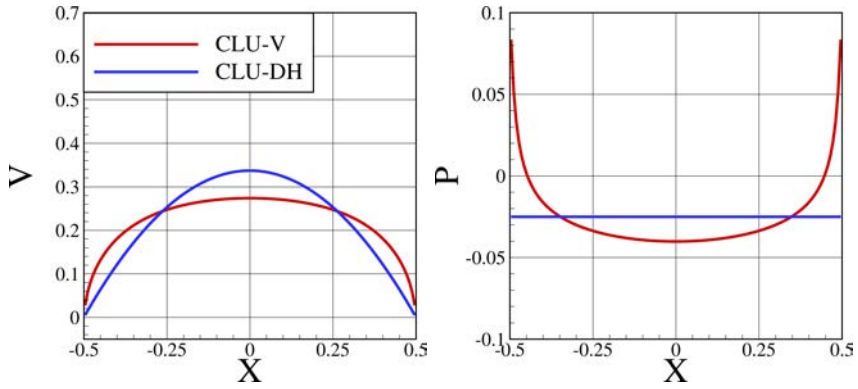
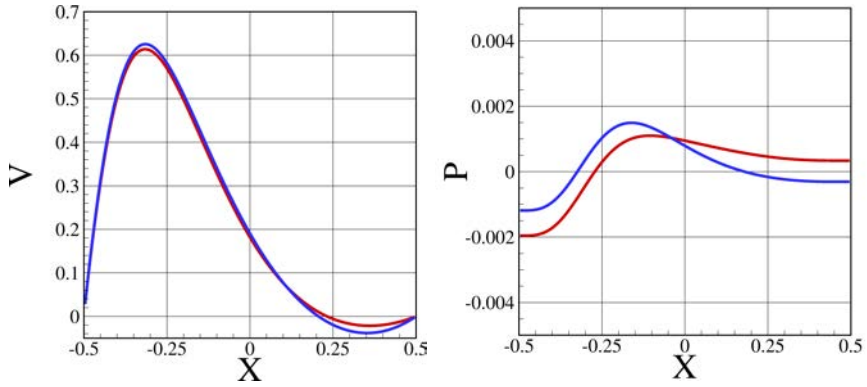


FIGURE 8.4 – *Comparaison des champs U, V, et P au sein du canal pour* $Ra = 5.10^5$



(a) *interface basse*



(b) *interface haute*

FIGURE 8.5 – *Comparaison des profils de V et P aux interfaces basse et haute du canal pour* $Ra = 5.10^5$

La figure 8.5 compare les profils de vitesse verticale et de pression motrice aux interfaces du canal. Pour $CLU - DH$, la vitesse verticale est parabolique et la pression motrice est uniforme à l'interface basse. Pour le cas où l'on impose une vorticité nulle à l'interface basse (cas $CLU - V$) la vitesse verticale tend vers un profil plat et la pression motrice est non-uniforme.

A l'interface haute du canal, les profils de vitesse verticale et de pression motrice sont comparables pour les deux types de conditions limites.

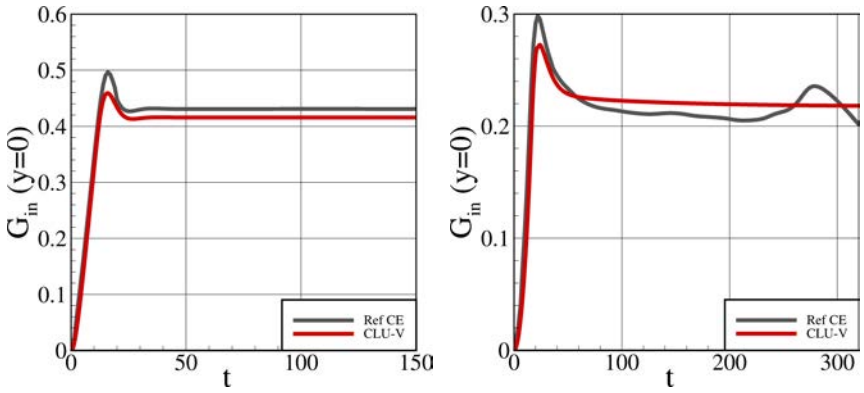
Bilan Les solutions numériques de référence de la partie II montre que l'écoulement s'établit dans la partie basse du canal. Seul le cas $CLU - V$ semble alors être capable de représenter l'écoulement dans un canal vertical plongé dans un milieu infini : écoulement non établit au niveau de l'interface basse du canal et pression motrice non-uniforme. Au contraire le cas $CLU - DH$ montre un écoulement déjà établit dans la partie basse du canal. L'imposition d'une vitesse horizontale nulle n'apparaît donc pas comme une bonne hypothèse de modélisation.

8.4.2 Comparaison avec les solutions de référence

On compare maintenant les résultats obtenus pour le cas $CLU - V$ avec les solutions de référence établies dans la partie II.

Remarque 8.4 *La comparaison des résultats obtenus pour le cas $CLU - V$ et les solutions de référence nécessite de définir une référence commune pour la pression motrice extérieure P_{ext}. Pour les solutions de référence, nous avons fixé la pression motrice comme étant nulle au coin inférieure gauche du réservoir. On a ainsi considéré que la pression motrice dans le milieu extérieur au loin de canal est nulle. En prenant la pression motrice du milieu extérieur $P_{ext} = 0$ pour le cas $CLU - V$, on impose aussi le fait que la pression motrice au loin du canal soit nulle. Les champs de pression obtenus pour le cas $CLU - V$ et les solutions de référence sont donc bien comparables.*

Evolution temporelle La figure 8.6 compare l'évolution temporelle de $G_{in}(y = 0)$ pour $CLU - V$ et $CE640$. Nous observons que le temps de développement de l'écoulement au sein du canal est similaire ($t_{dev} \approx 20$) pour les deux approches quelque soit Ra. Pour $Ra = 5.10^3$ un écoulement stationnaire au sein du canal est atteint au même instant dans les deux cas. Pour $Ra = 5.10^5$, on observe une lente diminution de $G_{in}(y = 0)$ avant d'atteindre un état stationnaire pour le cas $CLU - V$.



(a) $Ra = 5.10^3$ (b) $Ra = 5.10^5$

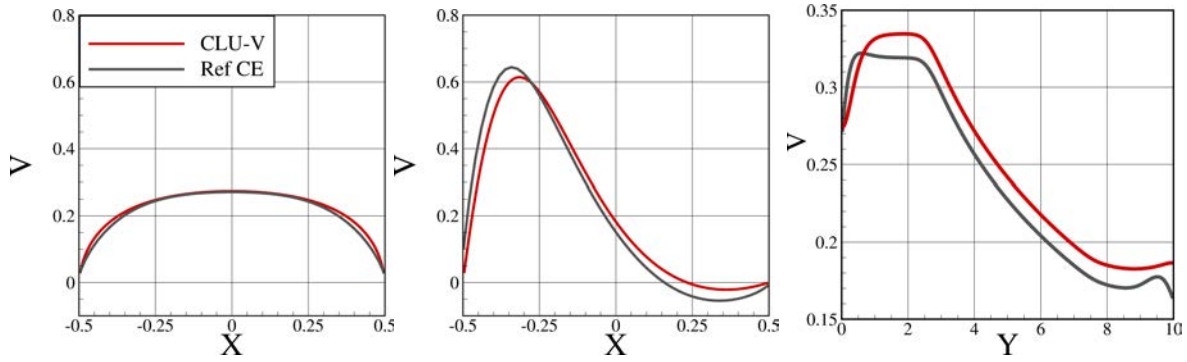
FIGURE 8.6 – *Comparaison de l'évolution temporelle de $G_{in}(y = 0)$ entre $CLU - V$ et $CE640$*

Débits et vitesse verticale Le tableau 8.1 montre qu'il y a un plutôt bon accord des résultats (entre $CE640$ et $CLU - V$) en ce qui concerne le débit de fluide entrant par l'interface basse du canal (écart de l'ordre de 5%) pour les deux nombres de Rayleigh considérés. Ainsi la vitesse verticale à l'interface basse du canal (voir figure 8.7) est correctement prédite par le cas $CLU - V$. On observe cependant, que lorsqu'il existe une zone de recirculation, le débit de fluide entrant par l'interface haute du canal est largement sous-estimé par le cas $CLU - V$.

Cela est bien mis en évidence sur la figure 8.7 où la largeur de la zone de recirculation est beaucoup plus petite pour $CLU - V$ que pour la solution de référence.

	$CE640$		$CLU - V$	
Ra	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$
5.10^3	$4.334\ 10^{-1}$	0	$4.142\ 10^{-1}$(-4.43 %)	0
5.10^5	$2.128\ 10^{-1}$	$1.316\ 10^{-2}$	$2.223\ 10^{-1}$ (+4.46 %)	$4.459\ 10^{-3}$(-66.1 %)

TABLEAU 8.1 – *Comparaison des débits entrants dans le canal entre le cas $CLU - V$ et $CE640$*



(a) *interface basse* (b) *interface haute* (c) *ligne médiane $x = 0$*

FIGURE 8.7 – *Comparaison de V entre $CLU - V$ et $CE640$ $Ra = 5.10^5$*

Nombre de Nusselt moyen et température débitante Les grandeurs thermiques présentées dans le tableau 8.2 montrent que la température débitante à l'interface haute du canal est mieux prédite à haut nombre de Rayleigh. Cela s'explique par le fait que la diffusion thermique due au fluide extérieur n'est pas négligeable à bas nombre de Rayleigh pour les solutions de référence (voir section 5.2.2). Cette diffusion n'est pas prise en compte pour le cas $CLU - V$. Le nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée $\overline{Nu_1}$ est quand à lui relativement bien prédit (écart inférieur à 8%).

	$CE640$		$CLU - V$	
Ra	$T_{bulk}(y=Rf_c)$	$\overline{Nu_1}$	$T_{bulk}(y=Rf_c)$	$\overline{Nu_1}$
5.10^3	$1.599\ 10^{-1}$	3.424	$1.707\ 10^{-1}$ (+6.75%)	3.294(-3.80 %)
5.10^5	$3.251\ 10^{-2}$	8.481	$3.167\ 10^{-2}$ (-2.58 %)	7.861(-7.31%)

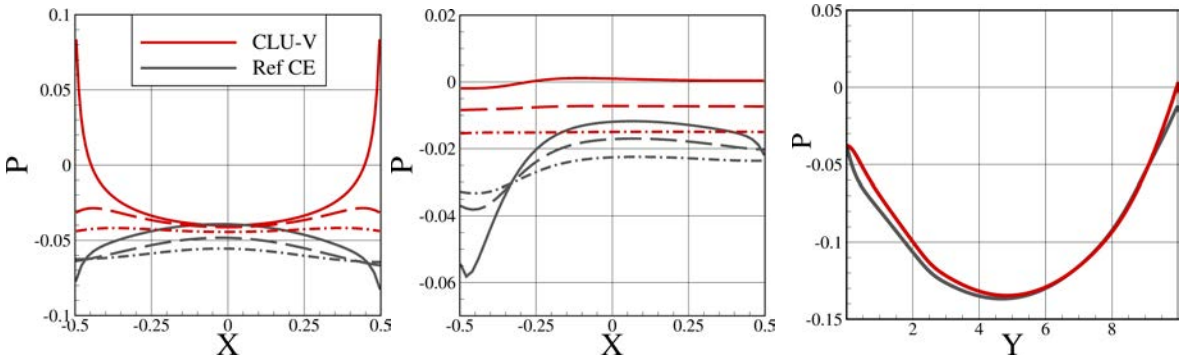
TABLEAU 8.2 – *Comparaison du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ et de la température débitante $T_{bulk}(y = Rf_c)$ à l'interface haute du canal entre le cas $CLU - V$ et $CE640$*

Pression motrice Le tableau 8.3 montre qu'à bas nombre de Rayleigh le cas $CLU - V$ ne permet pas d'estimer correctement l'écart de pression motrice ΔP entre les interfaces du canal. De plus, l'écart de pression de motrice entre les interfaces est positif pour le cas $CLU - V$ alors qu'il est négatif pour $CE640$ à $Ra = 5.10^3$. Ainsi l'hypothèse que $\Delta P = \frac{G_{in}(y=0)}{2}$ ne semble pas être une modélisation valable, notamment à bas Ra. Cela peut s'expliquer par le fait que cette modélisation ne prend pas en compte les effets visqueux.

	$CE640$	$CLU - V$
Ra	ΔP	ΔP
5.10^3	$-1.218\ 10^{-1}$	$8.578\ 10^{-2}$ (+800 %)
5.10^5	$+2.509\ 10^{-2}$	$2.494\ 10^{-2}$ (-0.60%)

TABLEAU 8.3 – *Comparaison de l'écart de pression motrice moyenne ΔP entre interfaces du canal entre le cas $CLU - V$ et $CE640$*

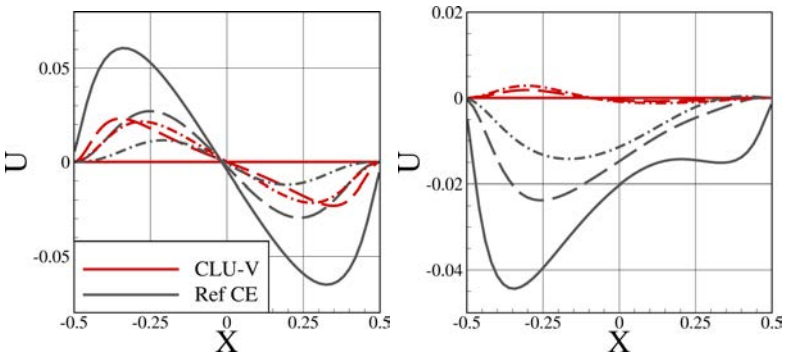
La figure 8.8 permet de mieux comprendre les différences sur la pression motrice aux interfaces. Le cas $CLU - V$ présente un profil de pression motrice convexe à l'interface basse (pression maximale au niveau des parois et minimale à l'axe) alors qu'il est concave (pression minimale aux parois et maximale à l'axe) pour les solutions de référence. Cette observation est valide quelque soit Ra. A l'interface haute du canal le cas $CLU - V$ permet d'avoir une pression motrice plus faible du côté de la paroi chauffée par rapport à la pression motrice au centre du canal. Ce type de profil est aussi observé pour la solution de référence, cependant l'écart entre la pression motrice proche de la paroi chauffée et à l'axe est beaucoup important. On remarque cependant que pour $Ra = 5.10^5$ la pression motrice autour de l'axe du canal ($x = 0$) est plutôt bien prédit.



(a) *interface basse* (b) *interface haute* (c) *ligne médiane $x = 0$*

FIGURE 8.8 – *Comparaison de P à l'interface basse (gauche), à l'interface haute (milieu) et le long de la ligne médiane $x = 0$ (droite) pour $Ra = 5.10^5$. Interface basse : trait plein ($y = 0$), trait pointillé ($y = 0.12$) et trait mixte ($y = 0.24$). Interface haute : trait plein ($y = Rf_c = 10$), trait pointillé ($y = 9.88$) et trait mixte ($y = 9.76$)*

Vitesse horizontale Pour la vitesse horizontale proche des interfaces (voir figure 8.9), on remarque que le cas $CLU - V$ ne prédit pas une aspiration dans toutes les directions de l'espace à l'interface basse. Comme déjà évoqué, la méthode de résolution impose $U = 0$ au niveau de l'interface basse pour $CLU - V$.



(a) *interface basse* (b) *interface haute*

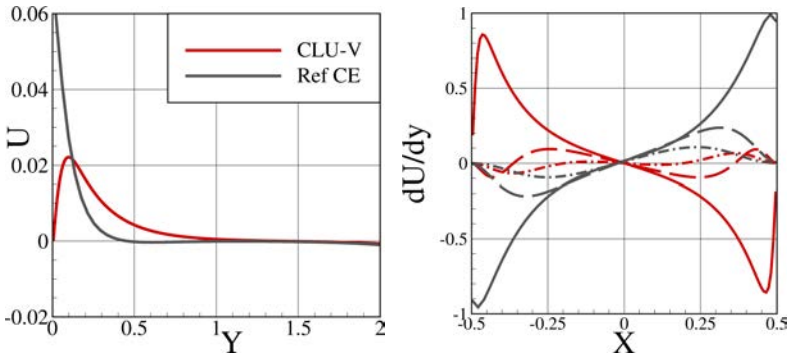
FIGURE 8.9 – *Comparaison de U à l'interface basse (gauche) et à l'interface haute (droite) pour $Ra = 5.10^5$. Interface basse : trait plein ($y = 0$), trait pointillé ($y = 0.12$) et trait mixte ($y = 0.24$). Interface haute : trait plein ($y = Rf_c = 10$), trait pointillé ($y = 9.88$) et trait mixte ($y = 9.76$)*

Les deux approches ne peuvent donc pas être similaire :

- pour $CE640$ il existe une vitesse horizontale U non nulle à l'interface basse du fait du développement de l'écoulement en amont du canal,
- pour $CLU - V$ la vitesse horizontale U est nulle à l'interface.

Même si dans les deux cas un écoulement convergent est observé au sein du canal près de l'interface basse, le cas $CE640$ présente une diminution de la vitesse horizontale dès l'interface

basse alors que pour le cas $CLU-V$ il existe une augmentation de la vitesse horizontale avant qu'elle ne diminue. Cela s'observe clairement sur la figure 8.10. Ainsi, au niveau de l'interface basse du canal, le signe de $\frac{\partial U}{\partial y}$ pour $CLU-V$ est opposé à celui obtenu pour le cas $CE640$.



(a) $x = -0.375$ (b) *interface basse*

FIGURE 8.10 – *Comparaison de U le long de la ligne* $x = -0.375$ *et de* $\frac{\partial U}{\partial y}$ *à différentes hauteurs près de l'interface basse pour* $Ra = 5.10^5$. *Trait plein* ($y = 0$), *trait pointillé* ($y = 0.12$) *et trait mixte* ($y = 0.24$)

8.4.3 Discussion

L'imposition d'une vorticité nulle ($\omega(x,0) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial U}{\partial y}(x,0) = 0$) à l'interface basse du canal pour le cas $CLU-V$ conduit à imposer l'accélération de la vitesse horizontale U. En effet le profil concave de V sur l'interface impose $\frac{\partial |U|}{\partial y} > 0$, là où les solutions numériques de référence (cas $CE640$) montrent une décélération $\frac{\partial |U|}{\partial y} < 0$.

Afin d'obtenir ce comportement à l'interface basse du canal, il faudrait plutôt imposer une condition du type $\frac{\partial V}{\partial x}(x,0) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,0)$. Cette condition peut se traduire d'un point de vue physique en imposant la composante tangentielle τ du vecteur des contraintes à l'interface basse comme nulle :

$$\tau(x,0) = \frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,0) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,0)\right) = 0.$$

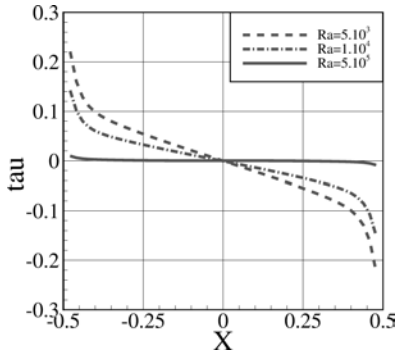


FIGURE 8.11 – *Profil de la composante tangentielle* τ *du vecteur des contraintes à l'interface basse pour* $CE640$

Pour les solutions numériques de référence (cas $CE640$), la contrainte de cisaillement τ n'est pas nulle à l'interface basse, en particulier le long des parois verticales, mais tend vers zéro lorsque le nombre de Rayleigh augmente (voir figure 8.11).

Cependant, il faut noter que la condition limite $\tau = 0$ combinée avec la condition de divergence nulle conduit à un écoulement entrant divergent ($U < 0$ pour $x < 0$ et $U > 0$

pour $x > 0$), ce qui n'est pas un écoulement physique. On voit donc ici la difficulté d'implémentation des conditions limites aux interfaces suivant l'algorithme de résolution utilisé. Par exemple dans ce chapitre, l'algorithme retenu impose nécessairement une vitesse horizontale nulle aux interfaces du canal.

8.5 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de résolution où le canal est discrétisé sur un maillage décalé avec des conditions de type Neumann sur la vitesse verticale et la pression motrice aux interfaces haute et basse du canal, une condition de Neumann sur la vitesse horizontale à l'interface haute et soit une condition de Dirichlet sur la vitesse horizontale ou la vorticité à l'interface basse du canal. Nous avons montré que dans ce cas, le noyau de l'opérateur de Stokes comporte deux modes distincts : un mode (pression constante - vitesse nulle) et un mode dépendant des conditions limites à l'interface basse. La solution au problème est alors obtenue par superposition d'une solution particulière au problème posé et d'une combinaison linéaire des modes du noyau de l'opérateur de Stokes. Pour que cette solution soit unique il est alors nécessaire d'imposer deux contraintes supplémentaires sur l'écoulement. Nous avons choisi d'imposer des contraintes sur la pression motrice moyenne aux interfaces.

Nous avons ensuite montré qu'imposer des conditions de Neumann homogène sur les deux composantes de la vitesse à l'interface basse (cas $CLU - DH$) implique un écoulement déjà établit dans la partie basse du canal. Au contraire, l'imposition d'une vorticité nulle à l'interface basse (cas $CLU - V$) permet d'avoir un écoulement non établit. Nous avons ensuite comparé les résultats obtenus pour le cas $CLU - V$ avec les solutions de la partie II. Un bon accord est observé sur la vitesse verticale ainsi que sur le débit entrant par l'interface basse du canal. Le comportement thermique (nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ et la température débitante) est aussi bien prédit. Malgré ces bons accords, des différences sont observées sur la pression motrice et la vitesse verticale aux interfaces. Le profil de pression motrice à l'interface basse pour le cas $CLU - V$ est opposé à celui observé pour la solution de référence. De plus, une accélération de la vitesse horizontale dans la partie basse du canal est mis en évidence pour $CLU - V$. Ce comportement est opposé à celui observé pour les solutions de la partie II. La principale limite de la méthode présentée dans ce chapitre réside dans le fait que la vitesse horizontale aux interfaces est nulle par construction. Ce chapitre met ainsi en évidence la difficulté liée à l'implémentation des conditions limites dans le cadre d'écoulement ouvert et la limitation liée à une discrétisation classique sur un maillage décalé. Il semble ainsi nécessaire de proposer une autre approche.

Bibliographie

K. Goda. A Multistep Technique With Implicit Difference Schemes for Calculating Two - or Three - Dimensional Cavity Flows. *Journal of Computational Physics*, 30 :76–95, 1979.

P. Le Quéré. On the Computation of Some External or Partially Enclosed Natural Convection Flows. Dans *7th International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, Istanbul, Art. 401*, 2011.

9

Conditions limites de type Bernoulli

Sommaire

9.1 Méthodes numériques . . . 125
9.1.1 Frontières du domaine de calcul . . . 125
9.1.2 Conditions limites et modélisation des interfaces . . . 126
9.1.3 Couplage vitesse-pression . . . 127
9.1.4 Implémentation numérique des conditions limites aux interfaces du canal . . . 129
9.1.5 Discussion et analyse des conditions limites . . . 130
9.1.6 Résultat de l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes . . . 130
9.2 Résultats . . . 131
9.2.1 Benchmark numérique . . . 131
9.2.2 Evolution de l'influence des conditions limites en fonction du nombre de Rayleigh 136
9.2.3 Comparaison des résultats avec les solutions numériques de référence d'un canal dans un environnement infini . . . 139
9.3 Conclusion partielle . . . 143
Bibliographie . . . 144

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la modélisation des interfaces du canal en considérant des conditions limites de type Bernoulli. La méthode de résolution du couplage vitesse-pression et l'implémentation numérique des conditions limites sont présentées. Nous montrons que la méthode de résolution réduit le noyau de l'opérateur de Stokes au singleton $\{0\}$. Les résultats obtenus sont d'abord comparés avec ceux issus d'un benchmark numérique de la communauté française de thermique puis l'influence des conditions limites en fonction du nombre de Rayleigh est caractérisée. Les résultats sont finalement comparés avec ceux obtenus dans la partie II. Nous montrons qu'il existe de bon accords entre les résultats mais que les conditions limites retenues aux interfaces ne permettent pas de correctement représenter l'écoulement à l'interface basse du canal.

9.1 Méthodes numériques

9.1.1 Frontières du domaine de calcul

Les interfaces haute Γ_T et basse Γ_B sont maintenant situées sur les noeuds scalaires de la pression motrice (en $J = 1$ et en $J = NJ$) afin d'imposer des conditions de Dirichlet sur P. Les frontières du domaine de calcul sont toujours confondues avec les limites géométriques du canal. Le maillage utilisé est alors celui présenté par la figure 9.1.

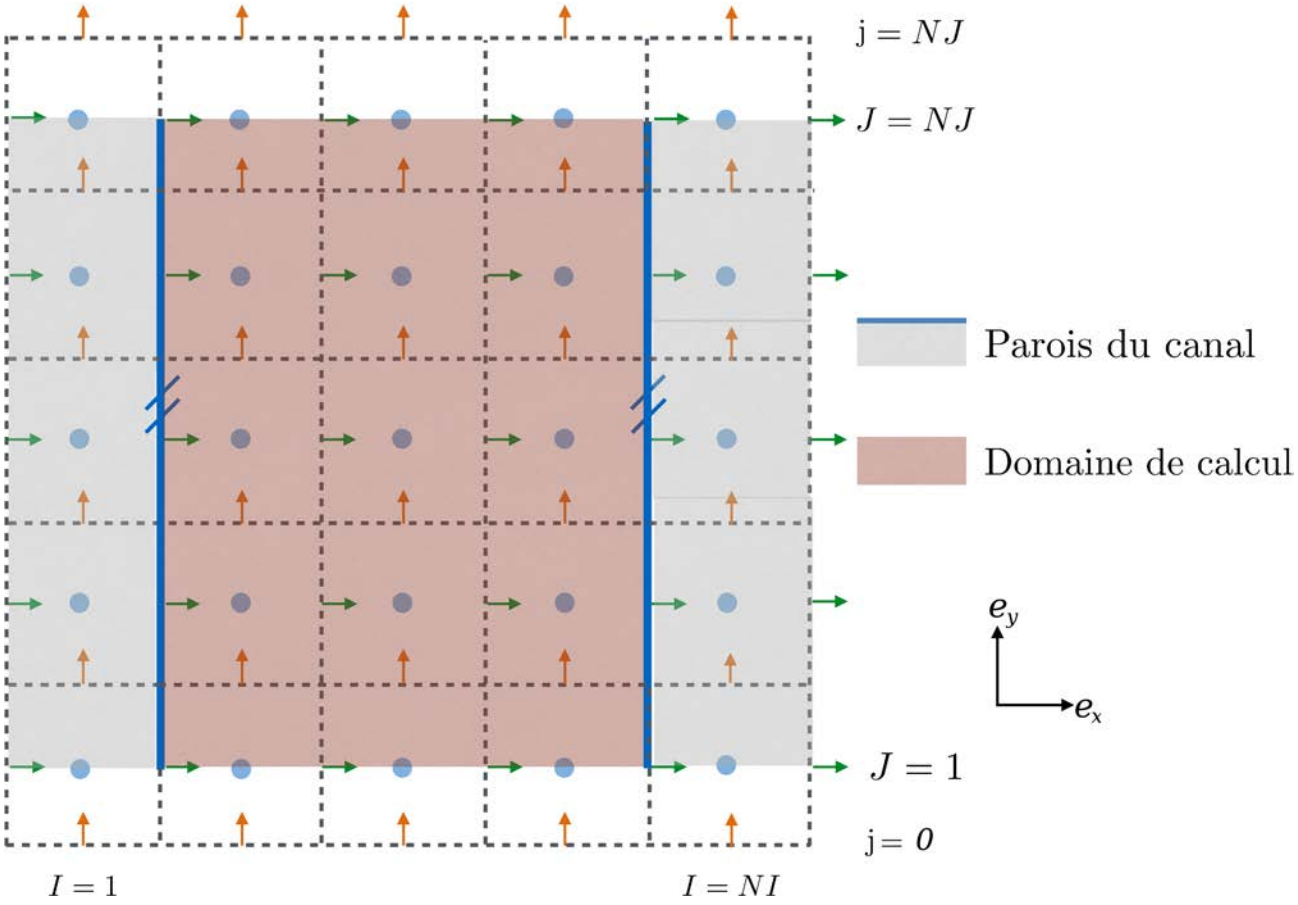


Figure 9.1 – *Frontière du domaine de calcul : interface haute et basse sur les noeuds scalaires de la pression motrice*

Nombre d'inconnues du problème vitesse-pression Les inconnues du problème sont situées au sein du domaine de calcul. Nous avons maintenant :

- inconnues pour P : $(NI-2) \times (NJ)$,
- inconnues pour U : $(NI-1) \times (NJ)$,
- inconnues pour V : $(NI-2) \times (NJ-1)$.

Nous avons au total $(NI-2) \times (NJ) + (NI-1) \times (NJ) + (NI-2) \times (NJ-1)$ inconnues (U, V, P).

Nombre d'équations du problème vitesse-pression Ces équations proviennent des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement pour U et V et des conditions limites connues de manière explicite sur les frontières du domaine de calcul :

- l'équation de conservation de la masse est résolue sur les noeuds scalaires de la pression $P_{I,J}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $2 \leq J \leq NJ-1$: $(NI-2) \times (NJ-2)$ équations,

- l'équation de quantité de mouvement pour U est résolue au point $U_{i,J}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$ et $2 \leq J \leq NJ-1 : (NI-3) \times (NJ-2)$ équations,
— l'équation de quantité de mouvement pour V est résolue au point $V_{I,j}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $1 \leq j \leq NJ-1 : (NI-2) \times (NJ-1)$ équations,
- les conditions limites sur les parois verticales du canal Γ_W en $U_{i=1,J}$ et $U_{i=NI-1,J}$ pour $1 \leq J \leq NJ : 2 \times (NJ)$ équations,
- les conditions limites sur les interfaces du canal Γ_T et Γ_B en $U_{i,J=1}$ et $U_{i,J=NJ}$ pour $2 \leq i \leq NI-2 : 2 \times (NI-3)$ équations,
- les conditions limites pour P sur les interfaces du canal Γ_T et Γ_B en $P_{I,J=1}$ et $P_{I,J=NJ}$ pour $2 \leq I \leq NI-1 : 2 \times (NI-2)$ équations.

Nous résolvons $(NI-2) \times (NJ) + (NI-1) \times (NJ) + (NI-2) \times (NJ-1)$ équations, soit autant que le nombres d'inconnues.

Remarque 9.1 *Sur les interfaces Γ_T et Γ_B, les conditions limites sur U sont explicites (on impose directement la valeur de U dans l'opérateur de Stokes **S**) alors que celles sur V sont imposées de manière implicite (l'opérateur **S** est modifié). De plus, sur les interfaces Γ_T et Γ_B les conditions limites sur la pression sont traitées de manière explicite. Sur les parois du canal Γ_W, les conditions limites sur U sont explicites et celles sur V et P sont implicites.*

9.1.2 Conditions limites et modélisation des interfaces

On s'intéresse ici aux conditions limites de type Bernoulli initialement proposées par Dalbert et al. (1981), Desrayaud et al. (2007) et reprises dans un benchmark numérique de la communauté française auquel nous avons participé (Desrayaud et al. 2013).

Modélisation de l'interface basse Γ_B La vitesse horizontale à l'interface basse est nulle et une condition de type Neumann homogène pour la vitesse verticale est imposée. La pression motrice est déterminée en appliquant la relation de Bernoulli entre un point à l'interface basse et un point au repos dans le milieu extérieur à température constante $T_{ext} = 0$ et pression motrice constante $P_{ext} = 0$. Deux hypothèses sont ainsi retenues pour la pression motrice :

- soit la pression motrice est constante à l'interface basse et varie en fonction du débit $G_{in}(y=0)$,
- soit la pression motrice est variable et dépend de la vitesse verticale locale $V(x,0)$.

Les conditions limites à l'interface basse s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial V(x,0)}{\partial y} & = & U(x,0) = 0, \\ \\ P(x,0) & = & -\dfrac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext} \quad \text{où} \quad P(x,0) = -\dfrac{V(x,0)^2}{2} + P_{ext}. \end{array} \right. \tag{9.1}$$

Modélisation de l'interface haute Γ_T On impose une condition de Neumann homogène sur la vitesse verticale et une condition de Dirichlet homogène sur la vitesse horizontale. On considère que le fluide sortant du canal par l'interface haute sort sous la forme d'un jet en atmosphère libre. Le fluide sort ainsi à pression constante et égale à la pression du milieu extérieur P_{ext}. Lorsque le fluide entre par l'interface haute, deux hypothèses sont étudiées :

- soit le fluide entre à pression constante égale à la pression extérieure P_{ext},
- soit on applique la relation de Bernoulli de manière locale et la pression motrice dépend alors de $V(x, Rf_c)$.

Les conditions limites à l'interface haute s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(x,Rf_c)}{\partial y} = U(x,Rf_c) = 0, \\ P(x,Rf_c) = P_{ext} \text{ si le fluide sort,} \\ P(x,Rf_c) = P_{ext} \text{ ou } P(x,Rf_c) = -\dfrac{V(x,Rf_c)^2}{2} + P_{ext} \quad \text{si le fluide entre.} \end{cases} \tag{9.2}$$

Définition des jeux de conditions limites Nous reprenons la terminologie des conditions limites proposées par Desrayaud et al. (2013). Quatre jeux de conditions limites aux interfaces du canal sont proposés. La différence entre ces jeux repose sur les conditions limites retenues pour la pression motrice. Aux interfaces haute et basse du canal les mêmes conditions limites sont imposées sur les composantes de la vitesse : Neumann homogène pour la vitesse verticale et Dirichlet homogène pour la vitesse horizontale.

Nom	Pression motrice à l'interface basse	Pression motrice à l'interface haute
$LB0$	$P(x,0) = -\dfrac{V(x,0)^2}{2} + P_{ext}$	$P(x,Rf_c) = P_{ext}$ si le fluide entre ou sort
LB	$P(x,0) = -\dfrac{V(x,0)^2}{2} + P_{ext}$	$P(x,Rf_c) = P_{ext}$ si le fluide sort $P(x,Rf_c) = -\dfrac{V(x,Rf_c)^2}{2} + P_{ext}$ si le fluide entre
$GB0$	$P(x,0) = -\dfrac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext}$	$P(x,Rf_c) = P_{ext}$
GB	$P(x,0) = -\dfrac{G_{in}(y=0)^2}{2} + P_{ext}$	$P(x,Rf_c) = P_{ext}$ $P(x,Rf_c) = -\dfrac{V(x,Rf_c)^2}{2} + P_{ext}$ si le fluide entre

TABLEAU 9.1 – *Définition des différentes modélisations de type Bernoulli pour la pression motrice aux interfaces*

Les conditions de type LB (Local Bernoulli) considèrent une pression motrice non uniforme à l'interface basse du canal et dépendante de $-\frac{V(x,0)^2}{2}$. Les conditions de type GB (Global Bernoulli) considère une pression motrice uniforme à l'interface basse et dépendante de $-\frac{G_{in}(y=0)^2}{2}$. Les conditions $LB0$ et $GB0$ suppose une pression motrice uniformément ($P = P_{ext}$) à l'interface haute du canal que le fluide soit sortant ou entrant.

9.1.3 Couplage vitesse-pression

Comme précédemment, le problème couplé vitesse-pression est résolu avec un algorithme de prédiction-projection incrémentale tel que proposé par Goda (1979). On adapte ici cet algorithme afin de pouvoir imposer des conditions de Dirichlet sur la pression motrice.

Etape de prédiction pour laquelle un champ de vitesse prédit $\mathbf{V}^*$ est calculé avec P^n

$$\mathbf{V}^* - \frac{2\Delta t}{3}\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \triangle \mathbf{V}^* = -\frac{2\Delta t}{3} \nabla P^n + S_{\mathbf{V}}^{n,n-1} \quad \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \tag{9.3}$$

avec les conditions limites associées :

$$\begin{cases} \mathbf{V}^* = 0 & \text{sur } \Gamma_W \times [0; t_f], \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial y} = U^* = 0 & \text{sur } \Gamma_T \times [0; t_f] \text{ et sur } \Gamma_B \times [0; t_f]. \end{cases} \tag{9.4}$$

Etape de projection

$$\begin{cases} \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{n+1} + \Delta t \, \nabla \phi & \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \\ \nabla \, . \, \mathbf{V}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \end{cases} \tag{9.5}$$

où $\phi = \dfrac{2}{3}(P^{n+1} - P^n)$.

$$\begin{cases} \Delta \phi = \dfrac{\nabla \, . \, \mathbf{V}^*}{\Delta t} & \text{dans } \Omega \times [0; t_f], \\ \qquad + \text{ conditions limites sur } \phi & \text{sur } \Gamma \times [0; t_f], \end{cases} \tag{9.6}$$

Etape de correction pour déterminer $\mathbf{V}$ et P^{n+1}

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^* - \Delta t \nabla \phi & \text{dans } \Omega \times [0; t_f] \\ P^{n+1} = P^n - \dfrac{3}{2}\phi & \text{dans } \Omega \times [0; t_f] \end{cases} \tag{9.7}$$

Pour l'étape de projection, les condition limites sur ϕ aux interfaces haute et basse du canal sont définies afin de satisfaire les différents choix de modélisation sur la pression motrice. Nous présentons ici la méthode pour obtenir les conditions limites sur ϕ à l'interface basse du canal pour le jeu de conditions limites LB. La méthode est la même pour les autres conditions limites. Nous souhaitons donc imposer :

$$P^{n+1}(x, 0) = -\frac{[V(x, 0)^{n+1}]^2}{2} + P_{ext}, \tag{9.8}$$

en utilisant $\phi = \dfrac{2}{3}(P^{n+1} - P^n)$. P^n est connu car obtenu au pas de temps précédent. On a alors :

$$\phi(x, 0) = \frac{2}{3}\left(-\frac{[V(x, 0)^{n+1}]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x, 0) \right). \tag{9.9}$$

Cependant à l'étape de projection $V(x, 0)^{n+1}$ est encore inconnue. Nous remplaçons alors $V(x, 0)^{n+1}$ par son expression à l'étape de correction $V(x, 0)^{n+1} = V(x, 0)^* - \Delta t \nabla_y \phi$. On obtient ainsi :

$$\phi(x, 0) = \frac{2}{3}\left(-\frac{[V(x, 0)^* - \Delta t \nabla_y \phi]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x, 0) \right). \tag{9.10}$$

En développant les termes au carré et en négligeant les termes d'ordre Δt et Δt^2, on arrive à l'expression suivante pour la condition limite sur ϕ à l'interface basse du canal

$$\phi(x, 0) = \frac{2}{3}\left(-\frac{[V(x, 0)^*]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x, 0) \right). \tag{9.11}$$

Le tableau 9.2 récapitule les différents conditions limites sur ϕ en fonction du choix de modélisation effectué pour les conditions limites sur la pression motrice P.

Nom	ϕ à l'interface basse	ϕ à l'interface haute
$LB0$	$\phi(x,0) = \frac{2}{3}\Big(- \frac{[V(x,0)^*]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x,0)\Big)$	$\phi(x,Rf_c) = \frac{2}{3}\Big(P_{ext} - P^n(x,Rf_c)\Big)$ si le fluide entre ou sort
LB	$\phi(x,0) = \frac{2}{3}\Big(- \frac{[V(x,0)^*]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x,0)\Big)$	$\phi(x,Rf_c) = \frac{2}{3}\Big(P_{ext} - P^n(x,Rf_c)\Big)$ si le fluide sort $\phi(x,Rf_c) = \frac{2}{3}\Big(- \frac{[V(x,Rf_c)^*]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x,Rf_c)\Big)$ sinon
$GB0$	$\phi(x,0) = \frac{2}{3}\Big(- \frac{[G_{in}(x,0)^*]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x,0)\Big)$	$\phi(x,Rf_c) = \frac{2}{3}\Big(P_{ext} - P^n(x,Rf_c)\Big)$ si le fluide entre ou sort
GB	$\phi(x,0) = \frac{2}{3}\Big(- \frac{[G_{in}(x,0)^*]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x,0)\Big)$	$\phi(x,Rf_c) = \frac{2}{3}\Big(P_{ext} - P^n(x,Rf_c)\Big)$si le fluide sort $\phi(x,Rf_c) = \frac{2}{3}\Big(- \frac{[V(x,Rf_c)^*]^2}{2} + P_{ext} - P^n(x,Rf_c)\Big)$ sinon

TABLEAU 9.2 – *Définition des conditions limites sur l'incrément de pression ϕ en fonction des conditions limites sur la pression motrice*

9.1.4 Implémentation numérique des conditions limites aux interfaces du canal

On détaille seulement l'implémentation des conditions limites pour les vitesses aux interfaces du canal, les conditions limites sur les parois étant classiques.

Etape de prédiction

A l'étape de prédiction, on résout les équations de quantité de mouvement pour U^* et V^*. On souhaite imposer à l'interface basse du canal Γ_B :

- $U^*|_{\Gamma_B} = 0$ et $\dfrac{\partial V^*}{\partial y}|_{\Gamma_B} = 0$ quelque soit le jeu de conditions limites considéré.

La condition limite sur $\frac{\partial V^*}{\partial y}$ est imposée implicitement en modifiant l'équation de quantité de mouvement en $V^*_{i,j=1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$. Cette modification est effectuée sur l'opérateur laplacien. La condition limite sur $U^*_{i,J=1}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$ est imposée explicitement en imposant la valeur de U dans l'opérateur $\mathbf{S}$.

On pose $U^*|_{\Gamma_B} = U^*_{i,J=1}$ et $\dfrac{\partial V^*}{\partial y}|_{\Gamma_B} = \dfrac{V^*_{I,j=1} - V^*_{I,j=0}}{\Delta y}$. Nous avons alors

$$\begin{cases} \Delta V^*\big|_{I,j=1} &= \dfrac{-2\,V^*_{I,j=1} + V^*_{I+1,j=1} + V^*_{I-1,j=1}}{\Delta x^2} + \dfrac{-V^*_{I,j=1} + V^*_{i,j=2}}{\Delta y^2} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1, \\ U^*_{i,J=1} &= 0 \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-2. \end{cases} \tag{9.12}$$

A l'interface haute du canal Γ_T on impose :

- $U^*|_{\Gamma_T} = 0$ et $\dfrac{\partial V^*}{\partial y}|_{\Gamma_T} = 0$ quelque soit le jeux de conditions limites considérés.

On pose $U^*|_{\Gamma_T} = U^*_{i,J=NJ}$ et $\dfrac{\partial V^*}{\partial y}|_{\Gamma_T} = \dfrac{V^*_{I,j=NJ} - V^*_{I,j=NJ-1}}{\Delta y}$. On impose alors

$$\begin{cases} \Delta V^*\big|_{I,j=NJ-1} = \dfrac{-2\,V^*_{I,j=NJ-1} + V^*_{I+1,j=NJ-1} + V^*_{I-1,j=NJ-1}}{\Delta x^2} + \dfrac{-V^*_{I,j=NJ-1} + V^*_{i,j=NJ-2}}{\Delta y^2} \\ \qquad\qquad \text{pour } 2 \leq I \leq NI-1, \\ U^*_{i,J=NJ} = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq NI-2. \end{cases} \tag{9.13}$$

Calcul du terme source S_V Pour calculer le terme source (les termes non-linéaires convectifs) de l'équation de quantité de mouvement pour V aux points $V_{I,j=1}$ et $V_{I,j=NJ-1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$, on doit connaître les points $V_{I,j=0}$ et $V_{I,j=NJ}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$. Après chaque étape de résolution, on met donc à jour $V_{I,j=0}$ et $V_{I,j=NJ}$ de la manière suivante :

- $V_{I,j=0} = V_{I,j=1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$,
- $V_{I,j=NJ} = V_{I,j=NJ-1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$.

9.1.5 Discussion et analyse des conditions limites

Divergence du champ de vitesse aux interfaces du canal En tout point (I, J) la divergence du champ de vitesse doit être nulle. Pour les points compris entre $2 \leq I \leq NI-1$ et $1 < J < NJ$, la divergence nulle est imposée grâce aux étapes de projection et de correction.

Pour les cellules situées aux interfaces du canal en $J = 1$ et $J = NJ$, on applique les condtions limites 9.1 et 9.2 :

- $V_{I,j=0} = V_{I,j=1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $U_{i,J=1} = 0$ pour $2 \leq i \leq NI-2$,
- $V_{I,j=NJ} = V_{I,j=NJ-1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $U_{i,J=NJ} = 0$ pour $2 \leq i \leq NI-2$.

La divergence nulle pour le champ de vitesse est ainsi vérifiée en $J = 1$ et $J = NJ$ grâce à l'imposition des conditions limites sur les deux composantes de la vitesse :

$$\frac{V_{I,j=1} - V_{I,j=0}}{\Delta y} + \frac{U_{i,J=1} - U_{i-1,J=1}}{\Delta x} = 0 \text{ et } \frac{V_{I,j=NJ} - V_{I,j=NJ-1}}{\Delta y} + \frac{U_{i,J=NJ} - U_{i-1,J=NJ}}{\Delta x} = 0.$$

En conclusion, pour obtenir une distribution de vitesse horizontale non nulle aux interfaces il est nécessaire d'appliquer la contrainte de divergence nulle sur V.

Cohérence des conditions limites avec les équations de Boussinesq L'imposition de conditions limites de type LB (voir tableau 9.1) à l'interface basse du canal impose une pression motrice variable selon $\vec{e_x}$ à l'interface basse. Cependant, la vitesse horizontale à l'interface basse est imposée comme étant nulle. Il existe donc dans ce cas une incohérence des conditions limites.

9.1.6 Résultat de l'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes

L'analyse des valeurs singulières de l'opérateur de Stokes montre que le noyau de cet opérateur est réduit au singleton $\{0\}$ lorsque l'on considère des conditions limites de type Neumann sur la vitesse verticale et de type Dirichlet sur la vitesse horizontale et la pression

motrice. La solution au problème est alors directement obtenue par résolution du problème de Stokes et il n'est plus nécessaire d'utiliser le principe de superposition pour obtenir une solution unique.

9.2 Résultats

Dans cette section, toutes les simulations numériques tendent vers un état stationnaire. Les résultats présentés correspondent donc aux états stationnaires.

9.2.1 Benchmark numérique

Dans le cadre d'un exercice de comparaison numérique proposé par la communauté française de thermique nous avons comparé les résultats obtenus par notre code de calcul avec ceux obtenus par différentes équipes. Les résultats numériques sont donnés pour un nombre de Rayleigh égal à $Ra = 5.10^5$ (où un régime de type couche limite le long de la paroi chauffée est observé avec une zone de recirculation en haut du canal du côté de la paroi non chauffée) et pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ (le fluide considéré est de l'air). La pression extérieure P_{ext} est choisie comme étant nulle. Les quatre jeux de conditions limites (LB, $LB0$, GB et $GB0$) sont comparés. Le tableau 9.3 récapitule les différents codes et maillages utilisés.

Laboratoire	Code	Maillage
LIMSI	**Code laboratoire** (décrit précédemment)	128×1300
PPRIME	FDS (FDS)	400×2560
MSME	Code laboratoire (Chénier et al. 2006, Touazi et al. 2008, Chénier et al. 2009)	253×1520
CETHIL	Code laboratoire (Zoubir et al. 2011)	200×1200
PIMENT	Code laboratoire avec OpenFoam (OpenFOAM 2012)	48×600
TREFLE	Aquilon (Vincent et al. 2004, Fortin et Glowinski 1982, Angot et al. 2012)	100×1000
LGCgE	Fluent	50×300

Tableau 9.3 – *Codes de calcul des différentes équipes et maillage utilisé dans le cadre du benchmark numérique (Desrayaud et al. 2013)*

La comparaison des différents résultats est détaillée dans Desrayaud et al. (2013), on présente ici seulement quelques résultats concernant la validation de notre code de calcul ainsi que la comparaison de l'influence des conditions limites sur l'écoulement.

Validation du code de calcul Les tableaux 9.4, 9.5, 9.6 et 9.7 comparent les résultats obtenus par les différentes équipes pour les quatre jeux de conditions limites considérés. On observe un très bon accord sur les différentes grandeurs globales (débits entrant dans le canal par les interfaces haute et basse et nombres de Nusselt) entre les résultats obtenus par notre code de calcul et les résultats obtenus par les différentes équipes. L'écart maximum observé entre les résultats est de l'ordre de 2%. Cette observation est vérifiée pour l'ensemble des jeux de conditions limites étudiés. Les résultats détaillés (nombre de Nusselt local, température débitante, largeur de la zone de recirculation, ...) montrent aussi un très bon accord des résultats (voir Desrayaud et al. (2013)).

On valide ainsi notre code de calcul et la méthode de résolution utilisée pour l'application des conditions limites de type Bernoulli local ou global aux interfaces haute et basse du canal.

	LIMSI	MSME	CETHIL	LGCgE	Valeurs moyennes
$G_{in}(y=0)$	0.1039	0.1039	0.1038	0.1039	0.1039
$G_{in}(y=Rf_c)$	0.02628	0.02629	0.02632	0.02630	0.2630
$\overline{NU_1}$	6.924	6.909	6.914	6.912	6.915
$\overline{NU_2}$	8.597	8.574	8.577	8.538	8.583

TABLEAU 9.4 – *Comparaison des résultats des différents codes pour le cas LB*

	LIMSI	MSME	CETHIL	Valeurs moyennes
$G_{in}(y=0)$	0.08453	0.08460	0.08612	0.08508
$G_{in}(y=Rf_c)$	0.04083	0.04083	0.03990	0.04052
$\overline{NU_1}$	6.845	6.828	6.840	6.838
$\overline{NU_2}$	9.029	9.005	8.959	8.998

TABLEAU 9.5 – *Comparaison des résultats des différents codes pour le cas LB0*

	LIMSI	MSME	CETHIL	Valeurs moyennes
$G_{in}(y=0)$	0.1213	0.1213	0.1205	0.1210
$G_{in}(y=Rf_c)$	0.01693	0.01693	0.01761	0.01715
$\overline{NU_1}$	6.985	6.968	6.969	6.974
$\overline{NU_2}$	8.374	8.351	8.362	8.362

TABLEAU 9.6 – *Comparaison des résultats des différents codes pour le cas GB*

	LIMSI	PPRIME	PIMENT	TREFLE	MSME	CETHIL	Valeurs moyennes
$G_{in}(y=0)$	0.1097	0.1117	0.1095	0.1098	0.1097	0.1100	0.1101
$G_{in}(y=Rf_c)$	0.02478	0.02168	0.02503	0.02505	0.02478	0.02490	0.02437
$\overline{NU_1}$	6.941	7.142	6.947	6.980	6.924	6.930	6.977
$\overline{NU_2}$	8.506	8.792	8.519	8.484	8.483	8.482	8.544

TABLEAU 9.7 – *Comparaison des résultats des différents codes pour le cas GB0*

Influence des conditions limites sur l'écoulement Ce benchmark numérique nous permet aussi de comparer l'influence des conditions limites pour un nombre de $Ra = 5.10^5$.

Le tableau 9.8 présente l'évolution du nombre de Nusselt local Nu_1 à différentes hauteurs

pour les 4 jeux de conditions limites. Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre précédent, les conditions limites aux interfaces haute et basse du canal n'ont quasiment pas d'influence sur le comportement thermique de l'écoulement proche de la paroi chauffée. La couche limite a donc un comportement robuste du point de vue thermique. Pour compléter ce résultat, le tableau 9.9 montre que le débit de fluide sortant par l'interface haute du canal varie légèrement (de l'ordre de 9%) avec les différentes conditions limites. Cette faible variation traduit le fait que le comportement dynamique de la couche limite le long de la paroi chauffée reste quasiment similaire quelque soit les conditions limites aux interfaces du canal. La couche limite proche de la paroi chauffée reste ainsi inchangée : le moteur de l'écoulement, situé au sein du domaine de calcul, reste toujours le même.

	LB	$LB0$	GB	$GB0$
$y = 3Rf_c/8$	7.271	7.198	7.332	7.290
$y = Rf_c/2$	6.221	6.170	6.270	6.240
$y = 5Rf_c/8$	5.677	5.627	5.720	5.694
$y = 3Rf_c/4$	5.695	5.647	5.742	5.713
$y = 7Rf_c/8$	9.834	9.834	9.965	9.884
$y = Rf_c$	11.86	11.68	12.05	11.94

Tableau 9.8 – *Nombre de Nusselt local Nu_1 à différentes hauteurs pour les différents jeux de conditions limites*

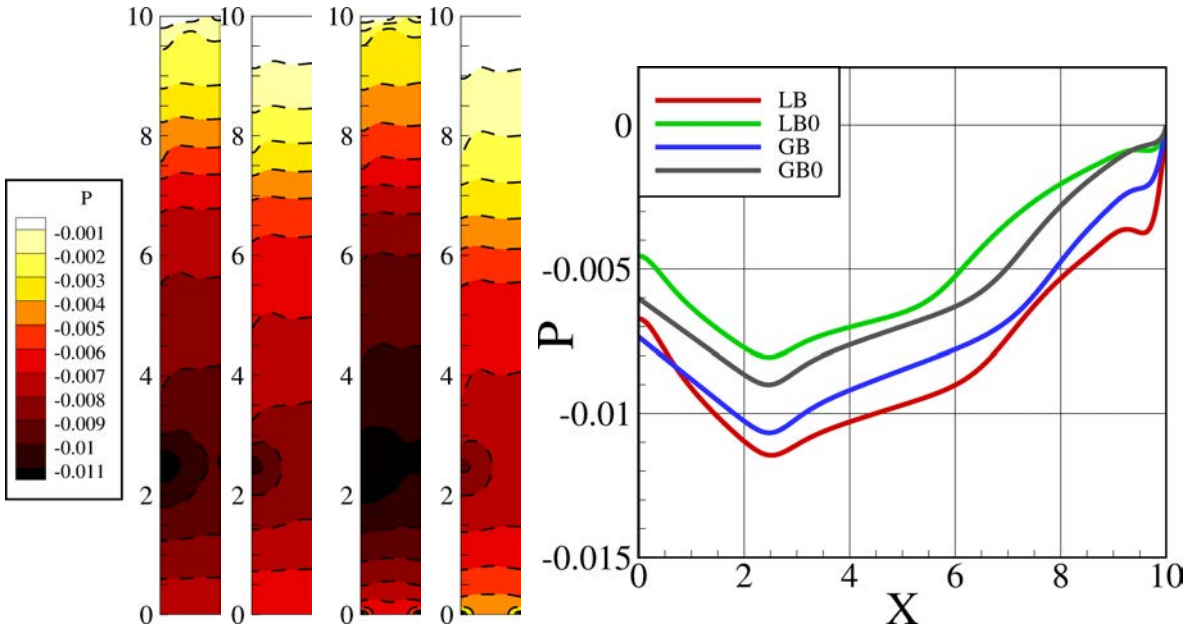
Contrairement à ce qui est observé pour le comportement de la couche limite, la dynamique globale de l'écoulement est fortement influencée par le choix des conditions limites sur la pression motrice aux interfaces du canal. Effectivement, les débits de fluide entrant par l'interface basse du canal $G_{in}(y = 0)$ et l'interface haute $G_{in}(y = Rf_c)$ varient de manière significative : par exemple $G_{in}(y = 0)$ est environ 30% plus faible pour $LB0$ par rapport à GB (voir tableau 9.9). Comme expliqué par Marcondes et Maliska (1999), les fortes variations de

	LB	$LB0$	GB	$GB0$
$G_{in}(y = 0)$	0.1039	0.08453	0.1213	0.1097
$G_{in}(y = Rf_c)$	0.02628	0.04083	0.01693	0.02478
$G_{out}(y = Rf_c)$	0.13018	0.12536	0.13823	0.13448

Tableau 9.9 – *Débits de fluide entrant par les interfaces haute $G_{in}(y = Rf_c)$ et basse $G_{in}(y = 0)$ et sortant par l'interface haute $G_{out}(y = Rf_c)$ pour les différents jeux de conditions limites*

la dynamique de l'écoulement avec les conditions sur la pression motrice aux interfaces sont dues au fait que l'écoulement au sein du canal est soumis à des forces motrices différentes proche de la paroi chauffée et proche de la paroi non chauffée. Du côté de la paroi chauffée, la force mortice est la poussée d'Archimède. En dehors de la couche limite, l'écoulement est dominé par les forces de pression résultantes directes des conditions limites aux interfaces du canal. Cette influence des conditions limites sur la pression motrice au sein du canal est particulièrement visible sur la figure 9.2. Lorsque l'on impose une pression motrice uniformément

nulle à l'interface haute du canal (cas $GB0$ et $LB0$) la pression motrice minimale au sein du canal est plus élevée que pour les cas GB et LB.



(a) GB (b) $GB0$ (c) LB (d) $LB0$ (e) *ligne médiane* $x = 0$

FIGURE 9.2 – *Champs de pression motrice au sein du canal et profil le long de la ligne médiane* $x = 0$ *pour les conditions limites GB, GB0, LB et LB0 (*$Ra = 5.10^5$ *et* $Pr = 0.71$*)*

Pour expliquer le rôle joué par les conditions limites sur la pression motrice aux interfaces, on s'intéresse à l'équation de quantité de mouvement selon $\vec{e_y}$ intégrée sur la surface du canal. On compare le cas $LB0$ avec le cas $GB0$ (seule la condition limite sur la pression motrice à l'interface basse est différente). Pour les deux cas on obtient :

$$-\int_{\Gamma_B} P(x,0)\,dS =$$

$$-\underbrace{\left(\int_{\Gamma_T} V(x,Rf_c)^2\,dS - \int_{\Gamma_B} V(x,0)^2\,dS\right)}_{f_{convectifs}} + \underbrace{\frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\left[\int_{\Gamma_W} \nabla V(x,y)\cdot \mathbf{n}\,dS\right]}_{f_{frottements}} + \underbrace{\int_V Pr\,T(x,y)\,dV}_{f_{Archimede}}.$$

Pour $LB0$, on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\int_{\Gamma_B} \frac{V(x,0)^2}{2}\,dS\bigg|_{LB0} = -f_{convectifs} + f_{frottements} + f_{Archimede} \tag{9.14}$$

Pour $GB0$, on a alors :

$$\frac{G_{in}(y=0)^2}{2}\bigg|_{GB0} = -f_{convectifs} + f_{frottements} + f_{Archimede} \tag{9.15}$$

Remarque 9.2 *On rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit*

$$|\int f\,g|^2 \leq (\int |f|^2)(\int |g|^2).$$

En posant $f = V$ *et* $g = 1$*, on a*

$$|\int V|^2 \leq (\int |V|^2).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on en déduit donc que pour $LB0$:

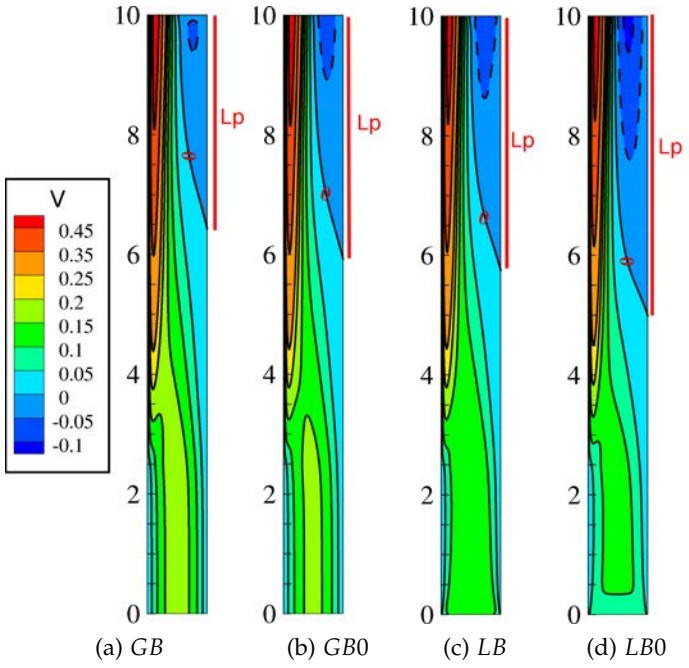
$$\left.\frac{G_{in}(y=0)^2}{2}\right|_{LB0} \leq -f_{convectifs} + f_{frottements} + f_{Archimede} \tag{9.16}$$

Cette analyse montre donc que quelque soit le nombre de Rayleigh

$$\left.\frac{G_{in}(y=0)^2}{2}\right|_{LB0} \leq \left.\frac{G_{in}(y=0)^2}{2}\right|_{GB0} \tag{9.17}$$

On met donc ici en évidence l'influence de la pression motrice aux interfaces du canal sur la dynamique de l'écoulement de convection naturelle.

Comme le choix des conditions limites modifie les débits de fluide entrant dans le canal, on observe ainsi sur la figure 9.3 une variation de la profondeur de la zone de recirculation L_p. La plus grande zone de recirculation est observée pour le cas $LB0$ (où le débit entrant par l'interface basse est le plus faible) et la plus petite pour le cas GB (où le débit entrant par l'interface basse est le plus grand).

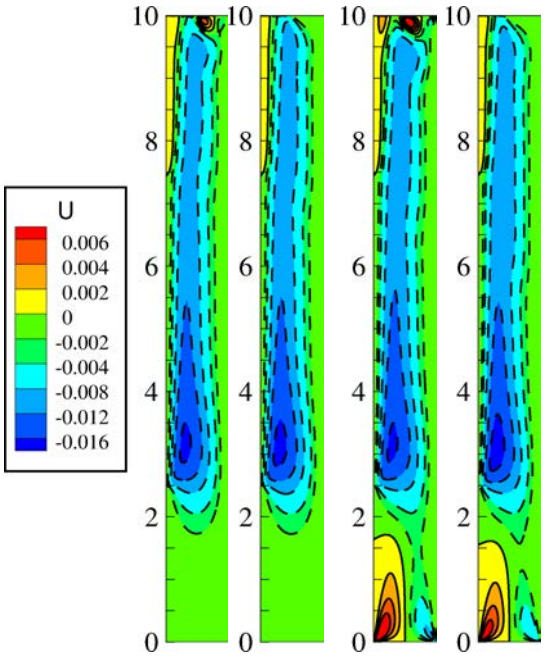


(a) GB (b) $GB0$ (c) LB (d) $LB0$

FIGURE 9.3 – *Champs de vitesse verticale au sein du canal pour les conditions limites GB, GB0, LB et LB0 ($Ra = 5.10^5$ et $Pr = 0.71$)*

La figure 9.3 montre aussi qu'imposer une pression uniforme à l'interface basse du canal (cas GB et $GB0$) mène à un écoulement entrant dans le canal déjà établit (l'écoulement est alors proche d'un écoulement de Poiseuille dans la partie basse du canal : vitesse verticale parabolique et vitesse horizontale nulle). Dans le cas d'une pression non uniforme à l'interface basse l'écoulement entrant dans le canal n'est pas établit et tendent vers un profil de Poiseuille dans la partie basse du canal. Cette observation peut aussi être visualisée sur la figure 9.4 où l'on montre que la vitesse horizontale est nulle dans la partie basse du canal pour les cas GB et $GB0$ et non nulle pour les cas LB et $LB0$ traduisant un établissement de l'écoulement.

Bilan Nous avons donc montré que les conditions limites pour la pression motrice n'influent pas sur le comportement de la couche limite thermique le long de la paroi chauffée mais principalement sur la dynamique globale de l'écoulement au sein du canal. Imposer une



(a) *GB* (b) *GB*0 (c) *LB* (d) *LB*0

FIGURE 9.4 – *Champs de vitesse horizontale au sein du canal pour les conditions limites GB, GB*0*, LB et LB*0 *($Ra = 5.10^5$ et $Pr = 0.71$)*

pression uniforme à l'interface basse du canal (cas *GB* et *GB*0) implique un écoulement entrant déjà établit et une vitesse horizontale nulle dans la partie basse du canal. Pour une pression non-uniforme, l'écoulement entrant n'est pas établit et tend à se développer dans la partie basse. Cela se traduit par une vitesse horizontale non nulle. Au vu de ce que l'on a montré dans la partie II, les jeux *GB* et *GB*0 ne permettent donc pas de représenter correctement l'écoulement puisque ceux-ci implique un écoulement déjà établit à l'interface basse du canal.

9.2.2 Evolution de l'influence des conditions limites en fonction du nombre de Rayleigh

Afin de mieux comprendre l'influence des conditions limites de type Bernoulli sur l'écoulement, nous proposons une étude pour $10 \leq Ra \leq 5.10^7$. On considère toujours un nombre de Prandtl égal à $Pr = 0.71$. La pression extérieure P_{ext} est fixée comme étant nulle.

Nombre de Nusselt L'évolution de $\overline{Nu_1}$ en fonction du nombre de Rayleigh est présenté sur la figure 9.5. On montre que quelque soit le nombre de Rayleigh considéré, le nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ reste quasiment inchangé en fonction des conditions limites retenues. De plus, on observe que lorsque le nombre de Rayleigh est élevé ($Ra > 10^5$), quelque soit le jeux de conditions limites, le nombre de Nusselt moyen évolue en fonction de $Ra^{0.2}$ ce qui correspond à l'évolution du nombre de Nusselt le long d'une plaque plane verticale chauffée à flux constant. Le comportement thermique de la couche limite le long de la paroi chauffée n'est donc pas influencé par les choix de modélisation effectués aux interfaces du canal.

Débit de fluide sortant par l'interface haute Le comportement de la couche limite thermique est aussi caractérisé par le débit de fluide sortant par l'interface haute du canal (voir figure 9.6). On montre que, quelque soit le nombre de Rayleigh, $G_{out}(y = Rf_c)$ n'est que très peu influencé par le choix des conditions limites. Bien que l'on observe des variations de l'ordre de 10% entre les différentes conditions limites, l'évolution du débit de fluide sortant par l'interface haute est seulement fonction du flux de chaleur imposé à la paroi chauffée.

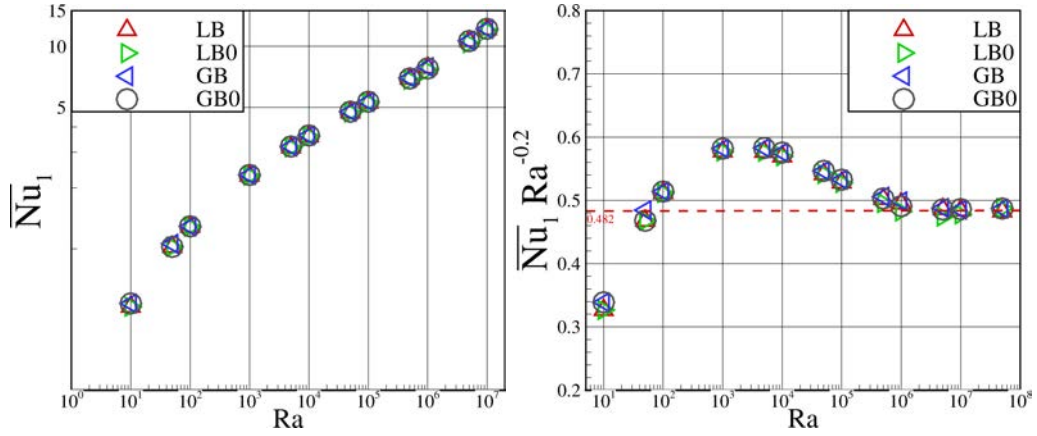


FIGURE 9.5 – *Evolution du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, LB0, GB et GB0*

On observe ainsi deux comportements différents. Pour $Ra < 10^5$, $G_{out}(y = Rf_c)$ est quasiment constant (cela se rapproche du comportement théorique proposé par Aung (1972)). Pour $Ra > 10^5$, $G_{out}(y = Rf_c)$ se comporte comme $Ra^{-0.3}$ ce qui correspond au débit d'une couche limite thermique le long d'une plaque plane chauffée à flux constant.

Remarque 9.3 *Dans la partie I, on a rappelé que le débit caractéristique G_{CL} d'une couche limite thermique le long d'une plaque plane chauffée à flux constant évolue en fonction de $Ra^{0.2}$. Nos résultats étant adimensionnés avec la vitesse convective $\frac{\alpha\sqrt{Ra}}{L_c}$, le débit G_{CL} en considérant cet adimensionnement évolue donc en fonction de $Ra^{-0.3}$.*

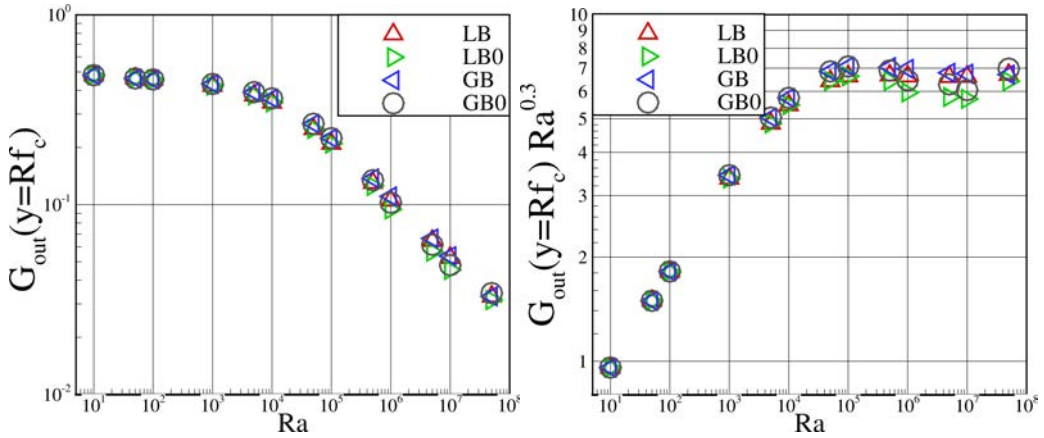


FIGURE 9.6 – *Evolution du débit de fluide sortant par l'interface haute du canal $G_{out}(y = Rf_c)$ en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, LB0, GB et GB0*

On montre ainsi que la couche limite thermique le long de la paroi chauffée (le moteur de l'écoulement) n'est pas influencé par le choix des conditions limites aux interfaces du canal et cela quelque soit le nombre de Rayleigh.

Débits de fluide entrant dans le canal Si l'on s'intéresse maintenant à l'influence des conditions limites sur la dynamique de l'écoulement, on montre que celle-ci devient plus importante à haut nombre de Rayleigh. La figure 9.7 présente l'évolution du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal $G_{in}(y = 0)$ en fonction du nombre de Rayleigh pour les 4 jeux de conditions limites. A bas nombre de Rayleigh, $G_{in}(y = 0)$ est quasiment constant avec des valeurs proches du débit théorique proposé par Aung (1972). Cependant, comme l'écart de

pression motrice entre les interfaces est non nul, il existe une légère évolution de $G_{in}(y=0)$ à bas nombre de Rayleigh. Les différents $G_{in}(y=0)$ obtenus avec les 4 jeux de conditions limites sont très proches les uns des autres. A haut nombre de Rayleigh, on observe une dispersion des résultats pour $G_{in}(y=0)$. Pour les cas où la pression motrice est considérée uniformément nulle à l'interface haute du canal (cas $LB0$ et $GB0$), $G_{in}(y=0)$ prend des valeurs négatives pour $Ra > 5.10^5$ pour le cas $LB0$ et $Ra > 10^7$ pour $GB0$. Le fluide sort ainsi par les interfaces haute et basse du canal. L'alimentation de la couche limite thermique s'effectue alors exclusivement par l'interface haute du canal. On aboutit ainsi à une situation peu physique.

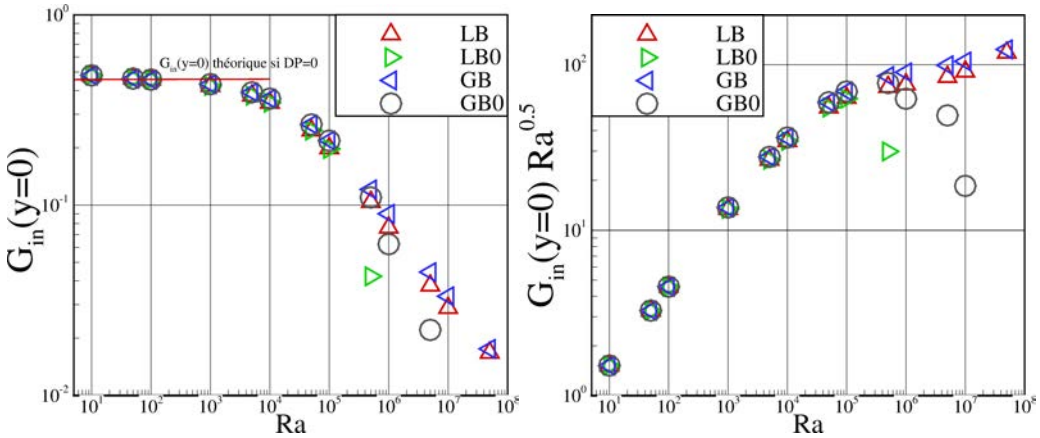


FIGURE 9.7 – *Evolution du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal $G_{in}(y=0)$ en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, LB0, GB et GB0*

Zone de recirculation Sur la figure 9.8, on montre que la profondeur L_p de la zone de recirculation augmente avec le nombre de Rayleigh quelque soit le jeu de conditions limites. Pour les cas $LB0$ et $GB0$, elle devient égale à la hauteur du canal à haut nombre de Rayleigh traduisant le fait que le fluide entre par l'interface haute du canal et sort par l'interface basse. Comme montré dans par l'étude de Sparrow et al. (1984), la profondeur de la zone de recirculation augmente avec le nombre de Rayleigh.

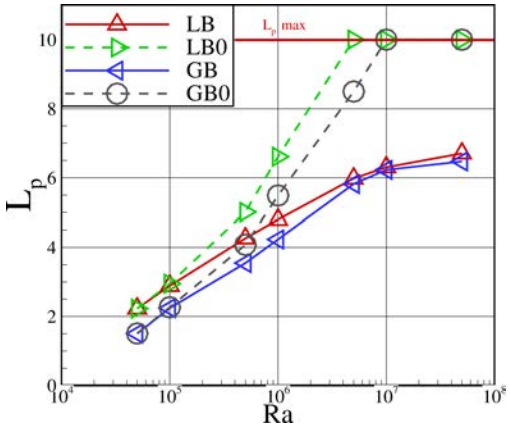


FIGURE 9.8 – *Evolution de la longueur de pénétration de la zone de recirculation L_p en fonction du nombre de Rayleigh pour les jeux de conditions limites LB, LB0, GB et GB0*

Bilan On montre ici un bon accord sur le comportement de la couche limite le long de la paroi chauffée quelque soit le jeu de conditions limites retenu. Il existe cependant des situations non physiques où le fluide sort par l'interface basse du canal. Les jeux $LB0$ et $GB0$

ne semblent ainsi pas une bonne modélisation des interfaces pour représenter la physique de l'écoulement au sein du canal.

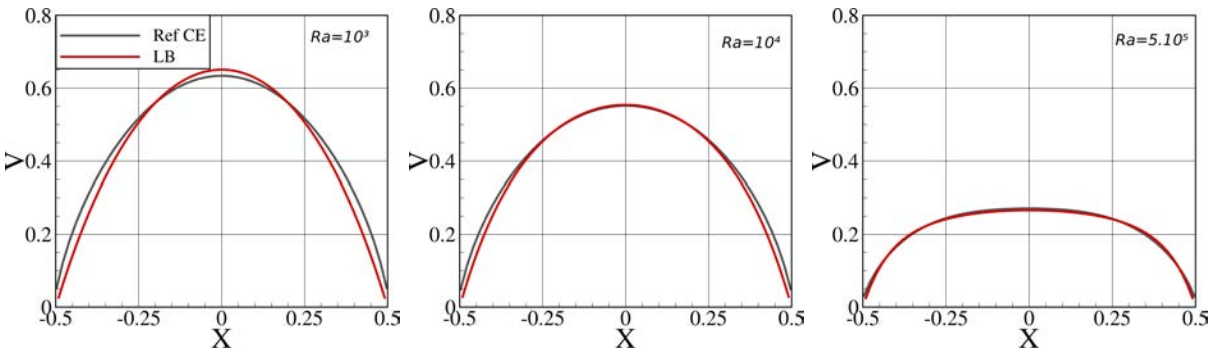
9.2.3 Comparaison des résultats avec les solutions numériques de référence d'un canal dans un environnement infini

Parmi les 4 jeux de conditions limites étudiés, seul le cas *LB* semble être capable de représenter correctement l'écoulement de convection naturelle au sein d'un canal vertical. Nous proposons ici de comparer les résultats obtenus pour le cas *LB* avec les solutions de référence établies dans la partie II. Les résultats sont comparés pour un nombre de Prandtl $Pr = 7.85$ (eau) et pour $5.10^2 \leq Ra \leq 5.10^5$. La pression extérieure P_{ext} est fixée comme étant nulle.

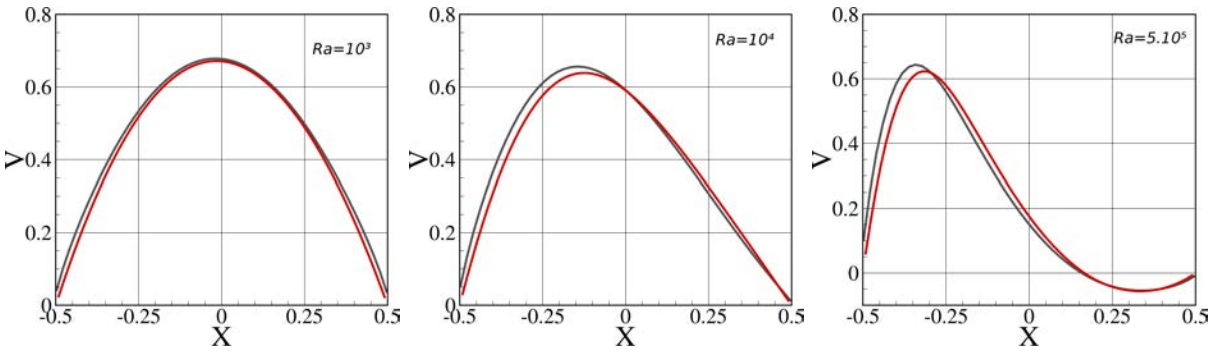
Débits de fluide entrant dans le canal Le tableau 9.10 montre de bons accords entre les résultats pour les débits de fluide entrant dans le canal.

	*CE*640		*LB*	
Ra	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$
5.10^2	$4.651\ 10^{-1}$	0	$4.540\ 10^{-1}$ (-2.39 %)	0
1.10^3	$4.577\ 10^{-1}$	0	$4.473\ 10^{-1}$ (-2.27 %)	0
5.10^3	$4.334\ 10^{-1}$	0	$4.190\ 10^{-1}$(-3.32 %)	0
1.10^4	$4.043\ 10^{-1}$	0	$3.897\ 10^{-1}$(-3.61 %)	0
5.10^4	$3.338\ 10^{-1}$	$1.611\ 10^{-4}$	$3.317\ 10^{-1}$(-0.63 %)	0
5.10^5	$2.128\ 10^{-1}$	$1.316\ 10^{-2}$	$2.133\ 10^{-1}$ (+0.23 %)	$1.271\ 10^{-2}$(-3.42 %)

TABLEAU 9.10 – *Comparaison des débits entrants dans le canal entre le cas LB et CE*640



(a) *interface basse*



(b) *interface haute*

FIGURE 9.9 – *Comparaison de V aux interfaces basse ($y = 0$) et haute ($y = Rf_c$) du canal entre le cas LB et CE*640 *pour* $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$

Quelque soit le nombre de Rayleigh, la variation de $G_{in}(y = 0)$ obtenue pour le cas *LB* est toujours inférieure à 4% par rapport aux solutions de référence. On remarque cependant que pour le cas *LB* la zone de recirculation n'est pas prédite à $Ra = 10^4$ (effectivement $G_{in}(y =$

$Rf_c) = 0$ pour LB alors qu'elle est non nulle pour la solution de référence). On observe aussi que les différents débits de fluide sont de mieux en mieux prédit par le cas LB lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Cela s'observe aussi sur la figure 9.10 pour la vitesse verticale le long de la ligne médiane. En parallèle, on montre que la vitesse verticale aux interfaces du canal est relativement bien prédite quelque soit le nombre de Rayleigh (voir figure 9.9). Comme observé pour les débits, plus le nombre de Rayleigh est élevé plus le cas LB fournit une bonne prédiction par rapport aux solutions de référence.

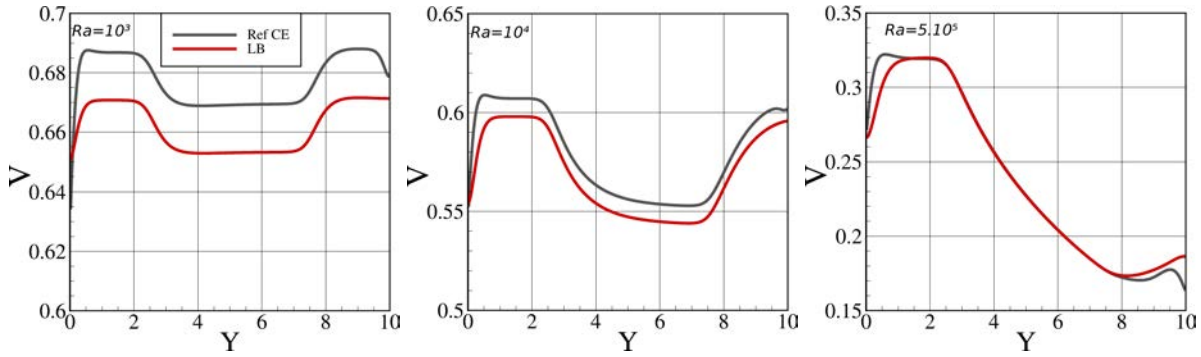


FIGURE 9.10 – *Comparaison de V le long de la ligne médiane ($x = 0$) du canal entre le cas LB et $CE640$ pour $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$*

Nombre de Nusselt et température débitante Le tableau 9.11 montre un relativement bon accord pour les nombres de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ et $\overline{Nu_2}$ entre les résultats obtenus pour le cas LB et ceux des solutions de référence. On observe cependant que l'écart entre ces solutions semble augmenter avec le nombre de Rayleigh. Pour la température débitante $T_{bulk}(y = Rf_c)$ en sortie du canal, les écarts sont plus importants à bas nombre de Rayleigh. Comme expliqué dans le chapitre précédent cela est du au fait que la diffusion selon $\vec{e_y}$ n'est pas négligeable à bas nombre de Rayleigh (voir section 5.2.2).

	$CE640$			LB		
Ra	$T_{bulk}(y = Rf_c)$	$\overline{Nu_1}$	$\overline{Nu_2}$	$T_{bulk}(y = Rf_c)$	$\overline{Nu_1}$	$\overline{Nu_2}$
5.10^2	$4.401\ 10^{-1}$	2.065	3.443	$4.924\ 10^{-1}$ (+11.9 %)	2.020(-2.18 %)	3.294 (-4.33 %)
1.10^3	$3.237\ 10^{-1}$	2.423	3.682	$3.534\ 10^{-1}$ (+9.18 %)	2.370(-2.19 %)	3.495(-5.08 %)
5.10^3	$1.599\ 10^{-1}$	3.424	4.554	$1.687\ 10^{-1}$ (+5.50%)	3.330(-2.75 %)	4.229(-7.14 %)
1.10^4	$1.200\ 10^{-1}$	3.940	5.080	$1.254\ 10^{-1}$ (+4.50 %)	3.820(-3.05 %)	4.666(-8.15 %)
5.10^4	$6.562\ 10^{-2}$	5.403	6.716	$6.739\ 10^{-2}$ (+2.70 %)	5.181(-4.11 %)	5.982(-10.9 %)
5.10^5	$3.251\ 10^{-2}$	8.481	10.67	$3.311\ 10^{-2}$ (+1.85 %)	7.920(-6.61 %)	8.837(-17.2 %)

TABLEAU 9.11 – *Comparaison des nombres de Nusselt moyens et de la température débitante à l'interface haute du canal entre le cas LB et les solutions de référence*

Pression motrice

Remarque 9.4 *Pour comparer les résultats obtenus dans le cas LB avec les solutions de référence, il est nécessaire de vérifier que les champs de pression motrice sont bien comparables. Pour les solutions de référence, il a été choisi de fixer la pression comme étant nulle au coin inférieure gauche du réservoir. On a ainsi considéré que la pression motrice dans le milieu extérieur au loin de canal est nulle. En prenant la pression motrice du milieu extérieur $P_{ext} = 0$ pour le cas LB, on impose aussi le fait que la pression motrice au loin du canal soit nulle. Les champs de pression obtenus pour le cas LB et les solutions de référence sont donc bien comparables.*

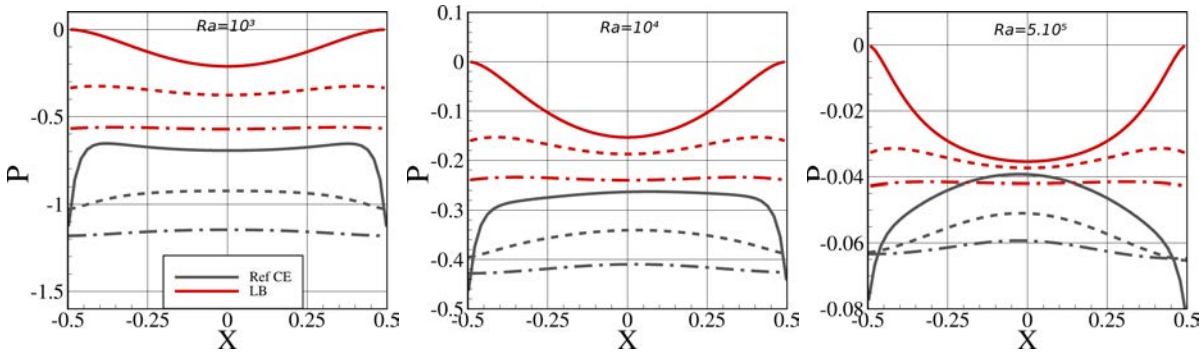
Si l'on s'intéresse aux valeurs de la pression motrice aux interfaces du canal (voir tableau 9.12), on observe des écarts très importants entre le cas LB et les solutions de référence.

Comme on l'a déjà observé pour le débit, l'écart entre les résultats diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Cela s'explique par le fait que les conditions de type Bernoulli suppose un écoulement non visqueux et irrotationnel dans le milieu extérieur. Or à bas nombre de Rayleigh, les effets visqueux sont prépondérants et donc une modélisation de la pression motrice avec les hypothèses de Bernoulli n'est pas valide. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, les effets visqueux diminuent et le cas *LB* s'approche des résultats obtenus pour la solution de référence.

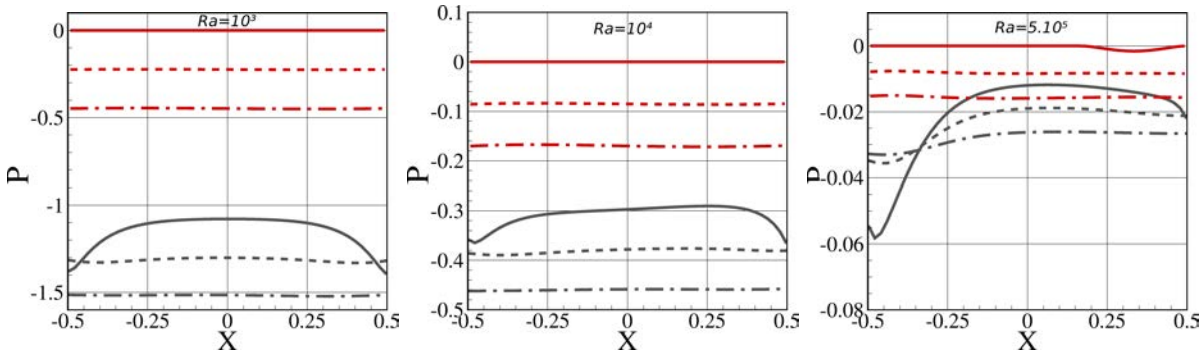
	*CE*640		
Ra	P_{bot}	P_{top}	ΔP
5.10^2	$-8.357\ 10^{-1}$	-1.698	$-8.621\ 10^{-1}$
1.10^3	$-6.247\ 10^{-1}$	-1.152	$-5.259\ 10^{-1}$
5.10^3	$-3.319\ 10^{-1}$	$-4.536\ 10^{-1}$	$-1.218\ 10^{-1}$
1.10^4	$-2.542\ 10^{-1}$	$-2.966\ 10^{-1}$	$-4.232\ 10^{-2}$
5.10^4	$-1.393\ 10^{-1}$	$-1.131\ 10^{-1}$	$+2.263\ 10^{-1}$
5.10^5	$-4.395\ 10^{-2}$	$-1.886\ 10^{-2}$	$+2.509\ 10^{-2}$

	LB	
P_{bot}	P_{top}	ΔP
$-1.221\ 10^{-1}$ (+85.4 %)	0	$1.221\ 10^{-1}$ (+114 %)
$-1.180\ 10^{-1}$ (+81.1 %)	0	$1.180\ 10^{-1}$ (+122 %)
$-1.020\ 10^{-1}$ (+69.3 %)	0	$1.020\ 10^{-1}$ (+184 %)
$-9.148\ 10^{-2}$ (+64.0 %)	0	$9.148\ 10^{-2}$ (+316 %)
$-6.190\ 10^{-2}$ (+55.5 %)	0	$6.190\ 10^{-1}$ (+173.5%)
$-2.484\ 10^{-2}$ (+43.5 %)	$-2.884\ 10^{-4}$ (+98.47 %)	$2.455\ 10^{-2}$ (+2.15%)

TABLEAU 9.12 – *Comparaison de la pression motrice moyenne aux interfaces du canal entre le cas LB et les solutions de référence*



(a) *interface basse*

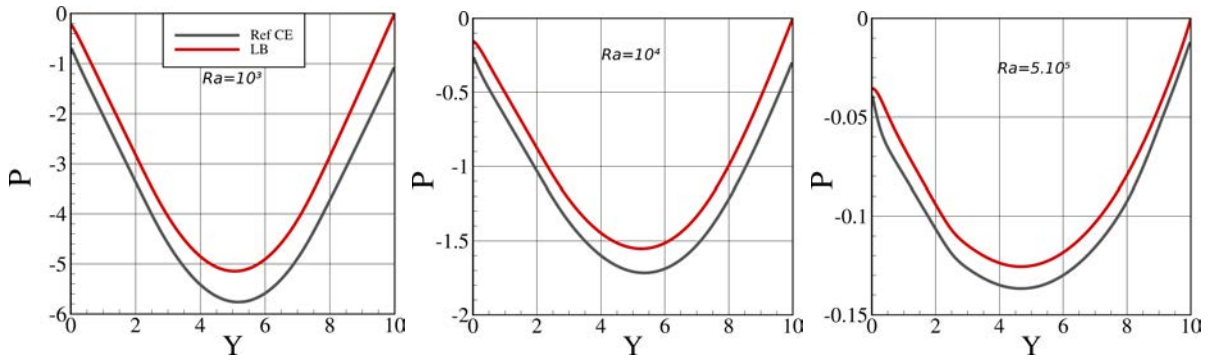


(b) *interface haute*

FIGURE 9.11 – *Comparaison de P à différentes hauteurs près de l'interface haute pour* $Ra = 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. *Pour l'interface basse : trait plein* $y = 0$, *trait pointillé* $y = 0.12$ *et trait mixte* $y = 0.24$. *Pour l'interface haute : trait plein* $y = Rf_c$, *trait pointillé :* $y = 9.88$ *et trait mixte* $y = 9.76$

La figure 9.11 montre la pression motrice à différentes hauteurs près de l'interface basse

du canal. Il apparaît que le profil de pression motrice est plutôt concave pour la solution de référence et convexe pour le cas LB, les profils sont ainsi opposés. De plus on observe le fait que le cas LB ne prend pas en compte les effets visqueux à bas nombre de Rayleigh : la pression motrice est beaucoup plus faible pour la solution de référence que pour le cas LB. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, la pression motrice à l'interface basse au point $x = 0$ pour le cas LB tend vers la pression motrice obtenue avec le cas $CE640$. Au centre du canal la pression motrice peut être modélisée en appliquant la relation de Bernoulli lorsque les effets visqueux sont négligeables. A l'interface haute (figure 9.11), il existe aussi un écart de pression motrice entre le cas LB et la solution de référence. Cette écart tend à se réduire lorsque le nombre de Rayleigh augmente. On explique cette différence de pression motrice par le fait que le cas LB ne prend pas en compte la perte de pression liée à l'entraînement du fluide dans le milieu extérieur. Les profils de pression motrice le long de la ligne médiane (figure 9.12) montrent un comportement similaire avec cependant un décalage (non constant selon y) en raison de la mauvaise modélisation des interfaces.



(a) *interface basse*

FIGURE 9.12 – *Comparaison de P le long de la ligne médiane ($x = 0$) du canal entre le cas LB et CE640 pour $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$*

Vitesse horizontale On observe aussi des différences sur les résultats obtenus pour la vitesse verticale à l'interface basse du canal (voir figure 9.13). Comme observé dans le chapitre précédent, le cas $CE640$ présente une vitesse horizontale non nulle à l'interface basse et une décélération de celle-ci dès l'interface basse du canal. Au contraire, la vitesse horizontale à l'interface basse est nulle pour le cas LB (de part les conditions limites imposées et la méthode de résolution) et augmente (en valeur absolue) avec y. Ce comportement de la vitesse

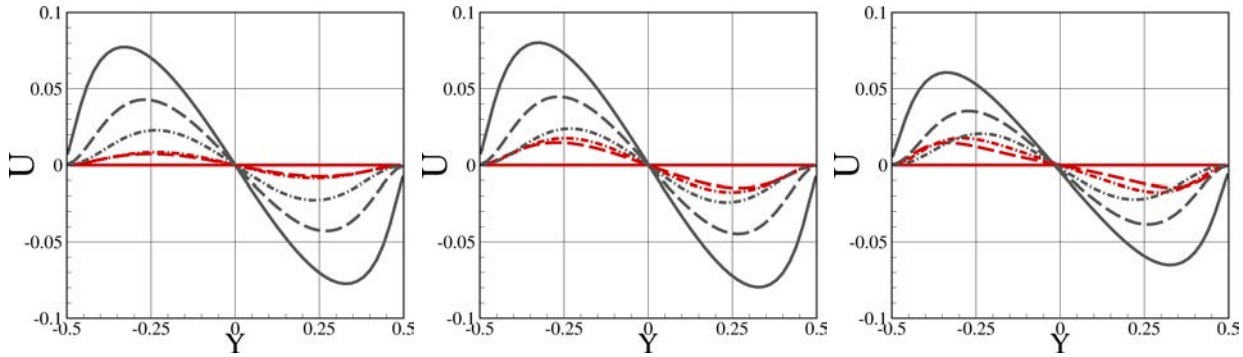


FIGURE 9.13 – *Comparaison de U à différentes hauteurs près de l'interface basse pour $Ra = 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. Trait plein : $y = 0$, trait pointillé : $y = 0.12$ et trait mixte $y = 0.24$*

horizontale proche de l'interface basse du canal n'est ainsi pas en accord avec les solutions de référence. Comme évoqué pour la méthode du principe de superposition, il nous faudrait pouvoir imposer la composante tangentielle τ du vecteur des contraintes comme nulle. Pour

les mêmes raisons que celles évoquées dans le chapitre précédant, imposer une contrainte tangentielle nulle mènerait alors à un écoulement divergent dans la partie basse.

Bilan Nous avons montré ici que le jeu de conditions limites LB, par comparaison avec les solutions de référence, permet de prédire correctement les débits de fluide entrant par les interfaces haute et basse du canal ainsi que la vitesse verticale. Cependant, la pression motrice et la vitesse horizontale ne sont pas correctement prédites et il semble nécessaire d'améliorer la modélisation de ces grandeurs physiques.

9.3 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, une modélisation des interfaces du canal avec des conditions limites de type Bernoulli a été effectuée. Les interfaces haute et basse du domaine de calcul sont situées sur les noeuds scalaires de la pression motrice et l'on considère des conditions limites de type Neumann sur la vitesse verticale et de type Dirichlet sur la vitesse horizontale et la pression motrice. Nous avons montré que dans ce cas le noyau de l'opérateur de Stokes est réduit au singleton $\{0\}$ et que l'utilisation du principe de superposition pour résoudre le problème n'est ainsi pas nécessaire.

Nos résultats ont ensuite été comparés avec ceux obtenus par différentes équipes françaises dans le cadre d'un exercice de comparaison numérique. De très bon accords ont été obtenus pour les quatre jeux de conditions limites considérés. Nous avons mis en évidence que la couche limite le long de la paroi chauffée a un comportement robuste et ne dépend pas des choix de modélisation aux interfaces du canal. Au contraire les débits de fluide entrant par les interfaces hautes et basse du canal sont fonction des conditions limites sur la pression motrice. Il a ensuite été mis en évidence qu'imposer une pression motrice uniforme égale à $\frac{-G_{in}(y=0)^2}{2}$ à l'interface basse du canal (cas GB et $GB0$) mène à un écoulement déjà établit alors que les solutions de référence de la partie II mettent en évidence un établissement de l'écoulement dans la partie basse du canal. Les jeux de conditions limites où la pression mortice à l'interface basse du canal est non-uniforme (cas LB et $LB0$) et égale à $\frac{-V(x,0)^2}{2}$ permettent d'avoir cet établissement dans la partie basse.

Pour mieux comprendre l'influence des conditions limites sur la pression motrice aux interfaces une étude a été effectuée sur une large plage du nombre de Rayleigh. Nous avons ainsi montré qu'imposer une pression uniformément nulle en sortie du canal (cas $LB0$ et $GB0$) mène à des écoulements non-physiques où le fluide entre par l'interface haute pour sortir par les interfaces haute et basse. Seul le jeu LB a alors été identifié comme capable de représenter l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical. Les résultats obtenus pour ce jeu de condition limites ont ainsi été comparés avec les solutions de référence de la partie II. Nous avons montré que malgré une mauvaise représentation des champs de pression motrice et de vitesse horizontale au niveau des interfaces du canal, la vitesse verticale ainsi que les débits de fluide entrant ou sortant du canal sont correctement estimés. Une plus grande dispersion des résultats est observée à bas nombre de Rayleigh dû au fait que les conditions de type Bernoulli négligent les effets visqueux. Plus le nombre de Rayleigh est élevé plus le cas LB peut-être vu comme une bonne modélisation des interfaces.

Ce chapitre montre ainsi que les conditions de Bernoulli peuvent être utilisées en première approximation et plutôt à haut nombre de Rayleigh. Il est cependant nécessaire d'avoir une meilleure modélisation de la pression motrice et de la vitesse horizontale aux interfaces du canal afin de pouvoir imposer une vitesse horizontale non nulle aux interfaces tout en satisfaisant la condition de divergence nulle : cela fait l'objet du chapitre suivant.

Bibliographie

P. Angot, J.P. Caltagirone, et P. Fabire. A Fast Vector Penalty-projection Method for Incompressible Non-homogeneous or Multiphase Navie-Stkoes Problems. *Applied Mathematics Letter 25*, 11, 2012.

W. Aung. Fully Developed Laminar Free Convection Between Vertical Plates Heated Asymmetrically. *International Journal Heat Mass Transfer*, 15 :1577–1580, 1972.

E. Chénier, R. Eymard, et R. Herbin. A Collocated Finite Volume Scheme to Solve Free Convection for General Non-conforming Grids. *Computational Physics*, 228 :2296–2311, 2009.

E. Chénier, R. Eymard, et O. Touazi. Numerical Results Using a Collocated Finite Volume Scheme on Unstructured Grids for Incompressible Fluid Flows. *Numerical Heat Transfer Part B*, 49 :259–276, 2006.

A.M Dalbert, F. Penot, et J.-L. Peube. Influence des conditions d'entrée sur l'écoulement de convection naturelle dans un thermosiphon vertical. *C. R. Académie des Sciences*, pages 1345–1347, 1981.

G. Desrayaud, R. Bennacer, J.-P. Caltagirone, E. Chenier, A. Joulin, N. Laaroussi, et K. Mojtabi. Etude numérique comparative des écoulements thermoconvectifs dans un canal vertical chauffé asymmétriquement. Dans *8 ème Colloque Franco-Québecquois sur la Thermique des Systemes, Montréal, Art.-06-14*, 2007.

G. Desrayaud, E. Chenier, A. Joulin, A. Bastide, B. Brangeon, J.P. Caltagirone, Y. Cherif, R. Eymard, C. Garnier, S. Giroux-Julien, Y. Harnane, P. Joubert, N. Laaroussi, S. Lassue, P. Le Quéré, R. Li, D. Saury, A. Sergent, S. Xin, et A. Zoubir. Benchmark Solutions for Natural Convection Flows in Vertical Channels Submitted to Different Open Boundary Conditions. *International Journal of Thermal Sciences*, 72 :18–33, 2013.

FDS. http ://www.fire.nist.gov/fds.

M. Fortin et Glowinski. Méthodes de lagrangien augmenté : Application à la résolution numérique de problèmes aux limites. *Dunod, Paris*, 1982.

K. Goda. A Multistep Technique With Implicit Difference Schemes for Calculating Two - or Three - Dimensional Cavity Flows. *Journal of Computational Physics*, 30 :76–95, 1979.

F. Marcondes et C.R. Maliska. Treatment of Inlet Boundary Conditions in Natural-convection Flows in Open-ended Channels. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 35 :317–345, 1999.

OpenFOAM. http ://www.openfoam.com. 2012.

E.M. Sparrow, G.M. Chrysler, et L.F. Azevedo. Observed flow reversals and measured-predicted nussel numbers for natural convection in a one-sided heated vertical channel. *Journal of Heat Transfer*, 106 :325–332, 1984.

O Touazi, E. Chénier, et R. Eymard. Simulation of Natural Convection With the Collocated Clustered Finite Volume Scheme. *Computational Fluids*, 37 :1138–1147, 2008.

S. Vincent, J.P. Caltagirone, P. Lubin, et T.N. Randrianarivelo. An Adaptative Augmented Lagrangian Method for Three-dimensional Multimaterial Flows. *Computational Fluids*, 33 : 1273–1289, 2004.

A. Zoubir, S. Xin, S. Giroux-Julien, et C. Ménézo. Etude numérique des transferts thermoconvectifs dans un canal d'air vertical à flux imposé. *Proceedings of Congrès SFT*, 228 :163–168, 2011.

10

Nouvelle approche pour les conditions limites aux interfaces du canal

Sommaire

10.1 Bilan des premières approches . . . 147
10.2 Autres approches dans la littérature . . . 147
10.3 Méthodes numériques . . . 149
10.3.1 Conditions limites . . . 149
10.3.2 Frontière du domaine de calcul . . . 151
10.3.3 Algorithme de résolution . . . 152
10.3.4 Implémentation numérique des conditions limites sur la vitesse . . . 154
10.4 Modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal . . . 155
10.4.1 Imposition de la pression motrice extraite des solutions numériques de référence 155
10.4.2 Calcul de la pression par l'intégration de l'équation de quantité de mouvement pour U . . . 157
10.4.3 Condition limite de type Robin pour la pression motrice . . . 158
10.5 Résultats et discussion . . . 161
10.6 Conclusion et perspectives . . . 167
Bibliographie . . . 167

Une nouvelle approche pour la modélisation des interfaces du canal est proposée dans ce chapitre. Celle-ci se base sur l'hypothèse qu'à une certaine distance des interfaces la pression motrice est connue et égale à la pression extérieure. Le début de ce chapitre est consacré à un bilan des approches de résolution étudiées jusqu'ici ainsi qu'à un bref état de l'art sur les conditions limites sur le tenseur des contraintes. Par la suite, la modélisation des interfaces est présentée et les conditions limites de type Robin pour la pression motrice sont introduites. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à ceux de la partie II. Nous montrons que l'approche présentée dans ce chapitre donne de très bons résultats et permet d'améliorer grandement la modélisation de la pression motrice et de la vitesse horizontale aux interfaces du canal.

10.1 Bilan des premières approches

Dans la partie III, nous cherchons à établir un jeu de conditions limites permettant de modéliser un canal vertical plongé au milieu d'un environnement infini sans simuler celui-ci. Pour ce faire, nous avons commencé dans la partie II par établir des solutions numériques de référence en simulant un canal plongé au milieu d'un réservoir de grande taille.

Au chapitre 8, un problème bien posé a été résolu numériquement grâce au principe de superposition. Il a été montré qu'une condition limite de cisaillement nulle était nécessaire pour modéliser correctement l'écoulement entrant à l'interface basse du canal.

Au chapitre 9, nous avons montré que pour obtenir une vitesse horizontale non nulle aux interfaces il était nécessaire d'imposer la condition de divergence nulle sur la vitesse verticale (et non pas sur la vitesse horizontale en imposant $U = 0$).

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme de résolution reprenant ces conclusions. Il reste cependant à définir des conditions limites pour la pression. Nous explorons successivement plusieurs approches :

- en considérant connu le profil de pression,
- en résolvant l'équation de conservation de quantité de mouvement ρU sur les interfaces,
- en modélisant l'interaction canal / environnement au moyen d'une condition limite de type Robin.

10.2 Autres approches dans la littérature

Dans la littérature, des approches se basant sur l'imposition de conditions limites sur le tenseur des contraintes sont proposées pour modéliser les interfaces de milieux ouverts ou semi-confinés. Nous rappelons que dans le cas $2D$, le tenseur des contraintes σ en un point (x, y) s'écrit sous la forme

$$\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x,y) & \tau(x,y) \\ \\ \tau(x,y) & \sigma_{yy}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{10.1}$$

où σ_{xx} est la contrainte de traction dans la direction $\vec{e_x}$, σ_{yy} la contrainte de traction dans la direction $\vec{e_y}$ et τ la contrainte de cisaillement. Sous l'hypothèse d'un fluide newtonien et dans le cadre de l'adimensionnement utilisé dans notre étude, le tenseur des contraintes s'exprime comme

$$\sigma(x,y) = \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left[\nabla \mathbf{V}(x,y) + (\nabla \mathbf{V}(x,y))^t \right] - P(x,y)\, \mathbf{Id}. \tag{10.2}$$

Les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent donc de la manière suivante

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(x,y) &= \dfrac{2\,Pr}{\sqrt{Ra}} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) - P(x,y), \\ \\ \sigma_{yy}(x,y) &= \dfrac{2\,Pr}{\sqrt{Ra}} \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) - P(x,y), \\ \\ \tau(x,y) &= \dfrac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left[\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) \right]. \end{cases} \tag{10.3}$$

Le vecteur des contraintes $\vec{F}$ s'appliquant sur une surface dont la normale est $\vec{n}$ est ainsi

$$\sigma(x,y)\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ \\ F_y(x,y) \end{pmatrix}, \tag{10.4}$$

où $F = F_x(x,y)\,\vec{e_x} + F_y(x,y)\,\vec{e_y}$ est la force par unité de surface s'appliquant au point (x,y). Pour plus de détails concernant le cadre mathématique lié à l'imposition des conditions limites sur le tenseur des contraintes $\vec{F}\cdot\vec{n}$, on peut consulter Guermond et al. (2005).

Une condition limite basée sur la contrainte s'exerçant à une interface ouverte a été utilisée pour étudier différents écoulements : écoulement autour d'un cylindre, d'une marche descendante ou pour la bifurcation en Y d'un canal (Liu 2009). Ce type d'étude considère une condition de Dirichlet homogène sur la composante de traction du vecteur des contraintes comme condition limite de sortie pour des écoulements de convection forcée .

Dans le cas de la convection naturelle autour d'un fil chaud, Xin et al. (2004) ont considéré un domaine extérieur sur lequel est appliqué une condition de Dirichlet homogène sur le pseudo tenseur des contraintes

$$\sigma'(x,y) = \frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\,\nabla\mathbf{V}(x,y) - P(x,y)\,\mathbf{Id}. \tag{10.5}$$

Les résultats obtenus sont en bon accords avec les résultats expérimentaux. Cependant, cette étude se différencie de notre problème par le fait que les conditions limites sont imposées au loin de l'objet d'étude car ici le domaine de calcul inclut le fil chaud et son environnement extérieur.

Récemment, Poux et al. (2011) se sont intéressés aux conditions limites de traction et à leur implémentation dans le cadre de schéma de prédiction-projection. L'étude porte principalement sur des écoulements de convection forcée semi-confinés où des conditions de Dirichlet sont imposées sur la contrainte de traction pour modéliser le fluide sortant. Dans sa thèse, Poux (2012) évoque aussi la possibilité d'appliquer une condition limite sur le gradient normal de la composante de traction σ_{yy} à l'interface de sortie comme proposé par Papanastasiou et al. (1992). Cette approche permettrait ainsi de moins contraindre l'écoulement sortant. Cependant, il décrit qu'aucun résultat satisfaisant n'a été obtenu avec une condition limite de traction libre ($\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0$).

L'étude de Tkachenko et al. (2014) s'intéresse à l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical chauffé. Des extensions aux interfaces haute et basse sont ajoutées au canal vertical étudié afin de s'affranchir des conditions limites aux interfaces canal/environnement. Au niveau de ces extensions, il est alors considéré des conditions limites de contrainte libre (le gradient normal de la contrainte de traction est nulle). Cette étude se rapproche du problème que l'on étudie mais les conditions limites restent imposées au loin du canal.

Les points communs à toutes ces études résident dans la connaissance *a priori* de $\vec{F}$ ou dans l'application des conditions limites au loin de l'objet étudié. Dans le cas de la convection naturelle dans un canal vertical, nous ne connaissons *a priori* pas la valeur de la contrainte aux interfaces du canal. De plus, aux interfaces haute et basse nous ne connaissons *a priori* pas le sens de l'écoulement. Les interfaces peuvent ainsi jouer le rôle d'une entrée et/ou d'une sortie pour le fluide. Ainsi, des conditions de type Dirichlet sur la contrainte de traction σ_{yy} semblent difficiles à appliquer pour notre problème. Cependant l'aspiration du fluide dans la partie basse du canal (partie non chauffée) est due à la résultante des forces de flottabilité

et des forces de frottements s'exerçant à l'intérieur du canal. Cette résultante est une force orientée selon $\vec{e_y}$, d'où $\vec{F} = F_y(x,0)\,\vec{ey}$, d'où $\tau = 0$. Ceci justifie donc les conclusions obtenues au chapitre 8 :

$$\sigma_{yy}(x,0) \neq 0 \text{ et } \tau(x,0) = 0. \tag{10.6}$$

Il nous reste cependant à définir les conditions limites sur la pression motrice aux interfaces. Nous avons montré dans la partie II que pour un système fermé des conditions de Neumann homogène sont classiquement retenues pour la pression motrice. Dans le chapitre 8 nous avons montré des conditions de Neumann aux interfaces sur la pression motrice et sur les deux composantes de la vitesse mène à un problème mal posé. Des conditions de type Dirichlet pour la pression motrice comme utilisées dans le chapitre 9 mènent à un problème bien posé mais ne permettent pas de modéliser correctement la pression motrice. Dans ce chapitre, nous considèrons le troisième type de condition limite : des conditions mixtes ou de type Robin. Ce type de condition a par exemple été utilisé par différents auteurs pour le traitement des conditions limites pour un film mince de liquide (Higgins (1982), Bixler et Scriven (1987) et Novy et al. (1991)).

10.3 Méthodes numériques

10.3.1 Conditions limites

Conditions limites sur la vitesse verticale Dans ce chapitre, nous utilisons la condition de divergence nulle pour le champ de vitesse comme condition limite aux interfaces haute et basse du canal. La divergence nulle ne pouvant pas être imposée de manière directe, une condition de Neumann non homogène sur la vitesse verticale est appliquée aux frontières haute et basse du domaine de calcul. D'où

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x,0) \text{ et } \frac{\partial V}{\partial y}(x,Rf_c) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x,Rf_c). \tag{10.7}$$

Conditions limites pour la vitesse horizontale : interface basse Nous supposons qu'à l'interface basse du canal, il n'existe que de la traction pure. La normale sortante à l'interface basse du canal est $\vec{n} = -\vec{e_y}$. Le vecteur contrainte au niveau de l'interface basse s'écrit alors

$$\sigma(x,0)\cdot\vec{n} = -\tau(x,0)\,\vec{e_x} - \sigma_{yy}(x,0)\,\vec{e_y} \text{ avec } \tau(x,0) = 0. \tag{10.8}$$

Sous cette hypothèse, à l'interface basse l'équation de quantité de mouvement pour V dans le cas stationnaire s'écrit alors comme

$$U\frac{\partial V}{\partial x}(x,0) + V\frac{\partial V}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}(x,0) + Pr\,\underbrace{T_(x,0)}_{\approx 0}. \tag{10.9}$$

Le gradient normal de la contrainte de traction est alors directement lié aux termes d'inertie. La différence avec une condition de traction libre où $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}(x,0) = 0$ réside dans le fait que les termes d'inertie sont ici pris en compte. De plus, aucune valeur n'est imposée pour la contrainte de traction σ_{yy}, seule la contrainte de cisaillement $\tau(x,0) = 0$. Comme nous ne pouvons pas imposer directement $\tau(x,0) = 0$ à l'interface, puisque la méthode de résolution s'effectue avec les variables primitives (U, V et P), cela se traduit alors par l'imposition d'une condition limite de Neumann non homogène sur la vitesse horizontale à l'interface basse

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,0). \tag{10.10}$$

Remarque 10.1 *L'imposition de $\tau(x,0) = 0$ permet de plus de respecter le fait qu'au niveau de l'interface basse*

$$sign\left(\frac{\partial U}{\partial y}(x,0)\right) = -sign\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,0)\right). \tag{10.11}$$

Cela correspond au comportement caractéristique des solutions numériques de référence de la partie II où il existe une décélération de la vitesse horizontale dès l'interface basse du canal. Comme nous l'avons fait remarquer dans les chapitres précédents, cette condition permet d'avoir cette décélération.

Conditions limites pour la vitesse horizontale : interface haute A l'interface haute du canal, il n'est pas possible de considérer de la traction pure (donc d'imposer $\tau = 0$) car le profil de vitesse verticale n'est pas symétrique : la poussée d'Archimède s'exercent plutôt du côté de la paroi chauffée. De plus lorsqu'il existe une zone de recirculation, le fluide sort du côté de la paroi chauffée et entre du côté de la paroi non-chauffée créant ainsi une contrainte de cisaillement. Nous choisissons d'imposer une condition de Neumann homogène sur la vitesse horizontale à l'interface haute que le fluide entre ou sort du canal

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, Rf_c) = 0. \tag{10.12}$$

Conditions limites sur la pression motrice Comme montré dans les chapitres précédents, la modélisation de la pression motrice aux interfaces canal/environnement pose de nombreuses questions. Plusieurs étapes nous ont conduit à proposer de nouvelles conditions limites sur la pression motrice.

1) Nous avons imposé la pression motrice extraite des solutions numériques de référence $CE640$ comme conditions limites pour la pression motrice, dans l'objectif de vérifier la pertinence des conditions limites retenues sur la vitesse.

2) Dans l'objectif de s'affranchir de la connaissance *a priori* du champ de pression motrice aux interfaces, nous avons calculé la pression motrice aux interfaces par intégration de l'équation de quantité de mouvement pour ρU. Cette méthode permet de prendre en compte dans le calcul de la pression motrice aux interfaces les termes visqueux et convectifs quelque soit le nombre de Rayleigh.

3) En modélisant l'écoulement dans le milieu extérieur proche des interfaces, nous proposerons des conditions limites de type Robin permettant de prendre en compte les effets visqueux et convectifs. Comme évoqué dans la littérature (Higgins (1982), Bixler et Scriven (1987) et Novy et al. (1991)), les conditions de Robin semble plus apte à représenter un milie tronqué que des condions de type Dirichlet ou Neumann.

Dans tous les cas, ces différentes stratégies reposent sur l'imposition d'une condition de Dirichlet sur la pression motrice pour la résolution du problème discrétisé en temps et en espace. Ces différentes stratégies sont détaillées par la suite (voir section 10.4).

Récapitulatif des conditions limites Les conditions limites retenues dans ce chapitre pour le problème vitesse-pression sont donc :

- pour l'interface basse

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,0) &= -\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,0), \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x,0) &= -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,0), \\ P(x,0) &= P_B(x), \end{cases} \tag{10.13}$$

- pour l'interface haute

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial y}(x, Rf_c) &= -\dfrac{\partial U}{\partial x}(x, Rf_c), \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x, Rf_c) &= 0, \\ P(x, Rf_c) &= P_T(x). \end{cases} \tag{10.14}$$

P_T et P_B sont calculés de différentes manières dans la suite de ce chapitre. Sur les parois du canal les deux composantes de la vitesse sont nulles, et des conditions de Neumann homogène sont imposées pour la pression. A l'état initial, le fluide est au repos à pression motrice égale à $P_{ext} = 0$ et à température constante $T = 0$.

Remarque 10.2 *Dans ce chapitre, les conditions limites retenues aux interfaces sont du même type (Neumann pour les vitesses et Dirichlet pour la pression) que celles retenues dans le chapitre 9. Le résultat de la SVD de l'opérateur est donc similaire : le noyau de l'opérateur de Stokes est réduit au singleton* $\{0\}$.

10.3.2 Frontière du domaine de calcul

Dans ce chapitre les frontières de domaine de calcul sont situées sur les noeuds scalaires de la pression motrice (en $J = 1$ et en $J = NJ$). La figure 10.1 donne le domaine de calcul retenu. Ce choix est motivé par l'imposition d'une vitesse horizontale non nulle aux interfaces.

Nombre d'inconnues du problème vitesse-pression Ces inconnues sont situées dans le domaine de calcul et sur les frontières de celui-ci :

- inconnues pour U : $(NI-1) \times (NJ)$,
- inconnues pour V : $(NI-2) \times (NJ-1)$,
- inconnues pour P : $(NI-2) \times (NJ)$,

Nous avons $(NI-1) \times (NJ) + (NI-2) \times (NJ-1) + (NI-2) \times (NJ)$ inconnues (U, V, P).

Nombre d'équations du problème vitesse-pression Ces équations proviennent des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement pour U et V et des conditions limites connues de manière explicite sur les frontières du domaine de calcul :

- l'équation de conservation de la masse est résolue sur les noeuds scalaires de la pression $P_{I,J}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $2 \leq J \leq NJ-1$: $(NI-2) \times (NJ-2)$ équations,
- l'équation de quantité de mouvement pour U est résolue au point $U_{i,J}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$ et $2 \leq J \leq NJ-1$: $(NI-3) \times (NJ-2)$ équations,
- l'équation de quantité de mouvement pour V est résolue au point $V_{I,j}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ et $1 \leq j \leq NJ-1$: $(NI-2) \times (NJ-1)$ équations,
- les conditions limites $U_{i=1,J}$ et $U_{i=NI-1,J}$ pour $2 \leq J \leq NJ-1$ sur les parois verticales du canal Γ_W : $2 \times (NJ-2)$ équations,
- les conditions limites $U_{i,J=1}$ et $U_{i,J=NJ}$ pour $1 \leq i \leq NI-1$ sur les frontières haute et basse du domaine de calcul : $2 \times (NI-1)$ équations,
- les conditions limites $P_{I,J=1}$ et $P_{I,J=NJ-1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$ sur les frontières haute et basse du domaine de calcul : $2 \times (NI-2)$ équations.

Nous résolvons $(NI-2) \times (NJ) + (NI-1) \times (NJ) + (NI-2) \times (NJ-1)$ équations, soit autant que le nombres d'inconnues.

Remarque 10.3 *Sur les frontières haute et basse du domaine de calcul, les conditions limites pour U sont explicites (on impose la valeur de U dans l'opérateur de Stokes* $\mathbf{S}$*) alors que celle pour V sont imposées de manière implicite (l'opérateur de Stokes est modifié pour imposer la condition limite souhaitée). Sur*

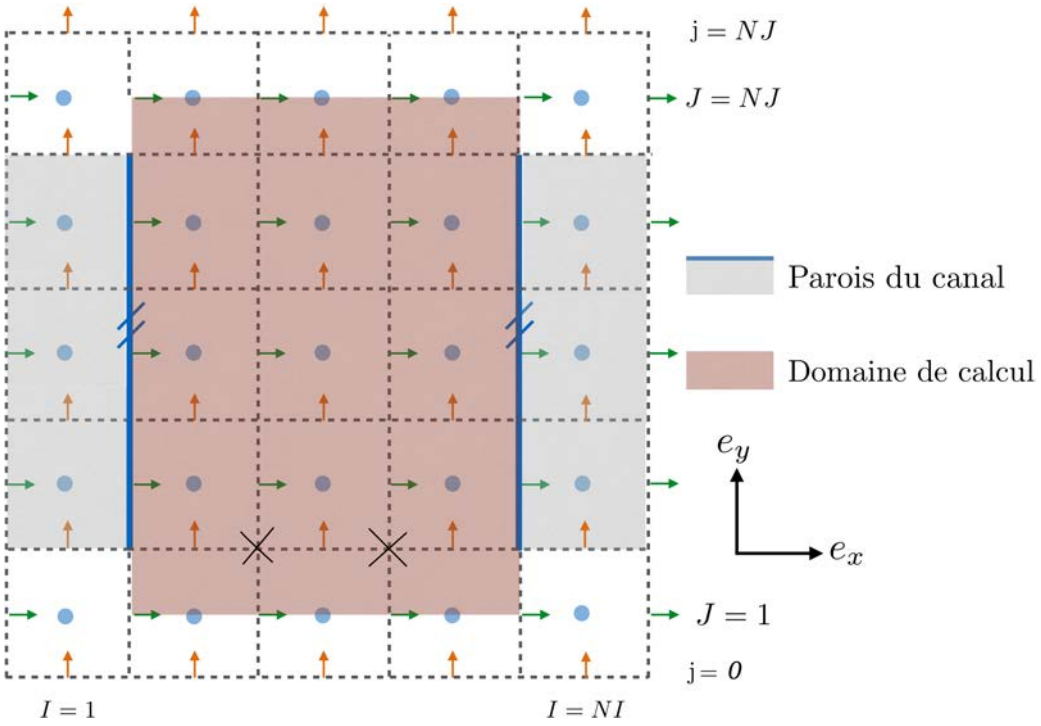


FIGURE 10.1 – *Frontière du domaine de calcul*

les parois du canal Γ_W*, les conditions limites pour* U *sont explicites et celles pour* V *sont implicites. Les conditions limites pour* P *sur les frontières haute et basse du domaine de calcul sont imposées explicitement.*

10.3.3 Algorithme de résolution

Comme précédemment, un algorithme de prédiction-projection est utilisé pour découpler le problème vitesse-pression. On présente l'algorithme modifié pour satisfaire les conditions limites considérées dans ce chapitre.

Etape de prédiction L'équation de quantité de mouvement pour le champ prédit U^* est d'abord résolue.

$$\begin{cases} U^* - \dfrac{2\Delta t}{3}\dfrac{Pr}{\sqrt{Ra}} \triangle U^* + \dfrac{2\Delta t}{3}\nabla_x P^n = S_U^{n,n-1} \text{ dans } \Omega \times [0,t_f], \\ U^* = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_W \times [0,t_f], \\ \dfrac{\partial U^*}{\partial y} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_T \times [0,t_f], \\ \dfrac{\partial U^*}{\partial y} = -2\dfrac{\partial V^n}{\partial x} + \dfrac{\partial V^{n-1}}{\partial x} \qquad \text{sur } \Gamma_B \times [0,t_f]. \end{cases} \tag{10.15}$$

On remarque que pour imposer la condition limite traduisant le fait que $\tau = 0$ à l'interface basse, il est nécessaire de connaître le champ V^*. Ce champ n'étant pas connu à ce moment du calcul, pour le schéma en temps nous considérons l'extrapolation $V^* = 2V^n - V^{n-1}$.

L'équation de quantité de mouvement pour le champ prédit V^* est ensuite résolue.

$$\begin{cases} V^* - \frac{2\Delta t}{3}\frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \triangle V^* + \frac{2\Delta t}{3}\nabla_y P^n = S_V^{n,n-1} \text{ dans } \Omega \times [0,t_f], \\ V^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_W \times [0,t_f], \\ \frac{\partial V^*}{\partial y} = -\frac{\partial U^*}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma_T \times [0,t_f], \\ \frac{\partial V^*}{\partial y} = -\frac{\partial U^*}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma_B \times [0,t_f]. \end{cases} \tag{10.16}$$

La condition limite sur la divergence nulle aux interfaces basse et haute du canal est alors imposée en utilisant le champ U^* venant d'être calculé.

Second étape : projection

$$\begin{cases} \Delta\phi^{n+1} = \frac{\nabla . \mathbf{V}^*}{\Delta t} \quad \text{dans } \Omega \times [0,t_f], \\ \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_W \times [0,t_f], \\ \phi^{n+1} = 2/3(P_T^{n+1} - P^n) \quad \text{sur } \Gamma_T \times [0,t_f], \\ \phi^{n+1} = 2/3(P_B^{n+1} - P^n) \quad \text{sur } \Gamma_B \times [0,t_f]. \end{cases} \tag{10.17}$$

où P_T^{n+1} et P_B^{n+1} sont calculés de manière à satisfaire les conditions limites retenues sur la pression motrice. Le détail de leur calcul est donné par la suite.

Troisième étape : correction A l'interface basse du canal, U^{n+1} est corrigé en prenant en compte V^*. La condition limite $\tau(x,0) = 0$ n'est alors pas exactement vérifiée. Cependant, lorsque l'on tend vers un écoulement stationnaire, on converge bien vers la condition limite souhaitée. Pour le champ V^{n+1}, aux interfaces basse et haute du canal, la condition de divergence nulle est bien respectée car calculée avec le champ U^{n+1}.

$$\begin{cases} U^{n+1} = U^* - \Delta t\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega \times [0,tf], \\ U^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_W \times [0,tf], \\ \frac{\partial U^{n+1}}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T \times [0,tf], \\ \frac{\partial U^{n+1}}{\partial y} = -\frac{\partial V^*}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma_B \times [0,tf]. \end{cases} \tag{10.18}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} V^{n+1} & = & V^* \quad -\Delta t\dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \text{dans } \Omega\times[0,tf],\\ V^{n+1} & = & 0 & \text{sur } \Gamma\times[0,tf],\\ \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial x} & \text{sur } \Gamma_T\times[0,tf],\\ \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial x} & \text{sur } \Gamma_B\times[0,tf]. \end{array}\right. \tag{10.19}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} P^{n+1} & = & P^n \quad +\dfrac{3}{2}\phi & \text{dans } \Omega\times[0,tf],\\ P^{n+1} & = & P_T^{n+1} & \text{sur } \Gamma_T\times[0,tf],\\ P^{n+1} & = & P_B^{n+1} & \text{sur } \Gamma_B\times[0,tf]. \end{array}\right. \tag{10.20}$$

10.3.4 Implémentation numérique des conditions limites sur la vitesse

Interface basse Nous souhaitons imposer la composante tangentielle du vecteur des contraintes nulle

- $\left.\dfrac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = -\left.\dfrac{\partial V^n}{\partial x}\right|_{\Gamma_B}$.

La condition limite sur $\frac{\partial U^*}{\partial y}$ est imposée explicitement dans l'opérateur de Stokes $\mathbf{S}$ en imposant les valeurs de $U^*_{i,J}$ pour $2 \leq i \leq NI-2$. La condition limite sur $\frac{\partial V^*}{\partial y}$ est imposée implicitement en modifiant l'opérateur de $\mathbf{S}$ en $V^*_{i,j=1}$ pour $2 \leq I \leq NI-1$. Cette modification est effectuée sur l'opérateur laplacien.

Pour un maillage décalé, la contrainte tangentielle se calcule naturellement au niveau des coins des cellules de la pression motrice marquée d'une croix X sur la figure 10.1. On pose donc

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = \dfrac{U^*_{i,J=2}-U^*_{i,J=1}}{\Delta y},\\ \left.\dfrac{\partial V^n}{\partial x}\right|_{\Gamma_B} = \dfrac{V^n_{I+1,j=1}-V^n_{I,j=1}}{\Delta x}. \end{array}\right. \tag{10.21}$$

Nous imposons ainsi

$$U^*_{i,J=1} = U^*_{i,J=2} + \Delta y\frac{V^*_{I+1,j=1}-V^*_{I,j=1}}{\Delta x} \text{ pour } 2 \leq i \leq NI-2. \tag{10.22}$$

Les valeurs de U^* au coin du domaine de calcul ($U^*_{i=1,J=1}$ et $U^*_{i=NI-1,J=1}$) sont traitées de manière particulière pour qu'il n'y ait pas de singularité. On impose alors la continuité de la pente de U au niveau des coins. Dans le cadre d'un maillage régulier ($\Delta x = cst$), nous imposons alors

$$U^*_{i=1,J=1} = 2\,U^*_{i=2,J=2} - U^*_{i=3,J=2} \text{ et } U^*_{i=NI-1,J=1} = 2\,U^*_{i=NI-2,J=2} - U^*_{i=NI-3,J=2}. \tag{10.23}$$

Nous souhaitons aussi imposer la condition de divergence nulle

- $\left.\frac{\partial V^*}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = -\left.\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{\Gamma_B}$.

La condition sur la divergence se calcule aux noeuds scalaires de la pression motrice. On pose alors

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial V^*}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = \frac{V^*_{I,j=1} - V^*_{I,j=0}}{\Delta y}, \\ \left.\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{\Gamma_B} = \frac{U^*_{i,J=1} - U^*_{i-1,J=1}}{\Delta x}. \end{cases} \tag{10.24}$$

Cette condition limite est imposée implicitement en modifiant l'opérateur de Stokes, via le calcul du Laplacien :

$$\begin{aligned} \Delta V^*\big|_{I,j=1} = & \frac{-2\,V^*_{I,j=1} + V^*_{I+1,j=1} + V^*_{I-1,j=1}}{\Delta x^2} + \frac{-V^*_{I,j=1} + V^*_{i,j=2}}{\Delta y^2} + \frac{\frac{U^*_{i,J=1} - U^*_{i-1,J=1}}{\Delta x}}{\Delta y} \\ & \text{pour } 2 \leq I \leq NI-1. \end{aligned} \tag{10.25}$$

Interface haute Nous souhaitons imposer une condition de Neumann homogène sur la vitesse verticale

- $\left.\frac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = 0.$

Nous posons ainsi

$$\left.\frac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = \frac{U^*_{i,J=NJ} - U^*_{i,J=NJ-1}}{\Delta y}, \tag{10.26}$$

La condition de Neumann homogène sur la vitesse horizontale s'écrit alors :

$$U^*_{i,J=NJ} = U^*_{i,J=NJ-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq NI-1. \tag{10.27}$$

Nous souhaitons aussi imposer la condition de divergence nulle

- $\left.\frac{\partial V^*}{\partial y}\right|_{\Gamma_B} = -\left.\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{\Gamma_B}$.

De la même manière qu'à l'interface basse, la contrainte de divergence nulle est imposée de manière implicite. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta V^*\big|_{I,j=NJ-1} = & \frac{-2\,V^*_{I,j=NJ-1} + V^*_{I+1,j=NJ-1} + V^*_{I-1,j=NJ-1}}{\Delta x^2} + \frac{-V^*_{I,j=NJ-1} + V^*_{i,j=NJ-2}}{\Delta y^2} \\ & - \frac{\frac{U^*_{i,J=NJ} - U^*_{i-1,J=NJ}}{\Delta x}}{\Delta y} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1. \end{aligned} \tag{10.28}$$

10.4 Modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal

10.4.1 Imposition de la pression motrice extraite des solutions numériques de référence

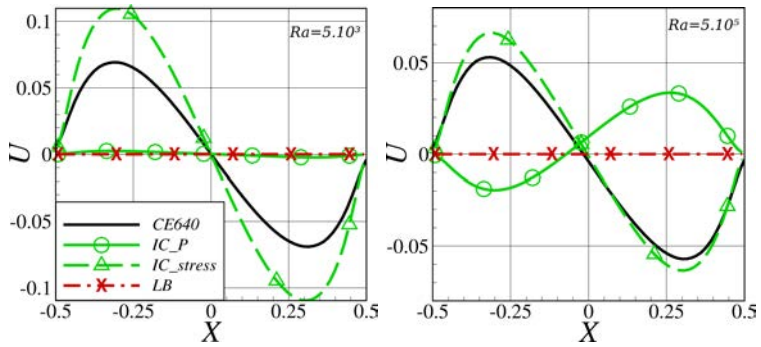
Pour cette première approche, nous imposons comme condition limite sur la pression motrice aux interfaces celle extraite des solutions numériques de référence de la partie II.

Ainsi nous imposons

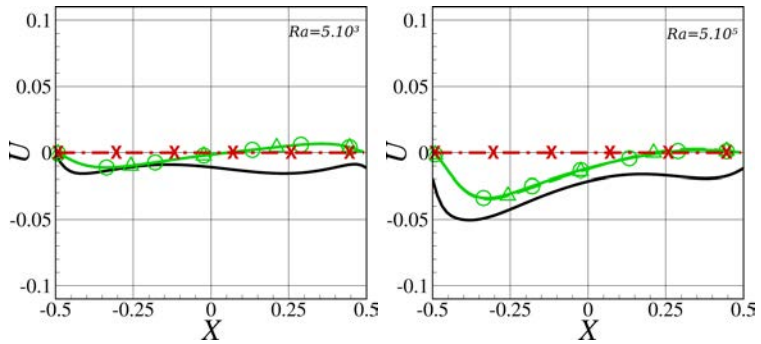
$$P_B^{n+1}(x) = P_{CE640}(x,0) \text{ et } P_T^{n+1}(x) = P_{CE640}(x, Rf_c). \tag{10.29}$$

Cette approche est noté *IC_stress*. L'objectif est de valider les conditions limites retenues sur les vitesses. De plus, nous comparons aussi les résultats avec :

- le cas *IC_P* pour lequel nous appliquons les mêmes conditions limites que le cas *IC_stress* sauf qu'à l'interface basse la condition $\tau = 0$ est remplacée par une condition de Neumann homogène sur la vitesse horizontale,
- le cas *LB* présenté dans le chapitre 9,
- les solutions numériques de référence *CE*640 de la partie II.



(a) *interface basse*

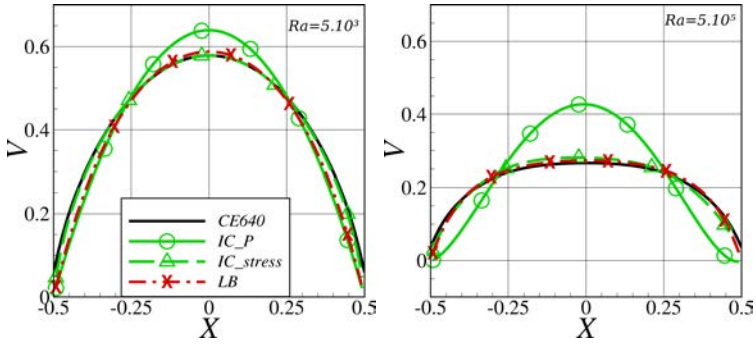


(b) *interface haute*

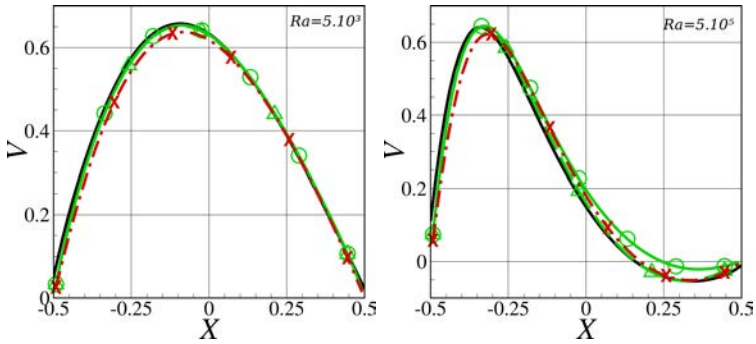
FIGURE 10.2 – *Comparaison de U aux interfaces haute et basse du canal entre les cas IC_stress, IC_P, LB et CE*640 *pour* $Ra = 5.10^3,\ 5.10^5$

La figure 10.2 montre ainsi que le cas *IC_stress* permet d'avoir une vitesse non nulle aux interfaces du canal contrairement à ce que l'on a observé pour le cas *LB*. La vitesse horizontale à l'interface basse est alors bien prédite (en comparant avec le cas *CE*640) pour $Ra = 5.10^5$ et légèrement surestimée pour $Ra = 5.10^3$. Nous observons aussi que si la condition limite $\tau(x,0) = 0$ est remplacée par une condition de Neumann homogène sur la vitesse horizontale (cas *IC_P*) alors la vitesse horizontale à l'interface basse n'est pas correctement prédite et un écoulement divergent (non physique) est même observé pour $Ra = 5.10^5$. Nous observons aussi que le cas *IC_stress* permet de prédire que le jet sortant du canal s'oriente vers la gauche (la vitesse horizontale à l'interface haute est négative) comme mis en évidence pour les solutions *CE*640. La vitesse horizontale à l'interface haute est cependant moins bien prédite que celle à l'interface basse (par comparaison avec *CE*640).

Comme le montre la figure 10.3, la vitesse verticale aux interfaces du canal obtenue pour le cas *IC_stress* est très proche de celle obtenue pour *CE*640 et ce quelque soit le nombre de Rayleigh considéré. Les résultats montrent même de meilleurs accords au niveau de l'interface haute qu'avec le cas *LB*. Pour le cas *IC_P*, la vitesse verticale n'est pas correctement prédite



(a) *interface basse*



(b) *interface haute*

FIGURE 10.3 – *Comparaison de V aux interfaces haute et basse du canal entre les cas IC_stress, IC_P, LB et CE640 pour* $Ra = 5.10^3,\ 5.10^5$

quelque soit le nombre de Rayleigh.

Cette brève étude permet donc de montrer que la seule connaissance de P couplée avec des conditions de Neumann homogène pour les deux composantes de la vitesse (cas IC_P) ne permet pas de retrouver l'écoulement à l'interface basse du canal. L'introduction de la condition limite $\tau = 0$ (cas IC_stress) à l'interface basse du canal permet alors de retrouver un écoulement aux interfaces très proches de celui observé pour les solutions numériques de référence (cas $CE640$). Cependant, cette approche nécessite la connaissance *a priori* de la pression motrice aux interfaces du canal. Dans notre cas, cette pression motrice est connue car nous avons simulé au préalable le canal et son environnement extérieur. Si on souhaite effectuer seulement la simulation restreinte aux limites géométriques du canal, il nous faut déterminer P aux interfaces par une autre méthode.

10.4.2 Calcul de la pression par l'intégration de l'équation de quantité de mouvement pour U

La première approche a permis de valider le choix des conditions limites sur les deux composantes de la vitesse aux interfaces du canal. Cependant, cette approche nécessite la connaissance *a priori* de la pression motrice aux interfaces. Pour calculer la pression motrice aux interfaces, nous pouvons intégrer l'équation de conservation de quantité de mouvement ρU selon $\vec{e_x}$. En supposant que tous les opérateurs sont correctement définis au niveau des interfaces du canal (ce qui est une hypothèse forte du point de vue mathématique), nous pouvons ainsi écrire

$$P_B^{n+1}(x) = P_B^{n+1}(0) \ + \ \frac{3}{2\Delta t}\int_0^x \left(S_U^{n,n-1}(x,0) - \tilde{U}^{n+1}(x,0) \right) dx + \ \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_0^x \Delta\tilde{U}^{n+1}(x,0)\, dx, \tag{10.30}$$

et

$$P_T^{n+1}(x) = P_T^{n+1}(0) + \frac{3}{2\Delta t}\int_0^x \left(S_U^{n,n-1}(x, Rf_c) - \tilde{U}^{n+1}(x, Rf_c)\right) dx + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\int_0^x \Delta\tilde{U}^{n+1}(x, Rf_c)\, dx, \tag{10.31}$$

où $\tilde{U}^{n+1} = 2\,U^n - U^{n-1} + o(\Delta t^2)$. $\tilde{U}^{n+1}$ respecte ainsi la condition d'incompressibilité. Si l'on connaît les valeurs de $P_B^{n+1}(0)$ et $P_T^{n+1}(0)$ il est alors possible de calculer la pression motrice aux interfaces du canal. Pour cette approche, une connaissance a priori de la pression motrice en un point de l'interface est donc nécessaire. De plus, il faut remarquer que les valeurs de $P_B^{n+1}(x)$ et $P_T^{n+1}(x)$ dépendent fortement des conditions limites sur la vitesse (car elles dépendent directement des valeurs de U et V aux interfaces.

Les tests effectués en utilisant cette approche ont montré qu'elle ne donnait pas de bons résultats au niveau de l'interface haute du canal. Cependant à bas nombre de Rayleigh et si $P_B^{n+1}(0) = 0$, le profil de pression motrice obtenu à l'interface basse est proche du cas $CE640$. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, les résultats se dégradent. De plus, pour que la méthode converge il est nécessaire de prendre des pas de temps très faibles de l'ordre de 10^{-5}. Cette méthode semble donc peut applicable mais montre que pour modéliser la pression motrice aux interfaces il est nécessaire de prendre en compte les termes convectifs et visqueux.

10.4.3 Condition limite de type Robin pour la pression motrice

Il est difficile de modéliser la pression motrice aux interfaces basse et haute du canal car elle dépend à la fois des effets visqueux et des effets convectifs. Dans la partie II, nous avons montré que la pression motrice proche des interfaces n'est pas égale à la pression motrice du milieu extérieur P_{ext} mais qu'au loin du canal elle reste constante et égale à P_{ext}. Nous supposons donc ici, qu'il existe une certaine distance selon $\vec{e_y}$ (notée L_{top} pour l'interface haute et L_{bot} pour l'interface basse, L_{top} et L_{bot} constantes positives) où le champ de pression motrice peut être considéré comme connu. La figure 10.4 explique cela de manière schématique. Pour notre cas d'étude comme l'on considère qu'au loin du canal la pression motrice est constante, nous supposons que $P(x, -L_{top}) = P(x, Rf_c + L_{bot}) = P_{ext}$.

Remarque 10.4 *Si le milieu extérieur est stratifié en pression motrice (par exemple à cause d'une stratification de température) alors la modélisation proposée est toujours valable avec l'hypothèse que $P(x, Rf_c + L_{top}) = P(x, L_{bot}) + S(L_{top} + Rf_c - L_{bot})$ avec S le gradient de stratification de la pression motrice dans le milieu extérieur.*

Afin de simplifier les notations on utilisera dorénavant L comme désignant soit L_{top}, soit $-L_{bot}$. Notre objectif est maintenant de modéliser l'écoulement dans la zone comprise entre l'interface (haute ou basse) du canal et une distance L de l'interface. On note cette zone Ω_P. La modélisation de l'écoulement dans Ω_P va nous permettre d'en déduire des conditions limites pour la pression motrice aux interfaces du canal. L'équation de quantité de mouvement dans le cas stationnaire selon $\vec{e_y}$ s'écrit sur Ω_P

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \underbrace{\frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\,\Delta V(x,y)}_{k_1\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)} + \underbrace{Pr\;T(x,y)}_{k_2\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)} \underbrace{- V(x,y)\frac{\partial V}{\partial y} + U(x,y)\frac{\partial V}{\partial x}}_{k_3\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}. \tag{10.32}$$

Nous émettons l'hypothèse que chacun des termes du membre de droite de l'équation 10.32 peut être modélisé comme un terme proportionnel au gradient de pression motrice (k_1, k_2 et k_3 sont supposés constants). En dérivant une fois l'équation 10.32 selon e_y, nous obtenons

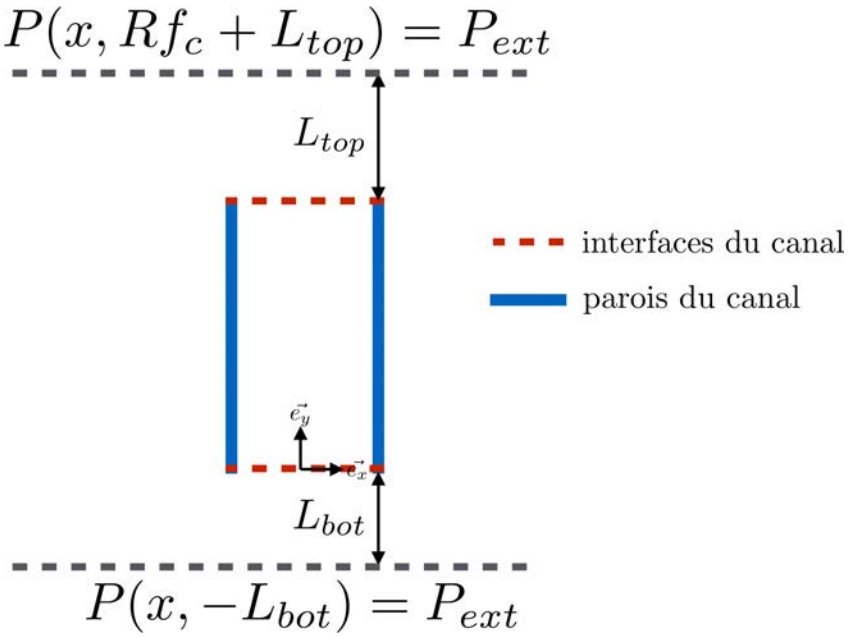


FIGURE 10.4 – *Schéma de principe pour la modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal*

alors pour la pression motrice

$$(1 - k_1 - k_2 + k_3)\Delta_y P = 0. \tag{10.33}$$

Remarque 10.5 *L'hypothèse supposant que k_1, k_2 et k_3 sont constants est une hypothèse forte et utilisée seulement en première approximation. Il faut garder à l'esprit que k_1, k_2 et k_3 dépend de x et de y.*

Par double intégration de cette équation, d'abord entre la position de l'interface (notée y_I) et une hauteur y située dans Ω_P puis entre la position de l'interface y_I et la position $y_I + L$ nous pouvons en déduire une condition limite de type Robin pour la pression motrice aux interfaces

$$\int_{y_I}^{y_I+L} \int_{y_I}^{y} \Delta_y P(x, y')dy'\, dy = P(x, y_I + L) - P(x, y_I) - L\,\frac{\partial P}{\partial y}(x, y_I) = 0. \tag{10.34}$$

On en déduit ainsi les conditions limites de type Robin pour la pression motrice aux interfaces

- pour l'interface haute :

$$P(x, Rf_c) + L_{top}\,\frac{\partial P}{\partial y}(x, Rf_c) = P_{ext}. \tag{10.35}$$

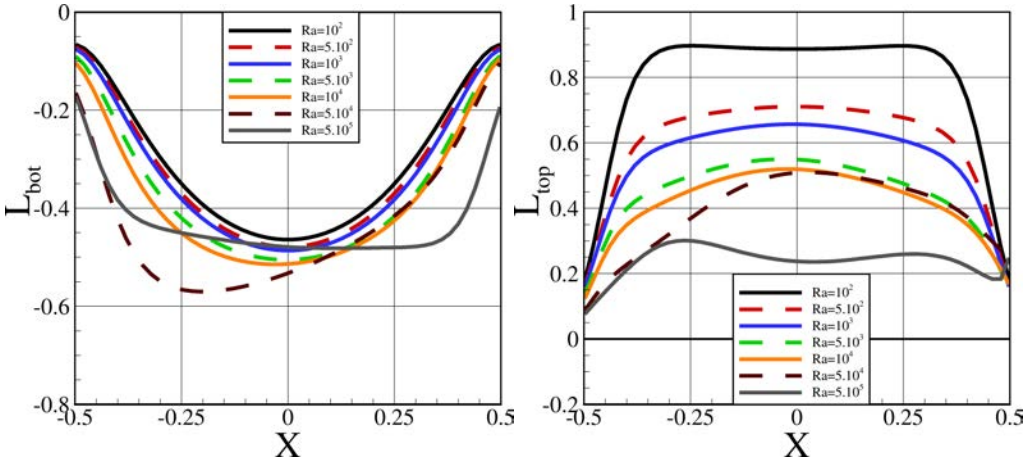
- pour l'interface basse :

$$P(x, 0) - L_{bot}\,\frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = P_{ext}. \tag{10.36}$$

Ces conditions de Robin pour la modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal font apparaître les distances L_{top} et L_{bot} qui ne sont *a priori* pas connues. Ces deux paramètres dépendent des effets convectifs, visqueux et de la poussée d'Archimède dans la zone Ω_P. Ils sont donc à définir *a priori* soit par des hypothèses de modélisation de l'écoulement soit par une connaissance de l'écoulement dans le milieu extérieur. Dans le cas général, les distances L_{top} et L_{bot} sont variables en temps et en espace selon $\vec{e_x}$. Par la suite nous notons ce jeu de condition limite *RBC* (Robin Boundary Condition).

La figure 10.5 montre la distribution spatiale de L_{bot} et L_{top} pour les solutions numériques de référence *CE*640 établies dans la partie II. Nous observons qu'à bas nombre de Rayleigh L_{top} est symétrique par rapport à l'axe du canal. Cela s'explique par le fait que l'écoulement

lui-même est symétrique. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, L_{top} se dissymétrise et diminue. Cette diminution de L_{top} avec le nombre de Rayleigh peut s'expliquer par la diminution des effets visqueux. Au contraire L_{bot} est plutôt le même quelque soit le nombre de Rayleigh et quasiment toujours symétrique. Pour $Ra = 5.10^4$, la dissymétrie observée s'explique par le fait que pour ce cas de référence l'aspiration n'est pas symétrique en raison d'une circulation globale dans le réservoir.



(a) *interface basse* (b) *interface haute*

FIGURE 10.5 – *Profil de L_{bot} et L_{top} pour les solutions numériques de référence CE640*

	L_{bot}	L_{top}
10^2	0.2801	0.9964
5.10^2	0.2940	0.7988
10^3	0.3190	0.7382
5.10^3	0.3259	0.6157
10^4	0.3359	0.5740
5.10^4	0.3683	0.5650
5.10^5	0.3563	0.2611

TABLEAU 10.1 – *Valeurs de L_{top} et L_{bot} obtenues pour les solutions de référence de la partie II*

Dans le cadre d'une première approximation et pour simplifier l'implémentation numériques des conditions limites, nous considérons par la suite que L_{top} et L_{bot} sont constantes selon x et ne varient pas en temps. Les valeurs de ces deux paramètres sont de plus estimées grâce aux solutions de référence établies dans la partie II. Le tableau 10.1 récapitule ainsi les valeurs retenues pour L_{top} et L_{bot} à différents nombres de Rayleigh. On remarque que L_{top} diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente, et que L_{bot} est à peu près constante avec le nombre de Rayleigh.

Implémentation numérique des conditions de Robin Nous développons ici le schéma en espace et en temps nous permettant d'imposer les conditions limites de Robin sur la pression motrice. On cherche ainsi à exprimer $P_T^{n+1}(x)$ et $P_B^{n+1}(x)$. Nous souhaitons donc imposer

$$\begin{cases} P(x,Rf_c)^{n+1} + L_{top}\dfrac{\partial P^{n+1}}{\partial y}(x,Rf_c) &= P_{ext} \text{ à l'interface haute ,} \\ \\ P(x,0)^{n+1} - L_{bot}\dfrac{\partial P^{n+1}}{\partial y}(x,0) &= P_{ext} \text{ à l'interface basse .} \end{cases} \tag{10.37}$$

Après discrétisation spatiale, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} P^{n+1}_{i,J=NJ} + L_{top}\dfrac{P^{n+1}_{i,J=NJ} - P^{n+1}_{i,J=NJ-1}}{\Delta y} &= P_{ext} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1, \\ P^{n+1}_{i,J=1} - L_{bot}\dfrac{P^{n+1}_{i,J=2} - P^{n+1}_{i,J=1}}{\Delta y} &= P_{ext} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1,. \end{cases} \tag{10.38}$$

Pour obtenir les valeurs de $P^{n+1}_{i,J=NJ}$ et $P^{n+1}_{i,J=1}$, nous proposons le schéma en temps suivant

$$\begin{cases} P^{n+1}_{i,J=NJ} + L_{top}\dfrac{P^{n+1}_{i,J=NJ} - P^{n}_{i,J=NJ-1}}{\Delta y} &= P_{ext} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1, \\ P^{n+1}_{i,J=1} - L_{bot}\dfrac{P^{n}_{i,J=2} - P^{n+1}_{i,J=1}}{\Delta y} &= P_{ext} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1,. \end{cases} \tag{10.39}$$

Les conditions limites de type Robin sur la pression motrice se traduisent alors par

$$\begin{cases} P^{n+1}_{T} = \dfrac{L_{top}}{\Delta y + L_{top}} P^{n}_{i,J=NJ-1} + \dfrac{1}{\Delta y + L_{top}} P_{ext} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1, \\ P^{n+1}_{B} = \dfrac{L_{bot}}{\Delta y + L_{bot}} P^{n}_{i,J=2} + \dfrac{1}{\Delta y + L_{bot}} P_{ext} \text{ pour } 2 \leq I \leq NI-1, \end{cases} \tag{10.40}$$

Remarque 10.6 *Le schéma en temps proposé ici est stable car* $\left|\frac{L}{\Delta y + L}\right| \leq 1$.

10.5 Résultats et discussion

Les résultats sont présentés pour $10^2 \leq Ra \leq 5.10^5$. Le nombre de Prandtl est égal à $Pr = 7.85$. Le maillage utilisé dans cette partie est 64×256. Pour l'ensemble des nombres de Rayleigh étudiés, les résultats obtenus sont stationnaires.

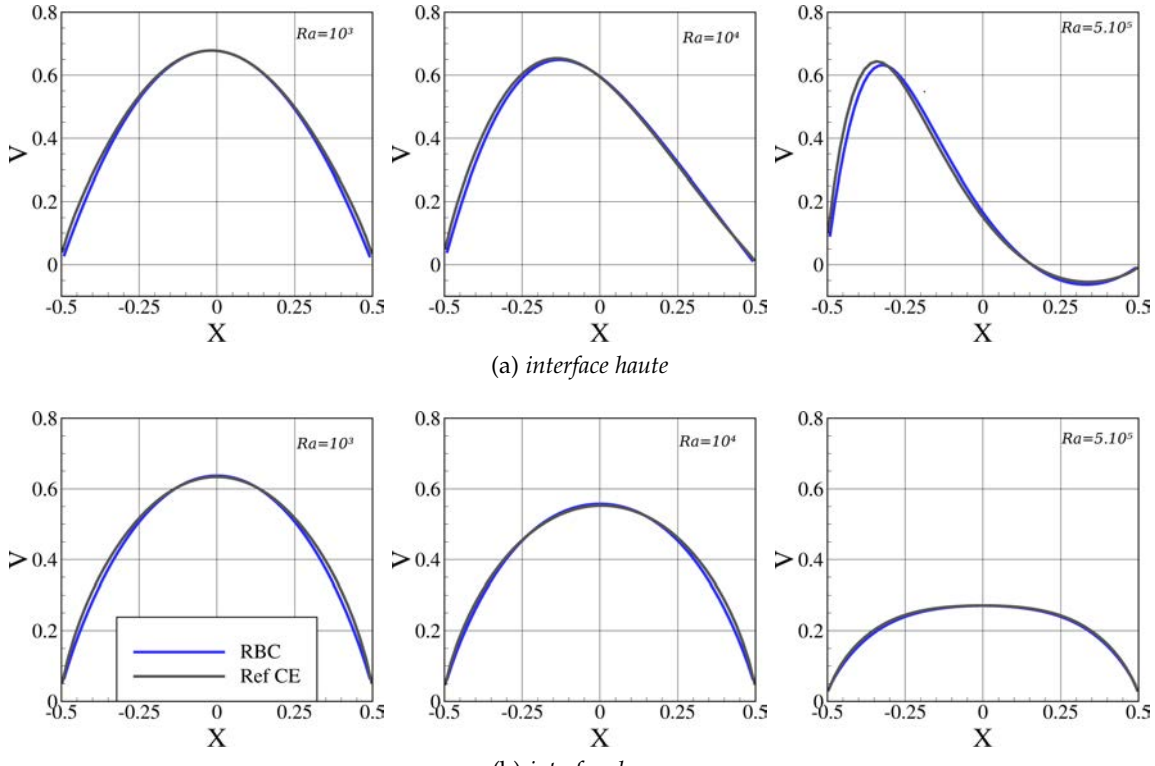
Débits entrants dans le canal Le tableau 10.2 permet de comparer les débits entrant dans le canal pour le cas *RBC* avec les solutions de référence pour différents nombre de Rayleigh. De très bons accords sont observés sur $G_{in}(y = 0)$ quelque soit le nombre de Rayleigh. L'écart relatif maximum est ainsi de l'ordre de 2%. De plus, les résultats pour *RBC* sont plus proches des solutions de référence que ceux obtenus pour le cas *LB* dans le chapitre 9.

Les écarts observés pour le débit de fluide entrant par l'interface haute sont plus importants. Cependant, l'existence d'une zone de recirculation est toujours bien prédite. Ainsi pour $Ra = 5.10^4$, le cas *RBC* permet d'obtenir $G_{in}(y = Rf_c) \neq 0$ (cela traduit l'existence d'une zone de recirculation) là où le cas *LB* ne permet pas de prédire une zone de recirculation. Ces très bons accords sont aussi observables sur les profils de la vitesse verticale aux interfaces basse et haute du canal (voir figure 10.6). La figure 10.7 montre le champ de vitesse verticale au sein du canal pour $Ra = 5.10^5$ pour les cas *RBC* et *CE*640. La vitesse au sein du canal est ainsi très similaire. De plus, la zone de recirculation observée en haut du canal a la même profondeur L_p. Ainsi, en ce qui concerne les débits entrant dans le canal et la vitesse verticale, le cas *RBC* permet d'améliorer les résultats obtenus dans les chapitres précédents.

	*CE*640		*RBC*	
Ra	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$
5.10^2	$4.651\ 10^{-1}$	0	$4.611\ 10^{-1}$ (-0.86%)	0
1.10^3	$4.577\ 10^{-1}$	0	$4.529\ 10^{-1}$ (-1.05%)	0
5.10^3	$4.334\ 10^{-1}$	0	$4.246\ 10^{-1}$ (-2.03%)	0
1.10^4	$4.043\ 10^{-1}$	0	$4.042\ 10^{-1}$ (-0.02%)	0
5.10^4	$3.338\ 10^{-1}$	$1.611\ 10^{-4}$	$3.369\ 10^{-1}$ (+0.92%)	$5.075\ 10^{-5}$ (-68.5%)
5.10^5	$2.128\ 10^{-1}$	$1.316\ 10^{-2}$	$2.123\ 10^{-1}$ (-0.24%)	$1.450\ 10^{-2}$ (+10.2%)

	LB	
Ra	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$
5.10^2	$4.540\ 10^{-1}$ (-2.39 %)	0
1.10^3	$4.473\ 10^{-1}$ (-2.27 %)	0
5.10^3	$4.190\ 10^{-1}$(-3.32 %)	0
1.10^4	$3.897\ 10^{-1}$(-3.61 %)	0
5.10^4	$3.317\ 10^{-1}$(-0.63 %)	0
5.10^5	$2.133\ 10^{-1}$ (+0.23 %)	$1.271\ 10^{-2}$(-3.42 %)

TABLEAU 10.2 – *Comparaison des résultats obtenus avec les cas RBC, LB et les solutions de référence CE*640



(a) *interface haute*

(b) *interface basse*

FIGURE 10.6 – *Comparaison de V aux interfaces hautes ($y = Rf_c$) et basse ($y = 0$) du canal entre le cas RBC et les solutions de référence pour $Ra = 10^3,\ 10^4,\ 5.10^5$*

Nombre de Nusselt et température débitante Un relativement bon accord est observé pour les nombres de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ et $\overline{Nu_2}$ entre les résultats des solutions *RBC* et ceux des solutions de référence. On observe cependant que l'écart entre ces solutions augmente avec le nombre de Rayleigh. Ces observations sont similaires à celles du chapitre 9. Les nombres de Nusselt obtenus pour le cas *RBC* sont d'ailleurs très proches de ceux obtenus pour le cas *LB*. Du fait du comportement robuste de la couche limite thermique, le changement de condition limite aux interfaces n'a que très peu d'effet sur les nombres de Nusselt. La température débitante en sortie du canal montre des écarts plus importants à bas nombre de Rayleigh.

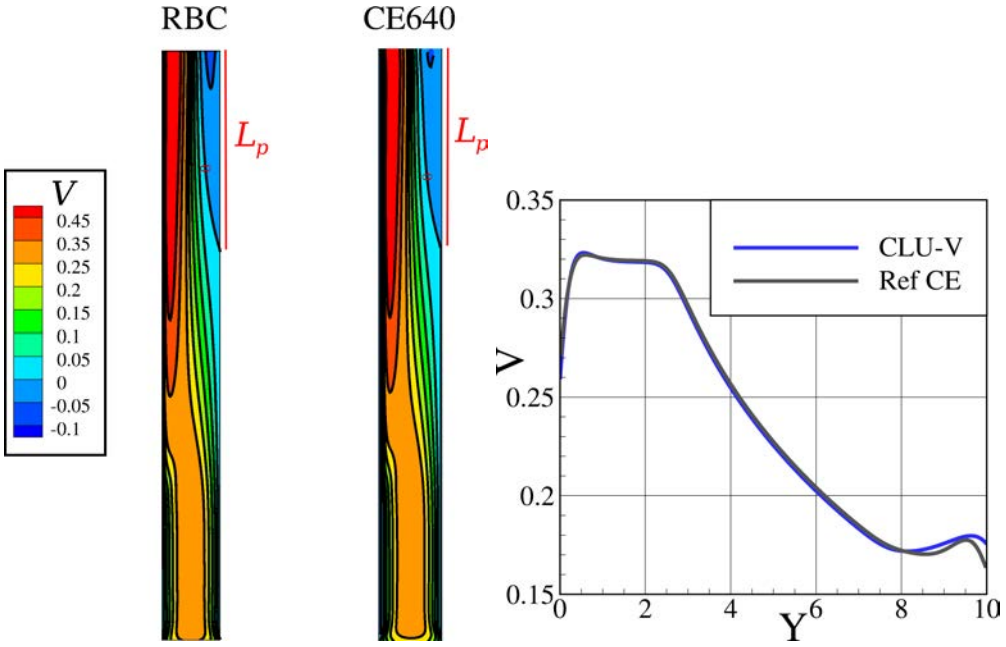


FIGURE 10.7 – *Comparaison du champ de vitesse verticale (gauche) et de la vitesse verticale le long de la ligne médiane $x = 0$ (droite) entre les cas RBC et CE640 pour $Ra = 5.10^5$. $L_P = 3.413$ pour RBC et $L_P = 3.401$ pour CE640*

Comme on l'a déjà évoqué dans les chapitres précédents cela s'explique en partie par les effets de la diffusion thermique relativement importants à bas nombres de Rayleigh. Pour $Ra > 10^4$, l'erreur commise devient inférieure à 3%.

	CE640			*RBC*		
Ra	T_{bulk}	Nu_1	Nu_2	T_{bulk}	Nu_1	Nu_2
5.10^2	$4.401\ 10^{-1}$	2.065	3.443	$4.849\ 10^{-1}$ (+10.2 %)	2.032 (-1.60 %)	3.294 (-4.33 %)
1.10^3	$3.237\ 10^{-1}$	2.423	3.682	$3.490\ 10^{-1}$ (+7.82 %)	2.380 (-1.77 %)	3.495 (-5.08 %)
5.10^3	$1.599\ 10^{-1}$	3.424	4.554	$1.666\ 10^{-1}$ (+4.19 %)	3.339 (-2.48 %)	4.228 (-7.16 %)
1.10^4	$1.200\ 10^{-1}$	3.940	5.080	$1.237\ 10^{-1}$ (+3.08 %)	3.828 (-2.84%)	4.665 (-8.17 %)
5.10^4	$6.562\ 10^{-2}$	5.403	6.716	$6.627\ 10^{-2}$ (+0.99 %)	5.187 (-4.00 %)	5.977 (-11.0 %)
5.10^5	$3.251\ 10^{-2}$	8.481	10.67	$3.331\ 10^{-2}$ (+2.46%)	7.904 (-6.80 %)	8.823 (-17.3%)

TABLEAU 10.3 – *Comparaison des nombres de Nusselt moyen et de la température débitante entre le cas RBC et les solutions de référence*

Pression motrice

Remarque 10.7 *Pour comparer les résultats obtenus dans le cas RBC avec les solutions de référence, il est nécessaire de vérifier que les champs de pression motrice sont bien comparables. Nous rappelons que pour les solutions de référence, la pression motrice a été fixée comme étant nulle au coin inférieure gauche du réservoir. Ainsi, la pression motrice dans le milieu extérieur au loin de canal est nulle. En prenant la pression motrice du milieu extérieur $P_{ext} = 0$ pour le cas RBC, nous supposons qu'à une certaine distance au loin du canal la pression motrice est nulle. Les champs de pression obtenus pour le cas LB et les solutions de référence sont donc bien comparables.*

Le tableau 10.4 compare les valeurs de la pression motrice aux interfaces du canal entre le cas *RBC* et les solutions numériques de référence. Nous observons que l'écart relatif entre ces solutions paraît relativement important au niveau de l'interface basse et cela notamment à bas nombre de Rayleigh. Cependant, la pression motrice moyenne pour le cas *RBC* est bien plus proche des résultats des solutions de référence que ceux obtenus précédemment (par exemple

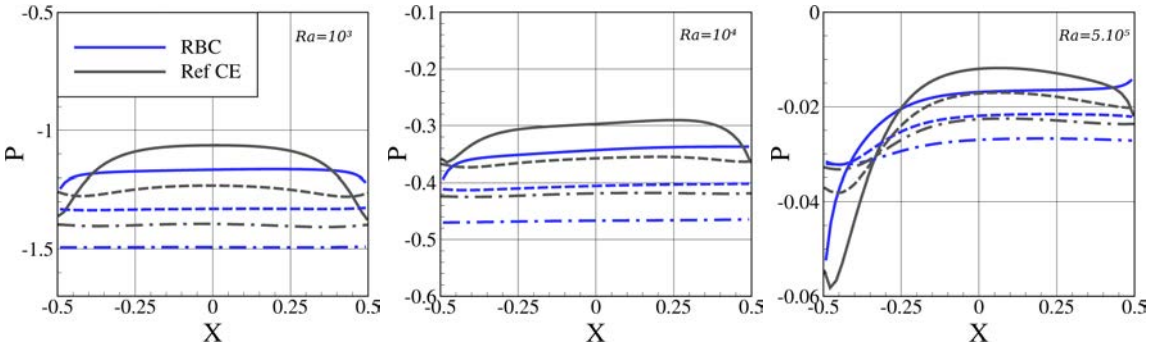
	$CE640$		
Ra	P_{bot}	P_{top}	ΔP
5.10^2	$-8.357\ 10^{-1}$	-1.698	$-8.621\ 10^{-1}$
1.10^3	$-6.247\ 10^{-1}$	-1.152	$-5.259\ 10^{-1}$
5.10^3	$-3.319\ 10^{-1}$	$-4.536\ 10^{-1}$	$-1.218\ 10^{-1}$
1.10^4	$-2.542\ 10^{-1}$	$-2.966\ 10^{-1}$	$-4.232\ 10^{-2}$
5.10^4	$-1.393\ 10^{-1}$	$-1.131\ 10^{-1}$	$+2.263\ 10^{-2}$
5.10^5	$-4.395\ 10^{-2}$	$-1.886\ 10^{-2}$	$+2.509\ 10^{-2}$
	RBC		
Ra	P_{bot}	P_{top}	ΔP
5.10^2	$-12.15\ 10^{-1}$ (-45.4 %)	-1.670 (+1.65 %)	$-4.550\ 10^{-1}$ (-47.2 %)
1.10^3	$-9.495\ 10^{-1}$ (-52.1 %)	-1.145 (+0.61 %)	$-1.960\ 10^{-1}$ (-62.7 %)
5.10^3	$-4.553\ 10^{-1}$ (-37.2 %)	$-4.849\ 10^{-1}$ (-6.90 %)	$-2.960\ 10^{-2}$ (-75.7 %)
1.10^4	$-3.382\ 10^{-1}$ (-33.0 %)	$-3.358\ 10^{-1}$(-13.2 %)	$+2.401\ 10^{-3}$ (+43.3 %)
5.10^4	$-1.689\ 10^{-2}$ (-15.8%)	$-1.427\ 10^{-1}$ (-26.2 %)	$+2.620\ 10^{-2}$ (+12.2 %)
5.10^5	$-4.495\ 10^{-2}$ (-2.28%)	$-1.895\ 10^{-2}$ (-0.48 %)	$+2.601\ 10^{-2}$ (+3.67 %)
	LB		
Ra	P_{bot}	P_{top}	ΔP
5.10^2	$-1.221\ 10^{-1}$ (+85.4 %)	0	$1.221\ 10^{-1}$ (+114 %)
1.10^3	$-1.180\ 10^{-1}$ (+81.1 %)	0	$1.180\ 10^{-1}$ (+122 %)
5.10^3	$-1.020\ 10^{-1}$ (+69.3 %)	0	$1.020\ 10^{-1}$ (+184 %)
1.10^4	$-9.148\ 10^{-2}$ (+64.0 %)	0	$9.148\ 10^{-2}$ (+316 %)
5.10^4	$-6.190\ 10^{-2}$ (+55.5 %)	0	$6.190\ 10^{-1}$ (+173.5%)
5.10^5	$-2.484\ 10^{-2}$ (+43.5 %)	$-2.884\ 10^{-4}$ (+98.47 %)	$2.455\ 10^{-2}$ (+2.15%)

TABLEAU 10.4 – *Comparaison de la pression motrice moyenne aux interfaces entre le cas RBC , le cas LB et les solutions de référence CE640*

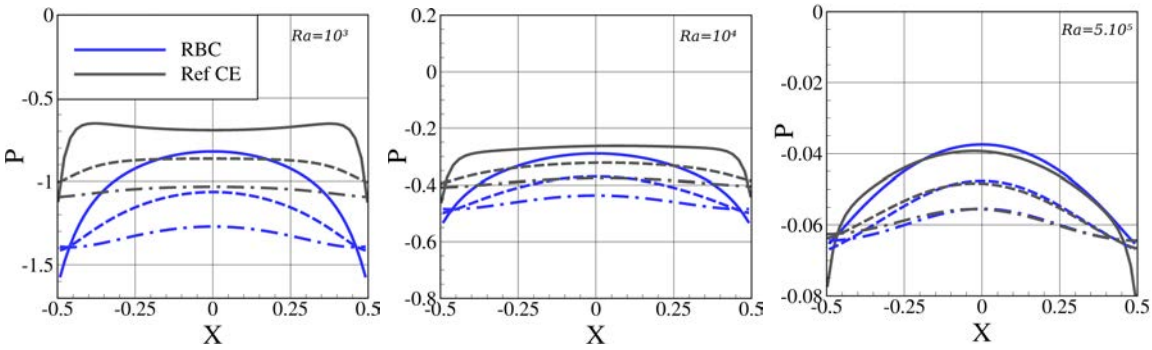
pour le cas *LB*). La pression motrice moyenne à l'interface haute est globalement bien prédite quelque soit le nombre de Rayleigh considéré. Nous observons de plus que l'imposition des conditions limites de type Robin sur la pression motrice aux interfaces permet d'obtenir le changement du signe de ΔP lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Les modélisations effectuées dans les chapitres précédents ne permettaient pas d'obtenir ce phénomène observé dans le cas *CE640*.

La figure 10.8 montre les profils de la pression motrice à différentes hauteurs près de l'interface basse du canal pour trois nombres de Rayleigh. Nous observons que le cas *RBC* permet d'obtenir, quelque soit le nombre de Rayleigh, un profil de pression concave à l'interface basse comme mis en évidence pour les solutions de référence. La pression motrice est ainsi plus élevée à l'axe ($x = 0$) qu'au niveau des parois ($x = +/-0.5$). Lorsque le nombre de Rayleigh augmente de très bon accords sont observés et le cas *RBC* peut être considéré comme un bon jeu de conditions limites pour modéliser l'interface basse du canal.

Au niveau de l'interface haute du canal de bon accords sont aussi observés pour le profil de pression motrice (voir figure 10.8). Ainsi à bas nombre de Rayleigh ($Ra = 10^3$), la pression près des parois est plus faible qu'au niveau de l'axe traduisant une légère contraction du jet sortant du canal. Cette contraction est aussi observée pour les solutions de référence. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente ($Ra = 10^4$), le profil de pression motrice à l'interface haute pour *RBC* n'est plus symétrique et la pression est plus basse du côté de la paroi chauffée. Cela traduit une orientation vers la paroi chauffée du jet thermique sortant du canal. La figure 10.9 montre le champ de pression motrice au sein du canal pour les cas *RBC* et *CE640* à $Ra = 5.10^5$. Les deux approches donnent des résultats quasiment identiques au sein du canal. Proche des interfaces du canal, le champ de pression motrice pour le cas *RBC* montre le même comportement que celui observé pour la solution numérique de référence (cas *CE640*)



(a) *interface haute*



(b) *interface basse*

FIGURE 10.8 – *Comparaison de P à différentes hauteurs près de l'interface haute et basse pour Ra* $= 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. *Interface basse : trait plein :* $y = 0$, *trait pointillé :* $y = 0.12$ *et trait mixte* $y = 0.24$. *Interface haute : trait plein :* $y = Rf_c = 10$, *trait pointillé :* $y = 9.88$ *et trait mixte* $y = 9.76$

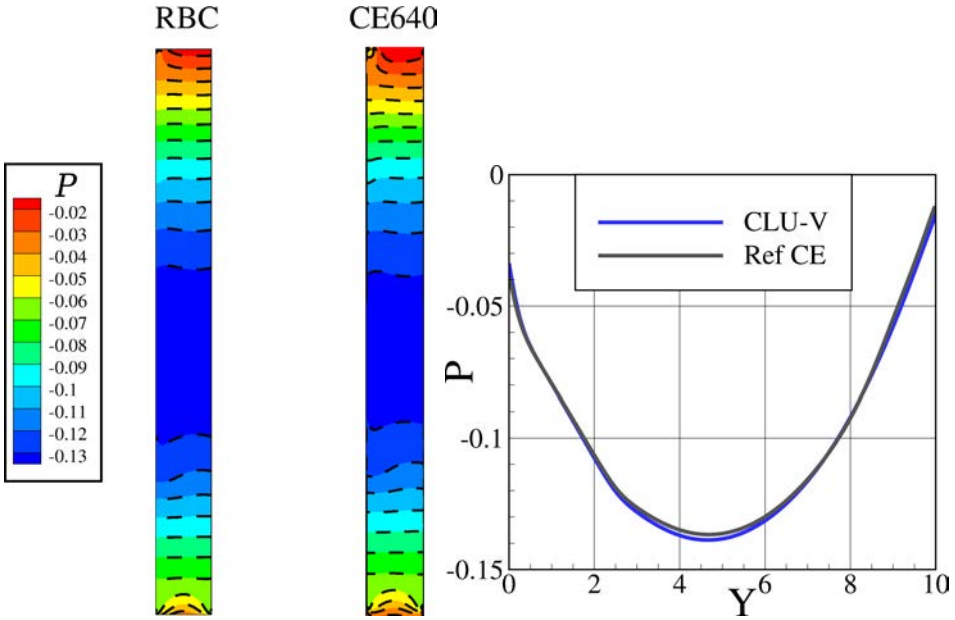
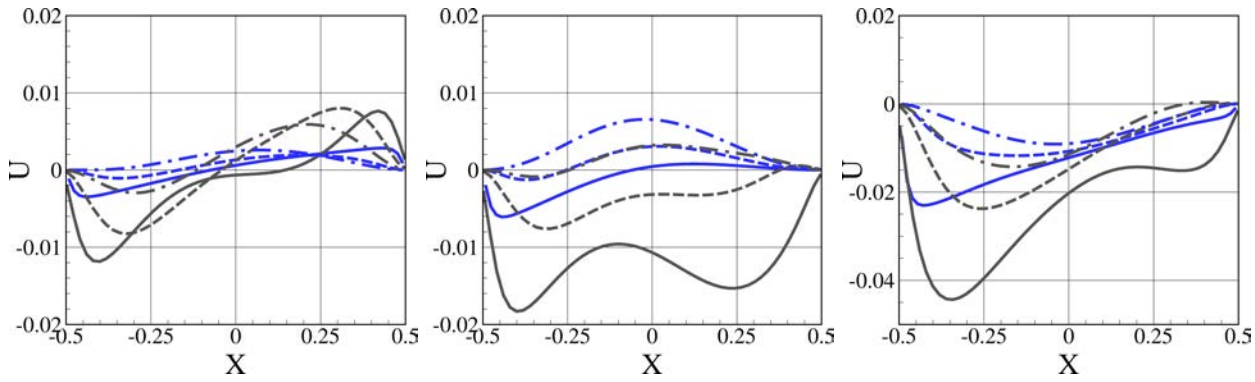


FIGURE 10.9 – *Comparaison du champ de pression motrice (gauche) et de la pression motrice le long de la ligne médiane* $x = 0$ *(droite) entre les cas RBC et CE640 pour* $Ra = 5.10^5$

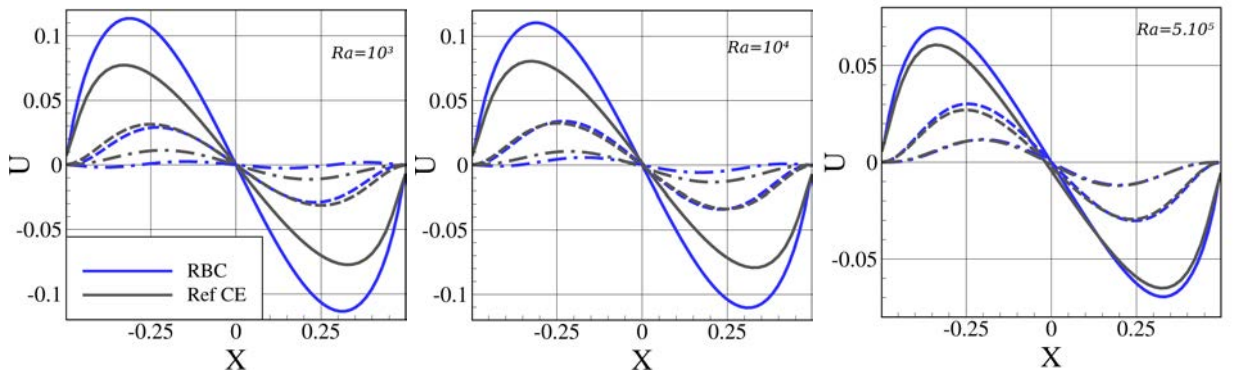
Le jeu de conditions limites *RBC* permet donc de modéliser de manière satisfaisante la pression motrice aux interfaces du canal.

Vitesse horizontale Dans les deux chapitres précédents, nous avons mis en évidence la difficulté liée à la vitesse horizontale à l'interface basse du canal. La figure 10.10 montre que le jeu *RBC* permet d'obtenir une vitesse horizontale non nulle à l'interface. Celle-ci ne

fait ensuite que décroître (en valeur absolue) dans la partie basse du canal. La comparaison des résultats avec les solutions de référence met en évidence une bonne prédiction de la vitesse horizontale à l'interface basse. Cette vitesse est légèrement surestimée à bas nombre de Rayleigh. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, les résultats obtenus sont très bons et la décélération de la vitesse horizontale est similaire pour *RBC* et *CE*640.



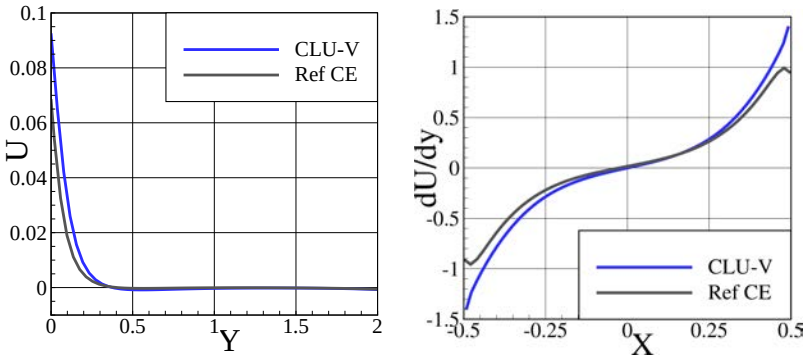
(a) *interface haute*



(b) *interface basse*

FIGURE 10.10 – *Comparaison de U à différentes hauteurs près de l'interface haute et basse pour* $Ra = 1.10^3,\ 1.10^4,\ 5.10^5$. *Interface basse : trait plein :* $y = 0$, *trait pointillé :* $y = 0.12$ *et trait mixte* $y = 0.24$. *Interface haute : trait plein :* $y = Rf_c = 10$, *trait pointillé :* $y = 9.88$ *et trait mixte* $y = 9.76$

De plus la décélération de la vitesse horizontale qui existe dès l'interface basse du canal pour les solutions numériques de référence *CE*640 est aussi obtenue avec le cas *RBC*. Cela est particulièrement bien mis en évidence pour la figure 10.11.



(a) $x = -0.375$ (b) *interface basse*

FIGURE 10.11 – *Comparaison de U le long de la ligne* $x = -0.375$ *et de* $\frac{\partial U}{\partial y}$ *à l'interface basse entre RBC et CE*640 *pour* $Ra = 5.10^5$.

Bilan L'ensemble des résultats présentés montre que le jeu de conditions limites RBC permet de correctement représenter l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical plongé dans un environnement infini. De plus, les résultats obtenus sont plus proches des solutions numériques de référence de la partie II que ceux obtenus dans les chapitres précédents. Les difficultés de représentation de la pression motrice et de la vitesse horizontale aux interfaces sont en partie résolus par le jeu de condition limite RBC. Cependant, il est nécessaire d'avoir une certaine connaissance de l'écoulement à l'extérieur du canal afin de choisir au mieux les distances L_{bot} et L_{top}. Ce point constitue une restriction importante pour la simulation numérique restreinte aux limites géométriques du canal.

10.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle modélisation pour la pression motrice aux interfaces du canal. Celle-ci est basée sur l'imposition de condition limite de type Robin. Cette condition limite résulte de la modélisation de l'écoulement dans le milieu extérieur près des interfaces du canal. Il est ainsi supposé qu'à une certaine distance L des interfaces la pression motrice est constante et égale à la pression motrice du milieu extérieur. Cette distance dépend à la fois des effets convectifs, visqueux et de la poussée d'Archimède. Elle est alors vu comme un paramètre de modélisation devant être estimée. Dans le cadre d'une première approximation cette distance a été considérée comme constante en espace et en temps et estimée à partir des solutions de référence de la partie II. De plus, il est considéré qu'à l'interface basse du canal, la contrainte s'exerçant sur le fluide est de la traction pure. Cette hypothèse résulte dans l'imposition d'une contrainte tangentielle τ nulle à l'interface basse du canal. Aux interfaces haute et basse, la contrainte de divergence nulle est utilisée comme condition limite et permet ainsi une vitesse horizontale non nulle aux interfaces.

Les résultats obtenus sont très encourageants et montrent de très bon accords avec les solutions de référence de la partie II. La modélisation de la pression motrice et de la vitesse horizontale aux niveaux des interfaces est ainsi grandement améliorée par comparaison avec les solutions obtenues pour des conditions limites de type Bernoulli. La modélisation et la méthode de résolution présentée dans ce chapitre permettent ainsi de dépasser en partie les limites des méthodes proposées dans les chapitres 8 et 9.

De nombreuses perspectives existent pour améliorer le travail présenté dans ce chapitre. Tout d'abord le paramètre L de la condition de Robin pour la pression motrice pourrait être considéré comme non constant en temps et en espace. Ainsi, la physique serait mieux représentée. De plus, la méthode permet de considérer des pressions motrices au loin du canal différentes au niveau des interfaces. Il est alors possible de prendre en compte une stratification de pression motrice dans le milieu extérieur. Le plus gros challenge lié à cette modélisation réside tout de même dans la connaissance *a priori* de la valeur de L. Dans notre cas, elle a été estimé grâce à la connaissance de l'écoulement dans le milieu extérieur. Sans information supplémentaire sur l'écoulement dans le milieu extérieur l'estimation de L peut donc s'avérer difficile. Cette difficulté met aussi en évidence que la simulation du canal seul reste un problème tronqué de son environnement extérieur qu'il est alors nécessaire de modéliser d'une manière ou d'une autre.

Bibliographie

N.E. Bixler et L.E. Scriven. Downstream Development of Tree-dimensional Viscocapillary Film Flow. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 26 :475–483, 1987.

J.L. Guermond, P.D. Minev, et J. Shen. Error Analysis of Pressure-correction Schemes for the Time-dependent Stokes Equations with Open Boundary Conditions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43 :239, 2005.

B.G. Higgins. Downstream Development of Two-dimensional Viscocapillary Film Flow. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 21 :168–173, 1982.

J. Liu. Open and Traction Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 228 :7250–7267, 2009.

R.A. Novy, T.H Davis, et L.E. Scriven. A Comparion of Synthetic Boundary Conditions for Continuous-flow Systems. *Chemical Engineering Science*, 46 :57–68, 1991.

T. C. Papanastasiou, N. Malamataris, et K. Ellwood. A New Outflow Boundary Condition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 14 :587–608, 1992.

A. Poux. Conditions limites de sortie pour les méthodes de time-splitting appliquées aux équations de navier-stokes. *Thèse de doctorat, Université Bordeaux I*, 2012.

A. Poux, S. Glockner, et M. Azaïez. Improvements on Open and Traction Boundary Conditions for Navier-Stokes Time-splitting Methods. *Journal of Computational Physics*, 230 :4011–4027, 2011.

O.A. Tkachenko, S.A. Tkachenko, V. Timchenko, J. Reizes, G.H. Yeoh, et G. De Vahl Davis. Three-dimensional Computational Study of Natural Convection in a Non-uniformly Heated Vertical Open-ended Channel. *Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference, IHTC-15 August 10-15, 2014, Kyoto, Japan*, IHTC15-9046, 2014.

S. Xin, M.C. Duluc, F. Lusseyran, et P. Le Quéré. Numerical Simulations of Natural Convection Around a Line-source. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 14 : 830–850, 2004.

Quatrième partie

Optimisation de l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical

11

Optimisation de l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical

Sommaire

11.1 Objectifs et configuration d'étude . . . 173
11.2 La méthode de krigeage . . . 174
11.2.1 Principe du krigeage . . . 175
11.2.2 Construction du prédicteur . . . 176
11.2.3 Méthode d'optimisation utilisant le prédicteur de type krigeage . . . 177
11.3 Application de la méthode de krigeage à l'optimisation du canal vertical 178
11.3.1 Fonctions objectifs et variable d'optimisation . . . 178
11.3.2 Méthodes numériques . . . 179
11.4 Résultats . . . 180
11.4.1 Effet d'une ouverture sur le nombre de Nusselt à la paroi chauffée . . . 181
11.4.2 Effet d'une ouverture sur le débit entrant par le bas du canal . . . 182
11.4.3 Simulation non-linéaires des configurations optimales . . . 183
11.5 Conclusion partielle . . . 185
Bibliographie . . . 185

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'intensification des transferts thermiques et au contrôle de l'écoulement de convection naturelle au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant. Nous proposons d'étudier l'impact de la position et de la taille d'une ouverture du côté de la paroi non chauffée sur le comportement hydrodynamique et thermique de l'écoulement. Grâce à une méthode d'optimisation par krigeage, on établit des cartographies du nombre de Nusselt à la paroi chauffée et du débit entrant par l'interface basse du canal en fonction de la position et de la taille de l'ouverture. Dans un deuxième temps, la méthode d'optimisation nous permet de trouver des configurations optimales pour maximiser le nombre de Nusselt, maximiser le débit entrant par l'interface basse du canal, minimiser le débit entrant par l'interface haut du canal ou maximiser la température débitante. Ce chapitre met en évidence le comportement robuste de la couche limite thermique le long de la paroi chauffée et l'influence d'une ouverture sur les débits de fluide entrant dans le canal.

11.1 Objectifs et configuration d'étude

Objectifs L'intensification des transferts thermiques et le contrôle de la dynamique d'un écoulement de convection naturelle au sein du canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant est étudié. Ces deux thématiques sont essentielles pour le dimensionnement et l'optimisation des systèmes industriels. Par exemple, pour le refroidissement de composants on cherche à optimiser le transfert thermique, pour un extracteur de fumée le débit évacué doit être maximum alors que pour un échangeur thermique on souhaite une température de sortie maximale.

On étudie ainsi dans ce chapitre l'influence d'une ouverture du côté de la paroi non chauffée du canal sur le comportement hydrodynamique et thermique de l'écoulement. On s'intéresse donc à l'optimisation de la géométrie du canal vertical. On souhaite connaître l'influence de la taille et du positionnement de l'ouverture sur l'évolution du nombre de Nusselt à la paroi chauffée et sur le débit de fluide entrant par l'interface basse du canal. L'objectif est aussi d'établir les configurations optimales permettant de répondre aux quatre objectifs suivants :

1) maximiser le nombre de Nusselt à la paroi chauffée,
2) maximiser le débit d'air entrant par l'interface basse du canal,
3) minimiser le débit d'air entrant par l'interface haute du canal,
4) maximiser la température en sortie du canal.

Pour répondre à l'ensemble de ces objectifs nous proposons d'utiliser une méthode d'optimisation. On utilise ici la méthode de krigeage, une méthode de prédiction statistique développée par Krige (1951) et adaptée par Sacks et al. (1989).

Dans ce chapitre, nous considérons une modélisation pour les interfaces du canal ainsi que pour l'ouverture. Ce choix de modélisation n'influence pas la méthode d'optimisation présentée ici. Il faut voir ce chapitre comme un exemple d'étude possible une fois la modélisation des interfaces du canal effectuée.

Configuration d'étude On considère le même canal vertical que celui étudié dans les parties II et III auquel nous considérons une ouverture du côté de la paroi chauffée. La figure 11.1 présente cette configuration.

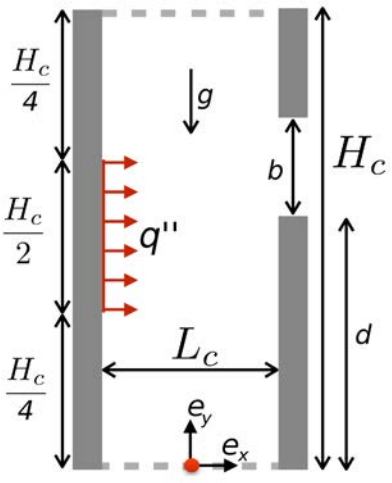


Figure 11.1 – *Configuration du canal vertical asymétriquement chauffé avec une ouverture sur la paroi non chauffée*

Le canal vertical est chauffé sur la moitié de sa paroi gauche à flux constant ($\frac{\partial T}{\partial x} = -1$). Les parois non-chauffées du canal sont adiabatiques ($\frac{\partial T}{\partial x} = 0$). Les interfaces haute et basse sont ouvertes sur deux milieux semi-infinis à température constante $T = 0$ et pression constante P_{ext}. On considère une ouverture sur la paroi non chauffée du canal de dimension b et située à une distance d de l'interface basse du canal. Celle-ci est ouverte sur un milieu semi-infini à pression constante P_{ext} et température constante $T = 0$. On rappelle que le rapport d'aspect du canal $Rf_c = H_c/L_c = 10$.

On résout les équations instationnaires 2D de Boussinesq sous la forme adimensionnelle présentée dans la partie 2.2. On définit ainsi le nombre de Rayleigh basé sur la largeur du canal $Ra_{q'',L} = \frac{g\beta q'' L_c^4}{\alpha\nu\lambda}$. Pour simplifier les notations, on notera dans ce chapitre $Ra = Ra_{q'',L}$.

On considère ici une approche de résolution où la simulation numérique du canal vertical est réduite aux limites géométriques de ce dernier comme présenté dans la partie III.

Organisation du chapitre

La première section de ce chapitre présente la méthode de krigeage dans son ensemble. On décrit les principes mathématiques sur lesquels sont basés cette méthode, puis la construction du prédicteur de krigeage et la méthode d'optimisation utilisée sont présentés. L'objectif de cette section n'est pas de détailler de manière précise les aspects mathématiques liés au krigeage mais de donner les clés nécessaires pour la compréhension de la méthode et son application à notre problème d'optimisation.

La deuxième section s'intéresse à l'application de la méthode de krigeage au problème de l'optimisation du canal vertical avec une ouverture sur sa paroi non-chauffée. On précise les fonctions objectifs et les variables d'optimisation retenues. Les méthodes numériques utilisées sont décrites.

La troisième section de ce chapitre présente les résultats de l'optimisation du canal vertical. On s'intéresse tout particulièrement à l'influence de l'ouverture (dimension et positionnement) sur le nombre de Nusselt à la paroi chauffée et sur le débit de fluide entrant par l'interface basse du canal. On présente par la suite les résultats des simulations de l'écoulement au sein du canal vertical pour les configurations optimales identifiées. Les résultats sont comparés avec ceux de l'étude d'Azevedo et Sparrow (1986).

11.2 La méthode de krigeage

La méthode de krigeage est une méthode d'approximation statistique pour interpoler des données de mesure. Cette méthode trouve ces origines dans la géostatistique (Krige 1951). Elle permet de construire un méta-modèle du problème étudié tout en calculant l'erreur de prédiction associée à celui-ci. La construction du méta-modèle est séquentielle : les points du plan d'expérience sur lesquels est construit le méta-modèle sont choisis de manière à minimiser l'erreur de prédiction de celui-ci.

Lors de la conception d'un système industriel on peut souhaiter que celui-ci maximise ou minimise un paramètre donné. Pour évaluer les différentes options de conception, il est souvent nécessaire d'effectuer des études paramétriques et ainsi faire appel de nombreuses fois à la simulation numérique directe. Celle-ci est très couteuse en temps de calcul et en ressources et réalisée après une modélisation lourde et complexe. De plus, ces analyses paramétriques permettent seulement d'obtenir des résultats pour le plan d'expérience considéré. C'est pourquoi on cherche ici à construire un méta-modèle permettant d'approcher les résultats de la

simulation numérique directe de manière rapide et efficace tout en minimisant les appels à cette dernière.

L'approche utilisée consiste alors à voir la fonction "simulation numérique directe" comme une boîte noire dont les sorties dépendent uniquement des entrées mais dont le modèle n'est pas connu. On définit ainsi Y la fonction "simulation numérique directe", qui a un vecteur de paramètre d'entrée $x \in E = \mathbb{R}^k$ (par exemple : rapport d'aspect, nombre de Rayleigh, nombre d'ouvertures, taille et positionnement des ouvertures, température d'entrée, ...), où k est le nombre de paramètres d'entrées, associe un scalaire $y \in \mathbb{R}$ résultat de la simulation numérique directe (par exemple, nombre de Nusselt sur la paroi chauffée, température débitante de sortie, débit de fluide entrant par l'interface basse du canal, ...). La fonction "simulation numérique directe" est alors vue comme :

$$\begin{array}{rccc} Y & : & \mathbb{R}^k & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & y \end{array} \tag{11.1}$$

On cherche ainsi à modéliser Y via un méta-modèle de type krigeage. Les bases de cette approche peuvent être approfondies par la lecture de Jones et al. (1998), Sasena (2002).

La méthode de krigeage présente les avantages suivants :

— elle ne nécessite aucune connaissance particulière sur la fonction étudiée, celle-ci est vue comme une boîte noire avec une ou plusieurs entrées et une sortie,
— la représentation des solutions dans l'espace des paramètres est obtenue en un temps de calcul faible,
— elle fournit le meilleur prédicteur linéaire sans biais de Y obtenu à partir d'un plan d'expérience D,
— elle donne une estimation de l'erreur de prédiction.

11.2.1 Principe du krigeage

Le krigeage est une méthode de prédiction reposant sur un modèle probabiliste gaussien. Le principe est de considérer que si l'on possède des évaluations $y = \{y_1, ..., y_m\}$ de la fonction Y aux points du plan d'expérience $D = \{x, ..., x_m\}$ où m est le nombre de points dans le plan d'expérience, on peut obtenir des informations sur $Y(x_0)$ avec $x_0 \notin D$ et $x_0 \in E = \mathbb{R}^k$.

On suppose que l'on peut modéliser Y par un processus gaussien

$$\forall x \in E,\ Y(x) = y_{reg}(x) + Z(x), \tag{11.2}$$

où y_{reg} est une fonction polynomiale de régression et Z un processus gaussien permettant d'évaluer l'erreur du polynôme de régression en chaque point. Pour une définition mathématique plus précise, on peut consulter Villemonteix (2008), Bettinger (2009), Barbillon (2010). Le méta-modèle peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$$\forall x \in E,\ Y(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, f_j(x) + Z(x), \tag{11.3}$$

avec $f(x) = \{f_1(x), ..., f_k(x)\}$ les fonctions de base du polynôme de régression en x à valeur dans E et $a = \{a_1, ..., a_k\}$ les coefficients du polynôme de régression.

Le choix du degré du polynôme de régression est laissé libre à chaque auteur. On peut prendre $f(x) = constante$ sans pertes significatives sur la précision du méta-modèle (Jones et al. 1998, Sasena 2002, Bettinger 2009). Le méta-modèle s'écrit alors

$$\forall x \in E,\ Y(x) = y_{moy} + Z(x), \tag{11.4}$$

où y_{moy} est la moyenne des évaluations de Y. $Z(x)$ est un processus gaussien de moyenne nulle. Il est construit de telle manière que

$$\begin{cases} Cov(Z(x), Z(x')) &= \sigma_Z^2 \, K_\theta(x, x') & \text{fonction de covariance,} \\ E(Z(x)) &= 0 & \text{espérance mathématique.} \end{cases} \tag{11.5}$$

K_θ est la fonction de corrélation spatiale. Elle est symétrique, strictement définie positive et telle que $K_\theta(x, x) = 1, \ \forall x \in E$. Le terme σ_Z^2 est la variance du processus gaussien $Z(x)$. Le choix de la fonction de corrélation est un choix important puisqu'il conditionne la manière dont le méta-modèle correspondra aux données. Il existe plusieurs choix possibles : fonctions de type exponentielle, cubiques ou de Matérn (Bettinger 2009). On considère ici une fonction de corrélation spatiale de type exponentielle

$$K_\theta(x, x') = \prod_{d=1}^{k} exp^{(-\theta_d |x_d - x'_d|^{p_d})}. \tag{11.6}$$

Les paramètres θ et p permettent d'adapter la fonction de corrélation aux données. θ_d traduit l'importance du paramètre d'entrée x_d dans la corrélation des points x et x', p permet d'adapter le lissage du problème. Pour réduire le temps d'estimation des paramètres θ_d et p_d, on considère que θ_d est indépendant du paramètre x_d et que $p = 2$ ce qui permet d'avoir une fonction de corrélation gaussienne et infiniment différentiable. On a donc :

$$K_\theta(x, x') = \prod_{d=1}^{k} exp^{(-\theta |x_d - x'_d|^2)}. \tag{11.7}$$

Le paramètre θ est estimé à partir des données. La méthode pour estimer ce paramètre est présentée par la suite.

11.2.2 Construction du prédicteur

On cherche maintenant à construire un prédicteur $\tilde{Y}$ de la fonction boîte noire Y. On cherche une fonction ayant les mêmes entrées que Y et donnant une estimation de Y en tout point de l'espace E. Le prédicteur $\tilde{Y}$ basé sur un méta-modèle de krigeage fournit aussi une estimation de la variance qui permet de déterminer la confiance que l'on peut avoir dans le prédicteur.

Le prédicteur $\tilde{Y}$ est linéaire, non biaisé et minimise l'erreur de prédiction. On construit $\tilde{Y}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x_i \in D, & \tilde{Y}(x_i) &= Y(x_i) & \text{condition de non biais,} \\ \forall x \in E & \tilde{Y}(x) &\in argmin(EQM(\tilde{Y})) & \text{minimise l'erreur quadratique moyenne,} \\ \text{avec} & EQM(\tilde{Y}) &= E[(\tilde{Y}(x) - Y(x))^2], & \\ & \tilde{Y} &= C^t \, x & \text{le prédicteur est linéaire.} \end{cases} \tag{11.8}$$

On pose :

- $R = [K_{\theta_{ij}}]$ avec $R_{ij} = K_\theta(x_i, x_j)$ où $x_i \in D$, matrice de corrélation des points du plan d'expérience, de taille $m \times m$,
- $r(x) = [K_\theta(x, x_1), ..., K_\theta(x, x_m)]^t$ avec $x_i \in D$, vecteur de l'estimation de la corrélation spatiale entre $x \in E$ et chaque point du plan d'expérience D, de taille $m \times 1$,
- y_{moy}, vecteur de taille $m \times 1$ contenant la valeur moyenne de $Y(x)$.

Le calcul du meilleur prédicteur linéaire non biaisé (les détails du calcul peuvent être consultés dans Sasena (2002), Bettinger (2009)) permet d'écrire le prédicteur sous la forme

$$\forall x \in E,\ \tilde{Y}(x) = y_{moy} + r(x)^t\ \gamma, \tag{11.9}$$

où $\gamma = R^{-1}(y - y_{moy})$.

On peut aussi obtenir la variance de la prédiction par krigeage en cherchant l'erreur quadratique moyenne. On obtient

$$\forall x \in E,\ \sigma^2 = \sigma_Z^2(1 - r(x)^t\, R^{-1}\, r(x)). \tag{11.10}$$

Nous avons ainsi construit un prédicteur linéaire non biaisé. On peut connaître une estimation de Y en tout point de E et l'erreur de cette estimation en connaissant seulement la valeur exacte de Y pour les points appartenant au plan d'expérience D. Le prédicteur dépend des paramètres de la fonction de covariance θ et σ_Z^2. Ces paramètres doivent être estimer.

Pour estimer θ et σ_Z^2 on utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour sa simplicité et sa généralité (Sasena 2002, Villemonteix 2008, Bettinger 2009). L'estimation du maximum de vraisemblance est une méthode statistique utilisée pour estimer les paramètres d'un modèle (Pfanzagl et Hamböker 1994). Elle permet de calculer, à partir d'un échantillon observé, la meilleure valeur d'un paramètre d'une loi de probabilité. Le principe se résume de la manière suivante :

— si un phénomène X a été l'objet de m observations indépendantes les unes des autres $\{x_1, ..., x_m\}$, sa loi de probabilité est une fonction $g(x, l_1, ..., l_k)$ où l_k sont les paramètres de la loi. Dans notre cas, on observe Y sur l'ensemble des points du plan d'expérience D et la loi de probabilité dépend de θ et σ_Z^2.

La méthode du maximum de vraisemblance donne après calcul et selon la littérature :

$$\begin{cases} \sigma_Z^2 &= \frac{1}{k}(y - y_{moy})\ R^{-1}\ (y - y_{moy}), \\ \theta &= argmin\left[k\ log\left(\sigma_Z^2(\theta)\right)\ +\ log\left(det(R(\theta)\right)\right]. \end{cases} \tag{11.11}$$

Pour estimer les paramètres θ et σ_Z^2, il est donc nécessaire de minimiser l'équation (11.11).

11.2.3 Méthode d'optimisation utilisant le prédicteur de type krigeage

Après avoir défini le prédicteur $\tilde{Y}$, on présente maintenant la méthode d'optimisation utilisant celui-ci. L'objectif est ici d'avoir un algorithme évolutif permettant d'adapter au mieux la prédiction $\tilde{Y}$ de Y en limitant un maximum les appels à la fonction boîte noire Y.

On utilise ici l'algorithme EGO (Efficient Global Optimization) décrit par Jones et al. (1998). Cet algorithme se décline en 6 étapes :

1) Initialisation des données : on calcul les valeurs $y = \{y_1, ..., y_m\}$ associées aux points du plan d'expérience initial $D = \{x_1, ..., x_m\}$ en faisant appel à la fonction boîte noire Y,
2) Après avoir estimé les paramètres de la fonction de corrélation spatiale, on calcul le prédicteur $\tilde{Y}$ associé à Y,
3) Utilisation d'un critère d'optimisation pour définir un point x_{m+1} à ajouter au le plan d'expérience initial,
4) Calcul de y_{m+1} associé à x_{m+1},

5) Mise à jour de $D = \{x_1, ..., x_m, x_{m+1}\}$ et de $y = \{y_1, ..., y_m, y_{m+1}\}$. Mise à jour du prédicteur $\tilde{Y}$,
6) Test sur l'admissibilité de l'erreur de prédiction : si le test est validé alors le prédicteur de krigeage est considéré comme fiable, si le test n'est pas validé alors on revient à l'étape 3.

Pour mettre en place cet algorithme un plan d'expérience initial est nécessaire. Nous construisons celui-ci de manière à remplir l'espace des paramètres de manière uniforme. Ce choix de plan d'expérience initial est intéressant lorsque l'on a *a priori* aucune information sur la surface de réponse.

Critère d'optimisation Le choix du critère d'optimisation (utilisé dans l'étape 3) permet d'orienter la construction du prédicteur de krigeage. Différents critères existent et ont été comparés par différents auteurs (Sasena 2002, Bettinger 2009). Dans le cadre de l'algorithme EGO, on peut utiliser le critère d'espérance de gain. Ce critère permet de combiner l'information apporté par le surface de réponse (recherche de la convergence vers le minimum de la fonction boîte noire Y) et par l'erreur de prédiction (exploration des zones de l'espace où la prédiction est mauvaise). L'espérance de gain est grande en un point où la valeur de la prédiction est beaucoup plus petite que la plus petite des valeurs observées jusqu'à présent ou en un point où l'incertitude mesurée par la variance de krigeage est grande. Ainsi à chaque itération de l'étape 3 on ajoute le point x_{m+1} où l'espérance de gain est la plus élevée. Les détails concernant celui-ci sont données par (Jones et al. 1998, Sasena 2002, Bettinger 2009).

Recherche de l'optimum A la fin de l'étape 6, nous avons donc construit un méta-modèle de la fonction boîte noire Y. Afin de trouver le paramètre d'entrée optimal x_{opt} tel que $Y(x_{opt}) = min(Y(x)),\ \forall x \in E$, on utilise le prédicteur $\tilde{Y}$ plus simple et extrêmement rapide à calculer. On détermine donc x_{opt} tel que $Y(x_{opt}) = min(\tilde{Y}(x)),\ \forall x \in E$. Si l'on cherche un maximum de Y alors x_{opt} est tel que $Y(x_{opt}) = min(-\tilde{Y}(x)),\ \forall x \in E$.

11.3 Application de la méthode de krigeage à l'optimisation du canal vertical

Dans cette section, on présente l'application de la méthode d'optimisation par krigeage à l'optimisation de la thermique et de la dynamique de l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical chauffé asymétriquement à flux constant.

11.3.1 Fonctions objectifs et variable d'optimisation

Variable d'optimisation Notre objectif est d'évaluer l'influence d'une ouverture sur la paroi non chauffé du canal. Il existe deux paramètres caractérisant cette ouverture : sa position d et sa taille b. On fixe donc ici le nombre de paramètres d'entrée k égale à deux et les points $x_i \in D$ sont tels que $x_i = (d_i, b_i)$. On définit des bornes supérieures et inférieures pour d et b. Ainsi d est compris entre 0.25 et $(Rf_c - 1.25)$. b est compris entre 0.25 et 1.25. L'espace des paramètres E est ainsi définit $E = [0.25; Rf_c - 1.25] \times [0.25; 1.25]$.

Fonctions objectifs On définit 4 fonctions objectifs $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$. Ce sont ces fonctions que l'on cherche à minimiser ou à maximiser dans le cadre du processus d'optimisation. Les valeurs $Y_l(x_i)$ sont calculées grâce à la fonction coûteuse qu'est la simulation numérique directe.

La première fonction objectif concerne le nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée du canal. On cherche à maximiser cette fonction afin d'avoir un transfert thermique maximum. Elle s'écrit :

$$\begin{array}{rccc} Y_1 & : & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \overline{Nu_1} \end{array} \tag{11.12}$$

La deuxième fonction objectif est le débit entrant par l'interface basse du canal. On souhaite maximiser cette fonction :

$$\begin{array}{rccc} Y_2 & : & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & G_{in}(y=0) \end{array} \tag{11.13}$$

La troisième fonction objectif est le débit entrant par l'interface haute du canal. On souhaite minimiser cette fonction :

$$\begin{array}{rccc} Y_3 & : & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & G_{in}(y=Rf_c) \end{array} \tag{11.14}$$

La quatrième fonction objectif est la température débitante à l'interface haute du canal. On souhaite maximiser cette fonction :

$$\begin{array}{rccc} Y_4 & : & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & T_{bulk}(y=Rf_c) \end{array} \tag{11.15}$$

On applique ici la méthode d'optimisation par krigeage à chacune des fonctions Y_l de manière indépendante.

Remarque 11.1 *La représentation graphique des valeurs de $\tilde{Y}_l$ (prédicteur associé à Y_l) est dans notre cas simple puisqu'il n'y a que deux paramètres d'entrée. On peut grâce à une représentation 2D obtenir une lecture facile de l'influence de d et b sur $\tilde{Y}_l$.*

11.3.2 Méthodes numériques

La méthode numérique pour l'optimisation du canal vertical repose sur le couplage de deux codes de calcul : un code volumes finis pour la simulation numérique directe des équations 2D instationnaires de Navier-Stokes afin de calculer les fonctions objectifs Y_l ; et un code pour le krigeage basé sur la librairie Fortran Kriging (ForK) développée par Loockwood (2012).

Simulation numérique directe Pour calculer les fonctions objectifs Y_l, on effectue une simulation numérique directe des équations 2D instationnaires de Boussinesq. On considère ici une approche de résolution où le domaine de calcul est restreint aux limites géométriques du canal (présenté dans la partie III). Les interfaces haute et basse du canal ainsi que l'ouverture du côté de la paroi non chauffée doivent donc être modélisées. On fait ici le choix de retenir des conditions limites de type Bernoulli local au niveau des interfaces et de l'ouverture. Ce choix est motivé par une simplicité de mise en place de ces conditions limites, ainsi que les bons accords qu'il existe entre ce type de modélisation et le canal plongé dans un environnement infini sur la vitesse verticale et le débit entrant par l'interface basse. Les conditions limites aux interfaces ainsi que pour l'ouverture s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \text{si le fluide entre } \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}<0 \ : & T=0, & P=-\dfrac{(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})^2}{2}, & \mathbf{V}\times\mathbf{n}=0, & \nabla\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=0, \\ \text{si le fluide sort } \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}>0 \ : & \nabla T\cdot\mathbf{n}=0, & P=0, & \mathbf{V}\times\mathbf{n}=0, & \nabla\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=0. \end{cases} \tag{11.16}$$

Remarque 11.2 *Nous avons ici choisi de modéliser les interfaces du canal par des conditions limites de type Bernoulli. Il faut noter que ce choix est effectué en première approximation. Un autre choix de modélisation aurait pu être effectué. Par exemple, nous aurions pu modéliser les interfaces avec des conditions de type Robin pour la pression motrice. Cependant, ce type de modèle nécessite de connaître ou de calculer le paramètre L (distante à partir de laquelle la pression motrice peut être considérée comme uniforme). N'ayant pas de connaissance a priori de L au niveau de l'ouverture, l'étude a été menée avec des conditions de type Bernoulli plus simple à mettre en oeuvre mais dont nous sommes conscient que l'écoulement proche des interfaces n'est pas correctement représenté.*

Le code de calcul utilisé ici est un code de calcul séquentiel. Les équations sont discrétisées avec un schéma semi-implicte d'ordre deux en temps et sur un maillage décalé avec des schémas centrés d'ordre deux pour la discrétisation spatiale. Pour des raisons de temps de calcul on considère ici un maillage 64×256. La résolution de l'équation de l'énergie est découplée du problème vitesse-pression par explicitation des termes non-linéaires. Le couplage vitesse-pression est résolu par une méthode de prédiction-projection incrémentale.

Les résultats sont obtenus pour un nombre de Rayleigh égale à 5.10^5 pour lequel l'écoulement au sein du canal sans ouverture tend vers un état stationnaire. Après différents tests, on observe que quelque soit la taille et la position de l'ouverture l'écoulement dans le canal tend toujours vers un état stationnaire. Ainsi les valeurs de Y_l sont les valeurs obtenues lorsqu'un état stationnaire est atteint.

Méthode de krigeage Le code utilisé pour la méthode de krigeage est basé sur la librairie Fortran Kriging (ForK) (Loockwood 2012). L'estimation des paramètres de la fonction de corrélation K_θ ainsi que la recherche du minimum du prédicteur $\tilde{Y}$ sont effectuées en utilisant une méthode de type Pattern Search (Hooke et Jeeves 1961). Le plan d'expérience initial est composé de 8 jeux de paramètres répartis de manière uniforme dans l'espace. On limite le nombre d'éléments maximum dans le plan d'expérience final à 30 jeux de paramètres. Cette limitation s'explique par les temps de calcul : avec 30 jeux de paramètres le processus d'optimisation dure environ 5 jours.

11.4 Résultats

Nous présentons les résultats obtenus pour un nombre de Rayleigh $Ra = 5.10^5$ et un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ (le fluide considéré est de l'air). On définit la configuration de base comme la configuration du canal vertical sans ouverture du côté de la paroi non chauffée. Pour cette configuration de base un écoulement de type couche limite avec une zone de recirculation en forme de V du côté de la paroi non chauffée est observé. Les grandeurs caractérisant la configuration de base sont présentées dans le tableau 11.1.

On compare nos résultats numériques avec les résultats expérimentaux obtenus par Azevedo et Sparrow (1986) après une étude paramétrique. Ils ont étudié l'écoulement au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé à température constante avec une ouverture du côté de la paroi non chauffée. Les résultas sont présentés pour un nombre de Prandtl $Pr = 5$ (le fluide considéré est de l'eau) et pour un nombre de Rayleigh Ra_T pour lequel il existe un régime de type couche limite (voir figure 11.2).

On présente d'abord l'évolution du nombre de Nusselt et du débit entrant par l'interface basse du canal en fonction du positionnement d de l'ouverture et de sa taille b. Ces résultats sont obtenus grâce au prédicteur construit par la méthode de krigeage. On s'intéresse ensuite aux configurations optimales obtenus par minimisation des prédicteurs $\tilde{Y}_l$ associés à chacune

des fonctions objectifs Y_l. Ces configurations optimales sont comparées avec la configuration de base.

	$\overline{Nu_1}$	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$	$T_{bulk}(y=Rf_c)$
Configuration de base	6.68	0.083	0.017	$6.82\ 10^{-2}$

TABLEAU 11.1 – *Grandeurs caractéristiques de la configuration de base*

Remarques générales Pour toutes les simulations effectuées la présence d'une ouverture sur la paroi non chauffée n'a jamais un effet déstabilisant pour la couche limite. On n'observe aucune instabilité de celle-ci. De plus, il est important de noter que quelque soit le positionnement et la taille de l'ouverture, le fluide traversant celle-ci provient toujours du milieu extérieur pour entrer dans le canal vertical et non l'inverse. Comme évoqué par Azevedo et Sparrow (1986) et montré par la figure 11.2, la présence d'une ouverture au niveau de la zone de recirculation ne permet pas de jouer sur l'existence ou non de celle-ci. La zone de recirculation existe toujours et garde sa forme en V quelque soit le positionnement et la taille de l'ouverture. Une partie du fluide entrant par l'ouverture descend alors dans le canal pour alimenter la couche limite thermique en fluide froid. Sur ce point la figure 11.2 met en évidence le bon accord entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux de Azevedo et Sparrow (1986) même si les deux configurations d'études sont différentes.

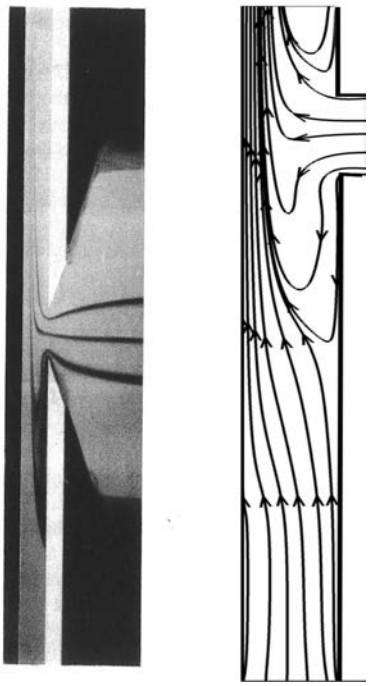


FIGURE 11.2 – *Visualisation de l'écoulement dans le canal en présence d'une ouverture au niveau de la zone de recirculation. A gauche : résultat expérimental (Azevedo et Sparrow 1986), à droite : résultat numérique issu d'une simulation numérique directe*

11.4.1 Effet d'une ouverture sur le nombre de Nusselt à la paroi chauffée

La figure 11.3 présente une cartographie du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu_1}$ sur la paroi chauffée du canal en fonction de la position d de l'ouverture et de sa taille b. Cette cartographie a été obtenue grâce au prédicteur de krigeage $\tilde{Y}_1$ que l'on à calculer pour 10000 points différents (100×100). Cette évaluation extrêmement rapide avec le prédicteur serait beaucoup trop longue avec la fonction boîte noire Y_1.

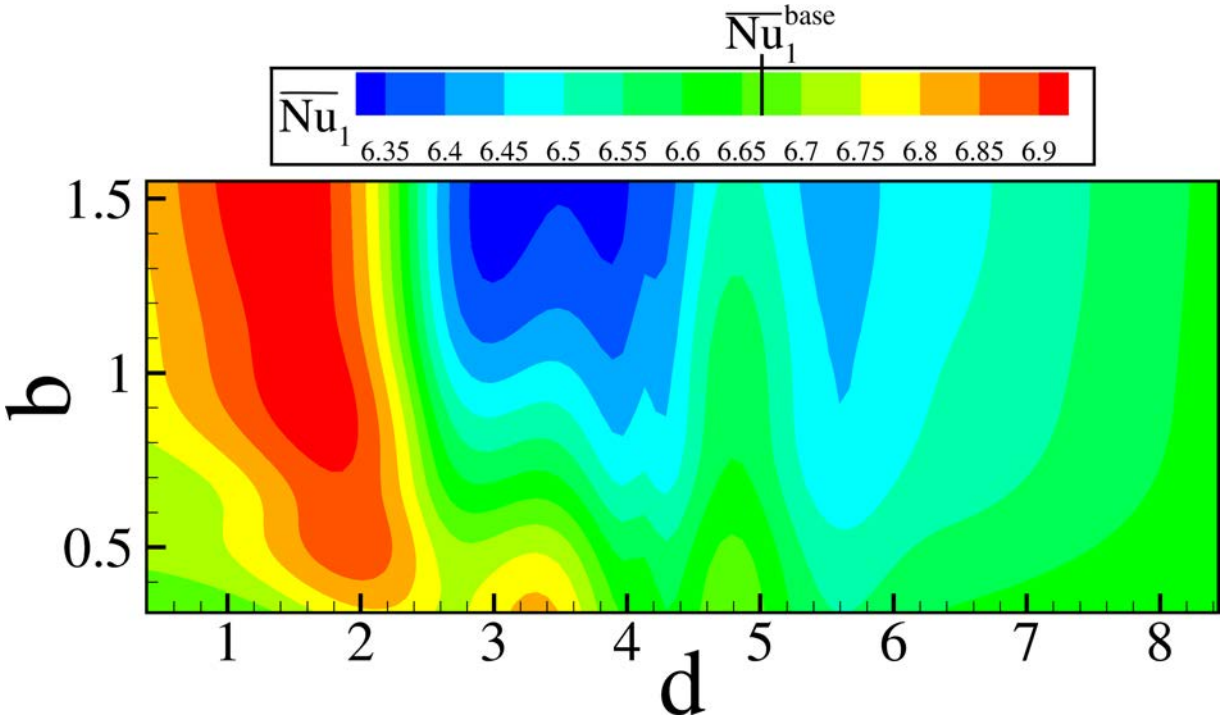


FIGURE 11.3 – *Cartographie du nombre de Nusselt $\overline{Nu_1}$ en fonction de d et b obtenue à l'aide du prédicteur $\tilde{Y}_1$*

On observe que la variation du nombre de Nusselt avec le positionnement et la taille de l'ouverture par rapport à la configuration de base n'est que de l'ordre de $+/-5\%$. Cette faible influence de la présence d'une ouverture traduit le comportement robuste de la couche limite thermique. On rappelle que cette couche limite thermique est le moteur de l'écoulement en permettant, grâce aux parois du canal, la mise en place d'un effet cheminée. Cette quasi insensibilité du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffé a aussi été mis en évidence par Azevedo et Sparrow (1986) où il varie d'environ seulement 2% avec la taille et la positionnement de l'ouverture.

La présence d'une ouverture dans la partie basse du canal permet de légèrement augmenter le transfert thermique à la paroi chauffée, alors qu'une ouverture dans la partie haute du canal n'a quasiment aucune influence sur le nombre de Nusselt. Cela s'explique facilement puisque une ouverture dans la partie haute du canal viendra seulement alimenter la zone de recirculation en fluide froid et non pas directement la couche limite thermique.

On montre ici qu'il est donc difficile de contrôler le transfert de chaleur au niveau de la paroi chauffée uniquement en jouant sur le positionnement et la taille d'une ouverture du côté non chauffée.

11.4.2 Effet d'une ouverture sur le débit entrant par le bas du canal

La figure 11.4 présente une cartographie du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal en fonction de la position d de l'ouverture et de sa taille b. Cette cartographie a été obtenue grâce au prédicteur de krigeage $\tilde{Y}_2$ que l'on à calculer pour 10000 points différents (100×100).

On observe que quelque soit la position et la taille de l'ouverture le débit entrant par l'interface basse du canal est plus faible que celui de la configuration de base. De plus, contrairement à ce que l'on a vu pour le nombre de Nusselt, le débit entrant par l'interface basse est très sensible au positionnement et à la taille de l'ouverture (le débit peut être réduit de presque 95% par rapport à la configuration de base). Le débit total de fluide entrant dans

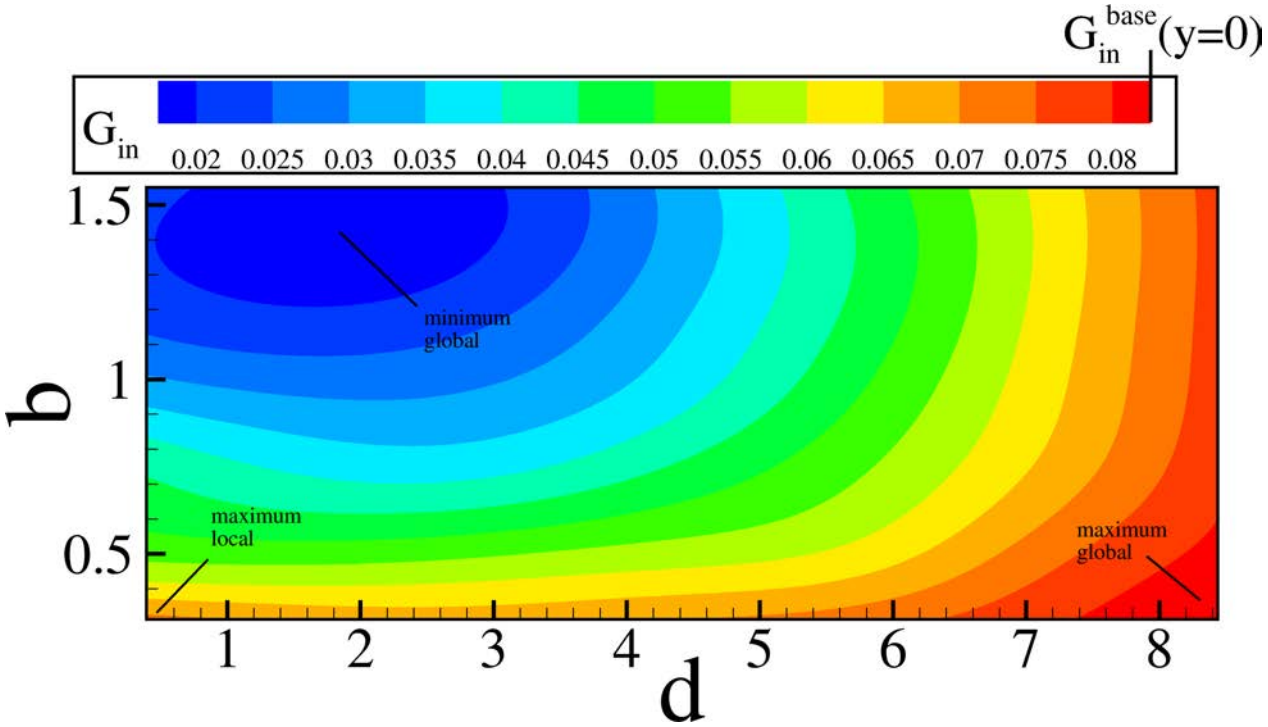


FIGURE 11.4 – *Cartographie du débit entrant par l'interface basse du canal $G_{in}(y = 0)$ en fonction de d et b obtenue à l'aide du prédicteur $\tilde{Y}_2$*

le canal dépend de la couche limite thermique. Le comportement de celle-ci étant robuste, la somme des débits entrant par les interfaces haute et basse et par l'ouverture reste quasiment constante. Donc s'il existe une ouverture sur la paroi non chauffée du canal, le débit entrant par l'interface basse est forcément impacté.

Une grande ouverture dans la partie basse du canal réduit très fortement le débit aspiré par l'interface basse. Cela s'explique par le fait qu'il est alors plus facile pour l'écoulement d'aspirer le fluide par l'ouverture que par l'interface basse puisque les forces de frottements sur les parois seront réduites. On peut ainsi quasiment supprimer l'aspiration de fluide par l'interface basse. Une petite ouverture dans la partie haute à une influence presque négligeable. Effectivement, si une ouverture se situe dans la partie haute elle contribue à alimenter la zone de recirculation en fluide froid et n'influence ainsi que très peut le débit entrant par l'interface basse du canal. Ces différentes observations (débit total constant, influence de l'ouverture) sont confirmées par les résultats de Azevedo et Sparrow (1986). Ils apportent les mêmes conclusions que nos résultats sur le fait le débit de fluide entrant par l'interface basse est dépendant de l'ouverture.

Il est donc possible de contrôler les débits entrants dans le canal en jouant sur le positionnement et la taille de l'ouverture. Cela peut s'avérer intéressant dans le cas de certains systèmes industriels.

11.4.3 Simulation non-linéaires des configurations optimales

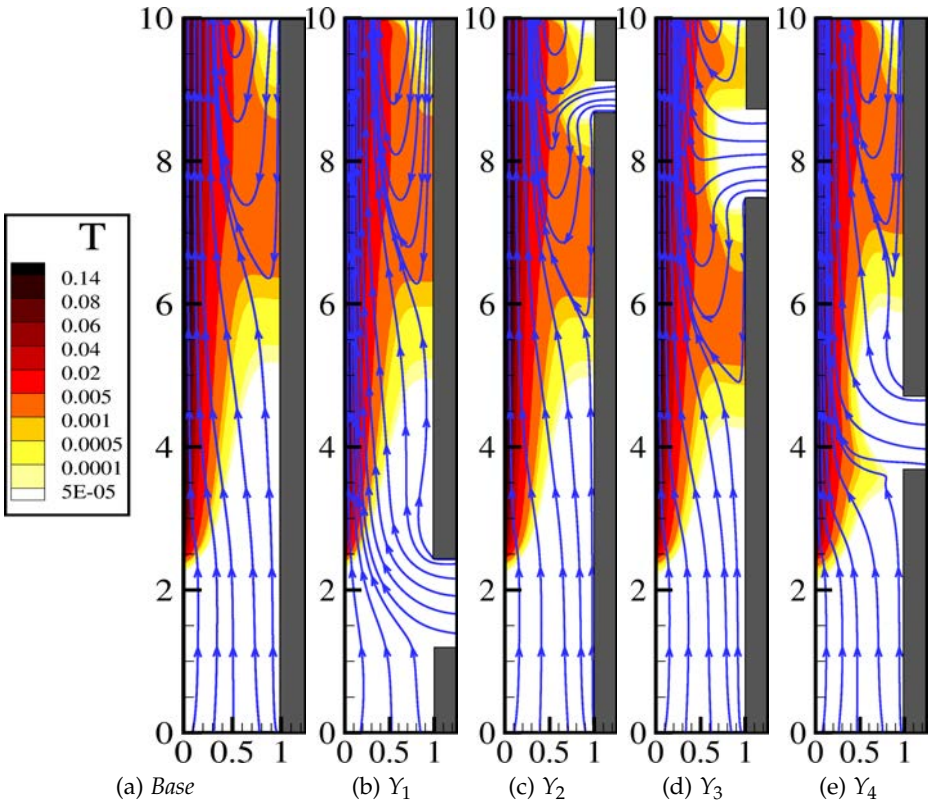
On présente ici les 4 configurations optimales associées aux 4 fonctions objectifs Y_l. Ces optimum ont été obtenus par minimisation des prédicteurs $\tilde{Y}_l$. Le tableau 11.2 donne les valeurs de d et b ainsi que les grandeurs caractéristiques de l'écoulement pour ces configurations optimales. La figure 11.5 présente les iso-valeurs du champ de température ainsi que les lignes de courant pour les configurations optimales et la configuration de base.

On montre que l'on peut très légèrement augmenté le nombre de Nusselt par la présence

	d	b	$\overline{Nu_1}$	$G_{in}(y=0)$	$G_{in}(y=Rf_c)$	$T_{bulk}(y=Rf_c)$
Base	-	-	6.68	0.083	0.017	$6.82\ 10^{-2}$
Y_1 ($\overline{Nu_1}$)	1.25	1	**6.96** (+4.19%)	0.019	0.017	0.24
Y_2 ($G_{in}(y=0)$)	6.75	0.25	6.64	**0.075** (−9.6%)	0.013	$5.93\ 10^{-2}$
Y_3 ($G_{in}(y=Rf_c)$)	6.05	1	6.55	0.059	**0.005** (−70%)	$7.63\ 10^{-2}$
Y_4 ($T_{bulk}(y=Rf_c)$)	0.95	1	6.85	0.019	0.016	**0.25** (+265%)

TABLEAU 11.2 – *Grandeurs caractéristiques des configurations optimales*

d'une ouverture par rapport à la configuration de base (voir tableau 11.2). L'ouverture est alors situé dans la partie basse du canal (voir figure 11.5). En ce qui concerne le débit de fluide entrant par l'interface basse du canal, la configuration de base est la configuration optimale (voir tableau 11.2). La présence d'une ouverture mène toujours à ce que $G_{in}(y=0)$ soit inférieur à celui de la configuration de base. Pour preuve $G_{in}(y=0)^{opt} < G_{in}(y=0)^{base}$. Le débit de fluide entrant par l'interface haute du canal peut être réduit de manière significative par la présence d'une grande ouverture dans la partie haute du canal. La zone de recirculation n'est alors plus alimentée par du fluide provenant de l'interface haute du canal mais par du fluide provenant de l'ouverture (voir figure 11.5). La température débitante en sortie du canal peut aussi être améliorée par la présence d'une ouverture. Cependant, il faut noter que telle qu'elle est définie, la température débitante est dépendante de l'inverse du débit de fluide entrant par l'interface basse du canal. Donc maximiser la température débitante est proche de minimiser le débit de fluide entrant par l'interface basse du canal.



(a) *Base* (b) Y_1 (c) Y_2 (d) Y_3 (e) Y_4

FIGURE 11.5 – *Résultats des simulations non-linéaires des configurations optimales et de la configuration de base*

Influence de l'ouverture sur la zone de recirculation On observe sur la figure 11.5 que la position de l'ouverture joue un rôle important sur la profondeur de pénétration de la zone de recirculation. Si l'ouverture est située dans la partie basse du canal, alors la zone de recir-

culation est proche de celle observée pour la configuration de base. Lorsque l'ouverture est située dans la partie haute du canal, la zone de recirculation est plus profonde que pour la configuration de base.

11.5 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons utilisé une méthode d'optimisation par krigeage afin d'évaluer l'influence de la position et de la taille d'une ouverture sur la thermique et la dynamique de l'écoulement au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant pour un nombre de Rayleigh $Ra = 5.10^5$. Cette méthode nous permet de construire un prédicteur $\tilde{Y}$ de fonctions objectif coûteuses Y. L'application de cette méthode à l'optimisation géométrique du canal vertical permet un gain de temps considérable par rapport aux études paramétriques. De plus, les résultats que l'on obtient sont en accords avec les résultats obtenus précédemment par Azevedo et Sparrow (1986).

Nous avons ainsi montré que l'influence d'une ouverture sur la paroi non chauffée du canal est très faible sur le nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée et que le comportement de la couche limite thermique (moteur de l'écoulement) est robuste vis-à-vis de l'ouverture. On a aussi mis en évidence que quelque soit le positionnement et la taille de l'ouverture un régime de type couche limite du côté de la paroi chauffée avec une zone de recirculation du côté de la paroi non chauffée existe. Les différents débits de fluide entrant dans le canal sont eux très dépendant de la position et de la taille de l'ouverture. On peut donc contrôler ces débits en choisissant correctement la position et la taille de l'ouverture. Pour aider à ce choix nous avons proposé une cartographie du débit entrant par l'interface basse du canal en fonction de la taille et la position de l'ouverture. Celle-ci a été obtenue par évaluations du prédicteur de krigeage $\tilde{Y}_2$ pour 10000 points de l'espace des paramètres.

Plusieurs perspectives découlent de ce travail. La première perspective que l'on peut proposer est l'application de cette méthode à la conception de systèmes industriels réel tels que le mur Trombe ou les panneaux solaires. Dans un deuxième temps, il serait intéressant d'étudier l'influence combinée de deux ouvertures sur la paroi non-chauffée du canal. Une telle configuration pourrait peut-être permettre de faire disparaître la zone de recirculation et l'apport de fluide par l'interface haute du canal. Un troisième axe de travail possible est d'aller vers de l'optimisation multi-critères. En effet du point de vue des systèmes industriels on cherche souvent à obtenir une configuration optimale répondant plusieurs à critères de dimensionnement et points de fonctionnement.

Bibliographie

L.F. Azevedo et E.M. Sparrow. Natural Convection in a Vertical Channel Vented to the Ambient Through an Aperture in the Channel Wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 29 :819–830, 1986.

P. Barbillon. Méthodes d'interpolation à noyaux pour l'approximation de fonction type boîte noire. *Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI*, 2010.

R. Bettinger. Inversion d'un système par krigeage, application à la synthèse de catalyseurs à haut débit. *Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antopolis*, 2009.

R. Hooke et T.A. Jeeves. Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of Association for Computing Machinery*, 8 :212–229, 1961.

D.R. Jones, M. Schonlau, et W.J. Welch. Efficient Global Optimization of Expensive Black-box Functions. *Journal of Global Optimization*, 13 :455–492, 1998.

D.G. Krige. A Statistical Approach to some Basic Mine Evaluation Problems on the Witwatersrand. *Journal Chemistry Metallurgical and Mining Society*, pages 119–139, 1951.

B.A. Loockwood. http ://w3.uwyo.edu/ blockwoo/forklib. *Laboratory Department of Mechanical Engineering, University of Wyoming*, 2012.

J. Pfanzagl et R. Hamböker. Parametric Statistical Theory. *Walter de Gruyter*, 8, 1994.

J. Sacks, W.J. Welch, T.J. Mitchell, et H.P. Wynn. Design and Analysis of Computer Experiments. *Statistical Science*, 4 :409–435, 1989.

M.J. Sasena. Flexibility and Efficiency Enhancements for Constrained Global Design Optimization with Kriging Approximation. *PhD Thesis, University of Michigan*, 2002.

J. Villemonteix. Optimisation de fonctions coûteuses, modèles gaussiens pour une utilisation efficace du budget d'évaluation : théorie et pratique industrielle. *Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI*, 2008.

Cinquième partie

Conclusions et perspectives

Conclusion générale

Synthèse générale

Dans ce travail, une étude détaillée de la convection naturelle au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé a été effectuée. Cette configuration est une configuration prototype pour les écoulements semi-confinés de convection naturelle. L'objectif de ce travail est de contribuer à l'amélioration de la modélisation des interfaces entre le canal vertical et son environnement extérieur. La démarche suivie dans cette thèse a consisté à étudier dans un premier temps le canal et son environnement extérieur afin de mieux comprendre les interactions entre le canal et son environnement et d'améliorer la connaissance physique de l'écouelement mais aussi afin d'établir des solutions numériques de référence de l'écoulement au sein du canal. Pour établir ces solutions de référence, nous avons cherché une configuration pour laquelle l'écoulement au sein du canal peut être une bonne approximation de l'écoulement dans un canal plongé dans un milieu infini. La deuxième étape de la démarche a été de réduire le domaine de calcul au canal seul et de proposer différentes méthodes de résolutions et de modélisations des interactions canal/environnement. Une nouvelle approche basée des conditions limites de type Robin pour la pression motrice a été proposée.

Dans la partie II, le canal et son environnement extérieur ont été donc modélisés par un canal plongé au milieu d'un réservoir fermé. Nous avons montré que lorsque le rapport entre la surface du réservoir et celle du canal est faible, l'écoulement au sein du canal ne peut pas être vu comme indépendant du milieu extérieur. L'écoulement observé au sein du canal est alors propre à la géométrie canal/environnement. Cependant, pour un réservoir très grand, il est alors possible d'observer sur un temps suffisamment long un écoulement dans le canal indépendant du milieu extérieur. Des solutions numériques de référence approchant l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical plongé dans un environnement infini ont alors été établies. L'écoulement aux interfaces du canal a ensuite été caractérisé. Des corrélations pour les grandeurs globales de l'écoulement en fonction du nombre de Rayleigh ont aussi été proposées. La fin de cette partie est consacrée à la comparaison entre des résultats expérimentaux et nos résultats numériques. Des résultats préliminaires aux tout premiers instants et sur des temps longs été présentés.

Dans la partie III, différentes modélisations et méthodes de résolutions pour un domaine de calcul réduit aux limites géométriques du canal ont été étudiées. Le chapitre 8 a mis en évidence que pour un schéma MAC classique et avec des conditions de type Neumann (homogène ou non) sur les vitesses et la pression motrice aux interfaces, le problème est mal posé. Une méthode de résolution basée sur l'analyse des valeurs singulières (SVD) de l'opérateur de Stokes et sur le principe de superposition a été détaillée afin d'obtenir une solution unique au problème. Deux modélisations de l'interface basse ont alors été étudiées : des conditions de Neumann homogène sur les deux composantes de la vitesse (cas $CLU-DH$) ou une condition de Neumann homogène sur la vitesse verticale et une condition de vorticité nulle (cas $CLU-V$). Le cas $CLU-DH$ mène alors à un écoulement déjà établi dans la partie basse du canal ce qui est contraire aux observations effectuées dans la partie II. Bien que le cas $CLU-V$ permet d'obtenir un écoulement non établi au niveau de l'interface basse, la pression motrice et la vitesse horizontale ne sont pas représentatives des résultats obtenus pour les solutions

numériques de référence. Les limites de cette première méthode de résolution ont alors été mise en évidence. De plus, il est montré qu'à l'interface basse du canal l'imposition d'une contrainte de cisaillement nulle ($\tau = 0$) semble plus judicieuse que d'imposer une vorticité nulle.

Le chapitre 9 a traité de l'implémentation des conditions limites de type Bernoulli. Les résultats obtenus nous ont permis de participer à un exercice de comparaison numérique proposé dans le cadre de la société française de thermique (SFT). Ce benchmark a proposé quatre jeux de conditions limites mais n'a pas conclu quant au jeu de condition limite le plus pertinent. Grâce à la comparaison avec les solutions de référence de la partie II et à une étude de l'influence des conditions limites en fonction du nombre de Rayleigh, nous avons montré que la condition limite de type Bernoulli local était la plus apte à représenter l'écoulement aux interfaces. Cependant, nous avons aussi montré que la modélisation de la pression motrice et de la vitesse horizontale n'était représentative des solutions de la partie II. Ainsi, afin de pouvoir obtenir une vitesse horizontale non nulle aux interfaces, il serait nécessaire d'utiliser la condition de divergence nulle comme condition limite sur la vitesse verticale.

Dans le chapitre 10, nous avons alors proposé une nouvelle approche pour la modélisation de la pression motrice et des deux composantes de la vitesses aux interfaces du canal. Pour les conditions limites sur les deux composantes de la vitesse, nous reprenons les conclusions des chapitres 8 et 9 : utilisation de la divergence nulle comme condition limite pour V et imposition de $\tau = 0$ (traction pure) à l'interface basse du canal. Des conditions limites de type Robin ont été introduites afin de mieux modéliser les effets convectifs et visqueux jouant sur la pression motrice aux interfaces du canal. Les résultats présentés montrent alors une amélioration significative pour la modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal par comparaison avec les résultats numériques de référence précédemment obtenus. Cette approche semble capable de correctement modéliser l'écoulement au niveau des interfaces mais nécessite cependant une certaine connaissance de l'écoulement extérieur pour définir le paramètre de la condition de Robin.

La partie IV présente un exemple de méthode d'optimisation basée sur le krigeage pour étudier l'influence d'une ouverture du côté de la paroi non-chauffée du canal. Il est montré un comportement robuste de la couche limite qui n'est que peut influencer par la taille et le positionnement de l'ouverture. Au contraire, les débits de fluide entrant dans le canal peuvent être contrôler en jouant sur la taille et la position de l'ouverture.

Discussion et perspectives

Cette étude permet de mettre en évidence les difficultés de modélisation des interfaces du canal ainsi que les difficultés numériques liées aux écoulements semi-confinés de convection naturelle. Elle amène aussi à se poser plusieurs questions quant au système canal/environnement.

Le canal vertical peut-il être dissocié de son environnement extérieur ? Dans ce travail, nous avons montré que lorsque le canal vertical est plongé au milieu d'un réservoir fermé, il existe au bout d'un certain temps une influence non négligeable de l'environnement extérieur : mise en place d'une stratification thermique et/ou oscillation du jet thermique sortant du canal. Cette influence joue alors sur les débits de fluide entrant dans le canal et le comportement spatio-temporel de la zone de recirculation au sein du canal lorsqu'elle existe. Il peut ainsi être légitime de se poser la question du caractère générique des résultats expérimentaux (où le milieu extérieur est propre à chaque expérience) de convection naturelle dans un canal vertical et la comparasion des diverses expériences entre elles. Il faut aussi se poser la question du point de vue numérique : jusqu'à quel point une simulation restreinte au canal seul sera

représentative du système industriel évoluant au sein d'un environnement spécifique.

Peut-on simuler numériquement le canal sans son environnement extérieur ? Et si oui, quelles sont les limites associées ? Apporter une réponse claire à cette question n'est pas évident. Dans un premier temps, la réponse simple consiste à dire que le canal évolue dans un environnement et qu'il ne peut pas être tronqué de son milieu extérieur. Cependant, les résultats obtenus dans la partie III avec des conditions limites de type Robin ($P = P + L\,\frac{\partial P}{\partial y}$) sur la pression motrice montre de très bon accords avec les résultats obtenus lorsque le canal et son environnement sont considérés. Pour obtenir ces résultats, il est cependant nécessaire de modéliser l'écoulement dans le milieu extérieur proche des interfaces. Cette modélisation se traduit alors dans le paramètre L. Dans notre étude, ce paramètre a été déterminé par la connaissance numérique de l'écoulement dans le milieu extérieur. Il semble donc possible de ne simuler que le canal seul mais une connaissance de l'écoulement dans le milieu extérieur est nécessaire pour définir les conditions limites aux interfaces. Cette approche permet ainsi de restreindre la simulation aux limites géométriques du canal tout en nécessitant une connaissance du milieu extérieur et ouvre sur de nombreuses perspectives pour la définition L.

Production scientifique

Lors de cette thèse nous avons participé au benchmark numérique de la communauté française de thermique :

- G. Desrayaud, E. Chenier, A. Joulin, A. Bastide, B. Brangeon, J.P. Caltagirone, Y. Cherif, R. Eymard, C. Garnier, S. Giroux-Julien, Y. Harnane, P. Joubert, N. Laaroussi, S. Lassue, P. Le Quéré, R. Li, D. Saury, A. Sergent, S. Xin, et A. Zoubir. *Benchmark Solutions for Natural Convection Flows in Vertical Channels Submitted to Different Open Boundary Conditions*, International Journal of Thermal Sciences, 72 :18–33, 2013

Ces travaux de thèse ont été présentés à diverses conférences :

- C. Garnier, A. Sergent, Y. Fraigneau, P. Le Quéré, *Comparative Study of Numerical Simulations of a 2D Buoyancy-driven Flow in a Vertical Channel Asymmetrically Heated with or Without External Domain*, Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference (Begell House), IHTC15-9291, 15 pages, August 10-15, 2014, Kyoto, Japan

- C. Garnier, A. Sergent, P. Le Quéré, *Etude numérique de l'interaction entre un canal vertical asymétriquement chauffé et son environnement extérieur*, Congrès de la Société Française de Thermique 2014, Art-8958 , 3-6 juin 2014, Lyon

- C. Garnier, A. Sergent, P. Le Quéré, *Optimization by Kriging of a 2D Vertical Channel Asymmetrically Heated*, 6 pages, 21ème Congrès Français de Mécanique, 26 - 30 août 2013, Bordeaux

- C. Garnier, A. Sergent, P. Le Quéré, *Modélisation et influence des conditions limites pour des écoulements semi-confinés*, XIème Colloque Inter-universitaire Franco-Québécois sur le Thermique des Systèmes, 3 - 5 juin 2013, Reims

- C. Garnier, A. Sergent, P. Le Quéré, *Modélisation numérique d'un canal vertical asymétriquement chauffé avec une condition limite à l'entrée de type vorticité*, Congrès de la Société Française de Thermique 2012, Tome 2, 500 - 508, Bordeaux