Université Pierre et Marie Curie (UPMC)
Ecole doctorale $n°391$ (SMAER)
Laboratoire FAST - Air Liquide

Thèse

présentée en vu d'obtenir le grade
de Docteur, spécialité « Mécanique »

par

Nicolas Kofman

Films liquides tombants avec ou sans contre-écoulement de gaz : application au problème de l'engorgement dans les colonnes de distillation

---

Soutenance le 7 Novembre 2014 devant le jury composé de :

M.	Valéry Botton	LMFA	(Rapporteur)
M.	Benoit Scheid	ULB	(Rapporteur)
Mme	Patricia Ern	IMFT	(Examinatrice)
M.	Laurent Limat	MSC	(Examinateur)
M.	Maurice Rossi	IJLRA	(Examinateur)
M.	Christian Ruyer-Quil	LOCIE	(Directeur de thèse)
Mme	Sophie Mergui	FAST	(Co-directrice de thèse)
M.	Guillaume Mougin	Air Liquide	(Invité)

A mon père . . .

Remerciements

Ce manuscrit de thèse s'inscrit dans le cadre d'une convention CIFRE entre la société *Air Liquide* et le laboratoire *Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques* (FAST). Durant ces trois ans, j'ai eu l'opportunité de côtoyer différentes personnes qui m'ont apporté leur aide et sans qui l'accomplissement de ce travail n'aurait pas été possible.

Mes plus sincères remerciements vont d'abord à mes encadrants, au laboratoire FAST : Sophie Mergui et Christian Ruyer-Quil (maintenant au LOCIE, Université de Savoie), et au Centre de Recherche Paris-Saclay d'Air Liquide : Guillaume Mougin et Frédéric Crayssac.

Sophie, j'ai été impressionné par ton savoir-faire dans la conception et la réalisation des montages expérimentaux : l'ingénieux système de forçage des ondes en est une bonne illustration ! Merci pour ta grande disponibilité, les discussions variées qu'on a eues, ton naturel et pour ta rigueur expérimentale qui m'a inspiré.

Christian, ton enthousiasme sans faille et ton expertise dans le domaine des films m'ont été précieux. Le monographe que tu as publié avec S. Kalliadasis, B. Scheid et M.G. Velarde, a toujours été à portée de main ! J'ai également beaucoup appris grâce à toi en LaTeX, Unix, Gnuplot ... et dans la manière de dompter AUTO ! Merci aussi de m'avoir donné la possibilité de voyager et d'échanger à travers le GDR Films.

Guillaume, je te suis reconnaissant de la confiance que tu m'as accordée. Merci de m'avoir proposé l'idée du banc d'essai cryogénique, de m'avoir introduit à la distillation et aussi de m'avoir donné envie d'en savoir plus.

Frédéric, merci de m'avoir orienté dans l'environnement de la R&D. Tes grandes connaissances techniques, ton calme et ta persévérance m'ont été d'une grande aide !

Merci à vous de m'avoir permis d'effectuer des vacations d'enseignement, de m'avoir donné l'occasion de voyager à travers plusieurs conférences nationales et internationales, et merci encore pour votre disponibilité et la liberté d'action que vous m'avez accordées.

Au laboratoire FAST, j'aimerais remercier pour leur accueil les deux directeurs qui se sont succédés durant mon séjour : Neil Ribe et Marc Rabaud.

Un grand merci également à Georg qui m'as été d'un grand soutien : ta connaissance, aussi bien des aspects numériques qu'expérimentaux du problème, ton aide concernant

les mesures CCI et les simulations Gerris, les bons moments passés durant les conférences à Volos et à Vienne ont vraiment beaucoup compté pour moi.

Je tiens à remercier aussi les ingénieurs et techniciens du laboratoire pour leur disponibilité, leur bonne humeur et leur gentillesse : Rafaël pour tes bonnes idées (les copeaux dans le haut-parleur !) et les dizaines de plaques à percer ou couper que je t'ai donné, Lionel pour ton implication et ton aide précieuse dans la conception du montage, Christian Borget pour avoir réglé de nombreux problèmes techniques de toute nature, Alban et Babacar pour tous vos dépannages mais aussi pour les parties de tennis !

Je remercie également Béatrice d'avoir été ma directrice de thèse officielle pendant presque trois ans, Frédéric D. pour son aide concernant les TP, Frédéric M. pour m'avoir initié à la méthode Schlieren ainsi que les autres personnes du laboratoire qui m'ont aidé et apporté leurs conseils : Maï, Monique, Véronique, Jean-Pierre, Antoine S., Philippe.

Parmi les doctorants et post-doc, merci à Sarah pour nos discussions pianistiques et cette passion commune pour les tartes au citron (!), Johan et Aurore pour l'initiative des afterwork du Jeudi soir, sans oublier Arghya, Manish, Thibaud, Anna, Antoine, Séverine, François, Floriane pour avoir également contribué à la très bonne ambiance !

Au Centre de Recherche Paris-Sackay d'Air Liquide, merci à Fabrice Delcorso et Frédéric Camy-Perret pour m'avoir accueilli en 2011 dans leurs groupes respectifs.

Je tiens aussi à remercier tout spécialement Grégory Corrado pour son implication et son aide dans l'utilisation du banc d'essai, notamment la manipulation du canal !.

Merci aussi à Kateryna pour son soutien, Clotilde et Nadège pour leur bonne humeur et pour m'avoir fait découvrir le CE, David pour m'avoir introduit à la technique des « mind-map », Erwan pour son idée insoupçonnée sur les solitons 3D, et aux autres personnes que j'ai pu rencontrer : Elena, Mickaël, Clément, Christine, Jacqueline, Benjamin.

Je voudrais remercier enfin Valéry Botton et Benoit Scheid pour avoir accepté d'être rapporteurs, Maurice Rossi, Patricia Ern et Laurent Limat pour faire partie du jury.

Merci à Benoît Scheid de m'avoir présenté ses codes de simulation, à Maurice Rossi et Ivan Delbende pour avoir répondu à mes questions sur les instabilités de tourbillon.

Merci à François Gallaire pour son idée concernant le troisième mode d'instabilité, et la confiance qu'il m'accorde pour la suite !

Je pense également à mon frère (merci de m'avoir suggéré l'idée de la détection de lignes !), à mes amis et à Laura et je les remercie pour leur soutien de tous les jours.

Je termine par une profonde pensée pour ma mère qui m'a toujours encouragé.

Table des matières

Table des matières vii

Introduction 1

1 Dispositif expérimental : film liquide tombant 7
1.1 Présentation du montage . . . 7
1.1.1 Description des différents éléments . . . 7
1.1.2 Paramètres expérimentaux . . . 9
1.2 Méthodes de mesure par ombroscopie . . . 10
1.2.1 Visualisation des ondes . . . 10
1.2.2 Mesures de vitesse de phase . . . 11
1.3 Méthodes de mesure d'épaisseur . . . 13
1.3.1 Etat de l'art . . . 13
1.3.2 Méthode Schlieren . . . 15
1.3.3 Méthode CCI . . . 23
1.4 Conclusion . . . 26
Annexe A - Propriétés de l'eau, des mélanges eau-glycérine/butanol . . . 27
Annexe B - Méthode Schlieren : temps d'exposition . . . 28
Annexe C - Méthode Schlieren : fenêtre d'interrogation . . . 29

2 Dynamique 2D d'un film liquide tombant 31
2.1 Présentation des outils numériques . . . 32
2.1.1 Notations et paramètres adimensionnels . . . 32
2.1.2 Equations de base et hypothèses de modélisation . . . 33
2.1.3 Modèles à une équation . . . 34
2.1.4 Modèles à deux équations . . . 36
2.1.5 Calcul des solutions stationnaires . . . 38
2.1.6 Simulations spatio-temporelles . . . 39
2.2 Ondes forcées . . . 41
2.2.1 Deux principales familles d'ondes . . . 41
2.2.2 Familles hybrides, stabilité et sélection . . . 43
2.2.3 Corrélations de vitesse . . . 45
2.3 Ondes naturelles . . . 51
2.3.1 Etat de l'art . . . 53

2.3.2 Ondes optimales courtes . . . 55
2.3.3 Ondes optimales longues . . . 57
2.4 Conclusion - Perspectives . . . 64
Annexe A - Corrélation empirique pour la vitesse . . . 67
Annexe B - Données brutes et comparaison expérience/modèle . . . 68
Annexe C - Courbes supplémentaires pour les ondes optimales . . . 69

3 Instabilités 3D d'un film liquide tombant **71**
3.1 Modes d'instabilités 3D des ondes solitaires . . . 72
3.1.1 Mode capillaire et mode inertiel : article à paraître dans *J. Fluid Mech.* . . . 72
3.1.2 Troisième mode d'instabilité . . . 105
3.1.3 Evolution non linéaire du mode inertiel . . . 107
3.2 Deux points supplémentaires . . . 109
3.2.1 Mode d'instabilité synchrone des ondes γ_1 . . . 109
3.2.2 Simulations numériques directes . . . 112
3.3 Conclusion - Perspectives . . . 113

4 Film liquide cisaillé par un contre-écoulement d'air **115**
4.1 Etat de l'art . . . 116
4.2 Dispositif expérimental . . . 121
4.2.1 Description du montage . . . 121
4.2.2 Contrôle des conditions d'entrée et de sortie . . . 123
4.2.3 Caractérisation de l'écoulement de gaz . . . 124
4.3 Influence du contre-écoulement sur les ondes 2D . . . 125
4.3.1 Forme des profils d'ondes stationnaires . . . 125
4.3.2 Vitesse, amplitude et épaisseur moyenne des ondes . . . 129
4.3.3 Forçage et instabilité secondaire 2D . . . 133
4.4 Influence du contre-écoulement sur les ondes 3D . . . 135
4.4.1 Mode capillaire . . . 135
4.4.2 Mode inertiel . . . 136
4.5 Transition à l'engorgement . . . 139
4.5.1 Ripples . . . 139
4.5.2 Slugs . . . 143
4.5.3 Effet de bord : évacuation du liquide . . . 143
4.6 Conclusion - Perspectives . . . 145

Conclusion **147**

Bibliographie **149**

Introduction

« Dans la nature, les rythmes, les hauteurs, les tempi sont multiples et complexes. Rappelez-vous la façon dont ondulent les vagues de la mer, dont se brisent les eaux d'une rivière, ou encore la pluie »

Arnold Schoenberg

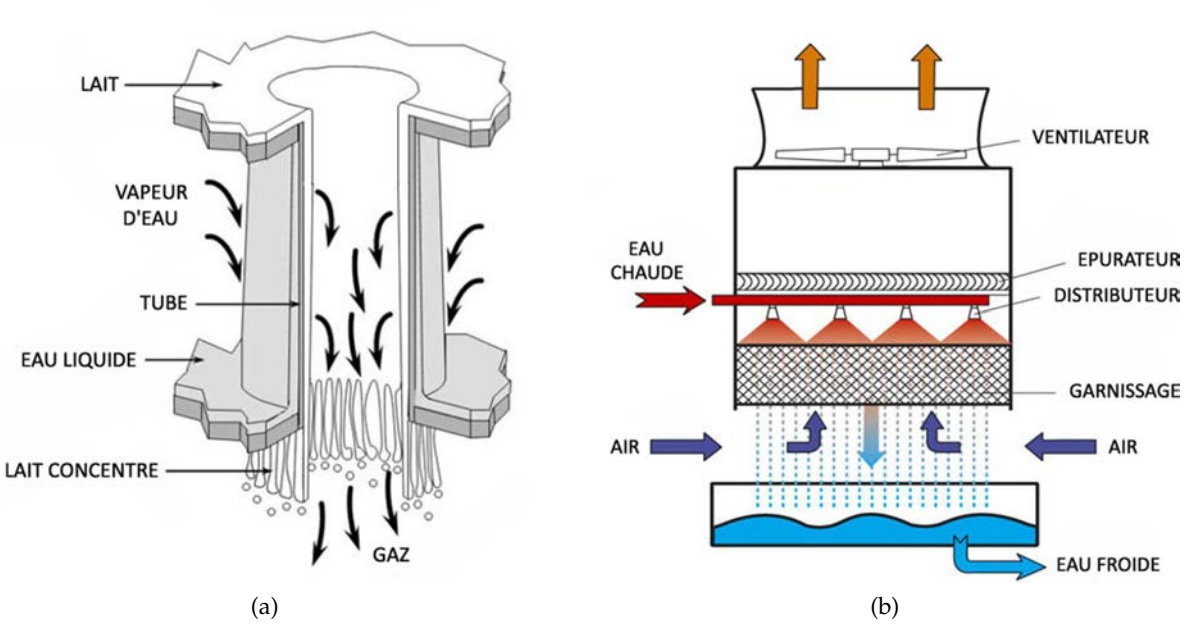
Un film liquide est une fine couche de liquide s'écoulant sur une paroi. Cette notion de film mince est relative et dépend de la longueur caractéristique considérée. Les mécanismes de formation des écoulements de films liquides sont très divers. Ils peuvent apparaître simplement sous l'effet de la gravité : ces films « tombants » peuvent être observés sur les vitres ou les trottoirs inclinés les jours de pluie (figure 1a). Les ondes qui apparaissent à l'interface donnent naissance à des structures étonnantes. Il existe d'ailleurs de nombreuses fontaines décoratives utilisant cette propriété (figure 1b). Dans le cas plus extrême des écoulements torrentiels, les « roll-waves » ainsi formées constituent un phénomène dangereux pour les constructions. Parallèlement à ces ondes gravitaires, le cisaillement d'un écoulement de gaz à la surface d'un liquide crée aussi des vagues : rides à la surface d'un lac, houle de l'océan. Ces deux phénomènes apparaissent souvent combinés comme dans le cas du pare-brise d'une voiture. Enfin, des films liquides peuvent être formés par condensation d'une vapeur ou impact de jets sur une paroi.



(a) (b)

Figure 1 – *Exemples de films liquides tombants naturels. (a) : Ondes 2D sur une route en pente après un orage. (b) : Ondes 3D utilisées dans une fontaine décorative. Les photographies sont extraites respectivement du site Internet personnel du mathématicien Andrew Fowler (http ://people.maths.ox.ac.uk/fowler/) et de l'artiste William Pye (http ://www.williampye.com)*

De nombreux procédés industriels utilisent des films liquides s'écoulant sur une paroi inclinée ou verticale en présence d'un écoulement de gaz co-courant ou contre-courant. Dans l'industrie agroalimentaire par exemple, la production de lait concentré s'effectue grâce à des évaporateurs à films tombants (figure 2a). Le lait s'écoule sur les parois intérieures d'un tube vertical et s'évapore en partie sous l'effet de la chaleur apportée par de la vapeur d'eau présente à l'extérieur du tube. Le gaz s'évacue par le bas à l'intérieur du tube créant ainsi un écoulement co-courant tandis que de l'eau liquide se forme par condensation sur les parois extérieures. Un autre exemple de procédé concerne les tours de refroidissement des centrales nucléaires (figure 2b). Elles permettent de dissiper la chaleur d'une eau chaude par interaction avec un écoulement d'air à contre-courant. Des distributeurs répartissent le liquide de manière homogène au sein de garnissages ce qui maximise la surface d'échange. Enfin, la distillation fractionnée d'un mélange binaire utilise également des écoulements gaz-liquide à contre-courant dans des garnissages avec transfert de chaleur et de masse.



(a) (b)

FIGURE 2 – *Deux dispositifs utilisant des films liquides cisaillés par un écoulement de gaz. (a) : Evaporateur à film tombant utilisé pour la production de lait concentré. (b) : Tour de refroidissement servant à dissiper la chaleur dans les centrales nucléaires. Les schémas sont extraits respectivement du site Internet des sociétés GEA Process Engineering (www.geap.com) et Matrix Cooling (www.matrixcooling.com)*

Les films tombants sont au coeur de ces procédés pour une raison précise. Les ondes à l'interface peuvent jusqu'à doubler l'intensité des transferts de chaleur et de masse vis-à-vis du film plat (Frisk et Davis (1972), Park et Nosoko (2003)), bien que la surface d'échange augmente seulement d'1% environ (Portalski et Clegg (1971)). Il faut s'intéresser à la structure de ces ondes et au champ de vitesse à l'intérieur du liquide pour expliquer cette amplification des transferts. Ces ondes, dites solitaires (en bleu sur la figure 3), présentent une bosse principale, une série de rides capillaires et une partie quasiment plate nommée substrat. L'épaisseur moyenne est plus faible que celle du film plat

de même débit ce qui favorise les transferts par conduction. En effet, le flux de chaleur est inversement proportionnel à l'épaisseur (loi de Fourier). Ce mécanisme est particulièrement efficace au niveau du substrat et des creux capillaires. Par ailleurs, les transferts par convection sont favorisés par les mouvements de recirculation du liquide. Dans le référentiel de l'onde, un vortex apparaît dans la bosse principale pour des ondes dont la hauteur de crête est d'environ 2.5 fois celle du substrat (Maron et al. (1989)). Le fluide qui circule sous une bosse est mélangé ce qui augmente les transferts de masse à l'interface dans la région du substrat suivante (Yoshimura et al. (1996)). Dans le référentiel du laboratoire, des zones de retour d'écoulement au niveau des ondes capillaires ont été identifiées (Dietze et al. (2008), Dietze et al. (2009)). Celles-ci augmentent les transferts localement par un mécanisme similaire. Des recirculations existent aussi au sein de l'écoulement de gaz, qu'il soit passif ou co/contre-courant (figure 3).

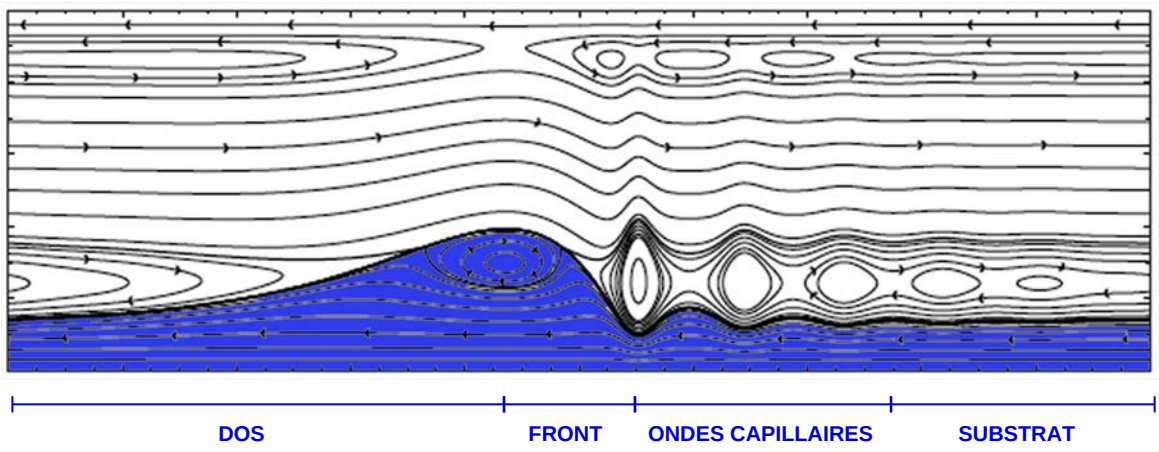


FIGURE 3 – *Onde solitaire à la surface d'un film liquide (en bleu) cisaillé par un écoulement de gaz co-courant confiné. Les lignes de courant sont tracées dans le référentiel de l'onde. Figure adaptée de l'article de Dietze et Ruyer-Quil (2013)*

Les procédés industriels utilisant des films cisaillés doivent pouvoir traiter de grandes quantités de liquide et de gaz. Ils sont limités en pratique par le phénomène d'engorgement du système : le liquide obstrue alors la section de passage pour le gaz (figure 4). Ce phénomène se traduit par une augmentation brutale des pertes de charge ainsi qu'une chute des transferts et donc du rendement. Plusieurs mécanismes locaux d'engorgement dû à la dynamique des ondes ont été identifiés : arrêt puis rebroussement d'une onde, augmentation de l'amplitude d'une onde jusqu'à toucher la paroi opposée, arrachement de gouttes. Il existe de nombreuses études expérimentales de laboratoire sur le sujet dans la littérature (Mouza et al. (2003), Pantzali et al. (2008), Zapke et Kröger (2000), Drosos et al. (2006) ...). Celles-ci se placent en géométrie simplifiée (tube ou canal plan) et utilisent des conditions de similitude hydrodynamique. Elles ont du mal à tirer des conclusions universelles, d'autant plus que les conditions de bords semblent jouer un rôle important en provoquant souvent l'engorgement précoce du système. La définition même de l'engorgement à travers le choix du critère utilisé pose question.

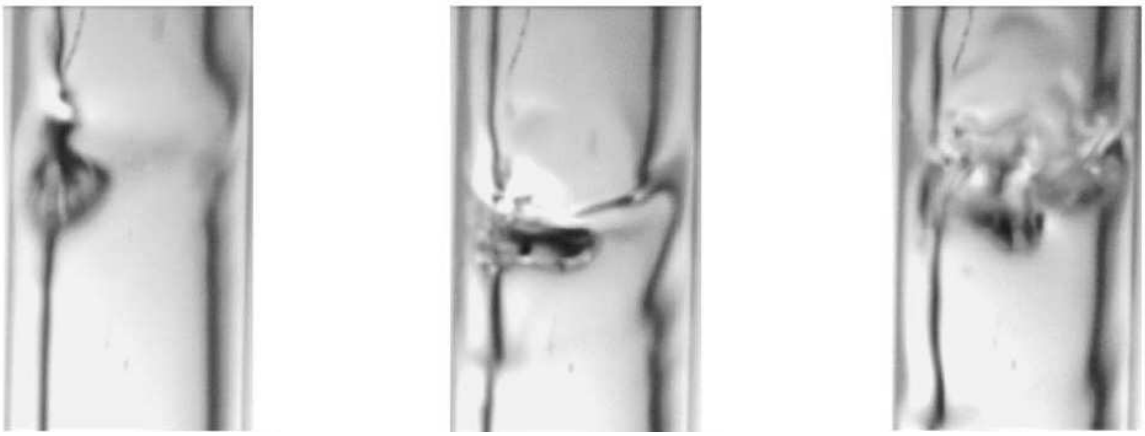


FIGURE 4 – *Séquence d'images montrant le phénomène d'engorgement dans un tube vertical. Le liquide tombe le long des parois intérieures du tube, le gaz remonte à contre-courant. Figure extraite de l'article de Mouza et al. (2002)*

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un contrat CIFRE entre la société *Air Liquide* et le laboratoire FAST. Son objectif peut être séparé en deux axes. Dans un premier temps, nous avons examiné le cas des films tombant sur un plan incliné en utilisant des outils expérimentaux et numériques (étude fondamentale). Certains aspects liés à la dynamique des ondes naturelles ou à la transition 2D/3D ne sont pas compris à l'heure actuelle et pourraient permettre d'optimiser les transferts de chaleur et de masse. Dans un deuxième temps, nous avons étudié le cas des films cisaillés par un contre-écoulement de gaz. Dans le cadre du procédé de distillation de l'air utilisé par *Air Liquide*, nous avons cherché à mieux comprendre l'origine physique du phénomène d'engorgement. Pour cela, nous avons combiné respectivement étude fondamentale et appliquée à travers deux dispositifs expérimentaux : l'un à température ambiante (laboratoire FAST), l'autre à température cryogénique et au caractère confidentiel (Centre R&D Paris-Saclay).

Détaillons plus précisément le contenu des cinq chapitres composant ce manuscrit. Le chapitre 1 présente le dispositif expérimental d'étude des films liquides tombant sur un plan incliné. Les paramètres expérimentaux sont introduits ainsi que les méthodes de mesure : visualisation des ondes par ombroscopie, mesure de vitesse de phase et mesures d'épaisseur (méthode surfacique Schlieren et méthode temporelle en un point CCI). Le chapitre 2 s'intéresse aux ondes 2D. Nous présentons d'abord les outils numériques utilisés : modèles d'équations pour les films, calcul des solutions stationnaires par continuation et simulations spatio-temporelles. Nous étudions ensuite, expérimentalement et numériquement, le cas des ondes forcées à travers les corrélations pour la vitesse de phase en fonction des paramètres du problème. Enfin, nous examinons numériquement le cas des ondes naturelles et en particulier la dynamique aux temps longs suffisamment loin de l'entrée. Le chapitre 3 traite, à l'aide d'outils expérimentaux et numériques, des questions liées à l'évolution tridimensionnelle des ondes. Une partie de ce chapitre est constitué par

un article à paraître dans *Journal of Fluid Mechanics*. Quelques points supplémentaires non inclus dans l'article sont également discutés. Le chapitre 4 présente le dispositif expérimental d'étude des films liquides cisaillés par un contre-écoulement d'air à température ambiante basé sur le montage introduit au chapitre 1 ainsi que les résultats obtenus. Nous décrivons successivement l'effet observé sur les ondes 2D, 3D et la transition à l'engorgement. Le chapitre 5, confidentiel, décrit l'étude cryogénique du phénomène d'engorgement réalisée au Centre R&D Paris-Saclay d'*Air Liquide*.

1 Dispositif expérimental : film liquide tombant

Nous présentons ici le dispositif expérimental d'étude des films liquides s'écoulant sur un plan incliné. Les méthodes de mesure utilisées seront également détaillées. Ce dispositif a permis, dans un premier temps, de s'intéresser à plusieurs problèmes liés à la dynamique 2D (chapitre 2) et 3D (chapitre 3) des ondes. Il a ensuite été modifié de manière à étudier l'influence d'un contre-écoulement d'air sur les ondes (chapitre 4).

1.1 Présentation du montage

1.1.1 Description des différents éléments

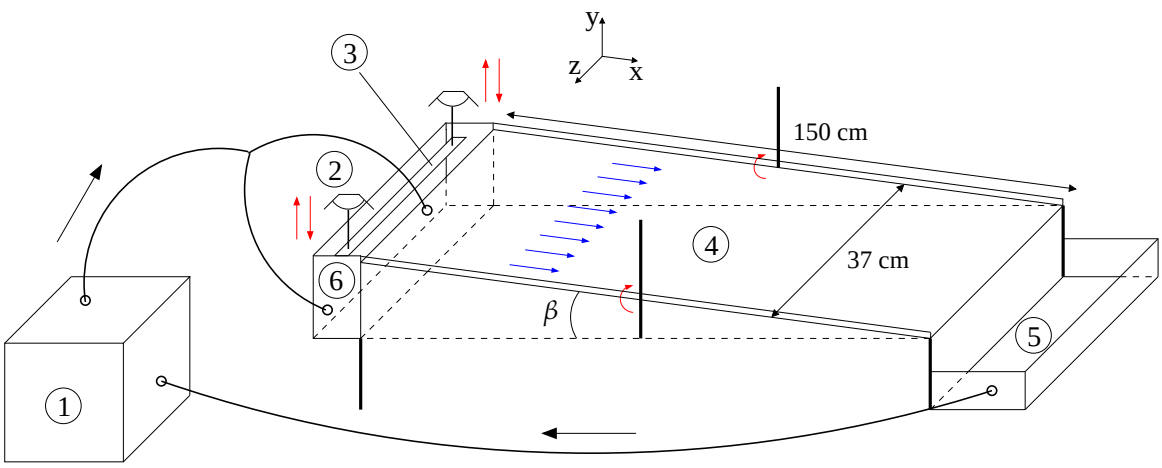
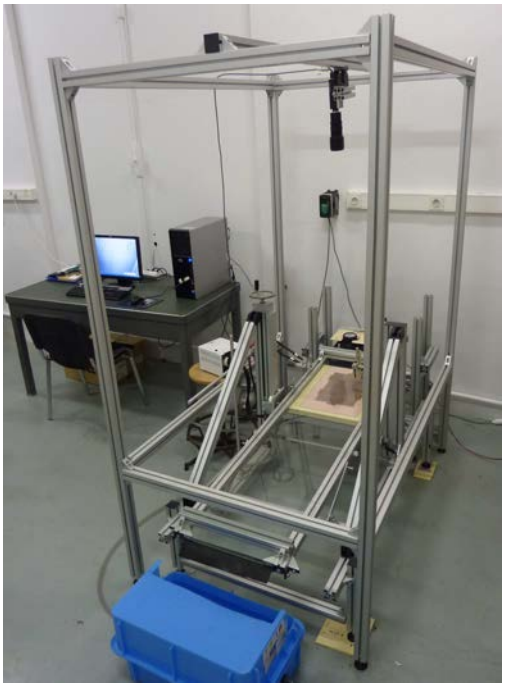


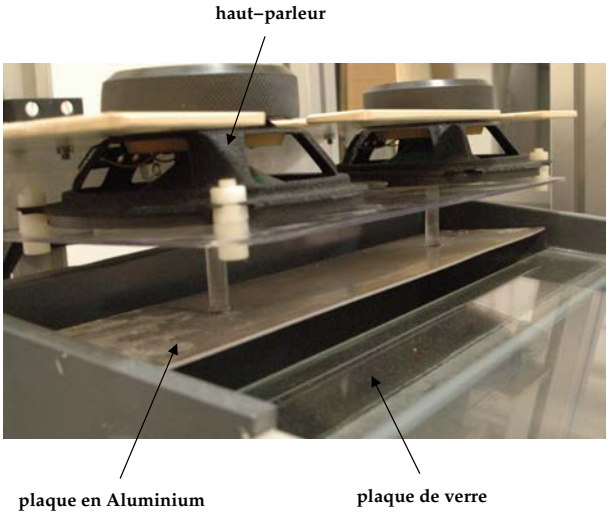
Figure 1.1 – *Schéma du dispositif expérimental. 1 : pompe, 2 : haut-parleurs, 3 : plaque en aluminium, 4 : plaque de verre, 5 : bac de récupération, 6 : bac d'entrée*

Le dispositif expérimental, schématisé ci-dessus, est constitué d'une plaque de verre (longueur : 150 cm, largeur : 37 cm, épaisseur : 5.8 mm) montée sur un bâti en Norcan permettant de modifier l'angle d'inclinaison β. Sur les bords, la plaque est encastrée dans les rainures du Norcan ; des cales permettent d'éviter que le liquide ne s'écoule au sein de ces rainures. Le bac d'entrée a pour dimensions 15 cm (longueur) $\times$ 15 cm (hauteur)

$\times$ 37 cm (largeur) et alimente le plan incliné en liquide par débordement. L'arrivée de liquide dans ce bac d'entrée se fait en plusieurs points comme représenté sur le schéma (le nombre d'arrivées est de 7). Afin d'homogénéiser l'écoulement selon la largeur, nous avons disposé plusieurs éléments au fond du bac : billes de verre de diamètre 6 mm et 10 mm, grille alvéolée (taille des alvéoles : 2 mm) et grille à motif carré de 15 mm de côté. En bout de plan, le liquide est collecté dans un bac de récupération. Il est ensuite réinjecté dans le bac d'entrée par l'intermédiaire de tuyaux souples (diamètre : 16 mm) et d'une pompe à engrenages *Almo* (modèle MTA 71K2, vitesse : 2730 tr/min). Le volume total de liquide dans le circuit est d'environ 35 L. Enfin, un dispositif ad-hoc permet de réaliser un forçage harmonique des ondes en entrée (figure 1.2b). Celui-ci utilise deux haut-parleurs *Monacor* (modèle SP-60/4). Nous avons collé sur leurs membranes deux plots en Plexiglas de longueur 3 cm de manière à transmettre les vibrations à une plaque en Aluminium de dimensions 7 cm (longueur) $\times$ 36 cm (largeur) solidaire de ces plots. Un système de guidage permet d'assurer la cohérence mécanique du dispositif. Les oscillations de la plaque engendrent des variations de pression à la surface du liquide ce qui suffit à former des ondes à la fréquence imposée. Nous soulignons ici que la plaque n'est pas en contact avec la surface libre du liquide dans le bac d'entrée. La figure 1.2a présente une photographie du dispositif expérimental et montre notamment le bâti en Norcan sur lequel est fixé la caméra. Comme nous le verrons, celui-ci doit être découplé du reste du montage de manière à éviter les vibrations.



(a)



(b)

FIGURE 1.2 – *Photographie du dispositif expérimental (figure 1.2a) et du système de forçage des ondes en entrée (figure 1.2b)*

1.1.2 Paramètres expérimentaux

Paramètre	Notation	Domaine de variation
Densité	ρ	$998 - 1082$ kg/m^3
Viscosité cinématique	ν	$1 - 2.8.10^{-6}$ m^2/s
Tension de surface	σ	$49 - 72$ mN/m
Fraction massique en glycérine	X_g	$0 - 34$ %
Fraction massique en butanol	X_b	$0 - 1.3$ %
Température	T	$18 - 23\,^\circ$C
Angle d'inclinaison	β	$5 - 18\,^\circ$
Débit volumique	Q	$0 - 130$ l/h
Nombre de Reynolds	R	$0 - 100$
Fréquence	f	$2.8 - 9$ Hz
Nombre de Kapitza	Γ	$1971 - 7213$

TABLE 1.1 – *Paramètres expérimentaux (eau, mélanges eau-glycérine ou eau-butanol). Les valeurs données sont celles rencontrées dans ce manuscrit ; la gamme de paramètres accessible au montage est plus large.*

Les paramètres caractéristiques du montage et leurs domaines de variation sont détaillés dans la table 1.1. Les propriétés physiques du fluide (densité, viscosité, tension de surface) correspondent à celles de l'eau, de mélanges eau-glycérine ou eau-butanol. Les variations détaillées de ces quantités avec la température et la fraction massique en glycérine/butanol sont données dans l'Annexe A. En pratique, nous avons mesuré la densité et la température du liquide avec un densimètre électronique *Anton Paar* (modèle DMA 35), puis déduit les valeurs des autres paramètres grâce aux tables.

Le débit volumique est mesuré grâce à un débitmètre *IFM* (modèle SM6000, débit maximal : 1500 l/h). Nous avons vérifié les valeurs affichées par celui-ci en les comparant à des mesures obtenues par pesée (masse de liquide qui tombe dans le bac de récupération pendant un temps donné) : les résultats montrent un très bon accord (figure 1.3). Ces valeurs de débit correspondent à un nombre de Reynolds maximal, basé sur l'épaisseur du film et la vitesse moyenne de l'écoulement, d'environ 700. La résolution d'affichage du débitmètre (0.05 l/min) engendre une incertitude sur les valeurs de R de ± 1.5.

Pour les basses fréquences de forçage, la réponse du film liquide aux perturbations de pression décroît lorsque f diminue. Le dispositif présenté ne permet pas de former des ondes à une fréquence $f < 2.8$ Hz : cette valeur correspond au courant électrique maximal admissible par les haut-parleurs. En revanche, les fréquences $f > 9$ Hz ne posent pas de problème spécial mais cette gamme de valeurs n'a pas été étudiée. Enfin, la plage de variation du nombre de Kapitza $\Gamma = \dfrac{\sigma}{\rho\nu^{4/3}(g\sin\beta)^{1/3}}$ est également donnée. Celui-ci, couramment employé dans les études sur le sujet, traduit les effets de la tension de surface vis-à-vis des effets gravitaires et visqueux (voir chapitre 2).

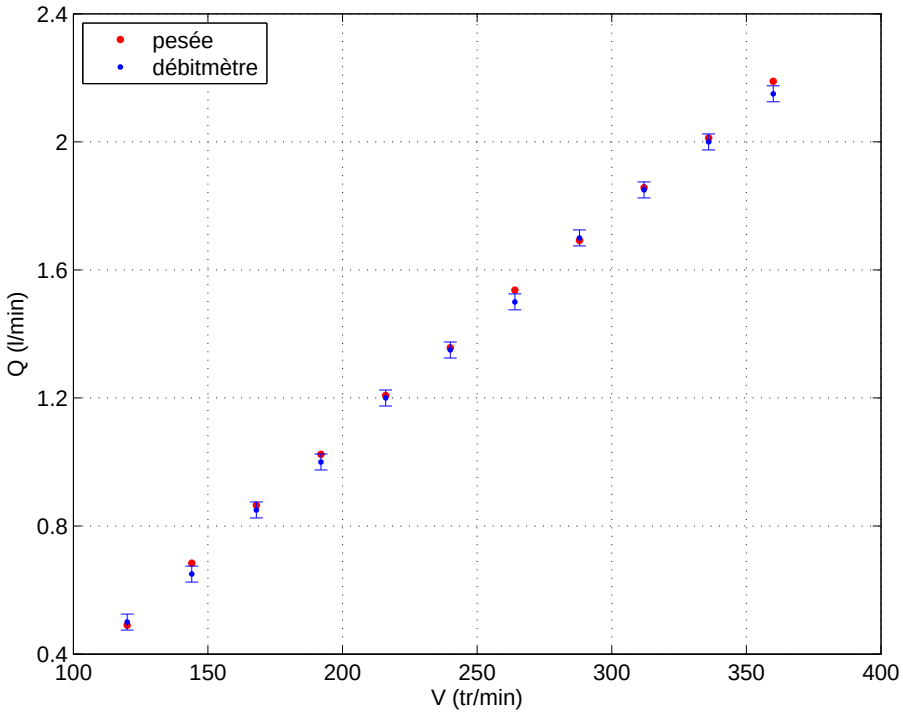


FIGURE 1.3 – *Comparaison des mesures de débit par pesée avec les valeurs affichées par le débitmètre. V est la vitesse de rotation de la pompe exprimée en tours/min. Les barres d'erreur correspondent à la résolution d'affichage du débitmètre* (0.05 *l/min). Le fluide utilisé est l'eau* ($T = 25.8\,°C$).

1.2 Méthodes de mesure par ombroscopie

L'ombroscopie nous a permis d'obtenir des visualisations des ondes avec une caméra matricielle (paragraphe 1.2.1). Nous avons pu également mesurer leurs vitesses de phase grâce à une caméra linéaire et une procédure que nous détaillons dans le paragraphe 1.2.2.

1.2.1 Visualisation des ondes

L'ombroscopie consiste à éclairer la surface du film liquide en lumière rasante à l'aide d'une source de lumière blanche. La source utilisée, de la marque *Nachet* (modèle $n°154$, puissance : 150 W), est dotée de deux fibres optiques semi-rigides qui peuvent être orientées de manière à optimiser l'éclairage. En disposant une plaque de couleur claire et mate sous la plaque de verre, nous observons des zones claires et sombres. Celles-ci correspondent aux creux et aux bosses des ondes car la technique est sensible à la dérivée seconde de l'indice de réfraction et donc à la courbure de l'interface. La visualisation s'effectue par le dessus grâce à une caméra fixée sur un bâti en Norcan. Certains essais ont été réalisés avec la caméra CCD Sony XCD-X710 (dynamique : 8-bit, résolution : 1024 $\times$ 768 pxls, cadence : 30 Hz). Cependant, il n'est pas possible de régler manuellement le temps d'exposition sur cette dernière. Nous nous sommes donc tournés vers les modèles de caméra CMOS pco.1200hs (10 bit, 1280 $\times$ 1024 pxls, 636 Hz) et sCMOS pco.edge (16

bit, 2560 $\times$ 2160 pxls, 100 Hz). Les objectifs photographiques utilisés ont été selon les cas un Nikon 50 mm f1.8 ou un 105 mm f2.0. La figure 1.4 représente un exemple d'image obtenue avec cette technique. Grâce au forçage en entrée, nous observons le développement d'ondes à plusieurs bosses séparées entre elles par des portions de film où la pente varie peu (faible courbure). L'apparition d'une instabilité secondaire tridimensionnelle est également visible (ce point sera étudié en détail au chapitre 3).

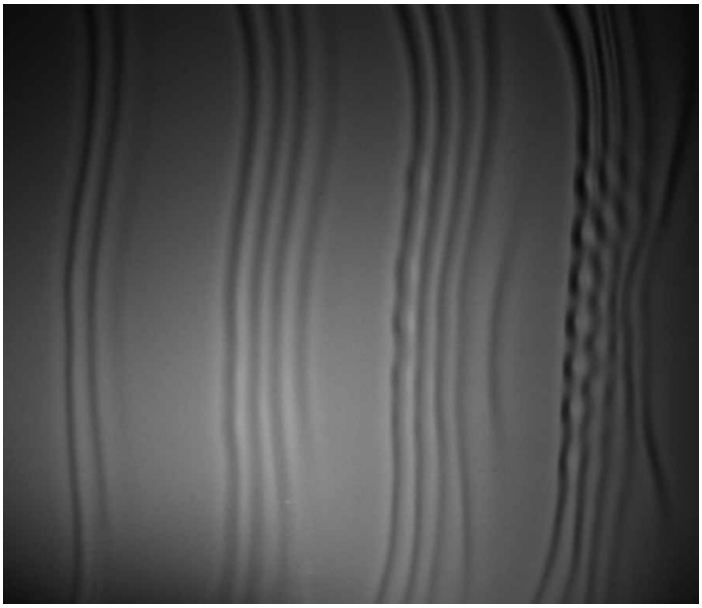
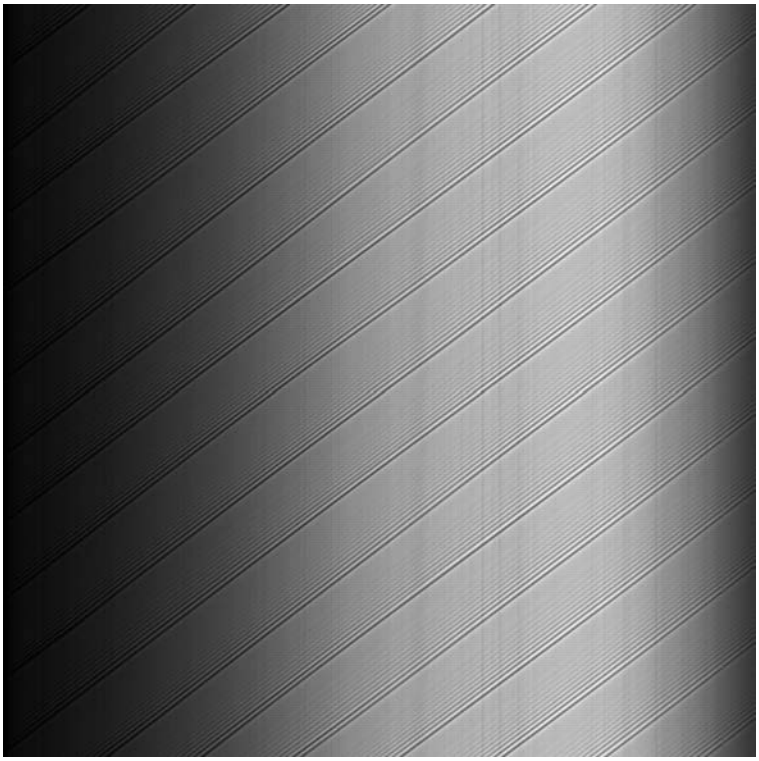


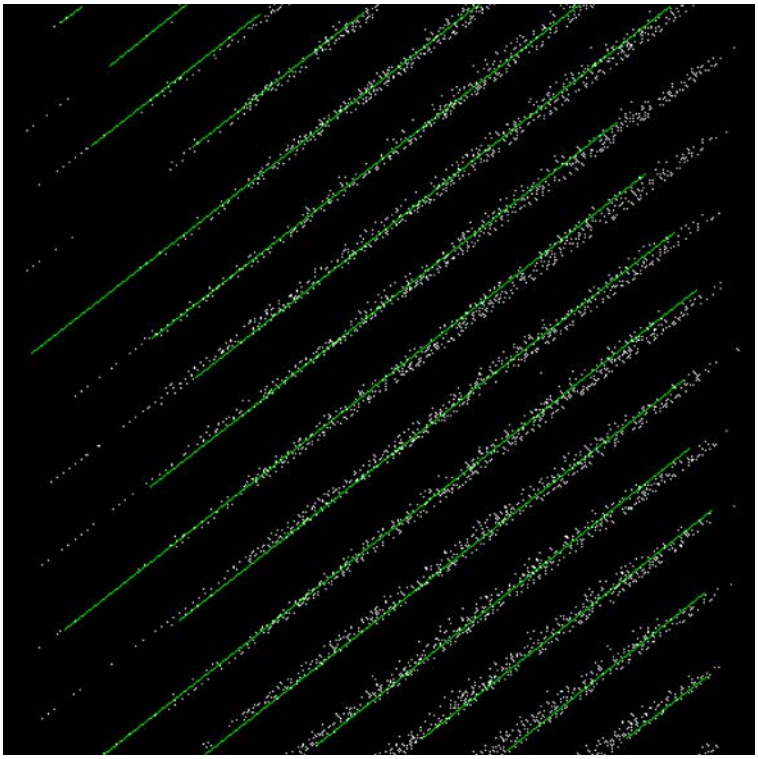
FIGURE 1.4 – *Visualisation des ondes par ombroscopie avec une caméra matricielle. Les paramètres expérimentaux sont :* $\beta = 5^\circ$, $R = 56$, $\Gamma = 7600$, $f = 3$ *Hz, taille réelle de l'image :* 33×25 *cm. Le fluide s'écoule de la gauche vers la droite.*

1.2.2 Mesures de vitesse de phase

L'ombroscopie avec une caméra matricielle permet de déterminer des grandeurs quantitatives comme la longueur d'onde dans la direction de l'écoulement ou la vitesse de phase. Cependant, il nous est apparu plus facile d'utiliser une caméra linéaire afin d'automatiser le traitement. L'acquisition se fait selon une ligne de pixels orientée selon l'axe central du canal dans le sens de l'écoulement et les images brutes sont directement des diagrammes spatio-temporels. Nous avons utilisé une caméra linéaire *Basler* spL4096-39km (12-bit, 4096 pxls, 38600 Hz) munie d'un objectif Sigma 28 mm f1.8. La figure 1.5a représente un exemple de diagramme spatio-temporel ainsi obtenu. Ces diagrammes ont le temps en ordonnée, de haut en bas, et la position le long du plan en abscisse, de droite à gauche (l'origine est donc le coin en haut à droite). L'espacement vertical entre les lignes est la période temporelle T du train d'ondes, l'espacement horizontal est la longueur d'onde spatiale λ_x et la pente des lignes est directement reliée à la vitesse de phase c. Nous distinguons également sur ces diagrammes la série d'ondes capillaires qui accompagne l'onde principale (voir figure 1.4). Le programme de traitement que nous avons développé sous Matlab permet de calculer T, λ_x et c sur une image (soit une dizaine d'on-



(a)



(b)

FIGURE 1.5 – *Diagramme spatio-temporel obtenu par ombroscopie avec une caméra linéaire. (a) : image brute. (b) : image après traitement. L'axe des ordonnées est le temps qui croît de haut en bas ; la hauteur des images représente* 3 *s d'acquisition. L'axe des abscisses est la position le long du plan qui croît de droite à gauche ; la largeur des images correspond à une longueur réelle de* 56 *cm. Les paramètres expérimentaux sont :* $\beta = 8\,^\circ$, $R = 45$, $f = 3.3$ *Hz*

des) de manière à extraire des quantités moyennes représentatives. L'algorithme optimise d'abord le contraste de l'image (fonction *imadjust*) puis effectue une détection de contraste (fonction *edge*). La détection de lignes proprement dite utilise la méthode de la transformée de Hough, très utilisée en traitement d'images (routines Matlab *hough*, *houghpeaks* et *houghlines*). Le nombre de lignes obtenu dans un premier temps est de l'ordre de 1000 : ces lignes sont rangées dans un tableau et caractérisées par leur représentation polaire (r, θ). Afin de calculer des valeurs moyennes pertinentes, il faut se ramener à une seule ligne par onde : cette opération est réalisée en supprimant les « doublons » dans le tableau (conditions ad-hoc de type $|r_1 - r_2| < \Delta r$, $|\theta_1 - \theta_2| < \Delta\theta$ avec Δr et $\Delta\theta$ bien choisis). La figure 1.5b représente un exemple d'image traitée : les points blancs sont les résultats de la détection de contraste, les lignes obtenues après application de la transformée de Hough et suppression des doublons sont tracées en vert. Les incertitudes sur les valeurs de c ne sont pas reportées mais celles-ci dépassent rarement $\pm 2\,\%$.

1.3 Méthodes de mesure d'épaisseur

Nous allons maintenant présenter les méthodes de mesure d'épaisseur utilisées. Nous commencons par établir un bref état de l'art des techniques existantes dans la littérature afin de mieux comprendre les raisons qui ont motivé notre choix.

1.3.1 Etat de l'art

La méthode de mesure d'épaisseur la plus simple est celle qui consiste à approcher une aiguille montée sur une platine micrométrique de la surface du film liquide. L'aspect délicat de cette technique est la détection précise du contact entre l'aiguille et la surface. Nosoko et al. (1996) ont utilisé un faisceau laser qui passe par le point de contact supposé, traverse le film puis est projeté sur un écran. Lorsqu'il y a contact, l'image du faisceau s'élargit en raison de la déformation du film induite par l'aiguille. Dans le cas de liquides conducteurs, Koskie et al. (1989) ont équipé la paroi opposée d'une électrode de sorte que le contact entraîne la fermeture du circuit électrique. Cette méthode de contact d'une aiguille est adaptée pour des films d'épaisseur constante ou pour mesurer l'amplitude des ondes. Il est difficile, cependant, de réaliser plusieurs mesures consécutives en raison du ménisque qui peut se former au niveau du point de contact (phénomène d'hysteresis).

Il existe de nombreuses techniques de mesure temporelle d'épaisseur en un point. Une première consiste à mesurer le temps de parcours aller-retour d'une onde ultrasonore émise par une sonde placée sous la paroi. L'intervalle de temps entre les deux signaux reçus, provenant de l'interface liquide/paroi et liquide/air, permet de remonter facilement à l'épaisseur du film. Cette technique non-intrusive a une très bonne cadence d'acquisition (10 kHz) mais une précision relativement faible (demi longueur d'onde ultrasonore soit 75 μm dans l'étude de Kamei et Serizawa (1998) par exemple). Il existe par ailleurs une erreur supplémentaire lorsque l'interface n'est pas plane.

Une deuxième technique consiste à mesurer la conductance électrique du film dans le cas d'un liquide conducteur. La conductance (inverse de la résistance) est proportionnelle à l'épaisseur lorsque cette dernière est petite devant la distance entre les deux sondes composant l'électrode. Cette méthode est intrusive car l'une des deux sondes est en contact avec le liquide. D'après Karapantsios et al. (1989) et Chu et Dukler (1974), elle possède une bonne précision (20-25 μm) et une haute cadence d'acquisition (250-500 Hz). Il est possible d'utiliser plusieurs sondes afin de mesurer des vitesses de phase par exemple mais il faut faire attention à l'interaction entre les champs électriques des différentes sondes.

Une troisième technique, similaire à la précédente, constitue la mesure par sonde capacitive (Roy et Jain (1989), Tihon et al. (2006)). Les deux électrodes sont disposées de part et d'autre du film liquide (l'une au sein de la paroi et l'autre dans l'air). La grandeur mesurée est la capacité électrique du film et de la couche d'air surjacente. La contribution du liquide est négligeable en raison de la différence entre les constantes diélectriques : c'est donc l'épaisseur de la couche d'air qui est mesurée. Cette méthode est très populaire en raison de son caractère non-intrusif et du fait qu'elle ne nécessite pas de fluide conducteur. Elle possède une bonne précision (10 μm) et cadence d'acquisition (500 Hz). La calibration des sondes, toutefois, peut s'avérer complexe.

Une quatrième technique, également très populaire, utilise les propriétés d'absorption des rayons lumineux par un milieu transparent. Mouza et al. (2000) mesurent l'atténuation d'un faisceau laser traversant un film liquide coloré grâce à une solution de bleu de méthylène. D'après la loi de Beer-Lambert, l'intensité transmise I_T s'écrit en fonction de l'intensité incidente I_0, du coefficient d'absorption du milieu α et de l'épaisseur h : $I_T = I_0\, e^{-\alpha h}$. Il est donc très facile de remonter à h après une calibration préalable permettant de déterminer la valeur de α. Cette technique possède une très bonne cadence (1-10 kHz) et précision (10 μm). Zaitsev et al. (2003) utilisent une technique similaire mais en réflexion cette fois ce qui pose le problème de la non-planéité de l'interface.

Enfin, citons également la méthode de mesure CCI (Confocal Chromatic Imaging). Nous allons utiliser cette technique dont le principe sera décrit en détail dans le paragraphe 1.3.3 (voir aussi la thèse de Dietze (2010)).

Il existe peu de méthodes de mesure spatio-temporelle d'épaisseur. L'une d'entre elles est la généralisation en 2D de la dernière technique évoquée d'absorption d'un faisceau lumineux (Njifenju (2010)). Le faisceau laser est remplacé par une feuille électroluminescente et c'est une caméra rapide qui recueille le signal d'intensité transmise. Les résolutions temporelles et spatiales sont très bonnes et dépendent du modèle de caméra utilisé. La précision de la méthode (10-40 μm) et son aptitude à reconstruire correctement la carte d'épaisseur en cas d'interface non-plane pose question cependant.

Une deuxième méthode surfacique est la mesure par fluorescence induite, très répandue dans la littérature (Adomeit et Renz (2000), Alekseenko et al. (2005), Leontidis et al. (2010)). Le liquide est d'abord dopé en particules fluorescentes puis éclairé à la lumière UV. Le signal de fluorescence réémis est proportionnel à l'épaisseur tant que le film reste mince. La difficulté de cette méthode réside dans l'homogénéisation de l'ensemencement

et la procédure de calibration. L'utilisation d'une caméra rapide permet d'atteindre de très bonnes résolutions spatiales et temporelles. La méthode ne souffre pas du problème précédemment évoqué de réfraction des rayons à l'interface (le signal est réémis) ; la précision annoncée est de l'ordre de 10 μm.

Parmi les méthodes présentées pour la mesure de champs 2D, il n'en existe pas combinant précision, facilité de mise en oeuvre et résolutions temporelles et spatiales suffisantes. Profitant du développement de la technique Schlieren au laboratoire FAST, nous avons choisi de l'adapter à notre système. Nous verrons que, sous certaines conditions, cette méthode combine tous les avantages évoqués. Il s'agit cependant d'une mesure relative : l'épaisseur est calculée à une constante près. Cette constante peut être déterminée en mesurant l'amplitude des ondes grâce à une technique de mesure ponctuelle. Un aspect important constitue la validation de cette nouvelle méthode Schlieren appliquée aux films liquides. Pour cela, nous comparerons ses résultats avec une mesure temporelle en un point obtenue avec un système CCI.

1.3.2 Méthode Schlieren

Nous décrivons ici la méthode Schlieren de mesure d'épaisseur développée initialement par Moisy et al. (2009). Nous expliquerons d'abord le principe théorique de cette mesure puis son implémentation pratique et enfin ses conditions d'application.

Principe théorique

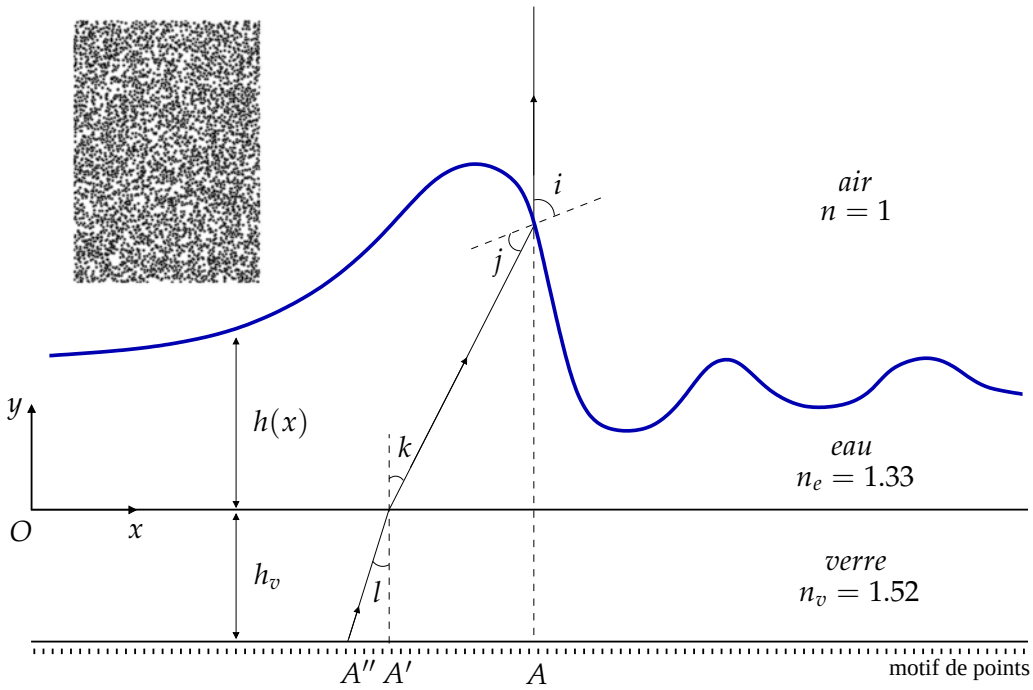


FIGURE 1.6 – *Schéma simplifié pour la méthode Schlieren et exemple de motif aléatoire de points utilisé (en incrustation, en haut à gauche)*

La technique est fondée sur l'analyse de l'image réfractée à travers une interface d'un motif aléatoire de points tel celui représenté sur la figure 1.6. Dans notre cas, ce motif est disposé juste sous la plaque de verre. Une caméra enregistre le déplacement apparent des points par rapport à une image de référence correspondant au cas de l'interface plane. Comme nous allons le voir, ce déplacement est directement relié à la pente de l'interface. Nous supposerons que la caméra est placée suffisamment loin de sorte que les rayons dans l'air peuvent être considérés comme verticaux (hypothèse $n°1$: pas d'effet de parallaxe). De plus, nous nous placerons en configuration 1D dans le seul but de simplifier l'écriture. La lettre A (schéma de la figure 1.6) se réfère à la position du point d'étude dans le cas d'une interface plane. La distance que nous souhaitons calculer $AA'' = AA' + A'A''$ s'écrit comme la somme des contributions dans l'eau et dans le verre. En appliquant les lois de Snell-Descartes à l'interface air-eau, nous obtenons :

$$n \sin i = n_e \sin j \tag{1.1}$$

La distance AA' s'écrit :

$$AA' = \tan(i-j)h(x) \tag{1.2}$$

Nous allons maintenant supposer d'une part que les angles sont petits (hypothèse $n°2$: faible pente) et d'autre part que l'épaisseur varie peu autour de sa valeur moyenne notée h_0 (hypothèse $n°3$: faible déformation). L'équation 1.2 devient :

$$AA' \approx (i-j)h_0 \tag{1.3}$$

Or, $\sin i \approx \tan i = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\sin j \approx j = \dfrac{n}{n_e} \sin i \approx \dfrac{n}{n_e} i$ d'après l'équation 1.1. Ainsi :

$$AA' = \left(i - \frac{n}{n_e} i\right) h_0 = \left(1 - \frac{n}{n_e}\right) h_0 \frac{\partial h}{\partial x} \equiv \alpha h_0 \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.4}$$

De même, la loi de la réfraction à l'interface eau-verre s'écrit :

$$n_e \sin k = n_v \sin l \tag{1.5}$$

Or, $k = i - j$ et $\sin l \approx \tan l = \dfrac{AA''}{h_v}$ d'où :

$$AA'' \approx h_v\, l = h_v \frac{n_e}{n_v}(i-j) \approx h_v \frac{n_e}{n_v} \frac{\partial h}{\partial x} \left(1 - \frac{n}{n_e}\right) \tag{1.6}$$

Nous obtenons donc le déplacement :

$$\delta x = AA'' = AA' + A'A'' = \left(1 - \frac{n}{n_e}\right) \left(h_0 + \frac{n_e}{n_v} h_v\right) \frac{\partial h}{\partial x} \equiv \alpha h_p \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.7}$$

$h_p = h_0 + \dfrac{n_e}{n_v} h_v$ est la distance effective motif-interface, $\alpha = 1 - \dfrac{n}{n_e}$ est un coefficient sans

dimension. Sous les trois conditions évoquées, le déplacement des points est ainsi proportionnel à la pente de l'interface. En réalité, nous avons également supposé implicitement que la caméra pouvait suivre le mouvement de chaque point indépendemment, autrement dit qu'il n'y a pas de croisement entre les rayons (hypothèse $n°4$).

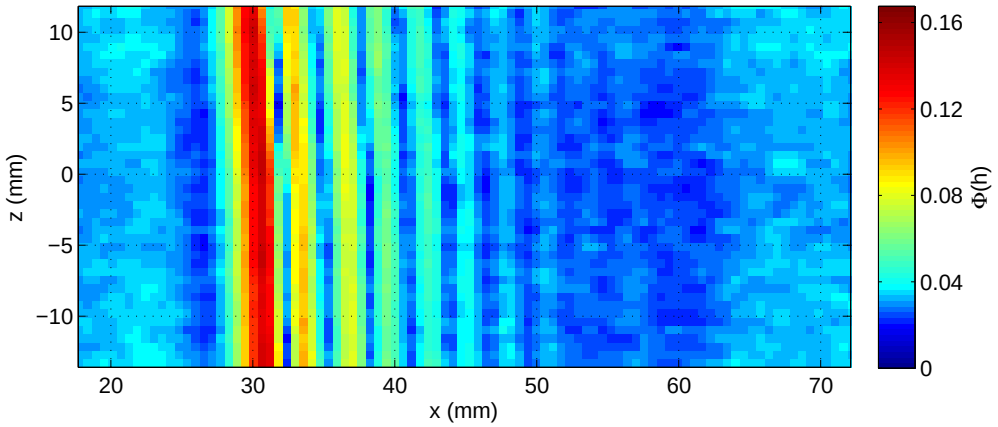
Implémentation expérimentale

En pratique, nous avons utilisé la caméra pco.edge (16 bit, 2560 $\times$ 2160 pxls, 100 Hz) en raison de sa haute résolution et de la qualité des images obtenues (très peu de bruit). Celle-ci est munie d'un objectif Nikon 105 mm f2.0 ce qui permet d'obtenir, comme nous allons le voir, une bonne résolution spatiale. Nous positionnons d'abord la caméra orthogonalement à la plaque de verre à une distance H suffisamment grande ($H \approx 1.7$ m). Nous mesurons l'échelle de l'image en placant un réglet sur la plaque de verre dans le champ d'observation (ce dernier mesure environ 10 cm $\times$ 8 cm). Le motif de points aléatoire est généré grâce à la routine Matlab *makebospattern* (toolbox PIVMat) dans laquelle il faut préciser l'échelle et la résolution de la caméra. Le nombre de points N et leur taille d sont choisis de manière à satisfaire les deux critères ad-hoc suivants : $1.3 < d_p < 4$ et $0.02 < N_p < 0.2$, avec d_p le diamètre des points en pxl et N_p le nombre de points par pxl^2. Le motif est imprimé sur un transparent puis scotché sur une feuille électroluminescente maintenue sous l'épaisseur de verre grâce à une plaque en PVC et des trétaux. L'expérience est mise en route et une séquence d'images du motif déformé par le passage des ondes est enregistré. Nous coupons ensuite le débit liquide : pendant un certain intervalle de temps (avant démouillage du film), il subsiste une fine couche d'épaisseur constante. Une image du motif est alors enregistrée et constitue l'image de référence.

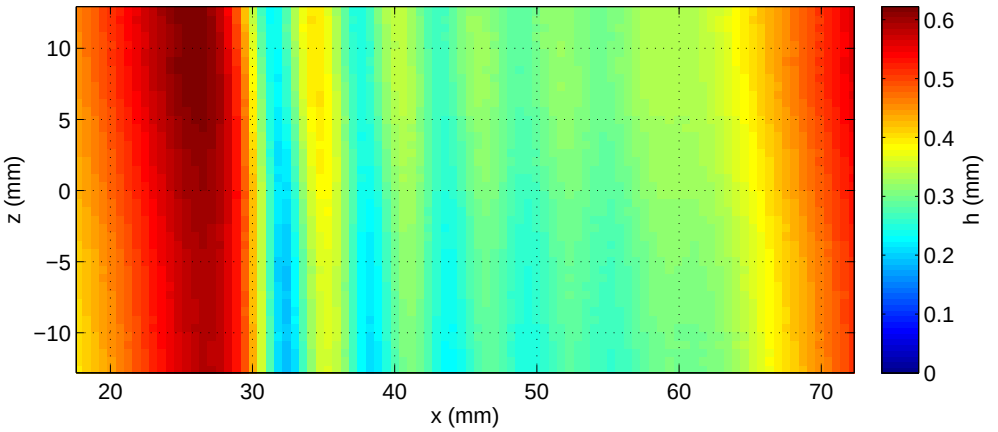
La première étape de la phase de post-traitement concerne le calcul du champ de déplacement. Pour cela, nous utilisons le logiciel de PIV *Davis*. Il faut d'abord spécifier l'échelle, puis le logiciel calcule la différence entre les images du motif déformé et l'image de référence. Il découpe ensuite le champ de mesure en fenêtres d'interrogation carrées au sein desquelles le déplacement moyen des points est calculé. La taille de ces fenêtres est choisie de manière à ce qu'elles contiennent au moins 5 points (critère usuel en PIV). Plus précisément pour notre application, *Davis* effectue plusieurs passages avec des tailles de fenêtre décroissantes et un recouvrement de 50 % entre fenêtres voisines.

La deuxième étape se déroule dans Matlab. Les champs de déplacement issus de *Davis* y sont chargés puis la routine *surfheight* (toolbox PIVMat) permet d'obtenir les cartes d'épaisseur par intégration. L'algorithme d'inversion utilise la méthode des moindres carrés. Nous avons modifié la fonction *surfheight* de manière à prendre en compte la réfraction des rayons dans le verre (équation 1.7). L'épaisseur moyenne du film h_0 est un paramètre d'entrée du programme. Contrairement à la situation étudiée par Moisy et al. (2009), cette valeur n'est pas connue a priori dans notre cas. Cependant, elle peut être déduite a posteriori en mesurant l'amplitude des ondes avec une autre technique de mesure. Dans nos expériences, nous avons utilisé dans un premier temps la technique de contact d'une aiguille : il faut alors itérer le calcul jusqu'à ce que la valeur d'amplitude calculée par

le programme corresponde à celle mesurée. La valeur de h_0 peut être aussi obtenue directement en utilisant la méthode de mesure CCI (décrite ultérieurement). La figure 1.7 présente des exemples de carte de pente et d'épaisseur.



(a) *Carte de pente* $\Phi(h) = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$



(b) *Carte d'épaisseur h(mm)*

FIGURE 1.7 – *Exemple de résultat obtenu avec la méthode Schlieren : carte de pente (figure 1.7a) et d'épaisseur (figure 1.7b). Les paramètres expérimentaux sont :* $\beta = 10.1\,^\circ$, $R = 26$, $f = 3.9$ *Hz. L'épaisseur moyenne, mesurée avec la méthode CCI, vaut* $h_0 = 0.34\,mm$.

Un aspect important de la mesure est le choix du temps d'exposition de la caméra et celui de la résolution spatiale. Le temps d'exposition T_e doit être pris suffisamment petit de manière à capturer correctement les oscillations les plus rapides de la surface. Nous avons pris généralement $T_e < 1/10\,T_{cap} \approx 2\,\text{ms}$, où T_{cap} est la période temporelle d'une onde capillaire. L'influence d'un temps d'exposition croissant sur les cartes d'épaisseur est décrit dans l'Annexe B. Le choix de la résolution spatiale est lié au choix de la densité de points du motif aléatoire, de la taille de l'image et de la taille des fenêtres d'interrogation dans *Davis*. Pour nos expériences, la résolution spatiale calculée sur la taille des fenêtres sera généralement de l'ordre de 0.5 mm, soit plus de 10 points par longueur d'onde

capillaire. L'Annexe C décrit l'influence de la taille des fenêtres d'interrogation sur les cartes d'épaisseur pour un motif aléatoire donné ($N_p = 700000$, $d_p = 0.25$ mm).

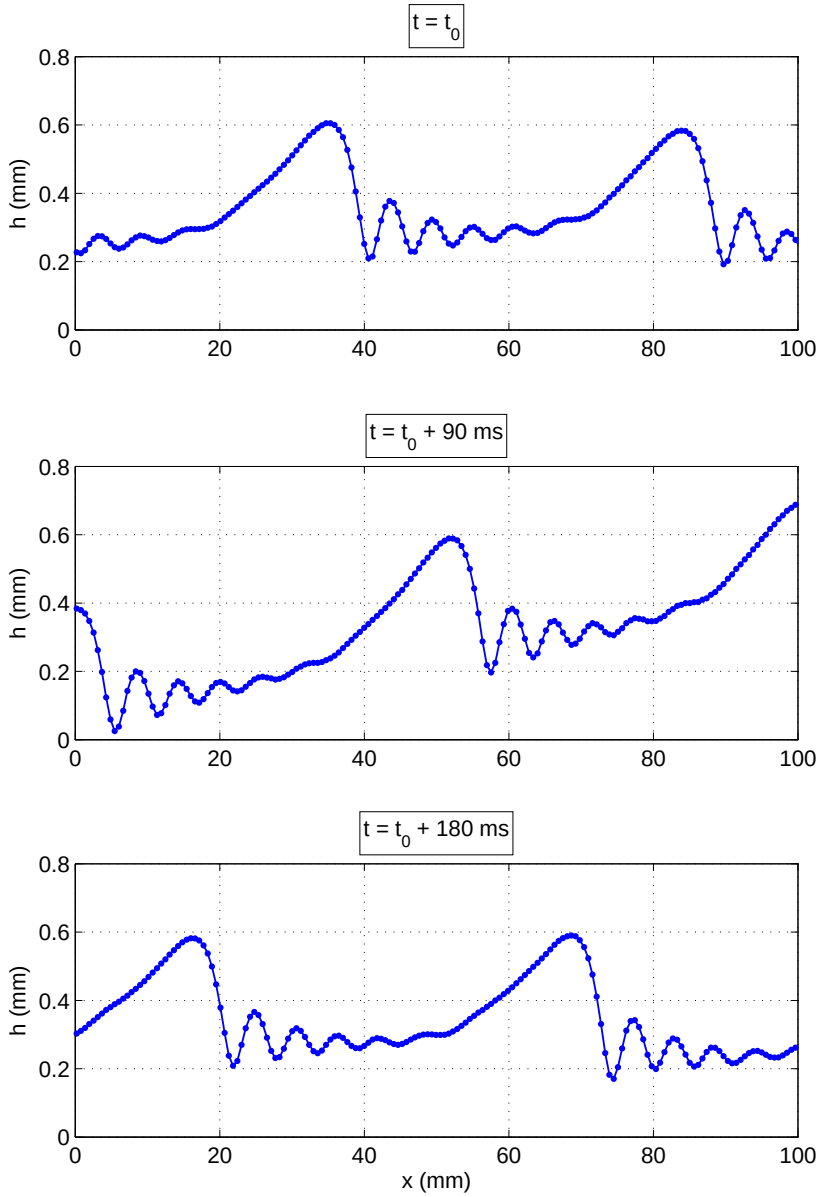


FIGURE 1.8 – *Oscillation de la surface lors de l'entrée/sortie d'une onde dans le champ induite par le traitement numérique. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 10.1\,^\circ$, $R = 26$, $f = 3.9$ Hz.*

La procédure décrite n'est valable que dans le cas d'ondes « bien régulières » (amplitude constante) car la valeur de h_0 spécifiée est la même pour toutes les cartes d'épaisseur d'une même expérience. Par ailleurs, il est toujours nécessaire avant intégration de soustraire le déplacement moyen des points sur tout le champ d'acquisition : ceci permet de limiter l'effet des vibrations pourtant infimes du système. La moyenne spatiale de l'épaisseur doit donc être constante et égale à la moyenne temporelle. Cette condition peut être approchée en ajustant la taille de la fenêtre de mesure : soit très large, soit de manière à avoir un nombre entier d'ondes dans le champ. Cependant, elle n'est jamais strictement

réalisée ce qui induit un biais subtil des mesures illustré sur la figure 1.8. L'entrée/sortie d'une onde dans la fenêtre provoque une brusque oscillation des profils spatiaux. Seul le centre de la fenêtre de mesure n'est pas affecté par ce phénomène.

Hypothèses d'application de la méthode

Nous discutons enfin les hypothèses d'application de la méthode Schlieren. Nous rappelons que celles-ci sont au nombre de quatre : pas d'effet de parallaxe, faible pente, faible variation d'épaisseur autour de h_0 et pas de croisement de rayons. Nous verrons leurs champs de validité respectifs dans notre configuration afin d'estimer la précision de la méthode.

Hypothèse $n^\circ 1$ - Pas d'effet de parallaxe Le calcul effectué précédemment suppose les rayons dans l'air verticaux : c'est l'approximation d'ordre 0 vis-à-vis de cet aspect du problème. A l'ordre 1, l'équation 1.7 s'écrit dans le cas 2D (Moisy et al. (2009)) :

$$\nabla h = AA'' \left(\frac{1}{\alpha h_p} - \frac{1}{H} \right) \tag{1.8}$$

Cette expression est d'ailleurs celle implémentée dans la routine *surfheight*. Le terme correctif est cependant négligeable car dans notre cas : $H \approx 1700$ mm $\gg \alpha h_p \approx 1.3$ mm.

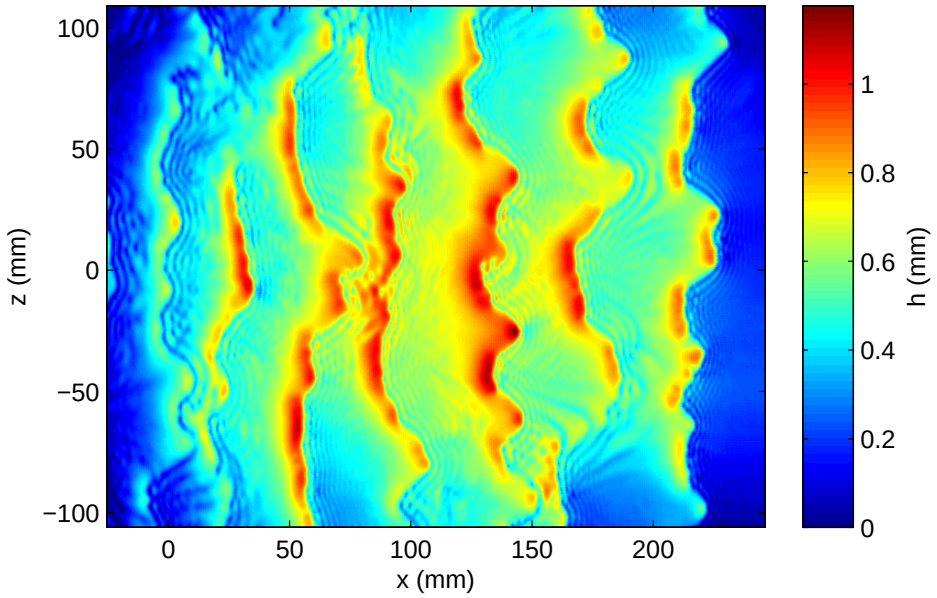


FIGURE 1.9 – *Effets de parallaxe : courbure de la carte d'épaisseur aux bords. L'angle de parallaxe est : $\theta = 0.07$ ($L = 14$ cm, $H = 150$ cm). Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 19^\circ$, $R = 74$ (sans forçage).*

Un autre effet, non pris en compte et lié à la distance finie caméra-motif, est la distorsion de la surface aux bords. Il est utile dans ce contexte d'introduire l'angle de parallaxe $\theta = L/(\sqrt{2}\,H)$ (L est la distance au centre du champ de mesure). Nous avons supposé dans le calcul du déplacement des points que le gradient s'appliquait à la verticale du

point considéré ($\theta = 0$). Cette hypothèse est très souvent vérifée dans nos expériences ($L \approx 5$ cm, $H \approx 170$ cm d'où $\theta = 0.02$) mais il peut exister des situations où ce n'est pas le cas lorsque la taille du champ est trop large : la carte d'épaisseur apparaît alors courbée aux bords (figure 1.9).

Hypothèse $n°2$ - Faible pente Nous examinons à présent la validité de l'hypothèse de faible pente. En notant $\xi = \dfrac{\partial h}{\partial x}$, le déplacement des points δx est écrit sous la forme : $\delta x = h_p \, \Phi(\xi)$. L'expression générale de la fonction Φ sans supposer les angles petits a été établie par Rabaud et al. (2007) et s'écrit :

$$\Phi(\xi) \equiv \Phi_{tot}(\xi) = \tan(\tan^{-1}(\xi) - \sin^{-1}(n_e^{-1} \sin(\tan^{-1}(\xi)))) \tag{1.9}$$

Dans le cas linéaire : $\Phi(\xi) \equiv \Phi_1(\xi) = \alpha\xi$ (équation 1.7). La figure 1.10 compare les variations de ces deux fonctions. Nous constatons que les deux courbes sont très proches pour $\xi < 0.5$. L'erreur maximale pour la carte de pente présentée précédemment (figure 1.7a) n'est que de 0.3 % ($\xi_{max} = 0.17$). Dans tous les cas, les valeurs de pente dans nos expériences dépassent rarement $\xi_{max} = 0.4$ pour laquelle l'erreur maximale associée n'est toujours que de 1.5 %.

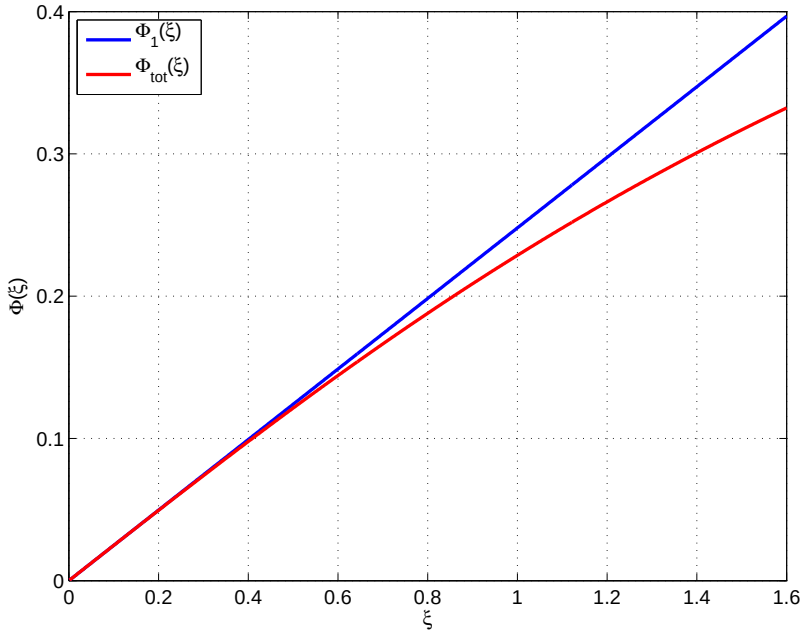


FIGURE 1.10 – *Hypothèse de faible pente : comparaison entre l'approximation linéaire ($\Phi_1(\xi) = \alpha\xi$) et l'expression complète ($\Phi_{tot}(\xi)$ donnée par l'équation 1.9).*

Hypothèse $n°3$ - Faible déformation L'hypothèse de faibles variations d'épaisseur vient du fait que l'on remplace dans le calcul $h(x)$ par h_0 (épaisseur moyenne du film). Cela peut sembler contestable dans nos expériences car $h(x)$ varie typiquement entre 200 μm et 600 μm et $h_0 \approx 350\,\mu m$. Cependant, h_0 n'intervient pas seul dans l'équation 1.7 mais au

sein du groupement $h_p \equiv h_0 + \frac{n_e}{n_v} h_v$. L'erreur relative ϵ engendrée par cette approximation s'écrit ainsi :

$$\epsilon = \frac{|h - h_0|}{h_0 + \frac{n_e}{n_v} h_v} \tag{1.10}$$

L'application numérique donne $\epsilon \approx 4.7\%$, valeur relativement importante mais qui reste acceptable. Il s'agit d'une erreur non pas sur l'épaisseur mais sur la pente : celle-ci est sous-estimée pour $h(x) < h_0$ et sur-estimée dans le cas contraire. Une solution pour s'affranchir de cette hypothèse est d'itérer la reconstruction de la manière suivante. Après un premier lancement de la routine *surfheight*, le champ d'épaisseur calculé est stocké. La procédure est ensuite relancée en remplacant h_0 par les valeurs de h qui viennent d'être obtenues, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'algorithme converge. Nous verrons que, même sans appliquer cet algorithme, l'accord avec les profils obtenus avec la méthode CCI est bon.

Hypothèse $n°4$ - Pas de croisements de rayons La dernière hypothèse à examiner est celle de non-croisement des rayons lumineux. D'après Moisy et al. (2009), il existe un critère quantitatif permettant de tester sa validité a posteriori. En 1D, notons x et x' les abscisses d'un point vu par la caméra à travers l'interface plane et ondulée, respectivement. Afin d'éviter le croisement de rayons, x' doit être une fonction croissante vis-à-vis de x : $\partial x'/\partial x > 0$. En utilisant le déplacement des points $\delta x = x' - x$, cette condition s'écrit : $\sigma \equiv \partial \delta x/\partial x < 1$. Elle peut être généralisée dans le cas 2D en introduisant σ_1 et σ_2 les valeurs propres du tenseur de contraintes $(\partial \delta x_i/\partial x_j)_{i,j}$:

$$\sigma_{tot}(x,y) \equiv max_{x,y}\left(|\sigma_1(x,y)|, |\sigma_2(x,y)|\right) < 1 \tag{1.11}$$

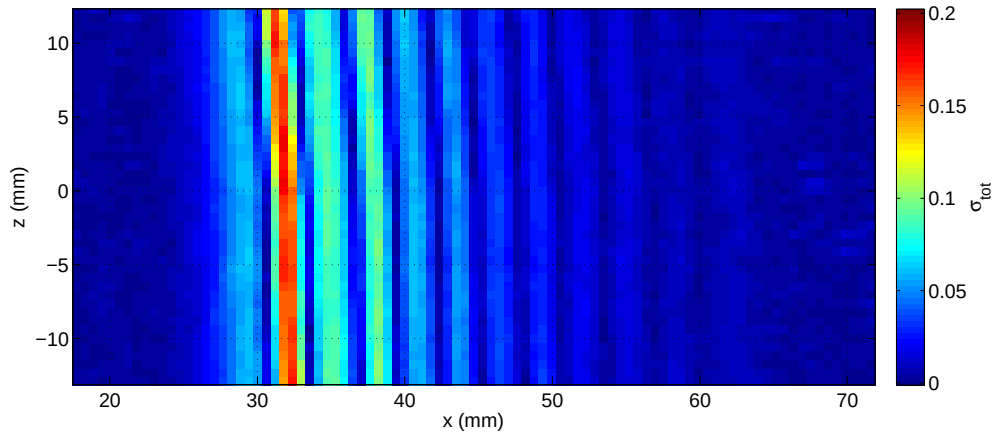


FIGURE 1.11 – *Condition de non-croisement des rayons lumineux (équation 1.11). Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 10.1°$, $R = 26$, $f = 3.9$ Hz.*

La quantité σ_{tot} représente à peu de choses près la courbure de l'interface car le déplacement δx_i est proportionnel à la pente $\partial h/\partial x_i$. La condition 1.11 peut être directement visualisée dans Matlab en utilisant la routine *showf* et l'option « lups ». La figure 1.11 représente la carte $\sigma_{tot}(x,y)$ pour les mêmes conditions expérimentales que dans la figure 1.7. Nous constatons que l'hypothèse est bien vérifiée ($\sigma_{tot} < 0.2$).

1.3.3 Méthode CCI

Nous présentons enfin la méthode de mesure ponctuelle CCI (Confocal Chromatic Imaging). Le principe de la méthode sera exposé puis les résultats obtenus seront comparés avec les mesures Schlieren dans le but de valider ces dernières.

Principe de la méthode

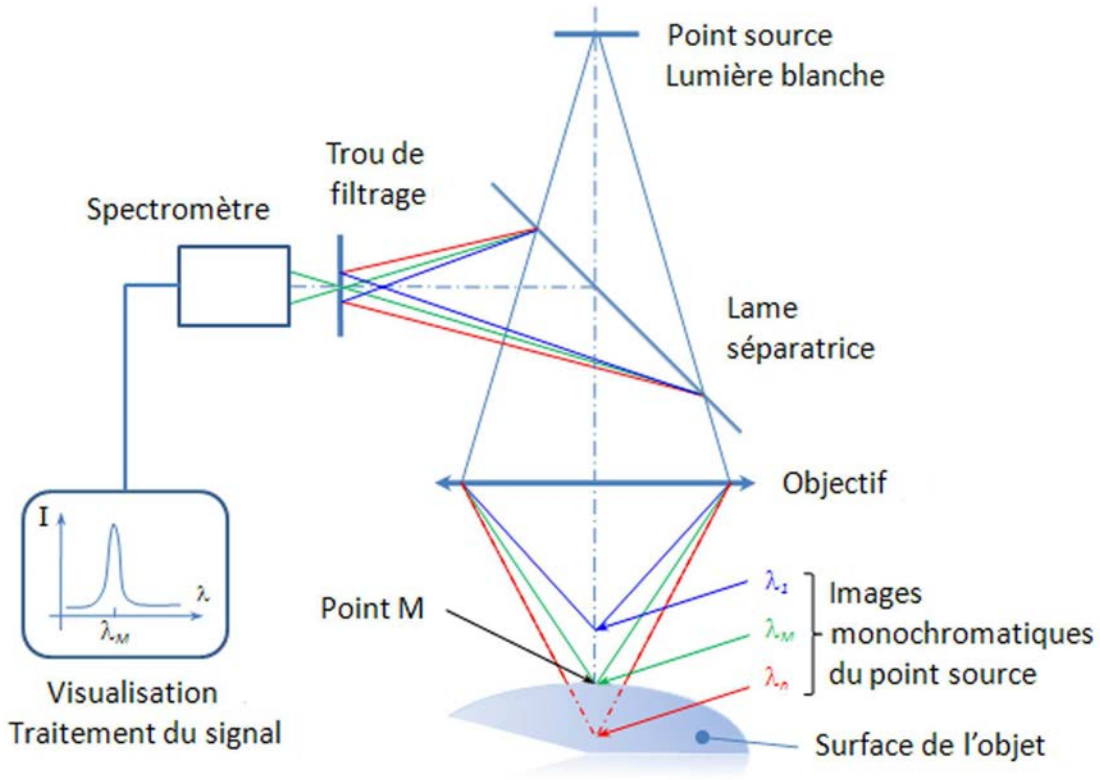


FIGURE 1.12 – *Schéma explicatif de la méthode CCI extrait du site Internet de la société STIL (http ://www.stilsa.com/FR/prin.htm).*

La méthode, illustrée sur le schéma ci-dessus, repose sur l'utilisation d'une lentille dotée d'une forte aberration chromatique. Celle-ci décompose le faisceau de lumière blanche incident en un continuum d'images monochromatiques localisées sur l'axe optique et constituant la plage de mesure. La lumière réfléchie par la surface d'un objet placée dans cette plage est collectée par l'intermédiaire d'une lame séparatrice. Un trou de filtrage permet de bloquer la lumière défocalisée ne provenant pas de la surface de l'échantillon. Enfin, la distribution de l'intensité spectrale de la lumière collectée est mesurée par un spectromètre. La longueur d'onde d'intensité maximale est alors détectée et la valeur de distance est obtenue à l'aide d'une courbe de calibration. Plusieurs interfaces réfléchissantes peuvent être détectées simultanément, autorisant ainsi les mesures d'épaisseur de fins échantillons transparents.

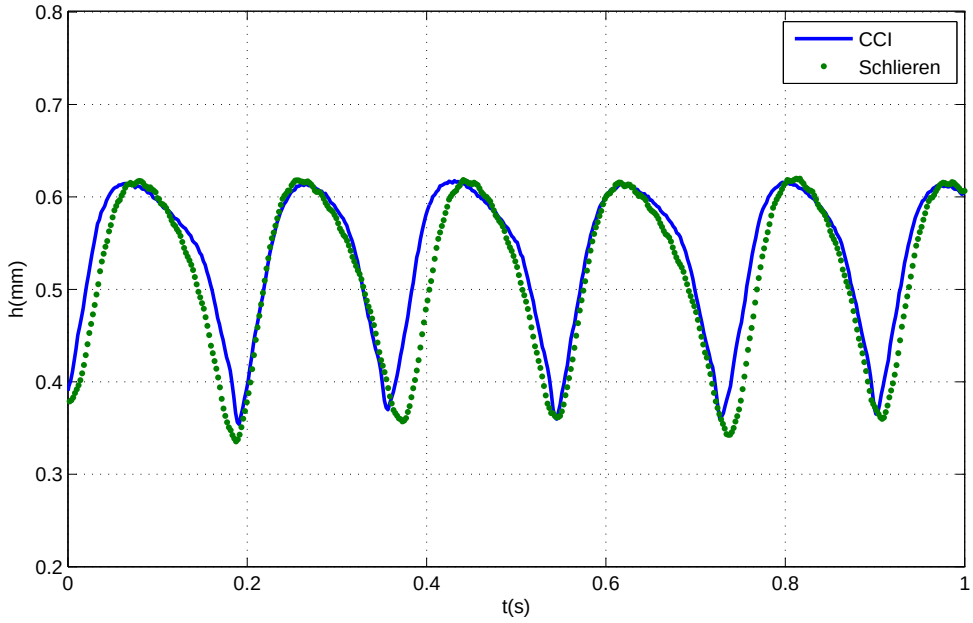
Pour nos expériences, nous avons utilisé deux modèles de capteurs CCI. Le premier, dans le cadre d'un prêt, est le modèle IFS2403-10 associé au contrôleur IFC2451 de la marque *micro-epsilon*. Ce modèle a donné des résultats mitigés pour trois raisons. Sa plage de mesure de 10 mm n'était pas parfaitement adaptée à notre configuration. Notamment, il était très difficile de détecter l'interface eau/verre (trop faible différence d'indices de réfraction) : nous n'avions donc accès qu'à une mesure de distance. Par ailleurs, la valeur maximale admissible de l'inclinaison de l'interface eau/air n'était que de 6° (soit une pente de 0.11). En conséquence, le capteur « décrochait » fréquemment, surtout dans les fronts d'onde. Dans le cas d'interfaces fortement déformées enfin, les mesures pouvaient souffrir d'une erreur importante en raison du défaut de linéarité ($40\,\mu m$ d'après la notice du constructeur).

Le deuxième modèle de système CCI utilisé a constitué un achat. Celui-ci, mieux adapté à notre problème, appartient à la marque *STIL* (contrôleur CCS PRIMA, capteur CL4). Il permet de détecter les deux interfaces (verre/eau, eau/air) et donc d'effectuer des mesures d'épaisseur et pas seulement de distance (plage de mesure : 4 mm). Les valeurs de l'inclinaison maximale de l'objet (21°, pente de 0.38) et du défaut de linéarité ($< 0.5\,\mu$m) sont également beaucoup plus satisfaisantes. L'acquisition s'effectue dans ce cas « par dessous », c'est-à-dire à travers la plaque de verre. Cela entraîne une petite erreur des mesures car la réfraction des rayons dans le verre n'est pas prise en compte. Nous avons estimé cette erreur et donc la precision de la méthode à environ $4\,\mu m$. La résolution temporelle des mesures, par ailleurs, peut atteindre 10 kHz.

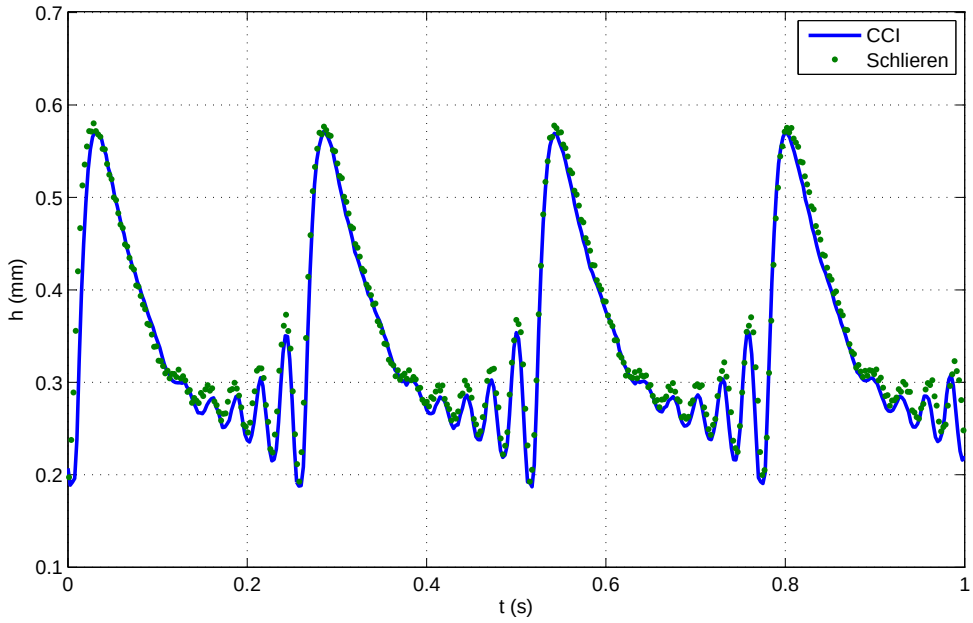
Comparaison avec la méthode Schlieren

Nous comparons enfin les mesures temporelles en un point obtenues grâce aux deux méthodes de mesure d'épaisseur. Il n'est pas possible techniquement de réaliser les mesures simultanément et exactement au même point avec les deux systèmes. La fenêtre de mesure Schlieren, de type « bande », a une largeur typique selon z de 3 à 5 cm et une longueur selon x ajustée à 2 ou 3 longueurs d'onde des motifs observés. Le point d'acquisition temporelle choisi lors du post-traitement est le centre de la fenêtre Schlieren : cela permet de minimiser les effets d'oscillation de la surface évoqués précédemment. La mesure d'amplitude des ondes avec la méthode de contact d'une aiguille peut être réalisée au même endroit (cette dernière est montée sur une platine de translation X-Y-Z). La mesure CCI, quant à elle, est décalée selon z d'environ 3 cm.

Ce décalage transverse du point de mesure pose la question du caractère 2D/3D des ondes. Les comparaisons sont réalisées dans un régime de paramètres pour lequel les modes d'instabilité 3D sont stables (typiquement $R < 40$, voir chapitre 3). Cependant, les ondes présentent très souvent une courbure globale due aux effets de bord comme observé par Liu et Gollub (1994) et Leontidis et al. (2010). Cette courbure décroît avec la fréquence, le nombre de Reynolds et la largeur du plan ; elle reste relativement faible dans la gamme de paramètres étudiée.



(a)



(b)

FIGURE 1.13 – *Validation de la technique Schlieren par comparaison avec les mesures CCI. L'acquisition est réalisée à environ* 40 *cm de l'entrée. (a) Ondes dites* γ_1 *:* $\beta = 5.2\,^\circ$, $R = 36$, $f = 5.5$ *Hz. (b) Ondes dites* γ_2 *:* $\beta = 10.1\,^\circ$, $R = 26$, $f = 3.9$ *Hz*

L'accord entre les mesures obtenues par les deux techniques est très bon comme illustré sur les graphes de la figure 1.13. Nous présentons ici deux cas correspondant aux deux familles d'ondes 2D existantes (voir chapitre 2). Les ondes γ_1 (figure 1.13a), obtenues à haute fréquence, sont lentes et quasi-sinusoïdales, avec des creux plus courbés que les crêtes. Les ondes γ_2 ou ondes solitaires (figure 1.13b), qui apparaissent à plus basse fréquence, sont rapides et possèdent un front principal précédé d'une série d'ondes capillaires.

1.4 Conclusion

Pour résumer, nous avons présenté d'abord le dispositif expérimental et les plages de variation des paramètres expérimentaux balayées dans notre étude. Une des spécificités du montage constitue le dispositif de forçage des ondes qui permet de contrôler les solutions observées sur une large gamme de fréquences. Les méthodes de mesure utilisées ont été ensuite séparées en deux catégories. D'une part, l'ombroscopie permet de visualiser facilement l'évolution des ondes et de mesurer leur vitesse de phase. D'autre part, les deux techniques de mesure d'épaisseur introduites permettent de caractériser quantitativement la topologie de la surface. La méthode temporelle en un point CCI, très simple d'utilisation, est utile dans le cas d'ondes 2D. La méthode surfacique Schlieren permet également d'obtenir des profils temporels, mais elle est surtout intéressante pour visualiser les motifs 3D (champ d'observation typique : 10 cm $\times$ 8 cm, résolution spatiale : 0.5 mm). Il faut alors faire attention à l'effet de taille de fenêtre induisant une oscillation de la surface. L'accord entre les mesures obtenues par les deux techniques est très bon. La résolution temporelle ($>$ 500 Hz) et la précision ($< 5\,\mu$m) de ces dernières sont également très satisfaisantes.

Annexe A - Propriétés de l'eau, des mélanges eau-glycérine/butanol

T (°C)	18	19	20	21	22	23	24	25
ρ (kg/m^3)	998.68	998.49	998.29	998.08	997.86	997.62	997.38	997.13
$\mu.10^3$ ($kg/m.s$)	1.054	1.028	1.003	0.979	0.955	0.933	0.911	0.891

Table 1.2 – *Propriétés physiques de l'eau (densité ρ et viscosité μ) en fonction de la température T.*

X_g (%)	10	20	30	40	50	60	70
15 °C	1023.3	1048.4	1074.6	1101.5	1128.7	1156.5	1184.2
20 °C	1022.1	1046.9	1072.7	1099.3	1126.3	1153.8	1181.3
25 °C	1020.7	1045.3	1070.7	1097.1	1123.8	1151.1	1178.4

Table 1.3 – *Densité ρ (kg/m^3) de mélanges eau-glycérine en fonction de la fraction massique en glycérine X_g et de la température ($T = 15, 20, 25\,°C$). Les données sont extraites de Glycerine Producers' Association (1963)*

X_g (%)	10	20	30	40	50	60	70
10 °C	1.74	2.41	3.49	5.37	9.01	17.4	38.8
20 °C	1.31	1.76	2.5	3.72	6	10.8	22.5
30 °C	1.03	1.35	1.97	2.72	4.21	7.19	14.1

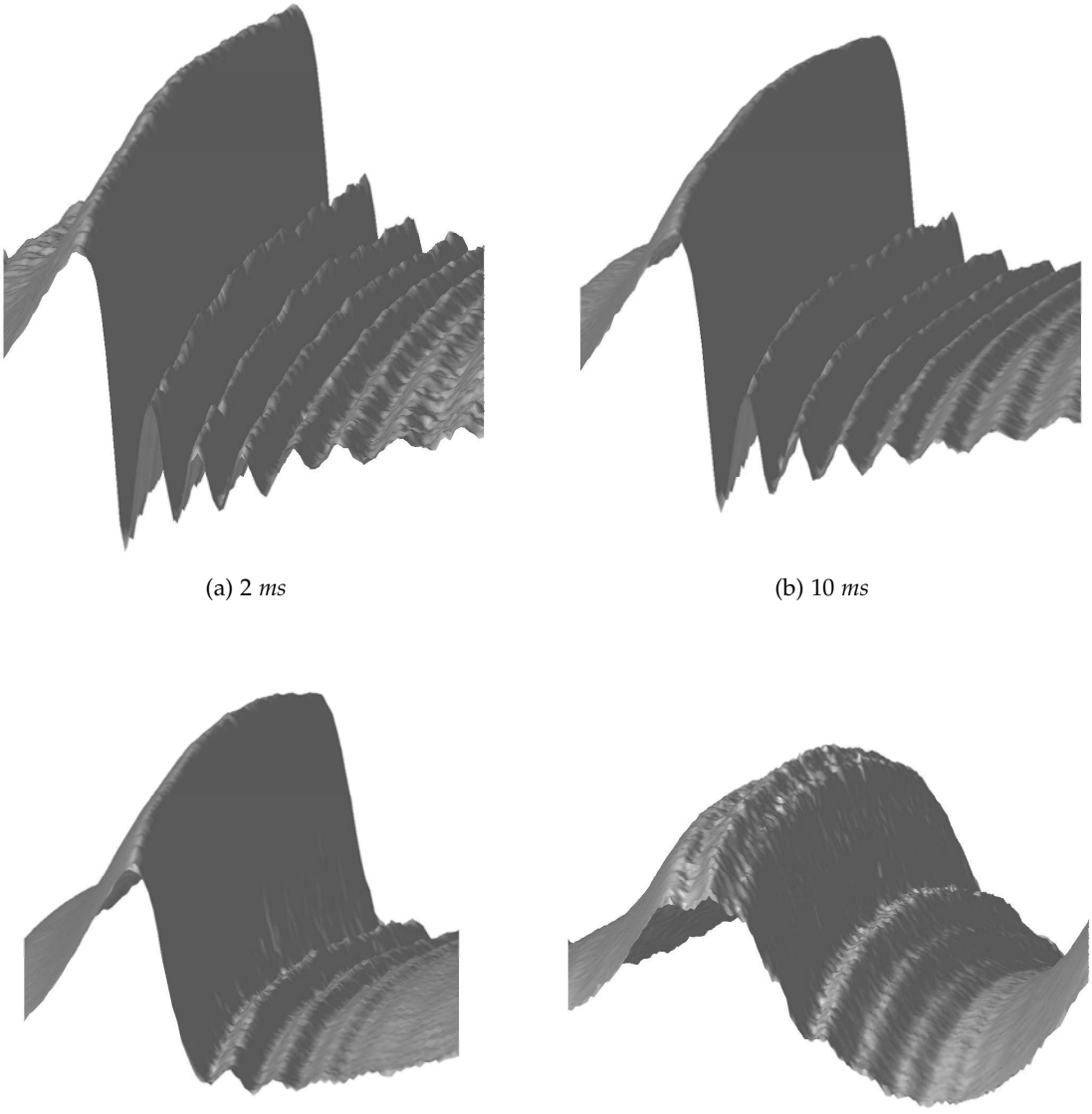
Table 1.4 – *Viscosité $\mu.10^3$ ($kg/m.s$) de mélanges eau-glycérine en fonction de la fraction massique en glycérine X_g et de la température ($T = 10, 20, 30\,°C$). Les données sont extraites de Glycerine Producers' Association (1963)*

X_b (%)	0.19	0.37	0.75	1.48
21 °C	67.3	63.4	54.1	40.9

Table 1.5 – *Tension de surface σ (mN/m) de mélanges eau-butanol en fonction de la fraction massique en butanol X_b ($T = 21\,°C$). Les données sont extraites de Fleming et Blaine (1997)*

La tension de surface de l'eau est : $\sigma_{eau} = 72$ mN/m. Celle des mélanges eau-glycérine varie peu dans la gamme de fraction massique en glycérine considérée (table 1.1) : $\sigma_{eau-gly} = 70 \pm 2$ mN/m. De même, la densité et la viscosité des mélanges eau-butanol est quasiment constante pour les valeurs de teneur en butanol utilisées dans cette étude (table 1.1) : $\rho_{eau-but} = 999 \pm 1$ kg/m^3, $\mu_{eau-but}.10^3 = 1.05 \pm 0.05$ kg/m.s.

Annexe B - Méthode Schlieren : temps d'exposition



(a) 2 *ms*

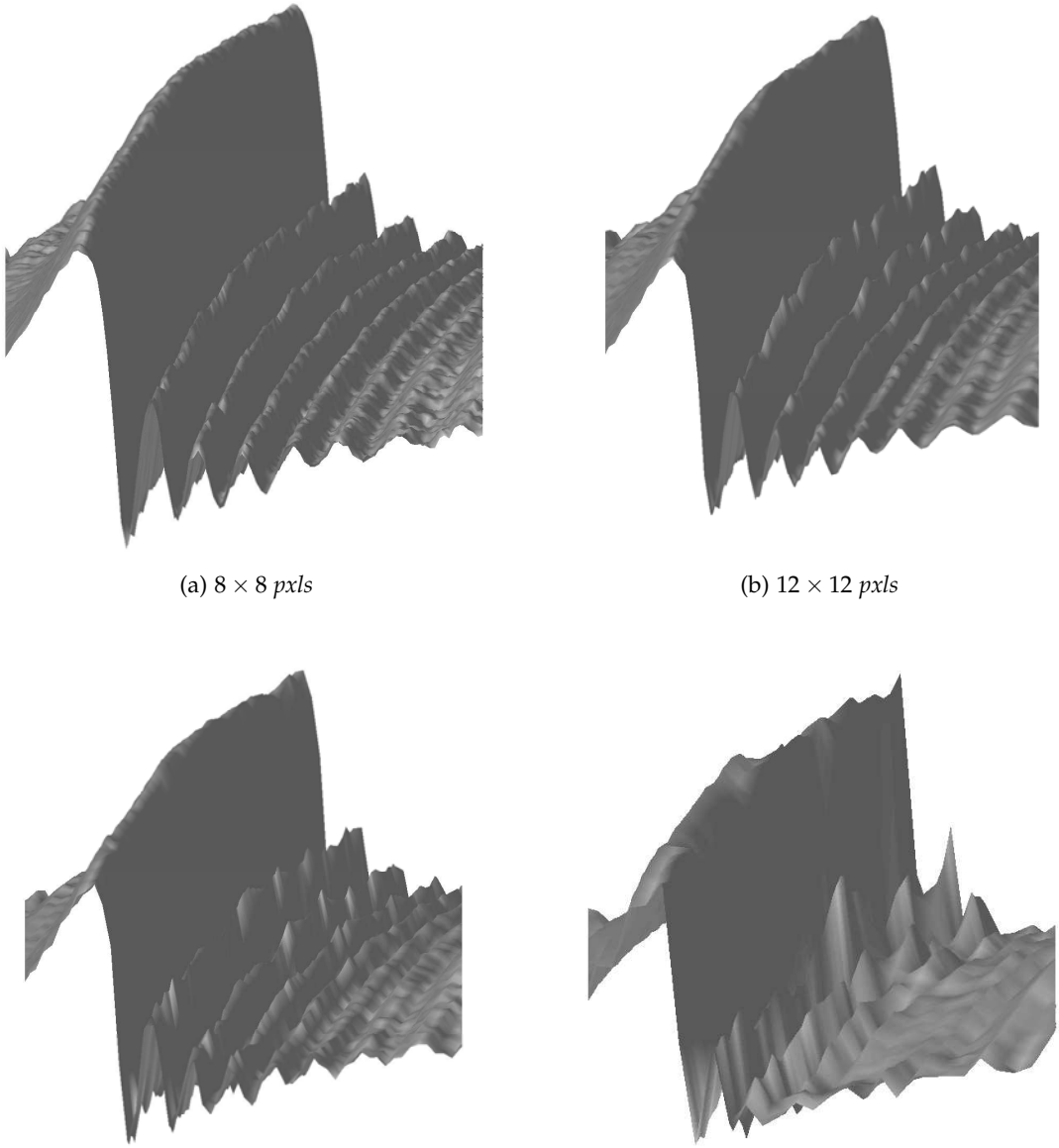
(b) 10 *ms*

(c) 30 *ms*

(d) 100 *ms*

Figure 1.14 – *Influence du temps d'exposition sur les cartes d'épaisseur obtenues avec la méthode Schlieren. Les paramètres expérimentaux sont :* $\beta = 8.1\,^{\circ}$, $R = 35$, $f = 3.3$ *Hz.*

Annexe C - Méthode Schlieren : fenêtre d'interrogation



(a) 8×8 *pxls*

(b) 12×12 *pxls*

(c) 16×16 *pxls*

(d) 32×32 *pxls*

Figure 1.15 – *Influence de la taille des fenêtres d'interrogation dans Davis sur les cartes d'épaisseur obtenues avec la méthode Schlieren. Les paramètres expérimentaux sont :* $\beta = 8.1\,^{\circ}$, $R = 35$, $f = 3.3$ *Hz*

Une taille trop large des fenêtres d'interrogation dans Davis fait croire à une modulation transverse des ondes capillaires (figure 1.15d) alors qu'il n'en est rien (figure 1.15a)

Dynamique 2D d'un film liquide tombant

2

Nous décrivons dans ce chapitre la dynamique 2D des ondes à la surface d'un film liquide tombant. Les outils utilisés sont expérimentaux et numériques. Ces derniers, et plus généralement les aspects théoriques et de modélisation du problème, seront tout d'abord présentés.

Nous introduirons les notations et équations de base du problème. Nous détaillerons brièvement les approches de modélisation couramment employées en mettant l'accent sur les modèles d'équations aux résidus pondérés que nous avons utilisés. Nous introduirons deux méthodes numériques permettant, soit de calculer des solutions stationnaires de ces équations, soit de résoudre la dynamique spatio-temporelle du film. Cette partie s'inspire de l'article de revue (Ruyer-Quil et al. (2014)) et du livre (Kalliadasis et al. (2012)).

Nous présenterons ensuite les différentes familles d'ondes existantes et leurs propriétés de stabilité. Nous chercherons à établir une corrélation pour la vitesse de phase des ondes forcées en fonction des paramètres du problème en combinant approche expérimentale et numérique. Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux dans le cas vertical mais il n'existe que peu d'études en configuration faiblement inclinée.

Nous explorerons enfin numériquement la dynamique des ondes naturelles (sans forçage en entrée). Nous nous demanderons comment s'effectue la sélection des solutions à temps long et suffisamment loin de l'entrée. Ce problème ouvert pose, en particulier, la question de la densité des solutions et pourrait avoir des applications intéressantes d'un point de vue des transferts de chaleur et de masse.

2.1 Présentation des outils numériques

2.1.1 Notations et paramètres adimensionnels

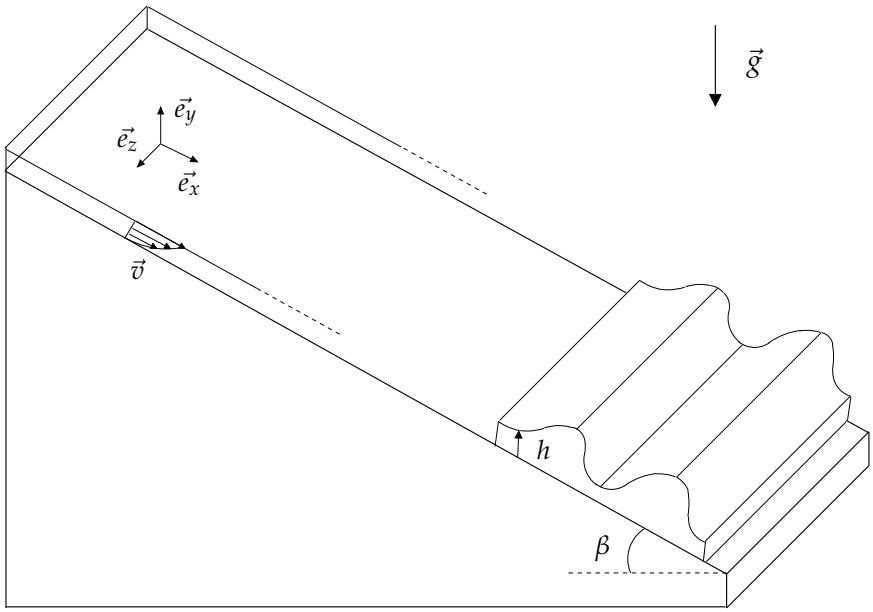


Figure 2.1 – *Description de la configuration étudiée*

Nous considérons l'écoulement d'un film liquide par gravité le long d'un plan incliné d'un angle β par rapport à l'horizontale. La coordonnée x est selon la direction de l'écoulement, y est la direction normale au plan, z est la coordonnée transverse dans le plan du film. Le vecteur vitesse est noté : $\vec{v} = u\vec{e_x} + v\vec{e_y} + w\vec{e_z}$. Le liquide est supposé Newtonien et de propriétés physiques constantes : tension de surface σ, viscosité μ, densité ρ. $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique, g est l'accélération de la gravité.

Deux échelles de longueur peuvent être définies en équilibrant la viscosité, l'accélération de la gravité le long du plan $g\sin\beta$ et la tension de surface : la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\sigma/(\rho g \sin\beta)}$ et la longueur visco-gravitaire $l_\nu = \nu^{2/3}(g\sin\beta)^{-1/3}$. En ajoutant l'épaisseur du film plat $\bar{h_N}$ (Nusselt (1916)), nous pouvons construire un premier jeu de paramètres adimensionnels. Celui-ci se compose du nombre de Kapitza $\Gamma = (l_c/l_\nu)^2$, de l'angle d'inclinaison β et du nombre de Reynolds défini à partir de l'épaisseur de Nusselt adimensionnée $h_N = \bar{h_N}/l_\nu$ ou du débit $\bar{q_N}$ par unité de largeur : $Re = \bar{q_N}/\nu = h_N^3/3$. Ce jeu de nombres adimensionnels est intéressant d'un point de vue expérimental car, dès lors que la géométrie et le fluide d'étude sont fixés, le seul paramètre de contrôle est le nombre de Reynolds Re.

Le nombre de Kapitza Γ compare la longueur capillaire (effet de la tension de surface vis-à-vis de la gravité) et la longueur visco-gravitaire. La plupart des fluides utilisés en pratique correspondent à de grandes valeurs de Γ : l'atténuation des ondes courtes est due essentiellement à la tension de surface et non à la viscosité (qui a cependant un effet dispersif sur les ondes). Cette idée, introduite par Shkadov (1967), permet de passer de trois

nombres sans dimension à seulement deux au prix d'un adimensionnement spécifique. L'effet de la tension de surface sur les ondes courtes est rendu explicite en introduisant un facteur de compression κ. Sa valeur résulte d'un équilibre entre la force de gravité $\rho g \sin\beta$ et le gradient de pression capillaire $\sigma\partial_{xxx}h$: $\kappa = [\sigma/(\rho g \sin\beta \bar{h_N}^2)]^{1/3} = (l_c/\bar{h_N})^{2/3}$. L'échelle de longueur est $\bar{h_N}$ dans la direction y et $\kappa\bar{h_N}$ dans les directions x et z. L'adimensionnement de Shkadov introduit trois nouveaux nombres sans dimension : un nombre de Reynolds réduit $\delta \equiv 3Re/\kappa$, un paramètre de dispersion visqueuse $\eta \equiv 1/\kappa^2 = (\bar{h_N}/l_c)^{4/3}$ et une pente réduite $\zeta \equiv \cot\beta/\kappa$. Comme dit précédemment, ce jeu de trois paramètres adimensionnés peut être ramené à deux en posant $\eta = 0$ (ce qui revient à $\Gamma \gg 1$). Par ailleurs, il rend explicite l'équilibre et l'ordre de grandeur relatif de toutes les forces à l'oeuvre (gravité, viscosité, tension de surface, inertie). Enfin, le coefficient devant le terme capillaire $\partial_{xxx}h$ est exactement 1 ce qui est intéressant d'un point de vue numérique.

2.1.2 Equations de base et hypothèses de modélisation

Nous écrivons à présent les équations de Navier-Stokes du problème (conservation de la masse et de la quantité de mouvement). Dans un souci de simplicité, nous nous limiterons au cas 2D ($\partial_z = 0, w = 0$). L'extension aux écoulements 3D ne pose pas de problème particulier. En utilisant les notations de Shkadov décrites précédemment, ces équations s'écrivent :

$$\delta(\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_x u) = -\partial_x p + 1 + (\partial_{yy} + \eta\partial_{xx})u \tag{2.1a}$$

$$\eta\delta(\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_x v) = -\partial_y p - \zeta + \eta(\partial_{yy} + \eta\partial_{xx})v \tag{2.1b}$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \tag{2.1c}$$

La pression p est également une inconnue du problème. Sa valeur à la surface libre est donnée par l'équilibre des contraintes normales (2.2a). Cette condition à la limite doit être complétée par l'équilibre des contraintes tangentielles (2.2b), la condition cinématique à l'interface (2.2c) et la condition de non-glissement à la paroi (2.2d) :

$$p_{y=h} = -\partial_{xx}h - \frac{2\,\eta}{1+\eta(\partial_x h)^2}\left[\partial_x h(\partial_y u + \eta\partial_x v) - \eta(\partial_x h)^2\partial_x u - \partial_y v\right]_{y=h} \tag{2.2a}$$

$$(1-\eta(\partial_x h)^2)\left(\partial_y u + \eta\partial_x v\right)_{y=h} + 2\eta\partial_x h\left(\partial_y v - \partial_x u\right)_{y=h} = 0 \tag{2.2b}$$

$$v_{y=h} = \partial_t h + u_{y=h}\partial_x h \tag{2.2c}$$

$$u_{y=0} = v_{y=0} = 0 \tag{2.2d}$$

Comme évoqué précédemment, le système d'équations (2.1a, 2.1b, 2.1c) avec les conditions aux limites (2.2a, 2.2b, 2.2c, 2.2d) admet une solution triviale : le film d'épaisseur constante $h = 1$. Le profil de vitesse de Nusselt est parabolique : $u = y - \dfrac{y^2}{2}$, $v = 0$. La pression est purement hydrostatique : $p = \zeta(1-y)$.

L'instabilité des films tombants correspond à un mode grande longueur d'onde. Cela implique l'existence d'une séparation d'échelle entre la coordonnée y d'une part et les coordonnées x et z d'autre part. Cette propriété peut s'exprimer en introduisant un paramètre formel ϵ. Dans le régime linéaire, ϵ s'écrit en fonction de la longueur d'onde de l'instabilité λ et de l'épaisseur du film h : $\epsilon = h/\lambda$. Dans le cas général : $\epsilon = \partial_{x,z,t}$. Les modèles que nous allons présenter résultent d'un développement des variables puis d'une hiérarchisation des termes vis-à-vis du paramètre ϵ.

La deuxième technique employée consiste à passer d'une représentation en terme de champ de vitesse à une description intégrée sur l'épaisseur. Cette méthode est classique lorsque le nombre de Reynolds et la profondeur sont faibles (problème de Hele-Shaw par exemple). Les degrés de liberté de l'écoulement deviennent l'épaisseur de film h et le débit $q = \int_0^h u dy$.

Enfin, nous utiliserons l'approximation de couche limite qui consiste à négliger les termes d'inertie du second ordre en ϵ dans (2.1b). Cela conduit à une expression pour la pression qui est ensuite injectée dans l'équation (2.1a) de conservation de la quantité de mouvement selon x. L'élimination de la pression constitue l'hypothèse principale dans la théorie de la couche limite développée par Prandtl [Schlichting (1979)].

2.1.3 Modèles à une équation

Ces modèles supposent que le débit est fonction uniquement de l'épaisseur h et de ses dérivées en temps et en espace. Ils peuvent être écrits sous la forme :

$$\partial_t h + \partial_x q = 0 \tag{2.3a}$$

$$q = Q(h) \tag{2.3b}$$

(2.3a) est l'équation exacte de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur du film. (2.3b) exprime formellement l'expression du débit et dépend du niveau d'approximation vis-à-vis du paramètre ϵ.

Ordre 0 (2.1a) devient : $\partial_{yy} u + 1 = 0$. Les conditions aux limites (2.2d) et (2.2a) s'écrivent respectivement : $u_{y=0} = 0$, $\partial_y u_{y=h} = 0$. Le profil de vitesse est de type Nusselt : $u = h^2 \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{2h^2} \right)$. Le débit est donc $Q(h) = \frac{h^3}{3}$ et (2.3a) s'écrit :

$$\partial_t h + h^2 \partial_x h = 0 \tag{2.4}$$

Cette équation d'onde de type Burgers (Whitham (1974)) possède uniquement un terme de propagation non linéaire avec le coefficient h^2 devant $\partial_x h$ qui joue le rôle d'une vitesse. Elle ne permet pas de représenter même qualitativement la dynamique du film car des chocs se forment (les crêtes des ondes se propagent plus rapidement que les creux).

Ordre 1 L'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x et les conditions aux limites pour u s'écrivent :

$$\delta(\partial_t u + u\partial_x u) = -\zeta\partial_x h + \partial_{xxx} h + 1 + \partial_{yy} u \tag{2.5a}$$

$$u_{y=0} = 0, \partial_y u_{y=h} = 0 \tag{2.5b}$$

L'introduction d'un développement de la forme $u = u_0 + \epsilon u_1$ dans (2.5a) puis le calcul de u_0 et u_1 ordre par ordre fournit l'expression du débit $Q(h) = \int_0^h (u_0 + u_1)dy$ et l'équation suivante en utilisant la conservation de la masse (Benney (1966)) :

$$\partial_t h + \partial_x \left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{2}{15}\delta h^6 \partial_x h - \frac{1}{3}\zeta h^3 \partial_x h + \frac{1}{3}h^3 \partial_{xxx} h\right] \tag{2.6}$$

Le modèle de Benney fournit la bonne valeur du seuil d'instabilité ($R_c = \frac{5}{6}\cot\beta$ ou $\delta_c = \frac{5}{2}\zeta$) et des résultats quantitatifs corrects pour $\delta - \delta_c \ll 1$. En revanche, les simulations en temps montrent l'apparition de singularités en temps fini pour $\delta - \delta_c > 1$ (Pumir et al. (1983)), conséquence des non linéarités d'ordre élevé (en particulier le terme inertiel $\frac{2}{15}\delta h^6 \partial_x h$).

Ordre 2 Il est possible de pousser le développement afin d'obtenir une équation de Benney à l'ordre 2. Cependant, cela ne résout pas le problème qui vient d'être évoqué. Le modèle d'ordre 2 ci-dessous proposé par Ooshida (1999) permet d'y remedier :

$$\partial_t h + \partial_x \left[\frac{1}{3}h^3 - \eta h^2 \partial_{xt} h - \frac{2}{21}\delta\partial_t(h^5) - \frac{12}{245}\delta\partial_x(h^7) - \frac{1}{12}\zeta\partial_x(h^4) + \frac{1}{3}h^3\partial_{xxx} h\right] \tag{2.7}$$

Le terme inertiel $h^6\partial_x h$ dans (2.6) apparaît désormais sous la forme d'une combinaison des termes $\partial_t(h^5)$ et $\partial_x(h^7)$ avec des poids différents. En utilisant l'équation (2.4), on obtient en fait : $h^6\partial_x h = \partial_x(\frac{1}{7}h^7) = -\partial_t(\frac{1}{5}h^5) + O(\epsilon)$. L'équation d'Ooshida ne suffit pas malgré tout à obtenir des résultats en accord quantitatif avec les expériences et les simulations numériques directes de l'équation de Navier-Stokes. L'amplitude des ondes par exemple est fortement sous-estimée.

Ces modèles à une équation ont été pratiquement abandonnés car le fait que le débit soit une variable esclave de l'épaisseur (équation (2.3b)) est une hypothèse trop forte. Ils ont permis cependant d'explorer la dynamique du problème à moindre frais. En particulier, le développement faiblement non linéaire de l'équation de Benney à l'ordre 1 (équation de Kuramoto-Sivashinsky) et son analogue à l'ordre 2 (équation de Kawahara) apparaissent comme de bons prototypes génériques.

2.1.4 Modèles à deux équations

Ordre 1 Nous relachons donc l'hypothèse exprimée par l'équation (2.3b). En intégrant (2.5a) sur l'épaisseur du film, nous obtenons :

$$\delta \left[\partial_t q + \partial_x \left(\int_0^h u^2 dy \right) \right] = -\zeta h \partial_x h + h \partial_{xxx} h + h + [\partial_y u]_0^h \tag{2.8}$$

Pour calculer le flux $\int_0^h u^2 dy$, Kapitza (1948) et Shkadov (1967) ont utilisé le profil de vitesse à l'ordre 0 :

$$u_0 = \frac{3q}{h} \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{2h^2} \right) \tag{2.9}$$

Ce choix n'est consistant qu'en configuration verticale et à nombre de Reynolds nul ($\delta = \zeta = 0$), ce qui limite le champ d'application de ce modèle comme nous allons le voir. L'introduction du champ de vitesse dans (2.8) donne le modèle à deux équations suivant :

$$\partial_t h + \partial_x q = 0 \tag{2.10a}$$

$$\delta \partial_t q = h - \frac{3q}{h^2} + \delta \left[\frac{6}{5} \frac{q^2}{h^2} \partial_x h - \frac{12}{5} \frac{q}{h} \partial_x q \right] - \zeta h \partial_x h + h \partial_{xxx} h \tag{2.10b}$$

Celui-ci ne prédit pas la bonne valeur du seuil d'instabilité linéaire : $R_c = \cot \beta$ au lieu de $\frac{5}{6} \cot \beta$. Il n'est donc utilisable qu'en configuration verticale ($\cot \beta = 0$) et à petite valeur de δ (corrections d'ordre $O(\epsilon)$ au profil de vitesse parabolique négligeables).

Afin d'être consistant à l'ordre 1, il faut supposer $u = u_0 + \epsilon u_1$ (avec u_0 donné par (2.9)). La définition du débit $q = \int_0^h u dy$ fournit par ailleurs la condition de jauge $\int_0^h u_1 dy = 0$. Après quelques lignes de calcul, l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x s'écrit :

$$\delta \partial_t q = \frac{5}{6} h - \frac{5}{2} \frac{q}{h^2} + \delta \left[\frac{9}{7} \frac{q^2}{h^2} \partial_x h - \frac{17}{7} \frac{q}{h} \partial_x q \right] - \frac{5}{6} \zeta h \partial_x h + \frac{5}{6} h \partial_{xxx} h \tag{2.11}$$

Cette équation a la même structure que 2.10b mais des coefficients différents. Elle permet de prédire correctement le seuil d'instabilité linéaire.

Ordre 2 L'objectif est maintenant d'obtenir un modèle d'ordre 2 vis-à-vis de ϵ. Plusieurs approches sont possibles. La méthode précédente fonctionne : supposer $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2$ puis calculer les corrections u_1 et u_2 en identifiant les termes ordre par ordre dans l'équation. Cette stratégie n'est pas la plus appropriée car elle conduit à des calculs très lourds. Il est plus intéressant de conserver un développement à l'ordre 1 pour u mais utilisant une base de polynômes élargie :

$$u = s_0(x,t) g_0(\bar{y}) + \epsilon \sum_{i=1}^{N} s_i(x,t) g_i(\bar{y}) \tag{2.12}$$

Les fonctions test polynomiales g_i dépendent de la variable réduite $\bar{y} = \frac{y}{h}$. A l'ordre 0, le profil est de type Nusselt : $s_0 = \frac{3q}{h}$, $g_0 = \bar{y} - \frac{\bar{y}^2}{2}$. Les coefficients $s_i(x,t)$ pour $i > 0$ constituent de nouvelles inconnues du problème. Les fonctions g_i forment une base orthogonale de l'espace des polynômes et peuvent être construites en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Les fonctions test g_1 et g_2 s'écrivent ainsi :

$$g_1 = \bar{y} - \frac{17}{6}\bar{y}^2 + \frac{7}{3}\bar{y}^3 - \frac{7}{12}\bar{y}^4 \tag{2.13a}$$

$$g_2 = \bar{y} - \frac{13}{2}\bar{y}^2 + \frac{57}{4}\bar{y}^3 - \frac{111}{8}\bar{y}^4 + \frac{99}{16}\bar{y}^5 - \frac{33}{32}\bar{y}^6 \tag{2.13b}$$

La méthode des résidus pondérés consiste à intégrer les équations sur l'épaisseur du film mais avec des poids w_j judicieusement choisis. Supposons que l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x s'écrive : $M(u) = 0$. Les résidus sont les quantités suivantes : $R_j(u) = \langle M(u)|w_j\rangle$ avec $\langle f|g\rangle = \int_0^h fg\,dy$ le produit scalaire canonique. La méthode de Galerkin consiste à choisir pour les poids les fonctions test elles-mêmes : $w_j = g_j$. Elle permet de minimiser le nombre de fonctions test à utiliser : trois en l'occurence (en comptant g_0). La méthode des moments ($w_j = \bar{y}^j$) ne requiert aussi que trois fonctions test mais implique des calculs plus lourds. En écrivant $R_j(u) = 0$, nous obtenons trois équations d'évolution couplées (auxquelles il faut rajouter la conservation de la masse) pour h, q et les deux coefficients s_1 et s_2.

Ce modèle à quatre équations, non reporté ici, sera désigné dans la suite de l'étude comme le modèle *complet* (voir Kalliadasis et al. (2012) pour plus de détails). Il est possible d'en simplifier grandement les équations en négligeant les contributions s_1 et s_2. Le modèle à deux équations ainsi obtenu, dit *simplifié*, s'écrit :

$$\partial_t h + \partial_x q = 0 \tag{2.14a}$$

$$\begin{aligned}\delta\partial_t q =& \frac{5}{6}h - \frac{5}{2}\frac{q}{h^2} + \delta\left[\frac{9}{7}\frac{q^2}{h^2}\partial_x h - \frac{17}{7}\frac{q}{h}\partial_x q\right] - \frac{5}{6}\zeta h\partial_x h + \frac{5}{6}h\partial_{xxx}h \\ &+ \eta\left[4\frac{q}{h^2}(\partial_x h)^2 - \frac{9}{2h}\partial_x q\partial_x h - 6\frac{q}{h}\partial_{xx}h + \frac{9}{2}\partial_{xx}q\right]\end{aligned} \tag{2.14b}$$

Il se distingue de (2.11) par la présence des termes visqueux du second ordre. La plupart des calculs effectués dans cette étude utilisent le modèle *simplifié* plutôt que le modèle *complet*. Son degré de complexité moindre le rend plus facile d'utilisation (le temps de calcul notamment est plus faible). Celui-ci n'est toutefois pas consistant vis-à-vis des termes inertiels (pas de corrections du profil de vitesse d'ordre $O(\epsilon^2)$). Une technique ad-hoc de régularisation (méthode de Padé) permet d'obtenir un modèle à deux équations totalement consistant à l'ordre $O(\epsilon^2)$, dit modèle *optimisé* (Kalliadasis et al. (2012)).

2.1.5 Calcul des solutions stationnaires

Nous allons voir à présent comment obtenir numériquement des solutions d'ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement. En introduisant la nouvelle coordonnée $\xi = x - ct$ (c est la vitesse de l'onde), l'équation de conservation de la masse peut être intégrée et s'écrit :

$$q = ch + q_0 \tag{2.15}$$

La variable $q_0 = \int_0^h (u - c)\, dy$ est une constante d'intégration qui représente le débit sous l'onde dans son référentiel ($q_0 < 0$ car l'onde est plus rapide que l'écoulement). L'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.14b) s'écrit alors (avec $' \equiv \partial_\xi$) :

$$\frac{1}{3}h^3h''' - \frac{1}{3}\zeta h^3h' + \delta N(h,c)h' + \eta[I(h,c)(h')^2 + J(h,c)h''] + H(h,c) = 0 \tag{2.16a}$$

$$N(h,c) = \frac{1}{35}\left[18c^2 + \frac{2}{3}ch - 12c - 2c^2h(h+1) + 2\right] \tag{2.16b}$$

$$I(h,c) = \frac{8}{5}q_0 - \frac{1}{5}ch\ ;\ J(h,c) = -\frac{3}{5}ch^2 - \frac{12}{5}q_0h\ ;\ H(h,c) = \frac{1}{3}h^3 - ch - q_0 \tag{2.16c}$$

L'équation (2.16a) peut être mise sous la forme d'un système dynamique de dimension 3 : $\mathbf{U}' = F(\mathbf{U})$ avec $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ et $U_1 = h$, $U_2 = h'$, $U_3 = h''$. Afin de déterminer les solutions périodiques de ce système dynamique, nous avons utilisé le logiciel de continuation AUTO-07p. Nous décrivons à présent son utilisation.

Le point de départ de la procédure de continuation est la courbe de stabilité marginale. La période ou longueur d'onde de coupure associée λ_c correspond à un point de bifurcation de Hopf. La première étape du calcul est d'augmenter la période afin d'obtenir une onde d'amplitude suffisante. Les étapes suivantes consistent à ajuster les paramètres du problème les uns après les autres à leur valeur souhaitée. Concrètement, le logiciel utilise un fichier de constantes pour chaque étape de continuation et une procédure Fortran qui regroupe toutes les caractéristiques du problème. Cette procédure est décomposée en un certain nombre de fonctions auxiliaires. La subroutine FUNC définit les paramètres de bifurcation et l'équation du système. La subroutine STPNT définit le point de départ du calcul. La subroutine PVLS permet de calculer des paramètres supplémentaires utiles tels que l'amplitude ou la fréquence f des ondes. Cette dernière, en effet, ne peut pas être définie comme paramètre indépendant si la vitesse c et la période le sont déjà ($\lambda = c/f$). Les subroutines BCND et ICND contiennent respectivement les conditions aux limites et les conditions intégrales du problème que nous allons expliciter en détail.

Les conditions aux limites sont au nombre de quatre. Trois d'entre-elles correspondent au fait que la périodicité de la solution est imposée : $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}(\lambda)$. La dernière sert à fixer la position de l'onde dans le domaine : $U_1(0) = 1$. Les condition intégrales, quant à elles, s'expriment sous la forme : $\int_0^\lambda G(\xi)d\xi$. Une seule condition est nécessaire et suffisante

pour notre problème : soit l'épaisseur moyenne soit le débit moyen est fixé (à sa valeur en entrée). Nous verrons dans la suite de l'étude que ces conditions intégrales peuvent être aussi utilisées afin de calculer diverses quantités moyennes sur une longueur d'onde. La condition $\langle h \rangle_\xi = 1$ correspond à une synchronisation spatiale du train d'ondes : les volumes de liquide entrant et sortant du domaine sont égaux. Elle est donc appropriée pour la comparaison avec des simulations numériques périodiques. La condition $\langle q \rangle_\xi = \frac{1}{3}$ correspond, en revanche, à une synchronisation temporelle du train d'ondes. Elle résulte d'un forçage périodique en entrée et doit donc être utilisée lorsque le but est de comparer avec les expériences. C'est la condition que nous avons utilisée dans les simulations.

Les fichiers de constantes à chaque étape de la procédure contiennent un certain nombre de paramètres à spécifier. L'indice de la solution de départ IRS, le point d'arrêt du calcul NUZR, la dimension du système NDIM, le nombre de conditions aux limites NBC et intégrales NINT, le nombre maximal d'itérations NMAX et le nombre de points à afficher en sortie NPR en font partie. Concernant les paramètres de continuation, il faut spécifier leur nombre NICP et le numéro associé à chacun d'entre eux ICP(I) (I=1,NICP). L'ordre a une importance : paramètre principal en premier puis paramètres actifs suivis des paramètres inactifs. Le nombre de points du domaine de calcul, égal au produit d'un nombre de mailles NTST par un nombre de points de colocation par maille NCOL, doit être choisi judicieusement (NTST = 256, NCOL = 4 dans notre cas). Enfin, la longueur du premier pas à effectuer DS, la longueur maximale DSMAX et minimale DSMIN des pas suivants doivent être ajustés pour permettre la continuation tout en limitant le temps de calcul.

2.1.6 Simulations spatio-temporelles

Nous décrivons à présent le principe du code de simulation spatio-temporelle des équations du modèle (*optimisé*). L'équation à résoudre est écrite sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{H} = \mathcal{L}(\mathbf{H}) + \mathcal{N}(\mathbf{H}) \tag{2.17}$$

$\mathbf{H} = (h, q)$ désigne le vecteur d'inconnues, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}$ sont respectivement des opérateurs matriciels linéaire et non-linéaire. Le domaine de calcul de taille L est discrétisé en N noeuds $x_j = j\Delta x$, $j = 1 \cdots N$, $\Delta x = L/N$. Les variables au noeud x_j et au temps t_n sont notées $\mathbf{H}_j^{(n)}$. Le code utilise le schéma temporel de Crank-Nicholson :

$$\mathbf{H}_j^{(n+1)} - \mathbf{H}_j^{(n)} = \frac{\Delta t}{2}(\mathcal{L}(\mathbf{H}_j^{(n+1)}) + \mathcal{N}(\mathbf{H}_j^{(n+1)}) + \mathcal{L}(\mathbf{H}_j^{(n)}) + \mathcal{N}(\mathbf{H}_j^{(n)})) \tag{2.18}$$

Le pas de temps $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ doit être choisi suffisament petit : $\Delta t < C\Delta x$ où C est une constante (condition de type « Courant-Friedrichs-Lewy » ou CFL). L'erreur associée à ce schéma est d'ordre $O(\Delta t^2)$ (précision d'ordre 2 en temps). En supposant $\mathbf{H}_j^{(n)}$ au temps t_n connu, l'équation (2.18) doit être inversée afin d'obtenir $\mathbf{H}_j^{(n+1)}$. Cela peut-être réalisé en

utilisant la méthode de Newton ou, plus simplement, en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 du terme non linéaire :

$$\mathcal{N}(\mathbf{H}_j^{(n+1)}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}_j^{(n)}) + (\mathbf{H}_j^{(n+1)} - \mathbf{H}_j^{(n)})\,\mathcal{N}'(\mathbf{H}_j^{(n)}) \tag{2.19}$$

Ce développement rend le problème (2.18) linéaire. Les dérivées en espace sont approchées par un schéma aux différences finies centrées (précision d'ordre 2 en espace). La dérivée troisième, associée au termes de tension de surface, s'écrit pas exemple :

$$(\partial_{xxx}\mathbf{H})_j = \frac{1}{2\Delta x^3}(\mathbf{H}_{j+2} - 2\mathbf{H}_{j+1} + 2\mathbf{H}_{j-1} - \mathbf{H}_{j-2}) + O(\Delta x^2) \tag{2.20}$$

Il reste à préciser les conditions initiales et les conditions aux limites du problème. Deux situations correspondant à deux versions différentes du code ont été considérées dans cette étude : domaine semi-infini avec forçage en entrée ou domaine périodique.

Domaine semi-infini Dans ce premier cas, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mathbf{H}(x,0) = \mathbf{P}(x),\ \mathbf{H}(0,t) = (1,1/3) + \mathbf{H}_f(t) \tag{2.21a}$$

$$\partial_t\mathbf{H}(L,t) = \nu_f\partial_x\mathbf{H}(L,t) \tag{2.21b}$$

La fonction $\mathbf{P}(x)$ peut être choisie constante égale à $(1,1/3)$. En pratique, un profil dit pseudo-hétérocline de la forme $\alpha - \frac{2}{\pi}(1-\alpha)\arctan(\gamma(x-x_0))$ est adopté, ce qui accélère la phase transitoire du calcul. La fonction $\mathbf{H}_f(t)$ peut être soit un forçage périodique en temps soit un bruit. Les dérivées spatiales aux noeuds 1 et N doivent faire l'objet d'un traitement spécial. En entrée, deux sites fictifs $x_0 = 0$ et $x_{-1} = -\Delta x$ sont introduits et la condition suivante est imposée : $\mathbf{H}_{-1} = \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1$. En sortie, les dérivées spatiales sont calculées vers l'arrière. Ceci permet de rendre la matrice associée au système diagonale par bande. La dimensionalité du système impose une condition à la limite supplémentaire (2.21b) en sortie. Cette expression ad-hoc permet de limiter les reflexions d'ondes (ν_f peut être pris égal à 1) tout en n'introduisant pas de bande supplémentaire dans la matrice. L'algorithme d'inversion du système utilise la méthode de décomposition LU qui est efficace pour ce type de matrices.

Domaine périodique Dans ce second cas, les conditions imposées s'écrivent :

$$\mathbf{H}(x,0) = (1,1/3) + \mathbf{B}(x) \tag{2.22a}$$

$$\mathbf{H}(L,t) = \mathbf{H}(0,t),\ \partial_t\mathbf{H}(L,t) = \partial_t\mathbf{H}(0,t) \tag{2.22b}$$

La fonction $\mathbf{B}(x)$ est soit un bruit spatial soit un forçage périodique en espace. La matrice possède cette fois des éléments non nuls en dehors des diagonales ce qui rend la méthode de résolution plus complexe. Une technique ad-hoc basée sur l'algorithme de Thomas permet de se ramener à la résolution de plusieurs systèmes associés à des matrices bande.

En pratique, les calculs sont relativement simples à lancer. Le programme est constitué d'une routine Fortran et de deux fichiers de constantes/paramètres. Ces derniers contiennent notamment le nombre de points N, les pas en espace Δx et en temps Δt, les paramètres de l'écoulement (R, β), les propriétés physiques (ρ, σ, ν), l'amplitude du forçage A_f ou du bruit A_{br}, la fréquence de forçage f et les paramètres liés à l'enregistrement des résultats (fréquence d'enregistrement f_e, nombre d'impressions n_i, temps final t_f ...). Les calculs lancés utilisent typiquement $N = 40000$, $\Delta x = 0.15$, $\Delta t = 0.01$, $t_f = 50000$ (valeurs adimensionnées). Le temps de calcul est de l'ordre d'une semaine sur une machine de bureau.

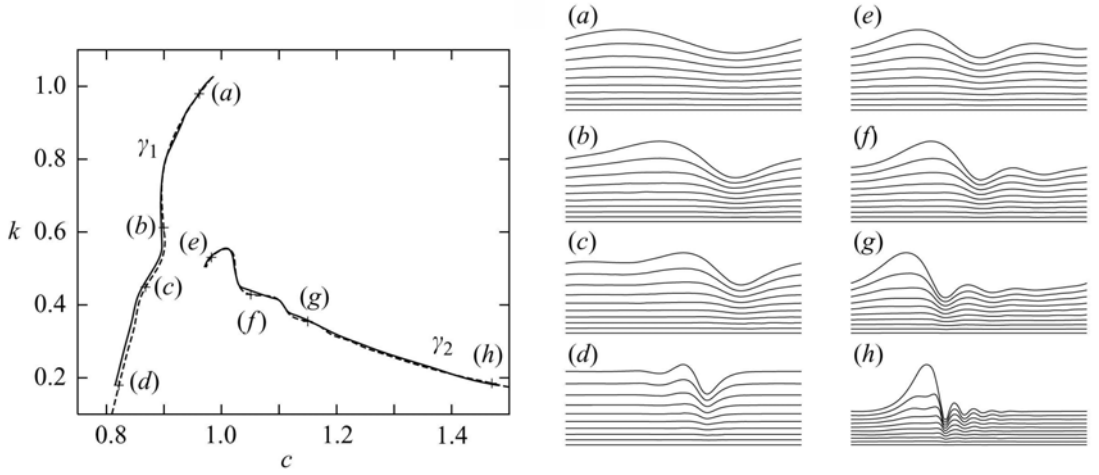
2.2 Ondes forcées

Nous allons maintenant caractériser les ondes qui résultent d'un forçage temporel en entrée. Nous verrons qu'il existe deux principales familles de solutions (ondes γ_1 et γ_2) dont les domaines d'existence dépendent principalement de la fréquence de forçage f. Les propriétés de stabilité de ces ondes seront ensuite rappelées. Nous nous pencherons enfin sur un problème pertinent d'un point de vue pratique : comment varie la vitesse des ondes forcées avec les paramètres du problème ? Cette question a fait l'objet de nombreuses études pour un plan vertical mais il n'existe que peu de résultats en configuration faiblement inclinée. Des mesures expérimentales de vitesse seront confrontées aux résultats numériques des modèles.

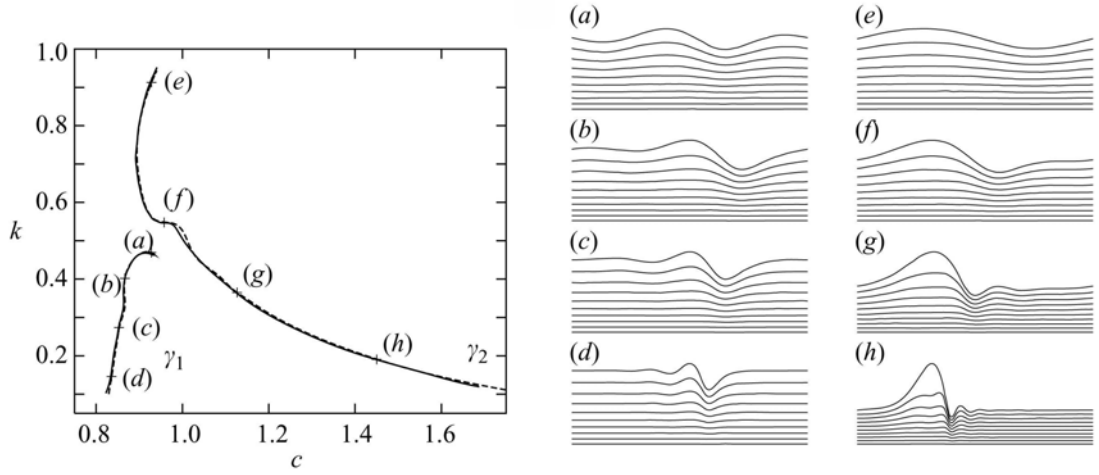
2.2.1 Deux principales familles d'ondes

Le forçage en entrée produit d'abord des ondes linéaires d'amplitude infinitésimale. Une analyse faiblement non linéaire des équations (Nakaya (1975)) permet de distinguer deux cas selon la fréquence de forçage f. Pour $f_s(R) < f < f_c(R)$, la dynamique peut-être décrite en utilisant un développement faiblement non linéaire d'ordre 3 (f_c est la fréquence de coupure qui dépend du nombre de Reynolds R). L'instabilité est supercritique ce qui donne naissance à des ondes lentes saturées dites ondes γ_1. Pour $f < f_s(R)$, le troisième coefficient de Landau du développement change de signe. L'analyse précédente n'est plus valable : le nombre de modes à utiliser augmente et ceux-ci intéragissent fortement entre-eux. Les solutions observées, dites ondes γ_2 ou ondes solitaires, développent alors des pics secondaires en avant de l'onde principale. Ces rides capillaires de petite longueur d'onde sont parfois appelées précurseurs de Sommerfeld (Falcon et al. (2003)). Elles précèdent l'onde principale car leur vitesse de groupe est plus élevée (approximation de la phase stationnaire). La courbe $f_s(R)$ qui sépare les domaines d'existence des deux familles d'ondes a été mesurée expérimentalement par Liu et al. (1993).

Il est facile d'observer la distinction entre les ondes γ_1 et γ_2 grâce aux simulations spatio-temporelles du modèle. Avec AUTO-07p, les calculs partent toujours du même point de départ : la courbe de stabilité marginale $f_c(R)$. Comment obtient-on les deux familles de solutions ? Salamon et al. (1994), en utilisant une description aux éléments finis



(i) $\delta = 2.79$, $\zeta = 0$, $\eta = 0.015$ *(*$R = 7.59$, $\Gamma = 4374$*)*



(ii) $\delta = 2.79$, $\zeta = 0$, $\eta = 0.075$ *(*$R = 3.40$, $\Gamma = 228.8$*)*

FIGURE 2.2 – *Solutions d'ondes stationnaires (figure extraite de Scheid et al. (2006)). A gauche : nombre d'onde k en fonction de la vitesse c. Les résultats du modèle simplifié sont représentés en traits pointillés, les traits pleins sont les résultats DNS de Salamon et al. (1994). A droite : profils d'ondes et lignes de courant dans le référentiel de l'onde pour les familles γ_1 (graphes (a) à (d)) et γ_2 (graphes (e) à (h)).*

des équations de Navier-Stokes, ont observé une forte influence du paramètre η (aussi appelé viscosité élongationnelle) sur les diagrammes de bifurcation. Ce comportement, confirmé ensuite par Kalliadasis et al. (2012), est illustré sur la figure 2.2. Pour de faibles valeurs de η (figure 2.2i), la branche de solutions issue du point de bifurcation de Hopf connecte la branche γ_1 des ondes lentes ($c < 1$). La famille γ_2 d'ondes rapides ($c > 1$) résulte d'une bifurcation par doublement de période. Lorsque η augmente, la situation s'inverse (figure 2.2ii) : les ondes γ_2 peuvent être alors obtenues directement. La plupart des fluides que nous avons utilisés correspondent au cas de la figure 2.2i. L'astuce pour obtenir les ondes solitaires consiste, dans un premier temps, à augmenter η (en diminuant la tension de surface) pour se retrouver sur la branche d'ondes γ_2. Dans un deuxième temps, nous augmentons la longueur d'onde puis diminuons η afin de se placer dans les conditions voulues.

Comme nous le verrons par la suite, les ondes solitaires γ_2 sont les plus stables et donc les plus pertinentes. Etudions plus en détail leurs caractéristiques. Les profils d'épaisseur peuvent être séparés en trois régions distinctes : le dos, le front et la région capillaire (de gauche à droite sur les graphes (e) à (h) de la figure 2.2). Dans le dos de l'onde, l'épaisseur varie de manière modérée. La tension de surface ne joue pas : l'inertie compense les forces de gravité et de viscosité. Ce bilan permet d'estimer la taille de cette région (en variables adimensionnées) : $X_b \sim \delta$. Au niveau du front de l'onde, c'est la tension de surface qui compense la gravité et empêche le déferlement ($X_f \sim 1$). Enfin, la région capillaire est caractérisée par un équilibre entre l'inertie et la tension de surface. La longueur d'onde X_c des oscillations capillaires varie comme $\delta^{-1/2}$. Ces ondes de la famille γ_2 sont, par ailleurs, sujettes à des écoulements de recirculation intenses. Dans le référentiel de l'onde, il existe un tourbillon au sein de l'onde principale. Les conditions d'apparition de celui-ci ont été étudiées numériquement par Miyara (2000). Dans le référentiel du laboratoire, des écoulements retour ont été observés au niveau des creux capillaires. Ce résultat surprenant est maintenant bien compris grâce à plusieurs études expérimentales et numériques (Dietze et al. (2008), Dietze et al. (2009)).

2.2.2 Familles hybrides, stabilité et sélection

Le calcul des branches de solutions γ_1 et γ_2 ne permet pas d'affirmer quelles ondes seront observées en pratique. Il est nécessaire, pour cela, d'étudier les propriétés de stabilité de ces ondes. Les instabilités associées peuvent être 2D ou 3D. Nous allons nous intéresser ici uniquement aux modes 2D (les modes 3D font l'objet du chapitre 3 de cette thèse). Les outils employés sont ceux de la stabilité linéaire et consistent à chercher les solutions du problème sous la forme :

$$\mathbf{H}(\xi, t) = \mathbf{H}_0(\xi) + \mathbf{H}_1(\xi) e^{i\nu k_x \xi + \lambda t} \tag{2.23}$$

La variable $\mathbf{H}$ désigne le vecteur d'inconnues (h, q), $\mathbf{H}_0$ est l'état de base connu de nombre d'onde k_x, $\mathbf{H}_1$ est la perturbation (inconnue) de taux de croissance complexe λ. L'analyse se place dans le référentiel de l'onde et la fonction $\mathbf{H}_1$ est cherchée périodique en ξ (on parle d'une étude de stabilité de type Floquet). Le paramètre de décalage en fréquence ν varie entre 0 (perturbations de même longueur d'onde que l'état de base) et 0.5 (doublement de période).

Les modes d'instabilité pertinents sont de trois types : soit $\nu = 0$ (instabilité primaire du film), soit $\nu \ll 1$ (mode type Eckhaus, quasi-périodique), soit $\nu = 0.5$ (transition par doublement de période). Les ondes de la famille γ_1 sont instables quel que soit le nombre d'onde k_x vis-à-vis des modulations de type $\nu \ll 1$ et $\nu = 0.5$ (Cheng et Chang (1995), Chang et al. (1993)). Les ondes de la famille γ_2 sont sujettes également à ces deux modes d'instabilité mais il existe certaines valeurs $k_{x,n}$ de nombres d'ondes stables (Chang et al. (1993)). Ces nombres d'onde vérifient la relation $k_{x,n} \sim \omega/n$ avec ω la fréquence d'oscillation des ondes capillaires : les ondes se synchronisent grâce aux radiations capillaires. Les

solutions associées, appelées ondes optimales courtes (Trifonov (2014)), seront étudiées en détail dans la partie suivante. Un autre élément à prendre en compte est l'instabilité primaire du film. En effet, un train d'ondes solitaires de grande période est caractérisé par l'existence de larges portions de film quasiment plat entre les ondes. Ces régions sont potentiellement instables vis-à-vis de l'instabilité primaire, ce qui se manifeste par l'existence d'un nombre d'onde minimum $k_{x,min}$ en-dessous duquel les perturbations de type $\nu = 0$ deviennent instables. En pratique, les valeurs discrètes de stabilité pour k_x légérement supérieur à $k_{x,min}$ sont tellement ressérées ($\Delta k_{x,n} = k_{x,n} - k_{x,n-1} \sim \omega/n^2$) qu'on observe quasiment une bande de stabilité.

Nous avons discuté ci-dessus les caractéristiques et les propriétés de stabilité des deux principales familles γ_1 et γ_2. Les diagrammes de bifurcation sont en réalité beaucoup plus complexes que ceux de la figure 2.2 en raison de l'existence de nombreuses sous-familles hybrides. La figure 2.3 donne un apercu de cette complexité pour un cas proche du seuil d'instabilité ($R - R_c = 4.5$). Les familles γ_1' et γ_1'', respectivement ondes lentes à deux creux et trois creux, ont été représentées. Il existe également des ondes à deux bosses, trois bosses ... (dénomées respectivement γ_2', γ_2'' ...). Pour une fréquence donnée (ce qui est le cas dans les expériences et les simulations spatio-temporelles), plusieurs solutions de différentes familles sont possibles : six d'entre-elles sont représentées par des croix sur le diagramme de la figure 2.3a à $f = 1$ Hz. La solution effectivement sélectionnée par le système (« dominant wave ») est l'onde la plus rapide et de plus grande amplitude (Sisoev et Shkadov (1997), Shkadov et Sisoev (2004)). C'est également la plus stable (les familles de solutions hybrides sont instables pour tout nombre d'onde).

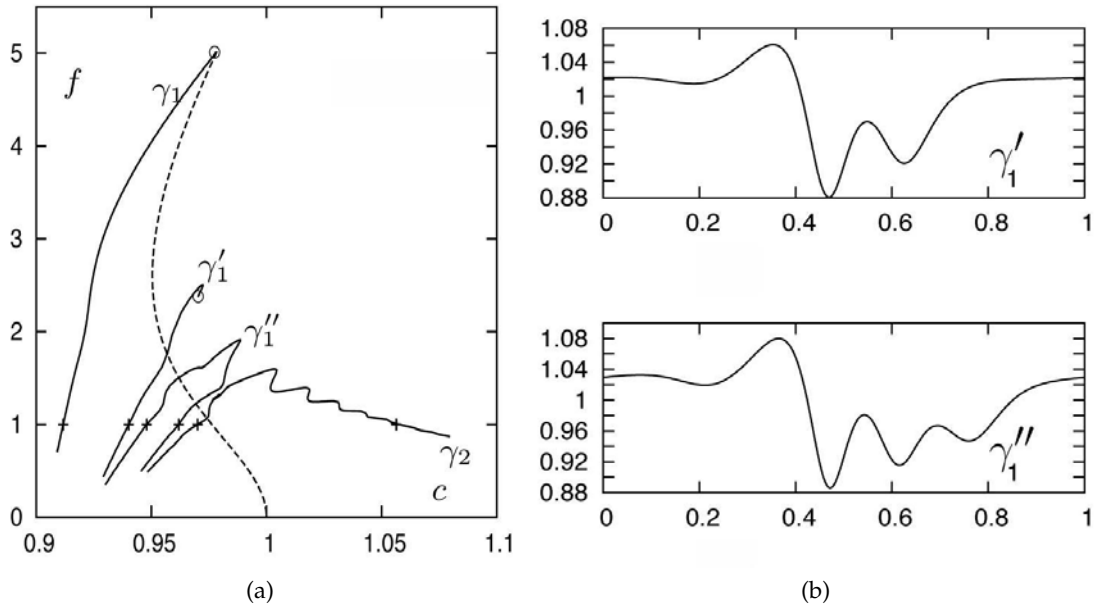


FIGURE 2.3 – *Figure reproduite de Kalliadasis et al. (2012). (a) : Diagramme de bifurcation : fréquence de forçage f en Hz en fonction de la vitesse adimensionnée c. Les calculs sont effectués en utilisant le modèle optimisé (traits pleins) ; les paramètres utilisés sont $\beta = 4°$, $\Gamma = 2340$, $R = 16.4$. La ligne pointillée correspond aux ondes linéaires infinitésimales les plus amplifiées. (b) : Profils d'ondes hybrides γ_1' ($c = 0.940$) et γ_1'' ($c = 0.962$) correspondant à deux des croix indiquées sur la figure 2.3a ($f = 1$ Hz).*

Les différents scénarios d'évolution en fonction de la fréquence peuvent être maintenant discutés. Pour les hautes fréquences, les ondes γ_1 sont d'abord sélectionnées puis deviennent instables et évoluent vers les ondes γ_2. Pour les basses fréquences, il existe plusieurs familles hybrides mais l'onde sélectionnée est la plus rapide de la famille γ_2. La solution associée peut-être instable vis-à-vis des modes $\nu = 0$, $\nu \ll 1$ ou $\nu = 0.5$: l'onde se désynchronise alors du forçage et adapte sa période. Enfin, les fréquences intermédiaires peuvent donner naissance à des comportements exotiques : le système peut parfois osciller entre deux des solutions possibles (Ramaswamy et al. (1996)).

2.2.3 Corrélations de vitesse

Comme nous venons de le voir, la dynamique 2D des ondes avec forçage est relativement bien connue. Nous allons maintenant confronter ces résultats à des données expérimentales. En particulier, il est important de savoir comment varient les caractérisques des ondes (amplitude, vitesse) avec les paramètres du problème. Plusieurs études en configuration verticale apportent des réponses mais très peu de résultats sont disponibles dans le cas faiblement incliné. Nous proposerons une corrélation empirique pour la vitesse à partir de nos mesures expérimentales. Nous verrons ensuite que, pour des ondes suffisament espacées, la bonne échelle de longueur pour le problème est l'épaisseur du substrat (épaisseur de film loin de l'onde principale).

Etat de l'art

Dans le cas vertical et pour des ondes forcées, la corrélation de Nosoko et al. (1996) semble faire consensus. Celle-ci a fait l'objet de plusieurs validations numériques (Miyara (2000), Kunugi et Kino (2005) parmi d'autres). Elle s'écrit, en utisant les nombres de Reynolds R et de Kapitza Γ, la vitesse $N_c = \dfrac{c}{(\nu g)^{1/3}}$ et la fréquence $N_f = \dfrac{f}{(\nu^{-1} g^2)^{1/3}}$ adimensionnée :

$$N_c = 1.19 N_f^{-0.45} R^{0.54} \Gamma^{-0.09} \tag{2.24}$$

Nosoko et al. (1996) ont utilisé une large plage de nombres de Reynolds ($R = 15 - 90$). Leur dépendance vis-à-vis des propriétés physiques, cependant, pose question car le fluide utilisé est l'eau. La température varie certes sur une gamme importante ($T = 5 - 23\,^\circ\mathrm{C}$) mais cela induit des variations de viscosité, tension de surface et densité relativement faibles. La dépendance en fréquence, enfin, suppose que les ondes sont de type γ_2. Pour des valeurs de f plus élevées, l'exposant de N_f diminue en valeur absolue puis change de signe ce qui traduit la transition vers le régime d'ondes γ_1 (Liu et Gollub (1994), Nosoko et Miyara (2004)).

Il existe également des corrélations pour les ondes naturelles. Grâce à une analyse asymptotique Orr-Sommerfeld, Anshus (1972) propose :

$$N_c = 1.04 R^{2/3} + \alpha \Gamma^{2/11} \tag{2.25}$$

α est une constante. La valeur de la longueur d'onde utilisée dans les équations est la plus amplifiée linéairement. Le second terme est souvent négligeable vis-à-vis du premier ce qui donne un exposant pour R assez proche de celui de l'équation (2.24). L'expérience de Njifenju et al. (2013) se situe dans un cadre faiblement incliné ($\beta = 5 - 30°$) et sans forçage. Ces derniers partent de l'équation (2.25) et négligent l'influence du nombre de Kapitza. L'angle d'inclinaison est pris en compte d'une part dans l'échelle de vitesse : $N_c = N_{c,\beta} = \frac{c}{(\nu g \sin\beta)^{1/3}}$. D'autre part, le nombre de Reynolds R est normalisé par la valeur critique au seuil d'instabilité $R_c = \frac{5}{6}\cot\beta$. Leur corrélation s'écrit ainsi :

$$N_{c,\beta} = 1.17 R^{2/3} (\cot\beta)^{-2/3} \tag{2.26}$$

Un autre point de vue couramment adopté constitue les corrélations vitesse-amplitude. En configuration verticale, la relation est linéaire lorsque $\delta < 1$: c'est le régime « drag-gravity » (Kalliadasis et al. (2012)). Cette loi a été vérifiée numériquement par Meza et Balakotaiah (2008) par le biais de simulations spatio-temporelles. Dans le cas faiblement incliné, Liu et Gollub (1994) ont constaté expérimentalement que la relation reste linéaire à des valeurs du nombre de Reynolds de l'ordre de 30 ($\delta \sim 15$). Cependant, les données à différents nombres de Reynolds ne se regroupent pas sur une courbe maîtresse. Ces résultats semblent indiquer que l'adimensionnement visco-gravitaire n'est pas approprié. La bonne échelle de longueur à utiliser serait plutôt l'épaisseur du substrat h_s (épaisseur de film résiduelle loin des ondes).

Les études expérimentales existantes dans le domaine ne définissent pas toutes h_s de la même manière. Dans certains cas, il s'agit de l'épaisseur minimale du film liquide (Tihon et al. (2006)). Dans d'autres cas, h_s est estimée comme l'épaisseur moyenne du film en avant de l'onde principale (Leontidis et al. (2010)). Chu et Dukler (1974), quant à eux, utilisent la théorie du drainage développée par Landau-Levich-Derjaguin. Le point de vue qui semble le plus satisfaisant est celui de Chasseur (2011). L'épaisseur du substrat h_s est calculée en résolvant l'équation polynomiale de degré 3 suivante :

$$\frac{h_s^3}{3} = c h_s + q_0 \tag{2.27}$$

Cela revient à appliquer la loi de Nusselt pour le substrat. La constante q_0 (débit sous l'onde) peut être calculée en utilisant l'identité suivante : $\langle q \rangle = \frac{1}{3} = c\langle h \rangle + q_0$. La mesure de $\langle h \rangle$ (moyenne temporelle de l'épaisseur) est ainsi nécessaire.

Chasseur (2011) réalise des simulations numériques directes en configuration verticale grâce au logiciel Gerris (domaine fini périodique). Il adimensionne la vitesse par la vitesse du substrat c_s et considère le nombre de Reynolds δ_s basé non pas sur l'épaisseur de Nusselt mais celle du substrat. Ses résultats retombent sur la courbe de vitesse asymptotique prédite par les modèles (domaine infini). Notre objectif est d'appliquer cette idée à nos résultats expérimentaux en configuration faiblement inclinée. Dans ce cas, la vitesse

asymptotique ne sature pas à grand δ car le nombre de Froude $Fr^2 = \dfrac{3R}{\cot\beta}$ n'est pas constant (Chakraborty et al. (2014)). L'influence de la période apparaît être un aspect crucial du problème et sera étudiée en détail. Une des difficultés est la grande sensibilité de la procédure vis-à-vis des valeurs calculées de h_s ($c_s \sim h_s^2$, $\delta_s \sim h_s^3$). Certains phénomènes annexes peuvent rendre difficile la comparaison avec la théorie. La courbure globale des fronts (Leontidis et al. (2010), Georgantaki et al. (2011)) en est un car les profils d'épaisseur dépendent alors de la position du point de mesure selon la largeur.

Corrélation empirique pour le cas incliné

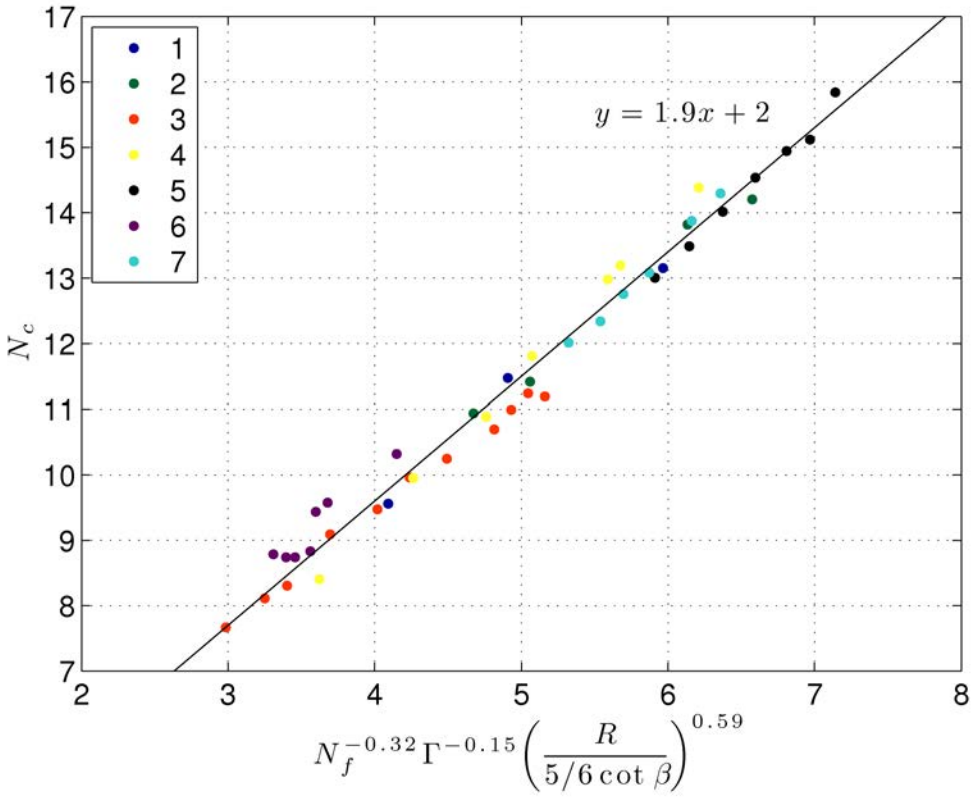


FIGURE 2.4 – *Corrélation empirique pour la vitesse. Les numéros dans la légende se réfèrent aux différentes séries de mesure répertoriées dans la table 2.1.* $N_c = \dfrac{c}{(\nu g)^{1/3}}$ *et* $N_f = \dfrac{f}{(\nu^{-1}g^2)^{1/3}}$ *sont respectivement les vitesses et fréquences adimensionnées.*

L'objectif est d'établir une corrélation pour la vitesse la plus pertinente possible sur la gamme de paramètres accessible au montage. La vitesse c dépend à priori de 7 paramètres : l'angle d'inclinaison β, le débit par unité de largeur q, la fréquence de forçage f, l'accélération de la gravité g, la densité du fluide ρ, sa viscosité ν et sa tension de surface σ. D'après le théorème de Vaschy-Buckingham, la vitesse adimensionnée $N_c = c/c_0$ dépend donc de 4 paramètres sans dimension (le nombre de dimensions indépendantes est de 3 : longueur, temps, masse). La principale question est de savoir comment prendre en compte l'angle d'inclinaison β. Nos hypothèses de départ sont les suivantes : β n'intervient ni dans les échelles de vitesse c_0 et de fréquence ni dans la définition du nombre de

Kapitza $\Gamma = \sigma/(\rho g^{1/3}\nu^{4/3})$; le nombre de Reynolds R est normalisé par la valeur critique au seuil d'instabilité $R_c = 5/6\,\cot\beta$. La relation cherchée s'écrit ainsi sous la forme, avec $N_c = c/(\nu g)^{1/3}$ et $N_f = f/(\nu^{-1}g^2)^{1/3}$ la vitesse et la fréquence adimensionnée :

$$N_c \propto N_f^{\alpha_1}\ \Gamma^{\alpha_2}\ \left(\frac{R}{5/6\cot\beta}\right)^{\alpha_3} \tag{2.28}$$

Les coefficients α_1, α_2, α_3 sont déterminés de la manière suivante. Pour α_1, les propriétés physiques du fluide, R et β sont fixés et seule la fréquence varie (série de mesure $n\,^\circ 7$, table 2.1). Pour α_2, la viscosité varie par le biais de la concentration en glycérine, β est fixé mais il faut adapter la fréquence et le débit pour conserver N_f et R constants (série de mesure $n\,^\circ 5$). En toute rigueur, la tension de surface dépend très légèrement de la concentration en glycérine mais nous n'en avons pas tenu compte. Enfin pour α_3, R varie à β et f fixés (série de mesure $n\,^\circ 4$a). Les graphes correspondants sont donnés dans l'Annexe A. Les valeurs obtenues sont : $\alpha_1 = -0.32$, $\alpha_2 = -0.15$, $\alpha_3 = 0.59$. L'ensemble des mesures de vitesse de la table 2.1 est confronté à la loi ainsi déterminée (figure 2.4) : les mesures se regroupent bien sur une courbe maîtresse. Les exposants α_1 et α_2 sont proches de ceux obtenus par Nosoko et al. (1996) en configuration verticale. Comme ces derniers, nous n'avons pas fait varier la tension de surface mais la viscosité, en revanche, balaye une plus large gamme. L'idée introduite par Njifenju et al. (2013) pour la dépendance vis-à-vis de l'angle d'inclinaison semble bien fonctionner. Toutefois, nous avons noté une légère variation du coefficient α_3 avec β. La valeur donnée correspond à la série de mesure $n\,^\circ 4$a pour laquelle $\beta = 13^\circ$: il s'agit du milieu de la gamme d'angles d'inclinaison accessible au montage. Pour $\beta = 5^\circ$ par exemple (série de mesure $n\,^\circ 3$), la régression linéaire donne $\alpha_3 = 0.42$. Enfin, l'hypothèse consistant à ne pas prendre en compte β dans N_c semble raisonnable au vu des résultats ce qui est en contradiction avec Njifenju et al. (2013).

Adimensionnement par l'épaisseur du substrat

Nous allons étudier à présent un autre moyen de comprendre et interpréter les mesures expérimentales de vitesse. Comme discuté précédemment, il s'agit d'utiliser l'adimensionnement du substrat. Pour cela, nous avons réalisé une série de 18 mesures à $\beta = 8^\circ$, $17.8 < R < 62.3$, $2.8\,Hz < f < 3.3\,Hz$ en relevant la vitesse des ondes (caméra linéaire) et l'épaisseur moyenne du film grâce à la technique CCI. Le fluide utilisé est l'eau ($T = 19.7^\circ$C). Les données brutes sont reportées dans l'Annexe B (table 2.4). L'épaisseur du substrat h_s est calculée en résolvant l'équation (2.27) (l'épaisseur moyenne permet de remonter au débit sous l'onde q_0). La vitesse des ondes c est ensuite adimensionnée en utilisant l'échelle du substrat $c_s = 3\langle u_s\rangle$, avec $\langle u_s\rangle$ la vitesse moyenne de l'écoulement au sein du substrat (profil de Nusselt). Le nombre de Reynolds réduit est remplacé par δ_s basé non pas sur l'épaisseur de Nusselt mais celle du substrat. Les valeurs obtenues sont comparées avec les résultats numériques du modèle complet, soit en domaine infini (voir Chakraborty et al. (2014) pour le détail de la procédure numérique), soit en domaine fini périodique en utilisant AUTO (figure 2.5).

N	β°	R	f (Hz)	ρ (kg/m^3)	$\nu.10^6$ (m^2/s)	c (cm/s)
1	8.3	37	4	998.3	1.01	20.5
		51				24.6
		71				28.2
2	11	38	4.5	997.6	0.935	22.9
		46	5			23.9
		64		997.4	0.913	28.7
		72				29.5
3	5	32	3	996.9	0.876	15.7
		37				16.6
		40				17
		46				18.6
		53				19.4
		58				20.4
		64				21
		72				21.9
		75				22.5
		78				23
		81				22.9
4a	13	22	5	997.6	0.935	17.6
		29			0.931	20.8
		35		997.5	0.924	22.7
		39			0.922	24.6
		46		997.4	0.917	27
		55			0.915	29.9
4b		40		1074.6	2.32	37.4

N	β°	R	f (Hz)	ρ (kg/m^3)	$\nu.10^6$ (m^2/s)	c (cm/s)
5	17.8	43	7	999.2	1.01	27.9
			6.6	1016.1	1.21	30.8
			6.2	1030.1	1.42	33.7
			5.9	1047	1.68	37
			5.6	1059	1.94	39.9
			5.4	1066	2.17	41.9
			5.2	1075.6	2.45	45.7
6	5.5	39	3.9	998.4	1.02	18.9
			3.6			18.8
			3.4			18.8
			3.1			19
			3			20.3
			2.8			20.6
		54	3.5			22.6
7	15.5	41	3.9	998.3	1.01	30.7
			4.3			29.8
			5			28.1
			5.5			27.4
			6			26.5
			6.8			25.8

TABLE 2.1 – *Données brutes utilisées dans la figure 2.4. Les séries de mesure sont numérotées de $N = 1$ à $N = 7$. Les « blancs » signifient que la valeur est identique à celle du dessus.*

Le graphique de la figure 2.5 est riche d'enseignements. Tout d'abord, nous constatons que le nombre de Reynolds réduit du substrat δ_s reste faible même pour des valeurs de R de l'ordre de 60. En effet, les valeurs d'épaisseur du substrat calculées varient entre $0.6\,h_N$ et $0.75\,h_N$ (h_N est l'épaisseur de Nusselt). Or $\delta_s \sim R_s^{11/9}$ et $R_s = R(h_s/h_N)^3$ d'où $\delta_s \sim \delta(h_s/h_N)^{33/9}$. Le facteur $(h_s/h_{Nu})^{33/9}$ varie entre 0.15 et 0.35 ce qui explique par conséquent la remarque précédente. Par ailleurs, la courbe de vitesse asymptotique obtenue en domaine infini ne sature pas à grand δ_s. Comme évoqué précédemment, ceci est dû au fait que le nombre de Froude du substrat n'est pas constant contrairement au cas vertical (Chakraborty et al. (2014)). Les valeurs numériques obtenues avec AUTO pour $f = 1.5\,Hz$ sont proches de la courbe précédente, surtout à grand δ_s. Dans ce cas à basse fréquence, les ondes sont bien séparées les unes des autres : l'approche est pertinente (Chasseur (2011)). Toutefois, l'écart à petit δ_s nous laisse penser que la longueur d'onde λ_x doit être également considérée. En effet, ces calculs sont réalisés à f fixée mais λ_x varie et augmente avec le nombre de Reynolds. Les valeurs obtenues pour $f = 2.5\,Hz$ sont quasiment identiques aux précédentes ; la longueur d'onde, pourtant, est plus faible. La condition de validité d'ondes bien séparées ne peut donc pas s'exprimer seulement en fonction de λ_x ou f. Elle dépend aussi probablement du nombre d'ondes capillaires (celui-ci croît lorsque f diminue). Enfin, les points pour $f = 3.0\,Hz$ semblent suivre la même courbe en moyenne mais l'écart-type associé augmente de manière importante.

Ce résultat s'explique si l'on trace les variations de h_s avec R pour les différentes valeurs de fréquences considérées (figure 2.6). Le calcul de h_s avec AUTO s'effectue en utilisant une condition intégrale supplémentaire (l'équation (2.27) admet 3 solutions données par les formules de Cardan dont une seule a un sens physique). Pour $f = 1.5\,Hz$, la courbe $h_s(R)$ est « lisse ». Lorsque f augmente, des pincements ($f = 2.5\,Hz$) puis des boucles ($f = 3.0\,Hz$) apparaissent ce qui traduit le passage d'une solution de la branche d'onde principale γ_2 à une solution hybride γ_2'. Or, l'adimensionnement du substrat est très sensible aux valeurs de h_s ($c_s \sim h_s^2$, $\delta_s \sim h_s^3$) : ceci explique cette augmentation importante de l'écart-type.

Les mesures expérimentales sont affectées par le même phénomène mais apparaissent en plus décalées verticalement. Nous avons cherché à comprendre l'origine de cet écart en comparant les mesures brutes de vitesse et d'épaisseur moyenne avec les résultats numériques du modèle complet (table 2.4). L'accord pour la vitesse est excellent ($< 1\%$). Les mesures CCI d'épaisseur moyenne, en revanche, souffrent d'une erreur systématique de 1 à 2 % vis-à-vis du modèle. Ceci engendre une erreur d'environ 5% sur h_s, 10% sur c_s et 15% sur δ_s ! Comme discuté dans le chapitre 1, cet écart systématique du système CCI pourrait être dû au fait que les mesures sont réalisées à travers une plaque de verre ce qui induit des réfractions supplémentaires non prises en compte. La courbure globale des fronts due aux effets de bords pourrait constituer également une explication valable.

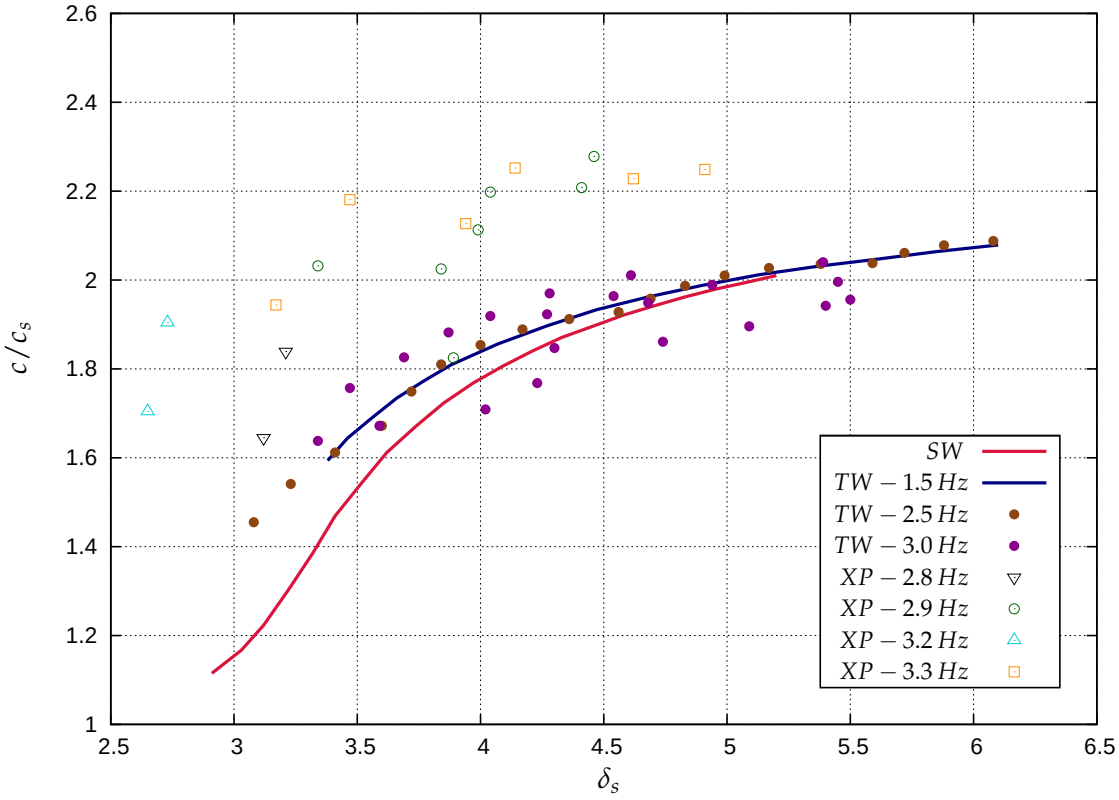


FIGURE 2.5 – *Vitesse adimensionnée par celle du substrat c/c_s en fonction du nombre de Reynolds réduit du substrat δ_s. L'angle d'inclinaison est $\beta = 8°$, le fluide utilisé est l'eau. La ligne SW (« Solitary Wave ») correspond à la solution asymptotique du modèle complet en domaine infini. Les lignes ou symboles TW (« Traveling Wave ») se réfèrent aux solutions du modèle complet calculées avec AUTO en domaine périodique. Les symboles XP sont les mesures expérimentales. Les données brutes sont reportées dans l'Annexe B (table 2.4).*

2.3 Ondes naturelles

Nous passons maintenant au cas des ondes naturelles, c'est-à-dire sans forçage harmonique en entrée. La séquence de transitions observée est la suivante : formation d'ondes linéaires en entrée puis évolution non-linéaire vers la branche γ_1 suivie d'une instabilité secondaire sous-harmonique ($\nu = 0.5$) ou quasi-périodique ($\nu \ll 1$) conduisant à la branche de solutions γ_2. Que se passe t-il ensuite ? Le système atteint-il un régime établi ? Notre objectif est d'apporter des éléments de réponse à ces questions en utilisant les outils numériques présentés dans ce chapitre. L'angle d'inclinaison sera fixé à $\beta = 90°$ pour simplifier l'analyse. L'expérience est ici laissée de côté car la longueur de notre dispositif est trop faible pour permettre une comparaison. Après un bref état de l'art du domaine, nous caractériserons les ondes optimales courtes déjà introduites. Lorsque δ augmente, nous verrons ensuite qu'une autre catégorie d'ondes optimales dites longues apparaît.

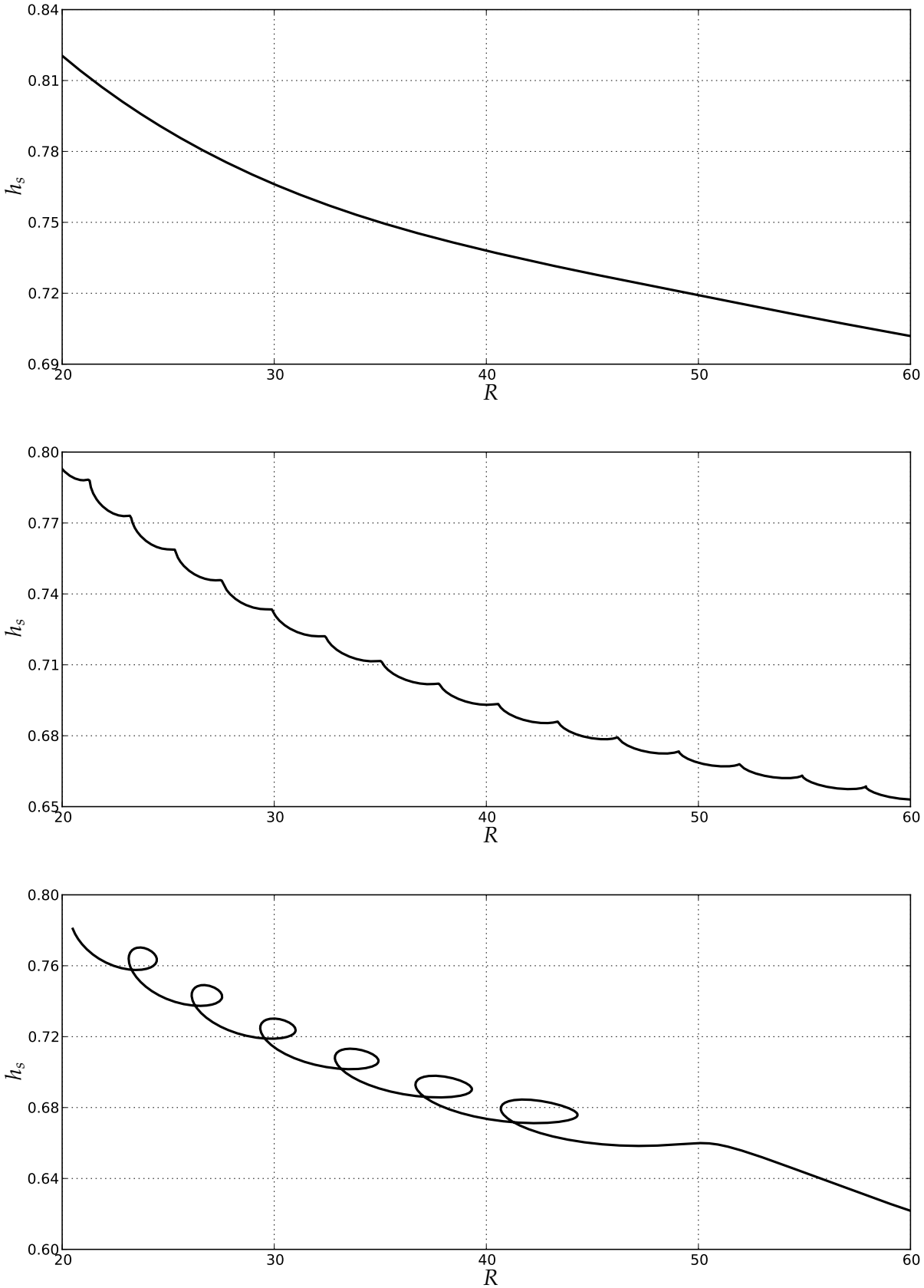


FIGURE 2.6 – *Diagrammes de bifurcation obtenus avec AUTO (modèle complet) : épaisseur du substrat adimensionnée h_s en fonction du nombre de Reynolds R. L'angle d'inclinaison est $\beta = 8\,^\circ$, le fluide utilisé est l'eau. La fréquence est fixée et vaut, de haut en bas,* 1.5 *Hz*, 2.5 *Hz*, 3 *Hz*.

2.3.1 Etat de l'art

Dans ce problème, il est important de garder en tête que la stabilité linéaire est toujours une condition nécessaire (mais pas suffisante) à l'existence des solutions. La longueur d'onde, par exemple, ne peut pas tendre vers l'infini : les solutions associées sont instables en raison des longues portions de film plat entre les ondes. En revanche, la question de l'existence d'une longueur d'onde privilégiée loin de l'entrée n'est pas triviale. En effet, l'interaction entre deux ondes solitaires n'est pas toujours attractive ou répulsive : cela dépend en particulier de la différence d'amplitude entre celles-ci (Malamataris et al. (2002), Vlachogiannis et Bontozoglou (2001)).

Lorsque δ est petit, cette question a fait l'objet de plusieurs études dans le cadre de la théorie des états liés (« bound states »). Kawahara et Toh (1988) en sont les fondateurs et ont utilisé, pour cela, l'équation modèle suivante :

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_{xx} u + \delta\partial_{xxx} u + \partial_{xxxx} u = 0 \tag{2.29}$$

Celle-ci peut être obtenue à partir d'un développement faiblement non linéaire de l'équation de Benney d'ordre 2. L'idée a ensuite été reprise par Elphick et al. (1991) (équation de Benney) puis Chang et al. (1995) (modèle de Kapitza-Shkadov), Pradas et al. (2011) (modèle Ruyer-Quil-Manneville) et Pradas et al. (2013) (simulation directe des équations de Navier-Stokes). Les solutions d'ondes stationnaires des équations sont supposées en interaction faible. Cette théorie prédit des longueurs d'onde préférentielles en raison des forces d'attraction et de répulsion générées par les ondes capillaires. Lorsque le dos d'une onde aval se connecte au niveau d'un maximum capillaire d'une onde amont, la force est répulsive due à la différence de pression capillaire $\Delta p_c \sim \sigma\partial_{xx} h$. Pradas et al. (2011) ont vérifié que ces distances privilégiées sont bien celles choisies par le système lorsque les équations de la dynamique sont simulées en temps. Ces distances correspondent aux bandes de stabilité des ondes γ_2 décrites précédemment. La condition nécessaire de stabilité est donc bien vérifiée.

Une autre vision complémentaire du problème constitue l'approche énergétique. Dans le cas du film plat, l'équilibre s'effectue simplement entre gravité et viscosité. Le profil de Nusselt peut être alors obtenu grâce à l'argument thermodynamique qui consiste à minimiser la fonction dissipation visqueuse $\Phi_v = \mu \int_0^h (\partial_y u)^2 dy$ (Kapitza (1948)). Dans le cas du film ondulé, la situation est plus complexe. L'énergie potentielle de gravité E_p est convertie à la fois en énergie cinétique E_c, énergie de surface E_s et dissipation visqueuse Φ_v (Islam et al. (2007), Islam et Miyara (2010)). Cependant, E_c et E_s varient peu lorsque le film est faiblement ondulé ce qui conduit Kapitza (1948) à formuler l'hypothèse suivante : l'onde la plus stable reste donnée par le minimum de $\Phi_v = \mu \int_0^h \langle (\partial_y u_{Nu})^2 \rangle \, dy \sim \langle h^3 \rangle$ (u_{Nu} est le profil semi-parabolique de Nusselt et $\langle \, . \, \rangle$ désigne la valeur moyenne sur une longueur d'onde). Chang et al. (1993) reprennent cette idée en utilisant la fonction

dissipation plus complète $\Phi_v = \mu \int_0^h \langle (\partial_y u)^2 + (\partial_x v)^2 \rangle dy$. Ces derniers remarquent que les distances privilégiées associées aux états liés correspondent aux minima locaux de Φ_v ce qui valide cette approche énergétique à petit δ.

Lorsque δ augmente (typiquement $\delta > 1.5$), les minima locaux de Φ_v ne sont plus en accord avec la stabilité linéaire. Pradas et al. (2011) observent alors que les distances entre les ondes ne sont plus localisées autour des états liés mais prennent des valeurs beaucoup plus disparates. Cependant, il existe bien un espacement privilégié même si la variance est importante (cela n'est pas mentionné par les auteurs de l'article). Cet aspect apparaît dans les travaux de Chang et al. (2002). Ces derniers présentent des simulations en temps du modèle de Kapitza-Shkadov pour $2.25 < \delta < 18$. Leur explication de l'existence d'une longueur d'onde privilégiée indépendante du bruit en entrée est la suivante. La saturation non linéaire des ondes monochromatiques s'accompagne de l'excitation de certains modes basse fréquence. Cela crée alors des solitons hors-équilibre d'amplitude anormalement élevée par l'intermédiaire de l'instabilité secondaire quasi-périodique des ondes γ_1. Ces ondes solitaires rapides capturent toutes les autres solutions d'ondes à l'équilibre et sont les seules à persister suffisamment loin de l'entrée. Cette explication, bien qu'intéressante, ne permet pas de comprendre l'origine physique du phénomène.

Comme précisé plus haut, la longueur d'onde privilégiée est associée à une variance importante : $\mathcal{V}(\lambda) > 50\,\%$ d'après Chang et al. (1996). Il n'en est pas de même pour la vitesse : $\mathcal{V}(c) \sim 10\,\%$. En effet, celle-ci sature dans le régime « drag-inertia ». La conservation du débit impose, qu'en tout point, l'espacement moyen entre les ondes est celui du train d'ondes périodiques associé à cette valeur moyenne de vitesse. La dynamique des ondes, en moyenne, est la même que celle du train d'ondes périodiques correspondant (mais l'espacement entre elles n'est pas constant !). Cette propriété justifie le fait de s'intéresser aux quantités moyennes associées à la branche de solutions d'ondes stationnaires. En particulier, il faudrait trouver une autre quantité qui permette de prédire la longueur d'onde priviligiée à grand δ (la dissipation visqueuse n'est plus pertinente).

Le problème qui nous occupe est très similaire à celui de la sélection des « roll-waves » étudié notamment par Chang et al. (2000) et Balmforth et Mandre (2004). Dans ce cas, le film liquide est turbulent : le profil de vitesse est uniforme et la tension de surface ne joue pas. Par ailleurs, les équations associées (modèle Saint-Venant) séparent l'effet du frottement à la paroi (terme en $-C_f u^2/h$ avec C_f le coefficient de Chézy empirique) de la dissipation interne. Cette dernière est modélisée de manière très diverse selon les études et sert principalement à régulariser la solution au niveau du front. Le terme de friction, en revanche, est pertinent et contrôle le processus de sélection des structures. L'analogie avec la cascade inverse d'énergie en turbulence 2D est intéressante (Kliakhandler (2000)).

Enfin, nous terminons par le concept d'ondes optimales introduit par Trifonov (2012). Il s'agit ici des minima locaux de l'épaisseur moyenne le long de la branche de solutions d'ondes stationnaires. Lorsque δ est petit, nous avons vu que la dissipation visqueuse pouvait s'écrire : $\Phi_v \sim \langle h^3 \rangle$. Or, si le profil de vitesse est proche de celui de Nusselt :

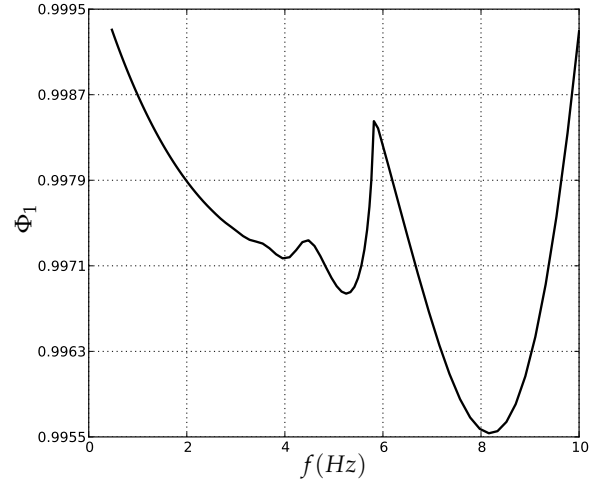
$h^3/3 = q = ch + q_0$. D'où $\Phi_v \sim \langle h \rangle$. Les ondes optimales dites courtes correspondent donc naturellement aux états liés. Trifonov (2014) distingue également une deuxième catégorie d'ondes optimales dites longues : celle-ci est associée à un minimum global de l'épaisseur moyenne à grande longueur d'onde. Ces ondes optimales longues sont-elles choisies par le système ? Comment faire le lien avec l'approche énergétique, sachant que dans ce régime à grand δ la dissipation visqueuse n'est plus pertinente ? Ces aspects seront discutés en détail dans la suite de l'étude.

2.3.2 Ondes optimales courtes

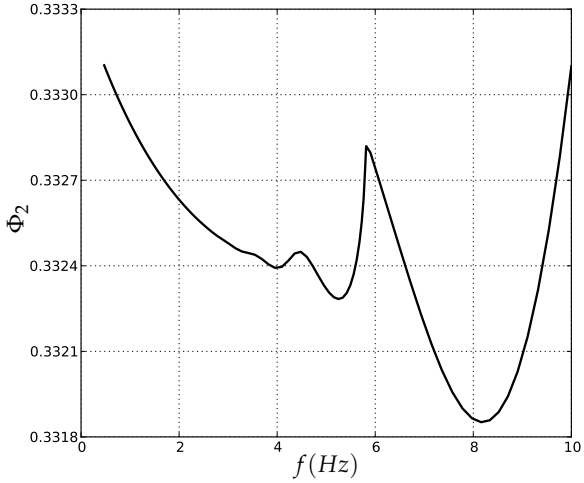
Tout d'abord, nous allons vérifier et étendre les résultats évoqués sur les ondes optimales courtes ($\delta < 1.5$). Considérons le cas $\Gamma = 2000$, $\delta = 1$ (configuration verticale). La figure 2.7 compare les variations de différentes fonctions énergétiques Φ_i le long de la branche d'onde principale γ_2. Ces résultats ont été obtenus avec AUTO grâce à une condition intégrale supplémentaire. La fonction Φ_1 est l'épaisseur moyenne utilisée par Trifonov (2012). La fonction Φ_2 fera l'objet d'une attention particulière dans la suite de l'étude et représente le frottement pariétal : $\Phi_2 = \langle (\partial_y u)_{y=0} \rangle \sim \langle q/h^2 \rangle$. En considérant $q \sim h^3/3$, nous obtenons : $\Phi_2 = \langle q/h^2 \rangle \sim \langle h/3 \rangle$. Il n'est donc pas étonnant de constater que Φ_1 et Φ_2 présentent des variations identiques. La fonction $\Phi_3 = \mu \int_0^h \langle (\partial_y u)^2 \rangle \sim \langle h^3 \rangle$ est celle définie par Kapitza (1948), $\Phi_4 = \langle q^2/h^3 \rangle$ est une variante obtenue en relaxant l'hypothèse $q = h^3/3$ dans l'expression du profil de vitesse de Nusselt. Enfin, $\Phi_5 = \langle \int_0^h [(\partial_y u)^2 + (\partial_x v)^2] dy \rangle$ est l'expression considérée par Chang et al. (1993) et $\Phi_6 = \langle \int_0^h 2[(\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2] + [\partial_y u + \partial_x v]^2 dy \rangle$ représente la fonction dissipation de Rayleigh définie dans un cadre général (voir Bird et al. (1960) par exemple).

Les courbes de la figure 2.7 montrent des variations très similaires mis à part la fonction Φ_5 (Chang et al. (1993)) qui présente quelques différences. Cela est dû à la valeur de δ, somme toute pas si petite (d'autres calculs à $\delta = 0.6$ montrent un bon acccord de cette fonction vis-à-vis des autres). Certaines courbes apparaissent inversées. Ce phénomène n'est pas trivial et dépend probablement du couplage entre les non linéarités impliquées et la propriété de conservation du débit moyen. Les courbes possèdent trois minima locaux à $f = 4.0\,Hz$, $5.2\,Hz$ et $8.2\,Hz$: il s'agit des ondes optimales courtes. Comme discuté précédemment, les longueurs d'onde de ces états liés sont régulièrement espacées et leur nombre à δ fixé dépend de Γ. La figure 2.8 présente les profils d'ondes optimales associés : le nombre d'oscillations capillaires est soit de 0, 1 ou 2.

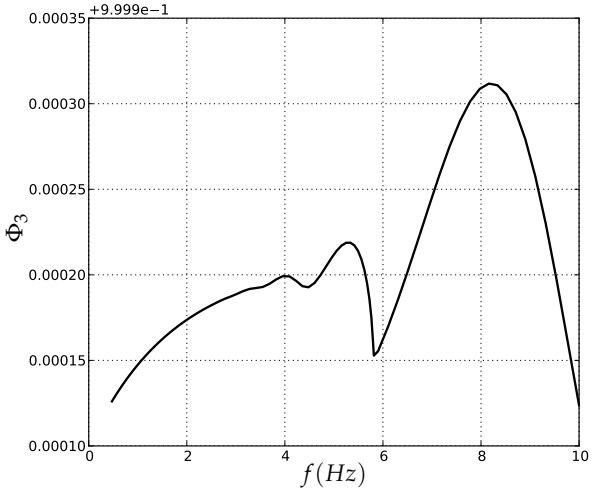
La question essentielle est de vérifier si ces ondes optimales sont effectivement sélectionnées par le système et, si oui, laquelle d'entre-elles. Nous avons réalisé des simulations en temps du modèle optimisé pour un domaine périodique et de longueur importante (30000 points en espace). La figure 2.9 montre un profil d'épaisseur obtenu à la fin du calcul. Dans certaines parties du domaine, nous avons observé des groupes d'ondes synchronisées entre elles. C'est un peu comme si le système possédait deux états séparés laminaire (état lié) et turbulent (état désordonné). L'onde sélectionnée est clairement l'onde



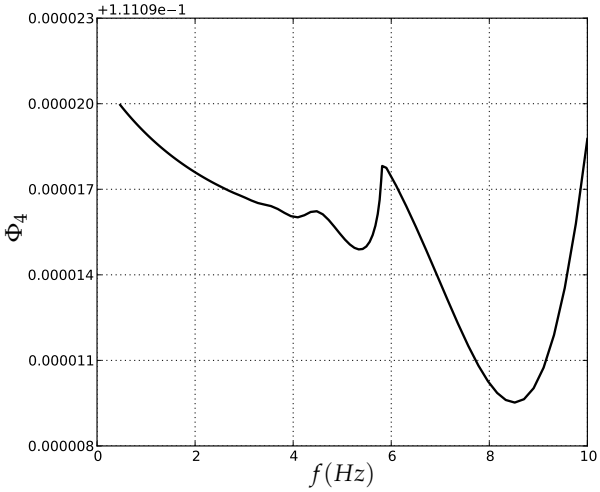
(a) $\Phi_1 = \langle h \rangle$



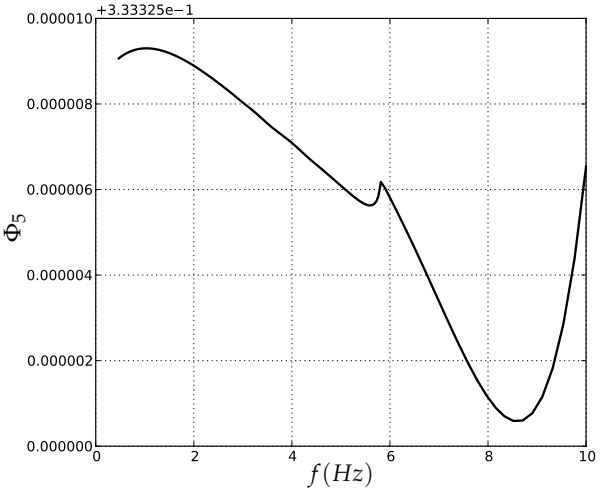
(b) $\Phi_2 = \langle \frac{q}{h^2} \rangle$



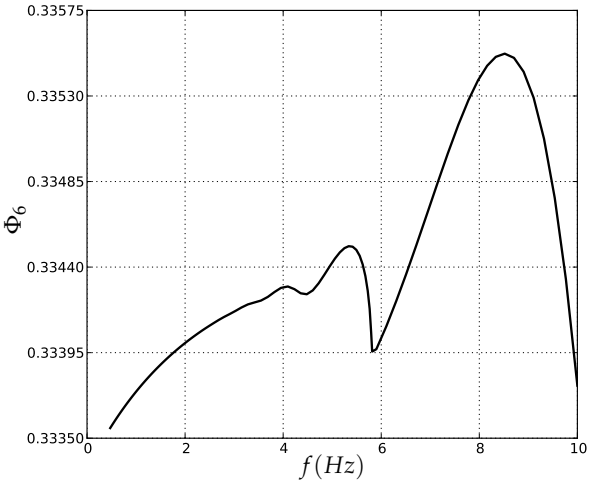
(c) $\Phi_3 = \langle h^3 \rangle$



(d) $\Phi_4 = \langle \frac{q^2}{h^3} \rangle$



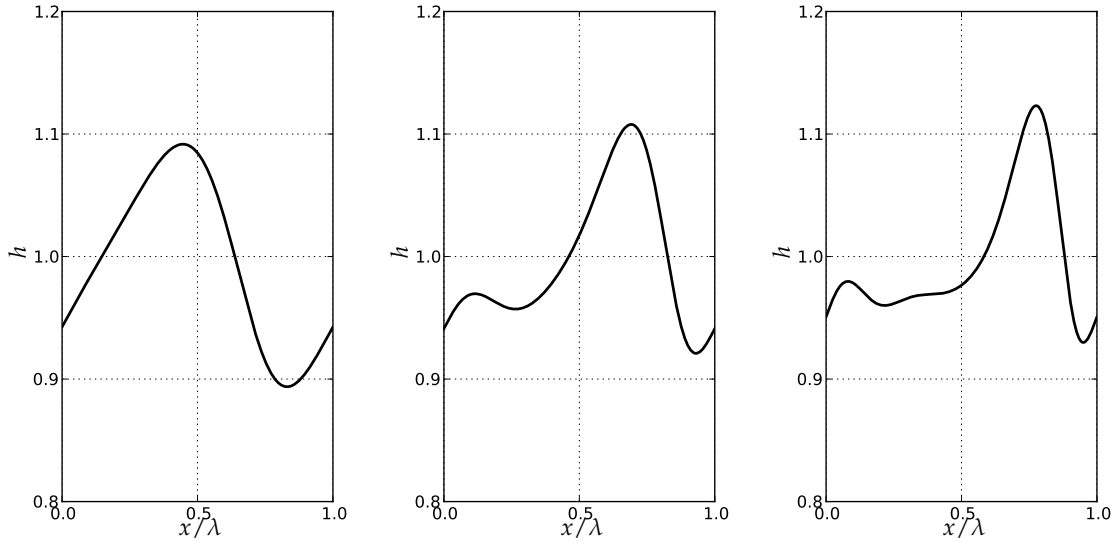
(e) Φ_5 *: Chang et al. (1993)*



(f) Φ_6 *: Bird et al. (1960)*

FIGURE 2.7 – *Comparaison des différentes fonctions énergétiques Φ_i pour les ondes optimales courtes. Les paramètres associés sont $\Gamma = 2000$, $\delta = 1$. Les graphes représentent les variations de Φ_i avec la fréquence le long de la branche d'onde principale γ_2.*

optimale de fréquence intermédiaire ($f = 5.2\,Hz$). Ce résultat peut paraître surprenant car l'onde associée ne correspond pas au minimum le plus prononcé sur les diagrammes énergétiques. Cet effet a été observé également par Pradas et al. (2011) et doit trouver son origine dans les propriétés de stabilité linéaire associées à ces solutions (l'effet est antagoniste car les solutions sont plus instables lorsque f augmente).



(a) $f = 8.2\,Hz$ (b) $f = 5.2\,Hz$ (c) $f = 4.0\,Hz$

FIGURE 2.8 – *Profils d'ondes optimales (variables adimensionnées) calculés avec AUTO pour* $\Gamma = 2000$, $\delta = 1$. *Les valeurs de fréquences associées correspondent aux minima locaux de l'épaisseur moyenne (figure 2.7).*

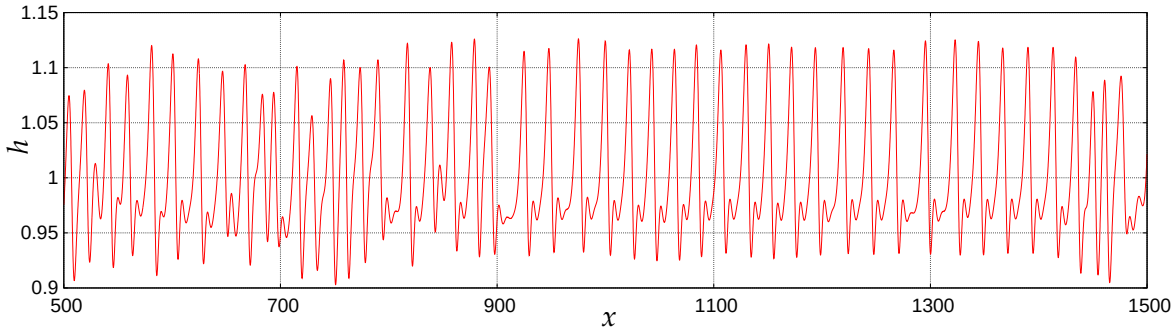


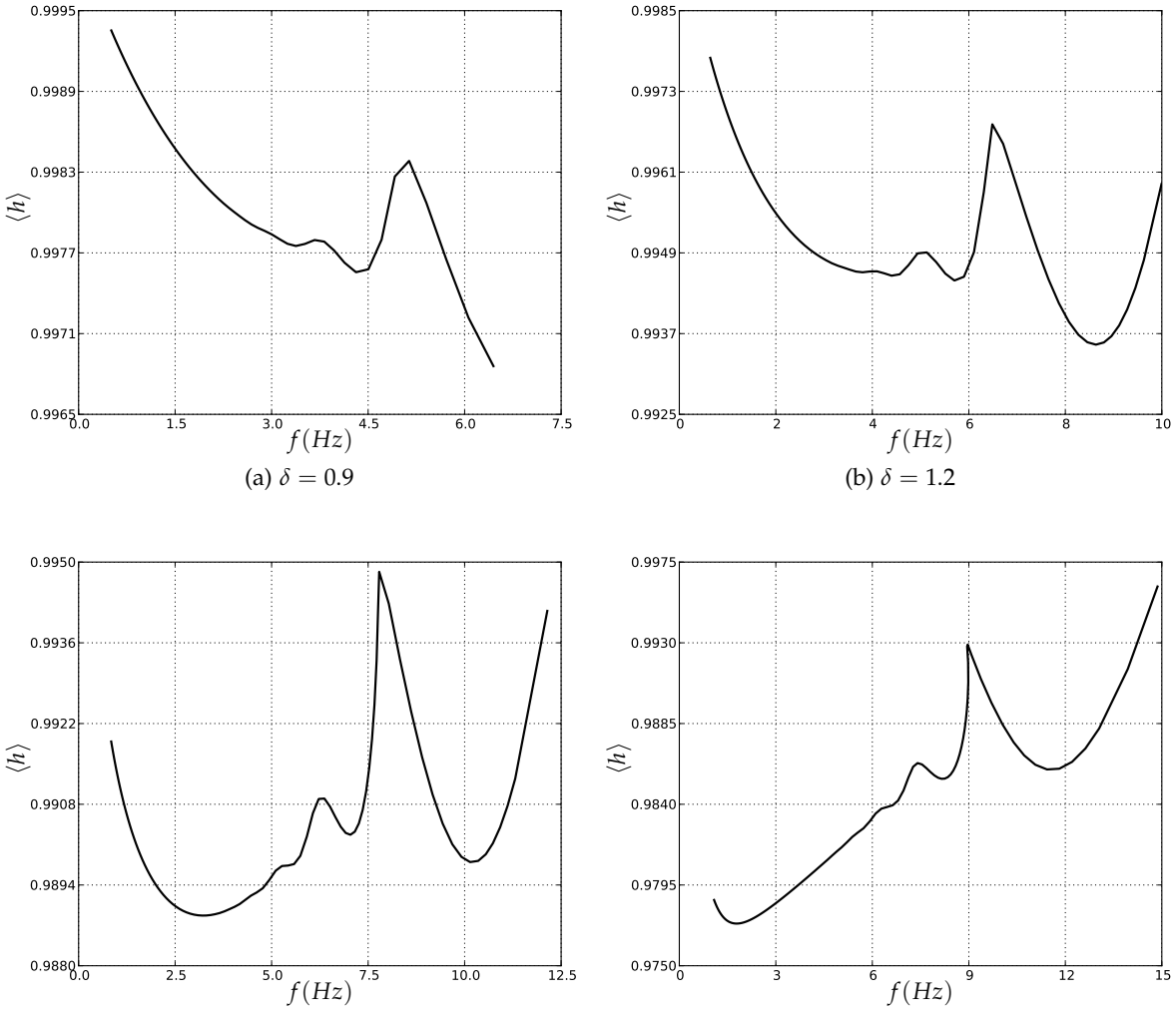
FIGURE 2.9 – *Profil d'épaisseur en espace (variables adimensionnées) issu des simulations temporelles en domaine périodique. Les paramètres associés sont* $\Gamma = 2000$, $\delta = 1$.

2.3.3 Ondes optimales longues

Nous passons maintenant au cas des ondes optimales longues ($\delta > 1.5$). L'onde sélectionnée n'est plus alors un état lié mais appartient à une large bande de stabilité prédite par l'analyse de Floquet à basse fréquence (grande longueur d'onde). Nous allons montrer que ceci s'accompagne de l'apparition d'un nouveau minimum d'épaisseur moyenne, étudier les variations des fonctions énergétiques précédentes, tracer les profils d'ondes optimales et comparer ces résultats avec les simulations en temps du modèle.

Apparition d'un nouveau minimum

Le concept d'onde optimale longue a été défini par Trifonov (2014) et correspond à un minimum d'épaisseur moyenne à grande période. Le nombre de Reynolds réduit minimal utilisé dans son étude vaut $\delta = 1.24$ ce qui ne permet pas d'observer l'apparition des ondes optimales longues lorsque δ augmente. Pourtant, c'est bien ce qui se produit. La figure 2.10 présente plusieurs courbes d'épaisseur moyenne en fonction de la fréquence obtenues avec AUTO à différentes valeurs de δ : 0.9, 1.2, 1.5 et 1.8. Nous observons clairement l'apparition d'un nouveau minimum à basse fréquence à partir de $\delta = 1.5$. Les minima locaux associés aux états liés restent présents à haute fréquence. Nous verrons plus en détail dans la suite comment varie la longueur d'onde associée à ce minimum en fonction de δ et Γ. La valeur limite de 1.5 correspond au seuil de transition entre les régimes « drag-gravity » et « drag-inertia » ce qui n'est probablement pas un hasard.



(a) $\delta = 0.9$ (b) $\delta = 1.2$

(c) $\delta = 1.5$ (d) $\delta = 1.8$

FIGURE 2.10 – *Epaisseur moyenne en fonction de la fréquence pour différentes valeurs du nombre de Reynolds réduit δ (courbes obtenues avec AUTO). Le nombre de Kapitza est $\Gamma = 500$.*

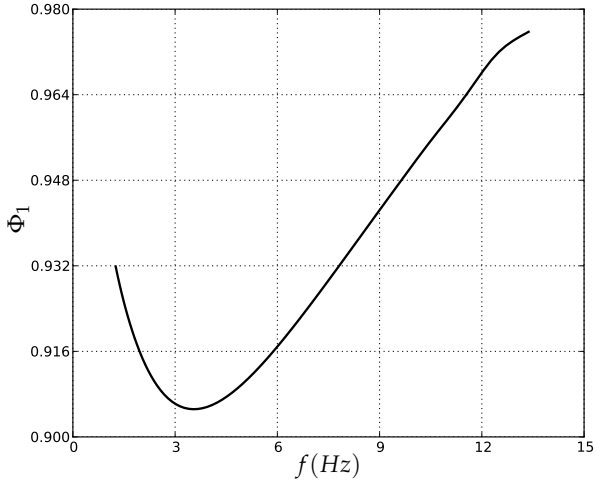
Etude détaillée du cas $\delta = 4.3$, $\Gamma = 20$

Nous avons montré l'apparition d'un nouveau minimum de l'épaisseur moyenne à basse fréquence lorsque $\delta > 1.5$. Qu'en est-il des autres fonctions énergétiques Φ_i étudiées précédemment ? La figure 2.11 compare les variations de celles-ci le long de la branche d'onde principale γ_2. La faible valeur du nombre de Kapitza utilisée ($\Gamma = 20$) explique l'absence des minima locaux associés aux ondes optimales courtes. Nous constatons tout d'abord que les fonctions Φ_1 et Φ_2 sont en très bon accord. En fait, $\langle h \rangle \sim \langle q/h^2 \rangle$ traduit un bilan en moyenne entre la gravité et le frottement à la paroi (cela n'explique pas cependant l'apparition du minimum). Il est d'ailleurs intéressant de constater que cette relation est exacte dans le cas du modèle de Kapitza-Shkadov. Dans le référentiel de l'onde, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit (cas vertical) :

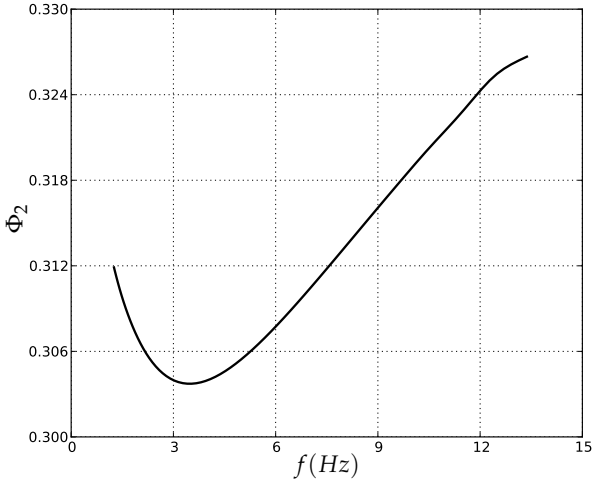
$$-c\frac{dq}{d\tilde{\xi}} + \frac{6}{5}\frac{d}{d\tilde{\xi}}\left(\frac{q^2}{h}\right) - \frac{1}{5\delta}\left(h\frac{d^3h}{d\tilde{\xi}^3} + h - \frac{3q}{h^2}\right) = 0 \tag{2.30}$$

En utilisant l'identité $h\dfrac{d^3h}{d\tilde{\xi}^3} = \dfrac{d}{d\tilde{\xi}}\left(h\dfrac{d^2h}{d\tilde{\xi}^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dh}{d\tilde{\xi}}\right)^2\right)$, nous obtenons bien $\langle h \rangle = \langle 3q/h^2 \rangle$ car $\langle \partial_{\tilde{\xi}}(.) \rangle \equiv 0$. En moyenne, l'advection et les forces d'inertie et de tension de surface s'annulent. Les fonctions Φ_2 et Φ_3 présentent bien un minimum mais les valeurs de fréquence associées sont plus faibles. Nous verrons que celles-ci ne correspondent pas aux résultats des simulations en temps du modèle. Enfin, les fonctions Φ_5 et Φ_6 ne sont clairement plus pertinentes : Φ_5 possède un léger minimum à haute fréquence tandis que Φ_6 est monotone sur l'intervalle de fréquences considéré.

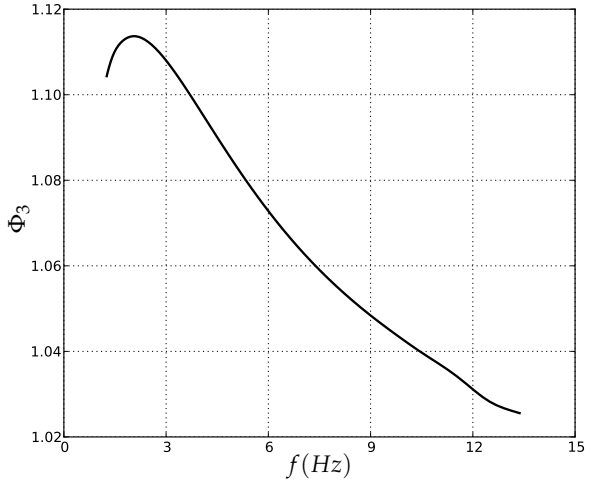
Nous allons maintenant comparer ces résultats à ceux issus de la simulation en temps du modèle optimisé. En toute rigueur, l'analyse issue des fonctions énergétiques aurait donc dû être réalisée avec le modèle optimisé et non simplifié. Nous avons vérifié cependant que l'écart entre les résultats était bien négligeable. Les simulations en temps sont effectuées ici en domaine ouvert. Le nombre de points du domaine spatial est $N = 40000$, les pas en espace et en temps du calcul valent $dx = 0.15$, $dt = 0.01$ (variables adimensionnées). En entrée, un bruit blanc d'amplitude $A_{br} = 10^{-4}$ est imposé. Dans l'espace de Fourier, celui-ci contient $M = 1024$ modes associés à des fréquences jusqu'à $3f_c$ (f_c est la fréquence de coupure). Les paramètres de la simulation sont $\Gamma = 20$, $\delta = 4.3$. Plus précisément, les grandeurs physiques associées correspondent à un mélange eau-glycérine concentré ($\rho = 1200\ kg/m^3$, $\nu = 38.59.10^{-6}\ m^2/s$, $\sigma = 67\ mN/m$). Le signal temporel est enregistré en 20 positions régulièrement espacées le long du plan. La fréquence d'acquisition est ajustée afin d'avoir un nombre de points par onde suffisant (typiquement 10 points dans le front). L'analyse est réalisée à la position $n^\circ 19$ (la $n^\circ 1$ correspondant à l'entrée). Un exemple de signal temporel obtenu est tracé sur la figure 2.12. Contrairement au cas précédent ($\delta < 1.5$), l'espacement entre les ondes est ici important et l'on distingue clairement de longues portions de film plat entre elles (substrat).



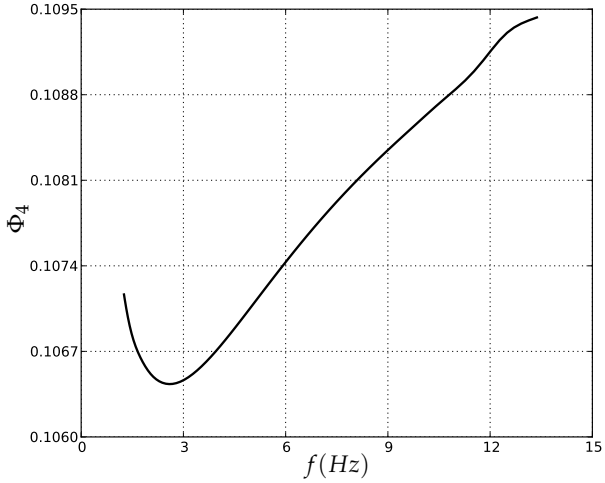
(a) $\Phi_1 = \langle h \rangle$



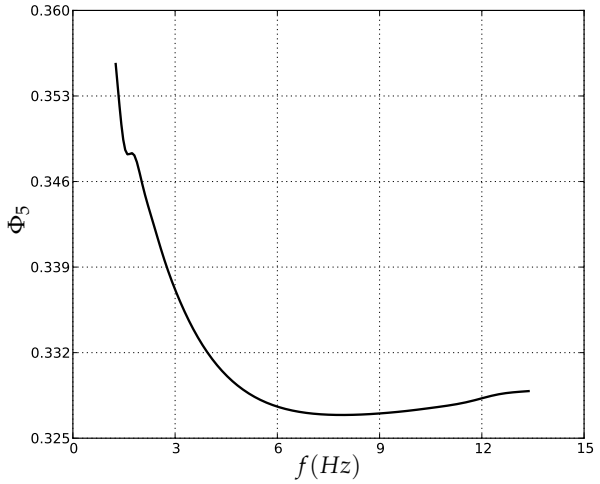
(b) $\Phi_2 = \langle \frac{q}{h^2} \rangle$



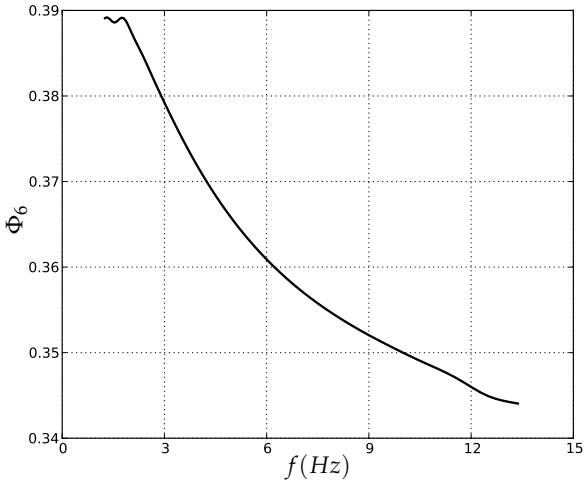
(c) $\Phi_3 = \langle h^3 \rangle$



(d) $\Phi_4 = \langle \frac{q^2}{h^3} \rangle$



(e) Φ_5 *: Chang et al. (1993)*



(f) Φ_6 *: Bird et al. (1960)*

FIGURE 2.11 – *Comparaison des différentes fonctions énergétiques Φ_i pour les ondes optimales longues. Les paramètres associés sont $\Gamma = 20$, $\delta = 4.3$. Les graphes représentent les variations de Φ_i avec la fréquence le long de la branche d'onde principale γ_2.*

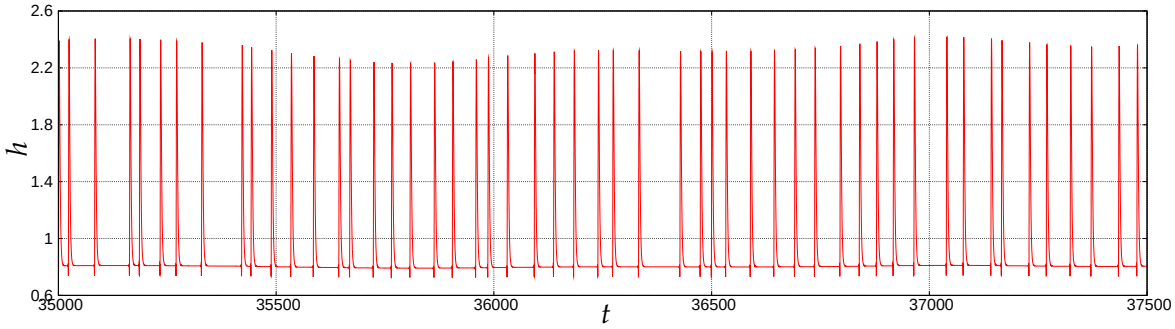


FIGURE 2.12 – *Profil d'épaisseur en temps (variables adimensionnées) issu des simulations temporelles en domaine ouvert. Les paramètres associés sont* $\Gamma = 20$, $\delta = 4.3$.

Le signal temporel obtenu est ensuite analysé dans le but de réaliser des statistiques : épaisseur moyenne du film $\langle h \rangle$, fréquence moyenne $f(Hz)$, épaisseur maximum h_{max} et minimum h_{min} (il s'agit plus précisément des moyennes des maxima et minima des ondes qui défilent). En pratique, le signal est découpé en « pseudo-périodes ». Sur chacune d'entre elles, nous repérons le maximum, le minimum et la période temporelle. Le calcul de l'épaisseur moyenne fait l'objet d'un traitement spécial. Le signal subit d'abord une interpolation (splines cubiques) puis l'intégrale est calculée avec la méthode de Simpson. La table 2.2 compare ces résultats DNS avec les caractéristiques des ondes optimales associées aux minima des fonctions énergétiques Φ_i. Comme attendu, les fonctions énergétiques $\Phi_3 = \langle h^3 \rangle$, $\Phi_4 = \langle q^2/h^3 \rangle$ et Φ_5 (Chang et al. (1993)) ne permettent pas de reproduire les résultats issus de la DNS. En revanche, ceux-ci sont en bon accord avec les fonctions $\Phi_1 = \langle h \rangle$ et $\Phi_2 = \langle q/h^2 \rangle$. L'accord est excellent pour l'épaisseur moyenne et minimale. Les valeurs de fréquence et d'épaisseur maximale sont également en bon accord mais l'écart constaté est plus important (respectivement 4.5 % et 3.1 %). Les histogrammes correspondants sont représentés sur la figure 2.13. Les distributions de $\langle h \rangle$ et h_{min} sont bien piquées ce qui n'est pas le cas pour f et h_{max}.

	DNS	$\Phi_{1,2}$	Φ_3	Φ_4	Φ_5
$f(Hz)$	3.69	3.53	2.03	2.58	7.97
$\langle h \rangle$	0.906	0.905	0.915	0.909	0.933
h_{max}	2.30	2.23	2.65	2.48	1.58
h_{min}	0.73	0.72	0.75	0.73	0.69

TABLE 2.2 – *Comparaison des valeurs moyennes statistiques issues de la simulation en temps du modèle (DNS) et des caractéristiques des ondes optimales associées aux minima des fonctions énergétiques* Φ_i. *Le signal temporel traité DNS correspond à un total de 840 ondes. Les paramètres sont* $\Gamma = 20$, $\delta = 4.3$.

La plupart des valeurs de fréquence obtenues par la DNS se situent entre $2.5\,Hz$ et $4\,Hz$. La distribution globale est asymmétrique : nous n'avons relevé quasiment aucune valeur de f inférieure à $2\,Hz$ ce qui contraste avec le comportement à haute fréquence ($5\,Hz < f < 7\,Hz$). Ceci s'explique si l'on considère les propriétés de stabilité de ces solutions. Nous avons effectué des calculs de stabilité linéaire (non présentés ici) en faisant

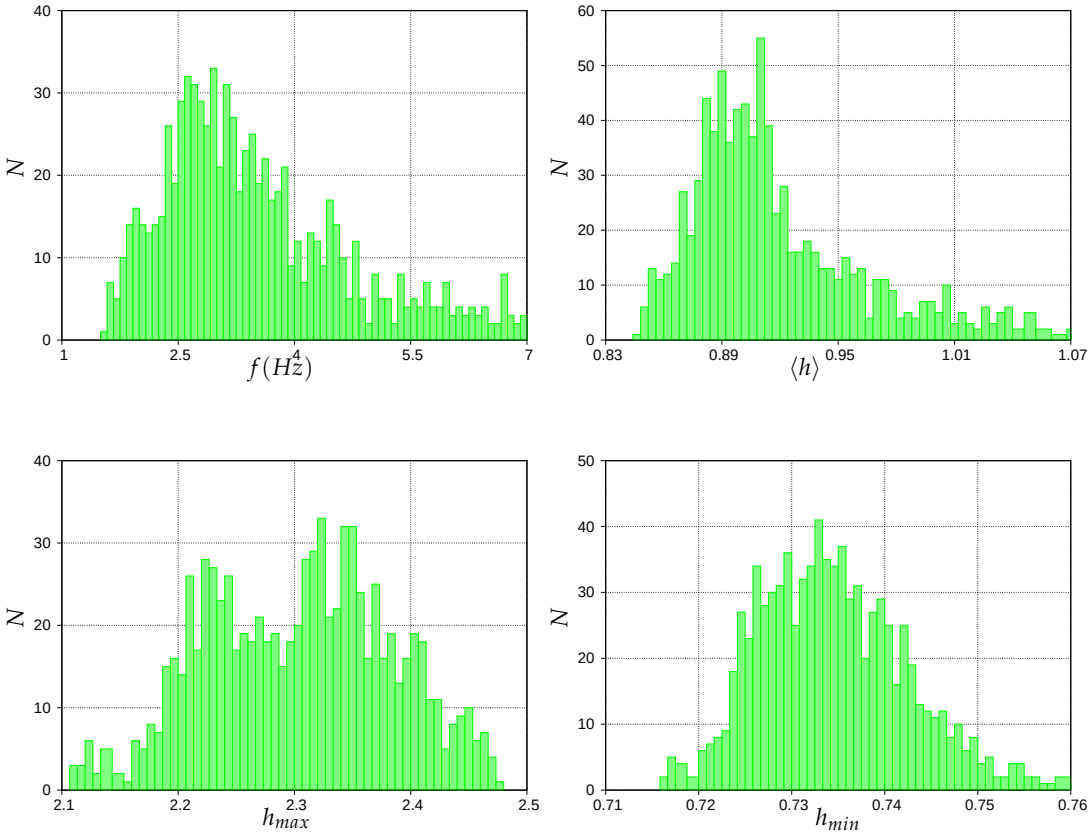
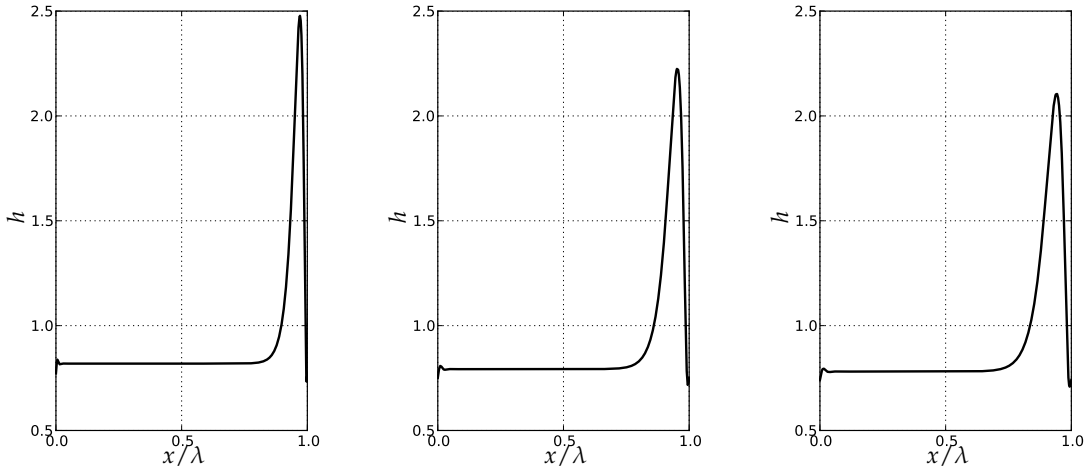


FIGURE 2.13 – *Histogrammes de fréquence f, épaisseur moyenne $\langle h \rangle$, épaisseur maximum h_{max} et minimum h_{min} pour $\delta = 4.3$, $\Gamma = 20$. Résultats issus des simulations en temps du modèle optimisé (domaine ouvert). Le signal temporel traité correspond à un total de 840 ondes.*

varier le paramètre ν de décalage en fréquence (cf. équation (2.23)). Les solutions stationnaires des équations sont instables d'une part pour $f < 2\,Hz$ à cause de l'instabilité primaire du film et d'autre part pour $f > 9.5\,Hz$ vis-à-vis du mode quasi-périodique. Enfin, la forte dispersion des valeurs de h_{max} obtenues par la DNS est logique si l'on trace les profils stationnaires associés (figure 2.14). L'épaisseur maximum h_{max}, contrairement à h_{min} ou $\langle h \rangle$, est très sensible à la valeur de f et passe de 2.15 à 2.50 pour $2.5\,Hz < f < 4\,Hz$.

Influence de Γ et δ

Pour terminer, nous allons étudier l'influence des paramètres Γ et δ sur les résultats précédents. Nous comparons, dans un premier temps, les valeurs moyennes statistiques issues de la simulation en temps du modèle (DNS) et les caractéristiques de l'onde optimale associée au minimum de l'épaisseur moyenne (AUTO). Deux cas sont présentés dans la table 2.3 : $\delta = 15$, $\Gamma = 20$ et $\delta = 4.3$, $\Gamma = 500$. Nous constatons les mêmes tendances évoquées précédemment, à savoir un excellent accord pour h_{min} et $\langle h \rangle$ et une bonne correspondance pour f et h_{max} malgré un écart plus important. Les courbes d'épaisseur moyenne en fonction de la fréquence ainsi que les profils d'ondes optimales sont donnés dans l'Annexe C.



(a) $f = 2.5\,Hz$ (b) $f = 3.5\,Hz$ (c) $f = 4.0\,Hz$

FIGURE 2.14 – *Profils d'ondes (variables adimensionnées) calculés avec AUTO pour* $\Gamma = 20$, $\delta = 4.3$. *L'onde optimale (minimum de l'épaisseur moyenne sur la figure 2.11a) est celle à* $f = 3.5\,Hz$.

Une question importante est de savoir comment varie l'espacement entre les ondes en fonction de Γ et δ. La fréquence en Hz est une grandeur dimensionnée à partir de l'échelle de temps de Shkadov qui dépend elle-même de Γ et δ. Afin de simplifier l'analyse, il vaut mieux considérer une grandeur adimensionnée : la longueur d'onde λ_x par exemple. La figure 2.15 présente les variations de λ_x associée au minimum d'épaisseur moyenne en fonction de Γ et δ. La première observation intéressante est le fait que λ_x est indépendant de Γ lorsque $\delta > 4$: ceci traduit un comportement de type « roll-waves » pour lequel la tension de surface ne joue pas. Le deuxième point remarquable constitue l'évolution de la longueur d'onde adimensionnée pour $\delta > 20$: on a alors $\lambda_x \propto \delta$. Nous avons vu précédemment que, dans le cas des ondes optimales courtes, λ_x était proportionnelle à la longueur d'onde capillaire. Ici, λ_x est proportionnelle à la taille du dos de l'onde qui varie comme δ dans le régime « drag-inertia » (Kalliadasis et al. (2012)). C'est donc l'asymétrie dos-front couplé à la conservation du débit qui explique l'existence du minimum associé aux ondes optimales longues.

	$\delta = 15$, $\Gamma = 20$		$\delta = 4.3$, $\Gamma = 500$	
	DNS	AUTO	DNS	AUTO
$f(Hz)$	5.88	5.63	4.67	4.27
$\langle h \rangle$	0.860	0.861	0.903	0.903
h_{max}	2.46	2.42	2.33	2.26
h_{min}	0.61	0.59	0.61	0.60

TABLE 2.3 – *Comparaison des valeurs moyennes statistiques issues de la DNS et des caractéristiques de l'onde optimale associée au minimum de l'épaisseur moyenne (AUTO). Le signal temporel traité DNS correspond à un total de 85 ondes dans le cas* $\delta = 15$, $\Gamma = 20$ *et 505 ondes dans le cas* $\delta = 4.3$, $\Gamma = 500$.

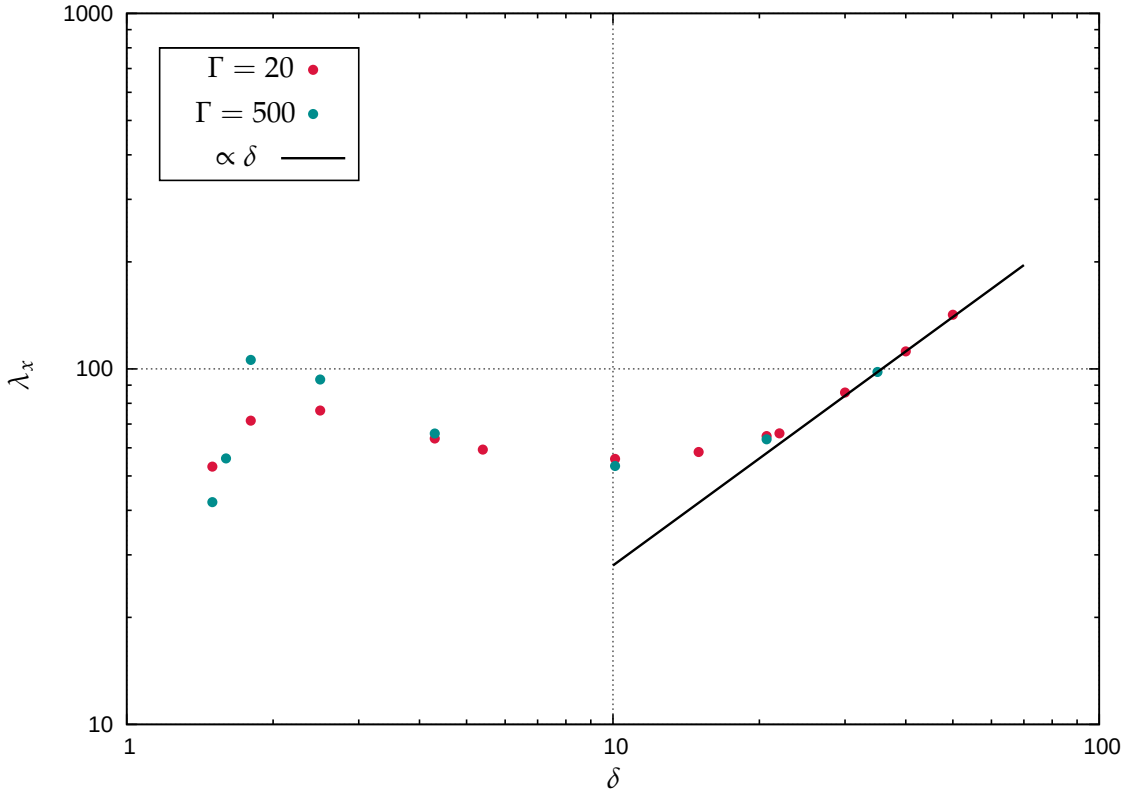


FIGURE 2.15 – *Longueur d'onde optimale adimensionnée λ_x en fonction du nombre de Reynolds réduit δ pour deux valeurs du nombre de Kapitza ($\Gamma = 20$, $\Gamma = 500$). La ligne représente la loi d'échelle à grand δ.*

2.4 Conclusion - Perspectives

Nous avons présenté dans un premier temps les outils numériques utilisés dans cette étude. Après avoir détaillé les équations de base et les paramètres adimensionnels, nous avons effectué une brève revue des techniques de modélisation et des modèles d'équations qui en résultent. Parmi ceux-ci, le modèle Ruyer-Quil-Manneville (Kalliadasis et al. (2012)) est le plus performant : c'est celui que nous avons utilisé. La version dite *simplifiée* du modèle, à 2 équations, peut être employée dans la plupart des cas. La version *complète*, à 4 équations et consistante vis-à-vis du développement en gradients, permet une meilleure comparaison avec l'expérience et la DNS. La version *optimisée* (à 2 équations et également consistante) apparaît comme un bon compromis. Les résultats numériques présentés dans ce chapitre résultent soit du calcul des solutions stationnaires par continuation (AUTO) soit de la simulation en temps des équations du modèle.

Nous nous sommes penchés dans un deuxième temps sur le cas des ondes forcées (résultant d'un forçage temporel en entrée). Les deux principales familles d'ondes stationnaires γ_1 et γ_2 ont été présentées ainsi que la méthode utilisée avec AUTO pour les obtenir. Leurs propriétés de stabilité et le problème de la sélection vis-à-vis des familles de solutions hybrides ont été discutés.

Nous avons cherché ensuite à établir une corrélation pour la vitesse des ondes forcées à partir de nos mesures expérimentales. En s'inspirant des approches de Nosoko et al. (1996) (cas vertical) et Njifenju et al. (2013) (cas faiblement incliné), une corrélation empirique convaincante a pu être obtenue sur la gamme de paramètres étudiée.

Enfin, nous avons étudié dans quelle mesure l'adimensionnement du substrat pouvait être pertinent, d'un point de vue numérique d'abord. L'épaisseur du substrat h_s est calculée en suivant l'approche de Chasseur (2011). A basse fréquence, cet adimensionnement donne de bons résultats surtout à grand nombre de Reynolds réduit δ, pour lequel les ondes sont effectivement bien séparées. Lorsque f augmente, les solutions observées appartiennent à une famille hybride. La courbe $h_s(\delta)$ devient multivaluée ce qui engendre une dispersion importante des valeurs en raison de la forte sensibilité vis-à-vis de h_s. D'un point de vue expérimental, les résultats montrent la même tendance mais un écart systématique de l'ordre de 10 à 15 % est constatée. Celle-ci pourrait résulter soit d'un petit défaut de mesure du système CCI de l'ordre de 1 à 2 % soit de la courbure globale des fronts expérimentaux due aux effets de bords. Ce petit écart se répercute fortement sur h_s ce qui souligne la difficulté de ce type de mesures.

Dans un troisième temps, nous avons étudié d'un point de vue numérique le problème de la sélection des ondes naturelles (sans forçage en entrée). En particulier, nous avons cherché à comprendre dans quelle mesure les ondes optimales qui minimisent l'épaisseur moyenne du film $\langle h \rangle$ (Trifonov (2012)) peuvent être sélectionnées par le système.

Lorsque δ est petit ($\delta < 1.5$), ces ondes optimales sont dites courtes et correspondent aux états liés étudiés notamment par Chang et al. (1993) et Pradas et al. (2011). Elles sont stables vis-à-vis des perturbations 2D et apparaissent comme des minima locaux de la fonction dissipation visqueuse Φ_v. Comme nous l'avons montré, celle-ci peut être écrite de différentes manières (y compris $\Phi_v \sim \langle h \rangle$ à l'ordre 0 d'approximation).

Lorsque δ augmente, la dissipation visqueuse n'est plus pertinente car les termes d'inertie et de tension de surface ne peuvent plus être négligés. Ces derniers disparaissent toutefois lorsque les équations de la dynamique sont moyennées sur une longueur d'onde. Le bilan global entre la gravité et le frottement à la paroi s'écrit alors : $\langle h \rangle \sim \langle q/h^2 \rangle$. L'épaisseur moyenne admet, par ailleurs, un nouveau minimum à basse fréquence ce qui donne naissance aux ondes optimales dites longues (Trifonov (2014)). Nous avons vérifié que celles-ci semblent effectivement sélectionnées par le système en utilisant les outils de la simulation en temps du modèle. La dispersion des résultats, cependant, n'est pas négligeable. Ceux-ci doivent être confirmés en réalisant des simulations sur des temps plus longs et des domaines plus étendus.

Enfin, nous avons discuté l'origine du minimum de $\langle h \rangle$ associé aux ondes optimales longues à travers l'influence du nombre de Kapitza Γ et de δ. La courbe de la longueur d'onde adimensionnée λ_x en fonction de δ montre trois régimes distincts. Le premier régime ($1.5 < \delta < 4$) fait appraître un pic de résonance dont l'amplitude dépend de Γ. Le deuxième régime ($4 < \delta < 20$) est caractérisé par $\lambda_x \sim cst$ indépendante de Γ. Nous

n'avons pas pu trouver d'interprétation à ces deux régimes intermédiaires. Le troisième régime ($\delta > 20$) montre que λ_x varie comme δ. Le minimum de $\langle h \rangle$ semble donc résulter de la synchronisation des ondes par leur dos dont la taille varie également comme δ dans le régime « drag-inertia ». L'indépendance vis-à-vis de Γ dans les régimes 2 et 3 semble justifier une approche de type « roll-waves ».

Annexe A - Corrélation empirique pour la vitesse

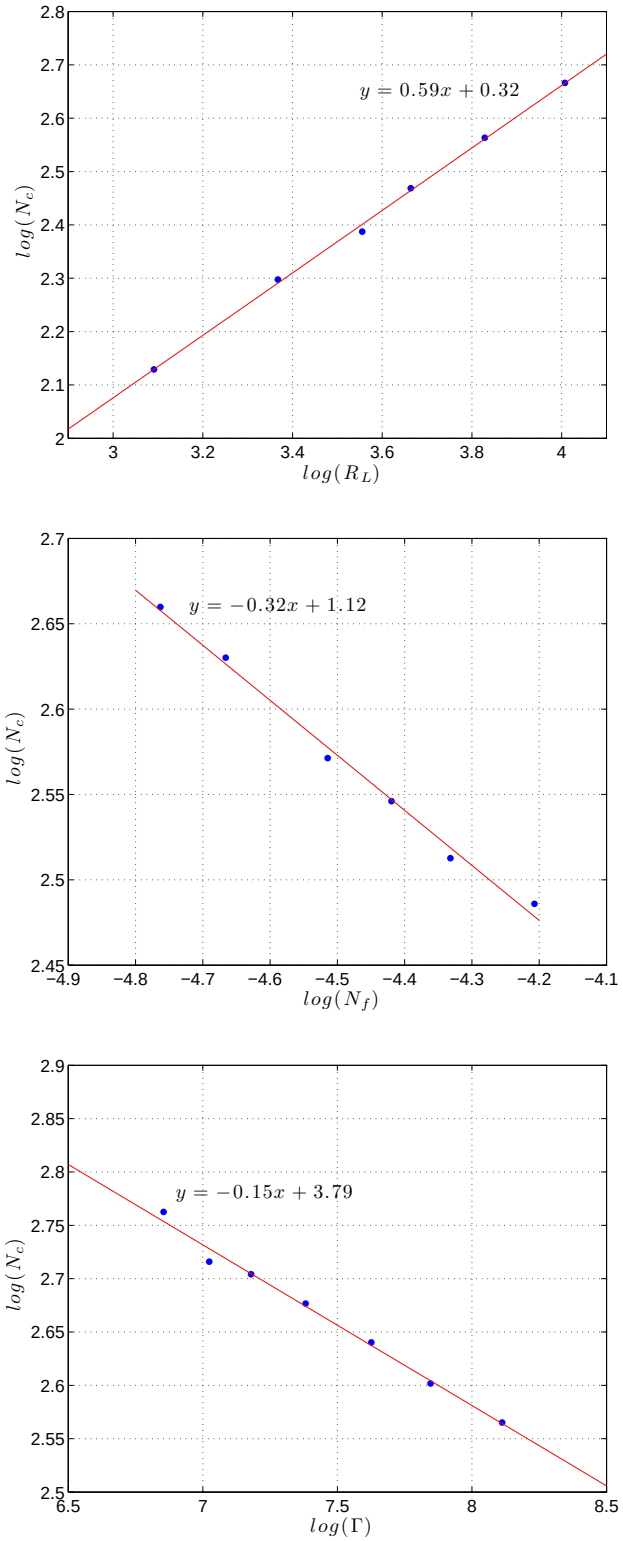


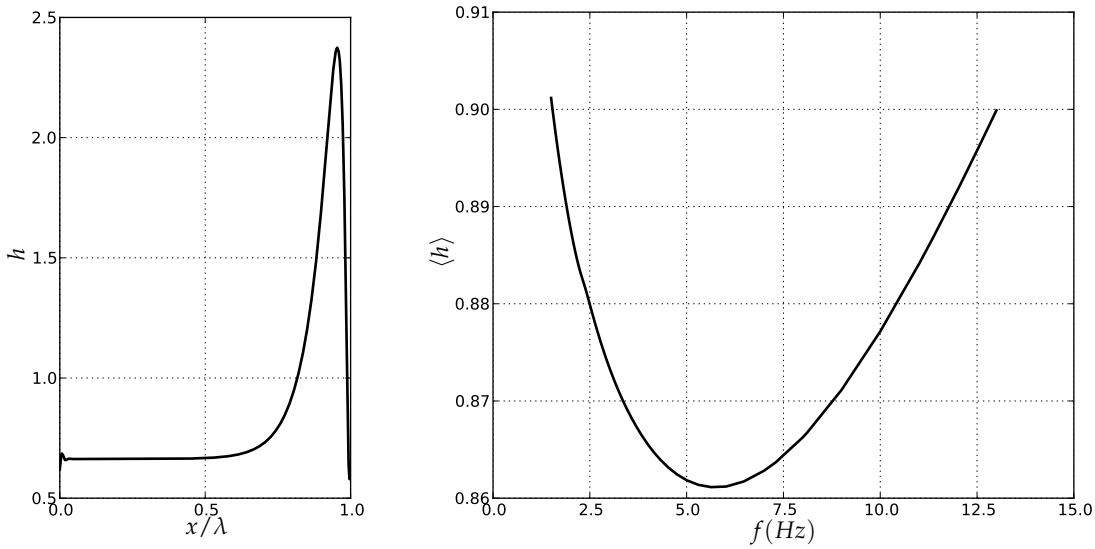
Figure 2.16 – *Détermination des exposants de la loi de vitesse empirique. Les séries de mesure correspondantes sont, de haut en bas, les numéros 4a, 7 et 5 de la table 2.1.* $N_c = \frac{c}{(\nu g)^{1/3}}$ *et* $N_f = \frac{f}{(\nu^{-1} g^2)^{1/3}}$ *sont respectivement les vitesses et fréquences adimensionnées.*

Annexe B - Données brutes et comparaison expérience/modèle

Q (L/min)	R	δ	f (Hz)	c_{XP} (cm/s)	c_{NUM} (cm/s)	$\langle h \rangle_{XP}$ (μm)	$\langle h \rangle_{NUM}$ (μm)	$h_{s,XP}$ (μm)	$h_{s,NUM}$ (μm)
0.40	17.8	7.0	3.0	15.29	-	328	-	265	-
0.45	20.0	8.0	3.2	15.90	-	339	-	263	-
0.45			2.8	16.78	-	340	-	275	-
0.55	24.5	10.3	3.2	18.04	-	356	-	265	-
0.55			2.8	19.04	-	357	-	277	-
0.65	28.9	12.6	3.3	19.98	-	375	-	276	-
0.65			2.9	20.99	21.00	378	377	292	290
0.70	31.2	13.8	2.9	21.49	21.63	381	388	280	296
0.80	35.6	16.3	2.9	23.13	23.31	399	402	291	298
0.90	40.1	18.8	3.3	23.56	-	412	-	283	-
0.90			2.9	24.64	24.62	412	417	294	304
1.00	44.5	21.3	3.3	24.63	-	430	-	293	-
1.00			2.9	25.80	25.85	425	432	295	309
1.10	49.0	24.0	2.9	27.17	27.07	439	446	302	314
1.20	53.4	26.7	3.3	26.80	-	455	-	297	-
1.20			2.9	28.22	28.24	450	458	303	319
1.30	57.9	29.4	3.3	28.15	-	468	-	306	-
1.40	62.3	32.2	3.3	29.34	-	480	-	311	-

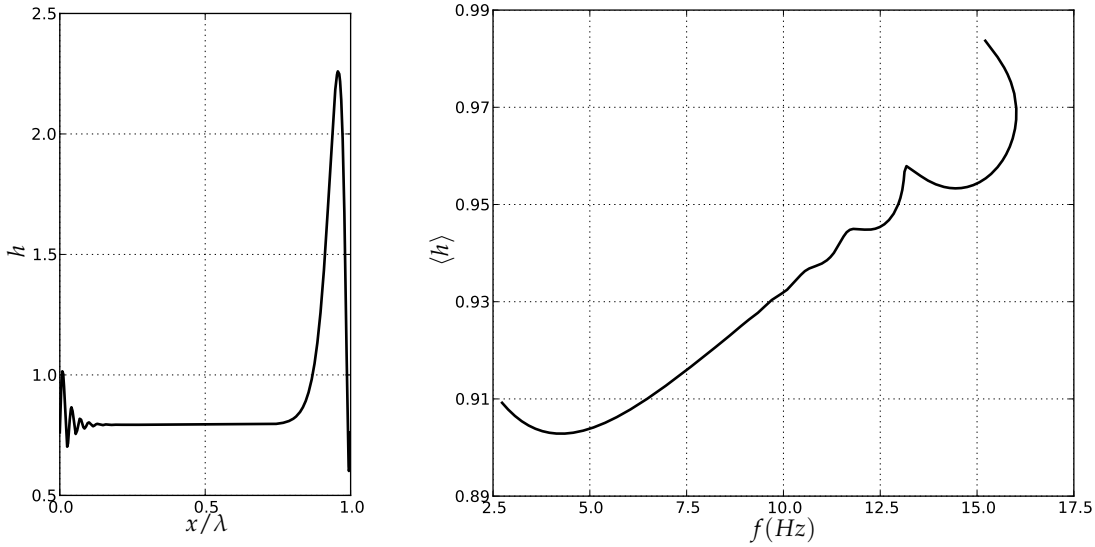
Table 2.4 – *Mesures expérimentales de vitesse c_{XP} et d'épaisseur moyenne $\langle h \rangle_{XP}$, calcul de l'épaisseur du substrat $h_{s,XP}$. Comparaison avec les résultats numériques du modèle complet (c_{NUM}, $\langle h \rangle_{NUM}$, $h_{s,NUM}$). Les tirets signifient que les valeurs n'ont pas été calculées, les « blancs » que la valeur est identique à celle du dessus. L'angle d'inclinaison est $\beta = 8^\circ$, le fluide utilisé est l'eau ($T = 19.7^\circ C$). Les données correspondent aux symboles de la figure 2.5*

Annexe C - Courbes supplémentaires pour les ondes optimales



(a) (b)

Figure 2.17 – *Profil optimal pour $\delta = 15$, $\Gamma = 20$ (figure 2.17a) associé au minimum de la courbe d'épaisseur moyenne en fonction de la fréquence (figure 2.17b)*



(a) (b)

Figure 2.18 – *Profil optimal pour $\delta = 4.3$, $\Gamma = 500$ (figure 2.18a) associé au minimum de la courbe d'épaisseur moyenne en fonction de la fréquence (figure 2.18b)*

Instabilités 3D d'un film liquide tombant

3

Nous étudions dans ce chapitre la question de l'évolution 3D des ondes à la surface d'un film liquide tombant. Nous nous sommes intéressés principalement au cas des ondes solitaires (famille γ_2) résultant d'un forçage basse fréquence en entrée. Pour des nombres de Reynolds $R < 40$ environ et dans la plage d'angles d'inclinaison étudiée expérimentalement ($5^\circ < \beta < 18^\circ$), les ondes solitaires restent 2D. Au delà de ce seuil, qui dépend en réalité de la fréquence et de l'angle, des modulations transverses apparaissent.

En s'appuyant sur une analyse de stabilité linéaire 3D des équations du modèle Ruyer-Quil-Manneville (voir chapitre 2), trois modes d'instabilité ont été détectés. Nous présentons tout d'abord les résultats expérimentaux et numériques obtenus lors de l'étude de deux de ces modes (mode « capillaire » et mode « inertiel »), dont les mécanismes d'apparition ont été clairement identifiés. Ces résultats sont présentés à travers un article à paraître dans *Journal of Fluid Mechanics* dont un court résumé est proposé au préalable afin de faciliter la tâche du lecteur. Nous nous intéressons ensuite au troisième mode d'instabilité détecté dont l'origine n'est pour l'instant pas clairement élucidée. Nous décrivons également l'évolution non linéaire du mode inertiel donnant naissance à des structures particulières en forme de fer-à-cheval ou de Λ.

Enfin, nous présentons deux points supplémentaires abordés lors de cette étude sur l'évolution 3D des films tombants. Le premier point concerne l'étude du cas des ondes de la famille γ_1 résultant d'un forçage haute fréquence en entrée. Le deuxième point discute de la possibilité d'effectuer des simulations numériques directes du problème via le logiciel *Gerris*.

3.1 Modes d'instabilités 3D des ondes solitaires

3.1.1 Mode capillaire et mode inertiel : article à paraître dans *J. Fluid Mech.*

L'article s'intitule : « Three-dimensional instabilities of quasi-solitary waves in a falling liquid film ». Il est composé de cinq sections.

L'introduction (section 1) permet de comprendre les raisons qui ont motivé l'étude de ce problème. Celles-ci sont à la fois de nature fondamentale et appliquée. Les films tombants présentent une transition vers un état dit de turbulence faible, c'est-à-dire organisé autour de structures dissipatives en interaction et présentant un désordre en temps et en espace. Cette transition n'est pas bien comprise à l'heure actuelle : l'évolution 3D en est une étape fondamentale. Par ailleurs, le caractère 2D/3D des ondes joue un rôle dans les processus de transfert de chaleur et de masse au coeur de nombreux procédés industriels.

La section 2 présente les outils numériques utilisés dans cette étude. Les parties 2.1, 2.2 et 2.3 décrivent respectivement les notations et paramètres adimensionnels, les équations du modèle Ruyer-Quil-Manneville et le calcul des solutions 2D par continuation. Ces parties ont fait l'objet d'un traitement détaillé au chapitre 2. La partie 2.4 présente l'analyse de stabilité linéaire déjà utilisée par Scheid et al. (2006) pour étudier l'évolution 3D des ondes de la famille γ_1. La partie 2.5, enfin, introduit la méthode de bilan d'énergie mise en place afin de mieux comprendre les mécanismes physiques associés.

La section 3 décrit le dispositif expérimental et les techniques de mesure utilisées (visualisation par ombroscopie, mesures d'épaisseur par les méthodes Schlieren et CCI). Tous les éléments évoqués dans cette section ont été décrits plus en détail dans le chapitre 1 de ce manuscrit.

La section 4 présente les résultats obtenus. La partie 4.1 s'intéresse à la validation de la technique Schlieren par comparaison avec les mesures CCI, détaillée dans le chapitre 1. La partie 4.2 décrit les zones d'existence des deux modes d'instabilité 3D capillaire et inertiel obtenues expérimentalement. Les parties 4.3 et 4.4 comparent les résultats expérimentaux et numériques vis-à-vis de la longueur d'onde et de la topologie des modes. Les courbes de bilan d'énergie sont également discutées.

La section 5 cherche dans un premier temps à interpréter les domaines d'apparition des deux modes. Nous proposons des mécanismes d'instabilité plus détaillés : Rayleigh-Plateau pour le mode capillaire, Rayleigh-Taylor pour le mode inertiel. Ceci permet notamment d'établir des lois d'échelle pour la variation du nombre de Reynolds critique d'instabilité R_c^{3D} en fonction de l'angle d'inclinaison β. Dans un deuxième temps, nous étudions l'influence des propriétés physiques du liquide (tension de surface et viscosité) en comparant les résultats numériques aux tendances observées expérimentalement.

La conclusion, enfin, rappelle les méthodes et les principaux résultats obtenus.

Under consideration for publication in J. Fluid Mech. 1

Three-dimensional instabilities of quasi-solitary waves in a falling liquid film

N. KOFMAN[1], **S. MERGUI**[1], **and C. RUYER-QUIL**[2,3]

[1]UPMC Université Paris 06, Université Paris-Sud, CNRS, laboratoire FAST, bâtiment 502, Campus universitaire, Orsay, F-91405, France
[2] Université de Savoie, CNRS, laboratoire LOCIE, Savoie Technolac, Le Bourget du Lac, 73376 Cedex, France
[3] Institut Universitaire de France (IUF)

(Received 14 July 2014)

The stability of γ_2 traveling waves at the surface of a film flow down an inclined plane is considered experimentally and numerically. These waves are fast, one-humped and quasi-solitary. They undergo a three-dimensional secondary instability if the flow rate (or Reynolds number) is sufficiently high. Rugged or scallop wave patterns are generated by the interplay between a short-wave and a long-wave instability mode. The short-wave mode arises in the capillary region of the wave, with a mechanism of capillary origin which is similar to the Rayleigh-Plateau instability, whereas the long-wave mode deforms the entire wave and is triggered by a Rayleigh-Taylor instability. Rugged waves are observed at relatively small inclination angles. At larger angles, the long-wave mode predominates and scallop waves are observed. For a water film the transition between rugged and scallop waves occurs for an inclination angle around 12°.

1. Introduction

Falling film flows are encountered in many industrial applications and still form the state-of-the-art technology in several chemical engineering processes because of their reduced resistance to heat and mass transfer (Alekseenko *et al.* 1994). For instance, absorbers and generators are currently designed using falling liquid films on vertical plates whenever pressure drop in the gas phase is critical (Fujita 1993; Bo *et al.* 2010). Optimization of such apparatuses requires the knowledge and control of the wavy regime of falling liquid films as waves are well known to intensify the heat and mass transfer both at the wall and at the free surface (Frisk & Davis 1972; Bakopoulos 1980; Yoshimura *et al.* 1996; Rastaturin *et al.* 2006). Such a regime is characterized by the onset of a weakly disordered state organized around large-amplitude solitary waves in interaction. These waves have a tear-drop shape preceded by capillary waves and are sometimes christened "capillary roll waves" in reference to the large recirculation regions that can be found in the main humps of those waves (Balmforth & Liu 2004). The onset of capillary roll waves is pointed out as a possible reason for the intensification of transfers. Indeed, the recirculation of the fluid in the hump generates an efficient mixing (Fujita 1993; Yoshimura *et al.* 1996) which enhances transfers at the free surface, whereas backflows —induced by adverse gradients of capillary pressure— occur at the front of the waves and promote the wall-to-fluid transfers through back and forth sweeping (Dietze *et al.* 2008, 2009).

In most cases of interest, solitary waves are three-dimensional and form either oblique solitary-waves or horseshoe-like structures (Scheid *et al.* 2006). The transition from the

Nusselt uniform film to the wavy three-dimensional irregular state results from a series of symmetry breaking and supercritical bifurcations that are triggered by the inlet noise through convective instabilities (Kalliadasis *et al.* 2012). As a consequence, the sequence of instabilities can be monitored by controlling the inlet signal. Liu & Gollub (1994), Liu *et al.* (1995), followed later on by Park & Nosoko (2003), have thus analyzed the onset of secondary instabilities of the two-dimensional primary wave train leading to three-dimensional waves. Depending on the frequency of the applied forcing at inlet, two families of waves are identified. At frequencies close to the linear cut-off frequency, slow and roughly sinusoidal waves are selected. They are nicknamed γ_1 waves following the terminology introduced by Chang *et al.* (1993) and clarified by Scheid *et al.* (2006). At lower frequencies, fast solitary waves, or capillary roll waves are found. They are nicknamed γ_2 waves.

Waves that belong to the γ_1 family always undergo a secondary instability as reported in the experiments by Liu *et al.* (1995) and showed by Scheid *et al.* (2006) by means of a thorough Floquet stability analysis. Depending on the values of the Reynolds number and forcing frequency, the secondary instability is either 2D or 3D. Close to the threshold of primary instability, 2D subharmonic and sideband instabilities trigger the formation of 2D solitary waves (Cheng & Chang 1995). Further from the instability threshold, 3D secondary instability modes are followed by a reorganization into 3D horseshoe-shaped solitary waves. Experimentally, 3D synchronous patterns are generally observed whereas the stability analysis seems rather to point to a subharmonic mode. However, the growth rates associated with these two modes are actually close and the observation of a synchronous instability may result from the fact that experimental noise contains a larger part of in-phase modulations than out-of-phase ones.

The stability of γ_2 large-amplitude solitary waves have been considered by Liu *et al.* (1995) who performed experiments at low inclination angle ($\beta < 7^\circ$) using water-glycerin mixtures. They observed 2D solitary wave fronts with weak transverse modulations of spanwise wavelengths much smaller than the periodicity of the primary waves. Instead, Park & Nosoko (2003) studied the transverse evolution of solitary waves in a vertically falling water film. The wavelength of the transverse perturbations was controlled by means of needles in contact with the film free surface. Park and Nosoko found that solitary waves may be unstable to perturbations of wavelengths around 2 cm. For Reynolds number $Re > 40$, these modulations distort the whole wave and evolve into 3D Λ-shaped solitons (Demekhin *et al.* 2007, 2010) in addition to a capillary instability of wavelength of about 3 mm appearing on the 2D deep valleys. These observations were confirmed numerically by Demekhin & Kalaidin (2007) within the frame of the integral Kapitza-Shkadov model (Shkadov 1967).

In this paper, we report an experimental and numerical stability analysis of the γ_2 solitary waves focusing on the effect of the inclination angle on the secondary instability and the selection of the 3D patterns thus completing the observations by Park and Nosoko and by Liu et al. The starting point of our study is the discrepancy between the experimental observations at small and large inclinations which seems to point out to several different mechanisms for the secondary instability of the 2D γ_2 waves. Figure 1 illustrates two different experiments showing the onset of two different wave patterns on a water falling film. At small inclination angle (left panel), the wave crests are nearly undeformed and a weak transverse modulation is observed with a wavelength close to the length of the capillary ripples and is reminiscent of Liu and Gollub's observations. These *rugged waves* exhibit a rough or rugged capillary region. At large inclination angle (right panel), similarly to Park and Nosoko's observations, the transverse wavelength is much larger than the typical length of the capillary bow waves. The 3D modulated waves

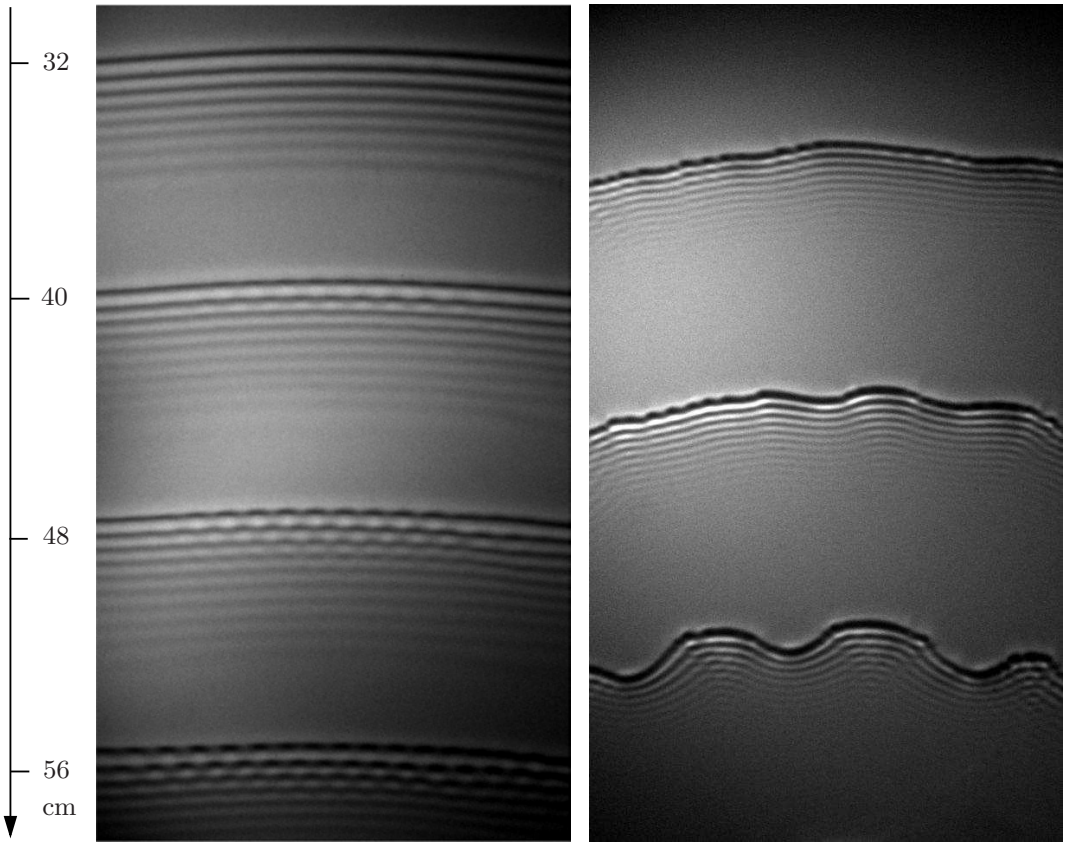


FIGURE 1. Shadowgraph pictures showing the onset of transverse 3D instabilities of a 2D quasi–solitary wave train in a water film generated by a low-frequency forcing at inlet. Left panel displays the onset of rugged waves generated by a short-wave instability mode ($\beta = 8.3^\circ$, $Re = 60$, $f = 3.5$ Hz, $\Gamma = 5975$), whereas right panel shows scallop waves promoted by a long-wave instability mode ($\beta = 17.9^\circ$, $Re = 50$, $f = 4.2$ Hz, $\Gamma = 4644$). Distances are given with reference to the inlet.

have a festooned or scalloped shape and are hereinafter referred to as *scallop waves*. This calls for a distinction between a "long-wave" and a "short-wave" instability mode and the study of the transition between the two.

The paper is organized as follows. Section 2 introduces dimensionless parameters and recalls the low-dimensional models derived in Ruyer-Quil & Manneville (2000); Scheid *et al.* (2006), as well as the Floquet analysis of 2D waves that is detailed in Scheid *et al.* (2006). Then, an energy budget of the perturbations is introduced with the aim at identifying the physical mechanisms at work in both long and short-wave instability modes. The experimental set-up and the measuring techniques are described in 3 and results are presented in § 4. A discussion follows in § 5. Section 6 concludes the present work.

2. Numerical tools

2.1. *Formulation*

We consider a liquid film falling down an inclined plane making an angle β with the horizontal plane. The surrounding gas is assumed to be passive, that is at rest with a constant and uniform pressure and exerting no shear stresses on the free surface. Physical properties of the liquid are assumed to be constant. Quantities ρ, μ, $\nu = \mu/\rho$ and σ

refer to the density, dynamic and kinematic viscosities and surface tension, respectively. Coordinate x is oriented in the streamwise direction, while y refers to the cross-stream coordinate, i.e. perpendicular to the plane, and z is the transverse direction. Accordingly, $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$ and $\mathbf{e}_z$ stand for the unit vectors, so that the gravitational acceleration reads $\mathbf{g} = g\sin\beta\mathbf{e_x} - g\cos\beta\mathbf{e_y}$. Finally, the velocity field is denoted by $\mathbf{u} = u\mathbf{e_x} + v\mathbf{e_y} + w\mathbf{e_z}$.

Flow conditions are parametrized by three characteristics lengths, the inlet film thickness $\bar{h}_\mathrm{N}$, a viscous-gravity length $l_\nu = \nu^{2/3}(g\sin\beta)^{-1/3}$ and a capillary length $l_c = \sqrt{\sigma/(\rho g\sin\beta)}$, from which the Reynolds Re and Kapitza numbers Γ are defined as

$$Re = \frac{g\sin\beta\bar{h}_\mathrm{N}^3}{3\nu^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\bar{h}_\mathrm{N}}{l_\nu}\right)^3 \qquad \text{and} \qquad \Gamma = \frac{\sigma}{\rho\nu^{4/3}(g\sin\beta)^{1/3}} = \left(\frac{l_c}{l_\nu}\right)^2 . \tag{2.1}$$

The set of dimensionless groups is completed by the inverse slope $\cot\beta$ which defines the geometry of the flow. The inlet film thickness is related to the inlet flow rate per unit span $\bar{q}_\mathrm{N}$ by the Nusselt flat-film solution

$$u(y) = \frac{g\sin\beta}{\nu}\left(y\bar{h}_\mathrm{N} - \frac{1}{2}y^2\right) \tag{2.2}$$

which corresponds to the balance of gravity and viscosity. Therefore, the aforementioned Reynolds number is proportional to the inlet flow rate as $Re = \bar{q}_\mathrm{N}/\nu$. Lastly, notice that the Kapitza number depends only on the liquid properties and the inclination of the plane. As a consequence, once the working liquid and geometry are set, free parameters are reduced to the sole Reynolds number Re.

Governing equations consist of the Navier-Stokes equations augmented with the free-surface kinematic and shear-free boundary conditions, and the Laplace law (see for instance Heining *et al.* (2012)). Hereinafter, experimental results are discussed with respect to the results from a reduced set of equations, or a model, that has been obtained using the long-wave nature of the instability and after elimination of the cross-stream coordinate y. Two main reasons support this choice. (i) Reduced sets of equations enable a comprehensive stability analysis at an affordable computational cost. (ii) Models give access to the "pith and marrow" of the flow dynamics. In particular, they offer a convenient framework to identify the origins and physical mechanisms of the instability modes.

2.2. *WRIBL model and Shkadov's notations*

The starting point of the reduction of the governing set of equations is the introduction of a film parameter ϵ, which compares the typical length of the waves to the thickness of the film. Slow time and space modulations are assumed in the in-plane directions, which reads $\partial_t, \partial_x, \partial_z \sim \epsilon \ll 1$. Truncation at $O(\epsilon^2)$ of the governing equations thus enables to eliminate the y-projection of the momentum equation and to eliminate the pressure field. The resulting equations are analogous to the Prandtl equations in boundary-layer theory (Kalliadasis *et al.* 2012; Schlichting *et al.* 2004), and the former are usually referred to as the boundary-layer approximation. Assuming $\mathrm{O}(\epsilon)$-deviations from the parabolic velocity profile (2.2) of the flat-film solution, and averaging the continuity equation and the momentum balance across the film layer with an appropriately chosen weight thus yields (Ruyer-Quil & Manneville 2000; Scheid *et al.* 2006, 2008):

$$\partial_t h = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}\,, \tag{2.3a}$$

$$\begin{aligned}\delta\partial_t\mathbf{q} = \delta\left[\frac{9}{7}\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}h}{h^2} - \frac{\mathbf{q}}{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{q} - \frac{8}{7}\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}}{h}\,\mathbf{q}\right] + \frac{5}{6}h\left(\mathbf{e}_x - \zeta\boldsymbol{\nabla}h + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}^2 h - 3\frac{\mathbf{q}}{h^3}\right)\\ +\eta\left[\frac{7}{2}h\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{q}^T}{h}\right) + h\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{q}}{h}\right) + \frac{13}{4}\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}h}{h^2}\,\boldsymbol{\nabla}h + \frac{3}{4}\frac{\boldsymbol{\nabla}h\cdot\boldsymbol{\nabla}h}{h^2}\,\mathbf{q}\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{73}{16}\left(\frac{\mathbf{q}}{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{\nabla}h-\frac{23}{16}\frac{\boldsymbol{\nabla}^2h}{h}\,\mathbf{q}+\frac{13}{16}\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}h}{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{q}-\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}}{h}\,\boldsymbol{\nabla}h\right)\Bigg]\,. \qquad (2.3b)$$

Equations (2.3) are a set of evolution equations for the film thickness h and the flow rate $\mathbf{q}=q\mathbf{e}_x+p\mathbf{e}_z=\int_0^h u\mathbf{e}_x+w\mathbf{e}_z\,dy$. The variables h and $\mathbf{q}$ can be identified with the mass and momentum of a fluid column of infinitesimal cross-section. As such, equation (2.3a) is the exact mass balance, and (2.3b) is the approximate momentum balance that governs the evolution of the said liquid column. Throughout (2.3), the notation of the in-plane Del operator has been unambiguously simplified to the symbol $\boldsymbol{\nabla}=\partial_x\mathbf{e}_x+\partial_z\mathbf{e}_z$. Using Einstein notation where $\mathbf{e}_{1,2}=\mathbf{e}_{x,z}$ and $x_1=x$ and $x_2=z$, the gradient, divergence and material derivative read $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{q}=\partial_j q_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{q}/h)=\partial_j\left(\partial_j q_i/h\right)\mathbf{e}_i$ and $\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{q}=q_j\partial_j q_i\mathbf{e}_i$ (Germain 1973).

Because of its analogy with the Kármán-Polhausen approximation in boundary-layer theory, (2.3) is referred to as the two-equation weighted-residual integral boundary-layer (WRIBL) model (Oron *et al.* 2007). Equations (2.3) have been written using Shkadov's notations (Shkadov 1977; Scheid *et al.* 2006), which makes apparent the separation of scales between the "fast" cross-stream variable y and the slow ones x and z by introducing a "compression factor" $\kappa=(l_c/\bar{h}_{\rm N})^{2/3}$, which is adjusted by balancing the body force that sets the fluid into motion, i.e. $\rho g\sin\beta$, with the capillary pressure gradient $\propto\sigma\partial_{xxx}h$. The length scales in the x and z directions are thus taken as $\kappa\times\bar{h}_{\rm N}$, where the inlet film thickness $\bar{h}_{\rm N}$ stands for the length scale in the cross-stream y direction; accordingly, the timescale is taken as $\nu\kappa/(g\bar{h}_{\rm N}\sin\beta)$.

Shkadov's scales introduce three dimensionless groups. Namely, a reduced Reynolds number, δ, a reduced slope, ζ, and a 'viscous dissipation number', η:

$$\delta\equiv\frac{3Re}{\kappa}\quad,\qquad\zeta\equiv\frac{\cot\beta}{\kappa}\qquad\text{and}\qquad\eta\equiv\frac{1}{\kappa^2}=\left(\frac{\bar{h}_{\rm N}}{l_c}\right)^{4/3}\,. \qquad (2.4)$$

The reduced Reynolds number δ combines inertia, viscosity and surface tension into a single parameter. It measures inertia versus viscous effects at the scale $\kappa\bar{h}_{\rm N}$ defined by the balance of gravity and surface tension. The viscous diffusion parameter has been recast in (2.4) in terms of the length ratio $\bar{h}_{\rm N}/l_c$ and thus compares surface tension to the streamwise viscous effects, or Trouton viscosity (Ribe 2001). It measures the efficiency of the damping of short waves by viscous diffusion as compared to the damping by surface tension. In most cases η is small as the capillary length is generally much larger than the film thickness, which is a prerequisite to the long-wave assumption. As a consequence, Trouton viscous effects are often dropped out ($\eta\to0$) and the set of parameters is reduced to δ and ζ only. Finally, Shkadov's scales have the advantage to unfold the physical origin of the different terms appearing in the averaged momentum balance (2.3b). Thus, inertia effects and viscous-dispersion effects are associated to δ and η respectively.

The WRIBL model (2.3) is consistent up to $O(\epsilon)$ for inertial terms and up to $O(\epsilon^2)$ for viscous terms. This inconsistency can be eliminated but at the cost of a more complex formulation. However, the WRIBL model has been validated through direct comparisons to the experiments by Alekseenko *et al.* (1985); Liu & Gollub (1994); Liu *et al.* (1995) in the 2D and 3D flow regimes. To our knowledge, this model is the simplest one which satisfactorily reproduces the wavy dynamics of falling films, capturing the instability onset, the nonlinear 2D dynamics and its evolution to the fast γ_2 waves, as well as the 3D instability of the slow γ_1 waves (Ruyer-Quil & Manneville 2000; Scheid *et al.* 2006).

2.3. *Two-dimensional solitary wave*

Fast two-dimensional γ_2 traveling wave solutions to (2.3) are looked after. Such waves are periodic, spanwise independent ($\partial_z = 0$, $p = 0$) and move at a constant speed and shape. The system of partial differential equations (2.3) reduces to ordinary differential equations in the moving frame of reference, $\xi = x - c\,t$, where c refers to the phase speed of the waves. Integration of the mass balance yields $q = c\,h + q_{\rm mov}$ where $q_{\rm mov} = \int_0^h (u-c)dy$ is the conserved flow rate in the moving frame. After elimination of the mass flux, one is led to a single o.d.e. which is next recast as an autonomous dynamical system in a three-dimensional phase space spanned by h, $dh/d\xi$ and $d^2h/d\xi^2$. The constant $q_{\rm mov}$ is determined by maintaining the averaged flow rate to its value for the Nusselt flat-film solution, which reads $\langle q\rangle = 1/3$ where $\langle\cdot\rangle = L_x^{-1}\int_0^{L_x}(\cdot)d\xi$ and L_x is the period. This condition enables to relate our computations to the traveling waves observed in experiments as a response to the periodic excitation at inlet (Scheid *et al.* 2005).

In practice, we have extensively used the software AUTO-07P (Doedel 2008) and constructed traveling-wave branches of solutions by continuation starting from Hopf bifurcations and increasing the period Λ. Period-doubling bifurcations were detected by duplicating the initial solution and doubling the period. The procedure is detailed in Scheid *et al.* (2006); Kalliadasis *et al.* (2012). In case of multiplicity of solutions for a given frequency c/Λ, we have selected the fastest one, or "dominant wave", as they systematically supersede slower waves when integration in time is considered (Shkadov & Sisoev 2004).

2.4. *Three-dimensional stability analysis*

We consider here the stability of 2D solutions $(h_0(\xi),\, q_0(\xi) = ch_0(\xi) + q_{\rm mov})$ with respect to transverse perturbations. We have performed a standard Floquet analysis of the wave against spanwise modulations. The procedure is similar to the one followed by Scheid *et al.* (2006) and is therefore simply sketched below.

Denoting by $\mathbf{X}$ the vector formed by the three unknowns h, p and q, we superpose to a 2D solution $\mathbf{X}_0(\xi,z,t)$ a small perturbation $\varepsilon\mathbf{X}_1(\xi,z,t)$ where $\varepsilon \ll 1$. The perturbation $\mathbf{X}_1$ is decomposed into a sum of planar waves $\sum_{\varphi,k_z}\mathbf{X}_p(\xi,z,t)$ with $\mathbf{X}_p = (h_p,q_p,p_p) = \tilde{\mathbf{X}}(\xi)\exp\{{\rm i}\varphi k_x\xi + {\rm i}k_z z + \lambda\, t\}$. $\tilde{\mathbf{X}}$ is periodic in ξ with period L_x, $k_x = 2\pi/L_x$ is the wavenumber of the two-dimensional basic stationary wave, k_z is the real wavenumber of the transverse perturbation, and i refers to the imaginary unit. The detuning parameter, φ, is the ratio of the streamwise wavenumber of the perturbation. The analysis is therefore not limited to the stability of a single wave but encompasses every perturbation to an infinite periodic wave train. Substitution into (2.3*b*) yields a linear eigenvalue problem, formally written

$$\lambda\tilde{\mathbf{X}} = \mathcal{L}_{\varphi,k_z}\left(\mathbf{X}_0;\varphi,k_z\right)\tilde{\mathbf{X}}\,, \tag{2.5}$$

where $\mathcal{L}_{\varphi,k_z}$ stands for a linear differential operator parametrized by φ and k_z. (2.5) is solved numerically with a pseudo-spectral algorithm (see Appendix A). Symmetries, i.e. reflexion in the spanwise direction and conjugation, enable to limit the parameter space to $\varphi \in [0,1/2]$ and $k_z \in [0,\infty[$. However, for most of the γ_2 waves that have been considered, the wavelength is sufficient to limit the interaction between succeeding solitary-like waves and the most amplified mode at a given transverse wavenumber k_z is not affected by the value of φ. The results of the stability analysis of a single solitary-like wave, that is of a wave confined to a periodic domain matching its length ($\varphi = 0$), are close to those corresponding to the stability of an infinite wave train ($\varphi \neq 0$), which reduces the range of parameters to $k_z \in [0,\infty[$.

2.5. *Energy budget*

We adapt the energy budget introduced by Spaid & Homsy (1996); Skotheim *et al.* (2003), who interpreted the growth rate λ as an energy production rate and defined a quadratic form to compute the different contributions to this production rate. The linear system (2.5) consists of a linearized kinematic balance

$$\lambda\tilde{h} = \mathrm{i}k_x\varphi(c\tilde{h} - \tilde{q}) + c\tilde{h}' - \tilde{q}' - \mathrm{i}k_z\tilde{q} \equiv \mathcal{L}^{\mathrm{Kin}}_{\varphi,k_z}\tilde{\mathbf{X}}\,, \tag{2.6}$$

where the primes refer to the derivatives with respect to ξ, and a linearized momentum balance, written formally as

$$\lambda\tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{L}^{\mathrm{Mom}}_{\varphi,k_z}\left(\mathbf{X}_0;\varphi,k_z\right)\tilde{\mathbf{X}} \tag{2.7}$$

where $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q},\,\tilde{p})$.

Following Spaid & Homsy (1996), we define the energy of deformation E_d associated to a planar wave as

$$E_d = \frac{1}{2}\langle h_p,\,h_p\rangle = \frac{1}{2}\langle\tilde{h},\,\tilde{h}\rangle e^{2\lambda_r t}\,, \tag{2.8}$$

where the inner product is defined as $\langle X,\,Y\rangle = L_x^{-1}\int_0^{L_x} X\,Y^\star d\xi$, the star referring to transpose conjugation. The variation of the energy of deformation is given by

$$\frac{dE_d}{dt} = \lambda_r\langle h_p,\,h_p\rangle = 2\lambda_r E_d \tag{2.9}$$

where the growth rate λ_r is the real part of λ.

The growth rate can be computed from the linearized kinematic balance (2.6) as

$$\lambda_r = \mathrm{Re}\left(\langle\mathcal{L}^{\mathrm{Kin}}_{\varphi,k_z}\tilde{\mathbf{X}},\,\tilde{h}\rangle\right)/\langle\tilde{h},\,\tilde{h}\rangle\,, \tag{2.10}$$

From (2.9), the growth rate λ_r can thus be identified with a production rate of the energy of deformation induced by a planar wave, whose contributions would be either the divergence of the perturbation flux in the direction of the flow, i.e. $\langle \mathrm{i}k_x\varphi(c\tilde{h} - \tilde{q}) + c\tilde{h}' - \tilde{q}',\tilde{h}\rangle$, or in the transverse direction, $\langle -\mathrm{i}k_z\tilde{q},\tilde{h}\rangle$.

However, (2.10) provides little access to the origin of the instability and its mechanisms. We thus rather focus on the linearized momentum balance (2.7) and write instead

$$\lambda_r = \mathrm{Re}\left(\langle\mathcal{L}^{\mathrm{Mom}}_{\varphi,k_z}\tilde{\mathbf{X}},\,\tilde{\mathbf{q}}\rangle\right)/\langle\tilde{\mathbf{q}},\,\tilde{\mathbf{q}}\rangle = \sum\lambda_n\,, \tag{2.11}$$

which can be identified with the rate of production of the kinetic energy associated with the considered planar wave

$$E_k = \frac{1}{2}\langle\mathbf{q}_p,\,\mathbf{q}_p\rangle \qquad 2\lambda_r = \frac{1}{E_k}\frac{dE_k}{dt}\,, \qquad \text{with} \quad \mathbf{q}_p = (q_p, p_p) \tag{2.12}$$

Equation (2.11) can thus be interpreted as a kinetic energy budget, whose contributions λ_n are listed in Appendix B and grouped with respect to their physical origin (inertia, drag, 'Trouton' viscosity, surface tension, hydrostatic pressure) and whether they emanate from the projections of the linearized momentum balance in the x or z directions.

3. Experimental set-up

3.1. *Description of the set-up*

The experimental apparatus is shown in figure 2. It consists in an inclined glass plate (150 cm × 37 cm) placed on a massive framework mounted on rubber feet to reduce the

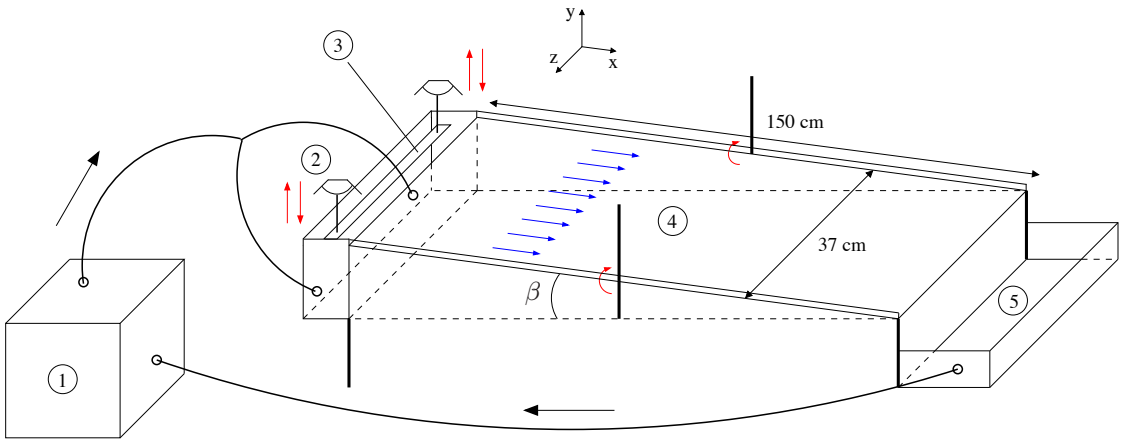


FIGURE 2. Sketch of the experimental set-up. 1: pump, 2: loudspeakers, 3: aluminium plate, 4: glass plate, 5: collection tank.

Physical parameter	Notation	Domain of variation
Density	ρ	$998 - 1082$ kg/m^3
Kinematic viscosity	ν	$1 - 2.8.10^{-6}$ m^2/s
Surface tension	σ	$49 - 72$ mN/m
Temperature	T	$18 - 23\,^\circ$C
Kapitza number	Γ	$1971 - 7213$
Inclination angle	β	$5 - 18\,^\circ$
Volumetric flow rate	Q	$0 - 130$ l/h
Reynolds number	R	$0 - 60$
Frequency	f	$3 - 9$ Hz

TABLE 1. Experimental parameters (water, water-glycerine and butanol mixtures).

influence of environmental vibrations. The inclination angle can be changed in the range 0 - 20°. A gear pump brings the liquid from a collection tank located at the exit of the plane to an upstream tank from which it emerges and flows down the plane. This upstream tank is filled with several glass sphere layers in order to homogenize the entering flow. A temporal forcing of the film is introduced at the inlet to trigger two-dimensional reproducible solitary waves. An aluminum plate is fixed to the membrane of two loudspeakers and generates harmonic vibrations above the liquid surface on the whole width of the upstream tank. Water, water-glycerin and butanol solutions are used as working fluid. The mass flow rate is measured by weighting at the exit and the temperature and density of the liquid are controlled during the experiments. Experimental parameters and their range of variation are specified in table 1. The wave patterns are visualized by illuminating the liquid film with oblique white light and by observing from above with a 2D camera to provide shadow images. The Schlieren method developed in Moisy *et al.* (2009), described in detail in the next subsection, is used to measure the film thickness.

3.2. *Schlieren method*

Three-dimensional wavy patterns are characterized by instantaneous measurement of the film thickness over an area of typical 10 cm × 10 cm extension using a Schlieren Synthetic method. This method is based on the analysis of a refracted image of a dot-pattern visualized through a liquid/air interface and is applicable if the surface curvature is weak in order to prevent ray crossings. Under restrictive conditions (weak slope approximation

and weak amplitude approximation), the surface gradient is proportional to the apparent displacement field seen by a camera located far from the dot-pattern. A numerical integration based on a least square inversion of the gradient operator is employed for the reconstruction of the surface height (Moisy *et al.* 2009). While Moisy *et al.* (2009) were always in the situation where a reference state corresponding to a flat interface is easily available, in the falling film problem we do not have access to the –unstable– reference state with the same mean height h_0 than the deformed state. Additional measurements are thus required to obtain absolute values of the thickness. We used a needle mounted on a microscopic translation stage to measure the absolute maximum amplitude of the waves. The reconstructed height field is rescaled a posteriori by adjusting the mean thickness h_0 such that the maximum calculated by the Schlieren method corresponds to the needle measurement.

In practice, the dot-pattern is located just behind the glass plate. The camera is placed at a distance $H \sim 140$ cm from the dot-pattern and the typical visualized field length is $L \sim 10$ cm. The maximum paraxial angle is given by $\theta_{max} = L/(\sqrt{2}H) \sim 0.05 \sim 3\,^\circ$ which is sufficiently low to assure a negligible paraxial distorsion. Within the weak slope approximation, the surface gradient ∇h is directly proportional to the displacement field $\delta\vec{r}$ of the dots:

$$\nabla h = -\left(\frac{1}{(1-1/n_l)\ h_p} - \frac{1}{H}\right)\delta\vec{r} \tag{3.1}$$

where n_l is the refractive index of the liquid and h_p is the effective pattern-surface distance which is related to the film thickness h by the formula:

$$h_p = h + \frac{n_l}{n_g}\,h_g \tag{3.2}$$

n_g and h_g stand for the refractive index and the thickness of the glass plate, respectively. Under the weak amplitude approximation, $h \sim h_0$, and (3.1) is simply linear.

In our experiments, $h_0 \sim 0.5$ mm and the surface height lies in the range 0.2 mm - 0.8 mm. The weak amplitude approximation is not well verified. However, consequences on the slope calculation remain acceptable since the second term of (3.2) is much greater than h ($n_l = 1.33$, $n_g = 1.52$ and $h_g = 5.9$ mm). The maximum slope magnitude calculated from (3.1) is about 0.3 providing an error less than 1 % compared to the nonlinearized case. The weak slope approximation is thus valid in our configuration. The accuracy of the method applied to our configuration can be estimated to yield an error of 20 μm. The spatial resolution depends on the camera resolution, the field size and the dot-pattern characteristics and is estimated to be around 0.5 mm. The temporal resolution is directly related to the acquisition rate of the camera, which varies from 100 to 500 Hz.

In addition, a one-point temporal measurement based on CCI (Confocal Chromatic Imaging) technique has been performed. The principle of the CCI technique is to focus a polychromatic point light using a biconvex lens which provides a continuum of monochromatic images of the point source due to its chromatic aberration. A pinhole collects the light originating from a reflecting interface placed in the continuum, which is then analyzed by a spectrometer. The location of the interface is then deduced from a calibration curve. The sensor model used in our experiments (Micro-Epsilon IFS2403-10) allows for the detection of the air-water interface location with a precision of 1 μm and a temporal resolution in the range 0.1 - 10 kHz but does not directly measure the thickness of the film as the probe cannot detect the water-glass interface.

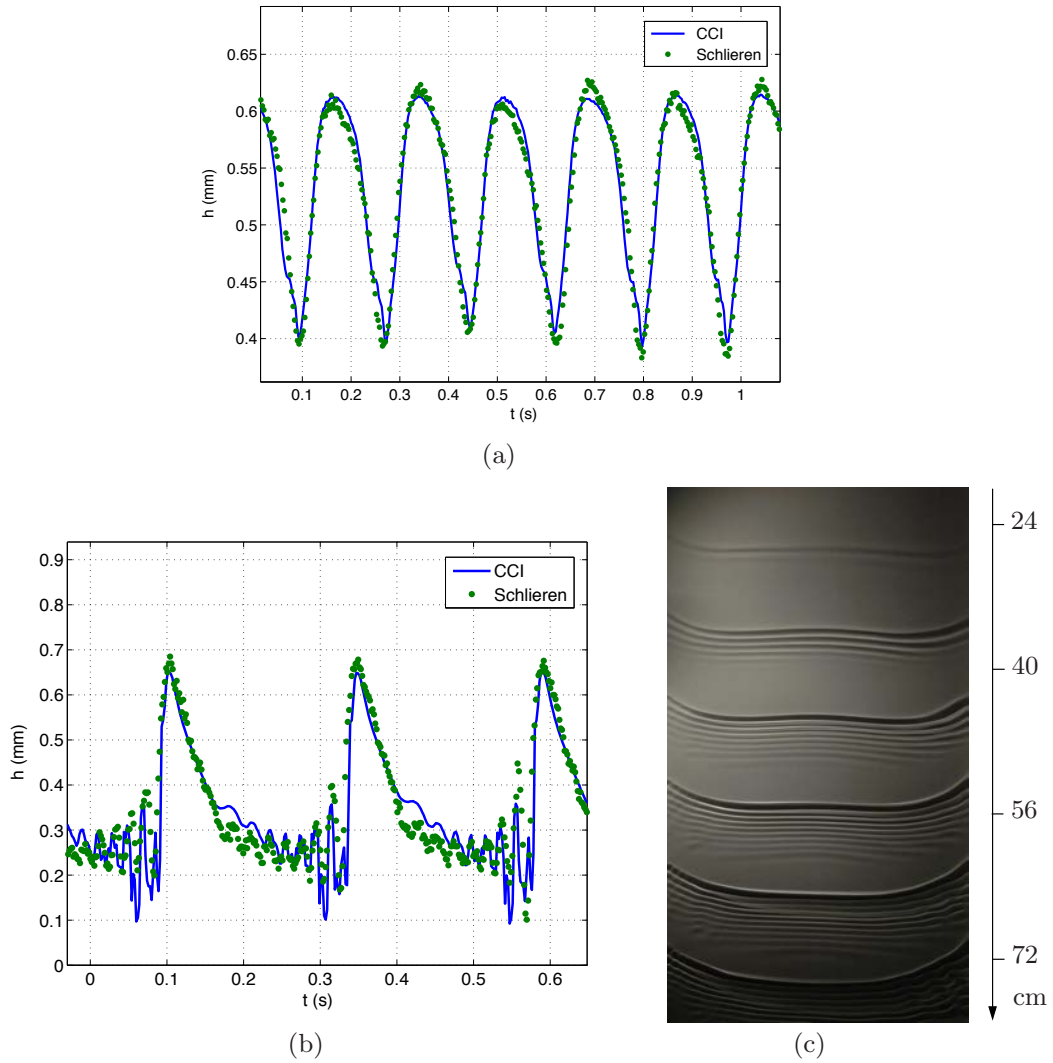


FIGURE 3. (a) and (b) Validation of the Schlieren method by comparison with CCI measurements. The distance from inlet is $x = 35$ cm. (a) γ_1 waves: $\beta = 5.2°$, $Re = 37$, $f = 5.7$ Hz, $\nu = 1.03 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 7213$. (b) γ_2 waves: $\beta = 10.2°$, $Re = 42$, $f = 4.1$ Hz, $\nu = 1.00 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 6018$. (c) View from above showing the curvature of solitary wave fronts for a water-glycerine mixture($\beta = 7.9°$, $Re = 35$, $f = 3.2$ Hz, 34 % , $\nu = 2.8.10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 1448$).

4. Results

4.1. *Validation of the Schlieren method*

Figure 3 displays the wave profiles of two-dimensional traveling waves generated by a periodic forcing at inlet. After an initial linear growth, the wave amplitude rapidly saturates and periodic 2D waves emerge with a frequency corresponding to the applied inlet forcing. Time records shown in subfigures (a) and (b) and obtained using the Schlieren and CCI techniques are typical of the γ_1 and γ_2 slow and fast waves that had been also observed by Liu & Gollub (1994). The γ_1 waves are nearly sinusoidal for their rounded crests and sharp troughs. The γ_2 waves displayed in figure 3(b) exhibit a large amplitude tear-drop hump preceded by capillary ripples. This separation into two regions, a hump region and a capillary region, which characterizes γ_2 waves, is made possible by

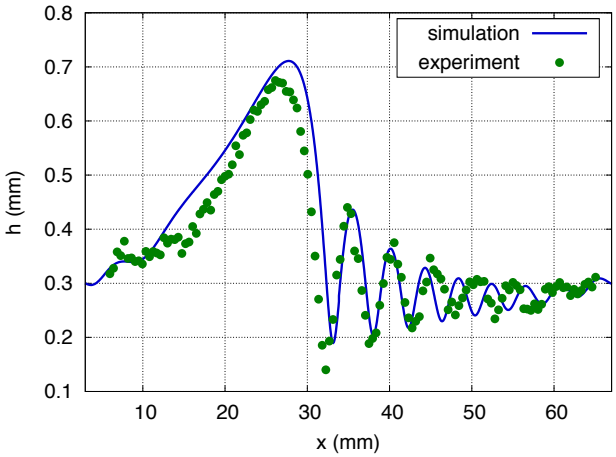


FIGURE 4. Comparison between a Schlieren measurement and the 2D stationary solution obtained by continuation. The experimental parameters are : $\beta = 10.2^\circ$, $Re = 42$, $f = 4.1$ Hz, $\nu = 1.00 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 6018$

the large ratio between the spatial extension of the hump and the typical length of the capillary ripples. In experiments conducted with water-glycerin mixtures, well separated waves, i.e. waves separated by a flat film are generally observed as shown in figure 3(c) or from Liu and Gollub's results (Liu & Gollub 1994), because capillary waves are efficiently damped by elongational viscosity. As the current experiments are mainly performed with water as working fluid, the film is never flat between two waves and 2D γ_2 waves are not strictly solitary as capillary ripples tend to accumulate between successive humps. Yet, as a convenience, we refer to them hereinafter as quasi-solitary waves.

Due to the regularity of the 2D traveling wave trains, the accuracy of the Schlieren method is estimated by comparisons with respect to the local temporal CCI technique. The two techniques provide close results when γ_1 waves are encountered. Agreement is somewhat less satisfactory in the case of γ_2 waves. However, the minimum and maximum heights as well as the amplitude, spatial distribution and lengths of the capillary ripples are well captured by the Schlieren method, which gives us confidence in its accuracy. The observed discrepancy is mainly due to the technical impossibility of recording temporal signals of the free surface elevation simultaneously at exactly the same distance from the side edge of the plane. Indeed, the two signals displayed in figure 3(b) have been recorded at two different locations spaced 3 cm apart in the transverse direction. This small shift in the measuring locations can be however significant as 2D waves have a tendency to present a non-negligible curvature (Leontidis *et al.* (2010)), as illustrated in figure 3(c). As a result, the capillary region of γ_2 waves is slightly modulated in the transverse direction, which may be sufficient to explain the slight disagreement between the records shown in figure 3(b). It should be mentioned, however, that the sidewall effects on the onset of the primary instability are weak in the range of inclination angles under study (Vlachogiannis *et al.* (2010)). Furthermore, according to Leontidis *et al.* (2010), the wave curvature decreases drastically as the forcing frequency, f, is raised, and in a less extent as the Reynolds number, Re, increases. In the current paper $f > 3\ Hz$ and $Re > 35$ leading to relatively small final curvatures. In all the experiments the 2D basic state consists in a fully developed 2D solitary waves moving with a constant phase speed and 3D patterns are triggered in the center part of the channel where the fronts are slightly curved as shown in Figure 1.

We next question the reliability of the two-equation model (2.3) to capture the charac-

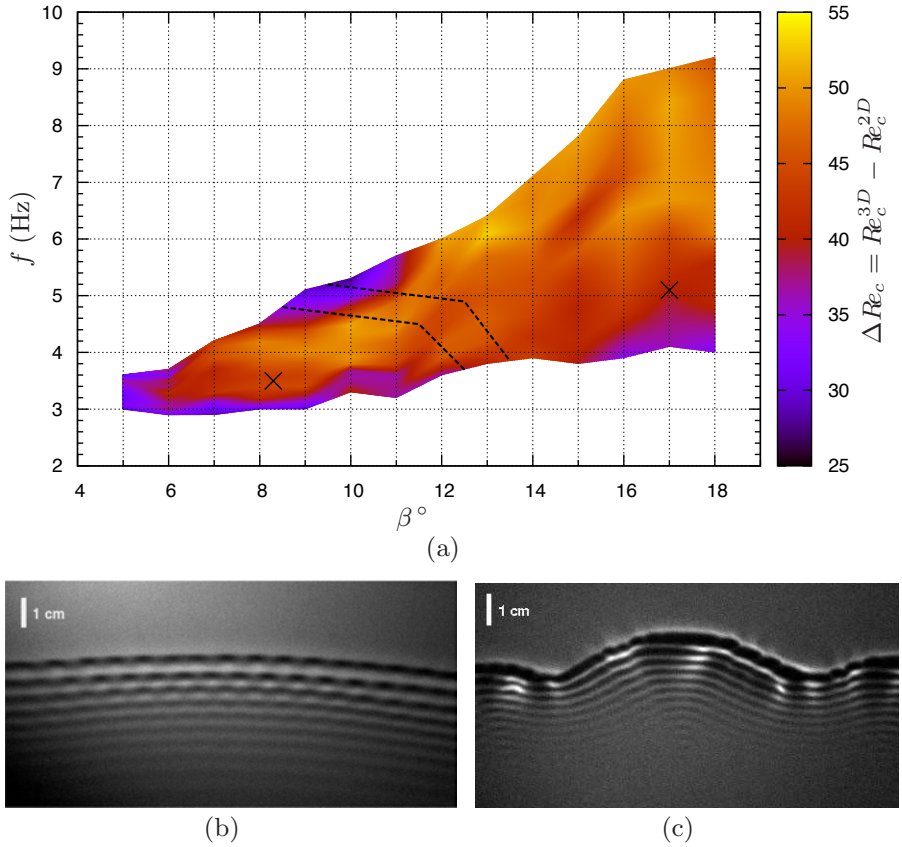


FIGURE 5. 3D instability of γ_2 solitary waves. Fluid is water ($\nu = 1.08\times10^{-6}$ m^2/s). (a) threshold of the 3D secondary instability in the $\beta - f$ plane. The gap between the thresholds of the primary 2D and secondary 3D instabilities, $\Delta Re_c = Re_c^{3D} - Re_c^{2D}$, is represented as a colored map. The dashed lines delimit regions where a short-wave instability mode (small inclination angle β) or a long-wave instability mode (large β) is observed. Associated shadowgraphs of rugged waves and scallop waves are shown in subfigures (b) and (c), respectively. Parameters are $\beta = 8.3\,°$, $f = 3.5$ Hz and $\beta = 17\,°$, $f = 5.1$ Hz, respectively, corresponding to the two crosses depicted in subfigure (a).

teristics of γ_2 waves satisfactorily. Figure 4 compares experimental profiles obtained with the Schlieren method to traveling wave solutions given by the model. The comparison is satisfactory as both the wave peak height (710 μm for the experiments and 670 μm for the simulation) and the wave velocity (26.2 cm/s and 24.2 cm/s) are well reproduced by the simulation. The shape of the capillary waves region is also very similar even though the model predicts one more capillary wave in this case.

4.2. *Stability diagram of solitary waves*

The stability of two-dimensional γ_2 solitary waves with respect to transverse perturbations depends on the Reynolds number, or perhaps more precisely, on the distance from the instability threshold $\Delta Re = Re - Re_c^{2D}$, where $Re_c^{2D} = \frac{5}{6}\cot\beta$ is the critical Reynolds number for the onset of the primary instability (Benjamin 1957). In line with the findings by Liu *et al.* (1995); Leontidis *et al.* (2010), 2D γ_2 waves remain stable to transverse secondary perturbations below a certain critical Reynolds number Re_c^{3D}, which is a function of the geometry (inclination angle β) and the shape of the 2D wave train (forcing frequency f). Figure 5(a) presents an estimate of Re_c^{3D} based on our experimental findings in the plane f versus β. The experimental procedure used to find Re_c^{3D} is as follows: first,

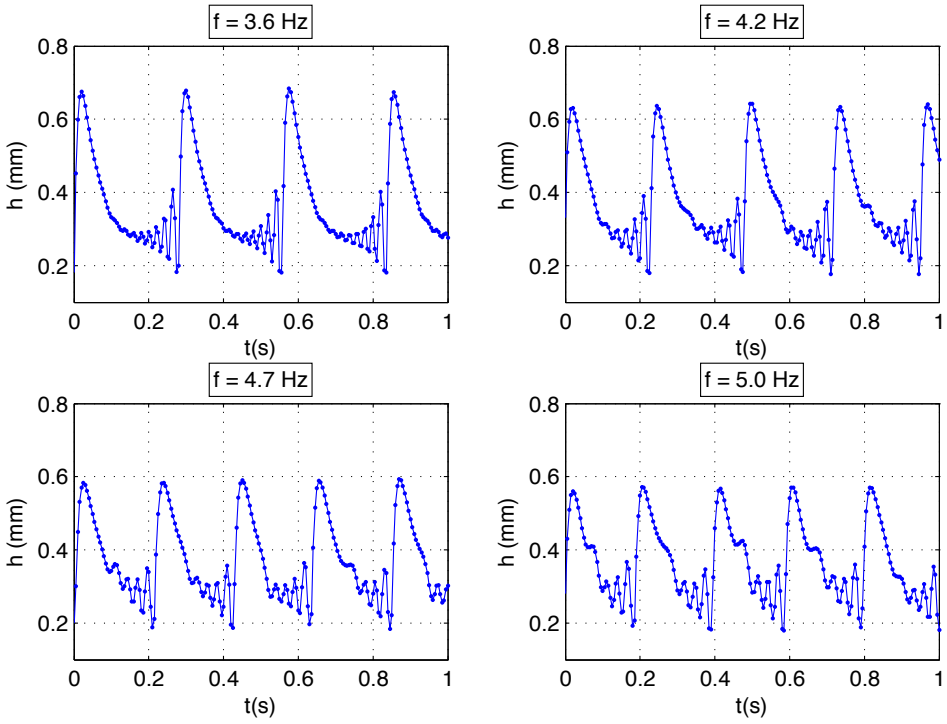


FIGURE 6. Time records of the film height from CCI measurements at different forcing frequencies f. $Re = 34$, $\beta = 10°$. Fluid is water ($\nu = 1.08 \times 10^{-6}$ m^2/s).

at a given inclination angle, the flow rate is adjusted such that $Re = Re_c^{2D} + \Delta Re$ with a moderate value of ΔRe. The frequency range over which 2D solitary waves are triggered is then identified. In fact, this range is rather limited. Indeed, at low frequencies, the long-wave nature of the primary instability weakens the response of the flow to the inlet forcing, as the spatial growth rate goes to zero along with the forcing frequency. As a result, synchronization of the flow requires levels of the inlet excitation amplitude that are not achievable using the forcing device adopted in the experimental set-up. At high frequencies, either the flow does not respond to the applied periodic forcing and the natural disordered evolution of the film is observed, or γ_1 slow wave trains are selected (already studied (Scheid *et al.* 2006) and not considered here). By gradually raising the frequency of the inlet forcing starting from a low value, the minimum frequency at which the flow synchronizes to the applied forcing defines the lower bound in frequency for 2D γ_2 waves. As the frequency is further increased, the waves become less and less isolated, the hump and capillary regions are less discernible as the ratio of the spatial extension of the hump and the length of capillary waves decreases. This behaviour is illustrated in figure 6, which presents time records of the film height at different forcing frequencies for $\beta = 10°$ and $Re = 34$. At $f = 3.6$ Hz, the waves are quasi-solitary with an extended capillary region. Increasing the frequency reduces the number of ripples and lowers the difference between the extension of the hump and the typical length of the capillary ripples. At higher frequencies, the primary wave train undergoes spatial modulations which generates a 2D sideband instability. Similar spatial modulations of multi-trough γ_1 wave trains have been reported by Liu & Gollub (1994). The onset of spatial modulations of the wave train determines the upper bound of the frequency.

The above procedure used to determine the domain of occurrence of 2D γ_2 waves has been repeated for β in the range 5 ° to 18 ° with a step of 1 °. We have then considered their

domain of stability with respect to 3D perturbations. For a given couple of parameters f and β, the Reynolds number is gradually raised until three-dimensional wave trains are observed, which determines Re_c^{3D}.

The two types of 3D patterns, either rugged waves (figure 5(b)) or scallop waves (figure 5(c)), have been detected depending on the inclination angle. At small inclination angles, a short-wave mode is observed in the region of the capillary waves. At higher inclination angles, a long-wave mode is triggered and coexists on scallop waves with the short-wave mode (see figure 5(c)). For the two regions, ΔRe_c lies in the range $28 - 53$ and increases with f.

4.3. *Capillary modes*

In this section, we focus on the short-wave instability mode of the 2D γ_2 waves. Figure 7(a) presents a typical topography of rugged waves obtained from the Schlieren acquisition technique. Parameters are $\beta = 8.3\,^\circ$, $Re = 60$, $f = 3.5$ Hz, $\nu = 1.05\times10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 6013$ (depicted by a cross on figure 5(a) corresponding to $Re_c^{3D} = 49.7 \pm 0.9$). Three-dimensional modulations are restricted to the capillary region of the waves. The maximal deformation in the transverse direction z is observed on the first capillary ripple, whose amplitude is also maximal. Instead, the front of the main wave is almost not affected by the presence of the 3D patterns, which implies that the wave speed in the 3D regime is very close to the 2D one. Noteworthy is the fact that successive modulations of the peaks (or troughs) of the capillary ripples exhibit a π phase-shift (see figure 7(b)).

We next question the ability of the linear stability analysis presented in § 2.4 to reproduce the experimental observations. Figure 7(c) displays a snapshot of the free-surface deformation obtained by superimposing the 2D γ_2 solution to the WRIBL model (2.3) with the eigenfunction corresponding to the maximum growth rate. The amplitude of the eigenmode has been adjusted so as to facilitate comparisons with the experimental results displayed in figure 7(b). Agreement between experimental and numerical snapshots prove to be very satisfactory. The short-wave mode characteristics are well captured by the most amplified eigenmode. In particular, the pronounced deformation of the capillary ripples, the observed checkerboard pattern (which results from the π phase-shift between successive crests), the undeformed hump region, are qualitatively and quantitatively reproduced by the 3D linear stability analysis. Indeed, the experimental spanwise wavelength is 10 mm which is in good agreement with the result of the stability analysis (9.1 mm). This result indicates that the sidewall effects on the development of the capillary mode are negligible.

Finally, the energy budget of the linear perturbations offers an opportunity to identify the mechanism responsible for the destabilization of the capillary region. Following the procedure outlined in § 2.5, the most important contributions λ_n to the kinetic energy budget (2.11) are presented in figure 8, along with the maximum growth rate (thick solid line), as functions of the transverse wavenumber k_z. Let us first notice that $k_z = 0$ is at least a marginal mode thanks to the phase invariance of the 2D waves (Skotheim *et al.* 2003). In fact, for the set of parameters corresponding to figure 7, the maximum growth rate λ at $k_z = 0$ is found to be positive, the γ_2 wave being unstable with respect to 2D perturbations. The 3D nature of the secondary instability results from the departure of the different contributions λ_n of the kinetic energy budget from their values at the reference $k_z = 0$. In the name of convenience, contributions λ_n are thus said to be stabilizing, that is to damp 3D perturbations, if their departure form the reference state $k_z = 0$ is negative. Conversely, contributions are said to be destabilizing if they promote 3D perturbations as compared to 2D ones, i.e. when their departure from the reference

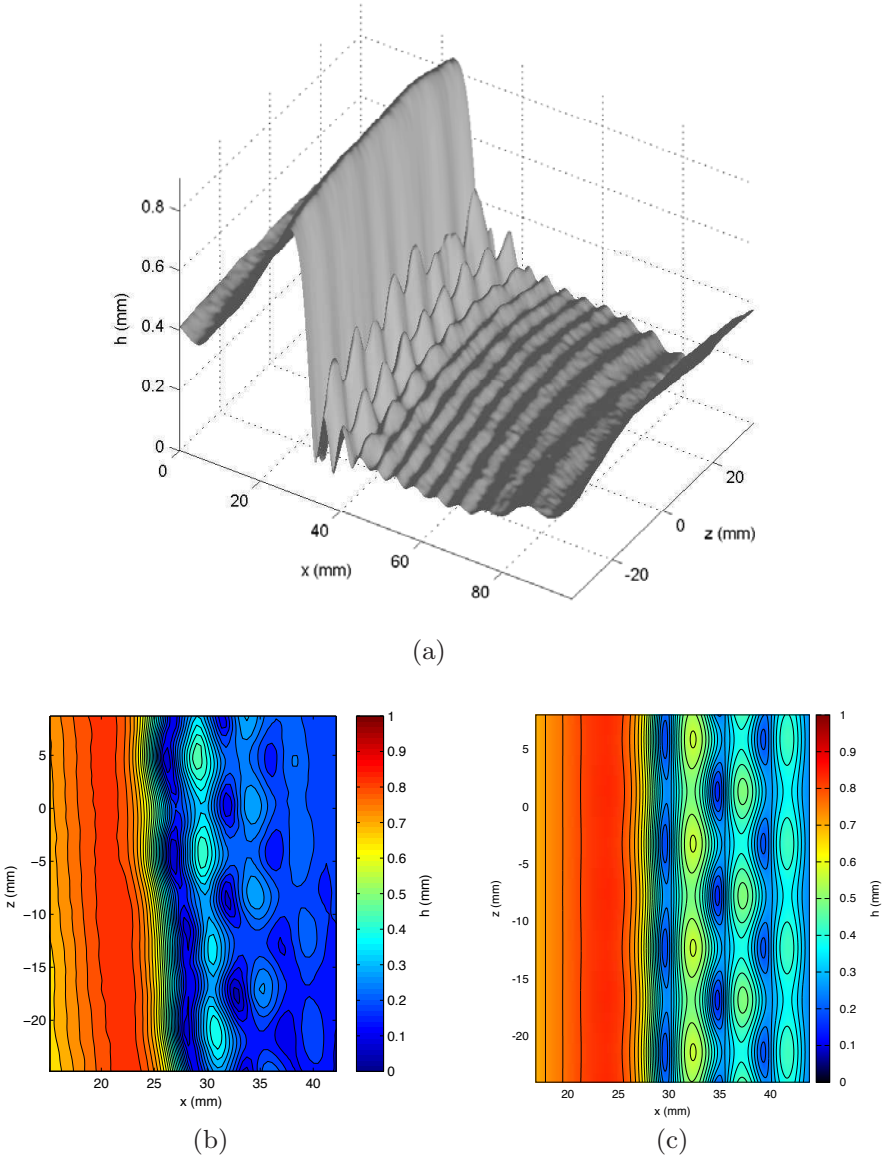


FIGURE 7. (a) 3D Schlieren topography for the case ($\beta = 8.3^\circ$, $Re = 60$, $f = 3.5$ Hz, $\nu = 1.05 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 6013$) corresponding to the leftmost cross depicted in figure 5(a). 3D patterns of short wavelength are observed in the capillary region of a γ_2 solitary wave. (b) experimental isothickness contours. (c) superposition of the 3D numerical eigenfunction to the 2D base state.

state $k_z = 0$ is positive. In what follows, without impediment to the clarity of the exposure, departures of λ_n from their values at $k_z = 0$ are substituted to λ_n themselves.

Our results presented in figure 8 indicate that surface tension contributions to the energy budget are all but one destabilizing. Besides, the most destabilizing one corresponds to the streamwise gradient of surface tension, i.e. $\frac{5}{6\delta}\left[h_0\tilde{h}'''\bar{\tilde{q}} + h_0'''\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right]$, referred to as '$q$-surface-tension x' terms. Noteworthy is the significant augmentation of this contribution for the most amplified perturbation at $k_z \approx 7$ cm^{-1}. Therefore, the short-wave 3D secondary instability of γ_2 waves emanates from the surface tension gradients in the capillary region of γ_2 waves. Because of its origin, this short-wave mode will be referred to as a *capillary mode*. Besides, the onset of this capillary mode being triggered by streamwise

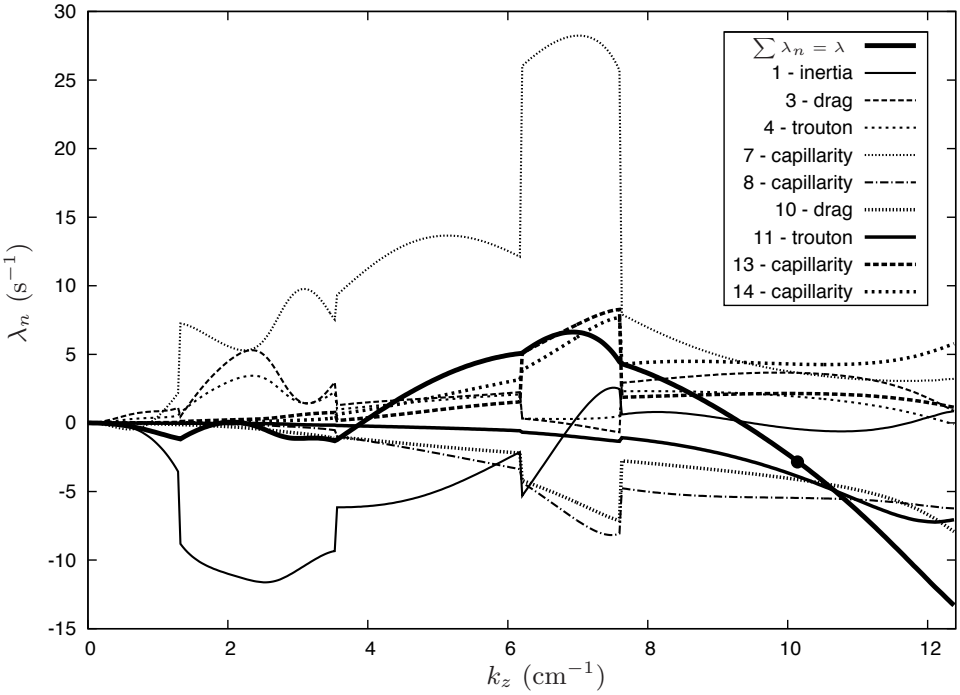


FIGURE 8. Energy budget issued from the stability analysis of the 2D γ_2 wave for the parameter set corresponding to Figure 7. Contributions λ_n are listed in table 2 in appendix B. For each contribution λ_n as well as for the total, i.e. the growth rate λ_r, the reference value at $k_z = 0$ has been subtracted ($\lambda_r(k_z = 0) = 2.85\, s^{-1}$). The contributions which do not contribute to the 3D instability are not reported. The range of unstable wavenumber ($\lambda_r > 0$) extends from zero to $k_z \approx 10.1$ cm^{-1} (indicated by a solid circle).

curvature of the ripples suggests a Rayleigh-Plateau mechanism. Each capillary ripple can be viewed as a succession of half cylinders with axes that are aligned with the z axis, in which case the (stabilizing) axial curvature is $\propto \partial_{zz}h$ and the azimuthal (destabilizing) curvature is $\propto \partial_{xx}h$. The 3D short wave instability offers a mechanism to reduce the free surface area which tends to increase with the accumulation of capillary ripples at the front of solitary waves.

However, the analysis is somehow more complex. As can be seen from figure 8, the contributions λ_n are discontinuous functions of k_z. Each discontinuity signals the substitution of the most amplified eigenmode by another mode. Five successive changes of dominant eigenmodes are observed, which considerably complicates the analysis. Instead of a single capillary mode, two are found to be in competition. The transition between the most amplified modes strongly depends on the inclination angle. Figure 9(a) presents the growth rate of 3D perturbations as function of k_z for four different inclination angles, the other parameters being kept constant. For $\beta < 12\,^\circ$, the most amplified eigenmode is the capillary mode identified in figure 8 and illustrated in figure 7. This mode is stationary. Instead, if β exceeds $12\,^\circ$, the most amplified capillary mode is oscillatory, characterized by two conjugate eigenvalues with eigenvectors corresponding to oblique waves propagating toward $z > 0$ and $z < 0$. The corresponding free-surface patterns are shown in figures 9(b) and 9(c). However, this oscillatory mode has not been observed in the experiments. Its occurrence coincides with the onset of the long-wave mode which is the subject of the next subsection. Besides, sidewall effects break the invariance of the 2D wave in the transverse direction and therefore preclude the propagation of oblique waves (figure 3(c)).

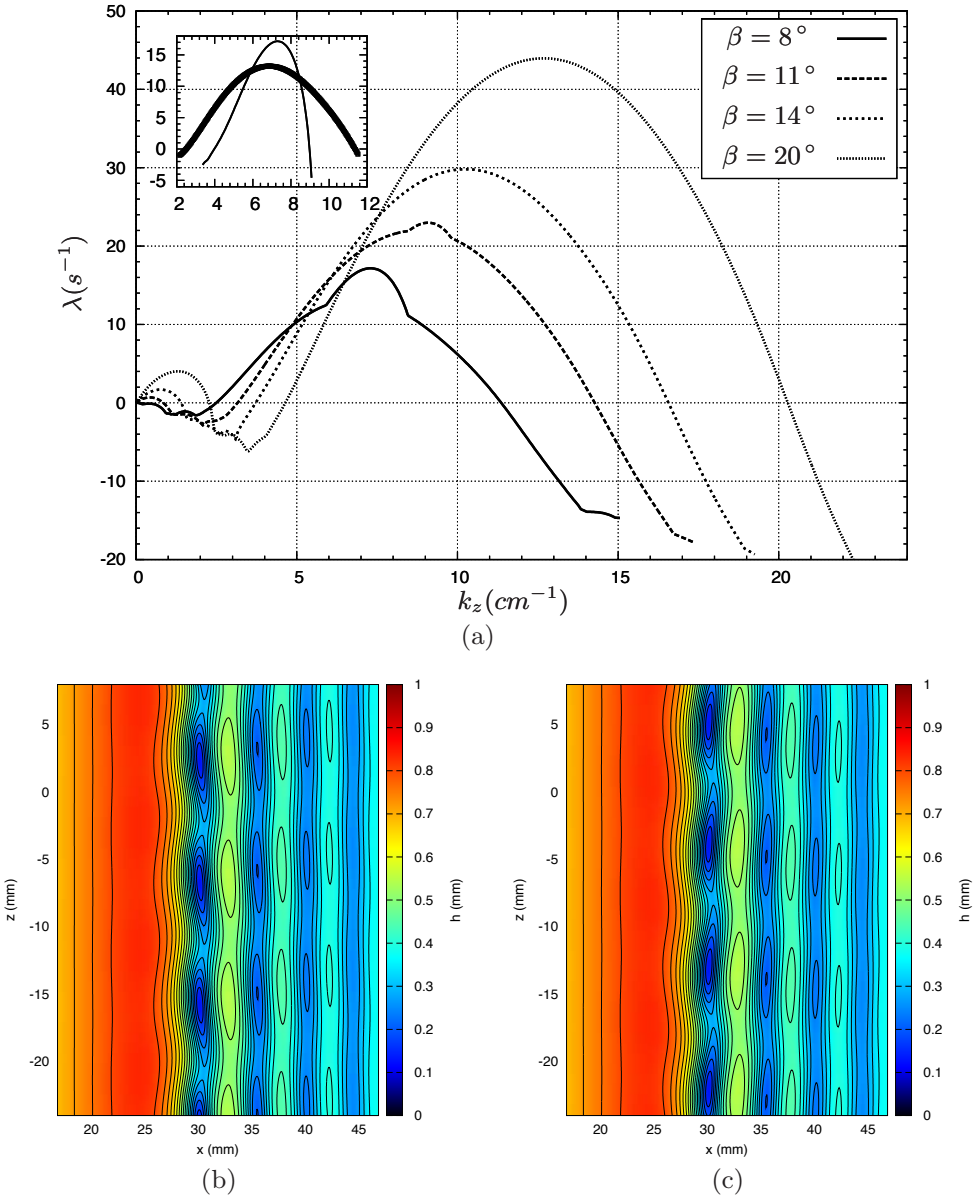


FIGURE 9. Competition between capillary modes as β is varied. (a) 3D instability growth rate λ as a function of the spanwise wavenumber k_z for four values of β ($Re = 50$, $\lambda_x = c/f = 45.7$ (non-dimensional), $\nu = 10^{-6}$ m^2/s, $\sigma = 72$ mN/m). The insert is a close-up showing the two most unstable eigenvalues for $\beta = 8°$. (b) and (c) show the free-surface pattern corresponding to the superposition of the 2D wave with the oscillatory mode.

.

4.4. *Inertial mode*

In this section, we consider the long-wave instability mode occurring when the plane is sufficiently inclined. Figure 10 presents experimental observations of scallop waves resulting from the long-wave instability. Parameters are $\beta = 17°$, $Re = 53$, $f = 5.1$ Hz, $\nu = 1.01 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 5024$ corresponding to the rightmost cross in figure 5(a) for which $Re_c^{3D} = 42.6 \pm 0.9$. Contrary to rugged waves promoted by the purely capillary mode (illustrated in figure 7), the whole wave, that is both the main hump and the capillary region, is modulated in the transverse direction. Modulations of different

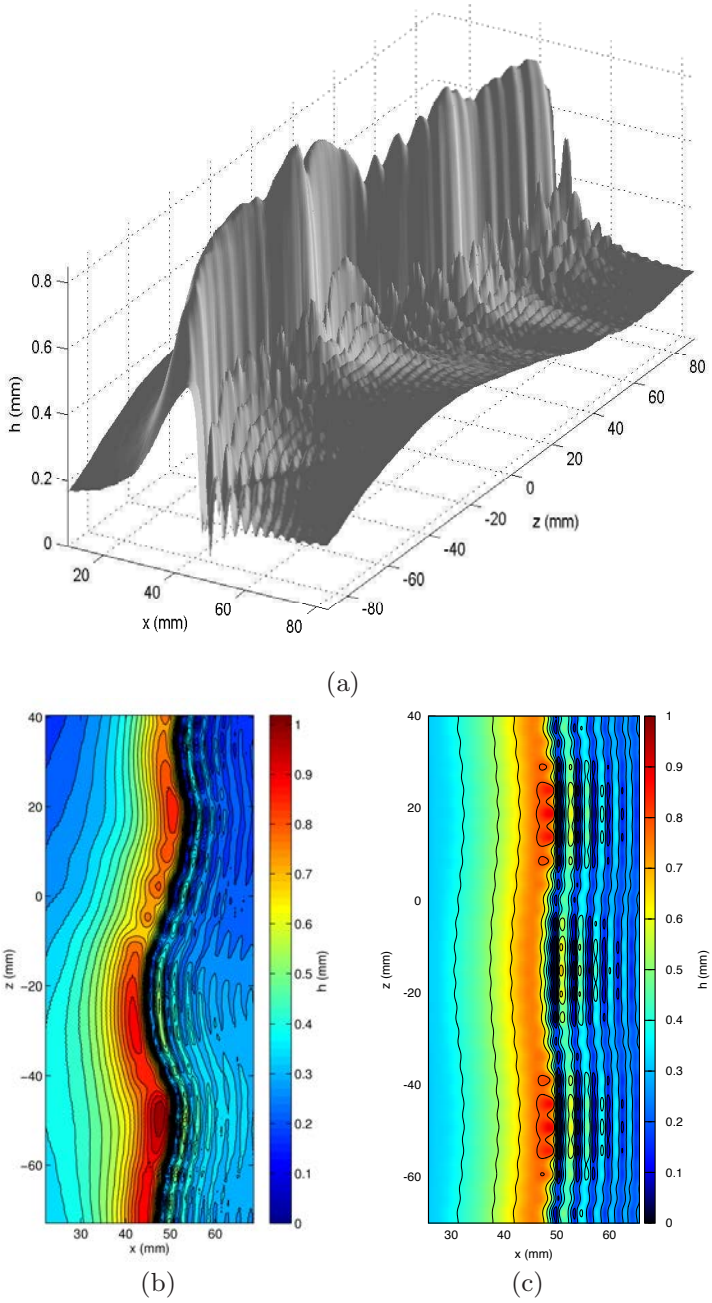


FIGURE 10. (a) 3D Schlieren topography ($\beta = 17°$, $Re = 53$, $f = 5.1$ Hz, $\nu = 1.01 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\Gamma = 5024$) corresponding to the rightmost cross depicted in figure 5(a). Competition between a short-wave and a long-wave instability mode. (b) experimental isothickness contours. (c) superposition of the 3D numerical eigenfunctions to the 2D base state.

wavelengths, around 6 mm and 80 mm approximately, are discernible in the experimental wave pattern (Figure 10(b)). The short-wave modulations are more pronounced in the capillary region, which supports the idea that the observed pattern originates from the combination of the capillary mode reported in the previous subsection, and of another long-wave mode. Floquet analysis based on the two-equation model (2.3) points to this conclusion. The growth rate of the most amplified transverse perturbations is

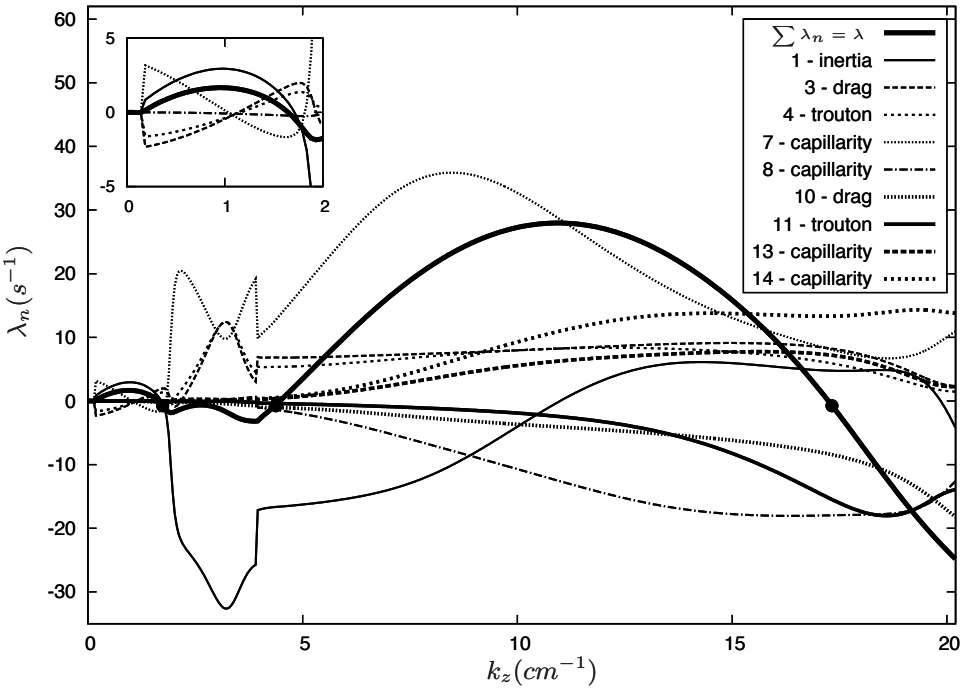


FIGURE 11. Energy budget issued from the stability analysis of the 2D γ_2 wave for the parameter set corresponding to figure 10(a). Contributions λ_n are listed in table 2 in appendix B. For each contribution λ_n as well as for the total, i.e. the growth rate λ_r, the reference value at $k_z = 0$ has been subtracted ($\lambda_r(k_z = 0) = 0.76\, s^{-1}$). The range of unstable wavenumber extends from zero to $k_z \approx 17$ cm^{-1} (indicated by a solid circle).

drawn in figure 11 as a function of the transverse wave number k_z (solid thick line). Two local maxima are observable corresponding to wavelengths of 5.8 mm and 67 mm, respectively, in good agreement with the experimental snapshots. Figure 10(c) presents a numerical reconstruction of the free surface pattern obtained from the combination of the 2D γ_2 solution to (2.3) and the two eigenmodes corresponding to the local maxima of the growth rate. This numerical reconstruction agrees well with the experimental snapshot (figure 10(b)) which provides further evidence for the involvement of the short-wave capillary mode with another long-wave mode. The energy budget (2.11) shed some light on the origin of the long-wave mode, which is found to be stationary (the imaginary part of the growth rate is zero). Indeed, the most destabilizing term in the long wavelength region is the streamwise inertia in the streamwise momentum balance, whose rise and decline match with the location of a local maximum (see figure 11 and its insert). We thus conclude to the inertial nature of the long-wave 3D instability mode, and refer to it as the *inertial mode*.

5. Discussion

5.1. *Instability threshold*

Delineation of the experimental results has been made possible in terms of the competition between a capillary and an inertial instability mode. We now pay attention to the prevalence domains of these two instability modes in order to explain the change of regime observed in the stability chart presented in figure 5.

The reported short-wave instability mode has a capillary origin. However, the physical

ingredient responsible for the existence of an instability threshold and thus the stabilization of the flow at low Reynolds number remains unclear. The localization of the instability eigenmode in the capillary region of the wave suggests that the onset of the instability is related to the amplitude of the capillary ripples, or perhaps more relevantly, to the amplitude of the curvature in this region of the wave. A simple argument based on the balance of the gradient of surface tension $\sim h\partial_{xxx}h$ and inertial terms $\sim \delta(q/h)\partial_x q$ gives $x = O(\delta^{-1/2})$ with $h = O(1)$ and $q = O(1)$ (Kalliadasis *et al.* 2012). The amplitude of the curvature in the capillary region of the solitary wave is thus proportional to δ. This suggests that the onset of the short-wave capillary mode corresponds to a certain threshold for the reduced Reynolds number, δ_c say. From (2.1) and (2.4), $\delta = \delta_c$ gives

$$Re_c^{3D} = \frac{1}{3}\delta_c^{9/11}\Gamma^{3/11} \propto (\sin\beta)^{-1/11}\,, \tag{5.1}$$

since $\Gamma \propto (\sin\beta)^{-1/3}$.

Turning to the long-wave mode, its inertial origin suggests an instability mechanism related to the local acceleration of the liquid-gas interface. Since Lord Rayleigh's pioneering work (Rayleigh 1883), a dense liquid overhanging a lighter one in a gravity field is known to be an unstable situation. More generally, an interface separating two fluids of different densities is unstable if the acceleration in the frame of reference moving with the interface is pointing towards the lighter fluid (Taylor 1950). As a consequence, a dense liquid underlying a lighter one can be unstable if the interface is accelerating downwards (in which case the relative acceleration in the frame of the interface is oriented upwards). This instability mechanism is involved, for instance, in the fingering instability of the liquid crown ejected by a drop splashing (Allen 1975), or in the azimuthal secondary instability of a sheared liquid jet (Marmottant & Villermaux 2004), and is proposed below as a possible premise for the long-wave inertial instability of γ_2 waves.

Let us consider a wave crest, sketched in figure 12, and focus on a point at the free interface in its local frame of reference (X,Y). This point undergoes a relative acceleration whose projection a_r in the normal direction to the interface, written in dimensional form, is

$$a_r = \left(\mathbf{g} - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\mathbf{e_y}\right).\mathbf{n} \tag{5.2}$$

where $\mathbf{n}$ refers to the normal vector directed from the liquid to the gas. Considering a traveling wave moving at the speed c and within the long-wave approximation, equation (5.2) reads

$$a_r = \begin{pmatrix} g\sin\beta \\ -g\cos\beta - c^2\frac{d^2h}{d\xi^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{dh}{d\xi} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

where $\xi = x - c\,t$ is the moving frame coordinate.

The interface remains stable if the relative acceleration points downwards ($a_r < 0$), which reads

$$c^2\frac{d^2h}{d\xi^2} + g\cos\beta + g\sin\beta\frac{dh}{d\xi} > 0\,. \tag{5.4}$$

For the solitary-like γ_2 waves considered in this study, the inertial long-wave mode is observed to develop at the crests of the waves. Therefore, the stability criterion (5.4) is expected to be first violated in regions surrounding the local maximum height ($d^2h/d\xi^2 < 0$ and $dh/d\xi \approx 0$), materialized by the A to B segment in the sketch 12. As a consequence, $g\sin\beta dh/d\xi$ is expected to be negligible as compared to the other two terms in (5.4) at the onset of the long-wave inertial mode. Balancing $c^2\frac{d^2h}{d\xi^2} \sim U^2/L$ and $g\cos\beta$, where

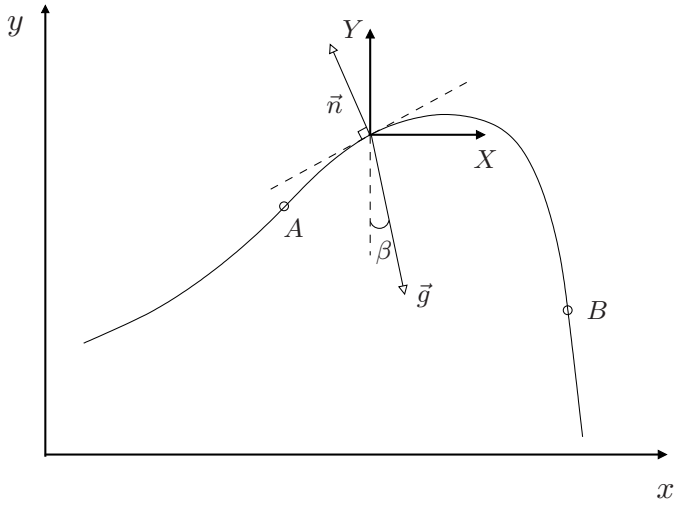


FIGURE 12. Sketch of a wave crest.

U and L stand for velocity and length scales, gives $U^2/(gL\cos\beta) = O(1)$. Selecting $U = g\sin\beta\bar{h}_{\rm N}^2/(3\nu)$ and $L = \bar{h}_{\rm N}$ corresponding to the Nusselt solution defines a critical Froude number Fr_c above which the instability sets in, or equivalently

$$Re_c^{3D} = \frac{1}{3}Fr_c^2\cot\beta \propto \cot\beta \tag{5.5}$$

Equation (5.5) must be contrasted with (5.1). A priori, the thresholds δ_c and Fr_c are not constants but depend on the shape of the γ_2 wave and are functions of the forcing frequency f. Yet, this dependence on f is expected to be weak if the waves are sufficiently isolated at sufficiently low frequencies. Formulae (5.5) and (5.1) are put to the test against experimental evidence in figure 13. Critical Reynolds Re_c^{3D} is plot versus the inclination angle β for forcing frequencies in the range [3.5, 4.6] Hz. This choice enables to cover a reasonably large interval of inclination angle, which otherwise is quite limited for a single frequency due to the limitations of the experimental procedure outlined in § 4.2, and warrants that the waves are sufficiently isolated. Experimental data are observed to form two clusters of points that are satisfactorily fitted by (5.5) and (5.1) with $\delta_c \approx 26$ and $Fr_c^2 \approx 6$. The intersection between the two curves occurs at $\beta \approx 13°$ which roughly corresponds to the transition between rugged and scallop waves observed in our experiments.

The Floquet stability analysis based on the two-equation model (2.3) provides another tool to validate the predictions (5.5) and (5.1). Figure 13 has been completed with the numerical results from the Floquet theory for the γ_2-wave solutions to (2.3) at a frequency $f = 4.2$ Hz. Agreement with (5.5) is convincing, though the threshold Fr_c differs from the experimental data, as numerical thresholds are significantly lower than the experimental ones. This discrepancy may have several origins. One possible explanation is the fixed location of the recorded experimental data, $x \sim 30$ cm. Perturbations that are not sufficiently amplified may remain undetected at that location, which suggests that experimental thresholds must be higher than numerical ones in agreement with our findings. Another reason for this discrepancy lies in the simplifications leading to the simplified model (2.3) with respect to the basic set of equations.

Finally, the onset of a Rayleigh-Taylor instability has been looked after by monitoring the stability criterion (5.4) for the solutions to (2.3). A remarkable agreement is achieved with the Floquet stability analysis though the Rayleigh-Taylor criterion (5.4) slightly

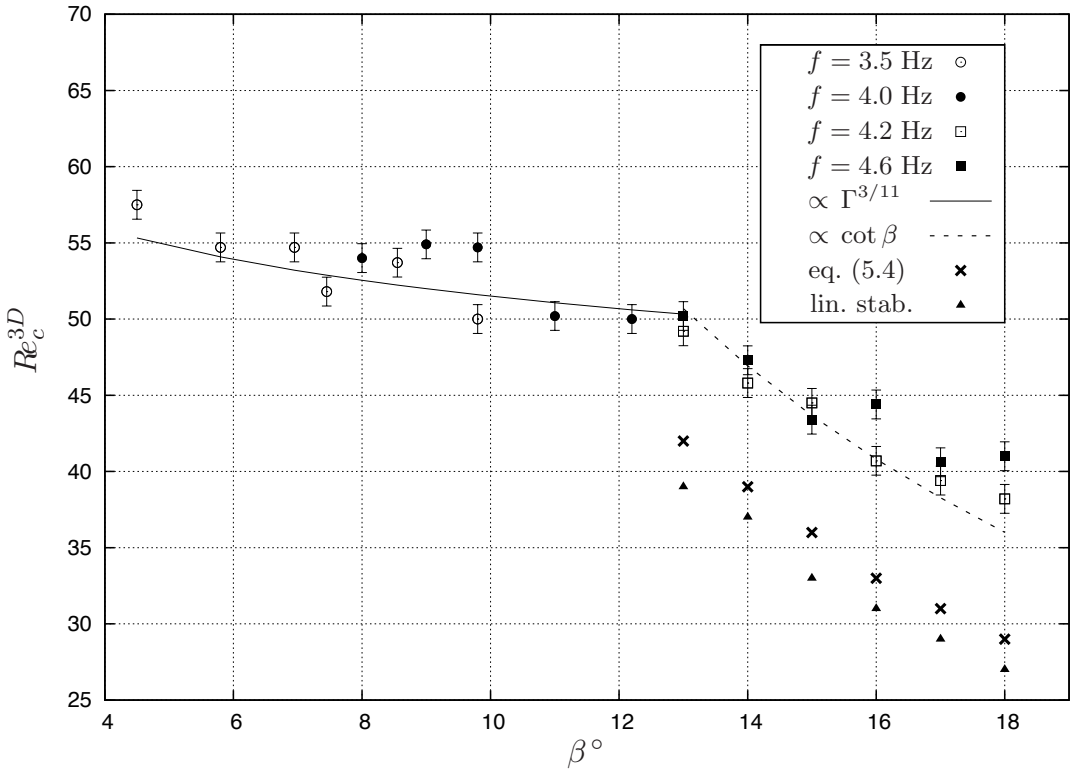


FIGURE 13. 3D instability threshold Re_c^{3D} as function of the inclination angle β for different values of f. Lines correspond to the predictions (5.5) and (5.1) ($\nu = 1.08\times10^{-6}$ m^2/s). Numerical thresholds from the criterion (5.4) and Floquet stability analysis are indicated.

underestimates the instability threshold. However, the wavelength and spatial growth rate values calculated by this method are higher than expected which may be due, as was pointed by Krechetnikov (2009), to the surface curvature. As a whole, we can however conclude that the proposed Rayleigh-Taylor mechanism for the onset of the long-wave instability mode is supported by numerical and experimental evidence.

5.2. *Influence of the liquid viscosity and surface tension on the 3D instability*

We end this section by considering the influence of the liquid properties on the secondary 3D instability of the quasi-solitary γ_2 waves. The analysis presented here is principally based on the numerical results from the Floquet theory.

We first consider the influence of the viscosity. Figure 14 presents the growth rate of the most amplified perturbation as function of the transverse wavenumber k_z as obtained from our Floquet analysis. Inclination angle and Reynolds number are set to $\beta = 20°$ and $Re = 50$ so that both capillary and inertial modes are excited. The dimensionless longitudinal wavelength $\lambda_x = 45$ is kept constant, which guarantees that the γ_2 wave remains quasi-solitary. Kinematic viscosity is varied in the range $\nu \in [1, 6] \times 10^{-6}$ m^2/s, corresponding to typical water-glycerine mixture ($\Gamma \in [390, 4806]$). A significant damping of the capillary mode is observed as viscosity is raised. The local maximum of the growth rate corresponding to the capillary mode decreases with viscosity and is reached at larger values of the dimensionless transverse wavenumber k_z (figure 14(a)). These effects on the capillary mode are consequences of the attenuation of the capillary ripples by the Trouton elongational viscosity. The viscous dispersion parameter η being augmented from 0.033 to 0.16, the profile of the wave is considerably modified as can be observed from the

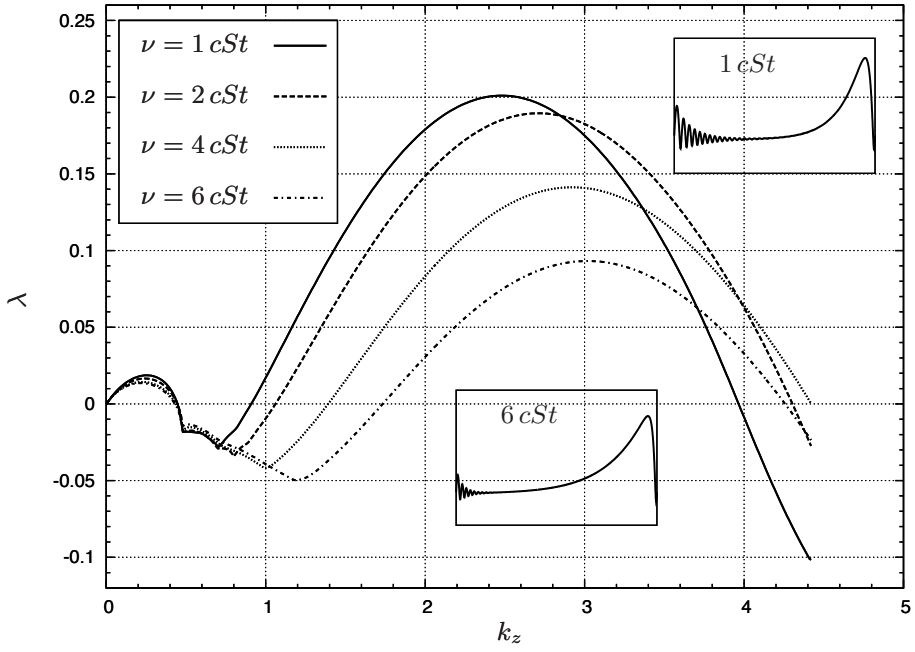
two inserts in figure 14(a). Number and amplitude of the capillary ripples dwindle as η increases. Ripples also present a shorter dimensionless wavelength. These alterations of the wave profile are consistent with the reported effects on the capillary mode of secondary instability. Instead, the inertial mode is almost unaffected by the variations of the viscosity, as a small decrease of the local maximum of the growth rate at $k_z \approx 0.3$ is noticeable. Indeed, the amplitude and shape of the hump region of the waves are only weakly altered, which explains that the Rayleigh-Taylor instability mechanism remains strong.

When recast using original dimensional quantities (see figure 14(b)), the growth rate of the most amplified perturbations presents however a local maximum for the capillary mode at a wavenumber k_z which actually decreases with the viscosity. This is a consequence of the variation of the length scale $\kappa\bar{h}_{\rm N}$ of the wave from 2 mm at $\nu = 10^{-6}$ m^2/s to 2.9 mm at $\nu = 6 \times 10^{-6}$ m^2/s, the Nusselt film thickness $\bar{h}_{\rm N} \propto \nu^{2/3}$ being an increasing function of the viscosity at constant Reynolds number ($\kappa \propto \nu^{-4/9}$ which gives $\kappa\bar{h}_{\rm N} \propto \nu^{2/9}$). For the same reason, the wavenumber corresponding to the local maximum of the growth rate for the inertial mode is also a decreasing function of viscosity.

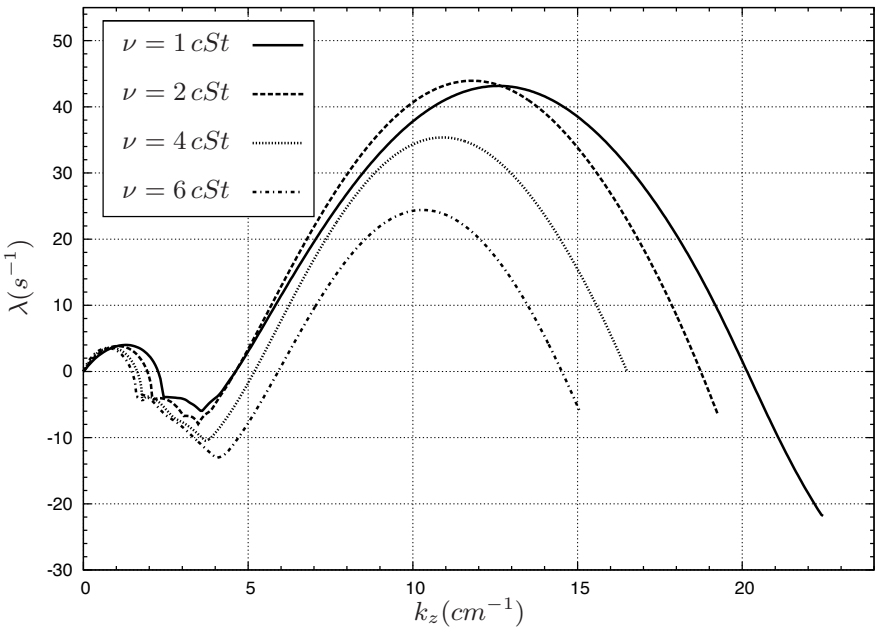
The influence of the surface tension is discussed in figure 15. σ is decreased from 72 mN/m to 15mN/m. The Kapitza number Γ thus decreases from 4806 to 962. The evolutions of the local maxima of the dimensionless growth rate corresponding to the capillary and inertial modes are similar to what is observed when the viscosity is raised. The inertial mode remains unaffected. Attenuation of the capillary mode results from the enhancement of Trouton elongational viscosity which follows from the reduction of the Kapitza number (and thus the augmentation of the dispersion parameter η). Comparison of figures 14(a) and 15(a) suggests that the stability of the waves is less affected by the variation of the surface tension than by the variation of the viscosity. Indeed, the Kapitza number varies in a range that is larger in figure 14(a) than in figure 15(a) since $\Gamma \propto \sigma/\nu^{4/3}$ and physically relevant viscosities cover a wider interval than surface tensions. However, when recast using dimensional quantities, the influence of the surface tension on the stability analysis is significantly different from what is observed with viscosity (compare figures 15(b) and 14(b)). This difference is a direct consequence of the decrease of the length and time scales, $\kappa\bar{h}_{\rm N}$ and $\kappa\nu/(g\bar{h}_{\rm N}\sin\beta)$, as the capillary length l_c reduces along with the surface tension.

We have next investigated the influence of Trouton elongational viscosity on the stability of γ_2 waves by varying $\eta = 1/\kappa^2$, while maintaining constant the two other reduced parameters, δ, and ζ (results not shown). The amplitude and the speed of solitary waves depend mainly on the reduced Reynolds number δ whereas η affects the amplitude of the capillary ripples. Raising η by a factor five has been found to suppress the capillary mode while affecting the inertial mode only weakly, which is consistent with the previous discussions.

A thorough experimental study of the influence of viscosity and surface tension on the 3D stability is beyond the scope of the present paper. However, we end this section by presenting some experimental observations which support the above conclusions. Figure 16 presents three snapshots of modulated quasi-solitary waves at conditions that are close to those discussed in figures 14 and 15 ($\beta = 17.9°$ and $Re = 70$), for water, a 22 % per weight water-glycerin mixture and a 1.3 % per weight water-butanol solution. The water-glycerin mixture is twice as viscous as water with a surface tension that remains close to the value for water, whereas the water-butanol solution has a significantly lower surface tension than water but keeps a roughly equal viscosity. Figure 16(a) is typical of modulated scallop waves on water films arising from the interplay of the capillary and inertial 3D instability modes. Short and long-wave modes have wavelengths that can be

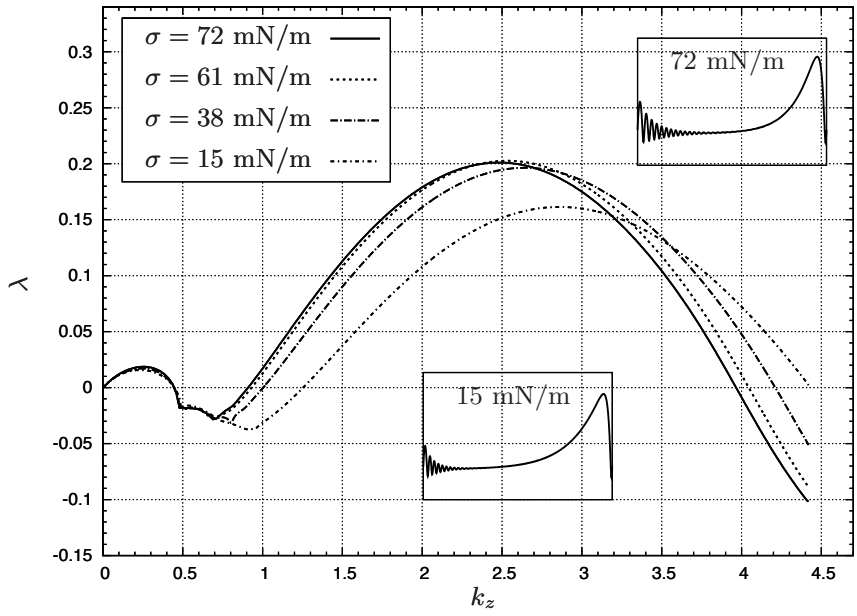


(a)

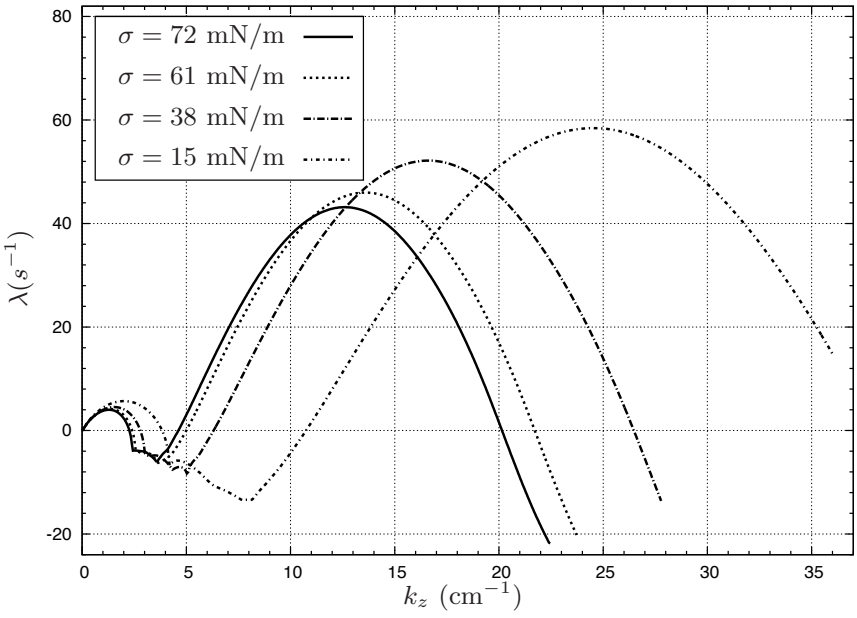


(b)

FIGURE 14. Influence of the liquid viscosity on the 3D linear stability of γ_2 quasi-solitary waves. The maximum growth rate λ is shown versus the transverse wavenumber k_z. Parameters are: $\beta = 20^\circ$, $\lambda_x = 45$ (in non-dimensional units), $Re = 50$, $\sigma = 72$ mN/m. Panels (a) and (b) display non-dimensional and dimensional quantities respectively. The streamwise wavelength and celerity for the wave profiles shown in inserts are $\lambda_x = 8.9$ cm, $c = 40.9$ cm/s, $\Gamma = 4806$ ($\nu = 10^{-6}$ m^2/s) and $\lambda_x = 13.2$ cm, $c = 62.6$ cm/s, $\Gamma = 390$ ($\nu = 6 \times 10^{-6}$ m^2/s)



(a)



(b)

FIGURE 15. Influence of the liquid surface tension on the 3D linear stability results. $\nu = 10^{-6}$ m^2/s. See the caption of figure 14 for the other parameters. The streamwise wavelength and celerity for the wave profiles shown in inserts are $\lambda_x = 8.9$ cm, $c = 40.9$ cm/s, $\Gamma = 4806$ ($\sigma = 72$ mN/m) and $\lambda_x = 5.3$ cm, $c = 36.6$ cm/s, $\Gamma = 962$ ($\sigma = 15$ mN/m)

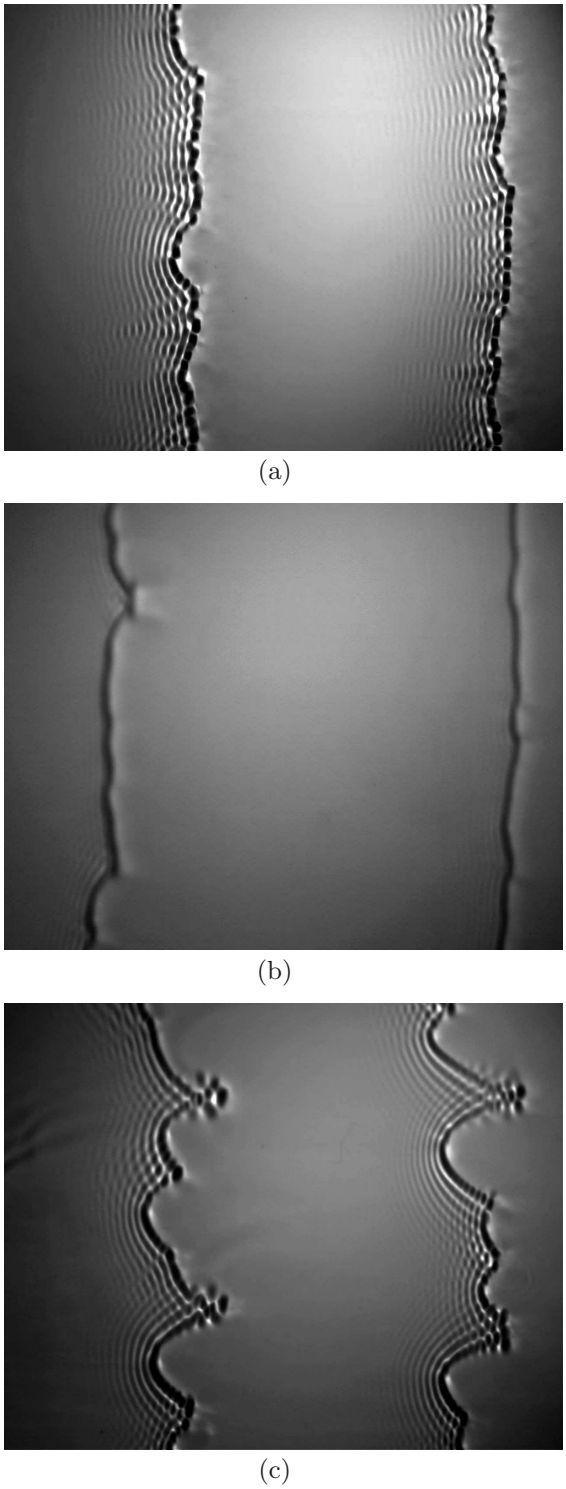
estimated to be around 0.5 cm and 3.9 cm respectively ($k_z = 12.6$ cm^{-1} and 1.6 cm^{-1}) in good agreement with the predictions from the Floquet analysis presented in figure 14(b) and 15(b). Turning to the water-glycerin mixture (cf. figure 16(b)), the capillary region of the 2D waves is significantly damped and the capillary short-wave instability is not visible as an effect of the increment of viscosity. The long-wave inertial modulations of the crests remain unaffected however. Lowering surface tension instead (figure 16(c)) has

a different effect. Though the capillary regions of the waves are not significantly damped –the Kapitza number remaining quite high— short-wave transverse modulations are not detected. Instead, the long-wave modulations are efficiently enhanced and the inertial mode supersedes the short-wave ones, which explains the disappearance of the corresponding modulations. We note that the latter amplification of the scallop waves cannot be anticipated from the above Floquet analysis, which is restricted to small-amplitude perturbations.

6. Summary–Conclusion

In this paper, we have considered the stability of γ_2 traveling waves at the surface of a film flow down an inclined plane. These waves are fast, one-humped and quasi-solitary. They present a typical shape which can easily be decomposed into a hump region and a capillary region. Slow γ_1 waves, multi-humped waves, or waves whose shape cannot be decomposed into capillary and hump regions have been the subject of earlier studies (Liu *et al.* 1995; Scheid *et al.* 2006) and therefore have not been investigated here. The investigation is experimental and numerical using the tools of Floquet stability analysis based on the solutions to a two-equation model (2.3) which has been abundantly validated with respect to experiments and direct numerical simulations elsewhere (Ruyer-Quil & Manneville 2000; Scheid *et al.* 2006).

A Schlieren technique, recently proposed by Moisy *et al.* (2009), has been implemented successfully providing accurate snapshots of the free surface on an extended area. This acquisition technique has been validated by means of comparisons with CCI (Confocal Chromatic Imaging) measurements. High temporal (> 100 Hz) and spatial (0.5 mm) resolutions are achieved providing 3D snapshots of the free surface over large domains (20 cm $\times$ 25 cm) with a precision of about 20 μm. Two-dimensional wave trains have been generated as the response of the flow to a periodic forcing at inlet. They undergo a three-dimensional secondary instability if the flow rate (or Reynolds number) is sufficiently high. Two different wave patterns are then reported, either rugged waves or scallop waves. The prevalence of either patterns is influenced by the forcing frequency at inlet and the inclination angle. Rugged waves have been shown to be promoted by a short-wave transverse instability of capillary origin, whereas scallop waves emerge from a long-wave transverse instability prompted by inertial effects. Capillary short-wave instability predominates at small inclination angle, whereas the long-wave inertial instability is observed at larger inclination. The two instability modes are well captured by a secondary stability analysis based on (2.3). An energy budget of the perturbations has proved instrumental for the identification of the physical origin of the instabilities. The short-wave mode arises in the capillary region of the wave, with a mechanism of capillary origin which is similar to the Rayleigh-Plateau instability, the onset of 3D patterns enabling to reduce the contact area of the gas-liquid interface. Such a mechanism has been postulated by Demekhin & Kalaidin (2007), and erroneously associated to the long-wave instability mode. The latter mode is triggered by a Rayleigh-Taylor instability of a decelerated liquid interface. The threshold of the short-wave mode obeys $Re_c^{3D} \propto \Gamma^{3/11} \propto (\sin\beta)^{-1/11}$, whereas the onset of the long-wave mode rather verifies $Re_c^{3D} \propto \cot\beta$. Rugged waves are thus observed at relatively small inclination angles, the short wave mode being excited before the long-wave one sets in. At larger angles, the long-wave mode predominates and scallop waves are observed. For water film and at sufficiently low forcing frequencies f, the transition between rugged and scallop waves is only weakly affected by f and occurs around $\beta = 13\,^\circ$ which corresponds to the intersection of the instability thresholds for the two inertial and capillary modes (cf. figure 13). This value of β is certainly not universal.



(a) (b) (c)

FIGURE 16. Experimental snapshots illustrating the influence of liquid viscosity and surface tension on the 3D patterns. Parameters are: $\beta = 17.9^\circ$, $Re = 70$. (a) water: $f = 4.5$ Hz, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s, $\sigma = 72$ mN/m, $\Gamma = 4806$. $\lambda_x = 9.4$ cm ($\lambda_x = 44$ in dimensionless units). (b) 22 % per weight water-glycerin mixture: $f = 4.9$ Hz, $\nu = 1.9 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\sigma = 70.6$ mN/m, $\Gamma = 1971$. $\lambda_x = 11.7$ cm ($\lambda_x = 48.4$ in dimensionless units). (c) 1.3 % per weight water-butanol solution: $f = 4.5$ Hz, $\nu = 1.1 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\sigma = 49$ mN/m, $\Gamma = 3000$. $\lambda_x = 9.1$ cm ($\lambda_x = 46.8$ in dimensionless units).

The occurrence and prevalence of rugged and scalop waves as surface tension and viscosity are varied require a thorough study that is beyond the scope of the present work and will be presented elsewhere. Transition from rugged to scallop waves coincides with a change of nature of the short-wave capillary mode from stationary to oscillatory. However, short-wave capillary modulations of scallop waves seem frozen and remain in-phase with the long-wave deformations of the fronts. We note that both the sidewall effects and the long-wave inertial mode break the translational invariance in the transverse z direction that is necessary for the growth of an oscillatory mode.

To our knowledge, the onset of rugged waves related to a short-wave instability mode has not been reported previously, earlier studies being devoted either to the vertical geometry (Park & Nosoko 2003) or to more viscous fluids (Liu *et al.* 1995). Promoting rugged waves could be of interest in applications as 2D solitary waves travel faster and with a larger amplitude than 3D solutions (Demekhin *et al.* 2007). Similarly, an enhancement of backflow phenomena and flow separation in these waves might be expected, with interesting consequences on heat and mass transfer (Dietze *et al.* 2009).

The authors thank Lionel Auffray and Rafaël Pidoux for building the experimental set-up, Georg Dietze and Benoît Scheid for useful discussions, Reinhold Kneer for lending the CCI system and Air-Liquid for financial support.

Appendix A. Floquet analysis: numerical procedure and influence of the detuning parameter

In this section we briefly discuss the numerical procedure that has been implemented to solve the linear differential eigenvalue problem (2.5). Details can be found in Ruyer-Quil (1999) and Kalliadasis *et al.* (2012). The base state $\mathbf{X}_0$ and perturbation amplitude $\tilde{\mathbf{X}}$ are discretized on a regular mesh of N nodes. Their discrete representations $\mathbf{X}_0^N$ and $\tilde{\mathbf{X}}^N$ are vectors of dimension $3N$ that are converted in Fourier series of coefficients $\hat{\mathbf{X}}_0^N$ and $\hat{\mathbf{X}}^N$ by fast Fourier transforms. The linear eigenvalue problem (2.5) is thus approximated by

$$\lambda \hat{\mathbf{X}}^N = \hat{\mathbf{L}}^N \hat{\mathbf{X}}^N \,. \tag{A 1}$$

$\hat{\mathbf{L}}^N$ is a square matrix of dimension $3N$ whose coefficients are given by the formula

$$\hat{\mathbf{L}}^N_{i,j} = \left\{ FFT_N \left[\mathcal{L}_{\varphi,k_z} \left(\mathbf{X}_0^N ; \varphi, k_z \right) FFT_N^{-1} E_j^N \right] \right\}_i \tag{A 2}$$

where E_j^N are the vectors of the canonical basis of $\mathbb{C}^{3N}$, and where FFT_N and FFT_N^{-1} refer to the direct and inverse discrete Fourier transforms. A pseudo-spectral algorithm is next invoked, convolutions being easily computed in the physical space and derivatives in the Fourier space. A drawback of this procedure is the aliasing problem. To take care of it, we actually apply (A 2) on a four times finer grid :

$$\hat{\mathbf{L}}^N_{i,j} \approx \left\{ FFT_{4N} \left[\mathcal{L}_{\varphi,k_z} \left(\mathbf{X}_0^{4N} ; \varphi, k_z \right) FFT_{4N}^{-1} E_j^{4N} \right] \right\}_i \tag{A 3}$$

The 2D base solution is approximated on the finer grid by taking the inverse Fourier transform of $\hat{\mathbf{X}}_0^{4N}$ where the coefficients corresponding to the highest frequencies, that is three fourth of the total number, are set to zero.

Figure 17 compares the growth rate of the most dangerous mode for $\varphi = 0$ computed on a fine grid ($N = 2048$) and a coarser one ($N = 1024$). Parameters correspond to a typical γ_2 solitary-like wave-train running on a water film. Convergence is already reached on a $N = 1024$-node regular grid and most of the results presented in this paper have been obtained with $N = 1024$.

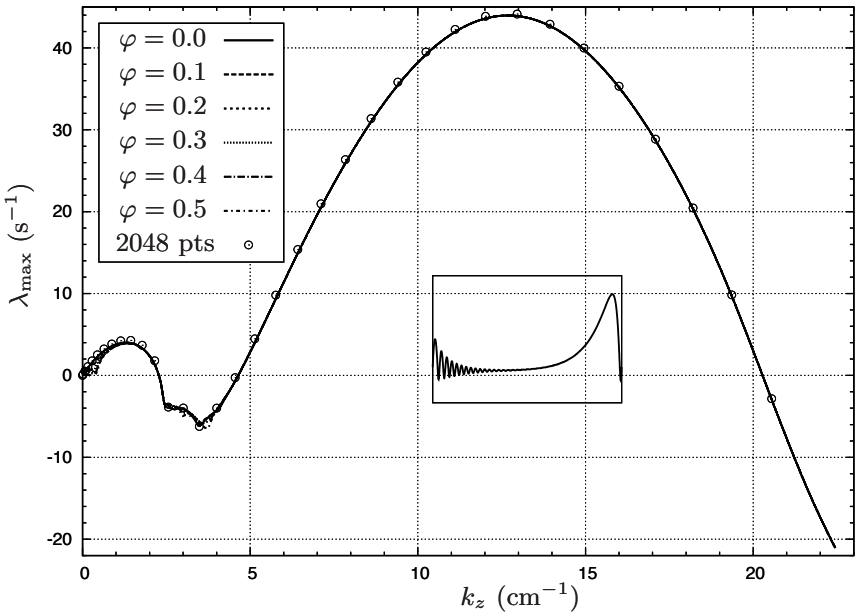


FIGURE 17. Maximum growth rate $\lambda_{\max}$ as a function of the transverse wavenumber k_z for different values of the detuning parameter φ ($\beta = 20°$, $Re = 50$, $f = 4.6$ Hz, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s, $\sigma/\rho = 7.21 \times 10^{-5}$). Dots refer to the results obtained on a finer grid ($N = 2048$ nodes instead of $N = 1024$).

The influence of the detuning parameter φ on the results has been tested for six different values of φ in the range $[0, 1/2]$ which is sufficient to cover all possible perturbations for symmetry reasons. The results are shown in figure 17 for an isolated quasi-solitary wave. No noticeable effects of the detuning parameter on the maximum growth rate have been found, except for very long-wave perturbations $k_z \ll 1$ where small differences between the curves can be noted. However, these differences are not significant. Yet, wherever the wave is non-isolated, the detuning parameter has a significant effect on its stability. The most amplified 2D perturbation ($k_z = 0$) is sensitive on the detuning parameter, i.e. on the extension of the considered wave train (see figure 18). However, the transverse stability ($k_z \neq 0$) remains unaffected by the detuning parameter. We may then conclude that the stability of a single γ_2 wave and the stability of an infinite train of these waves are equivalent.

Appendix B. Kinetic energy budget

The different terms which compose the right-hand-side of the kinetic energy budget (2.11) are listed in table 2. They are grouped with respect to their physical origin: inertia forces, hydrostatic pressure, viscous drag at the wall, 'Trouton' second-order viscous dispersion terms, capillarity (surface tension). We first present the terms emanating from the projection of the momentum balance in the streamwise direction, referred below as "q-" contrbutions. The contributions from the spanwise projection of the momentum balance, or "p-" terms come next.

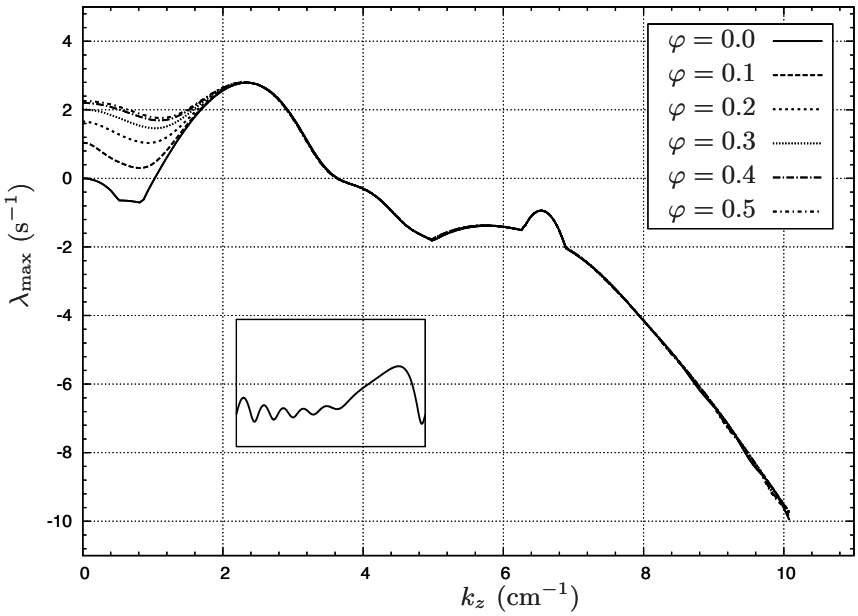


FIGURE 18. Same as figure 17 except for $\beta = 10.1\,^\circ$, $Re = 41$, $f = 5.3$ Hz.

REFERENCES

ALEKSEENKO, S. V., NAKORYAKOV, V. E. & POKUSAEV, B. G. 1994 *Wave flow in liquid films*, 3rd edn. Begell House (New York).

ALEKSEENKO, S. V., NAKORYAKOV, V. Y. & POKUSAEV, B. G. 1985 Wave formation on a vertical falling liquid film. *AIChE J.* **31**, 1446–1460.

ALLEN, R.F. 1975 The role of surface tension in splashing. *Journal of Colloid and Interface Science* **51** (2).

BAKOPOULOS, A. 1980 Liquid-Side Controlled Mass Transfer in Wetted-Wall Tubes. *Ger. Chem. Eng.* **3** (241).

BALMFORTH, N. J. & LIU, J. J. 2004 Roll waves in mud. *J. Fluid Mech.* **519**, 33–54.

BENJAMIN, T.B. 1957 Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **2**, 554.

BO, S., MA, X., LAN, Z., CHEN, J. & CHEN, H. 2010 Numerical simulation on the falling film absorption process in a counter-flow absorber. *Chem. Eng. J.* **156**, 607–612.

CHANG, H.C., DEMEKHIN, E.A. & KOPELEVITCH, D.I. 1993 Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film. *J. Fluid Mech.* **250**, 433–480.

CHENG, M. & CHANG, H.C. 1995 Competition between subharmonic and sideband secondary instabilities on a falling film. *Phys. Fluids* **7** (1).

DEMEKHIN, E.A. & KALAIDIN, E.N. 2007 Three-dimensional localized coherent structures of surface turbulence. i. scenarios of two-dimensional-three-dimensional transition. *Phys. Fluids* **19**, 114103.

DEMEKHIN, E.A., KALAIDIN, E.N., KALLIADASIS, S. & VLASKIN, S.Y. 2007 Three-dimensional localized coherent structures of surface turbulence. ii. λ solitons. *Phys. Fluids* **19**, 114104.

DEMEKHIN, E.A., KALAIDIN, E.N. & SELIN, A.S. 2010 Three-dimensional localized coherent structures of surface turbulence. iii. experiment and model validation. *Phys. Fluids* **22**, 092103.

DIETZE, G. F., AL-SIBAI, F. & KNEER, R. 2009 Experimental study of flow separation in laminar falling liquid films. *J. Fluid Mech.* **637**, 73–104.

DIETZE, G. F., LEEFKEN, A. & KNEER, R. 2008 Investigation of the backflow phenomenon in falling liquid films. *J. Fluid Mech.* **595**, 435–459.

DOEDEL, E. J. 2008 Auto07p continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Montreal Concordia University.

n	Origin	Expression
1	q - inertia x	$c\tilde{q}'\bar{\tilde{q}} - \frac{17}{7}\left[\frac{q_0}{h_0}\tilde{q}'\bar{\tilde{q}} + \frac{q_0'}{h_0}\lvert\tilde{q}\rvert^2 - \frac{q_0 q_0'}{h_0^2}\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right] + \frac{9}{7}\left[\frac{q_0^2}{h_0^2}\tilde{h}'\bar{\tilde{q}} - \frac{2h_0'q_0^2}{h_0^3}\tilde{h}\bar{\tilde{q}} + \frac{2q_0h_0'}{h_0^2}\lvert\tilde{q}\rvert^2\right]$
2	q - inertia z	$-\frac{8}{7}\frac{q_0}{h_0}\mathrm{i}k_z\tilde{p}\bar{\tilde{q}}$
3	q - viscous drag	$-\frac{5}{2\delta}\left[\frac{\lvert\tilde{q}\rvert^2}{h_0^2} - \frac{2q_0}{h_0^3}\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right]$
4	q - 'Trouton' viscosity	$\frac{4\eta}{\delta}\left[\frac{(h_0')^2}{h_0^2}\lvert\tilde{q}\rvert^2 - \frac{2q_0(h_0')^2}{h_0^3}\tilde{h}\bar{\tilde{q}} + \frac{2q_0h_0'}{h_0^2}\tilde{h}'\bar{\tilde{q}}\right] - \frac{9\eta}{2\delta}\left[\frac{h_0'}{h_0}\tilde{q}'\bar{\tilde{q}} + \frac{q_0'}{h_0}\tilde{h}'\bar{\tilde{q}} - \frac{q_0'h_0'}{h_0^2}\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right] - \frac{6\eta}{\delta}\left[\frac{h_0''}{h_0}\lvert\tilde{q}\rvert^2 + \frac{q_0}{h_0}\tilde{h}''\bar{\tilde{q}} - \frac{q_0h_0''}{h_0^2}\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right] + \frac{\eta}{\delta}\left[\frac{9}{2}\tilde{q}''\bar{\tilde{q}} - \frac{13}{16}\frac{h_0'k_z}{h_0}\mathrm{i}\tilde{p}\bar{\tilde{q}} + \frac{23}{16}\frac{q_0k_z^2}{h_0}\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right] + \frac{\eta}{\delta}\left[-k_z^2\lvert\tilde{q}\rvert^2 + \frac{7}{2}k_z\mathrm{i}\tilde{p}'\bar{\tilde{q}}\right]$
5	q - gravity	$\frac{5}{6\delta}\tilde{h}\bar{\tilde{q}}$
6	q - hydrostatic pressure	$-\frac{5}{6}\frac{\zeta}{\delta}\left[h_0\tilde{h}'\bar{\tilde{q}} + h_0'\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right]$
7	q - surface tension x	$\frac{5}{6\delta}\left[h_0\tilde{h}'''\bar{\tilde{q}} + h_0'''\tilde{h}\bar{\tilde{q}}\right]$
8	q - surface tension z	$-\frac{5}{6}\frac{k_z^2}{\delta}h_0\tilde{h}'\bar{\tilde{q}}$
9	p - inertia z	$c\tilde{p}'\bar{\tilde{p}} - \frac{8}{7}\frac{q_0'}{h_0}\lvert\tilde{p}\rvert^2 - \frac{9}{7}\left[\frac{q_0}{h_0}\tilde{p}'\bar{\tilde{p}} - \frac{q_0h_0'}{h_0^2}\lvert\tilde{p}\rvert^2\right]$
10	p - viscous drag	$-\frac{5}{2\delta}\frac{\lvert\tilde{p}\rvert^2}{h_0^2}$
11	p - 'Trouton' viscosity	$\frac{\eta}{\delta}\left[-\frac{9}{2}k_z^2\lvert\tilde{p}\rvert^2 + \frac{13}{4}\frac{q_0h_0'}{h_0^2}k_z\mathrm{i}\tilde{h}\bar{\tilde{p}} - \frac{h_0'}{h_0}\tilde{p}'\bar{\tilde{p}}\right] + \frac{\eta}{\delta}\left[-\frac{43}{16}\frac{h_0'}{h_0}k_zi\tilde{q}\bar{\tilde{p}} - \frac{13}{16}\frac{q_0'}{h_0}k_z\mathrm{i}\tilde{h}\bar{\tilde{p}} + \frac{3}{4}\frac{(h_0')^2}{h_0^2}\lvert\tilde{p}\rvert^2\right] + \frac{\eta}{\delta}\left[-\frac{23}{16}\frac{h_0''}{h_0}\lvert\tilde{p}\rvert^2 - \frac{73}{16}\frac{q_0}{h_0}k_z\mathrm{i}\tilde{h}'\bar{\tilde{p}} + \tilde{p}''\bar{\tilde{p}} + \frac{7}{2}k_z\mathrm{i}\tilde{q}'\bar{\tilde{p}}\right]$
12	p - hydrostatic pressure	$-\frac{5}{6}\frac{\zeta k_z}{\delta}h_0\mathrm{i}\tilde{h}\bar{\tilde{p}}$
13	p - surface tension x	$\frac{5}{6\delta}h_0k_z\mathrm{i}\tilde{h}''\bar{\tilde{p}}$
14	p - surface tension z	$-\frac{5}{6\delta}h_0k_z^3\mathrm{i}\tilde{h}\bar{\tilde{p}}$

TABLE 2. List of the λ_n terms involved in the right-hand side of (2.11) before integration on a wavelength and division by $\langle\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}\rangle$.

FRISK, D. P. & DAVIS, E. J. 1972 The enhancement of heat transfer by waves in stratified gas-liquid flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 1537–1552.

FUJITA, T. 1993 Falling liquid films in absorption machines. *Int. J. Refrig.* **16**, 282–294.

GERMAIN, P. 1973 *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Masson.

HEINING, C., POLLAK, T. & AKSEL, N. 2012 Pattern formation and mixing in three-dimensional film flow. *Phys. Fluids* **24**, 042102.

KALLIADASIS, S., RUYER-QUIL, C., SCHEID, B. & VELARDE, M. G. 2012 *Falling liquid films*. Springer.

Krechetnikov, R. 2009 Rayleigh-taylor and Richtmeyer-Meshkov instabilities of flat and curved interfaces. *J. Fluid Mech.* **625**, 387–410.

Leontidis, V., Vatteville, J., Vlachogiannis, M., Andritsos, N. & Bontozoglou, V. 2010 Nominally two-dimensional waves in inclined film flow in channels of finite width. *Phys. Fluids* **22**, 112106.

Liu, J. & Gollub, J. P. 1994 Solitary wave dynamics of film flows. *Phys. Fluids* **6**, 1702–1712.

Liu, J., Schneider, J.B. & Gollub, J.P. 1995 Three-dimensional instabilities of film flows. *Phys. Fluids* **7** (1).

Marmottant, P. & Villermaux, E. 2004 On spray formation. *J. Fluid Mech.* **498**, 73–111.

Moisy, F., Rabaud, M. & Salsac, K. 2009 A synthetic schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Exp. in Fluids* **46** (6), 1021–1036.

Oron, A., Gottlieb, O. & Novbari, E. 2007 Bifurcations of a weighted-residual integral boundary-layer model for nonlinear dynamics of falling liquid films. *Journal of Physics: Conference Series* **64** (1), 012007.

Park, C.D. & Nosoko, T. 2003 Three-dimensional wave dynamics on a falling film and associated mass transfer. *AIChE Journal* **49** (11).

Rastaturin, A., Demekhin, E. & Kalaidin, E. 2006 Optimal regimes of heat-mass transfer in falling film. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **31**, 1–10.

Rayleigh, L. 1883 Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. Lond. Math. Soc.* **14**, 170–177.

Ribe, N.M. 2001 Bending and stretching of thin viscous sheets. *J. Fluid Mech.* **433**, 135–160.

Ruyer-Quil, C. 1999 Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné. PhD thesis, École Polytechnique, LadHyx, France.

Ruyer-Quil, C. & Manneville, P. 2000 Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B* **15**, 357–369.

Scheid, B., Kalliadasis, S., Ruyer-Quil, C. & Colinet, P. 2008 Interaction of three-dimensional hydrodynamic and thermocapillary instabilities in film flows. *Phys. Rev. E* **78**, 066311.

Scheid, B., Ruyer-Quil, C. & Manneville, P. 2006 Wave patterns in film flows: modelling and three-dimensional waves. *J. Fluid Mech.* **562**, 183–222.

Scheid, B., Ruyer-Quil, C., Thiele, U., Kabov, O. A., Legros, J. C. & Colinet, P. 2005 Validity domain of the Benney equation including the Marangoni effect for closed and open flows. *J. Fluid Mech.* **527**, 303–335.

Schlichting, H., Gersten, K. & Krause, E. 2004 *Boundary-Layer Theory*, eighth edn. Springer-Verlag (New York).

Shkadov, V. Ya. 1967 Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk Gaza* **1**, 43–51, English translation in *Fluid Dynamics* **2**, 29–34, 1970 (Faraday Press, N.Y.).

Shkadov, V. Ya. 1977 Solitary waves in a layer of viscous liquid. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk Gaza* **1**, 63–66.

Shkadov, V. Ya. & Sisoev, G. M. 2004 Waves induced by instability in falling films of finite thickness. *Fluid Dyn. Res.* **35**, 357–389.

Skotheim, J.M., Thiele, U. & Scheid, B. 2003 On the instability of a falling film due to localized heating. *J. Fluid Mech.* **475**, 1–19.

Spaid, N. & Homsy, G. 1996 Stability of Newtonian and viscoelastic dynamic contact lines. *Phys. Fluids* **8**, 460–478.

Taylor, G.I. 1950 The instability of liquid surfaces whan accelerated in a direction perpendicular to their planes. part 1. waves on fluid sheets. *Proc. R. Soc. Lond.* **201**, 192–196.

Vlachogiannis, M., Samandas, A., Leontidis, V. & Bontozoglou, V. 2010 Effect of channel width on the primary instability of inclined film flow. *Phys. Fluids* **22**, 012106.

Yoshimura, P. N., Nosoko, T. & Nagata, T. 1996 Enhancement of mass transfer by waves into a falling laminar liquid film by two-dimensional surface waves – some experimental observations and modeling. *Chem. Eng. Sci.* **51**, 1231–1240.

3.1.2 Troisième mode d'instabilité

Il existe en réalité un troisième mode d'instabilité 3D des ondes solitaires γ_2 (non mentionné dans l'article). Nous l'avons observé dans un domaine de paramètres assez restreint autour de $\beta = 10^\circ$, $f = 5$ Hz. Il apparaît pour $R > R_c^{3D} \approx 40$ et constitue dans cette zone le mode 3D le plus instable (le seuil d'instabilité du mode capillaire pour ces valeurs de paramètres se situe autour de $R = 50$). Ceci explique les valeurs anormalement faibles de R_c^{3D} observées dans le diagramme de phases (figure 5 de l'article). La figure 3.1 présente une visualisation par ombroscopie de ce mode. Les modulations semblent être des trous qui se développent dans le dos de l'onde et au niveau des ondes capillaires de plus faible amplitude. Le front d'onde principal n'est pas affecté (comme pour le mode capillaire). La longueur d'onde transverse dans ce cas est de l'ordre de 5 cm.

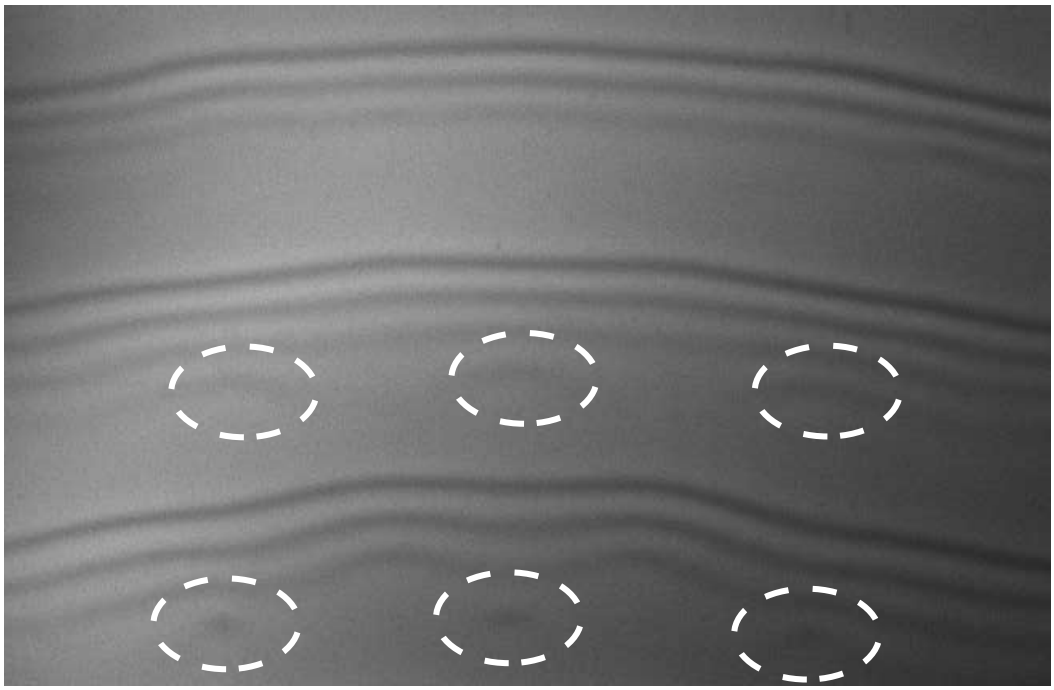
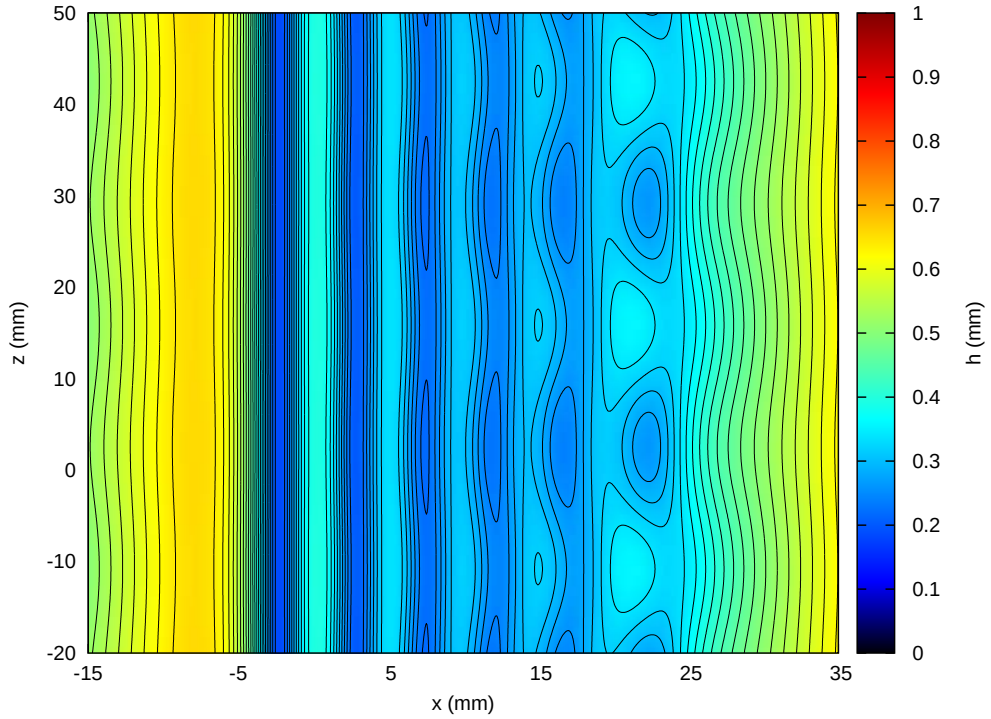
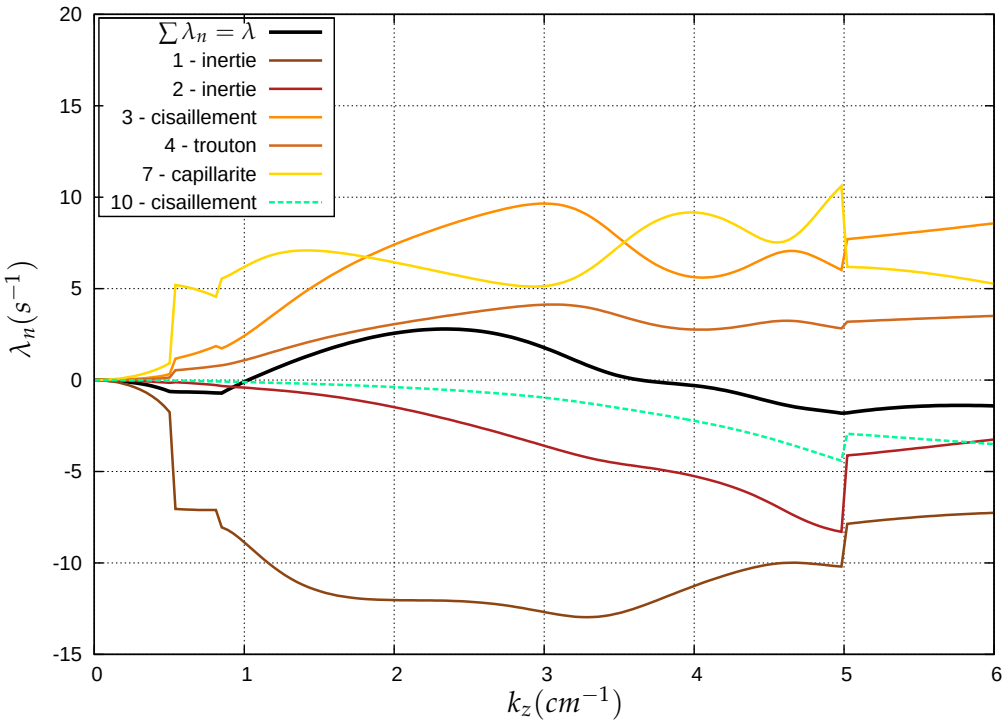


FIGURE 3.1 – *Visualisation par ombroscopie du troisième mode d'instabilité 3D des ondes solitaires. Le sens d'écoulement est du haut vers le bas. Les lignes pointillées blanches ont été rajoutées pour permettre une meilleure lisibilité. Les paramètres expérimentaux sont :* $\beta = 10.1^\circ$, $R = 41$, $f = 5.3$ *Hz. La taille réelle de l'image est :* $13.6\ cm \times 21.0\ cm$

Nous avons également obtenu ce mode numériquement grâce au code d'analyse de Floquet (figure 3.2). La figure 3.2a représente la topologie associée : celle-ci est en bon accord avec la visualisation par ombroscopie. La longueur d'onde transverse, cependant, est plus faible que dans l'expérience. Cela peut s'expliquer, d'une part, par le fait que le front d'onde principal est courbé sur la figure 3.1 et, d'autre part, par le faible taux de croissance et le caractère peu sélectif de ce mode (figure 3.2b). Celui-ci étant stationnaire, l'analyse énergétique peut donner des éléments d'information sur son origine physique. La figure 3.2b montre que, contrairement aux cas déjà rencontrés, les termes de capillarité



(a)



(b)

FIGURE 3.2 – *Résultats numériques pour le troisième mode d'instabilité 3D des ondes solitaires. Les paramètres sont :* $\beta = 10.1°$, $R = 41$, $f = 5.3\ Hz$ ($\nu = 10^{-6}\,m^2/s$, $\sigma = 72\,mN/m$). *(a) Topologie du mode : superposition de la fonction propre 3D à l'état de base 2D. (b) Bilan énergétique. Les contributions* λ_n *sont listées dans l'Annexe B de l'article. Pour chacune de ces dernières ainsi que pour le total, la valeur de référence à* $k_z = 0$ *a été soustraite* ($\lambda_r(k_z = 0) = 10^{-4}\,s^{-1}$). *Les termes qui ne varient pas significativement n'ont pas été tracés.*

et d'inertie ne sont pas ceux qui produisent l'instabilité. Il s'agit des termes de cisaillement (frottement à la paroi) et, dans une moindre mesure, de viscosité d'ordre 2. Le détail du mécanisme physique à l'oeuvre reste une question ouverte. Cependant, nous donnons ci-dessous une piste intéressante.

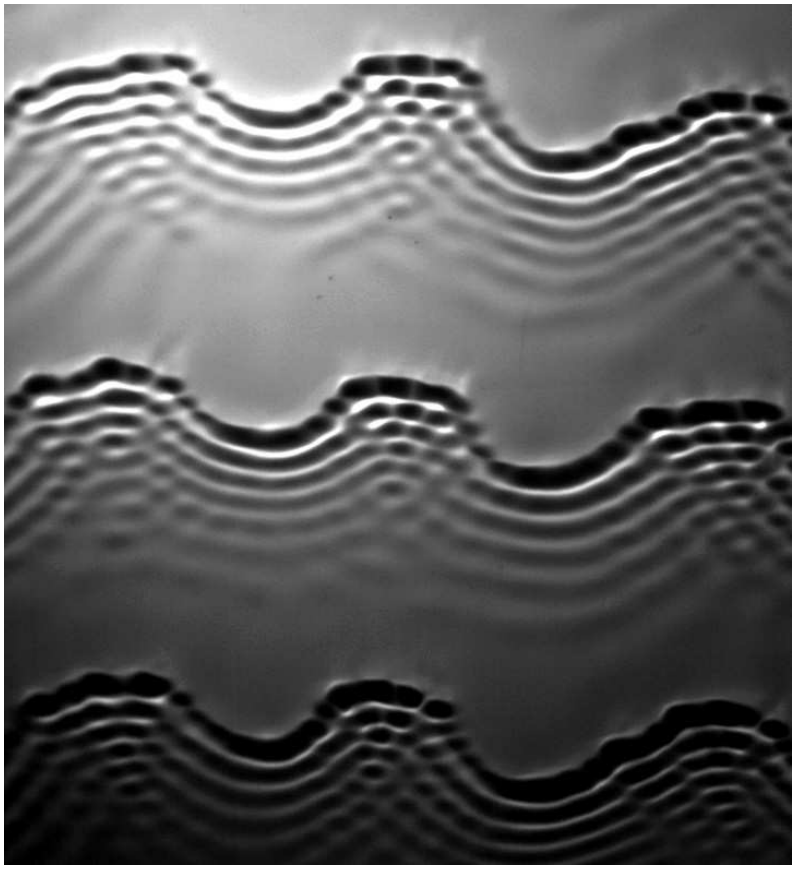
Il s'agit de l'instabilité centrifuge de Goërtler. Celle-ci provient de la courbure des lignes de courant et constitue l'analogue pour les couches limites sur paroi courbée de l'instabilité de Taylor-Couette (voir par exemple les articles de revue de Floryan (1991) et Saric (1994)). Plusieurs raisons motivent cette idée. Tout d'abord, cette instabilité n'est pas liée à l'existence d'une surface libre. Elle se manifeste par l'apparition de paires de vortex contrarotatifs orientés selon la direction de l'écoulement. Ceci est cohérent avec la faible signature au niveau de l'interface observée expérimentalement (figure 3.1). De plus, elle est contrôlée par un nombre adimensionnel dit de Taylor-Goërtler qui s'écrit : $T = R^2\, h\, h_{xx}$ (R est le nombre de Reynolds local, h l'épaisseur du film et h_{xx} la courbure). Ce nombre admet bien un maximum dans la zone de développement de l'instabilité en raison de la forte dépendance du nombre de Reynolds local vis-à-vis de l'épaisseur.

3.1.3 Evolution non linéaire du mode inertiel

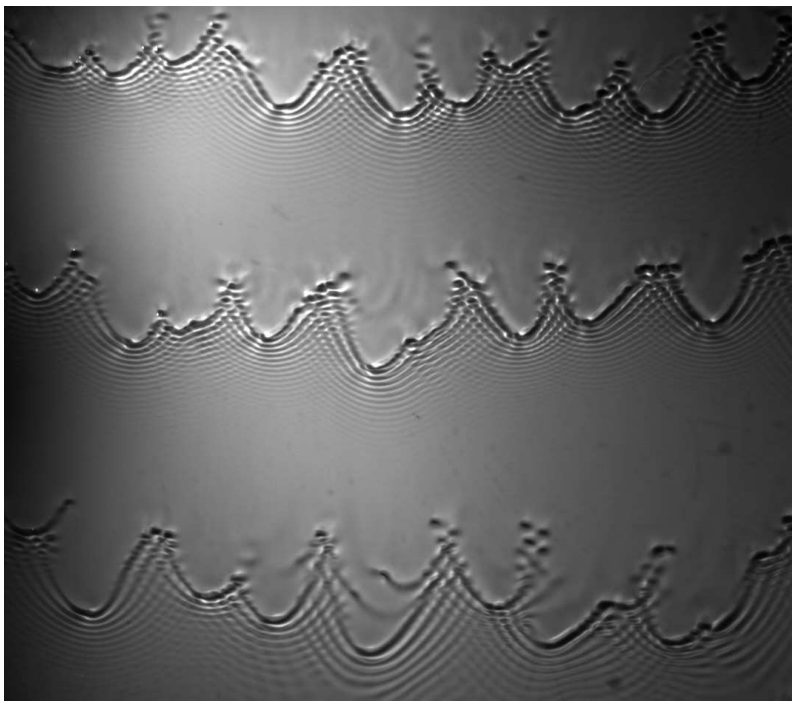
Dans l'article, nous nous sommes spécialement intéressés à la phase d'évolution linéaire des modes. Le mode capillaire sature rapidement. Les caractéristiques des « rugged waves » obtenues expérimentalement pour $\beta < 12^\circ$ sont en très bon accord avec les résultats numériques linéaires (superposition de la fonction propre 3D à l'état de base 2D). Le mode inertiel, en revanche, a une phase d'évolution non linéaire beaucoup plus riche. Celui-ci déforme l'onde entière et donne naissance à des motifs particuliers selon la valeur de la fréquence de forçage. D'après nos expériences préliminaires, il semblerait que la fréquence d'excitation est le paramètre qui a le plus d'impact sur la sélection des motifs contrairement à Park et Nosoko (2003) qui introduisent un seuil sur le nombre de Reynolds ($R_c = 40$).

A haute fréquence, il se forme des structures en fer-à-cheval (figure 3.3a) : demi-cercles connectés entre-eux par des parties plates. Le mode capillaire persiste uniquement dans ces zones non courbées. En effet, les termes capillaires associés à une courbure selon z sont stabilisants comme l'indique le bilan énergétique de la figure 8 de l'article (termes « 8 - capillarity »). A basse fréquence, les ondes sont séparées par de longues portions de film plat et les structures 3D ont la forme de Λ (figure 3.3b). Les modulations capillaires sont quasiment absentes dans ce cas.

Nous avons cherché à visualiser la topographie des solitons en Λ grâce à la technique Schlieren (figure 3.4). Leur forme est assez particulière : le liquide se concentre au niveau de la pointe du Λ. Demekhin et al. (2007) ont construit les solitons 3D numériquement grâce à cette idée. Ils ont calculé le profil asymptotique loin du front principal en linéarisant les équations de Kapitza-Shkadov et modélisé ce dernier par une fonction de Dirac $\delta(x)\delta(z)$. Leurs profils numériques sont en bon accord qualitatif avec nos cartes d'épaisseur Schlieren. Ils ont déterminé également la zone d'existence des solitons 3D en



(a)



(b)

FIGURE 3.3 – *Evolution non linéaire du mode inertiel (visualisations par ombroscopie). (a) Ondes 3D saturées en fer-à-cheval à haute fréquence :* $\beta = 17.9\,^{\circ}$, $R = 70$, $f = 7.5$ *Hz, taille réelle de l'image :* 10.4 *cm* $\times$ 7.8 *cm. (b) Solitons 3D en* Λ *à basse fréquence :* $\beta = 19.1\,^{\circ}$, $R = 93$, $f = 5$ *Hz, taille réelle de l'image :* 28.1 *cm* $\times$ 24.8 *cm.*

examinant leurs propriétés de stabilité. La gamme de nombre de Reynolds associée pour l'eau et en configuration verticale est : $6 < R < 38$. Pour $R < R_1 = 6$, les solitons sont instables vis-à-vis de l'instabilité primaire du film. La borne supérieur $R = R_2$ correspond à une limitation d'ordre numérique : les solutions ne peuvent plus être calculées car la courbure au niveau de la pointe du Λ devient trop grande. Il est frappant dans ce problème de constater l'analogie avec le sillage crée par de petits objets qui se déplacent à la surface de l'eau. Tucker (1969) observe par exemple que le scarabée d'eau *Gyrinidae* crée un sillage amont circulaire pour des faibles vitesses et en forme de V au delà d'une certaine vitesse.

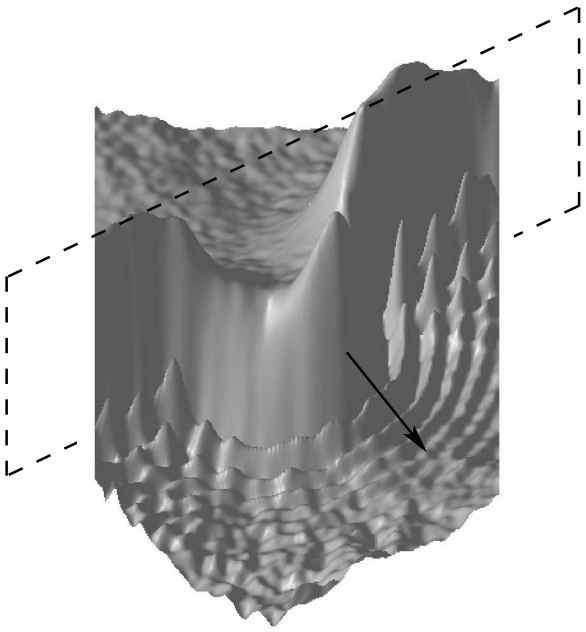


FIGURE 3.4 – *Topographie Schlieren pour les solitons 3D en Λ. Le plan en pointillés noirs représente le front d'onde initial 2D, la flèche figure la direction de propagation. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 15.3\,^\circ$, $R = 70$, $f = 5.2$ Hz.*

3.2 Deux points supplémentaires

3.2.1 Mode d'instabilité synchrone des ondes γ_1

Comme évoqué au chapitre 2, les ondes de la famille γ_1 sont toujours instables vis-à-vis des perturbations 2D. Elles évoluent alors vers les ondes de la famille γ_2 par le biais d'une instabilité secondaire sous-harmonique ou quasi-périodique. Dans certains cas, le mode le plus instable peut être 3D ce qui conduit à la formation d'ondes solitaires tridimensionnelles. Ces modes d'instabilité 3D des ondes γ_1 ont été étudiés expérimentalement par Liu et al. (1995) et numériquement par Scheid et al. (2006). Ils sont au nombre de deux : l'un est synchrone alors que l'autre s'accompagne d'un doublement de période (mode sous-harmonique). Leurs taux de croissance obtenus par l'analyse de Floquet sont très proches. D'un point de vue expérimental, le mode synchrone est plus facilement ob-

servé car les perturbations du bruit ambiant sont plus susceptibles d'être en phase qu'en opposition de phase.

Nos résultats confirment ceci. Nous n'avons pas pu observer le mode sous-harmonique, au contraire du mode synchrone qui apparaît sur une large gamme de paramètres. La figure 3.5 montre une visualisation par ombroscopie de celui-ci. La longueur d'onde transverse λ_z, de l'ordre de 5 cm, est supérieure mais comparable à la longueur d'onde dans la direction de l'écoulement $\lambda_x \approx 3$ cm. Les zones sombres sur l'image où apparaissent les modulations sont les trous des ondes. Les modulations se détachent ensuite et les fronts se recombinent pour former des ondes solitaires 3D plus en aval (non visible sur l'image).

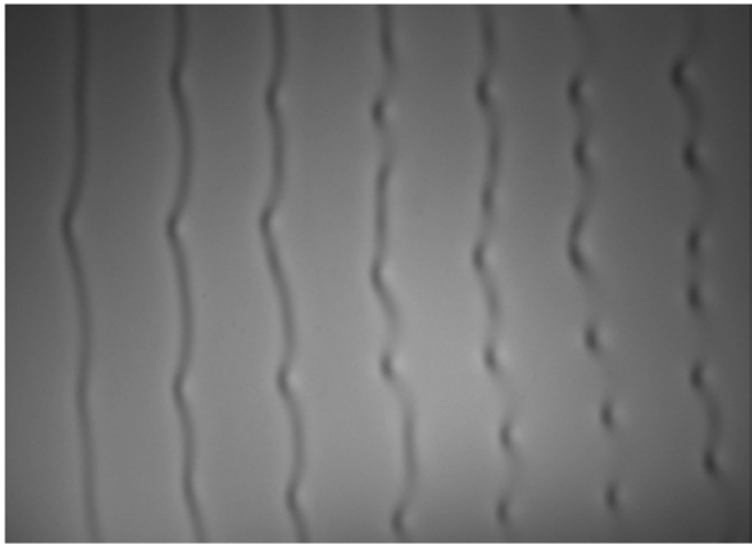
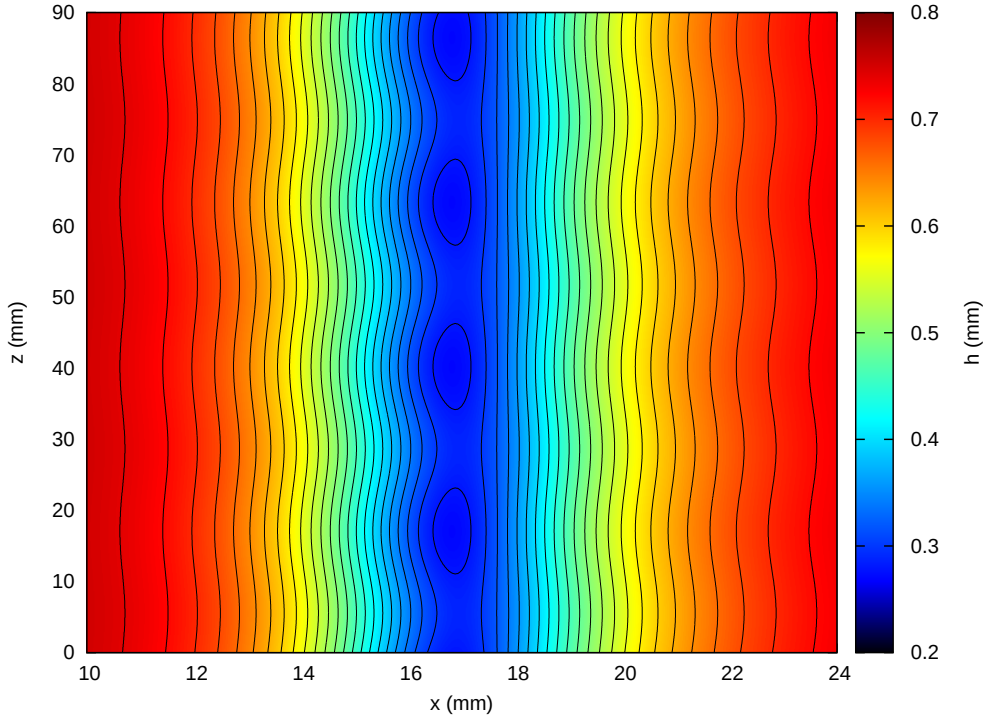
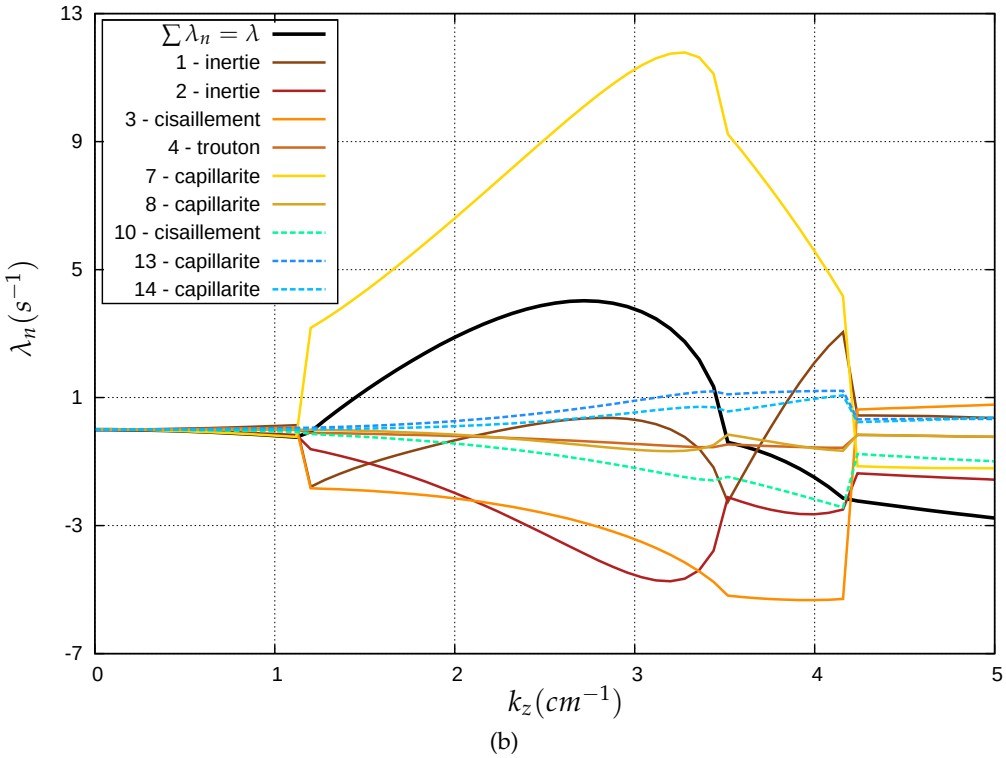


FIGURE 3.5 – *Visualisation par ombroscopie du mode d'instabilité 3D synchrone des ondes γ_1. Le sens d'écoulement est de la gauche vers la droite. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 5°$, $R = 70$, $f = 8.2$ Hz, mélange eau-glycérine $X_g = 29\%$ ($T = 19.3\,°C$). La taille réelle de l'image est : 17.1 cm $\times$ 23.7 cm*

Nous avons cherché à comprendre l'origine physique de ce mode d'instabilité 3D. Nous négligeons l'interaction entre ondes voisines pour simplifier afin d'utiliser l'analyse énergétique précédente. La figure 3.6 présente les résultats numériques obtenus pour des paramètres légèrement différents vis-à-vis de la figure 3.5 (le fluide est de l'eau, la fréquence est 12 Hz). Le mode 3D le plus instable est stationnaire et de taux de croissance maximal modéré ($\lambda_{r,max} \approx 4\,s^{-1}$). Sa topologie (figure 3.6a) est en bon accord qualitatif avec la visualisation expérimentale : les modulations apparaissent au niveau des creux et $\lambda_z \approx 2.3$ cm est environ le double de $\lambda_x \approx 1.4$ cm. Le bilan énergétique (figure 3.6b) montre que le terme qui produit l'instabilité est le gradient de pression capillaire dans la direction x. Les variations des différentes contributions sont très similaires à celles observées dans le cas du mode 3D capillaire des ondes γ_2 (figure 8 de l'article). Le mécanisme physique est donc d'origine capillaire : c'est l'instabilité de type Rayleigh-Plateau dans les creux. Les bosses, moins courbées, ne sont que très peu affectées.



(a)

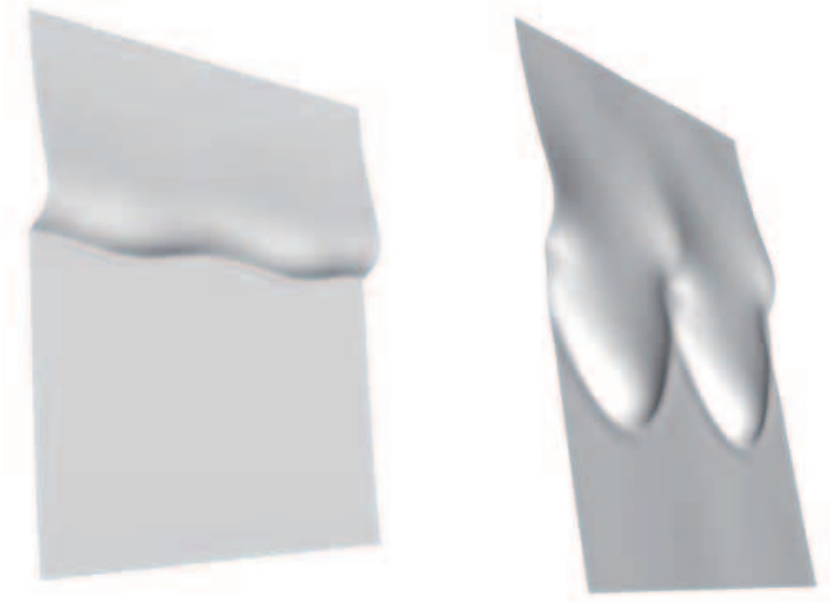


(b)

FIGURE 3.6 – *Résultats numériques pour le mode d'instabilité 3D synchrone des ondes γ_1. Les paramètres sont : $\beta = 5°$, $R = 70$, $f = 12\,Hz$ ($\nu = 10^{-6}\,m^2/s$, $\sigma = 72\,mN/m$). (a) Topologie du mode : superposition de la fonction propre 3D à l'état de base 2D. (b) Bilan énergétique. Les contributions λ_n sont listées dans l'Annexe B de l'article. Pour chacune de ces dernières ainsi que pour le total, la valeur de référence à $k_z = 0$ a été soustraite ($\lambda_r(k_z = 0) = 0.05\,s^{-1}$). Les termes qui ne varient pas significativement n'ont pas été tracés.*

3.2.2 Simulations numériques directes

Nous avons effectué quelques essais de simulation directe des équations de Navier-Stokes grâce au logiciel libre *Gerris*. Ce logiciel utilise le schéma *Volume of fluid* (VOF) et permet l'adaptation dynamique du pas de discrétisation (raffinement du maillage uniquement là ou c'est nécessaire). Nous avons pu profiter grandement du travail de prise en main du logiciel réalisé par Chasseur (2011). Les résultats obtenus ont été encourageants. La figure 3.7 présente deux topographies de la surface montrant la croissance linéaire puis la saturation non linéaire du mode 3D inertiel dans un cas vertical. Le nombre de Kapitza est faible ($\Gamma = 29.8$) ce qui explique l'absence d'ondes capillaires. La taille du maillage nécessaire varie entre L (longueur du domaine) et $L/2^8$ (niveau 8 de discretisation). Même dans ce cas relativement simple, le temps de calcul sur une machine de bureau dépasse une semaine. Plutôt que de se lancer dans le calcul parallèle, nous avons choisi de privilégier l'utilisation des modèles d'équations présentés précédemment. Cela permet de diminuer le temps de calcul tout en facilitant la compréhension des mécanismes physiques de part la dimensionnalité réduite du système. Le modèle Ruyer-Quil-Manneville, en particulier, a fait l'objet de nombreuses validations expérimentales et numériques.



(a) (b)

FIGURE 3.7 – *Topographies issues des simulations directes réalisées avec Gerris. La visualisation s'effectue avec le logiciel Gfsview. (a) : Croissance linéaire du mode inertiel. (b) : Saturation non linéaire du mode inertiel. Les paramètres sont :* $\beta = 90\,^\circ$, $R = 11.3$, $\Gamma = 29.8$.

Dietze et al. (2014) ont employé les outils de la simulation directe afin d'étudier l'évolution non linéaire des ondes 3D. Pour cela, ils ont utilisé le logiciel *Open Foam* aussi basé sur la méthode VOF. Leurs calculs ont été lancés sur un superordinateur de 1024 processeurs ce qui ramène le temps de simulation à quelques jours. Les résultats obtenus mettent en évidence la complexité du champ de vitesse dans le liquide à travers de nom-

breux vortex et zones d'écoulement retour. Ces structures sont susceptibles de jouer un rôle important dans l'intensification du transfert de chaleur et de masse. Par ailleurs, l'état du système n'apparaît pas stationnaire à la fin des simulations. Dans certains cas même, les ondes oscillent entre les états 2D et 3D.

3.3 Conclusion - Perspectives

Nous avons mis en évidence trois modes d'instabilité 3D des ondes solitaires et obtenu un bon accord entre l'analyse de stabilité linéaire des équations du modèle Ruyer-Quil-Manneville et les résultats expérimentaux. Le mode capillaire, courte longueur d'onde, déforme la région capillaire des ondes et prédomine pour $\beta < 12^{\circ}$. Le mode inertiel, dont l'évolution est rapide pour $\beta > 12^{\circ}$, déforme l'onde entière et possède une longueur d'onde la plus instable nettement plus grande. Les mécanismes physiques associés à ces deux modes ont été, par ailleurs, clairement identifiés. L'origine du troisième mode d'instabilité, de longueur d'onde intermédiaire et qui apparaît à haute fréquence de forçage, reste à élucider tout comme le processus de formation des structures en fer-à-cheval et en Λ. Nous avons montré également, grâce à l'analyse énergétique des équations du modèle, que le mode d'instabilité synchrone des ondes de la famille γ_1 était d'origine capillaire. Enfin, nous avons discuté de la possibilité d'effectuer des simulations numériques directes du problème via le logiciel *Gerris*.

Film liquide cisaillé par un contre-écoulement d'air

4

Le procédé de distillation de l'air met en oeuvre la circulation à contre-courant d'une phase liquide et d'une phase gazeuse dans des garnissages structurés. Le liquide s'écoule par gravité le long de tôles ondulées tandis que l'écoulement de gaz ascendant est confiné dans des canaux. Cette configuration permet de maximiser l'aire de contact et les échanges entre les deux phases tout en minimisant les pertes de charge. L'interaction entre le film liquide et le gaz joue en effet un rôle important via le développement d'ondes à l'interface gaz/liquide. Les échanges de masse sont favorisés par les mouvements de recirculation du liquide au sein des ondes (Bontozoglou (1998), Karimi et Kawaji (1999)). Ces recirculations augmentent également les échanges de chaleur par convection entre les deux phases, les transferts par conduction étant favorisés par ailleurs par la faible épaisseur du film liquide (Miyara (1999)).

Le point optimal de fonctionnement se situe proche de la limite d'engorgement : le liquide est alors transporté vers le haut et obstrue la section de passage pour le gaz. Les pertes de charge augmentent de manière importante et les rendements de distillation chutent. Il est important de mieux comprendre les mécanismes physiques à l'origine de l'engorgement : contrôler ce phénomène permettrait d'augmenter les volumes produits par la distillation. La géométrie complexe des garnissages rend cependant difficile cette compréhension. Notre objectif est d'étudier ce problème d'un point de vue expérimental en simplifiant au maximum la géométrie (canal plan).

L'engorgement peut survenir « à coeur » ou en entrée/sortie de gaz/liquide. Ces effets de bord sont sans doute les plus fréquents au sein des colonnes de distillation, en particulier au niveau de la jonction entre deux packs de garnissage. L'engorgment « à coeur » constitue en quelque sorte la limite théorique de fonctionnement du procédé. Nous allons ici étudier en détail ce phénomène grâce à l'expérience à température ambiante mise au point au laboratoire FAST.

4.1 Etat de l'art

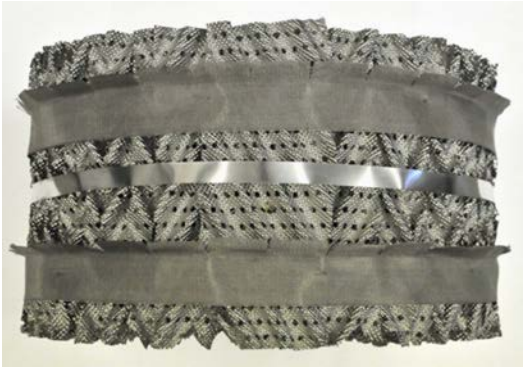


Figure 4.1 – *Photographie d'un garnissage Mellapak* 250.*X*

Le fait de simplifier la géométrie vis-à-vis des garnissages revient à négliger certains phénomènes. Parmi ces phénomènes, nous pouvons citer tout d'abord l'existence de perforations dans les tôles (Figure 4.1) dont le rôle est de redistribuer le liquide au sein du garnissage. Souidi et Bontemps (2001) ont comparé les seuils d'engorgement pour des ondes d'échangeur avec et sans perforations. Les perforations semblent entraîner une dégradation des performances en terme d'engorgement ; il est difficile de conclure cependant car, comme nous allons le voir, ces résultats dépendent du critère d'engorgement adopté. Par ailleurs, les colonnes de distillation sont équipées de cerclages (« wall-wipers ») qui permettent d'éviter que le liquide ne s'écoule le long des parois. Aferka et al. (2010) ont montré, grâce à des visualisations par tomographie à rayons X, qu'il y a accumulation de liquide au niveau des cerclages ce qui peut conduire à un engorgement local. Ce même phénomène peut survenir également au niveau des points de contact entre les tôles. Une autre spécificité de la configuration industrielle vis-à-vis de notre étude simplifiée est l'inhomogénéité de distribution du liquide. En effet, le liquide est introduit dans les garnissages par l'intermédiaire de nombreux jets. Fourati et al. (2012) ont mesuré la dispersion radiale de ces jets en fonction de la hauteur par tomographie à rayons gamma. Les propriétés d'engorgement sont ainsi susceptibles de varier selon la position verticale dans la colonne. De plus, la hauteur finie des garnissages entraîne un décrochement du liquide à l'interface entre deux packs ce qui peut conduire à un engorgement précoce. Enfin, un dernier aspect que nous négligeons dans notre étude est l'ondulation des tôles (Figure 4.1). Elle permet d'augmenter la surface d'échange mais modifie l'écoulement du film liquide. Il apparaît notamment des états stationnaires (sans ondes). Ceux-ci ont été étudiés numériquement en 2D par Trifonov (2011). En 3D, Heining et al. (2012) ont observé l'apparition de zones sèches au niveau des bosses. Les ondes sur le film liquide peuvent être fortement amplifiées par un effet de résonnance (Bontozoglou et Papapolymerou (1998)). Le caractère stabilisant ou déstabilisant de la topographie dépend toutefois des propriétés physiques du liquide, notamment de la tension de surface (D'Alessio et al. (2009)).

Les études existantes en géométrie simplifiée (canal plan ou tube) sont nombreuses. Elles ont permis de mettre en évidence plusieurs mécanismes d'engorgement mais ont bien du mal à séparer les différents effets. Chaque expérience apparaît comme un cas particulier : cela engendre une grande dispersion des résultats lorsqu'on superpose les mesures de seuil d'engorgement provenant de différentes études (Figure 4.2). Par ailleurs, le contrôle des conditions d'entrée et de sortie des deux phases apparaît comme crucial afin d'éviter l'engorgement précoce du dispositif. McQuillan et Whalley (1985) discutent la pertinence de 17 corrélations empiriques et 5 corrélations théoriques. Parmi celles-ci, on peut citer les corrélations de type *Wallis* (Wallis (1961)) qui fonctionnent bien dans les cas confinés mais ne prennent pas en compte la tension de surface. Les corrélations utilisant le nombre de Kutateladze (Tobilevich et al. (1968) par exemple) corrigent ce problème mais sont indépendantes du confinement. Parmi les autres lois empiriques existantes, celle d'Alekseev et al. (1972) semble la plus pertinente sur une large plage de paramètres.

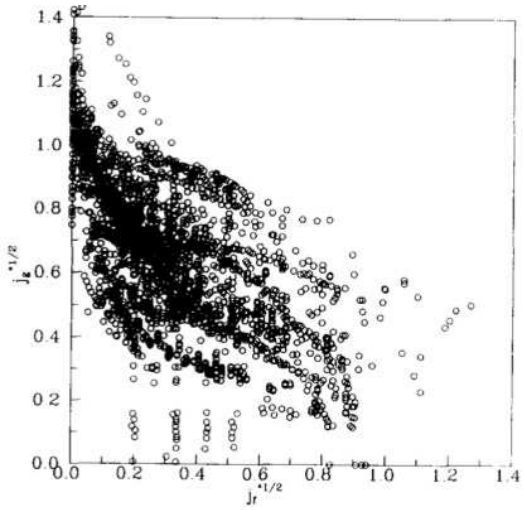


FIGURE 4.2 – *Dispersion des résultats sur le seuil d'engorgement provenant de diverses études expérimentales. Figure extraite de Jeong et No (1994)*

La majorité des expériences disponibles dans la littérature concerne la géométrie cylindrique : le liquide s'écoule le long des parois internes d'un tube. Plusieurs d'entre elles s'intéressent à l'influence des propriétés physiques. Deendarlianto et al. (2010) observent un effet destabilisant d'une diminution de la tension de surface : l'arrachement de gouttes est favorisé et le point d'engorgement le long du tube est plus éloigné de l'entrée du liquide. Carvalho et Costa (2006) font varier la densité du gas ρ_g et montrent que la vitesse d'engorgement $U_{g,f}$ vérifie la relation : $\rho_g U_{g,f}^2 = cst$. Ceci est bien en accord avec l'adimensionnement réalisé dans le cadre des corrélations de type *Wallis*. De même, Zapke et Kröger (1996) montrent que la vitesse d'engorgement augmente avec la densité du liquide. La viscosité du gaz ne joue aucun rôle au contraire de la viscosité du liquide qui modifie l'épaisseur du film et donc la section de passage du gaz. Dans d'autres études, l'influence de l'inclinaison du tube est étudiée. Il existe ainsi un angle d'inclinaison particulier, qui dépend du débit liquide, pour lequel la vitesse d'engorgement est maximale

(Ousaka et al. (2006), Zhang et al. (2013)). Vijayan et al. (2001) observent que le fait d'augmenter la longueur du tube conduit en général à un engorgement plus rapide. Ils étudient surtout l'effet du confinement (tubes de diamètre 25, 67, 99 mm) et montrent que les mécanismes d'engorgement sont différents d'un cas à l'autre. Enfin, un exemple révélateur de la complexité du problème constitue les études de Mouza et al. (2003) et Pantzali et al. (2008) (tube vertical de diamètre $d < 10$ mm). Leurs courbes de vitesse de gaz à l'engorgement en fonction du débit liquide (toutes choses égales par ailleurs) présentent trois régimes. Cela est dû à l'influence de la courbure des tubes et des conditions d'entrée des deux phases (engorgement en entrée de liquide).

Il existe relativement peu d'études dans des canaux plans. Comme discuté précédemment, l'engorgement survient parfois en raison de l'entrée en contact brutale du contre-écoulement de gaz avec le film liquide (Zapke et Kröger (2000), Njifenju (2010)). Contrairement au cas des tubes où il est difficile de réaliser des mesures d'épaisseur, les travaux existants en géométrie plane fournissent davantage de données sur ce point. La technique employée est, selon les cas, une mesure par conductance (Drosos et al. (2006)), capacitance (Roy et Jain (1989)), absorption d'un faisceau lumineux (Njifenju (2010)) ou fluorescence (Vitry (2011)). En particulier, les études de Drosos et al. (2006) et Roy et Jain (1989) font état d'une augmentation de l'épaisseur moyenne du film liquide due au cisaillement imposé par le gaz. La génération de vagues par le vent est observée ainsi que des ondes de grande amplitude remontant l'écoulement (« slugs »).

Nous allons détailler à présent les différents mécanismes d'engorgement connus. Nous nous intéresserons dans un premier temps aux mécanismes liés à l'interaction entre une onde à la surface du film liquide et le contre-écoulement de gaz. Nous verrons dans un deuxième temps que des ondes peuvent apparaître spontanément dans les écoulements diphasiques gaz-liquide.

Un premier critère utilisé parfois pour définir l'engorgement est l'arrêt puis le rebroussement des ondes à la surface du film liquide. En première approximation, ce phénomène peut être décrit par le nombre de Froude :

$$Fr_{G,L} = \frac{\rho_g U_g^2}{\rho_l g h \sin\beta} \tag{4.1}$$

ρ_g et ρ_l sont respectivement les densités du liquide et du gaz, U_g est la vitesse du contre-écoulement de gaz, g est l'accélération de la gravité, h l'épaisseur du film et β l'angle d'inclinaison du plan. Ce nombre adimensionnel constitue un rapport entre les contraintes de cisaillement imposées par le gaz à l'interface et la gravité au sein du liquide. Il existe des études dans la littérature qui décrivent de manière plus précise ce phénomène par des bilans de forces détaillés. Shearer et Davidson (1965) sont les premiers à calculer une forme d'onde stationnaire en supposant l'écoulement de gaz décollé à l'arrière de l'onde (pression constante). Le seuil d'engorgement est défini comme la vitesse de gaz critique au delà de laquelle l'amplitude de l'onde augmente fortement. Jayanti et al. (1996) par-

tent de la forme d'onde calculée par Shearer et Davidson (1965) et utilisent la simulation numérique directe pour calculer les forces qui s'exercent sur l'onde. L'effet crucial du diamètre du tube sur le seuil d'engorgement (défini à partir de l'équilibre des forces) est mis en évidence. D'autres études similaires supposant un profil d'onde semi-circulaire (McQuillan et al. (1985)) ou sinusoïdal (Barbosa Jr. et al. (2001)) existent.

Dans les systèmes confinés, le phénomène précédent peut être accompagné de la formation d'un pont liquide (Figure 4.3). L'onde vient toucher, soit la paroi opposée, soit la crête d'une autre onde si un film liquide s'écoule sur la paroi opposée ou s'il s'agit d'un tube. Dans l'étude de Vlachos et al. (2001) (canal plan vertical avec un film liquide sur chaque paroi, distance inter-plaques : 5 ou 10 mm), ce mécanisme d'engorgement est dominant. Par ailleurs, la formation des ponts liquides a été étudiée par une autre communauté de chercheurs intéressés dans les différents régimes d'écoulements diphasiques. L'engorgement est alors décrit comme la transition d'un régime « slug flow » vers un régime « churn flow » (Jayanti et Hewitt (1992)).

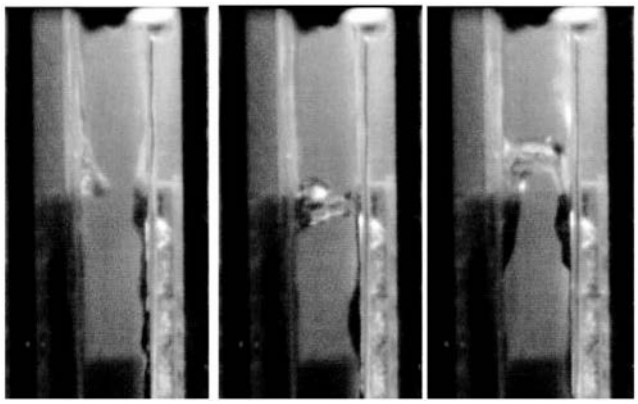


FIGURE 4.3 – *Formation d'un pont liquide (distance inter-plaques : 10 mm). Photographie issue de Vlachos et al. (2001)*

Enfin, le troisième mécanisme d'engorgement lié à l'interaction entre une onde existante et un contre-écoulement de gaz est l'arrachement de gouttelettes. Celui-ci dépend, en première approximation, d'un nombre de Weber adimensionnel :

$$We_{G,L} = \frac{\sigma}{\rho_g U_g^2 h \sin\beta} \tag{4.2}$$

Il représente le rapport entre la force de tension de surface et celle exercée par l'écoulement de gaz (σ est la tension de surface). L'atomisation a fait l'objet de très nombreuses études, aussi bien numériques qu'expérimentales. Ces études se placent souvent dans la configuration d'un écoulement gaz-liquide horizontal co-courant. Comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe, il apparaît alors spontanément des vagues : sinusoïdales d'abord puis fortement non linéaires (Zhang et al. (2002)). Des ligaments se forment à la crête des ondes et se brisent en gouttelettes (Boulesteix (2010)). Ces gouttes sont emportées par l'écoulement de gaz et peuvent impacter le film liquide en amont ce qui crée de nouvelles gouttes secondaires (réaction en chaîne).

Dans le cas où l'instabilité du film liquide est très atténuée, les mécanismes de génération des vagues par le vent deviennent prépondérants (Figure 4.4). La configuration la plus générale constitue un écoulement parallèle horizontal de deux phases non miscibles. Boomkamp et Miesen (1996) se placent dans ce cas et classifient les différents mécanismes d'instabilité possibles. Pour cela, ils s'appuient sur un bilan énergétique des perturbations obtenues en résolvant les équations d'Orr-Sommerfeld. Otto et al. (2013) adoptent le même point de vue pour le cas plus spécifique d'un écoulement co-courant de couche de mélange. Nous donnons ici quelques mécanismes pertinents pour notre étude.

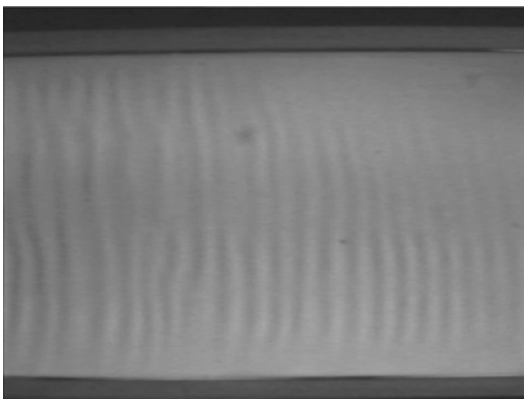


FIGURE 4.4 – *Génération de vagues par le vent. Photographie issue de Ozgen et al. (2002)*

Tout d'abord, le premier mécanisme d'instablité qui vient à l'esprit dans ce cas est l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Le cadre d'étude classique suppose des profils de vitesse uniformes et un saut de densité et de vitesse localisés à l'interface (Drazin et Reid (1981)). Ce mécanisme inviscide n'est peut-être pas le plus pertinent dans notre cas. En effet, lorsqu'un fort contraste de viscosité existe entre les deux fluides on parle plutôt d'un mode de type *Yih* (Yih (1967)). Ce mode a fait l'objet de nombreuses études dans le contexte des écoulements liquide-liquide mais est aussi tout à fait pertinent pour les configurations gaz-liquide. Un troisième mécanisme d'instabilité possible est l'analogue à deux fluides du mode visqueux qui forme les ondes de Tollmien-Schlichting (Ozgen et al. (1998)). Celui-ci apparaît lorsque le taux de cisaillement devient important, par exemple au niveau de la couche limite visqueuse dans le gaz à l'interface. Par ailleurs, les instabilités classiques propres aux écoulements monophasiques s'appliquent à chacune des deux phases séparément (condition du point d'inflexion de Rayleigh par exemple). D'autres mécanismes enfin, inexpliqués ou résultant de la combinaison des précédents, existent : citons par exemple l'instabilité courte longueur d'onde observée par Hooper et Boyd (1983) ou le mécanisme inviscide évoqué par Miles (1957). Un aspect important constitue le caractère convectif/absolu de ces différents modes, ce qui a été étudié notamment par Valluri et al. (2010) et Naraigh et al. (2013).

Dans le cas d'un canal incliné, ces différents mécanismes rentrent en compétition avec l'instabilité de Kapitza. Les conditions d'entrée et de sortie des deux phases vont permettre de distinguer deux situations : soit l'écoulement de gaz modifie l'instabilité primaire du liquide (Alekseenko et al. (2009)), soit il interagit directement avec les ondes non

linéaires. Les descriptions théoriques de ce problème difficile sont peu nombreuses. Dans le cas co-courant, les travaux de Vellingiri et al. (2013) et Amaouche et al. (2007) en sont deux exemples. Dans le cas contre-courant, trois études récentes apparaissent particulièrement intéressantes pour comparer avec nos résultats expérimentaux. Dietze et Ruyer-Quil (2013) modélisent le problème 2D complet par une approche aux résidus pondérés. L'écoulement de gaz est laminaire et fortement confiné (distance inter-plaques : 1.5 mm), la configuration verticale ou horizontale. Leurs résultats sont comparés avec des simulations numériques directes réalisées avec *Gerris* et *OpenFoam*. Trifonov (2010b) part des équations de Navier-Stokes 2D dans la phase liquide et néglige la rétroaction du liquide sur le gaz turbulent (approche de Benjamin-Miles). La configuration est verticale et le confinement modéré (10 mm). Enfin, Tseluiko et Kalliadasis (2011) utilisent un modèle aux résidus pondérés pour la phase liquide et une approche modifée de type Benjamin-Miles pour représenter l'interaction avec l'écoulement de gaz turbulent (Thorsness et al. (1978)). Ces trois études mettent en évidence une augmentation de l'amplitude des ondes, une symétrisation de la crête principale ainsi qu'une diminution de la vitesse des ondes et du nombre de radiations capillaires avec la vitesse du contre-écoulement de gaz.

Pour conclure, nous avons détaillé les mécanismes connus de transition à l'engorgement ainsi que les principales études théoriques/numériques et expérimentales existantes dans le cas de l'engorgement « à coeur ». Notre objectif est de découpler ces différents mécanismes et d'apporter un point de vue nouveau sur ce problème grâce au contrôle du liquide (forçage des ondes) et des conditions d'entrée du contre-écoulement de gaz. L'utilisation des moyens de mesure innovants décrits dans la partie 1 devrait permettre de décrire avec précision les phénomènes rencontrés. Nous nous situerons dans un cadre faiblement confiné (distance inter-plaques : 18 mm), ce qui simplifie la mise en place expérimentale et exclut la possibilité d'observer des ponts liquides. Les questions suivantes, en particulier, seront abordées :

- Arrive t-on à former des ondes stationnaires ?
- Y a t-il de l'arrachement de gouttes ?
- Des vagues se forment elles spontanément ?
- Qu'en est t-il des aspects tridimensionnels ?
- Les résultats obtenus sont-ils en accord avec les simulations numériques ?

4.2 Dispositif expérimental

4.2.1 Description du montage

Nous décrivons tout d'abord le montage expérimental d'étude de l'engorgement d'un film liquide cisaillé par un contre-écoulement d'air (figure 4.5). Partant du dispositif décrit au chapitre 1, nous avons ainsi rajouté un canal pour le contre-écoulement d'air. Celui-ci se compose de trois portions : un convergent (à droite sur le schéma de la figure 4.5), la

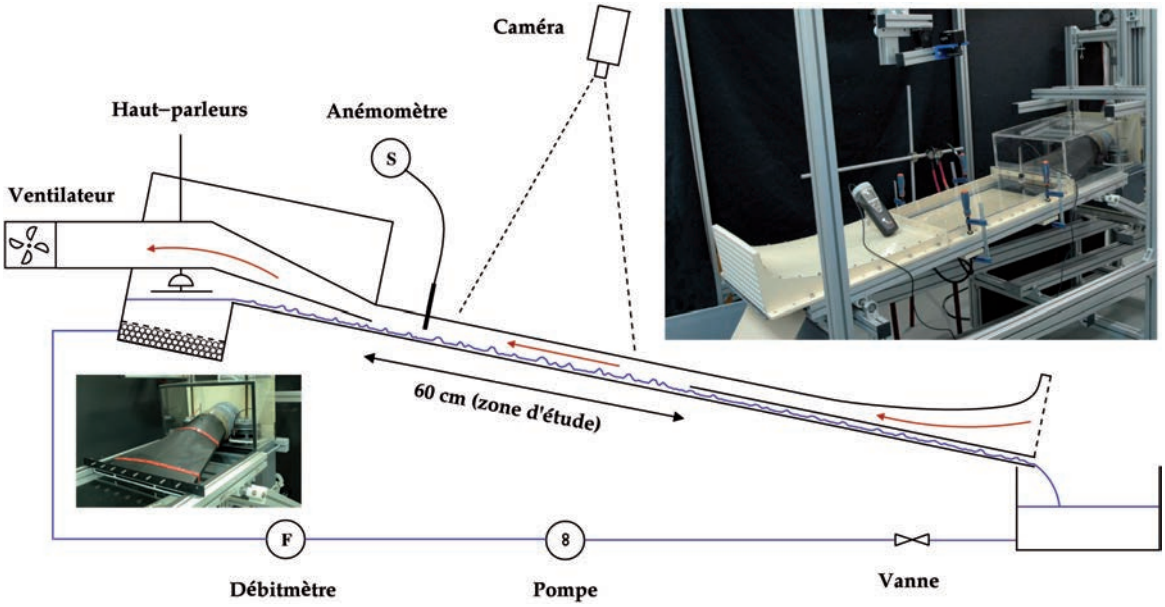


FIGURE 4.5 – *Schéma et photographies du dispositif expérimental de film liquide cisaillé par un contre-écoulement d'air*

zone d'étude et un divergent. Un ventilateur, situé en amont du divergent, aspire l'air à travers le canal. Le rôle du convergent est d'accélerer l'écoulement de gaz dans la zone d'étude. Il a été construit par assemblage de morceaux en PVC prédécoupés. Sa forme et sa longueur de 60 cm permettent d'assurer un écoulement établi lors de l'entrée en contact des deux phases tout en limitant les pertes de charge. Afin d'éviter que des particules ne soient aspirées dans le canal, nous avons testé plusieurs types de filtres en entrée du convergent. Outre le fait que ceux-ci augmentent de manière importante les pertes de charge, il est extrêmement difficile de les répartir de manière homognène ce qui crée des chemins privilégiés pour le gaz. Nous les avons finalement retirés. La zone d'étude est constituée d'une plaque transparente en Plexiglas de 60 cm de longueur. La hauteur de cette section était initialement de $e = 52$ mm ; elle a été ramenée ensuite à 18 mm afin de permettre des vitesses de gaz plus importantes. Le divergent, quant à lui, a été fabriqué à l'imprimante 3D et mesure 40 cm de longueur. Il permet de faire la jonction entre le canal de forme rectangulaire et le ventilateur circulaire tout en minimisant les pertes de charge. Un conduit souple de section circulaire assure le lien entre le divergent et le ventilateur. Nous avons utilisé plusieurs modèles de ventilateurs de différentes puissances de la marque *ebmpapst* : tous ont un diamètre d'environ 12 cm, sont alimentés par une tension continue de 12 V ou 24 V et fournissent des débits d'air théoriques variant entre 140 m^3/h (modèle *4312M*) et 570 m^3/h (modèle *4114N*). La vitesse maximale de l'air (à mi-hauteur du canal) est mesurée grâce à un anémomètre à fil chaud de type *Testo 425*. Les mesures sont moyennées sur 30 s d'acquisition afin d'éliminer les fluctuations.

4.2.2 Contrôle des conditions d'entrée et de sortie

Afin de caractériser le contre-écoulement d'air ainsi généré, nous avons réalisé des visualisations par nappe laser et injection de fumée (fines gouttelettes d'huile). Le plan laser peut être disposé horizontalement ou verticalement, selon la longueur ou la largeur du plan. Nous présentons ici uniquement des résultats qualitatifs : la description fine du champ de vitesse dans le gaz n'est pas notre objectif. Dans notre montage, il est difficile en effet d'assurer un bon ensemencement en particules pour pouvoir réaliser des mesures de vitesse par PIV ou LDV. Notre dispositif d'injection de fumée est constitué d'un peigne de 20 cm percé de 15 trous régulièrement espacés. Il ne couvre qu'une partie de la largeur du plan (37 cm) et doit donc être déplacé manuellement durant l'expérience.

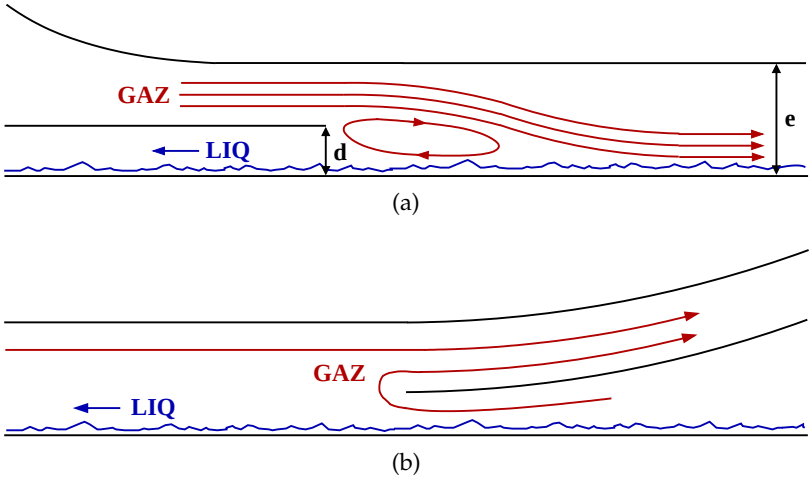
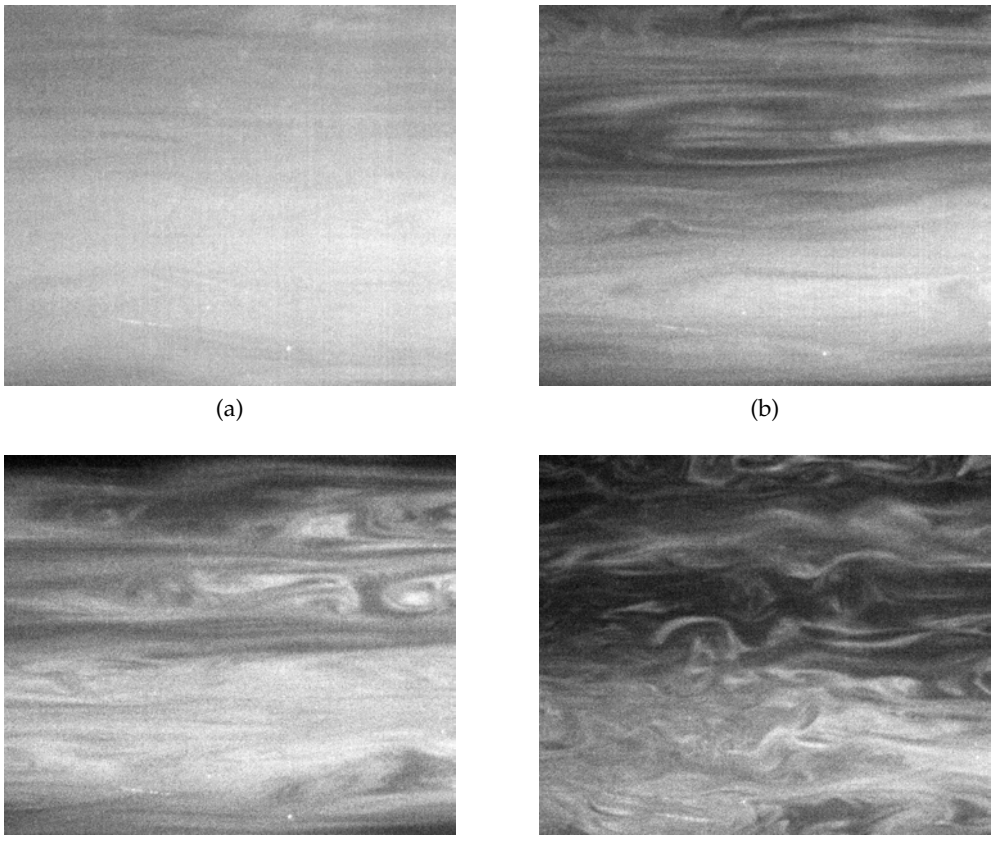


FIGURE 4.6 – *Problèmes rencontrés concernant la canalisation du contre-écoulement d'air : zone morte en entrée de gaz / sortie de liquide (Figure 4.6a), aspiration en sortie de gaz / entrée de liquide (Figure 4.6b)*

Comme discuté dans l'état de l'art, le contrôle des conditions d'entrée et de sortie du contre-écoulement d'air est crucial. Les visualisations par nappe laser et injection de fumée ont mis en évidence deux problèmes représentés sur la figure 4.6. Le premier d'entre eux constitue l'existence d'une « zone morte » en entrée de gaz. Il s'agit d'une zone de recirculation longue d'environ 10 cm au sein de laquelle le liquide n'est pas cisaillé. Nous sommes parvenus à supprimer ce phénomène en ramenant la hauteur de bord d'attaque d à 3 mm environ. Le second problème, qui a nécessité des aménagements plus conséquents, consiste en l'existence d'une zone d'aspiration au niveau du divergent. En effet, une petite partie de l'air aspiré par le ventilateur ne passe pas par le canal mais, venant de l'extérieur, directement dans le divergent. Pour remedier à cela, nous avons construit une boîte qui permet d'isoler l'entrée de liquide de l'extérieur : cette boîte apparaît sur le schéma et la photographie de la figure 4.5. Une étanchéité optimale est assurée grâce à des joints en mousse disposés le long des jonctions. La principale difficulté a été d'adapter le système de forçage du liquide pour tenir compte de la place disponible et du domaine de variation de l'angle d'inclinaison.

4.2.3 Caractérisation de l'écoulement de gaz



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 4.7 – *Visualisations par nappe laser horizontale (vue de dessus) et injection de fumée de l'écoulement de gaz pour différentes vitesses U_G (canal d'épaisseur $e = 52$ mm). La taille réelle des images est :* 14.9×12.6 *cm. (a) :* $U_G = 0.2$ *m/s. (b) :* $U_G = 0.3$ *m/s. (c) :* $U_G = 0.4$ *m/s. (d) :* $U_G = 0.5$ *m/s*

Pour la plage de valeurs de vitesse d'air U_G utilisées dans nos expériences, l'écoulement est-il laminaire ou turbulent ? La figure 4.7 reporte plusieurs visualisations obtenues par nappe laser horizontale et injection de fumée à différentes valeurs de U_G. La transition entre l'écoulement laminaire et turbulent semble avoir lieu pour $U_G \sim 0.5\ m/s$. D'après la loi empirique établie par Patel et Head (1969), la relation entre la vitesse maximale $U_{G,max}$ (mesurée à l'aide du fil chaud) et la vitesse moyenne de l'écoulement $\langle U_G \rangle$ s'écrit : $\langle U_G \rangle \sim 0.86\, U_{G,max}$. La limite du régime laminaire correspond donc à un nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne et l'épaisseur $e = 52$ mm du canal : $R_G = \dfrac{\langle U_G \rangle e}{\nu_{air}} \sim 1400$ ($\nu_{air} = 15.6.10^{-6}\ m^2/s$ à $T = 20\,^{\circ}$C). Cette valeur est en bon accord avec les résultats de Patel et Head (1969). Nous verrons par la suite que l'effet du contre-écoulement d'air sur le film liquide est négligeable pour $U_G < 1\ m/s$ (soit $R_G < 2900$) : dans les régimes étudiés, le gaz sera toujours considéré comme turbulent.

Les grandeurs caractéristiques des deux hauteurs de canaux utilisées sont rassemblées dans la table 4.1 pour la vitesse de rotation maximale du ventilateur 4114N (débit 570 m^3/h). Nous donnons ici un ordre de grandeur du débit réel du ventilateur grâce à

la valeur de $\langle U_G \rangle$. La courbe caractéristique du ventilateur permet de donner une valeur approchée des pertes de charge dans le circuit. Celles-ci apparaissent plus élevées dans le cas le plus confiné ($e = 18$ mm).

$e\ (mm)$	$U_{G,max}\ (m/s)$	R_G	$Q_G\ (m^3/h)$	$\Delta p_G\ (Pa)$
52	7	20000	417	400
18	14	13900	289	550

TABLE 4.1 – *Grandeurs caractéristiques des deux canaux utilisés ($\beta = 5°$) : épaisseur e (distance inter-plaques), vitesse maximale mesurée avec le fil chaud $U_{G,max}$, nombre de Reynolds correspondant basé sur e et $\langle U_G \rangle$, débit Q_G et pertes de charges calculées Δp_G*

4.3 Influence du contre-écoulement sur les ondes 2D

Nous présentons les résultats obtenus quant à l'effet du contre-écoulement d'air sur les ondes. Nous étudions dans un premier temps le régime d'ondes cisaillées 2D : c'est le cas qui permet de comparer les résultats avec les simulations numériques existantes (toutes 2D). Comme nous allons le voir, ce régime est limité à une plage de paramètres très restreinte ($\beta \sim 5°$). Nous montrerons en effet que, dans la plupart des cas, l'évolution 3D des ondes est très rapide. Nous caractériserons enfin le régime engorgé (terme qui reste encore à définir dans notre cas).

4.3.1 Forme des profils d'ondes stationnaires

Effet de la vitesse du gaz

Nous partons d'un train d'ondes solitaires 2D sans contre-écoulement d'air ($U_G = 0$ m/s) et étudions l'influence de la vitesse du gaz sur les profils d'épaisseur obtenus avec la méthode CCI (voir chapitre 1). Pour rappel, il s'agit d'une mesure temporelle en un point. Le point d'acquisition est choisi de manière à avoir un régime d'ondes établi et à minimiser les effets de courbure des fronts d'ondes dus aux bords. La figure 4.8 présente les profils obtenus pour quatre vitesses du contre-écoulement d'air croissantes. La valeur du maximum d'épaisseur augmente de manière importante, passant ici de $800\,\mu m$ (cas non cisaillé) à plus de $1200\,\mu m$ pour $U_G = 7.8$ m/s. Le minimum d'épaisseur, obtenu au niveau du premier creux capillaire, décroît légérement. La crête principale apparaît ainsi fortement amplifiée par le contre-écoulement d'air. Sa forme devient par ailleurs de plus en plus symétrique : la différence d'échelle de longueur entre le front et le dos de l'onde s'estompe. Il est intéressant également de constater que le nombre d'ondes capillaires diminue lorsque U_G augmente : il n'en reste qu'une seule à la vitesse maximale étudiée ($U_G = 7.8$ m/s). Comme nous le verrons, ceci provient en partie du fait que la vitesse de phase des ondes diminue avec le contre-écoulement.

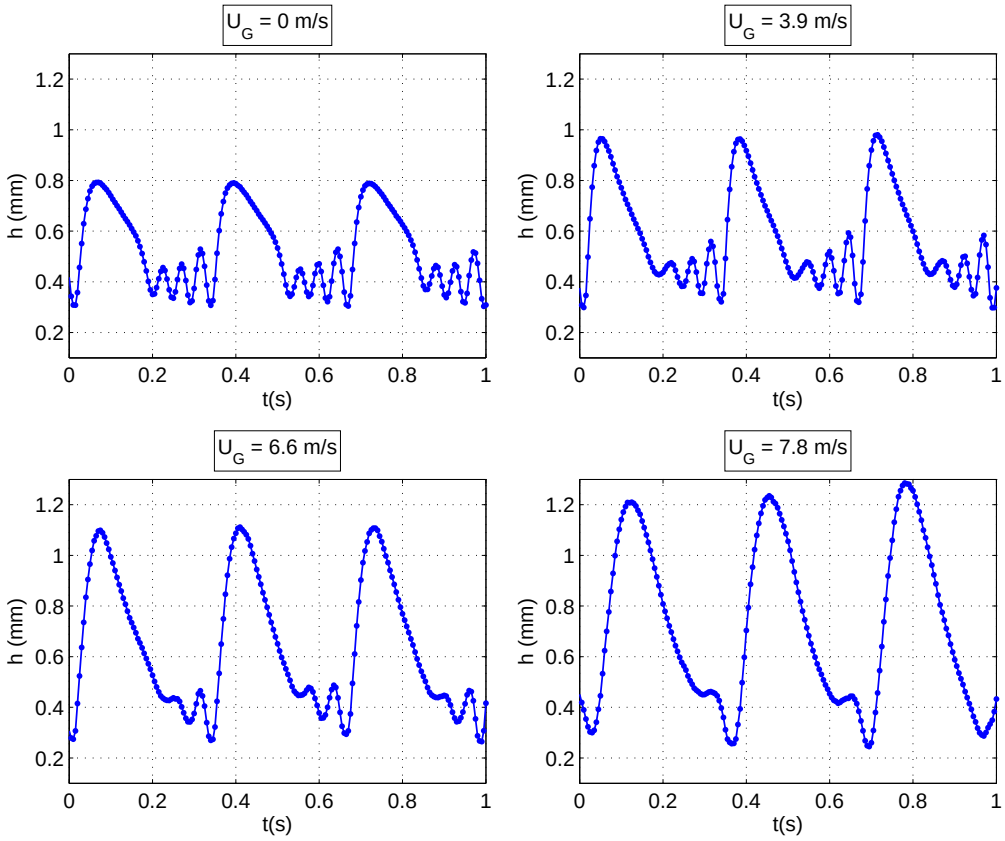


FIGURE 4.8 – *Profils d'ondes stationnaires obtenus avec la méthode CCI pour différentes vitesses U_G du contre-écoulement d'air (canal $e = 18$ mm). Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 5°$, $R_L = 45$, $f = 3.05$ Hz. Les mesures sont effectuées à 60 cm de l'entrée et selon l'axe central du canal. La cadence d'acquisition est de 200 Hz.*

Comparaison avec les simulations numériques

Nous comparons à présent ces résultats avec les études numériques précédemment citées sur le sujet (Dietze et Ruyer-Quil (2013), Trifonov (2010a), Tseluiko et Kalliadasis (2011)). Il s'agit ici d'une comparaison qualitative. En effet, les simulations numériques sont toutes dans le cas vertical qui correspond, d'une part, à la situation industrielle et qui, d'autre part, est le plus favorable pour la modélisation (seuil d'instabilité primaire $R_c^{2D} = 0$). Or pour $\beta = 90°$, les ondes sont toujours 3D (seuil d'instabilité secondaire $R_c^{3D} = 0$, voir chapitre 3). Nos résultats expérimentaux sont en accord avec les trois études numériques évoquées dans la figure 4.9. Celles-ci reportent une augmentation de l'amplitude de l'onde principale accompagnée d'une symétrisation, une diminution de l'épaisseur minimum du film et l'atténuation des ondes capillaires. Les profils donnés par Trifonov (2010a) et Tseluiko et Kalliadasis (2011) correspondent au cas où la taille du domaine est fixée (longueur d'onde constante) alors que Dietze et Ruyer-Quil (2013) raisonnent à fréquence d'excitation imposée (plus proche de l'expérience). Toutefois, ces derniers donnent des résultats sur une plage restreinte de vitesses du contre-écoulement d'air supposé laminaire. Trifonov (2010a) et Tseluiko et Kalliadasis (2011), au contraire, décrivent le comportement des ondes près de la limite d'engorgement (gaz tur-

bulent). Tseluiko et Kalliadasis (2011) obtiennent des solutions d'ondes stationnaires dans le référentiel du laboratoire ce qui définit le point d'engorgement. La définition utilisée par Trifonov (2010a) correspond à l'existence d'un point de rebroussement qui empêche d'augmenter davantage la vitesse du contre-écoulement d'air. La vitesse des ondes en ce point est faible mais non nulle.

Il est intéressant de constater que ces profils d'ondes immobiles sont en accord qualitatif avec les résultats obtenus par Shearer et Davidson (1965). En particulier, les hypothèses effectuées par ces derniers semblent valides : décollement de l'écoulement de gaz à l'arrière de l'onde (pression constante), forces de viscosité et d'inertie dans le liquide négligeables à l'arrière de l'onde, profil de vitesse parabolique dans le liquide. Dans leur cas, l'équilibre s'effectue principalement entre le poids de l'onde et la force de gradient de pression. Expérimentalement, nous n'avons pas pu observer ces ondes stationnaires. Comme nous le verrons un peu plus tard, l'apparition de vagues à contre-courant pour $U_G \sim 8$ m/s à $\beta = 5°$ l'en empêche. Il est intéressant de constater enfin que les tendances observées se distinguent des résultats disponibles dans la littérature pour le cas co-courant (Vellingiri et al. (2013)) : l'amplitude de la crête principale mais également des ondes capillaires est amplifiée dans ce cas.

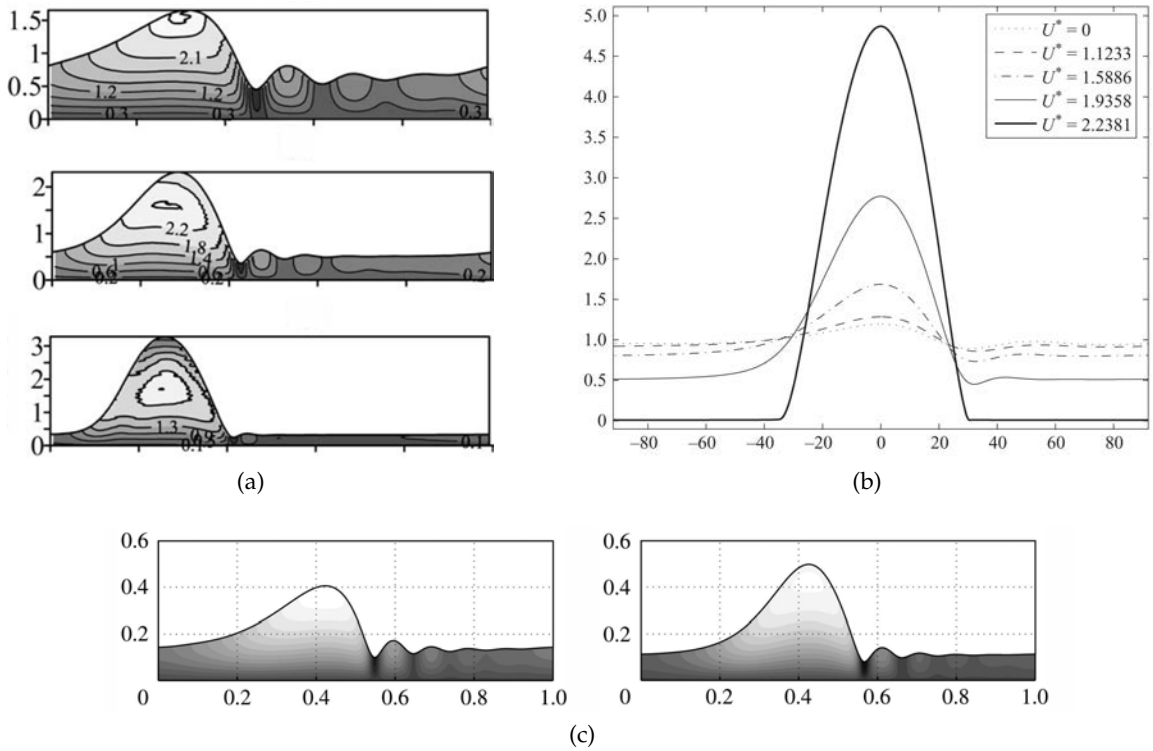


FIGURE 4.9 – *Profils d'ondes numériques extraits d'études de la littérature (cas vertical). (a) : Trifonov (2010a) (air-eau, $R_L = 20$, $\Gamma = 3400$, $e = 10$ mm). Les graphes correspondent, de haut en bas, à $U_G = 2.5$ m/s, $U_G = 7$ m/s, $U_G = 8.5$ m/s. (b) : Tseluiko et Kalliadasis (2011) (helium-methanol, $R_L = 5$, $\Gamma = 2000$). $U^* = \sqrt{|T_w|/\rho_g}$ est la vitesse de friction (T_w est la contrainte de cisaillement à la paroi en l'absence de liquide, ρ_g est la densité du gaz). (c) : Dietze et Ruyer-Quil (2013) (air-dimethylsulphoxide, $R_L = 5$, $\Gamma = 510$, $e = 1.5$ mm). Les graphes correspondent, de gauche à droite, à $U_G = 0.5$ m/s et $U_G = 1.9$ m/s.*

Effet du nombre de Reynolds et de la fréquence

Nous avons également étudié dans la mesure du possible l'influence des paramètres expérimentaux sur l'évolution des profils d'ondes. La marge de manoeuvre, en effet, est restreinte. L'angle d'inclinaison ne peut quasiment pas être modifié. Pour $\beta < 5°$, notre dispositif de forçage ne permet pas d'obtenir des ondes d'amplitude suffisante ; pour $\beta > 5°$, l'évolution 3D est rapide. Nous avons donc étudié, dans un premier temps, l'effet du nombre de Reynolds du liquide à $\beta = 5°$ (figure 4.10). La plage de variation correspond au domaine d'existence des ondes 2D de la famille γ_2. L'augmentation de R_L à U_G donnée amplifie la crête principale ainsi que les ondes capillaires (leur nombre augmente également). L'influence de la fréquence, dans un deuxième temps, peut être observé en comparant les figures 4.10b et 4.8. La plage de variation est limitée ici encore et l'effet est semblable à celui obtenu dans le cas non cisaillé : l'augmentation de f induit une diminution de l'amplitude de la crête principale et du nombre d'ondes capillaires. Nous pouvons toutefois observer une « régularisation » des profils avec U_G (formes d'ondes assez similaire pour $U_G \sim 6.5$ m/s).

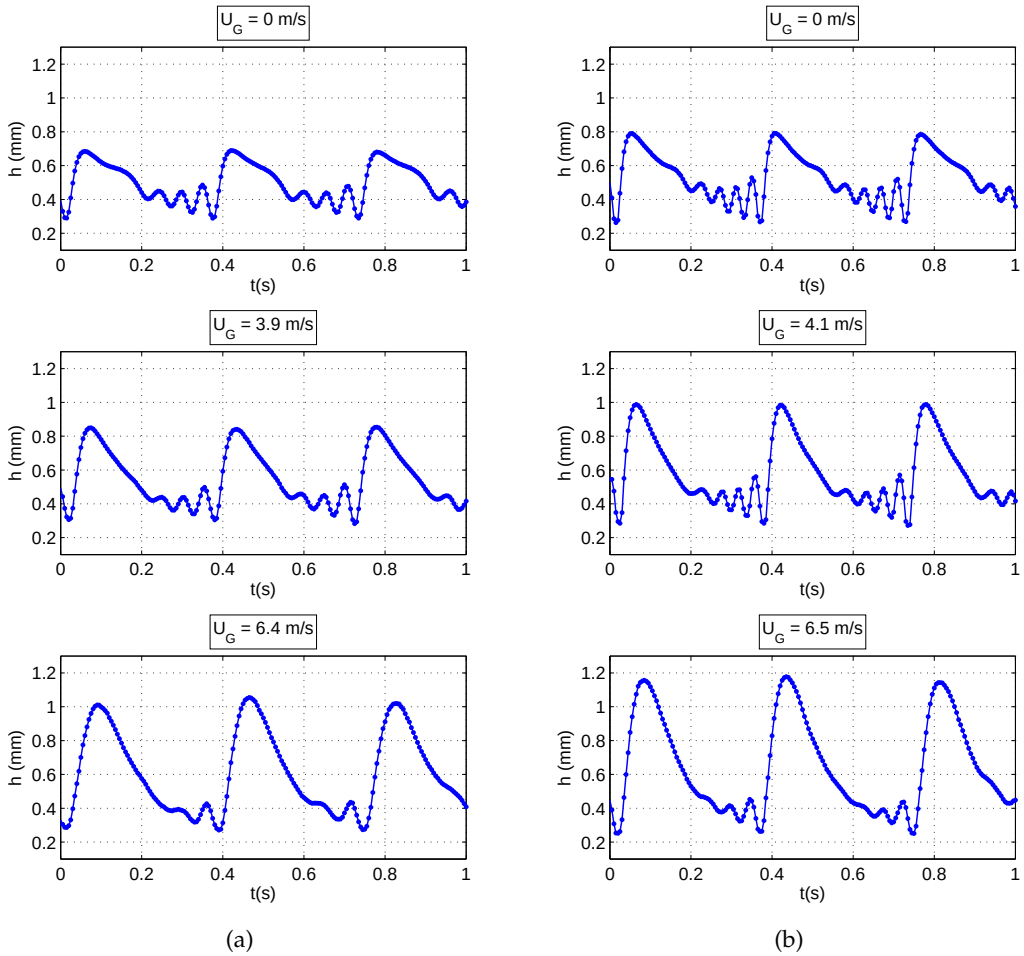


FIGURE 4.10 – *Profils d'ondes obtenus avec la méthode CCI pour différentes vitesses U_G du contre-écoulement d'air (canal $e = 18$ mm, $\beta = 5°$, $f = 2.8$ Hz) et deux nombres de Reynolds différents. (a) : $R_L = 34$. (b) : $R_L = 45$*

4.3.2 Vitesse, amplitude et épaisseur moyenne des ondes

Effet de la vitesse du gaz

Nous étudions à présent quantitativement les caractéristiques des ondes en fonction de la vitesse du contre-écoulement d'air (figure 4.11). Pour rappel, ces mesures ont été effectuées avec le canal d'épaisseur $e = 18$ mm. Les essais réalisés préalablement avec le canal d'épaisseur $e = 52$ mm ont montré peu d'influence du contre-écoulement sur les grandeurs étudiées. Cela est un peu surprenant compte tenu des valeurs de vitesses maximales mesurées de l'ordre de $U_G = 7$ m/s. Comme le soulignent Tseluiko et Kalliadasis (2011), c'est la vitesse de friction qui est importante. Nos expériences semblent donc indiquer une forte dépendance de celle-ci vis-à-vis du confinement.

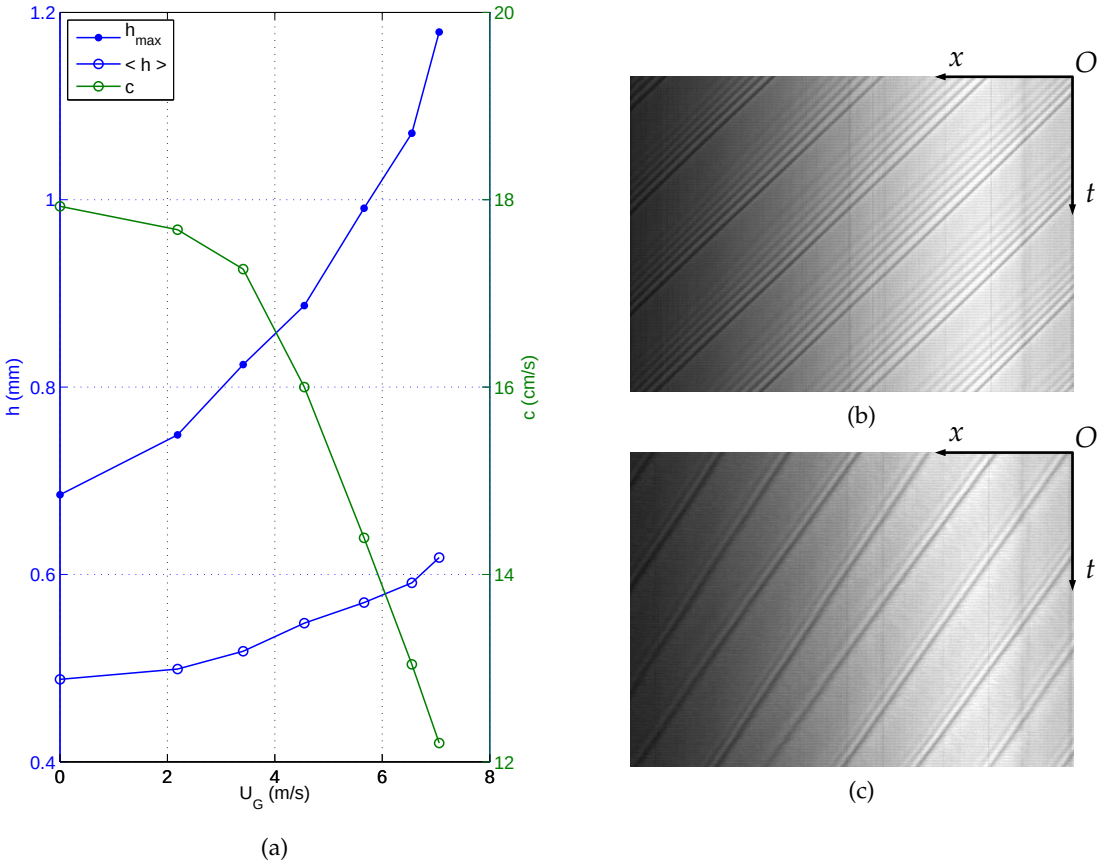


FIGURE 4.11 – *Caractéristiques des ondes en fonction de la vitesse du contre-écoulement U_G ($\beta = 5°$, $f = 2.8$ Hz). (a) : Vitesse de phase c, épaisseur maximum h_{max} et moyenne $\langle h \rangle$ ($R_L = 34$). (b) : Diagramme spatio-temporel pour $U_G = 0$ m/s ($R_L = 45$). (c) : Diagramme spatio-temporel pour $U_G = 6.6$ m/s ($R_L = 45$). La hauteur des images représente 1.1 s d'acquisition. La largeur des images correspond à une longueur de plan de 31 cm.*

La figure 4.11a présente des mesures de vitesse de phase, d'épaisseur maximum et moyenne du film liquide. L'épaisseur maximum augmente quasiment d'un facteur 2 lorsque U_G passe de 0 à 7 m/s. L'épaisseur moyenne varie de manière plus modérée, surtout pour $U_G < 3$ m/s. De même, la vitesse de phase varie peu pour $U_G < 3$ m/s

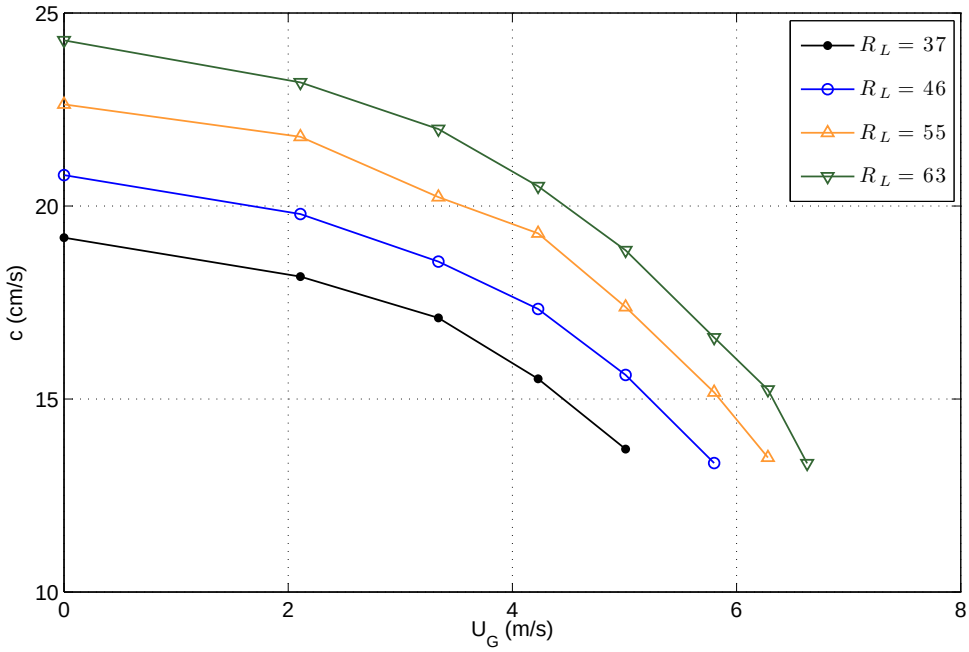
(régime 1) et décroît de manière importante pour 3 m/s $< U_G <$ 7 m/s (régime 2). Les diagrammes spatio-temporels des figures 4.11b et 4.11c permettent de se rendre compte de cette diminution de vitesse et de longueur d'onde (la fréquence est fixée). Comme nous le verrons par la suite, la valeur seuil de 7 m/s pour cette gamme de paramètres correspond soit à l'apparition de vagues à contre-courant soit au développement d'une instabilité secondaire 2D.

Effet du nombre de Reynolds, de la fréquence et de l'angle d'inclinaison

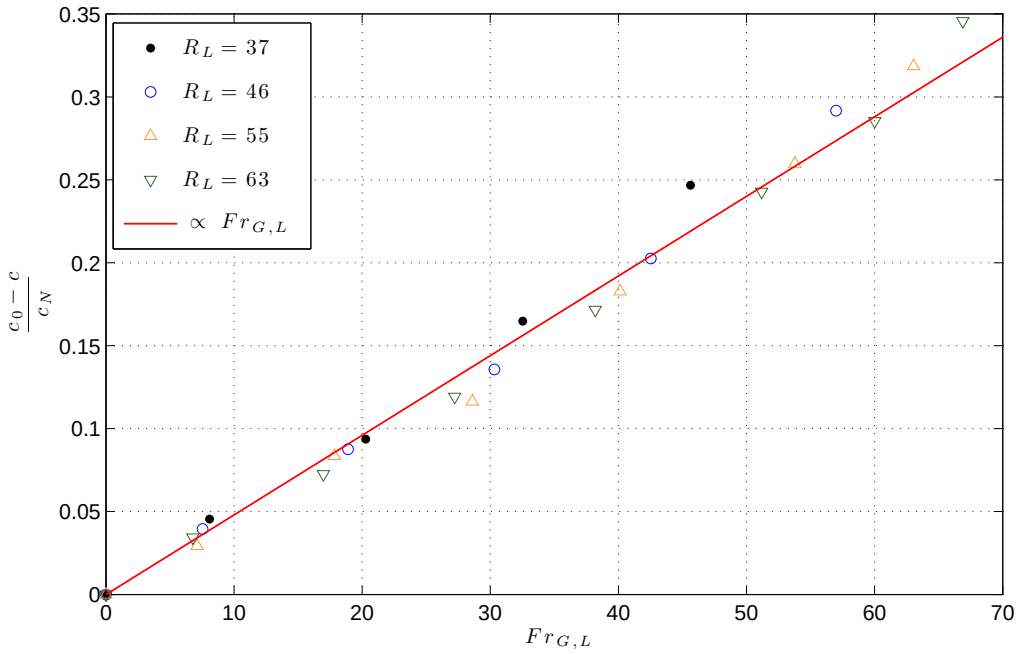
La figure 4.12a montre l'évolution de la vitesse de phase c avec U_G pour différentes valeurs de R_L. La décroissance des quatre courbes est très similaire jusqu'à atteindre une valeur de vitesse d'environ 13 cm/s. Compte-tenu de ce comportement, il semble naturel de chercher un adimensionnement qui permette de regrouper les données sur une courbe maîtresse. Pour cela, nous avons remplacé U_G par le nombre de Froude gaz-liquide $Fr_{G,L}$ (équation 4.1). Les valeurs de c, quant à elles, ont été adimensionnées par l'échelle correspondante de Nusselt : $c_N = (\nu g \sin\beta)^{1/3}(3R_L)^{2/3}$. La figure 4.12b représente $(c_0 - c)/c_N$ en fonction de $Fr_{G,L}$ (c_0 est la valeur de c sans contre-écoulement). Nous observons une tendance proportionnelle au nombre de Froude gaz-liquide. L'adimensionnement utilisé permet bien de regrouper les données à différents nombres de Reynolds liquide. La fréquence et l'angle d'inclinaison sont fixés cependant.

La figure 4.13a présente l'évolution de l'épaisseur moyenne $\langle h \rangle$ avec U_G pour différentes valeurs de R_L, f et β. Les quatre courbes montrent des tendances similaires, soit une faible augmentation de $\langle h \rangle$ avec U_G mise à part pour le cas $\beta = 2.8^\circ$ où l'augmentation est beaucoup plus forte. Pour $\beta = 5^\circ$, la distinction entre les deux régimes évoquée précédemment est visible (régime 1 : 0 m/s $< U_G <$ 3 m/s, régime 2 : 3 m/s $< U_G <$ 7 m/s). En utilisant $Fr_{G,L}$, l'échelle d'épaisseur de Nusselt $h_N = \nu^{2/3}(g \sin\beta)^{-1/3}(3R_L)^{1/3}$ et $\langle h \rangle_0$ (la valeur de $\langle h \rangle$ sans contre-écoulement), l'évolution de $(\langle h \rangle - \langle h \rangle_0)/h_N$ en fonction de $Fr_{G,L}$ est linéaire mais l'effet de β n'est pas pris en compte (figure 4.13b). Plus précisément, c'est la présence ou pas d'ondes solitaires γ_2 sur le film qui distingue ces situations. En effet, celles-ci sont absentes dans le cas $\beta = 2.8^\circ$, $R_L = 19$ car nous sommes très proches du seuil d'instabilité primaire : $R_c^{2D}(\beta = 2.8^\circ) = 17$. L'épaisseur moyenne mesurée sans contre-écoulement ($\langle h \rangle = 0.507$ mm) est alors logiquement l'épaisseur de Nusselt ($h_N = 0.512$ mm). Un des moyens de prendre en compte l'effet de l'angle et de la fréquence en présence d'ondes solitaires serait d'utiliser l'échelle du substrat (voir chapitre 2).

L'augmentation de l'épaisseur moyenne du film semble liée au cisaillement interfacial. Cela confirme les observations de Roy et Jain (1989) et surtout Guedes de Carvalho et Talaia (1998) dont les résultats suivent un comportement très similaire aux notres. Ces derniers comparent notamment leurs mesures à un modèle établi à partir d'un bilan des forces en l'absence d'ondes (raisonnement plus complet que la simple utilisation de $Fr_{G,L}$).

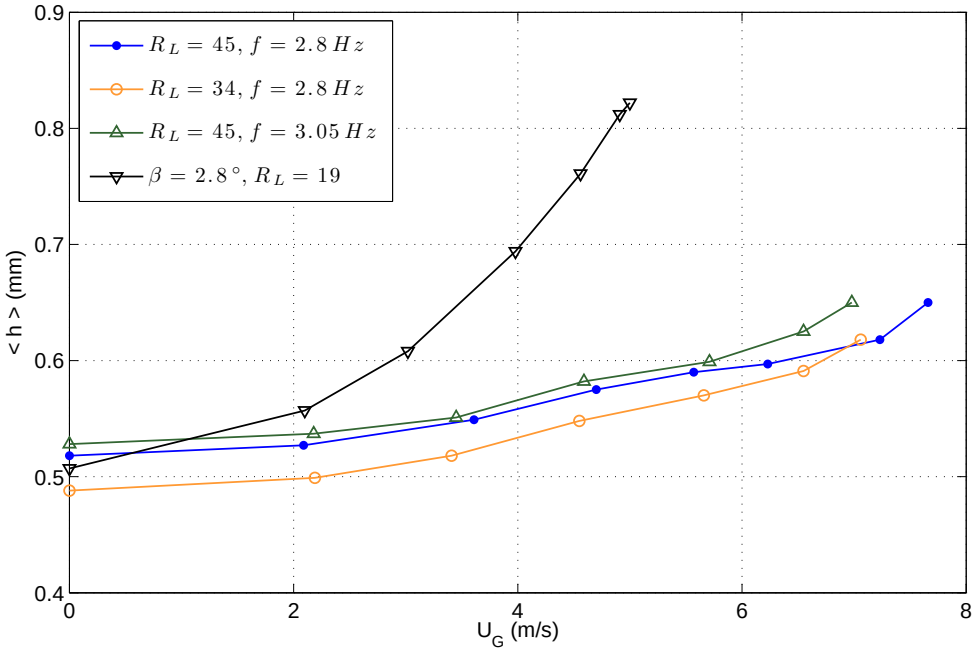


(a)

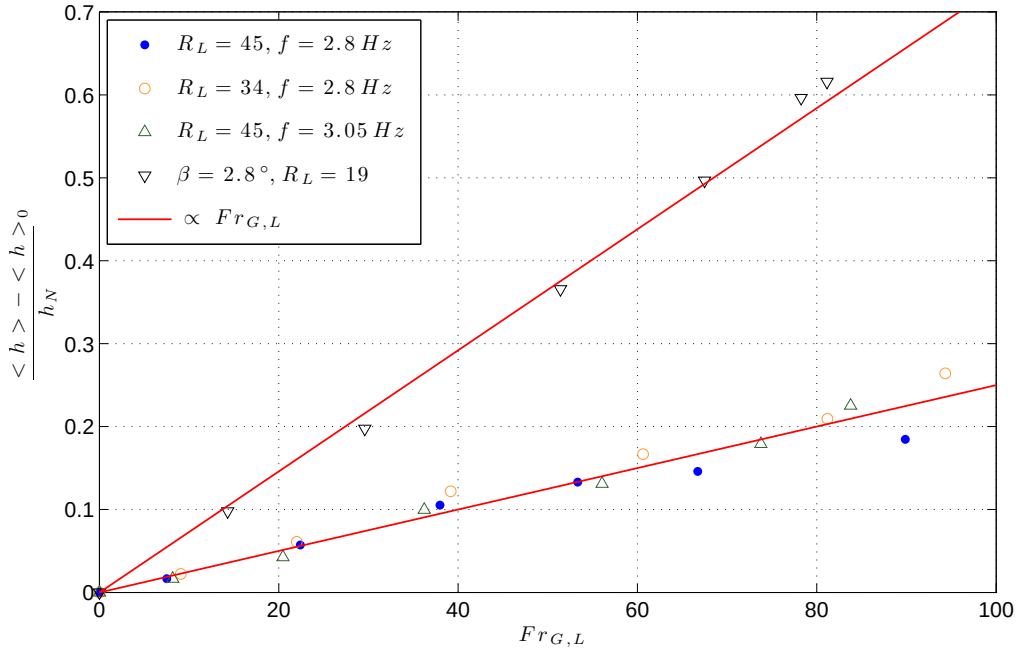


(b)

FIGURE 4.12 – *Vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds du liquide R_L et de la vitesse du contre-écoulement U_G ($\beta = 5°$, $f = 2.8$ Hz). (a) : Données brutes. (b) : Valeurs adimensionnées utilisant le nombre de Froude gaz-liquide (équation 4.1) et l'échelle de vitesse de Nusselt c_N (c_0 est la valeur de c sans contre-écoulement). La pente de la droite de corrélation est* 0.0048



(a)



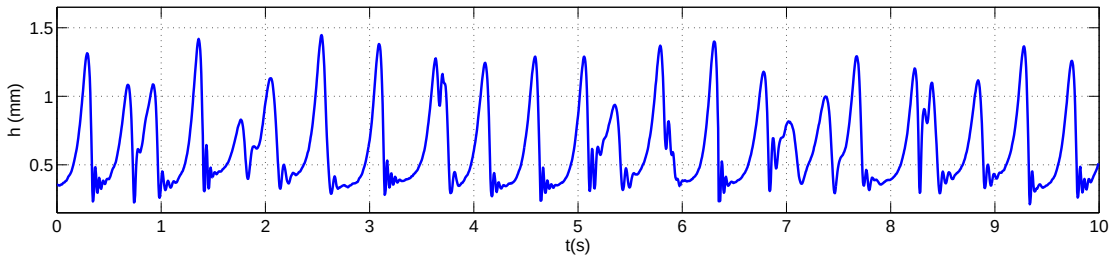
(b)

FIGURE 4.13 – *Epaisseur moyenne $\langle h \rangle$ en fonction du nombre de Reynolds du liquide R_L, de la fréquence de forçage f, de la vitesse du contre-écoulement U_G et de l'angle d'inclinaison β (lorsque la valeur de ce dernier n'est pas indiquée : $\beta = 5°$). (a) : Données brutes. (b) : Valeurs adimensionnées utilisant le nombre de Froude gaz-liquide (équation 4.1) et l'échelle d'épaisseur de Nusselt h_N ($\langle h \rangle_0$ est la valeur de $\langle h \rangle$ sans contre-écoulement). Les pentes des droites de corrélation sont* 0.0025 *($\beta = 5°$) et* 0.0073 *($\beta = 2.8°$)*

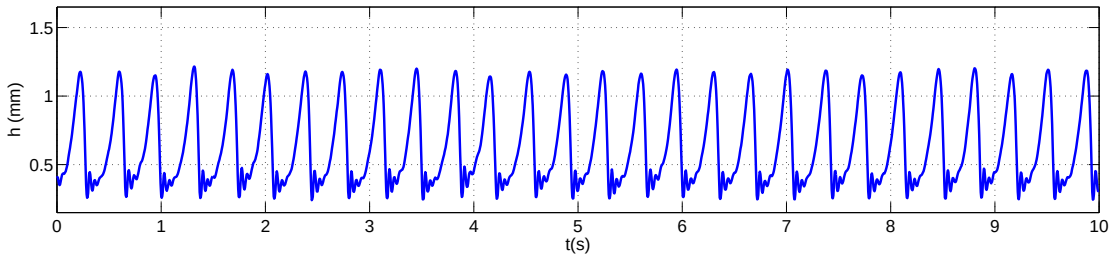
4.3.3 Forçage et instabilité secondaire 2D

Un des moyens de repousser l'apparition du phénomène d'engorgement apparaît être le contrôle des ondes sur le film liquide. La figure 4.14 compare les profils d'épaisseur obtenus sans forçage (figure 4.14a) et avec forçage (figure 4.14b), tout les autres paramètres fixés par ailleurs. Sans contrôle, les ondes sont laissées libres d'intéragir entre elles. D'une part, il y a formation localement de structures de grande amplitude par coalescence d'ondes (à $t = 3.5\,s$ par exemple). D'autre part, cela crée une variation en espace des grandeurs moyennes associées à ces ondes qui tendent vers les solutions optimales évoquées au chapitre 2. L'amplitude et la longueur d'onde, en particulier, augmentent avec la position le long du plan.

L'application du forçage en entrée rend la forme et l'amplitude des ondes très régulières comme on peut le voir sur la figure 4.14b. Dietze et Ruyer-Quil (2013) mentionnent l'intérêt du forçage comme moyen de retarder l'engorgement. Grâce à leur modèle d'équations réduit, ils peuvent en effet accéder à la dynamique spatio-temporelle du film liquide tout en limitant fortement les coûts de calcul. Le fort confinement ($e = 1.5$ mm) rend leur situation d'autant plus critique dans le sens où certaines ondes touchent la paroi supérieure ce qui n'arrive jamais dans notre cas faiblement confiné.



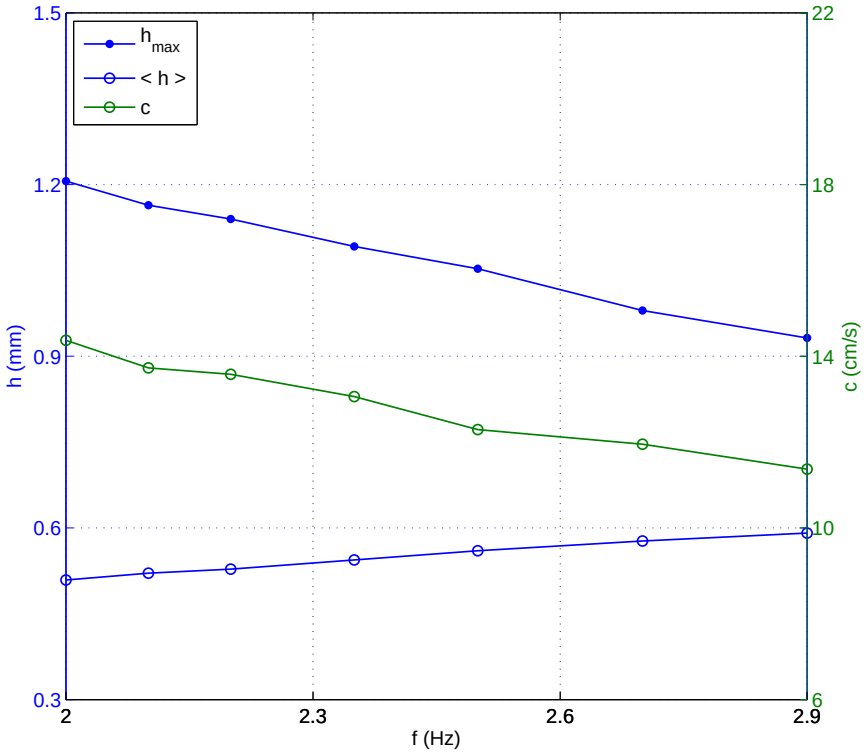
(a)



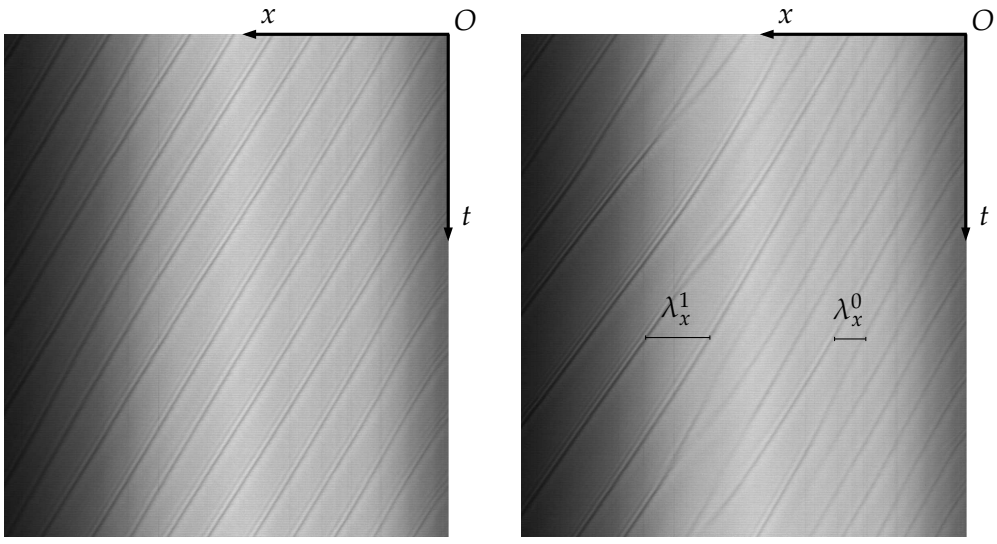
(b)

FIGURE 4.14 – *Effet du forçage sur les ondes solitaires (mesures d'épaisseur obtenues avec la méthode CCI). Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 5\,^\circ$, $R_L = 45$, $U_G = 6.5$ m/s. (a) : Sans forçage. (b) : Avec forçage ($f = 2.8$ Hz). Les mesures sont effectuées à 60 cm de l'entrée et selon l'axe central du canal. La cadence d'acquisition est de 200 Hz*

Du point de vue du processus industriel, la question du choix de la fréquence de forçage optimale se pose alors. La figure 4.15 décrit les grandeurs caractéristiques des ondes (amplitude, épaisseur moyenne et vitesse de phase) obtenues expérimentalement en fonction de la fréquence de forçage. Tout d'abord, nous avons noté un effet intéressant vis-



(a)



(b) (c)

FIGURE 4.15 – *Influence de la fréquence de forçage et instabilité secondaire 2D. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 5°$, $R_L = 30$, $U_G = 4.9$ m/s. (a) : Grandeurs caractéristiques des ondes (amplitude, épaisseur moyenne et vitesse de phase) en fonction de la fréquence. (b) : Diagramme spatio-temporel pour $f = 2.5$ Hz. (c) : Diagramme spatio-temporel pour $f = 3.0$ Hz. La hauteur des images représente 3 s d'acquisition. La largeur des images correspond à une longueur de plan de 53 cm.*

à-vis de la plage de fréquences utilisées. Sans contre-écoulement de gaz et pour $\beta = 5°$, la plus petite valeur de fréquence qui permet d'obtenir des ondes synchronisées avec notre dispositif de forçage est 2.8 Hz. En rajoutant le contre-écoulement ($U_G = 4.9$ m/s), cette fréquence minimale passe à 2 Hz. L'amplitude de forçage ne change pas : le contre-écoulement augmente donc le taux de croissance α de l'instabilité primaire du film liquide. Cet effet a été observé notamment par Alekseenko et al. (2009). Ces derniers ont mesuré α expérimentalement (tube vertical de diamètre $D = 15$ mm) grâce à deux sondes de conductivité distantes de 15 mm. Ils comparent leurs résultats à une analyse théorique Orr-Sommerfeld.

La figure 4.15a montre que l'amplitude des ondes et la vitesse diminuent tandis que l'épaisseur moyenne augmente lorsque f croît. Ces résultats ne sont pas surprenants : la tendance est la même qu'en l'absence de contre-écoulement. Les fréquences élevées peuvent sembler privilégiées pour éviter l'engorgement. Cependant, il faut prendre en compte la synchronisation spatiale du train d'ondes. Comme on peut le voir sur les deux diagrammes spatio-temporels à 2.5 Hz (figure 4.15b) et 3 Hz (figure 4.15c), cette synchronisation dépend de f. A basse fréquence, le forçage persiste sur toute la longueur de la zone d'étude. A plus haute fréquence, une instabilité secondaire 2D apparaît : celle-ci semble être de nature sous-harmonique (la longueur d'onde double : $\lambda_x^1 \approx 2\lambda_x^0$). Le forçage n'est efficace que jusqu'à une certaine position le long du plan et ne permet pas dans ce cas d'éviter l'engorgement local en sortie de liquide. Il existe ainsi une fréquence optimale qui dépend de la longueur du dispositif.

4.4 Influence du contre-écoulement sur les ondes 3D

Nous avons montré l'influence du contre-écoulement sur les ondes 2D : nos résultats viennent confirmer les tendances obtenues par plusieurs études numériques récentes sur l'instabilité primaire du film et les ondes non linéaires. Nous avons mis en évidence également l'apparition d'une instabilité sous-harmonique 2D des ondes solitaires. Nous étudions maintenant l'influence du contre-écoulement sur les instabilités secondaires 3D de ces ondes. En particulier, nous allons voir comment sont modifiés les domaines d'existence des modes 3D présentés au chapitre 3 : mode capillaire dans un premier temps, puis mode inertiel. Ces aspects ne sont mentionnés dans aucune étude de la littérature : nous nous basons donc sur nos analyses et résultats obtenus en l'absence de contre-écoulement.

4.4.1 Mode capillaire

L'effet du contre-écoulement sur le mode 3D capillaire est représenté sur la figure 4.16. Ce dernier apparaît stabilisé lorsque la vitesse U_G augmente. Le seuil d'instabilité R_c^{3D} croît avec U_G comme le montre la figure 4.16a et passe d'environ 50 sans contre-écoulement à 65 pour $U_G = 5$ m/s ($\beta = 5°$, $f = 2.9$ Hz). Pour la majorité de nos expériences, le nombre de Reynolds est inférieur à 60 : les modulations transverses capillaires ont donc disparu pour U_G de l'ordre de 6 à 7 m/s (figures 4.16b et 4.16c).

L'explication de ce phénomène est assez simple compte-tenu des résultats du chapitre 3 et de la partie précédente. En effet, le développement du mode 3D capillaire est directement lié à l'amplitude des ondes capillaires (plus précisément à leur courbure). Or, l'étude de l'effet du contre-écoulement sur les profils d'ondes 2D a montré une diminution de l'amplitude et du nombre d'ondes capillaires lorsque U_G augmente (car la vitesse de phase diminue). Cela explique par conséquent cette stabilisation.

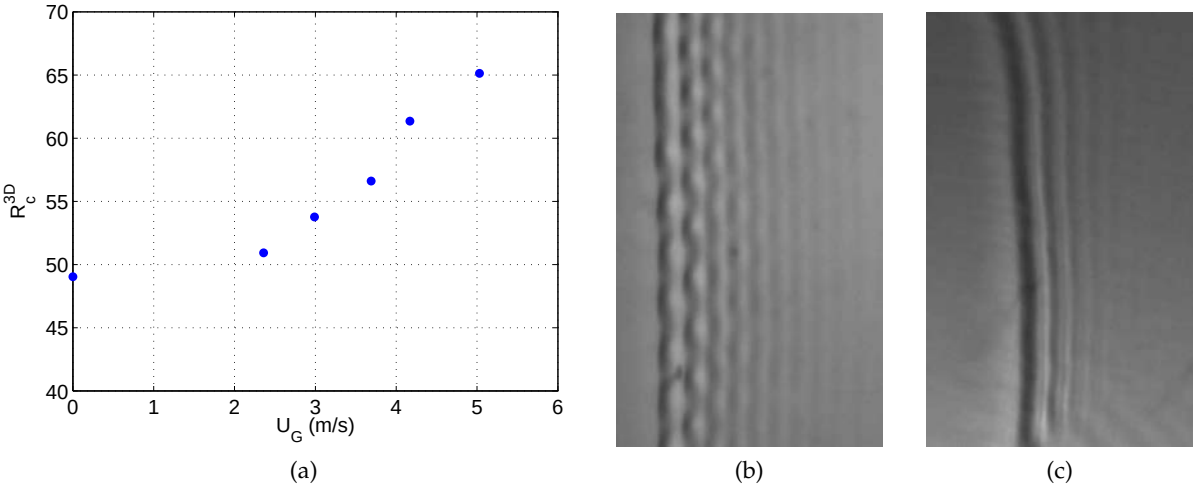
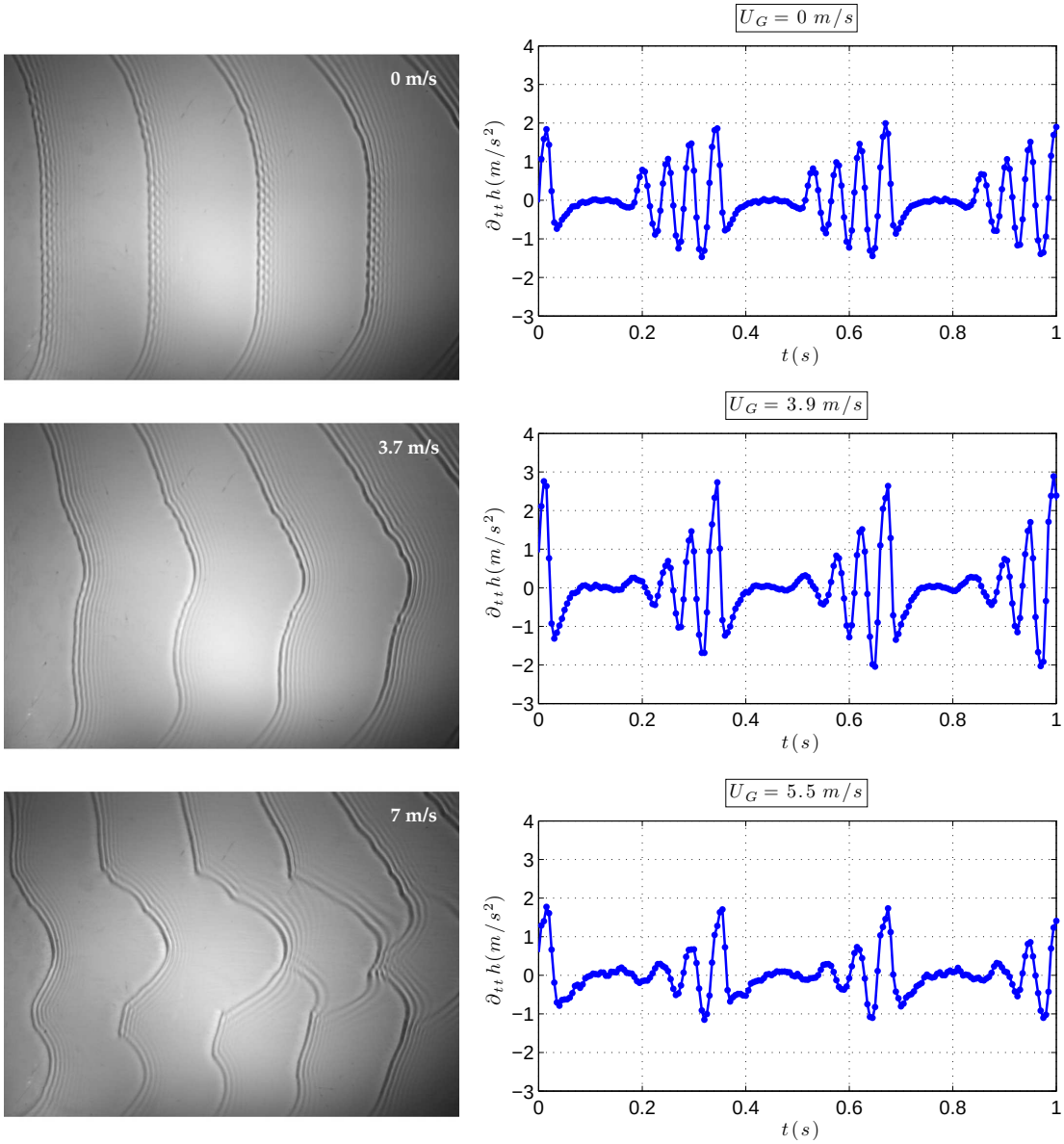


FIGURE 4.16 – *Influence de la vitesse du gaz U_G sur le mode 3D capillaire. (a) : Seuil d'instabilité R_c^{3D} en fonction de U_G ($\beta = 5°$, $f = 2.9$ Hz). (b) : Mode 3D capillaire instable pour $U_G = 0$ m/s. (c) : Mode 3D capillaire stable pour $U_G = 7$ m/s. Les paramètres expérimentaux relatifs aux deux visualisations par ombroscopie sont : $\beta = 9°$, $R_L = 46$, $f = 3$ Hz, canal $e = 52$ mm, taille réelle des images : 4.9×8.0 cm.*

4.4.2 Mode inertiel

Nous étudions ici l'influence du contre-écoulement sur le développement du mode 3D inertiel. Comme discuté au chapitre 3, celui-ci modifie profondément la structure des ondes au contraire du mode capillaire qui sature rapidement. Il est donc crucial d'étudier comment sont modifiées les conditions d'apparition de celui-ci avec le contre-écoulement. La figure 4.17a montre des visualisations par ombroscopie obtenues à $\beta = 9°$ pour trois valeurs croissantes de U_G, tous les autres paramètres fixés par ailleurs. Le mode inertiel, stable pour $U_G = 0$ m/s, devient instable pour $U_G = 3.7$ m/s et apparaît très amplifié à $U_G = 7$ m/s. La longueur d'onde de l'instabilité est de l'ordre de 10 à 15 cm et décroît lorsque U_G augmente. Les fronts d'onde sont encore bien séparés les uns des autres pour la valeur intermédiaire de U_G (écoulement pseudo-2D) ce qui n'est plus le cas pour $U_G = 7$ m/s (écoulement 3D). Il est intéressant également de constater que des modulations secondaires apparaissent sur les « bras » des structures ainsi formées. Cela confère aux ondes 3D une structure en pyramide plutôt qu'en Λ. Cette structure est propre aux cas où la longueur d'onde transverse est grande et le taux de croissance de l'instabilité est faible.



(a) (b)

FIGURE 4.17 – *Influence de la vitesse du contre-écoulement U_G sur le mode 3D inertiel. (a) : Visualisations par ombroscopie du développement du mode 3D inertiel ($\beta = 9°$, $R_L = 46$, $f = 3$ Hz, canal $e = 52$ mm, taille réelle des images : 38.7 × 32.6 cm, vitesses U_G indiquées sur les images). Pour $U_G = 7$ m/s : $Fr_{G,L} = 93$. (b) : Profils 2D CCI de l'accélération absolue de la surface libre $\partial_{tt}h$ en fonction du temps. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 5°$, $R_L = 45$, $f = 3.05$ Hz, canal $e = 18$ mm.*

Comment expliquer cette amplification du mode inertiel avec le contre-écoulement ? Pour rappel, nous avons associé ce mode à un mécanisme type Rayleigh-Taylor et écrit la condition d'instabilité suivante (voir chapitre 3) :

$$c^2 \frac{d^2h}{d\xi^2} + g\cos\beta + g\sin\beta \frac{dh}{d\xi} < 0\,. \tag{4.3}$$

Le troisième terme est négligeable et le second terme varie peu dans la plage d'angles d'inclinaison étudiée. L'instabilité dépend donc principalement du premier terme qui cor-

respond à l'accélération absolue de la surface libre $\partial_{tt}h$. Il est difficile expérimentalement de vérifier la validité de la condition 4.3. Dès lors que celle-ci est vérifiée (régime instable), l'évolution 3D des ondes est rapide et la mesure de profils par la méthode CCI n'est alors plus pertinente. Cependant, nous pouvons étudier comment varie la quantité $\partial_{tt}h$ en fonction de la vitesse du contre-écoulement dans le régime de stabilité du mode inertiel ($\beta = 5°$). La figure 4.17b représente les données de la figure 4.10b en terme de cette courbure des profils temporels. Un comportement non trivial est ainsi mis en évidence. Les valeurs des extrema de $\partial_{tt}h$ augmentent d'abord avec U_G puis diminuent. Cela s'explique compte-tenu des variations de la vitesse c et de l'amplitude des ondes h_{max} avec U_G (figure 4.11). Dans un premier temps (régime 1), c et $\langle h \rangle$ varient assez peu mais l'amplitude de la crête h_{max} croît : il est logique par conséquent d'observer une augmentation de $\partial_{tt}h$. Dans un second temps (régime 2), h_{max} continue d'augmenter mais la vitesse c décroît maintenant de manière importante : cela entraîne une diminution de $\partial_{tt}h$. Nous pouvons ainsi extrapoler ce raisonnement à des valeurs plus élevées de β. La condition d'instabilité 4.3 est alors satisfaite dans le régime 1 et les ondes deviennent 3D (le régime 2 n'est jamais atteint).

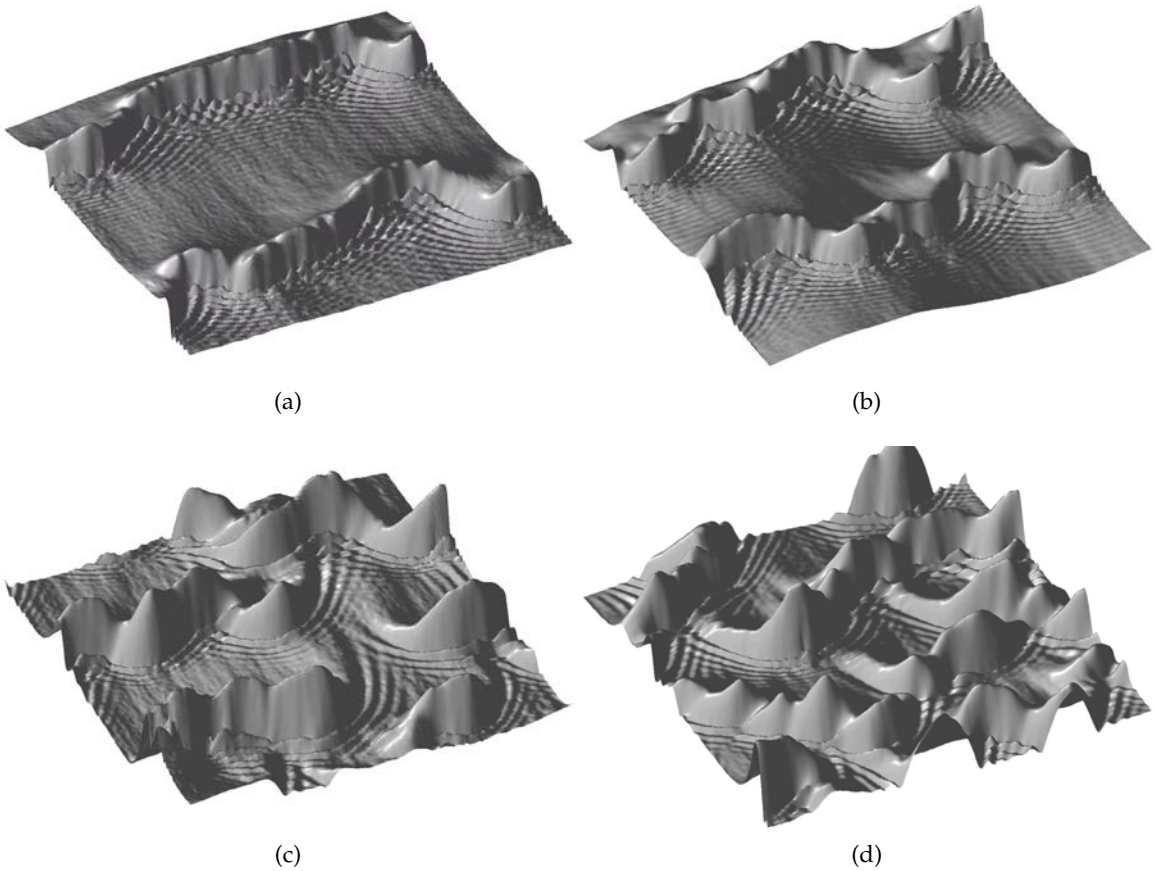


FIGURE 4.18 – *Influence du contre-écoulement sur le développement des solitons 3D. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 15°$, $R_L = 72$, $f = 5$ Hz. La vitesse U_G associée aux différentes images vérifie : U_G (4.18a) = 0 m/s < U_G (4.18b) < U_G (4.18c) < U_G (4.18d) = 9.4 m/s. Pour $U_G = 9.4$ m/s : $Fr_{G,L} = 94$. La fenêtre d'aquisition mesure 13.7 × 13.7 cm ; elle est centrée selon l'axe central du canal et débute à une distance de 60 cm de l'entrée du liquide. Les valeurs de hauteur ne sont pas données ici (elles sont sans doute surestimées par la méthode Schlieren dans ces cas extrêmes).*

Enfin, nous montrons l'effet du contre-écoulement d'air dans un cas très incliné ($\beta = 15°$). Les ondes sont alors fortement 3D ce qui justifie d'utiliser la technique Schlieren. La figure 4.18 est constituée de quatre cartes d'épaisseur représentatives de la topologie de la surface libre lorsque U_G augmente de 0 m/s à 9.4 m/s. La valeur élevée du nombre de Reynolds du liquide ($R_L = 72$) implique que les deux modes d'instabilité 3D sont instables sans contre-écoulement (figure 4.18a). Comme observé précédemment, les fronts d'onde restent séparés les uns des autres dans un premier temps (figure 4.18b). Dans un second temps, les solitons 3D se détachent et deviennent des structures indépendantes (figures 4.18c et 4.18d). Leur amplitude et leur nombre augmentent avec U_G.

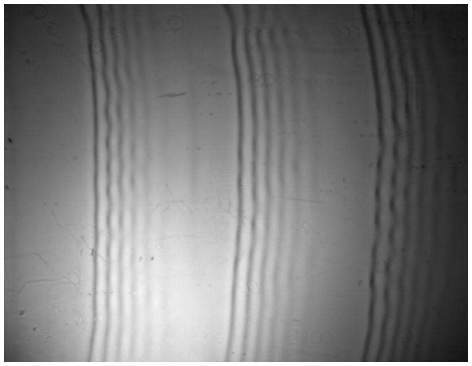
4.5 Transition à l'engorgement

Nous avons étudié l'effet du contre-écoulement d'air sur les ondes solitaires et distingué deux situations. Pour des angles faibles, la dynamique du film liquide reste 2D : l'amplitude des ondes augmente, leur vitesse diminue et les ondes capillaires sont atténuées. Lorsque β augmente, l'évolution 3D des ondes à travers l'amplification du mode inertiel est très rapide ; le mode capillaire est logiquement stabilisé. Toutes les mesures présentées jusqu'à présent (sauf figure 4.18) se sont limitées à des valeurs de vitesse du contre-écoulement d'air $U_G \leq 7$ m/s. Que se passe t-il au delà de cette limite ?

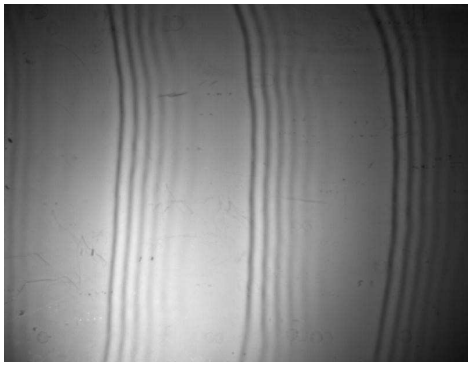
C'est ce que nous appellerons le seuil d'engorgement de notre système. La figure 4.19 décrit la séquence d'évolution observée à $\beta = 5°$ (canal $e = 18$ mm) pour des vitesses de contre-écoulement d'air croissantes de 0 à 10 m/s. Nous pouvons voir qu'aux alentours de 7.5 m/s une instabilité entraîne l'apparition de vagues à contre-courant (« ripples ») qui détruisent le train d'ondes solitaires (figure 4.19e). Ceci empêche l'observation du phénomène d'engorgement couramment rencontré dans les processus industriels (arrêt puis rebroussement des ondes). Lorsque le nombre de Reynolds du liquide R_L et la vitesse du gaz U_G augmentent, nous observons une deuxième catégorie de vagues à contre-courant : des « slugs » beaucoup plus rapides, de grande amplitude, apparaissant de manière intermittente et pouvant être accompagnés d'un arrachement de gouttes. Ces deux familles de vagues à contre-courant sont présentes surtout à faible angle d'inclinaison. En effet, le seuil d'instabilité correspondant augmente avec β. Pour $\beta \sim 15°$, le phénomène qui limite notre étude est plutôt un effet de bord lié à la sortie du liquide.

4.5.1 Ripples

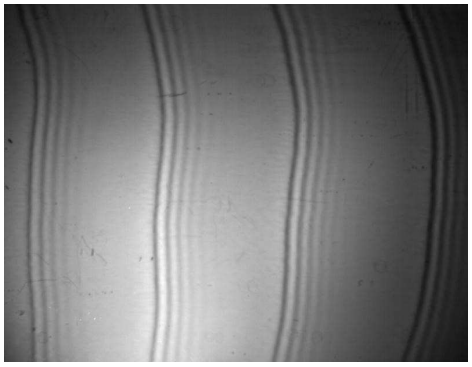
Nous allons caractériser tout d'abord la première famille de vagues à contre-courant observée à faible angle lorsque U_G augmente. Pour $\beta \sim 5°$, le seuil d'apparition de ces vagues est d'environ 7.5 m/s. Au seuil d'instabilité, ces « ripples » sont 2D comme nous pouvons le constater sur la visualisation par ombroscopie de la figure 4.20a (zoom de la figure 4.19e). Lorsque la vitesse du contre-écoulement U_G augmente encore, l'évolution est soudaine et brutale : les « ripples » deviennent 3D, intéragissent fortement avec le train d'ondes solitaires initial et détruisent celui-ci (visualisations des figures 4.19f, 4.19g, 4.19h



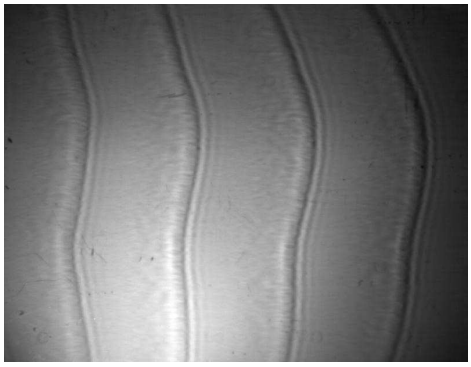
(a) *Mode 3D capillaire instable*



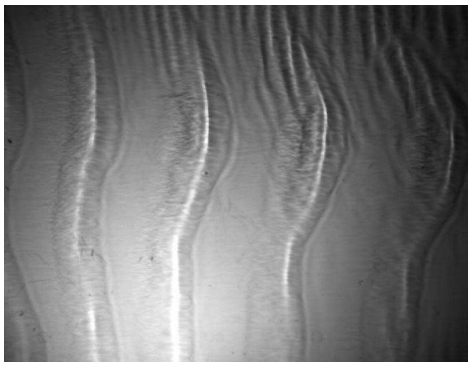
(b) *Mode 3D capillaire stable*



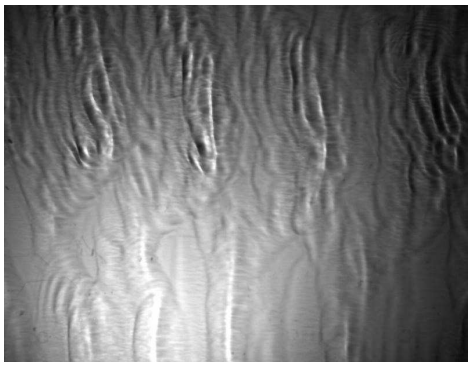
(c) *Diminution du nombre d'ondes capillaires*



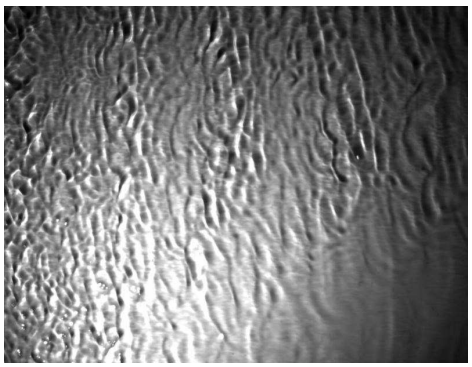
(d) *Mode 3D inertiel légèrement instable*



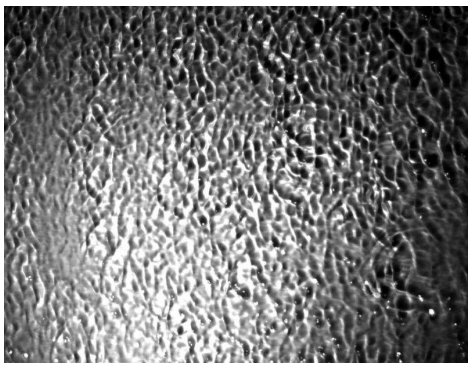
(e) *Ripples 2D*



(f) *Disparition des ondes solitaires*



(g) *Ripples 3D (1)*

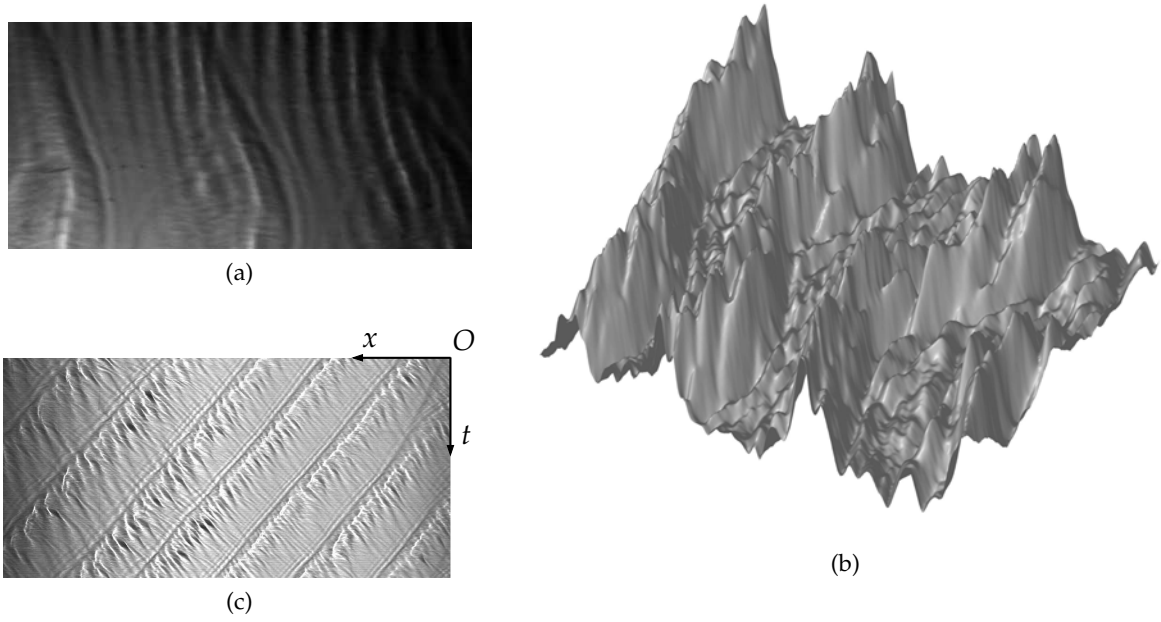


(h) *Ripples 3D (2)*

FIGURE 4.19 – *Visualisations par ombroscopie obtenues pour des vitesses de contre-écoulement d'air croissantes (U_G varie entre 0 m/s et 10 m/s). Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 5°$, $R_L = 54$, $f = 2.8$ Hz, canal $e = 18$ mm. Le liquide s'écoule de la gauche vers la droite (l'écoulement de gaz est orienté en sens inverse). La taille réelle des images est : 29 cm $\times$ 22 cm. Pour $U_G = 10$ m/s : $Fr_{G,L} = 238$, $We_{G,L} = 12$.*

ou carte Schlieren de la figure 4.20b). Le diagramme spatio-temporel de la figure 4.20c montre bien, par ailleurs, que ces vagues se propagent vers le haut du plan : leur pente est négative contrairement aux ondes principales.

Nous avons fait varier l'angle d'inclinaison du plan ($\beta = 15^\circ, 5^\circ, 2.8^\circ$) et constaté des effets importants sur cette instabilité. Pour $\beta \sim 15^\circ$, les « ripples » n'apparaissent pas : la dynamique du film domine, la puissance du ventilateur ne permettant pas de dépasser 9.5 m/s. Pour $\beta = 2.8^\circ$, l'instabilité de Kapitza est fortement atténuée ce qui permet d'observer ces ondes à contre-courant seules. Le seuil d'instabilité est d'environ 5 m/s. Il semble donc que la présence initiale des ondes solitaires à la surface retarde le développement de cette instabilité. Grâce aux visualisations par ombroscopie, nous avons pu estimer les caractéristiques des « ripples » dans ce cas ($\beta = 2.8^\circ$). La longueur d'onde au seuil d'instabilité vaut : $\lambda_r \sim 1.5$ cm. La vitesse de propagation est : $v_r \sim 8$ cm/s. La fréquence des ondes est donc : $f_r = v_r/\lambda_r \sim 5$ Hz. Nous avons également cherché à détecter les « ripples » avec la méthode de mesure CCI. L'amplitude A_r mesurée au seuil d'instabilité est d'environ $100\,\mu m$. Cette dernière croît de manière importante lorsque U_G augmente : $A_r \sim 200\,\mu m$ pour $U_G = 5.2$ m/s, $A_r \sim 700\,\mu m$ pour $U_G = 5.3$ m/s.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.20 – *Différentes visualisations des « ripples » à contre-courant. (a) : Visualisation par ombroscopie (zoom de la figure 4.19e) : $\beta = 5.3^\circ$, $R_L = 54$, $f = 2.8$ Hz, $U_G \sim 7.5$ m/s, taille réelle $= 9 \times 19$ cm. (b) : Carte d'épaisseur obtenue avec la méthode Schlieren : $\beta = 5^\circ$, $R_L = 45$, $f = 2.8$ Hz, $U_G = 9.4$ m/s, taille réelle = 17.0 × 19.3 cm. (c) Diagramme spatio-temporel : $\beta = 5^\circ$, $R_L = 87$, $f = 2.4$ Hz, $U_G = 7.5$ m/s, temps d'aquisition = 1 s (hauteur de l'image), longueur le long du plan = 39.6 cm (largeur de l'image).*

Il est intéressant enfin d'analyser les profils mesurés avec la méthode CCI et les signaux FFT correspondants (figure 4.21). Pour ces valeurs de $\beta = 2.8^\circ$ et $R_L = 19$, le film liquide est quasiment stable sans contre-écoulement vis-à-vis de l'instabilité de Kapitza (figure 4.21a). Le seuil de cette dernière est : $R_c^{2D} = 17$. Pour $U_G = 5$ m/s, un premier pic apparaît dans le spectre : il ne s'agit pas des vagues à contre-courant mais d'ondes

solitaires naturelles (invisibles à l'oeil nu mais détectables sur le signal CCI) qui sont amplifiées par l'écoulement de gaz. Enfin, pour $U_G = 5.3$ m/s, deux nouveaux pics apparaissent. La large bosse centrée sur une fréquence d'environ 5 Hz traduit la présence des « ripples ». Le pic intermédiaire (au double de la fréquence du pic de plus grande amplitude) est le premier harmonique associé aux ondes naturelles.

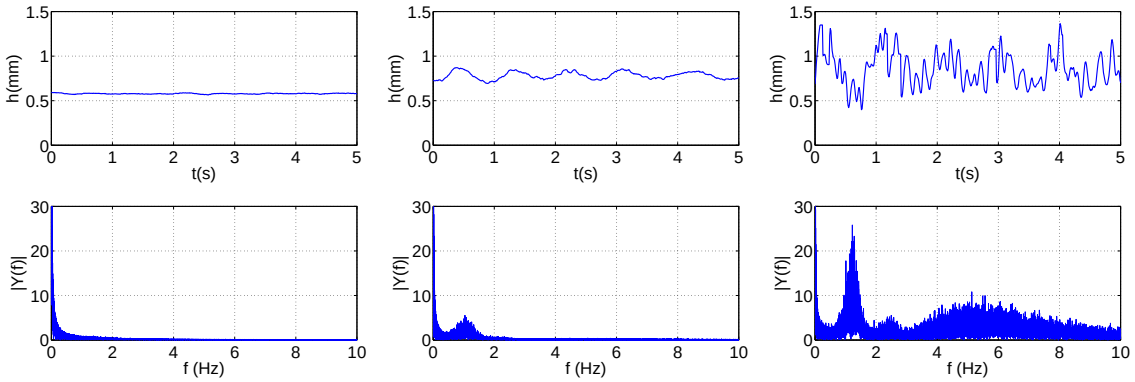


FIGURE 4.21 – *Profils temporels mesurés avec la méthode CCI et modules des spectres FFT correspondants ($|Y|$ est en unités arbitraires). (a) : $U_G = 2.8$ m/s. (b) : $U_G = 5$ m/s. (c) : $U_G = 5.3$ m/s. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 2.8\,^\circ$, $R_L = 19$. La fréquence d'aquisition est $f_a = 100$ Hz. Le nombre de points utilisé est : $N_a = 100000$.*

Enfin, nous terminons la caractérisation de ces ondes à contre-courant en comparant nos résultats avec l'étude d'Ozgen et al. (2002). Ces derniers étudient l'apparition des ondes à la surface d'une couche mince ($e = $ 0.7-2.3 mm) horizontale de liquide cisaillée par un écoulement de gaz turbulent. Du point de vue expérimental, ils utilisent la technique d'absorption d'un faisceau lumineux pour la mesure d'épaisseur. Numériquement, ils partent des équations d'Orr-Sommerfeld dans chacune des deux couches et résolvent le problème complet par une méthode *ad hoc*. Les fluides utilisés ont des densités proches de celle de l'eau ($\rho = $ 1015-1045 kg/m^3), des tensions de surface faibles ($\sigma = $ 29-40 mN/m) et des viscosités élevées ($\mu = $ 6-37 mPa.s). Le seuil d'apparition des vagues varie entre 7 et 11 m/s et augmente lorsque l'épaisseur de la couche liquide diminue ou la viscosité augmente. Les longueurs d'onde mesurées expérimentalement ($\lambda = $ 1.7-3.0 cm) sont en bon accord avec les résultats numériques. Il en est de même pour les vitesses de propagation qui chutent drastiquement lorsque l'épaisseur de la couche liquide e est suffisamment faible : $v = $ 8.1-15.7 cm/s pour $e > 1$ mm, $v = $ 0.9-3.1 cm/s pour $e < 1$ mm. L'extrapolation de ces tendances à des valeurs plus faibles de viscosités sont compatibles avec nos résultats. Leurs visualisations des ondes sont également très ressemblantes (figure 4.4).

4.5.2 Slugs

Nous avons observé une deuxième famille d'ondes à contre-courant dont les caractéristiques sont assez différentes des précédentes. Ces « slugs » apparaissent à haut nombre de Reynolds liquide ($R_L > 100$) et semblent résulter d'un couplage entre les ondes solitaires et les « ripples ». Ils se forment brutalement, de manière intermittente et généralement au niveau de l'entrée de gaz (mais pas toujours). Leur amplitude est très grande mais difficilement mesurable. Leur vitesse de propagation est de l'ordre de 35 cm/s. Deux scénarios d'évolution distincts ont été mis en évidence. Dans certains cas, les « slugs » occupent la largeur du canal et peuvent parcourir de longues distances vers l'amont puis disparaître spontanément ou atteindre la sortie de gaz. C'est le cas par exemple sur le diagramme spatio-temporel de la figure 4.22a. Les trois types d'ondes rencontrés dans le cadre de cette étude apparaissent d'ailleurs sur celui-ci : ondes solitaires, rides à contre-courant et « slug ». Nous constatons également que ce dernier modifie les caractéristiques des deux autres : la vitesse des ondes solitaires et des rides à contre-courant, en particulier, n'est pas la même avant et après le passage du « slug ». Dans d'autres cas, le « slug » peut être rapidement atomisé en gouttelettes comme le montre la séquence d'image des figures 4.22b, 4.22c, 4.22d. Les gouttes ainsi formées impactent la surface du film liquide plus en amont. Cette catégorie d'ondes à contre-courant assez spéciale a été observée par Roy et Jain (1989) puis par Drosos et al. (2006). Dans un cas plus confiné ($e = 10$ mm) et pour un mélange eau-butanol à 2 % en masse ($\sigma = 40$ mN/m), ces derniers donnent un seuil d'apparition des « slugs » autour de $R_L = 250$ pour $U_G = 7.5$ m/s.

4.5.3 Effet de bord : évacuation du liquide

Comme discuté précédemment, les effets de bord jouent en général un rôle crucial dans les expériences d'étude de l'engorgement. Dans notre dispositif, nous sommes parvenus à contrôler l'entrée et la sortie de l'écoulement de gaz afin d'étudier l'engorgement à coeur. Nous contrôlons également la dynamique du liquide grâce au dispositif de forçage des ondes. En revanche, il est apparu un problème d'évacuation du liquide dans certains cas. En effet, l'épaisseur moyenne de liquide augmente avec le nombre de Reynolds R_L et la vitesse du contre-écoulement U_G. La hauteur du canal d'évacuation pour le liquide (en aval de la zone d'étude) étant de 2 à 3 mm, celui-ci peut s'engorger ce qui engendre des perturbations en amont. Il peut s'agir par exemple de gouttes arrachées au niveau de la sortie du liquide qui impactent la surface du film liquide dans la zone d'étude. Ces perturbations peuvent également prendre la forme d'ondes qui remontent l'écoulement. La figure 4.23 représente deux diagrammes spatio-temporels illustrant ces derniers points. Dans un cas (figure 4.23a), des perturbations localisées se propagent vers l'amont et sont amplifiées. Dans l'autre cas (figure 4.23b), une série de vagues stationnaires dans le réferentiel du laboratoire apparaît en sortie du liquide. Ce phénomène d'effet de bord constitue pour l'instant la limite pratique de notre dispositif : pour des valeurs encore plus élevées de R_L et U_G, le liquide ne s'écoule plus au sein de la zone d'évacuation.

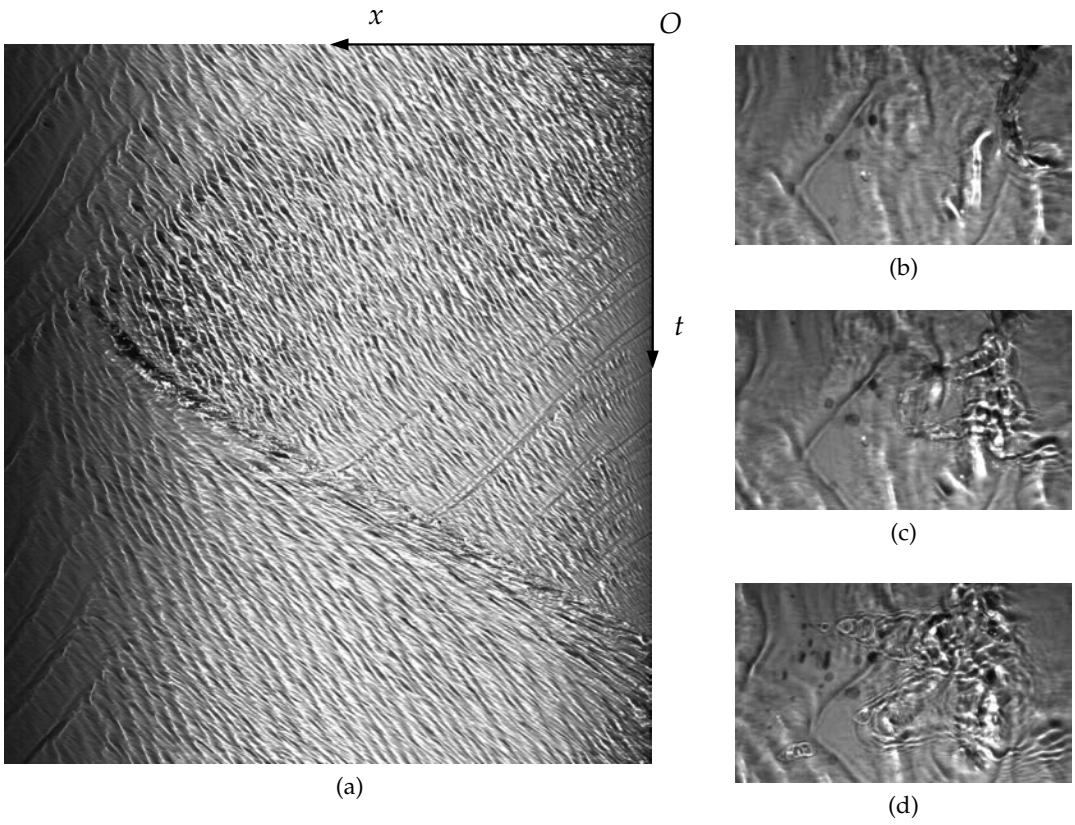


FIGURE 4.22 – *Illustration de la formation des « slugs » et des deux scénarios d'évolution : propagation sur une longue distance amont (figure 4.22a) ou atomisation immédiate (figures 4.22b, 4.22c, 4.22d). (a) : Diagramme spatio-temporel : $\beta = 5°$, $R_L = 139$, $f = 2.4$ Hz, $U_G = 7.4$ m/s, temps d'aquisition = 3 s (hauteur de l'image), largeur réelle de l'image = 53 cm. Le nombre de Froude gaz-liquide est : $Fr_{G,L} = 95$. (b) : $t = t_0$. (c) : $t = t_0 + 20$ ms. (d) : $t = t_0 + 40$ ms. Les paramètres expérimentaux sont : $\beta = 9°$, $R_L = 124$, $U_G = 8$ m/s, taille réelle $= 8.4 \times 14.1$ cm. Le nombre de Weber gaz-liquide vaut ici : $We_{G,L} = 9.3$*

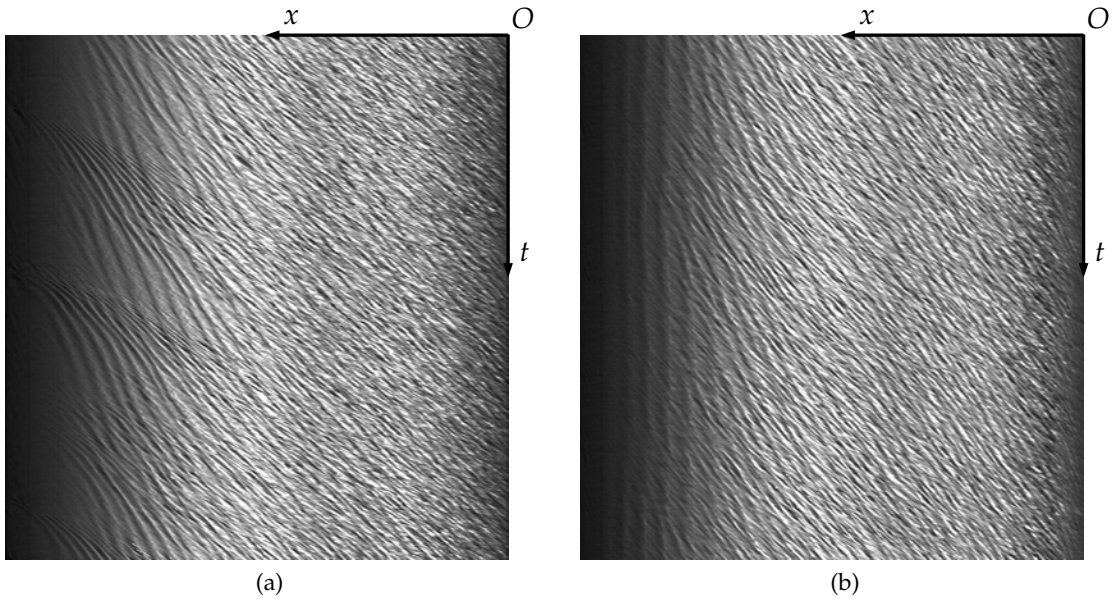


FIGURE 4.23 – *Effets de bord dus aux problèmes d'évacuation du liquide : diagrammes spatio-temporels. (a) : Création de perturbations qui remontent l'écoulement ($R_L = 60$, $U_G = 7.2$ m/s). (b) : Formation d'ondes stationnaires en sortie du liquide ($R_L = 164$, $U_G = 6.8$ m/s). Les autres paramètres expérimentaux sont : $\beta = 2.8°$, temps d'aquisition = 3 s (hauteur de l'image), largeur réelle de l'image = 59 cm.*

4.6 Conclusion - Perspectives

Pour résumer, nous avons présenté un dispositif expérimental en géométrie plane inclinée pour l'étude de films liquides cisaillés par un contre-écoulement d'air turbulent. Le contrôle des conditions d'entrée et de sortie du gaz nous a permis d'éviter l'engorgement précoce du dispositif : nous avons pu ainsi étudier les mécanismes d'engorgement à coeur.

Dans un premier temps, nous avons étudié l'influence d'un contre-écoulement d'air modéré ($U_G < 7$ m/s) sur les ondes. Pour $\beta \sim 5^\circ$ et $R_L < 50$, la dynamique du film reste 2D. Deux régimes se succèdent lorsque U_G augmente. Tout d'abord, l'amplitude des ondes augmente tandis que leur vitesse diminue légèrement (0 m/s $< U_G <$ 3 m/s). Dans un second régime (3 m/s $< U_G <$ 7 m/s), la vitesse des ondes chute. La crête principale continue d'être amplifiée et devient plus symétrique ; les ondes capillaires sont par ailleurs fortement atténuées. Ces comportements sont bien en accord avec les travaux numériques existants et semblent dépendre principalement du nombre de Froude gaz-liquide.

Pour aller plus loin dans notre compréhension des phénomènes, il serait intéressant d'effectuer des mesures de champs de vitesse dans le gaz au voisinage de l'interface. En particulier, il faudrait déterminer si la symétrisation de la crête principale s'accompagne de l'apparition d'un tourbillon dans le gaz à l'arrière de l'onde.

Nous avons montré également que le forçage temporel du liquide en entrée permettait de contrôler l'épaisseur maximum du film pour une fréquence bien choisie. Ce système pourrait permettre de repousser l'engorgement dans les colonnes de distillation mais doit faire l'objet d'une reflexion technique approfondie.

Pour $\beta > 5^\circ$, l'évolution 3D des ondes à travers le mode inertiel est très rapide : l'accélération relative de la surface libre devient en effet destabilisante sous l'effet du contre-écoulement. Le mode 3D capillaire est, quant à lui, fortement stabilisé dû à l'atténuation des ondes capillaires.

Dans toutes les études expérimentales, le rebroussement des ondes est observé dû principalement aux effets de bord. Dans nos expériences, ceux-ci sont limités (sauf cas extrêmes) et nous n'avons pas pu observer l'arrêt puis le rebroussement des ondes solitaires à coeur car un autre scénario est observé : l'apparition de vagues à contre-courant (« ripples »). Celles-ci résultent d'une instabilité à l'interface gaz-liquide (probablement de type *Yih* : contraste de viscosité) et apparaissent plus précocement lorsque les ondes solitaires sont absentes. Reproduire numériquement ce phénomène pourrait permettre de prédire le seuil d'instabilité, les variations en fonction des paramètres et les mécanismes physiques mis en jeu. A court terme, l'utilisation de mélanges eau-glycérine apparaît être le moyen le plus simple de repousser le seuil d'instabilité (en augmentant la viscosité et l'épaisseur moyenne du film liquide).

Pour des valeurs plus élevées de R_L, nous avons mis en évidence une deuxième famille de vagues à contre-courant : les « slugs ». Ceux-ci semblent résulter d'un couplage entre

les ondes solitaires et les rides précédemment évoqués. Ces vagues extrêmes conduisent parfois à la formation de gouttelettes. Ce phénomène d'arrachement reste cependant limité en raison de la valeur élevée de la tension de surface de l'eau. L'utilisation de mélanges eau-butanol serait plus appropriée pour étudier l'atomisation en détail.

A long terme enfin, il faudra étudier l'effet du gradient de pression sur les caractéristiques des ondes à travers le confinement du canal.

Conclusion

L'objectif de cette thèse, dans le cadre d'un contrat CIFRE entre le laboratoire FAST et la société *Air Liquide*, était double : mieux comprendre, d'une part, la structure 2D et 3D des films tombants sur un plan incliné dans l'objectif d'une optimisation des transferts de chaleur et de masse et étudier, d'autre part, les mécanismes physiques à l'origine du phénomène d'engorgement dans les colonnes de distillation. L'étude comprend en majorité des aspects fondamentaux à travers la réalisation d'expériences en géométrie simplifiée et l'utilisation d'outils numériques (laboratoire FAST). Nous avons également conçu un banc d'essai en conditions cryogéniques qui permet de s'approcher au plus près de la situation industrielle (Centre R&D Paris-Saclay) : cette partie est confidentielle.

Au laboratoire FAST, nous avons imaginé et conçu un montage expérimental à inclinaison variable (cas faiblement incliné). Un forçage temporel en entrée permet de contrôler le développement des instabilités. La méthode d'ombroscopie est utilisée pour visualiser les ondes et mesurer leur vitesse de phase. Nous avons mis en place et validé une technique Schlieren de mesure spatio-temporelle d'épaisseur (Moisy et al. (2009)), inédite dans le cadre des films tombants. Un dispositif CCI (Confocal Chromatic Imaging) d'acquisition temporelle d'épaisseur en un point est utilisé en complément. Nous avons également employé des outils numériques. Les modèles d'équations Ruyer-Quil-Manneville à petit nombre de degré de liberté (Kalliadasis et al. (2012)) permettent des calculs à moindre coût : solution stationnaire 2D par continuation, simulation spatio-temporelle 2D, analyse de stabilité linéaire 3D.

Concernant la dynamique des ondes 2D, nous avons obtenu une corrélation empirique pour la vitesse de phase en fonction des paramètres du problème dans le cas faiblement incliné. Nous avons montré l'intérêt d'un adimensionnement lié au substrat pour des ondes bien séparées. Dans le cas vertical, nous avons étudié numériquement l'évolution naturelle des ondes suffisamment loin de l'entrée. Pour un nombre de Reynolds réduit $\delta < 1.5$, des états liés apparaissent ce qui correspond à une synchronisation par le biais des ondes capillaires (Chang et al. (1993)). Pour $\delta > 1.5$, le système évolue vers les ondes optimales longues associées à un minimum de l'épaisseur moyenne du film (Trifonov (2014)). Celles-ci résultent d'un bilan global entre la gravité et le frottement à la paroi. Plusieurs points restent à éclaircir : l'origine du minimum d'épaisseur moyenne associé aux ondes optimales longues ou encore l'analogie avec le problème des « roll-waves ». Il serait intéressant aussi d'étudier si ces ondes sont aussi optimales du point de vue des transferts de chaleur et de masse.

Concernant les ondes 3D, nous avons mis en évidence deux modes principaux d'instabilité des ondes solitaires 2D. Le premier a une longueur d'onde courte et déforme uniquement la région capillaire (mode type Rayleigh-Plateau). Le second, d'origine inertielle et grande longueur d'onde, affecte l'onde entière (mode type Rayleigh-Taylor). Ce dernier évolue vers des solitons 3D en forme de Λ (Demekhin et al. (2007)). Le mode capillaire apparaît en premier pour un angle d'inclinaison $\beta < 12^\circ$; la situation s'inverse pour $\beta > 12^\circ$. Ces résultats ont des conséquences importantes vis-à-vis des transferts. Le mode inertiel, en effet, dissipe les mouvements de recirculation du liquide ce qui dégrade les transferts par convection. L'origine d'un troisième mode d'instabilité 3D des ondes solitaires reste incomprise tout comme l'évolution non linéaire vers les ondes en Λ.

L'objectif était ensuite de mieux comprendre l'origine physique du phénomène d'engorgement à coeur dans les colonnes de distillation à travers la réalisation d'expériences en géométrie simplifiée. Nous avons modifié le dispositif expérimental d'étude des films tombants en rajoutant un canal pour le contre-écoulement d'air, faiblement confiné. Pour des vitesses de gaz modérées, nous avons observé une augmentation de l'amplitude des ondes 2D, une diminution de la vitesse de phase corrélée au nombre de Froude gaz-liquide et du nombre d'ondes capillaires. Ces résultats sont cohérents avec plusieurs études numériques récentes sur le sujet (Dietze et Ruyer-Quil (2013), Trifonov (2010a), Tseluiko et Kalliadasis (2011)). Le contre-écoulement a également un effet sur les instabilités secondaires 2D et 3D de ces ondes (le mode capillaire est atténué, le mode inertiel favorisé). L'engorgement se caractérise par l'apparition d'ondes à contre-courant qui croissent de manière rapide et détruisent le train d'ondes solitaires initial. Les « ripples » constituent une manifestation du problème classique de la génération des vagues par le vent. Les « slugs » sont des vagues d'amplitude extrême qui apparaissent de manière intermittente et provoquent l'arrachement de gouttes. L'orgine de ces « slugs » reste inconnue mais pourrait être due au développement d'une instabilité sous-critique. De nombreuses perspectives d'étude à ce travail peuvent être envisagées : l'influence de la tension de surface, de la viscosité et du confinement du canal sur la dynamique des ondes, la mesure du champs de vitesse dans le gaz et le liquide dans le but de déterminer la contrainte de cisaillement à l'interface, la prise en compte du transfert de chaleur en chauffant le gaz ...

Enfin, nous avons mis en place au Centre R&D Paris-Saclay d'*Air Liquide* un dispositif d'étude de l'engorgement en conditions cryogéniques (chapitre confidentiel).

Bibliographie

P. Adomeit et U. Renz. Hydrodynamics of three-dimensional waves in laminar falling films. *International Journal of Multiphase Flow*, 26 :1183–1208, 2000. (Cité page 14.)

S. Aferka, P. Marchot, M. Crine, et D. Toye. Interfacial area measurement in a catalytic distillation packing using high energy x-ray CT. *Chemical Engineering Science*, 65(1) : 511–516, 2010. (Cité page 116.)

S.V. Alekseenko, S.P. Aktershev, A.V. Cherdantsev, S.M. Kharlamov, et D.M. Markovich. Primary instabilities of liquid film flow sheared by turbulent gas stream. *International Journal of Multiphase Flow*, 35(7) :617–627, 2009. (Cité pages 120 et 135.)

S.V. Alekseenko, V.A. Antipin, V.V. Guzanov, S.M. Kharlamov, et D.M. Markovich. Three-dimensional solitary waves on falling liquid film at low Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 17 :121704, 2005. (Cité page 14.)

V.P. Alekseev, A.E. Poberezkin, et P.V. Gerasimov. Determination of flooding rages in regular packings. *Heat Trans. - Soviet Res.*, 4 :159–163, 1972. (Cité page 117.)

M. Amaouche, N. Mehidi, et N. Amatousse. Linear stability of a two-layer film flow down an inclined channel : A second-order weighted residual approach. *Physics of Fluids*, 19 (8) :084106, 2007. (Cité page 121.)

B.E. Anshus. On the asymptotic solution to the falling film stability problem. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 11(4) :502–508, 1972. (Cité page 45.)

N.J. Balmforth et S. Mandre. Dynamics of roll waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 514 :1–33, 2004. (Cité page 54.)

J.R. Barbosa Jr., A.H. Govan, et G.F. Hewitt. Visualisation and modelling studies of churn flow in a vertical pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 27 :2105–2127, 2001. (Cité page 119.)

D.J. Benney. Long waves on liquid films. *J. Math. Phys.*, 45 :150–155, 1966. (Cité page 35.)

R.B. Bird, W.E. Stewart, et E.N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, New-York, 1960. (Cité pages 55, 56 et 60.)

V. Bontozoglou. A numerical study of interfacial transport to a gas-sheared wavy liquid. *International Journal of Multiphase Flow*, 41(15) :2297–2305, 1998. (Cité page 115.)

V. Bontozoglou et G. Papapolymerou. Wall-triggered interfacial resonance in laminar gas-liquid flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 24(1) :131–143, 1998. (Cité page 116.)

P.A.M. Boomkamp et R.H.M. Miesen. Classification of instabilities in parallel two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 22 :67–88, 1996. (Cité page 120.)

S. Boulesteix. Cisaillement d'une interface gaz-liquide en conduite et entraînement de gouttelettes, 2010. (Cité page 119.)

J.R.F.G. Carvalho et J.M.C.P. Costa. Effect of gas density on countercurrent flow limitation in wetted wall column. *AIChE Journal*, 52(10) :3375–3382, 2006. (Cité page 117.)

S. Chakraborty, P.K. Nguyen, C. Ruyer-Quil, et V. Bontozoglou. Extreme solitary waves on falling liquid films. *Journal of Fluid Mechanics*, 745 :564–591, 2014. (Cité pages 47, 48 et 50.)

H.-C. Chang, E.A. Demekhin, et E. Kalaidin. Interaction dynamics of solitary waves on a falling film. *Journal of Fluid Mechanics*, 294 :123–154, 1995. (Cité page 53.)

H.-C. Chang, E.A. Demekhin, et E. Kalaidin. Simulation of noise-driven wave dynamics on a falling film. *AIChE Journal*, 42(6) :1553–1568, 1996. (Cité page 54.)

H.-C. Chang, E.A. Demekhin, et E. Kalaidin. Coherent structures, self-similarity, and universal roll wave coarsening dynamics. *Physics of Fluids*, 12(9) :2268, 2000. (Cité page 54.)

H.-C. Chang, E.A. Demekhin, et D.I. Kopelevich. Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film. *Journal of Fluid Mechanics*, 250 :433–480, 1993. (Cité pages 43, 53, 55, 56, 60, 61, 65 et 147.)

H.-C. Chang, E.A. Demekhin, et S.S. Saprikin. Noise-driven wave transitions on a vertically falling film. *Journal of Fluid Mechanics*, 462 :255–283, 2002. (Cité page 54.)

D. Chasseur. Ecoulements de films liquides sur un plan incliné : analyse des phénomènes et optimisation d'un outil de calcul. Master's thesis, CNAM (Paris), 2011. (Cité pages 46, 50, 65 et 112.)

M. Cheng et H.-C. Chang. Competition between subharmonic and sideband secondary instabilities on a falling film. *Physics of Fluids*, 7(1) :34–54, 1995. (Cité page 43.)

K.J. Chu et A.E. Dukler. Statistical characteristics of thin, wavy films. part ii. studies of the substrate and its wave structure. *AIChE Journal*, 20(4) :695–706, 1974. (Cité pages 14 et 46.)

S.J.D. D'Alessio, J.P. Pascal, et H.A. Jasmine. Instability in gravity-driven flow over uneven surfaces. *Physics of Fluids*, 21(6) :062105, 2009. (Cité page 116.)

Deendarlianto, A. Ousaka, Indarto, A. Kariyasaki, D. Lucas, K. Vierow, C. Vallee, et K. Hogan. The effects of surface tension on flooding in counter-current two-phase flow in an inclined tube. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 34(7) :813–826, 2010. (Cité page 117.)

E.A. Demekhin, E. Kalaidin, S. Kalliadasis, et S.Y. Vlaskin. Three-dimensional localized coherent structures of surface turbulence. II. Λ solitons. *Physics of Fluids*, 19(11) :114104, 2007. (Cité pages 107 et 148.)

G.F. Dietze. Flow separation in falling liquid films, 2010. (Cité page 14.)

G.F. Dietze, F. Al-Sibai, et R. Kneer. Experimental study of flow separation in laminar falling liquid films. *Journal of Fluid Mechanics*, 637 :73–104, 2009. (Cité pages 3 et 43.)

G.F. Dietze, A. Leefken, et R. Kneer. Investigation of the backflow phenomenon in falling liquid films. *Journal of Fluid Mechanics*, 595 :435–459, 2008. (Cité pages 3 et 43.)

G.F. Dietze, W. Rohlfs, K. Nährich, R. Kneer, et B. Scheid. Three-dimensional flow structures in laminar falling liquid films. *Journal of Fluid Mechanics*, 743 :75–123, 2014. (Cité page 112.)

G.F. Dietze et C. Ruyer-Quil. Wavy liquid film in interaction with a confined laminar gas flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 722 :348–393, 2013. (Cité pages 3, 121, 126, 127, 133 et 148.)

P.G. Drazin et W.H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981. (Cité page 120.)

E.I.P. Drosos, S.V. Paras, et A.J. Karabelas. Counter-current gas–liquid flow in a vertical narrow channel - Liquid film characteristics and flooding phenomena. *International Journal of Multiphase Flow*, 32(1) :51–81, 2006. (Cité pages 3, 118 et 143.)

C. Elphick, G.R. Ierley, O. Regev, et E.A. Spiegel. Interacting localized structures with galilean invariance. *Physical Review A*, 44(2) :1110, 1991. (Cité page 53.)

E. Falcon, C. Laroche, et S. Fauve. Observation of sommerfeld precursors on a fluid surface. *Physical Review Letters*, 91(6) :064502, 2003. (Cité page 41.)

K. Fleming et S. Blaine. Surface tension of solutions. Rapport technique, Elmhurst College, 1997. (Cité page 27.)

J.M. Floryan. On the Goërtler instability of boundary layers. *Prog. Aerospace Sci.*, 28 : 235–271, 1991. (Cité page 107.)

M. Fourati, V. Roig, et L. Raynal. Experimental study of liquid spreading in structured packings. *Chemical Engineering Science*, 80 :1–15, 2012. (Cité page 116.)

D.P. Frisk et E.J. Davis. The enhancement of heat transfer by waves in stratified gas-liquid flow. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 15 :1537–1552, 1972. (Cité page 2.)

A. Georgantaki, J. Vatteville, M. Vlachogiannis, et V. Bontozoglou. Measurements of liquid film flow as a function of fluid properties and channel width : Evidence for surface-tension-induced long-range transverse coherence. *Physical Review E*, 84(2), 2011. (Cité page 47.)

Glycerine Producers' Association. *Physical properties of glycerine and its solutions*. New-York, 1963. (Cité page 27.)

J.R.F. Guedes de Carvalho et M.A.R. Talaia. Interfacial shear stress as a criterion for flooding in counter current film flow along vertical surfaces. *Chemical Engineering Science*, 53 (11) :2041–2051, 1998. (Cité page 130.)

C. Heining, T. Pollak, et N. Aksel. Pattern formation and mixing in three-dimensional film flow. *Physics of Fluids*, 24(4) :042102, 2012. (Cité page 116.)

A.P. Hooper et W.G.C. Boyd. Shear flow instability at the interface between two viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 128 :507–528, 1983. (Cité page 120.)

M.A. Islam et A. Miyara. Numerical investigation of viscous dissipation in wavy falling liquid film. Dans *Proceedings of the 13th Asian Congress of Fluid Mechanics*, 17-21 December 2010. (Cité page 53.)

M.A. Islam, A. Miyara, T. Nosoko, et T. Setoguchi. Numerical investigation of kinetic energy and surface energy of wavy falling liquid film. *Journal of Thermal Science*, 16(3) : 237–242, 2007. (Cité page 53.)

S. Jayanti et G.F. Hewitt. Prediction of the slug-to-churn flow transition in vertical two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(6) :847–860, 1992. (Cité page 119.)

S. Jayanti, A. Tokarz, et G.F. Hewitt. Theoretical investigation of the diameter effect on flooding in countercurrent flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2) :307–324, 1996. (Cité page 118.)

J.H. Jeong et H.C. No. Classification of flooding data according to type of tube-end geometry. *Nuclear Engineering and Design*, 148 :109–117, 1994. (Cité page 117.)

S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, et M.G. Velarde. *Falling liquid films*. Springer, 2012. (Cité pages 31, 37, 42, 44, 46, 63, 64 et 147.)

T. Kamei et A. Serizawa. Measurement of 2-dimensional local instantaneous liquid film thickness around simulated nuclear fuel rod by ultrasonic transmission technique. *Nuclear Engineering and Design*, 184(2) :349–362, 1998. (Cité page 13.)

P.L. Kapitza. Wave flow of thin layers of a viscous fluid : I. Free flow. Dans *Collected papers of P.L. Kapitza (1965)*, pages 662–689. Pergamon (Oxford), 1948. (Cité pages 36, 53 et 55.)

T.D. Karapantsios, S.V. Paras, et A.J. Karabelas. Statistical characteristics of free falling films at high reynolds numbers. *International Journal of Multiphase Flow*, 15(1) :1–21, 1989. (Cité page 14.)

G. Karimi et M. Kawaji. Flow characteristics and circulatory motion in wavy falling films with and without counter-current gas flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 25 : 1305–1319, 1999. (Cité page 115.)

T. Kawahara et S. Toh. Pulse interactions in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system. *Physics of Fluids*, 31(8) :2103, 1988. (Cité page 53.)

I.L. Kliakhandler. Inverse cascade in film flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 423 :205–225, 2000. (Cité page 54.)

J.E. Koskie, I. Mudawar, et W.G. Tiederman. Parallel-wire probes for measurement of thick liquid films. *International Journal of Multiphase Flow*, 15(4) :521–530, 1989. (Cité page 13.)

T. Kunugi et C. Kino. DNS of falling film structure and heat transfer via MARS method. *Computers and Structures*, 83 :455–462, 2005. (Cité page 45.)

V. Leontidis, J. Vatteville, M. Vlachogiannis, N. Andritsos, et V. Bontozoglou. Nominally two-dimensional waves in inclined film flow in channels of finite width. *Physics of Fluids*, 22(11) :112106, 2010. (Cité pages 14, 24, 46 et 47.)

J. Liu et J.P. Gollub. Solitary wave dynamics of film flows. *Physics of Fluids*, 6(5) :1702, 1994. (Cité pages 24, 45 et 46.)

J. Liu, J.D. Paul, et J.P. Gollub. Measurements of the primary instabilities of film flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 250 :69–101, 1993. (Cité page 41.)

J. Liu, J.B. Schneider, et J.P. Gollub. Three-dimensional instabilities of film flows. *Physics of Fluids*, 7(1), 1995. (Cité page 109.)

N.A. Malamataris, M. Vlachogiannis, et V. Bontozoglou. Solitary waves on inclined films : Flow structure and binary interactions. *Physics of Fluids*, 14(3) :1082, 2002. (Cité page 53.)

D.M. Maron, N. Brauner, et G.F. Hewitt. Flow patterns in wavy thin films : numerical simulation. *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, 16 :655–666, 1989. (Cité page 3.)

K.W. McQuillan et P.B. Whalley. A comparison between flooding correlations and experimental flooding data for gas-liquid flow in vertical circular tubes. *Chemical Engineering Science*, 40(8) :1425–1440, 1985. (Cité page 117.)

K.W. McQuillan, P.B. Whalley, et G.F. Hewitt. Flooding in vertical two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 11(6) :741–760, 1985. (Cité page 119.)

C.E. Meza et V. Balakotaiah. Modeling and experimental studies of large amplitude waves on vertically falling films. *Chemical Engineering Science*, 63(19) :4704–4734, 2008. (Cité page 46.)

J.W. Miles. On the generation of surface waves by shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 3 :185–204, 1957. (Cité page 120.)

A. Miyara. Numerical analysis on flow dynamics and heat transfer of falling liquid films with interfacial waves. *Heat and Mass Transfer*, 35(4) :298–306, 1999. (Cité page 115.)

A. Miyara. Numerical simulation of wavy liquid film flowing down on a vertical walland an inclined wall. *Int. J. Therm. Sci.*, 39 :1015–1027, 2000. (Cité pages 43 et 45.)

F. Moisy, M. Rabaud, et K. Salsac. A Synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 46(6) :1021–1036, 2009. (Cité pages 15, 17, 20, 22 et 147.)

A.A. Mouza, S.V. Paras, et A.J. Karabelas. The influence of small tube diameter on falling film and flooding phenomena. *International Journal of Multiphase Flow*, 28(8) :1311–1331, 2002. (Cité page 4.)

A.A. Mouza, S.V. Paras, et A.J. Karabelas. Incipient flooding in inclined tubes of small diameter. *International Journal of Multiphase Flow*, 29(9) :1395–1412, 2003. (Cité pages 3 et 118.)

A.A. Mouza, N.A. Vlachos, S.V. Paras, et A.J. Karabelas. Measurement of liquid film thickness using a laser light absorption method. *Experiments in Fluids*, 28 :335–359, 2000. (Cité page 14.)

C. Nakaya. Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane. *Physics of Fluids*, 18(11) :1407, 1975. (Cité page 41.)

L. Naraigh, P.D.M. Spelt, et S.J. Shaw. Absolute linear instability in laminar and turbulent gas/liquid two-layer channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 714 :58–94, 2013. (Cité page 120.)

K. Njifenju. Gouttes et films liquides en aérodynamique automobile, 2010. (Cité pages 14 et 118.)

K. Njifenju, J. Bico, E. Andrès, P. Jenffer, et M. Fermigier. Experimental investigation of liquid films in gravity-driven flows with a simple visualization technique. *Experiments in Fluids*, 54(5) :1–9, 2013. (Cité pages 46, 48 et 65.)

T. Nosoko et A. Miyara. The evolution and subsequent dynamics of waves on a vertically falling liquid film. *Physics of Fluids*, 16(4) :1118, 2004. (Cité page 45.)

T. Nosoko, P.N. Yoshimura, T. Nagata, et K. Oyakawa. Characteristics of two-dimensional waves on a falling liquid film. *Chemical Engineering Science*, 51(5) :725–732, 1996. (Cité pages 13, 45, 48 et 65.)

W. Nusselt. Die oberflachenkondensation des wasserdampfes. *Z. VDI*, 50 :541–546, 1916. (Cité page 32.)

T. Ooshida. Surface equation of falling film flows with moderate reynolds number and large but finite weber number. *Physics of Fluids*, 11 :3247–3269, 1999. (Cité page 35.)

T. Otto, M. Rossi, et T. Boeck. Viscous instability of a sheared liquid-gas interface : Dependence on fluid properties and basic velocity profile. *Physics of Fluids*, 25(3) :032103, 2013. (Cité page 120.)

A. Ousaka, Deendarlianto, A. Kariyasaki, et T. Fukano. Prediction of flooding gas velocity in gas–liquid counter-current two-phase flow in inclined pipes. *Nuclear Engineering and Design*, 236(12) :1282–1292, 2006. (Cité page 118.)

S. Ozgen, M. Carbonaro, et G.S.R. Sarma. Experimental study of wave characteristics on a thin layer of de-anti-icing fluid. *Physics of Fluids*, 14(10) :3391, 2002. (Cité pages 120 et 142.)

S. Ozgen, G. Degrez, et G.S.R. Sarma. Two-fluid boundary layer stability. *Physics of Fluids*, 10(11) :2746, 1998. (Cité page 120.)

M.N. Pantzali, A.A. Mouza, et S.V. Paras. Counter-current gas–liquid flow and incipient flooding in inclined small diameter tubes. *Chemical Engineering Science*, 63(15) :3966–3978, 2008. (Cité pages 3 et 118.)

C.D. Park et T. Nosoko. Three-dimensional wave dynamics on a falling film and associated mass transfer. *AIChE Journal*, 49(11), 2003. (Cité pages 2 et 107.)

V.C. Patel et M.R. Head. Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 38(1) :181–201, 1969. (Cité page 124.)

S. Portalski et A.J. Clegg. Interfacial area increase in rippled film flow on wetted wall columns. *Chemical Engineering Science*, 26 :773–784, 1971. (Cité page 2.)

M. Pradas, S. Kalliadasis, P.-K. Nguyen, et V. Bontozoglou. Bound-state formation in interfacial turbulence : direct numerical simulations and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 716(R2), 2013. (Cité page 53.)

M. Pradas, D. Tseluiko, et S. Kalliadasis. Rigorous coherent-structure theory for falling liquid films : Viscous dispersion effects on bound-state formation and self-organization. *Physics of Fluids*, 23(4) :044104, 2011. (Cité pages 53, 54, 57 et 65.)

A. Pumir, P. Manneville, et Y. Pomeau. On solitary waves running down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 135 :27–50, 1983. (Cité page 35.)

M. Rabaud, F. Moisy, et J. Rolland. Mesure de la déformation d'une surface libre par analyse du déplacement apparent d'un motif aléatoire de points. *18ème Congrès Français de Mécanique*, 2007. (Cité page 21.)

B. Ramaswamy, S. Chippada, et S.W. Joo. A full-scale numerical study of interfacial instabilities in thin-film flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 325 :163–194, 1996. (Cité page 45.)

R.P. Roy et S. Jain. A study of thin water film flow down an inclined plate without and with countercurrent air flow. *Experiments in Fluids*, 7(5) :318–328, 1989. (Cité pages 14, 118, 130 et 143.)

C. Ruyer-Quil, N. Kofman, D. Chasseur, et S. Mergui. Dynamics of falling liquid films. *European Physical Journal E*, 37(4), 2014. (Cité page 31.)

T.R. Salamon, R.C. Armstrong, et R.A. Brown. Traveling waves on vertical films : Numerical analysis using the finite element method. *Physics of Fluids*, 6 :2202, 1994. (Cité pages 41 et 42.)

W.S. Saric. Goërtler vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26 :379–409, 1994. (Cité page 107.)

B. Scheid, C. Ruyer-Quil, et P. Manneville. Wave patterns in film flows : modelling and three-dimensional waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 562 :183–222, 2006. (Cité pages 42, 72 et 109.)

H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory, 7th edn.* McGraw-Hill, New-York, 1979. (Cité page 34.)

C.J. Shearer et J.F. Davidson. The investigation of a standing wave due to gas blowing upwards over a liquid film ; its relation to flooding in wetted-wall columns. *Journal of Fluid Mechanics*, 22(2) :321–335, 1965. (Cité pages 118, 119 et 127.)

V.Y. Shkadov. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, 1 :43–51, 1967. (Cité pages 32 et 36.)

V.Y. Shkadov et G.M. Sisoev. Waves induced by instability in falling films of finite thickness. *Fluid dynamics research*, 35 :357–389, 2004. (Cité page 44.)

G.M. Sisoev et V.Y. Shkadov. Development of dominating waves from small disturbances in falling viscous-liquid films. *Fluid dynamics*, 32(6) :784–792, 1997. (Cité page 44.)

N. Souidi et A. Bontemps. Countercurrent gas-liquid flow in plate-fin heat exchangers with plain and perforated fins. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 22 :450–459, 2001. (Cité page 116.)

C.B. Thorsness, P.E. Morisroe, et T.J. Hanratty. A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave. *Chemical Engineering Science*, 33 :579–592, 1978. (Cité page 121.)

J. Tihon, K. Serifi, K. Argyriadi, et V. Bontozoglou. Solitary waves on inclined films : their characteristics and the effects on wall shear stress. *Experiments in Fluids*, 41(1) :79–89, 2006. (Cité pages 14 et 46.)

N.Y. Tobilevich, I.I. Sagan, et Y.G. Porzhezihskii. The downward motion of a liquid film in vertical tubes in an air-vapour counterflow. *J. Engng Phys.*, 15 :855–861, 1968. (Cité page 117.)

Y.Y. Trifonov. Counter-current gas-liquid wavy film flow between the vertical plates analyzed using the Navier-Stokes equations. *AIChE Journal*, 56(8) :1975–1987, 2010a. (Cité pages 126, 127 et 148.)

Y.Y. Trifonov. Flooding in two-phase counter-current flows : Numerical investigation of the gas–liquid wavy interface using the navier–stokes equations. *International Journal of Multiphase Flow*, 36(7) :549–557, 2010b. (Cité page 121.)

Y.Y. Trifonov. Counter-current gas-liquid flow between vertical corrugated plates. *Chemical Engineering Science*, 66(20) :4851–4866, 2011. (Cité page 116.)

Y.Y. Trifonov. Stability and bifurcations of the wavy film flow down a vertical plate : the results of integral approaches and full-scale computations. *Fluid dynamics research*, 44 (3) :031418, 2012. (Cité pages 54, 55 et 65.)

Y.Y. Trifonov. Stability of the wavy film falling down a vertical plate : The DNS computations and floquet theory. *International Journal of Multiphase Flow*, 61 :73–82, 2014. (Cité pages 44, 55, 58, 65 et 147.)

D. Tseluiko et S. Kalliadasis. Nonlinear waves in counter-current gas–liquid film flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 673 :19–59, 2011. (Cité pages 121, 126, 127, 129 et 148.)

V.A. Tucker. Wave-making by whirligig beetles. *Science*, 166(3907) :897–899, 1969. (Cité page 109.)

P. Valluri, L. Naraigh, H. Ding, et P.D.M. Spelt. Linear and nonlinear spatio-temporal instability in laminar two-layer flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 656 :458–480, 2010. (Cité page 120.)

R. Vellingiri, D. Tseluiko, N. Savva, et S. Kalliadasis. Dynamics of a liquid film sheared by a co-flowing turbulent gas. *International Journal of Multiphase Flow*, 56 :93–104, 2013. (Cité pages 121 et 127.)

M. Vijayan, S. Jayanti, et A.R. Balakrishnan. Effect of tube diameter on flooding. *International Journal of Multiphase Flow*, 27(5) :797–816, 2001. (Cité page 118.)

Y. Vitry. Etude expérimentale des écoulements film mince sur plan incliné avec contre-courant gaz dans des conditions de similitude aux écoulements cryogéniques, 2011. (Cité page 118.)

M. Vlachogiannis et V. Bontozoglou. Observations of solitary wave dynamics of film flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 435 :191–215, 2001. (Cité page 53.)

N.A. Vlachos, S.V. Paras, A.A. Mouza, et A.J. Karabelas. Visual observations of flooding in narrow rectangular channels. *International Journal of Multiphase Flow*, 27(8) :1415–1430, 2001. (Cité page 119.)

G.B. Wallis. Flooding velocities for air and water in vertical tubes. *AEEW-R*, 123, 1961. (Cité page 117.)

G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, New-York, 1974. (Cité page 34.)

C.-S. Yih. Instability due to viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(2) :337–352, 1967. (Cité page 120.)

P.N. Yoshimura, T. Nosoko, et T. Nagata. Enhancement of mass transfer into a falling laminar liquid film by two-dimensional surface waves - some experimental observations and modeling. *Chemical Engineering Science*, 51(8) :1231–1240, 1996. (Cité page 3.)

D.V. Zaitsev, O.A. Kabov, et A.R. Evseev. Measurement of locally heated liquid film thickness by a double-fiber optical probe. *Experiments in Fluids*, 34(6) :748–754, 2003. (Cité page 14.)

A. Zapke et D.G. Kröger. The influence of fluid properties and inlet geometry on flooding in vertical and inclined tubes. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(3) :461–472, 1996. (Cité page 117.)

A. Zapke et D.G. Kröger. Countercurrent gas-liquid flow in inclined and vertical ducts. I : Flow patterns, pressure drop characteristics and flooding. *International Journal of Multiphase Flow*, 26(9) :1439–1455, 2000. (Cité pages 3 et 118.)

J. Zhang, M. J. Miksis, S.G. Bankoff, et G. Tryggvason. Nonlinear dynamics of an interface in an inclined channel. *Physics of Fluids*, 14(6) :1877, 2002. (Cité page 119.)

X.B. Zhang, L. Yao, J.Y. Chen, W. Zhang, W. Xiong, X.J. Zhang, et L.M. Qiu. Prediction of the onset of flooding in an inclined tube at cryogenic temperatures. *Cryogenics*, in press, 2013. (Cité page 118.)

Titre Films liquides tombants avec ou sans contre-écoulement de gaz : application au problème de l'engorgement dans les colonnes de distillation

Résumé Les films liquides tombants et cisaillés par un contre-écoulement de gaz jouent un rôle prépondérant dans de nombreux processus industriels. En effet, les ondes à l'interface gaz/liquide augmentent sensiblement les transferts de chaleur et de masse entre les deux phases. Nous avons cherché, dans un premier temps, à mieux comprendre la dynamique 2D et 3D d'un film liquide tombant sur un plan incliné grâce à des outils expérimentaux (visualisations par ombroscopie, mesures d'épaisseur) et numériques (modèles d'équations réduits, analyses de stabilité). Le point optimal de fonctionnement des procédés se situe proche de la limite d'engorgement caractérisée par un envahissement de l'espace disponible par la phase liquide. Notre objectif, dans un second temps, a été de mieux comprendre les mécanismes physiques à l'origine de l'engorgement grâce à la réalisation d'expériences en géométrie simplifiée (canal plan). Ces travaux s'inscrivent dans le cadre d'un contrat CIFRE entre le laboratoire FAST et la société *Air Liquide* afin d'appliquer les résultats au procédé de distillation de l'air. Deux dispositifs expérimentaux ont été mis en place : l'un à température ambiante (étude fondamentale), l'autre à température cryogénique (étude appliquée et confidentielle).

Mots-clés films liquides, contre-écoulement gazeux, instabilités, ondes, engorgement, distillation

Title Falling liquid films with or without a gazeous counter-flow : application to the problem of flooding in distillation columns

Abstract Falling liquid films with or without a gazeous counter-flow play a leading role in many industrial process. Indeed, the waves at the gas/liquid interface increase noticeably the heat and mass transfer between both phases. We have tried, as a first step, to better understand the 2D and 3D dynamics of a liquid film falling down an inclined plane using experimental (shadowgraphy visualisations, thickness measurements) and numerical (reduced equation models, stability analysis) tools. The optimal operating conditions are closed to the limit of flooding characterized by an invasion of the available space by the liquid phase. Our goal, as a second step, has been to better understand the physical mechanisms at the origin of flooding using simplified geometry experiments (plane channel). These works fall within a CIFRE contract between the FAST laboratory and the *Air Liquide* company in order to apply the results to the air distillation process. Two experimental set-ups have been built : one at room temperature (fundamental study), the other at cryogenic temperature (applied and confidential study).

Keywords liquid films, gazeous counter-flow, instabilities, waves, flooding, distillation